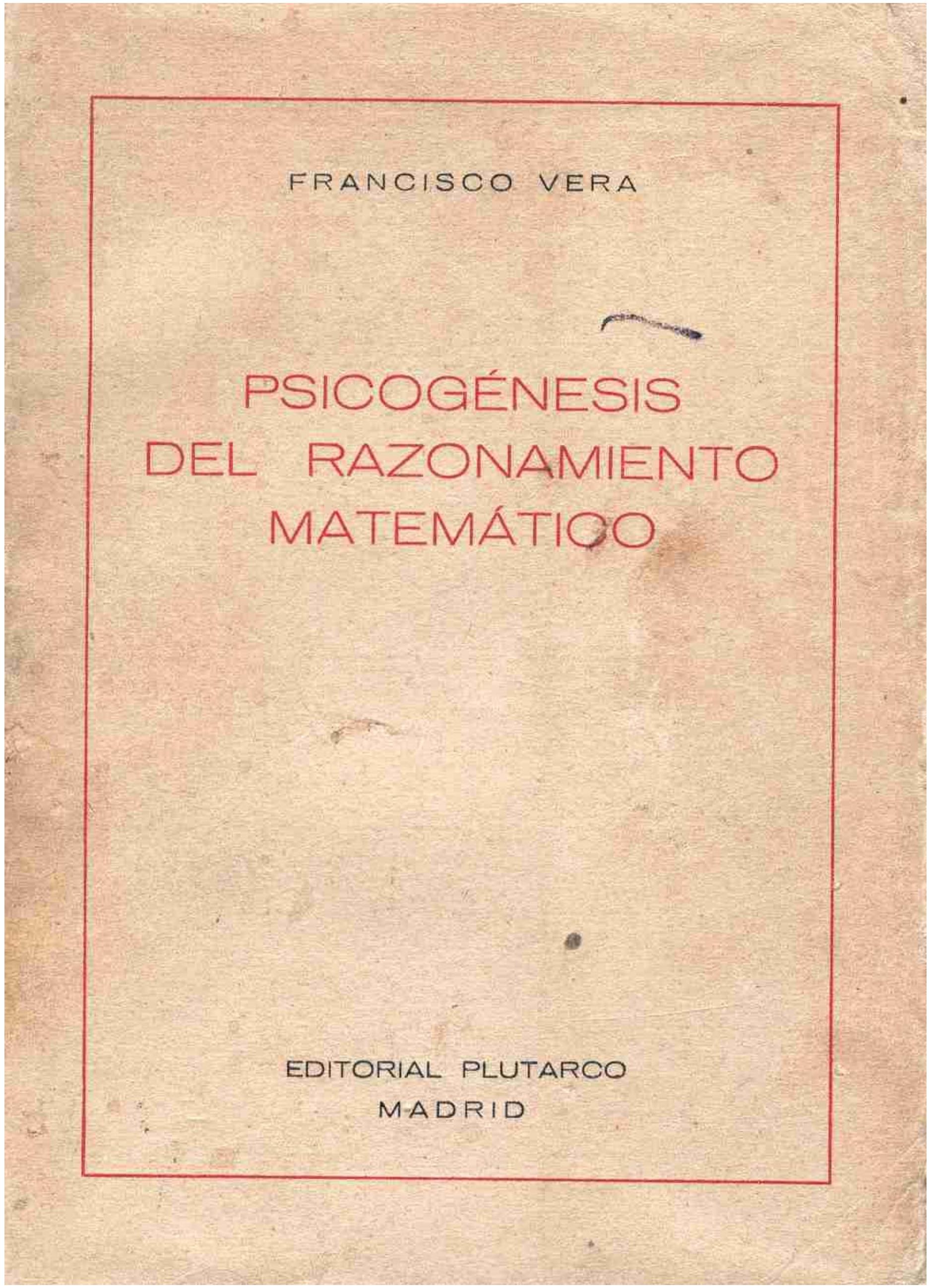

FRANCISCO VERA

PSICOGÉNESIS DEL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

EDITORIAL PLUTARCO
MADRID

Precio: 6 pesetas

Printed in Spain

FRANCISCO VERA

PSICOGÉNESIS DEL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

EDITORIAL PLUTARCO
MADRID

Psicogénesis
del
razonamiento matemático

OTRAS OBRAS DEL AUTOR

Teoría general de Ecuaciones, Madrid, Editorial Orrier, 1909.

Aritmética y Geometría prácticas, Madrid, Editorial Hernando, 1911

Introducción al estudio de la Geometría superior, (Notas y aclaraciones al «Tratado de Geometría» de Rouché y Comberousse), Madrid, Editorial Hernando, 1911.

Wágner (Su vida y sus obras), París, Editorial Hirpano-Americana, 1914.

Los Aguiluchos (Estudio biográfico de los hijos de Napoleón Bonaparte), París, Editorial Hispano-Americana, 1915.

La sucesión de Fibonacci, Madrid, Sociedad Matemática Española, 1920.

La Tabla pitagórica n-dimensional, Madrid, Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 1920.

Aritmética (Segunda edición), Madrid, Editorial Herando, 1922.

Oposiciones a Telégrafos. Tres tomos. Madrid, Editorial Rubiños, 1923.

I. Geografía.

II. Aritmética y Algebra.

III. Química.

Aritmética racional, Madrid, Editorial Páez, 1926.

Espacio, Hiperespacio y Tiempo, Madrid, Editorial Páez, 1928.

La Lógica en la Matemática, Madrid, Editorial Páez, 1929.

Evolución del concepto de número, Madrid, Editorial La Lectura, 1929.

Historia de la Matemática en España. Ocho tomos: publicados los cuatro primeros y en preparación los demás. Madrid, Editorial Victoriano Suárez, 1929-33.

I. Tiempos primitivos.

II. Los precursores del Renacimiento.

III. Árabes y judíos (Primera parte).

IV. Árabes y judíos (Segunda parte).

V. El Renacimiento.

VI. La decadencia.

VII. Epoca moderna.

VIII. Los contemporáneos.

El Tratado de Astrología del marqués de Villena, Madrid, Editorial Victoriano Suárez, 1930.

San Isidoro, matemático, Madrid, Editorial Victoriano Suárez, 1931.

El matemático madrileño Maslama Benamed. Madrid, Artes Gráficas Municipales, 1932.

La cultura española medieval. (Datos bio-bibliográficos para su estudio). Dos tomos: publicado el primero y en prensa el segundo. Madrid, Editorial Victoriano Suárez, 1933.

I. Letras A-G.

II. Letras M-Z.

La Ciencia a través de los siglos. Tres tomos: en prensa el primero y en preparación los otros dos. Barcelona, Editorial Iberia, 1933.

I. La Ciencia antigua.

II. Emancipación del pensamiento científico.

III. La Ciencia moderna.

OCIOS LITERARIOS

De mujer a mujer, Madrid, Editorial Pueyo, 1910.

Paradoja, Barcelona, Los Cuentistas, 1910.

Entre el amor y el misterio, París, Editorial Hispano-Americana, 1915.

Belleza maldita, Madrid, La Novela de Bolsillo, 1916.

Obsesión, Madrid, Editorial Pueyo, 1922.

El Inapresable, Madrid, Los Contemporáneos, 1923.

El hombre bicuadrado, Madrid, Editorial Paéz, 1926.

Lo que hizo Santiago Verdún después de muerto, Madrid, Editorial Caro Raggio, 1927.

El amor de cada uno, Madrid, Editorial Espasa-Calpe, 1928.

FRANCISCO VERA

PSICOGÉNESIS DEL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Madrid
EDITORIAL PLUTARCO
1934

I

El problema de la psicología matemática

Si la Ciencia es un saber y la Filosofía un pensar, la Filosofía científica, en general, y la Psicología matemática, en particular, es no un saber pensar, sino un saber y un pensar. Saber es una cosa relativamente sencilla: con tiempo y paciencia se puede llegar a ser erudito o sabio, es decir: a estar enterado de la opinión de los demás o a poseer conocimientos profundos de una disciplina. Pensar ya no es tan sencillo; pero tampoco es difícil si la razón elabora correctamente los conceptos, combina los conceptos en juicios y reúne los juicios en conclusiones. Operar así con los conceptos es pensar, facultad exclusivamente humana que ejercemos cuando queremos adquirir una verdad o adoptar una resolución. En el primer caso—investigación—el éxito está en razón directa del número de relaciones entre los elementos de nuestro pensamiento, y en el segundo—deliberación—el acto se adaptará al fin perseguido si hemos captado finamente el pro y el contra.

Pero obsérvese que, lo mismo en un caso que en otro, utilizamos nuestro saber anterior dirigido a colocar nuestro espiritu en una actitud susceptible de valorar la representación dada por la memoria—haciendo renacer un estado que ya atravesó nuestra conciencia—, o creada con materiales intelectuales preexistentes, enlazados por asociación de ideas.

Ya Platón había advertido que saber es recordar, y así en el *Menón* consigue que geometrice un esclavo, sin más que extraer del profundo hontanar de su conciencia los conocimientos que yacían en estado potencial, devenidos actuales al mágico conjuro de la mayéutica y descubriendo al propio tiempo el riquísimo contenido de la «ignorancia» socrática.

Este hecho se presenta al matemático en forma de un proceso mental que pasa por cuatro estados psicológicos perfectamente definidos: conservación, evocación, reconocimiento y localización del recuerdo; es decir: representación de la imagen reteniéndola a voluntad, asociación de ideas, aptitud práctica e historia. La conservación del recuerdo aparece no como hábito motor, al modo bergsoniano, sino como facultad de poseer el concepto del propio recuerdo, teniendo, por consiguiente, derecho de propiedad psicológica sobre él; la evocación, en cuanto hay de identidad de fondo intelectual; el reconocimiento, reduciendo al mínimo los fenómenos sensoriales

para caer en brazos de lo inconsciente, y la localización, objetivando el recuerdo y lanzándolo al exterior.

Para aclarar estas ideas observemos el trabajo mental del matemático en sus dos aspectos: analítico y geométrico.

Si quiere demostrar, por ejemplo, que el producto

$$n(n+1)(2n+1)$$

es divisible por 6, empieza por recordar que si un número es divisible por 2 y por 3, lo es por 6, y, al ver la expresión, *conserva* esta verdad empírica: de dos números consecutivos, uno es par y otro impar, y, por tanto, uno es múltiplo de 2, *evocando* inmediatamente, por asociación de ideas, esta otra propiedad de idéntico fondo intelectual que la anterior: de tres números consecutivos, uno es múltiplo de 3; pero como en la fórmula que tiene ante la vista no aparecen tres números consecutivos, busca un artificio mediante el *reconocimiento* del recuerdo—aptitud práctica inconsciente—y, duplicando los factores de su expresión, obtiene:

$$2n, \quad 2(n+1)=2n+2, \quad 2(2n+1)=4n+2,$$

coloca entre los dos primeros el último factor del producto dado, y entonces surgen, explícitamente ya, tres números consecutivos:

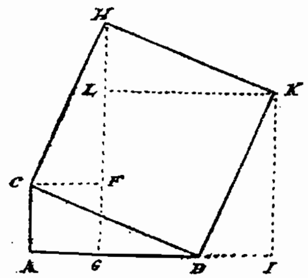
$$2n, \quad 2n+1, \quad 2n+2,$$

y opera con ellos, diciendo: Si es $2\,n = \dot{3}$, es $n = \dot{3}$, y $2\,n = \dot{6}$, si lo es $2\,n + 1$, también queda demostrada la propiedad, y, finalmente, si es $2\,n + 2 = 2\,(n + 1) = \dot{3}$, es $n + 1 = \dot{3}$, utilizando de nuevo un saber anterior: la propiedad de dividir a uno de los dos factores de un producto un número que divide a éste y es primo con el otro factor. Por último, el matemático *localiza* el recuerdo poniéndole un nombre; Euclides, y una fecha: siglo IV antes de J. C., es decir: hace historia.

Veamos, ahora, el mecanismo de la demostración geométrica, en otro ejemplo, sencillo también. Si queremos probar que el cuadrado construído sobre la hipotenusa BC de un triángulo rectángulo ABC equivale a la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos, construímos sobre BC el cuadrado $BCHK$ y desde los vértices H y K trazamos las perpendiculares HG y KI al lado AB y desde los C y K las paralelas CF y KL.

Hasta ahora, y sólo guiados por la intuición, hemos construído el cuadrado que tiene por lado la longitud de

la hipotenusa, *conservando* el recuerdo de lo que queremos demostrar; acude después a nuestra conciencia la *evocación* del mismo bajo la forma de una descomposición de este cuadrado en partes susceptibles de adaptarse a los



cuadrados construídos sobre los catetos, para lo cual ejecutamos las construcciones auxiliares indicadas, en virtud de la atención—tendencia hacia—que supone un preconocimiento, el cual, precisando más la sensación, ayuda a conservar el recuerdo, y entonces llega el momento de utilizar éste, es decir: de *reconocer* que los cuatro triángulos rectángulos ABC, CFH, HLK y KIB son iguales por tener iguales la hipotenusa y un ángulo agudo, y, por consiguiente, los cuadrados $GIKL$ y $ACFG$ son los construídos sobre los catetos AB y AC del triángulo dado. La figura muestra entonces, inmediatamente, que si se quitan los dos triángulos HCF y HLK que, con el pentágono irregular $CFLKB$, forman el cuadrado construído sobre la hipotenusa, para llevarlos sobre los CAB y BKI, queda definida, por las mismas piezas dispuestas de otro modo, la figura $ACFLKI$ que es, precisamente, la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos. El último estado psicológico, la *localización*, se determina escribiendo en la historia de la Matemática el nombre de Pitágoras y la época es que éste floreció: siglo VI anterior a nuestra Era.

Todavía podemos apurar más nuestras observaciones para comprender mejor el trabajo del matemático en su doble aspecto, sintetizado en los dos ejemplos anteriores, trabajo que puede estudiarse desde tres diferentes puntos de vista: matemático, lógico y psicológico. Para enfocarlo desde el primer punto de vista, hay que saber Matemática, ciencia de las posibilidades de ciertas operaciones o sistemas de operaciones con conjuntos o sistemas de conjuntos que, conduciendo a procesos mentales cada vez más complicados, acaban por ocultar la correspondencia material entre el objeto y su símbolo. El lógico considera la Matemática como un capítulo de la Gnoseología y, al colocar los materiales del matemático en un panorama intelectual, abarca una visión de conjunto, que le impide distinguir los detalles aun en contra de su de-

seo; aseméjase al espectador que en una playa oye el ruido del mar, integrado por innumerables ruidos pequeñísimos, aisladamente insonoros, pero que responden el mínimo audible, ya que una suma de ceros sólo puede ser cero; y como cuando critica los resultados y métodos del matemático, es también en cierto modo matemático, no se preocupa de su mecanismo intelectual. El psicólogo, en cambio, se esfuerza por captar las ideas y procedimientos del matemático, observa su manera de trabajar y estudia las leyes que rigen sus procesos mentales.

Al matemático le interesa el *qué*, al lógico el *por qué* y al psicólogo el *cómo* de los fenómenos intelectuales. El primero investiga una verdad de un cierto orden y se siente satisfecho cuando no encuentra en ella contradicción consigo misma o con otras verdades anteriores, demostradas o admitidas, invadiendo en algún modo el campo del lógico que, en último análisis, prescinde de la forma del pensamiento en general—sentido kantiano—para atender sólo a principios noéticos. La ciencia del matemático es exclusivamente especulativa, mientras que la del lógico es normativa; y la del psicólogo, independiente de una y otra, se limita a estudiar los hechos mentales valiéndose de la introspección y de las manifestaciones exteriores que acompañan al hecho: los movimientos del cuerpo y el lenguaje, en cuanto pueden servir de métodos de introspección respecto del pensamiento ajeno.

La captura del hecho mental ofrece dos grandes dificultades. La primera consiste en la imposibilidad de aislarlo para determinar sus condiciones en un laboratorio, como se hace con el hecho físico, por ser esencialmente movible, y, por tanto, el trabajo reflexivo de la introspección tiene que derivar hacia la reconstitución del hecho por la memoria. La otra dificultad radica en la ineluctable dependencia entre el observador y el objeto observado, que produce una transformación de éste al menor esfuerzo intelectual de aquél, a causa del carácter dinámico del razonamiento.

La única manera de obviar en parte ambas dificultades es tener presente que la introspección no da hechos, sino procesos cuyo resultado es fijo.

Prescindamos, pues, de este resultado en los dos ejemplos anteriores, no sólo en cuanto a su calidad objetiva—aspecto matemático—, sino también en cuanto a su validez formal—aspecto lógico—y estudiemos sencillamente su mecanismo tal como resulta del juego combinado de las actividades de un cerebro matemático, sin rozar el problema de la existencia de un principio vital independiente de las fuerzas de la materia.

A primera vista diríase que los procesos mentales del aritmético y del geómetra son distintos. Uno opera con

entes ideales y otro con objetos reales; la Aritmética maneja números y la Geometría figuras, localizados aquéllos en el tiempo y éstos en el espacio; pero obsérvese que el número, como ente abstracto, tiene un origen esencialmente concreto, que se olvida en las últimas etapas de su evolución, y así resulta, en definitiva, que el aritmético, lo mismo que el geómetra, opera con conceptos cuya génesis es de origen afectivo y cordial, aunque el corazón sea mal consejero cuando se penetra en el campo de la Ciencia, en cuyo centro arde la llama vertical del pensamiento puro, porque puede herirse con los alambres de espino de la razón que defienden la Verdad, como los dragones de leyenda defienden a las princesas encantadas.

Ya veremos en capítulos sucesivos hasta dónde puede admitirse esta teoría, y observemos ahora que para demostrar que el producto

$$n(n+1)(2n+1)$$

es divisible por 6, el analista sólo ha utilizado verdades empíricas, comprobables por la experiencia, y verdades demostradas anteriormente gracias al auxilio de otras, empíricas también. Los símbolos n y $n+1$ despiertan inmediatamente la idea de dos números enteros cualesquiera consecutivos, uno de los cuales es par, y, por tanto, divisible por 2, y aunque ya no sucede lo propio para el 3, el matemático recurre a un artificio—legítimo dentro del campo operatorio—en virtud de un silogismo psicológico que no es, en definitiva, sino un hecho de conciencia, un imperativo biológico, una necesidad vital, a diferencia del silogismo lógico que, por ser independiente de nosotros, es sólo un imperativo de implicación; y el analista continúa su desarrollo en virtud de un sentimiento de familiaridad que le permite interpretar lo desconocido por lo conocido, mediante operaciones simbólicas, verdadera experimentación mental—el *Gedankenexperiment* de Mach—que le conduce al estado de comprobación mental a que llegaría si realizase efectivamente aquellas operaciones simbólicas.

Este hecho aparece con mayor claridad en los métodos del geómetra, porque opera—al menos en la Geometría elemental—haciendo constantes llamamientos a la intuición espacial, que no puede prescindir de ciertas figuras particulares, generalizando después el caso privilegiado que le ha servido de punto de partida. La demostración del teorema de Pitágoras consiste en descomponer *efectivamente* el cuadrado construído sobre la hipotenusa en partes que cubran las superficies de los cuadrados construídos sobre los catetos, operación *concreta* que se puede traducir en una abstracción sin más que sustituir

las áreas de los cuadrados por los números que las miden y generalizar psicológicamente, es decir: pasar del mundo de las cosas al de las ideas, de la existencia a la esencia, de la sensación, que es *dada,* a la imagen, que es *puesta,* aplicando la ley de causalidad a la percepción de las rayas trazadas con tiza en el encerado, y desdoblándola para quedarnos con la imagen y arrojar al exterior la causa, mediante un gasto de energía nerviosa intencional. Sólo así se puede hablar de *generalización* en Psicología, palabra que no tiene sentido fuera del campo de la Lógica, porque el género no es para el psicólogo más que un individuo.

II

El concepto de número

Sin que sus reflexiones estén presididas por la duda metódica cartesiana—en cuyo último resultado: *cogito, ergo sum,* hay más contenido psicológico del que se propuso el propio Descartes, puesto que supone la permanencia del yo—el matemático es, evidentemente, el ser más imparcial, más sereno, porque no lucha con una rea-realidad material independiente de su pensamiento, sino que vive en el mundo de los conceptos, en presencia de necesidades que se le imponen a pesar suyo, y de las cuales no puede dudar, aunque se las represente como exteriores a su propio yo, que las ha elaborado mediante sucesivas abstracciones y generalizaciones, hasta llegar a símbolos tan complicados que hacen necesario un gran esfuerzo intelectual para encontrarles reminiscencias en la región de las realidades.

De aquí, que las conclusiones de la Matemática estén exentas del carácter dramático y emocional que ofrecen los otros resultados científicos, porque éstos, a causa de las condiciones del mundo real en que se construyen, reflejan en cierto modo las cualidades somáticas del investigador, y le convierten, como quería Kant, en legislador de la Naturaleza. Por eso en la realidad, que es irracional, no hay absurdos; el absurdo se da solamente en la región de las ideas.

El científico vive en el plano de la sensación, y, por consiguiente, *descubre* lo que le es exterior, mientras que el matemático opera en la zona de la ideación, y, por tanto, *inventa* lo que estaba en su yo, un yo con sentido de limitación, un yo no real, sino ideal que, como producto del entendimiento, está, en cuanto concepto, fuera del sujeto pensante. El yo del matemático es la representación de un conjunto de representaciones, con un contenido rigurosamente empírico que le obliga a considerarse a sí mismo como objeto de conocimiento, espectador que contempla una realidad extraña a su propio espíritu, a diferencia del lógico que extrae de su pensamiento las mismas proposiciones ante las cuales hinca luego la rodilla en tierra para reverenciarlas, cayendo en un estéril narcisismo que le lleva a una necesidad fría, no vital.

Este yo matemático es el que elabora los conceptos que sirven de base a su ciencia, por un proceso psicológico análogo al que engendra los que constituyen el lenguaje vulgar. ¿Quién ha visto un perro? Enunciada así, esquemáticamente, la pregunta parece trivial; pero, si la analizamos con espíritu crítico, objetivando el juicio y

despojándolo de intencionalidad, nos convenceremos de que nadie ha visto un perro. Todos hemos visto un galgo, elegante y elástico, digno de los pinceles de Velázquez, y un mastín, solemne y magnífico, guardando un rebaño extremeño, y un grifón de Pomerania, en cuya fealdad consiste su belleza, hecho una pelota de lana, en los brazos de una linda mujercita; todos hemos visto un perro blanco y un perro negro y un perro gris; pero *¿un perro?* Nadie ha visto un perro como concepto, porque éstos no son de orden perceptivo, y, por consiguiente, no pueden tomar ninguna forma fenoménica intuitiva.

Precisemos un poco más estas ideas. Veo un clavel blanco y otro rojo; pero este mismo rojo lo encuentro en una puesta de sol y en unos labios de mujer, como aquel blanco lo observo en una gota de leche, en un copo de nieve y en la cuartilla en que escribo. Por un lado, hay claveles; por otro, blanco y rojo, y, sin embargo, los claveles tienen algo común, no sólo entre sí, sino con otros objetos de los cuales difieren, como por ejemplo, los lirios y las rosas, de igual manera que en los blancos y los rojos también existe algo común: la cualidad de color. Esta observación parece autorizarnos a considerar la Naturaleza como un conjunto de fenómenos idénticos y no idénticos, cuyo estudio constituye la Ciencia; pero los fenómenos son, precisamente, las cosas tal como se nos presentan; es decir: datos inmediatos de la conciencia impuestos a nosotros por el mundo exterior y muchas veces en contra de nuestra propia voluntad.

Los animales también perciben como nocotros—y a veces mejor que nosotros—las analogías y diferencias entre las cosas. La abeja distingue mejor que el hombre las flores que son útiles para fabricar la miel; pero ni su cerebro—menos desarrollado que el nuestro—reacciona bastante poderosamente, ni su entendimiento se opone a los objetos con la necesaria independencia para apreciar en ellos más relaciones que las que interesan momentáneamente a su necesidad biológica de fabricar miel. El hombre, en cambio, observa que, como a pesar de la pluralidad de detalles, las flores tienen algo común, descompone la percepción en sus elementos idénticos y no idénticos, retiene lo idéntico en su representación, y, partiendo así de las diferentes *flores perceptibles,* se eleva al concepto de *flor,* más rico en extensión, pero más pobre en caracteres, porque comprende a todos los claveles, a todos los lirios, a todas las rosas, como cada uno de estos conceptos comprende, a su vez, a todos los objetos *reales* de cada especie, de tal modo que, cuando clasificamos un hecho bajo un concepto, lo empobrecemos, porque prescindimos de sus caracteres innecesarios al fin que perseguimos, y, al propio tiempo, lo enriquecemos,

porque le hacemos asumir todas las cualidades de esta clase.

Por un proceso análogo pasamos del concepto de flor al de planta, del de planta al de organismo, del de éste al de cuerpo y del de cuerpo al de *ser,* que es el concepto más amplio, porque comprende a todo lo que *es*—incluso al *no ser,* que también *es*—y el más pobre porque sólo tiene un carácter.

Pero los conceptos necesitan un vehículo para poderlos comunicar: el lenguaje, un nombre sustantivo generalmente, que es lo único que suele quedar en la conciencia. Si preguntamos a un matemático qué hay en su conciencia a propósito de la palabra «número», es seguro que, de pronto, no vacile en contestar: «Esa palabra», y sólo en este sentido puede aceptarse la definición de Laurent: «Número es una locución y el signo que la representa» (1); pero si el vocablo suscita en nosotros la duda, extraemos entonces los conocimientos almacenados en la memoria bajo el rótulo de aquella palabra para precisar la respuesta, desandando el camino que tuvimos que recorrer hasta llegar a la meta donde estaba el

(1) *Sur les principes fondamentaux de la Théorie des nombres et de la Géometrie,* pág. 15.—París, Gauthier-Villars, 1911.

símbolo—oral o escrito—en que se condensó un proceso psicológico.

Este proceso es el mismo en todos los hombres y, sin embargo, su resultado final—la palabra—es diferente: problema que lleva envuelta una profunda cuestión de Gramática comparada que los logísticos han intentado resolver, desde el punto de vista matemático, creando creando una escritura simbólica abreviada que permita estudiar las leyes de sus signos y las transformaciones de sus proposiciones independientemente de toda lengua.

Pero como este aspecto no interesa al psicólogo, prescindamos de él para observar el proceso idiomático de la idea de número, íntimamente ligada a la de correspondencia, tan familiar hoy a los cultivadores de la Matemática.

En los pueblos primitivos el número es un concepto individual, adscrito a los miembros del cuerpo humano, y así los bakairis del Brasil central palpan con los dedos de la mano derecha los granos de maíz que quieren contar, mientras levantan los de la izquierda para registrar los números: cuando llegan al 6 invierten la manipulación, levantando los dedos de la mano derecha al palpar con los de la izquierda, y si los granos pasan de diez, recurren a los dedos de los pies. Más allá del 20 no saben contar.

Los bugilais de Nueva Guinea establecen una correspondencia un poco más complicada que la de los balkairis y sólo llegan hasta el 10. 1 es el dedo meñique de la mano izquierda; 2, el anular; 3, el medio; 4, el índice, y 5, el pulgar. Los números 6, 7, 8, 9 y 10 representan la mano cerrada, el codo, el hombro, la tetilla derecha y la izquierda, respectivamente.

El mismo símbolo de 6 lo tienen los bantus, que dicen: «Salta a la otra mano», y los esquimales designan el 20 con la frase «Está consumado un hombre».

Este procedimiento de cálculo corpóreo coincide con el proceso de formación del yo en el niño, el cual empieza hablando en tercera persona hasta que, conociendo su propio cuerpo por sensaciones más estables que todas las demás, adquiere una cierta conciencia de su unidad, y entonces se llama «yo».

Las operaciones de los pueblos semisalvajes a fin de captar la idea de número son las necesarias para establecer una correspondencia puramente cualitativa entre el signo y el objeto significado, sin llegar aún al concepto numérico, que surgirá más tarde, cuando, por sucesivas repeticiones, fije la memoria el mismo resultado de una operación anterior y pueda servir ya, automáticamente, para cálculos futuros.

La coordinación entre los números y las partes del cuerpo aparece, pues, con claridad, quedando establecida, de hecho, la correspondencia biunívoca entre los elementos de dos conjuntos; es decir: el cambio de cosa por cosa que se expone en los tratados modernos de Aritmética como el más sencillo punto de partida para explicar el concepto de número. Si a un niño le mandamos comprar tantas naranjas como monedas de cinco céntimos le demos, entregará las monedas, una a una, a medida que reciba las naranjas, una a una también, y el trueque de una moneda por una naranja, practicado reiteradamente, engendrará la idea abstracta de la igualdad de las multiplicidades intercambiadas; pero este concepto no adquirirá carta de ciudadanía matemática hasta que, por abstracción, se haya convertido en idea general por una lenta elaboración psicológica que pase de la formación instantánea sensorial, comprobable por la experiencia, al hábito por la observación de que, cualquiera que sea la naturaleza de los objetos—naranjas, en el ejemplo—, el resultado siempre es el mismo, y quede definido el número como el ente de razón que representa a todos los conjuntos de cosas cuyos elementos se pueden cambiar uno a uno, es decir: como objeto esquematizado por un doble proceso de descomposición y de composición, sensible aquélla e intelectual ésta, asumiendo entonces el número, en el más riguroso sentido kantiano, el carácter

de unidad de la síntesis de lo múltiple de una intuición homogénea.

Se verifica, pues, una cópula entre la unidad y la pluralidad, de tal modo que todas las variedades posibles de conjuntos coordinables tienen algo común: la coordinabilidad o el número, como la blancura es el algo común a todas las cosas blancas.

Aquella cópula puede interpretarse lo mismo en términos aditivos que multiplicativos, como lo demuestra el hecho relatado por el P. Bourdin en sus *Objeciones* a las *Meditaciones* de Descartes: «He conocido a una persona —dice—que, cuando se estaba durmiendo, oyó las cuatro y las contó así: una, una, una, una; y, ante tal absurdidad, exclamó: «Este reloj está loco; ha dado cuatro veces la una».

Tal absurdo no sólo queda explicado psicológicamente, por la relajación de la atención en los pródromos del sueño que impide las reacciones automáticas ante el concepto de número, sino que demuestra la lenta elaboración de la igualdad cuatro veces uno y una vez cuatro: igualdad de dos conceptos definidos por propiedades diferentes; es decir: que dos conceptos distintos en cuanto a su comprensión son, no obstante, idénticos desde el punto de vista de la extensión.

El número definido como ente representativo de los conjuntos coordinables no es, sin embargo, tal número en estricto sentido matemático, puesto que la percepción de un conjunto, como tal conjunto, indivisible y único, sólo engendra el concepto de unidad esquematizada—como el último resultado de la abstracción numérica—pero no el número propiamente dicho, porque como el espíritu no puede diferenciar ninguna determinación específica, y, por consiguiente, como el yo no se da cuenta de sus diversas unidades, el concepto de número se desvanece para quedar sólo la unidad como hecho de conciencia.

Por eso, la relación puramente cualitativa entre las colecciones de objetos y las partes del cuerpo del hombre primitivo o del semisalvaje moderno, tuvo que traducirse en los ábacos de los antiguos chinos o en las filas de piedrecillas—*calculi*—de los romanos, que implican ya la idea de *orden,* para que el concepto de número adquiera categoría matemática, y entonces, dadas las unidades sucesivamente, la última coincidirá con el número cardinal del conjunto, y, recíprocamente: dado un conjnnto se podrán separar en el tiempo sus unidades de tal manera que se corresponda la operación de la enumeración de todos los elementos del conjunto con la representación mental del formado por esos mismos elementos,

correspondencia que traduce la sucesión en simultaneidad, e inversamente, y entonces los dos hechos de conciencia se yuntaponen y el yo aprehende el concepto numérico dándole un valor de que carecía el concepto genérico, a fin de fijarlo en la memoria sin posible ambigüedad para lo futuro.

III

Invariación del número

La correspondencia entre los elementos de dos conjuntos supone el proceso psicológico que representa el acto de contar, independientemente de la preexistencia del número, y, por tanto, es preciso distinguir los caracteres individuales de cada objeto, y, al propio tiempo, considerarlos como iguales, colocándose en un punto de vista unitario que permita al yo darse cuenta de la pluralidad; es decir: representarse un todo—primitivamente caótico—en un hecho de conciencia único.

De aquí resultan dos especies de unidad: la representación del conjunto por un acto de intuición simple y la que por sucesivas adiciones forma el número, siendo ambas susceptibles de fragmentación.

La génesis del concepto de número implica, pues, discontinuidad, la cual desaparece una vez construído aquél y, ya objetivado, se presenta al espíritu como una unidad indivisible.

El conocimiento del número empieza con percepciones que se traducen en representaciones de objetos, de las que separamos después idealmente un aspecto particular para abstraer una acción: la de correspondencia, como contacto de la realidad objetiva con la mente, dando origen a la síntesis de la cantidad sin la cualidad.

El acto de contar consiste en percibir separadamente los diversos elementos de un conjunto escalonándolos en el tiempo, porque si prescindimos de los elementos nos queda la sucesión de momentos, y tenemos entonces el número ordinal, es decir: el número no ya impersonal, sino con el atributo necesario para individualizarlo mediante un proceso lingüístico que implica la idea de tiempo como intuición *a priori* y condición de la percepción sucesiva, análogo al de ciertos idiomas que recurren a los más tortuosos expedientes para referir acontecimienmientos no momentáneos, como el sudanés, que para expresar que no deja de llover, dice: «Llueve, llueve, llueve», fragmentando el tiempo, desmenuzándolo con la repetición del verbo, mientras que el japonés indica el mismo hecho con la frase: «Ver el caer de la lluvia», sustantivando el verbo a falta de pronombres personales.

Esta idea de duración permite disponer los objetos en serie, percibiéndolos en instantes distintos que pueden ordenarse de diversas maneras. Si mando ordenar los libros de mi biblioteca a la criada, probablemente lo haría

por tamaños, o con arreglo al color de las encuadernaciones, o según cualquiera otro criterio que difícilmente coincidiría con el que me guió a ordenarlos yo; pero todas las ordenaciones posibles son igualmente válidas en cuanto tienen una finalidad común: encontrar un libro determinado en el tiempo mínimo, y, por consiguiente, cuando digo que tengo *ordenada* mi biblioteca no expreso otra idea que la de haber fijado la atención en ciertas relaciones que ligan a unos libros con otros—tamaño, encuadernación, materia, alfabetización de autores, etc.—relaciones que son, precisamente, las que determinan el orden adoptado.

Este concepto es tan básico en Matemática, que varios de sus más interesantes capítulos se fundan en él. El mismo concepto de límite, que separa la parte elemental de la superior, es un concepto de orden, puesto que, dada una sucesión indefinida de números reales,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots,$$

decimos que tiene por límite a si desde un cierto valor de n en adelante la diferencia $a_n - a$ es menor en valor absoluto que un número prefijado.

Los números se presentan ordenados en la sucesión

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots, n, \ldots\ldots,$$

que llamamos *natural* por ser la más familiar; pero no habría inconveniente alguno en poner primero los números pares y después los impares; o el 1, luego los pares, después los impares múltiplos de 3, a continuación los múltiplos de 5 excepto los divisibles por 2 o por 3 y detrás de estos los múltiplos de 7 que no admitieran los factores 2, 3, 5, etc.; conforme a una ley de acuerdo con la sucesión de números primos, o según cualquiera otra ley absolutamente arbitraria.

La Aritmética no sólo podría construirse sin ningún inconveniente lógico, estableciéndose las propiedades de los números sin encontrar contradicción alguna, sino que el proceso psicológico para llegar al concepto de número y el desarrollo de los razonamientos ulteriores serían los mismos.

Captémoslo, pues, en su forma más sencilla: la sucesión natural

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots$$

y prescindamos, por ahora, del significado de estos puntos suspensivos. Puesto que el orden depende de la relación que liga a unos números con otros, el matemático se representa un acto *antes* que otro, el cual *sigue* a aquél, de tal modo que si el término a precede al b, el b no puede preceder al a, propiedad exclusiva de las rela-

ciones seriales. En las relaciones en que no interviene la idea de orden no se verifica esta propiedad; tal en la relación «amistad», pues si Juan es amigo de Pedro, Pedro lo es de Juan; o en la de «tamaño»: si la distancia Madrid-Sevilla es distinta de la Zaragoza-Santander, también ésta es distinta de aquélla, mientras que en la relación «paternal», si Antonio es padre de Fernando, Fernando no es padre de Antonio. Las relaciones seriales son, pues, *asimétricas.*

Otra propiedad, llamada *transitiva,* enlaza a tres términos de la relación serial de modo que si a precede a b y b a c, a precede a c, propiedad que, aplicada a los ejemplos anteriores, da: Si Juan es amigo de Pedro y Pedro lo es de Ricardo, no se puede afirmar que Juan es amigo de Ricardo, como si la distancia Madrid-Sevilla es distinta de la Zaragoza-Santander y ésta distinta también de la Bilbao-Coruña, bien pudiera ocurrir que Madrid estuviera de Sevilla a la misma distancia que Coruña de Bilbao; en cambio, si Antonio es padre de Fernando y Fernando padre de Joaquín, podemos asegurar que Antonio no es padre de Joaquín.

Finalmente, el matemático, siempre colocado en el punto de vista empírico ante un conjunto, tiene conciencia de un *primer* elemento al cual no precede ninguno y de un *último* al que no sigue ninguno, y de dos objetos cualquiera del conjunto a ordenar, uno de ellos debe necesariamente preceder al otro: propiedad *conexa,* como, por ejemplo, la de dos momentos; pero no la de dos sucesos, porque pueden ser simultáneos.

Estas tres propiedades tienen capital importancia psicológica, especialmente la asimetría por ser incompatible con la reciprocidad. La relación «marido» es asimétrica, pues si Francisco es marido de Petra, Petra no es marido de Francisco, mientras que la de «cónyuge» es recíproca, y de ella se puede deducir la primera en algunos casos por desdoblamiento; así: marido es el cónyuge de una mujer; luego la relación «marido» se obtiene de la de «cónyuge» limitando la extensión de este concepto a los hombres, lo que da origen a dos relaciones asimétricas; pero no se puede hacer esto con las relaciones matemáticas tales como «mayor que», «anterior a», etc.

Estas propiedades son fundamentales no sólo en Aritmética sino también en Geometría. Si consideramos dos puntos *A* y *B* en una recta, esta recta queda descompuesta en tres partes: la que está a la izquierda de *A,* al que está entre *A* y *B* y la que está a la derecha de *B;* pero los puntos de la recta no podrán ordenarse de izquierda a derecha si no se aceptan los siguientes postulados establecidos por Russell:

1.º Si existe algo entre *A* y *B,* no hay identidad entre *A* y *B;*

2.º Todo lo que está entre *A* y *B,* está también entre *B* y *A;*

3.º Todo lo que esté entre *A* y *B,* no se puede confundir con *A* ni, por consiguiente, con *B,* en virtud del postulado anterior;

4.º Si *X* está entre *A* y *B,* todo lo que esté entre *A* y *X* está también entre *A* y *B;*

5.º Si *X* está entre *A* y *B,* y *B* entre *X* e *Y, B* está entre *A* e *Y;*

6.º Si *X* e *Y* están entre *A* y *B, X* e *Y* se confunden, o *X* está entre *A* e *Y,* o entre *Y* y *B;*

7.º Si *B* está entre *A* y *X* y entre *A* e *Y, X* e *Y* se confunden en el mismo punto, o *X* está entre *B* e *Y,* o *Y* está entre *B* y *X.*

Lógico y no intuitivo, Russell reconoce, sin embargo, que estos siete postulados—proposiciones, según el paladin de la Logistica inglesa—son comprobables por la experiencia, y, por razones de precisión, dice que si *A* está a la izquierda de *B,* los puntos de la recta *AB* son:

1.º Los que están separados de *B* por *A,* que los considera a la izquierda de *A;*

2.º El punto *A;*

3.º Los puntos comprendidos entre *A* y *B;*

4.º El punto B;

5.º Los puntos separados de A por B, que considera a la derecha de B.

Una vez establecido este convenio, dice que X está *a la izquierda* de Y en uno cualquiera de los casos siguientes:

1.º Cuando X e Y están ambos a la izquierda de A e Y entre X y A;

2.º Cuando X está a la izquierda de A e Y se confunde con A o con B, o está entre A y B, o a la derecha de B;

3.º Cuando X se confunde con A e Y está entre A y B, o se confunde con B, o está a la derecha de B;

4.º Cuando X e Y están ambos entre A y B e Y entre X y B;

5.º Cuando X está entre A y B e Y se confunde con B o está a la derecha de B;

6.º Cuando X se confunde con B e Y está a la derecha de B;

7.º Cuando X e Y están ambos a la derecha de B y X está entre B e Y.

Claro está que estas propiedades sólo se verifican en una línea abierta, puesto que en orden cíclico la palabra «entre» no tiene sentido, ya que, dados tres puntos A, B, C en una circunferencia, se puede ir de uno cualquiera de

ellos otro sin pasar por el tercero; pero si son cuatro los puntos, A, B, X, Y, se pueden separar en dos parejas (A, B) y (X, Y) si para ir de A a B hay que pasar por X o por Y y para ir de X a Y hay que pasar por A o por B.

Esta ordenación parece estar presidida por un proceso lógico, ya que se podía haber adoptado otro criterio cualquiera para establecerla, haciendo depender su validez no de la materia de que se trata sino de la forma de lo que se dice; pero observemos que, al dar las definiciones anteriores, el mismo Russell ha olvidado el elemento subjetivo del mínimo esfuerzo, la línea de menor resistencia de la mente para aprehender el concepto, cayendo de lleno en el campo psicológico, cuyas vivencias no pueden fragmentarse.

Ante el problema de la ordenación el yo no se encuentra en un estado neutro, en un estado intelectual puro, sino en un estado volitivo que obliga a intervenir a los nervios eferentes, dirigiendo las reacciones motrices que corresponden a nuestra actividad y obligándole a adoptar la posición más cómoda.

Si tenemos ahora dos sucesiones ordenadas:

$$A = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots\ldots),$$
$$B = (b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots\ldots\ldots, b_n, \ldots\ldots\ldots),$$

podemos establecer una correspondencia biunívoca entre ellas si al primer elemento de A le hacemos corresponder el primero de B, y si se corresponden dos elementos a_i y b_i también se corresponden sus siguientes a_{i+1} y b_{i+1} y decimos que ocupan el *mismo lugar* los objetos correspondientes, resultará que esta relación goza de las propiedades de las seriales, y, por tanto, si disponemos varias sucesiones en la forma que indica el cuadro siguiente:

k_1	k_2	k_3	....	k_n	....
$A = a_1$	a_2	a_3	....	a_n	....
$B = b_1$	b_2	b_3	....	b_n	....
$C = c_1$	c_2	c_3	....	c_n	....
....	....	....	....	....	....
$L = l_1$	l_2	l_3		l_n	
....	....	....	....	....	....

el concepto abstracto del elemento de la sucesión k_i es el número de orden del elemento a_i de la sucesión A, y lo mismo del b_i en la B, etc.; de donde resulta que a todo número ordinal a_i de la sucesión

$$a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ a_4\,,\ \ldots\ldots\,,\ a_n\,,\ \ldots\ldots\,,$$

le corresponde un número cardinal que es, precisamente, el que designa el número de objetos del conjunto

$$(a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ \ldots\ldots\,,\ a_i\,)\,,$$

y recíprocamente:

k_1	k_2	k_3	....	k_n	....
(a_1)	$(a_1\ a_2)$	$(a_1\ a_2\ a_3)$	....	$(a_1\ a_2 \ldots a_n)$	....
(b_1)	$(b_1\ b_2)$	$(b_1\ b_2\ b_3)$	....	$(b_1\ b_2 \ldots b_n)$	....
(c_1)	$(c_1\ c_2)$	$(c_1\ c_2\ c_3)$	....	$(c_1\ c_2 \ldots c_n)$	....
....	....	....	....	....	....
(l_1)	$(l_1\ l_2)$	$(l_1\ l_2\ l_3)$		$(l_1\ l_2 \ldots l_n)$	
....	....	....	....	....	....

resultando en definitiva el número cardinal por la doble abstracción de la naturaleza de los objetos del conjunto y del orden en que están colocados.

IV

Las operaciones aritméticas fundamentales

La vida sólo da multiplicidades limitadas, y, por consiguiente, cuando no basta la intuición sensible directa para formar el concepto de número, el espíritu acude al acto complejo de la numeración mediante un automatismo verbal que despierta en la conciencia la idea de que después de cada número hay siempre otro, idea que constituye la base del concepto de infinito potencial, cuyo ejemplo más sencillo es la sucesión de números enteros.

El concepto de número pasa del estado concreto al abstracto por la creación de la idea de conjunto, a fin de comparar multiplicidades, cualitativamente distintas, con independencia de las cualidades de los objetos, quedando sólo una cualidad común: la cantidad, que, para ser percibida, necesita de la correspondencia biunívoca entre los objetos de su conjunto y los de otro prefijado: los dedos de las manos, los miembros del cuerpo, etc., debiendo haber sido dificilísimas de ejecutar las «cuentas» de un número superior al de elementos de la colección-tipo, hasta que se inventó el sistema de subdividir *materialmente* los objetos a contar en grupos que contuvieran el mismo número de objetos contables y contar después los grupos; es decir: hasta que se inventó la numeración, proceso que ha durado siglos, y que si hoy nos permite realizar mentalmente las operaciones es porque nuestros antepasados, luego de muchas experiencias, llegaron a descubrir empíricamente, uno a uno, los diversos resultados de la operación de contar.

La creación de la palabra contribuyó poderosamente al progreso ulterior, en cuanto fijó una idea, sin que debamos preocuparnos ya de si la misma palabra y el mismo signo despiertan la misma sensación en todos los hombres. Basta que cada uno de nosotros aplique la misma palabra y el mismo signo a los mismos objetos—a fin de eliminar las sensaciones individuales—para que sea posible el razonamiento científico.

Creada la numeración, la sucesión natural de los números representa un conjunto de conjuntos; esto es: un conjunto de todos los conjuntos posibles con independencia de los valores cualitativos de sus elementos que nos permite, por la agregación sucesiva de unidades, hablar de ciertos números, como los expresados en si-

glos de luz para medir distancias astronómicas, sin que nos produzcan vértigo intelectual.

Esta operación es la de sumar, que nace del contacto de la inteligencia con la realidad objetiva, ejecutando materialmente, y con un fin utilitario, la unión de una pluralidad de objetos a otra pluralidad de objetos, distintos de los anteriores, para formar una nueva pluralidad de objetos considerados como de la misma naturaleza: operación posterior a la de reunir un objeto a otro para servirse de ambos sin preocuparse de si son dos, porque en este hecho no interviene el concepto de suma, que implica la idea de número.

La operación de sumar es un acto de toma de posesión que el hombre civilizado simplifica manipulando ciertos símbolos que le permiten ejecutar mentalmente aquella operación concreta y comprobar después el resultado; es decir; hacer la comprobación de un hecho, que en este caso es un razonamiento que nos da a conocer verdades necesarias.

¿Qué quiere decir esto? ¿Cuál es el contenido de la palabra «necesidad»? Necesario es, etimológicamente, lo que no puede cesar, definición negativa a la que hay que dar un sentido positivo que satisfaga al psicólogo cuando estudia el mecanismo del razonamiento matemático, y que el propio Kant dejó en la penumbra. Decir que algo es «necesario» cuando es consecuencia de una causa *dada,* equivale a decir que ese algo forma parte de la cadena de la causalidad, lo cual es compatible con ser «fortuito» en ciertos casos, de tal modo que la simultaneidad de ambos dé origen al «azar», lo que no sólo no resuelve el problema, sino que lo desplaza del plano empírico para llevarlo al espinoso campo de la Metafisica lleno de sombras, de dudas y de vacilaciones.

Es evidente, desde luego, que la «necesidad» matemática no tiene nada que ver con el imperativo intencional, de deseo, etc., pues si tengo, por ejemplo, necesidad de hacer un viaje, o de descansar, esta necesidad puede desaparecer, mientras que la necesidad que resulta de un razonamiento matemático es absolutamente forzosa, como característica del mismo razonamiento.

Los conceptos de la Matemática son serenos, mientras que el razonamiento, por el contrario, es esencialmente agitado. Las ideas de número, de recta, de figura, etcétera, son elementos psíquicos estáticos, como la luz cenital, luz quieta que no proyecta sombras, pero en cuanto interviene la razón para operar con ellos, se transforman en dinámicos, en algo turbulento que escapa muchas veces a la propia razón. Ante los conceptos, el espíritu adopta una actitud de impasibilidad, mientras que ante el razonamiento, el pensador no puede prescin-

dir de sus cualidades somáticas; y, sin embargo, una vez definidos, por ejemplo, los símbolos que forman la expresión

$$2 + 3 = 5\,,$$

ya no puede impedir que cinco sea la suma de dos y tres, ni tampoco queda autorizado para afirmar, como Poincaré, que las leyes matemáticas no son verdaderas ni falsas sino «convenios cómodos», a no ser que se confunda la convención con la abstracción y la comodidad con la necesidad.

El razonamiento matemático es necesario porque es una comprobación psicológica, en cuanto el aritmético o el geómetra opera según reglas que le coaccionan porque las conoce gracias a una previa elección, a diferencia del físico que se limita a registrar las manifestaciones de fuerzas que son exteriores a él, y así, mientras éste no puede concluir sobre la necesidad de un razonamiento porque la Naturaleza abre ante él el diafragma de sus fenómenos según leyes que ignora—y cuyo conocimiento es, precisamente, lo que se propone—el matemático levanta acta del resultado de su experimentación mental y ese resultado es necesario, como hecho de conciencia, si ha sido correcta la coacción de aquellas leyes; y entonces, cuando dice, por ejemplo, que todo triángulo es trilátero, ya no cabe preguntar por qué no estando incluida la idea de trilátero en la definición de triángulo es necesario, sin embargo, que el triángulo sea trilátero, porque ello equivaldría a pedir una razón de las razones, una explicación de las explicaciones, y, por sucesivos ascensos, se llegaría hasta el principio de razón, del que no se puede dudar porque su razón radica en el hecho de estarlo ya admitiendo en cuanto pedimos razón de él.

Apliquemos estas reflexiones a la suma, como operación aritmética fundamental, para captar el valor de la *comprobación* psicológica como *necesidad*.

Si nos representamos un conjunto de objetos y un objeto adherido a él o un conjunto adherido a un objeto —el «érase un hombre a una nariz pegado», de Quevedo —se comprueba empíricamente que, tanto en un caso como en otro, la multiplicidad final es la primitiva aumentada en una unidad porque la representación de las dos multiplicidades $n+1$ y $1+n$ es inmediata, y podemos, pues, escribir la igualdad

$$n+1=1+n\;;$$

pero en los casos más complicados tenemos que hacer la

representación manipulando símbolos y, por consiguiente, para demostrar la ley conmutativa de la suma, partimos de la igualdad anterior y decimos que es

$$(n+1)+1=(1+n)+1\,,$$

puesto que en el primer miembro de ésta se puede sustituir $n+1$ por $1+n$, en virtud de aquélla, y así siguiendo llegaremos a la igualdad

$$n+a=a+n$$

por recurrencia: el razonamiento matemático por excelencia, según Poincaré (1), porque se impone necesariamente en cuanto afirma la potencia del espíritu que se sabe capaz de concebir la repetición indefinida de un mismo acto en cuanto este acto es una vez posible. «El espíritu —agrega—tiene la intuición directa de esta potencia y la experiencia sólo puede ser para él una ocasión de servirse de ella y, por tanto, de tener conciencia de la mis-

(1) *La Science et l'Hipothése,* página 19.—París, Flammarion, 1908.

ma» (1), sin que el gran geómetra francés explique por qué se impone *necesariamente* el resultado de la demostración por recurrencia o método de inducción completa como no sea por la serie de «silogismos en cascada» (2), tales que la conclusión de cada uno sirve de premisa menor al siguiente y las mayores de todos se pueden reducir a esta fórmula única: «Si el teorema es cierto para $n - 1$, lo es para n», cayendo entonces en la contradicción de apoyarse en el silogismo para encontrar una verdad nueva, luego de haber sostenido que el silogismo sólo da tautologías.

Las conclusiones del método de inducción completa se imponen *necesariamente* porque el razonamiento sólo depende del concepto abstracto de número en el sentido de que cuando pronuncio el frase «un número n cualquiera» no predico de él ninguna cualidad, sino que considero una multiplicidad *en bloque,* y, por tanto, la ley conmutativa de la suma es una propiedad general que se verifica para todos los números; es decir: rigurosa, en tanto la palabra «rigor» tiene en Matemática un contenido de «precisión»—cortar antes—de limitación, como una cortadura; y así cuando decimos que una propiedad

(1) Loc. cit., pág. 24.

(2) Ibid., pág. 20.

se verifica para *todos* los números, queremos decir «para cualquier número», puesto que, rectamente, la frase: «todos los números» carece de contenido real y sólo tiene el valor de una metáfora.

Poincaré sostiene también que la comprobación es estéril «porque la conclusión no es más que la traducción de las premisas en otro lenguaje (1). Ya hemos visto el valor psicológico y el contenido fecundo de la comprobación, y en cuanto al razonamiento por recurrencia, Poincaré descuida la primera parte—*la comprobación* del caso para el valor 1 de n—y sólo se detiene en la segunda, que implica el salto de lo particular a lo general, cuando lo más interesante desde el punto de vista psicológico está en la primera parte, puesto que demostrar la igualdad

$$n + 1 = 1 + n$$

es afirmar el poder constructivo del espíritu que permite la generalización, sin la cual no es posible la Ciencia, y le da, al propio tiempo, la garantía de la repetición indefinida porque, partiendo de la igualdad evidente

$$1 + 1 = 1 + 1 ,$$

(1) Loc. cit., pág. 13.

se termina en la numeración, como operación genética del número.

La multiplicación es sólo un caso particular de la adición: aquel en que todos los sumandos son iguales. Sus propiedades fundamentales son la *conmutatividad* y la *distribución*.

Poincaré demuestra la ley conmutativa del producto de un modo análogo a la de la suma, partiendo de 1, y en cuanto a la distributiva—para multiplicar una suma por un número es indiferente efectuar la suma y multiplicar el resultado por el número o sumar los productos de éste por cada uno de los sumandos—es una verdad empírica, fácilmente comprobable, en la que se ve enseguida el papel que desempeña la intuición sensorial.

Si, de un modo análogo a la suma, suponemos que en un producto son iguales sus factores, tenemos la *potenciación,* operación no conmutativa puesto que, por ejemplo, es

$$2^3 \neq 3^2 .$$

Estas tres operaciones, con sus inversas, son las de la Aritmética propiamente dicha. A causa de ser conmutativas la adición y la multiplicación, sus inversas se yustaponen en una sola: la sustracción y la división, respecti-

vamente; pero no así la potenciación, que tiene dos inversas: la radicación y la logaritmación, según que dada la potencia y $\left\{\begin{array}{c}\text{el exponente}\\ \text{la base}\end{array}\right\}$ se pida determinar $\left\{\begin{array}{c}\text{la base}\\ \text{el exponente}\end{array}\right\}$.

Estas siete operaciones se pueden efectuar directamente—dentro del campo exclusivo de los números naturales—o por medio de ciertas tablas o ábacos que no son, en realidad, más que representaciones materiales indirectas, como los dedos o los miembros del cuerpo que, prescindiendo de su naturaleza física, asumen la categoría de colecciones compuestas de unidades intercambiables. La Aritmética de los números enteros es, pues, como ha dicho Brunschwicg, «una disciplina físico-aritmética» (1).

El matemático adapta sus pensamientos a los hechos experimentales y relaciona después unos pensamientos con otros de tal modo que el valor eurístico de su ciencia depende de la perfecta concordancia entre la deducción

(1) *Les étapes de la Philosophie mathématique,* pág. 492, segunda edición.—París, Alcan, 1922.

y la experimentación hasta el punto de que un desacuerdo entre ambas, funesto para el técnico en algún caso, es siempre fecundo para el investigador porque, traducido correctamente, le puede conducir a nuevos descubrimientos. Tal es el caso del esclavo en el *Menón* platónico, que cree que duplicando el lado del cuadrado se duplica su área; pero que, después que Sócrates le hizo dudar, «adormeciéndole a la manera de torpedo», quedó en condiciones de descubrir la verdad sin más que interrogarle convenientemente.

Platón deduce de aquí que todo lo que sabemos no son más que recuerdos. Basta, en efecto, pensar en el papel que éstos han desempeñado en la construcción de la Ciencia para comprender el valor de los mismos como resultado de una previa experimentación mental; y así en las operaciones aritméticas fundamentales hemos visto que sólo se han podido establecer después de una larga serie de experiencias aisladas hechas con objetos materiales.

La invención de los símbolos que llamamos *cifras* y su correcto manejo, no sólo han permitido abordar problemas que serían penosos de resolver concretamente, sino que han reforzado el valor objetivo de los resultados

operatorios, aspecto que tiene el máximo interés desde el punto de vista psicológico, porque lleva aneja la cuestión de la «existencia» de los entes matemáticos, difícil problema del que nos ocuparemos más adelante.

V

Generalización del concepto de número

Hemos visto cómo el concepto de número surge de la necesidad biológica de contar, abstrayendo después la acción de correspondencia; es decir: eliminando con el pensamiento las particularidades de los conjuntos de objetos y reteniendo su propiedad de coordinabilidad, común a todos ellos.

Esta abstracción, que tiene un evidente carácter negativo, sólo puede satisfacer al espíritu cuando no se sale del campo del número natural y de las operaciones fundamentales de la Aritmética; pero el hombre no debió tardar en darse cuenta de que estas operaciones eran insuficientes no sólo para la vida práctica sino también para la vida intelectual. La sustracción cuando el minuendo es menor que el sustraendo, la división si el dividendo no es múltiplo del divisor y la extracción de la raíz de un número no potencia perfecta de otro, plantearon el problema de la generalización del concepto de número.

Paralelamente a esta necesidad aritmética se presentó otra de carácter geométrico: determinar los puntos de una recta sin posible ambigüedad de dirección, medir la diagonal del cuadrado construído sobre la unidad de longitud, representar todos los puntos del plano y del espacio, y, avanzando más, calcular el área de las superficies que no podían transformarse en un rectángulo equivalente y resolver ciertos problemas de tangentes a curvas en casos difíciles.

Estas cuestiones llevaban aneja la creación de símbolos adecuados que, independientes del origen concreto del cálculo matemático en los distintos sectores de su actuación, permitieron construir una teoría rigurosa que satisficiese a las exigencias de Gnoseología para poderles conceder carta de naturaleza científica, pero sin olvidar su proceso psicológico, indispensable también para su necesidad vital.

«Las ideas se me resisten», decía Malebranche; y Hermite escribía en cierta ocasión a Stieltjes estas palabras en las que el gran analista francés se muestra más psicólogo que matemático: «Creo que los números y las funciones del Análisis no son el producto arbitrario de nuestro espíritu; pienso que existen fuera de nosotros con el mismo carácter de necesidad que las cosas de la realidad objetiva, y que las encontramos, las descubrimos o

las estudiamos lo mismo que los físicos, los químicos y los zoólogos»; y en otra ocasión decía a Galois: «Estoy completamente convencido de que las más abstractas especulaciones del Análisis corresponden a realidades que existen fuera de nosotros y que algún día entrarán en el dominio de nuestro conocimiento» (1). El propio malogrado creador de la teoría de grupos sostenía que «los analistas quieren disimularlo, pero no deducen, sino que combinan y comparan, y cuando se aproximan a la verdad lo hacen tropezando a un lado y otro del sitio en que caen» (2).

Estas vacilaciones, estos tanteos repetidos una y otra vez, son los que luego cristalizan en un concepto puro porque el carácter negativo, antes aludido, se transforma en un acto positivo mediante una penetración intelectual que, captando la esencia íntima de los objetos del mundo externo, hace asumir a la representación un sentido y una razón por sucesivas experimentaciones mentales, que son las que permiten la generalización como condición de la Ciencia.

---

(1) *Correspondance,* París, Gauthier-Villars, 1905. II, pág. 398 y I, pág. 8.

(2) Tannery (J.); *Manuscrits d'Evariste Galois,* París, Gauthier-Villars, 1908, pág. 35.

Esta generalización obedece a un mecanismo guiado por el interés o por la utilidad que inspiran todas las percepciones, en el cual—si no es automático—la reflexión establece ciertas soluciones de continuidad para formar un sistema que tiende a un fin.

Dicho mecanismo consiste en arrumbar al campo de la conciencia oscura lo que no nos interesa de momento, y destacar, en cambio, por medio de una selección adecuada, los caracteres idénticos de una pluralidad para perfeccionar y simplificar los datos de la sensación bruta, concluyendo en una especie de condensación que hace que el espíritu, según la bella imagen de Ribot, se asemeje «a un crisol en cuyo fondo se ha depositado un residuo de semejanzas comunes, habiéndose volatilizado las diferencias» (1), con lo cual la conciencia queda en condiciones de percibir lo que se ha llamado «el esqueleto del pensamiento» que, revestido después de jugosa carne conceptual, deviene una disciplina científica en la que tanto la abstracción como la generalización abandonan el período prelingüístico para adentrarse en el campo fecundo del símbolo.

Pero al estudiar las diversas ampliaciones de los

(1) *L'Evolution des idées générales,* 5.ª ed.—París, Alcan, 1919, pág. 11.

conceptos matemáticos, el psicólogo se pregunta cómo nutriéndose el espíritu de sensaciones individuales, puede crear, no obstante, imágenes que correspondan a todos los objetos posibles dentro de cada orden de ideas.

Particularizando esta cuestión al caso de la Matemática, observemos que el número fraccionario—primera etapa de la generalización aritmética—no es sino el resultado de una operación material, que consiste en partir, en romper en pedazos iguales una unidad y darse cuenta por una parte de los pedazos resultantes, y por otra de los que se consideran en cada caso determinado. Tenemos, pues, dos hechos de conciencia producidos por dos sensaciones de origen mecánico: una primera sensación extensiva—el denominador de la fracción—y otra intensiva—el numerador—que dan, respectivamente, la cualidad y la magnitud del número fraccionario, formado ya por la yuxtaposición de ambas en una hipóstasis psicológica que no es una nueva manifestación, sino un perfeccionamiento, un estado de conciencia que corresponde al fenómeno físico que ha servido de excitación.

De este acto tan simple nace el concepto de fracción sin más que considerar la pareja de números naturales que la representan como un número único al que se somete después a las mismas operaciones fundamentales que aquéllos con objeto de que el nuevo ente definido comprenda como caso particular a sus progenitores y pueda servir para resolver cuestiones ante las cuales éstos confesaron su impotencia, quedando, de hecho, transformada la unidad primitiva en subunidades derivadas que, a su vez, forman un conjunto como cualquiera otro y adquiriendo el derecho a ser bautizado con el mismo nombre: *número,* puesto que a la realidad física del fraccionamiento corresponde la realidad mental de la fracción.

De aquí resulta que lo mismo material que intelectualmente una unidad numérica, dividida en diez partes, por ejemplo, equivale a diez décimos, estableciéndose entre estos décimos las mismas relaciones que entre los números enteros, de tal forma que no andan muy descaminados los que en el sorteo de Navidad dicen que el billete tiene veinte décimos puesto que el hábito ha hecho asumir a la frase «décimo de lotería» un sentido horro de toda significación numérica, y, si bien es cierto que quienes se expresan en tal forma bordean un peligroso psitacismo físico-aritmético, tienen razón, sin embargo, desde el punto de vista psicológico porque, así como el enamorado piensa su amor sin transformarlo en objeto de pensamiento, el jugador de lotería compra el derecho a que su número resulte premiado sin que, al adquirir la participación, tenga en cuenta el denominador de la fracción que posee, ni mucho menos la probabilidad de que le

toque, convirtiéndose en hombre de acción que obedece a un impulso inconsciente y lo ejecuta—o lo reprime si le acomete el temor de perder su dinero—por una tendencia ciega, con intervención de los nervios aferentes del gran simpático que dan origen a una emoción como causa, si no determinante, al menos eficiente de su actitud en cuanto jugador no psicólogo que prescinde de las condiciones fisiológicas de la representación del número.

Adquirido ya el concepto de fracción, la conciencia establece una conexión entre los datos empíricos y el dinamismo intelectual y hace con los nuevos entes matemáticos las mismas combinaciones que con los números naturales, creando una técnica que le permite una economía de pensamiento.

Esta economía se acrecienta con el número inconmensurable cuya psicogénesis es mucho más compleja que la del fraccionario porque está sobrecargada de nociones extrañas a la Aritmética pura.

Como es sabido, fué la Escuela pitagórica la que encontró las relaciones que unen las propiedades aritméticas con las geométricas, y así, por ejemplo, representando los números por puntos alineados, el filósofo de Samos comprobó que el producto de un número por sí mismo es un cuadrado, comprobación que le condujo al descubrimiento de una entidad geométrica que no era una suma de puntos.

En efecto, siendo el cuadrado el más sencillo de todos los rectángulos, el más sencillo de todos los cuadrados es, evidentemente, el construído sobre la unidad de longitud, y entónces, si se toma por unidad la diagonal de este cuadrado, la observación empírica demuestra que el área del cuadrado construído sobre esta diagonal es igual a 2, y al fracasar todos los intentos para descubrir el número cuyo cuadrado fuese 2, quedó herido de muerte el equilibrio del dogmatismo pitagórico, puesto que había que ampliar el concepto de número de tal modo que hubiese una correspondencia absoluta entre este concepto y el de magnitud medible y renunciar, por consiguiente, a la unidad de la Ciencia, tan amorosamente establecida por los griegos, idea intolerable porque era extraña al sentimiento antiguo del Universo y que cristalizó en una leyenda, según la cual el primero que sacó a la luz pública la noción de lo irracional, perdió la vida en un naufragio «porque lo inexpresable e inimaginable debe siempre permanecer oculto» (1), leyenda que ha inspirado a Spengler estas palabras: «Quien sienta el

(1) Cantor: *Vorlesungen über Gestchichte der Matematik,* 2.ª edición.—Leipzig, Teubner, 1907, t. I, pág. 171.

terror que se manifiesta en este mito—es el mismo terror que estremecía a los griegos de la época más floreciente ante la idea de ensanchar sus minúsculos Estados-ciudades, convirtiéndolos en territorios políticamente organizados; ante las perspectivas de largas calles en línea recta y avenidas interminables; ante la astronomía babilónica, con sus infinitos espacios estelares; ante la idea de salir del Mediterráneo con rumbo que ya de antiguo habían descubierto las naves egipcias y fenicias; es la última angustia metafísica que les atenazaba el pensar en la disolución de lo tangible, lo sensible, lo presente, lo actual, con que la existencia antigua se había construído como una cerca protectora, allende la cual yacía no sabemos qué cosa inquietante, una sima, un elemento primario de ese cosmos, creado y mantenido en cierto modo artificialmente—, quien comprenda ese sentimiento, ha comprendido también el sentido más hondo del número antiguo, la *medida opuesta a lo inmenso*, y ha logrado compenetrarse con el superior ethos religioso de esa limitación. Goethe, al estudiar la naturaleza, ha conocido muy bien ese sentimiento; y así se explica su polémica, casi angustiosa contra la Matemática que, en realidad—y esto nadie todavía lo ha entendido bien—, iba dirigida instintivamente contra la Matemática *no* «antigua», contra el cálculo infinitesimal, que servía de fundamento a la física en su tiempo» (1).

Este terror griego ante el concepto de número irracional—que llevó a Euclides a afirmar que las distancias inconmensurables no se comportan como números—se explica por el hecho de no ser el número una formación intelectual pura, sino afectiva; y el deseo de emanciparse de la inquietud que les producía la disconformidad entre los números y ciertas magnitudes, les obligó a buscar una explicación a las leyes morales que regían su sistema filosófico e hicieran posible la permanencia del número entero en el lugar privilegiado que ocupaba en la Aritmetica.

Por esta causa los griegos no crearon el Álgebra, que supone una concepción sintética, incompatible con el carácter analista de los filósofos atenienses, sino que fueron los árabes—herederos de los métodos indios—quienes habían de dar una forma definida, rápida y segura a los procedimientos orientales de cálculo, libertándolos de la intuición geométrica y dándoles rigor, en una fusión de dos corrientes—la india y la griega—que permitiese olvidar el significado de los elementos que se combinan

(1) *La decadencia de Oriente,* traducción de Manuel G. Morente.—Madrid, Calpe, 1923, t. I, pág. 106.

para atender únicamente al mecanismo de la combinación y considerar las fórmulas como todos de una sola pieza.

El Álgebra árabe no es un progreso sobre la Aritmética griega, sino una superación, ya que, relegando a segundo término los resultados, se preocupa más del método constructivo que, ocho siglos después, había de permitir a Descartes crear la Geometría Analítica y demostrar al mismo tiempo que el razonamiento es un producto étnico considerado desde el punto de vista psicológico.

El método para construir el número irracional consiste en establecer una cortadura en el campo de los números fraccionarios. Así, volviendo al ejemplo pitagórico de la razón entre la diagonal y el lado del cuadrado definida por la igualdad

$$x^2 = 2 ,$$

se consideran, por un lado el conjunto de las fracciones cuyos cuadrados son mayores que 2, y por otro el de aquellas cuyos cuadrados sean menores que 2, y se define el número

$$x = \sqrt{2}$$

como el límite de separación de ambos conjuntos, previamente ordenados en sendas sucesiones monótonas.

Ya no basta, como en el caso de los números naturales y fraccionarios, añadir un elemento único—unidad o subunidad—para combinarlo con el conjunto definido anteriormente, sino que es necesario despojar una noción de los caracteres que la particularizan y salir del círculo vicioso en que quedaba encerrado el concepto aristotélico de número, puesto que si éste era el símbolo de un conjunto cuyos elementos son relaciones iguales entre sí y la relación se ha establecido, precisamente, por una pareja de números, dependiendo su igualdad de la de ciertas operaciones numéricas, resulta la noción más complicada adscrita a la más simple, y, en cierto modo, supeditada a ella.

Lógicamente, el problema queda resuelto con el concepto de paso al límite; pero, desde el punto de vista psicológico, la antinomia parece inexplicable.

Observemos, sin embargo, que el objeto de la generalización matemática no es el número, sino la operación; es decir: el acto por el cual el pensamiento transforma un hecho de conciencia en otro y subordina el símbolo a la operación a la que debe su existencia lógica y formal, de donde resulta que el número es la expresión condensada de una relación en vez de ser la relación el

ente abstracto constituído por una pareja de números, quedando ya liberado de toda preocupación lógica no sólo el concepto de número irracional sino también el de infinitésimo, puesto que el número queda definido por la posibilidad de la operación y puede servir, en adelante, para nuevas operaciones despojadas de todo carácter restrictivo, de tal modo que devengan actuales ciertas condiciones que se encontraban en estado potencial en la aparente sencillez del caso particular.

Estas ideas aparecen con más nitidez cuando se analiza el proceso psicológico para pasar del conjunto de números reales—enteros, fraccionarios e inconmensurables—a los sistemas complejos e hipercomplejos.

El más sencillo es el que da origen a la interpretación de las ecuaciones del tipo

$$x^2 + 1 = 0\,,$$

cuyas soluciones no tienen sentido en el campo real. Para dárselo se ha inventado el símbolo

$$a + b\,i\,,$$

donde a y b son números reales, e i un ente definido por la igualdad

$$i^2 = -1\,,$$

sometiendo después dicho símbolo a las mismas leyes que los números reales.

Pero como estos convenios desplazan el problema al campo de la Lógica, el psicólogo necesita explicarlos para determinar las relaciones que la expresión-raíz de la ecuación

$$i^2 = -1$$

pueda tener con otras expresiones conocidas del Álgebra, lo cual es, en el fondo, un círculo de hierro puesto que sería resolver un problema mediante el mismo problema, y entonces o se le da una interpretación nominalista para hacerlo compatible con la concepción cartesiana o se niega la realidad científica que quiere explicarse, puesto que de la igualdad

$$a + b\,i = 0$$

no se deduciría

$$i = -\frac{a}{b},$$

sino

$$a = 0\,, \quad b = 0\,,$$

y el símbolo i sería una unidad nueva e independiente

del Álgebra, que no conservaba las reglas del cálculo usual.

Gigantes para Don Quijote y molinos de viento para Sancho, las expresiones imaginarias son ambas cosas a la vez, y si desde el punto de vista del caballero andante —nominalismo—se corre el peligro de recibir un golpe y quedar con la lanza rota, desde el del escudero—realismo—la Matemática no hubiese progresado; pero, al fin y al cabo, era Sancho quien tenía la razón en aquel caso particular.

Ni sensible ni racionalmente se podían establecer las reglas del cálculo de números complejos, ni aún quedaba el recurso de dar aldabonazos en la puerta de la intuición porque no respondería. Tales números eran simplemente *entia rationis,* entes ideales sin realidad objetiva que manejaban los matemáticos de tal modo que las operaciones efectuadas con ellos no condujeran a ninguna contradicción lógica.

Mucho tiempo estuvieron los números imaginarios sin salir del campo formal, gracias a la mecanización de las operaciones con símbolos muy condensados, lo que explica psicológicamente que ciertas expresiones algebráicas, desprovistas de sentido real, den origen a hechos nuevos que pasan inadvertidos hasta que se encuentra el verdadero significado del símbolo, como correspondiendo a una realidad física sin la cual se desvirtúa el carácter natural y fundamental del razonamiento.

Y esto ocurrió hasta que, gracias a la concepción de Argand, los números imaginarios tuvieron una representación real: un sector dirigido, dando la razón a Pascal: «Los números imitan al espacio, aunque son de tan diversa naturaleza», y que, en el caso de los complejos, Gergonne los dispone esquemáticamente combinando los imaginarios con los reales en esta forma:

```
                                   .
                                   .
  − 5 + 4 i .......................4 i
            .                      3 i
            .                      2 i ........... 6 + 2 i
            .                      1 i             .
...−6, − 5, − 4, − 3, − 2, − 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ....
                   .                                  .
                   .           − 1 i                  .
         − 3 − 2 i ............− 2 i                  .
                               − 3 i .................9 − 3 i
                               − 4 i
                                 .
                                 .
```


Si consideramos las dos expresiones

$$(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2\,,$$
$$(a+b\,i)\,(a-b\,i) = a^2 + b^2\,,$$

la primera real y la segunda imaginaria, aquélla indica que un punto se puede obtener por un corrimiento de segmentos sin salir de un eje, mientras que ésta afirma tal imposibilidad, la cual desaparece en cuanto se haga una rotación o se considere el producto

$$(a+b\,i)\,(a-b\,i)$$

como el símbolo de la construcción de los dos catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea $a^2 + b^2$.

Los números complejos responden, pues, a una realidad geométrico-cinemática más extensa que la que simbolizan los números reales, realidad empírica que cae, por consiguiente, en el campo de la Psicología, sólo que no presenta la simplicidad que en el caso de los números enteros y fraccionarios porque ya hay que manejar símbolos de símbolos, operación psicológica gracias a la cual le fué posible a Cauchy demostrar el teorema fundamental del Álgebra—toda ecuación tiene una raíz—por consideraciones intuitivas, y, guiado por la interpretación geométrica del imaginarismo, puso de manifiesto, una vez más, el origen experimental de la Matemática y el carácter distintivo de su razonamiento que, psicológicamente, es un hecho de conciencia.

Rey Heredia—a quien no sólo no se le ha hecho la justicia que merece, sino que ciertos espíritus atacados de hispanofobia matemática le reprochan el haberse colocado en el punto de vista de Argand para explicar los números imaginarios—da la siguiente interpretación aritmética de los números: «La Aritmética atribuye a la sucesión en el tiempo un carácter intuitivo, según el cual los números se desenvuelven siempre en un sentido progresivo en virtud de la síntesis sumatoria que los constituye: los números en ella carecen verdaderamente de cualidad, y si alguna tienen, es la positiva, según comúnmente se dice: en la síntesis aritmética, propiamente no hay números negativos ni imaginarios. Pero el Álgebra, que prescinde de esa cualidad intuitiva del número, la subordina inmediatamente a toda la variedad de cualidades impuestas a la sucesión por los conceptos del entendimiento: y para ella no sólo son posibles los números negativos sino también los imaginarios.

No suelen, en verdad, ofrecer los problemas concretos ejemplos de indirección numérica. El lenguaje común es en este punto muy limitado, y los problemas ordinarios no suponen posibilidad de otras soluciones que las positivas, dando interpretación natural sólo en algunos

casos a los resultados negativos. Todos los problemas referentes a la fortuna de las personas, versan ordinariamente sobre cantidades o *habidas* o *debidas,* siendo muy raro formularlos respecto de cantidades meramente *depositadas*, y que no afectan directamente al haber ni al debe, y que, sin embargo, afectan de un modo indirecto a la situación de un capital.

Si una cantidad positiva representa el *haber* y una negativa el *deber,* una imaginaria debe expresar un *depósito*. La imaginaria negativa significará un *deber* de este depósito.

Si en el juego se considera la circunstancia común de quedar en fondo de una mano para otra algunas cantidades, créditos o deudas, para expresar la verdadera situación actual de cada jugador, será necesario, además de lo positivo (expresión de la ganancia) y de lo negativo (que significa la pérdida), considerar lo imaginario, que representará lo retenido en el platillo, que ni es pérdida ni ganancia actual, sino aplazada: la imaginaria negativa será deuda al platillo, con el cual parece que se lleva una cuenta exterior, y como extraña al haber y deber directos que median entre los jugadores» (1).

(1) *Teoría transcendental de las cantidades imaginarias.*— Madrid, Imprenta Real, 1865, pág. 46.

La utilidad de las expresiones imaginarias es inmediata porque suponen para el matemático una gran economía mental. Así, por ejemplo, es sabido que la cuerda común a dos circunferencias es el eje radical de las mismas; es decir: el lugar de los puntos desde los cuales se les puede trazar tangentes iguales, y también de los centros de las circunferencias que las cortan ortogonalmente. Si las circunferencias no se cortan, decimos que la cuerda *sigue pasando* por los puntos de intersección, pero que estos puntos son *imaginarios*. Las propiedades indicadas del eje radical subsisten; son propiedades permanentes, mientras que la de ser cuerda común es sólo una propiedad *accidental*.

Finalmente, se ha intentado definir el número a la inversa; esto es: partiendo de consideraciones geométricas; y así Dumont llama número complejo relativo a un plano orientado a toda «ley de formación de segmento rectilíneo y de vector, mediante otro segmento u otro vector» (1), definición que, desde el punto de vista psicológico, tiene particular interés por apoyarse en el concepto de medida, que es de origen experimental. Se reduce en el fondo a determinar cuántas unidades de

(1) *Théorie générale des nombres*.—París, Gauthier-Villars, 1914, pág. 51.

medida están contenidas en la longitud a medir, considerando, por consiguiente, el grupo de actos cuyo número cuenta; es decir: un proceso mental que, partiendo de una experiencia, termina en un hecho de conciencia traducible en símbolos, que, en virtud de las relaciones reales efectivas de los objetos físicos que representan, hacen de la Matemática un todo orgánico por la conexión de diversos sistemas de conexiones, a las que llega el espíritu humano mediante un proceso de abstracción y generalización perfectamente definido.

VI

La generalización en Geometría

Más claramente que en Aritmética, se observa en Geometría el carácter de experimentación mental que tiene el razonamiento matemático. Creada la Geometría para medir el suelo por los agrimensores egipcios, puede decirse que estuvo adherida a ese mismo suelo hasta principios del siglo XIX en que Gauss suelta las amarras que la sujetaban a la Física, rompe la solución de continuidad que la separaba de la Aritmética y hace de ella una ciencia *pura* dando a sus verdades un carácter lógico tal que «no se sabe ni de qué se habla, ni si lo que se dice es cierto» (1).

La Geometría no es ya una rama de la Física, una ciencia aplicada, sino que sus aplicaciones quedan al

(1) «Thus mathematics may be defined as the subjet in wich we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true.» Russell: *International monthly,* 1901, pág. 84.

margen de la Ciencia porque la recíproca correspondencio entre la razón y la experimentación hace de ésta una especie de inteligencia en acto que adquiere el derecho de propiedad psicológica sobre los conceptos geométricos.

Pero estos conceptos, lo mismo que los de la Aritmética, nacen de su equivalencia respecto a una necesidad vital, a un deseo o a un afecto. Tal el concepto de triángulo, es decir: de un triángulo que no sea ni acutángulo, ni rectángulo, ni obtusángulo, ni equilátero, ni isósceles, ni escaleno, sino todos y ninguno de ellos a la vez, idea general cuya génesis, preñada de dificultades para Loke (1), negaba en absoluto Berkeley (2); pero que se explica psicológicamente por el hecho de ser una figura geométrica que posee propiedades perfectamente determinadas y *equivalentes entre sí* como instrumentos de experimentación mental para ciertas investigaciones científicas.

Vamos a demostrar, por ejemplo, que la suma de los ángulos de un triángulo vale dos rectos. Bien conocido es el procedimiento: Si por uno de los vértices A del

(1) *An Essay concerning Human Understanding.*—Londres, Routlege, (s. a.); lib. IV, cap. VII, § 9, pág. 509.

(2) *A Treatise concerning the Principles of Human Knowledge.* Oxford, Clarendon Presse, 1901, t. I, págs. 246 y siguientes.

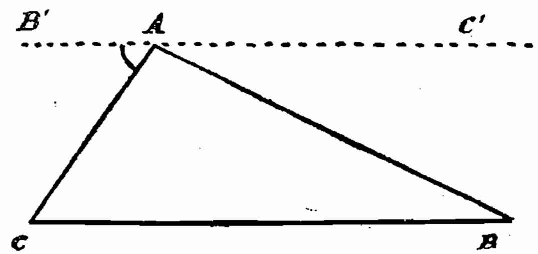
triángulo se traza la recta $B'\,C'$ paralela al lado opuesto, se tiene:

$$\text{áng } B'\,A\,C = \text{áng } A\,C\,B$$
$$\text{áng } C'\,A\,B = \text{áng } A\,B\,C$$

por alternos internos entre las paralelas $B'\,C'$ y $B\,C$ cortadas por las secantes $A\,C$ y $A\,B$ respectivamente; luego la suma de los ángulos del triángulo es igual a la

$$B'\,A\,C + C\,A\,B + C'\,A\,B = 2 \text{ rectos}$$

por ser ángulos formados alrededor de una recta.



Analicemos el mecanismo de esta demostración. Hemos hecho una operación real: trazar la paralela $B'\,C'$ a la $B\,C$, y otra mental: transportar con el pensamiento los ángulos ACB y ABC sobre los $B'AC$ y $C'AB$, respectivamente, operaciones ambas que sintetizan un proceso de otras anteriores ejecutadas en realidad.

Admitiendo que el espacio no ejerce acción deformante sobre los cuerpos, puesto que estamos operando en el campo de la Psicología, se ha comprobado empíricamente que los ángulos alternos internos comprendidos entre dos paralelas son superponibles por una adecuada rotación en torno al punto medio del segmento de transversal limitado por las paralelas, lo que nos permite colocar mentalmente los tres ángulos del triángulo con el vértice común, como lo haríamos en la realidad recortando previamente con unas tijeras los ángulos de un triángulo de papel. El goniómetro con que los medimos después es la paralela *B'C'* al lado *BC*.

Y el teorema es ya *general;* es decir: válido para todos los triángulos porque nos hemos apoyado en comprobacionos empíricas anteriores más generales. Si hubiémos efectuado el transporte material de los ángulos, habríamos visto que la propiedad enunciada se verificaba en el triángulo particular elegido, pero nos cabría la duda de si convenía también a cualquier otro triángulo, mientras que esta duda no es posible con la experimentación mental, que hace *necesario* el razonamiento porque opera en el presente, y, limitándose a interpretar lo dado por la experiencia, toma un carácter intemporal que lo hace reversible.

Esta es la diferencia esencial entre el razonamiento

matemático, puramente apreciativo, y el razonamiento que parte del efecto para remontarse a la causa, característico de los naturalistas, y el que inspira a los políticos y pedagogos, que tiende a prevenir los efectos.

Apoyado en la experiencia, el razonamiento geométrico es, pues, necesario porque es general y es general porque es necesario, toda vez que resulta de la actividad constructiva del espíritu que da siempre un hecho nuevo, comprobable por la conciencia de haber aplicado correctamente las reglas prácticas de acción del propio espíritu del investigador.

El razonamiento silogístico sólo conduce a una necesidad, a una forzosidad que carece de valor fuera de la Lógica, mientras que el razonamiento geométrico, precisamente por abandonar el campo contemplativo para adentrarse en el de la acción directa, establece una relación necesaria entre dos elementos heterogéneos y produce una propiedad inédita, necesaria vitalmente, y general.

Lo que desorienta a primera vista es que la Geometría—por lo menos la Geometría elemental—demuestra operando sobre ejemplos, sobre figuras particulares trazadas con tiza en el encerado y construye manualmente la demostración; pero esto, lejos de ser una desventaja, que pondría contingencia en el razonamiento, es una ventaja que pone necesidad psicológica en él, ya que sobre aquellas figuras, aparentemente privilegiadas, no se puede reflexionar sin el auxilio de otras comprobaciones empíricas que nos permiten conocer de antemano el resultado de una experimentación mental, convertida en objeto de nuestro pensamiento primero y en hecho de conciencia después.

Esta generalización, que podríamos llamar de primer grado, permite construcciones imposibles en otros casos más amplios y sirve de punto de partida, por consiguiente, para abordar éstos. Así, en el teorema anterior se funda el cómputo de los ángulos de un polígono, descomponiendo éste en tantos triángulos como lados tiene mediante el trazado de las rectas que unen un punto cualquiera tomado en el interior del polígono con cada uno de sus vértices.

De esta operación materialmente realizada, parte la experimentación mental que nos lleva a concluir que si consideramos todos los triángulos y de la suma de todos sus ángulos restamos los reunidos en el vértice común, quedan los de las bases, es decir: los del polígono, y como por otra comprobación empírica anterior sabemos que la suma de los ángulos formados alrededor de un punto vale cuatro rectos, resulta, en definitiva, que la

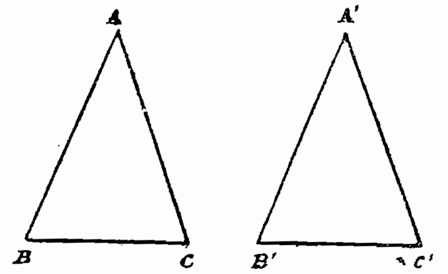
suma de los ángulos de un polígono vale tantas veces dos rectos como lados tiene menos dos.

Fácilmente se observa que el proceso psicológico de esta demostración es una mezcla de operaciones materiales y mentales, de transformaciones sucesivas manualmente realizadas unas y simplemente pensadas otras, con un objeto único: conocer la suma de los ángulos de un polígono.

El paso de unas a otras queda fijado por las palabras «de donde», «luego», «por consiguiente» y otras análogas. Gramaticalmente, estas conjunciones—de *cum* y *jungere,* juntar con—enlazan dos partes del discurso; pero desde el punto de vista psicológico el enlace es más bien una separación: la que hay entre la operación real y la mental, entre la comprobación del hecho físico—contingente—y la del hecho de conciencia—necesario—que aprehende el resultado de la operación. Tanto dichas conjunciones como las frases «se tiene», «resulta», etc., equivalentes a ellas, son, pues, verdaderas cortaduras en la labor del pensamiento reflexivo.

Consideremos aún un tercer ejemplo para concluir de fijar el mecanismo psicológico del razonamiento geométrico. También tomado de la Geometaía elemental, es la demostración de este teorema: En todo triángulo isósceles, los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales.

Como se sabe, la demostración consiste en considerar un segundo triángulo $A'B'C'$, reproducción exacta del ABC, y aplicarlo invertido sobre éste de modo que A' caiga en A y C' en B, lo que siempre es posible por ser el lado $A'C'$ reproducción de AC y como los ángulos en A y A' son el mismo, el lado $A'B'$ tomará la dirección AC, y siendo $A'B'$ la reproducción de AB, que es igual a AC por hipótesis, el punto B' caerá en C y los dos triángulos coinciden; luego el ángulo C' se ha yuxtapuesto al B y como es la reproducción del C, resulta en definitiva que los ángulos B y C son iguales.



La experimentación mental es bien patente en este ejemplo. Todo el mecanismo de la demostración consiste en exfoliar el triángulo con el pensamiento y aplicarlo, invertido, sobre su propia huella. El ángulo A coincide consigo mismo y cada uno de sus lados se yuxtapone a la huella del otro lado que es igual a él. La coincidencia

del tercer lado es inmediata porque conocemos empíricamente la unicidad de la recta que une dos puntos.

La demostración geométrica es, pues, una construcción. Aunque no sea precisa la operación manual y su comprobación con instrumentos de medida, la construccion mental es indispensable como consecuencia de acciones externas, de movimientos, puesto que, en último análisis, la Geometría no es más que el estudio de los movimientos de los cuerpos sólidos. Si no hubiera cuerpos sólidos, no habría espacio ni, por consiguiente, Geometría, ya que esta ciencia está fundada en la existencia de un espacio homogéneo, ilimitado e indefinidamente divisible en el que los cuerpos se pueden mover conservando las propiedades que corresponden al concepto físico de solidez, conforme a nuestras sensaciones.

Admitida la invariabilidad de forma, la experiencia nos inspira la de la posibilidad de transportar un cuerpo de un lugar a otro del espacio, de donde resulta el concepto de distancia, puesto que toda medida de rectas se reduce a una yuxtaposición de cuerpos, y para comparar, y, por tanto, medir, es necesario interpretar la comparación con una barra rígida, que se pueda desplazar sin deformación, independientemente de la estructura del espacio *en sí*—problema metafísico y no psicológico—toda vez que la experiencia nunca podrá demostrar si el espacio tiene estructura euclídea o no-euclídea.

Sabemos que en el espacio hay curvaturas locales y que presenta gibas en los arrabales del mundo galáctico donde existen nebulosas que se hallan a distancias cifradas en ciento cincuenta y doscientos siglos de luz de nosotros, deformidades todas que dan al Universo una estructura granujienta, parecida a la de la superficie de una naranja; pero aunque sucesivos progresos de la aviación permitan salir de la estratósfera y se puedan construir vehículos que lleguen a alcanzar la velocidad de la luz, no se podría demostrar experimentalmente si el espacio se cierra sobre sí mismo.

Puesto que el Universo no coincide con la representación empírica que tenemos de él y para captar su representación es necesario un dinamismo intelectual en cuya zona apenas podemos penetrar, Einstein propuso un espacio estacionario y esférico que respondiese al concepto de continuo tetradimensional espacio-tiempo, con idénticas propiedades para todos los observadores, orientando sus ideas en una dirección francamente conservadora; pero, al fin, tuvo que volver al punto de partida cuando descubrió que la imposibilidad de un espacio euclídeo resultaba de haber postulado que era estático, terminando por decir que cada cual pensara sobre este punto lo que quisiera, libertad que viene a dar la razón

al psicólogo cuando afirma que no le interesa la estructura euclídea o no-euclídea del espacio, como propiedad intrínseca, de la misma manera que no le preocupa si una recta tiene la propiedad de ser medida en metros o en varas.

VII

Fundamentos del cálculo infinitesimal

Al estudiar la invariación del número, hemos aludido (1) al concepto de *límite* como concepto de orden. Esto exige algunos desarrollos para poder analizar el mecanismo psicológico del razonamiento matemático en el campo del Cálculo infinitesimal.

El paso al límite es una operación que los principiantes suelen ver rodeada de un halo misterioso, de una atmósfera esotérica, mística y mítica a un mismo tiempo, en la que sólo se penetra después de una larga y ancha fatiga mental; un paso, como el de las Termópilas, erizado de dificultades.

Y, sin embargo, nada más sencillo que franquearlo, aunque, como en la histórica batalla, el Jerges de la Matemática necesite también, para vencer al Leónidas de la Lógica, el auxilio de un Sphialtes. Lo más lamentable de

---

(1) Vid. supra, pág. 41.

este símil es que el papel de traidor le toca a la Psicología.

El concepto de paso al límite se introduce en Matemática considerando un número arbitrario, y observando que es mayor que la diferencia entre otro número fijo —*límite*—y una cierta función.

Precisemos un poco más. Dada una sucesión indefinida de números reales

$$a_1 , a_4 , a_3 , \dots , a_n , \dots ,$$

decimos que tiene por límite el número a si *desde un cierto valor de* n *en adelante,* la diferencia

$$a^n - a$$

es menor, en valor absoluto, que un número arbitrario (1); es decir: que, fijado un número positivo ε existe un valor $n = i$ tal que para a_i y todos los términos que le siguen, se verifica

(1) En los tratados antiguos se agregaba «tan pequeño como se quiera», frase totalmente superflua, puesto que su contenido está en el de la palabra *arbitrario*. A pesar de esto, todavía se lee dicha frase en muchos libros modernos—modernos por la fecha de su edición—que son los depositarios de lo que podríamos llamar Matemática ortodoxa.

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon ,$$

escribiéndose simbólicamente

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n .$$

Para convencerse de la existencia de este límite es preciso ejecutar material o mentalmente varias experiencias, hecho que realizan no sólo los principiantes, sino los profesores cuando explican este concepto en cátedra. Así, la sucesión

$$\frac{3}{2} , \frac{5}{4} , \frac{7}{6} , \frac{9}{8} , \dots , \frac{2n+1}{2n} , \dots ,$$

tiene por límite 1, pues desde el valor $n = 51$ en adelante se verifica

$$\frac{2n+1}{2n} - 1 = \frac{1}{2n} < 0'01 .$$

Para fijar en este ejemplo el valor $\varepsilon = 0'01$, hay que practicar previamente muchas experiencias de cálculo y comprobar en cada una que hay un valor de la variable suficientemente próximo a 1 que cumple tal condición. El proceso psicológico que termina en la captación del concepto consiste en imaginarse la posibilidad de hacer realmente las experiencias que conducen a considerarlas como hechas.

Si la variable tiende a 0 entonces se llama *infinitésimo*. Por ejemplo: las variables

$$\operatorname{sen} x\,, \quad \frac{1}{2^n}\,,$$

son infinitésimos para $x \to 0$ y $n \to \infty$, respectivamente, pues

$$\operatorname{sen} x - 0 = \operatorname{sen} x\,, \quad \frac{1}{2^n} - 0 = \frac{1}{2^n}\,,$$

se pueden hacer tan pequeños como se quiera, v. gr. menor que 0'001 desde

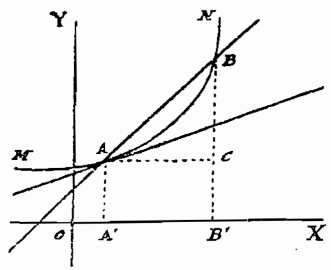
$$x \leqq 0^{\circ}\, 3'\, 26''\,, \quad n \geqq 10\,.$$

El estudio sistemático de los infinitésimos pertenece al Cálculo diferencial que, por medio de adecuados pasos al límite, obtiene relaciones cuantitativas más sencillas que las que se verifican entre los números que sirven de partida, realizando, por consiguiente, una economía de pensamiento y obedeciendo a la ley biológica del mínimo esfuerzo.

Lo que ocurre es que el complicado andamiaje de símbolos hace olvidar al matemático que está operando

con números *fijos*, únicos que el espíritu humano puede manejar como materiales de construcción, y de aquí los escollos con que tropezó el Cálculo infinitesimal en sus primeros pasos puesto que, como observa Voss, «se presentó la dificultad de hacerse una representación que satisficiera lógicamente a los infinitésimos, pues mientras unos los consideraban como cantidades nulas, otros se las imaginaban, místicamente, como magnitudes que contenían el germen de la cantidad finita a pesar de ser menores que cualquiera otra cantidad concebible (1).

Establecido el concepto de límite, el de derivada, fundamental en el Cálculo, es inmediato.



Si en la curva MN representada por la función $y = f(x)$ fijamos un punto A y trazamos por él una recta

(1) *Ueber das Wesen der Mathematik,* Leipzig, Teubner, 1913, página 47.

que corte a la curva en un segundo punto B, al incremento $A' B' = h$, dado a la variable cuando se pasa del punto A al B, corresponde un incremento $B C = k$ de la función. La razón

$$\frac{k}{h}$$

es la tangente trigonométrica del ángulo BAC o sea del ángulo que la secante $A B$ forma con el eje $O X$.

Si hacemos girar la recta $A B$ alrededor de A, el punto B se va acercando al A y el B' al A', los valores de k y h tienden a 0 y cuando la secante AB se convierte en la tangente $A T$, desaparece la razón de incrementos, pero queda el ángulo que la tangente forma con el eje de las X como límite del BAC; es decir: que la tangente trigonométrica del ángulo que forma la geométrica con $O X$ es un número que coincide precisamente con

$$\lim_{h \to 0} \frac{k}{h}$$

y este límite es lo que se llama *derivada* de la función

$$y = f(x) .$$

El concepto de derivada tiene, pues, un origen senso-

rial, espacial, concreto, que ha sido posible porque nos hemos imaginado las sucesivas posiciones de la secante $A B$ hasta coincidir con la tangente $A T$ y hemos *visto* aproximarse el punto B al A hasta confundirse con él. El cálculo deviene ya exclusivamente algebráico y el límite de la razón del incremento de la función al de la variable asume la categoría de ente analítico que, gracias a la notación de Leibnitz, hace posible una gran «economía de cuenta»—*Oekonomie des Zählens*—como observa Mach (1) cuando habla de la mecanización del cálculo algebráico conseguida por medio de los símbolos literales que utiliza para sus demostraciones,

El simbolismo leibnitziano de representar la derivada de la función

$$y = f(x)$$

por la razón

$$\frac{k}{h} = \frac{dy}{dx}$$

cuyos términos son infinitésimos, tiene la ventaja de que mientras dy y dx están aislados, son expresiones estáti-

(1) *Erkentnnis und Irrtum.*—Leipzig, Barth, 1906, pág. 328, y *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historischkritich dargestellt.* Leipzig, Brockaus, 1912, pág. 462.

cas de magnitudes finitas, es decir: números con los que se pueden efectuar todas las operaciones aritméticas; pero, en cuanto se considera su cociente, pierden su estatismo y se transforman en algo dinámico cuyo límite es precisamente lo que hay que determinar.

Por ejemplo: si queremos derivar la función

$$y = x^2 ,$$

al incremento h de x, corresponderá un cierto incremento k de y y será entonces

$$y + k = (x + h)^2 = x^2 + 2\,h\,x + h^2 ,$$

de donde

$$k = x^2 + 2\,h\,x + h^2 - y = 2\,h\,x + h^2$$

y por tanto

$$\frac{k}{h} = 2\,x + h\,.$$

Cuando h tiene por límite 0, el primer miembro de esta igualdad es la derivada de y—que suele representarse por y'—mientras que el segundo se convierte en $2\,x$, luego es

$$y' = 2\,x\,.$$

Si analizamos el mecanismo de este razonamiento, observaremos la distinta significación de los símbolos

k y h. Hasta pronunciar la palabra *límite,* eran números sometidos a las operaciones algebráicas ordinarias: cantidades fijas, quietas, inofensivas; pero en cuanto los colocamos en forma de razón, en cuanto hicimos intervenir el concepto de límite, perdieron su estatismo y, al hacerse dinámicos, entraron en el torbellino del razonamiento e hicieron posible el descubrimiento de una verdad nueva; pero esta doble significación no es simultánea, sino sucesiva, gracias a cuyo artificio—que introduce en el razonamiento una momentánea falta de rigor, una aparente confusión entre el ser y el devenir, entre el acto y la potencia—pudo Leibnitz conciliar el aristotelismo, que afirma las cualidades irreductibles de los fenómenos, con el mecanicismo cartesiano, que prescinde de ellas, y vencer la resistencia que opone a la medida la continuidad de las magnitudes finitas, descomponiéndolas en infinitésimos que, introducidos en el cálculo como elementos auxiliares, desaparecen en la fórmula final y qué no son los *indivisibles* de Cavalieri (1), sino «cantidades incomparable o indefinidamente pequeñas, más que una mag-

(1) «El punto no es una porción de materia. Una colección infinita de puntos no forma ninguna extensión.» Leibnitz: *Opera.* Ginebra, Dutens, 1768. (Carta al P. des Bosses, fechada el 30 de abril de 1709).

nitud dada o asignable, e inferiores a otras, lo que hace el error menor que otro error dado y, por consiguiente, despreciable» (1).

Diferente del de Leibnitz es el punto de vista de Newton. Aquél considera relaciones numéricas y éste determina los elementos que componen la trayectoria de un móvil que describe una curva, y cuando investiga la derivada de una función, afirma que los incrementos de la variable y de la función llegan a anularse, puesto que «la última razón de una cantidad es el término fijo del que se aleja indefinidamente dicha cantidad considerada como variable» (2), mientras que Leibnitz supone que «las magnitudes son algo, que difieren entre sí y que están marcadas de diversos modos en el nuevo Análisis, porque si estuvieran confundidas, se tomarían por ceros», añadiendo que desprecia los infinitésimos frente a las cantidades finitas «como los granos de arena con relación al mar» (3).

La concepción de Newton no se compadece con la existencia de la derivada puesto que siendo accesible el

(1) Ibidem. (Carta al P. Tournemire, fechada el 23 de octubre de 1714.)

(2) Evellin: *Infini et cuantité.*—París, Germer-Ballière, 1880, página 161.

(3) Loc. cit., *passim.*

límite cero de sus términos, desaparece su razón, dificultad a cuyo paso sale con estas palabras: «Se objetará que, si ciertas razones últimas de las cantidades son dadas, análogamente serán dadas las últimas magnitudes, de suerte que toda cantidad se compondrá de indivisibles, por oposición a lo que Euclides demostró respecto de los inconmensurables en el libro X de sus *Elementos;* pero la objeción se apoya en una falsa hipótesis: las últimas razones con las cuales se desvanecen las cantidades no son, a decir verdad, las razones de las cantidades últimas, sino los límites a los que se aproximan incesantemente las razones de las cantidades que decrecen sin límites y a las que se pueden aproximar más que una diferencia cualquiera dada, pero que no pueden sobrepasar ni aun alcanzar antes de que las partes disminuyen hasta lo infinito» (1).

Newton, por consiguiente, pasa por algoritmos diversos del estatismo al dinamismo de los incrementos, para no reducir su teoría al simple cálculo de errores compensados—que Carnot había de redescubrir y popularizar en 1797 con sus *Reflexiones sobre la metafísica del cálculo*

(1) Evellin: Loc. cit., pág. 173.

infinitesimal—como Augusto Comte, poco comprensivo y menos piadoso, reprocha a Leibnitz (1).

La diferencia entre Newton y Leibnitz, es en definitiva, una diferencia de actitud ante el mismo hecho. El matemático inglés quiere ser práctico y sustituye los indivisibles estáticos de los griegos por magnitudes variables que se engendran no por sumación de puntos fijos, sino por el movimiento continuo de éstos—*fluxión*—mientras que el alemán, más filósofo, considera los infinitésimos en sí mismos. Newton amplia el domilio de la Matemática para encontrar nuevos métodos en las ciencias naturales —lo que hoy llamaríamos labor de técnico—mientras que Leibnitz erige su teoría en sistema general de las cosas: *la característica universal,* cuyo germen hay que buscarlo en el *Ars magna* de nuestro Raimundo Lulio; Newton, más psicólogo, tomó como punto de partida el Álgebra cartesiana, y, respetuoso con la tradición y con la génesis experimental del método griego, lo continuó procurando esquivar las generalizaciones audaces; Leibnitz, más lógico, tendió a las grandes concepciones, y por esto su método presenta los caracteres de una síntesis; pero la labor de ambos, encentada en direcciones distintas, concluyó en el soberbio parto mellizo del Cálculo infinitesimal, cuyas dificultades explican los escollos psicológicos con que tropieza el razonamiento matemático cuando penetra en la selva de los símbolos demasiado condensados.

(1) *La Philosophie positive.* Resumen de Emilio Rigolage.—París, Flammarión, (s. a.), tomo I, pág, 84.

Establecido el concepto de derivada es muy fácil ya el de diferencial, pues siendo

$$y' = \lim_{dx \to 0} \frac{dy}{dx},$$

es

$$\frac{dy}{dx} = y' + \varepsilon, \quad (\varepsilon \to 0),$$

y, por consiguiente,

$$dy = \left(1 + \frac{\varepsilon}{y'}\right) y'dx .$$

Ahora bien, cuando dx tiende a cero, como también es lím $\varepsilon = 0$, y, por tanto:

$$\lim \left(1 + \frac{\varepsilon}{y'}\right) = 1 ,$$

se tiene en el límite:

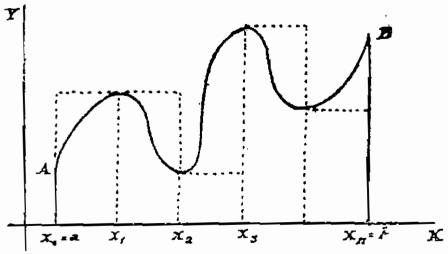
$$dy = y'dx ,$$

y este infinitésimo es el que se llama *diferencial de y*, de cuya expresión resulta para la derivada:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

que es la forma que se usa en el Cálculo diferencial.

El Cálculo integral tiene por objeto el problema inverso del diferencial y se apoya en el concepto de *integral* cuya psicogénesis es también concreta y utilitaria. Responde a la necesidad de calcular el área de una figura que no se puede transformar en un rectángulo equivalente.



Consideremos la superficie comprendida entre la curva *AB,* el segmento *ab* y las ordenadas *Aa* y *Bb.* Si dividimos el segmento *ab* en un número *n* de partes y trazamos las ordenadas por los puntos de división, limitándolas en los puntos en que corten a la curva y por éstos las paralelas a *ab,* se forma una serie de rectángulos que cubren la superficie. El área que se trata de calcular es, pues, la suma de las áreas de estos rectángulos disminuída o

aumentada en la de los pequeños triángulos curvilíneos que separan cada cuadrilátero de la curva. Mientras mayor sea el número de rectángulos, mayor será también la aproximación y si suponemos que son lo suficientemente numerosos para que el área de cada uno sea muy pequeña, los triángulos curvilíneos serán infinitésimos y la diferencia entre el área pedida y la suma de las áreas de los rectángulos será despreciable. La intuición sensorial nos dice que el límite de este proceso es el área limitada por las ordenadas extremas *Aa*, *Bb,* el segmento *ab* y la curva *AB*.

Psicológicamente, no se trata de representarse una suma de infinitos sumandos iguales a cero, puesto que esta frase no tiene sentido, sino de comprender que el área en cuestión es un límite preexistente, cuya existencia se comprueba sensorialmente por el sucesivo decrecimiento de los pequeños triángulos curvilíneos. Por tanto, si los intervalos

$$x_1 - a = x_1 - x_0\ ,\ x_2 - x_1\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ x_n - x_{n-1} = b - x_n$$

son iguales a Δx y muy pequeños, y llamamos y a la ordenada media, el área de cada rectángulo es

$$y.\, x\Delta$$

y la suma de todos,

$$\sum_{x=x_0}^{x=x_n} y \, \Delta x ,$$

será tanto más aproximada a la pedida cuanto mayor sea n. Cuando $n \to \infty$, Δx es el infinitésimo dx y la expresión anterior se representa por un símbolo especial, llamado *integral,* y se tiene

$$\int_{x_0}^{x_n} y \, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{x=x_0}^{x=x_n} y \, dx.$$

Hasta aquí el simbolismo nos ha permitido caminar con paso firme por la zona de los conceptos, pero es necesario calcular el área; es decir: asignarle un número.

Observemos, para ello, que el érea pedida S varía con la abscisa x si se supone fija x_0, o sea: S es una función de x tal que

$$S(x) = \int_{x_0}^{x_n} y \, dx .$$

Si damos a x un incremento infinitamente pequeño dx, el área aumentará en la del rectángulo que tiene por base dx y por altura la ordenada correspondiente y en la

de un triángulo curvilíneo; pero como la de éste es despreciable con respecto a la de aquél, el área del rectángulo es

$$S(x + dx) - S\,dx = d\,S(x) \to y\,dx ,$$

de donde

$$\frac{d\,S(x)}{dx} = y = f(x) ,$$

lo que nos dice que la función

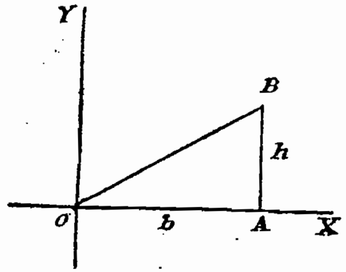
$$y = f(x)$$

es la derivada de

$$S(x) = \int_{x_0}^{x_n} y \, dx$$

y, definida ya una función por su derivada, el problema de calcular el área se reduce a encontrar la función primitiva de la dada, sustituir sucesivamente la variable x por x_0 y por x_n y restar del segundo valor el primero.

Por ejemplo: el área del triángulo rectángulo OAB



cuya hipotenusa viene dada por la ecuación

$$y = \frac{h}{b}\, x$$

y cuyos catetos son:

$$OA = b\,, \quad AB = h\,,$$

es

$$\int_0^b y\, dx = \int_0^b \frac{h}{b}\, x\, dx$$

y como la función primitiva de

$$\frac{h}{b}\, x$$

es

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{h}{b}\, x^2\,,$$

resulta

$$S = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{h}{b}\, x^2\right]_0^b = \frac{1}{2} \cdot \frac{hb^2}{b} - \frac{1}{2} \cdot \frac{0}{b} = \frac{1}{2}\, bh\;;$$

es decir: la mitad del producto de la base por la altura, como sabíamos por la Geometría elemental.

Tales son las operaciones englobadas en el símbolo

$$\int$$

tan numerosas que hacen que la conciencia sufra muchas veces eclipses totales y sea preciso un esfuerzo de la atención para no olvidar el origen empírico que, por sucesivas experimentaciones mentales, se va diluyendo hasta perder aparentemente su valor concreto y quedar reducido al de un signo gráfico.

VIII

La Aritmética transfinita

Acabamos de ver que el infinitésimo se explica psicológicamente con gran facilidad. No ocurre lo propio con el transfinito, cuyo concepto ha suscitado vivas polémicas entre matemáticos y filósofos, los cuales no se han puesto todavía de acuerdo a causa de las numerosas paradojas a a que da origen.

Procuraremos abordar este problema desde el punto de vista exclusivamente psicológico y sin arredrarnos ante las paradojas, antes bien, agradeciéndolas, porque en cuanto el espíritu se enfrenta con ellas siente la necesidad de experimentar mentalmente con sus términos contradictorios iniciando un proceso intelectual que termina en un concepto que el matemático se encarga después de incorporar a su ciencia.

Hasta ahora, siempre que hemos empleado la palabra *conjunto* ha sido en el sentido vulgar de *colección de objetos;* es decir: de conjunto *finito*, y, por consiguiente, no ha despertado ninguna inquietud mental, pero si hablamos de conjuntos *infinitos* este adjetivo hace removerse las aguas mansas de nuestro espíritu y lo coloca en una actitud turbulenta, cuyo mayor peligro no es precisamente la desorientación, sino la posibilidad de llegar a conclusiones falsas por un defecto de paralaje.

Para sistematizar las ideas relativas al transinfinito o al «infinito nuevo»—según la expresión de Evelin (1)—es preciso acudir a su creador, Jorge Cantor y seguirle a través de sus razonamientos. «Llamaremos *conjunto*—dice—a toda reunión *M* de objetos *m* de nuestra concepción, determinados y distintos, a los que diremos *elementos de* M» (2).

Esta definición, aparte de lo extraordinariamente abstracto de su lenguaje, implica el concepto de Matemática como estudio de las relaciones que se pueden concebir entre elementos cualesquiera pensados—en cuanto son susceptibles de una determinación que los haga reconocibles por la conciencia—siempre que los consideremos como pertenecientes a una colección, concepto de tal envergadura que los datos de la experiencia se pierden en el amplio seno de la abstracción haciendo olvidar que

(1) Véase su trabajo *Philosophie et mathématique: l'Infine nouveau,* en la «Revue philosophique», febrero de 1898.

(2) *Mathematische Annalem,* Bd. XLVI, 1895.

es la vida práctica la que inspira las operaciones matemáticas, y que luego el espíritu, espoleado primero por las necesidades científicas, y después por su propia imaginación, crea las nociones que traduce en símbolos adecuados, cuya manipulación obedece a leyes previamente definidas por el matemático.

Ahora bien, los elementos del conjunto cantoriano se pueden considerar de dos maneras distintas, según que se tenga o no en cuenta el orden en que están colocados, dando origen, por tanto, al número ordinal o cardinal, respectivamante.

Estudiemos primero este caso. «Llamaremos *potencia* o *número cardinal* de *M*—sigue diciendo Cantor—a la noción general que deducimos de *M* por medio de nuestra facultad de pensar, abstracción hecha de la naturaleza de los diferentes elementos *m* y de su orden.»

Esta definición supone una generalización del concepto clásico de número cardinal finito por un doble proceso de abstracción—el de naturaleza y el de orden—separando la noción ideal de potencia de la concreta de conjunto.

Cuando éste es finito, aquel proceso no ofrece dificultad alguna puesto que el conjunto está *dado* si se enuncian todos y cada uno de sus elementos—*extensión*—como cuando reseñamos los comensales de un banquete, o si se expresan las características de sus elementos—*comprensión*—estableciendo jerarquías entre ellos, como hacen las ciencias naturales para definir los géneros y las especies; pero si el conjunto es infinito, entonces hay que acudir al principio del *tertio excluso,* y, confiriendo a los objetos pensados una realidad psicológica independiente del tiempo, definir el conjunto infinito mediante una ley cualquiera *no contradictoria* que permita incluir en el conjunto a todos los elementos que la cumplen y excluir de él a los que no la cumplan.

Pero el principio de exclusión del término tercero se puede poner en duda cuando se estudia el proceso mental del razonamiento matemático en su lucha con el infinito. Por ejemplo, del *hecho* de que no todos los números reales son raíces de ecuaciones algebráicas no se puede deducir que hay números reales que tienen tal propiedad mientras no se indiquen los números no-algebráicos a que nos referimos, ni tampoco es posible que las demostraciones para los conjuntos infinitos afecten a su contenido, de tal modo que «cuando definimos un conjunto infinito, debemos ponernos en guardia contra la idea de que no sólo conocemos la propiedad característica de sus elementos, sino que éstos se encuentran en el mismo conjunto y basta penetrar en ellos, según la serie que forman—como un agente de policía que consulta su

fichero—para averiguar si en el conjunto existe un elemento de esta o de aquella clase» (1).

Cantor dice después que dos conjuntos M y N son equivalentes, y escribe

$$M \sim N ,$$

cuando se pueden asociar de tal manera que a cada elemento de uno de ellos corresponda un solo elemento del otro, estableciendo que la equivalencia de dos conjuntos es la condición necesaria y suficiente para la igualdad de sus números cardinales o potencias.

Aquí interviene la noción de correspondencia biunívoca que ya hemos explicado al definir la igualdad de números cardinales finitos. En el fondo se reduce a este hecho: formar sucesivas parejas con un elemento de cada uno de los dos conjuntos y afirmar que éstos tienen el mismo número si, continuando el mismo proceso, ambos conjuntos se agotan simultáneamente, como por ejemplo: en una reunión de damas y caballeros aseguramos que hay el mismo número de aquéllas que de éstos, *sin necesidad de contar las personas,* si pueden bailar todas ellas y ninguna señora ni ningún caballero se quede sin pareja: caso sencillísimo de experimentación mental.

---

(1) Weyl: *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik.*—Math. Zeitschr, Bd, X, 1921.

Pero cuando se trata de conjuntos infinitos, ¿qué quiere decir *agotar* sus elementos? La Matemática ha resuelto la paradoja que crea el verbo *agotar* en este caso, diciendo que dos conjuntos M y N tienen la misma potencia cuando existe un conjunto P de parejas tal que cada pareja de P contiene un elemento de M y otro de N y todo elemento de M y de N pertenece a una sola pareja de P. Así, el conjunto de los números pares tiene la misma potencia que el de los nones, puesto que se puede hacer corresponder a cada número non el número par consecutivo.

Esta definición no satisface, sin embargo, al espíritu porque cuando no puede establecer una correspondencia biunívoca entre los elementos de dos conjuntos no está autorizado para concluir que éstos no son equivalentes. Necesitaría demostrar que es imposible toda correspondencia entre ellos, o que, admitida una cualquiera, se llegaría a una contradicción.

Es preciso, pues, distinguir el caso en que *se sabe* establecer, por lo menos, una correspondencia entre los elementos de un conjunto, del en que *se puede* demostrar la existencia de la misma, sin prejuzgar la posibilidad de hacerla *realmente*—puesto que existen conjuntos de igual potencia, y, sin embargo, todavía no ha sido posible establecer una correspondencia biunívoca entre sus ele-

mentos—y ambos casos de aquel en que *nunca* será posible establecerla.

De la igualdad de potencias resulta que subsisten los principios de identidad, simetría y transición—como para los números representantes de conjuntos finitos—simbolizados respectivamente por

$$M \sim M \qquad \left.\begin{matrix} M \sim N \\ N \sim M \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} M \sim N \\ N \sim P \end{matrix}\right\} M \sim P\,,$$

y las operaciones aritméticas se definen ya sin dificultad, como para los números cardinales finitos.

De todos los conjuntos infinitos posibles, el más sencillo *parece ser* el de los números naturales

$$1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ \ldots\ldots$$

cuya potencia representa Cantor por la primera letra del alefato hebreo con el subíndice 0, así: $\aleph_0$, demostrando después que aleph-cero es mayor que todo número finito y es el menor de los números transfinitos.

Para esto es necesario considerar como dada en su totalidad la sucesión de los números enteros y positivos (1), lo cual es sólo una ilusión sin ningun contenido ex-

(1) «Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M..., zu einen ganzen», dice Cantor textualmente, *Mathematische Annalen,* 1895, pág. 481, y añade después: «die Gesammtheit aller endlichen Cardinalzalhen», Ibidem, pág. 483.

perimental, un psitacismo matemático, la sustitución de una idea real por una idea verbal, un *flatus vocis* sin control empírico, que hace posible el razonamiento en el campo formal; pero nada más.

En efecto, los puntos suspensivos que escribimos detrás de unos cuantos simbolos numéricos, y cuya significación parece no ofrecer duda alguna a ningún matemático (1), representan la tendencia automática a seguir contando, y, por consiguiente, a considerar la sucesión de los números naturales como *indefinida,* en un sentido negativo en cuanto, apoyándose en la noción de tiempo, significa la imposibilidad de alcanzar el último término. «Cuando hablo de todos los números enteros—dice Poincaré—quiero decir todos los números enteros que se han inventado y todos los que se puedan inventar un dia; cuando hablo de todos los puntos del espacio quiero decir todos los puntos que se pueden expresar por números racionales o por números algebráicos, o por integrales, o por cualquier otro modo que se pueda inventar. Y este *se pueda* es lo infinito» (2).

El concepto de infinito está, pues, adscrito al de ex-

(1) Vid. supra, pág. 42.
(2) *La logique de l'Infini,* en «Dernières pensées».—París, Flammarion, 1930, pág. 131.

tensión concreta, susceptible de una descomposición indefinida, y el *se pueda* de Poincaré queda limitado por condiciones biológicas que *no pueden ser* independientes del *se pueda* porque resultaría una idea sin realidad.

El concepto de la sucesión de números naturales nace del de la adición uno a uno, que es siempre la misma operación, como observa Borel, quien se pregunta después cuál es la naturaleza psicológica y el origen histórico de tal concepto; pero renuncia a darse una respuesta porque le basta «el acuerdo *práctico* entre los matemáticos respecto al uso que hacen de estas nociones y la utilidad de la imaginación del indefinido en los razonamientos lógicos sobre los símbolos que representan el infinito» (1).

Históricamente, la sucesión natural se ha ido enriqueciendo con nuevas aportaciones gracias, sobre todo, al sistema decimal que permite la fácil manipulación de los grandes números, y en cuanto a la naturaleza psicológica de tal concepto es sólo una *tendencia,* como hábito motor verbal, y, al propio tiempo, como una dirección especial de la atención, como una orientación consciente de la actividad mental, encauzando el interés, como poder de

(1) *Leçons sur la théorie des fonctions,* 2.ª ed.—París, Gauthier-Villars, 1914, pág. 179.

selección, por la necesidad de captar la idea de sucesión de números: finita y, a la vez, siempre abierta.

Borel afirma, sin embargo, que «no se puede decir que la sucesión de números enteros es limitada porque después de todo entero hay otro», añadiendo que los matemáticos dieron a esta antinomia una solución de hecho, independiente de toda cuestión metafísica, en el momento en que utilizaron tal sucesión como si existiera realmente en su conjunto, y pone como ejemplo la ecuación

$$\operatorname{sen} \pi x = 0$$

que admite como raíces *todos* los números enteros, y «la consideración *simultánea* de *todas* estas raíces da la expresión de la función en forma de producto infinito» (1), olvidando que, desde el punto de vista psicológico, no existe tal antimonia porque el espíritu no puede concebir simultáneamente todos los números enteros, sino sólo un cierto número de raíces de la ecuación, que formará un producto infinito; es decir: tan grande como se quiera. Psicológicamente, el infinito es, pues, una limitación no prefijada.

Los conjuntos que tienen la misma potencia que el de los números naturales son *numerables*, o sea: que se pue-

(1) Loc. cit., pág. 144, nota (1).

den enumerar sus elementos en el mismo orden que los números de la sucesión natural, siendo fácil establecer las fórmulas

$$n+\aleph_0=\aleph_0\,,$$

$$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0\,,$$

$$n\,\aleph_0=\aleph_0\,,$$

$$\aleph_0\,\aleph_0=\aleph_0\,,$$

$$\aleph_0^n=\aleph_0\,,$$

que simbolizan las propiedades fundamentales de los conjuntos numerables.

Si nos fijamos, en particular, en el conjunto de los números reales comprendidos entre 0 y 1, este conjunto se compone de números racionales e irracionales. Los primeros forman un conjunto numerable, pero los segundos no (1); deduciéndose en seguida que el conjunto de todos los números reales del intervalo (0,1) no es numerable, conjunto que se llama *el Continuo*, y cuya potencia se representa por la letra gótica $\mathfrak{c}$.

(1) La demostración puede verse en la citada obra de Borel.

La primera propiedad es

$$\mathfrak{c} + \aleph_0 = \mathfrak{c} \ , \ \mathfrak{c} + n = \mathfrak{c} \ , \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \ ,$$

es decir: a todo conjunto que tenga la potencia del Continuo se le puede sumar un conjunto finito o numerable sin alterar su potencia.

También es

$$\mathfrak{c} - \aleph_0 = \mathfrak{c} \ ,$$

bien entendido que no se puede hablar *en general* de una diferencia de dos números cardinales cualesquiera puesto que el conocimiento de las potencias de dos conjuntos no basta, *en general,* para determinar su diferencia, y, por tanto, la expresión

$$\aleph_0 - \aleph_0$$

no corresponde a ningún número cardinal definido.

Durante mucho tiempo se creyó que el Continuo era la máxima potencia, pero se ha encontrado otro conjunto —el de todas las funciones de una variable real—que no es coordinable con el Continuo ni con ninguna de sus partes y cuya potencia

$$\mathfrak{f} = 2^{\mathfrak{c}}$$

es superior a la del Continuo.

Tenemos, pues, tres números cardinales transfinitos

$$\aleph_0 < \mathfrak{c} < \mathfrak{f}$$

que corresponden al conjunto de todos los números naturales, al de todos los números reales y al de todas las funciones, respectivamente. ¿Son estos tres los únicos números cardinales transfinitos distintos? La Aritmética transfinita demuestra que son infinitos.

Examinemos ahora el caso en que interviene la idea de orden. Como esta idea es arbitraria (1), diremos que el conjunto está ordenado si siendo a y b dos elementos distintos del conjunto, uno de ellos se considera anterior al otro. Escribimos

$$a < b$$

para indicar que a precede a b, convenio al que sólo se le impone la restricción de cumplir con las condiciones de asimetría y transición (2); es decir: que para todos los

(1) Vid. supra, pág. 42.
(2) Vid. supra, pág. 43.

los elementos a, b, c del conjunto, la fórmula

$$a < b$$

sea incompatible con la

$$b < a$$

y las

$$a < b, \qquad b < c$$

impliquen la

$$a < c\,.$$

Ya hemos visto (1) que la sucesión natural, que es el ejemplo más sencillo de ordenación numérica, es susceptible de varias ordenaciones. Todos los números racionales se pueden ordenar así:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{1}{2} & \rightarrow & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{1}{4} & \cdots\cdots \\
 & \frac{2}{1} & \swarrow & \frac{2}{2} & \nearrow & \frac{2}{3} & \swarrow & \frac{2}{4} & \nearrow \cdots\cdots \\
\downarrow & \frac{3}{1} & \nearrow & \frac{3}{2} & \swarrow & \frac{3}{3} & \nearrow & \frac{3}{4} & \cdots\cdots \\
 & \frac{4}{1} & \swarrow & \frac{4}{2} & \nearrow & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & \cdots\cdots \\
\downarrow & \frac{5}{1} & \nearrow & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots
\end{array}$$

(1) Vid. supra, pág. 42.

Para los complejos, poniendo

$$a + b\,i < c + d\,i$$

si es $a < c$, o si, siendo $a = c$, es $b < d$, resulta, por ejemplo:

$$2 + 3\,i < 3 + 2\,i < 3 + 5\,i < 4 < 5 - 16\,i < 5\,.$$

También es ordenable el conjunto de todos los números algebráicos (1), etc.

En estos ejemplos se advierte claramente la preocupación de los matemáticos para eliminar la idea de tiempo en la ordenación y dar este concepto en términos de *elemento* y *elemento;* es decir: dado un conjunto C, construir una familia F de conjuntos C' tales que, de dos conjuntos pertenecientes a C', uno de ellos esté siempre contenido en el otro, considerando como F el conjunto de todos los restos de C, siempre que se entienda por *resto correspondiente al elemento* a *de* C el conjunto de todos los elementos de C que siguen al a (2).

El pensamiento matemático parece haber llegado ya

(1) La demostración puede verse en Fraenkel: *Einführung in die Mengenlehre,* Grundlagen der Math. Wissenschaft in Einzeldarstellung, Bd, IX, Berlín, 1928.

(2) Acerca de este difícil punto de la teoríade conjuntos ha publicado un notable trabajo C. Kuratowski en los *Fundamenta Mathematicæ,* tomo II (1921), págs. 161-171.

a una región tan abstracta que la misma abstracción se pierde en ella, ascendiendo en una marcha asintótica, cuya rama parabólica no tiene contacto alguno con la realidad empírica; pero queda un hilo sutil que lo sujeta a la tierra, y este hilo es, sencillamente, el conjunto

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$$

de los números naturales: fecunda matriz que ha parido toda la Matemática. No cabe duda que el número entero lo hizo Dios, y los demás, son producto del pensamiento humano.

Cantor designa este tipo de orden por la letra griega ω, el de los números racionales, por η y el de los reales por λ, ordenados los tres según sus magnitudes relativas, y estudia después sus propiedades. En primero tiene primer elemento, pero no último y es numerable; el segundo carece de primero y último elemento, también es numerable, y, además, denso, es decir: que entre dos de sus elementos se pueden siempre encontrar más elementos del conjunto, y el tercero, tampoco tiene primero ni último elemento y una parte numerable de él es tal que entre dos cualesquiera de sus elementos existe un elemento de ella.

Fijémonos en el más sencillo de estos tres tipos, el ω,

cuyo inverso, o sea, el de los enteros negativos ordenados según su magnitud

$$\ldots\ldots, -4, -3, -2, -1,$$

no tiene primer término, y sí último. Su tipo de orden es $^*\omega$ y, por tanto, el tipo de orden de todos los números enteros es $^*\omega + \omega$.

La propiedad más característica de los números ordinales transfinitos es que falla la ley conmutativa de la suma. En la Aritmética elemental—que siempre opera con conjuntos finitos—el número cardinal coincide con el ordinal, pero en la transfinita basta alterar la disposición de los elementos de un conjunto para obtener dos números ordinales distintos. El conjunto de los números racionales es del tipo ω si se ordenan según la magnitud de sus denominadores y del η si se colocan con arreglo a su magnitud absoluta.

El conjunto

$$1 + \omega = 1, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$$

tiene un primero pero no un último término, mientras que el

$$\omega + 1 = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n, \ldots\ldots, 1$$

tiene primero y último. Por consiguiente, es

$$1 + \omega = \omega ,$$

definición contradictoria con la de ω, luego tiene que ser

$$1 + \omega \neq \omega + 1 .$$

Entre los conjuntos ordenados figuran los *bien ordenados,* cuando tanto ellos como cada una de sus partes contienen un primer elemento. Claro es que los conjuntos finitos y los infinitos del tipo ω son bien ordenados, pero no así los de los tipos $^*\omega$, η y λ.

Los conjuntos bien ordenados tienen capital importancia en la Aritmética transfinita y su teoría ha dado origen a las más violentas disputas entre los matemáticos. Para nuestro objeto basta—esbozadas estas ideas generales—observar el proceso de su generalización.

Introducido el símbolo ω como «límite hacia el cual tienden todos los números *n,* entendiendo por esto que ω es el primer número entero que sigue a todos los números *n*» (1), es preciso declararlo superior a *todos* los números *n;* de donde se deduce que los conjuntos

(1) Cantor: Loc. cit.

$$\begin{array}{l} 1, 2, 3, \ldots\ldots, n, 1 \\ 1, 2, 3, \ldots\ldots, n, 1, 2 \\ 1, 2, 3, \ldots\ldots, n, 1, 2, 3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

se representarán, respectivamente, por

$$\omega + 1, \quad \omega + 2, \quad \omega + 3, \ldots .$$

donde estos puntos suspensivos quieren decir que el proceso indicado se repite una infinidad numerable de veces, y entonces es muy fácil interpretar lo símbolos

$$2\omega, \quad 2\omega + 1, \quad 2\omega + 2, \ldots\ldots; 3\omega, \ldots\ldots; n\omega$$

así como los

$$\omega\omega, \quad \omega^m, \quad \omega^{\omega+n}, \quad \omega^{\omega^n}, \quad \omega^{\omega^\omega}, \ldots\ldots, \quad \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}}$$

y poniendo

$$\omega = \lim n ,$$

tendremos finalmente

$$\varepsilon = \lim_{n \to \infty} \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}}$$

donde ε es un símbolo que designa los números que, a su vez, son susceptibles de nuevas ampliaciones.

Finalmente, en cuanto a las relaciones entre los números transfinitos cardinales y ordinales, entre las clases de tipos de orden y las alephs, diremos que si α es un número ordinal, es claro que todos los conjuntos ordenados de tipo α, tienen igual potencia, y siendo α también el tipo de orden del conjunto de todos los números ordinales $\zeta < \alpha$, incluído el cero, el número cardinal que corresponde al $\overline{\alpha}$ y que se designa $\overline{\alpha}$ es la potencia del conjunto de todos los números ordinales menores que α.

Los números ordinales transfinitos se pueden dividir en dos clases, cada una de las cuales esté integrada por todos los que tengan la misma potencia. Los ordinales finitos son, por tanto, una excepción, cuyo conjunto constituye la clase I de los números ordinales y los α de los conjuntos bien ordenados, tales que $\overline{\alpha} = \aleph_0$ forman la clase II, el más pequeño de los cuales es, evidentemente, el número ω.

Si designamos por $\aleph_1$ la potencia del conjunto de todos los números de la clase II, se demuestra que es $\aleph_1 > \aleph_0$ y que entre éstos no existe ningún número cardinal intermedio, estando ligados por la relación

$$\aleph_1 \leqq 2^{\aleph_0}$$

la cual plantea el más grave problema de la Matemática para el psicólogo: el problema del Continuo.

IX

El Continuo

En todas las cuestiones en que interviene el infinito —infinitésimo o transfinito—existe, como fondo subyacente del razonamiento, el Continuo: concepto al que se ha llegado por aproximaciones sucesivas y cuya formación obedece al mismo proceso psicológico que todos los que maneja la Matemática; es decir: que la continuidad se nos presenta—siguiendo el método empírico—como una cualidad inherente a los objetos, independientemente de la extensión y de la duración abstractas, del espacio y del tiempo—como formas *a priori* en el más puro sentido kantiano—y de la cosa en sí, fantasma que es preciso ahuyentar del modesto plano del empirismo.

Si consideramos un conjunto de sensaciones discretas, en cuanto invaden el campo de nuestra conciencia percibimos su unidad como un todo complejo, un poco incoherente primero y más fijo después pero siempre, fluctuante: imagen consecutiva que nos obliga a atribuir un cierto contenido psicológico a la palabra *continuadid*, en tanto supone la exclusión de la idea de hiato o ruptura; esto es: continuidad como contigüidad de los elementos de un todo y divisibilidad infinita de estos mismos elementos.

Ahora bien, cualquiera que sea el grupo de sensaciones que elijamos—visuales, táctiles, gustativas, etc.—se impone al espíritu con una cierta intensidad que varía de unos sujetos a otros y con las disposiciones del momento en un mismo individuo. Por consiguiente, no basta la introspección para distinguir una sensación de otra en un conjunto determinado, sino que es preciso medirlas, no de una manera directa—lo cual es imposible—sino por medio de algo que esté unido a la sensibilidad de una manera regular, que aumente y disminuya con ella y de cuya medida pueda deducirse la de la sensación.

Como este problema pertenece a la Psicofísica, nos limitaremos a indicar aquí que la percepción de la diferencia entre dos sensaciones obedece a las leyes del *umbral* y de la *proporcionalidad,* entendiendo por umbral el hecho de que, para que el espíritu se dé cuenta de una sensación, es necesario que la intensidad de la excitación tenga un cierto nivel, y por proporcionalidad la cantidad de excitación que hay que añadir a un estímulo para que percibamos una diferencia mínima.

Si nos fijamos en una línea, que es el continuo geo-

métrico más sencillo, se ha demostrado experimentalmente que cuando dos puntos están separados por una distancia inferior al duplo del umbral es imposible distinguir de cualquiera de ellos un tercer punto intermedio. Como el umbral no tiene límite fijo, no hay inconveniente alguno en suponer que aquella imposibilidad obedece a un defecto de percepción, a fin de hacerla compatible con el principio de contradicción y admitir que entre dos puntos de una línea existe siempre por lo menos un punto intermedio.

De aquí partió Dedekind para formular su célebre postulado de la continuidad de la recta, que puede enunciarse así: «Si una recta está dividida en dos partes tales que cada punto pertenezca a una de estas partes y cada uno de la primera preceda—en un sentido dado de la recta—a cada punto de la segunda, existe un punto de separación que no es anterior a ninguno de la segunda parte ni posterior a ninguno de la primera».

Los matemáticos contemplativos de Grecia, que querían razonar con nociones puras, con esencias ideales, prescindiendo de los objetos sensibles (1) llegaron al

(1) He aquí un pasaje de Platón que descubre el pensamiento matemático griego: «Advierto ahora cuán bella en sí es esta ciencia del cálculo, y cuán útil para el designio que nos proponemos,

concepto de continuidad de la recta cuando dudaron si el número se podía considerar como una idea o como un todo compuesto, si lo inteligible era lo complejo y lo ininteligente lo simple, si la parte en sí era irracional —ἄλογος—y la suma lo irracional—ῥητή—para concluir que el número es una colección de puntos discretos y la figura geométrica un sistema de magnitudes, lo que les obligó a admitir que la recta que une un punto exterior con otro interior a una circunferencia corta a esta circunferencia, hecho que constituye un caso par-

---

cuando se estudia por sí misma, y no para hacer de ella un negocio. —¿Qué es lo que tanto se admira de ella? —La virtud que posee para elevar el alma, como acabamos de decir, obligándola a razonar sobre los números tales cuales son en sí mismos, sin tolerar jamás que sus cálculos versen sobre números visibles y palpables. Sin duda sabes los versados en esta ciencia. Si en su presencia tratas de dividir la unidad propiamente dicha, se burlan de tí y no te escuchan; pero si la divides, ellos la multiplican en la misma medida, temiendo que la unidad no aparezca tal cual es, sino como una reunión de partes. —Tienes razón. —Y si se les pregunta: «¿De qué número hablas? ¿Dónde están esas unidades tales cuales las suponéis, perfectamente iguales entre sí, sin que haya entre ellas la menor diferencia, y que no están compuestas de partes?», ¿qué crees tú qué respondan, mi querido Glaucón? —Creo que responderían que hablan de esos números que no caen bajo los sentidos y que sólo pueden ser captados

ticular del postulado de Dedekind si se dividen los puntos de una recta en *interiores* y *exteriores* con respecto a una circunferencia, y cuya generalización consiste en considerar la recta bajo su doble aspecto: actual y genético, y el punto, por consiguiente, como límite de separación en el primer caso y como elemento generador en el segundo.

Por un procedimiento análogo se pasa de este con-

---

por el pensamiento. —Pues bien ves, mi querido amigo, que no podemos pasarnos absolutamente sin esa ciencia, puesto que es evidente que obliga al alma a servirse del entendimiento para conocer la verdad. —Verdad es que es maravillosamente adecuada para producir ese efecto. —Asimismo habrás observado que los que han nacido calculadores, dotados de espíritu de combinación, tienen mucha facilidad para casi todas las ciencias, y que los mismos espíritus pesados, cuando se han adiestrado suficientemente en el cálculo, consiguen con ello, cuando menos, la ventaja de adquirir más facilidad y penetración. —Así es. —Por lo demás, difícil te sería hallar muchas ciencias en cuyo aprendizaje cueste más profundizar que en esto. —Bien lo creo. —Así, por todas estas razones, no debemos desdeñarla; mas es preciso aplicar a ella desde muy temprano a los que hayan nacido dotados de un natural excelente. —Consiento en ello. —Adoptémoslo, pues. Veamos si alguna otra ciencia relacionada con ésta nos conviene o no. —¿Qué ciencia es esa? ¿No será la Geometría? —La misma. —Evidentemente nos conviene a lo menos en lo que se refiere a las operaciones de la guerra. Porque, en igualdad de tinuo lineal al de dos dimensiones asociando la imagen actual de una línea a las diferentes imágenes relativas a los modos posibles de engendrar la superficie por un movimiento. Lo mismo puede decirse del continuo de tres dimensiones, en el cual detenemos el proceso de generalización para no abandonar el campo empírico, y volvamos a la teoría de conjuntos antes esbozada.

El primer escollo con que se tropieza al querer aprehender el concepto cantoriano de conjunto infinito es la ambigüedad de su contenido, considerado unas veces en potencia y otras en acto, como devenir—el conjunto de los números naturales—o como ser—el de los puntos de una circunferencia, por ejemplo—dividiéndose, por tanto, los conjuntos infinitos en numerables y no numerables.

El más conocido de éstos últimos es el Continuo, noción intuitiva, sensorial, inherente a la percepción, que capta la conciencia por una especie de condensación de las cualidades de los objetos del mundo externo y de

---

circunstancias, un geógrafo se entenderá mejor que otro cualquiera en lo pertinente a sentar un campo, tomar plazas fuertes, concentrar un ejército, obligarle a hacer todas las evoluciones acostumbradas en una acción o en una marcha. —Si he de serte franco, para eso no hacen falta mucha Geometría ni cálculo. Lo que hay que ver es si la parte más elevada de esa ciencia tiende a hacer más fácil al espíritu la contemplación de la idea del bien. Porque dijimos que ese es el resultado de las ciencias que obligan al alma a volverse hacia la parte en que está ese ser, el más dichoso de todos los seres, que el alma debe esforzarse en contemplar de todas las maneras. —Tienes razón. —Por tanto, si la Geometría mueve al alma a contemplar la esencia de las cosas, nos conviene; si se detiene en sus accidentes, no nos conviene. —Sin duda. —Ahora bien; ninguno de cuantos poseen el más leve barniz de Geometría nos negará que la finalidad de esa ciencia es directamente contraria al lenguaje que emplean los que de ella tratan. —¿Cómo así? —Su lenguaje es muy divertido, aunque no tengas más remedio que usarlo. Hablan de cuadrar, de prolongar, de añadir, y así sucesivamente, como si realmente operasen, como si todas sus demostraciones tendiesen a la práctica, cuando toda esta ciencia no tiene otro objeto que el conocimiento. —Verdad es. —Pues convén todavía en otra cosa. —¿En qué? —En que tiene por objeto el conocimiento de lo que es siempre, y no de lo que nace y perece. —Sin dificultad convengo en ello, porque la Geometría tiene por objeto el conocimiento de lo permanente. —Por tanto, atrae al alma hacia la verdad, forma en ella el espíritu filosófico, obligándola a dirigir a lo alto sus miradas, en lugar de posarlas, como suele decirse, en las cosas terrenas. —Nada más cierto.» —*República,* libro VII.

En este pasaje aparece con toda claridad el concepto de número como pura relación—δεσμός—y por eso retrocedieron ante el inconmensurable, que implicaba la idea del Continuo; y en cuanto a las figuras geométricas sólo son, para la ciencia helénica, símbolos cuyo sentido es una propiedad aritmética, punto de vista idéntico y, a la vez, opuesto al de la Matemática moderna, según el aspecto bajo el cual se enfoque.

reducción de su heterogeneidad a un todo homogéneo, gracias a los movimientos de nuestros ojos y de nuestras manos; es decir: por medio de sensaciones musculares.

De este continuo ingenuo se pasa al continuo numérico, más refinado, que nos permite representar por medio de cifras el continuo sensorial con la aproximación que queramos, lo que hace creer a Borel que el Continuo sólo es «un instrumento transitorio, cuya utilidad actual no es despreciable, pero que solamente debe considerarse como un medio de estudiar los conjuntos numerables, los cuales constituyen la única realidad que podemos alcanzar» (1).

Pero esta actitud es peligrosa. Si en la conocida expresión

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots$$

ponemos $x = -1$, resulta la serie de Grandi

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots,$$

estudiada por Bernouilli, que la calificó de «elegante paradoja».

(1) Loc. cit., pág. 183.

Como—asociando cada dos términos—dicha serie se puede también escribir

$$\frac{1}{2} = 0 + 0 + 0 + \ldots\ldots,$$

se tiene una suma no nula formada por sumandos nulos, una creación *ex-nihilo,* especie de demiurgo teratológico que, como Dios, saca al mundo de la nada.

Grandi llegó a la paradoja porque consideró la serie como convergente, de cuyo error deduce Hermann el corolario de perder la fe en el misterio y prostituir la Geometria.

Otra famosa paradoja es la de Russell. Consiste en formar conjuntos de conjuntos que se contengan a sí mismos, y conjuntos que no se contengan a sí mismos. Si consideramos el conjunto de todos los conceptos abstractos, como este conjunto es también un concepto abstracto, debe contenerse a sí mismo como elemento; y si formamos el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos, a él pertenece dicho conjunto; pero si se le incluye en él, se contiene a sí mismo, y si se le excluye no se contiene a sí mismo, y por tanto hay que incluirle; luego el concepto de tal conjunto es contradictorio.

Aparte de que el concepto de conjunto no está bien definido, en todos los razonamientos en que interviene el Continuo, como infinito actual, se emplea la palabra *todos,* que es una palabra tan peligrosa en Matemática que contra ella es necesario tomar *todo* género de precauciones. Jurídicamente, diríamos que, para preservarnos de sus supercherías, convendría incoarle expediente de temibilidad antes de declararla inocua. El fininito numérico por comprensión es completamente distinto del infinito por extensión, y así, cuando hablamos de *todos* los elementos de un conjunto infinito nos apoyamos en las muletas del concepto de continuidad para poder andar, cayendo en el equívoco de una virtualidad determinada por una ley de sucesión—puesto que creemos haber realizado inconscientemente el número infinito gracias a la palabra *todos* como si se tratara de conjuntos finitos—y olvidando que en el conjunto hay elementos que no se pueden definir sin que intervenga el propio concepto de conjunto.

El infinito actual es imposible porque es imposible concebir el número irracional, y, por tanto, el Continuo como algo acabado, hecho, *dado,* en el sentido de que se pueda escribir sucesivamente, *sin solución de continuidad,* el número que se quiera de sus elementos, de modo que cuando hablamos de *todos* los puntos de una recta, debemos entender que en una recta no hay más puntos que

los que se marquen en ella, pudiéndose marcar esquemáticamente un número indefinido de puntos, puesto que lo dado no es la recta, sino el continuo sensorial de la recta.

Esto nos lleva como de la mano al axioma en que se apoyó Zermelo para establecer su conjunto bien ordenado, axioma que habían utilizado los matemáticos sin ninguna protesta, pero que suscitó dudas terribles en cuanto se enunció explícitamente. Según dicho axioma, en un conjunto cualquiera o en uno de los conjuntos de un conjunto de conjuntos, se puede siempre escoger *al azar* un elemento aunque el conjunto de conjuntos comprenda infinitos conjuntos (1).

No es preciso destacar el carácter de evidencia de

(1) Zermelo dió a conocer su famoso axioma en su *Beweis dass jede Menge wohlgeordnet werden kann* con estas palabras: «Der vorliegende Beweis beruht auf dem Prinzip, dass es auch für eine unendliche Gesamtheit von Menge immer Zuordnungen gibt, bei denen jeder Menge eines ihrer Elemente entspricht, oder formal ausgedrückt, dass das Produkt einer unendlichen Gesamtheit von Menge, deren jede mindestens ein Element enthält, selbst von Null verschieden ist», añadiendo luego: «Dieses logische Prinzip läst sich zwar nicht auf ein noch einfacheres zurückführen, wird aber in der mathematischen Deduktion uberall unbedenklich angewendet.»—*Matematische Annalen,* tomo LIX (1904,) páginas 514-16.

este axioma cuando se trata de conjuntos finitos; pero si se considera un conjunto infinito, su aceptación implica la ordenación del Continuo y el fracaso consiguiente del empirismo matemático.

Russell (1), que ha estudiado detenidamente el axioma, ha sugerido ideas de un gran valor psicológico suponiendo un millonario que compra un par de calcetines cada vez que compra un par de zapatos, y nunca en otro momento distinto, y experimenta tal deseo de comprar zapatos que acaba por tener $\aleph_0$ pares de zapatos y $\aleph_0$ pares de calcetines.

El problema es el siguiente: ¿Cuántos zapatos y cuántos calcetines tiene el millonario? Parece natural responder que posee doble número de zapatos y calcetines que pares de cada clase; pero como es

$$2\,\aleph_0 = \aleph_0$$

puesto que $\aleph_0$ no varía cuando se multiplica por un número (2), resulta que el millonario tiene $\aleph_0$ zapatos y otros tantos calcetines, y, por consiguiente, el número de zapatos y calcetines es igual al número de pares de cada objeto.

(1) Vid. *Introduction á la Philosophie mathématique*, traducción francesa de G. Moreau, cap. XII.—París, Payot, 1928.

(2) Vid. supra, pág. 139.

Pero pensando las cosas un poco más despacio llegamos a conclusiones contradictorias. En efecto, como en el conjunto de zapatos sabemos distinguir el zapato derecho del izquierdo, podemos hacer una selección separando los zapatos derechos de los izquierdos, selección imposible en el conjunto de calcetines, a menos de admitir la existencia de un conjunto cualquiera con un calcetín de cada par.

Ahora bien, el conjunto de zapatos se puede ordenar cogiendo el zapato derecho y luego el izquierdo correspondiente, *sin modificar el orden de los pares,* mientras que con los calcetines tendremos, para formar cada par, que elegir *al azar* el que hayamos de considerar primero, y como las elecciones arbitrarias son infinitas, resulta que no sabemos si es posible una selección, incluso teóricamente. Nuestro millonario puede, por consiguiente, asegurar que tiene igual número de zapatos que de pares de zapatos, pero no puede decir lo mismo respecto de sus calcetines.

El problema tiene el mismo fondo que la famosa cuestión teológica de los atributos de Dios, puesto que los cantorianos establecen el concepto de un conjunto cuya existencia depende de infinitos elementos no definidos y los teólogos admiten un ser inimaginable al que dan la misma vida que a los seres imaginables. Los cantorianos quisieron resolver la antinomia aplicando el principio lógico de exclusión del término tercero, que niegan los empiristas puesto que de la imposibilidad de una definición de un conjunto infinito no numerable, no se puede deducir la verdad de lo contrario, ya que de lo que no existe, nada se puede concluir. Batidos en este reducto, los formalistas, con Hilbert al frente, se han retirado al campo de la Axiomática, del que intentan sacar su teoría con la limpidez con que Minerva brotó de la cabeza de Júpiter.

Los teólogos, menos exigentes que Cantor y sus discípulos, zanjaron el problema de los atributos divinos prescindiendo de la Lógica y dando a la existencia de Dios una interpretación mística que les permitiera atribuirle cualidades que no poseen los hombres; y así nuestro Maimónides afirma que «los seres abstractos que no son cuerpos ni facultades en un cuerpo, sino inteligencias puras, no admiten el múltiplo» (1), y niega la existencia de una magnitud infinita cualquiera y de un número infinito de magnitudes si se quiere que existan todas simultáneamente, agregando que «nada que sea incorporal admite la idea de número, a menos que sea una fuerza

(1) *Moreh Nebuchim* (Guía de los descarriados), I,74. Ms. número 10.289 de la Biblioteca Nacional de Madrid.

en un cuerpo, de suerte que se puedan numerar las fuerzas individuales numerando sus materias o sujetos», para concluir que «todo lo que está en potencia, de suerte que tenga en su esencia misma una determinada posibilidad, puede, en cierto momento, no existir en acto» (1), teoría que, a través de un puente de ocho siglos, diríase recogida por los intuicionistas actuales para combatir el formalismo cantoriano, ya que «la tradición psicofisiológica del aristotelismo—como apunta Bonilla y San Martín—lleva a Maimónides a consecuencias que coinciden de un modo singular con las que hoy se estiman como conquistas de la Psicología. El entendimiento en *potencia* es singular y perecedero, porque no puede existir sin el cuerpo. El verdadero intelecto es el intelecto *en acto,* y éste, en último término, es la Voluntad consciente. No hay un *sujeto psicológico* que piensa unas veces y otras no; hay *un pensamiento,* y este pensamiento es *el mismo pensador,* y, a la vez, *lo pensado»* (2), coincidiendo con lo dicho por William James, a quien cita: «Si los estados de conciencia inestables constituyen la realidad directamente sometida a nuestra experiencia y a nuestras verifi-

(1) Loc. cit., II, 23, prop. I, II, XVI y XXIII.

(2) *Historia de la Filosofía española.*— Madrid, Victoriano Suárez, 1911, tomo II, pág. 320.

caciones (y ni siquiera una escuela lo ha puesto en duda hasta hoy), la Psicología, considerada como ciencia natural, no tiene para qué buscar fuera de ellos un «principio cognoscente»: ellos son este principio» (1).

Esto nos demuestra claramente que el Análisis moderno no ha conquistado la autonomía absoluta porque cuando olvida el proceso mental para establecer los conceptos fundamentales de la Matemática, levanta barreras infranqueables entre el mundo de la realidad y el mundo de los símbolos, y éstos sólo tienen valor objetivo si responden a una necesidad biológica, independiente del poder constructivo del pensamiento. Las nociones susceptibles de una creación mental lógica, al margen de la vida, engendran contradicciones intolerables con las cosas, que si son verdaderas por el hecho de existir, necetan un testigo, la conciencia, que levante acta e interprete su visión haciendo una especie de Gramática de las sensaciones aplicada a los conceptos matemáticos, y entonces el Continuo, despojado de su manigua verbal, se reducirá a las modestas proporciones de un nuevo resultado de la experimentación mental, con un fundamento

(1) *Précis de Psychologie,* traducción de Baudin y Bertier; París, 1909, pág. 278.

empírico, refinado en razón directa de los progresos de la observación.

Así lo hemos visto en los dos capítulos anteriores y recibirá plena confirmación en los últimos en que abordaremos uno de los conceptos básicos de la Matemática moderna—el de grupo—y la espinosa cuestión de la objetividad matemática.

X

La noción de grupo

Una de las nociones más fecundas en la Matemática, pues que gracias a ella se han logrado sistematizar sus dos direcciones—geométrica y analítica—es la noción de *grupo,* cuya génesis plantea un importante problema psicológico: la prioridad del juicio respecto del concepto.

La definición general de grupo se apoya en la idea de operación, y así dice Bourlet que «un conjunto de transformaciones constituyen un grupo si comprende la transformación idéntica y el producto de un número cualquiera de transformaciones, así como la inversa de una transformación, forma parte del conjunto» (1).

Esta definición, demasiado abstracta, necesita algunas aclaraciones para que los lectores no matemáticos puedan captar su significado y adentrarse después en el campo de la Psicología.

(1) *Bulletin de la Societé française de Philosophie,* tomo VII (1907), pág. 225.

Una *transformación* es una correspondencia entre dos elementos A y B de un conjunto, llamándose B el transformado de A. Si consideramos, ahora, dos transformaciones T y T', una de las cuales hace corresponder al elemento A el B y la otra el B al C, el *producto* de las transformaciones T y T' es la transformación que al elemento A le hace corresponder el C. La *inversa* de la transformación T es la que al elemento B le hace corresponder el A. Finalmente, el producto de una transformación y su inversa, aplicado a una figura, la sustituye por ella misma: *trasformación idéntica.* Una notable propiedad de los grupos es la de tener *invariantes;* es decir: operaciones que dejan intactas las relaciones que se pueden establecer entre los elementos del grupo y cuya ley de composición constituye su *estructura.*

Comprendidas estas definiciones es fácil ver que la Geometría se reduce al estudio de los invariantes del grupo de los movimientos; es decir: de las relaciones que no cambian en el movimiento de los cuerpos sólidos, independientemente de las que tengan con el mundo exterior, límite alcanzado por un doble proceso psicológico de abstracción de sensaciones y de generalización de la idea de cuerpo hasta hacerla asumir la categoría de figura geométrica, de tal modo que cuando decimos, por ejemplo, que en un triángulo isósceles los ángulos opuestos

a los lados iguales son iguales, no pensamos un triángulo determinado, sino uno cualquiera, con absoluta independencia de su magnitud y de su posición.

Obsérvese, en efecto, que los objetos del mundo exterior producen en nosotros diversas clases de sensaciones que ubicuamos en un cierto continente de tal modo que la noción de éste queda aislada de las de color, peso, contacto, etc., hasta llegar al concepto de extensión concreta primero, y al del espacio vacío despues. Si aquellas sensaciones no varían cuando estamos quietos, es decir: cuando no realizamos ningún esfuerzo muscular, decimos que el objeto está fijo y si varían, afirmamos que se mueve, esto es: que experimenta un cambio de posición o de estado, según que podamos restablecer o no el primitivo conjunto de sensaciones por desplazamientos adecuados de nuestro propio cuerpo. En el primer caso, el objeto no se deforma y en el segundo sí.

Por consiguiente, si un objeto colocado en una posición P' produce en nosotros un cierto conjunto de sensaciones y pasa *sin deformarse* de P' a P'' y de P'' a P''', variarán las sensaciones, pero siempre podremos restituir las primitivas por un cambio de actitud que nos permita colocar los diversos miembros de nuestro cuerpo en la misma posición relativa inicial respecto del objeto; es decir: que la transformación directa de P' en P''' es también un movimiento; de donde resulta que todos los movimientos sin deformación constituyen un *grupo*, concepto que aparecía en la definición como un todo complejísimo y ahora se presenta al espíritu como la síntesis de una serie de hechos idealizados: verdadera experimentacion mental, integrada por juicios mudos en tanto hemos tenido conciencia de estos dos procesos intelectuales: el formado por la variedad de sensaciones musculares y el constituído por la permanencia de forma en los movimientos, que nos permiten conocer las propiedades métricas de congruencia, según las cuales podemos asegurar que dos figuras iguales a una tercera son iguales entre sí, o si se prefiere: que dos figuras iguales son dos posiciones distintas de una misma figura, definición que Russell ha elevado a la categoría de axioma: el de libre movilidad, sosteniendo que su negación implicaría un absurdo lógico que impediría establecer la noción de una magnitud espacial cualquiera, para concluir que dicho axioma es una condición *a priori* de la Geometría métrica (1).

Los movimientos conservan las longitudes, los ángu-

(1) El examen de los argumentos de Russell en favor de su tesis caen en el campo de la Logística, completamente distinto del plano psicológico en que estamos estudiando el razonamiento matemático.

los y la orientación de las figuras; pero hay otras transformaciones que no tienen estas tres propiedades, como las semejanzas, que conservan los ángulos y las razones entre las longitudes, y las simetrías en las que se pierde la orientación, tal es el guante de la mano derecha que no se puede superponer al de la izquierda. El grupo de transformaciones formado por todos los movimientos, todas las semejanzas y todas las simetrías ha sido llamado «grupo fundamental» —*Hauptgrupe*— por Klein, en cuyo famoso programa de Erlangen (1) estableció que la Geometría estudia las propiedades invariantes respecto de un grupo cualquiera de transformaciones, de donde resulta que hay tantas Geometrías como grupos de transformaciones. Pero estos grupos pueden reducirse a tres: Análisis situs, Geometría proyectiva y Geometría métrica—nuestra vieja y buena Geometría de Euclides—cada una de las cuales corresponde a tres grupos de transformaciones fundamentales y estudia las propiedades invariantes respecto de uno de estos grupos.

Hemos visto que la Geometría métrica está relacionada con las sensaciones musculares, y respecto a la pro-

(1) *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät* (1872); Abgedruckt (mit Zusäten) en *Math. Ann.*, 1893, página 63.

yectiva diremos que su fundamento es el de las vistas estereoscópicas: un punto da origen a dos rayos visuales que determinan sendas sensaciones en la retina, de tal modo que no es necesaria la existencia material del punto para tener su percepción como hecho de conciencia siempre que se tengan los dos rayos. El Análisis situs, por último, prescinde de toda idea cuantitativa, y así, por ejemplo, si demuestra que en una línea el punto *B* está entre *A* y *C*, ya no le preocupa si la línea *ABC* es es recta o curva, ni las relaciones que pueda haber entre las distancias *AB* y *BC*; el Análisis situs es, por tanto, una Geometría cuatitativa relacionada con las sensaciones táctiles.

La Geometría proyectiva no emplea el concepto de magnitud ni el de dirección porque la vista es, esencialmente, el sentido de los colores, y la apreciación de relieves y distancias exige esfuerzos musculares; para la vista no hay orientación porque el arriba, el abajo, la derecha, la izquierda, lo cerca y lo lejos no son cosas que se ven, sino relaciones entre los objetos exteriores y nuestra posición en el espacio, lo que nos hace percibir de distinto modo un paisaje contemplado normalmente y por entre las piernas.

El Análisis situs sólo atiende a las relaciones de conexión—orden y continuidad—sistematizando las sensa-

ciones de tacto, sentido que puede considerarse como depósito de todos los demás, de la misma manera que el Análisis situs contiene en potencia a las otras dos Geometrías.

El concepto de grupo, surgido de la experiencia, ha conseguido, pues, sistematizar las tres Geometrías que, desde el punto de vista de su psicogénesis, nacen de tres conjuntos de sensaciones: musculares, visuales y táctiles, estudiando cada una de ellas las propiedades invariantes respecto de un grupo de transformaciones fundamentales, que responden a necesidades biológicas inmediatas, puesto que todas las sensaciones de espacio —de espacio psicológico—tienden a nuestra conservación individual provocando las adecuadas reacciones corporales, directas o reflejas, que permiten el paso de la representación psicológica a la geométrica por medio de una eliminación de los datos heterogéneos de los sentidos, sin que nos asombren las desigualdades entre los espacios psicológicos—anisótropos, heterogéneos y limitados—y el geométrico—isótropo, homogéneo e ilimitado —por razones de utilidad, como no nos chocan los bailes y funciones de teatro dadas en favor de los tuberculosos pobres, a causa de la diferencia entre el concepto y la representación sensible, que queda anulada por el imperativo biológico.

Pasemos al campo analítico. Como se sabe, en todos los libros de Álgebra elemental, se resuelve la ecuación de segundo grado

$$x^2 + px + q = 0$$

mediante un número auxiliar

$$\frac{p^2}{4}$$

que, sumado a los dos miembros, la transforma en

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q ,$$

de donde sale ya inmediatamente la doble fórmula:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} ,$$

que da los valores de las dos raíces de la ecuación.

El éxito en la resolución se debe, evidentemente, a la *adjunción* (1) del término

(1) *Adjonction* es la palabra utilizada por Galois.

$$\frac{p^2}{4}$$

que, sin variar la ecuación, le da otra forma.

A fin de sistematizar el razonamiento, consideremos ahora la ecuación de tercer grado

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 .$$

Poniendo

$$x = -\frac{p}{3} + x' ,$$

resulta, por una sustitución elemental

$$x'^3 + px' + q' = 0$$

que, mediante la igualdad arbitraria

$$x' = y - \frac{p'}{3y} ,$$

se transforma en

$$y^6 + q' y^3 - \frac{p'}{27} = 0 ,$$

ecuación de sexto grado que se puede resolver como una de segundo con respecto a y^3.

El truco es análogo al de la ecuación cuadrática. La diferencia radica en que en ésta se utiliza un número conocido y en la cúbica una ecuación auxiliar de grado superior al de ella, pero que, por una circunstancia fortuíta, la rebaja de grado.

Lagrange se preocupó de esta ecuación auxiliar—*ecuación resolvente*—buscando su expresión analítica general; pero fué Galois quien, mediante el concepto de adjunción, determinó el grupo de permutaciones entre las raices de una ecuación dada que dejan invariante a toda función racional—*función resolvente*—de sus raices.

Apliquemos esto a las dos ecuaciones anteriores. La función más sencilla es la lineal

$$y = x_1 + ax_2 .$$

Si a es un número cualquiera, los valores distintos de y se obtienen por las permutaciones de x_1 y x_2, en cuyo caso vuelve a resultar una ecuación de segundo grado y no hemos adelantado nada; pero si ponemos

$$a = 1 ,$$

resulta la función simétrica

$$x_1 + x_2$$

que no varia.

Haciendo

$$a = \alpha ,$$

donde α representa la raiz cuadrada negativa de la unidad, se tiene la función resolvente

$$y = x_1 + \alpha x_2$$

que, como no es simétrica, da un segundo valor permutando x_1 y x_2, de modo que si los valores de y son y_1 e y_2, es

$$y_1 = x_1 + \alpha x_2$$
$$y_2 = x_2 + \alpha x_1$$

y por ser

$$x_1 + x_2 = -p$$

los valores de x_1 y x_2, en función de y_1 e y_2, son:

$$x_1 = \frac{y_1 - p}{2} ,$$

$$x_2 = \frac{y_2 - p}{2} .$$

Para calcular ahora y_1 e y_2, observemos que es

$$y_1 = \alpha y_2 ,$$

porque multiplicando la expresión de y_1 por α es como si se permutase x_1 y x_2, y entonces la ecuación resolvente es una ecuación binomia, entre cuyas raices existen ciertas relaciones particulares que, en el caso que estamos analizando, son:

$$x_1 + x_2 = -p ,$$
$$x_1 x_2 = q .$$

La ecuación binomia es, ahora:

$$y^2 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2 x_1 x_2 + x_2^2 ,$$

función simétrica de las raices x_1 y x_2, invariable, por tanto, cuando éstas se permutan, a diferencia de las y_1 e y_2 que eran variables.

Mediante cálculos muy sencillos, se obtiene

$$y_1 = + \sqrt{p^2 - 4 q} ,$$

$$x_2 = \alpha y_1 = - \sqrt{p^2 - 4 q} ,$$

de donde:

$$x_1 = - \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} ,$$

$$x_2 = - \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} ,$$

valores que pueden escribirse en la misma doble fórmula de antes

$$x = - \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} .$$

La función y^2 —cuadrado de la diferencia de las raices—se llama *discriminante* de la ecuación y desempeña uno de los más notables papeles del Álgebra.

El lenguaje analítico exige cálculos y desarrollos, acaso intolerables para el lector no matemático que capta más rápidamente los conceptos geométricos, pero es necesario para poder abordar la importancia psicológica de la génesis de la noción de grupo. La Matemática no es, como quería Augusto Comte, un instrumento de cálculo, sino la tendencia del espíritu humano a sustituir el cálculo por las ideas—observación de Lejeune-Dirichlet —a fin de desarrollar la capacidad para el progreso indefinido de la Ciencia.

En la ecuación general de tercer grado

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

los cálculos son un poco más complicados.

Sus raíces se determinan por una función

$$y = x_1 + ax_2 + bx_3$$

de las mismas y la igualdad

$$\alpha = -1 ,$$

donde α puede considerarse como una de las raíces cuadradas de la unidad o como una raíz de la ecuación $x^3 = 1$,

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} ,$$

$$\alpha^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} ,$$

y la función resolvente es

$$y = x_1 + \alpha\, x_2 + \alpha^2\, x_3$$

que da tres valores distintos por la permutación circular

(x_1 , x_2 , x_3); pero multiplicando y por α y por α^2, se tienen tres valores y_1 , $\alpha\, y_1$, $\alpha^2\, y_1$, que son los mismos que los obtenidos permutando las raíces x_1 , x_2 , x_3 .

Transponiendo, ahora, (x_2 , x_3) en y_1 , resulta:

$$y_2 = x_1 + \alpha\, x_3 + \alpha^2\, x_2 ,$$

y haciendo la sustitución circular (x_1 , x_3 , x_2) se tienen tres valores distintos entre sí y de los anteriores, pero iguales si se multiplica y_2 por α y por α^2; de donde resulta que las raíces de la ecuación de sexto grado forman dos sistemas

$$\begin{array}{lll} y_1 , & \alpha\, y_1 , & \alpha^2\, y_1 , \\ y_2 , & \alpha\, y_2 , & \alpha^2\, y_2 , \end{array}$$

que, elevando al cubo,

$$\begin{array}{lll} y_1^3 , & (\alpha\, y_1)^3 , & (\alpha^2\, y_1)^3 , \\ y_2^3 , & (\alpha\, y_2)^3 , & (\alpha^2\, y_2)^3 , \end{array}$$

y como y_1^3 e y_2^3 son simétricas respecto de x_1 , x_2 , x_3 e invariables, por tanto, con la sustitución circular

$$(x_1 , x_2 , x_3) \quad \text{o} \quad (x_1 , x_3 , x_2),$$

pero variables con la transposición (x_2 , x_3), por la cual se pasa de un cubo a otro, la ecuación resolvente se puede poner bajo la forma

$$(y^3 - y_1^3)(y^3 - y_2^3) = 0$$

o sea:

$$y^6 - (y_1^3 + y_2^3)\, y^3 + (y_1\, y_2)^3 = 0\,,$$

ecuación equivalente a la de segundo grado

$$z^2 - (y_1^3 + y_1^3)\, z + (y_1\, y_2)^3 = 0$$

en la que se ha puesto

$$y^3 = z$$

cuyos coeficientes $(y_1^3 + y_2^3)$ e $(y_1\, y_2)^3$ —funciones simétricas de las raíces x_1, x_2, x_3 — se calculan inmediatamente en función de p, q y r, así:

$$z^2 - (-2\,p^3 + 9\,p\,q - 27\,r)\,z + (p^2 - 3\,q)^3 = 0\,;$$

de donde

$$z = \frac{-2p^3+9pq-27r}{2} \pm \sqrt{\frac{(-2p^3+9pq-27r)^2}{4} - (p^3 - 3q^3)}\,.$$

Por último, extrayendo una raíz cúbica

$$y_1 = \sqrt[3]{z_1}\,,$$

$$y_2 = \sqrt[3]{z_2}\,,$$

y conocidos ya los valores de y, se obtienen los

$$x_1 = \frac{-p + y_1 + y_2}{3}\,,$$

$$x_2 = \frac{-p + \alpha^2\, y_1 + \alpha\, y_2}{3}\,,$$

$$x_3 = \frac{-p + \alpha\, y_1 + \alpha^2\, y_2}{3}\,,$$

mediante las relaciones

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p\,,$$

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0\,,$$

pudiendo expresarse los tres valores x_1, x_2, x_3 por la fórmula única

$$x = \frac{-p + \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}}{3}\,,$$

donde el signo de $\sqrt[3]{z_3}$ queda determinado por la igualdad

$$\sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2} = p^2 - 3\,q\ .$$

Finalmente—y ya terminamos la penosa ascensión por la árida montaña de la resolución algebráica de ecuaciones—en la ecuación de cuarto grado

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

si la función resolvente y tomase $4\,! = 24$ valores distintos por las permutaciones de las raíces x_1, x_2, x_3, x_4, la ecuación resolvente sería de vigésimocuarto grado e irreductible y, por tanto, habríamos salido de Málaga para entrar en Malagón. Lo que se hace es formar una función resolvente con el mismo truco que antes, gracias a la ecuación

$$x^4 = 1\ ,$$

es decir:

$$y = x_1 + \alpha\, x_2 + \alpha^2\, x_3 + \alpha^3\, x_4\ ,$$

de tercer grado, que ya se sabe resolver por medio de una raíz cuadrada y otra cúbica.

Recapitulemos: en la ecuación de segundo grado, las las permutaciones de sus raíces son dos:

$$x_1\, x_2\ ,\quad x_2\, x_1\ ;$$

en la de tercero son seis:

$$\begin{array}{ccc} x_1\,x_2\,x_3 & x_2\,x_3\,x_1 & x_3\,x_1\,x_2 \\ x_1\,x_3\,x_2 & x_3\,x_2\,x_1 & x_2\,x_1\,x_3 \end{array}$$

y en la de cuarto, veinticuatro:

$$\begin{array}{cccc} x_1\,x_2\,x_3\,x_4 & x_2\,x_1\,x_4\,x_3 & x_3\,x_4\,x_1\,x_2 & x_4\,x_3\,x_2\,x_1 \\ x_1\,x_3\,x_4\,x_2 & x_3\,x_1\,x_2\,x_4 & x_4\,x_2\,x_1\,x_3 & x_2\,x_4\,x_3\,x_1 \\ x_1\,x_4\,x_2\,x_3 & x_4\,x_1\,x_3\,x_2 & x_2\,x_3\,x_1\,x_4 & x_3\,x_2\,x_4\,x_1 \\ x_1\,x_3\,x_2\,x_4 & x_3\,x_1\,x_4\,x_2 & x_2\,x_4\,x_1\,x_3 & x_4\,x_2\,x_3\,x_1 \\ x_1\,x_2\,x_4\,x_3 & x_2\,x_1\,x_3\,x_4 & x_4\,x_3\,x_1\,x_2 & x_3\,x_4\,x_2\,x_1 \\ x_1\,x_4\,x_3\,x_2 & x_4\,x_1\,x_2\,x_3 & x_3\,x_2\,x_1\,x_4 & x_2\,x_3\,x_4\,x_1 \end{array}$$

Estos tres conjuntos de permutaciones, son *grupos* en el sentido ya definido. El primero se puede considerar como formado por dos subgrupos

$$(x_1\, x_2)\ ,\quad (x_2\, x_1)\ ,$$

permutaciones que dejan invariable la función

$$y^2 = (x_1 - x_2)^2,$$

habiéndose calculado los valores de x_1 y x_2 en función de y, raíz cuadrada adjuntada en los cálculos correspondientes al subgrupo de la permutación idéntica (x, x); en el segundo, los seis valores se separan en dos sistemas representados simbólicamente por las funciones y_1^3 e y_2^3 pudiéndose pasar de uno a otro por la transposición (x_2, x_3) que es la única que hace variar y_1^3 e y_2^3 gracias a la raíz cuadrada que entra en ella, la cual permite, al propio tiempo, reducir la ecuación de sexto grado a dos de tercero de forma binómica, estando el grupo formado por dos subgrupos invariantes—uno en cada línea—cada uno de los cuales contiene las mismas permutaciones, que sólo difieren en la transposición (x_2, x_3), lo cual nos permite llegar a la permutación idéntica, y, por último el tercer grupo de permutaciones—grupo de la ecuación de cuarto grado—está compuesto de dos subgrupos—las tres primeras y las tres últimas filas—correspondientes a la primera raíz cuadrada que sólo toma dos valores porque permanece invariable para todas las sustituciones excepto la (x_2, x_3); las tres filas corresponden a la raíz cúbica, que tiene los tres valores cada uno de los cuales

representa una fila, pasándose de una a otra—de un segundo subgrupo a otro segundo subgrupo—por la sustitución circular (x_2, x_3, x_4); el tercer radical corresponde a los dos pares de permutaciones de cada fila y sólo toma los dos valores correspondientes a la sustitución (x_1, x_3), (x_2, x_4), y, finalmente, el cuarto y último radical toma dos valores, uno de los cuales es la permutación idéntica (x_1, x_2, x_3, x_4) y queda resuelta la ecuación.

No podemos seguir más adelante. El Álgebra, en estado caótico en tiempos de Leibnitz, había llegado a un punto muerto a principios de la época moderna. Ya Tschirnhaus, en 1683, intentó un método general para resolver las ecuaciones, pero hasta mediados del siglo XIX no se pudo abordar el estudio directo de la ecuación de quinto grado, gracias a los trabajos de Hermite sobre funciones elípticas. A la obra de Tschirnhaus, *Nova methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data æquatione* (1), siguieron las famosas comunicaciones de Lagrange, a la Academia de Berlín, en 1770, en las que abandonó el método de su antecesor, de reducir la ecuación completa de n-simo grado a una binomia de igual

(1) *Acta eruditorum*, II, 204,—Leipzig, 1683.

grado que se pudiera resolver por radicales, para colocarse en el punto de vista de la transformación de ecuaciones resolventes, estudiando «la metafísica de la resolución de las ecuaciones de tercero y cuarto grado» (1)—resueltas ya por Tartaglia, Cardano, Ferrari y Descartes, gracias a ingeniosos artificios de cálculo—hasta llegar a Abel que, en 1826, demostró que las de grado superior al cuarto no se podían resolver algebráicamente—teorema antes entrevisto por Gauss—que, en vez de ser el colofón del capítulo sobre la resolución de ecuaciones, abrió el diafragma de las más sorprendentes posibilidades, gracias a la concepción genial de Galois, el cual, siendo niño aún, a los veintiún años, la víspera misma del desafío que por «una infame coqueta»—son sus palabras—le costó la vida, escribió estas palabras definitivas: «De todos los conocimientos, el análisis puro es el más inmaterial, el más eminentemente lógico, el único que no toma nada de las manifestaciones de los sentidos, de donde muchos deducen que, en su conjunto, es el más metódico y ordenado. Esto es un error: afirmación que asombrará a las gentes del mundo que, en general, toman la palabra «Matemática» como sinónima de «regular» y,

(1) Lagrange: *Oeuvres,* tomo III, pág. 357.—París, Gauthier-Villars, 1847.

sin embargo, en esto, como en todo, la ciencia es la obra de la mente humana destinada a estudiar más que a conocer, a buscar más que a encontrar la verdad. Se concibe, en efecto, que un espíritu que tuviera potencia para percibir de un golpe el conjunto de las verdades matemáticas, podría deducirlas regular y como maquinalmente de algunos principios combinados por métodos uniformes; pero no es así. Si la labor del sabio es más penosa, y, por tanto, más bella, la marcha de la ciencia es menos regular; la ciencia progresa gracias a una serie de combinaciones en las que el azar no desempeña el peor papel; su vida es bruta y se parece a la de los minerales que crecen por yuxtaposición. Esto se aplica no sólo a la ciencia, tal como resulta de los trabajos de los sabios, sino también a las investigaciones de cada uno en particular» (1).

Estas palabras de Galois—uno de los analistas más finos de la historia de la Matemática—son prueba fehaciente del razonamiento como experimentación mental. Para vencer los obstáculos de la Lógica, el analista, lo mismo que el físico, recurre al método experimental. Hasta el más moderno de los matemáticos actuales, el

(1) *Papiers inédits de Galois,* publicados por J. Tannery en el *Bulletin des Sciences mathématiques,* 1906, págs. 259-60.

propio Einstein, cuya obra está empapada de filosofía, defiende tal método, a veces a pesar suyo, si se lee entre líneas su teoría de la Relatividad.

El éxito en Matemática, lo mismo que en las ciencias naturales, está dado por la conformidad de la teoría con la experiencia, y por eso fracasó la concepción sintetista que quería construir la Matemática con arreglo a leyes exclusivamente formales y convencionales. Lo definitivo en Matemática no es intangible, sino que está sujeto a revisiones, y así ha podido decir Duhem que «acaso un día, negándose a recurrir a correcciones para restablecer la armonía entre el esquema teórico y el hecho, llevando resueltamente la reforma a las proposiciones que un acuerdo común haya declarado intangibles, el sabio cumplirá la labor de genio que abre a la teoría un nuevo camino» (1).

Esto fué precisamente lo que hizo Galois: tomar de la realidad un hecho pequeñito, elaborarlo mediante un proceso de experimentación mental y hacer surgir el concepto de grupo.

Análogas reflexiones pueden hacerse en el sector más

(1) *La théorie physique, son objet et sa structure.*—París, Chevalier, 1900, pág. 348.

amplio del Cálculo infinitesimal. Como se sabe, las integrales definidas

$$\int_0^x \sqrt{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}\, dx ,$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} \ldots + a_n}} ,$$

no se pueden calcular elementalmente más que si los polinomios son de primero o segundo grado, lo que no quiere decir que se renuncie a su estudio cuando es $n \gtreqless 3$. Lo que se hace entonces es dar un rodeo, y así si es, por ejemplo:

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3}}$$

es x una cierta función $f(z)$ que se puede construir fácilmente y, entrando de lleno en el capítulo de las funciones elípticas, el estudio de la función

$$x = f(z)$$

permite abordar el de las integrales de todas las funciones de x del tipo anterior; pero al fracasar de nuevo para los valores $n > 4$, damos un nuevo rodeo y nos adentramos en la selva de las funciones abelianas.

Si, avanzando un poco más, nos enfrentamos con las ecuaciones diferenciales, observaremos que, prescindiendo de unas cuantas, integrables inmediatamente, no aparece por ninguna parte la relación que pueda ligar a las otras con alguna propiedad de las de un tipo conocido, hasta que Painlevé determinó los caracteres específicos de aquéllas respecto de sus puntos singulares y abrió una ventana más en el magno edificio del Análisis, habiéndose llegado ya a la audacia de explicar el libre albedrío como solución singular del sistema de ecuaciones diferenciales que pueden plantearse entre los motivos que influyen en la voluntad.

Pues bien, las ecuaciones diferenciales que se integran por los métodos clásicos tienen la propiedad de ser invariantes respecto de un cierto sistema de transformaciones, y, por tanto, forman un grupo, que, en manos de Sophus Lie, ha hecho una revolución en la Matemática.

El grupo es, pues, un sistema de operaciones y la posibilidad o imposibilidad de descomponerlo constituye una propiedad *de hecho,* real, material, como la de los números, de la que sólo se diferencia en que el peso específico de su simbolismo ha llegado—por hoy— al máximo grado de condensación, y si en el Álgebra elemental cada operación está representada por un símbolo único, en el Análisis se refleja en un símbolo de símbolos que obliga al matemático a un dinamismo mental que, por faltarle puntos de apoyo intermedios, lo asemeja a la marcha de los trenes de lujo que sólo se detienen en las estaciones principales del trayecto.

XI

Objetividad matemática

La palabra *objetividad*—de objeto, *res,* cosa que tiene dueño—está íntimamente ligada a la de *existencia,* en cuanto significa para el psicólogo una mezcla de causalidad inmediata y de intencionalidad. El objeto necesita un sujeto, y si en éste desaparece el sentido objetivo, se anula la diferencia entre el pensamiento y la realidad, y, por una pérdida de energía nerviosa, deviene la psicastenia característica del formalismo matemático.

¿Qué significa, entonces, la palabra *existencia?* ¿Cuál es el valor objetivo de la Matemática? El ente matemático, ¿existe sólo cuando es calculable o basta que su definición no sea contradictoria?

Un número racional—7, 2/3, etc.—es un ente que tiene propiedades que pudiéramos calificar de *personales* como un individuo, que lo hacen distinguir de todos los demás; pero ¿ocurre lo mismo con el número π o el *e?* Estos dos números famosos no se pueden *dar* por completo, pero sí calcularlos con la aproximación que se quiera, aunque no se conozca, ni tal vez llegue a conocerse nunca, cual es la cifra que ocupa un lugar bastante avanzado: el millonésimo, por ejemplo. En este caso, la dificultad puede soslayarse diciendo que π y e son entes imperfectamente conocidos, cuya existencia objetiva es sólo una *esencia* como quiere Russell: «*Existen* pensamientos y sentimientos, objetos espirituales y físicos, pero los universales no existen en este sentido, y así diremos que *subsisten* o que *tienen una esencia*, donde «esencia» se opone a «existencia» como algo independiente del tiempo» (1), quedando en los hechos matemáticos algo así como un «residuo misterioso de objetividad», según expresión de Le Roy (2), quien afirma que el sabio crea el hecho porque su espíritu lo talla en la materia amorfa del Dato y «no es la realidad tal como se aparece a una intuición inmediata, sino una adaptación de lo real a los intereses de la práctica y a las exigencias de la vida social», tesis tan combatida por Poincaré en sus obras

(1) He aquí las palabras textuales de Russell: «Thus thoughts and feelings, minds and physical objets *exist*. But universals do not exist in this sense; we shall say that they *subsist* or *have being*, where «being» is opposed to «existence» as being timeless.» *The problems of Philosophy*.—Londres, Nergate (s. a.), pág. 103.

(2) *Science et Philosophie,* en la «Revue de Métaphysique et de Morale» (1899), pág. 518.

de Filosofía científica (1), el cual sostiene que lo que, en resumen, crea el sabio en un hecho es el lenguaje en el cual lo enuncia.

Evidentemente, la expresión de un hecho matemático es arbitraria, pero la verdad de su contenido se impone a nuestra conciencia no sólo con independencia, sino, a veces, en contra de nuestra voluntad, aunque la propia existencia sea, en último análisis, nuestra misma voluntad objetivada. En el concepto de función no interviene ninguna combinación cuantitativa, ni ningún principio lógico, sino sólo la idea de correspondencia entre dos o más variables ligadas por algo constante: la noción de ley biológica que el matemático aplica lo mismo que el sociólogo sin más diferencia que su extensión psicológica: individual en aquél y colectiva en éste.

Pero el concepto de correspondencia tiene tal elasticidad que, en manos de Lebesgue ha permitido *nombrar* una función no definible analíticamente (2), pero de cuya existencia duda Borel porque cree que las cuestiones en

(1) Vid. especialmente el cap. III de *La valeur de la Science.*—París. Flammarion, 1905.

(2) Vid. Lebesgue: *Sur les fonctions représentables analytiquement,* en el «Journal de Mathématiques de Liouville», serie VI tomo I (1905), pág. 139.

que intervienen efectivamente todos los números transfinitos de la clase II—y no sólo los inferiores a uno de ellos prefijado—caen fuera del dominio de la Matemática.

El punto flaco de esta tesis radica en estar mal definida la definición. He aquí, por ejemplo, tres definiciones del número π:

1) $$\pi = \frac{C}{2R}$$

2) π = mínima raíz positiva de la ecuación

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = 0$$

3) $$\pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} .$$

Para entender la primera basta la Geometría elemental, la segunda exige el conocimiento de la teoría de series y la tercera el del Cálculo integral; pero las tres implican la existencia de un ente en cuanto ninguna de ellas es contradictoria consigo misma ni con ninguna definición anterior ni con teorema alguno ya demostrado; es decir: las tres definiciones son correctas lógi-

camente, lo que no quiere decir que respondan a una realidad empírica, ya que el símbolo $1/3$, por ejemplo, tiene sentido si la unidad es una longitud, pero carece de él si lo es un hombre, y las tres simbolizan un sistema de operaciones cada vez más complicadas que se pueden ejecutar con una aproximación prefijada, pero sin representación mental directa, sin imagen, y, por tanto, definen un ente impensable, inexteriorizable, inobjetivable, un ente mítico, ante el cual se experimenta la sensación de extrañeza que caracteriza al psicasténico respecto al mundo exterior.

Estas dificultades aumentan, naturalmente, en la Aritmética transfinita, Cuando se habla de *todos* los conjuntos de puntos «no se da ni la ley de esta infinitud—dice Lusin—ni la manera de nombrarla. Si por un método cualquiera se da un individuo de dicha totalidad, no existe ningún proceso regular para obtenerlo *post factum* ni aunque el vocablo *transfinitamente* siquiera, por una síntesis atrevida, adquiera un sentido tan claro y tan universalmente exento de ambigüedad como el adoptado hoy para la palabra *indefinidamente*. No conocemos todavía el medio de definir la totalidad de los conjuntos de puntos, y cuando hablamos de ella, nos imaginamos *de hecho* los diversos artificios que se pueden inventar para determinar los conjuntos muy complicados a falta de una definición finita que permita comprenderlos de golpe; pero cuando se trata de la posibilidad humana de crear los procedimientos de determinación y los sistemas convencionales, debe desaparecer la asimilación *consciente* o *inconsciente*, a una totalidad de definición finita y caemos en el sector del *subjetivismo*. Por consiguiente, *siendo variable de un matemático a otro* la totalidad de los conjuntos de puntos, esta totalidad sólo tiene una existencia *puramente verbal* en el campo de la Ciencia objetiva—la parte clásica de la Matemática, por ejemplo—y, por consiguiente, no es posible considerarla como un verdadero ente matemático» (1).

De aquí resulta que el tan discutido axioma de Zermelo carece de contenido psicológico porque implica la existencia de un conjunto cuyos elementos no se pueden *dar* por un método de construcción conocido, conjunto que sólo es una esencia, un *being* en el sentido russelliano.

En resumen, la Matemática es una creación del espíritu humano que depende tanto de éste como de la existencia del mundo externo. Su punto de partida son verdades empíricas comprobables por actos de experimentación inmediata que se imponen, por tanto, a la conciencia

(1) *Fundamenta Mathematicæ*, tomo X (1927), pág. 32.

del hombre normal con una seguridad absoluta; después, la experimentación pasa del estadio manual al mental por un proceso psicológico de abstracción cuyos resultados se van condensando en símbolos que representan operaciones o sistemas más o menos complicados de operaciones *actuales* sin proyección hacia un futuro que, tal vez, nunca devendrá presente. Al menos—y en el estado en que la Ciencia, en general, y la Psicología y la Matemática en particular, se encuentran a la hora presente—no se entrevé la posibilidad de tal proyección hacia el mañana, aunque—como ha dicho Arago—el uso de la palabra «imposible» en Matemática, acuse de imprudente a quien la emplea.

El saber matemático, de tipo conceptual, crea entes que son hechos de conciencia desprovistos de todo misterio esotérico porque nacen del conocimiento de la realidad sensible, de tal modo que cada escalón que sube es, al propio tiempo, un escalón que baja, una mirada al pasado para apoyarse en algo conocido anteriormente, en algo más familiar, y poder seguir avanzando en su lucha con la Verdad, mediante la conquista de verdades particulares obtenidas por una serie de comprobaciones que el espíritu agrupa en un momento feliz aplicando el método deductivo para sistematizar, para codificar la Matemática sin preocuparse de sus posibles aplicaciones, con un romanticismo que después aprovechan la Física y las Ciencias naturales, recogiendo el fruto de la imaginación creadora del matemático atraído por la Naturaleza, siempre desflorada y eternamente virgen.

FIN

FE DE ERRATAS

Página	Línea	Dice	Debe decir
27	11	intuítiva	o intuitiva
44	20	al	la
47	1	ellos otro	ellos a otro
60	15	el	la
61	7	lenguaje	lenguaje»
99	23	Geometaía	Geometría
108	9	a_4	a_2
108	12	a^n	a_n
116	23	*cuantité*	*quantité*
121	19	$b - x_n$	$b - x_{n-1}$
130	24	*Infine*	*Infini*
130	24	*Annalem*	*Annalen*
148	13	al $\overline{\alpha}$	al α
153	18	*continuadid*	*continuidad*
156	4	inteligente	inteligible
156	5	irracional	racional
159	10	ias	las
178	10	es recta	recta
178	12	cuatitativa	cualitativa
188	15	$(p^3 - 3\,q^3)$	$(p^3 - 3\,q)^3$
191	2	las permutaciones	permutaciones

INDICE

ACABÓSE DE IMPRIMIR ESTE LIBRO, QUE ESCRIBIÓ EL
EXTREMEÑO FRANCISCO VERA, A VI DÍAS ANDADOS
DEL MES DE ENERO DE MCMXXXIV AÑOS,
FESTIVIDAD DE LOS REYES MAGOS, EN
LA IMPRENTA DE LA EDITORIAL
PLVTARCO, DE MADRID