UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE EDUCACIÓN

LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA LINEAL MEDIANTE SISTEMAS INFORMÁTICOS DE CÁLCULO ALGEBRAICO

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR PRESENTADA POR

Pedro Ortega Pulido

Bajo la dirección de los Doctores:

Antonio Bautista García-Vera
Miguel de Guzmán Ozámiz

Madrid, 2002

ISBN: 84-669-2352-7

TESIS DOCTORAL:

“La enseñanza del Álgebra Lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico”

presentada por

Pedro Ortega Pulido

Directores:

Antonio Bautista García-Vera
y Miguel de Guzmán Ozámiz

INDICE

INTRODUCCIÓN.

Las Matemáticas han ocupado a lo largo de la historia un lugar muy importante en nuestra cultura, entre otras razones porque generan un modelo de pensamiento, porque fomentan la capacidad de abstracción de los individuos, son un instrumento de modelización de la realidad, constituyen el lenguaje básico de la ciencia y la tecnología, tienen una componente lúdica muy vinculada a los juegos tradicionales y porque su puesta en práctica conlleva una actividad creadora de belleza [Guzmán, 1997], [Guzmán, 1998b]. Todos estos argumentos convierten a las Matemáticas en una disciplina básica en el currículum de todo individuo cuya importancia ha sido fruto de una larga evolución histórica.

La importancia de las Matemáticas en nuestra cultura ensalza de forma evidente la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina, repleta de dificultades tanto en su propia estructura conceptual como en diferentes aspectos externos a la misma, entre los que podemos destacar la actitud del individuo frente al quehacer matemático, el lenguaje propio de las Matemáticas y la necesidad de una estructura conceptual adecuada para enfrentarse a los contenidos de la misma [Guzmán, 1991].

Si a la relevancia de esta disciplina añadimos las dificultades que entraña su enseñanza y aprendizaje, podemos afirmar que cualquier estudio relacionado con la educación matemática se convierte en un proceso sumamente complicado tal y como podemos observar en la evolución que ha tenido la enseñanza de esta disciplina a lo largo de la historia, que ha ido modificando desde sus propios contenidos hasta las metodologías pasando por los recursos didácticos empleados [Boyer, 1968], [Debesse-Mialaret, 1973].

Si centramos nuestra atención en la última mitad del siglo XX, nos encontramos con un hecho relevante desde el punto de vista cultural y educativo, nos referimos a la puesta en escena de las nuevas tecnologías. Efectivamente, durante las últimas décadas la aparición de los ordenadores y su introducción progresiva, en muchos casos fulminante, en todos los ámbitos de nuestra vida han generado numerosos cambios tanto en los procesos cotidianos de trabajo como en los hábitos. Desde el punto de vista educativo, esta revolución tecnológica ha provocado numerosos cambios propiciados por las experiencias educativas y las investigaciones realizadas, relacionadas con la introducción y el uso de los ordenadores en el aula. En particular, la introducción de los ordenadores en la enseñanza de las Matemáticas se ha manifestado por el uso de diferentes tipos de programas: juegos, tutoriales, simuladores, micromundos e incluso lenguajes de progamación orientados a las Matemáticas (LOGO, Function Machines, HyperCard) [Kaput, 1992]. Inicialmente se trataba de programas de carácter muy general, pero poco a poco con el vertiginoso avance informático surgieron los primeros programas de cálculo algebraico (MACSYMA, REDUCE) que inicialmente solo se podían aplicar sobre grandes equipos. Más adelante con la implantación de los ordenadores personales, estos programas se fueron desarrollando y en la década de los años 80 surgieron los primeros sistemas de cálculo algebraico para PC's: MAPLE, MATHEMATICA y DERIVE, que más tarde se han convertido en los programas de cálculo simbólico o cálculo algebraico más utilizados en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Las posibilidades didácticas que ofrecen estos programas han suscitado nuevos enfoques metodológicas ya que proponen relativizar la importancia que la enseñanza tradicional ha otorgado al aprendizaje de las destrezas y algoritmos de cálculo, así como una reforma del currículum actual. Estas nuevas visiones de la didáctica de las matemáticas han generado un debate intenso entre dos posturas claramente diferenciadas, centradas en la introducción o no de los ordenadores en la enseñanza de las Matemáticas. Pero a pesar de las ventajas que ofrecen estos programas, como son la interactividad, el carácter dinámico, el almacenamiento de información, los múltiples sistemas de representación gráfico, algebraico, numérico,... sin embargo también existen numerosos peligros como son la pérdida de destrezas básicas, la pérdida del sentido de las operaciones, el hecho de confundir manipulación matemática con conocimiento matemático [Halmos, 1991], [García, 1999], [Guzmán, 1992]. Pero creemos que la educación matemática no debe mantenerse al margen de los avances tecnológicos, y debemos saber aprovechar las posibilidades que nos ofrecen estos sistemas. Por ello, para incorporar un sistema de cálculo algebraico en los procesos de enseñanza aprendizaje de las Matemáticas es necesario realizar estudios detallados sobre las formas y modos de uso de este nuevo material didáctico.

En esta investigación hemos realizado un estudio cualitativo del comportamiento de una estrategia didáctica que incorpora el uso del programa de cálculo simbólico DERIVE en la enseñanza y aprendizaje de una de las áreas de conocimientos de las Matemáticas: el ÁLGEBRA LINEAL.

En el Capítulo I, presentamos el marco teórico de nuestra investigación, analizando en el apartado I.1. aspectos generales de la enseñanza de las Matemáticas tales como la importancia que tiene esta disciplina en nuestra cultura, la estructura conceptual de las Matemáticas, las dificultades de su enseñanza y aprendizaje, la evolución histórica de su enseñanza , el currículum básico en Matemáticas y la resolución de problemas. En el apartado I.2 presentamos los sistemas de cálculo algebraico en el contexto de la enseñanza de las Matemáticas, para ello estudiamos primero de forma general el uso de los ordenadores en el aula analizando la influencia de los ordenadores en la enseñanza de las Matemáticas y una pequeña historia sobre los tipos de programas que se han utilizado. También presentamos las características del nuevo medio computacional así como los peligros que puede provocar la introducción del ordenador en el aula de Matemáticas. En segundo lugar nos centramos en los programas de cálculo simbólico, ofreciendo una descripción general de las características de estos programas y las formas de introducirlos en las Matemáticas. Finalizamos presentando las características del sistema de cálculo simbólico que utilizaremos en nuestra investigación: el programa DERIVE. En el apartado I.3. describimos brevemente el motivo por el cual centramos nuestra investigación en el álgebra lineal, realizamos una breve historia de este área de conocimiento de las Matemáticas y un análisis de la importancia que tiene el álgebra lineal en todos los niveles educativos: primaria, secundaria y universidad. Y finalizamos analizando la manera de utilizar los sistemas de cálculo algebraico en la enseñanza del álgebra lineal.

Una vez expuesta la fundamentación teórica de nuestra investigación, en el Capítulo II centramos nuestro trabajo en la definición de la estrategia didáctica que hemos utilizado en nuestra experiencia educativa. Para ello en el apartado II.1 razonamos la necesidad de una nueva estrategia didáctica para la enseñanza de las Matemáticas, y en particular del álgebra lineal y a continuación en el apartado II.2. definimos las características básicas de nuestra estrategia, que se fundamenta en cinco principios:

a) la introducción del programa de cálculo simbólico DERIVE,
b) el uso de una metodología experimental basada en la adquisición de aprendizajes significativos,
c) el uso de la resolución de problemas como núcleo de profundización de los conceptos matemáticos,
d) la potenciación del aprendizaje colaborativo,
e) y el uso de internet y el correo electrónico.

Dado que la herramienta básica de nuestra estrategia es el programa DERIVE, después de realizar la descripción de las características de nuestra estrategia hemos analizado las características que relacionan cada uno de los principios metodológicos con el uso de este programa, es decir, estudiamos la resolución de problemas con DERIVE, la importancia del aprendizaje colaborativo en el entorno de los ordenadores [Crook, 1999], la adquisición de aprendizajes significativos con DERIVE y la forma de usar Internet como complemento del programa de cálculo simbólico. En el apartado II.3. estudiamos la importancia de las tareas de enseñanza en nuestra estrategia didáctica, en particular cómo deben ser las tareas de enseñanza para promover la resolución de problemas, cuyos contenidos sean de álgebra lineal y utilizando el programa DERIVE. Finalizamos el capítulo describiendo formalmente nuestra estrategia didáctica en el apartado II.4 y desarrollando de forma detallada el planteamiento didáctico del curso "Matemáticas II con DERIVE". En este planteamiento didáctico basado en la asignatura "Matemáticas II", asignatura troncal de primer curso de la Licenciatura en Administración y Dirección de Empresas de la Facultad de Económicas de la Universidad Autónoma de Madrid, detallamos en primer lugar la forma de manejar DERIVE en el aula, lo que denominamos el planteamiento didáctico general y a continuación un desarrollo didáctico de todo el curso (objetivos, contenidos, metodología, temporalización y herramientas necesarias del programa DERIVE).

En el Capítulo III, desarrollamos el diseño de nuestra investigación, para ello en el apartado III.2 presentamos la finalidad de nuestra investigación: el análisis de la influencia que ejercen los programas de cálculo simbólico en el aprendizaje del álgebra lineal, mediante el estudio detallado de la estrategia didáctica que hemos definido en el Capítulo II; en particular la investigación se ha centrado en el comportamiento de nuestra estrategia en torno a varias cuestiones que consideramos básicas y que se detallan en dicho apartado. El modelo de investigación utilizado se basó en una experiencia piloto que describimos en el apartado III.3. A partir de esta prueba piloto y teniendo en cuenta la naturaleza de las cuestiones y de los datos a recoger, la investigación que hemos realizado se ha basado en un estudio cualitativo-cuantitativo que se circunscribe en torno a un modelo de ESTUDIO DE CASOS ETNOGRÁFICO [Goetz-LeCompte, 1988]. La investivación se desarrolló sobre un grupo de alumnos que cursaba 1º de la Licenciatura de Administración y Dirección de Empresas en la Universidad Autónoma de Madrid , que desdoblamos en dos subgrupos A y B, en el primero de ellos aplicamos la estrategia didáctica que incorpora el uso de DERIVE y en el segundo usamos una metodología tradicional tal. El contextos educativo de la investigación así como el acceso al campo se describen ampliamente en el apartado III.4. En el apartado III.5. se describen las características y roles del investigador y en el apartado III.6 hacemos una descripción detalla de la herramientas y estrategia de recogida de datos, con lo que tenemos totalmente definido el diseño de la investigación.

En el Capítulo IV describimos los datos obtenidos con las diferentes herramientas de recogida de datos propuesta en el diseño: encuestas, entrevistas, pruebas objetivas y notas de campo.

En el Capítulo V una vez descrito el proceso general de análisis realizado (apartado V.1) , desarrollamos en primer lugar en el apartado V.2. el que denominamos análisis "vertical", es decir, el análisis de cada uno de los casos o individuos que forman parte de nuestra investigación obteniendo una conclusiones finales para cada caso en torno a las cuestiones iniciales planteadas en la investigación. En segundo lugar en el apartado V.3. se desarrolla el análisis "horizontal" o "longitudinal" de la investigación, obteniendo las conclusiones finales de cada cuestión. Para verificar estas conclusiones, en el apartado V.4. hemos desarrollado un proceso de triangulación de datos a partir de las conclusiones finales, de las conclusiones de las notas de campo, de los datos cuantitativos de comparación de ambos subgrupos y la entrevista realizada con una observadora cualificada que presenció toda la experiencia educativa. Con este proceso de triangulación hemos obtenido unas conclusiones finales para cada una de las cuestiones objeto de estudio.

A partir de las conclusiones finales obtenidas tras el proceso de triangulación, en el Capítulo VI elaboramos la conclusiones finales de nuestro estudio que ponen de manifiesto que el programa de cálculo simbólico DERIVE ofrece un sistema de notación intermedio para el estudio del álgebra lineal, favoreciendo la interactividad, potenciando el protagonismo de los alumnos, permitiendo reconocer los contenidos esenciales del programa y realizar con menos esfuerzo numerosos cálculos repetitivos y rutinario, circunstancias que han favorecido y proporcionado unas situaciones de enseñanza que conducen a un aprendizaje del álgebra lineal caracterizado por las siguientes características:

- es un aprendizaje por descubrimiento y activo que propicia la adquisición de aprendizajes significativos,
- es un aprendizaje colaborativo,
- un aprendizaje que permite una adecuada atención a la diversidad,
- proporciona la posibilidad de utilizar varias estrategias en la resolución de problemas.

A la vista de los resultados en el apartado VI.2 proponemos algunas cuestiones abiertas que pueden ser objeto de nuevas investigaciones.

Antes de comenzar resulta de justicia recordar a todas las personas que han hecho posible esta investigación.

En primer lugar debo agradecer al Dr. Miguel de Guzmán que orientó mis primeros pasos en el terreno de la educación matemática y luego ha sabido guiar y dirigir mis pasos a lo largo de toda la investigación junto al Dr. Antonio Bautista, ofreciéndome siempre una total disponibilidad para solucionar mis dudas, y una paciencia para leer las diferentes versiones de este trabajo. Su apoyo y dirección ha sido fundamental para la investigación.

También debo agradecer a la Dra. Rosa Barbolla su colaboración en la investigación como observadora cualificada, cuyas observaciones y consejos me ha ayudado enormemente y también al equipo de profesores de la Unidad de Matemáticas del Departamento de Análisis Económico: Economía Cuantitativa de la Universidad Autónoma de Madrid, con los que he compartido y comparto un trabajo de innovación docente en la línea que presento en esta tesis.

No sería justo olvidar a los alumnos que hicieron posible esta investigación, que se prestaron con amabilidad a realizar todas las entrevistas y pruebas que fui necesitando y que por otro lado me animaron en el duro trabajo de campo.

Finalmente debo destacar el apoyo de Verónica, Ana y María, las tres mujeres de mi vida, familia que ha soportado mi ausencia, el peso mis notas, mis grabaciones y el portátil durante muchos momentos animándome siempre con mucho amor; a mis padres a los que debo mi existencia y finalmente a mi compañero Abraham Rodríguez que me ha ayudado enormemente en las labores de reprografía y encuadernación del texto final.

Madrid, 16 de Noviembre de 2001

CAPÍTULO I: FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

I.1. La enseñanza de las Matemáticas.

Comprender la naturaleza de la enseñanza de las Matemáticas requiere realizar una revisión general de los aspectos fundamentales que configuran esta disciplina. Por ello, en el primer apartado (I.1.1) mostraremos las razones fundamentales bajo las cuales podemos asegurar que las Matemáticas han sido uno de los pilares básicos en el desarrollo cultural de la humanidad; a esta relevancia cultural debemos añadir su importancia en el desarrollo cognitivo de los individuos (circunstancia que analizaremos en el apartado I.1.2.). Aunque la propia estructura conceptual de las Matemáticas es la causa de una de las principales dificultades en la enseñanza de esta disciplina, sin embargo existen otros elementos que forman parte de las dificultades en la enseñanza y aprendizaje de esta materia, problemática que analizaremos en el apartado I.1.3.

La importancia cultural adquirida por las Matemáticas ha hecho que sea una de las disciplinas básicas del currículum. Este hecho ha sido fruto de una larga evolución histórica que comentaremos en el apartado I.1.4. A la vista de este desarrollo histórico en la enseñanza de las Matemáticas, desembocamos en una cuestión muy importante, ¿cómo es o cómo debería ser el currículum básico en Matemáticas?, pregunta que analizaremos en el apartado I.1.5. Con este estudio del currículum, llegamos necesariamente a una de las tendencias didácticas que ha adquirido mayor protagonismo en la enseñanza de las Matemáticas a lo largo de los últimos años: la resolución de problemas (apartado I.1.6); tendencia que formará parte del estudio de nuestra tesis y que contextual izará parte de la estrategia didáctica que proponemos.

I.1.1. Las Matemáticas en nuestra cultura.

Las Matemáticas han ocupado desde siempre un lugar muy importante en nuestra cultura, y en especial en algunas épocas históricas. Así por ejemplo, en la antigua Grecia el pensamiento matemático estaba muy vinculado con los planteamientos filosóficos de grandes pensadores: Pitágoras, Tales de Mileto, Arquímedes, Platón, Aristóteles,...; algunos pensadores del imperio romano tenían como fuente de sabiduría las Matemáticas; a mediados del s. XVII el matemático Descartes iniciador y precursor del Racionalismo y el idealismo moderno se convierte en el padre del método científico; y recientemente las Matemáticas han jugado un papel decisivo en el desarrollo científico y tecnológico, configurándose como una de las disciplinas fundamentales para la física, la química, la biología, la economía... Por todo esto se puede decir que las Matemáticas han sido y son uno de los pilares indiscutibles de nuestra cultura, configurando en gran medida el desarrollo científico y cultural de toda la humanidad. Entre las razones que pueden justificar esta importancia podemos señalar las siguientes [Guzmán, 1997]:

- La matemática es una ciencia capaz de ayudarnos en la comprensión de muchos aspectos del universo. De hecho, el nacimiento de las Matemáticas como ciencia, se puede atribuir a Pitágoras, creador de una escuela de pensamiento matemático cuyo fundamento no era otro que la concepción del universo como un cosmos ordenado, un mundo inteligible en numerosos aspectos a través del razonamiento matemático. Para la comunidad pitagórica todo era explicable a través del número: "*Grande, todopoderosa, todo perfeccionada y divina es la fuerza del número, comienzo y regidor de la vida divina y humana, participante de todo. Sin el número todo es confuso y oscuro... Porque nada de las cosas nos sería clara ni en su mismo ser ni en sus relaciones mutuas, si no existiera el número y su esencia. Él es quien armoniza en el alma las cosas con su percepción haciéndolas cognoscibles y congruentes unas con otras según su naturaleza, proporcionándoles corporeidad*" (Filolao, pitagórico del siglo IV a.C.), y es que según Pitágoras "*todo en el universo está regido por el número y mediante él llegamos a las raíces y fuentes de la naturaleza*" conclusión a la que llegó tras varios viajes a Mesopotamia y Egipto de donde obtuvo por extrapolación esta idea [Guzmán, 1998c]. Podríamos decir que el sentido del quehacer matemático ha sido un intento de aproximación hacia la realidad, tanto de ese mundo perceptible por nuestros sentidos como de ese universo conceptual que el propio matemático va estructurando.

- La actividad matemática genera un modelo de pensamiento. Un estilo de pensamiento que ha servido de soporte para numerosas teorías filosóficas, así podemos citar algunos ilustres filósofos de la historia que han sido a su vez brillantes matemáticos: Pitágoras, Aristóteles, Descartes, Russell,... Este modelo de pensamiento matemático genera una serie de procesos mentales sobre los cuales el matemático va cimentando todo un estilo de razonamiento lógico de gran eficacia.

- El quehacer matemático es una actividad creadora de belleza. Efectivamente, la exploración de la realidad a través de problemas matemáticos responde en ocasiones a un cierto placer estético, innato en esta disciplina. Es esa belleza intelectual que según afirmaba Platón "*es únicamente asequible por los ojos del alma*", belleza que ha sido uno de los estímulos más importantes en el quehacer matemático. En la comunidad pitagórica este aspecto encaminó al matemático hacia los aspectos más hondos del ser y hacia la contemplación de la divinidad, que se presiente más o menos a través de la armonía intelectual del universo [Guzmán, 1998b].

- Las Matemáticas son un instrumento de modelización que ha permitido construir los modelos matemáticos de los que se han obtenido las leyes que intentan dar explicaciones a numerosos fenómenos de la naturaleza, la economía, la física, la biología,... ocupando por tanto, un marco básico para el desarrollo de esas disciplinas. Este proceso de matematización del entorno, tiene su origen en el intento de acercar la realidad a nuestro entendimiento racional del mundo, con el fin de ofrecer explicaciones de ese fenómeno o hecho observable. Para ello se recurre a los procesos de abstracción y simplificación. Con las observaciones obtenidas se intenta abstraer el comportamiento del fenómeno, para construir un modelo general que simplifica en cierta medida el fenómeno observado. En esta situación el matemático configura y desarrolla el modelo que ha creado y luego más tarde comprueba que los resultados de sus construcciones se adaptan a la realizad que ha estudiado. Según M. de Guzmán [Guzmán, 1998c] este proceso de acercamiento o modelización se divide en tres etapas:

  "1) la mente se acerca a la realidad con intención matematizante,
  2) el matemático desarrolla el propio modelo mental que ha creado,
  3) la mente vuelve a la realidad de partida con los resultados que sus construcciones le ofrecen, a veces realizadas sin pretensión alguna de aplicación a la realidad y observa con sorpresa su adecuación a ella, a veces perfecta".

  Esta misteriosa adecuación de las Matemáticas con la realidad a través del proceso de modelización ha dejado perplejos a numerosos científicos de todos los tiempos, de los que merece la pena destacar el testimonio de A. Einstein artífice en buena parte de los avances en física: *"Aquí aparece un rompecabezas que ha perturbado a los científicos de todos los tiempos ¿cómo es posible que la matemática, un producto del pensamiento humano, que es independiente de la experiencia, se ajuste tan excelentemente a los objetos de la realidad física? ¿Puede la razón humana sin experiencia descubrir con su puro pensar propiedades de las cosas reales?"* (A.Einstein. Sidelights of Relativity). Este proceso de modelización ha influido notablemente en numerosas disciplinas científicas para la construcción de teorías generales: en la economía, la física, la biología, ... Estamos por tanto ante un nuevo motivo de influencia real de las Matemáticas en nuestra cultura.

- Las Matemáticas son el lenguaje básico del desarrollo de la ciencia y la tecnología. Sin necesidad de caer en posturas formalistas, podemos afirmar que el quehacer matemático ha requerido de un lenguaje básico capaz de manipular razonamientos y procesos mentales complejos a través de símbolos. Esta simbolización de los objetos matemáticos, que inicialmente tan sólo requería de conceptos como el número y la extensión, se fue complicando y perfeccionando con el fin de obtener un lenguaje capaz de traducir tareas mentales complejas, basadas en numerosas ocasiones, en la determinación y verificación de las relaciones que guardan entre sí los símbolos creados. Este tipo de lenguaje, se ha utilizado en otras disciplinas, no sólo en Matemáticas, ya que es un lenguaje preciso y riguroso necesario para el desarrollo eficaz de la ciencia y la tecnología.

- Las Matemáticas son una actividad profundamente lúdica. El juego ha acompañado al hombre a lo largo de toda su historia formando parte de su cultura. Entre los numerosos tipos de juegos que han integrado el bagaje lúdico de la humanidad, podemos señalar la enorme importancia de los juegos matemáticos, que han ocupado desde siglos, una de esas parcelas lúdicas propias de la actividad humana. El papel desempeñado por el juego en el desarrollo de las Matemáticas ha surgido por medio de interrogantes planteados inicialmente de una manera lúdica, pero que posteriormente han necesitado o han desarrollado potentes herramientas matemáticas. Así por ejemplo, en la ciudad alemana de Königsberg a un individuo se le ocurrió un día una pregunta ¿podría planearse un paseo que cruzase los siete puentes sobre el río Pregel, que unían las diversas zonas de la ciudad y la isla situada en medio?. Esta pregunta llegó a oídos de Euler y de ella surgió una de las ramas más importantes de la matemática: la Topología. En Francia, un jugador de cartas en una de sus múltiples partidas planteó una pregunta ¿cuál será en cada circunstancia concreta la apuesta adecuada para que los apostantes estén en igualdad de condiciones?. Este jugador era el Caballero de Mère, y la pregunta fue sometida al ingenio de Blas Pascal, que a su vez intercambió con su amigo Fermat. A partir de las respuestas que se ofrecieron a esta pregunta se gestaron los inicios de la teoría de las probabilidades [Guzmán,1982]. Estos son algunos de los ejemplos lúdicos a partir de los cuales se han desarrollado teorías matemáticas muy importantes, circunstancia que nos obliga en cierta medida a reflexionar acerca de la importancia del juego en el desarrollo de esta ciencia, ya que, como acabamos de observar el juego ha acompañado a muchos matemáticos en sus investigaciones. Nuevamente las Matemáticas se incorporan a nuestra cultura: forman parte de los juegos cotidianos.

Con este breve análisis estamos en condiciones de afirmar que la presencia de las Matemáticas en nuestra cultura, ha convertido esta disciplina en un elemento fundamental en el currículum de todo individuo. Pero además, las Matemáticas son una disciplina fundamental para el desarrollo cognitivo de la persona. Esta circunstancia será la que trataremos en la siguiente sección, analizando la estructura conceptual de esta disciplina.

I.1.2. Estructura conceptual de las Matemáticas.

Las Matemáticas tienen una naturaleza especial y diferenciada con respecto al resto de disciplinas que componen el currículum. Uno de los elementos que configuran esta naturaleza característica es su propia estructura conceptual. Antes de presentar los elementos conceptuales de esta área de conocimiento, es conveniente realizar un breve análisis que nos ofrece una panorámica del funcionamiento de nuestro aparato mental respecto al quehacer matemático.

Un buen análisis de esta estructura lo podemos encontrar en [Kaput, 1992]. En este trabajo, J. Kaput afirma que nuestro aparato mental es limitado en procesamiento y trabajo memorístico pero muy efectivo en la manipulación de ideas y procesos complejos. Según este autor, la experiencia matemática tiene lugar en dos niveles:

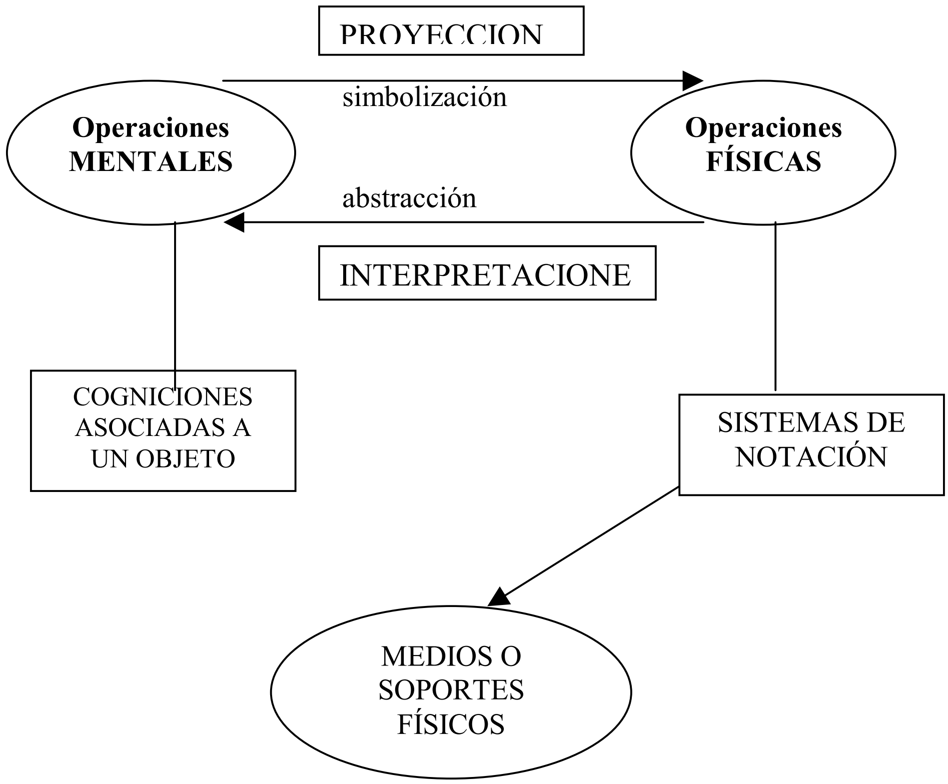
I.- La estructura del conocimiento de grandes términos

II.- La experiencia organizada.

Estas dos entidades se relacionan de igual forma que lo hacen el pensamiento y el lenguaje; por lo que, según estas relaciones podemos considerar dos grandes mundos o entidades:

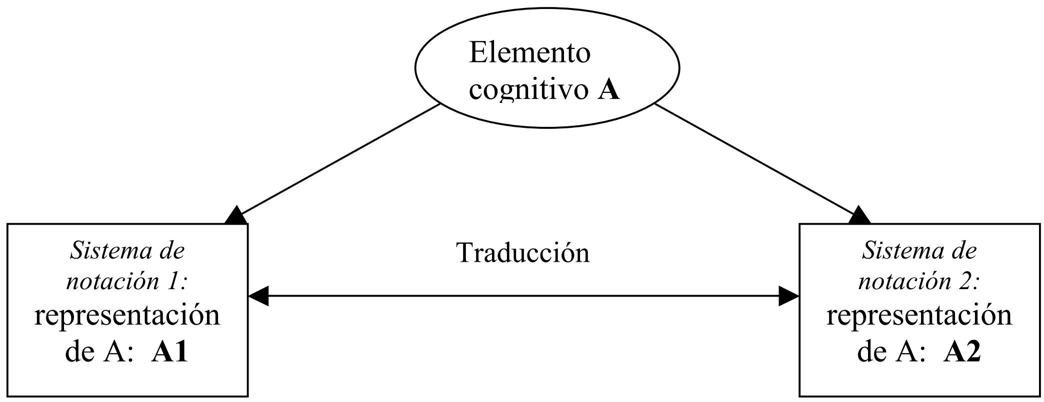
a) el mundo de las operaciones mentales (hipotético)
b) el mundo de las operaciones físicas (observable)

Las relaciones entre estos dos mundos se traducen en dos tipos de operaciones mentales: las proyecciones y las interpretaciones. Las PROYECCIONES surgen cuando se transfieren las operaciones mentales sobre las operaciones físicas, produciendo estructuras físicas observables, o dicho de forma general se realiza "una cierta escritura". Por otro lado, el paso de las operaciones físicas a las operaciones mentales produce las INTERPRETACIONES. Tanto las PROYECCIONES como las INTERPRETACIONES llevan asociados dos procesos matemáticos muy complejos: la *simbolización* de las cogniciones en el lenguaje matemático y la *abstracción* de los conceptos que nos permite obtener representaciones mentales de los símbolos.



En el mundo de las operaciones mentales se sitúan las COGNICIONES asociadas a un objeto, y en el mundo de las operaciones físicas se encuadrarían los SISTEMAS DE NOTACIÓN (sistemas de reglas que sirven para identificar o crear caracteres, para operar sobre ellos y para determinar las relaciones que verifican). Pero además cabría añadir un tercer elemento: el MEDIO o SOPORTE FÍSICO en el cual se representan estos objetos.

A partir de este planteamiento inicial, surgen dos tipos de relaciones entre estas entidades que representan los tipos de operaciones realizables: las transformaciones y las traducciones. En un sistema de notación se pueden realizar TRANSFORMACIONES de unos objetos en otros, de tal forma que las cogniciones asociadas a un elemento A se proyectan en un sistema de notación, en el que se pueden realizar transformaciones entre diversos objetos. Las TRADUCCIONES de objetos mentales son operaciones que consisten en determinar o buscar los equivalentes de un mismo objeto o elemento en varios sistemas de notación, es decir, la traducción de un mismo elemento cognitivo entre distintos sistemas de notación: un elemento cognitivo A que en un sistema de notación 1 se representa por el elemento A1, tiene un elemento equivalente A2 en otro sistema de notación 2 que no es más que la traducción del mismo elemento cognitivo en un sistema de representación diferente. Las traducciones entre los sistemas de notación provocan una integración de las cogniciones (por ejemplo, la representación simbólica de una expresión algebraica y su representación gráfica). En los sistemas tradicionales de notación, existen dos tipos de notaciones, las NOTACIONES DE PRESENTACION (grafos de coordenadas, tablas de datos, histogramas), y NOTACIONES DE ACCION (sistemas algebraicos, ecuaciones o expresiones de transformaciones).



A partir de este planteamiento teórico J. Kaput [Kaput, 1992] realiza una clasificación de la actividad matemática en cuatro tipos de operaciones:

1. Transformaciones sintácticamente fuertes, realizadas en un sistema de notación particular con o sin referencia a significados externos (MANIPULACIÓN SIMBÓLICA)

2. Traducciones entre sistemas de notación, incluyen la coordinación de acciones a lo largo de los sistemas de notación (RELACIONES ENTRE GRAFOS Y EXPRESIONES ALGEBRAICAS)

3. Construcción y comprobación de modelos matemáticos que se realizan para traducir diferentes aspectos en sistemas de notación.

4. Consolidación o cristalización de relaciones y /o procesos entre objetos conceptuales o entidades cognitivas que pueden entonces ser usadas en relaciones o procesos que exigen un alto nivel de organización.

A partir de esta clasificación de la actividad matemática, podemos decir que dicha actividad viene determinada por la naturaleza intrínseca de esta disciplina, caracterizada por varios elementos fundamentales que determinan la estructura conceptual de las Matemáticas. Entre estos elementos fundamentales podemos destacar los siguientes:

- El elevado **grado de ABSTRACCIÓN.** Las Matemáticas **son una ciencia ABSTRACTA**, independiente de la conexión con el mundo físico de nuestra experiencia y de la existencia real y tangible de los objetos definidos. Por este motivo dado que los objetos matemáticos no tienen ninguna representación material y están únicamente presentes en los sistemas de notación, cualquier acercamiento que deseemos realizar a estos objetos matemáticos necesita de una aproximación por medio de situaciones familiares, metáforas o analogías, que conllevan un elevado grado de dificultad. Por otro lado, hay que tener en cuenta que la capacidad de abstracción que hace posible este tipo de razonamientos, está presente en estadios psicoevolutivos en los que se ha desarrollado el denominado *pensamiento formal* [Piaget-Inhelder, 1975]. Esta terminología se refiere al estilo de pensamiento que permite al individuo ser capaz de razonar correctamente sobre proposiciones, es decir, el tipo de pensamiento que le permite sacar consecuencias necesarias de verdades posibles. Esta idea constituye el principio del pensamiento hipotético-deductivo o pensamiento formal. El proceso de abstracción que pueden realizar aquellos alumnos que tienen desarrollado este tipo de pensamiento, requiere realizar una transferencia del aprendizaje a situaciones familiares utilizando analogías de la nueva situación en otras ya conocidas sobre las que se aplica el concepto abstracto. Aunque la abstracción es un aspecto que intimida y aleja a los alumnos, esto puede suceder según afirma Calderón [Calderón, 1986] *"porque no se les ha guiado o introducido a éstos de forma ordenada"*. Una forma de acceder a la abstracción según el propio Calderón es conseguir que el alumno sienta una recompensa cuando se enfrenta a la abstracción para que obtenga una visión de la belleza y de la utilidad que ofrece esa visión panorámica de la abstracción, de tal forma que el alumno no caiga en el desaliento.

- La **estructura JERÁRQUICA de sus contenidos.** Las Matemáticas están JERARQUIZADAS, de tal forma que para construir nuevos conocimientos es necesario apoyarse en otros previamente adquiridos. En este sentido la adquisición de habilidades manipulativas y el aprendizaje de automatismos básicos es fundamental para ir cimentando la pirámide conceptual que supone la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

- El **Razonamiento Inductivo**, es otro estilo de pensamiento muy característico en el quehacer matemático; de hecho, todos los procesos de MODELIZACIÓN surgen de ese proceso inductivo, que se inicia con la observación, manipulación y análisis de casos particulares y concretos, dando paso a CONJETURAS que marcan las relaciones que puedan existir entre los casos particulares. La GENERALIZACIÓN de las regularidades u observaciones parten de esas conjeturas iniciales; que luego hay que justificar o demostrar con un planteamiento lógico. De hecho el proceso de construcción empírica e inductiva ha sido históricamente uno de los pilares centrales en la construcción del conocimiento matemático, que más tarde, ha desembocado en la formalización y estructuración del mismo.

- El proceso de formalización y estructuración del conocimiento ha sido posible gracias al proceso deductivo. Este **Razonamiento Deductivo**, es un estilo de pensamiento vinculado a la actividad matemática. Las propiedades matemáticas se pueden deducir "lógicamente" partiendo de verdades primeras o axiomas iniciales preestablecidos, aplicando las leyes de la lógica. Nuevamente debemos señalar que para obtener este tipo de razonamiento es requisito imprescindible haber adquirido el razonamiento formal, estadio psicoevolutivo del individuo que se suele adquirir a partir de los 15-16 años de edad.

- La **INTUICION ESPACIAL**, o capacidad para imaginarse y manipular mentalmente los objetos, desarrollada fundamentalmente a través de la geometría, se ha convertido en una habilidad básica en nuestra cultura. Efectivamente, hoy en día, la intuición espacial resulta imprescindible para interpretar multitud de reproducciones en perspectiva que suelen encontrarse en numerosos libros y documentos impresos.

- Las Matemáticas tienen un **LENGUAJE PROPIO**. El lenguaje matemático no está completamente formalizado ya que contiene sintagmas que agrupan expresiones del lenguaje natural con símbolos propios del lenguaje simbólico. La notación simbólica es lo que hace de las Matemáticas un lenguaje conciso y sin ambigüedades, útil para presentar informaciones en otros dominios y para efectuar sobre él manipulaciones de las que se obtienen nuevas informaciones. Este lenguaje matemático es el elemento fundamental que guía las proyecciones e interpretaciones que se realizan entre operaciones mentales y operaciones físicas.

- La actividad matemática lleva implícito el **uso de la MEMORIA** de maneras muy diferentes.
    1. la **MEMORIA VISUAL**, utilizada para recordar figuras y expresiones formales
    2. La **MEMORIA SEMÁNTICA**; utilizada para recordar significados
    3. La **MEMORIA LITERAL**, para recordar fórmulas y expresiones formales.

Todos estos elementos determinan una estructura conceptual especial: la estructura conceptual de la actividad matemática. La complejidad de esta estructura conceptual es una de las principales dificultades de la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, situación que analizaremos en el siguiente apartado.

I.1.3. Dificultades de la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

Los elementos que hemos citado en el apartado anterior configuran la estructura conceptual del quehacer matemático, y son en sí mismos, el origen de algunas de las causas que provocan dificultades relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, podríamos afirmar que son las **dificultades intrínsecas** a la enseñanza-aprendizaje de esta disciplina. Junto a estas dificultades existen otras dificultades de origen externo de entre los que podemos destacar los siguientes:

A) La ***actitud ante las Matemáticas***. La actitud con la que cualquier persona se enfrenta a una problema o una actividad de tipo matemático puede ser la causa de una dificultad para la resolución de dicho problema. Actitudes como el miedo al fracaso, a la equivocación, el miedo al ridículo, el deseo de terminar pronto la actividad, la ansiedad, la apatía, la pereza a iniciar la actividad,... son algunas de las actitudes que pueden provocar una dificultad añadida al quehacer matemático [Guzmán, 1991]. En consecuencia, una buena metodología debe favorecer una **actitud positiva** hacia las Matemáticas; actitud que se consigue si se DISFRUTA trabajando con las Matemáticas, si se tiene SEGURIDAD en la aplicación de los conocimientos y si se reconoce claramente la UTILIDAD de la misma. Esta relación entre la actitud hacia las Matemáticas y la capacidad para desarrollarlas quedó plasmado en el Informe Cockroft [Cockroft, 1985] , según el cual el elevado rechazo que experimentan los alumnos ante el álgebra es el origen de las dificultades de su comprensión, situación que también se pone de manifiesto en temas relacionados con conjuntos, teoría de matrices y operaciones algebraicas básicas, contenidos que a su vez, originaban enormes dificultades de comprensión debido a la sensación de inutilidad e inoperancia del alumnado con relación a estos conceptos. No podemos olvidar la importancia que tiene la CONFIANZA en sí mismo y la AUTOESTIMA que como se indica en este informe pueden afectar su rendimiento en Matemáticas (pág. 347, del informe Cockroft [Cockroft, 1985]). Sobre la actitud del alumnado frente a las Matemáticas, conviene señalar la existencia de un "estereotipo cultural" muy arraigado en nuestra sociedad, que asigna a las Matemáticas una dificultad y complejidad apriorística innata; de tal forma que en muchas ocasiones se genera una barrera adicional que posiblemente incremente las dificultades propias de esta disciplina. Aunque las dificultades de la Matemáticas son evidentes y son un hecho que vamos a analizar en este apartado, sin embargo, una actitud TEMEROSA ante cualquier disciplina, como es la actitud que acabamos de señalar, no hace otra cosa que distanciar al alumnado de los contenidos de la misma. De esta forma este "estereotipo cultural" se convierte en un justificante previo que dificulta la comprensión de esta disciplina. Así pues, una actitud positiva y abierta ante las Matemáticas es una postura previa que genera enormes beneficios a la hora de enfrentarnos al quehacer matemático.

B) La ***dualidad entre lenguaje natural y lenguaje matemático***. El lenguaje natural y cotidiano tiene una gran riqueza y expresividad que nos permite transmitir sentimientos, estados de ánimo,.... Esta ambigüedad del lenguaje natural nos facilita la representación de situaciones anímicas y emocionales, circunstancia que convierte a este lenguaje en un sistema de expresión claramente inapropiado para las Matemáticas, ya que esta disciplina requiere plantear y describir situaciones claras, unívocas, que signifiquen siempre lo mismo cualquiera que sea el contexto en el que deban expresarse. Entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático formalizado, existe un lenguaje matemático intermedio, un lenguaje no formalizado, que suele utilizarse para explicar y mostrar los hechos y situaciones propias de la actividad matemática. Sin embargo existe un cierto solapamiento entre estos dos lenguajes (lenguaje matemático no formalizado y el lenguaje natural) originado en algunas circunstancias por la utilización de palabras que tienen un significado muy variado en ambos lenguajes (por anillo, grupo, relación,....). Una situación más compleja se pone de manifiesto cuando se utilizan los conectores lógicos. Así por ejemplo, el uso de la doble negación en el lenguaje matemático equivale a una afirmación; sin embargo en el lenguaje natural (en castellano) suelen utilizarse negaciones sucesivas para imprimir un énfasis retórico a las expresiones. Construcciones como "Ni tú ni tu madre sois ingleses", es una expresión aceptable en lenguaje natural que no podría ser usada en lenguaje matemático, que únicamente aceptaría en este contexto la expresión "Tú y tu madre NO sois ingleses". Situaciones similares se pueden presentar cuando se utilizan "y" , "o", "o bien... o bien" , "si ... entonces ..." que tienen ciertas equivalencias con los conectores lógicos de matemáticas. Estos hechos provocan ciertas dificultades en la comprensión del lenguaje matemático, precisamente por esa diversidad de matices admisibles en el lenguaje natural al cual estamos tan acostumbrados, que no son aceptables en el lenguaje matemático, sometido necesariamente a una precisión semántica y una construcción sintáctica más rigurosa [Guzmán, 1991].

C) El ***conflicto entre la intuición del alumno y la lógica del razonamiento matemático***. Es muy habitual que la intuición nos arrastre a operar o razonar de forma automática siguiendo ciertos moldes previos, que en ocasiones nos conducen a error. Estos moldes previos de nuestras formas pensamiento, y en particular de las formas de pensamiento de los alumnos pueden ser equiparables a lo que se definen como "surcos de la mente" en [Guzmán, 1991]. Según M. de Guzmán, al igual que nuestra percepción sensorial está influida por ciertos parámetros que nos incitan a percibir unas sensaciones antes que otras, en nuestra percepción mental existen ciertos "surcos" que nos encaminan a razonar de una forma y no de otra: son predisposiciones mentales y cognitivas. En este sentido es muy habitual en el alumnado una cierta tendencia a aplicar la linealidad en las operaciones, siguiendo esquemas de la forma f(x*y)=f(x)*f(y). Esta linealidad provoca una cierta tendencia a que cálculos del tipo $\int (f(x)\cdot g(x))dx$, sean resueltos de forma "natural" mediante esta inclinación hacia lo lineal efectuando $\int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$.

D) La existencia de ***desequilibrios entre el nivel de desarrollo mental del sujeto y el nivel de abstracción necesario para la comprensión de un determinado concepto.*** En el periodo de 11-12 a 14-15 años, el niño llega a desprenderse de lo concreto y comienza a situar lo real en un conjunto de transformaciones posibles. A lo largo de este periodo el individuo va transformado gradualmente un estilo de pensamiento basado en operaciones concretas que afectan directamente a los objetos (el denominado pensamiento concreto) hacia otro tipo de pensamiento que afecta a las hipótesis y proposiciones (el pensamiento formal) [Piaget-Inhelder, 1975]. Partiendo de esta situación, es evidente que los diferentes niveles evolutivos de los adolescentes en el ámbito cognitivo, pueden provocar en ellos numerosas dificultades frente a los conceptos matemáticos de carácter abstracto, que requieren la existencia de un nivel de pensamiento formal suficiente. Así, suele ser frecuente que se pretendan enseñar contenidos matemáticos abstractos a jóvenes que no han consolidado el pensamiento formal. Esta incapacidad cognitiva del joven ante el concepto que se le presenta es, sin duda, una barrera insalvable, que va generando lagunas conceptuales desde las primeras edades del individuo, impidiendo de esta forma su aprendizaje. Las metodologías, deben tener presente estas situaciones psicológicas, teniendo muy en cuenta la ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD, y la adecuación de los contenidos con los niveles de desarrollo cognitivo.

Estas dificultades externas de la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, plantean la necesidad de estrategias didácticas adecuadas que tengan muy presente el grado de dificultad de esta disciplina, asunto que trataremos en las secciones siguientes.

I.1.4. Evolución histórica de la enseñanza de las Matemáticas.

La importancia cultural de las Matemáticas subrayada anteriormente, ha obligado a incluirla en los últimos siglos como asignatura, área o disciplina en las escuelas de primaria y secundaria así como en los primeros cursos de numerosos estudios universitarios. Pero la situación actual ha sido el resultado de una maduración histórica fruto del proceso evolutivo que ha sufrido el currículum a lo largo de los siglos, condicionado enormemente por las CLAVES y los RECURSOS EDUCATIVOS que presidían la concepción educativa y cultural de cada época.

Si realizamos un análisis histórico de la evolución que ha experimentado la enseñanza de las Matemáticas, podemos constatar la existencia de un enorme paralelismo evolutivo entre el desarrollo de las Matemáticas como disciplina y el avance cultural de la humanidad. Partiendo de estas premisas iniciales, podemos señalar cuatro periodos o épocas fundamentales en torno a la enseñanza de las Matemáticas [Alexandrov y otros, 1973]:

a) La aparición de la matemática como ciencia teórica (hasta siglo IV a.C.)
b) La matemática elemental (IV a.C. - XVII d.C.)
c) la matemática superior (s. XVII - s. XVIII)
d) La matemática contemporánea (s. XIX-XX).

a) La aparición de la matemática como ciencia teórica (hasta el siglo IV a.C.).

A lo largo de este primer periodo, toman protagonismo las ideas pitagóricas: *"el número es la raíz y esencia de la realidad"*. Aunque los pitagóricos heredaron numerosas ideas y nociones egipcias y babilónicas , sin embargo, fueron ellos quienes desarrollaron un estilo de pensamiento basado en el intento de explicar el universo por medio de sus conocimientos aritméticos, geométricos, astronómicos y musicales . El estilo de enseñanza utilizado en este periodo estaba basado en la TRANSMISIÓN ORAL. Los maestros enseñaban directamente a sus alumnos y discípulos, generando diferentes escuelas. Según [Debesse-Mialaret, 1973] *"la pedagogía antigua será un contacto de maestro con alumno o discípulo. Los métodos empleados para educar a los niños están en función de elementos diversos, de un determinado nivel técnico, del número de alumnos afectados y sobre todo, del fin que se proponía la educación. Así para la educación oriental la finalidad era formar escribas y para la homérica, guerreros"*. Los materiales didácticos fueron muy diversos, desde las inscripciones jeroglíficas y las tablillas y papiros (Papiro de Ahmes y Papiro de Rhind) [Boyer, 1968] en los que se presentaban problemas a los alumnos, pasando por los manojos de cuerdas para anudar de los persas y chinos [Smith, 1951] (utensilios de cálculo), finalizando con los guijarros utilizados por los antiguos griegos [Kline, 1974]. La educación durante esta época consistía fundamentalmente en transmitir todos los conocimientos, técnicas y modos de vida a las generaciones de jóvenes con el fin de proporcionarles aquellos instrumentos culturales que les permitiesen la continuidad. En este contexto, las Matemáticas formaban parte del legado cultural, cuyo objetivo fundamental se centraba en satisfacer las necesidades del hombre para comprender y dar explicaciones a los fenómenos que se producían a su alrededor. La enseñanza de las Matemáticas trataba de satisfacer las necesidades del hombre antiguo por comprender y explicar los enigmas de su entorno real.

Más adelante, y de forma progresiva fue apareciendo una doble visión de las matemáticas entre "ciencia natural" y "filosofía" dando lugar a varias consideraciones de los hechos matemáticos: Matemáticas como ciencia o como arte, Matemáticas como herramienta o como filosofía y Matemáticas como rutina o como fantasía.

b) La matemática elemental (IV a.C. - XVII)

Como acabamos de señalar, ***en los inicios de este segundo periodo*** (IV a. C. al II. d. C.) surgieron dos visiones de las Matemáticas. Por un lado estaba la matemática como ciencia aplicada, como herramienta y por otro la concepción de unas Matemáticas como arte, como filosofía, como ciencia en sí misma. De esta forma la matemática fue considerada unas veces más como filosofía y otras predominó su carácter aplicado. En la enseñanza elemental los alumnos se iniciaban en la aritmética y la geometría con una introducción a las cuatro operaciones básicas. En un nivel superior se profundizaba en las cualidades estéticas y místicas de los números y figuras, estudiando música y astronomía. El tipo de metodología se basaba generalmente en un aprendizaje teórico y memorístico, sostenido por las relaciones humanas maestro-discípulo. Entre las herramientas didácticas utilizadas podemos señalar el uso de cajas de cálculo (guijarros con los que se hacían cuentas), tablas de cera de los romanos, tablas de arcilla de los babilonios y el ábaco griego. Según [Smith, 1951] el ábaco fue el principal material didáctico auxiliar que constaba básicamente de una bandeja cubierta de polvo o arena, donde se podían hacer surcos o de un tablero con hendiduras talladas en los que se representaban los números colocando piedras en las hendiduras.

A partir del siglo II d.C. las Matemáticas se desarrollaron vinculadas principalmente a la astronomía: cálculos astronómicos. El centro de desarrollo se desplaza a la India, Asia Central y los países árabes, donde los matemáticos eran en su mayoría astrónomos.

Durante la Edad Media, la enseñanza se ejerció fundamentalmente en los monasterios. En este contexto escolástico se concedió una escasa importancia a las Matemáticas, de tal forma que la aritmética de los niveles secundarios actuales se asociaba con la teoría musical y con el estudio del cálculo para fijar la fecha de Pascua y las fiestas móviles [Debesse-Mialaret y otros, 1973]. El objetivo de la enseñanza de las Matemáticas fue favorecer la integración del joven en su entorno. La expansión comercial de esta época provocó la necesidad de incrementar las habilidades de cálculo de la población, sin embargo, los contenidos educativos de esta disciplina no variaron.

En la Alta Edad Media se enseñaron dos tipos de Matemáticas, de un lado la impartida en las Iglesias y Centros Universitarios y por otro las Matemáticas de los negocios y el comercio [Boyer, 1968]. Analizando el sistema educativo de la Alta Edad Media (s. XII-XIV) podemos observar la escasa importancia de las matemáticas en aquella época. La enseñanza giraba en torno a las universidades a las que se accedía sabiendo leer, escribir y algunos rudimentos de latín [Debesse-Mialaret y otros 1973]; de hecho las facultades existentes eran las de Teología, Medicina, Derecho y Artes Liberales, estando las ciencias bajo la dirección de la Teología. La metodología utilizada estaba dominada por las ideas de Santo Tomás, según el cual, la conceptualización se realiza mejor, más fácil y más económicamente si los sentidos son estimulados por palabras habladas o escritas que representen tales objetos, en vez de ser estimulados por objetos físicos o reales. El razonamiento de esta didáctica estaba basado en que son símbolos de contenido inteligible, por lo que se hace innecesario utilizar otro tipo de recursos. Por otro lado en los niveles elementales la metodología predominante era la repetitiva y memorística. La pizarra sustituyó al tablero de arcilla, pero se siguió utilizando el ábaco para la enseñanza del sistema de numeración y para realizar algunas operaciones de cálculo [Smith, 1951].

Un cuarto momento de este periodo tuvo lugar durante el ***Renacimiento***. En esta etapa se producen dos hechos muy relevantes e influyentes en las perspectivas y métodos del movimiento pedagógico renacentista:

i) la invención de la imprenta y el descubrimiento y difusión de manuscritos antiguos

ii) y el protagonismo del humanismo, fundamentalmente en la educación.

A pesar de estos acontecimientos fundamentales, la enseñanza de las Matemáticas seguía sin tener una importancia relevante. La metodología de enseñanza fundamental dejó de ser dialéctica y verbal y empezó a basarse en el contacto directo con las cosas y en la experiencia personal con la realidad. De esta forma Rabelais insiste en el método intuitivo basado en el contacto directo con las cosas y Montaigne afirma que debía procurarse que el niño examinase todo para que adquiriese una sana curiosidad por conocer las cosas de su entorno. Es muy probable que las Matemáticas se enseñaran utilizando métodos intuitivos ya que en este periodo floreció la idea de que todas las cosas medibles pueden ser representadas matemáticamente. Se produce un cambio de actitud del hombre ante la naturaleza, traducida en una profunda indagación de sus misterios. Sin embargo esta actitud no tuvo reflejos en los métodos de investigación.

c) La matemática superior (s. XVII - s. XVIII)

En el tercer periodo, aparece la matemática como ciencia moderna. La contribución de las Matemáticas al desarrollo del método científico (que comienza a utilizarse durante la primera mitad del siglo XVIII) fue vital para que esta disciplina fuese considerada cada vez más necesaria. Durante el Racionalismo, el Empirismo y la Ilustración, la enseñanza de las Matemáticas adquirió un enorme interés, no sólo por ser el soporte del método científico, sino porque además se la consideró como *una forma de* *descubrir, describir y comprender los fenómenos naturales*. También cobró especial significación la sistematización del álgebra, que contribuyó a que esta disciplina fuese considerada un medio para desarrollar el razonamiento de los alumnos.

En esta época la metodología empleada se basó principalmente en los métodos racionales de aprendizaje basados en la propia investigación y el descubrimiento. Así Comenio desarrolló el método intuitivo en su *Didáctica Magna* ilustrando los conceptos con sus representaciones gráficas o reales; por otro lado Rousseau concibió a un alumno inmerso en la naturaleza para que sus ideas fuesen extraídas con el contacto directo con los hechos naturales y no de las palabras de un maestro. Esta metodología fue apoyada por las herramientas didácticas. Según [Smith, 1951] *"la primera mejora importante de los antiguos instrumentos de cálculo fue hecha por Napier en 1617. En su Rabdología expuso la configuración de un sistema de varillas ordenadas para multiplicar"*. Otra contribución muy importante fueron las primeras calculadoras mecánicas, consistentes en unos discos giratorios, uno para cada valor de posición de las cifras (creadas por Pascal en 1642, y posteriormente perfeccionadas por Leibnitz); y a mediados del siglo XVII, Adam creó la primera regla de cálculo deslizante en espiral. En definitiva el objetivo de la enseñanza de las Matemáticas a lo largo de este periodo obedecía a una preocupación por investigar y descubrir. La Matemática fue considerada como un medio de desarrollo y aplicación del método científico que permitiría el conocimiento sistemático de algunos enigmas de la naturaleza.

d) La matemática contemporánea (s. XIX-XX).

A partir del siglo XIX, con la revolución industrial como telón de fondo, aumentó considerablemente el interés por las Matemáticas como ciencia. A comienzos del siglo XIX Europa tenían una línea de pensamiento y acción homogéneo, sin embargo, tras las Guerras Napoleónicas, se inició un proceso de diversificación educativa a lo largo de numerosos países europeos. El origen de este proceso de divergencia fue consecuencia del nacimiento de diferentes enfoques y concepciones de las Matemáticas y su enseñanza. Entre las aportaciones educativas de algunos de los educadores más destacas de estos inicios del siglo XIX podemos citar las protagonizadas por:

- ***Giovanno Enrico Pestalozzi***, quien consideró que el objetivo fundamental de la enseñanza era **conseguir que los alumnos adquiriesen claridad cognitiva** a partir de la EXPERIENCIA o de la INTUICIÓN. Según esta visión, la forma, el número y el nombre eran los elementos fundamentales de la intuición y de la actividad cognitiva general. Así, las Matemáticas se convierten en un medio para desarrollar esa claridad cognitiva, fundamentalmente a través de la aritmética y de la geometría.

- ***John Friedrich Herbart***, planteó que la finalidad de la educación era **promover intereses ricos y profundos**, más que la enseñanza de conocimientos específicos. Esta importancia de los intereses éticos y del conocimiento propugnada por Herbart, le llevaron a clasificar las disciplinas escolares en dos grandes bloques: disciplinas históricas y disciplinas científicas. Sin embargo, esta división de las materias, no debía suponer un estudio aislado de las mismas, sino que debían realizarse estudios conjuntos mediante prácticas que relacionasen unas disciplinas con otras. Por todo esto Herbart creyó que a través de la enseñanza de las Matemáticas se desarrollaba el interés por la observación de hechos ligados a leyes generales.

- ***Augusto Comte***, concibió la educación como **el medio para llevar al hombre desde la infancia o edad Teleológica a la madurez o edad Positiva.** Consideró las Matemáticas como base de todas las ciencias, creyendo que la enseñanza de esta disciplina permitiría al hombre comprender y dominar la naturaleza.

- ***Rousseau***, al fundamentar su idea de hombre como un ser individual, con unos intereses y capacidades propias, motivó la utilización de **métodos activos**, **dinámicos y lúdicos** en sus planteamientos didácticos.

En Francia las Matemáticas de nivel superior tuvieron una gran importancia en las academias y las escuelas militares por su aplicación en el análisis y en la construcción de mecanismos para la guerra así como por su contribución al desarrollo de los procesos de pensamiento [Boyer, 1968], [Debesse-Mialaret y otros, 1974]. De hecho podemos destacar la concepción de las Matemáticas que tenían dos de los grandes líderes de la revolución:

- Laplace, pensaba que la esencia de las Matemáticas era solamente una caja de herramientas, de tal forma que para aplicarlas era necesario saberlas manejar con extraordinaria habilidad.
- Lagrange opinaba que las Matemáticas eran un arte sublime que tenían razón propia de existir, ya que su conocimiento llevaría al desarrollo y perfección del ser humano.

A partir de esta diversidad de ideas y fundamentalmente a partir de las ideas de Rousseau sobre el niño como un ser individual, con unos intereses y capacidades propias, se fueron creando diversos métodos cuyo elemento básico era el carácter activo de la enseñanza de las Matemáticas. En ocasiones, el juego se introduce como una actividad libre en la que el niño entra en relación concreta con el mundo. Es por tanto, en el siglo XIX cuando se introduce una enseñanza formal y sistemática de las Matemáticas.

Entre las herramientas didácticas más novedosas de esta época merece la pena señalar los juegos educativos diseñados por Froëbel: pelotas de tela, volúmenes geométricos de madera, cubos descomponibles y también hay que destacar el desarrollo y perfeccionamiento de las reglas de cálculo por A. Manheim.

A mediados del siglo XX (1950-1960) se extendió por todo el mundo el afán de reformar la organización de la matemática en todos los niveles. Los progresos científicos y tecnológicos obligaron a examinar el tipo de matemática que debían enseñarse a los alumnos para afrontar sus futuras necesidades. Las primeras reformas iniciales propiciaron un convencimiento generalizado de que hacía falta una reforma integral surgida a partir de la estructuración de los nuevos programas y los nuevos métodos de enseñanza. En la mayoría de los países, la reforma se orientó principalmente hacia los contenidos, dejando de lado la nueva metodología de enseñanza necesaria para presentar estas innovaciones. Se produjo una crisis en los sistemas educativos tradicionales tanto en la metodología y como en sus contenidos. Hasta el momento, el ciudadano medio europeo no había necesitado para desenvolverse en su entorno una excesiva cultura matemática, le bastaba con el manejo correcto de las cuatro operaciones fundamentales y la resolución de los problemas reales surgidos en la compra-venta diaria y el presupuesto familiar. Pero a medida que la tecnificación fue invadiendo todos los aspectos de la vida, el individuo iba necesitando conceptos matemáticos más profundos. Por estos motivos, en la década de 1950-1960 una serie de investigadores se plantearon como objetivo el promover una renovación en la enseñanza de las Matemáticas. De esta forma, se propuso una reforma que abarcaba tanto a los contenidos como a los métodos tradicionales, considerando adecuada la incorporación de las nuevas tendencias Matemáticas ("Matemática Moderna") a los planes de estudio. La consolidación de esta reforma tuvo lugar en la mayoría de los países occidentales en la década de los 60 y en España a partir de 1970. El término "Matemática Moderna" se utilizó para denominar una fase en la evolución de esta disciplina, fase iniciada hace unos 150 años como consecuencia de una revisión de la matemática imperante hasta entonces y con el intento de superar los errores de las lógicas existentes. El gran movimiento reformista que daría lugar a la llamada "Matemática Moderna", se planteó ordenar los conocimientos matemáticos y simplificarlos, debido a la extrema complejidad a la que habían llegado las Matemáticas, sin que ello afectara a la esencia de la ciencia. De esta manera, se concluyó que las matemáticas no eran algo real sino un juego formal, consistente en sacar consecuencias lógicas de un sistema de axiomas coherente en su conjunto y fijado de antemano, que no tenían por qué ser necesariamente verdaderas.

La teoría de conjuntos ofreció una base adecuada para el estudio de los tipos de razonamientos aplicables a la comprensión de determinados fenómenos, permitiendo así unificar las diversas teorías existentes hasta entonces. Con esta búsqueda de relaciones estructurales, surgieron las estructuras algebraicas, las estructuras de orden y las estructuras topológicas. Todas ellas fueron elaboradas y estructuradas por la llamada escuela bourbakista, que fue la responsable de dotar a las Matemáticas de una estructura fuertemente axiomática. Esta evolución ha unificado una ciencia que se hallaba muy dispersa, dándole una nueva vitalidad al sacarle del estancamiento y asfixia en la que se hallaba sumida.

Actualmente desde el punto de vista de los CONTENIDOS, las Matemáticas se enseñan para facilitar a los alumnos la comprensión de conceptos y procesos abstractos de su entorno, a la vez que les permitan expresar matemáticamente las realidades circundantes. También se tiene como objetivo el proporcionar una herramienta de cálculo, análisis y relación con los contenidos de otras disciplinas.

Respecto a los MÉTODOS han surgido movimientos alternativos en la enseñanza de las Matemáticas ocasionados en parte por el fracaso de la enseñanza tradicional que predomina todavía en la inmensa mayoría de los libros de texto. Una de las razones por las que esta enseñanza expositiva tradicional no logra que los alumnos comprendan las Matemáticas, radica en la concepción estática del conocimiento matemático vigente aún en los libros de texto. Se proporcionan conocimientos acabados, se enseñan “verdades matemáticas” que los alumnos deben saber reproducir. Sin embargo esta concepción de la transmisión de conocimiento es contraria tanto a la génesis del conocimiento matemático como al proceso de aprendizaje del propio alumno. Es por ello que la psicología actual sostiene que el aprendizaje es un proceso activo que exige del alumno la puesta en marcha de los esquemas de conocimientos que permiten asimilar los nuevos contenidos, asimilando activamente las nuevas ideas. Además la enseñanza tradicional no trabaja sobre las ideas previas de los alumnos y genera en el mejor de los casos dos tipos de conocimientos: un conocimiento espontáneo útil para solucionar problemas cotidianos y entender el mundo que les rodea y otro conocimiento académico, ajeno a sus propias ideas pero útil para resolver los problemas escolares de manera mecánica. Por otro lado la enseñanza tradicional tampoco fomenta las habilidades del pensamiento hipotético-deductivo, ni desarrolla estrategias de pensamiento formal.

Es por ello que es necesario ahondar en esta metodología, circunstancia que nos hace plantearnos cual puede ser el currículum básico en Matemáticas.

I.1.5. El currículum básico en Matemáticas.

A la vista de la evolución que ha experimentado la enseñanza de las Matemáticas se nos plantea un interrogante muy importante en nuestro estudio

¿Cuál es el tipo de matemática que ha de ser enseñada en la escuela?.

A partir de esta cuestión han surgido dos tendencias, por un lado están aquellos que abogan por un conocimiento teórico de las Matemáticas, es decir, un conocimiento de la matemática pura y por otro aquellos que predican un conocimiento práctico de la matemática, una matemática aplicada, considerada como herramienta para otras disciplinas.

Como acabamos de comentar, desde el punto de vista de los contenidos, las Matemáticas se enseñan para facilitar a los alumnos la comprensión de conceptos y procesos abstractos de su entorno, a la vez que les permiten expresar matemáticamente las realidades circundantes. También es un objetivo muy importante, el proporcionar al individuo una herramienta de cálculo, análisis y relación con los contenidos de otras asignaturas.

Respecto de la metodología, podemos decir que están apareciendo movimientos alternativos en la enseñanza de las Matemáticas provocados fundamentalmente por el fracaso de la enseñanza tradicional de la cual ya hemos hablado en el apartado anterior. El fracaso de la enseñanza expositiva tradicional que hemos señalado anteriormente que radica en una concepción estática de las Matemáticas. El alumno recibe unos conocimientos terminados que únicamente ha de reproducir, se trata de un tipo de transmisión del saber que como bien hemos señalado, es contraria tanto al origen histórico del conocimiento como a los mecanismos de aprendizaje. En esta línea de pensamiento, el matemático Henri Lebesgue [Lebesgue y otros, 1983] afirmaba que "*ningún descubrimiento matemático ha sido realizado mediante un esfuerzo de lógica deductiva, sino que ha sido siempre el resultado de un trabajo creador de la* *imaginación; una vez hecho el descubrimiento, la lógica ejerce su control, y es ella quien decide, en último término si se trata realmente de un descubrimiento y no de una ilusión; así pues, su papel aún siendo importante, no pase de ser secundario*". También hay que señalar las ideas que introdujeron psicólogos como Piaget [Piaget y otros, 1978] o Bruner [Bruner, 1979], enfatizando la importancia que tienen las metodologías en las que el alumno debe activar sus esquemas de conocimiento para asimilar la realidad, es decir, incorporar activamente las nuevas ideas con ayuda de los conocimientos ya adquiridos. La enseñanza tradicional estática, no fomenta las habilidades del pensamiento hipotético-deductivo, ni desarrolla estrategias de pensamiento formal. Según algunas teorías una alternativa frente a este tipo de enseñanza tradicional se basa en un método de enseñanza basado en la investigación activa, en el cual el alumno elabora su propio conocimiento mediante el llamado aprendizaje por descubrimiento. De esta forma, se evita un aprendizaje mecánico y se fomentan las habilidades del pensamiento formal. Pero existen otras tendencias según las cuales esta estrategia, aunque es ventajosa, no resulta suficiente para obtener un aprendizaje adecuado. Según estas ideas, la enseñanza por descubrimiento por sí sola no es suficiente, ya que se trata de un "inductivismo ingenuo" según el cual, el conocimiento avanza por simple exposición ante los datos correctos. Está comprobado que los individuos no abandonan las ideas erróneas por observaciones contradictorias, se necesita una explicación alternativa, porque el pensamiento formal no sólo depende de la estructura o forma de las operaciones implicadas sino también de su contenido [Pozo, 1987]. Es decir, una persona puede disponer de un pensamiento formal sin que eso le asegure la comprensión de los conceptos implicados en un problema para el que carece de las ideas adecuadas. Una posible alternativa a la insuficiencia del aprendizaje por descubrimiento consistiría en la necesidad de exponer a los alumnos núcleos conceptuales básicos, pero no de un modo pasivo sino induciendo un aprendizaje significativo [Ausubel-Novack-Hanesian, 1978]. No se trata de un retorno a la enseñanza tradicional, únicamente se defiende una estrategia expositiva apoyada en que el trabajo científico requiere unas habilidades intelectuales y creativas ajenas a la mayor parte de los alumnos. Muchos conceptos centrales de las Matemáticas son difíciles de descubrir, por lo que puede ser conveniente que, en algunos momentos, el profesor proporcione una solución a algunos de los problemas que se plantean, siempre después de que el alumno haya intentado resolverlos. Se produce por tanto un cambio progresivo de la enseñanza expositiva y pasiva a la enseñanza activa dirigida hacia la investigación.

Actualmente el proceso de innovación educativa permanece vigente. La cantidad de algoritmos computacionales que se deben o no enseñar y aprender en la escuela y en general en el currículum de Matemáticas son algunas de las cuestiones que forman parte de los diversos interrogantes educativos presentes en la enseñanza de las Matemáticas. Las Matemáticas contienen tanto aspectos conceptuales como aspectos computacionales, por lo que el equilibrio que debe mantenerse entre ambos y la necesidad de dedicar más o menos tiempo en las tareas de cálculo entra dentro de la dialéctica actual.

Las Matemáticas deben contribuir a formar ciudadanos que utilicen el pensamiento lógico, ejerciten la crítica intelectual, tengan capacidad de análisis y de síntesis, se expresen sin ambigüedades e incoherencias, posean hábitos de estudio y concentración, estén dispuestos a abordar la resolución de un problema con tenacidad y confianza en sí mismos, con discernimiento suficiente para diferencial lo esencial de lo superfluo: objetivos que deberían ser logrados en conjunto en todas las asignaturas.

Sin embargo se puede decir que actualmente existe un cierto fracaso en la enseñanza de las Matemáticas [Grupo Anaga, 1993], [Neira, 1999], [Alamo y otros, 1993]. Entre las causas de este fracaso podríamos citar varias:

1) La comprensividad, característica innovadora que pretende acercar la enseñanza a todos, circunstancia que a veces puede producir grupos muy heterogéneos de enseñanza, en especial el impacto de la comprensividad en el área de Matemáticas puede tener una significación especial, dada la diversidad de niveles en éste área de conocimientos, circunstancia que requiere una adecuada atención a la diversidad.
2) Existe una escasa relación entre las Matemáticas que se estudian y las vivencias del contexto del alumno.
3) La escasa preparación pedagógica de algunos profesores de Matemáticas.
4) El excesivo número de alumnos por aula.
5) Inadecuada organización escolar, horarios densos, mala distribución de materias.
6) Las Matemáticas se le presentan al alumno de manera deductiva, como algo ya hecho, sin una justificación adecuada de su estudio.

Esta situación requiere un nuevo planteamiento no sólo en el método sino quizás también en los contenidos, porque una enseñanza adecuada de las Matemáticas requiere que el alumno descubra el interés por un cierto contenido, o la importancia de cierto teorema.

El proceso de aprendizaje de las Matemáticas ha de ir de lo concreto a lo abstracto partiendo de un paralelismo entre el mundo real y el mundo de las ideas, que finalmente desemboca en el mundo real. Por eso no debería prestarse una excesiva atención a los procesos de cálculo que pueden convertir a las Matemáticas en un conjunto de habilidades computacionales, permitiendo de esta forma aumentar la atención en otros conceptos superiores. Esta situación puede verse favorecida con una adecuada introducción de las nuevas tecnologías y en particular de los ordenadores, y de los sistemas de cálculo algebraico en la enseñanza de las Matemáticas.

Partiendo de la base de que el quehacer matemático debe tener un mayor protagonismo en el currículum básico de las Matemáticas, sin eliminar totalmente los cálculos rutinarios, que en ciertas etapas son claramente necesarios; es indudable que los sistemas computacionales, y en especial los sistemas de cálculo algebraico tienen y deben de jugar un papel fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Por este motivo, nuestra tesis se enmarca en la investigación educativa de una estrategia didáctica que incorpore estas nuevas tecnologías al quehacer matemático para que el alumno descubra las Matemáticas, que se entusiasme por una disciplina que es considerada aburrida en general, pero que es el alma de los procesos lógico-deductivos del intelecto humano.

I.1.6. La resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Si hay un elemento fundamental que ha distinguido de forma especial la actividad matemática a lo largo de toda su existencia, este es sin duda el planteamiento y la resolución de situaciones problemáticas. La presencia de los problemas en la historia de las Matemáticas ha estado presente desde sus inicios, así podemos encontrar numerosos vestigios de problemas matemáticos en las antiguas tablillas babilónicas y los papiros egipcios. Pero los aspectos que se han transmitido en torno a los problemas matemáticos han sido fundamentalmente sus soluciones, dando menor importancia a las formas de resolverlos. A pesar de todo, la resolución de problemas, es decir, el interés por las formas de abordar y resolver una situación problemática no ha sido un invento de nuestro siglo; ya en tiempos de Aristóteles o Pappus (300 d.C.), el maestro proponía a sus discípulos situaciones problemáticas que el alumno debía intentar resolver. Arquímedes en "El Método" muestra algunas ideas de sus formas de hacer Matemáticas. Posteriormente en el siglo XVII Descartes y Leibnitz se interesaron enormemente en el método matemático, de hecho Descartes nos ha legado unas notas incompletas que establecen el método científico: "*Reglas para la dirección del ingenio*", normas que anotó para uso propio estableciendo un método de resolución de problemas generales. De igual forma, Leibnitz escribió en "*Formas de pensar*" algunas ideas acerca del modo de manejar el pensamiento ante los problemas, llegando incluso a afirmar que *"las formas de la invención son más importantes que los resultados"*. Pero ha sido en nuestro siglo con la aparición del libro de G. Polya "*How to solve it*" [Polya, 1945] cuando se plantaron las semillas del movimiento de resolución de problemas que floreció definitivamente en 1980 cuando el "1980 NCTM Yearbook" [NCTM, 1980] recomendó que "*la resolución de problemas fuese el principal objetivo de la enseñanza de las Matemáticas en la década de los 80*". Pero la importancia de la resolución de problemas trascendió a esa década. Así en 1985 la ATM (Association of Teachers of Mathematics) estableció que la habilidad en resolución de problemas es el corazón de las Matemáticas y debería reemplazar a la aritmética rutinaria como objetivo principal en la educación primaria; del mismo modo el NCSM (National Council of Supervisors of Mathematics) situó la resolución de problemas como una de las 12 componentes esenciales de la enseñanza de las Matemáticas para el siglo XXI.

La relevancia adquirida por la resolución de problemas está motivada, en parte, porque actualmente se está dando más importancia a los procesos que a los conceptos. Efectivamente, los métodos del pensamiento (procesos) son más importantes y dan mayor consistencia y vigor a nuestro conocimiento matemático que los meros conceptos que generan un conocimiento concreto y estático. En este sentido, podemos afirmar que en las Matemáticas el MÉTODO tiene más importancia que el RESULTADO, de hecho los teoremas son importantes en la medida en que sirven para resolver otras situaciones.

Por otro lado, si se pretende dotar a los alumnos de un aprendizaje en el que se permita una asimilación de información basándose en los esquemas propios del alumno, (es decir un aprendizaje significativo, en lugar de un aprendizaje memorístico en el que las asociaciones que se adquieren no son relacionables con las estructuras cognitivas [Ausubel-Novak-Hanesian, 1976]) podemos optar así entre un aprendizaje por recepción o bien un aprendizaje por descubrimiento. Bruner era partidario a ultranza del aprendizaje por descubrimiento [Bruner, 1960] mientras que Ausubel señalaba que el descubrimiento no era el único modo de aprender y que el aprendizaje por recepción también podía ser significativo [Ausubel, 1963]. Estos dos estilos de aprendizaje se pueden situar en paralelo con dos tipos de prioridades educativas: aprender únicamente conceptos o bien aprender conceptos, procedimientos y estrategias. Si nuestra elección educativa parte de que los alumnos no sólo deben aprender conceptos, sino procedimientos y estrategias generales entonces nos inclinaremos hacia el aprendizaje por descubrimiento en el que la resolución de problemas juega un papel fundamental [Carrillo, 1994]. En este contexto, debemos señalar que la resolución de problemas es una de las estrategias recomendables para la adquisición de aprendizajes significativos. Además, debemos destacar que "*el saber matemático es mucho más un saber de método que de contenido*" [Guzmán, 1991].

Desde que G. Polya planteó su plan para resolver problemas:

1. comprender el problema
2. concebir un plan
3. ejecutar un plan
4. examinar la solución obtenida

se han elaborado otros planes o métodos con fases más refinadas, fundamentalmente en lo referido al segundo paso: la estrategia de resolución escogida. Entre los autores más destacados que han desarrollado estrategias de resolución de problemas podemos citar:

- SCHOENFELD [Schoenfeld, 1985] que en su libro "Mathematical Problem Solving" (1985) planteó como estrategias fundamentales:
  - dibuja un diagrama del problema si es posible
  - si hay un parámetro entero, intenta un argumento inductivo
  - considera argumentaciones por contradicción o contraposición
  - considera un problema con menos variables
  - intenta establecer submetas.

- BRANSFORD Y STEIN [Bransford-Stein, 1986] con su método IDEAL de resolución de problemas:

  I = identificación de problema
  D = definir el problema
  E = exploración de análisis alternativos
  A = actuar conforme a un plan
  L = logros alcanzados

  introdujeron como estrategias en su fase de exploración
  - razonar a la inversa
  - descomponer el problema en partes
  - analizar casos particulares

- KRULICK Y RUDWICK [Krulick-Rudwick, 1987] plantean como estrategias a seleccionar:
  - reconocimiento de figuras
  - trabajar hacia atrás
  - ensayo error
  - simulación y experimentación
  - reducción del problema
  - divide y vencerás
  - deducción lógica

- GUZMAN [Guzmán, 1991] introduce un esquema muy similar
    1. Familiarízate con el problema
    2. Búsqueda de estrategias
    3. Llevar adelante la estrategia
    4. Revisar el problema y sacar consecuencias

incluyendo en su segundo paso (búsqueda de estrategias) algunas de las principales estrategias del quehacer matemático:

- empieza por lo fácil
- experimenta
- hazte un esquema, una figura, un diagrama
- escoge un lenguaje adecuado, una notación apropiada
- busca un problema semejante
- inducción
- supongamos el problema resuelto
- supongamos que no es cierto...

Como puede observarse, todos los planteamientos incluyen numerosas heurísticas que pueden facilitar la resolución, sin embargo no se puede esperar que una maestría en heurísticas reemplace el conocimiento de la materia, es decir encontrar una heurística apropiada no es condición suficiente para resolver un problema pero es condición necesaria.

La elección de una metodología basada en la resolución de problemas ha de permitir a los alumnos la **asimilación y transferencia de conceptos y el desarrollo de estrategias de pensamiento** [Bautista, 1987]. Estos dos procesos cognitivos (asimilación y transferencia) están implícitos en la resolución de problemas, pues los alumnos en primer lugar tienen que entender los conceptos y principios contenidos en el enunciado para luego poderlos resolver. Por ello para que el alumno comprenda los datos e informaciones que se introducen en las situaciones problemáticas debe ser capaz de dotarles de significado para lo cual tiene que relacionarlos con sus experiencias y conocimientos previos: es la asimilación. Posteriormente el alumno tiene que llegar a unas metas desconocidas a partir de unos conceptos, principios facilitados en el enunciado o previamente y que el alumno debe ser capaz de transferir. Así pues una estrategia didáctica de este tipo requiere plantearse cuatro objetivos fundamentales:

1. Que los alumnos ASIMILEN unas informaciones, conceptos y principios.
2. Que sean capaces de TRANSFERIRLOS para solucionar problemas globales
3. Que los alumnos ANALICEN Y SINTETICEN situaciones problemáticas

4. Que los alumnos ADQUIERAN Y DESARROLLEN estrategias de resolución de problemas.

Bajo estos objetivos, ha de quedar muy claro lo que se entiende por situación problemática. Una situación problemática ha de estar basada fundamentalmente en el contexto de aprendizaje del alumno, porque ha de hacerle reflexionar y debe estar relacionada con los intereses, las motivaciones y el contexto sociocultural del mismo. En consecuencia, una situación problemática ha de ser un planteamiento que proporciona una información contextual izada con el ambiente del alumno solicitándole de forma suficientemente motivadora una solución al problema. Bajo esta perspectiva lo que pudiera ser una situación problemática para un grupo determinado de alumnos, puede dejar de serlo para otros, bien porque los contenidos que maneja son de un nivel muy diferente o bien porque no está enfocado hacia los centros de interés del grupo.

Una metodología de este tipo requiere un clima abierto y creador, en el que se establezcan múltiples emisores de información: el profesor, el propio problema y los alumnos. El proceso cognitivo de la resolución de problemas se inicia con la situación problemática que despierta el interés del alumno. Este problema debe contener una información que debe ser asimilada y analizada previamente y codificada en la memoria a corto plazo. Posteriormente el alumno debe recuperar de su memoria a largo plazo una serie de datos para proyectarlos o transferirlos en el problema en cuestión en la memoria a corto plazo. A continuación se ejecutará el plan de resolución diseñado que deberá ser posteriormente verificado. Por tanto la estrategia didáctica consta de cuatro fases que son la base de las situaciones problemáticas ante las que se debe enfrentar el alumno:

1. Comprensión (asimilación y análisis)
2. Planificación (transferencia y síntesis)
3. Ejecución
4. Verificación.

El término resolución de problemas no resulta extraño a casi nadie en el entorno de la educación matemática, pero sin embargo existe una gran variedad de significados sobre su uso. Según estudios realizados [Carrillo-Contreras, 1998] existen rasgos característicos en las concepciones de un profesor sobre resolución de problemas, y de hecho se han constatado cuatro tendencias didácticas sobre el uso de la resolución de problemas en el aula: tendencia investigativa, tendencia espontaneista, tendencia tecnológica y tendencia racional. Este hecho nos plantea la necesidad, no sólo de considerar la metodología en la resolución de problemas, sino profundizar en el tipo de enfoque práctico que debemos realizar en nuestra aplicación práctica, a la hora de considerar una alternativa metodológica.

El auge que tienen actualmente los métodos de resolución de problemas en la enseñanza de las Matemáticas es evidente. Mediante este método podemos intentar interesar al alumno, motivar su aprendizaje, ayudarle en la comprensión, retención y transferencia de los conceptos y relaciones semánticas, ya que, este uso de situaciones problemáticas favorece la comprensión del proceso de matematización , la construcción de modelos y la afición por la matemática.

Nuestra estrategia didáctica utilizará la RESOLUCION DE PROBLEMAS como uno de los ejes vertebradores de la misma, ya que consideramos que las metodologías basadas resolución de problemas puede favorecer enormemente cuatro aspectos fundamentales en la enseñanza de las Matemáticas mediante el uso de programas de cálculo simbólico:

1. Motivación del alumno.
2. Su creatividad.
3. Mejora de sus métodos de razonamiento
4. Obtención de un conocimiento relacional que sustente con más vigor los conceptos, hechos y principios matemáticos a adquirir.

A la vista de la evolución educativa que han experimentado la enseñanza de las Matemáticas, y a la vista de la implantación de las nuevas tecnologías en todos los aspectos educativos y culturales, es necesario hacer una reflexión sobre la relevancia de una revisión de las estrategias de enseñanza de las Matemáticas y la importancia que estas nuevas herramientas tecnológicas están adquiriendo en nuestra cultura actual. Por eso en esta investigación vamos a analizar uno de los tipos de programas que más están influyendo en la enseñanza de las Matemáticas: los sistemas de cálculo algebraico, programas que fundamentarán parte de la estrategia didáctica que plantearemos en el capítulo II.

I.2. Los sistemas de cálculo algebraico y la enseñanza de las Matemáticas.

Para analizar la relación que guardan las finalidades de la enseñanza de las Matemáticas con las nuevas herramientas tecnológicas, es necesario realizar un pequeño análisis que nos permita comparar y relacionar las finalidades propias de la enseñanza de las Matemáticas con los avances informáticos surgidos a partir de 1950, estudiando la influencia que han ejercido las nuevas tecnologías en el panorama de la enseñanza de las Matemáticas. La aparición de estas nuevas herramientas didácticas ha proporcionado un nuevo ámbito de investigación didáctica encaminado a estudiar y analizar las metodologías que surgen de una manera natural con el uso de estos nuevos medios. Se trata de estrategias didácticas que pueden ofrecernos nuevas posibilidades en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Por este motivo, en el primer apartado de esta sección analizamos la influencia que han ejercicio los ordenadores en la enseñanza de las Matemáticas. A continuación nos centramos en los programas informáticos de mayor utilización en procesos de enseñanza-aprendizaje de contenido matemático. Estos análisis nos brindan una excelente oportunidad para establecer las características educativas básicas de este medio computacional, así como para señalar los peligros y desventajas que se nos pueden presentar con el uso de este tipo de herramientas didácticas. A partir de esta visión general de las nuevas tecnologías dirigimos nuestro estudio hacia aquellos programas que han alcanzado mayor difusión en los últimos años: los sistemas de cálculo algebraico. Entre todos estos sistemas centramos nuestra atención en DERIVE, uno de los sistemas de cálculo algebraico más utilizado. Este sistema de cálculo algebraico es precisamente el programa a partir del cual diseñamos la estrategia didáctica que hemos empleado en la experiencia didáctica, estrategia que detallaremos más adelante en el capítulo II y que es el elemento central del estudio de la presente tesis.

I.2.1. Influencia de los ordenadores en la enseñanza de las Matemáticas.

La aparición de los ordenadores en la segunda mitad de nuestro siglo ha ocasionado una revolución tecnológica que, sin lugar a dudas, se ha introducido en todos los aspectos de nuestra cultura. Pero además, este influjo de los ordenadores comienza a sentirse fuertemente en muchas áreas de nuestro entorno inmediato, procesos de datos de los bancos, organización y planificación de las empresas, robotización de los procesos de producción, automatización de bibliotecas, manipulación y control de navegación aérea,... La influencia del ordenador también está presente en la investigación de la matemática fundamental como puede comprobarse con la demostración del teorema de los cuatro colores, demostración que no hubiera sido posible sin el uso del ordenador. También en las aplicaciones de la matemática la influencia del ordenador está siendo muy fuerte, sobre todo por su capacidad de resolución numérica sobre problemas extraordinariamente complicados cuya solución hubiera resultado irrealizable hace años [Guzmán, 1994]. La enseñanza no ha quedado ajena a esta influencia, de ahí que las posibilidades didácticas que ofrece el ordenador estén suscitando nuevos enfoques metodológicos. De hecho las nuevas tecnologías abren nuevas posibilidades educativas que relativizan la importancia de ciertas destrezas muy arraigadas en la educación tradicional, abriendo campos de actuación antes insospechados [Luelmo, 2000]. En la enseñanza de las Matemáticas esta revolución informática ha venido acompañada de numerosas experiencias didácticas, de múltiples manifestaciones y formas de uso, todas ellas basadas en la introducción del ordenador en la enseñanza y aprendizaje de las mismas. Una posible clasificación de las diferentes formas de uso que han ofrecido los ordenadores en su corta existencia puede encontrarse en [Kaput, 1992]. Según J. Kaput las formas básicas de uso de los ordenadores se pueden clasificar en torno a los siguientes tipos de aplicaciones:

- <u>JUEGOS DE ORDENADOR</u>. Las Matemáticas tienen un elevado componente lúdico, circunstancia que ha motivado en numerosas ocasiones la utilización del juego como un elemento dinamizador de los procesos de enseñanza y aprendizaje. En este contexto los programas de ordenador han desarrollado dos tipos básicos de juegos: los **juegos de la primera enseñanza** con algún tipo de contenido particular (llamados por ello juegos de contenido) y otros **juegos con un contenido más general**, encaminados a desarrollar estrategias de resolución de problemas (juegos de proceso) [Corbalán,1997]. Algunos de estos juegos de ordenador fueron GREEN GLOBS [Dugdale, 1982], cuyo objetivo era la traducción entre ecuaciones algebraicas y sus representaciones gráficas; GUESS MY RULE [Barclay,1985] cuyo objetivo curricular era enseñar el comportamiento de un conjunto dado de funciones o clases de funciones, basadas en datos gráficos o numéricos.

- <u>TUTORIALES DE ORDENADOR.</u> Programas que simulan una relación tutorial profesor-alumno a través del ordenador, para unos contenidos predeterminados. [Carbonell, 1970], [Anderson, 1988], [Anderson y otros, 1985], [Derry, 1989], [Dugdale-Kibbey, 1977] La evolución de estos tutoriales generó los sistemas de enseñanza asistida por ordenador (Computer Assisted Instruction, CAI)

[Fernández González, 1986]. Estos sistemas están basados en la enseñanza de contenidos matemáticos a través de manipulaciones guiadas sintácticamente por el propio programa. Adoptaron el sistema tradicional de notación y la pedagogía de la enseñanza tradicional, transfiriendo estos estilos al medio computacional y utilizando la capacidad de interacción de los ordenadores. Quizás por este motivo, el ordenador no se introdujo verdaderamente en el contexto educativo, sino que tan sólo se convirtió en un recurso didáctico que realizaba por mera transferencia mediática, los mismos esquemas didácticos tradicionales.

- <u>SIMULACIONES Y MICROMUNDOS.</u> Son programas que simulan situaciones reales a través de modelos matemáticos, y permiten observar y estudiar dichos modelos simulados a través del ordenador [Bautista, 1986]. Estas simulaciones son pequeños contextos reales o micromundos que permiten descubrir propiedades de mundos reales en algunas ocasiones no observables (estudios astronómicos, estudios de microbiología,...). Se han desarrollado dos tipos fundamentales de simulaciones:
  a) *simulaciones que se ejecutan en paralelo* con el sistema que modela (estudio de un péndulo y su funcionamiento simulado)
  b) *simulaciones que no permiten la comparación*. Este segundo tipo de simulación se suele utilizar cuando las escalas temporales y espaciales no permiten un chequeo directo de la simulación (un ejemplo de este tipo de simulaciones es el estudio de los movimientos planetarios).

- <u>HERRAMIENTAS DE COMPUTACIÓN.</u> Se suelen distinguir dos tipos de herramientas de computación: las **de propósito general** y las **de propósito específico**. Las herramientas más utilizadas en educación matemática tienden a ser más generales aunque sus usos específicos pueden variar ampliamente. Entre este tipo de programas se encuentran numerosas utilidades gráficas, programas de estadística y manipuladores simbólicos, que en ocasiones se pueden adaptar para propósitos más particulares. Para utilizar este tipo de herramientas genéricas en contextos educativos, es necesario que el profesor invierta un esfuerzo especial, ya que es preciso efectuar adaptaciones metodológicas sobre cada uno de los contextos educativos en los que se quieran utilizar.

- <u>LENGUAJES DE PROGRAMACIÓN</u>. Los lenguajes de programación utilizados más frecuentemente en la enseñanza han sido los denominados “lenguajes de alto nivel”. Este tipo de lenguajes permiten elaborar programas utilizando lenguajes accesibles y cercanos al usuario, sin necesidad de tener que dominar el código y los procesos que emplea la máquina para realizar sus operaciones, es decir, se trata de lenguajes cercanos al usuario tanto a escala sintáctica como a escala semántica. Entre los lenguajes de programación de propósito general más utilizados fueron LOGO, BASIC , FORTRAN y PASCAL. El uso de estos lenguajes de programación en la enseñanza de las Matemáticas tuvo un fuerte impulso en los años 1960. Se consideraba que las habilidades cognitivas generales de los alumnos surgían como resultado de actividades de programación apropiadas (habilidades de diseño, resolución de problemas,...). Por ello el aprendizaje consistía en la adquisición de técnicas de programación por medio de estos lenguajes, de tal forma que aprender las particularidades de un lenguaje era subsidiario al aprendizaje de habilidades más generales de pensamiento. La programación se convirtió así en un medio de aprendizaje matemático. Merece la pena resaltar el enorme auge que adquirió, sobre todo en la enseñanza primaria, el uso del lenguaje LOGO [Papert, 1982]. Este lenguaje fue utilizado en la etapa infantil como medio de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas debido fundamentalmente a su sencillez. Con unas pocas órdenes se podían manipular numerosos conceptos geométricos. Sin embargo, poco a poco, esta práctica de uso de la programación fue cayendo en desuso.

Este impacto tecnológico también ha influido en la investigación matemática [Pérez, 1996]. Efectivamente, los ordenadores no sólo han proporcionado una nueva herramienta en la investigación matemática sino que, además han hecho surgir nuevas áreas de investigación. De esta manera, podemos citar trabajos relacionados con la búsqueda de grupos esporádicos, la factorización de enteros muy grandes, el estudio de puntos racionales sobre curvas elípticas,... tópicos que forman parte de una larga lista de campos en los que la investigación matemática no hubiera sido posible sin la ayuda de los ordenadores. Esta aplicación de los ordenadores en la investigación matemática ofrece numerosas posibilidades, así por ejemplo, los ordenadores se pueden utilizar para realizar demostraciones, que sin la ayuda de los mismos, resultarían muy costosas; permiten introducir un elevado grado de experimentación, elemento muy importante en el desarrollo de esta disciplina (basta citar a Euler en su comentario acerca de la necesidad de observación en Matemáticas: "*los problemas de números que conocemos han sido generalmente descubiertos por observaciones que luego han sido confirmadas por demostraciones*"). En esta misma línea, el uso de métodos iterativos en la resolución de ecuaciones lineales no resultaba muy recomendable debido al elevado número de operaciones que se debían de realizar, sin embargo, con los ordenadores se ha proporcionado un nuevo impulso al uso de estos métodos. De hecho, recientemente, gracias a la capacidad de los ordenadores, se han conseguido mostrar los conjuntos de Mandelbrot y las curvas fractales. Otro elemento muy interesante que ha sido relanzado por los ordenadores es el uso de algoritmos, utilizados ya desde Euclides hace 2000 años (algoritmo de Euclides). Así pues, esta nueva herramienta ha proporcionado no solo **mejoras de cálculo que hacen posible una investigación matemática más llevadera**, sino que además ha introducido **nuevos ámbitos de investigación**.

Los problemas intrínsecos a la educación matemática no se resuelven de forma automática con el uso de nuevas herramientas didácticas, de hecho *"la naturaleza de la herramienta no explica o justifica su resultado, más bien el uso que se ha hecho del instrumento; más que el medio o herramienta en sí, son los contextos y el uso de los recursos quienes determinan el efecto que estos causan sobre el pensamiento de quienes los utilizan"* [Bautista, 1994]. Así pues, no basta con proporcionar a los alumnos un ordenador dotado de un determinado programa para tener garantizada una educación matemática óptima. Debemos tener muy en cuenta los tipos de conocimiento que se pretenden transmitir así como sus formas de transmisión; así pues es necesario considerar con detenimiento las posibilidades y las restricciones educativas que nos proporcionan el uso de los ordenadores en el aula. Es indudable que los ordenadores han cambiado y cambiarán la visión de las Matemáticas; por ejemplo podemos afirmar que los aspectos experimentales de las Matemáticas adquieren un protagonismo superior, debido a la rapidez de cálculo del ordenador. Este hecho supone que los estudiantes **adquieran habilidades en torno a la observación, la exploración, la intuición matemática y la comprobación de hipótesis.** Pero también es necesario **asegurar que las actividades tradicionales tales como la generalización y la abstracción no se vean perjudicadas** por un uso desmesurado de las habilidades anteriores. Necesitamos en consecuencia un punto de equilibrio entre las Matemáticas formales y las Matemáticas experimentales.

Otro elemento que cabe considerar al respecto, es el cambio experimentado o que se puede producir en las **relaciones entre profesor y alumno**. Los ordenadores pueden afectar al comportamiento de los estudiantes, ya que crean nuevas relaciones entre el propio estudiante, el conocimiento, el ordenador y el profesor. La actividad matemática del estudiante frente al ordenador le permite obtener un aprendizaje más autónomo, ya que se puede enfrentar a los fenómenos matemáticos de una forma más directa.

La actividad matemática también puede verse mejorada por la aparición de los **nuevos sistemas de representación** propios de las nuevas tecnologías [Bautista, 1994]. En este sentido el ordenador permite manipular sistemas gráficos y algebraicos de forma indistinta ofreciendo la posibilidad de representar los objetos y procesos matemáticos en diferentes sistemas de representación, circunstancia que puede facilitar una mayor profundidad en la comprensión de los contenidos matemáticos; además, todas estas posibilidades **provocan un pensamiento activo** en Matemáticas, objetivo que no es una tarea fácil de lograr, pero que con la ayuda de los ordenadores podemos facilitar proponiendo actividades más amplias y profundas para los estudiantes de Matemáticas.

Por otro lado, los profesores que utilicen el ordenador dentro de sus tareas necesitan adquirir nuevos conocimientos y habilidades para utilizar el hardware y software existente, que debe irse adaptando con las nuevas mejoras tecnológicas, de tal forma que su **situación respecto al control del aula se modifique**, sacrificando de esta forma su tradicional seguridad.

La influencia que estas nuevas tecnologías están ejerciendo sobre la metodología y didáctica de las Matemáticas, así como en el currículum de Matemáticas ofrece numerosos interrogantes, entre los que podríamos destacar:

- ¿Cómo se puede utilizar el ordenador para enseñar conceptos abstractos? [Halmos,1991]
- ¿cuáles son los principios que deberían guiar el diseño o elección de sistemas de notación para el aprendizaje de las Matemáticas? [Kaput, 1992].
- ¿debe diseñarse un nuevo currículum en Matemáticas para introducir las nuevas tecnologías?
- ¿el uso del ordenador disminuye las habilidades computacionales de los alumnos?
- ¿cómo podemos controlar el pensamiento conjetural a través del ordenador? [Halmos,1991]
- ¿cómo afectan las diferentes tecnologías respecto a la relación entre conocimiento procedimiental (procedimientos) y conceptual (conceptos), especialmente cuando el conocimiento procedimental es suplido por el ordenador? [Kaput, 1992]

En todo este entramado de cuestiones e interrogantes provocado por la introducción de los ordenadores en la enseñanza de las Matemáticas existen numerosas opiniones que contestan parcialmente a estas preguntas y que podríamos agrupar en dos grandes tendencias en torno al tema:

1) Por un lado se encuentran los que piensan que **la introducción de los ordenadores de la enseñanza de las Matemáticas es claramente nociva**. Así [Truesdell, 1984] afirma que "*el ordenador está causando daños posiblemente irreparables puesto que:*

- *el ordenador es incapaz de proponerse un rigor propio,*
- *la matemática es la ciencia de los infinitos, mientras que la computación es esencialmente finita,*
- *los ordenadores comportan poder y abusos de poder,*
- *las teorías clásicas usaban modelos inductivos y deductivos y la computación utiliza modelos flotantes.*
- *Por lo tanto, la introducción del ordenador en la enseñanza ha de evitar caer en numerosos errores, puesto que, si no se prevén, pueden provocar daños irreparables en la cultura matemática. Así pues los ordenadores ponen en peligro el pensamiento, el idioma, la ciencia y la supervivencia humana, y como cualquier otra herramienta peligrosa, deberían ser puestos bajo control estricto*"

2) Por otro lado, podemos encontrar opiniones que son **partidarias del uso de los ordenadores en la enseñanza de las Matemáticas, teniendo presente los problemas que se pueden provocar con el uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza de esta disciplina**. Son favorables a esta introducción porque "*la riqueza del pensamiento matemático no se fundamenta en las soluciones cristalizadas, sino en los procesos de pensamiento a los que esas soluciones han conducido*" [Guzmán, 1992], y los ordenadores pueden permitirnos primar los procesos de pensamiento frente a los conocimientos estáticos ya construidos, facilitándonos una visión más "cristalina" de nuestros procesos de pensamiento. Toda herramienta didáctica requiere una utilización adecuada, es decir, debe adaptarse a las necesidades educativas, y los ordenadores no son una excepción, ya que su simple utilización no garantiza el éxito de la labor educativa pues como bien afirma R.W. Hamming "*el uso inteligente de los ordenadores en Matemáticas es una herramienta que puede ayudarnos en nuestros procesos de pensamiento, pero no reemplazarlos*". Así pues, podemos sumarnos a estas opiniones, señalando que "*los programas de ordenador pueden mejorar la calidad de nuestra enseñanza, a la vez que generan enormes posibilidades para reemplazar buena enseñanza por mala, por lo que deben usarse con juicio*" [Halmos, 1991].

Ante este panorama general de opinión muy extendido en la comunidad matemática internacional, nuestra postura se enmarca dentro del segundo bloque de opinión. Creemos que una disciplina que es complicada en su propia esencia requiere emplear el mayor número de técnicas y herramientas auxiliares para facilitar y acercar su aprendizaje. Las Matemáticas deben formar parte de la comunidad, no deben ser propiedad exclusiva de un grupo de privilegiados, porque como bien decía Napoleón Bonaparte "*El avance y perfeccionamiento de las Matemáticas están estrechamente relacionados con la prosperidad de la nación*". En consecuencia, bajo un punto de vista pragmático, la enseñanza de las Matemáticas debe acercarse cuanto sea posible al entorno de cualquier persona. Por otro lado, la intervención de las Matemáticas en la formación del razonamiento lógico y la capacidad de abstracción de todos los individuos son otra razón de peso para acercar esta disciplina al mayor número de personas. Además, si tenemos en cuenta los argumentos de la comunidad pitagórica, que consideraban las Matemáticas como la esencia de la naturaleza, y conseguimos transmitir esa belleza y armonía intrínseca al propio quehacer matemático, habremos encontrado sin duda otro motivo para ensalzar la humanidad de las Matemáticas. En este sentido, los ordenadores y muy especialmente los programas de cálculo simbólico, desarrollados en torno a las nuevas tecnologías, son otra herramienta que favorece la comprensión de conceptos sumamente complejos, nos acerca al interior de los teoremas y resultados clásicos, gracias a sus enormes posibilidades, entre las que merece la pena destacar las múltiples representaciones de los objetos matemáticos. Como cualquier herramienta didáctica, la introducción debe realizarse de una forma adecuada, porque una herramienta bien utilizada, puede mejorar la enseñanza y el aprendizaje de nuestros alumnos, incrementando su motivación e interés por disciplinas que a priori pueden resultar poco atrayentes. Por ello, nuestra tesis se centra en este aspecto y pretende profundizar en lo que puede ser una estrategia didáctica adecuada para la enseñanza de las Matemáticas, en particular, de la enseñanza del Álgebra Lineal.

Nuestra investigación se basa en esta última visión optimista, que pretende incorporar plenamente las posibilidades que brindan los ordenadores en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, no sólo en los aspectos INSTRUCTIVOS (aprendizaje de rutinas, cálculos,...) sino también en los procesos FORMATIVOS (análisis, reflexión, razonamientos inductivos, deductivos, socialización,...) es decir dimensiones y procesos que únicamente se aprenden con la vivencia y la experimentación y esto es lo que pretendemos con la ayuda de las herramientas informáticas. Conscientes de los errores didácticos que estos nuevos materiales pueden provocar, en la presente tesis estudiaremos estos errores o peligros para diseñar una estrategia didáctica mediante la cual, seamos capaces de incorporar plenamente el ordenador en el aula de Matemáticas. De hecho, la investigación de campo pretende desvelar de qué forma este diseño metodológico afecta a los procesos de enseñanza-aprendizaje.

En el apartado I.2.4 analizamos esos peligros que son el argumento fundamental de Truesdell y todos aquellos que se muestran contrarios al uso de los ordenadores en la enseñanza, utilizando dichos argumentos como elemento fundamental de una visión fatalista sobre la incorporación de las nuevas tecnologías en la enseñanza de las Matemáticas.

I.2.2. Breve historia del software utilizado en la enseñanza de las Matemáticas.

Desde los años 50 se han venido elaborando numerosos programas de ordenador en el contexto de la enseñanza de las Matemáticas. Los primeros programas de aplicación matemática fueron desarrollados sobre grandes ordenadores, y se diseñaron para ejecutar rutinas especializadas de cálculos concretos, dando lugar a las denominadas *librerías científicas*. De este tipo fueron programas como SSP (Scientific Subroutine Package) o bien IMS (International and Statistic Library). Más tarde, se empezaron a utilizar *paquetes estadísticos* (BMDP, SPSS, SPS, NASTRAN,...) que facilitaban los innumerables cálculos rutinarios vinculados al estudio completo de problemas relacionados con la estadística [Amillo-Guadalupe, 1991].

En la década de los 60, comenzaron a surgir los *lenguajes de programación de propósito general* como BASIC, PASCAL y FORTRAN que permitieron desarrollar toda una metodología matemática muy vinculada a la programación. Como ya hemos comentado en el apartado anterior, se creía que las habilidades cognitivas de los alumnos en torno a las Matemáticas se podían desarrollar por medio de actividades de programación adecuadas. Con la aparición de LOGO en el escenario educativo, el auge de los aspectos educativos de la programación en la enseñanza de las Matemáticas promovieron el uso más generalizado de este tipo de lenguajes. Pero a pesar de las enormes posibilidades que ofrecía LOGO, fundamentalmente por su facilidad de manejo, este tipo de programas cayó en desuso en la educación matemática.

También debemos señalar la importancia que adquirió el uso de la *inteligencia artificial* en el contexto del aprendizaje tecnológico. El uso de la Inteligencia Artificial en la educación matemática tiene sus orígenes en los años 50 y 60, con los sistemas de enseñanza asistida por ordenador (CAI, Computer Aided Instruction). Estos sistemas iniciales consistían en una serie de páginas electrónicas movibles que contenían comentarios almacenados, asociados a las respuestas elegidas. En otros programas, la variable central era la cantidad de tiempo empleado en utilizar este material, se trataba de MÁQUINAS CON RESPUESTA ALMACENADA. Más tarde surgió un estilo más avanzado que incluía RAMIFICACIONES DE RESPUESTA ALMACENADA, de tal forma que, dependiendo de la respuesta del alumno, el programa ofrecía una variedad de esquemas alternativos. En los años 70 los nuevos sistemas de enseñanza asistida por ordenador ofrecían un nuevo aspecto, ya que las respuestas y los problemas se podrían GENERAR desde el ordenador según cómo fuesen los datos de entrada del estudiante. En los años 80, se diseñaron TUTORES para enseñar tareas programadas. Lenguajes de programación como LISP permitieron desarrollar estos nuevos tutoriales que convertían al ordenador en un tutor en continuo diálogo con el estudiante. Los últimos indicios sobre esta modalidad de programas tienden a incorporar en estos sistemas, estrategias de enseñanza basadas en hipótesis de observación sobre el aprendizaje del estudiante, incluyendo el aprendizaje del conocimiento heurístico. Actualmente estos sistemas tienden a crear más que tutores, ENTRENADORES, es decir soportes de instrucción sobre materias concretas. Los sistemas de enseñanza asistida por ordenador no se impusieron en la enseñanza de las Matemáticas de manera global, dado el grado de especialización y contextualización necesaria para el programa [Kaput, 1992].

Cuando realmente se produjo un auténtico avance en el uso de las nuevas tecnología en el ámbito de la enseñanza de las Matemáticas, fue con la aparición de los paquetes de cálculo simbólico, que surgieron a finales de los años 60. Entre los paquetes simbólicos más importantes que aparecieron por aquel entonces podemos citar MACSYMA (1970, desarrollado en la M.I.T., Massachussets Institute of Technology), REDUCE (1978, de Antony Heard, Randon Corporation), PC-2 (1966, George Collin), FORMAC (1966, Knuth Bohon, Alemania), ALTRAN (1966, Bell Company), SMP (1980, S. Wolfram), MUMATH/MUSIMP (1979). Estos sistemas de cálculo, realizaban procesos simbólicos tales como el cálculo de derivadas parciales, la diferenciación, la integración, la resolución de sistemas lineales,.... ofreciendo como respuesta las expresiones simbólicas solución del problema, aunque también ofrecían las tradicionales respuestas numéricas utilizando la denominada aritmética aproximada. Estos primeros programas requerían grandes ordenadores, su ejecución era lenta y tenían un entorno de trabajo sumamente complicado. Pero estas posibilidades de cálculo simbólico fueron desarrollándose incluyendo entornos de trabajo más sencillos y con mayores posibilidades gráficas.

El impulso de los ordenadores personales en la década de los 80 y la aparición de sistemas de cálculo simbólico para PC's provocaron una expansión didáctica en el uso de este tipo de programas en el aula. Esta situación permitió que los primeros manipuladores simbólicos se desarrollasen en este entorno y que surgieran nuevos programas de cálculo simbólico para PC's. De esta forma, la evolución de SMP dio lugar a MATHEMATICA (1980, S. Wolfram et al), del mismo modo DERIVE (Software House, 1984) apareció como evolución del programa MUMATH. Otros programas de cálculo simbólico que vieron la luz por aquella época fueron

MAPLE (Waterloo Maple Software, Universidad de Waterlo), MACSYMA (Macsyma Inc.) , MATLAB (The MathWorks Inc). (en la dirección de internet

http://symbolicnet.mcs.kent.edu/SN/www-sites.html#A1.1

Se puede obtener un listado parcial de los principales sistemas actuales de cálculo algebraico).

También se han desarrollado otro tipo de programas basado en el cálculo aproximado, los denominados programas de CÁLCULO NUMÉRICO. Programas que ofrecían enormes posibilidades numéricas, con un entorno diseñado exclusivamente para la programación científica (EUREKA, MATHCAD,...)

Junto a los sistemas de cálculo simbólico, y de forma paralela, aparecieron unos sistemas computacionales enmarcados en contextos geométricos, que potenciaron la importancia que ha tenido la Geometría en los nuevos currícula. Algunos de estos programas son: Geometric Supposer (Schwartz & Yerushalmi, 1985), Geodraw (Bell, 1987) que permite la construcción de objetos geométricos, Cabri-Géomètre [Laborde, 1990] sistema de exploración geométrica de carácter dinámico, Geometer Sketchpad [Klotz, 1991] muy similar a Cabri y recientemente se ha lanzado al mercado el sistema de geometría dinámica Cinderella (Richter-Berbert, 1999).

Nuestra tesis se centrará en el uso de un sistema de cálculo simbólico, que ofrece numerosas posibilidades en el ámbito educativo, favorecedoras de una enseñanza más interactiva y que puede facilitar la adquisición de aprendizajes significativos en una disciplina intrínsecamente abstracta. A continuación analizamos algunas de las nuevas características que ofrece este nuevo medio computacional.

I.2.3. Características que ofrece el nuevo medio computacional.

Los ordenadores y todo el conjunto de programas orientados a la enseñanza de las Matemáticas ofrecen nuevas posibilidades educativas que distinguen a estas nuevas tecnologías de los sistemas tradicionales de enseñanza. El nuevo medio computacional posee ciertas características que pueden aportar avances importantes en lo referente a la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Entre las características más importantes que ofrece este medio computacional podemos destacar las siguientes:

(a) Permiten mantener MULTIPLES REPRESENTACIONES de diferentes sistemas de notación y, en consecuencia, la posibilidad de efectuar transformaciones entre diferentes objetos cognitivos de un mismo sistema de notación así como traducciones de un mismo objeto cognitivo entre diferentes sistemas de notación, como por ejemplo las traducciones entre sistemas de notación gráficos, más intuitivos y cercanos al usuario, y los sistemas de notación formal de mayor grado de abstracción. De esta forma, se puede facilitar la construcción de SISTEMAS DE NOTACIÓN INTERMEDIOS entre los sistemas de notación de la matemática formal y los sistemas de notación cercanos e intuitivos. Así, las cogniciones asociadas a los objetos matemáticos formales (nuestro pensamiento matemático) tendrán un reflejo en las cogniciones generadas por estos sistemas intermedios (el ordenador y el software utilizado), pudiendo evitar de esta forma los graves problemas que suscitan las relaciones entre el lenguaje matemático y el lenguaje natural [Kaput, 1992].

(b) El medio computacional es un MEDIO DINÁMICO que permite una transmisión continua de los estados y procesos intermedios que tienen lugar en un procedimiento global. En los ordenadores es posible efectuar cambios e instancias de nivel inferior sobre estructuras jerárquicas superiores, de tal forma que dichos cambios se transmiten dinámicamente y de forma automática sobre todas las instancias de nivel superior [Kaput, 1992]. Esta característica difiere enormemente del tradicional medio estático que requiere incluir varias instancias del elemento para intentar representar la variación y dinamismo del mismo. En este sentido esta posibilidad de percibir el dinamismo a través de la evolución de los estados intermedios es una característica cognitiva que puede verse favorecida por este nuevo atributo que ofrece el medio computacional. Un ejemplo muy gráfico de este aspecto, lo ofrecen los sistemas de geometría dinámica como Cabri Géomètre [Laborde, 1990] o Geometer Sketchpad [Klotz, 1991]. Estos programas ofrecen la posibilidad de realizar construcciones geométricas de manera jerárquica, de tal forma que unas construcciones se van superponiendo a otras y de forma dependiente, de manera que una modificación de parámetros en una construcción de nivel superior, afecta de forma dinámica a todas las construcciones dependientes de ella; son las denominadas construcciones geométricas jerarquizadas. Otro ejemplo muy gráfico del dinamismo del medio computacional lo ofrecen las representaciones de curvas paramétricas en sistemas de cálculo simbólico como MAPLE o DERIVE.

(c) Los ordenadores son un MEDIO INTERACTIVO, de tal forma que ante la actuación del usuario sobre un objeto determinado el sistema provoca una respuesta inmediata en forma de mensaje o bien ejecutando la orden que el usuario ha solicitado, ofreciendo interesantes posibilidades didácticas que reúnen la visualización gráfica con la interactividad inherente al proceso de enseñanza aprendizaje [Torres-Jiménez, 1994]. Este sistema de respuesta de los ordenadores está diseñado bajo una serie de pautas que orientan al usuario en sus diversas acciones. La interactividad proporcionada por el medio computacional introduce por un lado, una estructura lógica de la información, es decir, un conjunto de instrucciones y reglas que el diseñador del sistema ha previsto para ofrecer un determinado sistema de respuesta por defecto, es decir, las pautas que debe seguir el usuario para realizar sus acciones. Estas estructuras lógicas, llamadas en ocasiones CS-estructuras (constraint-support structures) [Kaput, 1992], pueden darse también en medios no electrónicos ya que se pueden definir en cualquier entorno en el que se pueda elaborar un contexto de aprendizaje específico. Las pautas que generan los sistemas de respuesta se podrían clasificar en tres niveles:

- Al nivel de objetos: reglas que determinan cuales son los objetos permisibles, es decir, los elementos reconocidos por el sistema.
- A nivel de acciones: determinando las acciones permitidas, que suelen estar proporcionadas externamente por instrucciones habladas o escritas.
- En un tercer nivel estarían las posibles traducciones entre sistemas de notación. En este nivel, los ordenadores ofrecen la posibilidad de ayudar a vencer los problemas cognitivos surgidos de la sobrecarga de manipulaciones generadas por actividades de traducción [Kaput, 1992].

(d) Numerosos programas matemáticos (y muy especialmente los sistemas de cálculo algebraico) permiten GRABAR Y RECUPERAR PROCEDIMIENTOS, es decir, se pueden construir, guardar o recuperar construcciones genéricas de objetos y los procedimientos que los manipulan. Esto puede permitirnos introducir claves que permiten una observación más detallada de los procesos de aprendizaje de los alumnos, de tal forma que se pueden detectar los errores de una manera más inmediata. En los sistemas de cálculo algebraico, los procesos de grabación y recuperación de procedimientos se traducen en los llamados programas de UTILIDADES o LIBRERÍAS. Estos ficheros de utilidades contienen pequeños programas que resuelven cuestiones y problemas relacionadas con un tema específico o una rama determinada de las Matemáticas (ecuaciones diferenciales de primer orden, transformada de Laplace, ...). Gracias a estos ficheros de utilidades se pueden diseñar nuevos programas que complementan al NÚCLEO BÁSICO de operaciones del programa, según las necesidades de cada usuario. Este aspecto ofrece una perspectiva didáctica muy importante, ya que tan sólo requiere del usuario un estudio que se reduce al núcleo básico, permitiendo de esta forma que la didáctica pueda ir incorporando aquellas herramientas que se vayan considerando imprescindicibles a medida que se va avanzando en el desarrollo de los contenidos de un curso concreto.

(e) Los ordenadores son un excelente medio de ALMACENAMIENTO DE INFORMACIÓN a través de múltiples sistemas de manipulación, entre los que podemos destacar los sistemas hipertexto e hipermedia. El almacenamiento de información a través de los sistemas HIPERTEXTO ha sido posible gracias al lenguaje HTML (Hyper Tex Markup Language). Este sistema de información permite estructurar la información gracias a la incorporación de los llamados HIPERENLACES, textos seleccionados que permiten acceder a otros documentos o bien a referencias dentro del mismo documento que están relacionados con el contenido elegido. Estos vínculos permiten mejorar la estructura y presentación de cualquier tipo de información. Por otro lado, debemos subrayar el enorme protagonismo que ha tenido este sistema en el desarrollo de Internet, porque además de ser el elemento fundamental del desarrollo de las páginas WEB, es la herramienta fundamental que ha incorporado la posibilidad de tejer una enorme telaraña de información interdependiente construyendo el entramado de la actual telaraña mundial: WORLD WIDE WEB. Además de este método de almacenamiento de gran eficacia, debemos añadir las posibilidades que ofrecen muchos programas matemáticos para almacenar el trabajo realizado por alumnos o investigadores. En particular, los sistemas de cálculo simbólico permiten entremezclar comentarios de texto, manipulaciones simbólicas y representaciones gráficas, generando lo que suelen denominarse HOJAS DE TRABAJO (worksheets). Estas hojas de trabajo pueden modificarse, grabarse y recuperarse según las necesidades del usuario, convirtiéndose así en un sistema de almacenamiento que puede resultar muy versátil a la hora de incorporar estos sistemas de cálculo algebraico en el aula de Matemáticas.

(f) Los ordenadores ofrecen un entorno adecuado para el APRENDIZAJE COLABORATIVO. Según [Crook, 1999], "*la colaboración es un estado de* *participación social que, en un momento dado, es más o menos activa y cuenta con más o menos recursos*". El entorno de colaboración al que se refiere Crook proporciona una visión distinta del aprendizaje basado en lo que los psicólogos denominan el carácter social de la cognición, característica que ha llamado la atención hacia los procesos de interacción social, en lo que se refiere al cambio cognitivo. En este sentido introduciremos el punto de vista del APRENDIZAJE COLABORATIVO en las nuevas tecnologías, en el supuesto de que el ordenador pueda reforzar la experiencia social del aprendizaje y de la enseñanza en vez de eliminarla. Bajo las ideas de Crook, nosotros integramos el uso del ordenador en nuestra estrategia didáctica, ya que compartimos la idea que resalta el papel que pueden jugar los ordenadores para facilitar unas condiciones adecuadas para la colaboración eficaz y, en consecuencia, reforzar la dimensión social de la educación. Utilizaremos los procesos de interacción del ordenador situándonos en un modelo computacional y constructivista del aprendizaje. La idea fundamental del aprendizaje colaborativo se basa en dos elementos claves: por un lado se encuentra el intento de poner de manifiesto tanto la forma como el grado de la elevada PREOCUPACION de los colaboradores por construir la base común, puesto que, en esas interacciones colaborativas esta la primera finalidad de cualquier colaboración. Por otro lado debe existir cierta SENSIBILIDAD a la forma en que la estructura de una tarea colaborativa proporciona distintas oportunidades de crear ese conocimiento compartido.

(g) Son un excelente <u>MEDIO DE COMUNICACIÓN</u>, basta citar dos de los elementos básicos de la comunicación actual: LAS REDES LOCALES e INTERNET. Las posibilidades que ofrecieron en principio las redes locales para compartir información y programas, intercambiar documentos, bases de datos, ... han sido superadas por la red de redes: INTERNET. La telaraña mundial (terminología empleada en algunas ocasiones para referirse a Internet) ofrece servicios que pueden habilitar nuevas vías de mejora educativa en todas sus disciplinas y en especial en el campo de las Matemáticas. Entre los servicios que ofrece Internet con mayor aplicación educativa se encuentran: el correo electrónico y las páginas web. Las páginas web ofrecen un entorno óptimo para mostrar de forma visual los contenidos de cualquier materia, posibilitando la construcción de cursos en los que se desarrollen de manera puntual los temarios de las diferentes disciplinas; también nos brindan la posibilidad de realizar trabajo interactivo sobre problemas o ejercicios planteados en las propias páginas web. Por otro lado, el correo electrónico ofrece la posibilidad de diseñar tutorías de carácter cuasi-interactivo y no sujetas a horarios: las dudas que se resuelven en el momento en que surgen constituyen una de las mejores ayudas que se pueden ofrecer a los alumnos. En este sentido la tutoría complementaria que ofrece el correo electrónico puede permitirnos avanzar en esta línea de atención individualizada y cuasi-interactiva.

Estas características computacionales brindan enormes oportunidades a todos los que creemos que estos materiales didácticos deben formar parte de nuestras metodologías; porque las operaciones mentales relacionadas con el uso y aprendizaje de las Matemáticas (interpretaciones y proyecciones básicamente) pueden encontrar en estos nuevos medios computacionales un excelente vehículo de visualización y experimentación. Procesos tales como la simbolización y la abstracción, pueden ser manipulados a través de programas matemáticos de ordenador. En este sentido, los sistemas de cálculo algebraico merecen una atención especial por sus altas prestaciones tanto en el ámbito gráfico como simbólico.

Estas características mencionadas anteriormente, pueden permitirnos diseñar estrategias de enseñanza-aprendizaje en el campo de las Matemáticas, sumamente atractivas. Uno de los objetivos de esta tesis se centra en el diseño de una estrategia de enseñanza-aprendizaje que incorpore estos sistemas computacionales, objetivo que describiremos con mayor profundidad en el capítulo II.

Sin embargo, para diseñar esta estrategia didáctica, debemos de ser conscientes de las desventajas y peligros que se nos pueden presentar al introducir los ordenadores en nuestras propuestas metodológicas dentro del aula de Matemáticas. Por ello, en el siguiente apartado analizaremos de forma detallada estos peligros, para poder evitarlos en la medida de lo posible.

I.2.4. Peligros de la introducción del ordenador en la enseñanza de las Matemáticas.

La presencia de las Matemáticas en nuestra cultura es un hecho incuestionable, que como hemos comentado anteriormente se ha convertido en numerosas ocasiones en uno de los pilares centrales del pensamiento. La influencia de las Matemáticas sobre la cultura a llegado a ser, en algunos momentos de la historia, un eje central y absoluto del pensamiento y del desarrollo cognitivo. Este grado de absolutización de las Matemáticas frente a la ciencia se muestra de forma evidente en el pensamiento de Kant, que llegó a afirmar que "*en cada una de las disciplinas de la naturaleza se puede encontrar tanto de auténtica ciencia cuanto se encuentra en ella de matemática*". Pero este grado de matematización de la ciencia debe considerarse en su justa medida, y nunca en términos tan absolutos. De forma similar deberíamos considerar el grado de introducción de los ordenadores en la enseñanza de las Matemáticas. Este proceso de introducción debe producirse con cierta cautela, porque una introducción inadecuada de los ordenadores puede llevarnos a caer en numerosos peligros, algunos de los cuales forman parte de las argumentaciones en las que se basan sus detractores [Truesdell, 1984]. Ante este planteamiento debemos señalar que "*si la introducción del ordenador en el aprendizaje de la matemática no se planifica adecuadamente, podemos incurrir en la responsabilidad colectiva de dejarnos arrastrar por un espejismo y gastar grandes sumas de dinero en la introducción indiscriminada de un costoso instrumental con el que no se sabe bien qué hacer y que, por el uso que se da, más valdría, desde el punto de vista educativo, que nunca se hubiese introducido en las escuelas y centros de enseñanza*" [Guzmán, 1992]. Esta reflexión nos pone en guardia respecto a una posible introducción indiscriminada del ordenador en la enseñanza. Por ello, es necesario reflexionar sobre el papel y el sentido de esta nueva tecnología, para que no se ponga en peligro el quehacer matemático.

Entre los peligros que pueden plantearse con una introducción inadecuada de los ordenadores en la enseñanza de las Matemáticas, podemos destacar los siguientes:

1. La posibilidad de <u>perder el sentido de las operaciones</u> que realiza el ordenador de forma automática: comprimiendo los procesos con el fin de ganar tiempo y dando más importancia a los resultados. De esta forma se anula y evita la posibilidad de poder experimentar y vivir la belleza del quehacer matemático, que, al igual que los sentimientos y valores, sólo se conoce cuando se vive. En este sentido, también se corre el peligro de dejar de considerar la aritmética como una destreza básica. [Guzmán, 1992].

2. Esta pérdida del sentido operativo puede provocar una <u>pérdida de destrezas básicas</u>. Los ejercicios de cálculo que suelen llevarse a cabo en un curso de Matemáticas, permiten el desarrollo de capacidades mentales que podrían verse mermadas con el uso de estas herramientas [García, 1999], atrofiando algunas capacidades humanas [Guzmán, 1992].

3. <u>Confundir manipulación matemática con conocimiento matemático</u>, situación muy común cuando se adquiere un aprendizaje memorístico de las Matemáticas consistente en el almacenamiento de algoritmos, definiciones y teoremas en vez de una construcción de las Matemáticas para la resolución de problemas [Guzmán,

1992]. Los ordenadores ofrecen éxito en la manipulación, pero no ofrecen garantías de la comprensión de los objetos manipulados.

4. Llegar a tener la convicción de que el ordenador lo resuelve todo sin tener en cuenta las limitaciones del medio, así como los fallos que se podrían generar. En este sentido puede ser muy interesante el análisis de errores, ya que nos pueden conducir a descubrir elementos educativos muy interesantes [Amillo-Guadalupe, 1991]. Esta concepción de un ordenador todopoderoso que provoca una fe ciega en la máquina [García, 1999], favorece también la pérdida del sentido crítico, muy necesaria en el quehacer matemático.

5. La inmediatez de las respuestas proporcionadas por el ordenador, debe ser debidamente temporalizadas en los procesos de enseñanza, ya que la automatización de ciertos conceptos en un momento inadecuado puede provocar graves problemas en el aprendizaje de los mismos. Además, esta inmediatez hace que se pierda el sentido de la dificultad del problema ya que da la sensación de que el ordenador hace todo igual de rápido ante los ojos del usuario [García, 1999]. Aunque esta inmediatez puede permitirnos chequear propiedades o resultados de una manera rápida, sin embargo puede provocar que se ponga más énfasis en los resultados que en las resoluciones. Asimismo el uso de los ordenadores para omitir los aspectos predictivos, impide al alumno encontrarse con esas dificultades necesarias a la hora de resolver un problema [Halmos, 1991].

6. Podríamos citar algunos peligros fisiológicos que son poco conocidos. Entre ellos se puede hablar de la pérdida de agudeza visual, problemas articulares (provocados por los teclados) y lesiones de columna. A pesar de todo, estos problemas físicos provocados por el ordenador no son generados en sí mismos por la introducción de estos en la enseñanza, son problemas que surgen por el uso e introducción del ordenador en nuestra vida cotidiana [González, 1995].

7. También podríamos citar el peligro psicológico caracterizado por la infodependencia. Los ordenadores pueden provocar tal dependencia, que los alumnos se encuentren incapaces de resolver problemas sin la máquina, tendiendo a autolimitarse y plantear la resolución de problemas en función de las herramientas disponibles, pudiéndose bloquear si no tienen la máquina delante [González, 1995].

Hemos señalado algunos de los peligros que comporta la introducción de los ordenadores en la enseñanza de las Matemáticas, lo cual obliga a efectuar una investigación educativa encaminada a minimizar estos riesgos. Estos peligros pueden ser minimizados utilizando metodologías adecuadas que no limitan su uso, ya que según afirma [Kaput, 1992] "*la mayoría de las limitaciones del uso de los ordenadores en la enseñanza en las décadas entrantes serán probablemente debidas más que a las limitaciones tecnológicas, a la falta de imaginación humana y al impacto de los viejos hábitos y las estructuras sociales*". Así pues, esta falta de imaginación con la que los enseñantes hacemos uso de las nuevas tecnologías debe superarse, sacando partido a la oferta actual de programas educativos.

La introducción de los ordenadores en la enseñanza, se enmarca en el contexto de las relaciones entre tecnología educativa e innovación educativa. En esta interacción entre tecnología e innovación educativa existen perspectivas discordantes que hacen primar una sobre otra. Teniendo en cuenta que la tecnología no es tan solo un conjunto de procesos y procedimientos basados en las nuevas tecnologías, sino que conforma un modo de pensar, podemos considerar dos tendencias contrapuestas: por un lado se encuentra la postura de aquellos que plantean la tecnología educativa como eje nuclear de las transformaciones y reformas escolares y educativas; y por otro lado existe otra tendencia protagonizada por los que piensan que es prioritaria la perspectiva de innovación para pensar sobre la tecnología educativa y su integración escolar y curricular [Escudero, 1995]. En nuestro caso podríamos hablar de dos posiciones entre la innovación de la enseñanza de las Matemáticas y la introducción de los ordenadores:

1) Introducir los ordenadores para reformar la enseñanza de las Matemáticas, o bien
2) Reformar la enseñanza de las Matemáticas para introducir los ordenadores.

Como puede observase son dos perspectivas con objetivos muy diferentes. El racionalismo económico muy vinculado a la segunda postura, así como la visión tecnológica de la enseñanza, y en particular de la enseñanza de las Matemáticas está lejos de nuestro objetivo educativo: somos conscientes del peligro que supone pensar educativamente bajo la primacía, los valores y criterios de la cultura tecnológica. Nuestra visión de reforma o innovación se encuentra encuadrada en la primera perspectiva, que pretende la introducción de programas de orientación matemática para efectuar una reforma de la enseñanza de las Matemáticas, es decir la tecnología educativa al servicio de la innovación.

En el siguiente apartado vamos a presentar uno de los grupos de programas matemáticos más difundidos y utilizados en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas: se trata de los sistemas de cálculo algebraico o sistemas de cálculo simbólico.

I.2.5. Los sistemas de cálculo algebraico.

Como acabamos de ver el ordenador es el elemento central del proceso de revolución tecnológica que estamos experimentando en los últimos tiempos. Uno de los avances relacionados con esta revolución está protagonizado por el desarrollo espectacular de nuevos programas de ordenador, un software que se especializa en las diversas áreas de conocimiento. Este diseño vertiginoso de nuevos programas también podemos observarle en el campo de los programas de contenido matemático. El principal grupo de programas de contenidos matemático ha recibido denominaciones diversas, se les ha denominado como asistentes matemáticos, sistemas de matemática simbólica (Symbolic Mathematical Systems) o sistemas de cálculo algebraico (Computer Algebra Systems). Nosotros utilizaremos la última terminología SISTEMAS DE CÁLCULO ALGEBRAICO, porque quizás es una de las nomenclaturas de mayor difusión, aunque como bien se afirma en [Hogdson-Muller, 1992] esta última terminología puede resultar confusa pues estos sistemas realizan operaciones simbólicas no sólo operaciones algebraicas. A pesar de ello, nosotros utilizaremos más frecuentemente esta nomenclatura y en ocasiones utilizaremos las siglas CAS (Computer Algebra Systems) para referirnos a este tipo de programas.

Los sistemas de cómputo algebraico (CAS) hacen referencia tanto a las calculadoras como a los ordenadores personales que llevan integradas tres capacidades manipulativas fundamentales [Hodgson-Muller, 1992]:

1) la capacidad numérica
2) la capacidad gráfica
3) la capacidad simbólica.

La capacidad numérica ha sido siempre una de las características básicas que nos han ofrecido los ordenadores y las calculadoras. Esta capacidad permite la posibilidad de efectuar cálculos con lo que se denomina la aritmética decimal. Por ejemplo, si introducimos al sistema los datos 1/2 + 1/3 obtenemos como solución el valor aproximado 0'8333333.... con un número de dígitos de aproximación que suele venir determinado por el número de dígitos que puede contener el visor de las calculadoras o bien es un número que se puede seleccionar previamente (número de dígitos de aproximación). Pero los sistemas de cómputo algebraico tienen la posibilidad de mejorar esta aritmética decimal sustituyéndola por una **aritmética racional**, llamada en algunas ocasiones **aritmética exacta**. Así, en el ejemplo anterior, al introducir 1/2+1/3 el sistema de cómputo algebraico devolvería el número racional 5/6. Estos sistemas también permiten, mediante ciertas opciones, efectuar cálculos con aritmética aproximada. El cálculo simbólico de estos sistemas nos permite, no sólo trabajar con aritmética exacta, sino que también permite efectuar otros cálculos más complejos. La posibilidad de realizar cálculos con aritmética exacta es sin duda, uno de los grandes avances de los sistemas de cómputo algebraico: es la denominada capacidad simbólica de los CAS.

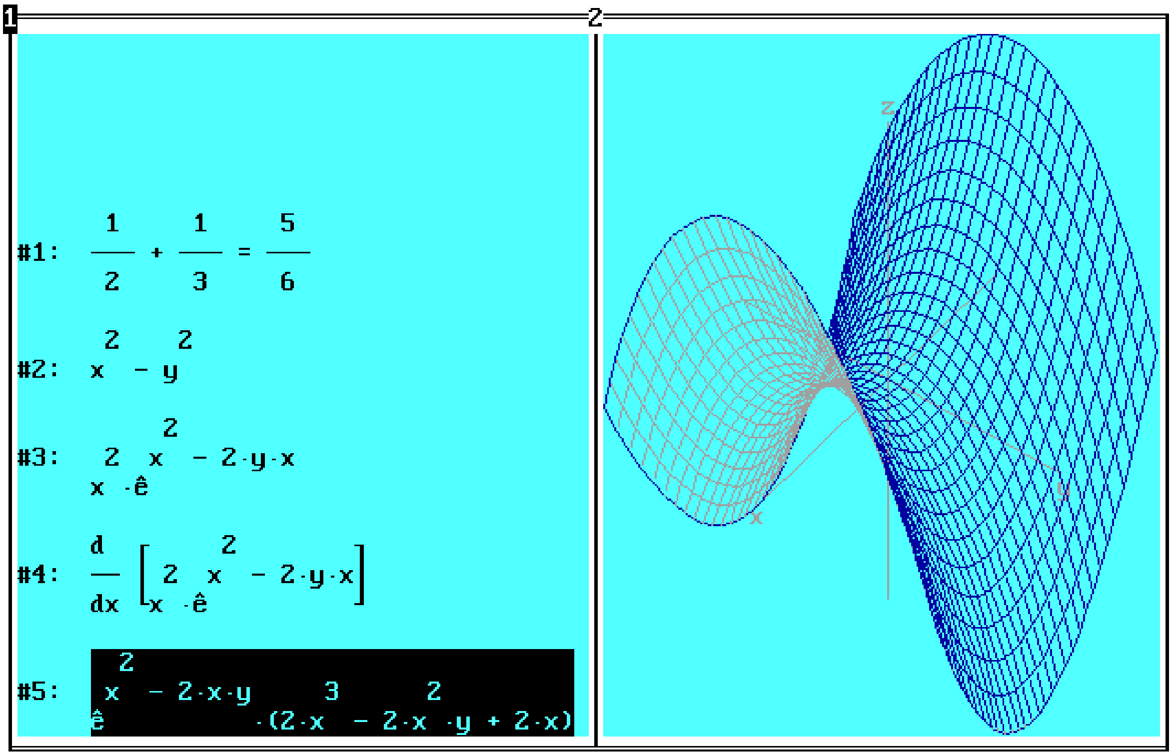


Figura 1. Algunas posibilidades del programa DERIVE: representaciones gráficas, cálculos con aritmética exacta, cálculo de derivadas parciales,...

Con la manipulación simbólica de expresiones algebraicas podemos efectuar operaciones tales como el cálculo de derivadas, el cálculo de primitivas, el cálculo de límites, la factorización de polinomios, la resolución de sistemas de ecuaciones polinomiales,... operaciones que definen esta nueva capacidad simbólica propia de estos sistemas.

La tercera capacidad de los CAS es la capacidad gráfica. La posibilidad de realizar representaciones gráficas en el plano y en el espacio constituyen una faceta con elevadas posibilidades didácticas. Esta es una de las características que, a priori, puede producir cambios más radicales en la enseñanza de las Matemáticas tanto en sus niveles de secundaria como en los primeros cursos de universidad [Hodgson-Muller, 1992].

Existen numerosas calculadoras que incorporan estos sistemas de cálculo algebraico. Entre las calculadoras más populares se encuentran las que han sido desarrolladas por Texas Instruments. Sus modelos más comercializados son TI-85, TI-86 y TI-92. Todos estos modelos incorporan el cálculo simbólico en su tratamiento. Recientemente se ha lanzado al mercado el modelo TI-89 y la calculadora TI-92-Plus con mayores posibilidades gráficas y de cálculo. Otras calculadoras como Casio CFX-9970 son capaces de realizar cálculos algebraicos pero no se aproximan a los modelos más potentes de la Texas Instuments (TI-89 y TI-92-Plus). Este tipo de calculadoras simbólicas puede convertirse en una herramienta muy innovadora para la enseñanza de las Matemáticas en Secundaria y en la enseñanza universitaria, ya que ofrece un elevado grado de portabilidad. La posibilidad de impartir en cualquier aula, prácticas de Matemáticas con este tipo de calculadoras, no resulta demasiado complicado ni costoso. Además, estas calculadoras simbólicas, a pesar de su reducido tamaño, ofrecen una buena resolución gráfica, es más, la mayor parte de estos modelos suele ofrecer la posibilidad de conectarse a ordenadores personales.

Entre los programas de cálculo simbólico más utilizados en la actualidad podemos destacar los siguientes[1]:

MACSYMA (Macsyma, Inc., EE.UU.)
MAPLE (Waterloo Maple Software, Univ. de Waterloo, Canadá)
DERIVE (Soft Warehouse, Inc.; Texas Instruments , EE.UU.)
MATHEMATICA (Wolfram Research, Inc., EE.UU.)
MuPAD (Multi Processing Algebra Data Toool; University of Paderborn, Alemania)
MATLAB (The MathWorks, Inc.)
AXIOM (Numerical Algorithms Group)
REDUCE Computer Algebra System (Rand)
Mathcad (MathSoft, Inc.)
Expressionist (Waterloo Maple Software)

Estos sistemas de cálculo simbólico tienen cada vez mayor difusión y ofrecen nuevas posibilidades educativas, situación que debe obligar a replantear la enseñanza tanto desde el

[1] Ya habíamos comentado que se puede encontrar una lista bastante actualizada de los sistemas de cómputo algebraico actuales en la dirección de internet http://symbolicnet.mcs.kent.edu/SN/www-sites.html#A1.1

punto de vista de los contenidos como desde el punto de vista metodológico [García, 1999]. La aparición de los CAS surgió después de que se desarrollaran numerosos proyectos informáticos (EDGE, MICROCALL, PHASER, MIME, CALM, APL, MACO), pero todos ellos dedicaban más tiempo a la parte informática a las propias Matemáticas; además requerían una cierta formación informática para su manipulación. Más tarde fueron evolucionando tanto en sus propias capacidades numéricas como en sus entornos de usuario. Con la aparición de los PC's y de los sistemas operativos MS-DOS; WINDOWS, esta evolución fue confluyendo de tal forma que, hoy en día las diferencias entre los diferentes CAS existentes en el mercado suelen ser mínimas. Esta escasez de diferencias se debe a que la filosofía intrínseca de estos sistemas está basada en la manipulación simbólica. Generalmente estas diferencias mínimas, se suelen encontrar en el entorno de trabajo del programa y en los requisitos de hardware imprescindibles para que los programas funcionen correctamente.

Desde el punto de vista de numerosos autores [Hodson-Muller, 1992], [García, 1999], [Guzmán, 1991], [Leinbach, 1991], [Llorens, 1993], [Landay, 1999], [Pérez, 1996], [Salter-Gilligan, 1991], [Kutzler, 1999] estos sistemas van a provocar enormes cambios en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Desde el punto de vista de la enseñanza los cambios se están produciendo en dos niveles:

- por un lado en los contenidos que se deben enseñar,
- y en segundo lugar en el aspecto metodológico.

Estos cambios se deben fundamentalmente a que los sistemas de cálculo algebraico permiten orientar la enseñanza hacia una metodología constructivista [Roanes, 1991]. Pero, sin duda, uno de los cambios más importantes es el que se refiere a la SIMPLIFICACIÓN DE LAS RUTINAS DE CÁLCULO; manipulaciones matemáticas muy comunes que pueden perder su RAZON DE SER en beneficio de una mayor abstracción de los conceptos matemáticos.

Los sistemas de cálculo algebraico constituyen una herramienta muy potente para realizar operaciones simbólicas, ya que nos permiten manipular objetos no numéricos y operar y realizar transformaciones con símbolos. Este aspecto nos brinda la posibilidad de concretar esa simbolización obtenida en el proceso de manipulación algebraica tradicional. Las posibilidades que nos ofrecen estos sistemas deben ser organizados y estructurados de forma adecuada. Esto

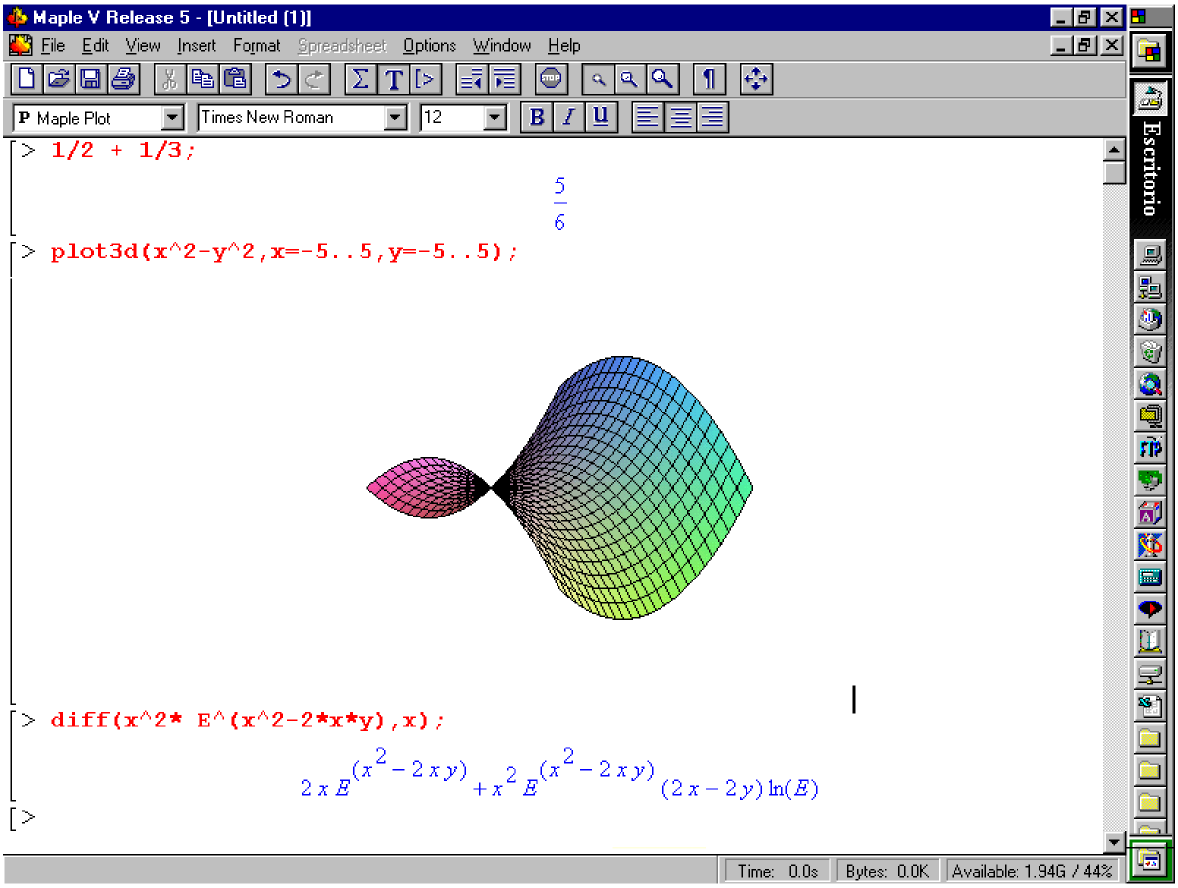


Figura 2. Operaciones realizadas en el programa de cálculo simbólico MAPLE

quiere decir que no debemos caer en la ingenuidad de creer que únicamente con la utilización de estos sistemas se puedan evitar los errores o peligros que el mundo computacional puede provocar en la enseñanza de las Matemáticas. Así por ejemplo, tratar de evitar que los alumnos pierdan el sentido de las operaciones que realiza al utilizar un sistema de cálculo algebraico, no es una tarea que pueda ser evitada con el SIMPLE USO de este tipo de sistema. Por tanto, es necesario introducir una **PLANIFICACIÓN**, un método sistemático de trabajo para intentar evitar este y otros peligros; ya que todos los peligros que habíamos citado en apartados anteriores pueden surgir de forma espontánea si hacemos un MAL USO de la herramienta. Los CAS son en definitiva una herramienta didáctica, un material que requiere una METODOLOGÍA ADECUADA. Será esa didáctica basada en las características del medio y no el propio medio, la que nos permitirá utilizar las características potenciales de la herramienta, evitando también de esta forma los peligros que su uso puede comportar en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

I.2.6. Introducción de los sistemas de cálculo algebraico en la enseñanza de las Matemáticas.

La decisión de introducir las nuevas tecnologías en el aula debería de ser fundamentalmente una decisión que se guiase por "objetivos educativos" [Kaput, 1992]; sin embargo la implantación de las nuevas tecnologías en el aula está vinculada en numerosas ocasiones a factores de carácter totalmente distinto. Así pues, si partimos de unos objetivos estrictamente educativos, como planteamiento metodológico inicial, sería imprescindible determinar si las nuevas tecnologías pueden ayudarnos a realizar mejor nuestra labor desde ese punto de vista educativo, pues de lo contrario, estaríamos introduciendo una herramienta que no obedece al espíritu mismo de la educación, enmascarando su uso con objetivos pseudoeducativos.

La aparición de los sistemas de cálculo algebraico y su introducción en la enseñanza de las Matemáticas ha suscitado numerosas cuestiones e interrogantes educativos, y además han modificado la visión inicial de las Matemáticas en las que los ejemplos eran lo marginal y las pruebas y los teoremas lo real; de tal forma que *"el entendimiento abstracto es como una visión de la tierra desde un satélite mientras que los ejemplos muestran que la tierra está bajo nuestros pies"* [Landay, 1999]. Una de estas cuestiones está relacionada con la posible eliminación secuencial de numerosas rutinas algebraicas meramente mecánicas, del currículum de Matemáticas; tareas que, según [Hodgson-Muller, 1992], [Pérez, 1996] pierden su razón de ser cuando se hace uso de estos sistemas de cálculo algebraico. Esta idea obliga a plantearnos una cuestión esencial ¿cómo establecemos el número de algoritmos que son mínimamente necesarios para el quehacer matemático de cada etapa y nivel educativo?, es decir *"¿dónde establecer la frontera entre las Matemáticas y las viejas recetas mínimamente necesarias?"* [Amillo-Guadalupe, 1991]. Hasta ahora se han realizado numerosos estudios y experiencias sobre los efectos positivos y negativos, sobre la viabilidad de una incorporación sistemática de los CAS en la labor docente, pero no se ha llegado a conclusiones unánimes [Pérez, 1996]. Al introducir los CAS en el aula, los profesores de Matemáticas deben de añadir a sus decisiones previas (lo que debe enseñarse y cómo hacerlo), la **forma** en la que, de una manera responsable, se pueden introducir estas nuevas herramientas en el contexto de la educación. Efectivamente, la decisión de incluir CAS en el aula de Matemáticas, supone nuevas implicaciones para los estudiantes, para los profesores y para el propio currículum [Hodgson-Muller, 1992]. Analicemos estas implicaciones en cada uno de estos colectivos:

1) Para los estudiantes esta introducción ofrece la posibilidad de representar los conceptos matemáticos de varias formas o modos complementarios (numérico, gráfico y simbólico) permitiendo de esta forma, que el alumno pueda manipular un mismo concepto mediante diferentes sistemas de representación. Este hecho ofrece al estudiante una mejora del aprendizaje de los conceptos abstractos, al ofrecerle diferentes formalizaciones o visiones de una misma abstracción.

2) Para el profesor, estos sistemas no sólo ejercen un papel destacado por su utilidad inmediata en la mejora de cálculos numéricos, gráficos y simbólicos, sino que, además, el uso de estos programas ofrece nuevas visiones de la enseñanza de las Matemáticas. Estas posibilidades y mejoras son una auténtica revolución educativa. En este sentido Young (1986) señaló que "*estamos viviendo una revolución en Matemáticas tal y como ocurrió con la introducción de la numeración arábiga en Europa o la invención del cálculo. Estas revoluciones tuvieron características comunes: problemas complejos se volvieron fáciles y accesibles no sólo para la élite intelectual sino que para multitud de personas sin talento matemático*". Por otro lado los sistemas de cálculos algebraico facilitan las computaciones y los ejemplos que favorecen la investigación, ya que brindan al profesor la oportunidad de expandir sus capacidades de investigación comprobando conjeturas que puede proporcionar inicialmente un ejemplo [Landay, 1999].

3) Esta revolución se refiere en parte al uso de los sistemas de cómputo algebraico, ya que estos sistemas permiten desarrollar conceptos y procesos con ejemplos complicados, estimulando la exploración y la búsqueda de patrones, las generalizaciones y los contrajemplos. Si para abordar ciertos problemas de la ciencia y de la técnica se están utilizando estos sistemas, parece adecuado que los estudiantes de bachillerato con orientación hacia ramas científico-técnicas y los estudiantes universitarios relacionados con este tipo de estudios se familiaricen con un software matemático de estas características. Esto provoca un debate curricular, ya que pueden existir contenidos meramente algorítmicos y rutinarios que podrían ser eliminados o bien tratarse de forma distinta, ampliando las posibilidades aplicativas de una disciplina tan abstracta.

Una vez analizadas las implicaciones que provoca la integración de los CAS en la educación matemática para estudiantes, profesores y el propio currículum, vamos a mostrar algunas de las formas de integrar estos sistemas informáticos en el aula de Matemáticas. Presentamos una breve descripción de esas formas de uso de estas herramientas didácticas:

1) Utilizando el sistema como una parte de las clases como MEDIO DE PRESENTACIÓN DE CONCEPTOS. Este tipo de uso requiere facilidades de proyección que permitan a los estudiantes ver lo que aparecen en la pantalla del ordenador. El aspecto central de una integración adecuada de los CAS como modelo de introducción requiere una evolución del papel que ha de jugar el profesor en el aula. El profesor debe facilitar contextos apropiados de interacción entre el estudiante, la máquina y el concepto matemático. Una de las razones por las que los vídeos y películas han jugado un pequeño papel en el aula de Matemáticas se debe fundamentalmente a que las Matemáticas se comprenden mejor cuando se hacen que cuando se ven. Los CAS proporcionan un contexto activo que requiere una intervención constante. Así estos sistemas obligan a replantear los sistemas tradicionales de exposición. En este tipo de usos, es claro que el profesor debe realizar un enorme esfuerzo sacrificando la seguridad que le proporciona el tratamiento tradicional de las Matemáticas. [Hodsgon-Muller, 1992].

2) Utilizando el sistema como herramienta incorporada en un sistema de enseñanza asistida con ordenador. Este tipo de uso, aunque minoritario, trata de utilizar la filosofía de los sistemas de enseñanza asistida por ordenador, en los que el ordenador se convierte en el elemento central del proceso, incorporando además de una fuente de datos y un entorno adecuado para que el alumno manipule los contenidos matemáticos con un sistema de cálculo simbólico. Un ejemplo de este tipo lo podemos encontrar en XCOURSE, sistema de enseñanza de álgebra asistida con ordenador utilizado en la Universidad de Alcalá desarrollado con el sistema Xwindows y utilizando Mapple [Llovet y otros, 1991].

3) Esta tecnología puede utilizarse en sesiones de laboratorio, en los denominados Laboratorios de Matemáticas. Un laboratorio de Matemáticas conlleva varios tipos de actividades: observación de fenómenos, identificación de algunos principios importantes, experimentación con los objetos de la investigación, explicación de los comportamientos observados y análisis de los fenómenos. Estas actividades se pueden realizar de forma apropiada con un programa de cálculo simbólico, ya que permite conducir fácilmente los experimentos, modificar los datos y repetir experimentos con pequeños cambios. Así los estudiantes pueden hacer hipótesis sobre ellos. Sin embargo este tipo de Laboratorios suelen ser experiencias ligadas a clases principales en las que se introducen los conceptos [Leinbach, 1991]. Experiencias de este tipo se están realizando en numerosas universidades de todo el

mundo: [Auer-Muller, 1990] (Univ. de Brick, Alemania), [Villen, 1991], [Miñano, 1991], [García y otros, 1994] (Univ. Politécnica de Madrid), [Benítez y otros, 1996-a], [Benítez y otros, 1996-b] (Universidad de Cádiz), [Watkins, 1992] (University of Plymouth), [Salter-Gilligan, 1991] (Franciscan University of Steubenville, Steubenville, OH, EE.UU.), [Monaghan, 1993] (University of Leeds, UK), [Llorens, 1993] (Universidad Politécnica de Valencia), [Rebolo, 1992] (Universidad Católica de Petrópolis, Brasil), [Sullivan, 1990] (Universidad de Valparaiso), [Child-Leinbach, 1990] (Universitty of Pittsbourgh). Las actividades de estos laboratorios de Matemáticas no son meras aplicaciones de las actividades propuestas con lápiz y papel. Este tipo de actividades potencian varios elementos importantes del quehacer matemático [Hodson-Muller, 1992]:

- la exploración de conceptos matemáticos mediante el descubrimiento de conjeturas y su posterior demostración.
- el razonamiento inductivo
- la interrelación entre diferentes sistemas de representación: algebraica, gráfica, numérica,..
- la resolución de problemas complejos que consumirían mucho tiempo si no se utilizase esta tecnología.

En las prácticas que se realizan en los laboratorios se suelen proponer diversos tipos de experimentos algunos de introducción al tipo de programa que se utiliza y otros centrados en la resolución de problemas que permiten un tipo de aprendizaje por descubrimiento y con los que se pueden obtener aprendizajes significativos. Sin embargo como ya hemos comentado, suelen ser laboratorios complementarios a otras asignaturas más teóricas en las que se utilizan metodologías tradicionales. Se trata por tanto de prácticas que complementan con el uso de un programa de cálculo simbólico, la formación de los alumnos en todos aquellos tópicos en los que se puede hacer una aportación positiva a los procesos de enseñanza-aprendizaje.

4) Que los alumnos tengan un ACCESO INDIVIDUAL A LOS SISTEMAS DE CÓMPUTO ALGEBRAICO. De esta forma el alumno utiliza el CAS como una calculadora potente [LaTorre, 1990], integrando las tres capacidades simbólica, numérica y gráfica y así podrá realizar cálculos laboriosos, lo cual puede ir eliminando de la enseñanza el aprendizaje de ciertas técnicas rutinarias de cálculo. El uso de los CAS como calculadora simbólica tiene por objeto liberar al alumno de la realización de cálculos rutinarios, que comúnmente conllevan mucho tiempo permitiéndole experimentar y descubrir de forma autónoma los hechos y principios del quehacer matemático. Sin embargo introducir de esta forma los CAS requiere

dos etapas de aprendizaje: una primera fase en la que es necesario que el alumno se enfrente por sí mismo, sin el uso de estos sistemas, a los cálculos iniciales que en un principio pueden considerarse como destrezas básicas, y en una segunda fase, cuando la rutina de cálculo ha dejado de ser un elemento esencial, el alumno podrá utiliza estos sistemas permitiéndole enfocar todo su esfuerzo a destrezas superiores. De esta forma los algoritmos y rutinas estudiados en la fase inicial, se pueden desarrollar por medio de estos sistemas para la resolución de problemas superiores. B. Buchberger presentaba esta idea en 1993 [Buchberger, 1993], enunciándola como el principio de la caja blanca/caja negra (white box/black box). Según el punto de vista de Buchberger es básico que en un estadio inicial (en la fase de aprendizaje), el sistema deba utilizarse como CAJA BLANCA ya que de lo contrario sería desastroso, y utilizar el sistema de cálculo algebraico como CAJA NEGRA en la fase de aplicación del conocimiento, es decir, en el momento en que estamos resolviendo problemas, en los que el algoritmo o rutina resuelto por el sistema no es más que un subproblema del problema principal. Es evidente que este tipo de uso requiere una inversión en equipos muy importante, por lo que las experiencias didácticas en este sentido se limitan al uso de calculadoras que incorporan sistemas de cálculo simbólico aunque tienen menos resolución gráfica que los ordenadores. Sería deseable poder utilizar terminales de ordenador en los que trabajar de esta manera. Nuestra experiencia didáctica se integra en este tipo de uso ya que incorpora totalmente el uso del programa de cálculo simbólico en el aula y se convierte de esta forma en una calculadora simbólica para uso del alumno.

Esta introducción tecnológica en el aula de Matemáticas va a provocar un serio impacto sobre el currículum. Efectivamente, si deseamos integrar estos sistemas computacionales en la enseñanza de las Matemáticas es necesario plantear cambios sustanciales en el diseño de los cursos tradicionales de Matemáticas. Una decisión encaminada a la integración tecnológica de estos sistemas se puede plantear en diferentes grados, según como sean los grupos y niveles educativos. La implantación de los sistemas de cálculo algebraico requiere la realización de un estudio previo mediante el cual el nuevo diseño metodológico sea capaz de nivelar las habilidades manipulativas básicas y los conceptos y principios necesarios en el nivel educativo correspondiente con el uso de esta nueva herramienta simbólica. Esta nivelación, de difícil implantación, debería permitir el uso de los CAS en aquellos dominios en los que su uso sea relevante para el alumno a fin de adquirir habilidades intelectuales apropiadas a su contexto educativo.

En la enseñanza secundaria los cambios requeridos para la implementación de estos sistemas requieren una enorme inversión de tiempo, aunque una vez realizada se pueden aplicar de forma universal; sin embargo los cambios que se necesitan para introducir CAS en la enseñanza universitaria tienden a localizarse en cursos o secciones de un curso, situación que provoca una enorme variedad de adaptaciones e implementaciones. Como el objetivo fundamental de la enseñanza de las Matemáticas es la resolución de problemas, el uso de los CAS deben facilitar la consecución de los siguientes fines [Fernández, 1996]:

a) Reconocer, seleccionar y saber aplicar estrategias y técnicas como la analogía y la particularización.
b) Reconocer, plantear y resolver problemas a partir de situaciones dentro y fuera de las Matemáticas
c) Aplicar el proceso de formulación de modelos matemáticos o situaciones prácticas, relacionadas con los contenidos curriculares.

Los sistemas de cálculo algebraico ofrecen una ventaja indudable: reducen el tiempo empleado en los cálculos y las rutinas algebraicas que, en muchas ocasiones, son meros cálculos repetitivos que no aportan nada a los alumnos. Esta reducción del tiempo que el alumno emplea en estas rutinas, podemos dedicarla a dar más énfasis a los procesos mentales de orden superior, que por otro lado se adaptan mucho más a un estilo de enseñanza basado en la resolución de problemas, es decir, un estilo de enseñanza que se base más en el constructivismo. Sin embargo, el uso de este tipo de programas puede descentrar la atención del alumno, puesto que puede provocar que el alumno dirija su atención hacia los modos de operar del ordenador, desenfocando su atención de los procesos matemáticos subyacentes. Es por ello muy necesaria la minimización de los tiempos que deben emplearse en el aprendizaje del programa. La implementación de esta introducción tecnológica requiere muchos recursos humanos, y mucho tiempo de preparación, ya que se necesitan actividades apropiadas, materiales adaptados y una adecuada formación tecnológica del profesorado.

Existe una corriente de opinión extendida entre numerosos profesores que es contraria al uso de esos sistemas de cálculo simbólico en el aula. Según estas ideas, el uso de estos sistemas puede provocar una pérdida de destrezas básicas en los alumnos, e incluso puede llegar a ser un obstáculo para el desarrollo de capacidades como la abstracción y el razonamiento lógico. Este grupo de opinión desarrolla sus clases dedicando gran parte del tiempo a la enseñanza de algoritmos y a la realización de ejercicios "tipo" con una respuesta más o menos inmediata, elaborados para practicar el algoritmo que se está explicando en ese contexto. De esta manera, nos enfrentamos con una idea cognitivista de la enseñanza. Pero esta insistencia desmesurada en la adquisición de destrezas algorítmicas se enfrenta con varios inconvenientes:

- los algoritmos, cuando no se utilizan frecuentemente se olvidan,

- muchos algoritmos pueden construirse sobre estos sistemas, ofreciendo una mayor rapidez y exactitud,
- el empleo de algoritmos rutinarios, no facilita en numerosas ocasiones el aprendizaje de conceptos, procesos y modelos matemáticos.

Esta situación, muy frecuente en las aulas, obliga a reflexionar sobre el sentido del quehacer matemático cargado de fuertes dosis de experimentación y razonamiento. El potencial que ofrecen los CAS puede permitir niveles crecientes de pensamiento formal y una adecuada conceptualización matemática. Esta línea de actuación se inscribe en la corriente de enseñanza experimental de las Matemáticas, apoyada en las tesis constructivistas y que conecta con la línea metodológica de resolución de problemas [Pérez, 1996].

Las principales ventajas del uso de CAS en la enseñanza de las Matemáticas se pueden concretar en los siguientes aspectos:

1) Permiten una utilización experimental de las Matemáticas
2) Las capacidades gráficas de estos sistemas facilitan la integración de las diversas imágenes conceptuales, que son en ocasiones un obstáculo para el aprendizaje.
3) Permite dedicar menos tiempo a la realización de cálculos rutinarios concediendo de esta forma mayor importancia y tiempo a la reflexión y al análisis de los resultados; enfocando así los problemas de una manera distinta. También se facilita el tratamiento de problemas de modelización.
4) Ayuda a progresar hacia niveles superiores del pensamiento formal, favoreciendo la interiorización de conceptos y procedimientos.
5) Facilitan el desbloqueo del estudiante en la resolución de problemas, en la medida que les permiten experimentar con rapidez y seguridad.
6) Permiten un trabajo más autónomo del estudiante, adecuado a su ritmo de trabajo y sus posibilidades.
7) Facilita la aparición de contextos de trabajo colectivo, muy adecuados para el aprendizaje cooperativo o colaborativo.
8) Propician la investigación y el descubrimiento.
9) Dado su carácter interactivo provocan una retroalimentación inmediata.
10) Puede mejorar la actitud hacia las Matemáticas, incidiendo positivamente en la motivación.

Pero estos sistemas simbólicos no son la panacea de la enseñanza matemática: tan solo son un medio que puede contribuir muy positivamente en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Además, no debemos olvidarnos de algunos inconvenientes que pueden surgir con el uso inadecuado de estas tecnologías. Entre tales inconvenientes podemos destacar los siguientes:

1) Riesgo a que el alumno se centre más en la problemática del PROGRAMA que en los propios problemas matemáticos, convirtiendo el asistente matemático en el centro: actitud tecnocentrista. Esta actitud puede convertirse en una barrera adicional en la enseñanza de las Matemáticas, ya que puede suceder que se dedique demasiado tiempo a1l aprendizaje del programa, reduciendo el tiempo empleado en hacer Matemáticas. Esta dificultad se puede superar si seleccionamos un programa que se acomode a los contenidos del curso, de tal forma que no resulte complicado su uso, introduciendo actividades prácticas que tengan instrucciones detalladas acerca del manejo del programa.

2) Una posible pérdida de destrezas básicas, ya que los ejercicios de cálculo que permiten el desarrollo de ciertas capacidades mentales se verían mermado con el uso de estas herramientas. Además puede ocurrir que los alumnos pierdan el interés por las técnicas básicas del cálculo y otras técnicas algorítmicas básicas. Es necesario tener en cuenta este hecho para que los alumnos no tengan una dependencia desmesurada al ordenador, diseñando actividades que no atiendan exclusivamente al uso de los algoritmos habituales.

3) Que el alumno adquiera una confianza ciega en la máquina, favoreciendo la pérdida del sentido crítico. Para evitar este problema, conviene resaltar los fallos que provocan los ordenadores exigiendo diferentes procedimientos de resolución.

4) Que el alumno sea incapaz de valorar la dificultad de los problemas ya que percibe que el ordenador hace todo igual de rápido.

5) La necesidad de seleccionar diferentes tipos de problemas y de actividades que se adapten a los objetivos docentes y aprovechen las capacidades de los CAS, obligan a invertir mucho tiempo en el diseño de las mismas.

6) La actual formación del profesorado exige por un lado cursos de actualización permanente y por otro lado una adecuada motivación, situaciones que no son muy bien recibidas por toda la clase docente, ya que su formación con frecuencia no es la más adecuada.

7) Actualmente existe una falta de infraestructura, es decir, no existen suficientes aulas de informática y equipos que permitan diseñar una adecuada introducción de CAS en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Esta dificultad es subsanable con adecuadas inversiones en la enseñanza, todo ello depende de las decisiones políticas y educativas de los gobernantes.

8) Otra dificultad a considerar es el elevado número de alumnos, que puede impedir una buena organización de este tipo de actividades.

Para resolver estas dificultades e intentar evitar al máximo los peligros e inconvenientes que el uso de los CAS en la enseñanza de las Matemáticas, debemos por un lado aprovechar todas sus características y tener en cuenta varias cuestiones de interés:

1) Minimizar en la medida de lo posible las barreras adicionales que puedan ocasionar el uso de este tipo de programas. Una de las soluciones fundamentales sería utilizar un solo programa, con el fin de que el alumno se familiarice y profundice con el mismo y así no descentra su atención de los contenidos matemáticos con el aprendizaje de varios programas.
2) La nueva herramienta computacional debe de ser introducida de la manera más atractiva posible con la finalidad de iniciar un aprendizaje con el mayor grado de interés y motivación.
3) Utilizar el ordenador cuando sea necesario y para desarrollar los objetivos educativos propuestos, diseñando previamente las prácticas a realizar, eligiendo con sumo detalle los problemas que se vayan a plantear.
4) A la hora de diseñar las prácticas, se debe intentar reflexionar sobre las dificultades y el comportamiento que pueden tener los alumnos a la hora de poner en práctica las actividades preparadas.

Actualmente existen numerosos proyectos de investigación dedicados al estudio de loa sistemas de cálculo simbólico en la educación Matemática. Algunos de estos proyectos de investigación son los siguientes:

1) El Proyecto sueco AMD (Analysis of the role of the Computer in Mathematics Teaching) [Björk, 1987].
2) El Instituto de Investigación para la Computación simbólica del Johannes Kepler University, Linz, Austria.
3) El Computers in Teaching Initiative Centre for Mathematics and Statistics (desarrollo de hojas de trabajo de clase para usar con DERIVE) de la

Universidad de Birmingham, Reino Unido. Para más información se pueden ver las *Maths & Stats newsletter* publicadas por el CTI Centre.

4) Cooperación Europea sobre el uso de los ordenadores en matemáticas [Dechamps, 1988]

5) Sin duda el proyecto más importante lo compone el National Science Foundation (U.S.A.) que incorpora un conjunto de proyectos de diferentes universidades dirigidos específicamente a la integración de los sistemas de cálculos simbólico en el currículum de cálculo. Algunas de las Universidad o centros educativos que están incorporados a esta fundación son: Rolling College (Florida) , Rensselaer Polytechnical Institute (New York); University of Rhode Island (Kingston); University of Illinois (Illinois), University of Iowa (Iowa); Iowa State University (Iowa); Nazareth College Rochester (New York); Duke University Durham (NC), Purdue University (West Lafayette, IN), Bowdoin College (Brunswick, ME), University of Michigan (Dearborn, MI), University of Pittsburgh (Pennsylvania).

Poner en marcha una didáctica basada en CAS debe tener en cuenta estas cuestiones iniciales que acabamos de analizar, lo cual obliga en primer lugar a elegir el programa concreto de cálculo simbólico que mejor se adapte a las características de nuestra implementación. La segunda cuestión consiste en adaptar el programa de cálculo simbólico a las necesidades de nuestro curso, es decir, elaborar una estrategia didáctica basada en una serie de principios generales que se concrete en un conjunto de tareas o actividades para el alumno. En tercer lugar, estas tareas deberán estar adaptadas a los contenidos de la materia que el profesor deberá impartir.

Entre los programas de cálculo simbólico que mejor pueden adaptarse a las características de nuestra implementación, se encuentra el programa DERIVE. En el siguiente apartado analizaremos las características de este programa y justificaremos los motivos por los cuales consideramos que DERIVE es el programa de cálculo simbólico que mejor se adapta a los objetivos de nuestra investigación.

I.2.7. El sistema de cálculo algebraico que utilizaremos: DERIVE.

DERIVE es uno de los numerosos sistemas de cálculo algebraico existentes en el mercado (Mathematica, Mapple, DERIVE, Matlab, Macsyma, Aljabr, Axiom Expressionist, Form, GNU-Calc, Reduce,...). Como acabamos de ver en el apartado anterior los CAS tienen numerosas ventajas educativas que nos pueden permitir introducir los ordenadores en el aula con el fin de mejorar la calidad educativa y el aprendizaje de nuestros alumnos. En este sentido DERIVE es un programa que puede permitirnos utilizar adecuadamente todas las ventajas educativas que hemos enumerado en la sección anterior.

Los criterios que han motivado la elección de este programa se han basado fundamentalmente en dos ideas básicas:

- En primer lugar, el sistema de cálculo algebraico elegido, **no debe suponer un obstáculo inicial para el alumno**, es decir que debe ser un programa sencillo en su manipulación de tal forma que pueda utilizarse de fácilmente por los alumnos sin necesidad de invertir demasiado tiempo en el estudio de su manejo.
- En segundo lugar el programa debe tener cierta **experiencia previa en el ámbito internacional**, en cuanto a su implantación en las metodologías del aula de Matemáticas.

Partiendo de las ideas anteriores podemos exponer un conjunto de motivos que fundamentan nuestra elección basados en características, a nuestro juicio, fundamentales [Chumillas, 1992], [Amillo-Guadalupe, 1991], [Ortega-Sanz-Vázquez, 1998], [Llorens, 1993], [Salter-Gilligan,1991]; [Kutzler, 1999], [Rebolo, 1992]:

1) DERIVE tiene un <u>entorno de trabajo muy sencillo</u>, ya que permite ejecutar los comandos vía menús o a través de la edición de comandos de fácil manipulación y con una sintaxis muy parecida a la utilizada en el lenguaje matemático.

2) El <u>aprendizaje del programa es fácil</u>, no ofrece una complejidad excesiva. Así, en un corto espacio de tiempo, podemos aprender a utilizar los elementos básicos del programa, sin necesidad de invertir muchas horas en la lectura del manual. Podíamos incluso afirmar que la sencillez de su entorno de trabajo facilita que en muchas ocasiones se pueda producir un aprendizaje autodidacta del programa, realizando tan sólo manipulaciones y pruebas a iniciativa del propio usuario.

3) <u>Su portabilidad y pocos requerimientos de hardware</u>. Es un programa que (en la versión 3.13) cabe en un diskette y requiere tan solo 512K de memoria RAM y una CPU del tipo 8088 en adelante; siendo por tanto ejecutable en la mayoría de los PC's existentes actualmente.

4) La efectividad demostrada del programa. En algunos de los estudios comparativos que se han realizado, las comparaciones entre los sistemas DERIVE, MAPLE y MATHEMATICA han mostrado unos resultados sumamente positivos para DERIVE. Así en [Simon, 1990] tras la ejecución de 20 problemas generales, resueltos de forma óptima por las empresas suministradoras de estos sistemas, los tiempos de resolución que obtuvo DERIVE(versión 3.13) con relación a MAPLE y MATHEMATICA fueron muy competitivos; y se puede decir que considerando los pocos requerimientos de hardware, DERIVE es una excelente herramienta para la enseñanza de las Matemáticas. Del mismo modo en [Wester,1994] se hace una revisión de seis sistema (Axiom, DERIVE, Macsyma, Maple, Mathematica y Reduce) y aunque de todos ellos el mejor era Maple, podemos comprobar que nuevamente DERIVE se comportaba de forma extraordinaria si tenemos en cuenta sus reducidas dimensiones. Recientemente en [Hervas et al, 2000] se vuelve a realizar una comparativa entre los programas DERIVE 3.01, Maple V (Rel 3) y Mathematica (Versión 2.2.3). Entre las conclusiones más significativas del estudio destacan por un lado que DERIVE presenta un porcentaje de errores nulo; de tal forma que el sistema DERIVE está diseñado para mostrar la no-existencia de solución de un ejercicio antes que ofrecer una solución errónea, al menos así se ha podido constatar en la comparación que se ha hecho con Maple y Mathematica, circunstancia que convierte nuevamente a DERIVE un programa adecuado para la experiencia didáctica que pretendemos realizar. Así pues, podemos afirmar que la relación prestaciones y requisitos físicos convierten a DERIVE en el mejor programa de cálculo simbólico de los existentes en el mercado [Rebolo, 1992].

Por otro lado DERIVE es un programa que está suscitando experiencias didácticas muy variadas en diferentes campos de la matemática. Se ha utilizado como simulador del lenguaje de la tortuga [Lechner et al, 1997], también se utiliza como herramienta capaz de facilitar la experimentación de los principales conceptos del cálculo, es decir, en la enseñanza del cálculo con ayuda del asistente matemático [Watkins, 1992], [Leinbach, 1991], [Llorens, 1993], [Monaghan, 1993]; en la enseñanza del álgebra lineal [Chumillas, 1991], [Llorens, 1993], [Salter-Gilligan, 1991], [Auer-Muller, 1990]; como herramienta experimental en laboratorios de Matemáticas [Villén, 1991], [Miñano, 1991], [Benítez y otros, 1996], [Leinbach, 1991]; en geometría analítica [Aspetsberger,1992]; y en numerosas áreas de las Matemáticas.Además este sistema de cálculo algebraico se ha venido implantando en numerosos centros educativos de todo el mundo. Así en 1991 el Ministerio de Educación de Austria equipó todas las escuelas de secundaria del país con DERIVE; en 1992, el Ministerio de Educación de Francia incorporó DERIVE en la lista de software recomendado para las escuela; en 1993 las autoridades educativas del sur de Tirol (Italia) equiparon a todas las escuelas alemanas con DERIVE; en 1995 la ciudad de Hamburgo (Alemania) equipó todas sus escuelas con DERIVE; en 1997, el Ministerio de Educación de Eslovenia incorporó el programa en las escuelas de secundaria; en el mismo año el Ministerio de Educación de los Emiratos Árabes adquirió este sistema para todas las escuelas; en 1998 el Ministerio de Educación de Bélgica recomendó a todas las escuelas el uso de DERIVE para la enseñanza de las Matemáticas; en ese mismo año todas las escuelas de secundaria de Estocolmo (Suecia) fueron equipadas con DERIVE. Pero no sólo se ha incorporado a la enseñanza secundaria, también existen numerosas universidades que han incorporado el programa a sus experiencias educativas, entre otros centros podemos destacar: University of Linz (Institute for Industrial Mathematics, Austria), University of Vienna Computational Mathematic (Austria), Universidad de Paderborn (Alemania), Liverpool John Moores University (Gran Bretaña), North Carolina University (EE UU), University of South Carolina (EE.UU.), California State University (EE.UU.), National Tsing Hua University (Taiwan), University of Guelph (Canadá), Jackson State University (EE.UU.), University of Cincinnati (EE.UU.), Gettysburg College (EE.UU.), University of Portland (EE.UU.), Portland State University (EE.UU.), University of Northern Colorado (EE.UU.), St. Joseph's University (Philadelphia, EE.,UU.), Salisbury State University (EE.UU.), Dawson College (Montreal, Canadá), Southwetern Oklahoma University (EE.UU.), Universidad Politécnica de Madrid, Universidad Politécnica de Valencia,.Universidad de Cádiz, Universidad Autónoma de Madrid, Universidad Complutense de Madrid,....

Este sistema fue diseñado en 1985 por Softwarehouse en Honolulu [DERIVE, 1990] y proviene de la evolución de uno de los primeros sistemas de cálculo algebraico diseñados para PC's: MUMATH. DERIVE, junto con Maple y Mathematica forman parte del grupo de programas de cálculo simbólico más comercializados actualmente. Recientemente DERIVE ha sido adquirido y anexionado a los producto de Texas Instruments en agosto del año 2000. De hecho el 6 de agosto de 2000 la empresa Texas Instruments lanzó un comunicado en la red indicando dicha circunstancia. Después de las colaboraciones mantenidas entre Texas Instruments Soft Warehouse con la incorporación de la tecnología CAS en las calculadoras TI-89 y TI-92 para la educación matemática, se ha producido una fusión que puede ser muy fructifera según palabras de los máximos responsables de ambas compañías, de hecho según palabras de Dave Stoutemyer, presidente y co-fundador de Soft Warehouse *"la fuerte presencia de las calculadoras TI en el mercado de la tecnología educativa permitirá a DERIVE enriquecerse de ese potencial"*

El sistema DERIVE proporciona al usuario tres formatos de trabajo en forma de ventanas:

a) VENTANA DE ALGEBRA; utilizada para introducir y manipular expresiones algebraicas

b) VENTANA 2D, que nos permite elaborar gráficas de funciones de una variable y curvas planas.

c) VENTANA 3D, utilizada para realizar representar superficies en el espacio tridimensional y gráficas de funciones de dos variables.

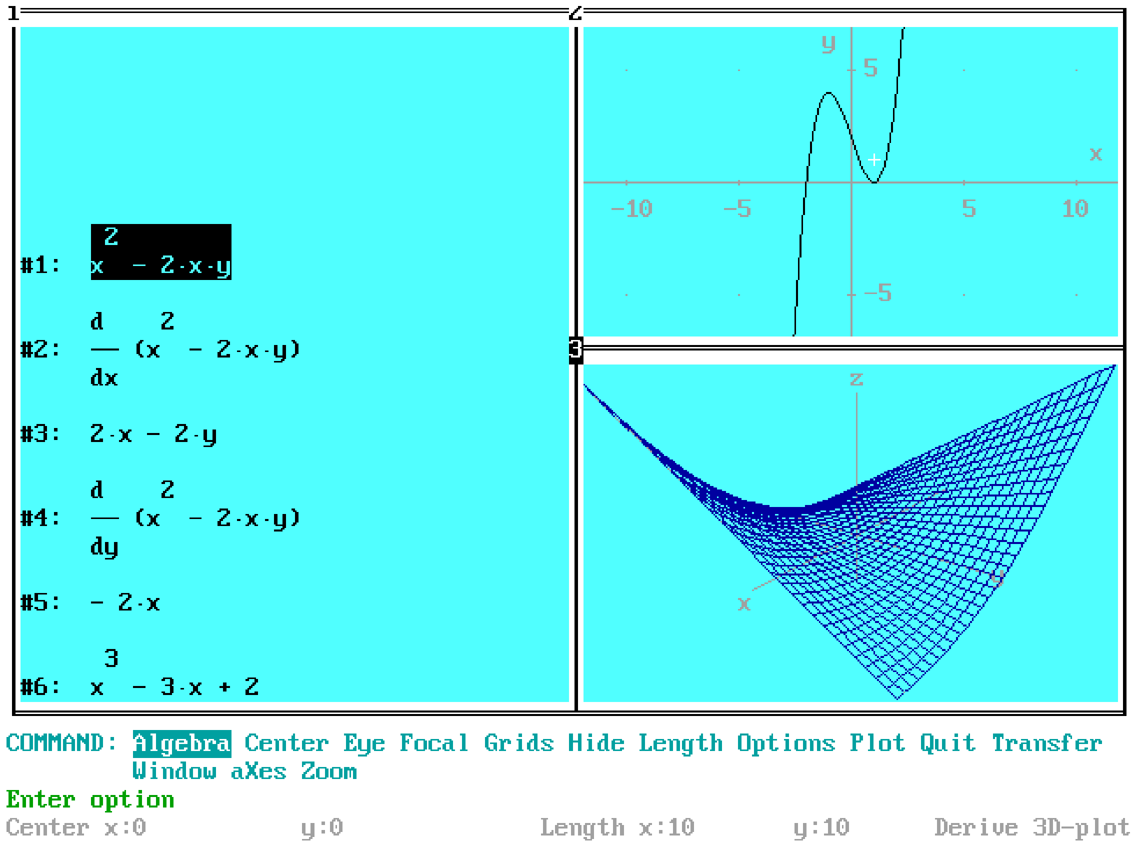


Figura 3. Ejemplo de los formatos de trabajo que permite utilizar DERIVE:

1. ventana de álgebra, 2. ventana 2D, 3. ventana 3D.

Gracias a estos contextos, DERIVE facilita la realización de operaciones matemáticas: basta con introducir cierta expresión o un conjunto de expresiones, aplicar sobre ésta un comando y automáticamente se obtendrán nuevas expresiones o representaciones gráficas en dos o tres dimensiones, en función del tipo de la expresión utilizada y del tipo de operación que deseemos realizar con ella. Los tres contextos de trabajo llevan asociados una barra de menús que permite aplicar una serie de comandos básicos. Este sistema de matemática computacional diseñado en Hawai permite realizar computaciones simbólicas y numéricas, y además facilita las representaciones gráficas en 2 y 3 dimensiones.

DERIVE se comercializa en dos formatos, uno que funciona bajo Windows (a partir de las versiones 4.xx) y otro que funciona bajo MS-DOS. Dentro de las versiones para MS-DOS existían dos tipos de programa por un lado las versiones estándar DERIVE-Classic y la versión extendida DERIVE-XM (eXtended Memory versión) que utilizaban la memoria extendida del sistema operativo. En la versión 4.xx de DERIVE, estas dos formas de uso vienen combinadas de tal forma que el mismo programa detecta qué sistema puede soportar el equipo de tal forma que, si nuestro PC tiene 612K de memoria y utiliza un procesador inferior al 386 entonces ejecuta la versión DERIVE "Classic" que funciona con 16 bits. Si por el contrario lo estamos ejecutando en un procesador 386 o superior con 2MB o más de memoria extendida, el programa se ejecutará automáticamente en el modo de 36bits (DERIVE XM). A pesar de que actualmente ya se está comercializando la versión 5.03 que incluye numerosas novedades como es la posibilidad de incluir gráficas, comentarios y textos, y otros ficheros en los denominados documentos de trabajo (ficheros .dfw) nosotros utilizaremos la versión DERIVE 3.13 Classic que funciona bajo formato MS-DOS y que requiere una memoria de 512K. Aunque, puede considerarse una versión un poco anticuada, hemos creído conveniente utilizar esta versión por su elevada PORTABILIDAD, característica que hemos expuesto anteriormente. Nuestro objetivo no es utilizar un sistema de cálculo simbólico MUY POTENTE, pues en ese caso estaríamos utilizando criterios de eficiencia en cuyo caso nos tendríamos que haber decantado por la última versión que está basada en el sistema WINDOWS, o incluso haber optado por otros programas más eficientes pero más complejos en cuanto a su aprendizaje. La idea de nuestra elección ya dijimos que se basaba en criterios centrados en la facilidad de aprendizaje y la portabilidad (cabe en un diskette), características que cumple sobradamente la versión 3.13 que acabamos de exponer.

Una vez motivada la elección de DERIVE como el sistema de cómputo algebraico a utilizar, y comentadas sus características generales, es necesario comentar las capacidades y ventajas que tiene el sistema respecto de todas las características que habíamos enumerado de forma general para los sistemas de cómputo algebraico y los ordenadores.

El quehacer matemático requiere dos operaciones fundamentales: INTERPRETACIONES y PROYECCIONES, éstas operaciones se traducen en las actividades de simbolización y abstracción. Un sistema de cálculo simbólico como DERIVE, permite utilizar múltiples sistemas de representación (algebraico, numérico y gráfico), posibilidades que pueden facilitar y favorecer la realización de este tipo de actividades mentales propias del quehacer matemático. Efectivamente, cuantos más sistemas de representación utiliza un alumno para dar significado a los hechos y conceptos matemáticos que manipula, mayor es el grado de fijación de significados en torno a los conceptos que se manipulan, es más, podríamos afirmar que con el uso de diferentes sistemas de notación o de representación para un mismo objeto cognitivo, mayor es el conocimiento que se adquiere de ese objeto cognitivo, en este caso un objeto matemático. Para traducir un mensaje o concepto de un sistema de representación (FUENTE) a otro sistema (DESTINO) se necesita realizar un análisis de los aspectos relevantes que constituyen ese objeto, así como sus relaciones, y establecer la correspondencia entre cada uno de los elementos constitutivos del objeto o hecho a representar con los elementos que constituyen el sistema de representación de destino [Bautista, 1994]. Esta traducción de un mismo concepto entre diferentes sistemas de representación permite que se establezca una "conversación interna" entre las diferentes representaciones del mismo hecho. Esta utilización de los sistemas de representación, proporcionados por el medio computacional, ofrece situaciones que favorecen el aprendizaje, ya que se utilizan sistemas básicos para desarrollar el pensamiento así como para interpretar, entender y relacionarse con el contexto social, físico y cultural. DERIVE sirve de soporte para la representación de los hechos y principios matemáticos a través de sus tres entornos de trabajo: algebraico, bidimensional y tridimensional; utilizando en el entorno algebraico sus dos posible representaciones simbólica y numérica. Así pues, un concepto que se muestra en diferentes enfoques admite un aprendizaje mas globalizado y profundo del mismo, por ello creemos que DERIVE puede servir como herramienta adecuada para potenciar estos procesos de simbolización y abstracción.

Por otro lado, recordemos que los sistemas de memoria que se utilizan en Matemáticas (memorias visual, semántica y literal) se pueden potenciar con el uso de este programa (nuevamente debemos considerar las tres opciones de representación del programa: algebraica, bidimensional y tridimensional). Cuando un alumno utiliza la memoria visual, está empleando una técnica que consiste en recordar ciertas figuras o el aspecto de las expresiones formales asociadas a un concepto o entidad matemática. Habitualmente, cuando utiliza como soporte el lápiz y papel, la memoria visual obtiene grandes resultados si se utilizan sistemas de NOTACIÓN similares. Utilizando DERIVE; el sistema de notación que se asociará con el proceso o concepto, será de carácter intermedio entre el sistema formal y abstracto, y el sistema de notación CERCANO al alumno. En ocasiones puede llegar a conseguirse que DERIVE sea ese sistema de notación CERCANO; que le permite asociar visualmente la operatividad simbólica con la propia operatividad del programa. Del mismo modo la memoria semántica y la memoria literal pueden verse favorecidas por este sistema intermedio: el que utiliza el propio lenguaje del programa. La forma de introducir expresiones en DERIVE; así como el sistema de simplificación empleado por el programa, muy cercano a la matemática formal, obliga al alumno a ir interpretando los procesos del programa, asociados todos ellos a procesos matemáticos formales pero quizás más manipulables por el alumno, ya que se trata de procesos tangibles visualmente en la pantalla, y que pueden manejarse a través del teclado mediante los comandos del sistema.

Habíamos comentado también que la RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS es un sistema metodológico a través del cual se pueden obtener aprendizajes significativos, es decir, aprendizajes que el alumno va construyendo a partir de sus conocimientos previos, motivado por un objetivo claro: la situación problemática, como elemento que debe motivar e incitar a la investigación y experimentación del alumno. En la enseñanza tradicional, la resolución de problemas, puede reducirse en numerosas ocasiones a la resolución de SITUACIONES PROBLEMÁTICAS TIPO, en cuyo caso, bajo nuestro punto de vista, convertimos la matemática en un conjunto de PROCEDIMIENTOS que los alumnos han de "almacenar", pero que podrían ser realizados perfectamente por una computadora. Inducir al alumno a la investigación y la experimentación es una tarea que podemos facilitar con el uso de DERIVE, porque nos permite, en un corto espacio de tiempo, resolver rutinas algebraicas no trascendentales para nuestro problema, pero que nos ofrecen resultados y experiencias sobre las cuales el alumno puede inducir, intuir, deducir y conjeturar sus propios resultados. En este sentido los CAS son herramientas muy útiles para la EXPERIMENTACIÓN y para facilitar la adquisición aprendizajes significativos, basados en la investigación y observación del alumno. Este uso experimental de las Matemáticas, tanto en el ámbito de operaciones algebraicas como en el ámbito de representaciones gráficas, es una ventaja accesible con DERIVE, circunstancia que en metodologías tradicionales no es posible, por el elevado tiempo que deberíamos invertir en las mismas. El programa debería utilizarse para que dediquemos menos tiempo en aquellos cálculos que consideremos rutinarios orientando nuestro tiempo a la realización de tareas de investigación, de análisis de resultados, y en definitiva a la resolución de problemas. Esto nos puede llevar a progresar en niveles superiores del pensamiento formal.

Por otro lado, cuando el alumno experimenta y manipula una situación matemática, desconocida inicialmente para él y por tanto problemática, el uso de DERIVE le va a permitir obtener una cierta AUTONOMÍA incitándoles, aunque sólo sea por curiosidad, a estudiar el planteamiento de la situación problemática incluso la búsqueda de soluciones. Asimismo, el uso de los ordenadores en un contexto de aula, puede potenciar un aprendizaje colaborativo en el trabajo en grupo, y una relación de comunicación con el compañero. Efectivamente esa experimentación de las Matemáticas por medio del sistema de cómputo algebraico y ayudado por el grupo de compañeros nos permite ir comparando observaciones, conjeturando, discrepando, en definitiva construyendo Matemáticas. El estudio de este aprendizaje colaborativo debe ser un elemento que debemos considerar en nuestro estudio ya que DERIVE puede propiciar contextos de aprendizaje colaborativo con unas características muy especiales.

Además, habría que añadir que el uso de DERIVE, primero por su carácter novedoso, y en segundo lugar por ser una herramienta que incita al trabajo individual o colectivo fuera del aula, puede crear el contexto adecuado para mejorar la actitud del alumno ante las Matemáticas, incidiendo nuevamente de forma positiva en su propio aprendizaje y en la enseñanza de esta disciplina.

Así pues, el uso de estas nuevas tecnologías nos permite presentar los conceptos y los principios matemáticos utilizando varios enfoques o entornos (algebraico, numérico y gráfico), ofreciéndonos de esta forma un tratamiento de los temas con múltiples perspectivas que facilitan una percepción más global de los contenidos. Hay que añadir que con estos sistemas de cálculo algebraico podemos ofrecer una panorámica más amplia de las Matemáticas, ya que el concepto se puede construir y aplicar de una manera inmediata. También hay que destacar que gracias a esta facilidad en la manipulación algebraica, los estudiantes pueden acceder a problemas que anteriormente estaban reservados únicamente a niveles superiores [Quesada, 1994]. Aunque, estos sistemas pueden estimular a los estudiantes en el quehacer matemático y les pueden facilitar los procesos de aprendizaje de las Matemáticas sin embargo es necesario destacar muy especialmente, el papel fundamental que juega la necesaria interacción entre programa, profesor y alumnos. Este trinomio es el verdadero protagonista de la actuación educativa y de los procesos de aprendizaje, en cuyas relaciones se concretan algunas de las ventajas de este programa. Son ventajas que será necesario investigar y optimizar al máximo si deseamos unos aprendizajes óptimos para nuestros estudiantes.

Tal como comentamos en el apartado anterior, todos estos contextos y situaciones, no son posibles sin un esquema metodológico claro sobre el cual vayamos introduciendo el programa DERIVE en el aula. Es por tanto necesario, desarrollar una estrategia didáctica sobre la cual podamos implementar, con la ayuda de DERIVE, tareas de enseñanza aprendizaje de la disciplina objeto de nuestro estudio: el álgebra lineal. Para ello necesitamos profundizar en las peculiaridades de este campo de las Matemáticas, así como ofrecer un estudio del significado y las implicaciones que conlleva una metodología educativa centrada en las tareas de enseñanza basadas en DERIVE.

En algunos estudios realizados sobre el uso de DERIVE para el desarrollo de asignaturas de Matemáticas [Miñano, 1991] se ha llegado a la conclusión de que DERIVE es una herramienta adecuada para desarrollar un programa de prácticas de Matemáticas en el ámbito universitario, de tal forma que el uso autónomo del programa por parte del estudiante fuera del plan de prácticas y el incremento de la motivación han sido algunos de los factores que han incidido de una manera más positiva en el rendimiento de los estudiantes a lo largo del curso.

Una vez que hemos situado la enseñanza de las Matemáticas en el contexto de las nuevas tecnologías, y muy en particular en el contexto de los programas de cálculo algebraico, vamos a analizar el campo de las Matemáticas en el que centraremos el estudio de nuestra tesis: el álgebra lineal. De esta forma podremos seleccionar y proponer las tareas de enseñanza para el álgebra lineal con el uso de DERIVE y de esta forma fijar las pautas de las tareas que configuran nuestra estrategia.

I.3. La enseñanza del Álgebra Lineal.

I.3.1. Elección del campo de las Matemáticas objeto de nuestro estudio: el álgebra lineal.

La “algebraización” de las Matemáticas, es decir, la influencia de las ideas y los métodos del álgebra en las Matemáticas son algunas de las características que configuran la matemática actual. Esta moda algebraica es un hecho fácilmente observable si se comparan textos de Matemáticas de años anteriores a la segunda guerra mundial, con los textos que aparecen a partir de los años sesenta. Aunque para muchos autores esta envoltura algebraica tiene un grave inconveniente cuando se usa en exceso (sobrecarga del formalismo que obscurece el contenido), sin embargo el álgebra es desde la antigüedad una de las partes esenciales de las Matemáticas, al igual que lo es la geometría: *“el álgebra no es otra cosa que la geometría escrita en símbolos, y la geometría es sencillamente álgebra expresada en figuras”* (Sofía Germain, siglo XIX). Además lo que sí parece ser aceptado universalmente es que la naturaleza de los objetos matemáticos es un hecho secundario, no importa mucho la forma en se presenten los resultados matemáticos, ya sea como un teorema de geometría pura o en forma de teorema algebraico: lo importante son las relaciones. Por ello el álgebra se ha definido como la ciencia de las operaciones algebraicas, efectuadas sobre los elementos de los distintos conjuntos utilizados en Matemáticas. Una de las ramas más importantes del álgebra moderna y que más aplicaciones encuentra en otras parcelas de la ciencia como la física, la estadística, la ingeniería, el análisis numérico, las ciencias sociales,... es el ÁLGEBRA LINEAL [Guzmán, 1994]. El motivo de su desarrollo fue el tratamiento de las ecuaciones lineales, y su principal creación es el espacio vectorial. Nuestra investigación se centra en la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal porque, a nuestro juicio, es un área de especial interés en el ámbito de los sistemas de cálculo algebraico debido fundamentalmente a cinco razones:

1) Es una rama de las Matemáticas con un elevado grado de abstracción, ya que es uno de los pilares del lenguaje algebraico, lo cual provoca un elemento de especial dificultad para el estudiante: **obstáculo del formalismo** [Sierspinska-Dreyfus-Hillel, 1999]..

2) La enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal está frecuentemente asociada con **procesos de aprendizaje memorístico** que ofrecen una pobre visión de estos contenidos, lo cual obliga a realizar una fuerte revisión de su concepción, encaminada a ofrecer una visión

más global y más profunda de la misma. Además, es muy frecuente que los conceptos del álgebra lineal se adquieran como formas sin contenido, es decir, un conjunto de relaciones simbólicas vacías de significado. De ahí, que los problemas algebraicos a veces carezcan del sentido necesario para la adquisición de un aprendizaje significativo.

3) Se han realizado numerosas experiencias didácticas encaminadas a mejorar la enseñanza del cálculo mediante el uso del ordenador con sistemas de cálculo algebraico, pero sin embargo, en este contexto, existen menos estudios y trabajos relacionados con el álgebra lineal.

4) El álgebra lineal **es uno de los primeros contextos matemáticos con los cuales se enfrenta cualquier alumno** (en algunos casos es la única experiencia matemática de toda su vida), circunstancia que configura esta parte de las Matemáticas como uno de los elementos y pilares básicos en la formación matemática de todo individuo.

5) Una de las asignaturas básicas de la mayor parte de las Ingenierías y de las Licenciaturas de las ciencias aplicadas, suele estar basada en contenidos de álgebra lineal. Efectivamente, **los contenidos básicos del álgebra lineal son el cimiento de una buena formación matemática para cualquier ingeniero o científico**.

Estas razones han motivado nuestra elección, que ofrece un reto muy importante a la hora de diseñar una cuidadosa estrategia didáctica, dada la trascendencia de sus contenidos y la dificultad de los mismos. Efectivamente, el álgebra lineal es una disciplina que basa gran parte de su contenido en la forma de las expresiones aritméticas, expresiones simbólicas que mediatizan un conocimiento más abstracto. Se trata por tanto de una disciplina que goza de un elevado grado de abstracción, en la que existe una cierta mediación semiótica del conocimiento de tal forma que podemos afirmar que "*los signos representan objetos que son signos*" [Sierspinska-Dreyfus-Hillen, 1999]. En consecuencia un conocimiento teórico adecuado del álgebra lineal está fuertemente ligado a la identificación de esos objetos abstractos bajo diferentes representaciones simbólicas, por lo que es muy importante saber distinguir entre aquellos objetos que pueden tener representaciones similares. Ese formalismo presente en el álgebra lineal es quizás el causante de un obstáculo muy frecuente que causa una de las principales dificultades para la enseñanza y aprendizaje de esta área de conocimiento. La utilización de los sistemas de cálculo simbólico en esta disciplina puede acercar y facilitar la enseñanza y aprendizaje de sus contenidos, ya que podremos presentar los conceptos a través de la multiplicidad de representaciones que ofrecen dichos sistemas; por otro lado la experimentación nos a va proporcionar un mayor acercamiento a dichos conceptos.

I.3.2. Breve historia del álgebra lineal.

El Álgebra Lineal es un área de conocimiento entroncada en uno de los grandes bloques temáticos de las Matemáticas: EL ÁLGEBRA. El álgebra lineal se centra en el estudio de las estructuras de los espacios vectoriales y las aplicaciones lineales y multilineales entre espacios vectoriales. Pero sin lugar a dudas, el corazón del álgebra lineal lo ocupa el estudio de los vectores y las matrices. El estudio de vectores comenzó esencialmente con el trabajo del gran matemático irlandés Sir William Hamilton (1805-1865). Su deseo de encontrar una forma para representar ciertos objetos en el plano y el espacio lo llevó a descubrir lo que el llamó *cuaterniones*. Ésta noción condujo al desarrollo de lo que ahora se llaman vectores. Mientras Hamilton vivió y durante el resto del siglo XIX hubo un debate considerable sobre la utilidad de los cuaterniones y vectores. A finales del siglo XIX el gran físico inglés Lord Kelvin escribió que los cuaterniones, *"aun cuando son bellamente ingeniosos, han sido un mal peculiar para todos aquellos que los han manejado de alguna manera y, los vectores... nunca han sido de la menor utilidad para ninguna criatura".* Pero Kelvin estaba equivocado. Hoy casi todas las ramas de la física clásica y moderna se representan mediante el lenguaje de vectores. Los vectores también se usan cada vez con más frecuencia en las ciencias biológicas y sociales.

Históricamente las primeras teorías del Álgebra Lineal estaban relacionadas con las ecuaciones lineales, en temas relacionados con la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales. A raíz de las investigaciones enmarcadas en torno a los sistemas de ecuaciones lineales surgió el concepto de DETERMINANTE. Los determinantes aparecieron en la literatura matemática antes que las matrices, a pesar de que el término MATRIZ fuera usado por primera vez por Joseph Sylvester, cuya intención era que su significado fuese "madre de los determinantes". Algunos grandes matemáticos de los siglos XVIII y XIX ayudaron a desarrollar las propiedades de los determinantes. Pero la mayoría de los historiadores creen que la teoría de los determinantes tuvo su origen en el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), quien junto a Newton, fue el coinventor del cálculo. Leibniz usó los determinantes en 1693 en referencia a los sistemas de ecuaciones lineales simultáneos. Leibniz consideró sistemas de tres ecuaciones lineales con 2 incógnitas, eliminó las incógnitas y obtuvo un determinante al que llamó el resultante del sistema. Sin embargo, algunos piensan que un matemático japonés Seki Köwa hizo lo mismo casi 10 años antes. Pero el contribuyente más prolífico a la teoría de determinantes fue el matemático francés

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Cauchy escribió una memoria de 84 páginas en 1812, que contenía la primera prueba del teorema det AB = det A det B. En 1840 demostró la propiedad de Laplace y en 1840 definió la ecuación característica de la matriz A como la ecuación polinomial $\det(A-\lambda I)=0$. Pero la utilización profunda de la teoría de determinantes en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales fue debida a James Sylvester (1814-1897).

En 1750 se obtiene la REGLA DE CRAMER para resolver sistemas de ecuaciones lineales con una peculiaridad especial: el número de ecuaciones lineales debía coincidir con el número de incógnitas. En 1849 se planteó el método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes numéricos, método más simple que el anterior. Como resultado del estudio de los sistemas de ecuaciones lineales y sus determinantes surgió el concepto de matriz. Fue en 1877 con la noción de rango de matriz propuesta por G. Fröbenius, cuando se consiguieron explicitar las condiciones de compatibilidad de los sistemas de ecuaciones lineales así como la determinación de estos sistemas. Herman Grassmann (1809-1877) introdujo los conceptos de subespacio, generadores, dimensión y suma, así como las fórmulas para los cambios de coordenadas. El concepto y el nombre de matriz fueron introducidos por James Sylvester, y curiosamente más tarde como hemos comentado la noción de determinante. La construcción de la teoría general de los sistemas de ecuaciones lineales culminó a finales del siglo XIX. Fue precisamente en 1888 cuando Peano definió de forma axiomática una estructura que relacionaba toda la teoría de matrices, determinantes y el estudio de sistemas de ecuaciones: la estructura algebraica de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales. Después del proceso de axiomatización de Peano, centrado en los espacios vectoriales reales, el matemático alemán Otto Töplitz (1881-1940) generalizó los principales teoremas y resultados de los espacios vectoriales reales sobre los espacios vectoriales generales en cuerpos cualesquiera, dando lugar a lo que hoy se conoce con el nombre de álgebra lineal y que está basada en la estructura de espacio vectorial.[Enciclopedia, 1993].

Si bien en los siglos XVIII y XIX como hemos comentado el contenido principal del álgebra lineal lo constituían los sistemas de ecuaciones lineales y la teoría de los determinantes, la posición central en el siglo XX fue ocupada por el concepto de espacio vectorial y las nociones de transformación lineal y de función lineal, bilineal y polinial en un espacio vectorial.

Actualmente, un espacio vectorial o lineal sobre **un cuerpo K cualquiera** se define como el conjunto de elementos V (denominados vectores), en el que se definen dos operaciones:

- Una operación interna, llamada SUMA DE VECTORES

  $+ : V\mathrm{x}V \rightarrow V$

- Y una operación externa, llamada PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR (el escalar es un elemento del cuerpo K)

  $. : V\mathrm{x}K \rightarrow V$

que satisfacen las siguientes propiedades:

a) Respecto de la SUMA DE VECTORES, se cumple que para cualesquiera vectores $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$

   a.1) Propiedad conmutativa: $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

   a.2) Propiedad asociativa: $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

   a.3) Existencia de elemento neutro: existe un vector $\mathbf{0}\in V$ tal que $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{0}$

   a.4) Elemento opuesto: todo vector $\mathbf{u}$ tiene un opuesto $-\mathbf{u}\in V$ tales que $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

b) Respecto del PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR, se cumple que para cualesquiera $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ y cualesquiera escalares $\alpha,\beta\in K$ se verifican:

   b.1) Propiedad distributiva respecto de la suma de vectores: $\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\alpha\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v}$

   b.2) Propiedad distributiva respecto de la suma de escalares : $(\alpha+\beta)\mathbf{u}=\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{u}$

   b.3) Propiedad pseudiasociativa: $(\alpha\beta)\mathbf{u}=\alpha(\beta\mathbf{u})$

   b.4) Existencia de elemento unidad: existe un elemento $\mathbf{1}\in K$ tal que $\mathbf{1u}=\mathbf{u}$.

Cuando los cuerpos conmutativos que generaban estas nuevas estructuras algebraicas fueron abandonados en beneficio de cuerpos no necesariamente conmutativos o de anillos, se llegó a la noción de módulo, que generaliza la teoría de los espacios vectoriales.

El proceso de axiomatización al que fueron sometidos los contenidos del álgebra lineal permitieron identificar relaciones muy valiosas entre los estudios de cálculo matricial y la estructura de espacio vectorial y sus aplicaciones, generando en este proceso de intercambio, como en todo proceso de axiomatización, un sustento matemático muy consolidado pero a la vez, con un grado de abstracción bastante elevado.

Actualmente esta rama de las Matemáticas se ha convertido en una de las principales aplicaciones del álgebra en las diversas ramas de la Matemática y de la Física.

I.3.3. El álgebra lineal en el currículum español de la enseñanza primaria y secundaria.

La importancia de las Matemáticas en el currículo español actual es un hecho comprobable en el desarrollo curricular de las dos etapas de enseñanza preuniversitarias: Educación Primaria y Educación Secundaria (Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato)

En la etapa inicial de formación de los alumnos (**Primaria**), las Matemáticas adquieren tres aspectos cualitativos muy importantes: **formativo, funcional e instrumental.** Dado que en estos primeros años los conceptos y procedimientos Matemáticos, por su grado de formalización, abstracción y complejidad, escapan a las posibilidades de comprensión de los alumnos, en esta etapa el punto de partida del proceso de construcción de conocimiento matemático ha de basarse en la experiencia práctica y cotidiana que poseen los niños y niñas de esta edad. A partir de las relaciones entre las propiedades de los objetos tangibles, de las operaciones que se realizan de forma intuitiva y en definitiva a partir de la realidad y experiencia concreta del alumno, se irán adquiriendo las primeras experiencias matemáticas. Inicialmente estas experiencias matemáticas son de carácter intuitivo, muy ligadas a la manipulación de objetos concretos y a la actuación sobre situaciones particulares. Pero este tipo de experiencias van a ser el punto de partida de la abstracción y de la formalización.

Aunque los alumnos en este estadio educativo pueden no llegar a comprender plenamente algunos conceptos y procedimientos matemáticos, sin embargo, éstos pueden cumplir plenamente las funciones que exige la etapa. El dominio funcional de estrategias básicas de cómputo, de cálculo mental, de estimación de resultados y medidas, y el uso de la calculadora constituirán los procedimientos básicos que deberán adquirir los alumnos en este estadio educativo. También deberán ser capaces de valorar y comprender positivamente el uso del conocimiento matemático para la resolución de problemas concretos.

En el campo del álgebra lineal, podemos observar que no existen contenidos específicos de esta área de conocimiento, ya que se trata una etapa de fundamentación, con cuatro grandes bloques temáticos [MEC, 1992-a]:

1. Números y operaciones. En este bloque se estudian los números naturales, fraccionarios y decimales, las relaciones entre estos conjuntos de números, su aplicación en actividades de contar, medir, ordenar y las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. También se estudian en este bloque los números positivos y

negativos, números cardinales y ordinales, la numeración romana y el sistema de numeración decimal.

2. La medida. Se estudian las unidades de medida no convencionales, observándose la necesidad de utilizar unidades de medida convencionales del sistema métrico decimal. También se estudiarán unidades de medida de tiempo, monetarias y de medida de ángulos.
3. Formas geométricas y situación en el espacio. Se adquieren los principales conceptos geométricos de paralelismo y perpendicularidad. Se estudian las figuras planas y los cuerpos geométricos más importantes. También se adquieren conocimientos y destrezas para la representación de puntos en sistemas de coordenadas cartesianas, y el reconocimiento de planos, mapas y escalas gráficas.
4. Organización de la información. En este último bloque temático los alumnos se iniciarán en la representación gráfica de funciones, en la interpretación de gráficas estadísticas como los bloques de barras, pictogramas y también estudian la media aritmética y moda de experimentos aleatorios.

Como puede observarse, el bloque que guarda mayor relación con el álgebra lineal es el primero, dedicado a los números y operaciones. En el currículo oficial de Primaria, el MEC establece como contenidos conceptuales de este bloque: "*9. Correspondencia entre lenguaje verbal representación gráfica y notación numérica"* por otro lado entre los contenidos procedimentales podemos encontrar *"8. Representación matemática de una situación utilizando sucesivamente diferentes lenguajes (verbal, gráfico y numérico) estableciendo correspondencia entre los mismos"*. Estos dos contenidos muestran los principios del álgebra, como área dedicada al estudio de las expresiones algebraicas, sistema de representación simbólica fundamental en las Matemáticas, sentándose así las bases de los futuros contenidos específicos del álgebra lineal.

En el transcurso de la **E.S.O.,** los alumnos prosiguen el proceso de construcción del conocimiento matemático que ha alcanzado cotas de desarrollo considerables al término de la Educación Primaria. Se introducen nuevas relaciones, conceptos y procedimientos, ampliando el campo de reflexión matemática; se introducen nuevos algoritmos y se incrementa la complejidad de algoritmos conocidos y sobre todo se profundizan las nociones y procedimientos matemáticos introducidos en el transcurso de la Educación primaria. El proceso de construcción del conocimiento matemático que parte desde las experiencias matemáticas intuitivas propias de la Educación Primaria hasta el conocimiento altamente estructurado ha de pasar por unas etapas intermedias de abstracción, simbolización y formalización a lo largo de la E.S.O. Este proceso es posible gracias a las nuevas capacidades cognitivas que van apareciendo al inicio de la adolescencia. Sin embargo no debemos olvidar que los aspectos más abstractos, formales y deductivos del mismo siguen estando a menudo fuera de las posibilidades de comprensión de los alumnos incluso en los últimos tramos de la E.S.O. El objetivo fundamental de esta etapa debe ser que todos los alumnos adquieran los conocimientos necesarios para desenvolverse como ciudadanos capaces de ejercer sus derechos y deberes en una sociedad que incorpora cada vez más a su funcionamiento, a sus actividades y a su lenguaje ciertos aspectos matemáticos, conocimientos que se consideran imprescindibles para satisfacer las necesidades matemáticas habituales de un ciudadano adulto en la sociedad actual y futura. No obstante el desarrollo de conocimientos debe garantizar en toda circunstancia un ajuste adecuado con las opciones profesionales o académicas que se ofertan al término de la E.S.O. Así pues la Educación Secundaria Obligatoria desde el punto de vista de las Matemáticas han de desempeñar de forma equilibrada e inseparable:

(a) Un papel FORMATIVO básico de las capacidades intelectuales, reforzando el uso del razonamiento empírico-inductivo en paralelo con el uso del razonamiento deductivo tanto en lo que concierne a la adquisición de conceptos y procedimientos como a sus aplicaciones así como la resolución de problemas y la realización de investigaciones;

(b) Un papel APLICADO y FUNCIONAL que posibilite al alumno sus conocimiento fuera del ámbito escolar, donde debe tomar decisiones.

(c) y un papel INSTRUMENTAL, en cuanto a que se convierten en el armazón a través del cual se formalizan conocimientos de otras materias.

Este triple papel debe desarrollarse bajo las hipótesis de que la educación matemática tiene como protagonista fundamental el proceso de construcción empírica e inductiva del conocimiento matemático.

Así pues partiendo de estas consideraciones, que encuadran una visión constructivista del conocimiento matemático, y de las funciones educativas que se tienen en cuenta en la educación obligatoria, podemos decir que la educación matemática en la educación secundaria se fundamenta en tres PRINCIPIOS BÁSICOS [MEC, 1992-b]:

1) Que las Matemáticas se han de presentar a los alumnos y alumnas como un cuerpo doctrinal fruto de la evolución presente y futura, lo cual obliga a resaltar enormemente sus aspectos inductivos y constructivos del conocimiento, y no sólo sus aspectos deductivos.

2) Que es necesario relacionar los contenidos matemáticos con la experiencia propia de los alumnos, contextualizando a través de la resolución de problemas la experiencia inmediata del alumno.

3) La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ha de tener tres objetivos básicos:

i. establecer destrezas cognitivas generales: PAPEL FORMATIVO.
ii. aplicación FUNCIONAL en la vida cotidiana.
iii. valor INSTRUMENTAL.

Así pues en el transcurso de la E.S.O., los alumnos prosiguen un proceso de construcción del conocimiento matemático que ha alcanzado ya niveles considerables de desarrollo al finalizar la educación primaria. En especial en estos años el desarrollo cognitivo de los alumnos les va conduciendo a la posibilidad de realizar razonamientos de tipo formal, lo cual va asegurando niveles intermedios de abstracción, simbolización y formalización. En este nuevo escenario de capacidades, el currículum básico de la E.S.O. en el área de Matemáticas, incluye contenidos más generales entre los que deben destacarse los procedimiento o modos de saber hacer. Dentro de estos contenidos fundamentales el uso de los diferentes lenguajes matemáticos y en especial del lenguaje algebraico se convierte en uno de los contenidos claves del área. Si centramos nuestra atención en el álgebra lineal, podemos observar como uno de sus objetivos generales es la construcción de unas bases sólidas para los principales conceptos de éste área de conocimiento, en particular al que se refiere a *"la incorporación al lenguaje y modos de argumentación habituales de las distintas formas de expresión matemática (algebraica)"*. Así pues el lenguaje algebraico se convierte en uno de los contenidos conceptuales básicos del bloque dedicado a *"1. Números y operaciones: significados, estrategias y simbolización"*. En cuanto a los procedimientos relacionados con el álgebra lineal, también dentro de este bloque temático, debemos señalar tres procedimientos muy importantes:
"1. Interpretación y utilización de los números, las operaciones y el lenguaje algebraico en diferentes contextos, eligiendo la notación más adecuada para cada caso. .....
....4. Formulación verbal de problemas numéricos y algebraicos. ....
...14. Resolución de ecuaciones de primer gado por transformación algebraica y de otras ecuaciones por métodos numéricos y gráficos".

En el cuarto curso de la E.S.O. los alumnos pueden elegir entre dos opciones que en general comparten la mayor parte de sus contenidos en el área de Matemáticas, aunque difieren en los enfoques: la denominada Opción A tiene un carácter más terminal, por lo que limita la utilización de representaciones simbólicas, a diferencia de lo que sucede con la Opción B que proporciona más importancia a los aspectos formales asignando así mayor peso al uso de los lenguajes simbólicos. Por este motivo la posibilidad de utilizar expresiones simbólicas se amplía con el manejo de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, lo que lleva consigo la posibilidad de enfrentarse a problemas que requieren destrezas de resolución algebraica. También, dentro de la Opción B se encuentra la resolución algebraica de las ecuaciones de segundo grado. Con todo este pequeño resumen, podemos observar que en la E.S.O. se prepara el sustento algebraico básico que va a permitir al alumno enfrentarse con el lenguaje algebraico propio del álgebra lineal, permitiéndole por un lado resolver problemas de la vida cotidiana por medio de la simbolización a través de ecuaciones de primer grado, sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y en algunos casos de ecuaciones de segundo grado. Si revisamos los dos ciclos de esta etapa educativa, observamos que en el primer ciclo los aprendizajes relacionados con la utilización del lenguaje algebraico van encaminados a iniciar a los alumnos en la interpretación de relaciones sencillas expresadas mediante tablas, dedicando el segundo ciclo a las destrezas relacionadas con las transformaciones de expresiones algebraicas sencillas y a la simbolización de relaciones cuantitativas variadas [MEC, 1993]

El **Bachillerato**, según la LOGSE, *"proporcionará a los alumnos una madurez intelectual y humana, así como los conocimientos y habilidades que les permitan desempeñar sus funciones sociales con responsabilidad y competencia. Asimismo, les capacitará para acceder a la formación profesional de grado superior y a los estudios universitarios"*. Se trata por tanto de una etapa con una finalidad doble: por un lado completar una formación general a los individuos que la cursan y por otro la finalidad de orientar y preparar a los alumnos para los estudios superiores. Dentro de estas finalidades generales del Bachillerato, si observamos las capacidades que pretende desarrollar en las que puede intervenir el área de Matemáticas podemos señalar tres:

".... c) analizar y valorar críticamente las realidades del mundo contemporáneo y los antecedentes y factores que influyen en él. d) Comprender los elementos fundamentales de la investigación del método científico .... g) Dominar los conocimientos científicos y tecnológicos fundamentales y las habilidades básicas propias de la modalidad...".

La organización de esta etapa en tres tipos de materias: comunes, propias de modalidad y optativas, permiten una formación más especializada; preparando y orientando al alumno hacia sus estudios posteriores o bien hacia la actividad profesional. Esta especialización propia del Bachillerato se plasma en cuatro grandes modalidades:

- Artes
- Ciencias de la Naturaleza y de la Salud
- Humanidades y Ciencias Sociales
- Tecnología.

Modalidades que permiten atender a una diversidad de intereses, capacidades y actitudes que poseen los jóvenes de estas edades. Las Matemáticas se incorporan al bloque de materias propias de modalidad, contribuyendo por tanto a obtener una formación más específica. Éste área de conocimiento está presente únicamente en las modalidades de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, Tecnología y Humanidades y Ciencias Sociales, aunque de forma diferenciada en cuanto a contenidos y profundidad según las diferentes necesidades de cada modalidad.

En la modalidad de Ciencias Naturales y de la Salud, existe una asignatura de "Matemáticas" en primer curso, y en segundo se ofrece la asignatura "Matemáticas II" para las dos opciones Ciencias o Ingeniería y Ciencias de la Salud.

En la modalidad de Tecnología se oferta la asignatura "Matemáticas I" en primer curso y la asignatura "Matemáticas II" en segundo curso de la Opción 2: Ciencias o Ingeniería.

Por último en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales la asignatura "Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales" se oferta en la Opción 2: Ciencias sociales y en segundo curso únicamente aparece la asignatura "Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II" como una optativa específica de la Opción 3: Administración y Gestión.

Estas tres modalidades del Bachillerato en las que aparece la asignatura de Matemáticas tendrán que atender la triple finalidad formativa, orientadora y preparatoria en relación a las bases Matemáticas necesarias en cada modalidad. Al finalizar la E.S.O. los alumnos han adquirido cierto grado de pensamiento abstracto formal, capacidad que deberán consolidar en el Bachillerato. En este sentido las Matemáticas son una de las materias que contribuirán de forma decisiva en la consolidación de esta capacidad fundamental del individuo.

Si analizamos los contenidos de álgebra lineal presentes en las diferentes asignaturas podemos observar lo siguiente:

- En la asignatura "Matemáticas" de primer curso en las modalidades de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y de Tecnología, la parte dedicada a contenidos de álgebra lineal está situada en el bloque dedicado a ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA, y en concreto en un capítulo dedicado a los sistemas de ecuaciones lineales y el método de Gauss. En este capítulo se realiza un repaso de las ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales; centrando la atención sobre los sistemas de tres ecuaciones. Para resolver estos sistemas se utilizan los tres métodos de igualación, reducción y sustitución, poniendo más énfasis en el método de reducción o de Gauss.
- En la asignatura "Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales" de la modalidad de Humanidades y Ciencias sociales, la parte dedicada a álgebra lineal se encuentra en el bloque dedicado a ÁLGEBRA, y en particular en un capítulo dedicado a los sistemas de ecuaciones lineales y el método de Gauss. En este capítulo se realiza un repaso a los sistemas de ecuaciones lineales de dos y tres ecuaciones y su generalización a otros sistemas. El método de resolución que se aplica es el de reducción o de Gauss. En este tema se profundiza más que en la asignatura "Matemáticas" de 1º de las otras modalidades porque pueden ser las últimas matemáticas que estudien los alumnos en la

modalidad ya que en el curso siguiente pueden elegir la 2ª Opción de Humanidades en la que no se ofrecen asignaturas de Matemáticas.

I.3.5. El álgebra lineal en la Universidad española.

El estudio del álgebra lineal hace tan sólo unos treinta y cinco años estaba confinado en las Licenciaturas de Matemáticas y Físicas, y en aquellas que necesitaban conocimientos de la teoría de matrices para trabajar en áreas técnicas como Estadística Multivariada. Hoy en día el álgebra lineal está presente en numerosos estudios universitarios, debido fundamentalmente al aumento general de las aplicaciones Matemáticas en áreas que por tradición no son de tipo técnico y por las aplicaciones originadas por la aparición de los computadores de alta velocidad. Aplicar la multiplicación de matrices en temas el contagio de una enfermedad, el modelo insumo-productor de Leontieff en la economía, la teoría de gráficas, la aproximación por mínimos cuadrados o modelos de crecimiento de población son algunos de los múltiples ejemplos que ilustras las numerosas aplicaciones que ofrece el álgebra lineal en diferentes áreas de conocimiento. Esta influencia del álgebra lineal en otros campos de estudio ha obligado a que sea una de las materias presente en los programas de numerosos estudios universitarios de las universidades españolas. Si analizamos los Reales Decretos por los que se establecen los títulos oficiales universitarios podemos observar la presencia de asignaturas de ÁLGEBRA en las que existen contenidos básicos de álgebra lineal y también asignaturas propias de ÁLGEBRA LINEAL, como asignaturas TRONCALES en numerosos estudios universitarios. En el cuadro que se adjunta podemos observar los títulos universitarios en los existen contenidos de álgebra lineal (aparece álgebra lineal como descriptor general de una asignatura), así como los créditos de cada asignatura:

TITULO UNIVERSITARIO	ASIGNATURA/ Contenidos	CRÉDITOS
Diplomado en Estadística	ALGEBRA/ Álgebra. Espacios vectoriales afines y euclídeos. Cálculo Matricial. Aplicaciones.	6 a 12
Diplomado en Ciencias Empresariales	MATEMÁTICAS/ Álgebra Lineal, Cálculo Diferencial e integral.	6
Diplomado en Óptica y Optometría	MATEMÁTICAS/ Cálculo diferencial e integral. Ecuaciones Diferenciales. Algebra. Cálculo Numérico y estadística aplicada.	9
Arquitecto	MATEMATICAS I/ Geometría métrica, proyectiva, analítica y álgebra I y II	15
Arquitecto técnico	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS/ Algebra. Geometría	15
Ingeniero Técnico Aeronaútico	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA/ Álgebra Lineal. Cálculo. Ecuaciones Diferenciales. Fundamentos de estadística. Variable Compleja. Geometría	12
Ingeniero Técnico Agrícola	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA/ Álgebra Lineal. Cálculo Infinitesimal. Integración	12
Ingeniero Técnico en Construcciones Civiles	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERIA/ Algebra lineal, cálculo infinitesimal, integración, ecuaciones diferenciales, estadística, geometría.	12

Ingeniero Técnico en Diseño Industrial	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA/ Álgebra Lineal. Cálculo Infinitesimal. Cálculo Integral. Ecuaciones diferenciales	6
Ingeniero Técnico Forestal	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA/ Álgebra lineal. Cálculo Infinitesimal. Integración. Ecuaciones Diferenciales. Estadística. Métodos Numéricos	12
Ingeniero Técnico en Informática de Gestión	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMATICA/ Algebra. Análisis matemático. Matemática Discreta. Métodos Numéricos	18 (6 Algebra)
Ingeniero Técnico en Informática de Sistemas	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA/ Álgebra. Análisis matemático. Matemática Discreta. Métodos Numéricos	18 (6 Álgebra)
Ingeniero Técnico en Obras Públicas	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA/ Álgebra Lineal. Cálculo Infinitesimal. Ecuaciones Diferenciales. estadística. Integración. Métodos Numérico. Geometría.	9
Ingeniero Técnico de Minas	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA/ Álgebra lineal. Cálculo Infinitesimal. Integración. Ecuaciones Diferenciales. Métodos Numéricos. Estadística	9
Ingeniero Técnico en Sistemas electrónicos	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA/ Análisis vectorial. Funciones de variable compleja. Análisis de Fourier. Ecuaciones en derivadas parciales. Matemática Discreta. Análisis Numérico	12
Ingeniero Técnico en sistemas de telecomunicación	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA/ Análisis vectorial. Funciones de variable compleja. Análisis de Fourier. Ecuaciones en derivadas parciales. Matemática Discreta. Análisis Numérico	12
Ingeniero técnico en sonido e imagen.	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA/ Análisis vectorial. Funciones de variable compleja. Análisis de Fourier. Ecuaciones en derivadas parciales. Matemática Discreta. Análisis Numérico	12
Ingeniero Técnico en Topografía	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA/ Álgebra Lineal. Cálculo Infinitesimal. Integración. Métodos Numéricos. Ecuaciones Diferenciales. Estadística	9
Ingeniero Aeronaútico	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA/ Algebra Lineal. Cálculo. Geometría. Ecuaciones Diferenciales. Variable Compleja. Fundamentos de la Estadística.	15
Ingeniero Agrónomo	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA/ Álgebra Lineal. Cálculo Infinitesimal. Integración. Ecuaciones Diferenciales. Estadística. Métodos Numéricos.	12
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERIA/ Algebra Lineal. Cálculo Infinitesimal. Integración. Ecuaciones Diferenciales. Estadística. Métodos Numéricos	12
Ingeniero Geólogo	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA/ Álgebra Lineal. Cálculo Infinitesimal. Integración. Ecuaciones Diferenciales. Estadística. Métodos Numéricos.	12
Ingeniero Industrial	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA Álgebra Lineal. Cálculo Infinitesimal. Integración. Ecuaciones diferenciales. Métodos Numéricos. Estadística	12
Ingeniero en Informática	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA/ Algebra. Análisis Matemático. Matemática Discreta. Métodos Numéricos	18 (6 Algebra)
Ingeniero de Minas	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA/ Álgebra Lineal. Cálculo Infinitesimal. Integración. Ecuaciones Diferenciales. Estadística. Métodos Numéricos	12 (6 Algebra Lin.)
Ingeniero de Montes	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA/ Álgebra Lineal. Cálculo Infinitesimal. Integración. Ecuaciones Diferenciales. Estadística. Métodos Numéricos	12
Ingeniero Químico	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA/ Álgebra Lineal. Cálculo.	6 (3 Algebra Lin.)
Ingeniero de Telecomunicaciones	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA/ Análisis vectorial. Funciones de Variable Compleja. Análisis de Fourier. Ecuaciones en Derivadas Parciales	12
Licenciado en Administración y Dirección de Empresas.	MATEMATICAS/ Elementos básicos del álgebra lineal y cálculo diferencial e integral. Matemáticas de las operaciones financieras.	12
Licenciado en Biología	MATEMÁTICAS/ Cálculo. Álgebra Lineal. Ecuaciones Diferenciales	4
Licenciado en Económicas	MATEMATICAS/ Elementos básicos de álgebra lineal y cálculo diferencial e integral. Programación matemática.	12
Licenciado en Farmacia	MATEMATICA APLICADA/ Principios básicos de Matemáticas, biometría y estadística aplicados a las ciencias farmacéuticas	5

Licenciado en Físicas	MÉTODOS MATEMÁTICOS/ Cálculo con una y varias variables; análisis vectorial, álgebra lineal, espacio y aplicaciones lineales, matrices, determinantes, valores y vectores propios. Grupos ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, geometría lineal. Curva y superficies diferenciales. Ecuaciones diferenciales ordinarias, funciones de variable compleja, funciones especiales, series de Fourier, Transformadas integrales, y una introducción a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. (en los planes de estudios suele aparece la asignatura ALGEBRA LINEAL con 7 créditos)	18 a 27
Licenciado en Geología	MATEMÁTICAS/ Cálculo, álgebra , geometría y estadística.	5 a 9
Licenciado en Química	MATEMÁTICAS/ Álgebra Lineal y Cálculo	12
Licenciado en Matemáticas	ALGEBRA Y GEOMETRÍA. Álgebra Lineal y Multilineal. Geometría afín y proyectiva. Elementos de Geometría diferencial y topología.	12 a 20
Licenciado en Veterinaria	MATEMÁTICAS./ Principios básicos de Biometría y estadística aplicados a las ciencias veterinarias	5

Como podemos observar el álgebra lineal es una materia presente en los primeros cursos de casi todas las ingenierías y en primeros cursos de Licenciaturas de Ciencias, Ciencias de la Naturaleza y la Salud y Ciencias sociales. Esta presencia generalizada del álgebra lineal ha sido una de las razones que nos han motivado para elegir el álgebra lineal como área de conocimiento sobre la cual centrar la investigación educativa de la presente tesis.

I.3.6. La enseñanza del álgebra lineal mediante sistemas de cálculo algebraico.

La necesidad de cambios significativos en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas es una evidencia suscrita por numerosos autores y organizaciones como MAA (Mathematical American Association) y NCTM (National Councir for Teacher of Mathematics). Si enfocamos nuestra atención sobre el álgebra lineal, podemos observar que la pedagogía utilizada actualmente en la enseñanza del álgebra y en particular del álgebra lineal genera un elevado porcentaje de suspensos que ronda el 50% [Hodgson, 1997]. Entre los motivos de este fracaso podemos destacar fundamentalmente los siguientes:

a) la <u>escasa participación activa del alumnado</u>, ya que la enseñanza se centra en adquirir habilidades de manipulación y computación que reducen la motivación del alumnado sobre las Matemáticas.

b) <u>se utiliza un aprendizaje memorístico</u>, basado en la memorización de una serie de rutinas de repetición, un conjunto de recetas algorítmicas de aplicación automática. Pero con este tipo de aprendizaje la retención de las habilidades manipulativas y de computación es muy escasa, ya que los estudiantes carecen del conocimiento conceptual necesario para reconstruir la fórmula una vez que esta es olvidada. Los estudiantes que adquieren un aprendizaje de este tipo no tienen la habilidad y el manejo suficientes para resolver problemas vinculados a los algoritmos enseñados, ya que, obtienen una visión parcial e inconexa de las Matemáticas y del álgebra lineal, reduciéndola a un conjunto de algoritmos y procedimientos.

c) el <u>obstáculo del formalismo</u> intrínseco a la propia disciplina. La comprensión de las estructuras algebraicas, y en nuestro caso de las estructuras de espacio vectorial y subespacio vectorial, requiere emplear notaciones que representan objetos matemáticos pertenecientes a una estructura simbólica. Este grado de abstracción obliga a manipular símbolos que representan símbolos, lo cual supone un grave obstáculo para el aprendizaje de las citadas estructuras.

d) Los alumnos tienen dificultades en utilizar de forma indistinta los dos tipos de razonamientos existentes en el álgebra lineal. Existen dos modos fundamentales de razonamiento en el álgebra lineal muy enraizados con el desarrollo histórico de este campo de las matemáticas: por un lado el denominado **pensamiento analítico** (caracterizado por razonamientos que tienen que ver con la aritmetización del espacio, es decir el paso de la geometría sintética a la geometría analítica en R^n); y por otro lado el **pensamiento sintético**, cuyos razonamientos hacen referencia a un tipo de pensamiento más general que tiene que ver con el proceso que tuvo lugar con la desarimetización del espacio cuando los vectores perdieron las coordenadas que los ataban al dominio de los números y los espacios aritméticos R^n no fueron más que un ejemplo entre otros de espacios vectoriales generales [Sierspinska, 1996]. Los alumnos suelen tender hacia un pensamiento sintético cuando se supone deberían hacer una demostración de tipo analítico y de la misma forma hacen un pensamiento analítico cuando se espera una demostración sintética. ¿qué clase de problemas se resuelven con uno u otro razonamientos?. Estas divergencias aumentan cuando las explicaciones del profesor se ciñen sobre un pensamiento que no es el que los alumnos esperaban en el contexto de esas explicaciones.

El álgebra lineal es una disciplina matemática que permite construir modelos matemáticos de numerosas situaciones problemáticas cercanas, pero la situación de fracaso anteriormente comentada relativa al álgebra lineal, provoca en el alumnado una sensación de falta de utilidad y aplicación; es más, con ese estilo de enseñanza el alumno adquiere una visión del álgebra lineal basada en la memorización de algoritmos, definiciones y teoremas.

Los sistemas de cálculo algebraico son una herramienta didáctica que puede facilitar un nuevo estilo de comprensión de los conceptos y métodos del álgebra lineal, ya que nos puede permitir modificar esas pautas educativas que son claramente erróneas, y modificando la didáctica de las matemáticas en torno a varios objetivos básicos:

1. Cuando se introducen los sistemas de cálculos algebraico en el aula se trivializan numerosos cálculos aritméticos, gráficos y algebraicos pero permiten **plantear problemas más complejos y más cercanos a la realidad**, [Kutzler,1999] es decir que esa trivialización de la operativa permitirá mejorar la cercanía a la realidad sin necesidad de tener que plantear los típicos problemas en cierta medida "irreales" que ajustan las soluciones para que los cálculos no se compliquen.

2. Utilizar los sistemas de cálculo algebraico para **que el alumno pueda construir su propio conocimiento matemático con la experimentación**. Se trata del descubrimiento propuesto por B. Buchberger en su denominada espiral de descubrimiento matemático que consta de tres fases:
   a) una fase de EXPERIMENTACIÓN en la que se aplican los algoritmos conocidos para generar EJEMPLOS y CONJETURAS a partir de las observaciones de los ejemplos;
   b) una fase de EXACTIFICACIÓN en la que las conjeturas se convierten en nuevos teoremas y resultados que son probados e implementados de forma algorítmica
   c) y una tercera fase de APLICACIÓN en la que los nuevos algoritmos se aplican sobre datos reales o ficticios de tal forma que permiten resolver problemas [Kutzler, 1999].

   Se trata por tanto de centrar la atención del alumno en el proceso de modelización matemática, mediante la aplicación directa de los contenidos en problemas del mundo real utilizando una **metodología basada en la resolución de problemas**, para lo cual es necesario introducir algunos heurísticos y estrategias de resolución de problemas.

3. Utilizar **la tecnología como parte integral de la implementación** de los objetivos educativos. En esta línea tiene sentido comentar la analogía que han hecho varios autores entre la construcción del conocimiento matemático y los desplazamientos que pueden realizar las personas. Si una persona necesita recorrer una larga distancia utiliza un vehículo porque de otra forma la distancia le ocuparía todo su tiempo, es decir utiliza la tecnología para desplazarse, aunque debe saber manejar perfectamente

la tecnología así como el recorrido que realiza. Lo mismo sucede cuando un individuo está aprendiendo matemáticas y desea resolver un problema. El uso de la tecnología en su aprendizaje le permite realizar con mayor fiabilidad los cálculos y resolver mejor los problemas que se le proponen, aunque debe conocer el manejo del programa que utiliza así como el conjunto de etapas por las que tiene que pasar para resolver el problema. Este símil utilizado por J. Kaput [Kaput, 1992] y por F. Demana [Demana, 1990] nos permite deducir que las nuevas tecnologías deben formar parte integral de los métodos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y en especial del álgebra lineal.

4. **Mejorar el entendimiento conceptual del álgebra lineal** por medio de aproximaciones gráficas y algebraicas de los conceptos y los problemas, o bien mediante el uso de diferentes sistemas de notación para un mismo concepto algebraico. En este sentido la visualización permite adquirir la capacidad de establecer relaciones gráficas y algebraicas entre los diferentes conceptos y principios del álgebra lineal.

5. Para el aprendizaje de un tópico matemático los alumnos deben de interrumpir continuamente su concentración con numerosos cálculos intermedios, realizando un zig-zag en su aprendizaje de tal forma que realiza procesos de niveles inferiores para ir construyendo o realizando procesos de niveles superiores [Kutzler, 1999]. Estos cambios de nivel, en ocasiones les impiden percibir y asimilar con claridad la construcción que está realizando. Con el uso de los sistemas de cálculo algebraico el proceso de aprendizaje puede ser conducido de manera que esos cálculos intermedios pierden importancia y **el alumno se concentra completamente en las habilidades de nivel superior** [Guzmán, 1992].

6. Activar en los estudiantes el aprendizaje del álgebra vía el **aprendizaje colaborativo** propiciado por el uso de los ordenadores [Crook, 1999].

Las manipulaciones algebraicas rutinarias tienen cierta importancia en el aprendizaje del Álgebra Lineal, pero no son un eje fundamental de la disciplina. Por eso una ESTRATEGIA DIDÁCTICA que implemente la introducción de los sistemas de cálculo algebraico en la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal debe tener en cuenta este aspecto; de tal forma que en un primer estadio educativo el uso de los sistemas computacionales deben permitirnos consolidar esos primeros procesos rutinarios para luego automatizarlos en un estadio superior, con el fin de aplicarlos en problemas de un orden superior. En [Murakami-Hata, 1997] se plantea una idea muy similar, de tal forma que para la introducción de CAS en una metodología de las Matemáticas debemos saber separar claramente dos tipos de contenidos:

- los CONTENIDOS ESENCIALES (no reemplazables por el ordenador)
- y los CONTENIDOS NO ESENCIALES, necesarios como herramienta en la comprensión de otros contenidos y que sí pueden ser reemplazados por el ordenador.

Así según esta clasificación de contenidos, la estrategia didáctica a seguir para la enseñanza-aprendizaje de un contenido matemático A pasaría por dos etapas:

a) Una primera etapa basada en un CURSO BÁSICO, en el que se introducen con cierta metodología los conceptos y principios fundamentales de A, de tal forma que los CAS no son admisibles para desarrollar las partes esenciales de A, pues según [Murakami-Hata,1997] el uso del ordenador puede impedir que se comprenda profundamente el concepto A, aunque sí se pueden utilizar CAS con ciertos conceptos B, no esenciales para la comprensión de A.

b) Una segunda etapa que consistiría en un CURSO APLICADO, en el que se permitiría clarificar el contenido A mediante la resolución de problemas complicados, relacionando A con otros contenidos. De esta forma se consigue profundizar en el contenido. En esta parte se pueden utilizar los CAS no sólo para esas partes B no esenciales para A sino que también para las partes esenciales de A.

Un método muy similar al anterior es el denominado **método del andamiaje (scaffolding method)** propuesto por B. Kutzler [Kutzler, 1999]. Según este método el sistema de cálculo algebraico hace de soporte para realizar habilidades de nivel inferior o cálculos inferiores, de tal forma que si en una actividad matemática para la comprensión de un tópico B es necesario un tópico A, en un primer paso el alumno debe dominar el tópico A, en un segundo estadio para aprender el tópico B podremos utilizar la calculadora algebraica para resolver aquellos subproblemas de B en los que interviene A, en el tercer paso se combinarían las habilidades de A y B sin el uso de la tecnología. Este andamiaje, permite actuar en dos niveles:

- Un **nivel de automatización de cálculos**, ya que permite que el alumno se concentre en destrezas de orden superior, dejando los cálculos rutinarios para el sistema de cálculo algebraico.

- Un **nivel de compensación**, ya que permite que alumnos con deficiencias en habilidades inferiores puedan comprender o llegar a entender habilidades nuevas basadas en estas. De esta forma el sistema de cálculo algebraico actúa como herramienta de compensación de los posibles desfases del alumno.

Como hemos comentado anteriormente, uno de los problemas o peligros que se han planteado respecto a la introducción de CAS en la enseñanza está relacionada con la posible pérdida de habilidades manipulativas y de computación. Sin embargo, en algunos estudios sobre el mantenimiento de estas habilidades en prácticas y laboratorios de primeros cursos de universidad [Hodgson, 1997] se ha concluido que estas habilidades se mantienen, a pesar de que el ordenador sea utilizado como herramienta de exploración y para la resolución de problemas matemáticos. Este miedo general a la pérdida de habilidades instrumentales puede ser soslayado si tenemos en cuenta que se han realizado investigaciones que han aportado que el uso de calculadoras no empeora los resultados [Meissner, 1992]. También se han realizado otros estudios en los que se ha puesto de manifiesto que el uso de la calculadora gráfica puede ayudar a mejorar la ejecución y el nivel de comprensión de estudiantes de precálculo y cálculo aunque se mantengan los contenidos tradicionales, sin detrimento aparente de las habilidades algorítmicas de los alumnos [Quesada, 1993], [Quesada-Maxwell, 1994].

El uso de los CAS, y en particular de DERIVE, en la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, proporciona algunas ventajas indiscutibles [Auer-Muller, 1990], [LaTorre, 1990], [Kutzler, 1999]:

1) Ofrece un contexto cómodo para realizar cálculos repetitivos vinculados al desarrollo de algoritmos matriciales, lo cual permite a los alumnos que se concentren en los conceptos, dejando al ordenador la parte operativa.

2) El uso de una aritmética exacta o racional es enormemente beneficiosa para el álgebra lineal elemental. De hecho es muy frecuente observar como los alumnos están acostumbrados a utilizar la calculadora para realizar numerosos cálculos aproximados.

3) Enfocar el esfuerzo de los estudiantes en un trabajo de exploración y descubrimiento. El uso de los CAS en el Álgebra Lineal permite que las tareas y actividades que se plantean no tengan el carácter de "introducción sobre manejos automáticos" y permiten diseñar actividades encaminadas a la construcción del conocimiento a través de la exploración, experimentación e investigación de ejemplos escogidos adecuadamente

para que, con la manipulación del programa y el trabajo dirigido del profesor el alumno sea capaz de descubrir y conjeturar relaciones y propiedades básicas del álgebra lineal.

4) Considerar aplicaciones del álgebra lineal más complejas, más reales y a la vez más interesantes para el alumno. Como los cálculos rutinarios pueden quedar relegados al propio sistema, el alumno no se preocupa de la dimensión de los datos del problema ni a la revisión de las operaciones que realiza, se centra en el planteamiento y exploración del problema. Esta circunstancia nos va a permitir con problemas más reales y más cercanos al alumno, no solo por el tipo de datos que se manipulan sino que también por las dimensiones del problema que se plantea.

5) Las operaciones efectuadas con los CAS tienen nombres muy similares a las operaciones algebraicas que implementan, por lo que la mayoría de los estudiantes aprenden rápidamente los procedimientos. Esta semejanza de lenguajes puede permitirnos efectuar una transferencia de significados entre el lenguaje formal, el lenguaje del CAS y el lenguaje natural del alumno, convirtiéndose de esta forma el CAS en un instrumento de lenguaje intermedio, manipulado por el propio alumno, y en consecuencia más cercano. Este hecho no equivale a que el CAS propicie un lenguaje menos formal, ya que como sabemos los sistemas informáticos tienen un elevado grado de rigidez en sus construcciones sintácticas.

6) La manipulación simbólica permite que los alumnos examinen sin errores numerosas instancias de propiedades generales y teoremas, evitando la frustración que generan los errores algebraicos.

7) El uso de los sistemas de cálculo algebraico incrementa la importancia del profesorado en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Efectivamente, con el uso de este tipo de programas el profesor se convierte en el acompañante y director indiscutible del proceso de descubrimiento que realizan los alumnos. De esta manera la tecnología se convierte en un catalizador para que los profesores enfoquen y mejoren sus métodos de enseñanza. De hecho el profesor debe ser un complemento de la idea que demandó Freudenthal *"no debemos enseñar a los estudiantes algo que no hayan descubierto por sí mismos"* , ya que los alumnos en ocasiones requieren algunas orientaciones y directrices que guíen esos descubrimientos, apoyos que son realizados por el profesor.

Estos beneficios que ofrecen los CAS en la enseñanza del álgebra lineal deben ser introducidos utilizando actividades prácticas que conduzcan adecuadamente la enseñanza y aprendizaje de la misma. Entre las secuencias de actividades que se proponen a este respecto [Chumillas,1991] destaca tres tipos de actividades con DERIVE:

a) actividades de manipulación, para que el alumno se familiarice con el programa
b) resolución de problemas que requieran relacionar conocimientos teóricos de álgebra lineal.
c) actividades que permitan sumergirse en la teoría, de tal forma que se puedan trabajar las Matemáticas de forma experimental.

Una de las actividades para las cuales el uso de CAS puede resultar altamente productivo, es en las llamadas actividades de exploración y descubrimiento. Con este tipo de actividades los estudiantes toman parte del aprendizaje, de tal forma que se les pueden ofrecer actividades en las que descubran o al menos conjeturen el comportamiento general de los objetos matriciales o vectoriales presentados. De esta forma el alumno podría explorar el funcionamiento del álgebra lineal, conjeturando propiedades y teoremas [LaTorre, 1990] en lo que sería una auténtica actividad constructiva y creativa de la matemática. La idea de este trabajo experimental consiste en que el alumno descubra inductivamente reglas o teoremas, asistido por el sistema de cómputo algebraico. Según este método las reglas, relaciones y teoremas se enseñan y aprenden de abajo arriba, y no como en la forma tradicional deductiva (de arriba abajo). Este tipo de trabajo de exploración y descubrimiento partirá de cierta actividad problemática sobre la cual efectuaremos algunas manipulaciones y cálculos en el ordenador. La observación del comportamiento de estos cálculos ofrecerá ciertas reglas o pautas de las que, el alumno puede conjeturar una hipótesis general, que mediante el ordenador podremos comprobar. Estas reglas así obtenidas, pueden ser luego verificadas sin el uso del ordenador, obteniendo de esta forma todo un estudio exploratorio e inductivo que, evidentemente, sin el uso del ordenador y del sistema de cómputo algebraico no hubiera sido posible.

En nuestra ESTRATEGIA DIDÁCTICA debemos considerar asimismo una metodología basada en la resolución de problemas ya que los CAS ofrecen un contexto muy adecuado para incorporar este modelo de enseñanza-aprendizaje. [Murakami-Hata, 1997] plantea un posible modelo de resolución de problemas cuando se incorpora un CAS al proceso de enseñanza-aprendizaje, que tiene en cuenta la clasificación de los contenidos en esenciales y no esenciales tal y como hemos comentado anteriormente. Según este modelo se plantea el siguiente esquema:

1. Planteamiento del problema
2. Comprensión del problema.
3. Planteamiento de una estrategia básica y formulaciones Matemáticas.
4. Cálculos numéricos y operaciones algebraicas
5. Imágenes gráficas y simulación

6. Una solución del problema
7. Validación de la solución.

En este modelo el programa DERIVE se podría incorporar en los pasos 4) y 5) ya que no son partes esenciales en la resolución del problema. Esta estrategia permite que el estudiante verifique rápidamente la comprensión del problema, su estrategia y su formulación; que utilice varias estrategias de resolución e intente compararlas y por último que resuelva más problemas en el mismo tiempo, lo cual puede ofrecerle diferentes visiones de un mismo contenido o situación matemática.

Pero la problemática fundamental de la enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal quizás se centra en el formalismo algebraico. Este obstáculo del formalismo surge en los estudiantes porque manipulan las expresiones algebraicas a nivel de FORMA sin tener en cuenta que esta expresiones representan un OBJETO más allá de la propia expresión [Sierspinska-Dreyfus-Hillel, 1999]. Ante esta problemática los CAS pueden introducirse usando múltiples representaciones de los conceptos algebraicos (objetos matemáticos). El aprendizaje de los conceptos algebraicos por medio de la percepción de los mismos como invariante asociado a sus múltiples representaciones es un planteamiento pedagógico que es accesible con el uso de sistemas de cálculo algebraico; ya que se pueden diseñar tareas de enseñanza-aprendizaje que permitan percibir estos hechos y eviten en parte este obstáculo formal intrínseco al álgebra lineal.

En definitiva, los CAS pueden mejorar la enseñanza-aprendizaje en los cursos introductorios de álgebra lineal utilizando una metodología basada en la resolución de problemas, con actividades de carácter experimental que tenga en cuenta una clasificación de los contenidos en esenciales y no esenciales y aprovechando los diversos sistemas de notación que ofrecen dichos sistemas. Esto ofrece enormes beneficios que permiten una pedagogía de las Matemáticas más tutorial, donde el profesor guía al alumno para obtener un conocimiento más profundo y significativo de los conceptos que trata de enseñar.

Por eso en nuestro contexto, a pesar de los problemas que la introducción de las nuevas tecnologías pueden provocar en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, teniendo en cuenta las numerosas ventajas y características que facilita el uso de estos sistemas podemos afirmar que, los sistemas de cálculo algebraico no son buenos o malos, dependen de su uso. En esta investigación estudiaremos una estrategia didáctica que pretende incorporar de forma íntegra estos sistemas de cálculo algebraico con el fin de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal.

CAPÍTULO II: UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA LINEAL

II.1. Necesidad de una nueva estrategia didáctica para la enseñanza de las Matemáticas.

En el capítulo anterior hemos realizado un análisis extenso de las principales características educativas asociadas al uso de los ordenadores en la enseñanza de las Matemáticas. También hemos analizado de los principales peligros y dificultades que puede provocar el uso de este medio tecnológico en la enseñanza de las Matemáticas, en especial nos hemos centrado en un tipo de programas muy utilizado actualmente en el aula de Matemáticas: los sistemas de cálculo simbólico. Tal como hemos señalado en el apartado I.3. este tipo de programas ofrece numerosas ventajas educativas que debemos explotar para intentar mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje en un área de conocimiento que, por su propia estructura, resulta bastante compleja tanto en su enseñanza como en su aprendizaje.

La introducción de los sistemas de cálculo algebraico y en particular la introducción de DERIVE en el aula de Matemáticas debe tener en cuenta una serie de ideas fundamentales, mediante las cuales se pueden obtener las mayores ventajas y se puedan evitar los peligros que ya hemos comentado. Entre las ideas principales que debemos considerar se encuentran las siguientes:

1) Para introducir los sistemas de cálculo simbólico en la enseñanza del álgebra lineal se admiten en general dos formas de uso complementarias:

a) Utilizando el CAS como HERRAMIENTA EXPERIMENTAL. Mediante este uso, el sistema de cálculo algebraico permite construir y elaborar conjeturas, lanzar hipótesis y utilizar una exploración inductiva de los hechos matemáticos. El álgebra lineal contiene numerosas propiedades y resultados que pueden introducirse a través de la experimentación, así por ejemplo, la experimentación y el manejo de vectores y matrices concretas puede permitir obtener resultados generalizables a través del establecimiento inicial de hipótesis y el planteamiento de conjeturas, que más tarde deberán demostrarse de forma general, pero que inicialmente proporcionan al alumno la posibilidad de saborear las características del descubrimiento matemático.

b) Utilizar el sistema de cálculo simbólico como HERRAMIENTA AUXILIAR. Este uso nos permite por un lado, evitar aquellas tareas rutinarias que en muchas ocasiones nos impiden profundizar en los procesos del quehacer matemático y por otro lado también nos facilita la comprobación de hipótesis y la demostración de propiedades de una manera efectiva. En este sentido, los problemas y demostraciones en álgebra lineal contienen numerosos cálculos rutinarios que se pueden realizar de forma automática con el uso de DERIVE. También encontramos largas demostraciones y comprobaciones que en numerosas ocasiones oscurecen el objetivo final de las conjeturas y resultados que se pretenden demostrar. Por este motivo, el uso AUXILIAR de DERIVE complementa de forma evidente el desarrollo experimental del álgebra lineal.

2) El sistema computacional no debe convertirse en un simple MEDIO DE TRANSFERENCIA, que realice un papel similar al que desempañaban otros recursos didácticos por ***simple transferencia mediática***, utilizando únicamente la capacidad de interacción y dinámica de los ordenadores; de tal forma que las actividades que antes se realizaban, por ejemplo, con lápiz y papel ahora se realicen con el sistema de cálculo algebraico.

3) El nuevo sistema no debe ser una BARRERA ADICIONAL para el aprendizaje del álgebra lineal. Por ello el contexto en el que se introduzcan los sistemas de cálculo algebraico han de contar con instructores que proporcionen respuestas inmediatas a los estudiantes sobre cualquier cuestión relacionada con el uso del programa de cálculo simbólico utilizado; y por otro lado debemos usar un programa que sea sencillo en su aprendizaje. Esta doble vertiente: INSTRUCTORES CERCANOS y SENCILLEZ DEL PROGRAMA, ha sido uno de los elementos que ha motivado la elección del programa DERIVE (uno de los programas más difundidos en la didáctica de las Matemáticas). Efectivamente, al elegir el programa de cálculo simbólico DERIVE hemos considerado que se trata de uno de los programas más sencillos de todos los que existen en el mercado; con esta facilidad de aprendizaje se reducen al mínimo las posibles dificultades con las que pueden encontrarse los alumnos. Se trata de facilitar al alumno un material didáctico que no suponga un esfuerzo adicional, es decir, que no requiera un estudio previo muy complejo; situación que desvirtuaría enormemente la enseñanza de los contenidos de álgebra lineal que deseamos motivar, al desenfocar los objetivos reales del aula, centrándolos en el estudio de un programa aplicado a un conjunto contenidos relacionados con el álgebra lineal.

4) El uso de los sistemas de cálculo algebraico en el aula pueden permitirnos la construcción de SISTEMAS DE NOTACIÓN INTERMEDIOS que faciliten la comprensión de los sistemas matemáticos formales, acercando de esta forma los conceptos mediante cogniciones de objetos accesibles y manipulables y por tanto más intuitivos. Los sistemas de cálculo algebraico ofrecen esta posibilidad porque utilizan un lenguaje muy cercano al lenguaje formal, y por otro lado utilizan una sintaxis especial. Sintaxis a la que debemos ceñirnos para elaborar nuestras estrategias en la resolución de problemas o para resolver las cuestiones que se plantean. Esto provoca que el alumno se vaya acostumbrando a una terminología específica que se traduce en una serie de operaciones formales de aplicación directa. Por otro lado, estos sistemas permiten utilizar de una forma simultánea múltiples representaciones de una misma entidad algebraica así como los razonamientos en paralelo y en profundidad que proporcionan estos sistemas (Cap. 2º de [Bautista, 1994]). Este hecho permite que el alumno pueda visualizar una expresión algebraica, su representación gráfica y a la vez el proceso simbólico de resolución. Según [Duval, 1998] *"el conocimiento comienza cuando un sujeto es capaz de identificar un objeto a través de sus diferentes representaciones, y cuantas más representaciones del mismo se tengan mayor es el conocimiento del objeto, así como la posibilidad de traducir entre diferentes representaciones el objeto en cuestión"*. Así pues, esta posibilidad que brindan los CAS y en particular DERIVE nos puede facilitar a los alumnos un aprendizaje que tiene en cuenta diferentes visiones del mismo objeto sobre diferentes lenguajes matemáticos (algebraico, geométrico, analítico,...), y sin lugar a dudas, esta visión múltiple de un mismo objeto matemático, nos conduce hacia una visión más global y completa del objeto algebraico que estamos manipulando, ya que el objeto matemático se convierte en ***el invariante de múltiples sistemas de notación.***

5) Un aspecto que debemos considerar enormemente positivo, desde el punto de vista educativo, es la posibilidad de SIMPLIFICAR NUMEROSAS TAREAS RUTINARIAS, de carácter muy frecuente en los cálculos matemáticos y en particular en el álgebra lineal. Cuando se libera al alumno de procesos automáticos de cálculo se les brinda la posibilidad de intentar profundizar con más detalle en el concepto que se está manipulando. Esto quiere decir que podemos incitar al alumno a introducirse en el fondo de los procesos matemáticos, de tal forma que el bosque de las operaciones no nuble el fundamento de las mismas. Por otro lado, esto no quiere decir que todo pueda ser automatizado, pues en ese caso según el nivel que estemos trabajando, se pueden perder conceptos que pueden ser fundamentales para el alumno en su proceso de desarrollo. Se trataría fundamentalmente de incitar al alumno a la investigación y a la exploración matemática con la ayuda de estos sistemas, al permitirles evitar los cálculos intermedios rutinarios que resultan innecesarios. Este uso del cálculo simbólico en la enseñanza de las matemáticas permite trivializar el cálculo enfocando al alumno en tareas menos rutinarias [Kutzler, 1999].

6) La RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS es un elemento intrínseco a la propia actividad matemática. Efectivamente, los matemáticos de todos los tiempos han sabido bien que su trabajo consiste en resolver problemas, de hecho las Matemáticas se han creados, en muchas ocasiones, pensando en problemas curiosos y atractivos, capaces de llamar la atención a sectores grandes de la población. Han sido problemas que no tenían inicialmente una aplicación práctica inmediata. Así por ejemplo en el documento más antiguo que se conoce, el papiro de Rhind (siglo XVII a.C) debido al escriba Ahmes en Egipto, aparece el siguiente problema: *"Siete personas poseen cada una siete gatos, cada uno de los cuales ha comido siete ratones, cada uno de los cuales ha comido siete espigas de trigo, cada una de las cuales poseía siete granos, se desea saber el número de gatos, ratones, espigas y granos"*. Este problema en aquella época con un sistema de numeración precario como el egipcio precario, resultaba difícil, no era un problema práctico pero interesó durante siglos, como entretenimiento curioso o como test para probar la habilidad de cálculo de las personas [Santaló y otros, 1994, págs.98-110]. Por ello, debemos considerar una metodología basada en la resolución de problemas, ya que es un medio de aprendizaje y refuerzo de los contenidos que se van introduciendo. Este tipo de metodologías basadas en la resolución activa de problemas proporcionan el método más conveniente para aprender Matemáticas y aplicar esta disciplina a diferentes contextos de nuestro entorno. En numerosas ocasiones la resolución de problemas no se trata de manera adecuada ya que se suele centrar fundamentalmente en un conjunto de prácticas de cálculo, anulando des de las etapas fundamentales de la resolución de problemas que consisten en la traducción de realidades en modelos matemáticos y la conversión posterior de los resultados obtenidos en el cálculo al modelo inicial. Esta manera de plantear la resolución de problemas impide un desarrollo de habilidades en los alumnos que reducen sus resoluciones a meras prácticas algorítmicas que pueden reservarse al cálculo simbólico [Kutzler, 1999]. El origen de las mismas proviene, en general, de unos planteamientos metodológicos inadecuados y, especialmente, de la falta de motivación. Efectivamente, las didácticas repetitivas basadas en el aprendizaje de algoritmos matemáticos suelen dejar indefensos a los alumnos cuando se tienen que enfrentar a verdaderas situaciones problemáticas, que se salen de los denominados "problemas tipo" empleados para "memorizar" procesos y algoritmos de resolución. Los planteamientos metodológicos deben considerar un desarrollo y perfeccionamiento de las heurísticas que utilizan los alumnos, que junto a los contenidos propios del álgebra lineal les permitan desarrollar la creatividad y habilidades necesarias propia de la resolución de problemas. Otro de los agravantes del aprendizaje matemático es la posible falta de motivación de los alumnos. Esta desmotivación está causada por un lado por la lejanía contextual de los enunciados y por otro por el elevado número de cálculos "rutinarios" necesarios para la resolución de los mismos. En este contexto de desmotivación ante la resolución de situaciones problemáticas, el uso de la tecnología y en particular de los CAS permitirían al alumno dedicar un tiempo suficiente para elegir aquellos modelos matemático que más se adaptan a la realidad que se pretende estudiar y también permiten centrar la atención en la interpretación de los resultados obtenidos. Por estos motivos una metodología basada en la resolución de problemas, puede ser un complemento ideal para introducir los sistemas de cálculo algebraico en la enseñanza del álgebra lineal.

7) Por último esta introducción debe POTENCIAR LAS CARACTERISTICAS que dotan al SISTEMA INFORMÁTICO de una PLASTICIDAD REPRESENTACIONAL [Kaput, 1992] (es un medio interactivo y dinámico). Estas dos características son fundamentales, pues permiten que el alumno tenga un cierto DIÁLOGO con el sistema, al ir recibiendo respuestas continuas del sistema de cálculo algebraico respecto a los datos y comandos que el alumno va introduciendo. Esta interactividad debe provocar un aumento de motivación por parte del alumno, ya que el sistema proporciona respuestas inmediatas a los datos que se van introduciendo convirtiéndose así en un método de trabajo activo. Por otro lado, el dinamismo en el que se sumerge un aprendizaje basado en este tipo de sistemas obliga de forma inconsciente al usuario (en este caso al alumno), a explorar diversas realidades, a conjeturar, a realizar hipótesis generales y poderlas comprobar con ejemplos concretos, situaciones que pueden conducir sin lugar a dudas a mejoras educativas evidentes.

Pero conseguir agrupar estas ideas no es una tarea fácil de conseguir, como bien señala [Kaput, 1992] "*la mayoría de las limitaciones del uso de los ordenadores en la enseñanza en las décadas entrantes serán probablemente debidas menos a las limitaciones tecnológicas que a un resultado de la imaginación humana y al impacto de los viejos hábitos y las estructuras sociales*". Así pues, es necesario encontrar un planteamiento que haga realmente eficaz el recurso informático para el aprendizaje matemático. Este avance tecnológico nos obliga a buscar nuevas estrategias didácticas: **no se puede seguir enseñando matemáticas de la misma forma, ignorando la existencia de estas herramientas**, ya que estos nuevos recursos tecnológicos pueden aumentar las posibilidades de enseñanza y aprendizaje. En consecuencia, la estrategia didáctica que debemos considerar deberá tener en cuenta las numerosas ideas que hemos señalado tanto en el capítulo I como en el inicio de esta sección, y que podríamos resumir de la siguiente forma:

a) APROVECHAR LAS CARACTERISTICAS DEL NUEVO MEDIO COMPUTACIONAL

- Permitir la creación de sistemas múltiples de representación.
- Utilizar el dinamismo del sistema que permite la transmisión continua de los estados y procesos intermedios.
- Aprovechar la interactividad que ofrece el nuevo medio computacional, ofreciendo respuestas y operaciones continuas ante la acción del usuario.

- Utilizar el almacenamiento y captura de procedimientos generales, especializados en cálculos concretos. En los sistemas de cálculo algebraico esto se traduce en los archivos de utilidades adjuntos al programa mediante los cuales se obtienen procedimientos genéricos de resolución: son los archivos denominados comúnmente como programas de utilidades o librerías.
- Utilizar las posibilidades que ofrecen los ordenadores en el terreno de la comunicación, fundamentalmente nos centramos en el sistema hipertexto de Internet y en las HOJAS DE TRABAJO que admiten los sistemas de cálculo algebraico.
- Aprovechar la posibilidad que brindan los ordenadores para estimular el denominado APRENDIZAJE COLABORATIVO [Crook, 1999]. Este tipo de aprendizaje es posible gracias a la interconexión entre los alumnos estimulada por la proximidad en el uso del medio computacional.

b) EVITAR CAER EN LOS PELIGROS QUE PUEDE OCASIONAR INTRODUCIR LOS SISTEMAS DE CÁLCULO ALGEBRAICO EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA. Los peligros más importantes que podemos resaltar son:

- Se puede caer en el error de perder el sentido de las operaciones que se realizan, al realizar de forma automática todos los cálculos.
- Pérdida de destrezas básicas, por un uso anticipado de los sistemas para cálculos que deben considerarse fundamentales y básicos para el estadio evolutivo del alumno.
- Confundir manipulación matemática con conocimiento matemático
- Llegar a la convicción de que el ordenador lo resuelve todo, sin tener en cuenta que somos nosotros los que debemos introducir los datos y en segundo lugar interpretar los resultados, que en ocasiones son datos imposibles.
- Que se pierda el sentido de la dificultad, por la propia inmediatez de las respuestas que proporciona el sistema y porque de la sensación que todos los problemas se resuelven “igual de rápido”.

c) OTRAS CONSIDERACIONES DIDÁCTICAS:

- Los sistemas de cálculo algebraico permiten la utilización de una enseñanza EXPERIMENTAL E INDUCTIVA, es decir una metodología activa en la que el alumno tome mayor protagonismo en los procesos de aprendizaje.

- Utilizar una metodología basada en la RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: para que el quehacer matemático no sea un conjunto de algoritmos inconexos y se transforme en un conjunto de técnicas y herramientas que nos permiten resolver situaciones problemáticas reales.
- Los sistemas de cálculo algebraico son proclives a introducir una didáctica basada en el descubrimiento guiado de los conceptos y hechos matemáticos, de tal forma que con ayuda de los contenidos previos del alumno y con una adecuada dirección por parte del profesor, los alumnos pueden adquirir con ayuda de este material didáctico APRENDIZAJES SIGNIFICATIVOS.
- El sistema de cálculo algebraico no debe ser una BARRERA ADICIONAL para la enseñanza aprendizaje de las Matemáticas, situación que se resuelve eligiendo un sistema sencillo de manejo y con la máxima portabilidad posible, para que el alumno pueda realizar sus prácticas fuera del aula.

Estas ideas constituyen las bases metodológicas de nuestra estrategia didáctica y justifican en parte las cuestiones y propósitos que pretendemos investigar que se explicitan en el capítulo 3. Una vez que tenemos caracterizadas las bases de nuestra estrategia, en el siguiente apartado vamos a caracterizar y fundamentar los elementos fundamentales que configuran la estrategia didáctica que pretendemos investigar.

II.2. Características fundamentales de nuestra estrategia.

Las posibilidades educativas que ofrecen los sistemas de cálculo algebraico en la enseñanza del álgebra lineal, tal y como acabamos de analizar en el apartado anterior, nos obligan a plantear una metodología distinta a la que hemos venido desarrollando en el aula de Matemáticas. El uso de DERIVE como herramienta experimental y auxiliar, la simplicidad de su manejo, su manera de representar los objetos matemáticos, las posibilidades de utilizarlo como herramienta auxiliar en la resolución de problemas, la simplificación de las tareas rutinarias en el ámbito del álgebra lineal, su interactividad y dinamismo y el contexto de trabajo colaborativo que nos brinda son algunas de las ideas que deben centrar el desarrollo de nuestra metodología. Así pues, podemos decir que las **características básicas o elementos básicos** que nos servirán de base **para diseñar la nueva estrategia didáctica** que deseamos elaborar y que sustentan dicha estrategia didáctica son los siguientes:

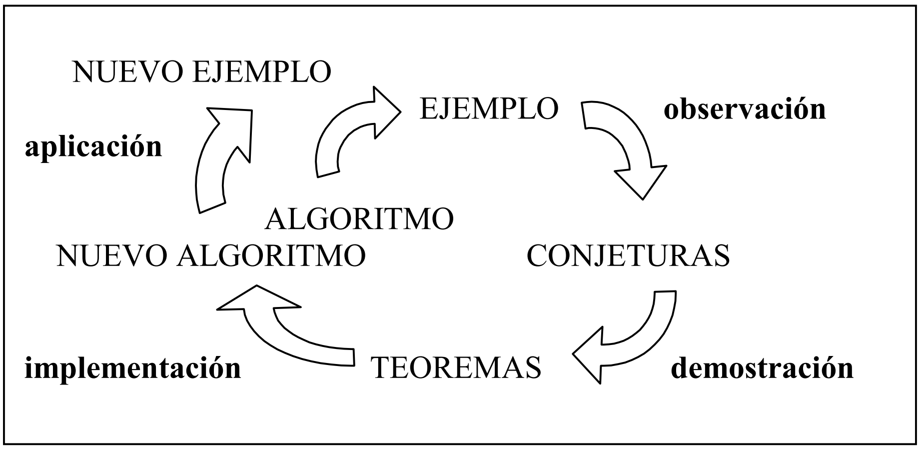
1) La **MANIPULACIÓN DE MÚLTIPLES SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN** nos permite obtener una visión múltiple de los conceptos que se introducen en el ámbito del álgebra lineal, permitiendo que los alumnos adquieran las abstracciones propias de los hechos y principios matemáticos como los *INVARIANTES de sus múltiples representaciones* [Kaput, 1992]. En este sentido DERIVE puede convertirse en un sistema de notación intermedio, capaz de reducir la barrera del formalismo, dificultad muy ligada a las manipulaciones simbólicas del álgebra lineal [Sierpinska-Dreyfus-Hillel, 1999].

2) La introducción del sistema de cálculo simbólico DERIVE como herramienta de trabajo en las clases de álgebra lineal puede permitirnos **PRESCINDIR DEL ESFUERZO RUTINARIO**, dedicado fundamentalmente al desarrollo de operaciones relacionadas con contenidos que NO son ESENCIALES para la comprensión de los conceptos que se van introduciendo. Esta forma de utilizar el programa únicamente en operaciones no esenciales, nos obliga a tener claramente diferenciados los conceptos que pueden ser manipulados con el programa y el momento en el que se pueden manipular de aquellos otros conceptos esenciales que no deben ser

desarrollados por medio del sistema de cálculo simbólico. En consecuencia, debemos efectuar una clasificación de los contenidos y usos del sistema para que la manipulación de DERIVE no interfiera en la resolución de aquellas rutinas o procesos que consideremos ESENCIALES en el contexto educativo particular en el cual estemos trabajando en cada momento [Murakami-Hata, 1997], [Kutzler, 1999].

3) La **construcción de los contenidos matemáticos a través de la EXPERIMENTACIÓN** es un elemento muy positivo para la adquisición de los contenidos propios del álgebra lineal. En este sentido merece la pena señalar una de las ideas sobre el descubrimiento matemático propuesto por B. Buchberger en la denominada "espiral de creatividad de Buchberger". En esta espiral podemos encontrar tres fases [Heugl-Kliger-Lechner, 1996]:

   i. Una primera <u>fase de experimentación</u> en la que se aplican los algoritmos y resultados conocidos para generar ejemplos a partir de los cuales, y a través de la observación, se obtienen conjeturas.
   ii. Una segunda fase llamada <u>fase de comprobación</u> se comprueban las conjeturas convirtiéndose de esta forma en teoremas que pueden ser utilizados e implementados en forma de algoritmos.
   iii. y una tercera <u>fase de aplicación</u> en la que estos resultados se aplican sobre datos reales o ficticios produciendo nuevamente nuevos ejemplos



espiral de creatividad de Buchberger

Esta construcción del conocimiento a través de la experimentación ha sido además la pauta fundamental que ha guiado el descubrimiento en Matemáticas. Por tanto sería deseable que los alumnos fuesen capaces de construir su conocimiento del álgebra lineal de una manera similar. El uso del programa de cálculo simbólico DERIVE puede estimular este tipo de aprendizaje ya que permite al alumno realizar numerosos cálculos algebraicos que no son fundamentales para la comprensión del concepto que se está introduciendo, permitiéndole de esta forma centrarse en las fases de comprobación y aplicación. De esta manera con el manejo del programa y con la dirección del profesor el alumno podrá adquirir aprendizajes significativos basándose en este proceso inductivo de experimentación, que por otro lado ha proporcionado numerosos resultados históricos a lo largo de la historia de las Matemáticas.

4) Un proceso de aprendizaje que **favorece el PROTAGONISMO DEL ALUMNO,** ofrece numerosas ventajas respecto a aquellos en los que el alumno se convierte en un mero receptor de información. En este sentido merece la pena señalar las ideas de Freudenthal en las que afirma *"no deberíamos enseñar a los estudiantes algo que no han descubierto por sí mismos"* [Freudenthal, 1979]. Así, el uso de DERIVE puede proporcionar este tipo de aprendizajes, primero porque al usar el sistema de cálculo simbólico en la ejecución de tareas rutinarias no esenciales, se permite al alumno centrar sus esfuerzos en procesos de pensamiento más generales y abstractos, potenciando su creatividad y capacidad de razonamiento, y en segundo lugar porque el uso de DERIVE en rutinas no esenciales de la resolución de problemas dota al alumno de una AUTONOMÍA que le impide tener una excesiva dependencia del sistema.

5) **La INTERACTIVIDAD Y DINAMISMO** del medio computacional es una característica que debemos tener muy en cuenta en nuestra estrategia [Kaput, 1992], puesto que ofrece respuestas más inmediatas al usuario, circunstancia que favorece por un lado la detección inmediata de errores y por otro la investigación y observación de los hechos y principios matemáticos. Además, esta interactividad y dinamismo provoca elevados índices de MOTIVACIÓN y PARTICIPACIÓN activa por parte del estudiante.

6) Otro elemento a considerar es la **SENCILLEZ DE MANEJO**. Cuando utilizamos un material didáctico para manipular y entender mejor ciertos conceptos matemáticos, el manejo del material debe ser lo más simple posible, con el objeto de no descentrar la atención del usuario hacia el uso del material. En este sentido el sistema de cálculo algebraico no debe

convertirse en una BARRERA ADICIONAL para la enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal. Por otro lado, tampoco tiene sentido usar una herramienta didáctica que contenga las mismas connotaciones que otras herramientas, es decir, DERIVE no debe convertirse en un sistema en el que se transfiera de forma mediática los usos de otros medios didácticos.

7) En la actualidad parece estar claramente demostrado que las relaciones que se establecen entre los alumnos y entre alumno y profesor en una situación de enseñanza-aprendizaje influyen enormemente en la adquisición de aprendizajes por parte del alumno. Una **dialéctica de colaboración** entre los alumnos y alumnos y profesor como una relación de colaboración entre iguales potencia una mejora en el rendimiento académico de los estudiantes así como un incremento en las aspiraciones de los mismos [Chang-Lederman, 1994], [Franklin, 1995], [Johnson, 1990]. En este contexto de colaboración, el ordenador brinda a los usuarios, elementos de trabajo muy interesantes en cuanto a lo que se refiera a la relación DIALÉCTICA entre los propios usuarios y la COMUNICACIÓN entre profesores y alumnos, características que proporcionan un excelente contexto para el aprendizaje colaborativo [Crook, 1999].

8) Es muy importante que aprovechemos esta tecnología para generar en los alumnos una **AUTONOMÍA COGNITIVA** que disminuya las posibles dependencias entre profesores y alumnos.

Estos elementos fundamentales del medio computacional sirven de justificación a la estrategia didáctica que vamos a diseñar, estrategia que pretende incorporar el sistema de cálculo simbólico DERIVE en los procesos de enseñanza aprendizaje del álgebra lineal de tal forma que podamos conseguir una metodología que reúna una serie de condiciones que consideramos son vitales dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos del álgebra lineal. La educación, tal como afirmaba Giovanno Enrico PESTALOZZI, creemos que tiene como objetivo fundamental "*conseguir que los alumnos adquieran claridad cognitiva a partir de la experiencia y la intuición*"; si además tenemos en cuenta la importancia que tienen las Matemáticas para el individuo como disciplina que ayuda a madurar y a desarrollar su pensamiento lógico-formal por medio de los procesos de simbolización y abstracción, entonces podemos afirmar que el enfoque educativo más adecuado para llevar adelante una enseñanza activa que introduzca este tipo de programas en la enseñanza de las Matemáticas es el enfoque constructivista. Este punto de vista es vital para el diseño de nuestra metodología, ya que nos obliga a utilizar una metodología activa, basada en la exploración, la investigación, la inducción, la observación,... en definitiva un tipo de didáctica mediante la cual podemos introducir los diferentes contenidos del álgebra lineal de una manera gradual y basándonos en la propia experiencia del alumno. De este forma el alumno adquiere una visión dinámica del álgebra lineal a partir de una serie de TAREAS ESPECÍFICAS con las cuales el propio alumno descubre:

a) con la ayuda del profesor,
b) con el programa de cálculo simbólico,
c) y con sus conocimientos previos,

El conjunto de contenidos y hechos fundamentales de esta disciplina. Se trata por tanto de una metodología activa, basada en la adquisición de aprendizajes significativos, con ayuda del CAS. Los sistemas de cálculo algebraico nos van a permitir potenciar esta metodología activa, basada en la exploración y la investigación, porque nos van a facilitar la eliminación de numerosos cálculos rutinarios en los que el alumno invierte normalmente buena parte de su tiempo y de su esfuerzo, encaminando este ahorro de cálculo hacia una participación activa en la que el alumno adquiere un auténtico protagonismo durante el proceso de aprendizaje. Si a esta perspectiva educativa le añadimos las características fundamentales que acabamos de señalar anteriormente propias del medio computacional, podemos extraer CINCO ARGUMENTOS O PRINCIPIOS BÁSICOS que configuran los pilares de nuestra estrategia didáctica:

A) LA INTRODUCCION DEL PROGRAMA DE CÁLCULO SIMBÓLICO DERIVE.
B) EL USO DE UNA METODOLOGÍA EXPERIMENTAL BASADA EN LA ADQUISICIÓN DE APRENDIZAJES SIGNIFICATIVOS.
C) EL USO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO NÚCLEO DE PROFUNDIZACIÓN DE LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS.
D) LA POTENCIACIÓN DEL APRENDIZAJE COLABORATIVO
E) *EL USO DE USO DE INTERNET: PÁGINA WEB Y CORREO ELECTRÓNICO*

Las características básicas de estos cinco principios básicos de nuestra estrategia didáctica pasamos a enumerarlas a continuación:

A) LA INTRODUCCION DEL PROGRAMA DE CÁLCULO SIMBÓLICO DERIVE.

DERIVE es uno de los programas más difundidos para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y del álgebra lineal. Los motivos por los cuales hemos elegido este PROGRAMA y no otro, están basados en criterios relacionados con:

- su facilidad de aprendizaje,
- su potencia de cálculo y efectividad,
- su portabilidad
- la sencillez de su entorno
- por los "ambientes de enseñanza" y de "colaboración" que pueden suscitar en el aula
- y por los "tipos de tareas" que pueden desarrollar los alumnos.

Todos estos criterios han sido establecidos previamente, con el fin de elegir un sistema que se adapte con el mayor número de garantías a los objetivos educativos y a las características de los sistemas de cálculo algebraico. Por eso la introducción en nuestra estrategia, de este sistema de cálculo algebraico puede constituir un elemento muy positivo para conseguir un rendimiento eficaz que justifica los argumentos didácticos que acabamos de considerar ya que:

1. El sistema de cálculo simbólico nos puede permitir realizar REPRESENTACIONES MULTIPLES de los problemas y cuestiones de álgebra lineal (representación gráfica y representación algebraica) incrementando de esta forma la flexibilidad de los estudiantes en la aproximación a la resolución del problema o la exploración e investigación de las cuestiones propuestas. Además DERIVE nos puede *facilitar la construcción de un sistema de notación intermedio* entre el sistema de notación formal algebraico y nuestra representación intuitiva del álgebra lineal, acercando al estudiante ese grado de abstracción.

2. DERIVE es un programa de cálculo simbólico eficiente [Wester, 1994], [Hervás y otros, 2000] permitiendo realizar cálculos algebraicos que reducen el esfuerzo que los alumnos emplean en los cálculos rutinarios. Sin embargo, este uso de DERIVE debe ser dosificado de una manera adecuada de tal forma que el alumno sólo pueda utilizar el programa para desarrollar cálculos que no forman parte de los contenidos esenciales que se están desarrollando para, de esta forma, no caer en el peligro de convertir el álgebra lineal en un conjunto de automatismos sin sentido [Murakami-Hata, 1997], [Kutzler, 1999].

3. El programa DERIVE ofrece un *entorno de trabajo muy adecuado* para ***experimentar, explorar e investigar*** las cuestiones fundamentales del álgebra lineal. La potencia de cálculo simbólico del programa permite

reducir esos cálculos rutinarios, que a su vez facilitan la concentración del alumno en las características que cumplen los datos de un determinado problema, observaciones que conducen al alumno a la construcción de conjeturas que con el propio programa es fácil de verificar.

4. El uso de DERIVE en actividades de carácter exploratorio y experimental del álgebra lineal proporcional al alumnado un fuerte grado de *protagonismo*, ya que le permite ir construyendo con la ayuda del programa su propio conocimiento, adquiriendo de esta forma una serie de experiencias matemáticas que por un lado irán afianzando sus métodos de razonamiento y formas de planteamiento de cara a la resolución de cuestiones y problemas en el álgebra lineal. Esta actividad y protagonismo proporcionado por el uso de DERIVE irá generando ciertos grados de autonomía cognitiva en el alumnado, que en ocasiones le proporcionará las respuestas necesarias para trabajar con cierta independencia en las actividades matemáticas que puedan surgir.

5. La utilización del ordenador, de forma individual y en grupo puede ser un elemento de MOTIVACIÓN para el aprendizaje, ya que el uso del ordenador introduce por un lado elementos novedosos, y también puede permitir desarrollar un APRENDIZAJE COLABORATIVO, aumentando de esta forma las relaciones de comunicación en el aula.

6. El aprendizaje del programa DERIVE es *sencillo*, y no supone una barrera adicional para el aprendizaje del álgebra lineal, además ofrece Se trata en definitiva, de un programa de cálculo simbólico que permite manipular los conceptos algebraicos sin demasiado esfuerzo adicional.

7. Los problemas a plantear pueden contener datos reales, ya que las rutinas algebraicas pueden ser ejecutadas por el propio sistema, acercando de esta forma el álgebra lineal a situaciones reales. Asimismo, esta posibilidad de simplificar los procesos rutinarios puede permitirnos desarrollar múltiples estrategias de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS; ya que los procesos no se verán entorpecidos por las rutinas de cálculo.

8. Los errores o limitaciones de los programas de cálculo simbólico, pueden ser utilizados como elementos didácticos a través de los cuales podremos evitar caer en la concepción errónea "el ordenador lo resuelve todo", obligando de esta forma a verificar razonadamente los datos obtenidos por el ordenador. Además este análisis de errores irá acentuando en cierta medida la autonomía cognitiva del alumno, dado que el alumno irá adquiriendo suficiente madurez para enfrentarse con autonomía a los problemas, reconociendo los errores que pueden desprenderse del uso del programa.

Así pues el programa DERIVE se perfila como una herramienta didáctica capaz de provocar los cauces que permitan organizar plenamente la actividad del alumnado, convirtiéndose de esta forma en un excelente medio para la enseñanza aprendizaje del álgebra lineal, circunstancia que configura los elementos centrales de las cuestiones objeto de nuestra investigación.

B) UNA METODOLOGÍA EXPERIMENTAL PARA LA ADQUISICIÓN DE APRENDIZAJES SIGNIFICATIVOS.

Actualmente existen dos tendencias básicas que dominan el panorama de la enseñanza de las Matemáticas: “*una que defiende la enseñanza directa: una determinación muy explicita de lo que se quiere que aprendan los estudiantes, una exposición muy clara de la información que corresponde, una considerable ejercitación y práctica en esa precisa información y una evaluación para esa misma información; y otra alternativa que defiende que, antes de enfrentarse con nuevas ideas, el estudiante debe de proveerse de la experiencia adecuada para que cualquier término o concepto nuevo se corresponda con algo que ya forma parte de su experiencia personal. Experiencia que se refiere a experiencia concreta, suficiente juego y exploración para que el estudiante haya construido, creado, una representación mental razonablemente fuerte que se convierta en la base del conjunto de herramientas con las que pensar*” [Davis, 1990, págs. 93-94]. Consideramos que la postura más adecuada es la que potencia una experimentación del alumno, sobre la base de unos conocimientos previos. A través de esa experimentación guiada el alumno puede descubrir de forma significativa los conceptos, ya que asimila el nuevo conocimiento relacionándolo con algún aspecto relevante ya existente de la estructura cognitiva del individuo, es decir adquiere lo que se denomina un aprendizaje significativo [Ausubel-Novak-Hanessian, 1987], [Ausubel-Robinson, 1969]. El grado de significación dependerá de la extensión de la idea y las ya existentes en la estructura cognitiva, ya que el aprendizaje puede ser no significativo o de significación nula siempre que no sea posible relacionar el resultado con un conocimiento preexistente. En realidad esta significación del aprendizaje se podría comparar con las ideas de [Skemp, 1989] entre "comprensión instrumental" y "comprensión relacional". La comprensión instrumental de un concepto cuantitativo consistirá en disponer sólo de una colección de reglas (posiblemente memorizadas) para llegar a las respuestas de una limitada clase de problemas. La comprensión relacional por el contrario consistirá en disponer de un esquema apropiado o conjunto de estructuras conceptuales suficientes para resolver una clase de problemas más amplia. Según Ausubel, para lograr el nivel de significación óptimo se propone la enseñanza por descubrimiento en oposición a la enseñanza receptiva. En la enseñanza por descubrimiento lo que debe de aprenderse no se presenta de forma final sino que debe ser descubierto por el estudiante, es decir, *"se refiere a la situación en la cual el material a aprender no se presenta al estudiante en su forma final (como se hace en la enseñanza receptiva) sino que requiere emprender cierta clase de actividad mental (refundir, reorganizar o transformar el material dado) antes de incorporar el resultado final a la estructura cognitiva"* [Ausubel-Robinson, 1969]. Aunque no debemos identificar enseñanza por descubrimiento con aprendizaje significativo ni enseñanza repetitiva con aprendizaje memorístico, sin embargo para la enseñanza y aprendizaje de las Matemática y en particular del álgebra lineal, la experimentación debe ocupar un papel preponderante en los procesos de enseñanza aprendizaje. Uno de los motivos de esta importancia proviene de la forma en la que se ha construido el conocimiento matemático. La construcción del conocimiento matemático ha sido una consecuencia directa de la experimentación y de la observación de los procesos realizados por numerosos matemáticos a lo largo de la historia. Efectivamente, tras numerosas experimentaciones e indagaciones concretas, el matemático es capaz de conjeturar en unos casos o de intuir en otros los comportamientos generales de los elementos que constituyen la esencia del quehacer matemático: los hechos y principios matemáticos. Solamente después de este proceso previo de manipulación "concreta" el matemático es capaz de poner en marcha los potentes mecanismos de la lógica para deducir a partir de los "principios ya establecidos y demostrados" una demostración formal de las conjeturas e intuiciones descubiertas. La especial trascendencia que para la educación matemática tiene el proceso, tanto histórico como personal, de construcción empírica e inductiva del conocimiento matemático, y no sólo formal y deductiva, incita a resaltar dicho proceso de construcción. Aunque la formalización y estructuración del conocimiento matemático proporcionan una visión de problemas complejos, sin embargo el sistema deductivo no debe ser el punto de partida, sino más bien un punto de llegada en ese largo proceso de aproximación a la realidad [MEC, 1992-b] Si analizamos este proceso obtenemos varias de las claves que configuran una metodología experimental basada en la adquisición de aprendizajes significativos. El primer elemento que configura esta metodología es la **“experimentación matemática”** es decir, la manipulación concreta de los objetos matemático, uno de los elementos centrales del quehacer matemática. El segundo elemento a tener en cuenta es la existencia de los “principios previamente establecidos”, los que podemos denominar **“conocimientos previos”** a partir de los cuales se debe construir el conocimiento matemático de forma significativa. Con la incorporación del sistema DERIVE en el aula de álgebra lineal, los alumnos podrán experimentar sobre la base de sus conocimientos previos la posibilidad de descubrir relaciones y propiedades sin la dificultad que entraña tener que realizar cálculos rutinarios intermedios, desarrollando así de una manera significativa los contenidos esenciales que se van introduciendo. Utilizando DERIVE de esta manera se profundiza en el proceso de experimentación y el alumno puede centrar sus esfuerzos en la fase de modelización y aplicación, dejando para el ordenador los cálculos algebraicos no esenciales. Con este programa el estudiante además de conseguir un aprendizaje más activo, descubriendo y construyendo su propio conocimiento, podrá además verificar rápida y eficazmente sus resultados. Estamos por tanto, favoreciendo la adquisición de aprendizajes significativos por medio de una metodología experimental basada en el descubrimiento del conocimiento matemático con la asistencia del programa DERIVE.

C) EL USO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO NÚCLEO DE PROFUNDIZACIÓN DE LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS

Las estrategias didácticas basadas en la resolución de problemas han tenido un fuerte auge en los últimos años, de hecho organismos e instituciones educativas (N.C.T.M., 1981; N.C.S.M., 1978) propusieron como objetivo prioritario de la educación matemática que los alumnos adquieran y desarrollen estrategias para resolver problemas, ya que la sociedad actual requiere una mayor maduración cognitiva: Se requieren mentes más hechas más que mentes llenas de contenidos del currículo.

Las estrategias de este tipo permiten que los alumnos consigan varios objetivos:

- ASIMILAR unas informaciones, conceptos y principios
- Ser capaces de TRANSFERIRLAS para solucionar problemas más globales
- ANALIZAR Y SINTETIZAR situaciones problemáticas
- ADQUIRIR Y DESARROLLAR estrategias de resolución de problemas. [Bautista, 1987]

Son estrategias que hacen reflexionar al alumno, impidiendo el tradicional APRENDIZAJE MEMORÍSTICO; ya que la necesidad de transferencia, análisis y síntesis obliga a relacionar los conceptos matemáticos de una manera no artificial e inconexa.

La resolución de problemas se convierte así en un instrumento metodológico de suma importancia. La reflexión que se lleva a cabo durante la resolución de problemas ayuda, sin duda, a la construcción de conceptos y a establecer relaciones entre ellos.

Además de estas ventajas, la resolución de problemas permite abordar algunas características educativas importantes tales como:

- Permiten elevar el grado de MOTIVACIÓN del alumno, planteando situaciones problemáticas de contenido cercano y de interés para el alumno que susciten en ellos un trabajo creativo

- Permiten una ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD, ya que se pueden proponer problemas con diferentes niveles de dificultad, de acuerdo con el nivel de cada alumno. De hecho este tipo de estrategias permiten introducir variables educativas capaces de detectar el talento especial en matemáticas [Guzmán, 1998].

- Facilita las RELACIONES DE COMUNICACIÓN, con múltiples emisores y receptores de información [Bautista, 1987]

- Las estrategias basadas en la resolución de problemas pueden facilitar el APRENDIZAJE COLABORATIVO, instrumento que facilita las relaciones de comunicación entre alumnos, contenidos y profesor. Además, este tipo de aprendizaje puede verse muy favorecido con la introducción de los ordenadores en el aula [Crook, 1999]

- La resolución de problemas, permite que los alumnos obtengan un CONOCIMIENTO RELACIONAL, de tal forma que la estructura del conocimiento matemático que se adquiere permite anclarse en relaciones implícitas entre los conceptos y las situaciones problemáticas a resolver, conocimiento que es bien sabido resulta más duradero que el mero conocimiento memorístico [Guzmán, 1991].

Por otro lado el uso de DERIVE en la resolución de problemas es un elemento que puede incidir muy positivamente en los procesos de MOTIVACIÓN, ASIMILACIÓN y TRANSFERENCIA DE CONTENIDOS.

En cuanto a la MOTIVACIÓN ya hemos comentado que el uso de los ordenadores en sí mismo es una variable que estimula inicialmente al alumnado; si a esto unimos la utilización del ordenador para resolver problemas de álgebra lineal, entonces el grado de motivación se puede multiplicar por dos. Efectivamente, el uso de DERIVE le permitirá al alumno procesar y representar la información que se plantea en el problema de una forma cómoda, permitiendo que el alumno dedique su atención al sentido de los datos y a l análisis de los resultados. Además, el alumno puede ejecutar con gran rapidez sus ideas, experimentando y manipulando con eficacia sus ideas, y recibiendo en todo momento numerosas respuestas interactivas a través del sistema. Todo ello genera un contexto que proporciona elementos para incrementar la motivación.

Los proceso de ASIMILACIÓN de informaciones, conceptos y principios matemáticos también se pueden ver favorecidos directamente por el uso de DERIVE. La capacidad de almacenamiento de DERIVE así como sus posibilidades gráficas y algebraicas ofrecen unas magníficas ventajas para que el alumno asimile los contenidos involucrados en los problemas que se plantean.

Por último, debemos señalar que DERIVE también permite generar un contexto adecuado para realizar las generalizaciones, es decir, para TRANSFERIR aquellas ideas e intuiciones que surgen con la experimentación y manipulación de problemas concretos, hacia situaciones más complejas y generales.

Entre las estrategias de resolución de problemas y las características propias del medio computacional existen grandes confluencias didácticas ente las que merece la pena destacar las siguientes:

1) Una de las grandes ventajas que tienen los ordenadores es su posibilidad de realizar MULTIPLES REPRESENTACIONES de una misma situación; en concreto se pueden mostrar expresiones algebraicas y sus representaciones gráficas que en numerosas ocasiones facilitan la asimilación y transferencia de conceptos matemáticos. Esta multiplicidad de representación conecta directamente con la idea de encontrar diversas estrategias de resolución, ya que posibilitan obtener diferentes enfoques de una misma situación problemática.

2) Ya que la riqueza del pensamiento matemático no se fundamenta en las soluciones, sino en los PROCESOS DE PENSAMIENTO que han conducido a esas soluciones; con la resolución de problemas obtenemos un enfoque claro hacia los procesos más que hacia los conceptos. Por otro lado, la enseñanza rutinaria de las matemáticas, ha obligado a realizar numerosas operaciones tediosas que impiden captar la importancia del proceso, ocultando en cierta forma con la operativa el contenido esencial del proceso matemático. En este sentido, los ordenadores pueden facilitar que esas operaciones tediosas se realicen de forma instantánea, garantizando así, que la visión de los CONTENIDOS no sea ensombrecida por la operativa. De esta forma, el ordenador se convierte en un medio didáctico muy apropiado para la RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS, ya que se convierte en una herramienta de EXPLORACIÓN MATEMÁTICA.

3) LA COMPROBACIÓN DE HIPÓTESIS puede ser considerada como una de las fases o etapas que integran la resolución de problemas. Efectivamente, toda estrategia de resolución de problemas consta de cuatro fases fundamentales: comprensión, planificación, ejecución y verificación. La comprobación de hipótesis se puede incluir dentro de la verificación: después de plantear una hipótesis de resolución y haber obtenido una posible solución, es necesario comprobar que la hipótesis o la solución que hemos propuesto es la solución correcta del problema. Esta etapa que es una mera comprobación de relaciones, puede ser realizada de forma automática por el sistema de cálculo algebraico permitiendo de esta forma completar el ciclo de la estrategia resolutiva.

4) LA INTUICIÓN MATEMATICA, es un elemento fundamental del quehacer matemático que se va adquiriendo a medida que nuestro aprendizaje matemático va aumentando. Enfocar y resolver un problema de forma intuitiva es quizás una de las posibles salidas ante situaciones problemáticas adversas. Esa exploración formal de lo que nuestra intuición matemática nos sugiere ha sido a lo largo de la historia un elemento central para el descubrimiento de grandes relaciones en numerosos matemáticos. Esta capacidad matemática, no se adquiere más que con la RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS, no hay otra forma, pues no es fruto de un aprendizaje sino que surge de la experiencia y en numerosas ocasiones de capacidades extraordinarias que poseen y han poseído algunos matemáticos privilegiados. Sin embargo es una baza que no debemos eliminar sino que más bien debemos intentar potenciarla. En este sentido los sistemas de cálculo algebraico son un excelente medio para la exploración matemática y por tanto para la investigación

e indagación de las situaciones que la intuición en algunas ocasiones propone. Relaciones entre diversas disciplinas, analogías y relaciones innatas que permiten encontrar la solución a problemas o situaciones en ocasiones muy complicadas.

D) LA POTENCIACIÓN DEL APRENDIZAJE COLABORATIVO

Por regla general, los ordenadores no se contemplan como objetos que contribuyan a la calidad "social" de nuestra vida. Sin embargo, según afirma Crook [Crook, 1999] "*los ambientes educativos son necesariamente ricos en experiencias organizadas en el plano social*". Esta idea, lleva implícita la concepción del aprendizaje como un aprendizaje "colaborativo". Existen opiniones que afirman que los ordenadores pueden ejercer una influencia negativa en el desarrollo social de los alumnos [Boden, 1981], [Brod, 1984], [Papert, 1982]. Una de ellas tiene que ver con la posible interpretación mecanicista de la actividad humana, y en particular de las matemáticas, difuminando las diferencias que hay entre nosotros mismos y las máquinas. Esto conlleva una visión mecanicista del aprendizaje, lo que puede provocar en los alumnos la generación de mundos socialmente aislados. Sin embargo, estos temores según Crook [Crook, 1992] son exagerados, pues muchos de ellos dependen de una visión particular del ordenador dedicada a la programación. Pero la actual generación de usuarios encuentra los ordenadores como una forma más afín a la concepción de las herramientas sociables. Este miedo al "pensamiento en aislamiento" es muy habitual en los comentarios críticos sobre la forma en que se ha desplegado la tecnología educativa. Sin embargo [Crook, 1999] considera que los ordenadores nos exigen considerar con mayor detenimiento el carácter y el alcance de la "colaboración" tal como puede organizarse en la educación y, en particular, juzgar hasta qué punto la energía social que pueda percibirse en las clases supone un tipo de interacción de gran significación para el aprendizaje y desarrollo cognitivo.

E) EL USO DE INTERNET: PÁGINAS WEB Y CORREO ELECTRÓNICO.

Las posibilidades que ofrece Internet en cuanto a la comunicación están basadas fundamentalmente en el uso de páginas hipertexto (páginas web) y el correo electrónico. Son dos de las utilidades más difundidas y con mayores posibilidades educativas.

Las páginas web son un excelente instrumento mediador que permite estructurar la información en torno a ideas fundamentales, facilitando una rápida accesibilidad del alumnado a documentos que intercalan textos, dibujos y figuras variadas. La estructuración de estas páginas diseñadas en el lenguaje HTML (HyperText Markup Language) hacen posible que los alumnos accedan a través de la red de una amplia información referente a problemas, explicaciones de contenidos, cuestiones y ejercicios. En ocasiones también se pueden ejecutar programas interactivos (a través de applets) escritos en lenguaje Java, que pueden servir de apoyo didáctico adicional.

Por otro lado, consideramos que el correo electrónico, es un medio muy eficaz para ofrecer una tutoría interactiva. Suele ser un problema habitual en los alumnos que las dudas no sean resueltas en el momento adecuado. Tener la posibilidad de utilizar el correo electrónico para preguntar dudas, y cuestiones, puede acortar ese espacio de duda que suelen tener los alumnos. Asimismo, suele ser frecuente que existan numerosas dudas que se REPITEN numerosas veces, y este hecho puede permitirnos construir en las páginas web, lugares denominados comúnmente FAQ (FREQUENTLY ASKED QUESTIONS), que nuevamente permitirán a los alumnos responder más rápidamente las dudas y cuestiones que les surjan. Además, creemos que el uso del correo electrónico, puede ser un instrumento muy válido para potenciar una comunicación no sólo entre profesor y alumno, sino que entre los propios alumnos, potenciando así lo que puede considerarse un APRENDIZAJE COLABORATIVO.

En particular el uso de páginas web para el desarrollo de un curso de álgebra lineal que incorpora un sistema de cálculo algebraico como DERIVE, se convierte en una herramienta didáctica auxiliar, ya que permite a los alumnos mantener toda su atención en el trabajo experimental proporcionado por el programa. Esta circunstancia se hace posible porque los alumnos pueden acceder a los contenidos teóricos expuestos en el aula mediante la consulta de los documentos html contenidos en la web, pudiendo de esta manera utilizar de forma simultánea el programa DERIVE o bien la página web que les facilita la información necesaria en cada momento para desarrollar las prácticas y problemas propuestos en el aula. Además, la elevada estructuración del contenido permite que los alumnos sean capaces de obtener una estructuración de los contenidos de álgebra lineal que se vayan a impartir.

El uso de las páginas web y el correo electrónico se pueden considerar de esta forma ARGUMENTOS GENERALES de nuestra estrategia, pero tienen un carácter particular cuando se consideran de forma simultánea con los sistemas de cálculo algebraico. Estos dos medios auxiliares de la estrategia didáctica que pretendemos desarrollar se convierten por un lado en un SISTEMA GRÁFICO E INTERACTIVO sobre el que se pueden encontrar los documentos que muestran las explicaciones y contenidos de álgebra lineal que se vayan desarrollando, también son un excelente medio que nos permitirá hacer accesibles para los alumnos, extensas colecciones de ejercicios de manipulación, cuestiones y problemas centrados en los contenidos que se van impartiendo en cada momento.

Una vez descritos los principios metodológicos de nuestra estrategia didáctica, vamos a analizar la relación que guardan dichos principios con la introducción del programa de cálculo simbólico DERIVE.

II.2.1. Resolución de problemas con el uso de DERIVE.

El término resolución de problemas puede tener varias interpretaciones, y de hecho en general se pueden establecer diferentes criterios para clasificar esta terminología, nosotros elegimos la terminología utilizada por [Orton, 1990] según el cual la resolución de problemas se concibe como la generadora de una proceso a través del cual quien aprende combina elementos de procedimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente adquiridos, para dar soluciones a una situación nueva, que en general suele denominarse situación problemática. Así pues una situación problemática se podría definir como una tarea que tiene tres características fundamentales:

1) La tarea provoca en el receptor o persona que se enfrenta a ella un deseo o necesidad por encontrar solución.
2) el procedimiento para encontrar la solución no es a priori un procedimiento accesible para la persona
3) la persona que intenta resolver hace varios intentos

La resolución de problemas no es una novedad de nuestros tiempos, de hecho numerosos matemáticos han sabido reconocer a lo largo de la historia que el elemento central del quehacer matemático es justamente la resolución de problemas. Ya hemos citado anteriormente la presencia de la resolución de problemas en la historia de las matemáticas, en particular en documentos tan antiguos como el papiro de Rhind (s. XVII a. C.). Con estos vestigios podemos afirmar que las Matemáticas parecen haber encauzado sus ideas a través de la resolución de situaciones problemáticas, es más, las Matemáticas sirven para entender y tratar los problemas de la vida práctica. A pesar de que este tópico es fundamental en las Matemáticas, una cuestión relacionada con la resolución de problemas que surge de forma inmediata cuando intentamos formular una metodología de este estilo podría ser la siguiente

¿para enseñar Matemáticas hay que empezar resolviendo problemas y a la vista de las necesidades motivadas por el propio problema introducir la teoría necesaria para resolverlo, o

bien, comenzar directamente con a introducción de las estructuras abstractas que permitirán al alumno resolver problemas y luego resolverlos?.
La contestación a esta pregunta plantea dos opciones metodológicas bien distintas una que pasa de la teoría a la práctica y otra que va de la práctica a la teoría.

En la década de los años 60 y 70, la metodología propuesta por la matemática moderna planteó que los problemas que podían interesar a los alumnos durante su período escolar dejarían de tener vigencia al terminar sus estudios por lo que sería mejor preparar a los alumnos en sus facultades de deducción y lógica introduciéndole en las modernas estructuras matemática a partir de las cuales el alumno podría encontrar la solución a cualquier problema por adaptación, es decir se estimó que lo fundamental era enseñar a aprender. Sin embargo, tal como ha quedado patente esta experiencia fue un fracaso ya que la transferencia de los conocimientos abstractos a los problemas reales y concretos no era en absoluto fácil ni inmediato [Santaló y otros, 1994]. Este tipo de enseñanza formalista y abstracta puede provocar que la matemática sea un conjunto de definiciones y teoremas que el alumno aprende de memoria sin entender su significado, así se pierde la utilidad de las Matemáticas, convirtiéndose en una falsa matemática de algoritmos y definiciones. Sin embargo al iniciarse la década de los 80 el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) de USA recomendó que *"la solución de problemas sea el principal objetivo de la enseñanza de las matemáticas en la escuela"*. El protagonismo de la resolución en la educación matemática adquirió mucha importancia de hecho en el IV Congreso Internacional de Educación Matemática (Berkeley, 1980) se dedicó un capítulo entero a la importancia de la resolución de problemas en la educación matemática lo mismo sucedió en el V Congreso Internacional sobre Educación Matemáticas (Adelaide, 1984, Australia) y en el VI Congreso Internacional sobre Educación Matemática (Budapest, 1988).

La importancia de la resolución de problemas en el aprendizaje de las Matemáticas es una circunstancia admitida de manera global entre toda la comunidad matemática. Y es que para aprender Matemáticas no se puede prescindir de los fines que esta persigue, porque el conocimiento de las finalidades tiene importancia tangible e inmediata en el aprendizaje. Es bien sabido que se aprende mucho mejor y más rápido si se hace buscando algo. Esto se aplica particularmente a la matemática y este hecho pasa a formar parte de la experiencia personal directa de quienes despliegan una actividad matemática prolongada. La presencia de una meta más o menos definida ilumina el camino a seguir, aviva el interés y permite valorar los distintos aspectos de la disciplina destacando lo primero y relegando lo secundario al lugar que le corresponda. Por tanto es muy importante en el planteamiento de la resolución de problemas HACER COMPRENDER LAS METAS hacerlas cercanas. Estas ideas quedan patentes en las palabras pronunciadas por A.P. Calderón en una conferencia en la que reflexiona sobre el aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas:

> "*...resulta claro que más importante que acumular información es interiorizarse de métodos y saber qué propósito tienen, es decir saber dónde parten y adonde llevan. ¿Pero cómo se estudian o aprenden los métodos? Los métodos son herramienta de trabajo y así como es prácticamente imposible aprender un oficio solo estudiando catálogos o exposiciones tampoco es posible aprender matemática como observador pasivo. Por eso la resolución de problemas es un ejercicio tan importante. Vale mucho más ser capaz de resolver problemas no triviales que hacer acopio en la memoria de enunciado, teoremas y demostraciones. Además la resolución de problemas nos hace palpar el poder de nuestra imaginación que, controlado por el razonamiento riguroso, nos hace descubrir realidades cuya existencia no sospechábamos. Ahondando más en el problema del aprendizaje de métodos, una de las técnicas de dominar es estudiar el enunciado e intentar por uno mismo su resolución. Si esto no se logra después de haberlo intentado seriamente, buscar indicios, en libros, a través del profesor, e intentar sucesivamente hasta lograrlo. Aunque es un método de estudio más lento sin duda es más fructífero que el meramente receptivo, ya que brinda el placer intelectual que deparan los juegos de ingenio y nos da, al menos en parte, la satisfacción del acto creador: nos hace sentir que estos enunciados, aunque descubiertos por otros, son en parte nuestro. El profesor tiene una misión muy importante a este respecto pues debe tener cautela al proponer problemas a sus alumnos no deben ser ni demasiado fáciles ni demasiado difíciles, pues pueden impedir que estos avancen y provoquen el desaliento*." [Calderón, 1986]

Una de las razones de la importancia de la resolución de problemas es el valor que otorga la sociedad a los procesos de información unido al enorme crecimiento del conocimiento que ahogaría un currículum que se orientara fundamentalmente a la información [Carrillo, 1994]. Además la resolución de problemas no es una necesidad que haya surgido por el crecimiento del conocimiento, se trata de una auténtica opción metodológica. Efectivamente, si pretendemos que el aprendizaje de nuestros alumnos sea un aprendizaje significativo, en el sentido de que los esquemas propios se acomoden para hacer posible la asimilación de la nueva información, en lugar de un aprendizaje memorístico, en el que las asociaciones que se adquieren no son relacionables de manera sustancial con la estructura cognitiva [Ausubel-Novak-Hanesian, 1976] tenemos la posibilidad de optar por un aprendizaje por recepción o un aprendizaje por descubrimiento [Bruner, 1960]. Pero si pensamos que el alumno no sólo debe aprender conceptos, sino procedimientos y estrategias generales, actitudes y valores, no tendremos más remedio que inclinarnos hacia el aprendizaje por descubrimiento en el que la resolución de problemas juega un papel esencial. Por otro lado los avances en Psicología de la Educación, sobre los pilares del aprendizaje significativo y la psicología constructivista, han empujado a la resolución de problemas a situarse como una de las estrategias recomendables para procura la construcción de conocimiento significativo por parte de los alumnos. Además debemos añadir más razones sustentadas en la propia concepción de la matemática: *"El saber matemático es mucho más que un saber de método que de contenido... La Matemática como* *conocimiento a encontrar, no como enseñanza a impartir.... La Matemática es una verdadera ciencia experimental"* [Guzmán, 1985].

Con el uso de DERIVE, la resolución de problemas puede adquirir una mayor importancia dentro de las metodologías que incluyen el uso de estos programas. Teniendo en cuenta que para resolver un problema podemos distinguir cuatro etapas fundamentales:

1) Una primera etapa que consiste en elegir el MODELO MATEMÁTICO que nos puede permitir resolver el problema, es decir asociar al problema real un modelo matemático que puede hacernos llegar a su resolución.
2) Una segunda etapa consistente en APLICAR LOS ALGORITMOS propios del modelo matemático para obtener las soluciones del modelo.
3) Una tercera etapa que consiste en TRASLADAR LOS RESULTADOS del modelo matemático al modelo real, es decir traducir el lenguaje matemático al lenguaje del modelo real.
4) Y una cuarta etapa que consiste en VERIFICAR LAS SOLUCION, es decir, comprobar que los datos obtenidos cumplen las condiciones que requería el problema, ya que en caso contrario sería necesario replantear el problema para encontrar posibles errores o por el contrario plantear otro modelo con el cual resolver el problema.

Podemos afirmar que el uso de un programa de cálculo simbólico como DERIVE permite simplificar numerosos cálculos que resultan de la segunda etapa, cálculos que con frecuencia ocupan la mayor parte del tiempo [Kutzler, 1999]. Actualmente la resolución de problemas se trata a medias, ya que el mayor énfasis se sitúa en la segunda etapa, en el cálculo y su ejecución con lápiz y papel, de tal forma que la resolución se convierte en su conjunto en una práctica de habilidades de cálculo. De esta manera la capacidad de traducir realidades en modelos matemáticos y su conversión posterior a la realidad ocupan poco tiempo en el aula impidiendo de esta manera un desarrollo aconsejable de esta habilidad; provocando así un cierto temor entre los alumnos para realizar este tipo de ejercicios. Una consecuencia inmediata es que los alumnos creen que los problemas están reservados a los alumnos más dotados. Con el empleo de DERIVE podemos dedicar un tiempo suficiente para enseñar la elección de los modelos y su posterior traducción, así mismo permitimos a los alumnos experimentar en la resolución de problemas de manera que lleguen al convencimiento de que son capaces de resolver problemas. Esta falta de tiempo que plantean los métodos tradicionales para aplicar la resolución de problemas sería un argumento que perdería toda su razón de ser.

Por otro lado con el uso de DERIVE los problemas que se pueden plantear pueden ser problemas más cercanos al alumno y más cercanos a la realidad, sin que sea necesario plantear los típicos problemas de resultado exacto y casi inventado, favoreciendo así un acercamiento del álgebra lineal al alumno y a la vida real, por su aplicabilidad y utilidad.

Pero además debemos tener en cuenta las relaciones de comunicación que suscita una metodología basada en resolución de problemas y más en concreto cuando los cálculos no son el elemento central. El debate entre los alumnos para buscar las soluciones o los modos de resolver así como las diferentes maneras por las que se puede llegar al resultado pueden provocar situaciones de enriquecimiento mutuo entre los alumnos y como no entre alumnos y profesor. Esta disparidad de métodos que puede surgir permitirá que los estudiantes relacionen los conceptos previos, e incrementen su comprensión de los aspectos matemáticos que rodean el problema.

II.2.2. Los sistemas de cálculo algebraico y el aprendizaje colaborativo.

De las tres perspectivas psicológicas más generales sobre el aprendizaje y la cognición: teoría computacional de la cognición, el constructivismo y la teoría sociocultural, según [Crook, 1999] la tercera perspectiva, la sociocultural, es la más adecuada para tratar algunos de los problemas relacionados con la implementación del aprendizaje por ordenador, sobre todo los relacionados con la visión educativa relacionada con el contexto social de la actividad educativa. Según la teoría sociocultural de la cognición, el aprendizaje es una experiencia fundamentalmente social que estimula la evaluación de todos los recursos educativos nuevos en relación con sus posibilidades de enriquecer los contextos interpersonales del aprendizaje. Esta "teoría cultural" aplicada a la cognición, suele referirse a un cuerpo de ideas inspirado por el movimiento socio histórico soviético de los años treinta (VYGOTSKY, LURIA Y LEONTIEV). La perspectiva cultural de esta psicología, se distingue claramente de otras visiones psicológicas de fundamentación biológica, por su orientación clara hacia las prácticas y artificios que constituyen la cultura. Si para los biólogos la "cultura" es el medio en el que se sustenta el material viviente, para los psicólogos culturales la "cultura" constituye el MEDIO para la actividad humana. La importancia de la cultura en la cognición y aprendizaje humanos se basa en la interacción necesaria entre el pensador y su medio, es decir, su contacto con una cultura de recursos materiales y sociales que apoya en todas partes su actividad cognitiva. Así pues, los atributos cognitivos de un individuo son fundamentalmente el resultado de su compromiso con la cultura, "*el objetivo básico del enfoque sociocultural de la mente consiste en crear una descripción de los procesos mentales que reconozca la relación esencial entre estos procesos y sus marcos culturales, históricos e institucionales*" [Wertsch, 1991].

Con esta visión se observa la importancia de los elementos mediadores en los procesos de cognición y aprendizaje. Efectivamente, una realización característica de los humanos consiste en haber desarrollado herramientas configuradas de forma material y simbólica, herramientas que VYGOTSKY distinguía en herramientas técnicas y herramientas psicológicas (notaciones, diagramas, señales verbales,...). La mediación que llevan a cabo estas clases de herramientas define los problemas que se engloban en el campo de la psicología cognitiva. Entre los elementos mediadores que se han estudiado en este campo de la psicología podemos señalar el interés que en su día mostró VYGOTSKY por la capacidad humana de inventar sistemas simbólicos completos, como en las Matemáticas. La importancia de la adopción de sistemas simbólicos nos sitúa en una posición de constante interpretación del mundo, en vez de situación de respuesta. Estos nos hacen experimentar el mundo de maneras determinadas leyéndolo de un modo que refleje nuestra propia historia, característica fundamental del contacto con esos sistemas de mediación. Sin embargo a pesar de estas ideas que orientan el uso de los ordenadores utilizando la visión sociocultural del aprendizaje, consideramos que las colaboraciones que proporcionan el contacto de los alumnos con el ordenador no son el elemento central del aprendizaje, sino que son uno de los múltiples factores que proporcionan al alumno un aprendizaje adecuado cuando se enfrenta a un conjunto de conceptos. Por ello, situamos nuestra estrategia en el contexto de la teoría constructivista del aprendizaje apoyada por las colaboraciones que brinda este medio computacional. Podemos decir que se trataría de una visión que toma como fundamento la construcción del conocimiento por el propio individuo pero apoyando esta construcción por medio de las múltiples colaboraciones que recibe del entorno social, muy en especial del entorno y contexto ofrecido por el ordenador y los programas de cálculo simbólico.

II.2.3. La adquisición de aprendizajes significativos con ayuda de DERIVE.

El aprendizaje es un tema que ha suscitado numerosas investigaciones y posturas. Así por ejemplo para Vygotski el aprendizaje es una condición necesaria para que se produzca el desarrollo que necesita el individuo a partir de la relación con los otros. Esta relación social es la que según Vygotski posibilita al individuo situaciones del individuo, diferenciando dos tipos de aprendizaje un aprendizaje por sí mismo y un aprendizaje que se puede desarrollar en un marco social adecuado denominado desarrollo potencial. Así pues el aprendizaje de un individuo para Vygotski, no depende solo de su nivel evolutivo como afirmaba Piaget, sino que también de lo que puede hacer con la ayuda de otros, porque las interacciones entre iguales y entre alumno y profesor son muy importantes en el proceso social del aprendizaje. Un término muy importante en la teoría del aprendizaje según Vygotski es la denominada ZONA DE DESARROLLO POTENCIAL (zona de desarrollo próximo ZDP), que indica la distancia que hay entre el nivel actual de desarrollo del individuo (determinado por la capacidad de resolver independiente un problema) y el nivel de desarrollo potencial (determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un experto o en colaboración con otro compañero más capaz). La importancia de la colaboración en el aprendizaje es un tema que hemos considerado en el apartado anterior, que junto a la introducción del ordenador en el aula puede crear contextos colaborativos muy positivos para la consecución de aprendizajes, en la línea marcada por Vygotski. Pero existe otro tipo de aprendizaje que es el que nos ocupa en este apartado que fue introducido básicamente por Ausubel. Según este investigador el aprendizaje puede ser aprendizaje receptivo y aprendizaje por descubrimiento. El aprendizaje receptivo está caracterizado porque el alumno recibe el contenido que luego ha de interiorizar de forma que posteriormente sea recuperable, por el contrario el aprendizaje por descubrimiento fuerza al alumno a descubrir el material por sí mismo antes de incorporarlo a su estructura cognitiva. En estos dos tipos de aprendizaje podemos encontrar dos estilos de aprendizaje, un aprendizaje mecanicista o un aprendizaje significativo. Decimos que un aprendizaje es mecánico cuando la tarea de aprendizaje consta de asociaciones puramente arbitrarias, por el contrario diremos que el aprendizaje es significativo cuando las tareas están relacionadas entre sí y el sujeto aprende a partir de estas relaciones. Según Ausubel el aprendizaje significativo constituye un proceso mediante el cual se asimila un nuevo conocimiento relacionándolo con algún aspecto relevante ya existente en la estructura cognitiva del sujeto, de esta forma, si se intenta que el sujeto adquiera conceptos que no es capaz de relacionar con sus contenidos previos, es decir con el conocimiento que está dentro de su estructura cognitiva, entonces sólo podrá aprender dichos conceptos de forma memorística. Aunque los dos tipos de aprendizajes receptivo y por descubrimiento, pueden ser significativos, sin embargo el aprendizaje receptivo tiene una tendencia mayor para convertirse en memorístico y no significativo ya que en este tipo de aprendizaje se presenta al alumno el contenido total a aprender como un producto completamente elaborado y terminado, y su única misión es incorporar el material de modo que luego pueda reproducirlo, situación que en la mayoría de los casos se realiza de forma memorística. Por eso parece globalmente aceptado que el aprendizaje por descubrimiento es un estilo que permite al estudiante construir de forma activa su propio conocimiento, realizando actividades mentales mediante las cuales el alumno incorpore los resultados a su estructura cognitiva, con la dirección del profesorado. Sin embargo, un aprendizaje por descubrimiento con una estrategia didáctica poco elaborada puede generar aprendizajes memorísticos. Para que el aprendizaje sea verdaderamente significativo la disposición de los contenidos debe ser gradual, y debe tener unas actividades que realmente susciten el interés y la motivación del alumno [Nortes, 1993].

Si deseamos que los alumnos adquieran un aprendizaje significativo en el contexto de las Matemáticas, y muy en especial en el Álgebra Lineal, debemos de tener muy en cuenta la estructura de la materia que estamos tratando, y los conocimientos previos del alumno, de tal forma que no se debe forzar a un alumno a asimilar nuevos conceptos, si éstos no están relacionados con el conocimiento que está dentro de su propia estructura cognitiva. En este sentido, la UNESCO (1973) recomendaba en la enseñanza de las matemáticas varios aspectos que merece la pena destacar:

1) La enseñanza se basa en la investigación y en el descubrimiento, recomendándose el aprendizaje de las matemáticas bajo el lema “aprender haciendo”
2) Trabajar en equipo con grupos pequeños
3) Iniciación al aprendizaje mediante varios tipos de situaciones problemáticas: familiares, artificiales, abstracción progresiva, aplicaciones a otros campos...

Actualmente el aprendizaje de las Matemáticas en las aulas suele ser un aprendizaje receptivo y en consecuencia mayormente de carácter memorístico, enmarcado en un proceso de enseñanza que ha “borrado” todo el camino tortuoso de conjeturas, generalizaciones, pruebas, fallos, comunicación,.... que ha caracterizado el proceso de creación del conocimiento matemático, y de hecho el conocimiento matemático que se obtiene se puede decir que es un “conocimiento ya hecho y establecido”. Según [Lampert, 1990] la cultura matemática escolar viene caracterizada por varios aspectos muy significativos:

- “hacer matemáticas” significa seguir las reglas dadas por el profesor
- “conocer matemáticas” significa aplicar las reglas correctas cuando el profesor pregunta y
- “la verdad matemática” es determinada cuando la respuesta es ratificada por el profesor.

Estos aspectos se podrían extender en primeros cursos de universidad en los que se observa un conocimiento matemático fundamentalmente memorístico, sin capacidad para resolver problemas diferentes a los planteados previamente en la escuela y sin relacionar el conocimiento anterior con el que se va adquiriendo, circunstancia que se incrementa cuando el alumno comienza a tener problemas de cálculo elemental, requisitos previos que en ocasiones se convierten en barreras infranqueables.

Si centramos nuestra atención sobre el aprendizaje del álgebra lineal en el contexto de la utilización de sistemas de cálculo algebraico podemos observar varias características al respecto:

1ª El sistema de cálculo algebraico es una herramienta idónea para ejercitar la experimentación matemática de nuevas situaciones en las que el alumno podrá invertir la mayor parte de sus esfuerzos en observar, conjeturar, comprobar resultados,... dejando en un terreno secundario el conjunto de cálculos algebraicos.

2ª Con los sistemas de cálculo algebraico se pueden plantear situaciones problemáticas más cercanas a la realidad, y por tanto que pueden provocar mayor motivación al alumnado.

3ª La velocidad de cálculo de los sistemas de cálculo algebraico permiten incorporar actividades de descubrimiento e investigación en el aula para introducir nuevos conceptos y principios, circunstancia que facilita impartir los programas establecidos.

4ª Los sistemas de cálculo algebraico pueden servir como herramienta compensatoria de aquellos alumnos con deficiencias en sus procesos de cálculo, ya que el CAS ejerce el papel de "andamio" sobre el cual el alumno puede sustentarse para continuar sus procesos de aprendizaje en contenidos que utilizan cálculos previos no fundamentales para la comprensión de los nuevos conceptos. Es el papel que según Kutzler [Kutzler, 1999] incorpora en su "scaffolding method" (método del andamiaje).

Estas características nos sitúan ante las puertas de un uso continuado del descubrimiento y la investigación en el aula de álgebra lineal, y generan situaciones de enseñanza para que el alumno de una respuesta personal construyendo conocimientos que aparecen como exigencias del medio y no del mero deseo del profesor. Este tipo de situaciones de enseñanza provocadas por el uso de los CAS (con una estrategia didáctica adecuada) son proclives a la adquisición de aprendizajes significativos, circunstancia por la que consideramos que el uso de este tipo de sistemas informáticos puede resultar altamente provecho para la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal.

II.2.4. Internet y DERIVE.

Los cursos interactivos en INTERNET son un hecho que comienza a tomar una especial importancia en el mundo educativo. En el campo de las Matemáticas, existen muchas experiencias educativas en esta línea. Las posibilidades que brinda INTERNET de realizar "applets" programados en lenguaje JAVA o JAVASCRIPT, introducen numerosas novedades en el terreno educativo que brindan enorme interactividad. También existen algunos cursos que utilizan de forma interactiva sistemas de cálculo simbólico, que previamente deben de estar instalados en el ordenador de consulta. También es frecuente encontrar los contenidos y materiales didácticos colgados en las páginas web, sirviendo de esta manera internet como banco de información de las diferentes asignaturas. Aunque este tipo de usos de internet es un soporte en el que se puede facilitar el aprendizaje de las Matemáticas de una manera interactiva, sin embargo consideramos que deben ser utilizados de forma complementaria a las clases habituales. Las relaciones de comunicación entre profesor y alumnos y entre los propios alumnos, son elementos fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje. El profesor es una figura fundamental en el aprendizaje por descubrimiento, ya que es el encargado de dirigir estos descubrimientos, de tratar las descompensaciones entre alumnos con una adecuada atención a la diversidad tanto de los alumnos avanzados como de los alumnos más retrasados, en definitiva es una figura fundamental en el aprendizaje del alumno. Por otro lado la dimensión social del aprendizaje es un elemento que se desvanece con un contacto exclusivo con el ordenador, la posibilidad de realizar colaboraciones con iguales es un factor negativo para este tipo de aprendizaje solitario. Sin embargo INTERNET es un elemento complementario, que puede facilitar al alumno por un lado adquirir gran cantidad de información sobre los contenidos que está estudiando. Un elemento de comunicación muy interesante que ofrece internet es el manejo del correo electrónico. Esta utilidad se puede convertir en un nuevo canal de comunicación a través del cual canalizar las dudas que el alumno puede obtener en su proceso de aprendizaje. Nuevamente consideramos que vuelve a ser un medio didáctico complementario a las clases presenciales.

A pesar de que, como ya hemos comentado, existen cursos interactivos de álgebra lineal que integran el manejo de programas de cálculo simbólico, hemos considerado que no era el elemento central de nuestra investigación y nuestra investigación pretende fundamentalmente, estudiar el comportamiento de una estrategia que incorpora el uso de CAS como herramienta principal, siendo INTERNET una herramienta auxiliar. Sin embargo, el estudio de una herramienta interactiva de esas características que incorpora a la vez internet con CAS puede formar parte de la temática central de investigaciones futuras.

II.3. Tareas de enseñanza: la base de una estrategia didáctica.

Toda práctica de enseñanza se puede entender como una serie de actividades formales establecidas por el profesor de una manera ordenada y debidamente secuencializada. De esta forma podríamos decir que las tareas de enseñanza son un conjunto de actividades y operaciones estructuradas para favorecer determinados procesos de aprendizaje. Así pues, el conjunto de actividades desarrolladas por el profesor en el aula configura un contexto específico que propicia un determinado proceso de aprendizaje y no otro; es decir, las tareas de enseñanza no son más que esas actividades diseñadas por el profesor que configuran una metodología específica [Gimeno, 1988].

Según este concepto Sánchez-Hipola [Sánchez Hipola, 1995] realiza una clasificación de las tareas académicas según los procesos de aprendizaje más predominantes:

a) Tareas de MEMORIA, en las que se espera que los alumnos reconozcan o reproduzcan una información previamente adquirida.
b) Tareas de PROCEDIMIENTO O RUTINA, con las que los alumnos aplican una fórmula o algoritmo que les lleva a una determinada respuesta.
c) Tareas de COMPRENSIÓN, requeridas para que los alumnos reconozcan la información, apliquen conocimientos a situaciones nuevas y extraigan consecuencias.
d) Tareas de OPINIÓN, bajo las cuales los alumnos muestran sus reacciones personales y preferencias sobre cierto contenido específico.
e) Tareas de DESCUBRIMIENTO, resultado de una exploración y descubrimiento realizado por el propio alumno.

Como puede observarse, existe un estrecho vínculo entre los CONTENIDOS, los PROCESOS DE APRENDIZAJE y las TAREAS DE ENSEÑANZA; por este motivo, la formulación de tareas provoca un aprendizaje consecuente para alcanzar unos determinados objetivos. En consecuencia, el diseño de las tareas de enseñanza proporciona el marco metodológico en el cual debe centrarse el diseño del profesor. Aunque las tareas son fundamentalmente mediadoras de los procesos de enseñanza y aprendizaje, también debemos considerarlas como esquemas prácticos para la socialización de los alumnos y para el control y gobierno de la clase [Sánchez-Hipola, 1995], porque la forma de realizar las tareas configura un ambiente educativo de socialización. Así pues las tareas de enseñanza se convierten en el punto de referencia básico del proceso educativo. La comunicación entre teoría y práctica se puede observar mediante la relación entre tareas y sus dimensiones. La importancia de la elección de tareas de enseñanza estimulantes y adecuadas, así como su secuenciación y presentación es vital para definir, a veces de forma implícita un tipo de estrategia didáctica. En consecuencia, vamos a analizar qué tipo de tareas de enseñanza son las más adecuadas para trabajar cada uno de los elementos fundamentales que configuran el marco metodológico que hemos planteado en el apartado anterior.

II.3.1. Tareas de enseñanza para la resolución de problemas.

Como acabamos de señalar en el apartado II.2.1 uno de los procesos que tiene una actividad predominante en el aprendizaje por descubrimiento es la resolución de problemas, en la relación que se marca entre los conocimientos que tienen los alumnos y la manera particular de resolver una situación problemática. En la resolución de problemas matemáticos según [Resnick-Ford, 1990] podemos considerar por un lado las ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS que poseen los individuos y por otro lado las ESTRATEGIAS que poseen para acceder a su conocimiento, detectar las relaciones entre los diversos contenidos y elegir entre aquellas relaciones disponibles. Estos autores consideran tres aspectos básicos en la ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN:

1) Representación del problema
2) Interrelación del entorno de una tarea con el conocimiento de un individuo y
3) El análisis de problemas y exploraciones de las estructuras del conocimiento para asociar a una tarea la información que inicialmente pudiera no haberse relacionado con la misma.

La importancia de la resolución de problemas en la adquisición del conocimiento matemático es un tema aceptado mundialmente, así por ejemplo según [Balacheff, 1990] *"los problemas a resolver son la fuente real del conocimiento y de la resolución de problemas es también el criterio para la adquisición de problemas"* en este mismo sentido [Vergnaud, 1990] considera que los problemas son la esencia de las Matemáticas *"el significado de las Matemáticas viene esencialmente de los problemas a resolver, no de las definiciones y las fórmulas"*. Partiendo de esta importancia y de la significación que ofrece la resolución de problemas en la construcción del conocimiento matemático a través del descubrimiento, debemos señalar que uno de los principales factores que influyen para que la resolución de problemas permita a los alumnos adquirir aprendizajes significativos, reside en la elección del tipo de problemas que se plantean, y en el grado de motivación que susciten en el alumnado. Los problemas rutinarios que aparecen normalmente en los libros de texto suelen denominarse ejercicios, y no se deben considerar como auténticos problemas, aunque su práctica es importante como una manera de promover la aplicación de los conceptos y teoremas y su retención en la memoria. Por lo tanto para introducir la resolución de problemas hay que tener muy claro lo que se entiende por situación problemática. Una situación problemática *"es una situación que implica un objetivo o propósito que hay que conseguir, existen obstáculos para alcanzar ese propósito, y requiere deliberación, ya que quien lo afronta no conoce ningún algoritmo para resolverlo. La situación es habitualmente cuantitativa o requiere técnicas matemáticas para su resolución*" [Grupo Cero, 1987], así pues un buen problema será aquel que:

- Representa un DESAFÍO a las capacidades deseables en Matemáticas.
- No deja BLOQUEADO de entrada a quien lo ha de resolver, es decir, que esté a la altura de las posibilidades de aquel a quien se le propone
- Tiene INTERÉS por sí mismo, independientemente de su relación con otras materias o su utilidad práctica
- ESTIMULA a quien lo intenta resolver el deseo de proponerlo a otras personas
- No es un problema de TRAMPA.

Estas ideas perfilan las características básicas que deben tener los problemas que propongamos cuando utilicemos la resolución de problemas como metodología para estimular en parte ese aprendizaje por descubrimiento. De esta forma los alumnos que se enfrenten a los problemas, observarán que se produce en ellos una serie de estímulos y capacidades muy beneficiosas en el terreno de la maduración personal:

- Se desarrolla un deseo por resolver el problema, es decir aceptar el reto que representa esa resolución, aunque en ocasiones no se logre, pero se considera la posibilidad de resolverlo, se obtiene así un estímulo a la CREATIVIDAD del individuo.
- Se estimula el ENTUSIASMO y la PERSEVERANCIA para no dejar el problema al menor obstáculo perdiendo la esperanza por resolverle.
- Se obtiene una visión más global de las Matemáticas, con mayor apertura a las nuevas ideas, con mayor dinamismo, y por tanto una FLEXIBILIDAD en los criterios para poder elegir o desechar una u otra estrategia de

resolución, eligiendo el camino que considera que considera puede conducir a la solución, incluso en algunas ocasiones utilizando diversas alternativas para resolver un mismo problema.

Así pues necesitamos generar tareas que tengan un contenido problemático en el sentido indicado anteriormente, de tal forma que tenga en cuenta esas características básicas que acabamos de enumerar::

1) REPRESENTA UN DESAFÍO
2) NO DEJA BLOQUEADO INICIALMENTE
3) TIENE INTERÉS EN SÍ MISMO
4) ESTIMULE A QUIEN LO RESUELVA
5) NO SE TRATA DE UN PROBLEMA TRAMPA

Partiendo de estos condicionantes característicos que deben tener los enunciados de los problemas, el profesor deberá elaborar una colección de problemas para cubrir los distintos intereses de los alumnos, y luego dejar que por sí solos o en grupo, en clase o en casa, intenten la solución. En este camino hacia el descubrimiento y a la investigación en el que se adentra el alumno al resolver un problema, el papel del profesor ha de ser discreto, pudiendo en ocasiones orientar y dar pautas para encontrar uno de los caminos, incidiendo en los nuevos conocimientos que se van obteniendo y como no, intentando generalizar si es posible al finalizar su resolución. De esta manera, al terminar el problema podemos decir que el alumno ha adquirido y practicado destrezas totalmente nuevas, pero enraizadas en las técnicas y conocimientos previos que posee, es decir, ha adquirido un aprendizaje significativo. El aprendizaje que proporciona una metodología de este tipo, se trata de un aprendizaje que se relaciona directamente con los conocimientos previos del alumno, adquiriendo así un conocimiento relacional de la matemática, muy diferente del conocimiento acumulativo que en ocasiones se ha pretendido transmitir: *"cuando se concibe el conocimiento matemático como mero cúmulo de definiciones y teoremas desarraigados de la motivación real que propició su origen, se está cayendo en el grave peligro de amontonar ideas inertes que engendran en la mayor parte de los que se inician en la matemática, perplejidad, frustración y sensación de esterilidad y huera pedantería"* [Guzmán-Rubio, 1990].

Una metodología basada en le resolución de problemas tiene ciertas particularidades especiales [Santaló y otros, 1994]:

1. Exige más tiempo que los métodos tradicionales, de tal forma que para su aplicación generalizada habría que construir programas más reducidos o bien

utilizar sistemas de cálculo algebraico como DERIVE, de manera que se facilitase la fase operativa de la resolución de problemas.

2. La dedicación del profesor es mayor, ya que el profesor debe elegir problemas apropiados para los alumnos, facilitando además unos problemas que atiendan la diversidad de alumnado, de tal forma que se puedan encontrar problemas de nivel normal y otros de grado más avanzado para alumnos aventajados. Además el profesor debe actuar como guía en el proceso de resolución aceptando posibles caminos de solución que surgen por iniciativa propia del alumnado, diferentes a los que el profesor hubiera previsto, caminos que son en ocasiones imaginativos e ingeniosos y que pueden resultar sorprendentes para el profesorado.
3. El planteamiento del problema debe ser una fase muy importante en la metodología, quizás la más importante, ya que la fase de resolución en ocasiones resulta ser meramente operativa, y en el caso de utilizar un CAS se convierte en un elemento trivial para el alumno.
4. La resolución de problemas favorece la aparición de colaboraciones en el trabajo de equipo, es más, el intercambio de ideas y dudas que surge a lo largo de la resolución suele ser enriquecedor para el aprendizaje.
5. Se debe procurar intentar obtener posibles generalizaciones a las resoluciones de problemas, de tal forma que por analogía o por vinculación, el alumno pueda obtener resultados globales.
6. El profesor no debe caer en el error de intentar enseñar métodos de resolución de problemas ya que cada problema ofrece diferentes posibilidades, pero sí debe insistir en el uso de HERRAMIENTAS HEURÍSTICAS. Entre las heurísticas más destacadas podemos citar las siguientes: la analogía con otros problemas que ya se saben resolver, la particularización partiendo de algún caso particular que ya se sabe resolver, la descomposición del problema en subproblemas más sencillos y la generalización para extender las conclusiones obtenidas.
7. El profesor debe saber motivar a los alumnos, debe saber ilusionarlos en la búsqueda de las soluciones. A este respecto merece la pena citar la opinión de Polya respecto la motivación: *"La mejor motivación es el interés del estudiante en su propio trabajo. Pero hay otras motivaciones que no deberían olvidarse. Recomendaré un pequeño truco práctico. Antes de que los estudiantes hagan el problema déjeles adivinar o conjeturar el resultado o una parte del resultado. El muchacho que expresa una opinión queda comprometido; su prestigio y su propia estimación dependen un poco de lo*

que ocurra, estará impaciente por saber si su conjetura resulta ser buena o no, de modo que estará activamente interesado en su trabajo y en el trabajo del resto de la clase". Sin embargo la motivación puede generar un estado de ansiedad en el alumno que puede resultar perjudicial ocasionando una competitividad excesiva, además esta ansiedad puede impedir que el alumno tenga la serenidad necesaria para replantear caminos erróneos.

8. El contenido de los problemas debe ser un contenido abierto, de tal forma que el alumno NO considere que "hacer matemáticas" se convierte en una aplicación de "recetas" que tiene archivadas en su memoria o que acaba de aprender en clase; pues de esta manera convertiríamos a los alumnos en meros autómatas imperfectos, ya que este tipo de tareas debe ser reservadas al ordenador que realiza estos procesos mejor y más rápido.

En estas consideraciones observamos la importancia que pueden tener los CAS y en particular el programa DERIVE para agilizar y hacer posible una metodología de estas características. Pero la importancia de la introducción este tipo de programas en una metodología basada en la R.P. adquiere un protagonismo superior si tenemos en cuenta que los CAS pueden permitir al alumno eliminar o al menor reducir dos obstáculos básicos que suelen producirse en la R.P.:

a) El obstáculo de la AUTOMATIZACIÓN: La rutina en la resolución de problemas puede producir ciertos estragos en la formación de los alumnos, derivados de la rigidez mental que ello conlleva, uno de ellos porque suele quedar arrastrado a calcular de forma automática todo aunque no haya nada que calcular, en otros casos porque la operativa que conlleva la resolución del problema le impide obtener una visión global de la estrategia que sigue. Uno de los ejemplos típicos de este bloque se plantea en el problema siguiente "En un barco hay 20 cabras y 15 vacas ¿cuál es la edad del capitán?". En algunos tests realizados se observó que un 75% de los encuestados respondió que 35 años sin experimentar sobre la contestación. Otro ejemplo típico es aquel en el que se pide al alumno resolver un problema que tiene muchísimos cálculos, de tal forma que una vez realizados le obligan al alumno a tener que retomar todo el problema porque ha perdido la visión de lo que pretendía resolver. Los CAS pueden permitir eliminar este obstáculo, pues trivializan numerosos cálculos algebraicos y permiten que el alumno mantenga en todo momento el rumbo de lo que intentaba buscar. Esta circunstancia hace que el alumno piense más en los procesos que en la operativa, evitando así realizar operaciones que no son necesarias.

b) Un segundo obstáculo para la resolución de problemas está ocasionado por las PROPIAS LIMITACIONES DE LA MENTE HUMANA, en concreto por ciertas limitaciones en el tratamiento de la información. Este obstáculo es debido a tres factores [Peralta, 1995]:

1) El razonamiento humano sólo puede trabajar en un proceso de manera SECUENCIAL, lo que impide que pueda tratar de resolver problemas en los que sería necesario un proceso simultáneo, es decir utilizando diferentes caminos a la vez a no ser que se tratasen estos caminos de forma individual.
2) Nuestra memoria a corto plazo tiene una CAPACIDAD RESTRINGIDA lo que dificulta asimismo el abordar de golpe un problema en el que hay que considerar de golpe numerosos datos y situaciones.
3) Aunque nuestra memoria a largo plazo tiene una capacidad casi ilimitada, sin embargo existe una cierta limitación para relacionar algún hecho que tenemos acumulado en la misma con los aspectos del problema que se está resolviendo.

Estas deficiencias pueden ser complementadas con las capacidades que ofrecen los CAS, en especial en lo que se refiere al segundo aspecto relacionado con el manejo de numerosos datos, ya que al liberar la memoria a corto plazo de estos datos y de los cálculos relacionados con estos datos, se permite obtener una visión más general del problema.

Así pues, podemos concluir afirmando que las tareas de enseñanza para la resolución de problemas estimulan un aprendizaje por descubrimiento, que con la ayuda del profesor y el programa de cálculo simbólico DERIVE pueden potenciar la adquisición de aprendizajes significativos, así como otras características beneficiosas para la maduración del alumno tales como: la creatividad, la perseverancia, la autonomía cognitiva y la flexibilidad. En especial, el uso de DERIVE puede permitir utilizar esta metodología sin tener que reducir los temarios, centrar la atención del alumno en procesos cognitivos de orden superior y no meramente rutinarios, y adquirir mayor motivación en el aprendizaje de las Matemáticas.

La estrategia que definimos en la siguiente sección contiene algunas tareas de enseñanza basadas en la resolución de problemas. Estas tareas se presentan en dos momentos de la estrategia:

a) Para presentar algunos conceptos, mediante tareas que denominaremos "ejemplos para investigar" en los que el alumno tiene que experimentar sobre ejemplos y datos concretos para intentar obtener conclusiones a partir de las cuales podamos obtener una generalización que nos permite introducir de forma teórica una definición o bien un resultado teórico.

b) Para relacionar los diferentes elementos teóricos y resolver problemas de modelos de la vida real; estos los denominaremos "problemas fin de capítulo". Estos problemas tienen tres grados de dificultad, que se adaptan a los niveles de los estudiantes, procurando que los alumnos no se desanimen al enfrentarse al problema y al menos sepan resolver algunos de los que se plantean.

II.3.2. Tareas de enseñanza para el álgebra lineal.

La enseñanza del álgebra lineal está sufriendo en los últimos años un proceso de reforma, un ejemplo muy claro podemos observarlo en EE.UU., donde existen actualmente dos tendencias de reforma de los cursos de álgebra lineal [Sierpinska-Dreyfus-Hillel, 1999]:

a) una primera tendencia que pretende ilustrar las ideas abstractas del álgebra lineal por medio de aplicaciones,
b) y una segunda tendencia que utiliza la geometría vectorial como recurso intuitivo de los conceptos básicos del álgebra lineal.

Una didáctica para la enseñanza el álgebra lineal que evite el obstáculo del formalismo ha de centrarse en la noción de objeto matemático. Los objetos matemáticos son creados a través de las actividades de tratamiento y de interpretación de representaciones entre los diversos signos. En esta didáctica se pretenden fijar las nociones generales de espacios vectoriales, transformaciones lineales por medio de intuiciones geométricas usando un CAS no como herramienta para resolver problemas sino como base conceptual. Se pretende que los alumnos vean los objetos de conocimiento no como realidades principales independientes no como los contenidos de representaciones mentales del sujeto sino que como los invariantes en la referencia de varias representaciones, es decir, reconocer un objeto matemático en álgebra lineal al menos en dos representaciones diferentes [Sierpinska-Dreyfus-Hillel, 1999]. Efectivamente, cuando un sujeto es capaz de identificar un objeto a través de sus diferentes representaciones mayor es su conocimiento del objeto, así como la posibilidad de traducir entre diferentes representaciones el objeto en cuestión. Así pues, es necesario considerar las dimensiones que tienen en cuenta diferentes conceptos del mismo objeto, en diferentes lenguajes matemáticas (algebraico, geométrico,...). En el contexto de los CAS, su multiplicidad de representaciones permiten manejar los objetos de varias formas sin un trabajo excesivo [Duval, 1998]. Esta visión múltiple de los objetos a través de diferentes sistemas de representación nos plantea la necesidad de intentar mostrar a los alumnos tareas de enseñanza en las que se manipulen diferente lenguajes y sistemas de representación sobre el mismo objeto que tratamos de introducir. Uno de los lenguajes más visuales para representar los objetos forma parte de la geometría. Un método para introducir nociones básicas de álgebra por medio de la geometría, propone un planteamiento didáctico a tres niveles [Samper, 1996]:

a) INTRODUCCIÓN DEL CONCEPTO: por manipulación física de objetos usando conceptos previos sencillos.
b) CONCEPTUALIZACION DEL CONCEPTO; con representaciones gráficas de las situaciones manipuladas
c) SIMBOLIZACIÓN DEL CONCEPTO, con una manipulación simbólica de las técnicas y relaciones

En esta misma línea Pérez [Pérez, 1992] afirma que el aprendizaje de la matemática puede ser incentivada con ideas geométricas, en particular considera muy interesante incluir la geometría en la enseñanza del álgebra lineal y propone algunos ejemplos de cómo introducir la Regla de Cramer mediante la geometría vectorial. En [Child-Leinbach, 1996] podemos encontrar algunas tareas que proponen introducir los conceptos de autovector y autovalor de manera geométrica a fin de evitar el aprendizaje que suele ser frecuente por parte de los alumnos de estos conceptos: un aprendizaje memorístico. Así pues, el uso de la geometría para introducir los conceptos de álgebra lineal es una posible estrategia que puede formar parte del repertorio de tareas de enseñanza.

Por otro lado si consideramos los enfoques en los que se suelen presentar los contenidos de álgebra lineal podemos observar dos tendencias nuevamente, por un lado una tendencia que inicia los cursos introduciendo los sistemas de ecuaciones lineales, los vectores y las matrices, continuando con los espacios vectoriales, transformaciones lineales y los conceptos relacionados con la diagonalización [Grossman, 1995]. Una segunda opción parte de la introducción de la estructura de espacio vectorial a partir de los vectores, e ir construyendo a partir de ella el estudio de las transformaciones lineales, las matrices como una representación de las transformaciones lineales, el determinante, los sistemas y la diagonalización [Barbolla-Sanz, 1998]. Dedicar el primer capítulo a sistemas lineales presenta la ventaja de acercar al alumno en la génesis de conceptos abstractos que debe conocer posteriormente, dándole la oportunidad de participar en cierta manera en su elaboración, además este planteamiento puede resultar más gratificante y atractivo para el alumno pues le resulta más fácil operar y calcular que abstraer y comprender. Sin embargo si se desea estructurar un curso básico de álgebra lineal quizás sea más conveniente iniciar el estudio del álgebra lineal por los espacios vectoriales pues, como Hankel ya había previsto, los números reales, es decir, la recta real, deben considerarse como una "estructura intelectual" y no como magnitudes intuitivamente heredadas de la geometría euclídea. Por otro lado, si tenemos en cuenta que vamos a utilizar un CAS en el desarrollo de las tareas del álgebra lineal, el cálculo relacionado con la resolución de sistemas y en general todos los cálculos rutinarios dejan de ser importantes adquiriendo una mayor importancia la comprensión de las estructuras conceptuales que soportan el álgebra lineal.

Ante estas dos panorámicas sobre la introducción de los conceptos de álgebra lineal relacionadas con:

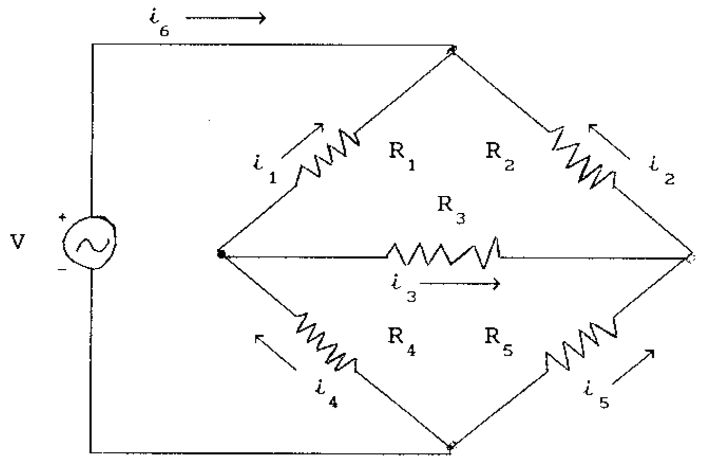
- materias que introducen conceptos: geometría vectorial versus aplicaciones del álgebra lineal
- ordenación de los contenidos.

Nuestra postura se define en la línea de introducir los conceptos del álgebra lineal utilizando el mayor número de sistemas de representación, bien a través de geometría vectorial o bien de otras materias de las matemáticas ordenando los contenidos de forma que se introduzca la estructura de espacio vectorial a partir de los vectores y sus propiedades y a partir de ahí ir construyendo todas las herramientas propias de esta disciplina. A partir de esta visión de la enseñanza del álgebra lineal, las tareas que consideramos pueden ser adecuadas para esta orientación metodológica, deben potenciar por un lado que el alumno descubra los objetos matemáticos del álgebra lineal que se van introduciendo en diferentes sistemas de representación: geométrico, analítico, aplicativo; porque de esta forma puede obtener una visión multidimensional de los objetos y así comprender el concepto como el invariante de varios sistemas de representación. Por esta circunstancia, DERIVE se convierte en una herramienta muy adecuada pues facilita esa multiplicidad de sistemas de representación.

II.3.3. Las tareas de enseñanza de los sistemas de cálculo algebraico y en particular con DERIVE.

Si se pretende introducir un sistema de cálculo algebraico como DERIVE en la enseñanza del álgebra lineal, existen algunos cálculos rutinarios que pueden realizarse de una manera automática tales como las operaciones de matrices, el cálculo de determinantes, el cálculo de inversas, esto motiva la necesidad de introducir tareas de enseñanza que no se basen en el aprendizaje de cálculos rutinarios, que por otro lado en ciertas etapas pueden ser importantes, pero que no son esenciales para una comprensión de los contenidos básicos del álgebra lineal. Según [Kutzler, 1999] esta trivialización de los procesos de cálculos, producida por el uso de un CAS, permite plantear tareas que se centren bien en la experimentación y en la resolución de problemas. Un ejemplo de cómo usar CAS en el álgebra lineal se puede observar con un problema planteado por Patrick Sullivan [Sullivan, 1996]. El problema está relacionado con la electrónica, en concreto con un circuito de puente de Wheatstone tal como se muestra en la figura

$$
\begin{aligned}
-i_1 + i_2 + i_6 &= 0\\
-i_2 + i_3 - i_5 &= 0\\
-i_4 + i_5 - i_6 &= 0\\
i_1 - i_3 + i_4 &= 0\\
R_1 i_1 - R_4 i_4 &= V\\
R_1 i_1 + R_2 i_2 + R_3 i_3 &= 0\\
R_3 i_3 + R_4 i_4 + R_5 i_5 &= 0
\end{aligned}
$$



la resolución se estudia con un sistema de 7 ecuaciones con 12 incógnitas tal como aparece en la imagen, en el que las variables son:

V: potencia

i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6 intensidad

R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 resistencia

Suponiendo que en el problema nos dan como datos el valor de R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 (resistencia) el sistema se convierte en un sistema lineal, de tal forma que podemos ir modificando valores de las resistencias para obtener diferentes intensidades o potencias en el circuito. Con este problema podemos observar como el alumno puede centrarse más en el modelo que en la propia resolución del sistema, de tal forma que se pueden hacer estudios de lo que sucede con el modelo electrónico cuando se producen variaciones de alguna de las variables.

Esta forma de utilizar los CAS en el álgebra lineal, obliga a proponer tareas de enseñanza aprendizaje muy diferentes a las que se venían planteando anteriormente. Por un lado debemos considerar tareas con las que el alumno se familiarice con el uso del programa, de tal forma que sea capaz de utilizar de forma fluida tanto el programa como el sistema de notación que emplea. Estas tareas, aunque no tienen un interés especial para el álgebra lineal sin embargo sirven para que el alumno sepa utilizar los comandos del programa para resolver problemas mecánicos del álgebra lineal. Un segundo tipo de tareas serían las que utilizan el CAS para experimentar o bien para descubrir el significado de los conceptos que se introducen o bien para intentar obtener relaciones entre los contenidos del álgebra lineal. Por último tendríamos tareas que facilitasen la resolución de situaciones problemáticas en las que el alumno tiene que relacionar muchos conceptos. Siguiendo un esquema similar al que acabamos de describir, V. Chumillas propone tres tipos de actividades o tareas a realizar con DERIVE para el álgebra lineal [Chumillas, 1992]:

TAREAS TIPO A.

En estas tareas el alumno deberá resolver problemas sencillos y directos combinando algunas de las operaciones que hace DERIVE con los conceptos, hechos y principios que se van introduciendo. Este tipo de tareas sirve para que el alumno tome contacto con el ordenador y sepa qué tipo de problemas puede resolver DERIVE, por ejemplo:

- resolver un sistema de ecuaciones lineales que depende de un parámetro y hacer su discusión e interpretar las soluciones
- estudiar la independencia lineal de un sistema de vectores, estudiar el rango de la matriz cuyas filas están formadas por dichos vectores, la solución del sistema de ecuaciones homogéneo.
- calcular el rango de una matriz directamente.

TAREAS TIPO B.

Son actividades que empiezan a tener mayor interés didáctico ya que en este tipo de tareas el alumno debe resolver un problema combinando varias de las operaciones que realiza DERIVE con algunos conocimientos teóricos:

- estudiar si una matriz es diagonalizable.
- realizar demostraciones constructivas a partir de un ejemplo
- extraer una base de un sistema de generadores
- ampliar una base

TAREAS TIPO C

Son actividades en las que el alumno se debe "sumergir" en la teoría estudiada, se pone en disposición de manejar objetos matemáticos y debe tratar de llegar a trabajar con las matemáticas de manera experimental.

El uso de CAS es una característica que suele estar presente cada vez con mayor frecuencia en los libros de texto, a modo de ejemplo podemos observar como en [Grossman, 1995] se introducen todos los conceptos teóricos de álgebra lineal por medio del uso de calculadores gráficas como la TI-85 y la Casio fx-7700 GB, y también un estudio detallado con MATLAB: De hecho incorpora más de 230 problemas opcionales para MATLAB.

II.4. Nuestra estrategia didáctica.

En el apartado anterior hemos indicado cuales son los principios metodológicos en los que se basa nuestra estrategia didáctica:

A) *LA INTRODUCCION DEL PROGRAMA DE CÁLCULO SIMBÓLICO DERIVE.*
B) *EL USO DE UNA METODOLOGÍA EXPERIMENTAL BASADA EN LA ADQUISICIÓN DE APRENDIZAJES SIGNIFICATIVOS.*
C) *EL USO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO NÚCLEO DE PROFUNDIZACIÓN DE LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS.*
D) *POTENCIACIÓN DEL APRENDIZAJE COLABORATIVO*
E) *USO DE INTERNET: PÁGINA WEB Y CORREO ELECTRÓNICO*

Estos principios determinan las líneas generales a partir de las cuales elaboraremos nuestra estrategia didáctica. Se tratará de una estrategia didáctica que permita agrupar la virtudes de dichos principios y muy en especial la incorporación del programa de cálculo simbólico DERIVE en el aula. La importancia que adquiere el uso del programa de cálculo simbólico DERIVE en nuestra estrategia didáctica, le convierte en el principal instrumento de mediación cognitiva de nuestra estrategia, pero este papel preponderante que adquiere el programa necesita complementarse con los otro cuatro principios metodológicos restantes para perfilar un estilo de enseñanza-aprendizaje particular. Habitualmente se han venido utilizando diversos métodos para introducir DERIVE en el aula de Matemáticas y en especial del álgebra lineal, entre los que podemos destacar:

1) Una primera forma o método de introducción del CAS en el aula, consiste en la utilización del programa como una HERRAMIENTA AUXILIAR en los denominados LABORATORIOS DE ÁLGEBRA LINEAL. Este tipo de laboratorios se convierten en un anexo de las clases teóricas en las que se mantiene una enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal sin DERIVE. El Laboratorio de prácticas pretende ofrecer las ventajas del uso de los sistemas de cálculo simbólico con prácticas especialmente diseñadas para ilustrar los conceptos y principios impartidos en las clases habituales. Este tipo de uso de los CAS ha sido muy utilizada en numerosas universidades entre las que podemos citar: Universidad Politécnica de Madrid [Villén, 1991], [Miñano, 1991], [García y otros, 1994], Universidad Politécnica de Valencia [Llorens, 1993], Universidad de Brick

(Alemania) [Auer-Muller, 1990], University of Plymouth [Watkins, 1992],... En este tipo de integración, las tareas de enseñanza-aprendizaje de álgebra lineal que se suelen diseñar difieren enormemente de las planteadas en las clases teóricas ya que son tareas de carácter práctico que ilustran los contenidos teóricos de las clases habituales.

2) Una segunda alternativa consiste en integrar completamente el programa DERIVE dentro de las tareas de enseñanza-aprendizaje, de tal forma que los conceptos, principios y relaciones de álgebra lineal se van introduciendo de forma simultánea con el programa DERIVE. Esta forma de integrar los programas de cálculo algebraico obliga a construir actividades renovadas en las que el ordenador se convierte en el medio didáctico principal de todo el proceso de enseñanza-aprendizaje. Este hecho no obstaculiza que exista algún tipo de interacción distinta utilizando el sistema clásico de exposición de los contenidos básicos. Este estilo ha sido desarrollado con diferentes sistemas de cálculo algebraico y en diferentes áreas de Matemáticas en numerosos centros educativos de todo el mundo: Vanderbilt University [Brown-Porta-Uhl, 1990], University of Pittsburg [Beatrous-96], Franciscan University of Steubenville (EE.UU.) [Salter-Gilligan, 1991], University of Plymouth,...

3) Una tercera alternativa consistiría en desarrollar un nuevo currículum del álgebra lineal utilizando sistemas de cómputo algebraico como DERIVE, basados en la resolución de problemas [Hogdson, 1997] . Esta introducción obligaría a modificar el currículum actual. Los objetivos de esta alternativa consistirían en:
   - centrar la atención en la modelización matemática de problemas del mundo real
   - elevar las habilidades de resolución de problemas de los estudiantes por medio de instrucciones heurísticas y estrategias diversas
   - mejorar el entendimiento conceptual por medio de aproximaciones gráficas y analíticas de los conceptos y de los problemas
   - utilizar la tecnología como una parte integral de la implementación de los objetivos anteriores

Nosotros utilizaremos el segundo estilo de integración de DERIVE en nuestras tareas de enseñanza-aprendizaje. Pero como hemos manifestado anteriormente, introducir los sistemas de cálculo simbólico requiere una reflexión previa sobre las tareas que deseamos realizar puesto que han de basarse en los principios metodológicos que hemos expuesto, para así tener una visión clara de aquellas tareas que puedan ser realizadas con el programa de cálculo simbólico. Tal como hemos comentado en el apartado II.2 Murakami y Hata [Murakami-Hata, 1997] afirman que para entender un tópico matemático (contenidos esenciales) es necesario invertir un primer esfuerzo en resolver los ejercicios a mano, aunque pueden existir cálculos y tópicos que son auxiliares (contenidos no esenciales) que pueden ser realizados con CAS. Esta circunstancia nos plantea la necesidad de efectuar una clasificación previa de los contenidos matemáticos que vamos manipular a lo largo del desarrollo de una cierta unidad didáctica en CONTENIDOS ESENCIALES y CONTENIDOS NO ESENCIALES. Recordemos que los contenidos esenciales, son aquellos contenidos que no deben ejecutarse por medio del ordenador en el momento de ser introducidos ya que son esenciales e irremplazables por el cálculo automático de rutinas del ordenador. Por otro lado los contenidos no esenciales, son aquellos que son necesarios como herramienta para la comprensión de otros contenidos y que por tanto pueden ser reemplazados por el ordenador. Teniendo en cuenta esta clasificación previa de los contenidos que se van a ir introduciendo y considerando los principios metodológicos expuestos anteriormente, proponemos cuatro tipos de TAREAS :

1) ACTIVIDADES DE INTRODUCCIÓN TEÓRICO-PRACTICAS.

Si nuestro objetivo es introducir principios y conceptos fundamentales de un cierto contenido "A" que consideramos esencial, podemos utilizar DERIVE para intentar explorar mediante ejemplos los elementos fundamentales de ese contenido, siempre y cuando los cálculos que realicemos con el programa sean totalmente auxiliares para comprender el contenido “A”. De esta forma el alumno utilizará DERIVE sólo como herramienta de experimentación, no como herramienta resolutiva. A este tipo de investigaciones que desarrollarán los alumnos con el uso del programa de cálculo simbólico, añadimos algunos elementos adicionales como son:

1) la presentación con TRASPARENCIAS de los resúmenes y conclusiones a los que pretendíamos llegar con estas actividades de introducción y
2) proporcionar a los alumnos una PÁGINA WEB a la que pueden acceder para revisar los desarrollos teórico-prácticos presentados en clase, material que proporciona la alumno la libertad de no tener que estar “tomando apuntes” y centrar su atención en las investigaciones que realiza y las explicaciones del profesor. Además el alumno puede acceder en cualquier momento a los contenidos teóricos que se han ido exponiendo.

Sin embargo pueden existir ciertos tópicos y conceptos "B" que no son esenciales para "A" con los que podríamos utilizar DERIVE como herramienta resolutiva. De esta forma introduciremos la manipulación mediante DERIVE de los conceptos no esenciales "B" para facilitar la comprensión del contenido "A".

Siguiendo esta metodología se introducirán los conceptos y resultados fundamentales mediante la exploración e investigación de los alumnos. Así, el programa de cálculo simbólico se convierte en una herramienta didáctica de uso directo en la exposición teórica, de tal forma que el alumno materializa los conceptos y estructuras algebraicas por medio del programa. Junto a estas actividades se irán incluyendo breves reseñas teóricas acerca del uso del programa. En algunos casos, se pueden introducir reglas o principios que se pueden comprobar experimentalmente con el uso del propio programa. En estas ocasiones, la regla o principio "A" considerado esencial, se puede manipular con el ordenador, ya que el objetivo de la actividad consistirá en tratar de forma experimental el resultado. Estas actividades permiten conseguir dos objetivos:

a) El reconocimiento de las estructuras y relaciones básicas del álgebra lineal a nivel abstracto,
b) y el aprendizaje de dichos conceptos y estructuras con DERIVE.

Además de estas actividades pretendemos que, los alumnos descubran el valor de la experimentación matemática. Estas tareas de introducción parten de ciertos conocimientos previos que se supone poseen los alumnos que comienzan estos estudios, o bien de los conocimientos previos expuestos en temas anteriores a los cuales el alumno puede acceder en cualquier momento a través de la página web. A partir de estas premisas, con la ayuda de DERIVE para realizar cálculos rutinarios y con las introducciones que el profesor irá exponiendo para guiar las exploraciones e investigaciones que se proponen, los alumnos serán capaces de obtener aprendizajes que le permitirán obtener una comprensión significativa de los contenidos del álgebra lineal. Por otro lado, la posibilidad de trabajar en grupo, en particular con los compañeros de su entorno y muy en especial con el compañero de pupitre, se facilitarán un conjunto de colaboraciones, que actuarán como elementos mediadores del aprendizaje, potenciando la adquisición de aprendizajes colaborativos. La manipulación de DERIVE centra la atención del alumno, pero esta actividad puede ser apoyada de forma interactiva por las páginas web que contienen los desarrollos teóricos desarrollados en clases anteriores que pueden ser de gran utilidad para la realización efectiva de las investigaciones y exploraciones que se van proponiendo.

2) EJERCICIOS DE MANIPULACIÓN

Con estos ejercicios se propone al alumno la resolución, con la ayuda del programa de cálculo simbólico, de ejercicios de simple manipulación y relación de conceptos. Estas tareas sirven para adquirir soltura en la manipulación del programa DERIVE sobre los contenidos NO ESENCIALES que se están manejando. Además, estas tareas permiten consolidar los procesos rutinarios y estrategias específicas del álgebra lineal. Con estos ejercicios de asentamiento los alumnos irán adquiriendo las destrezas básicas que les permitirán enfrentarse más adelante con problemas de álgebra lineal. Estos ejercicios se plantearan en dos momentos diferenciados a lo largo del proceso de enseñanza-aprendizaje:

a) primero se plantearán los ejercicios de manipulación de clase, que se propondrán inmediatamente después de que los alumnos hayan explorado ciertas propiedades, contenidos o principios. y que servirán para que consoliden esos contenidos que el propio alumno ha investigado y explorado en las actividades de introducción.

b) en segundo lugar, al finalizar cada uno de los apartados de los que consta cada capítulo del curso, los alumnos tendrán la posibilidad de reforzar las técnicas y procesos básicos que se han realizado en clase.

Este conjunto de ejercicios de manipulación se proponen como actividades de refuerzo que los alumnos realizarán de forma individual o en grupo fuera de los horarios de clase. Con el fin de facilitarles el trabajo en grupo se disponen de varias horas semanales reservadas para este grupo de alumnos en las aulas de informática (el mismo aula en el que se imparten las clases). Estos ejercicios de manipulación no tendrán que entregarse de forma obligatoria, serán un trabajo voluntario en el que los alumnos se enfrentarán solos o con el grupo habitual de trabajo, al programa, con el fin de adquirir soltura no solo en las técnicas básicas del álgebra lineal sino en el manejo del propio programa. Debemos señalar la importancia del material auxiliar que los alumnos tienen disponibles en la página web diseñada a tal efecto. También es importante señalar que los alumnos pueden usar el correo electrónico para preguntar aquellas dudas que puedan surgirles en estos ejercicios sencillos de manipulación. La realización en grupo de este tipo de ejercicios, proporciona un “aprendizaje entre iguales” que se puede convertir en un elemento de elevado interés, dado su carácter abierto, facilitando el trabajo cooperativo de los ejercicios de manipulación que se van planteando.

3) RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Este tipo de actividades está formado por una colección de problemas que contienen situaciones cercanas a la realidad, o bien situaciones problemáticas con datos complejos y difícilmente manipulables con las técnicas habituales de lápiz y papel. Se pretende que los alumnos intenten utilizar diversas estrategias de resolución. Estos problemas tendrán diversos niveles de complejidad adaptados a los diferentes niveles de aprendizaje de los alumnos. De esta forma, los conceptos algebraicos se convierten en entidades que facilitan la resolución de problemas reales, permitiendo profundizar al alumno en las estructuras y relaciones expuestas. En este tipo de actividades, el uso de DERIVE está permitido no sólo para los contenidos no esenciales para "A" sino que también, es posible usarlo sobre sus partes esenciales, ya que los cálculos generados por los problemas de álgebra lineal pueden enturbiar el proceso de resolución. Para utilizar diversas estrategias de resolución se plantearán algunos ejemplos de resolución de problemas mediante DERIVE, incluyendo en los ejemplos, los límites y errores que puede provocarnos el programa.

Los problemas propuestos, serán accesibles desde las páginas web y deberán ser resueltos y entregados en una hoja de trabajo de DERIVE, incluyendo en el fichero, los comentarios que permitan comprender los pasos realizados para la resolución. Estos ficheros se enviarán por correo electrónico.

La resolución de problemas se convierte con este tipo de actividades, en el centro de atención del alumno. Los problemas propuestos deben promover la capacidad creativa de los alumnos, situación que se verá favorecida por el uso del programa DERIVE, porque los cálculos y procesos algebraicos intermedios dejan de ser una dificultad añadida para el alumno, liberando la atención del alumno de los cálculos rutinarios pudiéndose embarcar así, en la búsqueda de soluciones por medio de la exploración. DERIVE además de facilitar este tipo de actividad, permite generar las denominadas “hojas de trabajo” o “ficheros de trabajo” con lo que el alumno puede ir comentando sus intentos y búsquedas de solución, de tal forma que todos sus procesos y planteamientos intermedios puedan ser revisados posteriormente por el profesor. Esto permitirá observar las lagunas y destrezas que tienen cada uno de los alumnos.

Como se ha comentado anteriormente, para acceder a los enunciados de los problemas, el alumno podrá visitar la página web que contiene un enlace de problemas propuestos en cada capítulo. Una vez entregados todos los problemas, los alumnos podrán disponer de una de las posibles soluciones en las páginas web.

Nuevamente, se deja abierta la posibilidad de trabajar de forma cooperativa estos problemas, habilitando a tal efecto, ciertas horas en el aula de informática para este grupo experimental.

4) CUESTIONES TEÓRICAS

La necesidad de obtener un grado de abstracción suficiente en los contenidos y principios algebraicos introducidos, así como la necesidad de evitar una excesiva dependencia del ordenador, requiere plantear cuestiones teóricas en las que el uso del programa DERIVE no es fundamental para su resolución. Son cuestiones con cálculos rutinarios mínimos que permiten al estudiante mostrar el grado de conocimiento e interrelación conceptual que ha conseguido en su fase de aprendizaje. Se les propondrán dos tipos de cuestiones teóricas:

a) cuestiones teóricas de resolución individual. Serán aquellas cuestiones a las cuales el alumno puede acceder en las páginas web diseñadas para este cometido, en la propia página web podrán obtener la solución a las cuestiones, mediante enlaces adecuados.

b) Cuestiones teóricas de resolución en clase. Se propondrán cuestiones teóricas que el alumno deberá resolver en el espacio de clase. De esta forma conseguiremos dos objetivos: por un lado forzar al alumno a realizar un estudio progresivo de la materia y por otro a comprobar el grado de comprensión de la materia. Obteniendo así una pequeña evaluación teórica de la asimilación de los conceptos.

Como se trata de cuestiones teóricas, el uso de DERIVE no resulta fundamental como ya hemos comentado; sin embargo, no se les prohíbe el uso del programa, aunque sí se les solicita que entreguen un archivo de trabajo en el que estén contenidos los cálculos y manipulaciones simbólicas que han tenido que realizar con DERIVE para contestar a cada una de las cuestiones teóricas.

Estas cuestiones teóricas son de tipo TEST con varias respuestas válidas. El grado de abstracción de las cuestiones pueden forzar al alumno a utilizar DERIVE como herramienta experimental con la que comprueban las conclusiones a las que el alumno llega. También puede facilitarles el trabajo como mero comprobador de resultados. Plantear cuestiones teóricas de tipo TEST, tiene sentido si lo que se desea es profundizar en los razonamiento teóricos más que en la operativa que da lugar a dichos razonamientos, ya que las diferentes respuestas contienen además del Verdadero o Falso de cierta afirmación inicial, el razonamiento de la respuesta. De esta forma el alumno tiene que detectar no solo la verdad o falsedad del planteamiento inicial sino que además el razonamiento correcto asociado a su afirmación, circunstancia que obliga a poseer un conocimiento amplio de la materia interrelacionando unos contenidos con otros.

Las cuestiones teóricas son de RESOLUCIÓN INDIVIDUAL y se plantearán en dos momentos a lo largo del proceso de enseñanza-aprendizaje. En un primer momento, al finalizar cada capítulo el alumno podrá enfrentarse con cuestiones de este tipo contenidos en la página web. En dicha página, el alumno tiene una colección de cuestiones teóricas a las que se puede enfrentar, pudiendo contrastar de forma automática la solución de las mismas que también se encuentra disponible en dicha página de manera interactiva. Esta interactividad de trabajo se convierte en un instrumento muy útil para que el alumno medite y reflexione sobre sus propios procesos de pensamiento. En un segundo momento, el alumno deberá enfrentarse en el aula a las cuestiones propuestas de fin de capítulo, nuevamente de forma individual, y ahora sin obtener la respuesta de forma interactiva sino que después de la revisión por parte del profesor del cuestionario realizado.

Acabamos de concretar las actividades básicas que perfilan los elementos fundamentales de nuestra estrategia didáctica. Como ha podido observarse el uso de DERIVE se convierte así en el eje central de todo el desarrollo metodológico.

Para completar la definición de esta estrategia didáctica, una vez perfilados los principios metodológicos y el tipo de tareas de enseñanza que la concretan, en el siguiente apartado vamos a describir con todo detalle el planteamiento y la programación didáctica del curso.

II.5. Planteamiento Didáctico del curso: “Matemáticas II con DERIVE”

II.5.1. PLANTEAMIENTO GENERAL DEL CURSO

ANTECEDENTES

En el apartado anterior hemos definido la estrategia didáctica que centra el estudio de la presente tesis. En dicha estrategia hemos podido observar la importancia que adquiere el sistema de cálculo algebraico DERIVE, que se convierte en el eje central de nuestra metodología. En este apartado vamos a diseñar las diferentes tareas que concretan la metodología de la estrategia didáctica que hemos planteado en el apartado anterior, sobre un curso básico de Álgebra Lineal. Este curso se enmarca en la asignatura “Matemáticas II”, asignatura troncal impartida en el primer curso de la Licenciatura de Administración y Dirección de Empresas en la Universidad Autónoma de Madrid.

El desarrollo didáctico del curso se dividirá en tres grandes bloques temáticos fundamentales:

II. CURSO INTRODUCTORIO DE DERIVE

Antes de comenzar a exponer los contenidos propios de la asignatura "Matemáticas II" cuyos aspectos centrales están basados en el álgebra lineal, es necesario dedicar un par de sesiones (en total 4 horas) a introducir a los alumnos en el programa. Este curso se centrará en las herramientas básicas necesarias para trabajar con DERIVE.

- filosofía del uso de los comandos
- manejo de ventanas gráficas y ventana de álgebra
- operaciones algebraicas básicas.

CURSO INTRODUCTORIO DE INTERNET: NAVEGACIÓN Y CORREO ELECTRÓNICO

Aunque uno de los requisitos solicitados a los alumnos para acceder a este grupo experimental ha sido el manejo a nivel de usuario de Windows 95 o superior, del navegador

Netscape 4.5 o superior y del correo electrónico, sin embargo, es conveniente dedicar al menos una sesión (dos horas) para repasar los elementos fundamentales necesarios para manejar estas dos herramientas didácticas: el manejo de la página web del curso y del correo electrónico para enviar problemas resueltos y consultar dudas.

CURSO "MATEMÁTICAS II CON DERIVE"

El objetivo central del curso consiste en dotar al alumno de las herramientas fundamentales que le permitan manejar e interpretar los principales elementos del álgebra lineal de cara a analizar y resolver modelos económicos lineales y a la resolución de problemas relacionados con la programación lineal.

Los contenidos de este curso de ALGEBRA LINEAL son los siguientes:

1. Espacios vectoriales.
2. Aplicaciones lineales y Matrices.
3. Traza y Determinante.
4. Sistemas de Ecuaciones Lineales.
5. Autovalores y autovectores. Diagonalización.
6. Formas cuadráticas.
7. Programación lineal.

Para incorporar el programa DERIVE totalmente en el aula, las clases se iniciarán poniendo el sistema en disposición de albergar dos tipos de documentos:

- un primer documento en el que introduciremos el que denominamos GUION-TEORICO de la sesión,
- y un segundo documento de trabajo del alumno, que se utilizará para que el alumno experimente, desarrolle y resuelva las diferentes cuestiones experimentales y de investigación que se vayan planteando en el guión-teórico: será el espacio que denominaremos HOJA DE TRABAJO DEL ALUMNO.

Para poder visualizar estos dos tipos de información, desplegaremos en el sistema dos ventanas de ALGEBRA (denominación empleada en DERIVE para las ventanas que se emplean para manipular expresiones). La disposición que utilizaremos habitualmente para mostrar estas dos ventanas será en forma horizontal, desdoblando la pantalla del ordenador en dos partes, de tal forma que en la ventana superior incluiremos el archivo de DERIVE que contiene el GUIÓN-TEÓRICO de la sesión y en la ventana inferior dejaremos una ventana de álgebra en blanco donde albergaremos nuestra HOJA DE TRABAJO.

El GUIÓN-TEÓRICO será un fichero .MTH (elaborado previamente por el profesor) con el que se van introduciendo los diferentes conceptos por medio de actividades de exploración, investigación y comprobación, y en el que se plantean preguntas y cuestiones al alumno para que éste intente descubrir, con ayuda de DERIVE diferentes propiedades y relaciones entre los conceptos, o bien para visualizar los conceptos de una manera clara. Estas exploraciones e investigaciones serán dirigidas continuamente por el profesorado. Con este tipo de trabajo el alumno irá DESCUBRIENDO y ASIMILANDO lo diferentes conceptos básicos del álgebra lineal. También contiene los ejercicios de manipulación de cada apartado.

La HOJA DE TRABAJO será el espacio reservado para que el alumno manipule las expresiones algebraicas que considere oportunas para explorar, investigar, comprobar o dibujar las cuestiones o situaciones que se van planteando en el GUIÓN-TEÓRICO. En ocasiones también se utilizará esta segunda ventana para cargar los enunciados de algunos ejercicios de manipulación con el fin de que el alumno tenga a su disposición los datos numéricos de los mismos y no tenga que teclear demasiados datos y no sea necesario tener que recurrir a ninguna fuente externa al programa. Al finalizar una sesión o un bloque de contenidos el alumno podrá guardar su HOJA DE TRABAJO en un fichero de DERIVE que luego podrá manipular si lo desea fuera del ámbito de la clase.

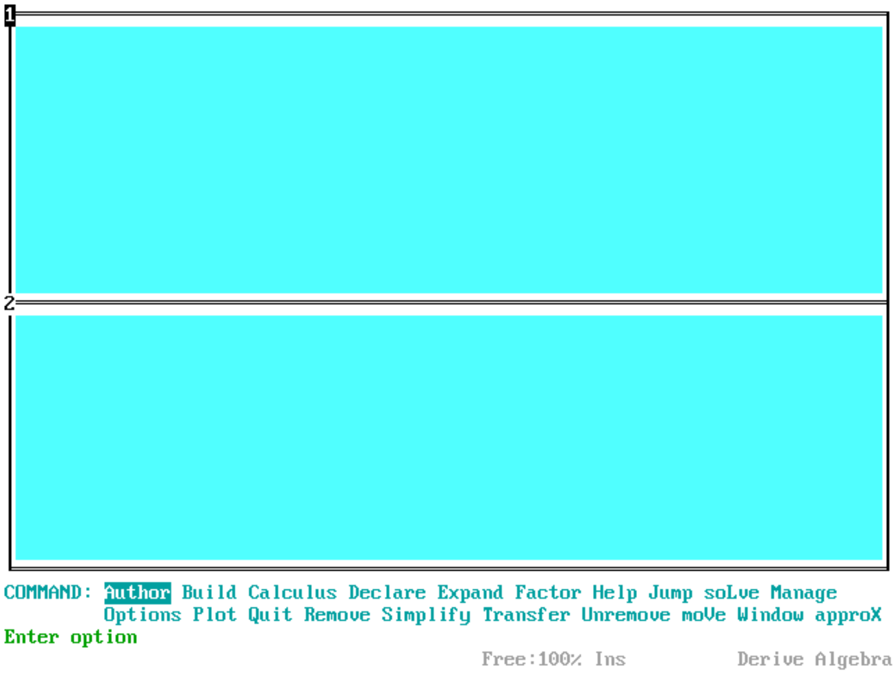
Con la manipulación que realiza el alumno en estos dos entornos de trabajo de DERIVE obtendremos un triple objetivo:

1) Que el alumno incorpore DERIVE como herramienta esencial de la asignatura.
2) Que el alumno utilice DERIVE como herramienta de exploración del alumno.
3) Que el alumno se familiarice con la terminología y el sistema de notación que utiliza el programa.

Así pues al inicio de cada bloque procederemos de la siguiente forma:

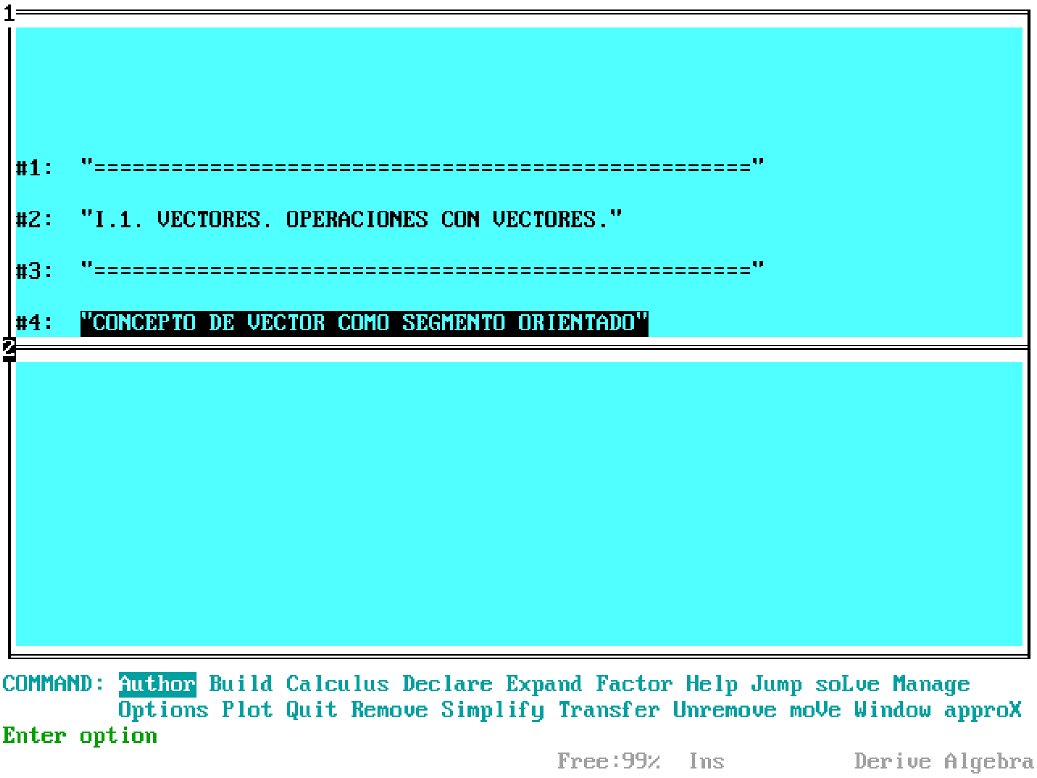
1) Primero cargaremos el programa DERIVE.

2) A continuación dividiremos la ventana inicial en dos de forma horizontal mediante la secuencia de comandos WINDOW-SPLIT-horizontal-13, obteniendo una pantalla similar a la siguiente:



obsérvese que de esta forma tendremos dos ventanas de álgebra disponibles. En ocasiones puede resultar más interesante abrir dos ventanas de álgebra una encima de otra, por solapamiento, mediante WINDOW-OPEN -Algebra.

3) Para iniciar cada uno de los subapartados de un capítulo cargaremos en una de las dos ventanas (preferentemente la ventana 1), el fichero que contiene el GUIÓN-TEÓRICO correspondiente. Los ficheros encargados del desarrollo teórico se nombrarán de la siguiente forma X-Y-teor, donde X indica el número de capítulo e Y indica el subapartado del capítulo X. Por ejemplo si deseamos introducir en la ventana 1 el apartado 1 del capítulo 1, cargaremos en la ventana 1 el archivo 1-1-TEOR.MTH, aplicando la siguiente: nos situamos en la ventana 1 y aplicamos la secuencia de comandos
TRANSFER-LOAD-DERIVE –a:1-1-teor y obtendremos la pantalla



en la que observamos como se ha cargado en la ventana 1, el desarrollo del apartado 1-1 del tema 1, en concreto del subapartado dedicado a vectores y operaciones con vectores.

Una vez cargado el desarrollo didáctico del subapartado correspondiente, el alumno podrá realizar los cálculos o exploraciones que considere necesarios en la ventana 2, aunque también podrá incluir en esta HOJA DE TRABAJO las anotaciones u observaciones que considere pertinentes para su estudio posterior. Hay que tener en cuenta que todas las definiciones de funciones y de vectores que se introducen en la memoria del programa con el GUIÓN DE TRABAJO en la ventana 1, y en cualquier otra ventana de álgebra que se desee desplegar, en especial en la ventana 2 de trabajo.

Como puede observarse toda la exposición tendrá como instrumento básico el programa DERIVE gracias a la cual el alumno tendrá acceso simultáneo al desarrollo teórico y a una hoja de trabajo donde desarrollar cálculos experimentales.

En los desarrollos didácticos, se introducirán dos tipos básicos de contenidos:

- contenidos de manipulación del programa DERIVE
- contenidos propios de la asignatura MATEMATICAS II.

Permitiendo de esta forma que el alumno adquiera soltura con el programa de forma paralela al aprendizaje de los contenidos de álgebra lineal.

Tal como hemos comentado anteriormente, nuestra metodología pretende introducir TOTALMENTE el programa DERIVE en la exposición didáctica del tema; sin embargo este hecho no debe conducirnos a la eliminación de aquellos procesos manipulativos que consideramos esenciales para el aprendizaje de un determinado concepto, es decir, no podemos automatizar con DERIVE ciertas operaciones o procesos que son fundamentales para comprender el concepto que intentamos introducir. Por ello debemos tener cuidado en no mostrar toda la potencia del programa hasta que no sea estrictamente necesaria y conveniente. Un ejemplo claro: no podemos enseñar cómo desarrollar un determinante, si previamente ofrecemos al alumno el comando que permite automatizar este cálculo pues el alumno puede caer en la tentación de utilizar el automatismo y no preocuparse de entender los procesos intermedios necesarios para obtener el determinante. Esta circunstancia la tendremos que tener en cuenta, al menos inicialmente, momento en el que el concepto de determinante es esencial, más adelante cuando ya se ha manipulado y se ha dominado mínimamente la operativa entonces podremos automatizar su cálculo. Esta forma de manejar el programa sólo en ciertos contextos, nos obliga a revisar los objetivos de cada capítulo clasificando los contenidos en

a) contenidos no esenciales
b) contenidos esenciales

Mediante esta clasificación previa, tendremos las pautas didácticas para introducir de forma secuencial las posibilidades que ofrece DERIVE. Así pues podremos utilizar DERIVE para aquellos contenidos que consideramos no esenciales, y no podremos utilizarlo en los contenidos que hemos clasificado como esenciales. Este estudio y clasificación de los contenidos de la asignatura lo realizaremos en el apartado siguiente.

APOYOS DIDÁCTICOS POR INTERNET

Como acabamos de comentar en el apartado B, las exposiciones didácticas estarán desarrolladas en una página web de acceso restringido para los alumnos del curso. Esta página web, desarrolla de forma complementaria cuatro apartados fundamentales de nuestro curso:

- Los contenidos del curso: apartado en el que se encuentran resumidas todas las exposiciones didácticas realizadas en clase por capítulo y apartados; material que permitirá a los alumnos repasar los conceptos así como obtener un material con el cual estudiar los contenidos de la asignatura. Son los apuntes del curso que van a permitir que el alumno centre en clase toda su atención a las ideas que se están exponiendo sin perder demasiado tiempo en "tomar apuntes", tiempo que en ocasiones resulta perjudicial para el alumno, ya que pierde su concentración en las explicaciones y detalles que expone el profesor.

- Los ejercicios de manipulación: material didáctico en el que podemos encontrar un conjunto de ejercicios básicos que permitirán al alumno practicar con DERIVE de todas las técnicas que se han desarrollado. Estos ejercicios servirán al alumno para desarrollar las habilidades mínimas imprescindibles para utilizar los hechos y principios mostrados con ayuda del programa. Estos ejercicios deberán ser realizados por los alumnos al finalizar cada sección de forma individual.
- Los problemas de capítulo: conjunto de problemas propuestos para que los alumnos intenten resolverlos con ayuda del programa DERIVE en un fichero de trabajo del programa. Estos ficheros serán remitidos a través del correo electrónico para su posterior evaluación por parte del profesor.
- Las cuestiones del capítulo: conjunto de cuestiones teóricas que le permitirán al alumno interrelacionar los conceptos de forma teórica. Se facilitan las respuestas a las cuestiones dentro de la propia página web a través de un enlace creado para cada cuestión. Son cuestiones que facilitarán una corrección interactiva de los fundamentos teóricos de la asignatura.

La página web que hemos desarrollado se puede consultar en el CD adjunto a esta memoria, en particular se puede acceder a ella desde el menú principal.

En el siguiente apartado ofrecemos las programaciones didácticas de cada uno de los temas que conforman el curso en cuestión.

II.5.2. PROGRAMACIÓN DIDÁCTICA DEL CURSO “MATEMÁTICAS II CON DERIVE”.

A lo largo de este apartado vamos a desarrollar las programaciones didácticas de cada uno de los capítulos que forman parte de este curso, teniendo en cuenta la estrategia didáctica que acabamos de considerar. En cada capítulo realizaremos una EXPOSICIÓN DIDÁCTICA del mismo en la que incluiremos los siguientes apartados:

- Objetivos del capítulo.
- Contenidos del capítulo
- Temporalizaciones.
- Programación didáctica de cada uno de los apartados del capítulo, que contiene:
    - Objetivos.
    - Contenidos.
    - Metodología
    - Temporalización
    - Herramientas necesarias del programa DERIVE.

Los contenidos de cada apartado se clasificarán en contenidos esenciales y no esenciales de acuerdo con los principios metodológicos que hemos citado en nuestra estrategia.

En el ANEXO I se pueden encontrar los GUIONES DE TRABAJO de cada uno de los capítulos y apartados que configuran todo el curso. Estos ficheros también se pueden encontrar en el CD anexo al presente trabajo, para ejecutar de forma directa sobre DERIVE.

Los capítulos que componen el curso son los siguientes:

- Capítulo 1: Espacios vectoriales
- Capítulo 2: Matrices y aplicaciones lineales.
- Capítulo 3: Traza y determinante.
- Capítulo 4: Sistemas de ecuaciones lineales.
- Capítulo 5: Autovalores y autovectores. Diagonalización
- Capítulo 6: Formas cuadráticas.
- Capítulo 7: Programación lineal.

II.5.2.1. EXPOSICIÓN DIDÁCTICA DEL TEMA I: ESPACIOS VECTORIALES.

Objetivos del tema:

- Obtener una visión abstracta del concepto de vector como elemento de una estructura algebraica capaz de representar un conjunto de datos.
- Determinar cuando un conjunto de vectores es l.d. o l.i.
- Obtener las ecuaciones paramétricas y cartesianas de un subespacio vectorial.
- Obtener la base y la dimensión de un subespacio vectorial
- Determinar cuándo un subconjunto de un espacio vectorial tiene o no estructura de subespacio vectorial.

Contenidos del capítulo:

- I.1. Concepto de vector.
- I.2. Estructura de espacio vectorial
- I.3. Subespacios vectoriales.
- I.4. Sistemas de generadores.
- I.5. Dependencia e independencia lineal.
- I.6. Base y dimensión de un subespacio vectorial

Temporalizaciones:

- Apartado I.1: 2 horas
- Apartado I.2: 2 horas
- Apartado I.3: 2 horas
- Apartado I.4: 2 horas
- Apartado I.5: 2 horas
- Apartado I.6: 1'5 horas

Metodología:

En cada uno de los apartados de los que consta este tema realizaremos una clasificación de los contenidos, dividiéndolos en contenidos esenciales y contenidos no esenciales ya que como hemos comentado en nuestra estrategia, únicamente podremos utilizar el programa de cálculo simbólico en aquellos contenidos que no son esenciales para cada apartado. Por otro lado debemos tener en cuenta que los ejemplos que se proponen para la investigación de los alumnos pretenden que el alumno experimente por medio del programa DERIVE e intente obtener conclusiones personales acerca de las cuestiones de investigación que se le van planteando. Esta experimentación que realiza el alumno en el tema dedicado a espacios vectoriales resulta muy interesante sobre todo si se efectúa utilizando los sistemas de notación algebraico y gráfico que permiten representar, con ayuda de DERIVE, los vectores y subespacios vectoriales que trabajamos a lo largo del capítulo. Por otro lado junto a estas experimentaciones del alumno no debemos eliminar las posibles colaboraciones que puedan plantearse entre los alumnos, ya que son cooperaciones de trabajo que pueden favorecer el aprendizaje de los diversos contenidos que se pretenden introducir. Junto a estos ejemplos para investigar, plantearemos ejercicios de manipulación con los que el alumno puede asentar las principales técnicas que se utilizan para trabajar con los espacios vectoriales, principalmente la técnica de eliminación de parámetros para la obtención de las ecuaciones cartesianas de un subespacio y la obtención de las ecuaciones paramétricas de un subespacio aprovechando la posibilidad que ofrece DERIVE de resolver de forma parametrizada los sistemas de ecuaciones compatibles indeterminados. Pasamos a continuación a detallar las programaciones didáctica de cada uno de los apartados de los que consta este primer capítulo. Al finalizar los diversos apartados se ofrecen diferentes problemas para que el alumno los resuelva aplicando las técnicas que se han empleado.

Programación didáctica del apartado I.1. CONCEPTO DE VECTOR.

OBJETIVOS:

1) Que el alumno adquiera una visión global del concepto de vector en sus diversas concepciones: como segmento orientado, como vector libre del plano o del espacio y fundamentalmente como un conjunto agrupado de datos.
2) Que el alumno domine las operaciones de suma y diferencia de vectores, producto de un escalar por un vector y producto escalar entre vectores, así como de los modelos reales que se pueden presentar.
3) Obtener la idea gráfica de las operaciones suma y diferencia de vectores y producto de un escalar por un vector para vectores del plano y del espacio.

CONTENIDOS:

Contenidos no esenciales:

- saber dibujar un segmento orientado,
- situar un punto en los ejes cartesianos,
- obtener el módulo de un vector,
- obtener las componentes de un vector,
- operaciones con vectores: suma de vectores y producto de un escalar por un vector,
- producto escalar de vectores.

Contenidos esenciales:

- concepto de vector libre,
- posibles definiciones de vector libre,
- concepto de vector ortogonal,
- concepto de vector como conjunto de datos.

METODOLOGÍA:

En el contexto general de manipulación de ventanas que hemos comentado en el planteamiento general, nos situaremos en la ventana 1 (f1) y cargaremos con TRANSFER-LOAD-DERIVE, a:I-1-TEOR.MTH., situándonos a continuación en la primera expresión de este fichero. Debemos tener presente cuales son los contenidos esenciales y los contenidos no esenciales del apartado con el fin de utilizar DERIVE únicamente para los cálculos relacionados con los contenidos no esenciales. Esta clasificación de contenidos es fundamental en nuestra propuesta metodológica ya que nos permitirá no automatizar un concepto que estamos introduciendo antes de que el alumno lo asimile. Por otro lado debemos dejar un tiempo suficiente en los ejemplos que planteamos para investigar, tiempos en los que el alumno podrá experimentar con el programa para descubrir los conceptos que se pretenden introducir. También es importante respetar los posibles comentarios que puedan surgir entre los alumnos en las investigaciones porque esas colaboraciones pueden potenciar el aprendizaje de los contenidos. Pasamos a continuación a comentar detalladamente las experiencias que se proponen en este apartado.

La primera experiencia consiste en APRENDER A DIBUJAR SEGMENTOS ORIENTADOS EN DERIVE. Con ello se consigue que el alumno visualice dos de los elementos fundamentales de todo segmento orientado: punto origen y punto final. Nos reducimos a dibujar vectores en el plano. Se trata de un contenido no esencial del programa y por tanto podemos utilizar el programa DERIVE para efectuar esa representación. Una vez dominada esta técnica dibujando varios segmentos, se introducen los conceptos de

MÓDULO
DIRECCION
SENTIDO

del segmento que hemos dibujado y se dan sus correspondientes definiciones. (Se utilizará el encerado si es preciso)

A continuación se les propone dibujar segmentos orientados (vectores) situados en el plano que tengan el mismo módulo, dirección y sentido respecto de un vector dado inicialmente. Con esto el alumno descubrirá la relación que han de cumplir aquellos vectores que tomen orígenes distintos y tengan el mismo módulo y dirección que el segmento inicial.

Para generalizar el concepto de segmento orientado, y construir el concepto de vector libre se les plantea que elijan un vector que represente a todos (guiar la elección para que sea el vector de origen en el (0,0)).

Después de esta práctica se puede introducir de forma TEÓRICA (bien a través de la página web, o bien en la pizarra) la definición de VECTOR LIBRE. Introduciendo la necesidad de utilizar un representante de todos los vectores, a partir del vector que tiene por coordenadas las denotadas únicamente por el extremo final.

Para fijar todos estos conceptos se plantean los ejercicios de manipulación I-1, I-2, I-3 y I-4. Estos ejercicios se podrán realizar en la ventana 2 que tenemos reservada para trabajar, dejando la ventana 1, para observar y recordar los conceptos si es necesario revisarlos.

El segundo bloque de contenidos se centra en las OPERACIONES CON VECTORES. Como las operaciones que se introducen son sumas, diferencias y productos, no existe ningún inconveniente didáctico para utilizar DERIVE, ya que se trata de operaciones no esenciales. Estas operaciones se pueden introducir utilizando vectores genéricos de dimensión dos y tres para luego utilizarla sobre vectores concretos, ya que se trata de operaciones no esenciales para la comprensión de la operativa de las mismas.

En este apartado es necesario introducir como novedades de uso del programa:

- la suma de vectores u+v
- el producto de un escalar por un vector αv
- la forma de introducir letras griegas ALT-a = α; ALT-b=β
- el producto escalar de vectores u.v

Es conveniente poner ejemplos de dimensión 2 y obtener la relación GRÁFICA de las operaciones suma, diferencia y producto por escalares de estos vectores.
Realizar algunos ejercicios relacionados con el mismo: EJERCICIOS 1-5, 1-6, 1-7

Se les propone un conjunto de ejercicios de manipulación de esta sección I-1 que podrán encontrar en la página web, para que los resuelvan por sí mismos. Si consideramos apropiado podríamos introducir alguno de ellos en el aula para aquellos alumnos que estén más avanzados, como medida de atención a la diversidad.

TEMPORALIZACIÓN.

Esta sección debería realizarse en 2 horas aproximadamente.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE.

Los procedimientos del programa que debemos introducir que forman parte de los contenidos no esenciales del apartado son los siguientes:

- edición de vectores.
- definición de vectores por medio de variables
- suma y diferencia de vectores
- producto escalar de vectores
- producto de un escalar por un vector.

Programación didáctica del apartado I.2. ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL

OBJETIVOS:

1) Que el alumno sea capaz de determinar cuando un conjunto en el que se definen dos operaciones una externa y otra interna, tiene estructura de espacio vectorial

2) Identificar el concepto de VECTOR como un ELEMENTO de un ESPACIO VECTORIAL.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- propiedades de la suma de vectores
- propiedades del producto de un escalar por un vector.
- definición de la estructura de espacio vectorial
- algunas propiedades básicas de los espacios vectoriales

Contenidos no esenciales (con las que utilizar DERIVE):

- suma de vectores
- producto de un escalar por un vector
- resolución de ecuaciones vectoriales

METODOLOGÍA:

Consideramos como contenidos no esenciales de este apartado la suma de vectores y el producto de un escalar por un vector porque son operaciones conocidas previamente por el alumno de cursos anteriores y que además, se han repasado en el apartado anterior. Son además, operaciones que únicamente utilizan la suma de números reales componente a componente, o el producto de un número real por cada una de las componentes de un vector. También consideramos como contenidos no esenciales la resolución de ecuaciones vectoriales.

Para introducir la estructura de espacio vectorial vamos a proponer tres experimentos con los que los alumnos podrán investigar y obtener conclusiones propias relacionadas con el concepto fundamental de espacio vectorial. Los ejemplos a investigar son los siguientes:

1. A partir de tres vectores concretos (de dimensión 2) definidos en DERIVE, los alumnos intentarán comprobar las propiedades asociativa y conmutativa. De las observaciones podrán conjeturar que estas propiedades se cumplen de forma genérica, y podrán intentar formularlas de manera general. Para la existencia de elemento neutro, les planteamos que intenten obtener el vector que satisface la propiedad de ser NEUTRO para la suma. Se les plantea un vector de dimensión 4 para que intenten obtener para esa dimensión el elemento neutro. Tras estas experiencias y con preguntas guiadas deben llegar a la conclusión de que el elemento neutro es único y deducir cuál es el proceso de construcción del mismo. Para la propiedad de existencia de elemento opuesto de todo vector, nuevamente se les invita a construir los elementos opuestos de los tres vectores indicados. A continuación deberán deducir el método de construcción del elemento opuesto, para así obtener la forma genérica de su construcción. Al finalizar estas cuatro propiedades, que han sido en su mayoría conjeturadas por el alumno sobre casos

concretos (proceso constructivo), se exponen las propiedades que tienen la suma de vectores de forma general. Obsérvese que tomamos como referencia mínima las propiedades que cumplen los números reales respecto a la suma que se pueden extender fácilmente con un poco de experimentación a los vectores n-dimensionales y de forma más general a los espacios vectoriales.

2. En el segundo ejemplo se estudian las propiedades del producto de un escalar por un vector. Utilizamos la misma metodología que antes, que consiste en comprobar ciertas relaciones sobre vectores concretos sobre las cuales el alumno puede deducir que existe una conjetura (propiedad en este caso) que se verifica de forma general, observando el proceso y las condiciones que se requieren. Al finalizar se invita a los alumnos a que formulen las propiedades genéricas del producto de escalares por vectores. Nuevamente a partir de sus conocimientos de las propiedades del producto y suma de números reales el alumno puede ser capaz de ampliar estas propiedades al conjunto de los elementos de un espacio vectorial.
3. Por último tras ofrecer estos dos bloques de propiedades se introduce de manera FORMAL la estructura de espacio vectorial, así como el concepto de VECTOR como ELEMENTO DE UN ESPACIO VECTORIAL, insistiendo que no siempre ha de tener la forma habitual que se presenta en los espacios vectoriales reales R^n. Esta introducción formal de la estructura es el proceso final al que los alumnos pueden haber llegado de manera significativa partiendo de los dos experimentos que se han propuesto, bien a partir de su propia manipulación del programa o bien con los comentarios y colaboraciones que pueden surgir entre los compañeros respecto a los contenidos que se están manejando.

Una vez formulada la estructura de espacio vectorial, se introducen cinco propiedades adicionales que cumplen los espacios vectoriales. Para estudiarlas se ofrecen vectores genéricos de R^4 (aunque puede tomarse cualquier espacio n-dimensional real) y se les plantean varios interrogantes relacionados con el comportamiento que han de tener los vectores cuando se cumplen ciertas condiciones:

¿Cuál es la relación que guardan los vectores **v** y **w** si se verifica que **u+v=u+w**?

¿Cuánto vale en general el producto de α*__0__ si **0** es el elemento neutro?

¿Se puede asegurar que para cualquier vector **v** el producto 0**v**=**0** (0 es un escalar y **0** es el vector nulo?

¿Se puede garantizar que para cualquier vector **v** (-1)**v**=-**v**?

¿Si se verifica que α**v**=**0** , se puede deducir algo de α? ¿y de **v**?

Se pretende que los alumnos investiguen las propiedades que cumplen los vectores primero de manera concreta sobre vectores de cuatro componentes, para intentar generalizarla más adelante sobre vectores n-dimensionales y por último sobre cualquier vector.

Con estos apartados anteriores, el alumno habrá manipulado los elementos fundamentales de los espacios vectoriales (sus propiedades), y estará en condiciones de intentar demostrar que un conjunto, como es el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que 3, es un espacio vectorial, con ayuda de DERIVE. También deberá demostrar que el conjunto de los polinomios de grado igual a 3 no es un espacio vectorial.

El guión de trabajo que contiene esta metodología se encuentra en el fichero I-2-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN.

Se prevé que la realización de esta unidad, supondrá aproximadamente 2 horas. Debemos intentar que sea exactamente ese tiempo, aunque es un apartado que debe quedar suficientemente claro para los alumnos pues es uno de los pilares sobre los que se sustenta toda la asignatura. Si hubiera necesidad de repetir experimentos o plantear otros nuevos para fijar mejor las ideas, no debemos tener problemas en insistir en ello.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

Los comandos fundamentales que vamos a utilizar en este apartado se relacionan con la representación gráfica de vectores en el plano. También manejaremos las operaciones entre vectores introducidas ya en el apartado anterior.

Programación didáctica del apartado I.3. SUBESPACIOS VECTORIALES

OBJETIVOS:

1) Que el alumno sepa determinar cuando un subconjunto de un espacio vectorial tiene o no estructura de subespacio vectorial.
2) Obtener las ecuaciones paramétricas de un subespacio vectorial a partir de sus ecuaciones cartesianas.
3) Saber determinar las ecuaciones cartesianas de la intersección de subespacios y de la suma de subespacios.
4) Interpretar cuando la suma de dos subespacios es una suma directa.
5) Interpretar gráficamente en R^2 y en R^3 la intersección y la suma de subespacios vectoriales.

CONTENIDOS.

Contenidos esenciales:

- concepto de subespacio vectorial,
- caracterización operativa de subespacios vectoriales,
- obtener la parametrización de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales,
- intersección de subespacios vectoriales,
- unión de subespacios vectoriales,
- suma de subespacios vectoriales,
- suma directa de subespacios vectoriales,
- subespacios suplementarios.

Contenidos no esenciales:

- suma de vectores,
- producto de un escalar por un vector,
- resolver un sistema homogéneo de ecuaciones lineales,
- desarrollar ecuaciones vectoriales,
- representación gráfica de rectas en el plano.

METODOLOGÍA:

Obsérvese que los contenidos no esenciales de este apartado, nuevamente son las operaciones con vectores, operaciones que DERIVE realiza de forma automática y que el alumno debe de dominar ya de apartados anteriores y de cursos anteriores. También nos basamos en representaciones gráficas de rectas en el plano, técnica que el alumno debe saber dominar claramente de cursos anteriores y que DERIVE lo único que hace es automatizar los cálculos para no perder el tiempo en operaciones ya conocidas y dominadas previamente.

Para motivar el concepto de subespacio vectorial, planteamos algunos ejemplos de subconjuntos de un espacio vectorial que no cumplen las propiedades de espacio vectorial, en unos casos porque la suma de vectores da como resultado un vector que no está en el subconjunto, y en otros casos porque el vector nulo no pertenece al subconjunto, esto lo deben demostrar los alumnos sobre un ejemplo concreto comprobando una a una las propiedades de los espacios vectoriales vistas en la sección anterior. Dado que esta comprobación resulta muy laboriosa, se les propone si podrían encontrar algunas características mínimas a partir de las cuales se pudiera determinar de una forma operativa si un subconjunto es o no un subespacio vectorial. Por este motivo, se introduce la caracterización de subespacio vectorial. Esta caracterización se manipula en varios ejemplos con DERIVE para determinar si ciertos subconjuntos son o no subespacios vectoriales. Entre las dos alternativas de resolución que se ofrecen con DERIVE, una de ellas se basa en encontrar una parametrización de las ecuaciones cartesianas que caracterizan al subconjunto, ya que a partir de ésta, es fácil comprobar la condición necesaria y suficiente que ha de cumplir el subconjunto para ser subespacio vectorial. Se muestran algunos subespacios sencillos como es el subespacio total y el subespacio nulo.

Una vez conocida la característica que cumplen los subespacios vectoriales se plantean algunas operaciones entre subespacios vectoriales.

En este caso la metodología utilizada es la contraria, primero definimos la operación y luego procedemos a resolver ejemplos con DERIVE. El método fundamental que se propone para calcular la intersección de subespacios vectoriales es la resolución del sistema formado por sus ecuaciones cartesianas. Esta resolución de sistemas consideramos que es un contenido no esencial para comprender el proceso de obtención de la intersección, ya que se trata de encontrar aquellos vectores que cumplen TODAS las condiciones (ecuaciones implícitas) que se definen los subespacios. Nuevamente en este caso DERIVE se convierte en una herramienta auxiliar que facilita unos cálculos que no son esenciales para comprender el concepto de la operación que estamos manejando. A continuación se plantean ejemplos complejos para la obtención de la intersección, pues todavía es pronto para obtener una base o un sistema de generadores del subespacio, esto se realizará más adelante cuando se hayan introducido dichos conceptos. También se muestra el significado gráfico de la intersección de subespacios vectoriales con ejemplos de subespacios vectoriales en R^2 y R^3. Esta idea gráfica permite que se estudien posiciones relativas de rectas en el plano, posiciones relativas de planos en el espacio, posiciones relativas de recta y plano en el espacio o bien posiciones relativas de rectas en el espacio. Se concluye demostrando de manera formal que la intersección de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial. Obsérvese que la introducción con DERIVE de dos sistemas de representación del mismo concepto: OPERACIÓN DE INTERSECCIÓN, de una manera algebraica (por medio de sus ecuaciones cartesianas) y de una manera gráfica (por medio de las representaciones de los mismos) puede facilitar al alumno la comprensión de la operación, aunque no debe reducirse dicha operación a los ejemplos visuales que se muestran para facilitar la comprensión. Tampoco deben de considerarse los ejemplos gráficos un objetivo del apartado, tan solo una ilustración, es decir, el alumno debe tener claro que el objetivo no es saber cual es la posición relativa de las rectas y planos en el espacio, sino comprender cuál es el significado de que dos rectas se corten en el plano o que dos planos se corten en el espacio o que una recta y un plano se corten en el espacio.

La segunda operación que se introduce es la unión de subespacios vectoriales. Se plantean algunos ejemplos de subespacios mediante los que los alumnos pueden comprobar que la unión de subespacios no es un subespacio vectorial. Se intenta obtener una representación gráfica de la operación únicamente en el plano, estudiando la unión de subespacios de dimensión uno. El alumno podrá descubrir por sí mismo que la unión de subconjuntos en general no mantiene la estructura de espacio vectorial. A partir de este resultado se le propone al alumno que se plantee la posibilidad de buscar una operación que permita AGRUPAR subespacios de tal forma que el resultado final sea un subespacio vectorial. Por eso, con el objeto de definir una operación entre subespacios que permita AGRUPAR dos subespacios vectoriales (objetivo que perseguíamos al estudiar la unión de subespacios), se introduce la noción de suma de subespacios vectoriales. Se muestran ejemplos gráficos en R^2, y se manipulan vectores para obtener la noción abstracta de esta operación.

Por último, se completa el apartado, introduciendo la suma directa de subespacios, como una síntesis de la suma de subespacios con intersección nula. Esta idea se manipulará también de forma gráfica en R^2 y permitirá introducir el concepto de subespacio suplementario. A continuación se introduce el método mediante el cual se puede obtener el subespacio suplementario a un subespacio dado.

Debemos de tener nuevamente en cuenta que los ejemplos de investigación así como los ejercicios que se proponen deben ser realizados por los alumnos guiados por el profesor o apoyados por las colaboraciones que mantienen entre sí los alumnos. Hay que respetar este estilo de trabajo ya que facilitará el aprendizaje de contenidos. También debemos sugerir a los alumnos que consulten la página web en la que se encuentran los contenidos de temas anteriores, sobre todo cuando surjan dudas de los apartados anteriores.

El guión de trabajo de este apartado se puede obtener en el fichero I-3-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Para exponer este apartado se requieren 2 horas, dada la extensión del mismo. Por supuesto es necesario asentar estos conceptos realizando ejercicios de manipulación del capítulo.

HERRAMIENTAS DE DERIVE NECESARIAS:

- saber definir vectores,
- realizar operaciones con vectores,
- resolver sistemas de ecuaciones lineales,
- interpretar las soluciones paramétricas de sistemas lineales resueltos,
- representar rectas en el plano,
- saber definir vectores genéricos de una dimensión determinada,
- conocer la escritura de α, y β en DERIVE .

Programación didáctica del apartado I.4.
SISTEMAS DE GENERADORES

OBJETIVOS:

1) Entender y manipular la combinación lineal de vectores.
2) Determinar el subespacio vectorial generado por un conjunto de vectores expresándolo tanto con sus ecuaciones paramétricas como sus ecuaciones cartesianas.
3) Obtener un sistema de generadores de un subespacio vectorial expresado en ecuaciones paramétricas y ecuaciones cartesianas.
4) Asimilar que los subespacios no están generados de forma única.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- combinación lineal de un conjunto de vectores,
- sistema de generadores de un subespacio vectorial,
- subespacio vectorial generado por un conjunto de vectores,
- propiedades fundamentales de los sistemas de generadores,

Contenidos no esenciales:

- obtener las ecuaciones cartesianas de un subespacio a partir de las ecuaciones paramétricas,
- resolución de sistemas lineales,
- representación de vectores en el plano.

METODOLOGÍA:

La obtención de las ecuaciones cartesianas de un subespacio a partir de sus ecuaciones paramétricas se convierte en este apartado en un contenido no esencial, ya que es una técnica que debe de haber asimilado el alumno en el apartado anterior, puesto que se trata de una operación bastante rutinaria y que en este apartado consideramos no esencial. Realmente el proceso que realizamos con DERIVE es un mero proceso de eliminación de parámetros en el que hay que entender únicamente la mecánica a seguir, perdiendo importancia la resolución de ecuaciones y la sustitución de variables que se realiza de manera automática. En cuanto a la resolución de sistemas nuevamente consideramos que es un contenido no esencial puesto que el alumno debe de conocer las técnicas básicas de resolución de sistemas (reducción, sustitución e igualación) de cursos anteriores, y que ahora automatizamos para eliminar esos cálculos repetitivos. Por último la representación de vectores es un contenido no esencial, ya que es una técnica que debe dominar de apartados anteriores.

Para introducir el concepto de COMBINACION LINEAL de un conjunto de vectores partimos de dos vectores del plano, y sugerimos a los alumnos que realicen una representación gráfica de los mismos. A continuación se les sugiere que vayan construyendo y representando los vectores que se pueden obtener a partir de los dos vectores iniciales **u** y **v** mediante operaciones del tipo (a **u** + b **v**) siendo a y b dos números reales cualesquiera. Después de representar varios de estos vectores, se les plantea la siguiente cuestión: ¿podemos construir cualquier vector del plano utilizando esta técnica?. En el ejemplo, estamos considerando las infinitas combinaciones lineales de dos vectores de diferente dirección en el plano, por lo que partiendo de esta manipulación podemos introducir el concepto de combinación lineal de un conjunto de vectores.

La técnica que se puede deducir a partir de este procedimiento, consiste en intentar determinar si un determinado vector se puede expresar como combinación lineal de un conjunto de vectores dados inicialmente; técnica que repetimos en algunos ejercicios de manipulación para conseguir su consolidación conceptual y manipulativa.

Partiendo de esta idea: "un vector está generado por una combinación lineal de ciertos vectores" se plantea la posibilidad de encontrar un conjunto de vectores a partir de los cuales se pueda generar con sus "infinitas combinaciones lineales" un determinado subespacio vectorial. Para ello, se les propone a los alumnos un ejemplo sencillo que consiste en representar todos los vectores proporcionales a un vector del plano, y deducir qué subespacio genera dicho vector. La conclusión a la que llegarán los alumnos es que se trata de una recta que pasa por el origen y toma la dirección del vector. De esta forma podemos afirmar que dicho vector genera la recta, situación gráfica que nos permite generalizar el concepto mediante la introducción del conjunto de las combinaciones lineales de un conjunto de vectores dados $L\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n\}$. Podemos demostrar FORMALMENTE que este conjunto es un subespacio vectorial. La construcción de este conjunto, nos sugiere una nueva técnica: la obtención del subespacio vectorial generado a partir de un conjunto de vectores. Se plantean varios ejercicios de este tipo que el alumno debe intentar resolver con DERIVE; construyendo tanto las ecuaciones paramétricas como las ecuaciones cartesianas del subespacio generado. Se trata por tanto de que el alumno obtenga el procedimiento genérico para construir las ecuaciones paramétricas que definen un subespacio vectorial y a partir de ellas, obtener sus ecuaciones cartesianas que son únicas y definen de manera unívoca el subespacio. Este último proceso: paso de ecuaciones paramétrica a ecuaciones cartesianas, es una técnica que consideramos NO ESENCIAL para la comprensión de la representación de subespacios: se trata de la eliminación de parámetros. La eliminación de parámetros se puede realizar de forma secuencial con DERIVE aplicando en repetidas ocasiones el comando MANAGE-SUBSTITUTE (comando que deberemos comentar previamente al alumno, ya que no se ha introducido en el curso básico inicial) para ir sustituyendo variables y así ir eliminándolas.

Una vez dominada esta técnica, nos podemos plantear el proceso inverso; es decir, dado un subespacio vectorial ¿se puede determinar un sistema de generadores del mismo?. La técnica consiste en construir las ecuaciones paramétricas del subespacio a partir de las ecuaciones cartesianas. Este proceso se puede realizar de forma automática con DERIVE sin más que resolver el sistema compatible indeterminado formado por las ecuaciones cartesianas y a continuación interpretar el resultado que se obtiene. En este sentido debemos señalar que los indicadores @1, @2,....@n que utiliza DERIVE son los parámetros del sistema solución, a partir de los cuales es muy fácil obtener un sistema de generadores. Se realizan varios ejercicios de manipulación relacionados con esta técnica.

Por último estudiamos dos propiedades fundamentales para entender el concepto de sistema de generadores

a) En primer lugar presentamos a los alumnos sistemas de generadores distintos de un mismo subespacio invitándoles a que experimenten con este tipo de ejemplos en torno a la siguiente pregunta ¿puedes obtener alguna conclusión de esta experiencia sobre el número de sistemas de generadores que tiene un subespacio vectorial?. De esta pregunta concluirán que los subespacios vectoriales admiten infinitos sistemas de generadores.

b) La siguiente propiedad es más sofisticada, ya que les mostramos a los alumnos diferentes sistemas de generadores. Estos sistemas de generadores tienen la característica de que unos están contenidos en otros, es decir unos son subconjuntos de otros. Bajo estos planteamientos, se les propone a los alumnos que comprueben si estos sistemas de generadores generan el mismo subespacio vectorial. Ante esta hecho, se les sugiere que investiguen las razones por las que se verifica esta circunstancia, es decir que descubran los motivos por los que sistemas de generadores formados por subconjuntos de vectores de otros sistemas de generadores generan el mismo subespacio. Se les intentará guiar para que lleguen a la segunda propiedad: un sistema de generadores construido a partir de los vectores de otro sistema de generadores al que añadimos un vector que es combinación lineal de los anteriores genera el mismo subespacio vectorial. Propiedad que nos muestra un método de construcción de un sistema de generadores equivalente a uno.

Al acabar el apartado se les plantea la necesidad de encontrar un sistema de generadores formado por un mínimo de vectores, cuestión que se responde en el apartado siguiente con los conceptos de dependencia e independencia lineal.

El guión de trabajo de este apartado se puede encontrar en el fichero:
I-4-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Se plantea realizar esta unidad didáctica en 2h. es decir en una sesión habitual de clase.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

- Introducir la manipulación de la secuencia de comandos MANAGE-SUBSTITUTE,
- manejar la técnica de eliminación de parámetros para un sistema de ecuaciones parametrizado.

Programación didáctica del apartado I.5.
DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES

OBJETIVOS:

1) Saber determinar cuando un conjunto de vectores es linealmente dependiente o linealmente independiente.
2) Entender las propiedades que cumplen algunos conjuntos especiales de vectores: los que contienen al vector nulo, los que son unitarios no nulos, y los unitarios nulos.
3) Comprender las características que tienen los sistemas de generadores que son linealmente independientes.
4) Distinguir las propiedades que tienen los sistemas de generadores que son linealmente dependientes.
5) Obtener el rango de un conjunto de vectores.
6) Determinar las relaciones que guardan subconjuntos de vectores de un conjunto L.D. ó L.I.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- concepto de dependencia e independencia lineal de vectores,
- caracterización operativa para determinar la dependencia e independencia lineal de vectores,

- propiedades fundamentales de ciertos conjuntos de vectores respecto de la dependencia e independencia lineal,
- rango de un conjunto de vectores,
- relaciones entre sistemas de generadores l.i. y l.d.

Contenidos no esenciales:

- resolución de ecuaciones vectoriales,
- obtención de las ecuaciones cartesianas de un subespacio vectorial a partir de sus ecuaciones paramétricas.

METODOLOGÍA:

Nuevamente consideramos como contenido no esencial la obtención de ecuaciones cartesianas de un subespacio a partir de sus ecuaciones paramétricas, ya que la técnica de eliminación de parámetros es un proceso rutinario que se puede automatizar con DERIVE, aunque es un proceso que el alumno debe comprender pues debe realizar el proceso de manera secuencial, ya que no hemos definido ninguna función que permita obtener de forma automática las ecuaciones cartesianas a partir de las ecuaciones paramétricas: el alumno debe comprender perfectamente el proceso de obtención.

Para introducir el concepto de dependencia e independencia lineal planteamos un par de ejemplos a investigar. Los conocimientos previos necesarios para investigar estos ejemplos se deducen del concepto de combinación lineal de vectores. En particular, les preguntamos si un vector se puede expresar como combinación lineal de ciertos vectores dados inicialmente. En el primer ejemplo las conclusiones que obtengan los alumnos les deben sugerir la necesidad de introducir algún concepto nuevo: el concepto de dependencia. Por otro lado en el segundo ejemplo, se obtendrá como resultado que ningún vector se puede expresar como combinación lineal de los restantes, idea que nos permite introducir el concepto de INDEPENDENCIA LINEAL. Obsérvese que en estos dos ejemplos de investigación el profesor debe conducir a los alumnos en sus investigaciones y debe propiciar la búsqueda, proporcionándoles un tiempo suficiente para que puedan indagar y pensar de manera individual o bien de forma cooperativa con sus compañeros de pupitre. Debemos indicar que es importante tanto el proceso de descubrimiento individual como el proceso de colaboración que se establece entre los alumnos para llegar a la solución de estas pequeñas investigaciones. Una vez que hayan descubierto en su mayoría las ideas intuitivas de estos dos ejemplos, procederemos a definir los conceptos de manera forma.

Una vez definidos formalmente estos conceptos, resulta necesario encontrar alguna caracterización de los mismos que sea más operativa y automática. Para ello, se les plantea a los alumnos que reflexionen sobre la dependencia que tenía el primer conjunto de vectores, para sean capaces de deducir en cierta medida la caracterización operativa de los conjuntos L.D. Del mismo modo, a partir del segundo ejemplo en el que tenemos un conjunto L.I., se les invita a los alumnos a que hagan una deducción similar a la anterior. Esto nos conduce a la caracterización operativa de los conjuntos L.I.

A partir de estas caracterizaciones, se propone la resolución con DERIVE de algunos ejemplos relacionados con el estudio de la dependencia o independencia lineal de un conjunto de vectores. A continuación se proponen varios ejercicios de manipulación para que los alumnos manejen estas caracterizaciones.

Las operaciones realizadas con DERIVE para determinar las características de estos conjuntos de vectores permiten que el alumno se centre más en lo que se desea resolver que en los tediosos cálculos a los que le conduciría una resolución manual de los mismos; en particular la resolución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneos.

A continuación se introducen las principales propiedades de los conjuntos L.I. y L.D. a partir de ciertos interrogantes y ejemplos iniciales que puedan conducir a los alumnos a una deducción o inducción autónoma de las propiedades. Las propiedades que se introducen están relacionadas con la dependencia o independencia lineal de conjuntos unitarios no nulos, conjuntos unitarios nulos, conjuntos que contienen al vector nulo, subconjuntos de conjuntos L.I., conjuntos generados a partir de conjuntos L.D. y subconjuntos de conjuntos L.D.

Una vez que los alumnos se han familiarizado con los conceptos de dependencia e independencia lineal, tanto con los ejemplos de investigación como con los ejercicios de manipulación realizados, es necesario motivar la importancia del concepto de RANGO. Para ello los alumnos tendrán que analizar el comportamiento de los subconjuntos de conjuntos LI y LD, sobre los ejemplos anteriores. Con este análisis podremos llegar a una conclusión: existe un número máximo de vectores que puede ser L.I. en un espacio vectorial. A este número lo definiremos como el RANGO de ese conjunto de vectores. Se les plantea un ejemplo para que obtengan de forma efectiva el cálculo del rango mediante DERIVE. A continuación se proponen un par de ejercicios de manipulación.

Para finalizar, se plantea un ejemplo mediante el cual se pueda establecer la relación entre conjuntos L.I. con sistemas de generadores, en particular, intentaremos obtener un método para calcular el mínimo de vectores necesario para generar un subespacio vectorial. Para ello primero tomaremos un conjunto de vectores sobre el cual debemos calcular el rango, extrayendo de él un subconjunto que genere el mismo subespacio, de tal forma que con esta construcción el alumno pueda investigar las relaciones que existen entre estos conceptos. También se les invita a trabajar sobre un ejemplo en el que hemos indicado de una manera más explícita esta relación.

Al finalizar el apartado, se les sugiere a los alumnos que realicen los ejercicios de manipulación que se encuentran en la WEB, sobre los contenidos de este apartado.

El guión de trabajo de este apartado se puede encontrar en el fichero: I-5-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Para desarrollar este tema se plantea una sesión de 2h.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

- No hay ninguna herramienta NUEVA que deba ser introducida. Únicamente indicar que los vectores que se DEFINEN en la hoja guión de DERIVE, son todos distintos y siguen la notación u1, u2,.... u22,.... para que nunca se solapen las definiciones de los mismos y de esta manera los alumnos puedan utilizar las definiciones contenidas en el GUIÓN DE TRABAJO. También hay que sugerirles a los alumnos que en sus manipulaciones con DERIVE no editen vectores con el mismo nombre que los definidos previamente, debido a los errores de solapamiento que se puedan producir. Debemos por tanto proponerles que nombren los nuevos vectores que pudieran utilizar de la forma w1,w2,..... w14...

Programación didáctica del apartado I.6. BASE Y DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

OBJETIVOS:

1) Obtener una base y la dimensión de un subespacio vectorial cualquiera.
2) Saber calcular las coordenadas de un vector de un espacio vectorial en diversas bases del mismo.
3) Diferenciar claramente COMPONENTES y COORDENADAS de un vector.
4) Construir una base de un espacio vectorial mediante la prolongación de la base de un subespacio vectorial del mismo.
5) Distinguir cuando una base es ortogonal u ortonormal.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- base de un subespacio vectorial,
- dimensión de un subespacio vectorial,
- coordenadas de un vector en una base determinada,
- relación entre la dimensión de un subespacio y el número de ecuaciones cartesianas no redundantes que lo definen,
- prolongación de una base,

- bases ortonormales y ortogonales.

Contenidos no esenciales:

- resolución de ecuaciones vectoriales,
- obtener las ecuaciones paramétricas de un subespacio vectorial a partir de sus ecuaciones cartesianas,
- obtener las ecuaciones cartesianas de un subespacio vectorial a partir de sus ecuaciones paramétricas,
- calcular el módulo de un vector,
- construcción de un vector unitario,
- caracterización de los vectores ortogonales a partir del producto escalar.

METODOLOGÍA:

En este apartado consideraremos como contenidos no esenciales dos técnicas básicas vistas en el apartado anterior:

- la obtención de ecuaciones cartesianas a partir de las ecuaciones paramétricas de un subespacios,
- y la obtención de las ecuaciones paramétricas a partir de las ecuaciones cartesianas.

Son técnicas que consideramos no esenciales para la comprensión del concepto de base de un subespacio vectorial, pues son procesos repetitivos que los alumnos deben de dominar. En cuanto al cálculo del módulo de un vector es un proceso sencillo que tan sólo requiere utilizar el comando "ABS" y que por otro lado es fundamental para construir vectores unitarios: la obtención de un vector unitario a partir de un vector dado, es un proceso que tan sólo requiere multiplicar el vector en cuestión por el inverso del módulo del mismo. Consideramos nuevamente que es un contenido no esencial porque el proceso que utilizamos para automatizarlo, por un lado requiere que el alumno entienda el proceso que está realizando y en consecuencia que entienda el procedimiento: "v * 1/abs(v)" y por otro lado porque es un proceso que debe dominar de cursos anteriores. En cuanto a la caracterización de vectores ortogonales, basta considerar la operación producto escalar, operación que se ha manipulado suficientemente en el apartado 1 de este capítulo para determinar cuando dos vectores son perpendiculares u ortogonales.

Para introducir el concepto de BASE de un subespacio vectorial, hacemos un breve recordatorio de la parte final del apartado anterior en la que concluimos con la existencia de sistemas de generadores L.I. que contienen menos vectores que cualquier otro sistema de generadores. Este hecho nos permite introducir un ejemplo para que los alumnos comparen dos combinaciones lineales: por un lado la combinación lineal necesaria para obtener un vector de un sistema de generadores L.I. de un subespacio W y por otro lado la combinación lineal necesaria para obtener un vector de un sistema de generadores L.D. del mismo subespacio. En este ejemplo debemos intentar que el alumno descubra e investigue por sí mismo las relaciones que se pretenden obtener, insistiendo en la necesidad de guiar su proceso de descubrimiento ayudándole en sus manipulaciones con DERIVE y por otro lado propiciando un clima de colaboración entre alumnos e incluso entre alumnos y profesor. Este hecho facilitará a los alumnos la adquisición del concepto de base de una manera significativa, ya que podrá relacionar los conceptos de independencia lineal con los sistemas de generadores. La unicidad de representación que proporciona un sistema de generadores linealmente independiente sugiere la necesidad de definir estos sistemas de generadores como una BASE del subespacio vectorial. Una vez definido el concepto de base, estamos en disposición de poder presentar de forma paralela el concepto de COORDENADA para lo cual se proponen ejercicios en los que el alumno debe obtener la base de un subespacio y las coordenadas de un vector en dicha base. A continuación se plantean algunos ejercicios de manipulación para que el alumno afiance las técnicas de DERIVE de manipulación de estos conceptos.

Con estos ejemplos se puede observar que todas las bases tienen el mismo número de elementos, propiedad que forma parte del teorema de la base y que nos permite definir el concepto de dimensión del subespacio vectorial

Una de las bases fundamentales de todo ESPACIO VECTORIAL son las llamadas bases canónicas. Se propone un ejemplo de base canónica en R^3. De este ejemplo el alumno debe deducir que las COMPONENTES de un vector cualquiera y sus COORDENADAS en la base canónica coinciden. Se generaliza para espacios vectoriales R^n

Para mostrar la relación existente entre las ecuaciones cartesianas de un subespacio vectorial y su dimensión se propone al alumno que investigue la relación que puede existir entre la dimensión de un subespacio de R^5 definido por tres ecuaciones cartesianas (una de ellas redundante). Sobre el ejemplo el alumno debe deducir el significado de ecuación redundante y conjeturar la relación entre número de ecuaciones no redundantes y la dimensión del subespacio.

Otra herramienta muy interesante relacionada con las bases, consiste en poder construir una base del espacio vectorial total a partir de la base de un subespacio suyo. Para ello se plantea un ejemplo sobre el cual el alumno debe deducir el método para prolongar la base, a partir de la elección de vectores que no están en el subespacio y sean L.I. entre sí.

Para finalizar se introducen los conceptos de bases ortonormales y bases ortogonales y se plantea un ejemplo para que los alumnos estudien la manera de comprobar cuando una base es ortonormal u ortogonal y cómo se puede construir a partir de una base ortogonal otra que es ortonormal.

El guión de trabajo de este apartado se puede encontrar en el fichero:I-6-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Este apartado podría impartirse en 1h 30 ya que es en su mayor parte de manipulación.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

No se requiere ninguna herramienta adicional de DERIVE salvo las ya manejadas hasta ahora de resolución de sistema, eliminación de parámetros de un sistema con MANAGE SUBSTITUTE y las definiciones de vectores.

II.5.2.2. EXPOSICIÓN DIDÁCTICA DEL TEMA 2: MATRICES Y APLICACIONES LINEALES.

Objetivos del tema:

- Determinar cuando una aplicación entre espacios vectoriales es una aplicación lineal.
- Identificar la relación biunívoca entre aplicaciones lineales y matrices.
- Manejar las operaciones fundamentales de matrices: suma, producto por escalares, producto de matrices e inversa de una matriz.
- Calcular la aplicación lineal que resulta de operar una o varias aplicaciones lineales utilizando operaciones con matrices.
- Identificar los principales tipos de matrices: simétricas, diagonales, antisimétricas, ortogonales, idempotentes, unipotentes y nilpotentes.

Contenidos:

- II.1. Introducción al concepto de matriz.
- II.2. Aplicaciones lineales.
- II.3. Relación entre matrices y aplicaciones lineales.
- II.4. Rango de una matriz.
- II.5. Operaciones con matrices y aplicaciones lineales.
- II.6. Aplicación inversa y matriz inversa.
- II.7. Tipos de matrices.

Temporalización:

Apartado II.1: 30 minutos.

Apartado II.2: 3 horas

Apartado II.3: 2 horas

Apartado II.4: 45 minutos

Apartado II.5: 1 hora 15 minutos

Apartado II.6: 2 horas

Apartado 7: 1 hora

Metodología:

Tal como hemos comentado en nuestra estrategia didáctica, el uso de DERIVE en el aula se reducirá al manejo de aquellos contenidos que consideramos que no son esenciales para la comprensión de los contenidos fundamentales del capítulo; por ello en cada uno de los apartados realizaremos una clasificación de los contenidos en contenidos esenciales y contenidos no esenciales. En este tema resulta muy útil el uso de DERIVE ya que se reduce enormemente el tiempo de cálculo de operaciones entre matrices como la suma y el producto y que por otro lado suelen ser muy frecuentes en los problemas que requieren modelización matricial. Sin embargo el alumno deberá invertir cierto tiempo en la definición y manejo de matrices por medio del programa, pero esta notación que utiliza el programa para manejar las matrices, es a su vez un elemento importante pues facilita la comprensión de los principales elementos de una matriz: las filas y columnas. Para estudiar la relación entre aplicaciones lineales y matrices utilizaremos un procedimiento general con DERIVE que nos permite obtener la matriz asociada a una aplicación lineal de manera casi automática. Los ejemplos para investigar servirán nuevamente para que los alumnos usen el programa para descubrir e investigar las propiedades, relaciones o conceptos que se van introduciendo respecto a las matrices y aplicaciones lineales. Estas cuestiones que los alumnos van investigando se basaran en contenidos que previamente los alumnos deben de manejar, para que con la ayuda del profesor y posiblemente de las colaboraciones que se pueden realizar entre los alumnos puedan encontrar y obtener las respuestas adecuadas a cada una de las cuestiones que van proponiendo. Por otro lado los ejercicios de manipulación servirán nuevamente para consolidar las principales técnicas en el manejo de matrices y aplicaciones lineales que se van introduciendo. Los problemas propuestos tendrán diversos niveles de dificultad algunos de ellos versan sobre las principales técnicas del tema, otros son problemas reales en los que el alumno debe identificar los datos con estructuras matriciales para realizar un proceso de modelización del problema sobre la base del modelo matricial y otros son de un nivel superior que pretende que el alumno investigue sobre diferentes propiedades de las matrices.

Pasamos a continuación a detallar la programación didáctica de cada uno de los siete apartados de los que consta este segundo capítulo.

Programación didáctica del apartado II.1. INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE MATRIZ

OBJETIVOS:

1) Identificar los elementos fundamentales de una matriz: filas, columnas, elementos a_{ij}, vector fila, vector columna.
2) Manipular estos elementos fundamentales con DERIVE, a través del dominio de los comandos básicos para definir matrices, extraer vectores fila, extraer vectores columna y extraer elemento a_{ij}.
3) Identificar el orden de una matriz cualquiera.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- estructura de una matriz: filas, columnas y elementos,
- vectores fila y vectores columna,
- orden de una matriz.

Contenidos no esenciales:

- comandos básicos de DERIVE para definir matrices,
- comandos básicos de DERIVE para extraer vectores fila, vectores columna y elementos de una matriz dada.

METODOLOGÍA:

Como el objetivo fundamental del tema es familiarizarse con la estructura de matriz y los elementos fundamentales de las matrices: filas, columnas y elementos, comenzamos introduciendo la forma que tiene DERIVE para introducir los datos de una matriz. Se exponen los dos procedimientos básicos:

- Utilizando el comando DECLARE-MATRIX , procedimiento que nos servirá para introducir el concepto de ORDEN de una matriz (número de filas, número de columnas) ya que para utilizar este comando es necesario conocer el orden de la matriz que se desea editar. Del mismo modo podemos introducir el concepto de ELEMENTO a_{ij} de una matriz, ya que una vez indicado el ORDEN de la matriz que deseamos introducir, DERIVE nos va solicitando los valores de cada uno de los elementos que componen la misma.
- Utilizando la edición de expresiones de la forma [vector1,vector2,...,vector3], es decir considerando la matriz como un vector de vectores fila. De esta forma introducimos de

forma implícita el concepto de vector fila, ya que por este procedimiento debemos ir introduciendo las filas de la matriz.

Una vez introducidos estos procedimientos se les propone a los alumnos que introduzcan en DERIVE varias matrices utilizando los dos métodos.

A continuación se señala la importancia que va a tener en DERIVE la posibilidad de dar nombre a una matriz, mediante el procedimiento **nombre-matriz := matriz**. Este procedimiento nos puede servir para identificar una matriz con un nombre, de tal forma que en cierta medida abstraemos el concepto de matriz a un identificador de la misma, proceso que puede facilitar la abstracción del concepto de matriz mediante la manipulación algebraica de la variable que la representa. Se les propone a los alumnos que den nombre a las matrices editadas anteriormente.

El siguiente paso es ir manipulando los distintos elementos de una matriz haciendo uso de los comandos que tiene DERIVE para extraer las filas, columnas y elementos de una matriz. Al finalizar estas manipulaciones con DERIVE, se les propone a los alumnos que ejerciten estos comandos sobre un ejercicio concreto basado en las matrices que ellos han introducido previamente.

Para finalizar se les propone que intenten aplicar estas estructuras matricial y vectorial para expresar de forma matricial los sistemas de ecuaciones lineales, estructura que nos va a servir más adelante en el tema 4 para manipular conceptualmente los sistemas.

En este apartado hay que tener en cuenta que el proceso de definición de matrices, al igual que el proceso de definición de vectores con el programa DERIVE, va a facilitar la comprensión de los elementos de los que se compone una matriz: las filas, las columnas, y su dimensión. La identificación de los elementos de una matriz identificando fila y columna va a familiarizar al alumno tanto a la simbolización que utiliza DERIVE para representar estos objetos como en la comprensión del objeto matemático y su propia estructura.

El guión de trabajo de este apartado se puede encontrar en el fichero:

II-1-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Este apartado se puede hacer fácilmente en 30 minutos.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

- comando DECLARE-MATRIX para editar matrices a partir de su orden y del conocimiento previo de los elementos de la misma

- edición de matrices mediante AUTHOR de expresiones de la forma [vector1,...,vectorn],
- comando ELEMENT(Matriz,Num-fila) para obtener una fila de la Matriz dada,
- comando ELEMENT(Matriz`,Num-col)` para obtener una columna de la Matriz dada,
- comando Matriz↓Fila para extraer una fila de la Matriz dada,
- comando Matriz`↓Col para extraer una columna de la Matriz dada,
- comando ELEMENT(Matriz,i,j) para extraer el elemento $\text{Matriz}_{i,j}$,
- comando Matriz↓i↓j para extraer el elemento Matriz_{ij} .

Programación didáctica del apartado II.2. APLICACIONES LINEALES

OBJETIVOS:

1) Determinar cuando una aplicación entre espacios vectoriales es una aplicación lineal.
2) Manipular las principales operaciones entre aplicaciones lineales: suma, producto, composición, inversa.
3) Calcular los subespacios núcleo e imagen de una aplicación lineal

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- concepto de aplicación lineal,
- suma de aplicaciones lineales,
- producto de un escalar por una aplicación lineal.,
- producto de aplicaciones lineales,
- composición de aplicaciones lineales,
- inversa de una aplicación lineal,
- núcleo de una aplicación lineal,
- imagen de una aplicación lineal.

Contenidos no esenciales:

- resolución de ecuaciones vectoriales,
- eliminación de los parámetros de un sistema de ecuaciones,
- operaciones algebraicas relacionadas con los conceptos de las operaciones suma, producto, producto de escalar por aplicación, composición e inversa de aplicaciones lineales,
- definición en DERIVE de aplicaciones lineales.

METODOLOGÍA:

Uno de los contenidos no esenciales de este apartado es nuevamente la resolución de sistemas de ecuaciones, herramienta de cálculo que ya hemos automatizado en apartados anteriores y que no interfiere en nada la comprensión de los principales procedimientos de este apartado: las relaciones entre matrices y aplicaciones lineales. También consideramos como contenido no esencial la eliminación de parámetros de sistemas lineales, técnica que ya hemos empleado con mucha persistencia a lo largo de todo el capítulo primero para obtener las ecuaciones cartesianas de un subespacio a partir de sus ecuaciones paramétricas. Por último el manejo algebraico de aplicaciones también va a ser un contenido no esencial, ya que si consideramos las aplicaciones como funciones vectoriales, DERIVE proporciona con relativa facilidad (una vez que se tiene dominada la definición de las aplicaciones lineales) la imagen de cualquier vector a partir de la aplicación lineal.

Comenzamos este apartado mostrando algunas APLICACIONES entre espacios vectoriales. Se les propone a los alumnos que comparen las imágenes de ciertos vectores con aplicaciones que no son lineales y con aplicaciones lineales para que intenten descubrir que solamente con las aplicaciones lineales se verifica que la imagen de la suma de dos vectores es la suma de las imágenes y que la imagen del producto de un escalar por un vector es el producto del escalar por la imagen del vector. Tras esta indagación de la propiedad de linealidad que tienen las aplicaciones lineales definimos formalmente el concepto, y también introducimos la caracterización operativa de las aplicaciones lineales, procedimiento que nos permite determinar de una manera rápida cuando una aplicación es o no lineal. Se plantean varios ejercicios para que los alumnos clasifiquen un conjunto de aplicaciones en lineales y no lineales. Es muy interesante que se familiaricen con la forma de definir las aplicaciones lineales con DERIVE, también deben determinar claramente cuales son los espacios vectoriales inicial y final de las aplicaciones lineales que definen. Se finaliza este primer concepto estudiando dos aplicaciones lineales muy sencillas: la aplicación identidad y la aplicación nula.

Para estudiar las operaciones entre aplicaciones lineales, planteamos tres ejemplos de aplicaciones lineales, explicaremos la definición de la operación a realizar, y dejaremos que DERIVE realice los cálculos para obtener la aplicación resultante. Se plantea a los alumnos que investiguen con los estos ejemplos si la suma y producto de aplicaciones lineales vuelve a ser una aplicación lineal. Finalizaremos como conclusión con la formalización de estas propiedades y con una demostración formal (si procede) de ambas propiedades.

Para introducir la composición, primero dejamos al alumno que descubra qué condiciones deben tener dos aplicaciones lineales para que se puedan componer y en qué orden se pueden componer; también se les invita a que estudien si la composición de dos aplicaciones (cuando se puede efectuar la composición) da como resultado una aplicación lineal, siempre sobre ejemplos concretos para que al finalizar la investigación los alumnos hagan el esfuerzo de generalizar las propiedades que han ido obteniendo.

Respecto de la aplicación inversa, el alumno deberá descubrir sobre los ejemplos planteados al efecto que no siempre existe la inversa de una aplicación lineal, y que en los casos en los que la aplicación lineal está definida sobre espacios vectoriales de diferente dimensión podemos encontrar aplicaciones lineales inversas por la izquierda y por la derecha. Sin embargo nos centraremos en el estudio de la inversa de aplicaciones lineales definidas sobre los mismos espacios vectoriales inicial y final, observando que en caso de existir esta aplicación inversa es única y lineal.

En estas cuestiones que el alumno tiene que investigar, debemos dejar el tiempo suficiente para que el alumno intente descubrir de forma autónoma los resultados, aunque el profesor puede ir encaminando y guiando a los alumnos hacia las rutas adecuadas de resolución. Además nuevamente, debemos apoyar las colaboraciones que se realizan entre los compañeros, que sin duda van a ayudar en algunos momentos al alumno a enfrentarse con el contenido, bien porque no recuerda alguna técnica de apartados anteriores y que preguntará con mayor facilidad a sus compañeros, o bien porque las ideas iniciales puede compartirlas con sus compañeros para contrastar los resultados.

Para finalizar este núcleo básico, estudiamos de manera práctica qué sucede con los conjuntos L.I. y L.D. respecto de las aplicaciones lineales. El alumno podrá descubrir con la ayuda de DERIVE que los conjuntos L.I. se pueden transformar en conjunto L.D. (sus imágenes) y sin embargo los conjuntos L.D. siempre se transforman en conjuntos L.D..

El último apartado de esta sección está basado en el estudio del núcleo y la imagen de una aplicación lineal. Para estudiar estos conceptos comenzaremos analizando sobre ejemplos concretos el significado del núcleo y la imagen de una aplicación lineal. A partir de estos ejemplos el alumno podrá ir intuyendo el significado de estos subespacios pudiendo comprobar que el núcleo es un subespacio vectorial del espacio de partida y que la imagen es un subespacio vectorial del espacio de llegada. Se les proponen varios ejemplos para que manipulen y calculen estos subespacios.

Por último se les muestra una relación muy importante que cumplen estos subespacios y es la llamada FÓRMULA DE LAS DIMENSIONES; resultado que pueden comprobar los ejemplos realizados anteriormente.

El guión de trabajo de este apartado se puede encontrar en el fichero: II-2-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Se propone realizar este apartado en aproximadamente 3 h. , es decir, en aproximadamente 1 clase y media.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

- Manipular adecuadamente la secuencia de comandos MANAGE-SUBSTITUTE para realizar eliminación de variables en sistemas de ecuaciones.
- Manipular adecuadamente el símbolo subíndice que se obtiene con ALT-V para definir de forma adecuada las aplicaciones lineales, en DERIVE aparece el símbolo flecha.
- Definición de las aplicaciones lineales con el método habitual

Nombre_aplicación(U) := [----- relación entre componentes de u ---]

Programación didáctica del apartado II.3.
RELACIÓN ENTRE MATRICES Y APLICACIONES LINEALES

OBJETIVOS:

1) Establecer la relación biunívoca existente entre matrices y aplicaciones lineales cuando nos referimos a unas bases para el espacio inicial y final de la aplicación lineal.
2) Obtener la matriz asociada a una aplicación lineal $f:R^n \rightarrow R^m$ respecto ciertas bases B_1 de R^n y B_2 de R^m.
3) Obtener la aplicación lineal que tiene por matriz asociada respecto de las bases B_1 de R^n y B_2 de R^m a cierta matriz A.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- procedimiento de obtención de la matriz asociada a una aplicación lineal respecto de ciertas bases,
- procedimiento de obtención de la aplicación lineal que tiene por matriz asociada respecto de ciertas bases una matriz dada,
- relaciones entre la matriz asociada a una aplicación lineal respecto de las bases canónicas y la expresión de la aplicación lineal.

Contenidos no esenciales:

- definir una aplicación lineal con DERIVE,
- obtener la imagen de un vector mediante el uso de DERIVE,
- multiplicar una matriz por un vector con DERIVE.

METODOLOGÍA:

Podemos observar que los contenidos no esenciales son procedimientos propios de DERIVE tales como el procedimiento especial de definición de una aplicación lineal, el cálculo de la imagen de un vector por esa aplicación lineal o el producto de una matriz por un vector, rutinas de cálculo que no son fundamentales para entender la relación entre matrices y aplicaciones lineales, pero que nos sirven de forma auxiliar para establecer dichas relaciones.

Dado que el tema tiene un contenido altamente procedimental, es decir, trata de establecer el procedimiento de cálculo para obtener matrices asociadas o aplicaciones lineales según los datos iniciales, la didáctica que emplearemos consistirá en plantear sobre un ejemplo concreto ambos procedimientos, para que los alumnos, con ciertas sugerencias y ayudas sean capaces de obtener las ideas fundamentales que sustentan estos procedimientos para poderlas transferir sobre otros problemas. A continuación se les pedirá que intenten extrapolar ambos procedimientos sobre ejercicios concretos, para asentar estos métodos de cálculo. En particular para obtener la matriz asociada a una aplicación lineal respecto de determinadas bases B_1 de R^n y B_2 de R^m. (si $f:R^n \rightarrow R^m$), se les sugiere que en primer lugar obtengan sobre un vector concreto w las COORDENADAS DE LA IMAGEN DE DICHO VECTOR en la base del espacio final; a continuación se les propone un método alternativo que consiste en intentar calcular lo mismo pero a partir de las imágenes de los vectores de la base B_1 y las coordenadas que tiene el vector w en la base B_1. Aplicando ahora la propiedad de linealidad, se puede llegar a obtener una relación operativa que es expresable de forma matricial. Por último se invita a los alumnos a que obtengan una conclusión para que puedan extraer el método general utilizando la misma aplicación lineal pero con bases distintas.

Para finalizar establecemos el procedimiento de construcción y se les sugiere que desarrollen esta técnica sobre un ejercicio manipulativo. También se hace hincapié en lo que se entiende por MATRIZ ASOCIADA A UNA APLICACIÓN LINEAL, cuando no se citan explícitamente las bases.

El segundo bloque de tareas, están encaminadas a obtener el procedimiento de construcción de la aplicación lineal si se conoce la matriz asociada a la aplicación incógnita respecto de ciertas bases dadas. Nuevamente, comenzamos con un ejemplo concreto sobre el que investigamos, sugiriéndoles varios pasos para la reconstrucción de la aplicación lineal. Esto les puede llevar a obtener la aplicación lineal y el procedimiento genérico. Al finalizar el apartado se proponen varios ejercicios sobre los cuales el alumno practicará los procedimientos obtenidos.

Para enfatizar la relación biunívoca entre aplicaciones lineales y matrices, se plantean ejercicios en los que se efectúan ambos pasos sobre una misma aplicación lineal, de tal forma que puedan comprobar el proceso de ida y vuelta.

Como conclusiones finales, citar nuevamente que las matrices son un instrumento que sirve para manipular de forma operativa las aplicaciones lineales, sobre todo si hablamos sobre matrices asociadas respecto de las bases canónicas. Esto nos va a servir en el apartado siguiente para construir mediante las operaciones de matrices, las correspondientes operaciones de aplicaciones lineales, utilidad que tiene una importancia especial en la obtención (si existe) de la inversa de una aplicación lineal.

El guión de trabajo de este apartado se puede encontrar en el fichero: II-3-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Para desarrollar este apartado, se tiene programado realizar en 2 horas, es decir una sesión de clase.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

No se van a utilizar técnicas específicas de DERIVE salvo las introducidas sobre todo en el apartado 2.2, es decir lo que se refiere definir aplicaciones lineales en el programa. Las operaciones más habituales serán la definición de matrices, definición de vectores, cálculo de la imagen de un vector por una aplicación lineal y producto de una matriz por un vector 1.

Programación didáctica del apartado II.4. RANGO DE UNA MATRIZ .

OBJETIVOS:

1) Adquirir un procedimiento de cálculo para obtener el rango de una matriz.
2) Obtener un método alternativo para calcular el subespacio imagen de una aplicación lineal a través de su matriz asociada.
3) Distinguir entre lo que se denominan matrices regulares o singulares y matrices no singulares, en función del rango.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- concepto de rango de una matriz cualquiera,
- relación entre el rango de una matriz y la dimensión del subespacio imagen de una aplicación lineal que tiene por matriz asociada la matriz dada,
- sistema de generadores del subespacio imagen de una aplicación lineal mediante la matriz asociada a la misma.

Contenidos no esenciales:

- cálculo para la obtención de la matriz asociada a una aplicación lineal,
- determinar la dependencia o independencia lineal de vectores columna.

METODOLOGÍA:

Obsérvese que en este apartado consideramos como contenidos no esenciales los cálculos rutinarios necesarios para obtener la matriz asociada a una aplicación lineal. Podemos decir que no son esenciales porque aunque es un procedimiento que se ha introducido en el apartado anterior, el proceso de obtención no está totalmente automatizado en DERIVE y el alumno tiene que saber en todo momento qué pasos está realizando para obtener la matriz asociada. Por otro lado consideramos en este apartado que podemos automatizar la determinación de la dependencia o independencia lineal de vectores, con el uso de DERIVE, para establecer la conexión de estos conceptos con el rango de un conjunto de vectores; en realidad esta automatización tan solo consiste en resolver un sistema de ecuaciones lineales, resultado de la ecuación vectorial que caracteriza cuando un conjunto de vectores es l.i. o l.d.

Para el estudio de este apartado comenzamos con el ejemplo de una aplicación lineal, sobre la cual se les pide calcular la matriz asociada respecto de las bases canónicas y el subespacio imagen, intentando obtener una relación entre el subespacio imagen obtenido y los vectores columna de la matriz asociada.

Una vez que se experimenta con este ejemplo se plantea un ejercicio mediante el cual se pide obtener el subespacio imagen de una aplicación lineal a partir de su matriz asociada.

El concepto de rango de una matriz se obtiene intentando obtener primero la dimensión del subespacio imagen, relacionando este hecho con el número de vectores columna linealmente independientes de la matriz asociada. La coincidencia de estos números nos permite motivar la definición del RANGO como el máximo número de vectores columna linealmente independientes, es decir lo que sería el número mínimo de vectores que debe tener un sistema de generadores del subespacio imagen. A raíz de esta definición se introduce la clasificación entre matrices singulares o regulares y matrices no singulares. Recordemos que en todo el proceso de introducción de contenidos hay que dejar tiempo suficiente a los alumnos para que experimenten e intenten llegar ellos mismos a sus propias conclusiones, a veces de forma individual y en ocasiones como consecuencia de la cooperación que existirá entre los compañeros en este proceso de descubrimiento y construcción de contenidos. De esta manera pondremos en práctica dos de los principios básicos de nuestra estrategia: obtención de aprendizajes significativos con ayuda de la colaboración entre alumnos.

Para finalizar se plantean algunos ejercicios de manipulación relacionados con el cálculo del rango y del subespacio imagen.

El guión de trabajo de este apartado se puede encontrar en el fichero:

II-4-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Se propone realizar este apartado en aproximadamente 45 minutos.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

- definición de matrices,
- definición de aplicaciones lineales,
- resolver ecuaciones vectoriales.

Programación didáctica del apartado II.5. OPERACIONES CON MATRICES Y APLICACIONES LINEALES

OBJETIVOS:

1) Dominar las operaciones fundamentales de matrices: suma, producto, producto de un escalar por una matriz, producto de Kronecker.
2) Obtener la aplicación lineal asociada a las operaciones de aplicaciones lineales: suma, producto de un escalar por una aplicación lineal y composición de matrices a través de las operaciones correspondientes de sus matrices asociadas.
3) Conocer las principales propiedades de estas operaciones.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- Definición de la suma de matrices y suma de aplicaciones lineales.
- Principales propiedades de la suma de matrices. y suma de aplicaciones lineales.
- Relaciones entre las operaciones suma de matrices y suma de aplicaciones lineales.
- Definición de la operación producto de un escalar por una matriz y producto de un escalar por una aplicación lineal.
- Propiedades del producto de un escalar con una matriz.
- Definición de la composición de aplicaciones lineales.
- Operación matricial asociada a la composición de aplicaciones lineales en el campo de sus matrices asociadas: producto de matrices.
- Propiedades del producto de matrices.
- Obtención de la composición de dos aplicaciones lineales a través del producto de sus matrices asociadas.
- Definición del producto de Kronecker de dos matrices.
- Propiedades del producto de Kronecker.

Contenidos no esenciales:

- Operaciones entre aplicaciones lineales.
- Independencia lineal de vectores.
- Matriz asociada a una aplicación lineal respecto bases canónicas
- Producto de una matriz por un vector.
- Cálculo del rango de una matriz .
- Producto de Kronecker de matrices.

METODOLOGÍA:

Consideramos como contenidos no esenciales las operaciones entre aplicaciones lineales, ya que no es fundamental para los contenidos del apartado saber operar aplicaciones lineales que por otro lado son operaciones rutinarias También consideraremos como contenidos esenciales operaciones como el producto de una matriz por un vector, y el producto de Kronecker de matrices, se trata nuevamente de operaciones que no son fundamentales para desarrollar los contenidos del tema, aunque respecto al producto de Kronecker el alumno debe saber como realizarlo lo más importantes es conocer las propiedades que tiene, y dado que se trata de una operación muy sencilla pero tediosa en su ejecución, para comprobar propiedades de este producto es interesante utilizar un procedimiento que efectúa de forma automática ese cálculo. Otro contenido que consideramos que no es fundamental para desarrollar las propiedades de estas operaciones entre matrices y aplicaciones lineales es la obtención de la matriz asociada a una matriz, procedimiento que nuevamente volvemos a comentar, no está totalmente automatizado, obligando de esta forma al alumno a saberlo realizar paso a paso dejando a DERIVE los cálculos rutinarios para la obtención de los resultados finales. Igualmente se considera un contenido no esencial la independencia lineal de vectores, que es un contenido del tema 1 así como la obtención del rango de una matriz que hemos considerado en el apartado anterior.

Este apartado es sumamente operativo, por lo que en cada una de las operaciones se planteará un esquema similar. Comenzamos introduciendo la suma de matrices y aplicaciones lineales. Para ello se plantea un ejemplo a investigar que consiste en una serie de aplicaciones lineales sobre las cuales se deben de investigar varias cuestiones: obtención de sus matrices asociadas, determinar los casos en los que sea posible obtener una aplicación suma, y comparar las matrices asociadas a la aplicación suma y las matrices asociadas a las aplicaciones sumando. Con ello se consigue determinar claramente cuando dos aplicaciones lineales son sumables, y determinar como se debe definir la suma de matrices. Sobre el ejemplo, se plantean conclusiones formales que se muestran al finalizar el estudio. A continuación se les propone a los alumnos un ejercicio de comprobación relacionado con las propiedades básicas de la suma de matrices: asociativa, conmutativa, existencia de elemento neutro y existencia de un elemento opuesto para cada matriz todo ello realizado sobre matrices constantes. Al finalizar el estudio se efectúa nuevamente el proceso de generalización. De igual forma, introducimos el producto de un escalar por una matriz. Primero estudiando la aplicación lineal que se obtiene al multiplicar un escalar por una aplicación lineal y luego estudiando la relación que guardan sus matrices asociadas. Una vez definida de forma natural esta operación, se les plantean ejemplos concretos de matrices sobre las cuales los alumnos deberán comprobar las principales propiedades del producto de un escalar por una matriz: distributiva de la suma de escalares respecto del producto, distributiva de la suma de matrices respecto del producto por escalar, pseudoasociativa y existencia del elemento neutro. Con estos dos bloques de propiedades, estamos en disposición de proponer a los alumnos si el conjunto de las matrices de orden 2x2 tienen estructura de espacio vectorial, y si es así se les propone que intenten construir una base de este espacio vectorial, así como el cálculo de su dimensión. Una vez investigada esta estructura, los alumnos podrán obtener combinaciones lineales entre matrices, o determinar si un conjunto de matrices de cierto orden es o no linealmente independientes.

Para la composición de aplicaciones lineales, planteamos un ejemplo con el que construimos la aplicación composición e intentamos obtener la relación que guardan las matrices asociadas. Para ello, tan solo tenemos en cuenta el orden de aplicación de las aplicaciones en el proceso de composición, traduciendo este proceso a su expresión matricial, así obtenemos un orden definido con el cual construir la operación producto de matrices. Una vez definido el producto de dos matrices, se proponen ejemplos para obtener la aplicación composición de dos matrices, utilizando la matriz asociada a la composición, es decir operando correctamente con el producto las matrices asociadas a las aplicaciones lineales iniciales. Se estudian asimismo las propiedades del producto de matrices sobre ejemplos concretos, a partir de los cuales se pueden extraer generalizaciones automáticas.

La última operación que trabajamos es el Producto de Kronecker entre matrices, operación que no guarda ninguna relación con una operación entre aplicaciones lineales. Una vez definida esta operación se proponen algunos ejemplos para que comprueben algunas de las propiedades que cumple este producto. Dada la sencillez del producto de Kronecker, una vez que se ha introducido, se les propone utilizar un fichero de utilidades de DERIVE que lo calcula de forma automática sin necesidad de ir realizando productos de escalares por matrices.

El guión de trabajo de este apartado se puede encontrar en el fichero:II-5-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Se propone realizar este apartado en aproximadamente 1 h. 15 m.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

- Recordar la forma de cargar ficheros de utilidades de DERIVE.
- Uso del fichero Kronecker.mth para automatizar el cálculo del producto de Kronecker.
- Aprender a realizar suma de matrices, producto de escalar por matriz y producto de matrices en DERIVE.
- Definir aplicaciones lineales en DERIVE.

Programación didáctica del apartado II.6.

MATRIZ INVERSA. APLICACIÓN LINEAL INVERSA

OBJETIVOS:

1) Determinar cuando una matriz tiene inversa.
2) Calcular la inversa de una matriz utilizando el método de GAUSS-JORDAN.
3) Obtener la aplicación lineal inversa de una aplicación lineal, a partir de la matriz inversa de su matriz asociada.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- Aplicación lineal inversa.
- Matriz asociada a una aplicación lineal inversa. Definición.
- Condición de invertibilidad de una matriz.
- Método algebraico de cálculo de la inversa de una matriz.
- Propiedades fundamentales de las matrices inversas.
- Método de Gauss-Jordan del cálculo de la inversa.

Contenidos no esenciales:

- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con DERIVE.
- Producto de matrices.
- Composición de aplicaciones lineales.
- Rango de una matriz.

METODOLOGÍA:

Obsérvese que consideramos como contenidos no esenciales la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, ya que el cálculo de soluciones que realizamos con DERIVE no interfiere en el cálculo de la inversa. También consideramos como contenidos no esenciales de este apartado tanto el producto de matrices, que podemos hacer de forma automática con DERIVE, y que nos sirve para construir paso a paso el método de Gauss-Jordan, y también la composición de aplicaciones lineales. Por último consideramos que el cálculo del rango de una matriz es un contenido suficientemente utilizado en apartados anteriores y que por tanto se puede considerar como un contenido no esencial pudiendo utilizarse por tanto el comando de DERIVE que calcula de forma directa el rango de una matriz constante.

Para introducir los contenidos esenciales del tema, comenzamos planteando el concepto de aplicación lineal inversa a partir de un ejemplo en el que se muestran dos aplicaciones lineales sobre las cuales, se les sugiere a los alumnos que efectúen la composición en los dos órdenes posibles. Con la obtención de la aplicación lineal obtenida (aplicación identidad) se motiva la introducción del concepto de aplicación lineal inversa. A partir de esta definición se propone a los alumnos que investiguen la relación que guardan las matrices asociadas a dos aplicaciones lineales tales que una es inversa de la otra (y viceversa). Esto nos conduce a la definición del concepto de matriz inversa.

Para estudiar la condición de invertibilidad de una matriz, se plantea como ejemplo una matriz que tiene inversa, sobre el cual introducimos un método algebraico para obtener la posible inversa. El método consiste en definir una matriz de incógnitas y plantear la ecuación matricial que ha de verificar dicha matriz, dando lugar a un sistema de ecuaciones lineales que se puede resolver de forma directa con DERIVE. En los casos en los que el sistema tiene solución, entonces, existe inversa y en los que no hay solución decimos que no hay inversa. Ante este hecho, se motiva la necesidad de obtener una CONDICIÓN DE INVERTIBILIDAD que permita, sin necesidad de efectuar estos cálculos, si una matriz tiene o no inversa. Para ello se orienta a los alumnos para que investiguen los rangos de matrices con inversa y matrices sin inversa. Con este estudio guiado, los alumnos deben llegar a la conclusión de que la condición de invertibilidad de una matriz es que el rango de la matriz sea completo, es decir, para que una matriz tenga inversa esta matriz debe ser una matriz no singular.

Una vez introducida la condición, se propone estudiar las propiedades de las matrices inversas mediante la exploración de ejemplos concretos. Las propiedades que pretendemos introducir de esta forma son la unicidad de la inversa, y la equivalencia de la inversa del producto de dos matrices. Después de obtener estos resultados se proponen algunos ejercicios de manipulación.

Para introducir al alumno en el proceso de Gauss-Jordan, se plantea un ejemplo dirigido con el que el alumno consiga obtener mediante sucesivas transformaciones la matriz identidad. Estas transformaciones denominadas transformaciones de Gauss-Jordan equivalen a multiplicar la matriz inicial por sucesivas matrices que contienen los datos de la transformación que se está realizando. En este proceso las transformaciones se plantearán en forma matricial, es decir, el alumno debe identificar la transformación que produce una matriz cuando se multiplica por otra, de tal forma que el alumno sea capaz de ir construyendo las matrices adecuadas (operando siempre por filas y por tanto premultiplicando las matrices obtenidas), de tal forma que al finalizar el proceso, pueda agrupar todas las transformaciones obtenidas mediante un producto ordenado. Para que los alumnos consigan entender bien el proceso de Gauss-Jordan deberán entender muy bien el significado real de premultiplicar una matriz por otra, identificándolo con la realización de transformaciones por filas. En este proceso experimental de observación, es muy importante que en el primer ejemplo se provoquen situaciones de colaboración entre los compañeros, ya que en esas pequeñas discusiones de resultados se podrán obtener las conclusiones fundamentales con las que el alumno podrá deducir de forma significativa los resultados que le conducen al proceso de Gauss-Jordan. A continuación se les proponen algunos ejercicios para que practiquen con este método que por un lado les permite obtener la matriz inversa y por otro les permite manipular y obtener el significado del producto como transformación de matrices es decir, como una composición en definitiva de aplicaciones lineales.

El guión de trabajo de este apartado se puede encontrar en el fichero: II-6-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Para llevar a cabo este tema se sugiere utilizar aproximadamente 2 h.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

Algunas de las herramientas que emplearemos son conocidas de apartados anteriores:

- definir una aplicación lineal en DERIVE.
- sumar y multiplicar matrices
- sumar aplicaciones lineales
- cálculo del rango de una matriz.
- definir matrices, en especial la matriz identidad de un cierto orden.

Los nuevos procedimientos que deberemos considerar son los siguientes:

- definir una matriz genérica de un orden determinado
- resolver sistemas de ecuaciones generados por ecuaciones matriciales

Programación didáctica del apartado II.7. TIPOS DE MATRICES.

OBJETIVOS:

1) Identificar los principales tipos de matrices.
2) Conocer y manipular las principales propiedades que tienen asociadas los diferentes tipos de matrices.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- Matrices triangulares. Propiedades.
- Matrices Traspuestas. Propiedades.
- Matrices simétricas. Propiedades.
- Matrices antisimétricas. Propiedades.
- Matrices ortogonales. Propiedades.
- Matrices idempotentes. Propiedades.
- Matrices nilpotentes. Propiedades.
- Matrices unipotentes. Propiedades.

Contenidos no esenciales:

- Producto de Matrices.
- Inversa de una matriz.

METODOLOGÍA:

Dado que este apartado se basa en la comprobación de propiedades de las matrices utilizaremos los procesos de cálculo de producto de matrices y de cálculo de la inversa de una matriz como contenidos no esenciales, que facilitarán la comprobación de muchas de las propiedades que cumplen los diferentes tipos de matrices que vamos a estudiar.

Para cada uno de los tipos de matrices se plantea una metodología similar que consiste en:

1º) Introducir la definición del tipo de matriz.

2º) Definir o reconocer de entre ciertas matrices cuales se ajustan al tipo de matriz que se está estudiando.

3º) Sobre matrices concretas de cada tipo, comprobar las principales propiedades que cumple cada tipo de matrices.

Con este método, se obliga al alumno a insistir en los conceptos y propiedades más que en la propia operativa que es necesaria para reconocer cierta matriz. Nuevamente a partir de los contenidos previos y la experimentación que realiza cada alumno con el programa DERIVE es posible efectuar una comprobación y estudio de las diferentes propiedades de los tipos de matrices que se estudian en este apartado. No obstante, insistiremos también en demostraciones formales de las diferentes propiedades, muchas de ellas las expondremos en la pizarra y otras se dejarán propuestas a los alumnos para que las intenten por sí mismos.

El guión de trabajo de este apartado se puede encontrar en el fichero: II-7-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Para llevar a cabo este tema se sugiere utilizar aproximadamente 1 hora.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

- Definición de matrices en DERIVE.
- Producto de Matrices.
- Introducir la operación de TRASPOSICIÓN DE MATRICES en DERIVE (uso del acento grave A`).
- Cálculo de la inversa de una matriz.

II.5.2.3. EXPOSICIÓN DIDÁCTICA DEL TEMA III: TRAZA Y DETERMINANTE DE UNA MATRIZ.

Objetivos del tema:

- Calcular correctamente la traza de una matriz y conocer las principales propiedades de la traza.
- Calcular el determinante de una matriz de orden 2 o de orden 3 a partir de las fórmulas asociadas.
- Calcular el determinante de una matriz cuadrada de orden n desarrollando por los adjuntos de una fila o columna.
- Calcular la inversa de una matriz utilizando determinantes.
- Calcular el rango de una matriz a partir de determinantes.
- Conocer las propiedades fundamentales de los determinantes.
- Establecer la relación entre los determinantes y la dependencia e independencia lineal de vectores.

Contenidos:

- III.1. Traza de una matriz.
- III.2. Determinante de una matriz.
- III.3. Propiedades de los determinantes.
- III.4. Aplicaciones de los determinantes: rango e inversa.

Temporalización:

Apartado III.1: 30 minutos

Apartado III.2: 1 hora 30 minutos.

Apartado III.3: 1 hora

Apartado III.4: 1 hora

TOTAL 4 horas, es decir 2 sesiones.

Metodología:

En la estrategia didáctica que hemos propuesto, hemos reducido el uso del programa de cálculo simbólico DERIVE al conjunto de contenidos que consideramos no esenciales para el desarrollo de los contenidos básicos del capítulo; por ello en cada uno de los apartados hemos realizado una clasificación de los contenidos en contenidos esenciales y contenidos no esenciales. Este tema es especialmente conflictivo a la hora de realizar esta clasificación, porque los contenidos inicialmente esenciales pudieran parecer que son contenidos de mero cálculo, en particular el cálculo de la traza y el cálculo del determinante de una matriz cuadrada. Respecto al cálculo de la traza, como veremos en el apartado 1, no es una operación que requiera una destreza especial por parte del alumno ya que se reduce a la suma de los elementos de la diagonal principal, por tanto, una vez introducida la operación, es suficiente realizar unos pocos ejemplos y a continuación introducir directamente la función que ejecuta en DERIVE de forma automática el cálculo de la traza de cualquier matriz cuadrada, para así centrar luego la atención del alumno en las propiedades que tiene esta operación con respecto a las principales operaciones con matrices: suma, producto, traspuesta. En cuanto a los determinantes, para introducir la operación iniciamos el segundo apartado dando la definición formal de determinante, a partir de la cual deducimos las reglas típicas para obtener el determinante de matrices de orden dos y de orden 3. Ambos procesos los automatizamos de forma casi inmediata, pero utilizando las posibilidades que brinda DERIVE para programar sendas funciones que calculan determinantes de matrices de orden 2 y orden 3, es decir, una implementación de dichas reglas. Siguiendo esa dinámica de programación de funciones, y a partir de la definición general del cálculo de determinantes, se les propone a los alumnos que programen funciones para calcular determinantes de matrices de orden 4, regla que no suele enseñarse pero que existe y que puede implementarse de manera automática con DERIVE. Dado que, el objetivo de la operación es conocer el fundamento de la misma, y manejar las reglas de cálculo de los determinantes de matrices de orden 2 y orden 3, efectuamos una serie de ejercicios que pretenden refrescar estos procedimientos que por otro lado, ya han sido manipulados en cursos anteriores. Para dar el salto al método general y más operativo, al menos con lápiz y papel, se presenta el desarrollo de un determinante por los adjuntos de una línea. Este método lo introduciremos secuencialmente para matrices de orden cuatro y orden cinco, programando funciones que calculan utilizando este procedimiento determinantes de matrices de los órdenes indicados. Nuevamente, la operativa no es el elemento fundamental, sino el procedimiento que permite al alumno calcular determinantes siguiendo una directriz genérica y no una regla memorística. Por este motivo, una vez que el alumno domina el proceso, y no antes, se introduce la función que calcula el determinante de una matriz cualquiera en DERIVE, eso ocurrirá en los últimos apartados. Los ejemplos para investigar servirán para que los alumnos usen el programa para descubrir e investigar las propiedades, relaciones o conceptos que se van introduciendo respecto a la traza y determinante de la suma, el producto de matrices y otras operaciones, así como las relaciones que guardan estas operaciones con respecto a los diferentes tipos de matrices. Todas las cuestiones que los alumnos van investigando se basaran en contenidos que previamente los alumnos deben de manejar, para que con la ayuda del profesor y posiblemente de las colaboraciones que se pueden realizar entre los alumnos encuentren y obtengan la respuestas adecuada a las cuestiones que se proponen. Por otro lado los ejercicios de manipulación servirán nuevamente para consolidar las principales técnicas en el manejo de matrices y aplicaciones lineales que se van introduciendo. Los problemas propuestos tendrán diversos niveles de dificultad algunos de ellos versan sobre las principales técnicas del tema, otros son problemas en los que la experimentación y el proceso de inducción servirán al alumno para obtener propiedades de matrices n-ésimas, o para resolver ecuaciones matriciales. En este tipo de problemas, las funciones DET o TRACE no son fundamentales y ni siquiera funcionan para resolver las situaciones problemáticas que se plantean, ya que se trata fundamentalmente de razonamiento inductivos en los que el alumno debe tener muy claro el concepto o la generación del concepto de determinante y de traza para obtener las posibles vías de solución.

Pasamos a continuación a detallar la programación didáctica de cada uno de los cuatro apartados de los que consta este tercer capítulo.

Programación didáctica del apartado III.1. TRAZA DE UNA MATRIZ

OBJETIVOS:

1) Obtener la traza una matriz cualquiera.
2) Conocer las principales propiedades de la traza de matrices respecto a las operaciones fundamentales entre matrices.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- Concepto de la traza de una matriz.
- Principales propiedades de la traza de una matriz respecto de las operaciones básicas entre matrices: suma, producto por escalar, inversa, producto, producto de Kronecker e inversa.

Contenidos no esenciales:

- Comandos básicos de DERIVE para definir matrices.
- Comando TRACE para obtener la traza de una matriz.

METODOLOGÍA:

Obsérvese que consideramos como contenido no ESENCIAL el comando que calcula la traza de una matriz, porque consideramos que es una operación que tan solo requiere efectuar la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz en cuestión, y no se trata por tanto de un obstáculo para comprender el concepto o la operación traza; ya que lo fundamental es razonar sobre la base de esta definición para extrapolar propiedades que tiene la traza de una matriz respecto a las diferentes operaciones que realizamos con matrices.

Iniciaremos por tanto este apartado definiendo el concepto de la traza de una matriz. Dado que se trata de un concepto cuyo cálculo únicamente requiere sumas, introducimos a continuación la función predefinida en DERIVE que calcula la traza de una matriz: TRACE. Obsérvese que se trata de un cálculo que no impide el reconocimiento del concepto, ya que la manipulación del mismo de forma automática con DERIVE lo único que nos facilita es realizar las sumas correspondientes de forma automática.

Una vez definido el concepto intentamos que los alumnos descubran la relación que guardan la traza con la igualdad de matrices, ya que puede darse que las trazas de dos matrices sean iguales y sin embargo no sean matrices idénticas, pero por el contrario siempre que dos matrices son idénticas sus trazas coinciden.

Para terminar plantearemos al alumno que a partir de ejemplos concretos intente deducir las principales propiedades que cumple la traza de una matriz respecto de las operaciones de suma de matrices, producto de un escalar por una matriz, producto de matrices y producto de Kronecker.

El guión de trabajo de este apartado se puede encontrar en el fichero: III-1-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Este apartado se puede hacer fácilmente en 30 minutos

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

Utilizaremos la definición habitual de matrices y la operación TRACE que calcula la traza de una matriz cuadrada cualquiera.

Programación didáctica del apartado III.2. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

OBJETIVOS:

1) Utilizar de forma fluida la regla para el cálculo de determinantes de matrices de orden 2 y orden 3.
2) Saber calcular el determinante de matrices de un orden cualquiera por medio del desarrollo de los adjuntos de una línea

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- Determinante de una matriz de orden 2.
- Regla de Sarrus para el cálculo del determinante de una matriz de orden 3.
- Desarrollo de un determinante por los adjuntos de una línea.
- Menor complementario de un elemento.
- Adjunto de un elemento.

Contenidos no esenciales:

- Productos y sumas de números reales.

METODOLOGÍA:

Este apartado esta lleno de procedimientos, y aunque DERIVE nos proporciona una función (la función DET) que calcula de forma automática el determinante de una matriz cuadrada, sea esta numérica o con valores paramétricos, nos centraremos en los métodos de cálculo de determinantes para que el alumno practique a lo largo de este tema el cálculo de determinantes usando los procedimientos más generales. Como el cálculo de determinantes es el contenido esencial del apartado, es evidente que el uso de DERIVE debe ser únicamente auxiliar para realizar las sumas y operaciones necesarias para obtener el cálculo: no debemos facilitar al alumno la función que calcula directamente el determinante de cualquier matriz cuadrada.

Partiendo de estas premisas iniciales, expondremos la DEFINICION general de determinantes y deduciremos de forma teórica la formula de determinantes de orden 2. Tras realizar unos cuantos ejercicios con la regla, les propondremos a los alumnos que programen en DERIVE una función, llamada DETERMINANTE_2(Matriz), que calcule el determinante de cualquier matriz de orden 2. Con ello dejaríamos completamente automatizado el proceso para este tipo de matrices.

El mismo proceso metodológico realizaremos con las matrices de orden 3. Primero deduciremos la REGLA DE SARRUS a partir de la definición de forma teórica. Propondremos a los alumnos unos cuantos ejercicios para que calculen determinantes aplicando esta regla con la ayuda de DERIVE (en lo que respecta a las sumas y productos que tengan que efectuar) y después les propondremos a los alumnos que programen una función en DERIVE, que llamaremos REGLA_SARRUS(Matriz), que nos calcule el determinante de cualquier matriz de orden 3. Con esto tendríamos automatizado el proceso para las matrices de orden 3.

Para introducir el cálculo de determinantes por los adjuntos de una línea (fila o columna), introduciremos previamente los conceptos de MENOR COMPLEMENTARIO Y ADJUNTO O COFACTOR de un elemento.

La metodología que utilizaremos con estos dos conceptos consistirá primero en definir el significado, y luego calcular algunos menores complementarios y adjuntos usando la función de DERIVE DELETE_ELEMENT(M,i), función que nos permite borrar una fila i-ésima de cierta matriz M. Dado que se trata de un proceso automático, les propondremos a los alumnos que traten de definir un procedimiento para calcular menores complementarios de matrices de orden 2 y de orden 3. Lo mismo efectuaremos para el adjunto de matrices de orden 2 y orden 3. Para generalizar el proceso de menor complementario y adjunto, necesitaríamos el determinante de una matriz de orden superior. Como no deseamos introducir la función DET, consideraremos una función indefinida DETERMINANTE(M) que deje indicado el proceso que debemos realizar sobre una matriz cualquiera, de tal forma que así podamos definir un procedimiento genérico para MENOR COMPLEMENTARIO y en consecuencia también para el ADJUNTO de un elemento de una matriz de un orden cualquiera.

Una vez automatizado el cálculo de ADJUNTOS; introduciremos el desarrollo de un determinante por los adjuntos de una línea, proceso que nos permitirá indicar de forma automática (con las funciones ya definidas previamente), los cálculos que tenemos que realizar de manera secuencial para calcular el determinante de cualquier matriz cuadrada.

Como acabamos de observar el contenido esencial del apartado (el cálculo de determinantes), está repleto de procedimientos que permiten simplificar su cálculo si lo que se desea es dotar al alumno de las técnicas necesarias para calcular un determinante a lápiz y papel, entendiendo el significado del procedimiento. De todos estos métodos el alumno deberá dominar la regla de los determinantes de orden dos y la Regla de Sarrus para el cálculo de determinantes de matrices cuadradas de orden tres, métodos que por otro lado el alumno ya conoce del curso anterior. Además el alumno deberá ser capaz de deducir el mejor procedimiento para calcular determinantes de orden superior utilizando la regla que desarrolla un determinante por los adjuntos de una línea, ya que habrá programado en DERIVE los procesos previos requeridos para efectuar estos cálculos. Aunque inicialmente puede resultar costoso para el alumno programar en DERIVE (ya que se trata de un lenguaje funcional) sin embargo una vez que haya programado unas cuantas veces rápidamente entenderá la filosofía que utiliza el programa en términos de programación de funciones: consiste únicamente en definir procedimientos sobre la base de funciones previamente definidas.

El guión de trabajo de este apartado se puede encontrar en el fichero:III-2-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Se prevé impartir este apartado en 1 hora 30 minutos.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

Funciones DELETE_ELEMENT(M,i) y traspuesta de una matriz A`

También es necesario recordar la forma de DEFINIR funciones en DERIVE, y por tanto de PROGRAMAR en DERIVE.

Recordar la forma de manejar los FICHERO DE UTILIDADES.

Programación didáctica del apartado III.3. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES.

OBJETIVOS:

1) Dominar las principales propiedades de los determinantes con el fin de facilitar el cálculo de los mismos.
2) Relacionar el cálculo de determinantes con la dependencia e independencia lineal de vectores.
3) Conocer las propiedades de los determinantes de algunos tipos especiales de matrices.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- Propiedades fundamentales de los determinantes.
- Determinantes y dependencia e independencia lineal.
- Determinantes de matrices triangulares, ortogonales, antisimétricas, idempotentes, unipotentes y nilpotentes.

Contenidos no esenciales:

- Cálculo de determinantes de orden 2 (DETERMINANTE_2).
- Cálculo de determinantes de orden 3 (REGLA_SARRUS).
- Construcción de matrices con vectores fila o vectores columna.

METODOLOGÍA:

Obsérvese que en este apartado el cálculo de determinantes de matrices de orden 2 y orden 3 se convierte en un contenido no esencial, ya que la operativa de sus cálculos pasa a ser secundaria ante los contenidos del apartado que tratan de examinar las principales propiedades que tienen los determinantes.

El método que utilizaremos para introducir las 9 propiedades fundamentales de los determinantes consiste en la introducción de ejemplos de matrices sobre las cuales el alumno debe calcular sus determinantes, y a partir de la estructura de las matrices y los resultados obtenidos se les pedirá a los alumnos que intenten conjeturar las propiedades que se verifican. Se les invitará a que experimenten su conjetura con cada una de las propiedades.

Para la relación entre determinantes y dependencia e independencia lineal plantearemos algunos ejemplos sobre los cuales podremos aplicar una de las propiedades de determinantes de las que se deduce la relación directa entre estos conceptos y el valor del determinante de la matriz

Por último para estudiar el determinante de las matrices triangulares, ortogonales, antisimétricas, idempotente, unipotentes y nilpotentes, les propondremos a los alumnos matrices de cada uno de estos tipos antes citados para que estudien sus determinantes y traten de obtener las propiedades por experimentación y observación. En algunos casos realizaremos la demostración formal en la pizarra.

El guión de trabajo de este apartado se puede encontrar en el fichero:III-3-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Se espera realizar este apartado en 1 h.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

Necesitaremos saber cargar un fichero (en particular el fichero DETERM.MTH) como fichero de utilidades, y recordar el significado de las funciones definidas en dicho fichero que nos sirven para calcular determinantes de orden 2, orden 3 y el cálculo de adjuntos de elementos.

Programación didáctica del apartado III.4. APLICACIONES DE LOS DETERMINANTES.

OBJETIVOS:

1) Calcular el rango de una matriz cualquiera con el uso de determinantes.
2) Obtener la matriz inversa de una matriz invertible, con el uso de determinantes.
3) Obtener por inducción, el determinante n-ésimo de una matriz n-ésima.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- Rango de una matriz cuadrada.
- Rango de una matriz no cuadrada de rango completo.
- Teorema del Rango.
- Adjunta de una matriz.
- Regla de la Inversa por determinantes.

Contenidos no esenciales:

- Cálculo de determinantes de orden 2, orden 3 y adjuntos de elementos, utilizando para ello las funciones DETERMINANTE_2, REGLA_SARRUS, ADJUNTO_3, ADJUNTO_4 y ADJUNTO definidas en el fichero de utilidades DETERM.MTH.
- Función VECTOR y DIMENSION.

METODOLOGÍA:

Observemos que consideramos como contenidos no esenciales para este apartado los procedimientos de cálculo de determinantes de matrices de orden 2 y de orden 3, así como el cálculo de los adjuntos de un elemento. Se trata de procedimientos que ya hemos manipulado bastante en apartados anteriores y que no son esenciales para estudiar las dos aplicaciones fundamentales de los determinantes: el cálculo de rangos y el cálculo de la inversa. Para el cálculo de rangos analizamos las propiedades que tienen los vectores fila o vectores columna de una matriz respecto a su dependencia e independencia lineal y la relación que pueden guardar con los determinantes. En el caso del cálculo de la inversa establecemos tan solo un procedimiento de cálculo de la inversa basado en el determinante de la matriz de adjuntos: la matriz adjunta.

Con el fin de formular algunas de las aplicaciones del cálculo de determinantes, en este apartado nos centraremos en dos aplicaciones fundamentales: el cálculo del rango de una matriz cualquiera y el cálculo de la inversa de matrices cuadradas.

Para el cálculo del rango de una matriz, iremos proponiendo al alumno tres situaciones. La primera que relacione determinante con el rango cuando la matriz es cuadrada. De esta relación se obtendrán una serie de condiciones de manera experimental sobre ejemplos concretos. La segunda situación es que relacione el determinante con el rango de una matriz de rango completo. Nuevamente deberá manipular matrices no cuadradas de rango completo sobre las que deducirá la relación entre rango y determinante. Para motivar el teorema del rango consideraremos matrices con más filas que columnas sobre las cuales estudiaremos el máximo número de vectores l.i. por medio del cálculo de determinantes. Por último introduciremos la técnica habitual de cálculo de rango como el orden del mayor determinante no nulo de una submatriz de la matriz considerada.

Para estudiar la inversa, recordaremos que tenemos definidas funciones que calculaban los adjuntos de elementos para matrices de orden 2 y orden 3 y dejaba indicado el proceso para matrices de un orden cualquiera. Por otro lado se les introducirá en las funciones VECTOR y DIMENSION, con el fin de que puedan programar en DERIVE una función que calcule la ADJUNTA de matrices de orden 2 , orden 3 y de un orden cualquiera. Con esto conseguiremos automatizar el proceso de cálculo de la adjunta de una matriz cualquiera y por otro lado que el alumno entienda perfectamente el procedimiento de cálculo. Obsérvese que para matrices de orden 5, este procedimiento deja indicado el cálculo de ciertos determinantes.

No hemos introducido la función predefinida en DERIVE que calcula la ADJUNTA; porque creemos que es un concepto esencial en el apartado que debe de manipular el alumnos de forma correcta.

Siempre debemos introducir los conceptos de manera constructiva, de tal forma que el alumno sea capaz de ir descubriendo procedimientos y propiedades por medio de la observación experimental de los datos que va manipulando con DERIVE.

El guión de trabajo de este apartado se puede encontrar en el fichero: III-4-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Se calcula 1 h. Para el desarrollo del apartado.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

- Funciones predefinidas DIMENSION; VECTOR.
- Uso de las funciones definidas en el fichero DETERM.MTH : ADJUNTO_3, ADJUNTO_4, REGLA_SARRUS, y ADJUNTO.

II.5.2.4. EXPOSICIÓN DIDÁCTICA DEL TEMA IV: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Objetivos del tema:

- Reconocer los sistemas de ecuaciones lineales y representarlos en forma matricial y forma vectorial
- Formular sistemas de ecuaciones lineales como solución a problemas concretos.
- Discutir la existencia de soluciones de un sistema.
- Conocer las características de las soluciones de los sistemas de ecuaciones homogéneos y no homogéneos.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante diferentes métodos: Regla de Cramer, Gauss-Jordan.

Conceptos:

- IV.1. Generalidades de sistemas de ecuaciones lineales.
- IV.2. Existencia de soluciones.
- IV.3. Propiedades de las soluciones de sistemas homogéneos.
- IV.4. Sistemas equivalentes.
- IV.5. Métodos de resolución

Temporalización:

Apartado IV.1:30 minutos.

Apartado IV.2: 1 h. 30 minutos.

Apartado IV.3: 1 hora.

Apartado IV.4: 30 minutos.

Apartado IV.5: 30 minutos.

TOTAL: 4 horas (2 sesiones)

Metodología:

El uso del programa de cálculo simbólico DERIVE está limitado en nuestra estrategia al cálculo de aquellos contenidos que consideramos previamente como contenidos no esenciales para el desarrollo del capítulo o apartado que estamos trabajando, de acuerdo con las directrices que formulamos en nuestra estrategia didáctica. En este capítulo centrado en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, parece un poco contradictorio estudiar los sistemas lineales con DERIVE cuando en apartados anteriores ya hemos usado la resolución de sistemas de ecuaciones lineales por medio del programa. Sin embargo, debemos señalar que cuando hemos utilizado DERIVE para resolver en capítulos anteriores los sistemas lineales que iban apareciendo, hemos supuesto que el alumno ya conocía previamente las técnicas básicas de resolución de sistemas (reducción, sustitución e igualación) que serían las técnicas que hubieran tenido que utilizar en el caso de tener que resolverlos a mano, por tanto, el usar DERIVE en aquellas situaciones no resulta contradictorio, pues se trataba de cálculos que no eran esenciales para el desarrollo de los contenidos que allí se introducían. Sin embargo, en este tema que ahora comenzamos, debemos estudiar dos elementos fundamentales de los sistemas lineales:

a) En primer lugar el estudio de la COMPATIBILIDAD o INCOMPATIBILIDAD del sistema, es decir lo que se denomina la DISCUSIÓN DEL SISTEMA. Para ello utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenius basado en la comparación de los rangos de las matrices de coeficientes y matriz ampliada del sistema; siendo por tanto necesario introducir previamente las tres formas fundamentales de notación de los sistemas: forma matricial, en forma de ecuaciones, y en forma vectorial.

b) En segundo lugar estudiaremos algunas formas de RESOLVER SISTEMAS, en particular hablaremos del método de Gauss y la Regla de Cramer, que inicialmente pueden no tener sentido al utilizar el sistema DERIVE, pero sin embargo pueden ser reglas que complementen la resolución para casos en los que existen parámetros en las matrices de coeficientes o en la ampliada.

Debemos señalar que en esta parte del curso el cálculo de determinantes y el cálculo de rangos de matrices constantes se considera que deben ser técnicas o procedimientos dominados por el alumno y por tanto se pueden considerar que no son esenciales para el desarrollo del tema en cuestión: sistemas de ecuaciones. De hecho, utilizaremos cálculos de determinantes y de rangos para discutir sistemas, cálculos que de realizarse a mano, empañarían el proceso de discusión que pretendemos introducir. Es por ello que se introducirán las funciones predefinidas DET y RANK que calculan el determinante de una matriz cualquiera y el rango de una matriz constante respectivamente.

Nuevamente, la operativa no es el elemento fundamental, sino el procedimiento que permite al alumno DISCUTIR sistemas utilizando una directriz clara con la que pueda realizar un razonamiento de discusión para sistemas en los que pueden aparecer parámetros. Los ejemplos para investigar servirán para que los alumnos usen el programa para descubrir e investigar las propiedades, relaciones o conceptos que se van introduciendo respecto a los sistemas de ecuaciones lineales. Todas las cuestiones que los alumnos van investigando se basarán en contenidos que previamente los alumnos deben saber manejar, para que con la ayuda del profesor y posiblemente de las colaboraciones que se pueden realizar entre los alumnos, encuentren y obtengan la respuestas adecuadas a las cuestiones que se proponen. Por otro lado los ejercicios de manipulación servirán nuevamente para consolidar las principales técnicas en el manejo de matrices y aplicaciones lineales que se van introduciendo. Los problemas propuestos tendrán diversos niveles de dificultad algunos de ellos versan fundamentalmente sobre la FORMULACIÓN de sistemas de ecuaciones lineales para resolver problemas de situaciones reales, en otros casos para discutir sistemas en función de parámetros.

Pasamos a continuación a detallar la programación didáctica de cada uno de los cinco apartados de los que consta este cuarto capítulo.

Programación didáctica del apartado IV.1. GENERALIDADES DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

OBJETIVOS:

1) Reconocer cuando un conjunto de ecuaciones forma un sistema lineal respecto de ciertas variables.
2) Formular sistemas de ecuaciones lineales.
3) Representar los sistemas de ecuaciones lineales en forma estándar, en forma matricial y en forma vectorial
4) Dominar el concepto de solución de un sistema lineal.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- Definición de sistema de ecuaciones lineales.
- Solución de un sistema de ecuaciones lineales.
- Sistemas de ecuaciones lineales equivalentes.

Contenidos no esenciales:

- Comandos básicos de DERIVE para definir matrices.
- Multiplicar matrices en DERIVE.

METODOLOGÍA:

Observemos que los contenidos no esenciales para este apartado se basan por un lado en la definición de matrices propia del programa, que es por tanto una operación meramente manipulativa, y en segundo lugar el producto de matrices. Este producto es una técnica de cálculos que teóricamente debe ser dominada claramente por el alumno a estas alturas del curso, ya que el producto de matrices es una operación que ya han utilizado en cursos anteriores y que nuevamente ha manipulado en buena parte de este curso.

Comenzamos el apartado, planteando el concepto de sistema de ecuaciones lineales proponiendo algunos ejercicios para reconocer cuando un sistema de ecuaciones es lineal respecto a cierto conjunto de variables.

El siguiente concepto a manipular son las diferentes representaciones que ofrecen los sistemas de ecuaciones lineales. A través de un ejemplo, mostramos como un sistema de ecuaciones lineales se puede representar en forma de ecuaciones (forma estándar) de forma matricial y de forma vectorial. Una vez que se han mostrado estas representaciones se les plantea a los alumnos que construyan las formas matricial y vectorial de ciertos sistemas propuestos.

El tercer concepto de este apartado de generalidades es el concepto de solución de un sistema. Para ello definimos el concepto y planteamos algunos ejemplos para que los alumnos determinen, con la ayuda de DERIVE, si ciertos vectores son solución de un conjunto de sistemas dado.

Para introducir la noción de sistemas equivalentes, aprovecharemos las ventajas que ofrece DERIVE para comprobar que cierto vector es solución de un sistema utilizando la forma matricial del sistema. Para ello les propondremos varios sistemas equivalentes en forma matricial y un vector solución para que determinen si el vector dado es solución de los sistemas indicados, además deberán intentar deducir el motivo por el cual ese vector es solución de todos los sistemas planteados. Tras este sencillo ejercicio de investigación, podrán descubrir cuál es el significado de sistema equivalente que se les muestra al finalizar el ejercicio.

Para finalizar el apartado se les proponen algunos problemas para formular sistemas lineales que resuelven algunos problemas concretos, y se comentan las ideas básicas de la formulación.

El guión de trabajo de este apartado se puede encontrar en el fichero:IV-1-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Para realizar esta unidad se tiene previsto emplear aproximadamente unos 30 minutos. Se trata de un apartado muy sencillo, que únicamente pretende familiarizar a los alumnos con la manipulación de sistemas en DERIVE.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

Utilizaremos la definición habitual de matrices y las definiciones de sistemas como vector de ecuaciones.

Programación didáctica del apartado IV.2. EXISTENCIA DE SOLUCIONES.

OBJETIVOS:

1) Estudiar la existencia de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales mediante la aplicación del Teorema de Rouché-Fröbenius.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- Teorema de Rouché-Fröbenius en sus dos versiones.

Contenidos no esenciales:

- Comandos básicos de DERIVE para definir matrices.
- Cálculo de DETERMINANTES (función DET de DERIVE).
- Cálculo de RANGOS de matrices (función RANK de DERIVE).

METODOLOGÍA:

Para manejar con mayor soltura el Teorema de Rouché-Fröbenius consideraremos como contenidos no esenciales el cálculo de determinantes y de rangos introduciendo dos funciones que automatizan su cálculos: la función DET que permite obtener el determinante de una matriz cuadrada de cualquier orden, y la función RANK contenida en un fichero de utilidades que permite obtener el rango de una matriz constante. Ambos procesos consideramos que no son esenciales para entender el Teorema de Rouché-Fröbenius, es más, si tuviésemos que aplicarlo utilizando los cálculos habituales es posible que el conjunto de cálculos que se tienen que realizar enturbiara la comprensión correcta del Teorema.

Para introducirnos en el Teorema de Rouché-Fröbenius, iniciamos el estudio de la existencia de soluciones estudiando gráficamente el significado de los diferentes tipos de sistemas COMPATIBLES DETERMINADOS, COMPATIBLES INDETERMINADOS e INCOMPATIBLES. A través de esta visión gráfica de la existencia de sistemas por medio de los sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, introducimos la clasificación de los sistemas en función del número de soluciones. Profundizamos en la existencia de soluciones, planteando los citados sistemas en su forma vectorial, e intentando extraer las características que tienen los sistemas cuando son compatibles e incompatibles. Estas características se relacionan de forma directa con los rangos de las matrices de coeficientes y matriz ampliada del sistema. A partir de estos ejemplos y con el estudio de algunos otros sistemas concluiremos planteando el Teorema de Rouché-Fröbenius que analiza la compatibilidad de los sistemas comparando los rangos de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada.

Para favorecer este estudio, introduciremos a los alumnos en el manejo de dos funciones de DERIVE que efectúan de forma automática el cálculo de determinantes: la función DET y la función RANK, definida en el fichero de utilidades VECTOR.MTH, que calcula el rango de matrices constantes. Obsérvese que el estudio de determinantes y de rangos, es un elemento de cálculo no esencial para la comprensión de los conceptos relacionados con la compatibilidad e incompatibilidad de sistemas, pero que nos facilita este estudio. Realizaremos por tanto ejercicios sobre sistemas utilizando estas dos funciones.

En un segundo paso, estudiamos la relación entre la compatibilidad e incompatibilidad de sistemas con la pertenencia o no del vector de términos independientes a la imagen de la aplicación lineal que tiene por matriz asociada respecto de las bases canónicas a la matriz de coeficientes del sistema. A partir de este análisis con varios ejemplos llegaremos a la segunda caracterización del Teorema de Rouché, relacionando la compatibilidad con la pertenencia del vector de términos independientes con la imagen de la citada aplicación lineal.

El guión de trabajo de este apartado se encuentra en el fichero:

IV-2-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Este apartado tenemos previsto realizarle en 1 h. 30 minutos.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

Utilizaremos las funciones:

DET(A) que calcula el determinante de la matriz A, función que forma parte del NÚCLEO BÁSICO del programa DERIVE.

RANK(A) que calcula el rango de una matriz A constante (sin términos variables). Esta función está definida en el fichero de utilidades VECTOR.MTH, por lo tanto para su uso, es necesario cargar previamente dicho fichero.

Programación didáctica del apartado IV.3. PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES DE LOS SISTEMAS HOMOGÉNEOS Y NO HOMOGÉNEOS

OBJETIVOS:

1) Reconocer que el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo tiene estructura de espacio vectorial.
2) Reconocer que el conjunto de soluciones de un sistema no homogéneo tiene estructura de espacio afín.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- El subespacio vectorial de las soluciones de un sistema homogéneo.

- Estructura de las soluciones de un sistema no homogéneo. Sistema homogéneo asociado.

Contenidos no esenciales:

- Comandos básicos de DERIVE para definir matrices y sistemas.
- Resolución de sistemas con el comando SOLVE.

METODOLOGÍA:

Consideraremos que la resolución de sistemas usando SOLVE es un contenido no esencial; ya que para estudiar las características de las soluciones utilizaremos DERIVE para extraerlas previamente y ver sus características y compararlas. Aunque posteriormente utilizaremos otros métodos para resolver sistemas, consideramos que este procedimiento no es esencial para comprender el objetivo de este apartado que se centra en el estudio de las propiedades que tienen las soluciones de los sistemas.

Para estudiar las soluciones de los sistemas homogéneos planteamos un ejemplo de un sistema homogéneo que se resuelve con el comando SOLVE de DERIVE. A partir de las soluciones obtenidas se pretende intentar estudiar qué estructura tienen. Por medio de unos cuantos ejemplos adecuados, se puede conducir a los alumnos para que deduzcan que la suma de dos soluciones de un sistema homogéneo vuelve a ser solución de dicho sistema, y lo mismo sucede con el producto de un escalar por un vector solución del sistema homogéneo, ya que vuelve a ser solución del sistema homogéneo. De esta forma podemos llegar a demostrar que cualquier combinación lineal de soluciones de un sistema homogéneo vuelve a ser solución de dicho sistema, con lo cual obtenemos que las soluciones de los sistemas homogéneos tienen estructura de subespacio vectorial.

Para estudiar las soluciones de los sistemas no homogéneos primero estudiamos sus soluciones y las comparamos con las obtenidas de sus sistemas homogéneos asociados. Los alumnos relacionaran estos conjuntos de soluciones, y deberán llegar a una conclusión: para resolver un sistema no homogéneo tan sólo es necesario encontrar una solución particular del sistema y la solución general del sistema homogéneo asociado. Al llegar a esta conclusión comprobamos las propiedades fundamentales de estas soluciones, entre las cuales la más importante es que la diferencia de dos soluciones de un sistema no homogéneo es solución del sistema homogéneo asociado.

El guión de trabajo de este apartado se puede encontrar en el fichero:IV-3-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Para realizar el estudio de este apartado, tenemos previsto emplear aproximadamente 1 hora.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

Comando SOLVE para resolver sistemas.

Programación didáctica del apartado IV.4. SISTEMAS EQUIVALENTES

OBJETIVOS:

1) Obtener sistemas equivalentes mínimos de sistemas compatibles indeterminados.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- Sistemas lineales equivalentes.
- Construcción de sistemas equivalentes mínimos.

Contenidos no esenciales:

- Comandos básicos de DERIVE para definir matrices.
- Cálculo del rango de una matriz con RANK.
- Cálculo de determinantes con DET.

METODOLOGÍA:

Iniciamos el apartado planteando un par de sistemas equivalentes con la característica de que uno tiene menos ecuaciones que otro, para intentar deducir qué característica tienen los sistemas equivalentes mínimos. Una vez planteado el ejemplo, se propone al alumno que intente obtener sistemas equivalentes mínimos; en primer lugar de sistemas homogéneos y luego de sistemas no homogéneos. Este es un tema eminentemente manipulativo. En alguna ocasión puede ser necesario el uso de las funciones RANK y DET, para el estudio de rangos de matrices de coeficientes.

El guión de trabajo de este apartado se puede encontrar en el fichero: IV-4-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Este apartado está previsto realizarlo en 30 minutos

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

Utilizaremos nuevamente el comando SOLVE y las funciones RANK y DET.

Programación didáctica del apartado IV.5. MÉTODOS DE RESOLUCION

OBJETIVOS:

1) Resolver sistemas de ecuaciones lineales por cuatro métodos distintos: comando soLve, método de Gauss-Jordan, Regla de Cramer, cálculo de inversas.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- Regla de Cramer y Método de la inversa para resolver sistemas compatibles determinados.
- Método de Gauss-Jordan para construir sistemas equivalentes.

Contenidos no esenciales:

- Cálculo de la inversa de una matriz.
- Comando SOLVE para resolución de sistemas.
- Uso de la función ROW_REDUCE que implementa método Gauss-Jordan.

METODOLOGÍA:

Consideraremos como contenidos no esenciales algunos procesos rutinarios que ya hemos empleado en apartados anteriores como es el cálculo de la INVERSA, el uso del comando SOLVE y el uso de una función que implemente el proceso de Gauss-Jordan: ROW_REDUCE. Creemos que estos contenidos no son esenciales para el proceso de resolución de sistemas que pretende ser más que nada un conjunto de procedimientos para resolver, sobre todo centrado en el método de Cramer.

Comenzamos mostrando sobre el ejemplo de un sistema compatible determinado la forma de resolver estos sistemas utilizando los siguientes métodos:

- usando función SOLVE,
- utilizando la Regla de Cramer,
- utilizando la Inversa de la matriz de coeficientes,
- método de Gauss-Jordan, implementado en la función ROW_REDUCE..

A continuación planteamos algunos ejemplos de sistemas compatibles determinados para practicar.

Para aplicar estos cuatro métodos en sistemas compatibles indeterminados, encontramos un problema con la Regla de Cramer y con el método de la inversa, problema que se solución construyendo sistemas equivalentes mínimos con el menor número de incógnitas, es decir sistemas compatibles determinados con parámetros de los sistemas compatibles indeterminados iniciales. Con lo cual obtenemos métodos para resolver cualquier sistema compatible.

El guión de trabajo de este apartado se puede encontrar en el fichero:IV-5-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Este apartado se pretende impartir en unos 30 minutos.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

Utilizaremos la función ROW_REDUCE, función que se encuentra en el NÚCLEO.

II.5.2.5. EXPOSICIÓN DIDÁCTICA DEL TEMA V: AUTOVALORES. AUTOVECTORES. DIAGONALIZACIÓN.

Objetivos del tema:

- Dominar las técnicas básicas del cálculo de autovalores y autovectores de matrices.
- Determinar si una matriz es diagonalizable y en caso de serlo obtener una matriz diagonal semejante a ella.
- Conocer las propiedades básicas de los autovalores y autovectores de matrices.
- Conocer la relación entre autovalores y autovectores de matrices y de aplicaciones lineales.
- Formular y resolver problemas cuyo modelo sea la potencia n-ésima de una matriz diagonalizable.

Contenidos:

- V.1. Autovalores y autovectores.
- V.2. Propiedades de los autovalores.
- V.3. Propiedades de los autovectores.
- V.4. Diagonalización de matrices.
- V.5. Aplicaciones.

Temporalización:

Apartado V.1: 1 hora.
Apartado V.2: 1 hora.
Apartado V.3: 1 hora.
Apartado V.4: 2 horas y media.
Apartado V.5: 1 hora y media.
TOTAL: 7 horas.

Metodología:

Con la estrategia que hemos planteado, incorporamos el uso del programa de cálculo simbólico DERIVE para desarrollar aquellos contenidos que consideramos previamente como contenidos no esenciales, es decir que no son fundamentales para comprender los contenidos denominados esenciales del capítulo o apartado que estemos trabajando. Así pues en cada apartado considerando esta clasificación en contenidos esenciales y no esenciales, procederemos a introducir los contenidos del capítulo de tal forma que potenciemos la experimentación del alumno, para que de forma significativa pueda construir su propio conocimiento, guiado en parte por el profesor y ayudado generalmente por las colaboraciones que se producen en su entorno de trabajo y que debemos favorecer. En particular en el tema que nos ocupa es importante que tengan claro el proceso de cálculo de los autovalores y los autovectores de una matriz, pues podemos caer en el peligro de automatizar este proceso de tal forma que el alumno se aprenda sólo la función que realiza los cálculos sin entender los resultados que dicha función produce, es decir que no sepa realmente lo que está calculando. Por ello en los primeros apartados del capítulo utilizaremos la caracterización de autovalores y autovectores en función de la resolución de la ecuación característica, sin introducir la función que calcula de forma directa los autovalores; lo mismo ocurrirá con los autovectores, que los calcularemos en función de cada autovalor y por la caracterización operativa que los define. Sin embargo en el apartado de diagonalización, utilizaremos funciones que automatizan estos cálculos para que el alumno centre su atención en el proceso de diagonalización, aunque en ocasiones estas funciones no proporcionan la información suficiente para diagonalizar, bien porque necesitamos saber el orden de multiplicidad de un autovalor o bien porque estamos estudiando la diagonalización de una matriz en función de algunos parámetros. Por tanto en este tema debemos insistir muy especialmente en los procesos de cálculo para que su aprendizaje sea efectivo, aunque en ocasiones se puedan automatizar. Los ejemplos para investigar servirán para que los alumnos usen el programa para descubrir e investigar las propiedades, relaciones o conceptos que se van introduciendo respecto a la diagonalización de matrices. Todas las cuestiones que los alumnos van investigando se basaran en contenidos que los alumnos deben de manejar previamente, para que con la ayuda del profesor y posiblemente de las colaboraciones que se pueden realizar entre los alumnos encuentren y obtengan la respuestas adecuada a las cuestiones que se proponen. Por otro lado los ejercicios de manipulación servirán nuevamente para consolidar las principales técnicas en el manejo de matrices y aplicaciones lineales que se van introduciendo. Los problemas propuestos tendrán diversos niveles de dificultad algunos de ellos versan fundamentalmente sobre los procesos básicos de cálculo de autovalores y autovectores, otros sobre la diagonalización de matrices en función de parámetros y algunos dedicados ya a las aplicaciones sobre todo basadas en modelos que requieren el cálculo de una potencia k-ésima de una matriz.

Pasamos a continuación a detallar la programación didáctica de cada uno de los cinco apartados de los que consta este quinto capítulo.

Programación didáctica del apartado V.1. AUTOVALORES Y AUTOVECTORES.

OBJETIVOS:

- Entender el significado de subespacio invariante por una aplicación lineal.
- Comprender el concepto de autovalor y autovector de una aplicación lineal.

- Diferenciar los conceptos de autovalor y autovector de una matriz y de una aplicación lineal.
- Calcular los autovalores y autovectores de una matriz.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- Subespacio invariante de una aplicación lineal.
- Autovalores y autovectores de una aplicación lineal.
- Autovalores y autovectores de una matriz.
- Relación entre los autovalores y autovectores de una aplicación lineal y una matriz.
- Polinomio característico de una matriz.
- Ecuación característica de una matriz.

Contenidos no esenciales:

- Cálculo de determinantes.
- Cálculo de las raíces de un polinomio.
- Obtención de la imagen de un vector por una aplicación lineal.
- Definición de aplicaciones lineales en DERIVE.

METODOLOGÍA:

En este apartado consideramos como contenidos no esenciales el cálculos de determinantes y el cálculo de las raíces de un polinomio ya que son procesos que deben ser suficientemente dominados por los alumnos y que además no son fundamentales para comprender los contenidos del apartado, con relación al cálculo de autovalores y de subespacios invariantes. Por otro lado también consideramos como contenidos no esenciales la obtención de la imagen de un vector por una aplicación lineal, que evidentemente tampoco interfiere para la comprensión de los contenidos que estamos desarrollando.

Iniciamos el tema con un ejercicio sobre el cual los alumnos deben investigar acerca del concepto de subespacio invariante. Para ello se les plantea una aplicación lineal y un par de subespacios vectoriales. El alumno debe de calcular las imágenes de varios vectores de dichos subespacios y representarlos. Utilizando las representaciones gráficas de estas imágenes el alumno podrá descubrir que los subespacios que se han propuesto son subespacios invariantes. Los ejemplos propuestos serán de subespacios de R^2 para que los alumnos obtengan una buena visualización del concepto de invarianza. A partir de este concepto se les plantea la pregunta de ¿cómo obtener subespacios invariantes?. Para ello se introduce el concepto de autovalor y autovector de una aplicación lineal. Por medio de varios ejemplos los alumnos comprueban cuando un número real y un vector son autovalor y autovector respectivamente, de una aplicación lineal; comprobando de forma experimental la relación que guardan los subespacios invariantes de una aplicación lineal con los autovalores y autovectores de dicha aplicación lineal. La siguiente cuestión que se les plantea a los alumnos es que intenten obtener los autovalores y autovectores de una cierta aplicación lineal, con lo que obtendrían automáticamente los subespacios invariantes de la misma. Para introducir el método operativo, les sugerimos que calculen la matriz asociada a cierta aplicación lineal respecto de ciertas bases para que comprueben la relación que hay entre los autovalores y autovectores de la matriz (datos que se les facilitan) con ciertos valores y vectores respecto de la matriz asociada. Nuevamente mediante un proceso de observación y experimentación, los alumnos podrán descubrir que existe cierta relación entre dichos valores. A los valores y vectores de la matriz asociada de cierta aplicación lineal en cierta base y los autovalores y autovectores de la aplicación lineal los definimos como autovalores y autovectores de la matriz asociada. A continuación se plantea la proposición que relaciona autovalores y autovectores de una matriz con los de la aplicación lineal de la cual proceden (respecto de cierta base). Para finalizar obtenemos un método operativo para calcular autovalores y autovectores de una matriz sin más que aplicar ciertos procedimientos en DERIVE: para el cálculo de autovalores, en particular basta resolver la ecuación característica; ecuación que se obtiene como resultado de igualar a cero el determinante de la matriz $(A-\lambda Id)$. La edición de esta ecuación en DERIVE resulta sumamente sencilla y es la que les servirá para calcular el polinomio característico y en consecuencia los autovalores de dicha matriz. Por otro lado, para el cálculo de los autovectores de una matriz, basta con resolver un sistema homogéneo que se plantea en DERIVE editando para cada autovalor λ el sistema homogéneo *(A-λ identity_matrix(n))=0* (donde n es la dimensión de la matriz A y 0 es un vector nulo de dimensión n).

Se finaliza el estudio de este apartado realizando varios ejercicios con los que el alumno se familiarice con el cálculo de autovalores y autovectores con DERIVE.

El guión de trabajo de este apartado se puede encontrar en el fichero: V-1-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Para desarrollar este apartado se precisa aproximadamente de 1 hora.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

- Representación gráfica de vectores en el plano. PLOT.
- Cálculo de raíces de un polinomio, con el comando FACTOR-RADICAL.
- Resolución de ecuaciones con el comando SOLVE
- Resolución de sistemas homogéneos de ecuaciones lineales.

Programación didáctica del apartado

V.2. PROPIEDADES DE LOS AUTOVALORES.

OBJETIVOS:

- Dominar la relación que guardan el producto de autovalores de una matriz con el determinante de la misma y la suma de los autovalores con la traza de la matriz.

- Conocer las principales propiedades que tienen los autovalores respecto de las operaciones con matrices: producto por un escalar, potenciación, inversa, traspuesta
- Conocer las características de los autovalores de las matrices triangulares, ortogonales, idempotentes, nilpotentes y unipotentes.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- Relación entre los autovalores y el determinante de una matriz.
- Relación entre los autovalores y la traza de una matriz.
- Autovalores de una matriz y su traspuesta.
- Autovalores de una matriz y su inversa.
- Autovalores de una matriz y una potencia n-ésima suya.
- Autovalores de una matriz y la matriz producto de un escalar por ella misma.
- Autovalores de matrices triangulares.
- Autovalores de matrices ortogonales.
- Autovalores de matrices idempotente, nilpotente y unipotentes.

Contenidos no esenciales:

- Cálculo de autovalores de una matriz con la fórmula del determinante.

METODOLOGÍA:

Consideramos como contenido no esencial el cálculo de los autovalores utilizando la fórmula de determinantes, proceso que se puede automatizar fácilmente con DERIVE y que no interfiere para la comprensión de las propiedades que deseamos obtener.

Se trata de un apartado es sumamente operativo, en el que básicamente utilizaremos el programa para comprobar las propiedades que cumplen los autovalores de diferentes tipos de matrices y de las principales operaciones con matrices. Para introducir cada una de las propiedades sugeriremos ejemplos de comprobación para que se observen las relaciones que guardan los autovalores de una matriz, el determinante y la traza. El alumno deberá experimentar con numerosos ejemplos e intentar deducir a partir de esos experimentos qué relación guardan y porqué se verifica la relación, intentando formalizar algún tipo de demostración.

Utilizaremos un procedimiento similar para estudiar las propiedades de los autovalores de una matriz y las operaciones de trasposición, inversa, potencia n-ésima y producto por un escalar, con un método de experimentación e inducción.

Por último con los tipos de matrices, tras realizar la experimentación con matrices ortogonales, triangulares, idempotentes, nilpotentes y unipotentes, el alumno deberá establecer la relación que guardan y demostrar formalmente de manera general porqué se cumplen las propiedades que puede haber conjeturado, en un proceso de construcción del conocimiento sobre la base de la experimentación y la deducción final.

El guión de trabajo de este apartado se puede encontrar en el fichero: V-2-TEOR.MTH:

TEMPORALIZACIÓN:

Se pretende impartir el tema en 1 hora aproximadamente.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

- Cálculo de determinantes: función DET.
- Cálculo de la traza de una matriz: función TRACE.
- Cálculo de la potencia n-ésima de una matriz: A^n.
- Cálculo de la inversa de una matriz: A^(-1).
- Trasposición de matrices: A`

Programación didáctica del apartado

V.3. PROPIEDADES DE LOS AUTOVECTORES.

OBJETIVOS:

- Conocer las relaciones que guardan autovectores de una matriz y su inversa, una potencia n-ésima suya y el producto de un escalar por dicha matriz.
- Conocer la diferencia que hay entre los autovectores de una matriz y su traspuesta.
- Establecer la relación entre independencia lineal y autovectores de autovalores distintos.
- Conocer las propiedades de los autovectores de diferentes tipos de matrices.
- Calcular los órdenes de multiplicidad aritmético y geométrico de un autovalor.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- Autovectores de una matriz y su inversa.
- Autovectores de una matriz y una potencia n-ésima suya.
- Autovectores de una matriz y su traspuesta.
- Autovectores de una matriz y el producto de un escalar por dicha matriz.
- Autovectores de matrices ortogonales.
- Autovectores e independencia lineal.
- Autovectores de matrices idempotentes.
- Órdenes de multiplicidad aritmético y geométrico de un autovalor.
- Dimensión del subespacio de autovectores.

Contenidos no esenciales:

- Cálculo de autovalores con la función EIGENVALUES.
- Cálculo de autovectores por resolución de sistemas homogéneos.

METODOLOGÍA:

Para agilizar el cálculo de autovalores vamos a introducir una función de DERIVE que calcula autovalores de forma automática ya que consideramos que el cálculo de autovalores no es un contenido esencial para estudiar las propiedades de los autovectores de una matriz.

Utilizamos una metodología similar a la que hemos desarrollado en el apartado anterior, es decir, estudiaremos las propiedades que cumplen los autovectores mediante la experimentación. Para ello se les plantearán a los alumnos ejemplos concretos sobre los cuales deberán estudiar las relaciones que guardan los autovectores, de tal forma que ellos mismos sean capaces de observar y deducir las propiedades que guardan los autovectores de las matrices respecto de las operaciones que se realizan sobre ellas. Hay que puntualizar que en la operación de trasposición no existe ninguna relación entre autovectores de una matriz y su traspuesta, situación atípica respecto del resto de operaciones, y diferente también de la que guardan autovalores de una matriz y su traspuesta. Para agilizar cálculos en este apartado se introduce la función EIGENVALUES que calcula directamente los autovalores de una matriz. Esta función forma parte del NÚCLEO BÁSICO del programa.

Para el estudio de las propiedades de autovectores de matrices ortogonales e idempotentes, se les sugerirá a los alumnos que además de realizar experimentos sobre matrices ortogonales e idempotentes concretas, que efectúen demostraciones formales de las conjeturas que se puedan obtener.

Por último se introducen los conceptos de dimensión del subespacio de autovectores de una matriz para cierto autovalor y los conceptos de orden de multiplicidad aritmético y geométrico de un autovalor y se plantean algunos ejemplos sobre los cuales podrán calcular dichos órdenes de multiplicidad. Se incide bastante en que la función EIGENVALUES a veces no suele resultar eficaz para calcular el orden de multiplicidad aritmético de un autovalor, teniendo que calcular en esos casos las raíces del polinomio característico.

El guión de trabajo de este apartado se puede encontrar en el fichero:V-3-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Se realizará aproximadamente en 1h. (junto con el apartado anterior) .

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

Se introducen las función EIGENVALUES para el cálculo de los autovalores distintos de una matriz. También se emplean las funciones DET y solve. Así como la función RANK para el cálculo del orden de multiplicidad geométrica de un autovalor.

Programación didáctica del apartado

V.4.DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES.

OBJETIVOS:

- Que el alumno sea capaz de determinar si una matriz es o no diagonalizable y en caso de serlo sepa obtener la matriz diagonal semejante a la dada.
- Que el alumno sea capaz de obtener los valores que ha de tener un parámetro o conjuntos de parámetros de una matriz paramétrica para que ésta sea diagonalizable.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- Concepto de semejanza de matrices.
- Condición suficiente de diagonalización.
- Condición necesaria y suficiente de diagonalización.
- Diagonalización de matrices simétricas, idempotentes y nilpotentes.
- Diagonalización de matrices ortogonales.

Contenidos no esenciales:

- Cálculo de autovalores y autovectores de una matriz.
- Cálculo de los ordenes de multiplicidad geométrica y aritmética de un autovalor.

METODOLOGÍA:

Para motivar la diagonalización se plantea una aplicación lineal para la cual los alumnos deben obtener la matriz asociada respecto de dos bases distintas. Observarán que respecto de una de las bases la matriz asociada es una matriz DIAGONAL. A continuación se les pregunta acerca de la relación que pueden guardar estas dos matrices. Esta relación nos permitirá introducir el concepto de SEMEJANZA DE MATRICES: dos matrices A y D son semejantes si existe una matriz P no singular tales que $A=P.D.P^{-1}$. A partir de este concepto, surge de forma natural la necesidad de introducir un procedimiento para determinar si una matriz A admite una matriz semejante que sea diagonal, incitando de esta manera hacia la búsqueda previa de condiciones que nos permitan garantizar este hecho. Para ello se proponen varios ejemplos para que los alumnos intenten relacionar el cálculo de autovalores y autovectores de una matriz con la matriz diagonal y matriz de paso, de tal forma que con una orientación adecuada los alumnos podrán descubrir o al menos intuir cual es el proceso de diagonalización de matrices mediante el cálculo de autovalores y autovectores. Una de las conclusiones a las que se debe llegar es que para que una matriz sea diagonalizable debe existe una base de autovectores, que por otro lado configura precisamente la matriz de paso. A continuación, planteamos las condiciones de diagonalización de matrices. Primero comenzamos con el caso más sencillo: cuando todos los autovalores son distintos. Tras experimentar con varios ejemplos los alumnos descubrirán que las matrices con todos sus autovalores distintos son siempre diagonalizables. Se les sugiere que intenten demostrar formalmente el por qué de esta condición suficiente. Bastará que recuerden la relación de independencia lineal que tienen los autovectores de autovalores asociados a autovalores distintos. Finalizaremos los contenidos teóricos del capítulo con el estudio de la condición necesaria y suficiente de diagonalización. Tras realizar varios ejercicios relacionados con la diagonalización de matrices numéricas, plantearemos algunos problemas encaminados a obtener la diagonalización de matrices paramétricas. Para finalizar se estudia la diagonalización de algunas matrices concretas en particular las matrices simétricas, ortogonales, idempotentes y nilpotentes. Para las matrices ortogonales estudiamos además la posibilidad de encontrar una matriz de paso no singular además ORTOGONAL. El procedimiento de construcción de esta matriz ortogonal consistirá en obtener una base de autovectores unitarios.

El guión de trabajo de este apartado puede encontrarse en el fichero: V-5-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Este apartado se espera desarrollar en 2 horas y media.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:.

- Cálculo de determinantes (DET).
- Cálculo del rango de matrices numéricas (RANK).
- Resolución de sistemas homogéneos (SOLVE).
- Resolución de ecuaciones polinomiales (solve).
- Matriz traspuesta e inversa A` A^(-1).
- Modulo de un vector ABS(u).
- Producto de matrices.
- Autovalores de una matriz (EIGENVALUES).

Programación didáctica del apartado

V.5. APLICACIONES.

OBJETIVOS:

- Calcular la potencia n-ésima de una matriz.
- Formular problemas en base al cálculo de la potencia n-ésima de una matriz.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- Cálculo de la potencia n-ésima de una matriz.
- Formulación de problemas matriciales que tienen que ver con la potencia n-ésima de una matriz.

Contenidos no esenciales:

- Proceso de diagonalización de una matriz.
- Cálculo de productos matriciales.
- Cálculo de límites de los elementos de una matriz.

METODOLOGÍA:

Este apartado es eminentemente práctico por lo que tras plantear el problema del cálculo de la potencia n-ésima de una matriz, (operación que no se puede desarrollar directamente con DERIVE efectuando A^n), sugerimos al alumno que intente obtener un método para calcular la potencia n-ésima de A si A es diagonalizable. Una vez que los alumnos hayan intentado obtener el procedimiento de cálculo, introduciremos si es necesario el método ilustrándolo con un ejemplo concreto. Tras realizar algunos ejemplos numéricos de cálculos de potencias n-ésimas, se plantean dos problemas generales sobre los cuales el alumno deberá en primer lugar FORMULAR el problema de manera matricial y a continuación RESOLVER, utilizando un proceso de cálculo de potencia n-ésima.

El guión de trabajo de este apartado se puede encontrar en el fichero:

V-5-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Se espera realizar en 1 h. 30 minutos.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

- Todas las utilizadas en el capítulo: DET, SOLVE, EIGENVALUES, cálculo de inversas.

II.5.2.6. EXPOSICIÓN DIDÁCTICA DEL TEMA VI: FORMAS CUADRÁTICAS.

Objetivos del tema:

- Entender el significado de una forma cuadrática así como sus diferentes tipos.
- Saber clasificar una forma cuadrática con y sin parámetros.
- Manejar el criterio que establece las condiciones suficientes de segundo orden para clasificar puntos críticos de funciones de varias variables, usando formas cuadráticas.

Contenidos:

- VI.1. Introducción a las formas cuadráticas.

- VI.2. Clasificación de formas cuadráticas.

Temporalización:

Apartado 1: 1 h.

Apartado 2: 3h.

TOTAL: 4 h. (2 sesiones)

Metodología

Tal como venimos señalando en las metodologías de los capítulos anteriores nuestra estrategia didáctica propone el uso del programa de cálculo simbólico DERIVE para el desarrollo y cálculo de aquellos contenidos que consideramos previamente como contenidos no esenciales, es decir que no son fundamentales para comprender los contenidos denominados esenciales del capítulo o apartado que estemos trabajando. Así pues en cada apartado considerando esta clasificación en contenidos esenciales y no esenciales, procederemos a introducir los contenidos del capítulo de tal forma que potenciemos la experimentación del alumno, para que de forma significativa pueda construir su propio conocimiento, guiado en parte por el profesor y ayudado generalmente por las colaboraciones que se producen en su entorno de trabajo y que debemos favorecer. El tema que nos ocupa es uno de los temas de aplicación directa de todos los contenidos desarrollados hasta ahora, en particular del tema 5 en el que se desarrolló todo el cálculo de autovalores y autovectores, y se convierte en un tema auxiliar para la clasificación de formas cuadráticas. En el proceso de aprendizaje el alumno va a poder experimentar con los conocimientos y procesos adquiridos hasta ahora para aplicarlos en el contenido fundamental del tema que es la clasificación de formas cuadráticas, con y sin parámetros. En este proceso de experimentación e investigación, el profesor debe actuar como mediador en el proceso de aprendizaje, en el sentido de que debe dirigir los procesos de experimentación e investigación que se van proponiendo, y debe estimular la adquisición de aprendizajes significativos. Asimismo es muy importante que se favorezcan ambientes de colaboración, ofreciendo el tiempo suficiente para que esas colaboraciones entre alumnos puedan ejercer el desarrollo y estímulo suficiente en el proceso de aprendizaje. En este sentido los ejemplos para investigar servirán para que los alumnos usen el programa para descubrir e investigar las propiedades, relaciones o conceptos que se van introduciendo respecto a la clasificación de formas cuadráticas. Todas las cuestiones que los alumnos van investigando se basaran en contenidos que previamente los alumnos deben de manejar, para que con la ayuda del profesor y posiblemente de las colaboraciones que se pueden realizar entre los alumnos encuentren y obtengan la respuestas adecuada a las cuestiones que se proponen. Por otro lado los ejercicios de manipulación servirán nuevamente para consolidar las principales técnicas en el manejo de matrices y aplicaciones lineales que se van introduciendo. Los problemas propuestos tendrán diversos niveles de dificultad algunos de ellos versan fundamentalmente sobre los procesos básicos de obtención y clasificación de formas cuadráticas a partir de su matriz simétrica asociada, y en otros casos para clasificar formas cuadráticas que contienen parámetros.

Pasamos a continuación a detallar la programación didáctica de los dos apartados de los que consta este sexto capítulo.

Programación didáctica del apartado

VI.1. INTRODUCCIÓN A LAS FORMAS CUADRÁTICAS.

OBJETIVOS:

- Entender el significado de forma cuadrática.
- Saber representar una forma cuadrática en forma polinómica y forma matricial.
- Obtener la matriz simétrica asociada a una forma cuadrática.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- Concepto de forma cuadrática.
- Formas polinómica y matricial de una forma cuadrática.
- Forma canónica de una forma cuadrática.
- Matriz asociada a una forma cuadrática.

Contenidos no esenciales:

- Cálculo del gradiente de una función de varias variables.
- Multiplicación de matrices.

METODOLOGÍA:

Comenzamos definiendo el concepto de polinomio cuadrático y mostramos algunos ejemplos para que los alumnos sepan determinar cuando un polinomio es cuadrático en ciertas variables. A continuación se define una forma cuadrática como una aplicación de R^n en R definida por un polinomio cuadrático.

Las formas cuadráticas se pueden expresar de dos formas: forma polinómica y forma matricial, por lo que estudiaremos por medio de ejemplos la manera de obtener a partir de la forma polinómica la forma matricial y viceversa. De entre todas las formas matriciales asociadas a las formas cuadráticas, se propone a los alumnos que intenten obtener si es posible una forma matricial que tenga como matriz asociada una matriz simétrica. Se estudia la unicidad de esta matriz que se denominará la matriz asociada a la forma cuadrática. Para realizar este cálculo automático se programa una función basada en el cálculo del gradiente, que nos automatice el cálculo de la matriz asociada a la forma cuadrática.

El guión de trabajo de este apartado se puede encontrar en el fichero:VI-1-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Se pretende impartir en 1h.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

- Definición de funciones de varias variables.
- Cálculo del gradiente de una función con GRAD(f,variables).
- Programar funciones en DERIVE. Se programa en particular la función MATRIZ_SIMÉTRICA(forma_cuadrática) que nos la matriz asociada a una forma cuadrática dada.
- Definición de matrices fila y matrices columna.
- Producto de matrices.

Programación didáctica del apartado

VI.2. CLASIFICACIÓN DE FORMAS CUADRÁTICAS.

OBJETIVOS:

- Conocer el significado de los diferentes tipos de formas cuadráticas.
- Clasificar cualquier forma cuadrática en función de los criterios de autovalores y menores principales.
- Conocer las principales propiedades de las formas cuadráticas.
- Aplicar las condiciones de segundo orden de óptimo local para clasificar puntos críticos mediante el uso de formas cuadráticas.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- Diferentes tipos de formas cuadráticas.
- Forma canónica de una forma cuadrática. Método de compleción de cuadrados.
- Criterio de los menores principales.
- Criterio de los autovalores.
- Criterio mixto de clasificación para matrices de orden 2.
- Criterio mixto de clasificación para matrices de orden 3.
- Propiedades de las formas cuadráticas respecto a las operaciones suma producto por escalar.
- Condiciones de segundo orden de óptimo local.

Contenidos no esenciales:

(se consideran como conocimientos previos impartidos en la asignatura Matemáticas I).

- Dibujar gráficas de funciones de 2 variables.
- Cálculo de los puntos críticos de una función de varias variables.

- Cálculo del gradiente de una función de varias variables.
- Cálculo de la matriz hessiana de una función de varias variables.
- Cálculo de determinantes.
- Cálculo de autovalores.

METODOLOGÍA:

Para entender el significado geométrico de la clasificación de formas cuadráticas, planteamos varias formas cuadráticas de dos variables, sobre las cuales efectuaremos sus representaciones gráficas, y a partir de ellas observaremos las características geométricas que tienen las formas cuadráticas definidas positivas, definidas negativas, semidefinidas positivas, semidefinidas negativas e indefinidas. Una vez vista la idea geométrica de la clasificación de formas cuadráticas, planteamos su definición formal.

Dado que las formas cuadráticas pueden tener varias variables y no siempre son representables, es deseable introducir algún método analítico que nos permita efectuar la clasificación de las mismas. Para ello se plantea que los alumnos intenten primero expresar ciertas formas cuadráticas como suma de cuadrados (método de compleción de cuadrados) y con esta expresión intentar obtener la clasificación. Como no siempre es posible realizar este tipo de clasificaciones necesitamos algún método más operativo para lo cual, introducimos el concepto de menores principales de una matriz. Efectuamos algunos ejercicios de clasificación de formas cuadráticas utilizando este criterio, teniendo muy en cuenta que dicho criterio se aplica única y exclusivamente sobre matrices simétricas.

Como el criterio de los menores principales nos proporciona únicamente condiciones suficiente para clasificar las formas cuadráticas semidefinidas o indefinidas, se plantea la necesidad de obtener un criterio más potente que subsane esta deficiencia. Por ello se introduce el criterio de los autovalores con el cual se obtienen condiciones necesarias y suficientes. Se ofrecen nuevamente varios ejercicios para que los alumnos clasifiquen la forma cuadrática utilizando este criterio.

A continuación presentamos problemas de clasificación de formas cuadráticas con parámetros, sobre los cuales el alumno debe efectuar la clasificación de dichas formas en función de los parámetros. Estos problemas se realizan de forma guiada y pueden favorecer el trabajo en parejas con el fin de obtener las diferentes vías de solución.

Se finaliza con una aplicación de las formas cuadráticas: las condiciones suficientes de primer orden para clasificar los puntos críticos de una función de varias variables. Planteamos inicialmente ejemplos de funciones de 2 variables con los cuales se pueda visualizar el carácter de los puntos críticos que vamos estudiando. Hay que señalar que el cálculo de gradientes se puede automatizar con la función GRAD asimismo el cálculo de la matriz HESSIANA de la función. Conviene distinguir el método de construcción de la matriz asociada a una forma cuadrática a través de la HESSIANA de dicha forma, con la clasificación de los puntos críticos de una función por medio de la HESSIANA de dicha función. En el primer caso, la HESSIANA se aplica sobre la forma cuadrática para obtener una matriz, en el segundo caso la HESSIANA obtenida en cada punto crítico que deseemos clasificar es la matriz simétrica de cierta forma cuadrática, que nos sirve para clasificar el punto.

El guión de trabajo de este apartado se puede encontrar en el fichero: VI-2-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Se pretende impartir en 3 horas.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

- Cálculo de gradientes: GRAD.
- Cálculo de autovalores: EIGENVALUES.
- Cálculo de determinantes: DET.
- Cálculo de rangos de matrices numéricas: RANK.
- Definición de funciones de varias variables.
- Representación gráfica de funciones de varias variables.

II.5.2.7. EXPOSICIÓN DIDÁCTICA DEL TEMA VII: PROGRAMACIÓN LINEAL.

Objetivos del tema:

- Determinar cuando un conjunto del plano es un conjunto convexo.
- Determinar si una función definida en un conjunto convexo es cóncava o convexa.
- Formular problemas de programación lineal.
- Resolver gráficamente problemas de programación lineal con 2 variables de decisión.

Contenidos:

- VII.1. Conjuntos convexos.
- VII.2. Funciones cóncavas y convexas.
- VII.3. Formulación y resolución gráfica de problemas de programación lineal.

Temporalización:

Apartado VII.1: 1 hora.

Apartado VII.2: 2 horas.

Apartado VII.3: 2 horas.

TOTAL: 5 horas (2 sesiones y media)

Metodología

El uso del programa de cálculo simbólico DERIVE está limitado en nuestra metodología para aplicar sobre los contenidos que hemos denominado contenidos no esenciales en cada capítulo o en cada apartado. Por ello, en cada uno de los apartados de este capítulo efectuamos una clasificación inicial de los contenidos en esenciales y no esenciales. En concreto, este capítulo séptimo está dedicado fundamentalmente a la aplicación directa de todos los conceptos de espacios vectoriales vistos a lo largo del curso así como de ciertos contenidos de cálculos diferencial que los alumnos deberían de conocer de la asignatura Matemáticas I. Esta aplicación directa tiene que ver con la concavidad y convexidad de funciones, y muy especialmente con la resolución de los denominados programas lineales. Para obtener los procedimientos generales de aplicación y siguiendo las pautas marcadas por nuestra estrategia didáctica los alumnos deberán investigar y experimentar con el programa DERIVE en los denominados ejemplos para investigar que se proponen al introducir cualquier concepto, para que con ayuda de sus contenidos previos (en este capítulo todos los contenidos de capítulos anteriores), con las indicaciones del profesor y con ayuda de las colaboraciones entre compañeros puedan adquirir un aprendizaje significativo de los contenidos de un tema de aplicación directa como es la programación lineal. Por ello los problemas que se proponen para investigar y luego más tarde los ejercicios de manipulación de los resultados obtenidos deben favorecer la colaboración entre compañeros y la asimilación lenta de los contenidos. En este proceso de experimentación e investigación, el profesor debe actuar como mediador en el proceso de aprendizaje, en el sentido de que debe dirigir los procesos de experimentación e investigación que se van proponiendo, y debe estimular la adquisición de aprendizajes significativos. Todas las cuestiones que los alumnos van investigando se basaran en contenidos que previamente los alumnos deben de manejar, para que con la ayuda del profesor y posiblemente de las colaboraciones que se pueden realizar entre los alumnos encuentren y obtengan la respuestas adecuada a las cuestiones que se proponen. Los problemas propuestos son problemas que pretenden que el alumno construya modelos vinculados con la programación lineal para resolver las situaciones problemáticas que se plantean, intentando encontrar una resolución gráfica de las mismas.

A continuación pasamos a detallar la programación didáctica de los tres apartados de los que consta este capítulo séptimo.

Programación didáctica del apartado

VII.1. CONJUNTOS CONVEXOS.

OBJETIVOS:

- Identificar cuando un conjunto de R^2 es un conjunto convexo.
- Conocer las propiedades de los conjuntos convexos respecto a la unión e intersección de conjuntos.
- Identificar para conjuntos de R^n sencillos y utilizando la definición cuando un conjunto es convexo.
- Saber calcular puntos extremos de conjuntos convexos de R^2
- Entender el significado de las combinaciones lineales convexas.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- Concepto de conjunto convexo.
- Propiedades de los conjuntos convexos.
- Combinaciones lineales convexas.
- Concepto de punto extremo de un convexo.

Contenidos no esenciales:

- Representación gráfica de poligonales en el plano.
- Representación gráfica de curvas en el plano.
- Representación de segmentos en el plano.
- Realizar combinaciones lineales con el programa.

METODOLOGÍA:

Consideramos que la representación gráfica de poligonales en el espacio, la representación de curvas en el plano y la representación de segmentos en el plano son contenidos no esenciales para la comprensión de los conceptos fundamentales del apartado tales como son el concepto de conjunto convexo, sus principales propiedades y el concepto de combinación lineal convexa. También consideramos que la realización mediante DERIVE de ciertas combinaciones lineales pueden favorecer la comprensión de las denominadas combinaciones lineales convexas, haciendo variaciones de combinaciones lineales de vectores del plano con escalares que sumen 1 y vayan oscilando en diversas escalas de valores. En concreto, para introducir el concepto de conjunto convexo presentamos numerosos ejemplos de conjuntos del plano sobre los cuales se plantean diversas prácticas de representación del propio conjunto así como de segmentos que unen puntos del conjunto para determinar de manera gráfica y operativa la visualización del concepto de conjunto convexo en el plano. Extendemos esta idea por definición a conjuntos convexos de cualquier espacio n-dimensional planteando a continuación ejercicios de manipulación sobre los que los alumnos puedan estudiar de manera gráfica qué conjuntos son convexos. Una vez que se reconozcan los conjuntos convexos en el plano se propone la necesidad de encontrar algún procedimiento analítico mediante el cual podamos extender la noción de convexidad a conjuntos de R^n. Por ello se plantea la definición general de conjunto convexo y se proponen algunos ejemplos para estudiar la convexidad de subconjuntos de R^3. A propósito de esta definición general se plantean conjuntos muy utilizados definidos por combinaciones lineales de variables, son los hiperplanos y los recintos limitados por hiperplanos en el espacio n-dimensional.

Para estudiar las propiedades de la intersección y unión de conjuntos convexos se plantean varios ejemplos de conjuntos del plano sobre los cuales los alumnos determinarán su unión e intersección y estudiarán de forma gráfica si son o no convexos. Luego estas intuiciones geométricas se generalizarán a las propiedades que garantizan que la intersección de convexos siempre es un convexo y que la unión de convexos no siempre lo es.

A continuación definimos el concepto de combinación lineal convexa y de punto extremo de un convexo. Hacemos algunos ejemplos de cálculo de puntos extremos y damos la definición formal de punto extremo.

El guión de trabajo de este apartado puede encontrarse en el fichero:VII-1-TEOR.MTH.

TEMPORALIZACIÓN:

Se pretende realizar en 1 hora.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

- Se utiliza la representación gráfica de curvas en el plano.
- Se manejan las técnicas para dibujar poligonales en el plano, definir los puntos y luego representarlos.
- Se recuerda la forma de dibujar segmentos en el plano.

Programación didáctica del apartado
VII.2. FUNCIONES CÓNCAVAS Y CONVEXAS.

OBJETIVOS:

- Identificar cuando una función es convexa, cóncava, estrictamente cóncava o estrictamente convexa de forma gráfica.
- Determinar la clasificación de este tipo de funciones aplicando criterios que dan condiciones suficientes y necesarias y suficientes.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- Funciones cóncavas y convexas.
- Funciones estrictamente cóncavas y estrictamente convexas.

- Propiedades de las funciones cóncavas y convexas respecto al cambio signo y la suma.
- Condición necesaria de concavidad y convexidad de funciones en conjuntos convexos. Los conjuntos Λ_α y Ω_α.
- Condición necesaria y suficiente de segundo orden de concavidad y convexidad de funciones.

Contenidos no esenciales:

- Representación gráfica de curvas en el plano.

METODOLOGÍA:

Consideramos que la representación gráfica de curvas en el plano no es un contenido esencial del apartado, que por otro lado es una técnica que deben dominar los alumnos de los cursos precedentes. Por otro lado este contenido puede favorecer la comprensión de conceptos con el de función convexa, función cóncava en un determinado recinto, o las condiciones necesarias de concavidad y convexidad analizando ejemplos gráficos concretos y observando la relación gráfica que existe entre dichos conceptos y las gráficas correspondientes.

Para introducir el concepto de función cóncava y convexa sobre un conjunto M convexo, se plantea a los alumnos que representen ciertas curvas sobre ciertos conjuntos y que estudien la posición que ocupan las tangentes a la curva en dicho conjunto, a partir de esta idea gráfica podemos determinar cuando funciones del plano son cóncavas, convexas, estrictamente cóncavas o estrictamente convexas. Se realizaran varios ejemplos de funciones de una variable sobre intervalos reales, encaminadas a fijar estos conceptos. Luego generalizamos con una definición formal estos conceptos por medio del uso de combinaciones lineales convexas de puntos de la gráfica. Estudiamos las propiedades de estas funciones, respecto al cambio de signo, suma y combinaciones lineales positivas sobre ejemplos gráficos.

Debido a la dificultad de aplicar este concepto para determinar la concavidad o convexidad de funciones introducimos primero una condición necesaria para funciones no necesariamente diferenciables. Estudiamos la condición de forma gráfica sobre funciones de una variables.

Y por último introducimos condiciones necesarias y suficientes de concavidad y convexidad de funciones clasificando la forma cuadrática de su matriz hessiana. Efectuamos algunos ejemplos de funciones de dos variables.

TEMPORALIZACIÓN:

Se pretende impartir en 2 horas.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

- Representación gráfica de funciones de una variable.
- Representación gráfica de segmentos y de poligonales.
- Representación gráfica de funciones de dos variables.

- Calculo de la matriz Hessiana de una función de varias variables.

Programación didáctica del apartado

VII.3. FORMULACIÓN Y RESOLUCIÓN GRÁFICA DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL.

OBJETIVOS:

- Formular problemas de programación lineal.
- Identificar los elementos básicos de los problemas de programación lineal.

CONTENIDOS:

Contenidos esenciales:

- Identificar los elementos fundamental de un problema de programación lineal: incógnitas, función objetivo, conjunto factible, restricciones y soluciones óptimas.
- Formulación de problemas de programación lineal.
- Método gráfico de resolución de problemas de programación lineal.
- Teorema fundamental de la programación lineal.

Contenidos no esenciales:

- Curvas de nivel de una función de dos variables.
- Representación gráfica de conjuntos convexos lineales.

METODOLOGÍA:

En este apartado consideramos que la representación gráfica de las curvas de nivel de funciones de dos variables no es una técnica básica para la comprensión de los contenidos del apartado y que por el contrario pueden ser muy representativos para la comprensión de los mismos. Por otro lado se trata de una técnica que los alumnos deben dominar del primer cuatrimestre. También debemos observar que la representación gráfica de conjuntos convexos lineales no es el elemento básico del apartado y puede considerarse nuevamente como un contenido esencial.

Desarrollamos el capítulo utilizando ejemplos concretos sobre los cuales debemos realizar por un lado la FORMULACIÓN DEL PROBLEMA, como un problema de programación lineal: identificando claramente en cada ejemplo los elementos básicos:

- variables de decisión
- función objetivo
- conjunto factible
- restricciones
- soluciones óptimas.

y en segundo lugar RESOLVEMOS EL PROBLEMA utilizando las técnicas de resolución gráfica: representando el conjunto lineal y barriendo el conjunto factible con las curvas de nivel de la función objetivo.

A través de la realización de varios ejemplos los alumnos descubrirán el procedimiento gráfico para formular y resolver cualquier problema de programación lineal que contenga 2 variables de decisión.

Enunciaremos el teorema de Weierstrass y comprobaremos como se verifica sobre ciertos ejemplos concretos.

A continuación definiremos lo que se entiende por programa convexo para enunciar la propiedad que tienen todos los programas lineales: los óptimos de existir son todos globales y son o bien uno o varios, formando siempre un conjunto convexo.

TEMPORALIZACIÓN:

Se pretende impartir en 2 horas.

HERRAMIENTAS NECESARIAS DE DERIVE:

Representación gráfica de funciones de una variable.

Resolución de ecuaciones lineales.

Función VECTOR para generar un conjunto de varias curvas de nivel a la vez.

En este apartado hemos descrito con detalle la programación de la asignatura utilizando nuestra estrategia didáctica (con el uso de DERIVE). En el apartado siguiente damos una descripción general de la metodología que emplearemos con el subgrupo que no utilizará DERIVE.

II.6. Metodología tradicional del curso “Matemáticas II”.

La metodología tradicional empleada en los cursos de “Matemáticas II” suele basarse en métodos expositivos en los que el profesor expone los principales contenidos del curso, ilustrando los diferentes conceptos con numerosos ejemplos para que los alumnos puedan comprender en base a situaciones concretas los resultados generales que se van exponiendo. Aunque este tipo de metodologías expositivas, pueden generar aprendizajes significativos, sin embargo existen dificultades añadidas que pueden impedir la consecución de este tipo de aprendizajes.

Las principales dificultades que generan este tipo de metodologías sobre un programa de álgebra lineal básica, se basan en tres situaciones claramente perjudiciales para el alumnado:

- por un lado, el profesorado debe realizar numerosas operaciones de cálculo rutinario en el encerado, que ilustren de manera concreta los numerosos procedimientos que contiene el álgebra lineal.

- en segundo lugar, no es fácil determinar cuando un proceso meramente mecánico ha sido comprendido y asimilado por el alumnado

- y por último, la necesidad de realizar demostraciones generales de algunos resultados de álgebra lineal, resultan muy complicadas para el alumno pues suelen utilizar razonamiento deductivos que en general suelen ser poco atractivos para el aprendizaje.

Estas dificultades pueden provocar que el alumno utilice un aprendizaje memorístico que impide relacionar los diferentes conceptos que se van introduciendo. Una posible solución para evitar este tipo de situaciones es el que proponemos a continuación, que será utilizado en nuestra experiencia didáctica sobre el grupo que no incorpora DERIVE en su didáctica. Las ideas fundamentales de esta metodología son las siguientes:

- Las exposiciones didácticas deben de intentar proporcionar una visión constructivista del aprendizaje, partiendo de ejemplos concretos e intentando inducir y generalizar desde el encerado los conceptos y resultados básicos, a partir de posibles preguntas realizadas al los alumnos o bien en base a observaciones y comentarios que se realizan sobre ejemplos bien escogidos.

- Al terminar cada capítulo se proponen hojas de problemas que contengan varios tipos de actividades: por un lado actividades manipulativas, en las que los alumnos únicamente deben de transferir procedimientos generales sobre ejemplos particulares y por otro lado problemas en los que el alumno o bien debe de construir un modelo del álgebra lineal (matricial, vectorial) que permita resolver el problema o bien tenga que relacionar diferentes técnicas para obtener la solución.

- También al terminar cada capítulo se sugieren cuestiones teóricas que los alumnos deberán resolver de forma individual y que permitirán detectar los errores de comprensión más generales.

Con esta metodología se puede llegar a conseguir que los alumnos obtengan aprendizajes significativos en base a los cuales sean capaces de transferir las principales técnicas del álgebra lineal para resolver problemas generales y en particular de contenido económico.

En este capítulo hemos expuesto los principios básicos de la estrategia didáctica que hemos empleado, y hemos elaborado una programación didáctica completa de todo el curso utilizando la estrategia didáctica descrita en los apartados iniciales del capítulo. En el capítulo siguiente vamos a desarrollar el diseño de la investigación que hemos realizado basándonos en esta estrategia didáctica concreta, que es precisamente la que hemos aplicado paso a paso y de forma muy fiel a lo largo de toda la experiencia educativa. Este tipo de didáctica nos va a permitir analizar la experiencia educativa.

CAPÍTULO III:
DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN EDUCATIVA.

III.1. Introducción.

Los sistemas de cálculo algebraico (CAS) constituyen una familia de programas que ofrecen grandes posibilidades en el terreno educativo, en particular en el contexto de la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Para conocer las ventajas e inconvenientes de la introducción de este tipo de programas en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, necesitamos realizar un análisis pormenorizado con el que podamos obtener conclusiones o indicaciones que nos señalen cuales son las formas más ventajosas para introducir estas nuevas tecnologías en el aula de Matemáticas.

Como ya indicábamos en el capítulo I, estos sistemas tienen ciertos riesgos (pueden hacer que el alumno pierda el sentido de las operaciones que realiza, pueden confundir manipulación matemática con conocimiento matemático,.pueden reducir las habilidades de cálculo elemental..) pero a la vez gozan de cualidades muy importantes (admiten sistemas múltiples de representación, son un medio dinámico, ofrecen mucha interactividad,...). A la vista de estos dos conjuntos de características positivas y negativas hemos elaborado una estrategia didáctica (descrita ampliamente a lo largo del capítulo II) para obtener el máximo beneficio educativo, que es el objetivo fundamental de nuestra estrategia. La estrategia que hemos implementado intenta incorporar varios paradigmas educativos: resolución de problemas, aprendizaje colaborativo, la adquisición de aprendizajes significativos por medio de la investigación y la experimentación con ayuda del sistema de cálculo simbólico DERIVE principalmente y el uso de INTERNET y el CORREO ELECTRÓNICO. Al plantear esta estrategia estamos suponiendo de forma teórica que dicha estrategia provoca un conjunto de características educativas que sería necesario contrastar de forma experimental. El estudio del comportamiento de la estrategia didáctica que hemos planteado es precisamente el fundamento de la investigación educativa que desarrollamos en la presente tesis.

Así pues, el elemento central de nuestra investigación se basa en el estudio del comportamiento de nuestra estrategia didáctica en la práctica educativa, que constituye a su vez el eje fundamental en torno al cual giran la FINALIDAD y CUESTIONES de la investigación educativa objeto de la presente tesis. Para analizar las características educativas de la estrategia, necesitamos definir un modelo de investigación apropiado a las características que se pretenden analizar. Por este motivo a lo largo de este capítulo vamos a definir el diseño de investigación educativo que seguiremos para comprobar las virtudes y defectos de nuestra estrategia. Para perfilar este diseño comenzaremos definiendo la finalidad y cuestiones de la investigación. Después describiremos el modelo de diseño más adecuado a nuestras finalidades: el estudio etnográfico de casos. En el apartado III.4 describimos las características de los participantes, el escenario y contexto de la investigación. Y finalizamos mostrando el conjunto de herramientas y estrategias de recogida de datos (apartado III.6).

III.2. Finalidad y cuestiones de la investigación.

Para incorporar una nueva herramienta didáctica en los procesos de enseñanza-aprendizaje de cualquier disciplina es muy importante introducir elementos metodológicos que contemplen el manejo de este nuevo medio didáctico. No es suficiente incorporar estos medios de cualquier manera, ya que influyen enormemente en los procesos de enseñanza que realizan los profesores y por otro lado en los aprendizajes que adquieren los alumnos. Una didáctica que incorpora una nueva herramienta debe guiarse básicamente en objetivos educativos, ya que la elección e introducción de cualquier material didáctico novedoso debe incorporarse de forma adecuada en el estilo educativo que deseamos conseguir, pero no debe modificarlo sustancialmente, es decir, la herramienta debe estar al servicio de la educación y no al revés. Si nos centramos en la introducción de un sistema de cálculo algebraico como DERIVE en la enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal, debemos establecer dos elementos fundamentales:

a) por un lado elaborar una estrategia didáctica inicial que incorpora este nuevo medio tecnológico sobre la base de la cual se realicen los procesos de enseñanza y aprendizaje (estrategia didáctica que hemos desarrollado ampliamente en el capítulo II).

b) y en segundo lugar debemos contrastar de forma experimental dicha estrategia, es decir, realizar un estudio que contraste la experiencia educativa de dicha estrategia tanto en los profesores como en los alumnos, que en definitiva son los protagonistas de los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Teniendo en cuenta el segundo aspecto, consideramos que es necesario y fundamental investigar con detenimiento el comportamiento del uso de DERIVE en el contexto de la estrategia educativa que hemos desarrollado.

En este contexto, la investigación de esta tesis tiene como finalidad ***el análisis de la influencia que ejercen los programas de cálculo simbólico en el aprendizaje del álgebra lineal, mediante el estudio detallado de una estrategia didáctica que incorpora totalmente el uso de un programa de cálculo simbólico como DERIVE en la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina; de tal forma que aproveche las características que brindan estos sistemas de cálculo algebraico y evite los peligros en los que podemos caer utilizando estas nuevas tecnologías.***

Por consiguiente analizaremos los procesos de aprendizaje que son suscitados por el uso de nuestra estrategia didáctica que incorpora totalmente la manipulación del ordenador dentro del aula de álgebra lineal a través del programa de cálculo simbólico DERIVE. Se trata de una estrategia que pretende potenciar la adquisición de aprendizajes significativos por medio de la exploración matemática que proporciona el manejo de este programa. Otro elemento importante de nuestra estrategia es el uso de la experimentación para desarrollar una metodología basada en la resolución de problemas, que permite desarrollar un aprendizaje por descubrimiento de los contenidos, hechos, principios y procedimientos centrales del álgebra lineal. Por otro lado también debemos señalar la importancia que puede adquirir el ordenador de cara al trabajo en grupo. Efectivamente, el ordenador puede facilitar la aparición de situaciones de colaboración entre los propios alumnos y entre los alumnos y el profesor, provocando de esta forma la adquisición de los denominados aprendizajes colaborativos [Crook, 1999]. Estos tres paradigmas (aprendizaje colaborativo, resolución de problemas y adquisición de aprendizajes significativos) pueden ser potenciados por el uso del sistema de cálculo simbólico DERIVE y el apoyo adicional de INTERNET. Por eso nuestro estudio deberá analizar minuciosamente las situaciones de enseñanza que se produzcan en este contexto educativo, para obtener de esta manera las características educativas de nuestra estrategia.

Un análisis exhaustivo de esta estrategia requiere plantear inicialmente unos elementos básicos de observación que nos pueden informar de manera detallada del comportamiento de la estrategia en el aula. Para ello, hemos considerado algunas cuestiones previas que pueden permitirnos elaborar unas primeras pautas de observación acerca de la introducción de DERIVE. Estas cuestiones que planteamos a priori en nuestra investigación se relacionan muy estrechamente con las características de la estrategia que hemos diseñado. Los interrogantes y cuestiones que hemos planteado en torno a NUESTRA ESTRATEGIA DIDÁCTICA son los siguientes:

1) El sistema de cálculo algebraico DERIVE, como elemento central de nuestra estrategia, ¿permite construir un SISTEMA DE NOTACIÓN INTERMEDIO, entre los sistemas de notación del álgebra lineal y los sistemas de notación más familiares e intuitivos para el alumno?. Se trata de analizar si el estilo de notación, el lenguaje propio que utiliza el programa actúa a modo de puente entre el lenguaje formal del álgebra lineal que es el que pretendemos que comprendan los alumnos y el lenguaje cercano e intuitivo que utilizan los alumnos.

2) ¿Cuál es el grado de INTERACTIVIDAD que suscita esta estrategia entre alumnos y profesores, entre alumnos y medio didáctico y entre los propios alumnos?. Con esta cuestión pretendemos analizar el grado de interactividad que se suscita entre el profesor y el alumno y entre los alumnos si existe un estímulo-respuesta en torno al uso de la estrategia que hemos planteado en los aspectos comunicativos del aula. También resulta de interés analizar cómo es la interactividad que provoca el uso de DERIVE, es decir, si las respuestas que se reciben los alumnos obedecen a las preguntas que van formulando cuando introducen los datos.

3) Este tipo de estrategia didáctica ¿favorece el PROTAGONISMO y la AUTOCREACIÓN del alumno frente al medio tecnológico, evitando que el alumno sea un mero USUARIO del sistema?. En esta cuestión se trata de estudiar cuál es el grado de protagonismo del alumno en el proceso de aprendizaje, si la estrategia favorece la aparición de iniciativas de los alumnos para investigar, o resolver problemas estimulando así la capacidad creativa a la hora de resolver cuestiones o resolver problemas.

4) Las pautas que hemos marcado en nuestra estrategia relacionadas con el modo de utilización de DERIVE ¿evitan que el ordenador se utilice para desarrollar conceptos y principios que consideramos como CONTENIDOS ESENCIALES, propiciando así un uso adecuado de las rutinas algebraicas que el sistema puede automatizar? Se trata de analizar si el modo de uso del programa DERIVE no es un uso indiscriminado y permite que los alumnos centren su atención en los contenidos importantes que se van introduciendo, y no se convierte en una herramienta que procesa de forma automática los resultados que se manejan.

5) El manejo del programa de cálculo simbólico DERIVE, ¿permite prescindir del ESFUERZO RUTINARIO dedicado a desarrollar operaciones algebraicas y de cálculo mecánico?

6) Las formas de manejo del sistema DERIVE que hemos considerado en nuestra estrategia didáctica ¿convierten al ordenador en una auténtica HERRAMIENTA DE EXPERIMENTACIÓN?. En esta cuestión pretendemos analizar si efectivamente la forma de uso del programa DERIVE permite que el alumno experimente los conceptos, hechos y principios del álgebra lineal.

7) Nuestra estrategia didáctica, ¿estimula a los alumnos hacia la adquisición de APRENDIZAJES SIGNIFICATIVOS sobre aquellos contenidos del álgebra lineal que vamos introduciendo?. El objetivo de esta cuestión consistiría en analizar si los aprendizajes que obtienen los alumnos con este tipo de estrategia se sustentan de manera significativa en sus conocimientos previos, estudiando el grado de significación de dichos aprendizajes.

8) Este tipo de manipulación del programa DERIVE, ¿favorece el DESARROLLO DE ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS?.

9) El manejo de un programa de cálculo simbólico como DERIVE, ¿genera BARRERAS ADICIONALES para el aprendizaje de los conceptos matemáticos?. Se trata de analizar si DERIVE supone un obstáculo para que los alumnos aprendan los conceptos matemáticos que se van introduciendo o si por el contrario es una herramienta sencilla de manejo y de aprendizaje que no supone un obstáculo para el aprendizaje.

10) Una didáctica guiada por esta estrategia ¿genera AUTONOMÍA COGNITIVA en los alumnos, permitiéndoles e incitándoles a indagar situaciones planteadas desde el propio individuo anulando así, ciertas dependencias que existen entre los alumnos y otros expertos o maestros?

11) La estrategia didáctica que hemos propuesto, ¿favorece la RELACIÓN DIALÉCTICA entre los usuarios, es decir permite establecer una dialéctica entre los alumnos, alumnos y profesores? ¿Cómo es ese tipo de dialéctica?

12) Nuestra estrategia didáctica, ¿favorece un APRENDIZAJE COLABORATIVO entre los alumnos?. Se trataría de analizar si los ordenadores provocan situaciones de colaboración que generan o suscitan un tipo de aprendizaje, denominado aprendizaje colaborativo.

13) La estrategia didáctica que hemos desarrollado en el aula ¿favorece una adecuada ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD ofreciendo varios niveles de aprendizaje?

14) Nuestra estrategia didáctica, ¿aumenta el grado de MOTIVACIÓN ante el álgebra lineal?.

El estudio detallado de estas cuestiones y finalidades que hemos planteado ha sido considerado de una manera apriorística, situación que no impide que a lo largo del trabajo de campo o bien en el curso del proceso de análisis de datos, puedan surgir nuevas cuestiones o categorías que tomen la forma de cuestiones emergentes en el proceso de investigación. El conjunto de cuestiones y fines de nuestra investigación conforman un proyecto ambicioso que puede llenar un vacío en el ámbito educativo en torno a la forma de introducir los CAS en la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal.

Para dar respuesta a todas las cuestiones de nuestra investigación necesitaremos recopilar un conjunto de datos que sobrepasan enormemente las expectativas de una investigación experimental, dado el carácter cualitativo de muchas de las cuestiones que hemos planteado.

En el capítulo I hemos efectuado un análisis pormenorizado de las diferentes visiones que existen en la actualidad con relación a la incorporación de los CAS en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y en particular del álgebra lineal. Entre las corrientes de opinión más generalizadas acerca del uso del ordenador, consideramos que las más positivas para los procesos de enseñanza y aprendizaje son aquellas que consideran adecuado el uso de los ordenadores en estos procesos. Partiendo de todas las cualidades de los ordenadores y teniendo en cuenta las posibles dificultades que puede provocar un uso indiscriminado de los mismos, se han desarrollado numerosas experiencias educativas en todo el mundo (ver apartado I.2.6 pág. 57), sin embargo el tipo de metodología que planteamos en esta investigación se trata de una estrategia innovadora porque trata de incorporar el ordenador y en concreto el CAS como una herramienta central del aula, conjugando tres paradigmas muy importantes en las metodologías activas de Matemáticas: la resolución de problemas, la adquisición de aprendizajes significativos mediante los procesos de descubrimiento y de experimentación y por último el aprovechamiento de las colaboraciones que provoca el uso del ordenador tanto al nivel de alumnos como al nivel de profesores y alumnos. Así pues, una vez determinada la finalidad y las cuestiones de nuestra investigación en el siguiente apartado presentaremos un modelo de investigación con el que podemos dar respuesta a las cuestiones que hemos planteado.

III.3. Modelo de investigación que utilizaremos.

III.3.1. PRUEBA PILOTO.

Antes de presentar el diseño del modelo de investigación que vamos a utilizar, conviene describir el estudio piloto que realizamos para estudiar el comportamiento de DERIVE. El contexto de dicha experiencia se situaba en un conjunto de prácticas de Laboratorio de cálculo diferencial y álgebra lineal con DERIVE. Se trataba de manipular con DERIVE los principales contenidos de las asignaturas Matemáticas I y Matemáticas II (asignaturas troncales de las Licenciaturas en Económicas y Adm. y Dir. de Empresas). Fueron unas prácticas que tenían como base un conjunto de características muy similares a las que hemos implantado en la experiencia educativa que analizamos en la presente tesis. El estudio piloto del que hablamos (toda la documentación se puede consultar en el ANEXO IV), fue desarrollado en el curso 1998-99 con alumnos que cursaban primer curso de las Licenciaturas en Económicas y Administración y Dirección de empresas de la Universidad Autónoma de Madrid. Los objetivos del citado curso fueron dos:

1. Desarrollar mediante el programa de cálculo simbólico DERIVE los contenidos fundamentales de las asignaturas Matemáticas I y Matemáticas II, ambas asignaturas troncales de las Licenciaturas en Económicas y Administración y Dirección de Empresas.
2. Motivar mediante la RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS; la utilización de este programa para desarrollar estrategias de resolución de problemas, comúnmente empleadas en el cálculo diferencial y el álgebra lineal.

Los contenidos del curso, abarcaron temas de cálculo diferencial y de álgebra lineal, por lo que se trataba de un curso más amplio en contenidos del que pretendemos realizar en nuestra investigación , además se trataba de un pequeño curso de 8 horas de duración en el que tan solo se efectuaban prácticas y experimentos de los principales contenidos de ambas asignaturas. Por tanto se trataba de una experiencia didáctica que no utilizaba la estrategia didáctica que hemos desarrollado en el capítulo II.

La finalidad de la prueba piloto fue similar a la que hemos planteado en esta investigación: <u>estudiar la influencia que ejercen los programas de cálculo simbólico en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas</u>, de la que deducimos varias cuestiones a analizar:

Estudiar si la introducción de DERIVE mediante la metodología empleada en el curso:

1. Permite construir un Sistema de Notación Intermedio, entre los sistemas de notación de la matemática formal y los sistemas de notación más familiares e intuitivos.
2. Admite un grado aceptable de interactividad entre el usuario y el programa.
3. Favorece que el alumno sea PROTAGONISTA y CREADOR frente al medio tecnológico y no un mero USUARIO:
4. Evita la utilización del ordenador para ejecutar la resolución de rutinas ESENCIALES para el desarrollo de conceptos y principios.
5. Permite prescindir del ESFUERZO RUTINARIO dedicado a desarrollar operaciones algebraicas y de cálculo.
6. Convierte al ordenador en una HERRAMIENTA DE EXPERIMENTACIÓN.
7. FAVORECE EL APRENDIZAJE de los contenidos matemáticos de cálculo diferencial y algebra lineal introducidos en la prácticas.
8. Favorece el DESARROLLO DE ESTRATEGIAS DE RESOLUCION DE PROBLEMAS.
9. Aumenta ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS..
10. No genera BARRERAS ADICIONALES para el aprendizaje de los conceptos matemáticos.
11. Genera AUTONOMÍA COGNITIVA para los alumnos, permitiéndole e incitándole a indagar situaciones planteadas desde el propio individuo anulando así ciertas dependencias que existen entre los alumnos y otros expertos o maestros.
12. Favorece la RELACION DIALECTICA entre los usuarios.
13. Permite la ATENCION A LA DIVERSIDAD: ofreciendo varios niveles de aprendizaje.
14. Aumenta el grado de MOTIVACION ante las matemáticas.

Podemos observar que son las mismas cuestiones que las que hemos propuesto en esta investigación pero en un contexto totalmente distinto:

- El curso se convierte en un LABORATORIO DE MATEMÁTICAS, a diferencia de lo que hemos planteado en la investigación.
- El número de horas del curso es reducido: 8 horas.
- Los contenidos del curso trataban no sólo de álgebra lineal sino que también de cálculo diferencial.

El curso por tanto, se planteó con características diferentes a las que pretendemos analizar en nuestra experiencia educativa principal y estuvo dirigida a 5 grupos de unos 40 alumnos. Los alumnos que participaron en el curso lo hicieron de forma voluntaria con el fin de REFORZAR los contenidos adquiridos previamente en las clases tradicionales.

En esta Prueba Piloto hicimos un estudio cualitativo y cuantitativo de los datos que se fueron recogiendo a lo largo del curso. Las herramientas de recogida de datos que empleamos en este estudio y que permitieron elaborar las conclusiones de la prueba piloto fueron:

a) Una ENCUESTA INICIAL, en la que se recogieron aspectos de carácter individual relacionados con las actitudes personales de los alumnos frente a las Matemáticas, frente a los ordenadores y frente al trabajo en grupo, sobre los conocimientos iniciales en Matemáticas, en Informática. Al iniciar el curso, además de realizar esta encuesta también se realizó una prueba objetiva para medir el grado de habilidad computacional de los alumnos asistentes al curso.

b) PRUEBAS OBJETIVAS. Se plantearon dos tipos de pruebas objetivas:
   a) unos ejercicios finales al acabar las sesiones 2ª y 3ª
   b) y prueba final de resolución de problemas.

   Con estas pruebas se pretendía valorar el rendimiento de los alumnos en el curso así como las estrategias de resolución de problemas, la autonomía cognitiva que habían adquirido el alumno, el grado de experimentación y el uso de DERIVE como sistema de notación intermedio.

c) Una ENCUESTA FINAL en la que se recabó información acerca de la opinión de los alumnos en torno a la organización del curso, el profesorado, la actitud frente al uso de DERIVE, el trabajo en grupo.

d) Las NOTAS DE CAMPO , observaciones de investigador de la prueba realizada.

e) ENCUESTAS FINALES DE VERIFICACIÓN, que sirvieron para triangular los datos obtenidos de las pruebas anteriores y contrastarlas con las entrevistas realizadas con un pequeño grupo de alumnos del total que hicieron la experiencia.

El modelo de investigación que se diseñó tuvo, como acabamos de comentar, dos dimensiones:

1) Una dimensión CUALITATIVA: Elegimos el método cualitativo basado en el estudio de casos (grupos de alumnos) para poder confrontar las tendencias así como el comportamiento de los alumnos ante este diseño metodológico.
2) Y una dimensión CUANTITATIVA: que permitió confrontar cuantitativamente los resultados obtenidos con los cinco grupos.

Después de un análisis exhaustivo de todos los datos obtenidos con este diseño de investigación obtuvimos las siguientes conclusiones:

La enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas mediante programas de cálculo simbólico como DERIVE ofrece enormes posibilidades a la hora de diseñar tareas de enseñanza dado que este tipo de programas

1. Ofrecen un grado de interactividad muy adecuado entre los usuarios, dado que permite la elaboración de hojas de trabajo en las que el usuario demanda al sistema mediante expresiones la realización de cálculos rutinarios, no esenciales para el desarrollo de los contenidos que estemos trabajando en ese momento.
2. Permite que el grado de protagonismo de los alumnos frente al programa dependa del grado de conocimiento teórico de los contenidos matemáticos conocidos. De tal forma que sin una adecuada formación base, es difícil que el alumno sea capaz de desarrollar problemas y cuestiones relacionadas con el tema, aunque utilicen un programa de este tipo.
3. La introducción de conceptos matemáticos con DERIVE puede ser complementada con adecuadas prácticas de experimentación, que han de ser muy bien elegidas para que se produzca un equilibrio entre la curiosidad suscitada y capacidad del alumno para resolver esa curiosidad.
4. La eliminación de numerosas rutinas de cálculo mediante el programa debe tener en consideración dos aspectos:
    a. nunca deben utilizarse en el ordenador aquellas rutinas que no sean totalmente comprendidas por el usuario, de tal forma que permitan una adecuada interpretación de resultados.
    b. cuando los cálculos necesarios no sean esenciales para el desarrollo de un contenido, el uso de DERIVE resulta altamente beneficioso pues permite vislumbrar más claramente los procesos y estrategias de resolución empleadas en ejercicios y problemas.
5. Para que DERIVE permita aumentar las estrategias de resolución de problemas, han de plantearse previamente las mismas con ejemplos suficientemente claros.
6. Trabajar con DERIVE en grupo ofrece elementos añadidos que facilitan el aprendizaje y además favorecen la creación de ambientes de enseñanza muy motivadores para el alumnado.
7. La atención a la diversidad es posible diseñarla con este tipo de programas, elaborando tareas gradualmente complicadas, tales que no aburran a los más adelantados y no provoquen el rechazo de los menos avanzados.

Esta prueba piloto orientó eficazmente la investigación desarrollada en la presente tesis. De hecho las finalidades y cuestiones de la investigación fueron idénticas ya que consideramos que eran elementos fundamentales para estudiar en el nuevo contexto educativo que proponíamos.

Teniendo en cuenta los resultados que obtuvimos en la prueba piloto, vamos a diseñar el modelo de investigación de esta tesis siguiendo las pautas generales que hemos señalado en la prueba piloto, adaptando la recogida de datos al nuevo contexto y el análisis general de los datos obtenidos. En el siguiente apartado realizamos el modelo general de investigación sobre el que vamos a trabajar en adelante.

III.3.2. MODELO DE INVESTIGACIÓN.

La naturaleza de la finalidad objeto de nuestro estudio así como las cuestiones que hemos formulado en el apartado III.2, nos obligan a realizar una recogida y elaboración de datos de carácter cualitativo y cuantitativo. Esta doble dimensión requiere un estudio mixto en el cual el análisis objetivo de carácter cuantitativo se convierte en un suplemento muy eficaz para el estudio cualitativo de las cuestiones de nuestra investigación. Se trata por tanto de una investigación educativa mixta de carácter cualitativo y cuantitativo, que pasamos a comentar:

La DIMENSIÓN CUALITATIVA de esta investigación pretende dar respuesta a las cuestiones iniciales señaladas en los objetivos que son de naturaleza interna a los sujetos y requieren una interpretación adecuada de los mismos. Tal como hemos señalado en el capítulo anterior, para desarrollar nuestra estrategia didáctica hemos diseñado una serie de tareas de enseñanza dirigidas por cinco principios básicos:

- la adquisición de aprendizajes significativos
- el uso de la resolución de problemas
- la potenciación de las colaboraciones entre alumnos y entre alumnos y profesor
- la integración del sistema de cálculo simbólico DERIVE como herramienta didáctica central del aula
- y la utilización de dos herramientas tecnológicas auxiliares: el uso de internet y el correo electrónico.

Las actividades que hemos propuesto, dirigidas por estos principios, nos proporcionan datos que, junto con otras herramientas de recogida de datos auxiliares, nos permiten ir construyendo de forma INDUCTIVA las categorías y proposiciones teóricas presentes en la población objeto de nuestro estudio. A partir de la recogida de datos se van generando los constructos y categorías que nos ofrecen las características que delimitan las conclusiones de nuestra investigación. Estos datos constituyen la fuente de nuestra evidencia, por lo que podemos afirmar que estamos ante un proceso de investigación GENERATIVO [Goetz-LeCompte, 1988]. Por otro lado, el descubrimiento de los constructos analíticos surge a partir de las sucesivas observaciones de los datos a medida que se van recogiendo a lo largo de la investigación. Por este motivo vamos construyendo poco a poco los análisis e interpretaciones de la investigación en un proceso CONSTRUCTIVO.

Para analizar el comportamiento de nuestra estrategia didáctica utilizamos como muestra la de un grupo de alumnos que han cursado 1º en la Licenciatura de Administración y Dirección de Empresas en la Universidad Autónoma de Madrid. Sobre este grupo de alumnos se ha impartido un curso básico de álgebra lineal con aplicación directa en tres núcleos básicos: la diagonalización, la clasificación de formas cuadráticas y la programación lineal. Para obtener datos cualitativos y cuantitativos suficientemente representativos, así como una comparativa entre la estrategia didáctica que proponemos y la estrategia didáctica expositiva convencional, dividimos este grupo en dos subgrupos:

- Un primer subgrupo A, en el que se utilizó una metodología basada en nuestra estrategia didáctica, incorporando el programa de cálculo simbólico DERIVE y guiada por los principios metodológicos que ya hemos expuesto en el capítulo II.

- Un segundo subgrupo B, con el que empleamos una metodología clásica, en la que no se incorporan las nuevas tecnologías y la metodología está basada en el método expositivo tradicional (ver apartado II.6).

A partir de este desdoblamiento pudimos obtener datos de carácter CUANTITATIVO, que nos permitieron confrontar los resultados obtenidos en los dos grupos, protagonistas del estudio realizado. Esta dimensión cuantitativa de la investigación, nos permitió comparar los subgrupos en dos niveles:

a) analizando el resultado de las dos estrategias, fundamentalmente la del subgrupo A que incorpora el programa de cálculo simbólico DERIVE y la del subgrupo B que no utiliza dicho programa de cálculo simbólico y utiliza una estrategia didáctica tradicional de carácter expositivo.

b) comparando los datos obtenidos en las calificaciones finales entre ambos subgrupos.

Así pues la DIMENSIÓN CUANTITATIVA nos sirvió para dar respuesta a los aspectos instructivos de los procesos de enseñanza desencadenados, permitiendo confrontar cuantitativamente los resultados de rendimiento académico obtenidos en los dos subgrupos del estudio.

Este planteamiento inicial ha necesitado realizar un estudio pormenorizado de las situaciones de enseñanza del subgrupo que utiliza DERIVE, un subgrupo que por su carácter reducido nos obligó a analizar con sumo detalle los procesos de pensamiento de los individuos. Por todo esto consideramos que el ESTUDIO DE CASOS era el modelo de investigación más adecuado para realizar un análisis intensivo y profundo de grupos reducidos de alumnos [Goetz-LeCompte, 1988], [Gil-Rodríguez, 1993] ya que nos permitiría confrontar las tendencias y los comportamientos de los alumnos ante nuestra estrategia didáctica.

El ESTUDIO DE CASOS que realizamos en el SUBGRUPO A, requería un estudio pormenorizado de los individuos, intentando obtener de cada uno de ellos sus comportamientos de cara al álgebra lineal, y de cara al modelo metodológico que empleamos. Fué muy importante observar las actitudes del alumnado frente al sistema de cálculo simbólico DERIVE, frente a sus compañeros y frente al PROFESOR, puesto que estas actitudes condicionaban enormemente sus aprendizajes (es bien conocida la influencia de la actitud en el aprendizaje del individuo, por ejemplo ver [Cockcroft, 1983]). Otros aspectos que tuvimos que observar fueron las relaciones de comunicación que se desarrollaron en el aula entre los alumnos y el profesor y entre los propios alumnos ya que estas relaciones son fundamentales de cara a los aprendizajes colaborativos. Todos estos elementos objeto de observación y análisis NO nos obligaron a realizar análisis interno de muchos casos; de hecho, inicialmente consideramos que el número de alumnos objeto de estudio en este subgrupo podría oscilar entre un mínimo de 10 alumnos hasta un máximo de 36 alumnos. Esta limitación de alumnos, se debía fundamentalmente a dos motivos:

- el primero por la limitación del número de plazas y de equipos informáticos que tienen las aulas de informática,
- y el segundo porque la enseñanza experimental con un número mayor de alumnos no podría ser abordable con un solo profesor, en los términos con los que se deseaba realizar la investigación.

Para analizar las cuestiones planteadas en nuestra investigación tuvimos que planificar una recogida de datos que abarcase no solo los puntos de vista relacionados con el propio conocimiento matemático, ya que también debíamos incorporar observaciones empíricas realizadas sobre el terreno así como las opiniones, sensaciones y estados de ánimo del alumnado. Junto a este modelo cualitativo, incluimos un estudio cuantitativo de carácter comparativo. Esta comparativa entre los dos subgrupos que centraban la investigación consistió en el análisis de aspectos de carácter académico: los resultados obtenidos en los exámenes finales y las pruebas intermedias que se realizaron.

Se trataba de un ESTUDIO DE CASOS MÚLTIPLES ya que pretendíamos estudiar el comportamiento de la estrategia didáctica señalada sobre cada uno de los alumnos que componen el subgrupo A [Gil-Rodríguez, 1993]. Elegimos un estudio de casos múltiples porque las evidencias que presentaban cada uno de los individuos que componían este subgrupo principal proporcionaban una comparativa más general y unas conclusiones más firmes al basarse en la REPLICACIÓN (posibilidad que facilita un diseño para contestar y contrastar las respuestas que se obtienen de forma parcial con cada caso que se analiza). Efectivamente, atendiendo a la selección de cada caso, si ésta selección se realiza para obtener unos resultados similares estaríamos ante los que se denomina una REPLICACIÓN LITERAL, por el contrario si se producen resultados contrarios pero por razones predecibles estaríamos considerando la REPLICACIÓN TEÓRICA [Gil-Rodríguez, 1993].

Por otro lado, cuando se opta por un diseño de estudio de casos múltiple, el mismo puede implicar una o varias unidades de análisis, es decir, podemos considerar si la finalidad de nuestra investigación se puede realizar de forma global o considerando en ella varias sub-unidades cuya peculiaridad exija un tratamiento diferenciado. En concreto nosotros consideramos importante estudiar el comportamiento de la estrategia didáctica que hemos planteado bajo la perspectiva de diversos puntos de vista o UNIDADES DE ANÁLISIS, plasmadas en cada una de las cuestiones que hemos señalado en el apartado anterior.

La investigación cualitativa debe considerar una VARIEDAD de casos de tal forma que permita esa REPLICACIÓN (literal o teórica) de la que hemos hablado, además los casos seleccionados deben guardar un cierto EQUILIBRIO para que las características de unos casos se compensen con otros.

Para validar los resultados de la investigación tuvimos en cuenta dos técnicas básicas utilizadas en los estudios cualitativos:

a) la TRIANGULACIÓN DE DATOS: contrastando y analizando todos los datos por medio de diversas herramientas: encuestas, pruebas objetivas, entrevistas y exámenes que realizaremos a cada uno de los participantes.

b) y la TRIANGULACIÓN DE INVESTIGADORES: mediante el análisis comparativo del investigador de campo, un observador cualificado, que presenció todas las sesiones del trabajo del subgrupo A, y dos observadores externos que completaron las interpretaciones realizadas por el investigador de campo.

Este estudio de casos múltiples así como el análisis comparativo de los subgrupos sobre los cuales se ha impartido la misma asignatura utilizando dos estrategias didáctica distintas, ha requerido un trabajo de campo que se ha desarrollado a lo largo del segundo cuatrimestre del curso 1999-2000 (febrero a mayo de 2000). En este trabajo de campo obtuvimos los datos que nos han permitido analizar e interpretar las diferentes características de las cuestiones planteadas.

El investigador que realizó el trabajo de campo y la investigación en este caso ha coincidido con el profesor que ha impartido las clases de ambos subgrupos. Consideramos que esta situación era adecuada porque permitía minimizar el número de sesgos que pudiera contener nuestra investigación en lo que se refiere a la variable PROFESORADO. Así de esta forma podemos afirmar que no ha sido un elemento decisivo de la estrategia didáctica objeto de estudio ya que es el mismo profesor el que imparte clase a ambos subgrupos. Por otro lado, la coincidencia de la figura del investigador no es significativa en nuestro estudio, ya que los resultados se centran básicamente en los alumnos.

En el siguiente apartado vamos a analizar las características de los participantes de la investigación así como el escenario educativo de la misma.

III.4. Participantes o sujetos del estudio, escenario y contexto de la investigación.

Para situar adecuadamente nuestra investigación necesitamos analizar el entorno físico, los participantes y en definitiva el contexto de nuestra investigación en lo que se refiere a tres aspectos fundamentales:

- La descripción del ESCENARIO EDUCATIVO.
- Las características de los PARTICIPANTES en la investigación.
- El modo de acceso al CAMPO.

III.4.1. ESCENARIO DE LA INVESTIGACIÓN.

Nuestra investigación tuvo lugar en tres locales de la Universidad Autónoma de Madrid:

1) AULA DEL SUBGRUPO A:

Se trata de un aula de Informática situada en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de Madrid. En concreto hablamos del Aula 2 de Informática de la Facultad de Ciencias ubicada en el módulo C-XI, 4ª Planta. Este aula estaba dotada con 20 ordenadores Pentium II, con Windows-NT como sistema operativo. Todos los ordenadores estaban conectados a la Red de la Universidad Autónoma de Madrid, y a Internet, permitiendo utilizar a todos los alumnos que tuvieran una cuenta de acceso los servicios básicos de Internet así como del programa DERIVE 4.11 (la cuenta se proporciona de forma gratuita a todos los alumnos matriculados en la Universidad Autónoma). Los puestos estaban distribuidos en dos bloques separados por un pasillo central. En cada bloque existían 5 mesas alargadas con 2 ordenadores por mesa. En la parte frontal del aula había una pizarra blanca (tipo velleda), sobre la cual se podían realizar proyecciones de equipos de retroproyección y a la vez efectuar explicaciones concretas. Podemos decir que este fue el escenario físico fundamental de la investigación, ya que en él se encontrará el grupo experimental con el que utilizaremos la estrategia didáctica objeto de nuestra investigación.

<table>
<tr><td>Puesto 17</td><td>Puesto 18</td><td rowspan="5">Pasillo</td><td>Puesto 19</td><td>Puesto 20</td></tr>
<tr><td>Puesto 13</td><td>Puesto 14</td><td>Puesto 15</td><td>Puesto 16</td></tr>
<tr><td>Puesto 9</td><td>Puesto 10</td><td>Puesto 11</td><td>Puesto 12</td></tr>
<tr><td>Puesto 5</td><td>Puesto 6</td><td>Puesto 7</td><td>Puesto 8</td></tr>
<tr><td>Puesto 1</td><td>Puesto2</td><td>Puesto 3</td><td>Puesto 4</td></tr>
<tr><td colspan="5">PIZARRA</td></tr>
</table>

PLANO DEL AULA DE INFORMÁTICA C-2-XI

Fotografía 1:AULA DE INFORMATICA C-2-XI (vista de uno de los laterales)

Fotografía 2:AULA DE INFORMÁTICA C-2-XI (vista del lateral contiguo al anterior)

Como puede observarse en las fotografías 1, 2, 3 y 4 la distribución de los ordenadores, sillas y espacios en el aula proporcionaban un entorno apropiado para que los alumnos hicieran un trabajo en grupo, fundamentalmente en parejas de trabajo en torno a cada terminal. No obstante si el número de alumno hubiera sido superior esta misma disposición hubiera permitido distribuir cómodamente 2 alumnos por terminal.

Fotografía 3: AULA DE INFORMÁTICA C-2-XI (vista desde la parte anterior del aula, bloque izquierdo)

También es importante señalar que la orientación de las mesas en este aula de informática facilita la exposición de contenidos bien a través de equipos de retroproyección o bien mediante el uso de la pizarra y el rotulador, sin necesidad de que el alumno tenga que adoptar posturas diferentes a las habituales. Esta disposición nos pudo permitir introducir exposiciones teóricas y observaciones a lo largo de las clases, mientras que los alumnos iban trabajando en sus ordenadores.

Fotografía 4: AULA DE INFORMÁTICA C-2-XI (Vista desde parte anterior del aula, bloque derecho)

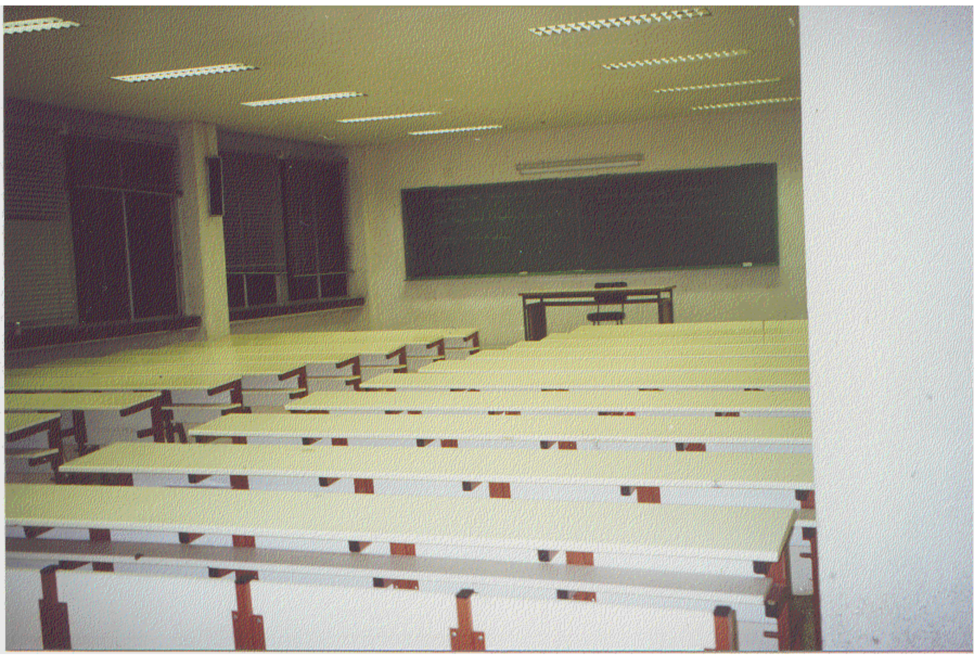
2) AULA DEL SUBGRUPO B:

Se trataba de un aula con una capacidad para unos 200 alumnos situada en la Facultad de Ciencias Económica y Empresariales de la Universidad Autónoma, Modulo E-XIV aula 102. Como puede observarse en el plano se trata de un aula rectangular con dos partes bien diferenciadas y separadas por dos columnas. En una de las partes encontramos dos bloques de pupitres separados por un pasillo central, lugar en el cual se solía situar la mayor parte del alumnado ubicándose frente a la pizarra. En la otra parte, encontramos un bloque de pupitres, con una menor visibilidad de la pizarra a causa de las columnas que se encuentran en medio. Los pupitres de la clase eran pupitres múltiples situados a lo largo de cada fila.

PIZARRA			Salida	
tarima del profesor				
	PASILLO			
pupitre		pupitre		pupitre
pupitre		pupitre		pupitre
pupitre		pupitre		pupitre
pupitre		pupitre		pupitre
pupitre		pupitre		pupitre
pupitre		pupitre		pupitre
pupitre		pupitre		pupitre

Plano del aula 102. Módulo E-XIV. Facultad de Económicas

En la siguiente fotografía se puede observar el escenario en el cual se impartió el curso utilizando la metodología tradicional.



Fotografía 4: AULA Modulo XIV Aula 102

Este tipo de aulas, provoca tres clases de problemas:

- por un lado la disposición de los alumnos en pupitres múltiples aunque favorece la comunicación entre los alumnos, en general suele generar demasiados comentarios ajenos a los contenidos de la clase,
- en segundo lugar impiden la participación activa de los alumnos en los trabajos prácticos propuestos en la pizarra, ya que para que un alumno pueda salir del pupitre obliga a desplazar toda la fila de alumnos si el alumno se encuentra ubicado en el centro
- y por último suelen existir problemas de visibilidad para los alumnos que se ubican en las últimas filas por la elevada distancia que puede existir cuando hay un número excesivo de alumnos.

3) EL DESPACHO DEL PROFESOR:

Este es un escenario auxiliar en el cual se realizaron la entrevistas personales y se impartieron las tutorías con cada uno de los alumnos del curso. El despacho está situado en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Autónoma de Madrid, Módulo III , despacho 206.

Fotografía 6: DESPACHO DEL DESPACHO.

III.4.2. PARTICIPANTES Y CONTEXTO EDUCATIVO DE LA INVESTIGACIÓN.

Los participantes de la investigación formaban parte de uno de los cuatro grupos de primer curso de la Licenciatura en Administración y Dirección de Empresas, de la Universidad Autónoma de Madrid. La asignatura objeto de estudio "Matemáticas II" centra sus contenidos en el Álgebra lineal, con el fin de aplicarlas de forma directa en la Programación Lineal. Se trata de un conjunto de contenidos muy similares a los de otras licenciaturas en las cuales se pretende dotar a los alumnos de los principales conceptos, procedimientos y herramientas básicas del álgebra lineal. El grupo de alumnos al que se dirigió la investigación estaba formado inicialmente por unos 180 alumnos matriculados (se puede consultar la lista de alumnos matriculados en esta asignatura en el ANEXO II), de los cuales la asistencia media de alumnos a clase en los últimos años ha sido de unos 90 alumnos. La asignatura "Matemáticas II", que centra nuestra investigación, es una asignatura troncal de 6 créditos que se imparte dos días a la semana (Lunes y Jueves) de 16,30 a 18,30. Por tanto, nos enfrentamos con el estudio de un grupo de unos 90 alumnos, que afrontan su segundo semestre de universidad. Nuestra intención era dividir este grupo inicial en dos subgrupos con un mismo profesor, circunstancia que ya hemos comentado en el apartado III.3.2. Este hecho nos obligó a que los subgrupos tuvieran dos horarios distintos y no solapados como se muestra a continuación en la caracterización de los subgrupos:

- El **primer subgrupo**, que llamaremos en adelante SUBGRUPO A, fue el subgrupo en el cual desarrollamos la estrategia didáctica que hemos planteado en el capítulo II, que incorpora el sistema de cálculo simbólico DERIVE en la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal. Este primer subgrupo tenía un número de plazas limitado: un total de 36 plazas. El motivo fundamental de esta limitación en el número de alumnos, se basó en dos razones:
    1) Un estudio de casos NO requiere un elevado número de participantes. Para realizar la investigación objeto de estudio, basta un grupo reducido para poder obtener unos constructos analíticos relacionados con el tema de la investigación: introducción de los sistemas de cálculo simbólico mediante el uso del ordenador en el álgebra lineal.
    2) Las aulas de informática, en las que se realizaron las exposiciones didácticas tienen 18 ordenadores disponibles, por lo cual considerando que nuestra estrategia didáctica pretende potenciar el aprendizaje colaborativo

se planteó la posibilidad de que existiera un máximo de 2 alumnos por ordenador, en cuyo caso el número máximo de alumnos sería de 36.

Como el horario del grupo de tarde de esta licenciatura era de 16,30-20,30 ; las clases de este subgrupo A debían de ofrecerse por la tarde y en horario que no impidiera a los alumnos que eligieran este subgrupo, la asistencia al resto de asignaturas, por lo que las clases de este SUBGRUPO A de "Matemáticas II" tuvieron lugar en las aulas de informática de 14,30-16,30.

- Un **segundo subgrupo**, que llamaremos en adelante SUBGRUPO B, caracterizado porque en él se utilizó una metodología tradicional en la que no se incorporó el sistema de cálculo simbólico en el aula. Este grupo estuvo formado por el resto de alumnos (aproximadamente unos 54 alumnos). La metodología tradicional a la que nos referimos se basa en exposiciones teóricas en la pizarra, que contienen ejemplos, y desarrollos teóricos basados en los ejemplos expuestos (esta metodología se expuso en el apartado II.6).

  Como se ha comentado anteriormente, el horario de clases de este SUBGRUPO B fue los Lunes y Jueves de 16,30 a 18,30.

El primer problema con el que nos enfrentamos en el TRABAJO DE CAMPO consistió en realizar el desdoblamiento del todo el grupo en los dos subgrupos: SUBGRUPO A (con DERIVE) y el SUBGRUPO B (sin DERIVE). Decimos problema, porque era fundamental realizar una selección correcta que no introdujera posibles sesgos en nuestro estudio.

La selección de los alumnos que formarían parte del subgrupo A, subgrupo que centra nuestra investigación, fue una SELECCIÓN BASADA EN CRITERIOS en la cual incorporamos como elemento fundamental la VOLUNTARIEDAD DEL ALUMNO para incorporarse a esta experiencia educativa. Esta voluntariedad del alumnado en la elección de subgrupo nos permitiría afrontar la investigación con alumnos que habrían elegido sin ningún tipo de coacción la forma en la cual deseaban desarrollar sus aprendizajes. Además de la voluntariedad en la selección consideramos importante introducir algunos criterios adicionales con los que se facilitase la creación del subgrupo A.

Un primer criterio inicial se basó en el horario de clases del subgrupo A. Aunque las clases en la Universidad no exigen la presencia física del alumno, sin embargo nuestra investigación exigía poder contar con la presencia de todos los alumnos que eligiesen esta didáctica. Por ello, un primer criterio “externo” de selección fue que los alumnos pudieran asistir a las clases, que como hemos comentado se desarrollaron los lunes y jueves de 14,30 a 16,30.

Además, consideramos que era necesario establecer previamente unos criterios adicionales que permitieran realizar la selección si fuese necesaria, es decir en el caso de que el número de alumnos que eligiese este subgrupo superase el número de plazas fijado para este subgrupo (36 alumnos).

Los tres criterios fundamentales que se plantearon inicialmente para fundamentar la selección, estuvieron centrados en el manejo de ordenadores y fueron los siguientes:

a) ESTAR MATRICULADO POR PRIMERA VEZ EN LA ASIGNATURA.

Consideramos muy importante que los alumnos que formasen parte del SUBGRUPO A, (grupo fundamental de la investigación cualitativa), y que tuvieran aquí su primer contacto con la asignatura, porque ello nos podría evitar algunos sesgos, derivados de los conocimientos previos o experiencias previas sobre álgebra lineal que tuviesen los alumnos. Considerábamos que podría ser importante que los contenidos fuesen nuevos para el alumno.

b) CONOCIMIENTOS PREVIOS DE INFORMÁTICA.

El nivel de conocimientos exigido sería el manejo del sistema operativo WINDOWS-95 o similares a nivel de USUARIO, es decir manejo de ficheros, carpetas y ventanas. Consideramos que este criterio era secundario en la selección pues únicamente pretendía elegir alumnos que tuvieran un mínimo de conocimientos informáticos para reducir el tiempo que tendríamos que dedicar a la enseñanza de las herramientas auxiliares de carácter informático que íbamos a emplear. Aunque uno de nuestros objetivos era determinar si el sistema de cálculo algebraico supone una BARRERA ADICIONAL para la enseñanza del álgebra lineal, la selección de participantes con unos conocimientos previos de informática no implicaba el conocimiento del programa, por todo ello esto no afectaba al objetivo planteado que básicamente pretendía estudiar si el programa de cálculo simbólico requiere un esfuerzo adicional por parte del alumno, al tener que aprender un programa complejo además de contenidos propios del programa.

c) CONOCIMIENTOS PREVIOS DE INTERNET.

Los conocimientos exigidos consistían en el manejo básico de un navegador como NETSCAPE 4.5 y de un gestor de correo electrónico, a nivel de usuario. Aunque no se trataba de un criterio fundamental, consideramos que estos conocimientos previos facilitarían más tiempo a las clases reales de álgebra lineal. Dado que el manejo de Internet y el correo electrónico no son fundamentales en el estudio, sin embargo tener ciertas ideas iniciales sí proporcionarían algunas facilidades en la docencia. No obstante lo consideramos como el último criterio de selección a emplear.

Estos tres criterios consideramos que serían suficientes para establecer la selección necesaria que nos permitiera constituir los subgrupos A y B. Otro aspecto que debíamos de prever era la manera de evitar que los alumnos pudieran cambiar de subgrupo una vez realizada la elección de subgrupo. Para ello, dentro de la voluntariedad de elección de subgrupo (con las limitaciones existentes en cuanto a los criterios para el subgrupo A), señalamos que la elección que realizase el alumno debía ser definitiva, circunstancia que debería hacerse formal con la firma por parte de cada alumno de la elección escogida. El motivo fundamental de esta rigidez en la elección estaba basado en dos aspectos: la evaluación de cada subgrupo iba a ser diferente y la metodología empleada en cada subgrupo también sería diferente. Además con esta rigidez se pretendía evitar la existencia de posibles trasiegos de alumnos de un subgrupo a otro por mero capricho. Por ello, la elección realizada se formalizó en un documento mediante la firma de cada alumno. Con esto conseguíamos formalizar en cierta forma la selección realizada por cada alumno incluyendo los criterios y métodos de evaluación.

Para establecer la selección de subgrupos elaboramos una encuesta escrita a partir de la cual, además de solicitar los datos personales de los alumnos, se incluyeron algunas cuestiones relacionadas con los criterios de selección: conocimientos previos sobre WINDOWS, Internet. En la encuesta también aparecían algunas cuestiones relacionadas con la trayectoria educativa de los alumnos en los últimos años.

Esta encuesta nos proporcionó datos de los alumnos que nos sirvieron posteriormente para obtener algunas características iniciales de ambos subgrupos, realizando así una diagramación inicial bastante fiable.

El modelo de encuesta así como los datos y resultados obtenidos de dicha encuesta se pueden ver en el ANEXO V.

III.4.3. ACCESO AL CAMPO

Para realizar el estudio objeto de nuestra investigación necesitábamos obtener un permiso del Departamento de Análisis Económico: Economía Cuantitativa (Universidad Autónoma de Madrid) responsable de la asignatura, que nos permitiera realizar la investigación en los términos que habíamos planteado, desdoblando el grupo asignado al profesor-investigador, perteneciente al Departamento, y realizando el proceso de selección sobre el grupo asignado. Para tal efecto se presentó un proyecto de investigación (véase ANEXO III) que el Departamento aprobó totalmente al iniciarse el curso 1999-2000.

El acceso al campo, tuvo lugar el primer día de clase del segundo cuatrimestre: 21 de Febrero de 2000 a las 16’30 h. En esta primera clase, se presentó el programa de la asignatura y la bibliografía básica. A continuación, expusimos la investigación educativa que iba tener lugar en este grupo, explicando las dos ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS alternativas que se pondrían en práctica en cada uno de los dos SUBGRUPOS. Una vez expuestas las DIDÁCTICAS, y solucionadas las dudas existentes, se hizo mucho hincapié en la necesidad de elegir un subgrupo u otro, de tal forma que las elecciones deberían ser definitivas ya que un alumno que eligiese el SUBGRUPO A no podría examinarse con el SUBGRUPO B y viceversa. Tras haber informado suficientemente a los alumnos se les pasó una encuesta (ver ANEXO V), en la que los alumnos pudieron responder a ciertas cuestiones generales relacionadas con el nivel del alumnado en Matemáticas, sus conocimientos informáticos y otros datos generales; así como la formalización de la elección del subgrupo en el cual deseaban inscribirse para ser evaluados.

Como acabamos de comentar en el apartado anterior, la encuesta inicial tenía por objeto realizar una recogida de datos para que los alumnos eligiesen el tipo de metodología que deseaban realizar en la asignatura Matemáticas II. En dicha encuesta se recogieron datos generales relacionados con cuatro aspectos importantes:

- Los conocimientos de informática e internet .
- El historial académico de cada alumno.
- La actitud general ante las Matemáticas.
- Motivos de la elección de metodología.

Como inicialmente se desconocía el grado de interés que podría suscitar la metodología que utilizaba DERIVE (Subgrupo A), y ante la existencia de un número de plazas limitado para realizar esta experiencia educativa (36 plazas) se plantearon varios criterios para elegir el subgrupo:

1. La primera de ellas era el horario. El subgrupo experimental A tendría clase los Lunes y Jueves de 14:30 a 16:30 en el Aula de Informática, mientras que el subgrupo B, tendría clase los Lunes y Jueves de 16:30 a 18:30.
2. Se solicitaba que los alumnos estuviesen matriculados por primera vez en la asignatura.
3. También se solicitaba que existieran unos mínimos conocimientos de Windows, a nivel de usuario.
4. Por último se pedían pequeños conocimientos de Internet y manejo de un programa de correo electrónico.

La encuesta se realizó sobre una muestra de 78 alumnos, de los que un total de 16 alumnos eligió el subgrupo experimental A y un total de 62 alumnos eligieron el subgrupo B.

A pesar de que inicialmente se plantearon criterios para seleccionar a un máximo de 36 alumnos en el subgrupo A, no hizo falta utilizarlos ya que el número de alumnos que solicitaron formar parte del grupo fue muy inferior a las plazas ofertadas: tan solo 16. Por tanto podemos decir que la elección de subgrupo fue totalmente libre sin ningún tipo de criterio selectivo. El único elemento selectivo, aunque de forma indirecta, fue el horario, motivo por el cual 20 alumnos no eligieron este subgrupo (los resultados de esta encuesta inicial se pueden consultar en el ANEXO V). A pesar de esta restricción de horario, si hubiésemos conseguido ofertar un horario adecuado a todos los que estaban interesados en esta metodología, podemos afirmar que tampoco hubiera sido necesario un criterio de selección pues el número de alumnos que hubieran elegido este tipo de didáctica hubiera sido exactamente igual al número de plazas existentes: 36.

El resumen de datos de esta encuesta la desarrollamos con más detalle en el capítulo IV dedicado a la recogida de datos (apartado IV.1).

III.5. Experiencia del investigador y sus roles en la investigación.

Como acabamos de comentar en apartados anteriores, la investigación se basa en el análisis e interpretación del comportamiento de una estrategia didáctica que incorpora el uso del programa de cálculo simbólico DERIVE como medio didáctico para la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal. El estudio cualitativo y cuantitativo se ha centrado en un grupo de alumnos dividido en dos subgrupos: uno que ha utilizado una metodología que incorpora el programa de cálculo simbólico DERIVE y otro que ha utilizado una metodología tradicional. La docencia de ambos subgrupos fue realizada por un mismo profesor, circunstancia que nos permitió eliminar ciertas variables adicionales que podrían haberse generado si cada subgrupo hubiera tenido profesores distintos. Asimismo, se da la circunstancia de que el investigador fue único y coincidente con la figura del profesor. Dado que la figura central de nuestro estudio eran los alumnos, la situación en la que se encontraba el profesor-investigador ha permitido que éste realice un estudio muy completo del comportamiento de todo el grupo de alumnos; por otro lado las técnicas necesarias de vagabundeo, realizadas habitualmente por los investigadores que son externos al escenario educativo no fueron necesarias: el investigador formaba parte del escenario ya que era el profesor, y por tanto uno de los protagonistas de la experiencia educativa.

También debemos tener en cuenta la formación previa del investigador-profesor. Se trata de un profesor Licenciado en CC. Matemáticas en la especialidad de CC. de la Computación, lo cual presupone un conocimiento añadido respecto al de otros profesores de Matemáticas: su especialidad está totalmente vinculada al uso de los ordenadores, así como al manejo de numerosos programas. Así pues podemos considerar que existía a priori una predisposición positiva del profesor-investigador a la incorporación de las nuevas tecnologías en el ámbito educativo, por su propia formación inicial.

Por otro lado el profesor-investigador forma parte del profesorado del Departamento de Análisis Económico: Economía Cuantitativa (Universidad Autónoma de Madrid), Departamento al cual corresponde la docencia del grupo de alumnos sobre el cual se realizaría la investigación, en concreto se trata del Grupo 1-A-4 de la Licenciatura en Administración y Dirección de Empresas. La asignatura Matemáticas II, sobre la cual se realizó la investigación educativa, ha sido impartida por el profesor-investigador durante los últimos 8 años, por lo que podemos afirmar que existe un conocimiento previo de la asignatura y de la problemática de la misma suficientemente probada y fundamentada; circunstancia que permite justificar el tipo de metodología utilizada en el desarrollo de la asignatura.

Según las características que hemos detallado del investigador podemos afirmar que asume un rol de PARTICIPANTE OBSERVADOR, ya que forma parte del proceso educativo (profesor de la asignatura) realizando las actividades que le corresponden, es decir exponiendo y dirigiendo el desarrollo de la clase, y además observando la conducta de los participantes de la investigación.

III.6. Herramientas y estrategias de recogida de datos.

III.6.1. DESCRIPCIÓN GENERAL DE LAS HERRAMIENTAS Y ESTRATEGIAS DE RECOGIDA DE DATOS

Las herramientas y estrategias de recogida de datos que hemos considerado para realizar nuestra investigación se pueden dividir en dos tipos grandes bloques:

A) **Recogida de Datos relacionados exclusivamente con el ÁLGEBRA LINEAL.** En este bloque de datos incluimos todas las pruebas objetivas, resoluciones de problemas, cuestiones, y exámenes que los alumnos han ido entregando y realizando a lo largo del curso y que sirven para estudiar el grado de comprensión de los temas, las estrategias de resolución utilizadas, el grado de comprensión del programa. Los modelos de estas pruebas se pueden encontrar en el ANEXO VI (problemas propuestos), el ANEXO VII (cuestiones propuestas) y el ANEXO VIII (exámenes propuestos).

B) **Recogida de Datos Generales**. En este bloque de datos incluiremos aquellos datos que pueden resultar importantes para la investigación que no guardan relación con los contenidos de álgebra lineal que se han impartido en el curso, y que nos mostrarán los principales indicadores de las cuestiones planteadas en la investigación relacionadas con la MOTIVACIÓN, el INTERÉS suscitado, el grado de satisfacción del mismo, el grado de aceptación del programa por parte de los alumnos, las relaciones dialécticas con los compañeros,... La obtención de estos datos generales a partir de:

- ENTREVISTAS PERSONALES y ENCUESTAS realizadas con los participantes del SUBGRUPO A,
- las NOTAS DE CAMPO realizadas por el investigador
- y la ENTREVISTA realizada con el observador cualificado.

Todas las pruebas realizadas para recoger los datos generales que comentamos en este apartado se pueden consultar en los ANEXOS IX (entrevista inicial), X (diario de campo), XI (entrevista intermedia), XII (encuesta final), XIII (entrevista final) y XIV (entrevista con el observador cualificado).

Para la obtención de estos dos tipos de datos: por un lado los datos objetivos relacionados con el álgebra lineal y por otro lado el conjunto de datos subjetivos de carácter más general, hemos diseñado las siguientes técnicas de recogida de datos:

a) **ENCUESTA INICIAL**. Esta encuesta es la que nos ha servido para seleccionar los participantes de cada SUBGRUPO, además con ella hemos obtenido datos generales relacionados con los estudios realizados, conocimientos generales sobre ordenadores, y expectativas para la elección del SUBGRUPO A (se puede ver el modelo de la encuesta inicial en el ANEXO V).

b) **ENTREVISTA INICIAL**. La entrevista inicial ha sido realizada de forma individualizada con cada uno de los alumnos-participantes en la experiencia educativa del SUBGRUPO A. En esta entrevista hemos intentado obtener las ideas que tenían los alumnos sobre diversos aspectos de carácter individual, una vez que habían realizado algunas sesiones con la nueva didáctica, con el fin de obtener datos relacionados con:
   - ACTITUDES PERSONALES:
     - Frente a las Matemáticas y en especial frente al Álgebra Lineal,
     - Frente a los ordenadores,
     - Frente al trabajo en grupo.
   - EXPECTATIVAS PROFESIONALES.
   - CONOCIMIENTOS INICIALES EN MATEMÁTICAS:
     - Calificaciones iniciales en Matemáticas,
     - Calificaciones obtenidas en Febrero de la asignatura Matemáticas I.
   - EXPECTATIVAS DEL CURSO:
     - ¿Qué es lo que más te gusta del curso?
     - Ritmos del curso: ¿Vamos demasiado rápido, muy despacio?
     - Grado de interés suscitado por el curso
     - ¿Algo que hechas en falta?
     - ¿Hay algún tema que quieras plantear?

   (El modelo de la entrevista inicial se puede consultar en el ANEXO IX).

c) **DIARIO DE CAMPO**.

En este diario, el investigador-profesor ha recogido las anotaciones diarias de sus observaciones realizadas a lo largo de las clases, sobre la base del siguiente grupo de registros:

- ¿cómo es el ambiente de la clase general?
- ¿Has estado cómodo impartiendo la clase hoy?
- ¿El guión de trabajo ha resultado demasiado teórico o por el contrario demasiado práctico? ¿Percepción?
- ¿Has notado actitudes negativas en la clase respecto al curso?
- ¿Has notado actitudes positivas en la clase respecto al curso?
- ¿Has visto a algún alumno que se haya descolgado demasiado del ritmo de toda la clase?
- ¿Has observado si algún alumno se ha aburrido porque íbamos demasiado despacio?
- ¿Has percibido qué alumnos son los más aventajados y que merecen una atención especial?
- ¿Has percibido qué alumnos son los más retrasados que merezcan una atención especial?
- ¿La presencia del observador cualificado, te ha motivado, te ha hecho sentir mal, has encontrado algún obstáculo por su presencia?
- ¿Cuál es la disposición de los alumnos, empiezan a formar subgrupos? ¿mantienen la distribución inicial de los espacios? anotar la disposición, observar incidencias
- ¿cómo son las dudas que se plantean, son de CONCEPTOS MATEMÁTICOS o del modo de uso del PROGRAMA?
- ¿se percibe motivación en los alumnos a la hora de resolver los ejercicios?
- ¿se observa que los alumnos tengan prisa a la hora de finalizar la clase? ¿hay que avisarles que la clase ha terminado?
- ¿cómo es el trabajo con DERIVE? ¿se entiende, existe dificultad en su comprensión? ¿cuáles han sido las dudas más significativas que has observado sobre el uso del programa?
- ¿Existe autonomía cognitiva o una excesiva dependencia del programa? Pon los ejemplos que corroboren una u otra afirmación.
- ¿Se piensan los procesos o por el contrario existe un cierto automatismo? Incluye ejemplos que corroboren una u otra afirmación.

- Cualquier otra observación que merezca ser considerada puede suscitar un nuevo punto de anotación a este guión, y deberá anotarse.

Para efectuar la recogida de datos y elaborar este diario de campo hemos elaborado una ficha diaria en la que íbamos anotando los aspectos más importantes del desarrollo de la clase que se pueden consultar en el ANEXO X.

d) PROBLEMAS DE CAPÍTULO ENTREGADOS.

Al finalizar cada capítulo se les ha propuesto a los alumnos que entregasen una colección de problemas fin de capítulo. Con este trabajo se pretendía fomentar el hábito al trabajo constante así como la posibilidad de realizar el trabajo en grupo. De las resoluciones de estos problemas hemos extraído por un lado los procedimientos erróneos más habituales entre los alumnos, las características individuales relacionadas con la resolución de problemas y el grado de dominio del alumno respecto al sistema de cálculo simbólico (para obtener la colección de problemas propuesto al final de cada capítulo se puede consultar el ANEXO VI).

e) RESOLUCIÓN DE CUESTIONES. PRUEBA OBJETIVA TEÓRICA

Estas cuestiones teóricas se proponían en el AULA al finalizar cada capítulo y se han utilizado para medir de forma objetiva el grado de comprensión teórica y su capacidad para relacionar los conceptos. Las cuestiones han sido muy similares a las que luego se han propuesto en el examen final por lo que han servido como ensayo para que el alumno adquiera un método de estudio basado fundamentalmente en la relación de conceptos y el reconocimiento y comprensión de razonamientos correctos en el ámbito del álgebra lineal. Permitían un seguimiento del alumnado en cuanto al su grado de comprensión teórico de los contenidos. También servían para que el profesor introdujera en su metodología las correcciones necesarias para evitar los errores que cometían frecuentemente los alumnos, insistiendo más en algunos aspectos teóricos que en otros e incidiendo en ciertas relaciones que pudieran no haber quedado claras (para obtener la colección de cuestiones propuestas al final de cada capítulo se puede consultar el ANEXO VII).

f) **TUTORIAS A TRAVES DE LA RED.**

El objetivo de estas tutorías fue establecer una relación dialéctica entre profesor-alumno lo más ágil posible, sin depender de horarios. Para ello se facilitó la dirección de correo a todos los alumnos.

g) EXAMEN FINAL.

La prueba final estuvo formada por dos partes:

- Una parte teórica formada por 10 cuestiones tipo test de carácter teórico similares a las desarrolladas a lo largo del curso, que permitieron medir el grado de comprensión teórica y capacidad de relación teórica de los conceptos fundamentales del álgebra lineal y la programación lineal. Para esta parte aunque inicialmente no se permitió utilizar el programa de cálculo simbólico DERIVE (los cálculos que debían efectuarse serán sencillos y de carácter muy teórico), sin embargo más adelante se permitió el uso del programa en las cuestiones teóricas siempre y cuando el alumno incluyera como anexo, un fichero de las operaciones realizadas con DERIVE para contestar estas cuestiones.

- La segunda parte fue de carácter práctico, constó de 4 problemas, que los alumnos resolvieron en una HOJA DE TRABAJO de DERIVE, incluyendo los comentarios correspondientes, los pasos de su resolución, e indicando claramente las soluciones y argumentos de sus razonamientos. El enunciado de los problemas se facilitó en una hoja escrita y los alumnos debían resolverlos tal como hemos señalado generando un fichero por cada problema que los alumnos entregaron en un disquete. El examen tuvo lugar en el mismo aula en el que se desarrollaron las clases. Esta prueba además de ser un elemento de medición fundamental para la evaluación global de curso tiene un elevado grado de homogeneidad con las pruebas realizadas por el SUBGRUPO B: de hecho la parte teórica fue la misma, solamente fue distinta la parte práctica, ya que los problemas para el subgrupo B eran más sencillos de manipular.
  (para obtener las cuestiones y problemas planteados en el examen final se puede consultar el ANEXO VIII).

h) ENTREVISTA INTERMEDIA

Esta entrevista se realizó de forma individual con cada uno de los alumnos. Con esta entrevista pretendíamos obtener información relacionada con las opiniones que tenían los alumnos respecto a varios aspectos:

- la marcha del curso,
- la actitud de los alumnos frente al uso de DERIVE en el Álgebra Lineal,
- los elementos que favorecen el trabajo en grupo y

- algunas cuestiones que trataban de evaluar el estado anímico de los participantes, el grado de motivación frente a la asignatura.

(para obtener el esquema de las entrevistas intermedias se puede consultar el ANEXO XI).

i) ENCUESTA FINAL

Esta encuesta se realizó de forma individual y se pretendía obtener una evaluación del curso, con carácter previo a la realización del examen. En dicha encuesta recogimos las opiniones y valoraciones de los alumnos respecto a la didáctica empleada y respecto al uso de DERIVE, se trato de una evaluación general del sistema didáctico empleado (para obtener el modelo de encuesta que se pasó a los alumnos se puede consultar el ANEXO XII).

j) ENTREVISTA FINAL DE VERIFICACIÓN.

Una vez finalizado el curso, realizado el examen y calificados los alumnos, se realizaron entrevistas individualizadas con cada uno de los alumnos participantes en la experiencia didáctica con el fin de verificar en la medida de lo posible los constructos y categorías obtenidos previamente a lo largo de la investigación. Al realizar esta entrevista con posterioridad a la evaluación de los alumnos, podemos decir que las opiniones del alumno gozaban posiblemente de mayor objetividad, al no sentirse en cierta medida sometido a la presión previa del examen. Los alumnos aprobados nos facilitaron datos muy objetivos, ya que el hecho de haber superado el examen les posibilitaba situarse en una posición desvinculada totalmente con el profesor-investigador (para obtener el modelo de entrevista final se puede consultar el ANEXO XIII).

III.6.2. INFORMACIÓN QUE PROPORCIONAN LAS HERRAMIENTAS Y ESTRATEGIAS DE RECOGIDA DE DATOS

Las herramientas y estrategias de recogida de datos que acabamos de exponer de forma general, fueron diseñadas para obtener los datos suficientes con los que pudiéramos dar respuesta a las cuestiones planteadas inicialmente en nuestra investigación, una vez realizado el análisis pormenorizado de los mismos. Para facilitar el análisis de los datos, consideramos que sería muy útil elaborar previamente la información que podía facilitar cada prueba respecto a cada una de las cuestiones planteadas en la investigación:

a) ENCUESTA INICIAL.

La encuesta inicial nos sirvió para realizar la SELECCIÓN de los participantes, ofreciéndonos el perfil inicial de los alumnos que iban a realizar esta experiencia. Nos permitió obtener el **GRADO DE MOTIVACIÓN** inicial de los alumnos frente al ordenador y frente a las Matemáticas en general. Esta encuesta inicial también resultó de utilidad para obtener una visión global de las calificaciones iniciales que habían obtenido los alumnos en MATEMÁTICAS, así como para obtener algunas relaciones entre MOTIVACIÓN PREVIA con CALIFICACIONES PREVIAS. Otro elemento muy importante del cual se pudo obtener información fue el relacionado con el grado de interés inicial por los ordenadores, es decir la predisposición y preparación para usar ordenadores. Esta información resultó interesante para introducir algunos datos relacionados con el estudio de la cuestión en la que se planteaba si el programa **DERIVE suponía o no una barrera adicional** para la enseñanza de las Matemáticas.

b) ENTREVISTA INICIAL

Con la entrevista INICIAL pudimos obtener información relacionada con las siguientes cuestiones:

- GRADO DE MOTIVACIÓN INICIAL: algunas de las preguntas de la encuesta estaban íntimamente relacionadas con los conocimientos iniciales en Matemáticas así como con la actitud inicial frente a las Matemáticas, elementos importantes a la hora de valorar la motivación que el programa DERIVE pudiera suscitar entre los alumnos. Sobre esta cuestión también resultó muy interesante observar y analizar las contestaciones a una de las preguntas de la entrevista ¿te has aburrido en las explicaciones?. Otra pregunta de la entrevista que tiene que ver con la cuestión es la siguiente ¿está suscitando algún interés particular este tipo de estudio por las matemáticas?, que podía añadirnos más valoraciones sobre este tema.
- ¿DERIVE GENERA BARRERAS ADICIONALES?: al obtenerse una actitud inicial frente a los ordenadores, es decir, acerca de sus conocimientos previos en ordenadores se podría obtener una visión inicial de la predisposición de los alumnos para aprender con ayuda del ordenador. Asimismo se les preguntó si después de dos meses de curso encontraban alguna dificultad con el manejo o el aprendizaje del programa DERIVE, es decir, si resultaba un programa fácil o difícil de manipular. Estas valoraciones nuevamente nos permitieron obtener una visión subjetiva individualizada del grado de complejidad del programa para el alumnado.
- ¿DERIVE COMO HERRAMIENTA DE EXPERIMENTACIÓN MATEMÁTICA? Se obtuvo una visión personal de cada alumno relacionada con la experimentación

en matemáticas, en particular de la opinión que tenían los alumnos sobre la experimentación que ofrecía el programa al usuario.

- SISTEMA DE NOTACIÓN INTERMEDIO: En algunas cuestiones de la entrevista se les preguntó si visualizaban los contenidos y abstracciones matemáticas con DERIVE, si conseguían manipular mejor los conceptos a través del sistema de notación DERIVE.
- FAVORECE APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO: se obtuvieron las opiniones de los alumnos acerca de los aprendizajes de los alumnos, es decir, las características del tipo de aprendizaje que ofrecía DERIVE: permitía que los conceptos quedasen bien asentados o por el contrario si el aprendizaje consistía en la memorización de un conjunto rutinas y procesos a memorizar.
- GRADO DE INTERACTIVIDAD: Con estas entrevistas se pudo obtener una visión subjetiva de cada alumno acerca de la dinámica del curso, el ambiente de clase, es decir se obtuvo una valoración inicial de las relaciones de comunicación que pudiera estar suscitando la estrategia entre alumnos, profesor y programa.
- FAVORECE PROTAGONISMO Y AUTOCREACION: una de las cuestiones de la entrevista fue la siguiente: "*cuando se sugiere realizar un ejemplo para investigar, ¿te encuentras perdido? ¿te cuesta mucho trabajo reaccionar?"*. Cuestión que nos facilitó las visiones personales y subjetivas acerca del grado de protagonismo que tenían los alumnos en el aula con el uso del programa.
- ¿FAVORECE LA RELACIÓN DIALECTICA ENTRE USUARIOS: en la entrevista se les preguntó a los alumnos que indicaran su opinión acerca de la relación dialéctica que existía en el aula entre los alumnos, para determinar si la dinámica propiciada por el uso de DERIVE favorecía la intercomunicación entre alumnos.
- ¿FAVORECE EL APRENDIZAJE COLABORATIVO? En la entrevista también se preguntó acerca del trabajo en grupo, de la existencia o no de cierta predisposición por el trabajo en grupo, si el trabajo en grupo que se realizó en clase favoreció a juicio de cada alumno sus propios aprendizajes, si comprendió mejor los contenidos, si se entabló cierta relación de trabajo con los compañeros del entorno y si esta relación fue favorecida por el uso de DERIVE. También se plantearon cuestiones que nos proporcionaron información relacionada con el tipo de trabajo realizado fuera de clase, es decir si se reunían los alumnos fuera del ámbito de la clase para resolver problemas, resolver dudas...
- ATENCION A LA DIVERSIDAD: Se intentaba saber si el alumno se había aburrido en clase (en cuyo caso estaríamos hablando de posibles alumnos aventajados que no encontraban actividades apropiadas a su nivel) o descubrir si el

alumno se había encontrado perdido en algunas explicaciones (para determinar si existían alumnos retrasados). Estas dos preguntas trataban de encontrar los alumnos que requerían un trato especial bien por tener un nivel superior a la media o bien por estar más retrasados que la media.

c) DIARIO DE CAMPO

En el DIARIO DE CAMPO se intentaron recoger las observaciones del INVESTIGADOR DE CAMPO a lo largo de las sesiones, sobre la base de un conjunto de registros que facilitasen la observación de investigador. Estos registros pretendían dar respuesta a las siguientes cuestiones:

- GRADO INTERACTIVIDAD ALUMNO-PROFESOR-MEDIO. Esta cuestión se podía observar estudiando algunas de los registros habituales en el campo como son: *¿Cómo ha sido el ambiente de clase en general? ¿Has estado cómodo impartiendo la clase? ¿el guión de trabajo ha resultado demasiado teórico, práctico? ¿Has notado ACTITUDES NEGATIVAS en la clase respecto al curso? ¿Has notado ACTITUDES POSITIVAS en la clase respecto al curso?*
- ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD: Información sobre esta cuestión se podía obtener a partir de los registros de campo: *¿has percibido qué alumnos son los más retrasados y merecen una atención especial? ¿has observado que algún alumno se haya descolgado demasiado del ritmo de la clase? ¿has percibido si algún alumno se ha aburrido porque íbamos demasiado despacio?*
- GRADO DE MOTIVACIÓN En los registros previos de observación de este DIARIO DE CAMPO existían varias cuestiones que hacían referencia a la motivación en concreto: *¿Se percibe MOTIVACIÓN en los alumnos a la hora de resolver los ejercicios y tareas planteadas?*. También respecto a la motivación un elemento que podría ofrecer información fue el control de asistencia a clase que se realizó de forma exhaustiva y facilitó un dato objetivo relacionado al menos con el interés del alumno por la asignatura.
- GENERA BARRERAS ADICIONALES: Esta cuestión pudo analizar observando particularmente en uno de los registros cuya pregunta es *¿Cómo es el trabajo con DERIVE? ¿Se entiende, existe dificultad en su comprensión? ¿Cuáles han sido las dudas más significativas que has observado sobre el uso del programa?* También habría que hacer referencia a un registro que intentaba obtener información respecto al tipo de dudas que tenían los alumnos: *¿cómo son las dudas que se plantean, son de CONCEPTOS MATEMÁTICOS o de modo de uso del PROGRAMA?*
- AUTONOMIA COGNITIVA. Los registros de campo que podrían facilitar información respecto a esta cuestión eran: *¿existe autonomía cognitiva o una*

excesiva dependencia del programa? pon ejemplos que corroboren una u otra afirmación.

- FAVORECE PROTAGONISMO Y AUTOCREACION. Uno de los registros de las anotaciones de campo contenía la siguiente pregunta: *¿se piensa en los procesos o por el contrario existe un cierto automatismo? incluye ejemplos que corroboren una u otra afirmación.* Con las observaciones a este registro se pudieron obtener características relacionadas con el protagonismo y autocreación del alumnado.
- FAVORECE EL APRENDIZAJE COLABORATIVO: Respecto a este aspecto en el diario de campo se anotaron las disposiciones que tenían los alumnos de cara a las colaboraciones y sobre la participación de los mismos en actividades colaborativas de aprendizaje.
- FAVORECE RELACIÓN DIALECTICA ENTRE USUARIOS: Para el estudio de esta cuestión en el diario de campo fuimos anotando las observaciones realizadas en torno a los agrupamientos que realizaban los alumnos, fundamentalmente en la disposición de sus ubicaciones en clase.

Debemos señalar que las contestaciones del diario de campo fueron observaciones del investigador-profesor

d) PROBLEMAS DE CAPÍTULO ENTREGADOS

Con estas pruebas de carácter obligatorio e individual, se pretendían obtener datos objetivos muy vinculados a los contenidos del álgebra lineal, en particular los datos que se pudieron extraer de estas resoluciones podrían contestar perfectamente a las siguientes cuestiones:

- SISTEMA DE NOTACIÓN INTERMEDIO: Había que observar los planteamientos y resoluciones realizados por los alumnos, ya que en ellos se podrían obtener trazas que permitieran vislumbrar la posible existencia de un sistema intermedio, el utilizado en el proceso de resolución. Los planteamientos e interpretaciones de resultados son la Matemática abstracta, y los procesos intermedios forman parte de la traducción operativa que el alumno realizará con la ayuda de DERIVE entre aquellos conceptos y las operaciones asociadas.
- FAVORECE PROTAGONISMO Y AUTOCREACIÓN. Debíamos observar si los alumnos planteaban resoluciones originales. Otro elemento muy importante a tener en cuenta sería si los alumnos utilizaban diferentes estrategias en su resolución. Por último también resultaba interesante observar como eran las interpretaciones de los alumnos ante los resultados obtenidos en las operaciones.

- EVITA USAR EL ORDENADOR PARA RESOLVER RUTINAS ESENCIALES. Se trataría de observar si en los problemas entregados los elementos esenciales de cada capítulo eran tratados de forma correcta o bien si el alumno los automatizaba con DERIVE. Por ejemplo si pedimos calcular un determinante usando propiedades, observar si el alumno se reducía a aplicar la función que calcula el DETERMINANTE en DERIVE (det(A)) o bien aplicaba propiedades de determinante y los algoritmos iniciales para el cálculo de determinantes.
- PRESCINDE DE ESFUERZOS RUTINARIOS. Observando el grado de complejidad del problema y las posibilidades que ofrece el programa al alumno en su resolución. Se trataría de establecer observaciones sobre las operaciones que se realizan y resultados obtenidos.
- HERRAMIENTA DE EXPERIMENTACIÓN. Se trataría de observar las veces que el alumno utiliza el programa DERIVE como herramienta de experimentación para resolver ciertos problemas, si es que se utiliza de esta manera.
- FAVORECE ESTRATEGIAS DE RESOLUCION DE PROBLEMAS. Observar en las resoluciones si existen para un mismo alumno y un mismo problema más de una alternativa de resolución. Y también observar las diferentes formas de resolver un mismo problema entre alumnos distintos.
- ¿GENERA BARRERAS ADICIONALES? Observar las resoluciones de problemas si existen algunas operaciones que no sean bien entendidas, que se crea que realizan una operación cuando de hecho efectúan otra, es decir si se entiende bien el uso del programa y sus diversas operaciones.
- GENERA AUTONOMIA COGNITIVA. Observar en las resoluciones el grado de dependencia que existe entre el alumno y los resultados que se van obteniendo en los pasos intermedios, es decir si el alumno se sorprende cuando surge algún dato inesperado o si trata de darle alguna explicación o buscársela.
- ATENCION A LA DIVERSIDAD. Estudiar cuales son los problemas que realiza la mayor parte de los alumnos y si existen alumnos aventajados que realicen todos. Los problemas que se plantean son algunos fáciles otros difíciles y otros complicados, en esta baremación, observar cual es la distribución de problemas bien resueltos.
- GRADO DE MOTIVACIÓN: En la resolución de los problemas es conveniente observar la forma de resolver, si se puede entresacar cierta motivación por su resolución. Y sobre todo, a la hora de plantear las soluciones, anotar las preguntas que surgen después de haberse dado la solución del problema.

e) RESOLUCIÓN DE CUESTIONES TEÓRICAS.

Las cuestiones teóricas se debían resolver de forma individual sin DERIVE, y permitirían estudiar las siguientes cuestiones:

- FAVORECE UN SISTEMA DE NOTACIÓN INTERMEDIO: Estudiando la relación entre calificaciones de alumnos en problemas y cuestiones teóricas que son de carácter objetivo para estudiar el grado de cumplimiento de esta cuestión.
- EVITA USAR EL ORDENADOR PARA RESOLVER RUTINAS ESENCIALES: con esta prueba de forma clara se puede observar si lo que es esencial de forma teórica ha sido comprendido ya que no se realizan con DERIVE.
- FAVORECE UN APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO. Estudiar los resultados obtenidos pues los aprendizajes con DERIVE serán significativos, si han generado una estructura teórica que permita al alumno enfrentarse con situaciones generales de forma autónoma.
- GENERA AUTONOMÍA COGNITIVA. Nuevamente medir relación entre calificaciones y en algunos casos las contestaciones realizadas de forma autónoma sin el ordenador, para medir el grado de independencia cognitiva el alumno respecto de la máquina.

f) TUTORIAS POR CORREO ELECTRÓNICO.

Los datos obtenidos con esta estrategia o herramienta nos permitirán dar contestaciones a las siguientes cuestiones:

- RELACIÓN DIALÉCTICA ENTRE USUARIOS. favorece la relación entre profesor-alumno, al facilitarse la comunicación entre los mismos. Estudiar las cuestiones o preguntas suscitadas en las tutorías.

Con el análisis de las dudas de contenidos matemático o del programa que se puedan plantear, podemos obtener información que conteste también a las siguientes cuestiones:

- DERIVE PERMITE UN SISTEMA NOTACIÓN INTEMEDIO: el análisis de dudas, nos permitirá observar cual es el lenguaje utilizado en su expresión simbólica, si es meramente matemática o si DERIVE actúa de puente entre sus ideas y la teoría matemática de álgebra lineal.
- HERRAMIENTA DE EXPERIMENTACIÓN: analizar en las dudas si el alumno se plantea la herramienta DERIVE como un elemento de experimentación o no, anotando los elementos concretos que corroboran dichas afirmaciones.
- GENERA BARRERAS ADICIONALES: sobre las dudas planteadas analizar si existen problemas en la comprensión del programa que impidan visualizar los

contenidos matemático o no. Anotar hechos concretos para luego afirmar o negar los datos.

- AUTONOMÍA COGNITIVA: analizando las dudas también podemos obtener información sobre el grado de dependencia que existe entre el alumno y el programa, analizando si el programa le lleva o no a plantearse dudas que no son existentes, a observar las interpretaciones que realiza el alumno a la vista de los datos que va obteniendo.

g) EXAMEN FINAL

Este examen, constará de dos partes una parte teórica (CUESTIONES TEÓRICAS) y una parte práctica (PROBLEMAS) mediante las cuales podremos realizar una evaluación objetiva final INDIVIDUALIZADA de los conocimientos y aprendizajes adquiridos por los alumnos; asimismo podremos obtener otras informaciones relacionadas con el manejo de DERIVE:

CUESTIONES TEORICAS:

Como las cuestiones teóricas son comunes a ambos SUBGRUPOS, la información obtenida nos puede ofrecer datos en cuanto a las cuestiones:

- LA ESTRATEGIA EVITA USAR EL ORDENADOR PARA RESOLVER RUTINAS ESENCIALES. Efectuaremos una pequeña comparativa entre resultados obtenidos por los alumnos de ambos subgrupos para corroborar si el saber utilizar DERIVE en el desarrollo teórico ha supuesto alguna diferencia significativa en los resultados.
- GENERA AUTONOMÍA COGNITIVA: Realizando una comparativa entre los resultados de cada alumno en las cuestiones teóricas y en los problemas podemos detectar si existe dependencia o no del uso del programa.
- GENERA BARRERAS ADICIONALES. Nuevamente con una comparativa entre los resultados de cada alumno entre cuestiones teóricas y los problemas podemos obtener información sobre la posible intromisión del programa DERIVE en la comprensión de los contenidos teóricos.

PROBLEMAS

Para los problemas las observaciones son más amplias pues aportan además de la información objetiva de calificación, los procesos intermedios que utilizan los alumnos en su resolución, circunstancia que nos permitirá obtener datos para contestar a las siguientes cuestiones:

- DERIVE PERMITE UN SISTEMA DE NOTACIÓN INTERMEDIO: Con el análisis de los procesos realizados en cada problema podemos obtener información relacionada con esta cuestión, pues podemos ver si el alumno ha asimilado DERIVE con sistema de notación intermedio o como mera herramienta de cálculo.
- FAVORECE PROTAGONISMO Y AUTOCREACIÓN. Nuevamente analizando los procesos realizados y las conclusiones obtenidas podemos ver el grado de originalidad en la construcción de soluciones, así como la creatividad de cada alumno a la hora de resolver los problemas.
- PERMITE PRESCINDIR DEL ESFUERZO RUTINARIO. Podemos observar la relación entre operaciones necesarias para resolver el problema y la facilidad o dificultad del alumno para perderse entre las operaciones, situaciones muy habituales cuando se resuelven problemas complejos de forma manual. ¿ha tenido claro el alumno desde el primer momento el objetivo de la resolución?
- HERRAMIENTA DE EXPERIMENTACIÓN. Ha utilizado el ordenador como una herramienta de experimentación mientras resolvía problemas. Puede suceder que el alumno se haya perdido en cierto momento y haya optado por realizar pruebas con el programa para situarse en el problema.
- FAVORECE DESARROLLO DE ESTRATEGIAS DE RESOLUCION DE PROBLEMAS. Considerar en el análisis de los datos si un mismo alumno ha resuelto un mismo problemas de más de una forma y por otro lado analizar si un mismo problema ha sido resuelto de más de una forma por alumnos distintos.
- GENERA BARRERAS ADICIONALES. En el proceso de resolución analizar si han surgido algunos problemas o errores por mala interpretación de los resultados, generados por el propio programa o por el contrario si se han interpretado los resultados intermedios de forma correcta.
- AUTONOMIA COGNITIVA. Observar si el alumno ha sabido interpretar los resultados de los procesos intermedios reconduciendo los mismos hacia los objetivos que se había planteado inicialmente o por el contrario si los resultados le han llevado y arrastrado a provocar errores que inicialmente quizás no hubiera provocado.
- ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD. Los problemas estarán clasificados en dos bloques: asequibles para todos y difíciles. Analizar según esta clasificación previa a juicio del profesor, cuales han sido los resultados de cada uno de los alumnos, efectuando comparativas del historial previo de cada uno.

h) ENTREVISTA INTERMEDIA

Antes de finalizar el curso y como continuación a la encuesta inicial, pretendemos ir corroborando los datos que obtuvimos entonces y otros nuevos que deseamos obtener para contestar a **todas las cuestiones de nuestra investigación**, una vez que el alumno ha superado todo el curso a falta de la evaluación del examen final.

i) ENCUESTA FINAL

Una vez terminada la exposición de las clases, el último día pasaremos a los alumnos una encuesta escrita en la que se les pide una pequeña evaluación del curso antes del examen final.

j) ENTREVISTA FINAL DE VERIFICACIÓN

Una vez realizado el examen FINAL y una vez corregidos los exámenes, pretendemos nuevamente verificar con los alumnos, nuevamente **TODAS LAS CUESTIONES** de nuestra investigación, teniendo en cuenta que ya han sido evaluados nuevamente.

k) ENCUESTA REALIZADA AL OBSERVADOR CUALIFICADO

Una vez terminada la exposición de las clases, el último día pasaremos al observador cualificado una encuesta escrita en la que se les solicitará información relacionada con **TODAS LAS CUESTIONES** de nuestra investigación.

Con el análisis que hemos realizado de las estrategias de recogida de datos propuestas, podemos decir que las cuestiones de la investigación planteadas de forma inicial se pueden ir contestando de acuerdo a las siguientes herramientas y estrategias de datos:

1. DERIVE COMO SISTEMA DE NOTACIÓN INTERMEDIO

- Entrevista inicial
- Problemas de capítulo
- Cuestiones teóricas
- Tutorías por correo electrónico
- Problemas examen final
- Entrevista intermedia
- Entrevista final de verificación
- Encuesta realizada al observador cualificado

2. GRADO DE INTERACTIVIDAD ALUMNO-PROFESOR-MEDIO

- Entrevista inicial
- Diario de campo
- Entrevista intermedia
- Entrevista final de verificación
- Encuesta realizada al observador cualificado

3. PROTAGONISMO Y AUTOCREACIÓN

- Entrevista inicial
- Diario de campo
- Ejercicios de capítulo
- Problemas de capítulo
- Problemas examen final
- Entrevista intermedia
- Entrevista final de verificación
- Encuesta realizada al observador cualificado

4. EVITAR EL USO DEL ORDENADOR PARA RUTINAS ESENCIALES

- Ejercicios de capítulo
- Problemas de capítulo
- Cuestiones teóricas
- Cuestiones teóricas examen final
- Entrevista intermedia
- Entrevista final de verificación
- Encuesta realizada al observador cualificado

5. PRESCINDIR DEL ESFUERZO RUTINARIO

- Problemas de capítulo
- Problemas examen final
- Entrevista intermedia
- Entrevista final de verificación
- Encuesta realizada al observador cualificado

6. EL ORDENADOR COMO HERRAMIENTA DE EXPERIMENTACIÓN MATEMÁTICA

- Entrevista inicial
- Problemas de capítulo

- Tutorías por correo electrónico
- Problemas de examen final
- Entrevista intermedia
- Entrevista final de verificación
- Encuesta realizada al observador cualificado

7. ¿FAVORECE EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO?

- Entrevista inicial
- Problemas de capítulo
- Cuestiones teóricas
- Entrevista intermedia
- Entrevista final de verificación
- Encuesta realizada al observador cualificado

8. ¿FAVORECE EL DESARROLLO DE ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS?

- Problemas de capítulo
- Problemas de examen final
- Entrevista intermedia
- Entrevista final de verificación
- Encuesta realizada al observador cualificado

9. APRENDER MATEMÁTICAS CON DERIVE ¿GENERA BARRERAS ADICIONALES ?

- Encuesta inicial
- Entrevista inicial
- Diario de campo
- Ejercicios de capítulo
- Problemas de capítulo
- Tutorías por correo electrónico
- Cuestiones teóricas examen final
- Problemas examen final
- Entrevista intermedia
- Entrevista final de verificación
- Encuesta realizada al observador cualificado

10. ¿GENERA AUTONOMÍA COGNITIVA?

- Diario de campo
- Problemas de capítulo
- Cuestiones teóricas
- Tutorías por correo electrónico
- Cuestiones teóricas examen final
- Problemas examen final
- Entrevista intermedia
- Entrevista final de verificación
- Encuesta realizada al observador cualificado

11. ¿FAVORECE RELACIÓN DIALÉCTICA ENTRE USUARIOS?

- Entrevista inicial
- Diario de campo
- Tutorías por correo electrónico
- Entrevista intermedia
- Entrevista final de verificación
- Encuesta realizada al observador cualificado

12. ¿FAVORECE EL APRENDIZAJE COLABORATIVO?

- Entrevista inicial
- Diario de campo
- Entrevista intermedia
- Entrevista final de verificación
- Encuesta realizada al observador cualificado

13. ¿FAVORECE UNA ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD?

- Entrevista inicial
- Diario de campo
- Ejercicios de capítulo
- Problemas de capítulo
- Problemas examen final
- Entrevista intermedia
- Entrevista final de verificación
- Encuesta realizada al observador cualificado

14. **¿CUÁL ES EL GRADO DE MOTIVACIÓN HACIA LAS MATEMÁTICAS SUSCITADO POR DERIVE?**

    - Encuesta inicial
    - Entrevista inicial
    - Diario de campo
    - Problemas de capítulo
    - Entrevista intermedia
    - Entrevista final de verificación
    - Encuesta realizada al observador cualificado.

CAPÍTULO IV:
RECOGIDA DE DATOS.

En este capítulo describiremos los datos obtenidos con las diferentes herramientas de recogida de datos que expusimos en el capítulo III. Se trata por tanto de un capítulo meramente descriptivo, cuyo único objetivo es mostrar los resultados que se han ido obteniendo en los diferentes momentos de la investigación. Estas descripciones son por tanto resúmenes de las pruebas recogidas, que ilustran y sirven de base para el análisis que efectuamos en el siguiente capítulo siguiente. Efectuamos por tanto una descripción exhaustiva de los datos que se han ido obteniendo en las diferentes herramientas de recogida de datos.

IV.1. Descripción de los datos obtenidos en la ENCUESTA INICIAL.

Como hemos comentado en capítulos anteriores la ENCUESTA INICIAL (el modelo de encuesta así como los resultados de esta prueba se pueden encontrar en el ANEXO V) ha servido para :

- seleccionar a los alumnos que formarían parte de la investigación educativa en el SUBGRUPO A.
- y para obtener datos generales de los alumnos en varios aspectos: sus conocimientos de informática e internet, su historial académico, la actitud ante las Matemáticas.

Como inicialmente se desconocía el grado de interés que podría suscitar la metodología que propusimos para el SUBGRUPO A (con DERIVE) y además el número de plazas para este subgrupo era limitado (36 plazas) se plantearon previamente varias condiciones para la elección del subgrupo:

1. La primera de ellas fue el horario, ya que este grupo experimental (subgrupo A) tendría clases los Lunes y Jueves de 14:30 a 16:30 en el Aula de Informática, mientras que el subgrupo B, tendría clase los Lunes y Jueves de 16:30 a 18:30 en el aula habitual.
2. La segunda condición fue que los alumnos estuviesen matriculados por primera vez en la asignatura.
3. La tercera condición que los alumnos tuviesen unos conocimientos mínimos de Windows, al menos a nivel de usuario.
4. La última condición fue que los alumnos tuvieran ciertos conocimientos de Internet, en particular el manejo de un navegador y de un programa de correo electrónico.

La encuesta se realizó sobre una muestra de 78 alumnos (los alumnos que asistieron el primer día de clase), de los cuales

16 alumnos eligieron el SUBGRUPO A y

62 alumnos eligieron el SUBGRUPO B.

Esta circunstancia nos obligó a eliminar cualquier criterio de selección para el SUBGRUPO A dado que el número de solicitudes, de forma sorprendente, fue inferior al número de plazas ofertadas. Por tanto podemos decir que la elección ha sido totalmente libre, no ha existido ningún tipo de criterio selectivo salvo el HORARIO; motivo por el cual 20 alumnos no eligieron este subgrupo, que por otro lado, aunque hubieran elegido el subgrupo A tampoco hubiera sido necesario el criterio de selección pues en ningún caso se superaba el número de plazas ofertado.

Los resultados de la encuesta se resumieron en dos cuadros, uno para el SUBGRUPO A y otro para los alumnos que eligieron el SUBGRUPO B, tal como se muestra a continuación

RESUMEN DE OBSERVACIONES DE LA ENCUESTA INICIAL

	SUBGRUPO A			SUBGRUPO B		
	Número: Frecuencia	Porcentaje sobre los que eligen subgrupo A	Porcentaje sobre el total de alumnos	Número: Frecuencia	Porcentaje sobre los que eligen subgrupo B	Porcentaje sobre el total de alumnos
DATOS GENERALES						
Número de alumnos	**16**	100 %	20,51 %	**62**	100,00 %	79,49 %
Alumnos que repiten la asignatura	2	12,5 %	2,56 %	6	9,68 %	7,69 %
Alumnos que cursan la asignatura por primera vez	14	87,5 %	17,95 %	56	90,32 %	71,79 %
Mujeres que eligen subgrupo A	4	25 %	5,13 %	32	51,61 %	41,03 %
Hombres que eligen subgrupo A	12	75 %	15,38 %	30	48,39 %	38,46 %
CONOCIMIENTOS EN INFORMÁTICA E INTERNET:						
Alumnos que manejan windows	16	100 %	20,51 %	42	67,74 %	53,85 %
Alumnos que manejan Navegadores	16	100 %	20,51 %	23	37,10 %	29,49 %
Alumnos que usan correo electrónico	14	87,5 %	17,95 %	26	41,94 %	33,33 %
Alumnos que tienen cuenta de correo electónico	15	93,75 %	19,23 %	41	66,13 %	52,56 %

ACTITUD ANTE LAS MATEMÁTICAS	Número	Porcentaje sobre subg.A	Porcentaje sobre total	Número	Porcentaje sobre subg.B	Porcentaje sobre total
Les gusta por algún motivo	13	81,25 %	16,67 %	56	90,32 %	71,79 %
No les gusta por algún motivo	3	18,75 %	3,85 %	6	9,68 %	7,69 %
Motivos por los que gustan las Matemáticas:						
* Herramienta para el futuro, necesarias para carrera	4	25 %	5,13 %			
* Siempre me han gustado y me parecen prácticas	2	12,5 %	2,56 %			
* Son la ciencia que subyace a la creación nada se concibe sin ellas	1	6,25 %	1,28 %			
* El conocimiento analítico geométrico es fundamental	1	6,25 %	1,28 %			
* Interesantes te ayudan a pensar y razonar	3	18,75 %	3,85 %			
* Interés general por las ciencias	1	6,25 %	1,28 %			
* Son aplicables a otros estudios				4	6,45 %	5,13 %
* Son entretenidas y útiles				3	4,84 %	3,85 %
* Son necesarias para estudio, importantes carrera				8	12,90 %	10,26 %
* Me gustan, son interesantes				8	12,90 %	10,26 %
* Son esenciales para el progreso				1	1,61 %	1,28 %
* Siempre he preferido los números				1	1,61 %	1,28 %
* Por su dificultad y capacidad de abstracción				1	1,61 %	1,28 %
* Me gustan sirven para relajarse				1	1,61 %	1,28 %
* No dan motivos				23	37,10 %	29,49 %

MOTIVOS DE LA ELECCIÓN DEL SUBGRUPO A	Número	Porcentaje sobre subg.A	Porcentaje sobre total	Número	Porcentaje sobre subg.B	Porcentaje sobre total
* Probar una nueva metodología, nueva forma de aprender matemáticas	5	31,25 %	6,41 %			
* Me gustan la informática unida a las matemáticas	3	18,75 %	3,85 %			
* Me gusta trabajar con ordenadores	2	12,5 %	2,56 %			
* Me parece ameno, educativo e interesante	2	12,5 %	2,56 %			
* Se supone que tratará problemas más reales	1	6,25 %	1,28 %			
MOTIVOS DE LA ELECCIÓN DEL SUBGRUPO B						
* Por el horario				20	32,26 %	25,64 %
* Por el horario y por no dominar el ordenador				10	16,13 %	12,82 %
* Por el horario y por no conocer DERIVE				3	4,84 %	3,85 %
* Problemas con los ordenadores, no saben internet o windows				7	11,29 %	8,97 %
* Prefiere metodología tradicional				7	11,29 %	8,97 %
* No me gustan los ordenadores				2	3,23 %	2,56 %
* No me convence el método A				1	1,61 %	1,28 %
* Puede ser complicado estudiar con ordenador				2	3,23 %	2,56 %
* No contestan				9	14,52 %	11,54 %

HISTORIAL ACADÉMICO DE ESTOS ALUMNOS	Número	Subgrupo A	Total	Número	Subgrupo B	Total
Acceso a la Universidad por Selectividad	16	100 %	20,51 %	57	91,94 %	73,08 %
Acceso a la Universidad por PAU		0 %	0,00 %	2	3,23 %	2,56 %
Acceso a la Universidad por Traslado		0 %	0,00 %	3	4,84 %	3,85 %
Procedentes del COU	13	81,25 %	16,67 %	43	69,35 %	55,13 %
Procedente del Bachillerato LOGSE	3	18,75 %	3,85 %	12	19,35 %	15,38 %
Procedentes de OTROS estudios	0	0 %	0,00 %	7	11,29 %	8,97 %
Calificación media de acceso	6,73			6,93		
Nota Media en Matemáticas últimos años	6,96			6,69		

A continuación vamos a realizar un pequeño estudio de las características de cada uno de los subgrupos que se han formado.

Resumen de datos del SUBGRUPO A.

Los alumnos que eligieron el subgrupo A fueron un total de 16, lo que supone un 20,5% respecto al total de alumnos que realizaron la encuesta. Un porcentaje realmente sorprendente, dado que se trataba de una experiencia educativa que inicialmente parecía ofrecer elementos atractivos a los alumnos.

De estos alumnos 14 cursaban la asignatura por primera vez y 2 eran alumnos repetidores, y por tanto conocedores de la metodología tradicional. Por otro lado el porcentaje de mujeres respecto al de hombre es claramente de 1 a 3 , de tal forma que de los alumnos que eligieron esta metodología fue de un 25% de mujeres y un 75 % de hombres, es decir que el grupo estaba formado por 12 alumnos y 4 alumnas, dato que puede resultar significativo si tenemos en cuenta que el porcentaje de mujeres respecto al grupo total es del 46 %.

En cuanto a los conocimientos en informática se puede afirmar que todos tienen conocimientos en Windows a nivel de usuario, manejan Navegadores y correo electrónico.

El historial académico general de estos alumnos es el siguiente: la forma de acceso a la universidad ha sido a través de la selectividad (100%) de ellos 13 han estudiado COU y 3 han realizado el Bachillerato LOGSE. La nota media de acceso de todos ellos ha sido de 6,73 y la nota media en Matemáticas en los últimos años de 6,96. Se trata por tanto de un grupo normal en cuanto a las calificaciones se refiere.

Uno de los elementos que nos resultó muy importante fue la actitud hacia las Matemáticas. De los alumnos que eligieron este subgrupo, 13 (un 81,25%) afirmaron en sus contestaciones que les gustaban las Matemáticas. Los motivos que dieron fueron variados: como herramienta para el futuro, necesaria para la carrera (25%), porque es una asignatura práctica (12%), porque las Matemáticas ayudan a pensar y razonar (18,7%) y por otros motivos más específicos (3%). Por el contrario hubo 3 alumnos que dijeron claramente que no les gustaban las Matemáticas (18%).

Uno de los bloques de preguntas más importantes fue el relacionado con los motivos de elección del subgrupo. Las respuestas se agruparon de cinco motivos fundamentales:

- por probar una metodología nueva, y una nueva forma de aprender matemáticas, esta respuesta la dieron 5 alumnos (31,25%)
- porque *"me gusta mucho la informática, y resulta interesante usar un programa en matemáticas"* , respuesta que dieron 3 alumnos (18,75%)
- porque *"me gustan la informática unida a las matemáticas"* , respuesta formulada por 2 alumnos (12,5%)

- porque *"me gusta trabajar con ordenadores"* , respuesta dada por 2 alumnos (12,5%)
- porque *"me parece ameno, educativo e interesante"*, respuesta dada por 1 alumno (6,25%)
- porque *"se supone que tratará problema más reales"* , 1 alumno (6,25%).

Todas estas argumentaciones de elección, obedecen a un interés y una motivación inicial bastante importante por parte de los alumnos. Las expectativas de la novedad unidas al mundo informático puede decirse que han sido las que han generado el interés de los alumnos por su elección de subgrupo.

Resumen de datos para SUBGRUPO B.

Los alumnos que eligieron este subgrupo fueron 62 es decir un 79,5% del total de alumnos encuestados. Esta cifra resultó sorprendente, y la pregunta que surge de forma inmediata es la siguiente ¿cómo es posible que la oferta de una metodología nueva basada en los ordenadores, presente tan poco interés?. Quizás sobre este grupo de elección habría que eliminar a aquellos alumnos que no eligieron el subgrupo por problemas de horario (20 alumnos) lo cual significaría que potencialmente hubieran sido 42 los alumnos que habrían dicho un no rotundo al la metodología es decir un 53%, porcentaje un poco menos escandaloso que el anterior.

De estos 62 alumnos 56 cursaban la asignatura por primera vez y 6 eran alumnos repetidores. Por otro lado el porcentaje de mujeres del grupo es de un 52% sobre un 48% de hombres, es decir 32 mujeres y 30 hombres.

En cuanto a los conocimientos en informática los alumnos que manejan windows (42 alumnos) representaban un 67% del grupo, los alumnos que manejan navegadores (23 alumnos) un 37% del grupo y los alumnos que manejan correo electrónico (26 alumnos) un 42 % del grupo. Parece que aunque no se impusieron criterios de selección a nivel de conocimientos informáticos para formar parte del subgrupo A, los propios alumnos fueron los que se autoseleccionaron, prueba de ello es que las respuestas que motivan la elección del subgrupo B y no el subgrupo A se fundamentaron en no dominar los ordenadores, o tener problemas con los ordenadores.

El historial académico de estos alumnos hay que señalar que en su mayoría proceden del COU (70,5%) aunque existen algunos alumnos que han realizado Bachillerato LOGSE (19,7%) y un porcentaje mínimo proceden de otros estudios (9,84%). La calificación media de acceso ha sido de un 6,93, y en cuanto ala nota media en matemáticas los últimos años es de un 6,7. Se trata de un grupo medio.

En cuanto los motivos de elección de este subgrupo se podría englobar en los siguientes bloques:

- porque *"no me cuadra el horario"* (20 alumnos) representa un 32,3% de este grupo
- porque *"el horario no me va y no domino los ordenadores"* (10 alumnos) que representa un 16,1% sobre el grupo.
- Porque *"el horario no me viene bien y tengo problemas con los ordenadores"* (3 alumnos) un 4,84% del grupo.
- Porque *"tengo problemas con los ordenadores y no se manejar internet o windows"* (7 alumnos) un 11,3% sobre el grupo.
- Porque *"prefiero la metodología tradicional"* (7 alumnos) un 11,3%.
- Porque *"no me gustan los ordenadores"* (2 alumnos) un 3,23 %.
- Porque *"no me convence el método del subgrupo A"* (1 alumno) un 1,61%
- Porque *"puede ser complicado estudiar con ordenador"* (2 alumnos) un 3,25%
- No contestaron el motivo (9 alumnos) un 14,5%.

CONCLUSIONES GENERALES DE LA ENCUESTA INICIAL:

De los datos que hemos comentado de ambos subgrupos podemos extraer varias conclusiones:

- Respecto a los **MOTIVOS POR LOS CUALES SE ELIGE UN SUBGRUPO U OTRO**, volvemos a recalcar el pequeño número de alumnos que eligieron el subgrupo (16 alumnos, 20% del total). Si tenemos en cuenta que estos alumnos conocían o dominaban los ordenadores, y añadimos que un número elevado de alumnos tenían problemas con el horario (20 alumnos, un 23% del total) se puede decir que alrededor de un 43% de los alumnos hubiesen elegido este subgrupo, dato que en todo caso no era esperable, ya que se pensaba que existirían problemas en la selección de alumnos, motivo por el cual se plantearon previamente los criterios de selección. Por otro lado observando que la mayor parte de los alumnos que no eligieron este subgrupo alegaron que tenían o bien problemas con el ordenador, o que no les gustaban los ordenadores, podemos afirmar que el motivo fundamental por el cual se realiza la elección del subgrupo experimental es **por el manejo, a nivel de usuario, de windows y en general de los ordenadores**.

- Si analizamos la **ACTITUD DE LOS ALUMNOS FRENTE A LAS MATEMÁTICAS** observamos que en el subgrupo A, el porcentaje de alumnos a los que no les gustan las matemáticas es del 18%, y en el subgrupo B del 9,8% casi la mitad, sin embargo podría llevarnos a decir que puede que los alumnos a los que no les gusta las Matemáticas hayan encontrado más atractiva esta metodología.

- Resulta significativo que el **porcentaje de alumnas** que han elegido el subgrupo A respecto del total es de un 5% mientras que las que eligen el subgrupo B respecto del total es de un 41%; y en los alumnos los que eligen el subgrupo A representan un 15% y los que eligen el subgrupo B un 38%, aunque el total de alumnos en el grupo es de un 54% y el de alumnas un 46%. Esto parece indicar que **los alumnos tienen una tendencia mayor que las alumnas para seleccionar una nueva metodología basada en los ordenadores**. Esta tendencia se hace significativa cuando comparamos la proporción de alumnos de hombre y mujeres en cada subgrupo, ya que en el subgrupo A hay un 25% de mujeres frente a un 75% de hombres; mientras que en el subgrupo B hay un 52% de mujeres y un 46% de hombre.

IV.2. Descripción de los datos obtenidos en la entrevista inicial.

Una vez iniciado el curso experimental, y después de haber obtenido unos primeros datos generales del alumnado, consideramos necesario (tal como comentamos en el apartado III.6.2) realizar una entrevista inicial con los alumnos que formaban parte de este SUBGRUPO A, con el fin de obtener más datos relacionados con varios aspectos que consideramos fundamentales para nuestra investigación, una vez desarrolladas algunas clases con la nueva estrategia didáctica para

- obtener información relacionada con el grado de motivación inicial de los alumnos respecto al curso, en especial sobre la ACTITUD INICIAL ante las Matemáticas, la motivación que suscita la estrategia y en especial el programa DERIVE en el estudio de las Matemáticas,
- analizar si DERIVE ha sido inicialmente complejo en su aprendizaje,
- determinar si se obtienen indicios de un uso EXPERIMENTAL del programa,
- analizar si DERIVE ayuda a visualizar los diferentes conceptos,
- observar las características del tipo de aprendizaje que van adquiriendo los alumnos de cara a determinar las significatividad del mismo
- observar si la estrategia favorece el protagonismo y la autocreación
- analizar el tipo de relaciones de comuniación que se empiezan a dar entre los alumnos
- observar si existen aprendizajes colaborativos,
- determinar si se tratan de forma adecuada los diversos niveles de aprendizaje que pueden darse en el aula, en parte para determinar qué alumnos están más aventajados y cuales más retrasados.

Todos estos elementos se concretaron en un esquema de entrevista inicial, modelo de entrevista inicial que se puede consultar en el ANEXO IX.

La entrevista se realizó a 11 de los 16 alumnos que formaban parte del grupo experimental, entre el 28 de Marzo y el 11 de Abril de 2000, es decir, cuando se llevaba aproximadamente un mes y medio de clase. Se realizó sólo a 11 de los 16 alumnos por diferentes motivos: uno de los alumnos se dio de baja por problemas familiares y con otros 4 alumnos resultó imposible concertar una cita por incompatibilidad de horarios. A pesar de este primer problema inicial, los datos obtenidos nos permitieron ir estudiando cada uno de los casos de forma particular así como ir obteniendo datos más generalizables a todo el grupo experimental. Las 11 entrevistas se realizaron en el despacho III-206 y duraron una media de una hora cada una. Todas ellas fueron grabadas en audio, y posteriormente se transcribieron para facilitar el análisis de datos. En el ANEXO IX se puede consultar a modo de ejemplo una de estas transcripciones, aunque en el CD adjunto a esta tesis se puede tener acceso a todas las entrevistas iniciales realizadas.

Las primeras impresiones que hemos obtenido de estas entrevistas en cada uno de los casos respecto de algunas de las cuestiones de la investigación son las siguientes:

Caso 1. Antonio Cuellar (entrevista realizada el 4 de abril de 2000)

DATOS GENERALES: Se trata de un alumno repetidor que se ha matriculado muchas veces en esta asignatura pero no se ha presentado. Hizo COU, accede a la Universidad por Selectividad. Le gustan en general las Matemáticas aunque tiene ciertos problemas con el álgebra lineal, en concreto con los vectores. Tiene cierta repulsa inicial al trabajo en grupo.

CUESTIÓN 1: El alumno considera que el utilizar DERIVE le ha obligado a intentar ver las cosas de forma diferente a como se hace con lápiz y papel y estructurar el pensamiento en base a la forma de introducir los datos con DERIVE. Por otro lado parece que el alumno no ha tenido problemas en trasladar los procesos que realizaba habitualmente con lápiz y papel a DERIVE. También es interesante señalar que al enfrentarse a los problemas con DERIVE se fija más en los pasos que tiene que dar, mucho más que cuando lo hacía con lápiz y papel . Los cual nos indica que para este caso parece que DERIVE sí está actuando como sistema de notación intermedio.

CUESTIÓN 2: La interactividad que tiene el alumno con el profesor es muy superior a las clases habituales primero por el número de alumnos que es reducido y segundo porque la estrategia didáctica facilita una mayor interación. En cuanto a la interactividad entre alumnos el alumno ha realizado un trabajo en equipo con su compañero de pupitre Jorge, y se ha reducido a él. Respecto a la interactividad con DERIVE, el alumno considera que es un programa rápido ofrece respuestas rápidas.

CUESTIÓN 3: Según el alumno el ordenador le ha obligado a estar controlando la situación de aprendizaje constantemente, y DERIVE facilita este protagonismo porque ofrece la posibilidad de probar, hacer cálculos. En cuanto a la capacidad creativa, el alumno considera que la estrategia estimula al alumno para que cree o construya caminos de solución de ejercicios y de problemas o de las cuestiones de investigación que se iban planteando.

CUESTIÓN 9: Aunque el alumno parece tener algunos problemas al introducir los datos con el comando autor, sin embargo considera que es un programa sencillo de aprendizaje.

CUESTIÓN 11: Ha tenido relación fundamentalmente con su compañero de pupitre.

CUESTIÓN 12: Aunque inicialmente no le gustaba el trabajo en grupo, la experiencia con esta didáctica le ha permitido adquirir numerosas experiencias de colaboración que le han ayudado a entender conceptos.

Caso 2: J. Revuelta: entrevista realizada el 4 de abril de 2000)

DATOS GENERALES: Alumno que procede del Bachillerato LOGSE¸ con nota de acceso de 8,4 y una calificación alta en Matemáticas los últimos años. Le gustan bastante las matemáticas, y también los ordenadores. Le gusta sobre todo el trabajo individual, no le atrae el trabajo en grupo.

CUESTIÓN 2: La relación de comunicación de este se ha centrado a su compañero de pupitre, con el que ha tenido una interactividad muy grande.

CUESTIÓN 3: Le gusta el tipo de didáctica empleada pues le hace pensar, y le obliga a ir construyendo con ayuda del ordenador, pues el ordenador por sí mismo no hace nada. Lo cual indica que tiene cierto grado de protagonismo, además el alumno afirma que afirma que realiza ejercicios en casa. Se observa que el programa le motiva y estimula para crear soluciones.

CUESTIÓN 7: Según el alumno el tipo de aprendizaje es constructivo, obliga al alumno a ir pensando sobre lo que va haciendo descubriendo con ayuda del ordenador los contenidos. Hay indicios para afirmar que sus aprendizajes son significativos.

CUESTIÓN 8: El programa le ha facilitado ensayar varios caminos para la resolución de problemas y cuestiones que se iban planteando.

CUESTIÓN 9: Según el alumno DERIVE es un programa bastante sencillo y fácil de manejar.

CUESTIÓN 10: El alumno considera que el tipo de exposición le obliga a pensar y estimula su autonomía cognitiva, el uso del ordenador le obliga a entender perfectamente lo que está haciendo, aunque considera que este tipo de trabajo le obliga a trabajar más fuera del aula.

CUESTIÓN 11: El alumno ha limitado su relación de clase a Antonio su compañero de pupitre.

CUESTIÓN 12: El tipo de trabajo en grupo que se propone en esta estrategia didáctica le ha facilitado la colaboración con su compañero de pupitre para realizar ejercicios y desarrollar los contenidos de clase.

CUESTIÓN 14: Al alumno se le han pasado las clases rápidamente, se ha encontrado muy motivado.

Caso 3: S. Rosado: entrevista realizado el 29 de marzo de 2000.

DATOS GENERALES: Alumno matriculado por primera vez en Matemáticas II. Hizo EGB, BUP y COU. Tiene calificaciones buenas en matemáticas. La nota de acceso fue de 6,52. Y le gustan las Matemáticas.

CUESTIÓN 2: Le ha gustado la posibilidad de trabajar de forma colaborativa con los compañeros del entorno, en ese sentido esta interactividad es positiva, sobre todo con Juan Pa. Considera que al haber pocos alumnos en clase la interactividad con el profesor ha sido mejor.

CUESTIÓN 3: Considera que la estrategia didáctica fuerza al alumno a pensar, considera importante el hecho de adquirir protagonismo en la resolución de los problemas, además cree que esto desarrolla la capacidad creativa del alumno.

CUESTIÓN 4: Según el alumno DERIVE facilita al alumno la comprensión de contenidos y además de centrar al alumno en los contenidos más esenciales.

CUESTIÓN 5: Al manejar el ordenador se consigue que los cálculos pasen a un segundo plano ayudando a mejorar el conocimiento y a profundizar en los conceptos, por lo que efectivamente, el alumno considera que DERIVE permite eliminar el esfuerzo rutinario.

CUESTIÓN 6: El uso de DERIVE le permite observar las propiedades y experimentar más con las matemáticas.

CUESTIÓN 7: La exposición de contenidos a juicio del alumno es la mejor, pues se van introduciendo los contenidos paso a paso, obligando al alumno a hacerlo con el ordenador, de tal forma que el alumno se pude centrar en el proceso más que en la operativa que es cosa del programa.

CUESTIÓN 8: Según el alumno, los problemas son difíciles, hay que pensar mucho.

CUESTIÓN 9: El alumno considera que DERIVE es un programa sencillo de aprender y de manejar, que no dificulta la comprensión de contenidos.

CUESTIÓN 12: El alumno considera que el trabajo en grupo ha sido positivo, el tener una persona al lado le ha estimulado para realizar los ejercicios, también el ordenador le ha estimulado en cierta medida.

CUESTIÓN 13: El alumno no se ha aburrido en clase en general ni se ha encontrado perdido y en general ha tenido la sensación de haber aprendido siempre algo. Indica que la estrategia didáctica ha considerado adecuadamente su nivel de conocimientos.

CUESTIÓN 14: El alumno se ha encontrado motivado en las clases, no se ha aburrido en las clases se le han pasado volando.

Caso 4: D. Rubiano: no hizo entrevista inicial.

Caso 5: J.P. Trigo: entrevista inicial realizada el 28 de marzo.

DATOS GENERALES: Alumno matriculado por primera vez en la asignatura Matemáticas II. Hizo EGB; BUP y Bachillerato LOGSE. Saca un 6,25 en Selectividad. Aunque le gustan las matemáticas, sin embargo en los últimos años siempre las ha llevado raspando.

CUESTIÓN 1: El alumno considera que tiene un problema en la visualización, no visualiza los conceptos con DERIVE. No está acostumbrado a estudiar con ordenador, prefiere el método de lápiz y papel. Por eso parece que DERIVE no ha actuado como sistema de notación intermedio.

CUESTIÓN 2.: Considera que el profesor va un poco rápido en la explicación de la asignatura, a veces está haciendo una práctica y rápidamente cambia, aunque su relación con el profesor es buena. Le gusta el trabajo en grupo que de hecho le está ayudando, tiene interactividad con los compañeros.

CUESTIÓN 3: El alumno manipula los contenidos a veces si saber lo que manipula, por lo que da la impresión que no tiene protagonismo en su proceso de aprendizaje tiene cierta dependencia del programa. Por supuesto tampoco existe autocreación.

CUESTIÓN 4: Con el ordenador no visualiza los conceptos, no los comprende, por lo que no entiende suficientemente los contenidos esenciales. Sobre todo ha tenido problemas con el tema de espacios vectoriales, no ha llegado a visualizar los vectores. Cree que el trabajo con el ordenador es muy mecánico y que no le ha permitido de momento entender bien los contenidos.

CUESTIÓN 6: Le gusta realizar experimentos con DERIVE, el poder comprobar por sí mismo lo que va explicando el profesor.

CUESTIÓN 7: Parece que el aprendizaje que está adquiriendo el alumno es más que nada memorístico, tiene ciertos problemas con DERIVE, a nivel de comprensión de contenidos no de manipulación. Quizás el problema es que la estrategia didáctica le obliga a pensar y a construir el conocimiento, y no se lo dan todo hecho.

CUESTIÓN 9: Con el ordenador el alumno afirma no ser capaz de visualizar los conceptos, por lo que da la impresión de que DERIVE se estás convirtiendo en una barrera adicional para este caso.

CUESTIÓN 10: El alumno parece ser más un usuario de DERIVE, dependiente del programa. No ha adquirido autonomía cognitiva suficiente para intentar por sí mismo investigaciones. El alumno sabe manipularlo pero no sabe realmente qué manipula.

CUESTIÓN 11: La relación dialéctica con sus compañeros está siendo muy positiva, pues le sirve de apoyo para el aprendizaje, aunque cree que este tipo de trabajo le puede generar cierta dependencia del compañero.

CUESTIÓN 12: El trabajo en grupo parece que puede generar aprendizajes colaborativos, de cooperación entre los compañeros.

CUESTIÓN 13: Este alumno parece ser uno de los que se encuentran en el nivel inferior del grupo, de hecho parece que va un poco a remolque, las clases le parece que van a un ritmo muy rápido y tarda tiempo en asimilar los procesos.

CUESTIÓN 14: No se ha aburrido en clase y aunque este tipo de estudio le resulta complejo, sin embargo se encuentra motivado, de hecho afirma estar satisfecho de la elección de subgrupo.

Caso 6: S. Santos: no hizo la entrevista inicial.

Caso 7: E. Sanz: no hizo la entrevista inicial.

Caso 8: A. Perpiñá: no hizo la entrevista inicial.

Caso 9: L. Tarno: entrevista realizada el 11 de abril de 2000

DATOS GENERALES: Se matricula por primera vez en la asignatura Matemáticas II. Hizo los estudios secundarios en el Liceo Francés. Empezó Agrónomos pero lo tuvo que abandonar no aprobó las asignaturas suficientes entre ellas las Matemáticas. No tiene especial afición por los ordenadores.

CUESTIÓN 1: Según el alumno el paso del lenguaje escrito al del ordenador requiere cierta aclimatación pero no resulta complicada, pero tiene que cambiar el estilo de lenguaje y adaptarse al utilizado por DERIVE. Inicialmente parece que puede ser más difícil este sistema de notación. De hecho afirma que no sabría decir si los procesos mentales de matemáticas DERIVE los favorece o no.

CUESTIÓN 2: Considera que el profesor complica un poco cosas que inicialmente son sencillas por el lenguaje que utiliza, no parece que exista una empatía inicial positiva hacia el profesor. Respecto a la interactividad con los alumnos, tiene especial relación con su compañera de pupitre Laura, considera que el ambiente de la clase es positivo.

CUESTIÓN 4: Considera que el álgebra lineal es fundamental, pero cree que DERIVE no está siendo fundamental para el aprendizaje de lo esencial, lo considera como un complemento, porque los conceptos ya los conocía de antes. Por otro lado afirma que no sabría si DERIVE favorece la abstracción.

CUESTIÓN 7: Considera que como los contenidos los conocía de antes, DERIVE no le aporta nada nuevo, no sabe si el aprendizaje es significativo.

CUESTIÓN 9: No es un programa complejo, solo requiere cierta costumbre.

CUESTIÓN 11: La relación dialéctica que hay en clase es muy buena, en parte por el reducido número de personas y también por el hecho de usar el ordenador que obliga a no perder el tiempo.

CUESTIÓN 12: Considera que estudiar en grupo es fundamental, y por eso cree que hasta ahora este tipo de dinámica es positiva para el aprendizaje.

CUESTIÓN 14: El hecho de usar el ordenador le motiva para estudiar las Matemáticas.

Caso 10: L. Rubio: entrevista realizada el 11 de abril de 2000.

DATOS GENERALES: Alumna matriculada por primera vez en la asignatura Matemáticas II. Hizo EGB; BUP y COU. Nota de Selectividad 6,88. La calificación media en Matemáticas es de Notable. Le gustan las matemáticas. Sin embargo está asustada en este curso porque el primer test teórico le ha salido mal, tiene miedos con DERIVE, aunque le gustan inicialmente los ordenadores, y de hecho estaba habituada a trabajar con ellos en el S.E.K.

CUESTION 1: Parece que inicialmente el programa DERIVE le oscurecía los conceptos por su sistema de notación, aunque luego estudiándolos de nuevo en casa parece entenderlos.

CUESTIÓN 3: Le gusta el tipo de aprendizaje por descubrimiento, al que estaba acostumbrado en el colegio S.E.K. por lo que parece que el protagonismo es una característica de esta estrategia.

CUESTIÓN 5. El programa DERIVE no es complicado aunque considera que hubiera sido mejor el de entorno WINDOWS.

CUESTIÓN 6: La alumna tiene una actitud positiva hacia la experimentación en matemáticas.

CUESTIÓN 7: Al acabar las clases tiene siempre la sensación de haber aprendido algo nuevo.

CUESTIÓN 8: Los problemas eran en general difíciles.

CUESTIÓN 9: El programa DERIVE no resulta un programa complejo, sus dificultades son sobre todo de manipulación.

CUESTIÓN 11: El ambiente del curso está siendo positivo, y además la relación dialéctica con los compañeros favorece elaprendizaje.

CUESTIÓN 12: El trabajo en grupo está favoreciendo la aparición de situaciones de colaboración entre los alumnos que potencian el aprendizaje.

CUESTIÓN 13: La alumna no se ha aburrido en las clases ni se ha encontrado perdida, y los ejemplos de investigación eran asequibles, lo cual indica que el nivel de la clase ha sido adecuado para sus conocimientos.

CUESTIÓN 14: El curso parece que está motivando, fundamentalmente porque las clases se le pasan rápido y porque el estudio de las matemáticas con DERIVE es interesante.

Caso 11: J.I.Gómez: entrevista realizada el 5 de abril de 2000.

DATOS GENERALES: Alumno matriculado en otras ocasiones en la asignatura Matemáticas II. Hizo EGB, BUP y COU. Lleva en la Universidad desde el año 1993 en que ingresó con 7,6 en la Selectividad. La calificación media en Matemáticas ha sido buena. Le gustan las Matemáticas y sobre todo los ordenadores.

CUESTIÓN 1: El programa DERIVE ha servido al alumno para visualizar algunos conceptos de aplicaciones lineales que no entendía

CUESTIÓN 2: La interactividad con los alumnos de clase se ha centrado con la pareja de clase, se siente mayor entre los alumnos, pero el ambiente generado por la didáctica ha sido bueno. Además el poder realizar los ejercicios de manera conjunta le ha ayudado a aprender el manejo del programa y a resolver algunas dudas que iban surgiendo. Respecto a la ineractividad con el profesor le parece positiva, muy cercano al alumno, la propia didáctica lo ofrece.

CUESTIÓN 4: El alumno considera que con DERIVE se comprenden mejor los principales contenidos de la asignatura, al menos lo que llevan, sobre todo porque facilita experimentar y manejar muchos ejemplos.

CUESTIÓN 5: Según el alumno el programa DERIVE no resulta complejo de estudiar lo cual permite eliminar rápidamente el cálculo rutinario, así se puede dedicar el 90% a las Matemáticas sin perder el tiempo en el cálculo.

CUESTIÓN 6: El alumno considera que el programa y la didáctica facilita la experimentación, facilita la realización de muchos ejercicios y no perder el tiempo en el cálculo rutinario, y centrarse en los procesos.

CUESTIÓN 7: El alumno cree que la teoría aunque se imparte de una manera menos estructurada y más intuitiva, resulta más fácil coger la teoría y ponerla en compartimentos. Además le ha facilitado entender conceptos de aplicaciones lineales que nunca entendió en años anteriores y ahora ha conseguido comprender. Le parece que la didáctica ha favorecido un aprendizaje significativo.

CUESTIÓN 9: Con DERIVE no se pierde nada de tiempo en su estudio es muy fácil de aprender y de manejar según el alumno.

CUESTIÓN 10: Según el alumno el programa le facilita tener cierta independencia a la hora de realizar ejercicios y ejemplos lo cual le potencia cierta autonomía.

CUESTIÓN 11: La didáctica del curso ayuda a que los alumnos se interrelacionen, ha hablado de un conocimiento compartido.

CUESTIÓN 12: El trabajo que se desarrolla en grupo aunque inicialmente no le resultaba atrayente por malas experiencias, sin embargo esta forma de trabajar le ha estimulado, le hecho de contrastar los datos con su pareja de pupitre le ha estimulado bastante, nuevamente ha hablado del conocimiento compartido, un aprendizaje colaborativo.

CUESTIÓN 13: Aunque intuye casi siempre las metas de los ejercicios y ejemplos que se proponen sin embargo no se encuentra aburrido en clase, le resulta muy atrayente la forma de presentar la asignatura esto le ha obligado a ir a clase, cosa que no hubiera hecho en el grupo tradicional. Sobre los problemas considera que hay varios niveles.

CUESTIÓN 14: A pesar de su interés inicial por las matemáticas, el poder utilizar el ordenador para aprender Matemáticas le parece muy motivador. Le ha gustado mucho la experimentación matemática que se hace con DERIVE.
Tiene totalmente claro que la elección de subgrupo ha sido positiva.

Caso 12: S. Rúa: no realizó la entrevista inicial.

DATOS GENERALES. Alumno matriculado por primera vez en Matemáticas II. Sus estudios anteriores fueron EGB, BUP y COU. Nota de acceso a la universidad 6,75 en Selectividad. La nota media en Matemáticas es de Sobresaliente. Le gustan las matemáticas y los ordenadores.

Caso 13: M. Verdú: entrevista inicial realizada el 3 de abril de 2000.

DATOS GENERALES: Alumna matriculada por primera vez en Matemáticas II. Hizo EGB, BUP y COU. La nota de acceso a la universidad es de 6,56. La calificación media en Matemáticas los últimos años Bien. Le gustan inicialmente las matemáticas. También le gustan los ordenadores.

CUESTIÓN 1: La alumna afirma entender los procesos que se exponen con DERIVE aunque inicialmente no tiene que repetirlos varias veces, puede tener alguna dificultad con la notación de DERIVE.

CUESITÓN 2: El ambiente generado en el curso es bueno, quizás porque hay poca gente. De hecho la interactividad con la gente es muy positiva. Tiene más comunicación con el profesor más cercana.

CUESTIÓN 4: Derive a juicio de la alumna está ayudando a comprender los contenidos esenciales del álgebra lineal. Considera que es muy útil, y la estrategia didáctica empleada muy positiva, se ven mejor las cosas.

CUESTIÓN 5. El programa DERIVE según la alumna es muy útil pues se ahorra todo el cálculo rutinario y se enfoca en lo realmente importante.

CUESTIÓN 6: La experimentación que se está llevando según la alumna es muy positiva, la posibilidad de investigar con DERIVE es muy positivo, el hecho de que no sea muy mecánico.

CUESTIÓN 7: La didáctica empleada es buena, según la alumna es mejor pensar antes sobre los resultados que no te los den todo hechos. Le motiva el hecho tener que descubrir y experimentar.

CUESTIÓN 8: El hecho de que existan problemas más difíciles a veces no la motivan pues no sabe por donde pillarlos.

CUESTIÓN 9: Según la alumna el programa es fácil de manejar, no encuentra dificultades en su manejo y aprendizaje.

CUESTIÓN 10: El hecho de poder manipular las cosas de forma autónoma es positivo para la alumna, pues así permite que cuando se plantean problemas un poco distintos no se sienta muy perdida.

CUESTIÓN 11: Le gusta mucho la relación con el profesor, pues le resuelve las dudas rápidamente, también la relación con los compañeros que es muy positiva.

CUESTIÓN 12: El trabajo en grupo le está estimulando para trabajar, porque se explican cosas mutuamente, comparan errores están obteniendo confianza para preguntar dudas, cosa que a veces con el profesor no se atreven, y además quedan entre compañeros para hacer problemas. Se observa colaboraciones en el aprendizaje.

CUESTIÓN 13: La dinámica del curso algunos días es un poco más rápida, pero en general no se ha aburrido en clase, solo algún día por cansancio no por la forma de presentar la asignatura. Lo que si nota es que de una sesión a otra se avanza bastante, no se puede faltar a clase.

CUESTIÓN 14: Las matemáticas la aburrían un poco en el cuatrimestre pasado, pero ahora no se aburre en clase, le gusta mucho la forma de presentar los contenidos y esto la motiva. Además afirma con rotundidad que elegiría el subgrupo A nuevamente.

Caso 14: J.Sanz: entrevista realizada el 3 de abril de 2000.

DATOS GENERALES: Alumna matriculada por primera vez en Matemáticas II. Hizo EGB, BUP y COU: Nota de Selectividad: 6,57. La calificación media en Matemáticas ha sido de Notable. No le gustan mucho las matemáticas pero sí los ordenadores.

CUESTIÓN 2: Le gusta el trabajo en grupo y de hecho el tipo de trabajo en grupo de clase le gusta le ayuda a entender. Se entiende muy bien con M.Verdú y con S.Rua. pero en general el ambiente de clase es muy bueno. La interactividad con el profesor es normal.

CUESTIÓN 3: Afirma que en la resolución de problemas encuentra que ha obtenido cierto protagonismo pero no mucho pues no los ha sabido hacer. Cree que tiene lagunas de conocimientos teóricos.

CUESTIÓN 4: No ve muy complicados los conceptos que se han impartido hasta ahora. Considera que DERIVE permite ver los contenidos fundamentales al menos inicialmente.

CUESTIÓN 6: NO le gusta mucho la experimentación prefiere que le expliquen primero como hacer las cosas y luego aplicarlas más que investigar, considera que así se pierde menos tiempo.

CUESTIÓN 7: A pesar de que no le gusta mucho la experimentación considera que está aprendiendo más que en Matemáticas I que no aprendió nada. No es muy propensa al aprendizaje por descubrimiento.

CUESTIÓN 8: Los problemas son un poco difíciles para esta alumna.

CUESTIÓN 9: La alumna considera que DERIVE es un programa fácil de manipular y ayuda a realizar los procesos.

CUESTIÓN 11: Tiene buena predisposición al trabajo en grupo, y de hecho prefiere este tipo de trabajo al trabajo individual. La estrategia que se ha planteado potencia este tipo de trabajo y la relación con los compañeros que de hecho ayuda. El ambiente de la clase considera que es positivo.

CUESTIÓN 12: Tiene actitud positiva hacia el trabajo en grupo, además la metodología seguida favorece las colaboraciones entre alumnos, que ayudan a entender los contenidos según la alumna. De hecho ha potenciado que los alumnos queden fuera de clase para realizar problemas y ejercicios.

CUESTIÓN 13: El ritmo de la clase considera que es normal, es una dinámica buena. aunque a veces resultan las clases largas pero por lo intensas que son. En algún momento afirma haberse aburrido.

CUESTIÓN 14: Le gusta trabajar con ordenadores. Le parece un curso entretenido, y el hecho de no tener que estar tomando apuntes señala que es muy importante. Se cansa el tener que estar haciendo siempre cosas de matemáticas.

Caso 15: Cristina Sevilla: se realizó la entrevista pero parte de ella se borró accidentalemente.

DATOS GENERALES: Tan solo podemos señalar algunos datos obtenidos de la entrevista inicial: Matriculada por primera vez en matemáticas II, hace EGB, BUP y COU. Nota de Selectividad 6,37. Y tiene una calificación media en Matemáticas de Bien. No le gustan mucho las matemáticas.

Caso 16: R. Laulhe: causó baja por enfermedad de un familiar.

No consideramos ningún dato.

Estas ideas generales que hemos señalado en cada uno de los casos respecto a las diferentes cuestiones de la investigación, serán analizadas en el siguiente capítulo extrayendo las citas textuales de las entrevistas que avalen las observaciones que se han formulado anteriormente y que junto a las de otras entrevistas permitirán convertirlas en características generalizadas de la estrategia didáctica.

IV.3. Descripción de los datos obtenidos del DIARIO DE CAMPO.

Las observaciones del profesor-investigador en el escenario de la investigación educativa son necesaria para establecer los aspectos más significativos que ha observado el investigador participante de cara a incluirlas como elemento de contraste con el resto de pruebas recogidas de entrevistas y pruebas objetivas. Para facilitar la recogida de observaciones se propuso un modelo o registro básico de observaciones que el investigador debía ir anotando al finalizar cada una de las sesiones del curso. El modelo de registro utilizado se puede consultar en el ANEXO X, y en él se pretendían recoger informaciones relacionadas con varios aspectos significativos:

- las circunstancias docentes del profesor: temas impartidos, tiempo empleado
- ambiente del curso, comodidad al impartir la clase
- importancia del GUIÓN de trabajo en la didáctica impartida,
- actitudes negativas y positivas que se han observado,
- observación sobre posibles alumnos retrasados o aventajados para la atención especial
- agrupamientos de los alumnos
- tipos de dudas que han planteado los alumnos
- dificultades que se han presentado sobre DERIVE
- observaciones acerca de la autonomía cognitiva
- alumnos que hayan faltado, registro de firmas
- otras observaciones.

Todos estos aspectos fueron anotados en cada sesión construyendo lo que denominamos el diario de campo. Aunque en el ANEXO X podemos observar a modo de ejemplo las anotaciones recogidas en una de las sesiones, en el CD adjunto se pueden consultar la totalidad de notas de campo recogidas en cada una de las sesiones en las que tuvo lugar el curso.

Para tratar este conjunto de datos realizamos un resumen de datos que exponemos a continuación que ha servido para realizar posteriormente el análisis que se presenta en el capítulo V.

RESUMEN DE ASISTENCIAS DE ALUMNOS A CLASES:

Alumno	Número clases que ha asistido	Número clases que ha faltado	Fechas de los días que ha faltado
Caso 1: A. Cuéllar	27	1	3-may
Caso 2: J. Revuelto	26	2	28 Feb, 2 Mar
Caso 3: S. Rosado	24	4	21 Mar, 11 Abr, 8 y 9 May
Caso 4: D. Rubiano	19	9	28-Feb, 16-Mar, 23-Mar, 27-Mar, 11 Ab, 13 Ab, 25 Ab, 25 May, 29 May
Caso 5: J.P. Trigo	26	2	3, 9 Mayo
Caso 6: S. Santos	28	0	---
Caso 7: E. Sanz	28	0	---
Caso 8: A. Perpiñá	28	0	---
Caso 9: L. Tarno	23	5	15 Marzo, 13 Abr; 3,9, 30 Mayo
Caso 10: L. Rubio	27	1	3 Mayo
Caso 11: J.I. Gómez	15	14	23,24, 28 Feb; 2 Marzo; 13 Abr; 4,9,16, 18,22,25,29,30 Mayo
Caso 12: S. Rúa	21	7	13, 15, 13, 17 Marzo, 13,25 Abr; 22 May
Caso 13: M. Verdú	28	0	---
Caso 14: J. Sanz	26	2	9, 22 May
Caso 15: C. Sevilla	23	5	5, 10, 25 Abr; 9,30 Mayo
Caso 16: R. Sánchez	8	20	28 Feb; 2,6,13, 22 Mar; 5,10,11,13,25 Abril BAJA a partir 30 Marzo

Si ordenamos los datos anteriores por número de asistencias obtenemos la siguiente tabla:

Número asistencias	Número alumnos	Alumnos
28 (100 %)	4 (25 %)	Caso 6: S. Santos Caso 13: M. Verdú Caso 8: A. Perpiñá Caso 7: E. Sanz
27 (96,42%)	2 (12,5 %)	Caso 1: A. Cuéllar Caso 10: L. Rubio
26 (92,85%)	3 (18,75%)	Caso 2: J. Revuelto Caso 5: J.P. Trigo Caso 14: J. Sanz
24 (85,71%)	1 (6,25%)	Caso 3: S. Rosado
23 (82,14%)	2 (12,5 %)	Caso 9: L. Tarno Caso 15: C. Sevilla
21 (75%)	1 (6,25%)	Caso 12: S. Rúa
19 (67,85%)	1 (6,25%)	Caso 4: D. Rubiano
15 (53,57%)	1 (6,25%)	Caso 11: J.I. Gómez
8 (28,57 %)	1 (6,25%)	Caso 16: R. Sánchez

Datos que se desprenden interesantes respecto a las asistencias:

La totalidad de los alumnos que han seguido la asignatura ha sido un 93,75% ya que tan solo 1 alumno (6,25%) ha abandonado por motivos personales.

Ese 93,75% ha asistido a más de un 53,57% de clase es decir a más de 15 de las 18 clases, de hecho

un 72,22 % (13) de los alumnos ha asistido a más del 75% de las clases (21).

Estos indicadores nos muestran que el grado de asistencia ha sido muy elevado sobre todo si tenemos en cuenta la asistencia de alumnos del subgrupo B, que asistían en media unos 70 alumnos de los 140 matriculados.

Otras informaciones que podemos extraer de la recogida de datos son las siguientes:

1. **PLANIFICACIÓN DE TEMAS IMPARTIDOS EN LAS DIFERENTES SESIONES:**
    - 1ª Sesión. 23 Febrero: Introducción al programa DERIVE.
    - 2ª Sesión. 24 Febrero: Introducción al programa DERIVE. Manejo de páginas web y correo electrónico
    - 3ª Sesión. 28 Febrero: Tema 1: Concepto de vector. Operaciones con vectores. Se inicia estructura espacio vectorial.
    - 4ª Sesión. 2 Marzo: TEMA 1. Estructura de espacio vectorial. Paso de ecuaciones paramétricas a cartesianas con DERIVE. Paso de ecuaciones cartesianas a paramétricas con DERIVE.
    - 5ª Sesión. 6 Marzo: TEMA 1: Sistemas de generadores. Introducción al concepto de dependencia e independencia lineal.
    - 6ª Sesión. 13 Marzo: TEMA 1. Repaso de construcción de sistemas de generadores y subespacio generado por un conjunto de vectores. Dependencia e independencia de vectores. Propiedades.
    - 7ª Sesión. 15 Marzo: TEMA 1. Dependencia e independencia lineal. Rango de un conjunto de vectores.
    - 8ª Sesión. 16 Marzo: TEMA 1. Base de un subespacio vectorial. Dimensión de un subespacio. Relación entre número ecuaciones cartesianas y la dimensión del subespacio.
    - 9ª Sesión. 20 Marzo: TEMA 1. Suma de subespacios. Ampliación de una base. TEMA 2: Introducción a las matrices y conceptos de DERIVE para matrices.
    - 10ª Sesión. 21 Marzo: TEMA 2. Concepto de aplicación lineal y caracterización. Manejo de aplicaciones lineales en DERIVE. Propiedades de las aplicaciones lineales respecto a la suma, producto, composición y producto por escalares.
    - 11ª Sesión. 23 Marzo: TEMA 2. Propiedades de aplicaciones lineales. Transformaciones de conjuntos L.D. y L.I. por aplicaciones lineales. Núcleo e Imagen de una aplicación lineal. Se inicia el proceso de obtención de la matriz asociada a una aplicación lineal.
    - 12ª Sesión. 27 Marzo: TEMA 2. Matriz asociada a una aplicación lineal. Aplicación asociada a una matriz.
    - 13ª Sesión. 30 Marzo: TEMA 2. Matriz asociada a una aplicación lineal. Aplicación asociada a una matriz.
    - 14ª Sesión. 5 Abril: TEMA 2. Operaciones con aplicaciones lineales.

- 15ª Sesión. 10 Abril: TEMA 2. Aplicación lineal inversa y matriz inversa. Tipos de matrices: matrices triangulares, matrices traspuestas
- 16ª Sesión. 11 Abril: TEMA 2. Tipos de matrices y sus propiedades. TEMA 3. Traza de una matriz. Cálculo de determinantes de orden 2 y orden 3. Programación en DERIVE.
- 17ª Sesión. 13 de Abril: TEMA 3. Cálculo de determinantes. Propiedades de los determinantes.
- 18ª Sesión. 25 de Abril: TEMA 3. Aplicaciones de los determinantes: cálculo de inversa y rango. TEMA 4: Introducción a sistemas.
- 19ª Sesión. 3 de Mayo. TEMA 4. Se introducen sistemas, existencia de soluciones y propiedades de las soluciones.
- 20ª Sesión. 4 de Mayo TEMA 4. Regla de Cramer. Método de Gauss-Jordan. Formas de resolver sistemas en DERIVE.
- 21ª Sesión. 8 de Mayo: TEMA 4. Métodos de resolución de sistema. TEMA 5. Introducción a los autovalores y autovectores de una aplicación lineal y su matriz asociada.
- 22ª Sesión. 9 de Mayo: TEMA 5. Propiedades de autovalores y autovectores.
- 23ª Sesión. 16 de Mayo: TEMA 5: Repaso de los conceptos de autovalor y autovector. Diagonalización de matrices: condición suficientes y necesaria y suficiente de diagonalización.
- 24ª Sesión. 18 de Mayo. TEMA 5. Diagonalización de matrices simétrica y ortogonales. Cálculo de la potencia n-ésima de matrices diagonalizables. Problemas. TEMA 6. Polinomio cuadrático y forma cuadrática: conceptos.
- 25ª Sesión. 22 de Mayo. TEMA 6. Clasificación de formas cuadráticas. Criterio de los menores principales.
- 26ª Sesión. 25 de Mayo. TEMA 6. Criterio de los autovalores para clasificar formas cuadráticas. Problemas de clasificación de formas cuadráticas con parámetros. TEMA 7. Introducción a conjuntos convexos y funciones cóncavas y convexas.
- 27ª Sesión. 29 Mayo. TEMA 7. Funciones cóncavas y convexas y algunos criterios de clasificación. Se han repasado contenidos de Matemáticas I: derivadas parciales. Clasificación de puntos críticos.
- 28ª Sesión. 30 Mayo. TEMA 7. Resolución gráfica de problemas de programación lineal.
- 29ª Sesión. 1 de Junio: Se planteó de forma opcional para resolver dudas.

Como podemos observar se han impartido un total de 58 horas, para desarrollar todo el temario. En general se ha dedicado mucho más tiempo en las primeras sesiones porque el alumno tenía que habituarse al manejo de DERIVE y a la dinámica de la propia clase, luego las clases han sido más llevaderas y sencillas.

2. AMBIENTE GENERAL DE LAS CLASES:

- 1ª Sesión: Los alumnos estaban a la expectativa, atentos a las explicaciones y a veces perdidos, comienzan a agruparse en parejas de trabajo.
- 2ª Sesión. Se perciben ciertos miedos por el desconocimiento de manejo de correo electrónico y páginas web. Se pretendieron explicar los manejos fundamentales. Ha funcionado la colaboración entre alumnos: unos explicaban a otros los contenidos.
- 3ª Sesión. Se han notado ciertos retrasos en algunos alumnos al empezar ya con los contenidos matemáticos.
- 4ª Sesión. Clase complicada, ha sido costoso para todos el captar los contenidos: conceptos subespacio vectorial. Las colaboraciones entre los alumnos continúan funcionando sobre todo cuando hay muchas dudas ye l profesor no puede atender a todos.

- 5ª Sesión. Ambiente participativo. Se observa bastante motivación sobre todo en la primera hora.
- 6ª Sesión. Se notan dos niveles en el aula: alumnos aventajados y alumnos retrasados, hemos tenidos que mandar tareas diferentes a cada alumno. Los alumnos se observa que hablan de temas ajenos a las matemáticas.
- 7ª Sesión. Ambiente participativo. Buen trabajo en grupo. Se han buscado varias estrategias para resolver problemas.
- 8ª Sesión. Ambiente muy participativo en los subgrupos. Mucha colaboración en las parejas de trabajo.
- 9ª Sesión. Muchas dudas, ambiente participativo.
- 10ª Sesión. Mucha participación de los alumnos.
- 11ª Sesión. La primera parte ha sido compleja, había mucho revuelo, en la segunda parte al tratarse de materia nueva el ambiente mejora.
- 12ª Sesión. Hay inquietud sobre como será el examen. Menos participación que otras sesiones.
- 13ª Sesión. Ambiente muy relajado.
- 14ª Sesión. Ambiente más dinámico, los alumnos participaron bastante.
- 15ª Sesión. Existen ciertos temores respecto al tipo de examen.
- 16ª Sesión. Ambiente participativo, con ciertas dudas en la programación en DERIVE.
- 17ª Sesión Ambiente participativo. Mucho interés co la programación de funciones de menores.
- 18ª Sesión. Pocos alumnos ambiente relajado.
- 19ª Sesión. Ambiente muy distendido y dinámico.
- 20ª Sesión. Participación y ambiente relajado. Participan bastante Daniel, Sebastián y Sergio.
- 21ª Sesión. Ambiente agradable y participativo.
- 22ª Sesión. Ambiente agradable y participativo. Muchos comentarios en los grupos de trabajo.
- 23ª Sesión. Ambiente muy participativo y agradable.
- 24ª Sesión. Ambiente muy participativo. Los problemas motivan bastante.
- 25ª Sesión. Trabajo más indivicualizado que en otras ocasiones.
- 26ª Sesión. Ambiente participativo.
- 27ª Sesión. Ambiente distendido.
- 28ª Sesión. Ambiente participativo con mucha colaboración entre alumnos.

Como conclusiones podemos afirmar que el ambiente que ha habido a lo largo de las sesiones ha sido bastante participativo, muy relajado por parte de los alumnos, se observa bastante motivación y colaboración entre los alumnos. El aprendizaje colaborativo es un hecho indiscutible los alumnos se explican los conceptos y procesos con su lenguaje.

3. GRADO DE COMODIDAD DEL PROFESOR EN EL AULA IMPARTIENDO LA CLASE:

Sobre este aspecto podemos decir que se han dado varias características:

- El profesor ha vivido a lo largo del curso bastante tensión para conseguir completar el temario propuesto, dado que en esta estrategia didáctica el ritmo lo marcan los alumnos de una manera más acentuada que en las clases tradicionales. En la mayoría de las clases la programación inicial ha sido incumplida, motivo por el cual se tuvieron que proponer algunas clases adicionales para completar el temario en concreto fueron 4 clases.

- En la parte inicial del curso ha habido momentos en los que ha sentido cierta tensión porque no era capaz de resolver de forma individualizada todas las dudas que iban surgiendo, en este sentido el aprendizaje colaborativo a ayudado enormemente a resolver estas pequeñas dudas.
- El profesor se ha ido sintiendo cada vez más cómodo una vez superada la presión del programa y que observaba la participación de los alumnos, así como la posibilidad de tratar directamente con ellos sus dudas. En la parte final sobre todo, se ha sentido muy cómodo y a gusto con el aula.
- La parte final del curso ha sido muy gratificante pues los alumnos ya dominaban el programa y se ha podido dedicar más a buscar diferentes estrategias en la resolución de problemas, y a motivar en procesos constructivos, que los alumnos ya eran capaces de resolver.

4. CARACTERÍSTICAS DELG UION DE TRABAJO:

Las características más generales que hemos observado del guión de trabajo utilizado en nuestra estrategia didáctica, en base a las observaciones del profesor, son las siguientes:

- Es un elemento fundamental para la didáctica que permite al alumno estar atento al profesor a sus explicaciones o comentarios sin tener que estar tomando notas y además las hojas de trabajo le sirven al alumno como apuntes de trabajo que luego puede revisar en casa.
- Se trata también de un elemento básico para el tratamiento de la diversidad dado que permite tener planteados una serie de ejercicios que se pueden proponer a los alumnos más aventajados mientras el profesor resuelve dudas a los alumnos que están más rezagados.
- El guión de trabajo también facilita a los alumnos cierta autonomía en su trabajo ya que le permite ir a su propio ritmo, dentro de una pauta general marcada por el grupo.
- Es un elemento que se convierte en el eje que vertebra de manera práctica la estrategia didáctica ya que permite tener ocupados a todos los alumnos en todo momento, permitiéndoles avanzar o pararse según sus propias capacidades. Es un elemento muy operativo.

5. ACTITUDES POSITIVAS Y NEGATIVAS DEL CURSO

Mostramos a continuación una tabla en la que se contienen las actitudes positiva y negativas observadas a lo largo de las 28 sesiones del curso:

Sesión	CIRCUNSTANCIAS NEGATIVAS	CIRCUNSTANCIAS POSITIVAS
1	Ninguna	Atención del alumnado las 2 horas.
2	Ninguna	Atención de los alumnos. Actitud receptiva de los alumnos Disposición al aprendizaje
3	Nerviosismo en los alumnos por el manejo del programa	Colaboración en las parejas de trabajo
4	Ninguna	Motivación de los alumnos Colaboración en los grupos de trabajo
5	Ninguna	Colaboración entre alumnos
6	Ninguna	Colaboración entre los alumnos Ambiente relajado.

7	Ninguna	Participación de los alumnos
8	Ninguna	Participación de los alumnos.
9	Ninguna	Interes del alumnado por resolver dudas
10	Muestras de cansancio	Colaboración en las parejas de trabjo
11	Alboroto inicial	Colaboración de los alumnos más aventajados con los más retrasados
12	Recelo a la forma de evaluar	Interés en resolver dudas.
13	Miedos al examen.	Interes general y motivación.
14	Conexiones con Internet ajenas a los contenidos	Mucha colaboración en las parejas de trabajo. Agilidad con el manejo del programa.
15	Ninguna	Motivación para resolver ejercicios.
16	Ninguna	Motivación y participación del alumnado
17	Ninguna	Interés del alumnado Colaboración de parejas de trabajo
18	Ninguna	Interés del alumnado
19	Ninguna	Interés del alumnado
20	Desmotivación de L.Tarno	Participación activa de Sebastián, S.Rua y Daniel.
21	Conexiones a internet ajenas a la clase	Ambiente proclive para resolver dudas
22	Ninguna	Grado de libertad para resolver dudas
23	Conexiones a internet ajenas a la clase S. Santos	Los alumnos aventajados ayudan a sus compañeros rezagados.
24	Ninguna	Colaboración entre los alumnos Participación de los alumnos.
25	Ninguna	Motivación de los alumnos.
26	Ninguna	Participación de los alumnos.
27	Ninguna	Participación de los alumnos.
28	Ninguna	Participación de los alumnos.

De este cuadro podremos desprender como resumen las siguientes características:

a) Las circunstancias y actitudes negativas que se han observado a lo largo del curso han sido mínimas, únicamente se han limitado a algunas conexiones a internet ajenas a la clase que realizaron algunos alumnos de forma esporádica y ciertos recelos por el tipo de examen a realizar.
b) En cuanto a las circunstancias y actitudes positivas podemos señalar las siguientes:
   - Se ha observado mucha colaboración entre los alumnos en sus grupos de trabajo ayudándose unos a otros en resolver dudas del programa o de contenidos matemáticos.
   - Bastante participación de los alumnos en las preguntas y cuestiones que se proponían en el aula.
   - Se observa bastante motivación e interés de los alumnos en los contenidos y en la manipulación con DERIVE de estos contenidos.

6. ALUMNOS RETRASADOS-DESTACADOS:

Para observar este elemento significativo elaboramos la siguiente tabla para determinar si a lo largo de las sesiones se ha podido determinar claramente la existencia de alumnos retrasados y aventajados en todo el grupo:

Num. Sesión	ALUMNOS RETRASADOS / CON RITMO LENTO	ALUMNOS AVENTAJADOS
1	No se observa	No se observa
2	A.Cuéllar, C. Sevilla y J. Sanz no manejan bien ordenadores	No se observa
3	J. P. Trigo, E. Sanz y R. Sánchez	No se observa
4	J. P.Trigo, C. Sevilla, E. Sanz y J. Sanz	S. Rosado, D. Rubiano y S. Rúa
5	C. Sevilla, J.P. Trigo, E. Sanz y L. Rubio y J.I. Gómez	S. Santos
6	C. Sevilla, J.P. Trigo y J.I. Gómez	S. Santos
7	No se observa	No se observa
8	C. Sevilla, E. Sanz y R. Sánchez	No se observa
9	C. Sevilla	No se observa
10	C. Sevilla y A. Perpiñá	D. Rubiano y S. Santos
11	C. Sevilla, R. Sánchez y A. Cuellar	S. Rosado
12	C. Sevilla, A. Perpiñá, A. Cuéllar	S. Rosado, J.I. Gómez
13	L. Rubio,	S. Rúa, S. Rosado y J.I. Gómez
14	E. Sanz, L. Rubio y J.P.Trigo	--
15	No se observa	No se observa
16	L. Rubio, E. Sanz y J.P. Trigo	No se observa
17	E. Sanz, L. Rubio y J.P. Trigo	No se observa
18	E. Sanz, L. Rubio	No se observa
19	C. Sevilla, E. Sanz	No se observa
20	C. Sevilla, L. Rubio, E. Sanz	No se observa
21	C. Sevilla, E. Sanz y J. Sanz	No se observa
22	E. Sanz	No se observa
23	C. Sevilla, J. Sanz	S. Rúa, S. Rosado y J. Revuelta
24	C. Sevilla, J. Sanz	S. Rua
25	C. Sevilla, E. Sanz	S. Rúa
26	C. Sevilla, J. Sanz, J.P. Trigo y E. Sanz	No se observa
27	C. Sevilla, J. Sanz, J.P. Trigo	No se observa
28	C. Sevilla,	No se observa

De esta tabla podemos hacer una división del subgrupo en cuatro niveles:

NIVEL DE ALUMNOS MÁS RETRASADOS:
- R. Sánchez (fue baja el 30 marzo)
- C. Sevilla
- J. Sanz
- J.P. Trigo
- E. Sanz

NIVEL DE ALUMNO GRADO MEDIO INFERIOR
- L. Rubio
- A. Perpiñá
- A. Cuéllar

NIVEL DE ALUMNOS GRADO MEDIO
- D. Rubiano
- L. Tarno
- M. Verdú
- J. Revuelto
- S. Santos
- J.I. Gómez

NIVEL SUPERIOR
- S. Rosado
- S. Rúa

7. PRESENCIA DEL OBSERVADOR CUALIFICADO:

El observador cualificado ha asistido a 14 de las 28 sesiones, y no ha supuesto ningún obstáculo para el desarrollo normal de las sesiones, ha actuado correctamente como observador. En ocasiones ha realizado preguntas de carácter individual sobre el funcionamiento del programa, adoptando la posición como si se tratara de un alumno más.

8. AGRUPAMIENTOS DE LOS ALUMNOS:

Analizando la evolución de los agrupamientos de los alumnos podemos decir que la clase tiene varios subgrupos claramente diferenciados (no incluimos el alumno R. Sánchez, ya que fue baja en marzo) formados en general por parejas pero que en dos casos han sido unitarios formados por alumnos que solían sentarse generalmente solos:

Subgrupo 1: A. Cuéllar y J. Revuelta
Subgrupo 2: E. Sanz y A. Perpiñá
Subgrupo 3. C. Sevilla
Subgrupo 4: L. Tarno y L. Rubio
Subgrupo 5: M. Verdú, J. Sanz
Subgrupo 6: S. Rúa
Subgrupo 7: S. Rosado, D. Rubiano, J.P. Trigo
Subgrupo 8: J.I. Gómez y S Santos

A su vez estos subgrupos que eran los más habituales solían establecer vínculos entre ellos en función de las posiciones que ocupaban, de tal forma que podemos construir los siguientes GRUPOS GLOBALES de la clase:

GRUPO 1:	Subgrupo 1 (A. Cuéllar y J. Revuelta) y Subgrupo 2 (E. Sanz y A Perpiñá)
GRUPO 2:	Subgrupo 3 (C. Sevilla), Subgrupo 7 (S. Rosado, D. Rubiano y J.P. Trigo) Subgrupo
GRUPO 3:	Subgrupo 4 (L. Tarno y L. Rubio)
GRUPO 4:	Subgrupo 5 (M. Verdú y J. Sanz) y Subgrupo 6 (S. Rúa)
GRUPO 5:	Subgrupo 8 (J.I. Gómez y S. Santos)

9. CARACTERÍSTICAS DE LAS DUDAS DE LOS ALUMNOS (DE CONCEPTOS O DEL PROGRAMA)

Consideramos en la siguiente tabla las dudas más frecuentes que han tenido los alumnos en cada una de las sesiones:

Sesión	DUDAS DE DERIVE	DUDAS ALGEBRA LINEAL
1	Manejo del programa	Ninguna
2	Manejo del programa	Ninguna
3	Cómo dibujar vectores	Ninguna
4	Ninguna	Paso ecuaciones cartesianas a paramétricas y viceversa
5	Comando MANAGE-SUBSTITUTE	Subespacio en el que no se podían eliminar todos los parámetros: espacio total
6	Paso cartesianas a paramétricas	sistemas de generadores
7	Resolver sistemas con DERIVE	Concepto de dependencia e independencia lineal
8	Ninguna	Cálculo del rango de un conjunto de vectores
9	Ninguna	Paso ecuaciones cartesianas a paramétricas. Determinar cuando un sistema es redundante.
10	Forma de definir aplicaciones lineales en DERIVE	Ninguna
11	Definir aplicaciones lineales en DERIVE	Cálculo de las coordenadas de un vector. Paso de ecuaciones cartesianas a paramétricas
12	Ninguna	Cálculo coordenadas de un vector en una base Obtención de las componentes de un vector si se saben las coordenadas en una base.
13	Ninguna	Matriz asociada a una aplicación lineal
14	Ninguna	Matriz asociada a una aplicación lineal
15	Ninguna	Demostraciones formales de propiedades de algunos tipos de matrices
16	Ninguna	Permutaciones de un conjunto. Construcción del cálculo de determinantes.
17	Programación en DERIVE	Ninguna
18	Ninguna	Cálculo de la inversa por Gauss-Jordan
19	Ninguna	Existencia de soluciones de un sistema.
20	Ninguna	Sobre equivalencia de sistemas lineales
21	Fórmula de obtención de autovalores (a-b*identity...)	Ninguna
22	Ninguna	Concepto de autovector y obtención
23	Ninguna	Orden de multiplicidad de autovalores
24	Ninguna	Planteamiento de problemas con matrices n-ésimas
25	Ninguna	Aplicación criterio de menores principales para clasificar f. cuadráticas
26	Ninguna	Clasificación de f. cuadráticas con parámetros
27	Ninguna	Derivadas parciales. Punto crítico f.v.variables Condición necesaria f. convexas
28	Ninguna	Curvas de nivel

Se puede observar que a medida que ha ido avanzando el curso las dudas se han centrado más en contenidos matemáticos de álgebra lineal que en el manejo del programa DERIVE.

10. DIFICULTADES QUE SE HAN PRESENTADO EN LOS CONTENIDOS.

- Hubo problemas para que los alumnos entendieran la forma de definir aplicaciones lineales con DERIVE.
- Ha habido dificultades con la obtención de la matriz asociada a una aplicación lineal y la aplicación asociada a una matriz el día que se introduce el proceso.

11. MOTIVACION DE LOS ALUMNOS ANTE LOS EJERCICIOS Y TAREAS PROPUESTAS:

Presentamos a continuación una tabla en la que se muestra la evolución de la motivación a la vista de las observaciones de campo a lo largo de las sesiones:

Sesión	COMO HA SIDO LA MOTIVACIÓN DE LOS ALUMNOS ANTE EJERCICIOS Y TAREAS PROPUESTAS
1	Interés por el programa DERIVE
2	Interés por el programa.
3	Mucho interés por la hoja de trabajo y por realizar todos los ejercicios.
4	Interés y motivación para aprender los procedimientos con DERIVE
5	Mucha motivación, atención en las explicaciones y concentración en la resolución de las actividades que se plantean.
6	Mucha motivación, algunos alumnos después de clase han reservado los ordenadores para seguir trabajando
7	Mucha participación en los grupos de trabajo, bastante motivación ante este tipo de trabajo en grupo.
8	Mucha participación en clase.
9	Mucha participación en clase
10	Bastante atención durante las dos horas.
11	Se observa que no levantan cabeza del monitor, están concentrados.
12	Mucha motivación en la elaboración de las hojas de trabajo.
13	Desánimo por los problemas que son complejos.
14	Muy motivados, están continuamente tomando notas en las hojas de trabajo.
15	Muy motivados, no dan un ejercicio por terminado hasta que no lo hacen por sí mismos, estructuran muy bien sus hojas de trabajo.
16	Realizan muchos comentarios sobre el uso y realización de las tareas que se plantean en grupos de trabajo.
17	Se quedan los alumnos después de terminar la clase.
18	No se valora.
19	Muy motivados, sobre todo al trabajo en grupo.
20	Los alumnos están centrados en las tareas que se les encomiendan
21	Muy motivados en la resolución de los ejercicios.
22	Motivación alta para resolver ejercicios que son novedosos.
23	Se observa que anotan constantemente datos en sus hojas de trabajo.
24	Anotan las observaciones en sus hojas de trabajo, se observa mucha atención.
25	Complementan bastante sus resoluciones en las hojas de trabajo, se les ve concentrados y motivados en la clase.
26	Complementan bastante sus resoluciones en las hojas de trabajo, se les ve concentrados y motivados en la clase.
27	Complementan bastante sus resoluciones en las hojas de trabajo, se les ve concentrados y motivados en la clase.
28	Complementan bastante sus resoluciones en las hojas de trabajo, se les ve concentrados y motivados en la clase.

A la vista de esta tabla podemos decir que de forma global en las notas de campo se ha observado mucha motivación por parte de los alumnos en las aulas, por varios motivos, por sus grupos de trabajo, por la resolución de los ejercicios, porque han quedado después de clase para continuar realizando actividades que quedasen propuestas y por el trabajo en grupo.

12. GRADO DE COMPRENSIÓN DEL PROGRAMA DERIVE. PRINCIPALES DUDAS.

En la siguiente tabla se muestra la evolución de la comprensión del programa DERIVE a lo largo del programa, según las observaciones realizadas en el campo:

Sesión	GRADO DE COMPRENSIÓN DEL POGRAMA DERIVE Y DUDAS MÁS FRECUENTES
1	No se puede valorar
2	No se puede valorar
3	Comando OPTIONS-INPUT para que los nombres de variable sean de tipo palabra Dibujo de vectores en el plano CONNECTED, tienen problemas en dibujar con coordenadas rectangulares o polares
4	Solapamiento de variables al nombrar una misma variable con el mismo nombre. Uso de los comandos TRANSFER-CLEAR-ALL y TRANFER-CLEAR-EXPRESSIONS.
5	Proceso de eliminación de parámetros para transformar ecuaciones paramétricas en cartesianas.
6	Resolución de sistemas con DERIVE. Problemas en definir vectores, se usa "=" en vez de ":="
7	No hay dudas significativas
8	No hay dudas significativas
9	Notación para referirnos a las componentes de un vector "alt-v" a↓v
10	Forma de definir las aplicaciones lineales en DERIVE
11	No hay dudas significativas.
12	No hay dudas significativas.
13	No hay dudas significativas
14	No hay dudas significativas
15	No hay dudas significativas
16	Programación de funciones.
17	No hay dudas significativas
18	No hay dudas significativas
19	No hay dudas significativas
20	No hay dudas significativas
21	Ha habido dudas en el significado de la función ROW_REDUCE
22	No hay dudas significativas
23	No hay dudas significativas
24	No hay dudas significativas
25	Algunos problemas en solapamiento de variables
26	No hay dudas significativas
27	No hay dudas significativas
28	No hay dudas significativas

Podríamos concluir afirmando que las dudas que ha provocado DERIVE han estado centradas en los comandos nuevos que se iban introduciendo o en las formas de definir los nuevos conceptos como aplicaciones lineales o matrices. Pero no a medida que ha ido avanzando el curso se observa que no ha habido dudas importantes.

13. EXISTE AUTONOMÍA COGNITIVA O DEPENDENCIA DEL PROGRAMA.

En la siguiente tabla mostramos la observaciones del observador de campo a lo largo de las sesiones respecto a la autonomía cognitiva o dependencia que tenían los alumnos del programa:

Sesión	¿AUTONOMÍA COGNITIVA O DEPENDENCIA DEL PROGRAMA?
1	No se puede valorar
2	No se puede valorar
3	No se entiende todavía la filosofía del programa y surgen resultados inesperados, hay todavía cierta dependencia del progama
4	El programa permite que los alumnos experimenten los resultados, indicio de cierta autonomía
5	No hay un dominio del programa en algunos alumnos que les permita actuar de una forma autónoma, aunque algunos otro sí que experimentan por su cuenta los resultados y los problemas.
6	Los alumnos comienzan a experimentar de forma autónoma con el programa en los ejercicios de investigación y los que se van proponiendo
7	Se comienzan a pensar en estrategias de resolución de problemas con ayuda de DERIVE.
8	Se utilizan varias estrategias de resolución de problemas con DERIVE.
9	Se realiza bastante experimentación con el programa.
10	No podemos realizar valoraciones hoy
11	No podemos realizar valoraciones: estaban los alumnos un poco despistados.
12	Se nota hoy cierta dependencia, quizás no se entendía bien la teoría.
13	No parecen depender demasiado del programa, experimentan bastante.
14	Saben repetir los procesos en casos diferentes y experimentan los resultados con DERIVE
15	En ocasiones tienen problemas para interrelacionar conceptos, lo que les provoca ciertos errores
16	Se observa cierta autonomía en la realización de los problemas.
17	Los alumnos realizan bastantes descubrimientos por sí solos lo cual indica que están adquiriendo un cierto grado de autonomía
18	No podemos valorar
19	No podemos valorar
20	Tienen dominio del programa lo que les permite experimentar
21	Se cuestionan los resultados que ofrece DERIVE y los alumnos experimentan sobre estos
22	Se realizan los ejercicios con soltura se maneja bien DERIVE.
23	Se piensan numerosas estrategias, DERIVE es una herramienta que les permite centrarse en la problemática más que en los cálculos.
24	Se realiza mucha experimentación
25	La clasificación de las formas cuadráticas se ha realizado con mucha autonomía, gracias a la ayuda de DERIVE en la resolución de los cálculos.

26	Las gráficas del programa estimulan mucho a los alumnos
27	Han tenido cierta dependencia porque no dominaban los contenidos del trimestre pasado.
28	La visualización de gráfica les ha permitido a los alumnos tomar decisiones sobre resolución de problemas.

Podemos concluir que los alumnos han obtenido bastante autonomía cognitiva según las observaciones del profesor con ayuda del programa DERIVE, pues este programa les ha permitido realizar numerosas experimentaciones matemáticas, intentar pensar sobre diversas estrategias.

14. SE PIENSA EN LOS PROCESOS O SE REALIZAN DE FORMA AUTOMÁTICA

A continuación se muestra una tabla en la que se muestran las observaciones realizadas por el observador de campo respecto a los procesos que realizan los alumnos: existe automatismo en los procesos o se reflexionan y manejan con comprensión:

Sesión	GRADO DE MANEJO DE LOS PROCESOS ¿automática/con comprensión?
1	No se puede valorar.
2	No se puede valorar
3	No se puede valorar, los procesos eran meramente manipulativos
4	Se ha aprendido de forma mecánica el proceso de paso de ecuaciones paramétricas a cartesianas.
5	Nuevamente parece que están intentando memorizar el proceso de paso de ecuaciones paramétricas a cartesianas.
6	Se ha pensado más en procesos, se empieza a entender la operativa de DERIVE
7	Se vuelve a pensar más en procesos que en cálculos automáticos
8	Se vuelve a pensar más en procesos que en cálculos automáticos
9	No se puede valorar
10	No se puede evaluar
11	Con el cálculo de la matriz asociada a una aplicación lineal ha habido una actitud inicial de intentar aprender el automatismo, luego cuando se han ido comprendiendo los pasos parece que se ha optado por pensar más en los procesos.
12	La clase se ha centrado más en automatismos.
13	Parece que se piensa más en los procesos que en los automatismos.
14	Parece que se piensa más en procesos.
15	Cuando se plantean ejercicios se piensa bastante en procesos.
16	Se piensa más en los procesos.
17	La programación en DERIVE ha permitido que los alumnos se centren más en el procedimiento que en el propio automatismo que calcula
18	No podemos valorar
19	No podemos valorar
20	No podemos valorar
21	No podemos valorar
22	No podemos valorar
23	En el cálculo del polinomio característico algunos alumnos han optado por aprender el comando CHARPOLY que lo calcula directamenten en vez de entender el proceso

24	Se ha pensado bastante en procesos, los cálculos de hoy eran muy repetitivos.
25	No se realizan operaciones a lo tonto, se suele interpretar el resultado
26	Se piensa bastante en los procesos y su relación con los resultados matemáticos.
27	No podemos valorar
28	No podemos valorar

Podemos afirmar que con las notas de campo no hemos podido determinar si efectivamente los alumnos pensaban más en el proceso o en el automatismo.

15. OTROS ELEMENTOS IMPORTANTES:

- Al iniciar el curso los alumnos parecen mostrar su satisfacción por el programa ya que consideran que parece un programa sencillo.
- En la parte final del curso surgió cierta intranquilidad sobre el examen porque no se podía usar DERIVE en las cuestiones teóricas, se les ofrece la posibilidad de usarlo siempre y cuando indiquen para qué se ha usado
- La comunicación con los alumnos ha sido muy fluida, posibilitada por la rapidez de cálculo del ordenador que facilitaba explicar las dudas de forma rápida y porque el grupo era reducido.

IV.4. Descripción de los datos obtenidos de los PROBLEMAS ENTREGADOS.

Tal como comentamos en el capítulo anterior, apartado III.6.1., al finalizar el desarrollo de cada capítulo se les proponía a los alumnos una colección de problemas fin de capítulo. Con este tipo de trabajo se pretendía de fomentar la resolución de problemas como método para cimentar los conocimientos de álgebra lineal. Los enunciados de estos problemas los alumnos podían obtenerlos de la página web (en el ANEXO VI se puede consultar la colección de problemas propuestos en cada capítulo).

Dentro de los datos que hemos obtenido de estos problemas, podemos destacar en primer lugar un conjunto de observaciones cualitativas de cada uno de los problemas. Estas observaciones se pueden consultar en el CD de la tesis sobre cada uno de los casos de la investigación, aunque a modo de ejemplo se pueden consultar en el ANEXO VI. En segundo lugar podemos observar el conjunto de calificaciones obtenidas por los alumnos en los seis capítulos en los que se propusieron problemas:

RESUMEN DE CALIFICACIONES OBJETIVAS OBTENIDAS EN PROBLEMAS PROPUESTOS

SUBGRUPO-A DERIVE

TEMA 1

			CASOS															Solo de entregadas	
Núm.	Objetivo del Problema	Pun	C-1	C-2	C-3	C-4	C-5	C-6	C-7	C-8	C-9	C-10	C-11	C-12	C-13	C-14	c-15	Media	Desv
1	Modelo vectorial con combinaciones lineales	1	1	1	1	0,5	0	0	1	1	1	1	0,7	1	0,1	0	0	0,78	0,37
2	Manejar polinomios de grado 4 como vectores dim. 5	1	0	0,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,1	0	0	0,02	0,04
3	Cálculo de vectores ortogonales	1	0	0,2	0,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,1	0	0	0,04	0,08
4	Obtención base,cálculo coordeinadas, coord. Cartesianas	1	0,9	0,4	0,5	0,1	0,1	0	0,4	0,4	0,5	0,5	0,5	1	0,3	0	0	0,47	0,27
5	Intersección y suma de subespacios	1	0,1	0,5	0	0	0,1	0	0,1	0,1	0,5	0,5	0,4	1	0,3	0	0	0,3	0,3
6	Modelo vectorial sobre combinaciones lineales	1	0,5	1	1	0,6	0,7	0	1	1	0	0	0,5	1	0,7	0	0	0,67	0,37
7	Modelo vectorial sobre comb. Lineal convexa econ.	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0,42	0,51
8	Modelo vectorial sobre realidad económica	1	0	1	0,7	0,3	0,7	0	0,6	0,5	0	0	1	1	0,5	0	0	0,53	0,38
9	Obtener base de un s.g. Y ecuaciones cart. De base	1	1	0,4	0,6	0,4	0	0	0,5	0,5	0,8	0,8	0	0	0,3	0	0	0,44	0,33
10	Dimensión subespacios en función parámetros	1	0,6	0,6	0,3	0,2	0	0	0,4	0,4	0	0	0	0	0,4	0	0	0,24	0,24
	Media		**5,1**	**5,2**	**4,3**	**2,1**	**1,6**	**0**	**4**	**3,9**	**3,8**	**3,8**	**4,1**	**6**	**2,8**	**0**	**0**	**3,89**	**1,26**
								NE								NE	NE	Med TOTAL	Desv

NE: No entrega la hoja de problemas

RESUMEN DE CALIFICACIONES OBJETIVAS
OBTENIDAS EN PROBLEMAS PROPUESTOS
SUBGRUPO-A

TEMA 2

			CASOS															Sólo de entregado	
Núm.	Objetivo del Problema		c-1	c-2	c-3	c-4	c-5	c-6	c-7	c-8	c-9	c-10	c-11	c-12	c-13	c-14	c-15	Med	Desv
1	Modelo matricial de productos de un almacen	**0,4**	0,4	0,4	0,2	0,2	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0	0,4	0,4	0,3	0,2	0,35	0,12
2	Modelo matricial de una ley económica	**0,4**	0,3	0,2	0	0	0,1	0,1	0	0,2	0,1	0,1	0	0,3	0	0,1	0,1	0,11	0,1
3	Modelo matricial de unas calificaciones	**0,4**	0,4	0,2	0,4	0,4	0,4	0	0	0,2	0	0	0	0,4	0	0	0	0,17	0,19
4	Investigar y experimentar si se cumple un producto de matrices	**0,4**	0	0,2	0	0	0,2	0,1	0	0,1	0,3	0,3	0	0,1	0,1	0,1	0	0,11	0,11
5	Manipulación: matriz asociada a una aplicación lineal y método de Gauss Jordan. Relacionar inversa	**1**	0,7	0,3	0,2	0,1	0	0,5	0	0,2	0,3	0,3	0	1	0,3	0,1	0,1	0,29	0,28
6	Obtener una aplicación lineal por las imágenes de vectores	**0,4**	0,4	0,4	0,1	0	0	0,1	0	0	0	0	0	0,4	0	0	0	0,1	0,16
7	Matriz asociada a una aplicación lineal. Nucleo e imag Relacionar operaciones con matrices y con aplic. Lin.	**1**	0,2	0,6	0,6	0,6	0	0,5	0	0	0,3	0,3	0	1	0,2	0,2	0	0,32	0,3
8	Matriz asociada respecto bases	**1**	1	0,2	0,2	0,1	0,1	0,2	0	0,2	0,2	0,2	0	0,6	1	0,1	0	0,29	0,33
9	Cálculo rangos, método Gauss-Jordan.	**0,8**	0,8	0,6	0	0,3	0	0,2	0	0	0,3	0,3	0	0,7	0,3	0,3	0	0,27	0,27
10	Ecuaciones matriciales	**0,6**	0	0,2	0	0	0	0	0	0,2	0,3	0,3	0	0,6	0,1	0,3	0	0,14	0,18
11	Demostrar una relación entre matrices por inducción	**0,6**	0	0	0	0	0	0,5	0	0,6	0,6	0,6	0	0,6	0,4	0,2	0	0,25	0,28
12	Demostrar una relación de matrices idempotentes	**1**	0	0,2	0	0	0	1	0	0,1	0,3	0,3	0	1	0,1	0,1	0	0,22	0,34
13	Procesos básicos de matrices y aplicaciones lineales usando parámetros	**1**	0,2	0,6	0	0	0	0	0	0,2	0	0	0	0,7	0,3	0,3	0	0,16	0,23
14	Independencia lineal de matrices	**1**	0	0,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7	1	1	0	0,2	0,38
	Media		**4,4**	**4,2**	**1,7**	**1,7**	**1,2**	**3,6**	**0,4**	**2,4**	**3,1**	**3,1**	**0**	**8,5**	**4,2**	**3,1**	**0,4**	**3**	**2,14**
	NE: No entrega la hoja de problema												NE					Med TOTAL	Desv

RESUMEN DE CALIFICACIONES OBJETIVAS OBTENIDAS EN PROBLEMAS PROPUESTOS

SUBGRUPO-A DERIVE

TEMA 3

nº	Objetivo del Problema	Punt	c-1	c-2	c-3	c-4	c-5	c-6	c-7	c-8	c-9	c-10	c-11	c-12	c-13	c-14	c-15	Sólo de entregado Med	Desv
1	Investigar y experimentar con determinantes	0,5	0	0,4	0,1	0	0,1	0,1	0,1	0,1	0	0	0	0,3	0,1	0,1	0	0,09	0,12
2	Investigación y experimentación para disponer en una matriz 1 y -1 para que de determinante máximo	0,5	0	0	0,1	0	0,1	0,2	0,1	0,1	0	0	0	0,5	0,1	0,1	0,1	0,09	0,13
3	Investigación y experimentación para disponer en una matriz 1 y 0 para que de determinante máximo	0,5	0	0	0,1	0	0,1	0,2	0,5	0,5	0	0	0	0,4	0,1	0,1	0,1	0,13	0,18
4	Ecuación de determinantes n-ésimos: inducción	1	0	0,2	0,2	0,2	0	0,2	0	0	1	1	0	1	0	0	0,2	0,25	0,4
5	Cálculo de rangos una matriz de orden 4x6 valores constantes	1	0	0,1	0,6	0	0,2	0,2	0,1	0,1	0,4	0,4	0	0,5	0,2	0,2	0,6	0,23	0,21
6	Ecuación con un determinante n-ésino: inducción	1	0	0,4	0,3	0	0	0	0	0	0,7	0,7	0	1	0,1	0,1	0	0,21	0,34
7	Determinar valores de un parámetro para los que una matriz tiene inversa	0,5	0	0,2	0,5	0,4	0,5	0	0	0	0	0	0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,23	0,24
8	Determinante Vandermonde genérico	1	0	0,3	0,5	0,1	0,1	0,3	0	0	0	0	0	0,3	0,3	0,3	0,1	0,14	0,16
9	Obtener núcleo e imagen a partir de aplicación lineal	1	0	0,1	0,4	0,3	0,4	0	0	0	0	0	0	0,8	0	0	0	0,13	0,24
10	Calcular valores de un parámetro para que unos vectores sean l.i	1	0	0,3	0	0,6	0,6	0	0,1	0,1	0	0	0	0,4	0,3	0,3	0,6	0,21	0,24
11	Aplicación lineal paramétrica: determinar cuando tiene inversa según ese parámetro	1	0	0,2	0,5	0,3	0	0,5	0	0	0	0	0	1	0,5	0,5	0,5	0,25	0,31
12	Determinante n-ésimo porinducción	1	0	0,1	0,2	0	0,2	1	0	0	0	0	0	1	0,3	0	0,2	0,19	0,35
	Media		**0**	**2,3**	**3,5**	**1,9**	**2,3**	**2,7**	**0,9**	**0,9**	**2,1**	**2,1**	**0**	**7,7**	**2,5**	**2,2**	**2,9**	**2,13**	**1,76**
	NE: No entrega hoja de problemas												NE					**Med TOTAL**	**Desv**

RESUMEN DE CALIFICACIONES OBJETIVAS OBTENIDAS EN PROBLEMAS PROPUESTOS
SUBGRUPO-A DERIVE

TEMA 4

Núm.	Objetivo del Problema	Punt	c-1	c-2	c-3	c-4	c-5	c-6	c-7	c-8	c-9	c-10	c-11	c-12	c-13	c-14	c-15	Solo de entregado Med	Desv
			CASOS																
1	Modelo económico con un sistema 3 ecuaciones	1	1	1	1	0	0,8	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0,8	0,87	0,3
2	Estudio de la compatibilidad de un sistema de ecuaciones con un parámetro	1	1	0,4	0,4	0	0,7	0	0	0,3	0	0	0	1	0,2	0	0,7	0,43	0,38
3	Discutir un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas con un parámetro	1	1	0,2	1	0	0,8	0	0	0	0	0	0	1	0,3	0	0,8	0,46	0,45
4	Discusión de un sistema en función de un parámetro con cálculo de soluciones	1	0	0	0,8	0	0,8	0	0	0	0,6	0,6	0	0,4	0,1	0	0,8	0,37	0,36
5	Discutir sistema de 3 cuaciones con 3 incógnitas con 2 parámetros	1	0,7	0	0,4	0	0	0	0	0	0,4	0,4	0	1	0,1	0	0	0,27	0,34
6	Formulación de sistema de 3 3cuacione 3 incógnitas con números naturales	1	0	1	1	0	0,3	0	0	0,3	1	1	0	0,2	0	0	0,4	0,47	0,44
7	Modelo económico matriz deinputs vector salidas	1	1	1	0,5	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0,5	0,5
8	Formulación de un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas	1	1	0,8	1	0	0,8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0,8	0,49	0,48
9	Discutir un sistema en función de 2 parámetros	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,6	0,3	0	0	0,08	0,19
10	Formulación de sistemas que resuelven problemas sencillos	1	0	1	0,5	0	0,5	0	0	0,25	1	1	0	1	0,25	0	0,5	0,55	0,4
			5,7	**5,4**	**6,6**	**0**	**4,7**	**0**	**0**	**2,85**	**4**	**4**	**0**	**7,2**	**4,25**	**0**	**4,8**	**4,5**	**1,94**
	NE. No entrega							NE	NE				NE			NE		**Med TOTAL**	**Desv**

RESUMEN DE CALIFICACIONES OBJETIVAS OBTENIDAS EN PROBLEMAS PROPUESTOS
SUBGRUPO-A DERIVE

TEMA 5

			CASOS															Solo de entregadas	
Núm.	Objetivo del Problema	Punt	c-1	c-2	c-3	c-4	c-5	c-6	c-7	c-8	c-9	c-10	c-11	c-12	c-13	c-14	c-15	Med	Desv
1	Obtener los valores incógnita de una matriz partiendo de los conceptos de autovalores y autovectores se construye un sistema 9 ec. Con 9 incógnitas.	1	0	1	1	0	0	0	0,3	0,3	0	0	0	1	0,1	0	0	0,62	0,43
2	Obtener dos incógnitas de una matriz a partir del un autovalor y un autovector de la matriz	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0,67	0,52
3	Demostrar que dos matrices de orden 3 no son seme-jantes aunque tengan el mismo polinomio característico	1	0	0,2	0	0	0	0	0,2	0,2	0	0	0	0,3	0,2	0	0	0,18	0,1
4	Determinar si dos matrices constantes son diagonalizables: procedimiento	1	0	0,7	0,1	0	0	0	0,4	0,4	0	0	0	1	0,1	0	0	0,45	0,35
5	Relacionar concepto de diagonalización con matriz de paso.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,1	0	0	0,18	0,4
6	Obtener autovalores en función de parámetros, y determinar valor del parámetro para condiciones	1	0	0,9	0,7	0	0	0	0,7	0,7	0	0	0	1	0,1	0	0	0,68	0,31
7	Modelización en el que hay que calcular una potencia k-ésima por diagonalización	1	0	0	0,3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,6	0	0	0,32	0,41
8	Modelización para calcular una potencia k-ésima por diagonalización	1	0	0	0,2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,8	0	0	0,33	0,45
9	Problema de modelización. Potencia k-ésima por diagonalización y el cálculo de límites	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0,8	0	0	0,3	0,47
10	Estudiar para qué valores de un parámetro una matriz es diagonalizable	1	0	0,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,2	0,1	0	0	0,07	0,08
			0	**3,9**	**3,3**	**0**	**0**	**0**	**2,6**	**2,6**	**0**	**0**	**0**	**7,5**	**2,9**	**0**	**0**	**3,8**	**1,88**
			NE			NE	NE	NE			NE	NE	NE			NE	NE	**Med TOTAL**	**Desv**

NE: No entrega

RESUMEN DE CALIFICACIONES OBJETIVAS OBTENIDAS EN PROBLEMAS PROPUESTOS
SUBGRUPO-A DERIVE

TEMA 6

			CASOS															Sólo de entregado	
Núm.	Objetivo del Problema	**Puntuación**	c-1	c-2	c-3	c-4	c-5	c-6	c-7	c-8	c-9	c-10	c-11	c-12	c-13	c-14	c-15	Med	Desv
1	Clasificar una forma cuadrática en función de un parámetro	1	0,5	1	0	0	0	0,1	0,3	0,3	0	0	0	1	0,4	0,4	0	0,5	0,33
2	Clasificación de una forma cuadrática en función de 2 parámetros	1	0	1	0	0	0	0,1	0,2	0,2	0	0	0	0,9	0,6	0,6	0	0,45	0,38
3	Clasificación de una forma cuadrática orden 3 en función de 2 parámetros	1,5	0,8	0,2	0	0	0	0,1	0,2	0,2	0	0	0	1,2	0,5	0,5	0	0,46	0,38
4	Clasificación de una forma cuadrática en orden 3 en función de 1 parámetro	1	1	0,5	0	0	0	0,1	0,2	0,2	0	0	0	1	0,1	0,1	0	0,4	0,39
5	Clasificación de una forma cuadrática orden 3 en en función de 2 parámetros	1,5	1	1	0	0	0	0,1	0,8	0,8	0	0	0	0,8	0,5	0,5	0	0,69	0,3
6	Clasficación de una forma cuadrática orden 4n en función de 2 parámetros	2	0	1,2	0	0	0	0,3	0,4	0,4	0	0	0	0	0,3	0,3	0	0,36	0,37
7	Calcular valores de un paraámetro para que una forma cuadrática sea definida positiva	1	1	1	0	0	0	0,1	1	1	0	0	0	1	0,3	0,3	0	0,71	0,4
8	Determinar si una forma cuadrática puede ser definida negativa para cierto valor paramétrico	1	1	0	0	0	0	0,4	0,2	0,2	0	0	0	1	0,1	0,1	0	0,38	0,4
		10	**5,3**	**5,9**	**0**	**0**	**0**	**1,3**	**3,3**	**3,3**	**0**	**0**	**0**	**6,9**	**2,8**	**2,8**	**0**	**3,95**	**1,88**
					NE	NE	NE				NE	NE	NE				NE	**Med TOTAL**	**Des**

NE: no entrega

RESUMEN DE CALIFICACIONES OBJETIVAS OBTENIDAS EN PROBLEMAS PROPUESTOS SUBGRUPO-A DERIVE

	TEMA-1	TEMA-2	TEMA-3	TEMA-4	TEMA-5	TEMA-6	Media	Dev.Típica
Caso 1	5,1	4,4	0	5,7	0	5,3	3,42	2,68
Caso 2	5,2	4,2	2,3	5,4	3,9	5,9	4,48	1,31
Caso 3	4,3	1,7	3,5	6,6	3,3	0	3,23	2,25
Caso 4	2,1	1,7	1,9	0	0	0	0,95	1,05
Caso 5	1,6	1,2	2,3	4,7	0	0	1,63	1,75
Caso 6	0	3,6	2,7	0	0	1,3	1,27	1,57
Caso 7	4	0,4	0,9	0	2,6	3,3	1,87	1,66
Caso 8	3,9	2,4	0,9	2,85	2,6	3,3	2,66	1,02
Caso 9	3,8	3,1	2,1	4	0	0	2,17	1,81
Caso 10	3,8	3,1	2,1	4	0	0	2,17	1,81
Caso 11	4,1	0	0	0	0	0	0,68	1,67
Caso 12	6	8,5	7,7	7,2	7,5	6,9	7,30	0,84
Caso 13	2,8	4,2	2,5	4,25	2,9	2,8	3,24	0,77
Caso 14	0	3,1	2,2	0	0	2,8	1,35	1,51
Caso 15	0	0,4	2,9	4,8	0	0	1,35	2,03
Media	3,11	2,80	2,27	3,30	1,52	2,11		
Desv.Típica	1,96	2,14	1,81	2,63	2,23	2,44		

Estas tablas serán empleadas en el capítulo siguiente para analizar los datos y extraer las conclusiones pertinentes.

IV.5. Descripción de los datos obtenidos de las CUESTIONES TEÓRICAS ENTREGADAS.

En el capítulo III, apartado III.6.1., al finalizar el desarrollo de cada capítulo se les plantearon a los alumnos una serie de cuestiones teóricas que realizaban en el aula con el fin de medir de forma objetiva el grado de comprensión teórica y su capacidad para relacionar los contenidos que se iban introduciendo. Los enunciados de estas cuestiones se pueden consultar en el ANEXO VII.

Los datos que hemos obtenido de estas cuestiones, se pueden dividir en dos tipos, por un lado las observaciones cualitativas de cada una de las cuestiones, que se entregaron resueltas en un fichero de DERIVE, con los cálculos realizados en cada una de ellas. Estas observaciones se pueden consultar en el CD de la tesis sobre cada uno de los casos de la investigación, aunque a modo de ejemplo se pueden consultar en el ANEXO XVII. En segundo lugar podemos observar el conjunto de calificaciones obtenidas por los alumnos en los siete capítulos en los que se propusieron las cuestiones teóricas:

CUESTIONES TEÓRICAS DEL TEMA 1

Solo de lo entregado

			CASOS																
Núm.	Objetivo de la cuestión.	Punt	c-1	c-2	c-3	c-4	c-5	c-6	c-7	c-8	c-9	c-10	c-11	c-12	c-13	c-14	c-15	Med	Desv
1	Comprender qué significa que la dimensión de un subespacio sea 2. Relacionar el número de ecuaciones no redundantes con la dimensión de un subespacio	2	2	2	2	2	2	1	2	2	0	0	2	2	0	0	2	1,4	0,91
2	Determinar su 4 vectores no nulos son l.d. O l.i. Deducir que un conjunto de vector l.i. No puede expresar de dos formas distintas un mismo vector	2	1	2	1	1	2	0	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1,2	0,56
3	Deducir que en R^2 tres vectores son siempre l.d.	2	0	2	0	2	2	0	0	0	0	0	0	2	2	2	0	0,8	1,01
4a	Saber que un conjunto de tres vectores l.i. En R^3 es una base	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0,6	0,51
4b	Relacionar núm. Ecuaciones no redundantes con la dimensión de un subespacio	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0,4	0,51
4c	Saber que 4 vectores de R^3 no nulos no tienen porqué ser l.i. Pueden ser l.d.	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0,4	0,51
4d	Tres vectores no pueden ser l.i. Si generan de dos formas distintas un mismo vector	1	0	0	1	0	0	0	0	0,5	0	0	1	1	0	0	1	0,3	0,46
		10	**5**	**7**	**7**	**7**	**7**	**1**	**3**	**5,5**	**4**	**1**	**6**	**9**	**5**	**5**	**4**	**5,1**	**2,25**
																		Med	**Desv**
																		TOTAL	

CALIFICACIONES OBTENIDAS EN LAS CUESTIONES DEL TEMA 2

Núm.	Objetivo de la cuestión.	Punt	c-1	c-2	c-3	c-4	c-5	c-6	c-7	c-8	c-9	c-10	c-11	c-12	c-13	c-14	c-15	Med (Sólo de lo entregado)	Desv (Sólo de lo entregado)
			CASOS																
1	Utilizar correctamente la fórmula de las dimensiones para relacionar dimension del núcleo y la imagen con la dimensión del espacio de partida	2,5	2,5	0	2,5	0	0	0	0	0	0	0	0	2,5	2,5	0	0	1,43	1,34
2	Relacionar coordenadas en la base final de los vectore de la base inicial de una aplicación lineal con la columnas de una matriz	2,5	2,5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0,96
3	Deducir que si una matriz es no singular entonces los vectores columna de ella forman una base pero no tiene que ver con la traza	2,5	2,5	2,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,5	2,5	0	0	1,43	1,34
4	Saber obtener la matriz asociada a una a.lineal conocidas las imágenes de la base, así como deducir la dimensión de la imagen a partir del rango	2,5	0	0	1,5	0	0	0	0	0	0	0	0	2,5	2,5	0	0	0,93	1,21
			7,5	**2,5**	**5**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**7,5**	**7,5**	**0**	**0**	**4,29**	**3,45**
						NE	NE	NE	NE	NE	NE	NE	NE				NE	**Med TOTAL**	**Desv TOTAL**

NE: no entrega hoja de cuestiones

CALIFICACIONES OBTENIDAS EN LAS CUESTIONES DEL TEMA 3

Núm.	Objetivo de la cuestión.	Puntuación	c-1	c-2	c-3	c-4	c-5	c-6	c-7	c-8	c-9	c-10	c-11	c-12	c-13	c-14	c-15	Sólo de lo entregado Med	Desv
1	Calcular determinantes haciendo ceros. No afirmar que un enunciado es cierto en general por el hecho de que se cumpla en un caso particular	2,5	0	2,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,42	1,02
2	No vincular que la traza de una matriz sea nula con que sea o no singular	2,5	2,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,5	2,5	0	0	1,25	1,37
3	Calcular determinantes usando propiedades	2,5	2,5	1,25	0	0	0	0	1,25	0	0	0	0	2,5	1,25	1,25	0	1,67	0,65
4	Relación entre matrices invertibles, determinante y rango	2,5	2,5	2,5	0	0	0	0	2,5	0	0	0	0	2,5	2,5	2,5	0	2,5	0
		10	**7,5**	**6,25**	**0**	**0**	**0**	**0**	**3,75**	**0**	**0**	**0**	**0**	**7,5**	**6,25**	**3,75**	**0**	**5,83**	**1,71**
	NE: no entrega				NE	NE	NE	NE		NE	NE	NE	NE				NE	**Med TOTAL**	**Desv**

CALIFICACIONES OBTENIDAS EN LAS CUESTIONES DEL TEMA 4

Núm.	Objetivo de la cuestión.	Puntuación	c-1	c-2	c-3	c-4	c-5	c-6	c-7	c-8	c-9	c-10	c-11	c-12	c-13	c-14	c-15	Med (Solo de lo entregado)	Desv (Solo de lo entregado)
1	Saber que un sistema que tiene igual número de ecuaciones que incógnitas es compatible siempre que su rango sea completo. Sin embargo si el sistema tiene más ecuaciones que incógnitas puede ser incompatible	**2,5**	0	1,25	0	0	0	0	1,25	0	0	0	0	2,5	1,25	1,25	0	1,25	0,79
2	Determinar para qué valores de un parámetro un subconjunto definido por ec. Cart. Es sub. Vectorial y Relacionar la dimensión de un subespacio con el número de ecuaciones no redundantes	**2,5**	0	1,25	0	0	0	0	1,25	0	0	0	0	0	0	0	0	0,42	0,65
3	Aplicar el Teorema de Rouché para discutir un sistema	**2,5**	0	2,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,5	2,5	0	0	1,25	1,37
4	Determinar si un sistema paramétrico es compatible determinado.	**2,5**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,5	0	2,5	0	0,83	1,29
		10	**0**	**5**	**0**	**0**	**0**	**0**	**2,5**	**0**	**0**	**0**	**0**	**7,5**	**3,75**	**3,75**	**0**	**3,75**	**2,5**
	NE: no entrega		NE		NE	NE	NE	NE		NE	NE	NE					NE	**Med TOTAL**	**Desv TOTAL**

CALIFICACIONES OBTENIDAS EN LAS CUESTIONES DEL TEMA 5

Núm.	Objetivo de la cuestión.	Puntuación	c-1	c-2	c-3	c-4	c-5	c-6	c-7	c-8	c-9	c-10	c-11	c-12	c-13	c-14	c-15	Sólo de lo entregado Med	Desv
1	Saber que la simetria de una matriz no es condición necesaria para la diagonalización, es suficiente. Saber que si una matriz tiene sus autovalores distintos es diagonalizable Saber que si una matriz es diagonalizable sus autovectores son l.i.	2,5	2,5	2,5	0	0	0	0	1,25	0	0	0	0	2,5	2,5	1,25	0	1,56	1,11
2	Saber la relación entre orden de multipliciad de un autovalor y dimensión del subespacio de autovectores Calcular la dimensión de un subespacio de autovect.	2,5	0	2,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,5	2,5	1,25	0	1,09	1,24
3	Relacionar autovalores de una matriz A y la matriz kA	2,5	1,25	0	0	0	0	0	1,25	0	0	0	0	1,25	1,25	2,5	0	0,94	0,88
4	Relacion entre matrices simétricas y diagonalizables Deducir que si un enunciado es falso en un caso particular entonces es falso en general	2,5	2,5	2,5	0	0	0	0	1,25	0	0	0	0	1,25	2,5	2,5	0	1,56	1,11
		10	6,25	7,5	0	0	0	0	3,75	0	0	0	0	7,5	8,75	7,5	0	**5,16**	**3,5**
	NE: no entrega				NE	NE	NE	NE		NE	NE	NE					NE	**Med**	**Desv**

CALIFICACIONES OBTENIDAS EN LAS CUESTIONES
TEMA 6

Núm.	Objetivo de la cuestión.	Puntuación	c-1	c-2	c-3	c-4	c-5	c-6	c-7	c-8	c-9	c-10	c-11	c-12	c-13	c-14	c-15	Sólo de lo entregado Med	Desv
1	Deducir que si una matriz de orden 3 es invertible no tiene autovalores nulos, y por tanto no puede ser semidefinida.	2,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,5	0	0	0	0,5	1,12
2	Deducir que si una f.c. Es s.d.p. Y su matriz asociada es no nula entonces el sistema homogeneo Ax=0 es compatible indeterminado	2,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,5	0	1,25	0	0,75	1,12
3	Saber que para aplicar los criterios de menores principales y de autovalores la matriz que define la forma cuadrática tiene que ser la matriz asociada es decir ser simétrica	2,5	0	0	0	0	0	0	1,25	0	0	0	0	0	0	2,5	0	0,75	1,12
4	Deducir a partir del determinante de la matriz y la traza los posibles valores que puedes tener sus autovalores para obtener cierta clasificación de la f.c. Que tuviese por matriz asociada a la citada matriz	2,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,25	0	0	0	0,25	0,56
		10	0	0	0	0	0	0	1,25	0	0	0	0	6,25	0	3,75	0	**2,25**	**2,71**
	NE: no entrega		NE	NE	NE	NE	NE	NE		NE	NE	NE					NE	**Med TOTAL**	**Desv**

CALIFICACIONES OBTENIDAS EN LAS CUESTIONES DEL TEMA 7

Núm.	Objetivo de la cuestión.	Puntuación	c-1	c-2	c-3	c-4	c-5	c-6	c-7	c-8	c-9	c-10	c-11	c-12	c-13	c-14	c-15
1	Saber que un subconjunto de un convexo no tiene porqué ser convexo	2,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	Dado un problema de programación lineal con un parámetro, resolver de forma gráfica el problema para distintos valores del parámetro	2,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	Reconocer cuando un conjunto es convexo y que la intersección de convexos es convexo	2,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	Resolver un problema de programación lineal de forma gráfica	2,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
			NE	NE	NE	NE	NE	NE	NE	NE	NE	NE	NE	NE	NE	NE	NE

No entregó ningún alumno las cuestiones
por problemas de tiempo, el examen estaba muy próximo

RESUMEN DE CALIFICACIONES OBTENIDAS EN LAS CUESTIONES TEÓRICAS

									Sólo de lo entregado
	Tema-1	Tema-2	Tema-3	Tema-4	Tema-5	Tema-6	Tema-7	Media total	Media
Caso 1	5	7,5	7,5	0	6,25	0	0	3,75	6,56
Caso 2	7	2,5	6,25	5	7,5	0	0	4,04	5,65
Caso 3	7	5	0	0	0	0	0	1,71	6,00
Caso 4	7	0	0	0	0	0	0	1,00	7,00
Caso 5	7	0	0	0	0	0	0	1,00	7,00
Caso 6	1	0	0	0	0	0	0	0,14	1,00
Caso 7	3	0	3,75	2,5	3,75	1,25	0	2,04	2,85
Caso 8	5,5	0	0	0	0	0	0	0,79	5,50
Caso 9	4	0	0	0	0	0	0	0,57	4,00
Caso 10	1	0	0	0	0	0	0	0,14	0,20
Caso 11	6	0	0	0	0	0	0	0,86	1,20
Caso 12	9	7,5	7,5	7,5	7,5	6,25	0	6,46	7,55
Caso 13	5	7,5	6,25	3,75	8,75	0	0	4,46	4,75
Caso 14	5	0	3,75	3,75	7,5	3,75	0	3,39	4,75
Caso 15	4	0	0	0	0	0	0	0,57	0,80
Media	5,10	2,00	2,33	1,50	2,75	0,75	0,00	2,06	4,32

Media Todal: indica la media considerando como 0 las cuestiones no entregadas

Media : indica la media de las calificaciones de las hojas entregadas.

Estas tablas, así como las observaciones cualitativas realizadas en las cuestiones sirvieron para analizar los datos en el capítulo V.

IV.6. Descripción de los datos obtenidos de la ENTREVISTA INTERMEDIA.

La entrevista INTERMEDIA fue realizada a los alumnos cuando quedaban algunos días para terminar el curso. En esta entrevista se pretendían obtener datos más relevantes que nos permitieran contestar a las diferentes cuestiones de la investigación, sin embargo únicamente pudimos realizar la entrevista a 12 de los 15 alumnos que continuaban en la experiencia educativa. En concreto realizamos las entrevistas a los siguientes alumnos:

1. Antonio Cuéllar
2. Juan Pablo Trigo
3. Jorge Revuelta
4. Maria Verdú
5. Daniel Rubiano
6. Sebastián Rosado
7. Jessica Sanz
8. Sergio Rúa
9. Sergio Santos
10. Laura Rubio
11. Cristina Sevilla
12. Antonio Perpiñá

No se pudieron concertar entrevistas con los alumnos L.Tarno, J.I. Gómez y E. Sanz. El modelo de la entrevista inicial se puede consultar en el ANEXO XI y dado que el contenido de las entrevistas resulta muy complejo de resumir, ya que requiere un tratamiento analíticos, únicamente podemos añadir que las transcripciones de TODAS las entrevistas intermedias se puede consultar en el CD adjunto a esta memoria. También se puede consultar a modo de ejemplo la transcripción de una de las entrevistas intermedias realizadas en el ANEXO XI.

IV.7. Descripción de los datos obtenidos de la ENCUESTA FINAL.

El último día de clase en concreto el 30 de Mayo de 2000, se realizó en el aula una encuesta anónima (el modelo se puede consultar en el ANEXO XII) con el que se pretendía realizar una evaluación del profesor y el material didáctico utilizado. La encuesta se realizó sobre 12 de los 15 alumnos de la experiencia, dado que ese último día no asistieron todos los alumnos. Las encuestas realizadas se pueden consultar también en el ANEXO XII y un resumen de dichos resultados lo ofrecemos con la siguiente tabla:

RESUMEN DE DATOS OBTENIDOS EN LA ENCUESTA FINAL

CUESTIONES:

	Puntuaciones								*Media*	*Desv. Tipica*
1. El Profesor explica con claridad:	5	3	5	4	3	5	4	4	3,83	0,83
	4	3	3	3						
2. El profesor se preocupa por el aprendizaje	5	5	5	5	5	5	4	4	4,58	0,51
de sus alumnos	5	4	4	4						
3. Suele destacar las cosas que considera	5	5	5	5	4	5	5	4	4,50	0,52
importantes	4	4	4	4						
4. Contribuye a hacer interesante la asignatura	5	5	5	4	4	5	3	4	4,17	0,83
	5	3	4	3						
5. Sus clases están bien preparadas	5	4	5	5	5	5	5	4	4,58	0,51
	5	4	4	4						
6. El profesor parece dominar la asignatura y	5	5	5	5	4	5	5	4	4,50	0,67
estar al corriente de los progresos	4	5	4	3						
7. Ha informado sobre el programa y el plan	5	5	5	5	4	4	5	4	4,33	0,65
de trabajo de la asignatura	4	4	4	3						
8. En líneas generales se ha ajustado al plan de	5	5	5	4	4	4	4	4	4,25	0,62
trabajo previsto	4	5	4	3						
9. Ha informado sobre los criterios y actividades	5	5	4	5	4	4	4	4	4,17	0,58
de evaluación de la materia que imparte	4	4	4	3						
10. El profesor tiene una actitud receptiva ante	5	5	5	5	4	5	5	3	4,50	0,67
las preguntas o sugerencias de los alumnos	5	4	4	4						
11. Fomenta la participación de los alumnos	5	4	4	5	4	5	3	3	3,83	0,94
en clase	4	3	4	2						
12. El profesor está disponible para ser		5	5	5	4	5	5	4	4,27	0,79
consultado en horas de tutoría	4	3	4	3						
13. Los conceptos teóricos se complementan	5	5	5	5	5	5	4	4	4,58	0,51
adecuadamente con ejemplos, comentarios,	5	4	4	4						
14. La bibliografía y/o el material de lectura	5	2	5	4	5	5	4	4	4,25	0,97
indicados son útiles para el estudio de la asig	5	4	5	3						
15. En general, el trabajo llevado a cabo por	5	5	5	5	4	5	4	4	4,50	0,52
el profesor ha sido satisfactorio	5	4	4	4						

A la vista de los resultados obtenidos podemos realizar las siguientes observaciones relacionadas con las características del profesorado, estableciendo los siguientes porcentajes mínimos entre los que se podría incluir cada uno de los caracteres que se citan:

- El profesor explicaba con claridad:

  60%
- El profesor se preocupaba por el aprendizaje de sus alumnos

  81,4%
- El profesor solía destacar las cosas que considera importantes

  80,4 %
- El profesor contribuía a hacer interesante la asignatura:

  66,8%
- Las clases estaban bien preparadas

  81,4%
- El profesor parecía dominar la asignatura y estar al corriente de los progresos

  76,6%
- El profesor informó adecuadamente de los criterios y actividades de evaluación

  73,6%
- El profesor se ha ajustado al plan de trabajo previsto:

  72,6%
- El profesor ha informado sobre criterios y actividades de evaluación

  71,8%
- El profesor tiene una actitud receptiva ante las preguntas de los alumnos

  78,6%
- El profesor fomentó la participación de los alumnos

  57,8%
- El profesor estaba disponible para consultarle dudas

  69,6%
- El profesor complementó adecuadamente los contenidos con ejemplos

  81,4%
- La bibliografía y el material indicados por el profesor fueron útiles para el estudio

  65,6%
- La valoración general del profesor ha sido satisfactoria:

  79,6%

Datos que nos sugieren una buena actuación del profesorado.

IV.8. Descripción de los datos obtenidos del EXAMEN FINAL.

El día 1 de junio de 2000 se realizó el examen final de los dos SUBGRUPOS A y B (el modelo de examen de ambos subgrupos se puede consultar en el ANEXO XV), y los datos que pudimos obtener de estos han sido los siguientes:

Del SUBGRUPO A: realizamos un análisis cualitativo de las contestaciones realizadas y obtuvimos como resultado el siguiente conjunto de observaciones:

- observaciones realizadas de las cuestiones teóricas de cada uno de los casos (se puede consultar en el ANEXO XV)
- observaciones de los problemas de este subgrupo (se puede consultar en el ANEXO XV)

Las calificaciones obtenidas por ambos subgrupos nos permitieron elaborar un cuadro de puntuaciones obtenidas en cada uno de los dos subgrupos (se pueden consultar ambas en el ANEXO XV) de las que podemos extraer las siguientes tablas comparativas:

- Respecto de las CUESTIONES TEÓRICAS: Dado que ambos subgrupos realizaron el mismo examen teóricos mostramos a continuación el cuadro comparativo de los resultados obtenidos en cada una de las cuestiones:

	SUBGRUPO A					**SUBGRUPO B**				
	Media	Varianza	Desviaci	Mediana	Moda	Media	Varianza	Desviac	Mediana	Moda
Calificaciones	5,03	4,73	2,18	4,5	3,5	5,46	3,23	1,8	5,5	5
NUM. ALUM	15					79				
CUESTIONES	**Media**	**Varianza**	**Desviaci**	**Median**	**Moda**	**Media**	**Varianza**	**Desvia**	**Mediana**	**Moda**
Cuestión 1	**0,53**	0,23	0,48	0,5	1	**0,71**	0,21	0,46	1	1
Cuestión 2	**0,7**	0,14	0,37	1	1	**0,72**	0,09	0,31	0,5	1
Cuestión 3	**0,53**	0,16	0,4	0,5	0,5	**0,65**	0,15	0,39	0,75	1
Cuestión 4	**0,4**	0,26	0,51	0	0	**0,37**	0,23	0,48	0	0
Cuestión 5	**0,4**	0,19	0,43	0,5	0	**0,41**	0,11	0,33	0,5	0,5
Cuestión 6	**0,3**	0,21	0,46	0	0	**0,5**	0,25	0,5	0,5	0
Cuestión 7	**0,33**	0,24	0,49	0	0	**0,45**	0,25	0,5	0	0
Cuestión 8	**0,6**	0,26	0,51	1	1	**0,66**	0,23	0,48	1	1
Cuestión 9	**0,67**	0,24	0,49	1	1	**0,51**	0,25	0,5	1	1
Cuestión 10	**0,57**	0,10	0,32	0,5	0,5	**0,51**	0,14	0,38	0,5	0,5

- Respecto de los PROBLEMAS, mostramos a continuación las puntuaciones obtenidas en los problemas realizados en uno y otro subgrupo, en este caso debemos señalar que ambos subgrupos realizaron dos exámenes prácticos distintos:

SUBGRUPO A. PROBLEMAS						
		Media	Varianza	Desviaci	Mediana	Moda
Calificaciones		5,9	4,62	2,15	6,1	--
PROBLEMAS	**Nota máx.**	**Media**	**Varianza**	**Desviaci**	**Median**	**Moda**
1-A	**0,6**	**0,4**	0,1	0,2	0,4	0,6
1-B	**0,7**	**0,5**	0,1	0,3	0,7	0,7
1-C	**0,4**	**0,2**	0	0,2	0,4	0,4
1-D	**0,6**	**0,3**	0,1	0,3	0,6	0,6
1-E	**0,6**	**0,1**	0	0,2	0	0
1-F	**0,1**	**0**	0	0	0	0
2-A	**0,6**	**0,5**	0	0,2	0,6	0,6
2-B	**0,1**	**0,1**	0	0	0,1	0,1
2-C	**0,4**	**0,4**	0	0,1	0,4	0,4
2-D	**0,1**	**0,1**	0	0	0,1	0,1
2-E	**0,8**	**0,4**	0,1	0,3	0,2	0,8
2-F	**0,5**	**0,2**	0	0,2	0,2	0
3-A	**1**	**0,5**	0,1	0,3	0,4	0,7
3-B	**0,8**	**0,6**	0,1	0,3	0,8	0,8
3-C	**0,2**	**0,1**	0	0,1	0,1	0,2
3-D	**1**	**0,5**	0,2	0,4	0,6	1
4-A	**0,5**	**0,7**	0,2	0,4	1	1
4-B	**1**	**0,3**	0	0,2	0,4	0,5

SUBGRUPO B. PROBLEMAS						
		Media	Varianza	Desviaci	Mediana	Moda
Calificaciones		6,04	6,04	2,45	6.10	4,1
PROBLEMAS	**Nota máx.**	**Media**	**Varianza**	**Desviaci**	**Median**	**Moda**
1-A	**1,5**	**1,15**	0,34	0,58	1,5	1,5
1-B	**2**	**1,02**	0,48	0,7	1	0
2-A	**2,5**	**1,55**	0,89	0,95	1,7	2,5
2-B	**2**	**1,18**	0,6	0,77	1,2	2
2-C	**2**	**1,14**	0,64	0,8	1,2	2

IV.9. Descripción de los datos obtenidos de la ENTREVISTA FINAL.

La entrevista FINAL fue realizada a los alumnos en el mes de octubre, una vez que ya se habían realizado los exámenes de septiembre y había pasado cierto tiempo de la finalización de la experiencia educativa. A pesar de que la asignatura fue suspendida por 2 alumnas que formaron parte de la experiencia educativa, sin embargo no se presentaron al examen de septiembre y perdí totalmente el contacto con ellas. No pude realizar la entrevista final que pretendía verifican los datos que se habían ido elaborando en base a las entrevista anteriores y las pruebas objetivas que se habían realizado (problemas, cuestiones y examen). Así pues únicamente pudimos realizar la entrevista final a 13 de los 15 alumnos que continuaban en la experiencia educativa. En concreto realizamos las entrevistas a los siguientes alumnos:

13 A. Cuéllar
14 J. P. Trigo
15 J. Revuelta
16 M. Verdú
17 D. Rubiano
18 S. Rosado
19 E. Sanz
20 S. Rúa
21 S. Santos
22 L. Rubio
23 L. Tarno
24 A. Perpiñá
25 J.I. Gómez

Como acabamos de comentar, no pudimos concertar entrevista con las alumnas C. Sevilla y J. Sanz que fueron precisamente las que suspendieron la asignatura. El modelo de la entrevista final se puede consultar en el ANEXO XIII y dado que el contenido de las entrevistas resulta muy complejo de resumir, ya que requiere un estudio analítico que realizaremos en el capítulo V, únicamente podemos señalar que las transcripciones de TODAS las entrevistas finales se pueden consultar en el CD adjunto a esta memoria. También se puede consultar a modo de ejemplo la transcripción de una de las entrevistas intermedias realizadas en el ANEXO XIII.

IV.10. Descripción de los datos obtenidos de la ENTREVISTA CON LA OBSERVADORA CUALIFICADA.

A lo largo de toda la experiencia didáctica, estuvo presente una observadora cualificada, Catedrática del Departamento de Análisis Económico: Economía Cuantitativa, que ha impartido docencia en dicha asignatura a lo largo de los últimos 15 años. La presencia de la observadora no entorpeció nada la marcha del curso, los alumnos llegaron a pensar que era una alumna. A lo largo de esta experiencia se sentó en la última fila del aula.

La entrevista se realizó el mes de Octubre de 2001, después de haber pasado un año de la experiencia didáctica. El modelo de entrevista que se planteó inicialmente (se puede consultar en el ANEXO XIV, parte 1) no se siguió al pie de la letra, sirvió únicamente de guía de la entrevista de la que se puede consultar toda la transcripción de la misma en el ANEXO XIV; parte 2.

El análisis de datos de esta entrevista se desarrolla en el capítulo V.

IV.11. Datos obtenidos de las TUTORÍAS y EJERCICIOS DE MANIPULACIÓN.

1. TUTORÍAS REALIZADAS POR INTERNET

Como ya comentamos en el capítulo III, se propusieron unas tutorías por Internet, de las que esperábamos obtener datos que sirvieran para añadir al conjunto total de datos obtenidos por otros medios, sin embargo tan sólo recibí una consulta por e-mail relacionada con el cálculo de la matriz asociada a una aplicación lineal. Esta circunstancia es síntoma de dos posibles situaciones: o bien los alumnos resolvían todas sus dudas en clase o bien resolvían sus dudas entre ellos, circunstancias que en todo caso son buenos indicadores de la estrategia didáctica, pues en el primer caso, muestrarían un elevado grado de interactividad en el aula y en el segundo caso serían indicativo de que existe mucha colaboración entre los alumnos.

2. EJERCICIOS DE MANIPULACIÓN.

Los alumnos tan solo entregaron dos ejercicios de manipulación, por lo que el conjunto de datos que esperábamos recoger con estos ejercicios ha sido inexistente. Nuevamente podríamos conjeturar posibles causas que han motivado este hecho. Se me ocurren dos causas:

a) que los alumnos no tuviesen tiempo material de realizar todos los ejercicios de manipulación
b) que los alumnos no considerasen importantes estos ejercicios ya que eran manipulaciones similares a las realizadas en clase y se centrasen en los problemas propuestos.

En ambos casos la circunstancia que motiva esta inexistencia de datos es perfectamente asumible.

.

CAPÍTULO V:
ANÁLISIS DE LOS DATOS.

V.1. Descripción general del proceso de análisis realizado.

Una vez realizado el proceso de organización de datos tal como hemos comentado a lo largo del capítulo anterior, nos enfrentamos al análisis de datos. Este análisis es el que nos ha permitido obtener las conclusiones finales a partir de las cuales hemos elaborado el informe final de la investigación. Los datos recogidos en la investigación se pueden clasificar en tres grandes grupos:

DATOS OBTENIDOS POR OBSERVACIONES DEL INVESTIGADOR:

- Notas de campo

DATOS OBTENIDOS DIRECTAMENTE DE LOS ALUMNOS.

A) DATOS OBTENIDOS DE ENTREVISTAS
- encuesta inicial de selección
- entrevista inicial de toma de contacto y obtención de primeras impresiones
- entrevista intermedia, para profundizar las cuestiones de la investigación
- entrevista final, para verificar las impresiones y datos que se fueron obteniendo en las pruebas iniciales

B) DATOS OBTENIDOS DE PRUEBAS OBJETIVAS
- observaciones de los problemas entregados por los alumnos
- observaciones de las cuestiones teóricas entregadas por los alumnos
- observaciones del examen final

DATOS OBTENIDOS DE UN OBSERVADOR EXTERNO

- Entrevista realizada a la observadora cualificada que presenció todo el curso experimental.

Estos bloques de datos nos han permitido realizar dos tipos de análisis: un análisis vertical y un análisis horizontal o longitudinal. El análisis vertical se ha realizado considerando en cada caso las diferentes cuestiones de la investigación, mientras que el análisis horizontal o longitudinal se ha desarrollado analizando cada una de las cuestiones sobre todos los casos. Para facilitar la interpretación y la lectura de este capítulo vamos a describir como ha sido el proceso general que hemos tenido en cuenta en cada uno de estos dos tipos de análisis.

A) ANÁLISIS VERTICAL DE LOS CASOS

Con el **ANÁLISIS VERTICAL** hemos analizado por separado cada uno de los casos (alumnos) objeto de la investigación, a partir de los datos cualitativos obtenidos tanto de las entrevistas realizadas a los alumnos como de las pruebas objetivas entregadas por los mismos. Este análisis vertical nos ha proporcionado unas "CONCLUSIONES FINALES DE CADA CASO", es decir unas conclusiones particularizadas sobre cada uno de los participantes en la investigación. Para poder elaborar las "conclusiones finales de cada caso" hemos diseñado un proceso secuencial de análisis con el fin de extraer la información significativa y agruparla en torno a las cuestiones iniciales de la investigación. Este análisis secuencial lo hemos realizado en primer lugar sobre los datos objetivos (problemas, cuestiones y examen final) y hemos obtenido una "síntesis de datos objetivos" para cada caso. De la misma forma hemos sometido el análisis secuencial sobre los datos subjetivos (encuesta inicial, entrevista inicial, entrevista intermedia) y hemos conseguido elaborar lo que hemos denominado la "síntesis de datos subjetivos". Agrupando estas dos síntesis obtuvimos las denominadas "CONCLUSIONES PARCIALES DE CADA CASO". A continuación con el análisis de los datos obtenidos de la entrevista final resultó la denominada "síntesis de la entrevista final" que nos ha permitido contrastar y verificar los datos que habíamos obtenido en las conclusiones parciales. A partir de esta verificación y contraste hemos podido elaborar las conclusiones finales de cada caso.

Como hemos podido observar el proceso de ANÁLISIS VERTICAL está basado principalmente en un ANÁLISIS SECUENCIAL DE DATOS. Este análisis secuencial, es un proceso de análisis cualitativo que parte de un conjunto de datos textuales, con los que extraemos los elementos o unidades significativas para la investigación. Estos elementos significativos deben ser codificados y categorizados con el fin de obtener una síntesis de datos, que no es más que un conjunto de precategorías justificadas por un conjunto de unidades significativas que manifiestan los atributos y caracteres propios de esta categorización. Como acabamos de observar este proceso requiere distinguir un conjunto de fases analíticas que describimos a continuación:

1. Separación de las unidades significativas. El proceso ha consistido en separar el conjunto de frases o párrafos que ofrecen una característica o atributo significativo para las cuestiones iniciales de nuestro proceso de investigación. Estas unidades textuales las hemos definido como unidades significativas o elementos significativos. Este proceso de separación ha sido un proceso minucioso que nos ha obligado a leer una y otra vez los datos elaborados previamente.

2. Precategorización y codificación de las unidades significativas.

A medida que realizábamos la separación de unidades significativas, era necesario efectuar dos procesos muy importantes a saber:

- en primer lugar indicar la PRECATEGORÍA que generaba esta unidad,
- y en segundo lugar realizar la CODIFICACIÓN que nos permitiera localizar adecuadamente cada elemento significativo en el conjunto de datos, es decir localizar la cita textual dentro de todos los datos a través de un código concreto.

Se trataba por tanto de establecer un conjunto de precategorías en función de los atributos o aspectos significativos que proporcionaban cada una de las unidades significativas obtenidas y realizar una codificación adecuada de las unidades significativas.

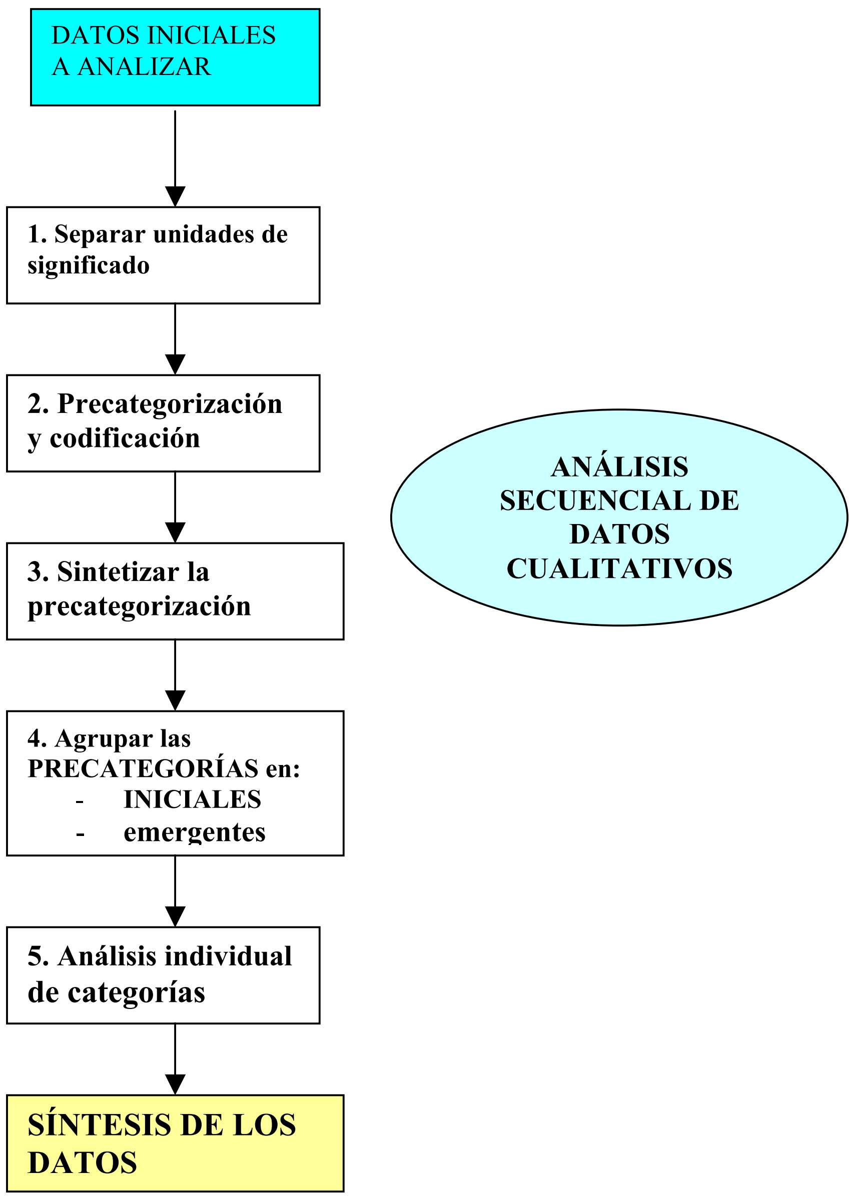
3. Sintetizar los elementos significativos. A partir del conjunto de elementos significativos etiquetados con un CÓDIGO y un ATRIBUTO característico, necesitamos formular una síntesis de cada elemento significativo así como una clasificación de cada uno de ellos conforme a la subcategoría a la cual se referían.

4.Agrupar las precategorías según las categorías iniciales o categorías emergentes. A partir de estos elementos significativos y sus atributos fundamentales hemos tenido que realizar una análisis de las "precategorías" obtenidas en esta primera aproximación para poderlas encuadrar dentro de las cuestiones iniciales de la investigación, para que nos permitieran contestar a las diferentes cuestiones planteadas inicialmente. También han surgido ciertas precategorías que no contestaban a estas cuestiones iniciales y que han configurado las denominadas categorías emergentes.

5. Análisis individualizado de categorías. A través del estudio pormenorizado de las síntesis recogidas en cada una de las categorías, hemos analizado cada uno de los

ELEMENTOS O UNIDADES SIGNIFICATIVAS que habíamos agrupado en cada categoría, para obtener así una descripción parcial de cada una de las cuestiones iniciales o bien obtener características descriptivas no previstas de la investigación a modo de categorías emergentes. Estos elementos o unidades significativos nos han permitido estructurar cada una de las cuestiones, elaborando un resumen, un conjunto de conclusiones para cada cuestión, en el que hemos incluido las unidades significativas que refutan cada una de las conclusiones citadas, consiguiendo de esta manera la síntesis de datos, producto final de este proceso secuencial de análisis.

Para obtener una visión más gráfica del proceso podemos considerar el siguiente esquema:



El ANALISIS SECUENCIAL DE DATOS CUALITATIVOS ha sido un esquema de análisis que se ha utilizado en varias ocasiones a lo largo del análisis vertical. Este esquema de análisis se ha realizado en las cinco etapas que describimos a continuación:

ETAPA A: Síntesis de datos de las pruebas objetivas.

A partir de las observaciones elaboradas por el investigador sobre la base de los problemas y cuestiones entregados por los alumnos y del examen final, y tras realizar sobre estas observaciones el proceso de análisis secuencial de datos, obtuvimos una clasificación de las diferentes unidades significativas que aparecieron en estas observaciones en las diferentes precategorías que consideramos importantes. El resultado final fue lo que denominamos la síntesis de datos de las pruebas objetivas para cada uno de los casos de la investigación.

ETAPA B: Síntesis de los datos subjetivos.

Una vez transcritas sobre el papel las entrevistas realizadas a los alumnos y después de varias lecturas detalladas de las mismas (encuesta inicial, entrevista inicial y entrevista intermedia) hemos obtenido un conjunto de ELEMENTOS O UNIDADES SIGNIFICATIVAS que una vez agrupados han ido definiendo el conjunto de subcategorías que han ofrecido una respuesta clara a las cuestiones iniciales de nuestra investigación.

ETAPA C: Cuadro de conclusiones parciales del caso.

A partir de la síntesis de los datos de pruebas objetivas realizada en la etapa A y de la síntesis de los datos subjetivos realizadas en la etapa B, y mediante un proceso de agrupamiento y síntesis de las diferentes precategorías obtenidas conseguimos obtener un cuadro de conclusiones parciales del caso que contestaban inicialmente a cada una de las cuestiones de la investigación.

ETAPA D: Síntesis de datos de la entrevista final.

A partir de los datos obtenidos en la entrevista final, y realizando nuevamente un proceso de análisis secuencial de datos hemos podido obtener la síntesis de datos de la entrevista final que nos ha servido para completar el análisis en la siguiente etapa.

ETAPA E: Verificación de datos: conclusiones finales del caso.

Con la síntesis de datos de la entrevista final y las conclusiones parciales del caso mediante un proceso de contraste de cada una de las unidades significativas hemos podido elaborar unas conclusiones finales de cada caso. Este contraste nos ha permitido VERIFICAR los datos obtenidos en las conclusiones parciales, pudiendo de esta forma elaborar para cada cuestión unas CONCLUSIONES FINALES DEL CASO.

B) ANÁLISIS HORIZONTAL O TRANSVERSAL.

Las conclusiones finales de cada caso nos han proporcionado una visión individualizada de la investigación, es decir, una visión centrada en las cuestiones formuladas en nuestra investigación desde la perspectiva de cada caso. Para obtener unas conclusiones comparadas y contrastadas de cada una de las cuestiones y poder así, formular unas conclusiones definitivas de la investigación ha sido necesario realizar un análisis horizontal o transversal de cada una de las cuestiones. Esta comparativa ha facilitado el contraste y la triangulación de los datos cualitativos obtenidos de:

a) las conclusiones finales de cada caso a partir del análisis vertical,
b) los datos obtenidos en las notas de campo,
c) los datos cuantitativos obtenidos de las pruebas objetivas realizadas a los subgrupos A y B
d) y de la entrevista realizada a la observadora cualificada.

Para realizar este ANÁLISIS HORIZONTAL hemos realizado los siguientes análisis previos:

1. A partir de las CONCLUSIONES FINALES DE CADA CASO hemos elaborado para cada CUESTIÓN objeto de estudio, unas **CONCLUSIONES PARCIALES DE CADA CUESTIÓN** utilizando únicamente los datos cualitativos de las entrevistas y pruebas objetivas.

2. Considerando los datos cuantitativos obtenidos de las evaluaciones y valoraciones de las diferentes pruebas objetivas, y teniendo en cuenta los contenidos que se han ido evaluando en cada una de las pruebas (cuestiones teóricas entregadas, problemas entregados y examen final) hemos elaborado un **CUADRO RESUMEN DE PRUEBAS OBJETIVAS** tanto para el subgrupo A (con DERIVE) como para el subgrupo B (sin DERIVE).

3. Con las notas de campo elaboradas por el investigador a lo largo de la investigación, y considerando las cuestiones de la investigación elaboramos unas **SÍNTESIS DE NOTAS DE CAMPO**.

4. Por último a partir de la encuesta realizada a la observadora cualificada hemos realizado unas **CONCLUSIONES DE LA ENTREVISTA CON LA OBSERVADORA CUALIFICADA,** que

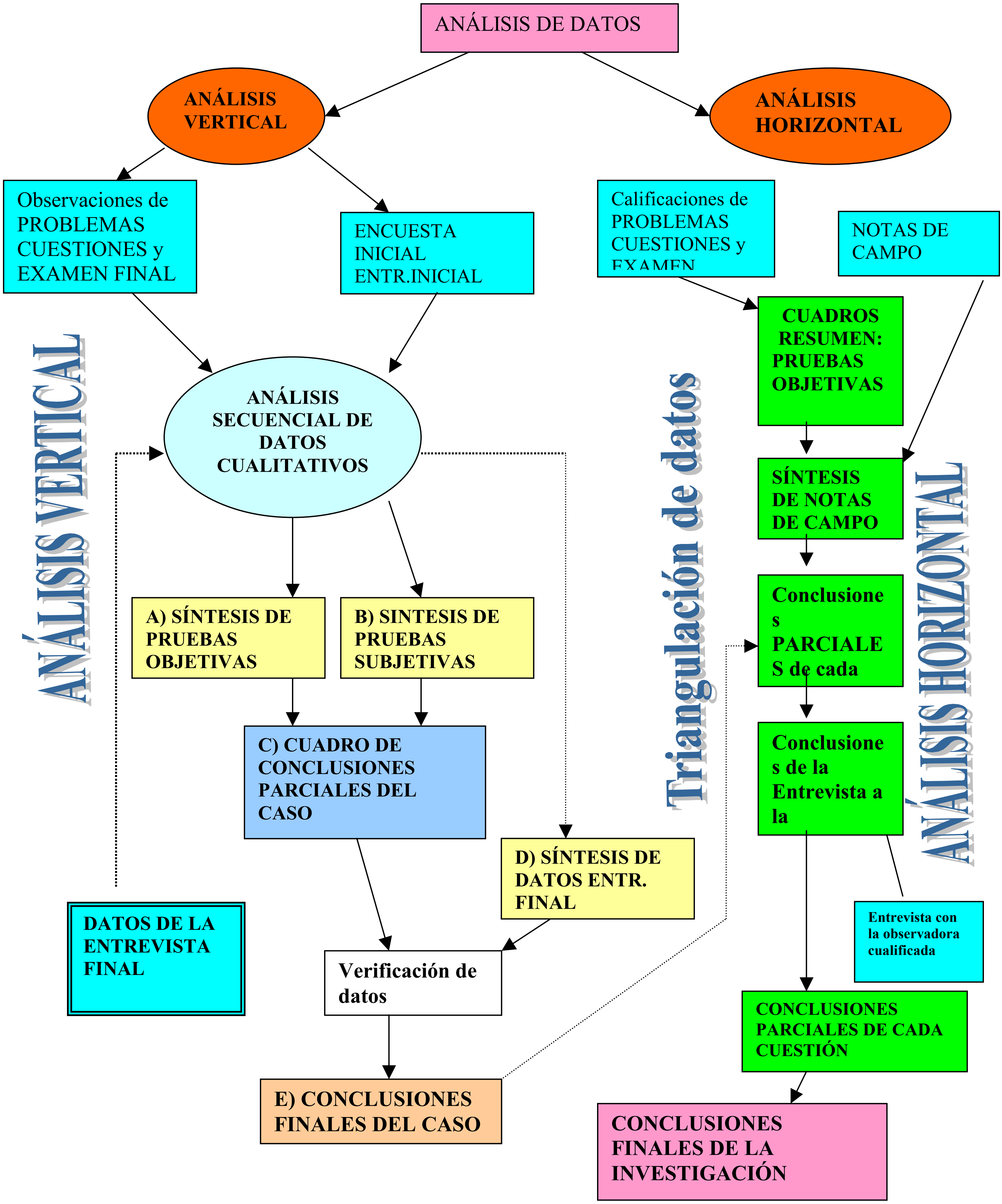
contiene elementos significativos que nos permitan contrastar cada cuestión.

5. La última fase del análisis horizontal constituye el denominado proceso de **TRIANGULACIÓN DE DATOS,** que tiene en cuenta todos los datos obtenidos anteriormente

- Conclusiones parciales de cada cuestión.
- Resumen de las Notas de Campo
- Calificaciones y observaciones de las pruebas objetivas realizadas a los SUBGRUPOS A (con DERIVE) y SUBGRUPO B(sin DERIVE)
- Encuesta realizada a la observadora cualificada

y de esta forma obtenemos las CONCLUSIONES FINALES DE LA INVESTIGACIÓN.

Un posible esquema del proceso de ANÁLISIS DE DATOS sería el siguiente:


ANÁLISIS DE DATOS
ANÁLISIS VERTICAL
ANÁLISIS HORIZONTAL
Observaciones de PROBLEMAS CUESTIONES y EXAMEN FINAL
ENCUESTA INICIAL ENTR.INICIAL
Calificaciones de PROBLEMAS CUESTIONES y EXAMEN
NOTAS DE CAMPO
CUADROS RESUMEN: PRUEBAS OBJETIVAS
ANÁLISIS VERTICAL
ANÁLISIS SECUENCIAL DE DATOS CUALITATIVOS
Triangulación de datos
SÍNTESIS DE NOTAS DE CAMPO
ANÁLISIS HORIZONTAL
Conclusiones PARCIALES de cada
A) SÍNTESIS DE PRUEBAS OBJETIVAS
B) SINTESIS DE PRUEBAS SUBJETIVAS
C) CUADRO DE CONCLUSIONES PARCIALES DEL CASO
Conclusiones de la Entrevista a la
D) SÍNTESIS DE DATOS ENTR. FINAL
DATOS DE LA ENTREVISTA FINAL
Entrevista con la observadora cualificada
Verificación de datos
CONCLUSIONES PARCIALES DE CADA CUESTIÓN
E) CONCLUSIONES FINALES DEL CASO
CONCLUSIONES FINALES DE LA INVESTIGACIÓN

V.2. Análisis vertical de casos.

Como acabamos de comentar en el apartado anterior, con el ANÁLISIS VERTICAL DE DATOS intentábamos obtener unas conclusiones finales para cada unos de los casos que han intervenido en la investigación. Estas conclusiones nos han servido de soporte para elaborar las "CONCLUSIONES PARCIALES DE CADA CUESTIÓN" información a partir de la cual hemos podido obtener las conclusiones de la investigación.

Para realizar este ANÁLISIS VERTICAL, hemos tomado como base las transcripciones de las entrevistas realizadas a lo largo de la investigación, así como de las observaciones y evaluaciones de las diferentes pruebas objetivas realizadas (cuestiones teóricas, problemas propuestos y examen final). A partir de estas prueba hemos ido extrayendo los ELEMENTOS SIGNIFICATIVOS que nos han permitido obtener conclusiones en cada uno de los casos. Las etapas en las que hemos dividido este análisis vertical de casos coincidentes con las fases del análisis secuencial de datos descrito en el apartado anterior, son las siguientes:

1. **SEPARACIÓN DE LAS UNIDADES DE SIGNIFICADO.**

A partir de las transcripciones de las encuestas iniciales, entrevistas iniciales e intermedias realizadas a los alumnos y los datos de las pruebas objetivas realizadas por cada uno de los alumnos separamos los elementos que consideramos significativos en cada una de las pruebas para cada una de las cuestiones previas de la investigación, es decir, realizamos una separación de los datos en unidades temáticas conforme a las cuestiones de la investigación.-+

2. **CATEGORIZACIÓN Y CODIFICACION DE DATOS.**

Para obtener y separar de una forma ordenada las unidades significativas de las pruebas que hemos señalado, ha sido necesario realizar una CATEGORIZACIÓN Y CODIFICACIÓN de los datos, de tal forma que a partir de las características que iban aportando cada una de las unidades significativas se pudiera establecer un conjunto de precategorías para el análisis. La codificación ha servido para etiquetar las unidades significativas conforme a unos criterios generales que nos permitieran localizar de forma automática cualquier código en el conjunto de datos y por otro lado para utilizar los códigos como representantes de la unidad en el proceso de análisis.

3. SINTESIS Y AGRUPAMIENTO DE UNIDADES DE SIGNIFICADO CONFORME A LA CATEGORIZACIÓN PREVIA

A partir de las unidades significativas obtenidas de los diferentes conjuntos de datos efectuamos una síntesis y agrupamiento de las unidades en función de los significados que aportaban cada uno de ellos a las diferentes precategorías establecidas previamente. Esto nos permitió obtener un conjunto de bloques de significado, perfectamente referenciados de acuerdo a nuestra codificación.

4. AGRUPAMIENTO DE UNIDADES DE SIGNIFICADO EN TORNO A LAS CUESTIONES INICIALES.

A partir de los bloques de significado obtenidos (precategorías) y teniendo en cuenta las cuestiones iniciales de la investigación, agrupamos cada uno de estos bloques en torno a cada una de las cuestiones antes comentadas. Dado que han existido bloques que no se podían incorporar en las cuestiones iniciales, consideramos nuevas cuestiones emergentes que podrían ser contestadas por estos bloques de significado.

5. ANÁLISIS INDIVIDUALIZADO DE CUESTIONES. PARA CADA CASO

Los bloques de unidades significativas de cada una de las cuestiones de la investigación nos permitieron, para cada caso concreto, realizar un estudio de la cuestión en torno a ciertos ASPECTOS CARACTERÍSTICOS O ATRIBUTOS perfilados por las diferentes unidades de significado.

6. ELABORACIÓN DE LAS CONCLUSIONES PARCIALES DEL CASO

Una vez analizados los aspectos y atributos de cada cuestión con los datos antes mencionados establecimos las conclusiones parciales de cada caso.

7. VERIFICACIÓN DE DATOS.

A partir de la codificación, categorización y agrupamiento en unidades de significado de los datos proporcionados por la ENTREVISTA FINAL, que contiene opiniones y valoraciones posteriores a la realización del examen, hemos conseguido elementos significativos suficientes que nos ha permitido verificar las conclusiones parciales de cada caso y así elaborar las CONCLUSIONES FINALES DE CADA CASO:

V.2.1. CODIFICACIÓN DE ELEMENTOS SIGNIFICATIVOS

Antes de pasar a analizar cada uno de los casos, y dado que las UNIDADES O ELEMENTOS SIGNIFICATIVOS que respaldan cada conclusión requieren de cierta sistemática de referencia, es decir de una cierta CODIFICACIÓN; pasamos a continuación a describir brevemente como ha sido la codificación que hemos utilizado en el análisis.

a) CODIFICACIÓN DE LOS DATOS

PRUEBA DATOS	CODIGO GENERAL	CODIGOS PARTICULARES
III. Encuesta inicial	ENCINI	La encuesta inicial se pasó a la mayor parte de los alumnos, por lo que un primer código particular hacía referencia a cada alumno (caso) según la codificación que indicaremos a continuación para los alumnos. En segundo lugar dado que la encuesta inicial estaba dividida en una serie de items (en total 12) el segundo código particular que identificaba totalmente a la unidad significativa sería el número de item. Así pues el esquema general de codificación de elementos significativos obtenidos de la encuesta inicial ha sido el siguiente: **[ENCINI-caso-item]** Ejemplo: [ENCINI-caso1-12] se refiere al item 12 de la encuesta inicial pasada al caso 1
Entrevista inicial	ENTINI	Nuevamente en la entrevista inicial el primer código particular ha sido el caso. El segundo tiene que ver con la numeración de la unidad significativa. Como en la entrevista inicial no había numeración, en el proceso de separación de unidades de significado tuvimos que ir numerando estas unidades. De esta forma el esquema general de codificación para los elementos significativos obtenidos de la entrevista inicial ha sido el siguiente: **[ENTINI-caso-item]** Ejemplo: [ENTINI-caso1-7] se refiere a la entrevista inicial pasada al caso 1, y el elemento significativo 7.
Entrevista intermedia	ENTINT	El primer código particular vuelve a ser el caso o alumno. En cuanto al segundo código de esta prueba, se identificó con la numeración de los items que tenía la entrevista: 1.1, 1.2, 1.3,......... 14.5,G.1, G.2,...G.5 , por tanto para referirnos a una unidad significativa de la entrevista intermedia utilizamos el esquema: **[ENTINT-caso-item]** Ejemplo [ENTINT-caso3-12.1] se refiere a la pregunta 12.1 de la entrevista intermedia realizada al caso 3.

Entrevista final	ENTFIN	En la entrevista había items numerados de la forma 1.1 ..... 14.4.... Por tanto haremos el esquema general para referirnos a una unidad significativa de la entrevista final utiliza el siguiente esquema: **[ENTFIN-caso-item]** **IV. Ejemplo:** [ENTFI-caso10-1.7] se refiere a la pregunta 1.7 de la entrevista final realizada al caso 10
Problemas entregados	PROB	Como los problemas propuestos estaban numerados por 1.1,1.2... al igual que los resúmenes de observaciones realizadas a los mismos, entonces las referencias a estas observaciones las hemos codificado utilizando el esquema: **[PROB-caso-problema]** Ejemplo: [PROB-caso5-II.6] se refiere a una observación realizada del problema II.6 del caso 5.
Cuestiones entregadas	CUES	Como las cuestiones propuestas estaban numeradas por I.1, I.2,.... entonces los resúmenes de observaciones realizadas de las cuestiones entregadas por los alumnos utilizaron la misma numeración. De esta forma el esquema para referenciar una unidad significativa de las cuestiones entregadas utilizó el siguiente esquema: **[CUES-caso-cuestión]** Ejemplo: [CUES-caso3-IV.5] se refiere a la cuestión teórica IV.5 realizada por el caso 3.
Examen final	EXFIN	Las observaciones realizadas de los exámenes finales se podían referenciar en cada caso haciendo uso de la numeración que tenían los problemas o bien las cuestiones por lo que para problemas utilizaremos *prob-número* y para cuestiones *cues-número* **[EXFIN-caso-(prob-número/cues-número)]** Ejemplo: [EXFIN-caso5-prob1.2] se refiere al problema 1.2 del examen final realizado por el caso 5. [EXFIN-caso3-cues1] se refiere a la cuestión 1 del examen final realizado por el caso 3.

b) CODIFICACIÓN DE LOS CASOS:

Nombre del alumno	**Identificador del caso**
1.Antonio Cuellar Hervás	***caso-1***
2. Jorge Revuelta Oca	***caso-2***
3. Sebastián Rosado	***caso-3***
4. Daniel Rubiano	***caso-4***
5. Juan Pablo Trigo	***caso-5***
6. Sergio Santos	***caso-6***
7. Eduardo Sanz	***caso-7***
8. Antoni Perpiña	***caso-8***
9. Luis Tarno	***caso-9***
10. Laura Rubio	***caso-10***
11. José Ivanoff Gómez	***caso-11***
12. Sergio Rúa	***caso-12***
13 María Verdú	***caso-13***
14. Jessica Sanz	***caso-14***
15. Cristina Sevilla	***caso-15***
16. Ricardo Sánchez	***caso 16***

Con esta CODIFICACIÓN, cualquier unidad significativa del texto ha podido ser localizada fácilmente, permitiendo de esta forma utilizar la codificación del elemento significativo sin necesidad de incluir íntegramente su texto a lo largo de todo el análisis. Esto nos ha facilitado el análisis y a su vez la localización textual de aquellas unidades que confirmaban un ASPECTO o ATRIBUTO.

Así por ejemplo si tenemos la cita textual

"...los ejercicios de manipulación los repites tantas veces entonces parece que como el concepto teórico lo estás aplicando sucesivas veces..."

referida a la respuesta dada por el ***caso-1*** en la entrevista intermedia, pregunta 4.7; entonces su codificación sería:

"...los ejercicios de manipulación los repites tantas veces entonces parece que como el concepto teórico lo estás aplicando sucesivas veces..." [ENTIN-caso1-4.7]

y de esta manera cualquier referencia en el análisis al código [ENTIN-caso1-4.7] nos permite por un lado localizar exactamente la cita textual a la cual se refiere y por otro lado nos permite citar todas las unidades significativas que confirman cierto ATRIBUTO sin necesidad de incluir todo el texto. En el anexo XVI podemos encontrar a modo de ejemplo una codificación de las unidades significativas de un caso. No obstante, en el CD-ROM adjunto a esta investigación podremos encontrar todas las unidades significativas que han servido de base para elaborar la investigación.

Debemos señalar también que en las pruebas objetivas (problemas resueltos, cuestiones entregadas y examen final) hemos realizado unas observaciones previas al análisis. Estas observaciones realizadas por el investigador han servido como dato para completar el análisis, es decir no hemos trabajado con el texto exacto de la prueba objetiva sino que hemos usado las observaciones realizadas previamente durante el proceso de evaluación de las pruebas.

Hacemos a continuación una tabla rápida de acceso

PRUEBA	CODIGO	Items
Encuesta inicial	[ENCINI-caso-item]	según numeración
Entrevista inicial	[ENTINI-caso-item]	según numeración
Entrevista intermedia	[ENTIT-caso-item]	1.1 al 1.4; 2.1 al 2.3, 3.1 al 3.6, 4.1 al 4.7, 5.1.al 5.6, 6.1 al 6.5, 7.1 al 7.3, 8.1 al 8.2, 9.1 al 9.5, 10.1 al 10.3, 11.1 al 11.4, 12.1 al 12.3, 13.1 al 13.4, 14.1 al 14.5, g.1, g.2, g.3, g.4
Entrevista final	[ENTINI-caso-item]	1.1 al 1.8, 2.1 al 2.8, 3.1 al 3.6, 4.1 a. 4.12, 5.1 a. 5.3, 6.1 al 6.4, 7.1 al 7.2, 8.1 al 8.4, 9.1 al 9.5 , 10.1 al 10.4, 11.1 al 11.4, 12.1 al 12.3, 13.1 al 13.6 , 14.1 al 14.4, general
Notas de campo	[NOTC-día]	23-feb, 24-feb, 28-feb, 2-mar, 6-mar, 9-mar, 13-mar, 15-mar, 16-mar, 20-mar, 21-mar, 23-mar, 27-mar, 30-mar, 5-ab, 10-abr, 11-abr, 13-abr, 25-abr, 8-may, 9-may, 16-may, 17-may, 21-may, 24-may, 28-may, 30-may, 1-jun
Problemas entregados	[PROB-caso-proble]	1.1 al 1.10, 2.1 al 2.14, 3.1 al 3.12, 4.1 al 4.10, 5.1 al 5.10, 6.1 al 6.8
Cuestiones entregadas	[CUES-caso-cuestio]	1.1 al 1.4, 2.1 al 2.4, 3.1 al 3.4, 4.1 al 4.4, 5.1 al 5.4 , 6.1 al 6.4 y 7.1 a. 7.4
Examen final	[EXFIN-caso-cue/pr]	cuestiones: cues1,cues2,....,cues10 problemas: prob1.a, prob1.b, prob1.c, prob1.d, prob1.e, prob1.f; prob2.a, prob2.b, prob2.c, prob2.d, prob2.e, prob2.f; prob3.a, prob3.b, prob3.c, prob3.d, prob4.a, prob4.b

V.2.2. PRECATEGORÍAS DE LA INVESTIGACIÓN.

a) PROBLEMAS Y CUESTIONES PROPUESTOS Y EXAMEN FINAL.

En el proceso de análisis y separación de unidades significativas de las pruebas objetivas pudimos generar básicamente un conjunto de precategorías en torno a las cuales agruparíamos los elementos significativos marcados. Las precategorías que utilizamos para estas pruebas fueron las siguientes:

1. **Errores y dificultades conceptuales** que se deducen de las pruebas objetivas. Dentro de esta precategoría efectuamos una nueva clasificación en función del tema al que se refiriese ese error conceptual.
2. **Conceptos y procedimientos que parece dominar**. Dentro de esta precategoría nuevamente efectuamos una nueva clasificación de los conceptos dominados entre los siete capítulos del temario.
3. **Dificultades del manejo del programa**. Incluyendo aquí los elementos que consideramos significativos para indicar cuales habían sido los errores más típicos en el uso del programa DERIVE.
4. **Grado de utilización de DERIVE en las cuestiones teóricas**. En esta precategoría agrupamos los elementos significativos que indicaban si el alumno había utilizado DERIVE en las cuestiones teóricas.

b) ENCUESTA INICIAL, ENTREVISTAS INICIAL E INTERMEDIA.

En el proceso de categorización de los datos obtenidos de las entrevistas inicial e intermedia así como de la encuesta inicial consideramos que las características que tenían el conjunto de elementos significativos nos permitían elaborar un conjunto de precategorías que ofrecían respuestas a las diferentes cuestiones iniciales propuestas en la investigación y que nosotros definimos de la siguiente forma:

1. **Sistema de notación intermedio**
2. **Interactividad**
3. **Protagonismo y autocreación.**
4. **Desarrollo de contenidos esenciales.**

5. **Esfuerzo Rutinario**
6. **Herramienta de experimentación**
7. **Aprendizajes significativos**
8. **Estrategias de resolución de problemas**
9. **Barreras adicionales**
10. **Autonomía cognitiva.**
11. **Relación dialéctica**
12. **Aprendizaje colaborativo.**
13. **Atención a la diversidad**
14. **Motivación**

Asimismo consideramos que había un conjunto de temáticas que se escapaban a esta primera clasificación establecida inicialmente en la investigación relacionada con:

15. **Dinámica del curso.**
16. **Expectativas del curso.**
17. **Trayectoria educativa**.

V.2.3. ANÁLISIS DE CADA CASO

A partir de la codificación comentada en el apartado V.2.1. y de la categorización del apartado V:2.2. procedimos a desarrollar las cinco etapas del análisis vertical con cada uno de los casos de la investigación. A modo de ejemplo vamos a desarrollar de forma resumida el proceso de análisis seguido con uno de los casos, en particular con el caso 12 (S. Rúa).

A) ELABORACIÓN DE LA SÍNTESIS DE PRUEBAS OBJETIVAS.

A partir de las cuestiones teóricas entregadas por el caso 12, realizamos una distribución de las diferentes unidades significativas entre los temas y las precategorías iniciales (ver apartado V.2.2) y teniendo en cuenta la codificación general comentada en el apartado V.2.1. realizamos una síntesis de las tres pruebas analizadas cuestiones teóricas, problemas propuestos y examen final (en el ANEXO XVII se pueden consultar a modo de ejemplo las síntesis realizadas para esta tres pruebas para el caso 12) , y a partir de estas tres síntesis elaboramos un cuadro resumen sintético de las observaciones de datos y pruebas objetivas

RESUMEN SINTÉTICO DE LAS OBSERVACIONES DE DATOS Y PRUEBAS OBJETIVAS.

PRECATEGORÍAS	OBSERVACIONES SIGNIFICATIVAS	CONCLUSIONES
Errores y dificultades conceptuales	**TEMA 1.** No ha sabido manejar polinomios de grado menor que 4 como vectores de un espacio vectorial [PROB-caso12-1.2] No ha sabido calcular los vectores ortogonales a un subespacio vectorial [PROB-caso12-1.3] **TEMA 3** Ha generalizado a partir de un resultado concreto [PROB-caso12-3.1] En un problema con vectores paramétrico en el que intervenían los conceptos de independencia lineal le han faltado casos para determinar cuando esos vectores eran l.i. nuevamente ha tenido problemas con rangos [PROB-caso12-3.10] Ha tenido ciertos problemas para obtener el rango de una matriz 4x6 le han faltado estudiar menores [PROB-caso12-3.5] No ha sabido calcular el determinante de Vandermonde usando propiedades de determinante y utilizó directamente la función DET [PROB-caso12-3.8] **TEMA 4** No ha sabido determinar para qué valores de un parámetro un subconjunto definido por ecuaciones cartesianas es un subespacio vectorial [CUES-caso12-4.2] No ha hecho un tratamiento adecuación en la discusión de un sistema con dos parámetros, por un problema de distinción de casos en el estudio de los rangos [PROB-caso12-4.9] Discute mal un sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas pues como la matriz de coeficientes es de orden 4x3 y la ampliada de 4x4 primero estudia el rango de la matriz de coeficientes, y lo hace mal, hace una mala distinción de casos [PROB-caso12-4.4] No ha sabido aplicar el teorema de Rouche para determinar si un sistema es compatible indeterminaro [CUES-caso12-4.5] **TEMA 5** No ha sabido determinar que si una matriz A es diagonalizable entonces k.A	**TEMA 1** No ha sabido menejar espacios vectoriales con el de los polinomios de grado menor o igual que 4 [PROB-caso12-1.2] No ha sabido calcular vectores ortogonales a un subespacio vectorial dado [PROB-caso12-1.3] **TEMA 3** Ha tenido ciertos problemas con el cálculo de rangos [PROB-caso12-3.10], [PROB-caso12-3.5] Tampoco ha sabido calcular el determinante de Vandermonde usando propiedades y ha usado directamente la función DER [PROB-caso12-3.8] **TEMA 4.** Ha tenido ciertos problemas en la discusión de sistemas de ecuaciones con parámetros [PROB-caso12-4.9], [PROB-caso12-4.4], [CUES-caso12-4.5]

	también lo es [CUES-caso12-5.3] No ha sabido determinar cuando un conjunto de autovectores de una matriz pueden formar base del espacio total [CUES-caso12-cues-6]	
Procedimientos y conceptos que parece dominar	**TEMA 1** Entiende el concepto de dimensión de un subespacio vectorial [CUES-caso12-1.1] Sabe relacionar el número de ecuaciones no redundantes con la dimensión de un subespacio [CUES-caso12-1.1-b] Sabe relacionar el número de ecuaciones no redundantes de un subespacio con la dimensión del mismo [CUES-caso12-1.4-b] Sabe obtener la base de un susbespacio vectorial a partir de las ecuaciones cartesianas [PROB-caso12-1.4] Sabe determinar cuando un vector pertenece a un subespacio vectorial [PROB-caso12-1.4-b] Sabe obtener una base de un subespacio vectorial a partir de un sistema de generadores, así como las ecuaciones cartesianas del mismo [PROB-caso12-1.9] Sabe discutir la dimensión de un subespacio vectorial en función de parámetros [PROB-caso12-1.10] Sabe determinar la dimensión de un subespacio vectorial obteniendo una base de dicho subespacio así como mediante la relación entre dimensión y número de ecuaciones no redundantes [EXFIN-caso12-cues-1] Sabe obtener una base de un subespacio vectorial del cual se tiene un sistema de generadores [EXFIN-caso12-prob1-a] Sabe obtener las ecuaciones cartesianas de un subespacio vectorial del cual se tiene un sistema de generadores [EXFIN-caso12-prob1-b] Sabe obtener una base de un subespacio vectorial del que se tienen sus ecuaciones cartesianas [EXFIN-caso12-prob1-c] Sabe determinar si cuatro vectores no nulos son li. o ld [CUES-caso12-1.2] Sabe deducir que en R^2 tres vectores son siempre l.d. [CUES-caso12-1.3] Sabe que un conjunto de tres vectores l.i. en R^3 es una base de R^3 [CUES-caso12-1.4-a] Sabe que 4 vectores de R^3 no nulos no tienen porqué ser l.i. pueden ser l.d. [CUES-caso12-1.4-c] No ha sabido deducir que un conjunto de vectores l.i. no puede expresar de dos formas distintas un mismo vector [CUES-caso12-1.2-b]	**TEMA 1** Domina todo los conceptos relacionados con subespacios vectoriales: dimensión de un subespacio vectorial [CUES-caso12-1.1], cálculo de la dimensión de un s.v. usando el número de ecuaciones no redundantes [CUES-caso12-1.4-b], [EXFIN-caso12-cues-1], la base de un susbespacio vectorial a partir de sus ecuaciones cartesianas [PROB-caso12-1.4], [EXFIN-caso12-prob1-c] o a partir de un sistema de generadores [PROB-caso12-1.9], [EXFIN-caso12-prob1-b], o las ecuaciones cartesianas de un subespacio a partir de un sistema de generadores [EXFIN-caso12-prob1-b]. Domina los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores [CUES-caso12-1.2], [CUES-caso12-1.3], [CUES-caso12-1.4-a],

	Sabe que tres vectores no pueden ser l.i. si generan de dos formas distintas un mismo vector, cuestión que se contradice con el no haber completado la cuestión 2 [CUES-caso12-1.4-d] Sabe estudiar la independencia lineal de tres vectores que contienen un parámetro [EXFIN-caso12-cues-2] Sabe calcular perfectamente la intersección entre subespacios vectoriales [PROB-caso12-1.5] Sabe obtener una base del subespacio intersección de dos subespacios vectoriales [EXFIN-caso12-prob1-d] Sabe calcular perfectamente la suma entre subespacios vectoriales [PROB-caso12-1.5-b] No entiende claramente el concepto de suma directa de subespacios [PROB-caso12-1.5-c] Sabe deducir si el espacio total se puede obtener como suma directa de los subespacios vectoriales anteriores [EXFIN-caso12-prob1-f] Sabe obtener las ecuaciones cartesianas del subespacio suma de dos subespacios vectoriales [EXFIN-caso12-prob1-e] **TEMA 2** Sabe utilizar correctamente la fórmula de las dimensiones para relacionar la dimensión del núcleo y la imagen [CUES-caso12-2.1] Sabe determinar el núcleo e imagen de una aplicación lineal a partir de la matriz asociada y de la fórmula de las dimensiones [PROB-caso12-2.7-b] Sabe obtener la dimensión de la imagen y el núcleo de una aplicación lineal en función de distintos valores del parámetro que define cierta aplicación lineal [EXFIN-caso12-prob2-f] Sabe obtener perfectamente el núcleo e imagen de una aplicación lineal [PROB-caso12-3.9] Sabe determinar si una matriz constante tiene inversa [EXFIN-caso12-prob2-b] Sabe estudiar para qué valores de cierta matriz cuadrada paramétrica tiene inversa [EXFIN-caso12-prob2-d]	[CUES-caso12-1.4-c], [CUES-caso12-1.2-b], [CUES-caso12-1.4-d], [EXFIN-caso12-cues-2] Sabe obtener la intersección entre subespacios vectoriales [PROB-caso12-1.5], [EXFIN-caso12-prob1-d] Sabe calcular perfectamente la suma de subespacios vectoriales [PROB-caso12-1.5-b], [EXFIN-caso12-prob1-e] Y aunque al principio tuvo errores con el concepto de suma directa [PROB-caso12-1.5-c] parece haber dominado finalmente el concepto [EXFIN-caso12-prob1-f] TEMA 2 Sabe obtener perfectamente el núcleo e imagen de una aplicación lineal [PROB-caso12-2.7-b], aplicar la fórmula de las dimensiones, [PROB-caso12-3.9] [CUES-caso12-2.1], [EXFIN-caso12-prob2-f] Domina las condiciones de invertibilidad de una matriz [CUES-caso12-2.3], , [EXFIN-caso12-prob2-b], [EXFIN-caso12-prob2-d]

	Sabe obtener la aplicación lineal inversa a partir de la matriz inversa [PROB-caso12-2.5-c] Sabe deducir que si una matriz es no singular entonces los vectores columna de ella forman una base pero no tiene que ver con la traza [CUES-caso12-2.3]	
	No ha sabido relacionar las coordenadas en la base final de los vectores imagen de la base inicial de una aplicación lineal con las columnas de la matriz [CUES-caso12-2.2] No ha realizado procesos básicos de matrices como el cálculo de la matriz asociada, cálculo de la inversa en función de parámetros, era una aplicación lineal con parámetros [PROB-caso12-2.13] No ha calculado bien la matriz asociada a una aplicación lineal respecto de bases distintas de la canónica por un error de despiste pues se le ha olvidado calcular una de las columnas, sin embargo el proceso del resto está perfecto [PROB-caso12-2.8] Sabe obtener la matriz asociada a una aplicación lineal conocidas las imágenes de la base, así como deducir la dimensión de la imagen a partir del rango de la matriz [CUES-caso12-2.4] Sabe calcular la matriz asociada a una aplicación lineal respecto de bases distintas de las canónicas [PROB-caso12-2.5] Sabe calcular la matriz asociada de una aplicación lineal respecto de las bases canónicas [PROB-caso12-2.7] Sabe obtener la matriz asociada a una aplicación lineal respecto de bases distintas de la canónica [EXFIN-caso12-prob2-a] Sabe calcular la matriz asociada a una aplicación lineal con un parámetro respecto de las bases canónicas [EXFIN-caso12-prob2-c]	Aunque en algún problema no ha sabido obtener la matriz asociada [CUES-caso12-2.2], [PROB-caso12-2.13], [PROB-caso12-2.8], sin embargo se observa que luego ha sido un proceso que domina [CUES-caso12-2.4], [PROB-caso12-2.5], [PROB-caso12-2.7], [EXFIN-caso12-prob2-a], [EXFIN-caso12-prob2-c].
	Domina el proceso de gauss-Jordan para calculo de inversas [PROB-caso12-2.9-b] Sabe aplicar el método de Gauss-Jordan para obtener la inversa de una matriz [PROB-caso12-2.5-b] Sabe calcular la inversa de una matriz constante usando Gauss-Jordan y además utilizando muy pocos casos en este caso tan solo 4 pasos [EXFIN-caso12-prob2-e]	Domina el método de Gauss para el cálculo de la inversa [PROB-caso12-2.9-b], [PROB-caso12-2.5-b], [EXFIN-caso12-prob2-e]
	Sabe obtener una aplicación lineal a partir de las imágenes de ciertos vectores [PROB-caso12-2.6] Sabe identificar las características de una aplicación lineal, de tal forma que se permita deducir que la imagen de cierto vector no puede ser uno dado [EXFIN-caso12-cues-3]	Sabe obtener una aplicación lineal a partir de la imágenes de una base [PROB-caso12-2.6] y en general las características de una aplicación lineal [EXFIN-caso12-cues-3]

	TEMA 3 Sabe la relación entre matrices invertibles, determinantes y rango [CUES-caso12-3.4] Sabe determinar las condiciones que debe cumplir un parámetro de cierta matriz para tener inversa [PROB-caso12-3.7] Sabe determinar perfectamente cuando una ecuación paramétrica tiene inversa [PROB-caso12-3.11] Sabe que la traza de una matriz no tiene nada que ver con el hecho de que dicha matriz sea o no singular [PROB-caso12-3.2] Sabe calcular determinantes usando propiedades [CUES-caso12-3.3] Sabe deducir que el determinante de una matriz obtenida por combinaciones lineales de columnas de otra tiene el mismo determinante [EXFIN-caso12-cues-4] **TEMA 4** Sabe que un sistema que tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas es compatible siempre que su rango sea completo pero que también puede ser incompatible [CUES-caso12-4.1] Sabe aplicar el teorema de Rouche para discutir un sistema teórico [CUES-caso12-4.3] Sabe determinar la compatiblidad de un sistema que depende de parámetros [CUES-caso12-4.4] Sabe discutir un sistema de ecuaciones con un parámetro [PROB-caso12-4.2] Ha sabido discutir un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas con un parámetro [PROB-caso12-4.3] Sabe discutir perfectamente un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas con 2 parámetros [PROB-caso12-4.5-b] Sabe discutir un sistema en función de los distintos valores de cierto parámetro a [EXFIN-caso12-prob4-a] **TEMA 5** Sabe que la simetría de una matriz no es condición necesaria para la diagonalización, y que si una matriz tiene autovalores distintos es diagonalizable [CUES-caso12-5.1] Sabe la relación que existe entre matrices simétricas y matrices diagonalizables	**TEMA 3** Entiende las condiciones fundamental de invertibilidad usando determinantes [CUES-caso12-3.4], [PROB-caso12-3.7], [PROB-caso12-3.11] Parece conocer las principales propiedades de los determinantes [CUES-caso12-3.3], [ESXFIN-caso12-cues-4] **TEMA 4** Parece dominar perfectamente el Teorema de Rouche, para la discusión de sistemas [CUES-caso12-4.1], [CUES-caso12-4.3], incluso la discusión con parámetros [CUES-caso12-4.4], [PROB-caso12-4.2], [PROB-caso12-4.3], [PROB-caso12-4.5-b], [`EXFIN-caso12-prob4-a] **TEMA 5** Relaciona perfectamente las diferentes condiciones de diagonalización: para matrices simétricas [CUES-caso12-5.1], [CUES-caso12-5.4], cuando los autovalores se repiten [CUES-caso12-5.2],

	[CUES-caso12-5.4] Sabe relacionar entre el orden de multiplicidad de un autovalor y la dimensión del subespacio de autovectores [CUES-caso12-5.2] Sabe que la relación que hay entre los autovalores de una matriz A y kA [CUES-caso12-5.3-b] No ha hecho un problema que pretendía conocer ciertos valores incógnita de una matriz a partir de los conceptos de autovalor y autovector [PROB-caso12-5.2] Ha sabido obtener los valores incógnita de una matriz sabiendo que se conocen ciertos autovalores y autovectores, en definitiva el problema se reduce a resolver un sistema de 9 ecuaciones con 9 incógnitas [PROB-caso12-5.1] Sabe relacionar determinante, traza, autovalores y dimensión del subespacio de autovectores de cierta matriz [EXFIN-caso12-cues-7] Sabe relaciona el concepto de diagonalización de una matriz con la matriz de paso de dicho proceso de diagonalización [PROB-caso12-5.5] Sabe estudiar si dos matrices son diagonalizables [PROB-caso12-5.4] Ha sabido obtener los autovalores de una matriz paramétrica y determinar los valores que ha de tomar dicho parámetro para cumplir ciertas condiciones relacionadas con la diagonalización [PROB-caso12-5.6] Ha tenido problemas para determinar para qué valores de ciertos parámetros a y b cierta matriz es diagonalizable, su error ha venido fundamentalmente por un error que le ha provocado derive ya que al resolver un sistema no ha tenido en cuenta que era un sistema no lineal que con SOLVE daba soluciones erróneas [EXFIN-caso12-prob3-a] No ha hecho un tratamiento exhaustivo del estudio de los valores que tiene que tomar un parámetro para que una matriz sea diagonalizable [PROB-caso12-5.10] Sabe diagonalizar una matriz constante de orden 3 [EXFIN-caso12-prob3-b] **TEMA 6** Sabe deducir que si una matriz de orden 3 es invertible entonces no tiene autovalores nulos y por tanto no puede ser semidefinida [CUES-caso12-6.1] Sabe deducir que si una forma cuadrática es s.d.p. y su matriz asociada es no nula entonces el sistema homogéneo Ax=0 es compatible indeterminado [CUES-caso12-6.2] Sabe relacionar las formas cuadráticas que tienen por matrices asociadas a una matriz A y su inversa, así como el carácter de las mismas [EXFIN-caso12-cues8] Sabe obtener la forma cuadrática a partir de su matriz simétrica asociada [EXFIN-caso12-prob3-c]	Aunque no ha hecho un problema que pretencía resolver un problema usando conceptos de autovalor y autovectore [PROB-caso12-5.2], sin embargo parece que entiende dichos conceptos autovalor y autovector y sabe aplicarlos para resolver problemas en los que hay incógnitas de la matriz [PROB-caso12-5.1] Sabe relacionar los conceptos de determinante, traza, autovalores y dimensión de subespacio de autovectores [EXFIN-caso12-cues-7] Sabe determinar cuando una matriz constante es diagonalizable [PROB-caso12-5.4], [PROB-caso12-5.5], incluso estudiar cuando una matriz con parámetros es diagonalizable [PROB-caso12-5.6], aunque en ocasiones ha tenido problemas para el estudio de casos exhaustivo [PROB-caso12-5.10] incluso en el examen tuvo ciertos problemas para estas clasificaciones [EXFIN-caso12-prob3-a] , Sabe diagonalizar matrices constantes [EXFIN-caso12-prob3-b] **TEMA 6** Maneja básicamente las principales condiciones de clasificación de las formas cuadráticas [CUES-caso12-6.1], [CUES-caso12-6.2], relacionar el carácter de formas cuadráticas con una matriz A y su inversa [EXFIN-caso12-cues8] .

	Ha aplicado mal el criterio de los menores, pues lo hace sobre una matriz que no es la simétrica [CUES-caso12-6.3] No ha sabido deducir a partir del determinante de la matriz y la traza los posibles valores que pueden tener sus autovalores a fin de clasificarla [CUES-caso12-6.4] No ha hecho un problema que pretendía obtener la clasificación una forma cuadrática de orden 4 en función de 2 parámetros [PROB-caso12-6.6] Ha sabido clasificar una forma cuadrática en función de un parámetro [PROB-caso12-6.1] Sabe clasificar una forma cuadrática en función de 2 parámetros [PROB-caso12-6.2] Nuevamente sabe clasificar una forma cuadrática en función de 2 parámetros [PROB-caso12-6.3] Sabe clasificar una forma cuadrática en función de un parámetro (3 variables) [PROB-caso12-6.4] Sabe clasificar una forma cuadrática de orden 3 en función de 2 parámetros pero le falta alguna distinción de casos [PROB-caso12-6.5] Ha sabido calcular los valores que debe tener un parámetro para que una forma cuadrática sea definida positiva [PROB-caso12-6.7] ha sabido determinar si una forma cuadrática puede ser definida negativa para cierto valor de un parámetro [PROB-caso12-6.8] **TEMA 7** Sabe identificar cuando un conjunto del plano es un conjunto convexo utilizando la definición [EXFIN-caso12-cues9] Sabe resolver gráficamente un programa lineal y aplicar el teorema de Weierstrass [EXFIN-caso12-cues10] **MODELOS** Plantea y resuelve perfectamente un modelo vectorial que se basaba en el uso de combinaciones lineales para obtener mezclas de ciertos materiales [PROB-caso12-1.1]	Sabe obtener la forma cuadrática a partir de su forma matricial [EXFIN-caso12-prob3-c] Ha cometido al principio algunos errores en la clasificación de formas cuadráticas en la aplicación del criterio de menores pero para una matriz no simétrica [CUES-caso12-6.3], en la clasificación en función de 2 parámetro [PROB-caso12-6.6] o deducir a partir de la matriz y de la traza información de los autovalores para clasificar la forma cuadrática [CUES-caso12-6.4], pero sin embargo en general podemos decir que parece dominar la clasificación de formas cuadráticas en función de parámetros [PROB-caso12-6.1], [prob-CASO12-6.2], [`PROB-caso12-6.3], [PROB-caso12-6.4], [PROB-caso12-6.5], [PROB-caso12-6.7], [PROB-caso12-6.8] **TEMA 7** Sabe identificar por definición cuando un conjunto es convexo [EXFIN-caso12-cues9] Sabe resolver gráficamente un programa lineal [EXFIN-caso12-cues10] **MODELOS** Plantea y resuelve problemas utilizando modelos vectoriales [PROB-caso12-1.1], [PROB-caso12-

	Plantea y resuelve perfectamente un modelo vectorial basado en combinaciones lineales [PROB-caso12-1.6] Plantea y resuelve perfectamente un modelo vectorial sobre combinaciones lineales convexas para una aplicación económica [PROB-caso12-1.7] Plantea y resuelve perfectamente un modelo vectorial sobre un problema económico [PROB-caso12-1.8] Ha sabido plantear y resolver perfectamente un problema de modelización matricial basado en aplicaciones lineales [PROB-caso12-2.2] ha sabido plantear y resolver nuevamente un problema de modelización matricial basado en el estudio de calificaciones de ciertos alumnos [PROB-caso12-2.3] Ha sabido plantear y resolver perfectamente problemas de modelización matricial [PROB-caso12-2.1], Ha sabido plantear y resolver perfectamente un modelo económico basado en sistemas de ecuaciones lineales [PROB-caso12-4.1] Sabe formular un sistema que pretende obtener propiedades de números naturales [PROB-caso12-4.6] Sabe formular un sistema de ecuaciones que resuelve un problema económico sobre matrices de inputs [PROB-caso12-4.7] Ha sabido formular y resolver un sistema de 6 ecuaciones con 6 incognitas que modeliza un problema de reservas de hoteles de seis agencias de viajes [PROB-caso12-4.8] Sabe formular perfectamente sistemas que modelizan situaciones realez [PROB-caso12-4.9] Sabe formular y resolver perfectamente un sistema de ecuaciones que modeliza un problema concreto [EXFIN-caso12-prob4-b] Ha realizado bien la modelización de un problema en el que interviene el calculo de la potencia k-ésima de una matriz usando diagonalización [PROB-caso12-5.7] y también la resolución. Modelización de un problema en el que interviene la potencia k-ésima de una matriz [PROB-caso12-5.8] Efectúa perfectamente la modelización y resolución de un problema en el que interviene potencia k-ésima de una matriz así como el paso al límte [PROB-caso12-5.9] **EXPERIMENTACIÓN** No ha sabido resolver un problema de experimentación e investigación sobre propiedades de matrices [PROB-caso12-2.4] Ha sabido resolver un problema de ecuaciones matriciales, manejando perfectamente derive [PROB-caso12-2.10]	1.6], [PROB-caso12-1.7], [PROB-caso12-1.8] Plantea y resuelve bien problemas utilizando modelos matriciales [PROB-caso12-2.2], [PROB-caso12-2.3], [PROB-caso12-2.1] Plantea y resuelve bien problemas que utilizan sistemas de ecuaciones lineales [PROB-caso12-4.1], [PROB-caso12-4.6], [PROB-caso12-4.7], [PROB-caso12-4.8], [PROB-caso12-4.9], [EXFIN-caso12-prob4-b] Ha sabido modelizar y resolver problemas en los que intervenía el cálculo de la potencia k-ésima de una matriz diagonalizable [PROB-caso12-5.7], [PROB-caso12-5.8], [PROB-caso12-5.9] **EXPERIMENTACIÓN>** Ha utilizado la experimentación para resolver problemas variados sobre propiedades de matrices [PROB-caso12-2.4], [PROB-caso12-2.10], [PROB-caso12-2.12], para la independencia lineal [PROB-

	Ha planteado perfectamente y resuelto las condiciones de ciertos valores para que una matriz tuviese ciertas propiedades [PROB-caso12-2.12] Ha sabido plantear bien un estudio de independencia lineal de vectores a partir de una ecuación vectorial , concepto de independencia lineal [PROB-caso12-2.14] Ha sabido experimenta e investigar para obtener solución de un problema con determinantes [PROB-caso12-3.1] Sabe experimentar e investigar las propiedades que tiene que tener una matriz para que el determinante sea máximo [PROB-caso12-3.2] Sabe experimentar e investigar para disponer en una matriz 0 y 1 para que su determinante sea mínimo [PROB-caso12-3.3] **INDUCCIÓN** Ha utilizado muy bien un razonamiento inductivo para resolver una ecuación que igualaba matrices y potencias n-ésimas [PROB-caso12-2.11] Sabe utilizar un proceso de inducción para resolver un determinante n-ésimo [PROB-caso12-3.4] Problema de experimentación e inducción para resolver una ecuación en la que interviene un determinante n-ésimo [PROB-caso12-3.6] Ha sabido calcular un determinante n-ésimo utilizando un proceso inductivo [PROB-caso12-3.12]	caso12-2.14], sobre determinantes [PROB-caso12-3.1], [PROB-caso12-3.2], [PROB-caso12-3.3] **INDUCCIÓN** Utilizó razonamientos inductivos de forma correcta en problemas de cálculo de determinantes n-ésimo [PROB-caso12-3.4], [PROB-caso12-3.6], [PROB-caso12-3.12] y en ecuaciones matriciales con potencias n-ésimas [PROB-caso12-2.11]

<table>
<tr>
<td>Dificultades con derive</td>
<td>Ha tenido un error de solapamiento de variables que le ha provocado un error en el problema [PROB-caso12-2.9-a]
Tiene un problema de solapamiento de variables en la discusión de un sistema en función de parámetros, el solapamiento le viene en el parámetro que debió tener previamente definido [PROB-caso12-4.5]
Ha tenido problemas para determinar para qué valores de ciertos parámetros a y b cierta matriz es diagonalizable, su error ha venido fundamentalmente por un error que le ha provocado derive ya que al resolver un sistema no ha tenido en cuenta que era un sistema no lineal que con SOLVE daba soluciones erróneas [EXFIN-caso12-prob3-a]</td>
<td>Sus principales dificultades con derive han venido ocasionadas por SOLAPAMIENTO DE VARIABLES; es decir usar variables previamente definidas con otros valores [PROB-caso12-2.9-a], [PROB-caso12-4.5] o en el uso de SOLVE para resolver sistemas de ecuaciones [EXFIN-caso12-prob3-a] que en realidad eran sistemas no lineales, obteniendo soluciones incorrectas.</td>
</tr>
<tr>
<td>¿Uso de DERIVE en cuestiones?</td>
<td>Para resolver la cuestión 1, plantea una matriz y estudia una submatriz de orden 3 de la que deduce con el determinante que tiene rango 3, con derive [EXFIN-caso12-cues1-b]
En la cuestión 2, plantea las ecuaciones cartesianas del subespacio y obtiene sus ecuaciones paramétricas con derive [EXFIN-caso12-cues2-b]
En la cuestión 6 comprueba si los autovectores dados son l.i. utilizando determinantes con derive [EXFIN-caso12-cues6-b]</td>
<td>Ha usado DERIVE en cálculos rutinarios como el cálculo de determinantes [EXFIN-caso12-cues1-b] [EXFIN-caso12-cues6-b] y en la resolución de un sistema lineal [EXFIN-caso12-cues2-b]</td>
</tr>
<tr>
<td>PUNTUACIONES</td>
<td>
<table>
<tr><td colspan="9">CUESTIONES ENTREGADAS:</td></tr>
<tr><td>Tema1</td><td>Tema 2</td><td>Tema 3</td><td>Tema</td><td>Tema 5</td><td>Tema 6</td><td>Tema 7</td><td>Media</td><td>Media total</td></tr>
<tr><td>9</td><td>7,5</td><td>7,5</td><td>7,5</td><td>7,5</td><td>6,25</td><td>0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="9">PROBLEMAS ENTREGADOS</td></tr>
<tr><td>Tema 1</td><td>Tema 2</td><td>Tema 3</td><td>Tema 4</td><td>Tema 5</td><td>Tema 6</td><td>Tema 7</td><td>Media</td><td>Media total</td></tr>
<tr><td>6</td><td>8,5</td><td>7,7</td><td>7,2</td><td>7,5</td><td>6,0</td><td>no hay</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="9">EXAMEN FINAL</td></tr>
<tr><td>Teoría</td><td>8</td><td>Proble m</td><td>9,7</td><td>MEDIA</td><td>SOB</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>La misma tabla</td>
</tr>
</table>

B) ELABORACIÓN DE LA SINTESIS DE PRUEBAS SUBJETIVAS.

El análisis de datos de las transcripciones de las entrevistas inicial e intermedia y de la encuesta inicial se realizó teniendo en cuenta la codificación y la precategorización realizada para los datos subjetivos que hemos comentado en el apartado V.2.2. Mediante la clasificación y agrupamiento de las unidades significativas en torno a las diferentes precategorías pudimos construir la síntesis de las pruebas subjetivas que mostramos a continuación:

1. SISTEMA DE NOTACIÓN INTERMEDIO.

Con conocimientos de windows-95, maneja internet pero no el correo electrónico [ENCINI-caso12-2]

Siempre le han gustado las matemáticas, y elige el subgrupo porque le gustan la informática y las matemáticas [ENCINI-caso11-4]

"Cuando ha resuelto problemas con derive ¿has notado un estilo distingo en la forma de resolver problemas, es decir, la manera de plantear los problemas y resolverlos ha generado en ti un cierto estilo de pensamiento matemático diferentes al que tenías? – sí, un poco más, te preocupas menos por el cálculo numérico y te preocupas más por la resolución teórica" [ENTINT-caso12-1.1]

"crees que hay más acercamiento a la teoría utilizando el ordenador que con lápiz y papel? – evidentemente con el ordenador, pero también se pierde cálculo numérico" [ENTINT-caso12-1.1-b]

"Cuando has intentado resolver cuestiones teóricas, sin el uso de derive, has encontrado alguna dificultad especial? – yo no pero porque yo ya había visto otro año esta asignatura, pero yo creo que si hubiese ido de nuevo si que hubiese notado alguna dificultad, al no poder utilizar el ordenador y poder hacer ejercicios" [ENTINT-caso12-1.2]

"A la hora de resolver un problema con derive, ¿has tenido que plantearte el problema previamente con lápiz y papel...? –pues bastantes, previamente con lápiz y papel, otros ya directamente ...- te ha costado un poco el razonar con derive, el hacer un planteamiento y luego ponerte ya a la discusión? - si " [ENTINT-caso12-1.3]

"¿crees que derive te ha permitido construir un lenguaje, un sistema de notación más cercano al álgebra lineal? – yo creo que más que nada ha sido una herramienta de trabajo" [ENTINT-caso12-1.4]

"Cuando has intentado resolver un problema o ejercicio con derive, has tenido la sensación de que hubiera sido más sencillo resolverlo con lápiz y papel,....? – he tenido la sensación que con lápiz y papel a veces se podía realizar igualmente" [ENTINT-caso12-9.4]

"tú que has tenido contacto con el otro grupo experimental, solo por saber, supongo que habrás contrastado con otra gente las ideas de cómo se daba en un lado y en otro ¿qué sensación o percepción tiene tú al respecto? – yo estoy muy contento de este grupo, pero vamos yo creo que para ellos es mucho peor la parte práctica y para nosotros la parte teórica" [ENTINT-caso12-g.10]

2. INTERACTIVIDAD.

"En el desarrollo de las clases ¿cómo ha sido tu comunicación con el profesor? – más cercana, y he encontrado respuesta rápida a tus dudas" [ENTINT-caso12-2.1]

"En el trabajo que has realizado con derive el programa te ha proporcionado respuesta rápida a los procesos manipulativos o dudas que te pudieran surgir? ... – a veces he dudado, en algún error o alguna respuesta que me ha salido, que no me convencía" [ENTINT-caso12-2.2]

"¿y entre los alumnos y el profesor tu crees que hay más unión? – si, más cercanía- pero por el número de alumnos o quizás también ha influido que haya también un entorno, un estilo de aprendizaje distinto al habitual...- hombre por las dos cosas, pero yo creo que sobre todo por el número de alumnos" [ENTINT-caso12-11.4-b]

3. PROTAGONISMO Y AUTOCREACIÓN.

"En los ejemplos de manipulación que se han realizado en clase, te has sentido dirigido por el programa o por el contrario te has sentido director de tus procesos? – yo creo que me he sentido protagonista" [ENTINT-caso12-3.1]

"En los ejemplos para investigar, que se han realizado en clase, te has sentido perdido, has encontrado cierto protagonismo en la búsqueda de soluciones...- en general sí!" [ENTINT-caso12-3.2]

"Cuando el profesor daba una posible solución a los ejemplos a investigar, te has sentido un mero usuario de los procesos que se comentaban o los has asimilado e interiorizado..- intentaba contrastarlo, de lo que iba haciendo con lo que se iba comentando " [ENTINT-caso12-3.3]

"Cuando se han planteado ejercicios te has encontrado perdido o por el contrario has sabido realizar los procesos que se habían aprendido anteriormente...- los he sabido hacer." [ENTINT-caso12-3.4]

"En la resolución de problemas, has encontrado algún protagonismo o capacidad creativa a la hora de resolverlos o por el contrario te has sentido perdido...- en general los he visto bastante fáciles, pero había alguno que había que preparar algo el tema" [ENTINT-caso12-3.5]

"En la resolución de cuestiones teóricas, has encontrado alguna dificultad por no utilizar derive, has sentido dependencia del programa...- no sentía mucha necesidad" [ENTINT-caso12-3.5b]

4. CONTENIDOS ESENCIALES.

"Cuando ha resuelto problemas con derive ¿has notado un estilo distingo en la forma de resolver problemas, es decir, la manera de plantear los problemas y resolverlos ha generado en ti un cierto estilo de pensamiento matemático diferentes al que tenías? – sí, un poco más, te preocupas menos por el cálculo numérico y te preocupas más por la resolución teórica" [ENTINT-caso12-1.1]

"crees que hay más acercamiento a la teoría utilizando el ordenador que con lápiz y papel? – evidentemente con el ordenador, pero también se pierde cálculo numérico" [ENTINT-caso12-1.1-b]

"Cuando has intentado resolver cuestiones teóricas, sin el uso de derive, has encontrado alguna dificultad especial? – yo no pero porque yo ya había visto otro año esta asignatura, pero yo creo que si hubiese ido de nuevo si que hubiese notado alguna dificultad, al no poder utilizar el ordenador y poder hacer ejercicios" [ENTINT-caso12-1.2]

"Del tema 1 de espacios vectoriales ¿cuáles crees que son los contenidos esenciales? – no sé que decir" [ENTINT-caso12-4.1]

"¿y del tema 2 de matrices y aplicaciones lineales? – la resolución de aplicaciones lineales" [ENTINT-caso12-4.2]

"¿y del tema 3 de determinantes y traza? – saber hacer determinantes" [ENTINT-caso12-4.3]

"¿y del tema 4 de sistemas lineales? – pues también resolución de sistemas" [ENTINT-caso12-4.4]

"¿y del tema 5 de diagonalización, autovalores y autovectores? .- saber qué es diagonalizar y como... y autovalores y autovectores" [ENTINT-caso12-4.5]

"¿y del tema 6 que estamos dando sobre formas cuadráticas? – las propiedades" [ENTINIT-caso12-4.6]

"tu crees que ha sido más práctico o más teórico el curso? – más práctico" [ENTINT-caso12-g.7]

"tú crees que le ha faltado algo más de fundamenta algo más la teoría, ver algunas cosas más... – no tal como está ha sido bien" [ENTINT-caso12-g.8]

"cuando en las cuestiones teóricas .. al ser más práctico el curso de lo normal, puede existir algún problema para resolver por lo que tú has percibido a mano.. ..- o sea resolver las cuestiones teóricas sin derive... yo creo que sí que se pierde bastante, parece que no pero si se pierde mucho. Yo creo que se pierde bastante, por ejemplo al resolver un determinante o algo de esto, como la gente está acostumbrada a resolverlo con ordenador pues igual ya no se acuerda... no se" [ENTINT-caso12-g.9]

"tú que has tenido contacto con el otro grupo experimental, solo por saber, supongo que habrás contrastado con otra gente las ideas de cómo se daba en un lado y en otro ¿qué sensación o percepción tiene tú al respecto? – yo estoy muy contento de este grupo, pero vamos yo creo que para ellos es mucho peor la parte práctica y para nosotros la parte teórica" [ENTINT-caso12-g.10]

5. ESFUERZO RUTINARIO.

"Cuando te has puesto a realizar ejercicios de manipulación con derive, has entendido el proceso que se pretendía conocer? – no me ha costado trabajo" [ENTINT-caso12-5.1] "resolver problemas, ¿crees que derive te ha ayudado a encontrar la resolución de manera efectiva, o quizás hubiera sido más fácil hacerla con lápiz y papel? – casi siempre es más fácil con derive, pues te evitas todo el cálculo" [ENTINT-caso12-5.2]

"...en cuestiones teóricas, has tenido mucha dificultad en resolverlas sin derive, o existian demasiados cálculos...- sí, creo que sin práctica te quedas un poco.." [ENTINT-caso12-5.3]

"Sabrías calcular un determinante de orde 3 sin derive – si" [ENTINT-caso12-5.4]

"Sabrías resolver un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas sin derive -. si" [ENTINT-caso12-5.5]
"¿crees que derive permite prescindir de los cálculos rutinarios y te permite orientar mejor tus esfuerzos hacia la investigación y el razonamiento? ...- evidentemente" [ENTINT-caso12-5.6]

"cuando en las cuestiones teóricas .. al ser más práctico el curso de lo normal, puede existir algún problema para resolver por lo que tú has percibido a mano.. ..- o sea resolver las cuestiones teóricas sin derive... yo creo que sí que se pierde bastante, parece que no pero si se pierde mucho. Yo creo que se pierde bastante, por ejemplo al resolver un determinante o algo de esto, como la gente está acostumbrada a resolverlo con ordenador pues igual ya no se acuerda... no se" [ENTINT-caso12-g.9]

6. HERRAMIENTA DE EXPERIMENTACIÓN
"Cuando se han planteado en clase ejemplos para investigar, cual ha sido tu actitud: has esperado a que te dieran la solución, has experimentado con derive...- siempre me he puesto a investigar" [ENTINT-caso12-6.1]

"has conseguido llegar a descubrir las cuestiones que se planteaban en los ejemplos de investigación? ....- creo que casi siempre las he entendido y conseguido bastante bien" [ENTINT-caso12-6.2]

"En los problemas planteados, cuando has tenido que resolverlos, ¿has encontrado rápidamente la estrategia de resolución o por el contrario has tenido que experimentar con el problema para descubrir por donde podrían ir las soluciones ...- en general siempre los sabía hacer, salvo a lo mejor un ejercicio o dos por capítulo que eran más complicados" [ENTINT-caso12-6.3]

"¿crees que la experimentación que has realizado en el curso te ha ayudado a entender mejor los contenidos que se trataban de impartir...- sí por supuesto..- si no se hubieran hecho,, posiblemente hubieras entendido más profundamente... ¿cómo lo valorarías más profundamente o cual sería tu percepción de los conceptos? ...- yo sobre todo el poder ver con las gráficas que hemos visto y evitar los cálculos y todo esto, te centras en la parte teórica y entiendes mejor el contenido" [ENTINT-caso12-6.4]

"¿crees que el uso de derive facilita que el álgebra lineal sea una disciplina experimental...? – si, sin duda- ¿qué percepción tenías tu del álgebra lineal como algo experimental? ...- teórica" [ENTINT-caso12-6.5]

"tu crees que ha sido más práctico o más teórico el curso? – más práctico" [ENTINT-caso12-g.7]

7. APRENDIZAJES SIGNIFICATIVOS.
"Cuando has terminado un capítulo, tienes la sensación de haber entendido bien los contenidos – he entendido todo" [ENTINT-caso12-7.1]

"Trabajar los contenidos mediante la investigación y el descubrimiento crees que te ha facilitado entender mejor los contenidos o por el contrario han dispersado tu atención? – no ha sido mucho mejor claro" [ENTINT-caso12-7.2]

8. ESTRATEGIAS DE RESOLUCION DE PROBLEMAS.
"Cuando has resuelto los problemas de fin de capítulo, ¿has utilizado más de una estrategia de resolución....- hombre sobre todo cuando no estaba seguro del resultado buscaba más, cuando no llega a la respuesta buscaba otros caminos" [ENTINT-caso12-7.3]

"¿crees que los problemas planteados podrían tener varios caminos de resolución? – si, si " [ENTINT-caso12-8.2]

"Cuando se ha planteado alguna cuestión en clase, o un problema ¿has observado si se pedían diferentes puntos de vista para resolver la cuestión ...? – que había muchas formas " [ENTINT-caso12-8.3]

9. BARRERAS ADICIONALES
"Una vez que hemos concluido casi como valorarías el programa derive, una herramienta sencilla o compleja en su manipulación? – una herramienta sencilla" [ENTINT-caso12-9.1]

"Si algún compañero te pregunta sobre el programa, se lo aconsejarías para estudiar álgebra lineal? ...- si, si porque es sencillo" [ENTINT-caso12-9.2]

"¿cuáles son tus principales problemas con la manipulación del programa derive? ...- me ha parecido sencillo" [ENTINT-caso12.-9.3]

"Cuando has intentado resolver un problema o ejercicio con derive, has tenido la sensación de que hubiera sido más sencillo resolverlo con lápiz y papel,....? – he tenido la sensación que con lápiz y papel a veces se podía realizar igualmente" [ENTINT-caso12-9.4]

"Cuando has intentado resolver un problema o ejercicio con derive, te has sentido engañado por el programa por los resultados que te daban y que quizás no sabías interpretar? ...- normalmente no he tenido problemas con eso" [ENTINT-caso12-9.5]

"cuando en las cuestiones teóricas .. al ser más práctico el curso de lo normal, puede existir algún problema para resolver por lo que tú has percibido a mano.. ..- o sea resolver las cuestiones teóricas sin derive... yo creo que sí que se pierde bastante, parece que no pero si se pierde mucho. Yo creo que se pierde bastante, por ejemplo al resolver un determinante o algo de esto, como la gente está acostumbrada a resolverlo con ordenador pues igual ya no se acuerda... no se" [ENTINT-caso12-g.9]

10. AUTONOMÍA COGNITIVA.

"Los ejemplos de investigación que se planteaban en el desarrollo de las clases, te han resultado inabordables o por el contrario eran muy fáciles...- eran asequibles" [ENTINT-caso12-10.1]

"...has tenido la sensación de que eras dueño de la situación o por el contrario que derive te estaba dominando? ...- sí totalmente. " [ENTINT-caso12-10.2]

"Cuando te pones a resolver problemas y ejercicios, consideras que tienes una suficiente autonomía para desarrollarlos...- ha añadido más autonomía, porque no te queda la duda de si estaré haciendo mal el cálculo, si llevaré un error y lo voy arrastrando, sabes que lo tienes bien" [ENTINT-CASO12-10.3]

"Cuando te pongas a resolver problemas de examen, tu crees que vas a sentir ese grado de autonomía...- si, si" [ENTINT-caso12-10.3-b]

11. RELACIÓN DIALÉCTICA.

"¿cómo ha sido tu relación personal con los compañeros de clase? – limitada" [ENTINT-caso12-11.1]

"¿has conseguido establecer un lazo de amistad mayor con algunos compañeros de clase a lo largo de este curso? ...- si, con Maria y Jessica y Juan Pablo" [ENTINT-caso12-11.2]

"¿cómo ha sido tu relación personal con el profesor? .- buena" [ENTINT-caso12-11.3]

"¿Crees que el ambiente propiciado por este tipo de estrategia ha favorecido las relaciones dialécticas entre los alumnos? ...- si hombre, al ser una clase tan pequeña pues la gente siempre se une mucho más...- o sea que has sentido más unión que en otras clases a lo mejor? ..- si, además como se pueden hacer ejercicios en común, porque hay personas que hacen unas otras hacen otro, está bien" [ENTINT-caso12-11.4]

"¿y entre los alumnos y el profesor tu crees que hay más unión? – si, más cercanía- pero por el número de alumnos o quizás también ha influido que haya también un entorno, un estilo de aprendizaje distinto al habitual...- hombre por las dos cosas, pero yo creo que sobre todo por el número de alumnos" [ENTINT-caso12-11.4-b]

12. APRENDIZAJE COLABORATIVO

"El trabajo de grupo que se ha desarrollado en clase ¿crees que te ha ayudado a aprender mejor los conceptos de álgebra lineal? - ... hombre en mi caso yo creo que no me ha ayudado mucho, pero yo creo que sí que ayuda bastante" [ENTINT-caso12-12.1]

"La resolución de cuestiones, ejercicios y problemas en parejas de trabajo, ha sido favorecida por el ambiente que proporcionaba el ordenador en la clase? ...- pues al ser un aula tan limitada de alumnos y ser distinto con respecto a otros grupos, pues se favorece más la relación...- habéis utilizado el mail y estas cosas entre vosotros...? – si" [ENTINT-caso12-12.2]

"¿crees que las colaboraciones que habéis tenido los compañeros de tu entorno, ha incrementado por un lado tus relaciones personales con dichos compañeros? ...- si, sin duda" [ENTINT-CASO12-12.3]

“Has quedado con los compañeros para resolver problemas , ¿cómo ha sido la experiencia positiva o negativa? – si, resolvíamos problemas entre nosotros y resolvíamos las dudas, ha sido una experiencia positiva de colaboración” [ENTINT-caso12-12.3][

13. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD.

“...¿te has aburrido en algún momento? – hay alguna que no me ha gustado mucho, pero no me he aburrido “ [ENTINT-caso12-13.1]

“El ritmo de la clase ¿cómo te ha parecido? - hombre bueno para llevar la asignatura pero rápido en ningún caso” [ENTINT-caso12-13.2]

“¿te has encontrado perdido en alguna ocasión? – no, en ninguna” [ENTINT-caso12-13.3]

“Los problemas propuestos te han resultado todos inabordables o has conseguido resolver alguno? – he resuelto casi todos- cuando has encontrado tus soluciones con las que se colgaban en la web ¿has comprobado que eran las que tú hacías más o menos? – si” [ENTINT-caso12-13.4]

“Los problemas propuestos han suscitado en ti interés especial por su resolución...? – si, ha habido algunos que me han picado bastante en su resolución..” [ENTINT-caso12-13.5]

14. MOTIVACIÓN

Con conocimientos de windows-95, maneja internet pero no el correo electrónico [ENCINI-caso12-2]

Sus últimos estudios fueron el COU, nota de acceso a la universidad 6,75 (selectividad). Su calificación media en matemáticas en los últimos años fue de sobresaliente. [ENCINI-caso12-3]

Siempre le han gustado las matemáticas, y elige el subgrupo porque le gustan la informática y las matemáticas [ENCINI-caso11-4]

“te ha parecido interesante el álgebra lineal? cuentame un poquillo como te ha parecido...- sí creo que se ha hecho muy interesante, yo creo que si se hubiese dado la clase estricta me hubiese aburrido mucho más, en este aspecto seguro” [ENTINT-caso12-13.6]

“ese gusanillo por resolver las cosas lo has tenido alguna otra vez? – si en cursos anteriores “ [ENTINT-caso12-13.6-b]

“En una valoración general, ¿ha aumentado con este curso tu interés por las matemáticas? – hombre no ha descendido porque ya me gustaban – te ha motivado el ordenador para estudiar matemáticas – sí,. si” [ENTINT-caso12-14.5]

“¿cuántas horas has dedicado más o menos a la semana, en media? – yo creo que cinco o seis” [ENTINT-caso12-14.5-b]

“Si tuvieras que dar una valoración global del curso indica la nota que le pondrías en todo- creo que un 7” [ENTINT-caso12-g1.]

“¿qué es lo que más te ha gustado del curso? – lo que más el llevar la asignatura bastante al día, por los problemas que había que hacer al final de cada capítulo, se lleva bien, sino igual se va dejando, igual te parece que lo llevas bien y lo voy dejando, así lo ibas haciendo” [ENTINT-caso12-g.2]

“¿qué es lo que menos te ha gustado del curso? – seguro que hay algo pero no se me ocurre? “ [ENTINT-caso12-g.3]

“¿volverías a elegir este grupo experimental si te dieran nuevamente a elegir? – si, sobre todo por eso, por evitarme el cálculo numérico, no depender de hacer mal un problema porque te has confundido en un signo o lo que sea” [ENTINT-caso12-g.5]

“tu crees que ha sido más práctico o más teórico el curso? – más práctico” [ENTINT-caso12-g.7]

“tú que has tenido contacto con el otro grupo experimental, solo por saber, supongo que habrás contrastado con otra gente las ideas de cómo se daba en un lado y en otro ¿qué sensación o percepción tiene tú al respecto? – yo estoy muy contento de este grupo, pero vamos yo creo que para ellos es mucho peor la parte práctica y para nosotros la parte teórica” [ENTINT-caso12-g.10]

“yo le intentaría convencer que se impartiese pero igual que en vez de ser todas las clases con ordenador que fuese alguna, una al mes o dos, de resolver a mano- le ha faltado un poco resolver con lápiz y papel – sí, el hacer a mano, las cuestiones teóricas sobre todo...- añadir alguna clase con encerado. Pero bueno tú en particular no la has necesitado, venías bien preparado no? – si" [ENTINT-caso12-g.11]

15. *DINÁMICA DEL CURSO*

"Si tuvieras que dar una valoración global del curso indica la nota que le pondrías en todo- creo que un 7" [ENTINT-caso12-g1.]

"¿volverías a elegir este grupo experimental si te dieran nuevamente a elegir? – si, sobre todo por eso, por evitarme el cálculo numérico, no depender de hacer mal un problema porque te has confundido en un signo o lo que sea" [ENTINT-caso12-g.5]

"¿crees que ha habido alguna laguna, que hayas echado en falta, así a nivel de matemáticas? – hombre sí, pero no es aplicado a la carrera, por ejemplo de geometría... o de formas cuadráticas también hay alguna cosa" [ENTINT-caso12-g.6]

"¿qué es lo que más te ha gustado del curso? – lo que más el llevar la asignatura bastante al día, por los problemas que había que hacer al final de cada capítulo, se lleva bien, sino igual se va dejando, igual te parece que lo llevas bien y lo voy dejando, así lo ibas haciendo" [ENTINT-caso12-g.2]

"tú crees que le ha faltado algo más de fundamenta algo más la teoría, ver algunas cosas más... – no tal como está ha sido bien" [ENTINT-caso12-g.8]

"tú que has tenido contacto con el otro grupo experimental, solo por saber, supongo que habrás contrastado con otra gente las ideas de cómo se daba en un lado y en otro ¿qué sensación o percepción tiene tú al respecto? – yo estoy muy contento de este grupo, pero vamos yo creo que para ellos es mucho peor la parte práctica y para nosotros la parte teórica" [ENTINT-caso12-g.10]

"yo le intentaría convencer que se impartiese pero igual que en vez de ser todas las clases con ordenador que fuese alguna, una al mes o dos, de resolver a mano- le ha faltado un poco resolver con lápiz y papel – sí, el hacer a mano, las cuestiones teóricas sobre todo...- añadir alguna clase con encerado. Pero bueno tú en particular no la has necesitado, venías bien preparado no? – si" [ENTINT-caso12-g.11]

16. *EXPECTATIVAS DEL CURSO*

"¿qué nota esperas sacar en la asignatura? – notable sobresaliente" [ENTINT-caso12-g.4]

17. *TRAYECTORIA EDUCATIVA*

Matriculado por primera vez en Matemáticas II [ENCINI-caso12-1]

Con conocimientos de windows-95, maneja internet pero no el correo electrónico [ENCINI-caso12-2]

Sus últimos estudios fueron el COU, nota de acceso a la universidad 6,75 (selectividad). Su calificación media en matemáticas en los últimos años fue de sobresaliente. [ENCINI-caso12-3]

C) ELABORACIÓN DE LAS CONCLUSIONES PARCIALES DEL CASO 12.

A partir de la síntesis de pruebas objetivas y subjetivas pudimos elaborar un cuadro de conclusiones parciales del caso en el que se muestran por columnas las categorías, los elementos significativos que definen cada categoría y las conclusiones que se pueden establecer partiendo de los elementos significativos encuadrados para cada categoría. Mostramos a modo de ejemplo el cuadro obtenido para la categoría relacionada con la primera cuestión, el resto del cuadro se puede consultar en el ANEXO XVII, punto 4:

SÍNTESIS DE CATEGORÍAS CASO :		
CATEGORÍA	ELEMENTOS SIGNIFICATIVOS	CONCLUSIONES
1.Sistema de Notación Intermedio	Con conocimientos de windows-95, maneja internet pero no el correo electrónico [ENCINI-caso12-2] Siempre le han gustado las matemáticas, y elige el subgrupo porque le gustan la informática y las matemáticas [ENCINI-caso11-4] "Cuando ha resuelto problemas con derive ¿has notado un estilo distingo en la forma de resolver problemas, es decir, la manera de plantear los problemas y resolverlos ha generado en ti un cierto estilo de pensamiento matemático diferentes al que tenías? – sí, un poco más, te preocupas menos por el cálculo numérico y te preocupas más por la resolución teórica" [ENTINT-caso12-1.1] "crees que hay más acercamiento a la teoría utilizando el ordenador que con lápiz y papel? – evidentemente con el ordenador, pero también se pierde cálculo numérico" [ENTINT-caso12-1.1-b] "Cuando has intentado resolver cuestiones teóricas, sin el uso de derive, has encontrado alguna dificultad especial? – yo no pero porque yo ya había visto otro año esta asignatura, pero yo creo que si hubiese ido de nuevo si que hubiese notado alguna dificultad, al no poder utilizar el ordenador y poder hacer ejercicios" [ENTINT-caso12-1.2] "A la hora de resolver un problema con derive, ¿has tenido que plantearte el problema previamente con lápiz y papel...? –pues bastantes, previamente con lápiz y papel, otros ya directamente ...- te ha costado un poco el razonar con derive, el hacer un planteamiento y luego ponerte ya a la discusión? - si " [ENTINT-caso12-1.3] "¿crees que derive te ha permitido construir un lenguaje, un sistema de notación más cercano al álgebra lineal? – yo creo que más que nada ha sido una herramienta de trabajo" [ENTINT-caso12-1.4] "Cuando has intentado resolver un problema o ejercicio con derive, has tenido la sensación de que hubiera sido más sencillo resolverlo con lápiz y papel,....? – he tenido la sensación que con lápiz y papel a veces se podía realizar igualmente" [ENTINT-caso12-9.4] "tú que has tenido contacto con el otro grupo experimental, solo por saber, supongo que habrás contrastado con otra gente las ideas de cómo se daba en un lado y en otro ¿qué sensación o percepción tiene tú al respecto? – yo estoy muy contento de este grupo, pero vamos yo creo que para ellos es mucho peor la parte práctica y para nosotros la parte teórica" [ENTINT-caso12-g.10]	El alumno tiene buena predisposición al uso de los ordenadores, ya que tiene conocimientos previos de windows e internet [ENCINI-caso12-2]. y también tiene predisposición adecuada hacia las matemáticas [ENCINI-caso11-4] En la resolución de problemas el alumno afirma que el uso de derive permite que el alumno se preocupe menos por el cálculo y más por la resolución teórica [ENTINIT-caso12-1.2] El alumno considera que los conocimientos teóricos se acercan más usando el ordenador que usando lápiz y papel, aunque se pierde habilidad de cálculo [ENTINIT-caso12-1.1b] El alumno afirma que personalmente no ha encontrado dificultades para resolver las cuestiones teóricas sin el uso de derive, aunque afirma que otros pueden tener esa dificultad [ENTINT-caso12-1.2] El alumno se ha planteado algunos problemas previamente con lápiz y papel y otros de forma directa, porque le costaba razonar con derive directamente [ENTINT-caso12-1.3] Más que un sistema de notación intermedio, el alumno afirma que derive ha sido una herramienta de trabajo [ENTINT-caso12-1.4] Cuando ha resuelto problemas o ejercicios con derive, considera que se podrían haber realizado igualmente con lápiz y papel [ENTINT-caso12-9.4] El alumno afirma que con derive se acerca más el alumno a la parte práctica pero se complica la parte teórica, justo al revés de lo que sucede en la clase tradicional [ENTINT-caso12-g.10]

A partir de este cuadro y analizando las conclusiones pudimos obtener las CONCLUSIONES PARCIALES del caso 12 que se pueden revisar en el ANEXO XVII punto 5.

D) ELABORACIÓN DE LA SÍNTESIS DE DATOS DE LA ENTREVISTA FINAL.

El proceso de construcción de la síntesis de datos de la entrevista final siguió el mismo esquema de análisis secuencial que el resto de datos. Los elementos significativos que se encontraron en la entrevista final se agruparon en la diferentes categorías. Los resultados se pueden consultar en el ANEXO XVII punto 6.

E) VERIFICACIÓN DE DATOS Y CONSTRUCCIÓN DE LAS CONCLUSIONES FINALES DEL CASO.

Para finalizar este análisis vertical procedimos a verificar las conclusiones parciales con el conjunto de datos obtenidos en la entrevista final. Para realizar esta verificación, elaboramos para cada cuestión, cuatro bloques de datos que contenían:

- los elementos significativos de las conclusiones parciales.
- los elementos significativos de la entrevista final
- las conclusiones parciales
- y las conclusiones de la entrevista final

y elaboramos a partir de ellas una conclusión final. A modo de ejemplo podemos presentar como presentamos los datos relacionados con el caso 12 y la cuestión 1:

1. <u>SISTEMA DE NOTACIÓN INTERMEDIO.</u>

<u>ELEMENTOS SIGNIFICATIVOS DE LAS CONCLUSIONES PARCIALES</u>

Con conocimientos de windows-95, maneja internet pero no el correo electrónico [ENCINI-caso12-2]

Siempre le han gustado las matemáticas, y elige el subgrupo porque le gustan la informática y las matemáticas [ENCINI-caso11-4]

"Cuando ha resuelto problemas con derive ¿has notado un estilo distingo en la forma de resolver problemas, es decir, la manera de plantear los problemas y resolverlos ha generado en ti un cierto estilo de pensamiento matemático diferentes al que tenías? – sí, un poco más, te preocupas menos por el cálculo numérico y te preocupas más por la resolución teórica" [ENTINT-caso12-1.1]

"crees que hay más acercamiento a la teoría utilizando el ordenador que con lápiz y papel? – evidentemente con el ordenador, pero también se pierde cálculo numérico" [ENTINT-caso12-1.1-b]

"Cuando has intentado resolver cuestiones teóricas, sin el uso de derive, has encontrado alguna dificultad especial? – yo no pero porque yo ya había visto otro año esta asignatura, pero yo creo que si hubiese ido de nuevo si que hubiese notado alguna dificultad, al no poder utilizar el ordenador y poder hacer ejercicios" [ENTINT-caso12-1.2]

"A la hora de resolver un problema con derive, ¿has tenido que plantearte el problema previamente con lápiz y papel...? –pues bastantes, previamente con lápiz y papel, otros ya directamente

...- te ha costado un poco el razonar con derive, el hacer un planteamiento y luego ponerte ya a la discusión? - si " [ENTINT-caso12-1.3]

"¿crees que derive te ha permitido construir un lenguaje, un sistema de notación más cercano al álgebra lineal? – yo creo que más que nada ha sido una herramienta de trabajo" [ENTINT-caso12-1.4]

"Cuando has intentado resolver un problema o ejercicio con derive, has tenido la sensación de que hubiera sido más sencillo resolverlo con lápiz y papel,....? – he tenido la sensación que con lápiz y papel a veces se podía realizar igualmente" [ENTINT-caso12-9.4]

"tú que has tenido contacto con el otro grupo experimental, solo por saber, supongo que habrás contrastado con otra gente las ideas de cómo se daba en un lado y en otro ¿qué sensación o percepción tiene tú al respecto? – yo estoy muy contento de este grupo, pero vamos yo creo que para ellos es mucho peor la parte práctica y para nosotros la parte teórica" [ENTINT-caso12-g.10]

ELEMENTOS SIGNIFICATIVOS DE LA ENTREVISTA FINAL

"Cuando se introdujeron los conceptos teóricos con los ejemplos a investigar, te costaba entender lo que se pedía en Matemáticas con derive ..? – no, no me costaba nada, y me ayudaba con seguridad a buscar" [ENTFIN-caso12-1.1]

"A la hora de realizar ejercicios de manipulación, la forma de introducir los datos en derive te servía para asimilar los procesos rutinarios del álgebra lineal ...? – sí, creo que si" [ENTFIN-caso12-1.2]

"¿sabrías realizar esos mismos procesos con lápiz y papel? – si, claro pero porque ya lo he hecho antes, sino no sabría con seguridad" [ENTFIN-caso12-1.2b]

"En la resolución de problemas ¿has tenido que poner en marcha algún tipo especial de razonamiento que no habías empleado hasta ahora? – en principio en casi todos muy bien, pero en algunos igual tenía que hacerlo primero en lápiz y papel y luego en derive" [ENTFIN-caso12-1.3]

"Cuando realizaste el examen final,, ¿tuviste la sensación de que derive te proporcionaba un estilo de notación distinto al que venías empleando?...- no, que va, muy parecido... no tuve que plantear ningún problema con lápiz y papel" [ENTFIN-caso12-1.4]

"Cuando tienes que realizar cualquier práctica de matemáticas II con derive ¿sabrías realizarla fácilmente con lápiz y papel? – si, tenía la sensación de que sí" [ENTFIN-caso12-1.5]

"Y al revés, si resuelves un problema o cuestión con lápiz y papel ¿tienes algún problema en realizarla en derive? – sí, el programa derive era muy sencillo..." [ENTFIN-caso12-1.6]

"De las dos formas de notación, derive o lápiz y papel, cual te resulta más cómoda? – el programa ayuda mucho , y es más cómodo pues es mucho más rápido y evita repasar operaciones..." [ENTFIN-caso12-1.7]

"¿cuál crees que es mejor para entender conceptos uno u otro? – la teoría yo creo que es mejor evidentemente con una clase con pizarra y lápiz y papel, pero los problemas y las prácticas se ve mucho mejor con derive- o sea que tú crees que la parte teórica es mejor introducirla con el método tradicional? – si" [ENTFIN-caso12-1.7-b]

"¿crees que derive proporciona un sistema de notación intermedio entre tus ideas y las ideas que el profesor trata de transmitir? ...- sí" [ENTFIN-caso12-1.8]

CONCLUSIONES PARCIALES:

El alumno tiene buena predisposición al uso de los ordenadores, ya que tiene conocimientos previos de windows e internet [ENCINI-caso12-2]. y también tiene predisposición adecuada hacia las matemáticas [ENCINI-caso11-4]

En la resolución de problemas el alumno afirma que el uso de derive permite que el alumno se preocupe menos por el cálculo y más por la resolución teórica [ENTINIT-caso12-1.2]

El alumno considera que los conocimientos teóricos se acercan más usando el ordenador que usando lápiz y papel, aunque se pierde habilidad de cálculo [ENTINIT-caso12-1.1b]

El alumno afirma que personalmente no ha encontrado dificultades para resolver las cuestiones teóricas sin el uso de derive, aunque afirma que otros pueden tener esa dificultad [ENTINT-caso12-1.2]

El alumno se ha planteado algunos problemas previamente con lápiz y papel y otros de forma directa, porque le costaba razonar con derive directamente [ENTINT-caso12-1.3]

Más que un sistema de notación intermedio, el alumno afirma que derive ha sido una herramienta de trabajo [ENTINT-caso12-1.4]

Cuando ha resuelto problemas o ejercicios con derive, considera que se podrían haber realizado igualmente con lápiz y papel [ENTINT-caso12-9.4]

El alumno afirma que con derive se acerca más el alumno a la parte práctica pero se complica la parte teórica, justo al revés de lo que sucede en la clase tradicional [ENTINT-caso12-g.10]

CONCLUSIONES DE LA ENTREVISTA FINAL.

El alumno afirma que no le costaba entender los que se pedía con los ejemplos a investigar, y que derive le ayudaba a buscar lo que se pedía [ENTFIN-caso12-1.1]

La forma de introducir los datos en derive le ha servido para entender y asimilar los procesos de álgebra lineal que se iban introduciendo [ENTFIN-caso12-1.2]

Los procesos que ha realizado con derive los sabría realizar con lápiz y papel pero quizás por el ya los había hecho antes, de otra forma quizás no sabría con seguridad [ENTFIN-caso12-1.2b]

Las prácticas que ha hecho en derive, el alumno afirma que no tiene problemas en hacerlas a lápiz y papel [ENTFIN-caso12-.15]

Para resolver problemas en casi todos ha empleado directamente derive, pero en algunos necesitó previamente plantearlos en lápiz y papel [ENTFIN-caso12-1.3]

El alumno afirma que en el examen final no encontró ningún estilo de notación distinto al que venía empleando y que además no tuvo que plantear ningún problema con lápiz y papel [ENTFIN-caso12-1.4]

Sabe trasladar fácilmente problemas realizado en lápiz y papel a derive pues afirma que es muy sencillo [ENTFIN-caso12-1.6]

Derive es un programa mucho más cómodo que el lápiz y papel pues es muy rápico y evita las operaciones [ENTFIN-caso12-1.7]

El alumno afirma que la teoría se entiende mejor con pizarra y lápiz y papel mejor que con derive, por el contrario los problemas se entienden mejor con derive que con lápiz y papel [ENTFIN-caso12-1.7.b]

El alumno afirma que derive proporciona un sistema de notación intermedio entre las ideas del alumno y las que el profesor pretende transmitir [ENTFIN-caso12-1.8]

así pues contrastando conclusiones parciales y conclusiones de la entrevista final elaboramos la conclusión final de esta cuestión para el caso 12:

1. **SISTEMA DE NOTACIÓN INTERMEDIO**

Para analizar esta cuestión debemos observar varios aspectos:

1) El alumno tiene buena predisposición al uso de los ordenadores, ya que tiene conocimientos previos de windows e internet [ENCINI-caso12-2]. y también tiene predisposición adecuada hacia las matemáticas [ENCINI-caso11-4] por tanto el nuevo sistema de notación que puede ofrecer el programa no resulta en principio un elemento distante.

2) El trabajo que ha desarrollado en derive en la resolución de problemas le ha permitido preocuparse menos por el cálculo y prestar más atención a la resolución teórica [ENTINT-caso12-1.2], por otro lado en las cuestiones teóricas no ha encontrado ningún tipo de dificultad para realizarlas sin derive [ENTINT-caso12-1.2], en los ejemplos a investigar derive le ha ayudado en general a buscar lo que se pedía [ENTFIN-caso12-1.3] y en el examen final no ha encontrado dificultades de manejo y de hecho no tuvo que plantear previamente problemas con lápiz y papel [ENTFIN-caso12-1.4]. Estas características del uso de derive en las diferentes actividades nos muestran que el sistema de notación empleado por derive ha quedado integrado totalmente en el quehacer matemático del alumno.

3) Si comparamos el sistema de notación empleado por derive y el sistema de notación tradicional observamos que según el alumno los conocimientos teóricos se acercaban más con el ordenador que usando lápiz y papel pero se pierde habilidad de cálculo [ENTINI-caso12-1.1.b]; sin embargo a pesar de esa cercanía el alumno considera que la teoría se entiende mejor con pizarra y lápiz y papel que con derive; por otro lado observamos que en los problemas a veces el alumno ha tenido que plantearlos previamente con lápiz y papel [ENTINT-caso12-1.3] sin embargo derive ha permitido que se comprendieran mejor los problemas que con lápiz y papel [ENTFIN-caso12-1.7.b] porque la rapidez de cálculo, y la eliminación de operaciones hacen más cómoda la resolución de problemas con derive [ENTFIN-caso12-1.7]. No obstante se observa que el alumno sabía transferir las prácticas hechas con derive a lápiz y papel [ENTFIN-caso12-1.2.b] [ENTFIN-

caso12-1.5] y viceversa problemas hechos a lápiz y papel pasarlos a derive [ENTFIN-caso12-1.6]

4) Según el alumno derive ha sido una herramienta de trabajo que inicialmente no la ha considerado como un sistema de notación intermedio [ENTINT-caso12-1.4], pero que más tarde sí parece considerarle como intermediario ente los conceptos y el alumno [ENTFIN-caso12-1.8]; es más la propia forma de introducir los datos en derive le ha servido al alumno par entender y asimilar los procesos de álgebra lineal [ENTFIN-caso12-1.2], aunque quizás este sistema era más complicado en la teoría que en la práctica [ENTINT-caso12-g.10]

Estas características nos permiten afirmar que derive ha sido sobre todo un sistema de notación intermedio básico sobre todo en la resolución de problemas, ya que en la introducción de conceptos teóricos parece que el sistema tradicional tenía cierta preeminencia y ofrecía mejores condiciones para el aprendizaje.

En el ANEXO XVII punto 8 se pueden consultar las conclusiones finales del caso 12 y en el CD-ROM se puede revisar la verificación del resto de cuestiones, así como el análisis vertical realizado para el resto de casos.

V.3. Análisis transversal de la investigación.

Una vez realizado el análisis de cada uno de los casos a través de las diferentes herramientas de recogida de datos que teníamos diseñadas, debemos realizar una análisis minucioso de cada una de las cuestiones de nuestra investigación. Para efectuar este análisis transversal de la investigación, vamos a tener en cuenta varios grupos de datos mediante los cuales podremos efectuar un proceso de triangulación de datos y por tanto una verificación de las conclusiones de esta investigación. Con el análisis vertical que hemos realizado sobre cada uno de los casos, teniendo en cuenta las diferentes pruebas objetivas (exámenes, cuestiones y problemas) y las entrevistas realizadas, hemos llegado a unas conclusiones en cada caso; y en particular a unas conclusiones particulares sobre cada una de las cuestiones objeto de estudio. Pues bien, con estas conclusiones podemos realizar un análisis transversal de cada cuestión para así elaborar unas conclusiones parciales para cada una de ellas. A este análisis transversal vamos a añadirle tres análisis complementarios que nos van a permitir realizar una verificación de las conclusiones parciales, para obtener las conclusiones finales de la investigación. Los análisis complementarios que vamos a considerar son los siguientes:

1. Análisis de las notas de campo realizadas por el investigador.
2. Análisis de los datos cuantitativos de las calificaciones obtenidas por los alumnos en el subgrupo A y las calificaciones obtenidas en el subgrupo B.
3. Análisis de los datos aportados por la observadora cualificada sobre las diferentes cuestiones de la investigación.

Así pues en nuestro análisis transversal vamos a realizar el siguiente proceso:

1º) Estudiar cada cuestión mediante una comparativa de los datos cualitativos obtenidos en el estudio de cada uno de los casos.

2º) Estudiar los datos que aportan las notas de campo a cada una de las cuestiones objeto de la investigación.

3º) Estudiar los datos que nos aportan los datos cuantitativos obtenidos de las diferentes pruebas objetivas.

4º) Estudiar los datos que aporta la encuesta realizada por la observadora cualificada a cada una de las cuestiones.

5º) Efectuar una proceso de triangulación de datos con los cuatro análisis de datos anteriores:

- análisis de las cuestiones por casos
- análisis de las notas de campo
- análisis de los datos cuantitativos
- análisis de la encuesta de la observadora cualificada

para elaborar así unas conclusiones finales de la investigación.

V.3.1. ANÁLISIS COMPARATIVO DE LOS CASOS PARA CADA UNA DE LAS CUESTIONES DE LA INVESTIGACIÓN.

Para realizar el análisis comparativo de los casos para cada una de las cuestiones de la investigación vamos a elaborar en cada cuestión:

a) un estudio de cada cuestión intentando determinar que caracteres o atributos pueden ser significativos para contestar dicha cuestión. Estos ATRIBUTOS serán características importantes que puede tener la cuestión de cara a los datos que se han recogido. Cada atributo a su vez puede tener diferentes perfiles que podrán analizarse estudiando los ASPECTOS CARACTERÍSTICOS de los mismos,

b) un resumen de los datos obtenidos con cada uno de los casos,

c) y a partir de este resumen realizaremos un cuadro esquemático o tabla en el que se recogen los diferentes aspectos o atributos que perfilan cada una de las cuestiones. En esta tabla situaremos en las FILAS los ATRIBUTOS y ASPECTOS CARACTERÍSTICOS de cada atributo, obtenidos en la recogida de datos; en las COLUMNAS marcaremos con una cruz los casos en los que se da el aspecto característico reseñado. De esta forma podremos analizar para cada atributo cuáles son los aspectos característicos que se verifican de una manera más global en los casos estudiados, para obtener de esta manera las conclusiones parciales de cada cuestión.

CUESTIÓN 1: Sistema de notación intermedio.

¿El sistema de cálculo algebraico DERIVE; permite construir un SISTEMA DE NOTACIÓN INTERMEDIO, entre los sistemas de notación del álgebra lineal y los sistemas de notación más familiares e intuitivos?

Se trataba de descubrir si DERIVE ofrecía al alumno un sistema de notación diferente al sistema que tradicionalmente venían empleando que utilizaba el soporte del lápiz y papel. Se trata de obtener las relaciones entre uno y otros sistemas y su proximidad o lejanía al concepto que realmente se trata de manejar.

Teniendo en cuenta los aspectos que consideramos en el marco teórico (capítulo I) relacionados con el aprendizaje por descubrimiento y los aspectos relacionados con el uso de CAS para ofrecer múltiples sistemas de representación, algunos de los atributos que nos pueden acercar al comportamiento o estudio de esta cuestión pueden ser los siguientes:

1.1. ¿La investigación con DERIVE sugerida en los ejemplos a investigar propuestos a los alumnos, les ayuda a descubrir con más facilidad el concepto?

1.2. ¿La INTRODUCCION DE DATOS permite VISUALIZAR de una manera más clara los contenidos?

1.3. ¿La INTRODUCCION DE DATOS permite ASIMILAR LOS PROCESOS manipulativos del álgebra lineal?

1.4. ¿DERIVE proporciona un estilo especial en la RESOLUCION DE PROBLEMAS?

1.5. ¿Resulta imprescindible el uso de DERIVE para contestar a las cuestiones teóricas?

1.6. La transferencia de procesos o conceptos de lápiz y papel a DERIVE ¿resulta sencilla?

1.7. La transferencia de procesos o conceptos de DERIVE a lápiz y papel ¿resulta sencilla?

1.8. ¿Cuál de los dos sistemas es más CÓMODO para estudiar álgebra lineal?

1.9. ¿Cuál de los dos sistemas de notación es MEJOR para comprender los conceptos?

1.10. Complementariedad del sistema de notación usado por DERIVE y el de LÁPIZ Y PAPEL

1.11. DERIVE ¿sistema de notación final o sistema de notación intermedio?

1.12. Valoración sobre la cuestión, es decir, a juicio del alumno ¿DERIVE proporciona un sistema de notación intermedio?

1.13. ¿Cuáles son los inconvenientes que se exponen sobre el uso de DERIVE?

Una vez planteados los atributos fundamentales sobre los que centramos nuestro análisis en esta primera cuestión, recopilamos el conjunto de unidades significativas y los aspectos característicos que mostraban estos elementos a partir de los datos recogidos. Para ello consideramos sobre cada uno de los atributos los elementos característicos que podrían contestarlos, teniendo en cuenta que en algunos casos podemos no haber obtenido información sobre cada uno de los atributos. El conjunto de datos y agrupamiento que realizamos (se puede consultar en el ANEXO XVIII punto 1), nos permitió elaborar la siguiente tabla en la que se recogen los aspectos característicos de cada uno de los atributos que configuran esta primera cuestión:

CUESTIÓN 1: SISTEMA DE NOTACIÓN INTERMEDIO																
Aspectos característicos de cada atributo		**CONTESTACIONES EN CASO**														
ATRIBUTOS	**ASPECTOS CARACTERISTICOS**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
1.1. ¿DERIVE ayuda a descubrir los conceptos con la investigación?	**Sí, ayuda a descubrir los conceptos mediante investigación**		X										X			
	Sí, permite investigar en los conceptos teóricos convirtiendo el ordenador en herramienta						X									
	No está claro que favorezca la abstracción y el análisis									X						
	No, pues entendía previamente los conceptos teóricos pero luego se atascaba										X					
1.2. ¿La Introducción de datos permite VISUALIZAR los contenidos?	**Sí, pues obliga a entender perfectamente el significado de los datos**	X														
	Sí, pues el sistema de notación generaba un cierto hábito de uso, un esquema mental que obliga a pensar como se hace con derive				X											
	Sí, pues motiva y estimula la comprensión				X											
	No, pues presenta problemas en la visualización					X										
	No pues ha tenido dificultades por la falta de costumbre y porque ofrece visión distinta								X							
	No, porque ya había realizado todas las prácticas con lápiz y papel									X						
1.3. ¿La introducción de datos permite asimilar los procesos manipulativos?	**Sí, la propia introducción de datos permite entenderlos y comprender los métodos**	X				X	X		X	X	X	X	X	X		
	Si, aunque inicialmente ha provocado errores que luego desaparecieron		X													

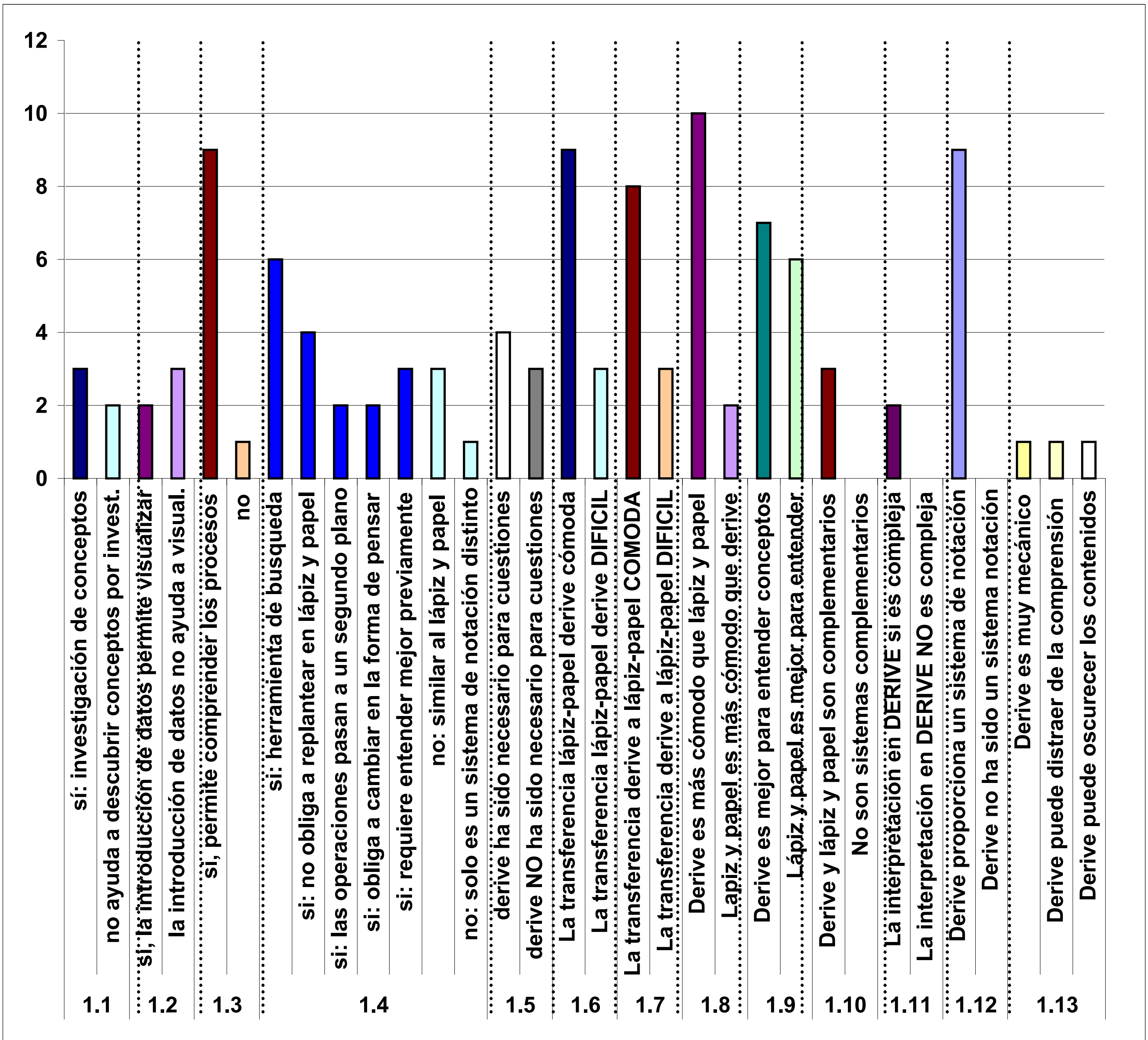
1.4. ¿Derive proporciona un estilo especial en la resolución de problemas?	**Sí, DERIVE se convierte en HERRAMIENTA de búsqueda de soluciones que sustituye al lápiz y papel**	X	X	X	X	X	X									
	Sí, DERIVE no requiere replantear previamente con lápiz y papel					X	X						X		X	
	Sí, pues con DERIVE las operaciones pasan a un segundo plano y se puede estar más atento al planteamiento			X									X			
	Sí, pues DERIVE obliga a un cambio en la forma de pensar sobre los problemas						X			X						
	Sí, pues el estilo de notación es muy distinto y requiere entender previamente incluso a veces enfocar previamente con lápiz y papel								X		X			X		
	No, el sistema de notación es similar al de lápiz y papel para resolver problemas		X					X				X				
	No, el sistema de notación es distinto lo cual obliga a un estilo distinto en la resolución pero un planteamiento similar														X	

ATRIBUTO	*ASPECTOS CARACTERÍSTICOS*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1.5. ¿Resulta imprescindible el uso de derive para contestar a las cuestiones teóricas?	No, no ha sido fundamental, no ha tenido dificultades a resolverlas sin DERIVE				X		X						X			
	DERIVE ayudaba a realizar algunas operaciones intermedias, pero no es fundamental										X				X	
	DERIVE es necesario , encontraba indefenso al principio					X								X		
1.6 ¿Resulta sencilla la transferencia de procesos o conceptos de lápiz y papel a derive?	Había que entender bien los contenidos para manejar derive, aunque una vez dominado no tenía problemas en traducir contenidos de un sistema en otro	X	X													
	Sí, resultaba sencilla				X	X	X					X	X	X		
	Resulta más cómodo trasladar procesos de lápiz y papel a derive, permitiendo ahorrar tiempo			X				X		X						
	No pues derive es un sistema de notación más lejano al lápiz y papel										X					
1.7. ¿Resulta sencilla la transferencia de procesos o conceptos de derive a lápiz y papel?	Al principio tenía dificultades luego una vez dominado no había problemas		X													
	Resulta más compleja la transferencia de derive a lápiz y papel que al revés			X												
	Si, resulta sencilla				X		X		X			X	X	X		
	Existe alguna dificultad por falta de práctica en el cálculo					X		X								
	Resulta más sencillo de derive a lápiz y papel que al revés										X					
1.8. ¿Cuál de los dos sistemas es más cómodo para estudiar el álgebra lineal?	Al principio resultaba más cómodo lápiz y papel pues derive obligaba a entender previamente el contenido, por falta de costumbre, luego es más cómodo derive	X	X													
	Derive es más cómodo por el ahorro de operaciones			X	X	X	X	X		X	X	X	X	X		
	Derive es más cómodo porque es más cercano					X										

ATRIBUTOS	ASPECTOS CARACTERÍSTICOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1.9. ¿Cuál de los dos sistemas de notación es mejor para comprender los conceptos?	Se aprende mejor la teoría con derive porque se tiene que saber exactamente lo que se está haciendo no se puede divagar		X													
	Se aprende mejor la teoría con derive porque se evitan operaciones y procesos intermedios			X												
	Derive porque motiva y estimula la comprensión				X											
	Derive porque es una buena herramienta para investigar los conceptos teóricos mejor que la pizarra						X									
	Derive pues permite que los conceptos queden machacados"						X									
	Derive pues permite tantear y obtener las ideas de forma aproximada								X							
	Son sistemas de notación complementarios									X						
	Derive pues se centra más en contenidos que en métodos											X		X		
	Derive NO ayuda a entender a la primera los conceptos	X														
	Con lápiz y papel porque derive ofrece problemas de visualización					X										
	con lápiz y papel porque surgen problemas por falta de costumbre del sistema de notación								X							
	es mejor el sistema tradicional					X		X			X		X			
	Derive es mejor para problemas												X			
1.10. Derive y Lápiz y papel ¿son sistemas de notación complementarios?	Han sido complementarios porque la vinculación con el sistema tradicional impedía utilizar con más soltura derive	X														
	Son complementarios, pues con lápiz y papel se favorece la comprensión y el planteamiento de procesos y con derive los cálculos								X							
	Son complementarios y derive permite ahorrar tiempo de cálculo									X						
1.11. ¿La interpretación de los resultados era difícil o fácil?	La interpretación de resultados en derive en ocasiones resultó compleja, podría tener dificultades	X							X							
1.12. ¿Cuál es la valoración sobre si derive proporciona un sistema de notación intermedio?	Derive es un sistema de notación intermedio		X			X	X				X	X		X		
	Más que sistema de notación intermedio es una herramienta de cálculo							X								
	Derive es una mezcla entre sistema de notación intermedio y herramienta de cálculo								X							
	Inicialmente como herramienta de trabajo y luego más como sistema de notación												X			
1.13. ¿Qué inconvenientes se observan con el sistema de notación de derive?	La mecánica puede provocar que los conceptos se adquieran de forma mecánica						X									
	El uso del programa puede distraer al alumno de la comprensión de los conceptos teóricos al centrar su atención en el manejo del programa							X								
	Ha oscurecido en ocasiones los contenidos desorientando el aprendizaje										X					

Con estos datos hemos realizado el siguiente análisis gráfico:

ESTUDIO GRÁFICO DE LA CUESTIÓN 1:
Derive como sistema de notación intermedio



A la vista del resumen (ver ANEXO XVIII), del cuadro de resumen anterior y este gráfico con el que analizamos cada una de los atributos que informan de las características de la primera cuestión, podemos realizar las siguientes afirmaciones:

1.1. El sistema de notación que emplea DERIVE no podemos asegurar que facilite en general la investigación, ya que en algunos casos hemos observado que el programa facilitaba el descubrimiento; sin embargo en otros casos los alumnos consideraban que no era un sistema de notación que facilitase los procesos de investigación.

1.2. Tampoco está muy claro que DERIVE haya facilitado la VISUALIZACION de los contenidos, pues en algunos casos se observa que sí ha ayudado a entender perfectamente pero en otros casos observamos problemas en visualización de conceptos a través del ordenador, quizás por la falta de costumbre del medio.

1.3. Parece claro que la forma de INTRODUCIR los datos con derive sí ha facilitado la asimilación de los procesos rutinarios y la comprensión de los métodos, aunque para ciertos casos se han generado errores que con el aprendizaje del programa se han ido subsanando.

1.4. DERIVE proporciona en general, un estilo especial en la resolución de problemas por múltiples razones:

- DERIVE se convierte en una HERRAMIENTA DE BÚSQUEDA DE SOLUCIONES que sustituye al lápiz y papel,
- no requiere replantear previamente con lápiz y papel las OPERACIONES PASAN A UN SEGUNDO PLANO, y se puede estar mas atento al planteamiento
- DERIVE obliga a un cambio e la FORMA DE PENSAR sobre los problemas y una cierta aclimatación al nuevo sistema el estilo de notación es muy distinto
- se requiere entender previamente incluso a veces enfocar previamente con lápiz y papel

A pesar de esto en algunos casos se considera que el sistema de notación de DERIVE es similar al de lápiz y papel para resolver problemas.

1.5. Aunque en general no se considera un instrumento imprescindible para resolver las cuestiones teóricas, sin embargo en otros casos DERIVE ayudaba a realizar algunas operaciones intermedias, solo en dos casos se consideraba como fundamental.

1.6. En cuanto al proceso de transferencia de lápiz y papel a DERRIVE en general no ha habido problemas para efectuar esa transferencia, resulta sencilla en general, pero obligaba a manejar bien el programa y a entender bien los contenidos.

1.7. En cuanto al proceso de transferencia de derive a lápiz y papel en general tampoco ha habido problemas para efectuar estas transferencias, aunque en ocasiones existían dificultades por la falta de práctica con los cálculos. En cuanto a la comparativa parece que ha resultado más compleja la transferencia de derive a lápiz y papel que de derive a lápiz y papel.

1.8. Se observa que DERIVE resultaba un sistema de notación más cómodo que el LÁPIZ Y PAPEL, obligando a entender previamente el contenido y con ciertas dificultades por la falta de costumbre.

1.9. DERIVE parece ser un buen sistema de notación para el aprendizaje por varias razones: no se puede divagar en lo que se está haciendo, se evitan operaciones y procesos intermedios, se motiva y estimula la comprensión. Por eso podemos decir que en general se ha considerado mejor DERIVE que el LÁPIZ Y PAPEL para el aprendizaje, aunque en algunos casos ha sido todo lo contrario, principalmente porque parece que DERIVE ofrecía ciertos problemas en la visualización, falta de costumbre en el uso de este sistema.

1.10. Parece que DERIVE y LAPIZ y PAPEL han sido en algunos casos sistemas complementarios, porque DERIVE facilitaba los cálculos mientras que el lápiz y papel los planteamientos y la comprensión.

1.11. Sobre la interpretación de los resultados con DERIVE no podemos ofrecer una valoración pues los datos únicamente nos han mostrado que en dos casos la interpretación en ocasiones resultó compleja.

1.12. La valoración de los diferentes casos es que DERIVE si es un buen sistema de notación intermedio, en algunos casos se considera que más que notación intermedio es una HERRAMIENTA DE CÁLCULO y en otros una mezcla de HERRAMIENTA DE CÁLCULO y SISTEMA DE NOTACIÓN.

1.13. Las principales dificultades o inconvenientes que se observan con este SISTEMA DE NOTACIÓN intermedia se centran en tres ideas: que el sistema de notación y su mecánica puede provocar que los conceptos se adquieran de forma mecánica, que el uso del programa distraiga al alumno de la comprensión y que oscurezca en ocasiones los contenidos.

Así pues podemos concluir de manera parcial diciendo que DERIVE es un sistema de notación con las siguientes características:

1) DERIVE es un sistema de notación que no ha facilitado la investigación ni la visualización de los contenidos aunque puede haber sido debido fundamentalmente a la falta de costumbre en el razonamiento con el uso del programa.
2) La forma de introducir los datos en DERIVE ha facilitado la asimilación de los procesos rutinarios y la comprensión de los métodos que se han ido introduciendo.
3) DERIVE proporciona un estilo especial en la resolución de problemas como herramienta de búsqueda de soluciones sustituyendo al lápiz y papel, ya que con derive las operaciones pasan a un segundo plano y se puede estar más atento al planteamiento, lo cual provoca una nueva forma de pensar en los problemas, que requiere una comprensión clara del problema.
4) DERIVE ha ayudado a realizar las cuestiones teóricas en operaciones intermedias.
5) Los procesos de transferencia entre el sistema de notación de DERIVE y de lápiz y papel no ofrecen dificultades aunque parece haber sido más complejo el proceso de transferencia de DERIVE a lápiz y papel.
6) DERIVE se considera como un sistema de notación más cómodo que el lápiz y papel, obligando a entender previamente los contenidos.
7) DERIVE es un buen sistema de notación para el aprendizaje por varias razones: porque se evitan operaciones y procesos intermedios, se motiva y estimula la comprensión, y no permite divagar en lo que se está haciendo.
8) Puede decirse que ambos sistemas de notación son sistemas totalmente complementarios pues la rapidez de cálculos de DERIVE y su forma de notación pueden complementar las carencias que tienen los alumnos en el sistema de lápiz y papel.

Teniendo en cuenta estas características y añadiendo que las valoraciones de los alumnos sobre DERIVE como sistema de notación intermedio son muy positivas, y además observando las dificultades que han ofrecido podemos decir que DERIVE es un sistema de notación intermedio mejor que lápiz y papel pero que puede servir de complemento al mismo, fundamentalmente por el hábito de uso del sistema tradicional.

CUESTIÓN 2: INTERACTIVIDAD

¿Cuál es el grado de INTERACTIVIDAD que suscita esta estrategia entre los alumnos y el profesor, entre los alumnos y el medio didáctico y entre los propios alumnos?

Con esta cuestión tratamos de descubrir cuál es el grado de interactividad entre los tres protagonistas del escenario educativo: alumnos, profesores y medio didáctico. Tenemos que analizar por consiguiente tres niveles de interactividad:

a) La interactividad que suscita la estrategia entre los ALUMNOS y el PROFESOR:
b) La interactividad que brinda el programa DERIVE a los ALUMNOS.
c) Y por último la interactividad que provoca esta estrategia entre los propios ALUMNOS:

En cada uno de estos niveles vamos a considerar algunos ATRIBUTOS fundamentales que nos permitan analizar con mayor precisión esta cuestión en sus niveles correspondientes:

a) NIVEL 1: INTERACTIVIDAD ALUMNOS-PROFESOR: La importancia de la comunicación entre profesor-alumnos, es una elemento que condiciona enormemente el proceso de enseñanza y aprendizaje, por ello consideramos importante analizar como ha sido la interactividad entre estos dos protagonistas del proceso, respecto al tipo de comunicación establecido y al análisis de la estrategia respecto a esta interactividad. Por ello consideramos como atributos:
    - 2.1.1 Descripción del tipo de comunicación entre alumnos y profesor.
    - 2.1.2. ¿La metodología empleada ha favorecido la interactividad entre alumnos y profesor?
    - 2.1.3.Valoración en escala 1 a 5 de la interactividad profesor-alumno
    - 2.1.4. ¿Existen otras valoraciones adicionales?

b) NIVEL 2: INTERACTIVIDAD ALUMNOS-PROGRAMA DERIVE: Entre las características que ofrece el nuevo medio computacional, en el capítulo I, página 42, citamos la interactividad del ordenador en el medio educativo. Por eso consideramos muy importante analizar este nivel de interactividad que brinda el programa DERIVE a los alumnos, para lo cual consideramos que dos atributos fundamentales son el análisis de los mensajes que han recibido los alumnos y la valoración que los alumnos dan de esta interactividad:
    - 2.2.1. ¿Los mensajes del programa han guiado y orientado suficientemente al alumno?

- 2.2.2. Valoración en escala de 1 a 5 de la interactividad programa-usuario

c) NIVEL 3. INTERACTIVIDAD ENTRE ALUMNOS: Dado que el aprendizaje colaborativo, es un elemento importante en nuestra estrategia, consideramos que es muy importante analizar el tipo interactividad que se ha establecido entre los alumnos a partir de esta estrategia didáctica. Algunos atributos que nos permitirán estudiar este nivel de interactividad son:
   - 2.3.1. Descripción del tipo de comunicación entre los alumnos.
   - 2.3.2. ¿La metodología empleada ha favorecido una buena interactividad entre los alumnos?
   - 2.3.3. Valoración en escala de 1 a 5 de la interactividad alumno-alumno
   - 2.3.4. ¿Existen otras valoraciones adicionales?

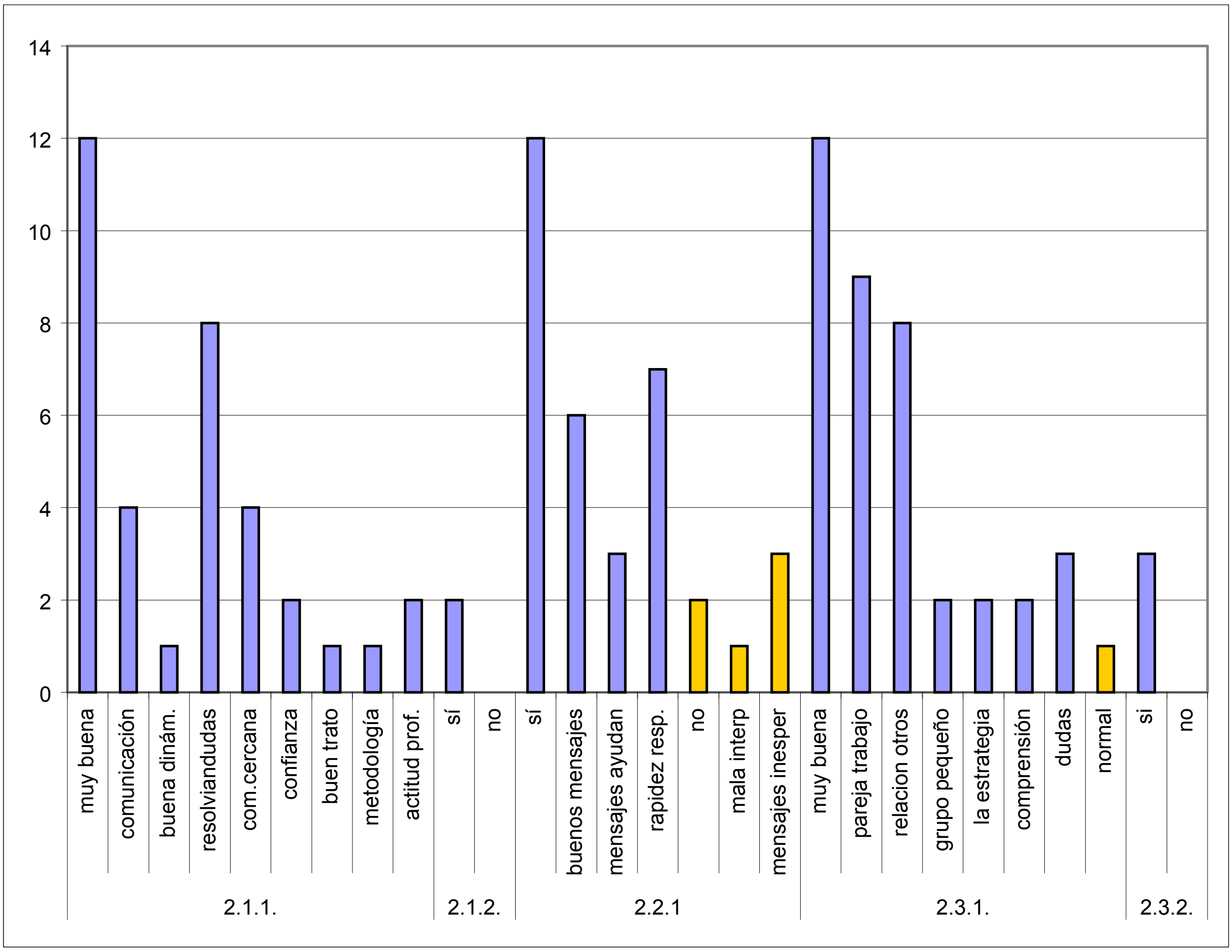
A la vista de estos atributos sobre los tres niveles de estudio clasificamos los elementos significativos obtenidos en las conclusiones parciales de cada caso en la cuestión 2 y obtuvimos una clasificación que se puede consultar en el ANEXO XVIII, parte 2, con la que hemos elaborado el siguiente cuadro esquemático:

CUESTIÓN 2: INTERACTIVIDAD DE LA ESTRATEGIA																
Aspectos característicos de cada atributo		**CONTESTACIONES EN CASO**														
ATRIBUTOS	**ASPECTOS CARACTERISTICOS**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
NIVEL 1: INTERACTIVIDAD ALUMNOS-PROFESOR																
2.1.1. Tipo de comunicación alumno-profesor	**Mucha comunicación porque había pocos alumnos**	X		X		X			X					X		
	Mucha comunicación por el tipo de dinámica de trabajo	X														
	Mucha comunicación pues se resolvían dudas		X		X		X		X			X	X	X	X	
	Comunicación cercana		X		X		X				X					
	Había mucha confianza				X	X										
	Ha sido muy buena	X		X	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	
	El profesor ha estado atento a los alumnos								X							
	Buen trato con el profesor									X						
	Ha motivado al alumnado											X				
	La metodología empleada ha favorecido												X			
2.1.2. La Metodología empleada ha Favorecido interactividad	**La dinámica ofrecida por la metodología**	X														
	La metodología favorecía una mayor cercanía												X			
2.1.3.Valoración int. Alumno-profesor	**En escala de 1 a 5**	5	5	4	4	4	4	4	4	5	5	5	4	3		

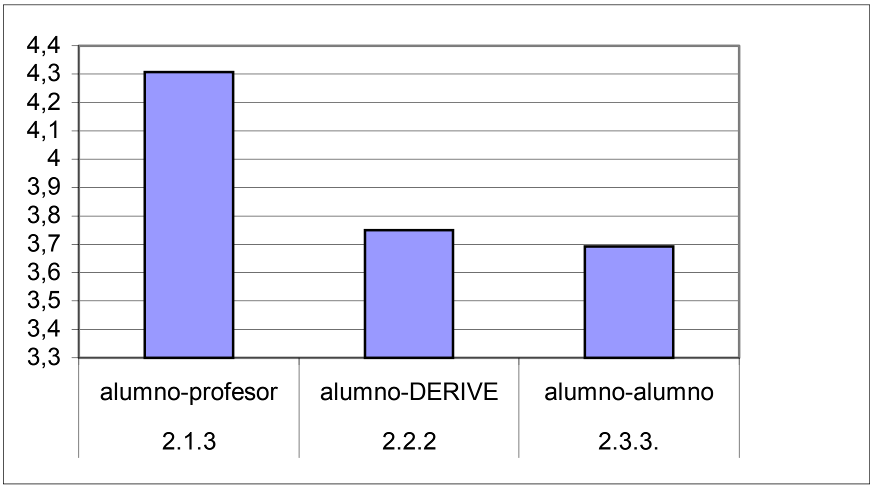
NIVEL 2:INTERACTIVIDAD DEL PROGRAMA DERIVE																
ATRIBUTO	ASPECTO CARACTERÍSTICO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2.2.1. Los mensajes del programa han guiado ¿	**Había problemas de interpretación**	X														
	Había mensajes inesperados al principio	X									X	X				
	Los mensajes se entienden perfectamente		X													
	Los mensajes ayudan a detectar errores			X	X						X					
	Se manejaban bien los datos			X												
	Se recibía respuesta rápida				X	X		X			X		X	X	X	
	Los mensajes orientan				X		X						X	X		
	Respuesta a las dudas					X			X							
	Un programa desfasado									X						
2.2.2.Valoración int. Programa-alumno	**Interactividad programa-usuario**	5	5	4	3	4	4	3	3	3	4	4,5	4	3	3	
NIVEL 3: INTERACTIVIDAD ENTRE LOS ALUMNOS																
ATRIBUTO	ASPECTOS CARACTERÍSTICOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2.3.1. Tipo comunicación entre alumnos	**Se basa en la pareja de trabajo, el compañero de pupitre fundamentalmente**	X	X					X	X	X		X	X	X	X	
	Se contrastan resultados, y hay intercambios entre alumnos	X									X	X			X	
	Se consultan las dudas	X												X	X	
	Ha sido una comunicación muy buena	X		X	X	X	X		X	X	X	X	X	X	X	
	Ha sido normal							X								
	Ha habido relación con numerosos compañeros no solo con el compañero de pupitre			X		X	X		X		X	X	X	X		
	Ha habido buena comunicación al ser un grupo pequeño									X				X		
	La estrategia didáctica ha favorecido esta interactividad entre alumnos											X				
	Esta comunicación ha favorecido la comprensión de contenidos														X	
2.3.2.La metodología empleada ¿ha favorecido una buena interactividad entre los alumnos?	Sí, ha favorecido la interactividad,											X	X			
2.3.3. Valoración int. Entre alumnos	Valoración de 1 a 5 de la interactividad entre los alumnos		4	4	3,5	4	4	2	3,5	4	5	4	3	4	3	
2.3.4. ¿Otras valoraciones adicionales?	La interactividad entre alumnos favorece el aprendizaje					X										
	La relación entre alumnos comparada con otras clases ha sido muy buena											X				

A la vista de este cuadro comparativo y hemos realizado una gráfica que nos permitiera observar visualmente el estudio final:

ESTUDIO GRÁFICO DE LA CUESTIÓN 2:
Interactividad que proporciona la estrategia
2.1 (alumno-profesor) / 2.2 (alumno-DERIVE) / 2.3 (alumno-alumno)



Valoración de los alumnos sobre la interactividad (Escala de 1 a 5)



A partir de la tabla y de las gráficas que hemos analizado podemos concluir con tres ideas fundamentales:

1) La INTERACTIVIDAD PROFESOR-ALUMNO ha sido muy positiva pues había mucha comunicación entre el profesor y el alumno, resolviendo las dudas de forma instantánea, había también bastante confianza entre alumnos y profesor, el profesor podía estar atento a los alumnos. Podemos decir que una de las causas de esta interactividad tan positiva ha sido sin duda que el grupo de alumnos era reducido, pero también tenemos que indicar que el tipo de metodología y dinámica que se ha generado a partir de nuestra estrategia didáctica ha provocado situaciones que favorecían esta interacción profesor-alumno que sin lugar a dudas ha acercado enormemente al profesor. Este ambiente de interactividad ha sido favorecido también por el uso de los ordenadores, ya que las dudas operativas se resolvían de forman instantánea y las dudas conceptuales se podían resolver planteando ejemplos que se manejaban con el programa de forma instantánea.

2) En cuanto a la INTERACTIVIDAD ENTRE ALUMNO-PROGRAMA podemos decir que aunque en ocasiones han surgido errores de interpretación y mensajes inesperados podemos decir que en general los mensajes que iba ofreciendo el programa derive permitía en unas ocasiones detectar errores, en otros orientar al alumno para futuros intentos y en general ofrecía respuestas rápidas. Esta interactividad de hecho se ha valorado de manera positiva por los alumnos, lo cual nos indica que DERIVE ha sido un elemento mediador muy positivo en el aprendizaje por su elevado grado de interactividad.

3) Respecto a la INTERACTIVIDAD ENTRE LOS ALUMNOS podemos decir que fundamentalmente la comunicación se ha basado en las parejas de trabajo, es decir entre los compañeros de pupitre aunque en algunos casos se ha extendido a otros compañeros. Ha sido una comunicación excelente con un nivel de valoración que ronda el 3,5 sobre 5 como se observa en el cuadro. Además en estas comunicaciones se han contrastado resultados, consultado dudas, e intercambiado ideas; circunstancia que ha favorecido enormemente la comprensión de los contenidos. Sin lugar a dudas, el hecho de ser un grupo pequeño ha sido un elemento importante, pero más importante ha sido el estilo de metodología que provocaba nuestra estrategia, así como el uso del ordenador ya que la rapidez de cálculos brindaba la posibilidad de ir experimentando y trabajando con gran rapidez los problemas y ejercicios que se iban planteando.

Así pues podemos decir que la estrategia didáctica ha provocado un elevado grado de interactividad tanto entre profesor y alumnos como entre los propios alumnos; y también podemos afirmar que la interactividad que ha ofrecido a los alumnos como usuarios del programa derive ha sido bastante elevada.

CUESTIÓN 3: PROTAGONISMO Y AUTOCREACIÓN.

Este tipo de estrategia didáctica ¿favorece el PROTAGONISMO Y la AUTOCREACIÓN del alumno frente al medio tecnológico, evitando que el alumno sea un mero USUARIO del sistema?

Uno de los peligros que puede provocar la introducción de los ordenadores en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas tiene que ver con la pérdida de autonomía, y la dependencia (capítulo I, apartado I.2.4). Consideramos que nuestra estrategia pretendía favorecer el protagonismo y la capacidad creativa de los alumnos en su proceso de construcción de conocimiento (capítulo II). Por eso planteamos esta cuestión para analizar el grado de PROTAGONISMO Y AUTOCREACIÓN que provoca la estrategia didáctica, es decir un estudio a dos niveles de análisis:

a) Grado de PROTAGONISMO que provoca la estrategia didáctica en la en el aprendizaje del alumno.
b) Grado de AUTOCREACIÓN suscitada por la estrategia didáctica en el aprendizaje del alumno.

Para el estudio de estos dos niveles de análisis indicados por la cuestión, hemos considerado dos atributos fundamentales en cada nivel:

a) GRADO DE PROTAGONISMO

3.1.1. ¿Qué características tiene el protagonismo que han desarrollado los alumnos con esta estrategia didáctica?

3.1.2. ¿Qué grado de protagonismo ha suscitado nuestra estrategia didáctica en las diferentes actividades desarrolladas?

b) GRADO DE AUTOCREACIÓN

3.2.1. ¿Qué características tiene la capacidad de autocreación que ha podido suscitar este tipo de estrategia?¿Qué grado de autocreación ha suscitado nuestra estrategia en las diferentes actividades desarrolladas?

Con las conclusiones parciales de cada caso obtenidas en el análisis vertical hemos agrupado los elementos significativos en torno a estos atributos obteniendo un resumen que se puede ver en ANEXO XVIII; apartado 3, y que hemos resumido en la siguiente tabla, señalando los aspectos característicos más relevantes y sus apariciones en cada uno de los casos de la investigación:

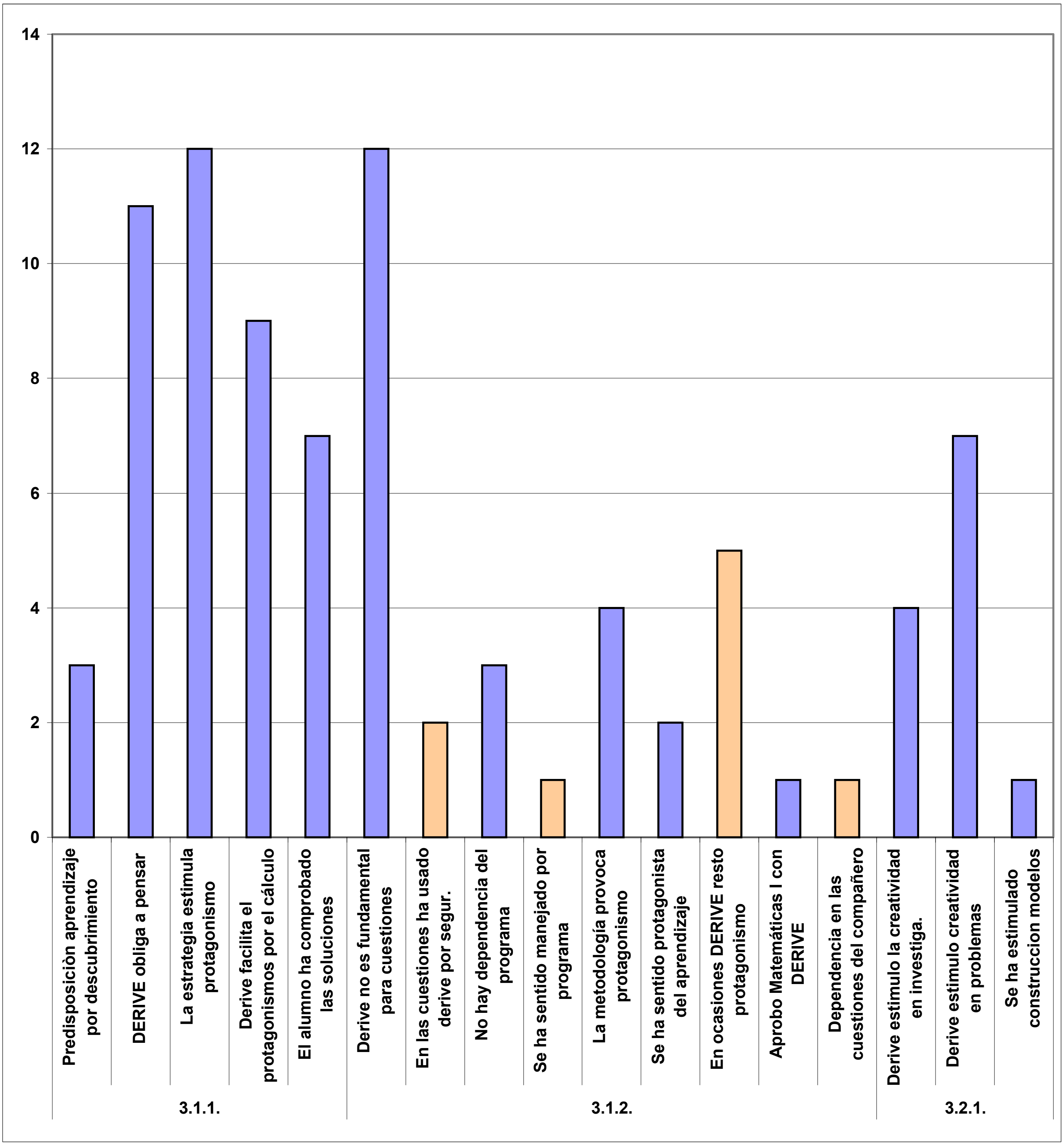
CUESTIÓN 3:PROTAGONISMO Y AUTOCREACIÓN

Aspectos característicos de cada atributo		**CONTESTACIONES EN CASO**														
ATRIBUTOS	**ASPECTOS CARACTERÍSTICOS**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
3.1.1. ¿Qué características tiene el protagonismo que han desarrollado los alumnos con esta estrategia?	**Existía en el alumnado un cierto grado de predisposición en el aprendizaje por descubrimiento, que contiene un elevado grado de protagonismo**			X	X		X									
	El uso de DERIVE ha obligado a pensar sobre los planteamientos de los problemas, ejercicios y además ha permitido entender bien los procesos	X	X		X	X			X	X	X	X	X	X	X	
	Con esta estrategia se han intentado descubrir por sí mismos las investigaciones propuestas con actitud de búsqueda, estimulando un protagonismo especial por la investigación		X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
	Derive ha facilitado el protagonismo a la hora de resolver problemas, por la búsqueda de soluciones y caminos alternativos, sin un coste de cálculo adicional	X		X			X			X	X	X	X	X	X	
	La utilización de derive ha permitido que le alumno COMPROBARA las soluciones que se proponían	X					X	X	X				X	X	X	
3.1.2. ¿Qué grado de protagonismo ha suscitado nuestra estrategia en las diferentes actividades desarrolladas?	**Para realizar las cuestiones teóricas derive no resultaba ser fundamental, y se utilizaba solo para realizar comprobaciones y cálculos sencillos**	X	X	X	X	X			X	X	X	X	X	X	X	
	Ha utilizado DERIVE en las cuestiones teóricas porque daban seguridad no se fiaba de sus propios cálculos y en cierta forma necesitaba del programa						X	X								
	Sabia trasladar fácilmente los procesos hechos con lápiz y papel a derive y viceversa, luego no hay dependencia excesiva del programa	X			X								X			
	Se ha sentido manejado por el programa										X					
	La metodología ha suscitado un protagonismo superior al que provoca la metodología tradicional		X	X							X	X				
	El alumno se ha sentido protagonista de su aprendizaje				X								X			
	En ocasiones se ha encontrado perdido al realizar procesos en derive, como si el programa le restase PROTAGONISMO					X	X	X	X					X		
	Ha conseguido aprobar Matemáticas I gracias a derive						X									
	Ha tenido cierta dependencia en la resolución de cuestiones y problemas del compañero de pupitre								X							
3.2.1. ¿Qué características tiene la capacidad de autocreación que ha podido suscitar este tipo de estrategia?	**En las investigaciones el tipo de estrategia ha estimulado cierta capacidad creativa para la búsqueda de soluciones, facilitada por el uso de DERIVE**	X	X									X	X			
	En los problemas se ha estimulado la capacidad creativa, por el uso de DERIVE para buscar soluciones	X	X						X	X			X	X	X	
	La construcción de modelos ha sido una capacidad creativa que se ha estimulado en la estrategia		X													

A la vista de este cuadro podemos elaborar el siguiente gráfico en el que aparecen en la parte inferior los diferentes aspectos característicos agrupados en sus correspondientes atributos y su grado de incidencia:

ESTUDIO GRÁFICO DE LA CUESTIÓN 3:

Protagonismo y autocreación provocado por la estrategia didáctica



A partir del cuadro comparativo y la tabla anterior podemos extraer las siguientes conclusiones parciales:

1) Respecto al primer nivel de análisis de la cuestión, relacionado con el PROTAGONISMO que ha provocado nuestra estrategia didáctica en el alumnado, debemos señalar que, a la vista del cuadro esquemático anterior, ese protagonismo tiene tres características fundamentales:
   - El uso de DERIVE mediante la metodología propuesta por nuestra estrategia didáctica ha obligado en la mayor parte de los casos a **pensar en los planteamientos de los problemas y ejercicios** que se han ido proponiendo, además de permitir entender bien los procesos manipulativos; circunstancias que han permitido un nivel de protagonismo muy significativo en los alumnos.
   - Con esta estrategia didáctica el alumno ha podido plantearse con la ayuda del programa **investigaciones con actitud positiva de búsqueda**, **estimulando** de esta forma **el descubrimiento** de los conceptos a través de una investigación que podía ser posible con la ayuda del programa de cálculo simbólico.
   - La resolución de problemas reales en ocasiones complejos como se han planteado al finalizar cada capítulo, han obligado al alumno a **buscar las soluciones analizando varios caminos alternativos** de resolución, sin que eso supusiera un coste de cálculo adicional para el alumno, ya que el programa DERIVE lo permitía.

   También debemos añadir que en menor medida DERIVE ha servido para que los alumnos comprobaran de forma autónoma las soluciones que se iban planteando.

   Así pues podemos decir que el tipo de protagonismo se ha basado básicamente en que el alumno tenía una herramienta que le permitía y estimulaba a trabajar en torno a tres tipos de actividades:

   - Actividades de investigación: a través del descubrimiento.
   - Actividades de resolución de problemas: potenciando múltiples estrategias de resolución, es decir caminos alternativos de resolución de problemas.
   - Actividades de manipulación: reflexionando en los métodos y procesos manipulativos del álgebra lineal.

Respecto al grado de PROTAGONISMO que ha tenido el alumno, podemos constatar que DERIVE ha provocado en ocasiones que el alumno tuviera excesiva dependencia del programa, en parte por el desconocimiento inicial del mismo y de sus sistema de notación y en parte porque ha restado habilidades de cálculo al alumnado. Sin embargo observamos que en las CUESTIONES TEÓRICAS el uso del programa no ha sido un elemento fundamental, ha sido más bien una herramienta más, que ha ayudado a entender los contenidos. Así pues podemos decir que el grado de protagonismo del alumno ha sido bastante elevado.

2) Respecto del segundo nivel de análisis relacionado con LA **CAPACIDAD DE AUTOCREACION** que ha suscitado la estrategia didáctica, constatamos cierta falta de información al respecto, únicamente podemos señalar que nuevamente las actividades de investigación propuestas y los problemas han sido las tareas que más han incidido en la capacidad de autocreación del alumno. Efectivamente estas dos actividades han estimulado la creatividad por un lado en actividades de descubrimiento, y por otro lado en actividades de exploración y búsqueda de soluciones. Así pues, aunque no tenemos suficientes elementos de juicio para confirmar un grado elevado de autocreación, sí podemos destacar que las actividades que hemos reseñado han estimulado la AUTOCREACIÓN del alumno en sus procesos de aprendizaje.

CUESTIÓN 4: CONTENIDOS ESENCIALES.

Las pautas que hemos marcado en torno al uso de DERIVE ¿evitan que el ordenador se utilice para desarrollar principios que consideramos como CONTENIDOS ESENCIALES, propiciando un uso adecuado de las rutinas algebraicas que el sistema puede automatizar?

En esta cuestión tratamos de analizar si el uso que se ha hecho del programa DERIVE no ha permitido que el alumno utilice el ordenador para desarrollar los contenidos esenciales del programa, tal como se exponen en el capítulo II, propiciando un uso del programa para aquellos contenidos considerados no esenciales, es decir contenidos automatizables ya que son secundarios para el desarrollo de los contenidos fundamentales denominados esenciales. Aunque se trata de un análisis muy complejo, hemos realizado un estudio en dos niveles, por un lado un NIVEL SUBJETIVO, basado en las pruebas subjetivas (entrevistas y encuestas) en las que el alumno ha mostrado su opinión respecto al uso que se ha hecho del programa en esta cuestión concreta y por otro lado un NIVEL OBJETIVO, en el que a través del análisis de las pruebas objetivas realizadas por cada uno de los alumnos hemos obtenido una aproximación objetiva a los contenidos que el alumno ha utilizado en cada momento con y sin el programa.

Partiendo de estos dos niveles de análisis, hemos señalado varios atributos sobre cada uno de ellos que nos ofrecen las características principales del tipo de uso que se ha realizado con DERIVE en a lo largo del curso.

a) NIVEL SUBJETIVO.

4.1.1. ¿El alumno ha sabido distinguir entre contenidos esenciales y contenidos no esenciales o procesos manipulativos?

4.1.2. ¿Existen contenidos esenciales del programa que pueden haber corrido el riesgo de convertirse en procesos automatizables?

4.1.3. ¿Qué contenidos esenciales recuerda cada alumno?

4.1.4. ¿Los alumnos saben realizar operaciones básicas a mano?

4.1.5. ¿Cómo ha sido la comprensión de los contenidos esenciales con DERIVE?

b) NIVEL OBJETIVO

4.2.1. ¿Qué contenidos ha conseguido dominar?

4.2.2. ¿Qué contenidos no ha conseguido dominar?

4.2.3. ¿Ha sido fundamental el uso de DERIVE para contestar las cuestiones teóricas?

4.2.4. ¿Qué tipo de errores y dificultades conceptuales se han tenido en los problemas, cuestiones y examen final?

A partir de estos atributos estudiamos los aspectos característicos recogidos en las conclusiones parciales del análisis vertical y con este estudio realizamos un resumen, a partir del cual pudimos elaborar la tabla que se muestra a continuación. En esta tabla podemos observar claramente el dato cuantitativo del número de veces que ha aparecido cada aspecto característico y en qué casos se ha producido. Esto nos permite elevar como aspecto característico parcial a aquellos que tienen mayor incidencia en cada uno de los atributos a los que se refiere y nos permiten elaborar luego a continuación las conclusiones parciales de la cuestión.

CUESTIÓN 4: CONTENIDOS ESENCIALES

Aspectos característicos de los ATRIBUTOS SUBJETIVOS		**CONTESTACIONES EN CASO**														
ATRIBUTOS	**ASPECTOS CARACTERISTICOS**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4.1.1. El alumno ha sabido distinguir entre contenidos esenciales y no esenciales?	**Sí parece saber distinguir entre lo que es un contenido esencial de un proceso manipulativo, aunque en ocasiones lo mezcla**	X							X							
	En ocasiones los ejemplos de manipulación al ser muy repetitivos impedian quedarse con el proceso esencial	X														
	Si parece saber distinguir entre contenidos esenciales y no esenciales		X	X		X	X	X		X	X	X	X			
	No ha tenido muy clara la diferencia															
4.1.2. ¿Existen contenidos esenciales del programa que pueden haber corrido el riesgo de convertirse en automatizables?	**El cálculo de determinante y la aplicación de sus propiedades**	X	X													
	Las técnicas de resolución de sistemas	X	X													
	El cálculo de autovalores															X
	El cálculo del rango															X
4.1.3. ¿Qué contenidos esenciales recuerda el alumno?	**Parece tener claros los contenidos fundamentales de cada tema**		X	X		X			X		X	X	X			
	NO recuerda casi ningún contenido fundamental						X	X						X	X	
4.1.4. ¿Los alumnos saben realizar operaciones básicas a mano?	**El cálculo de determinante y resolución de sistemas no parecen haberse perdido**	X														
	Sabe realizar a mano el cálculo de determinantes de orden 3	X		X					X	X	X	X	X	X		
	No sabe realizar a mano el cálculo de determinantes de orden 3		X		X		X	X								
	Sabe realizar a mano la resolución por Cramer de sistemas			X							X	X		X		
	NO sabe realizar a mano la resolución por Cramer de sistemas		X		X		X	X	X	X						
	Sabe calcular a mano el rango de una matriz constante				X					X	X	X	X			
	No saber calcular a mano el rango de una matriz constante					X		X	X	X				X		
	Sabe calcular a mano los autovalores de una matriz orden 3			X							X	X	X			
	No sabe calcular a mano los autovalores de una matriz de orden 3				X		X	X	X					X		X

ATRIBUTO	ASPECTOS CARACTERÍSTICOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4.1.5. ¿Cómo ha sido la comprensión de los contenidos esenciales con derive?	**Ha sido inicialmente más compleja que con lápiz y papel pero luego con la práctica ha sido mejor con DERIVE, es decir MEJOR CON DERIVE QUE CON LÁPIZ Y PAPEL**	X														
	DERIVE ha ayudado a descubrir los conceptos porque obliga a saber lo que se está haciendo, y hay mayor acercamiento al álgebra lineal		X										X			
	DERIVE ha ayudado a entender los contenidos porque facilitaba la experimentación y la investigación.			X												
	DERIVE ha permitido que se visualicen mejor los conceptos porque ha permitido mucha práctica y ahorro de tiempo que se puede emplear en investigación											X		X		
	DERIVE ha ayudado a entender los conceptos porque se centraba la atención más en los contenidos que en los procesos rutinarios, quedando las operaciones relegadas a un segundo plano			X								X				
	DERIVE no ha servido para aprender los procesos manipulativos.									X						
	DERIVE puede provocar que el alumno no comprenda los contenidos y sin embargo los manipule de forma mecánica										X					
	DERIVE no aporta nada para reforzar la comprensión de contenidos ni favorece el análisis										X					
	DERIVE puede provocar que se reduzcan las habilidades de cálculo												X			
	DERIVE es peor para la introducción de contenidos es mejor el método tradicional												X			

ATRIBUTOS DEL NIVEL OBJETIVO

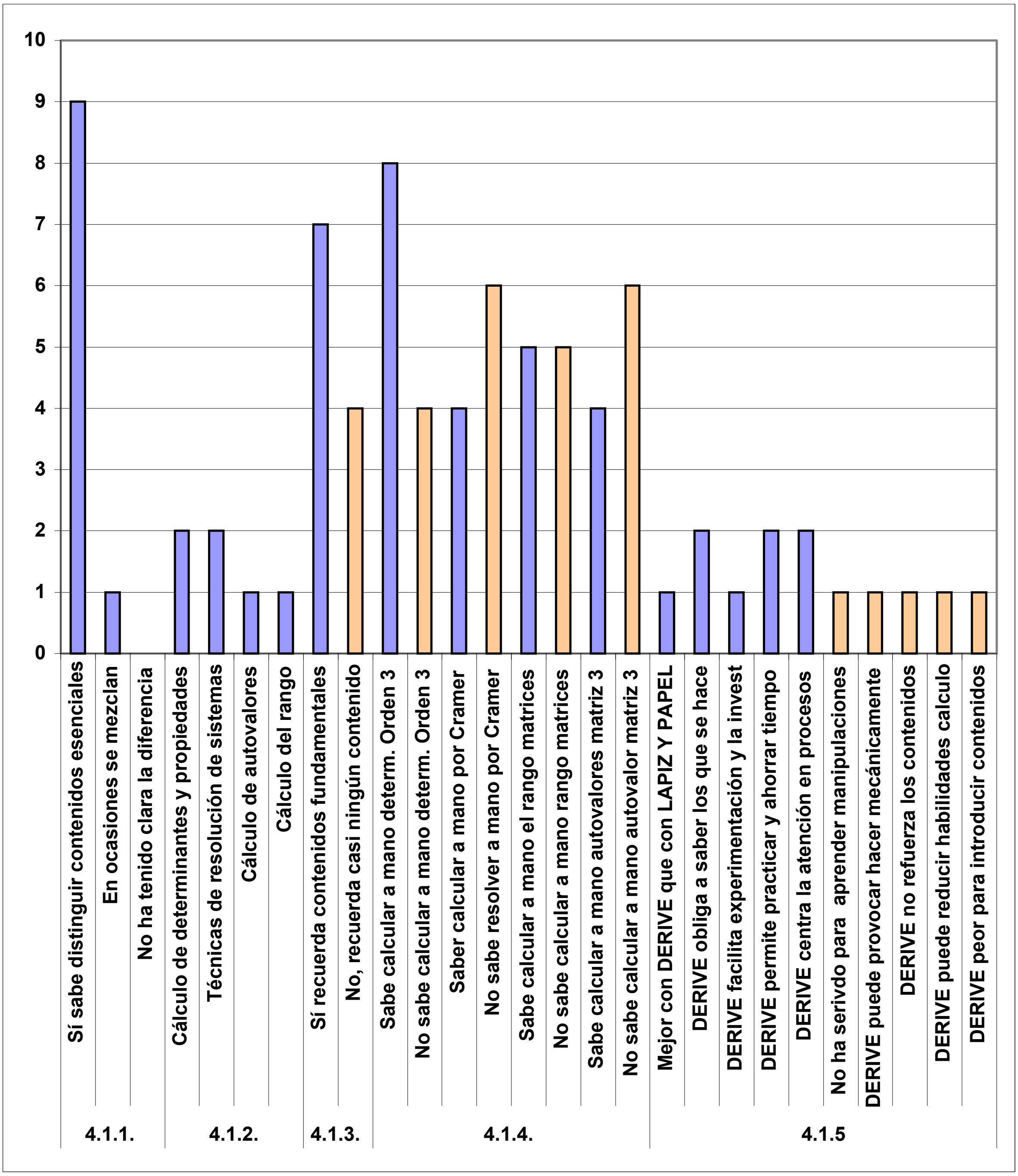
ATRIBUTOS	*ASPECTOS CARACTERÍSTICOS*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4.2.1. ¿Qué contenidos ha conseguido dominar el alumno? (si->S) ***4.2.2. ¿Qué contenidos no ha conseguido dominar el alumno? (no->N)***	**TEMA 1**															
	Concepto de subespacio vectorial				S											
	Concepto de espacio vectorial para polinomios	N	N	N		N		N		N	N	N	N			
	Concepto de base y dimensión de un subespacio vectorial				S			S		S	S	S	S		S	
	Cálculo de la dimensión de un subespacio vectorial a partir del número de ecuaciones no redundantes	N					N					S	S	N	N	
	Dependencia e independencia lineal de vectores	S			S		N	S	N		S	S		N	S	S
	Uso de modelos vectoriales para la resolución de problemas		S	S				S					S			
	Cálculo de las ecuaciones paramétricas a partir de las ecuaciones cartesianas, o encontrar una base a partir de las ecuaciones cartesianas		S	S			S	S			S	S	S	S		
	Distinguir ecuaciones paramétricas de ecuaciones cartesianas				N											
	Caracterización de subespacios definidos por ecuaciones cartesianas			N												
	Obtención de las ecuaciones paramétricas a partir de una base del subespacio	N			N	N			N						N	N
	Cálculo de las ecuaciones cartesianas a partir de las ecuaciones paramétricas		S	S			S	S			S	S	S			
	Obtención de una base de un subespacio a partir de un sistema de generadores	N			N	N			N						N	N
	Obtención de una base de un subespacio a partir de sus ecuaciones cartesianas		S	S			S			S	S	S	S	S		
	Intersección de subespacios vectoriales	N	S			N	S	S	S		S	S	S	S	N	N
	Obtención de subespacios ortogonales	N	N			N		N		N	N	N	N	N		
	Obtención de la suma de subespacios vectoriales	N	N	N		N			N	N	S	N	S	N	N	N
	Suma directa de subespacios	N	N	N		N	S	S	N	N	S	N	S	N	N	N

ATRIBUTO	**Aspectos característicos**	**Casos**														
4.2.1. ¿Qué contenidos ha conseguido dominar el alumno?(si→S) ***4.2.2. ¿Qué contenidos no ha conseguido dominar el alumno?(no->N)***	**TEMA 2**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
	Concepto de aplicación lineal		S	N		S		S			S		S	S		N
	Uso de los modelos matriciales para resolucion de problemas		S	S												
	Obtención de la matriz asociada a una aplicación lineal respecto bases canónicas	S	S	S	N	S	S	S	S	S	S	S	S	S	N	S
	Obtención de la matriz asociada a una aplicación lineal respecto de bases cualesquiera	S	S	S	N	S	S	S	N	N	S	S	S	S	N	S
	Obtención de las dimensiones de los subespacios imagen y núcleo de una aplicación lineal usando la fórmula de las dimensiones	N	S	S	N	N	S	S	N	S	S	N	S	N	N	N
	Relacionar la inversa de una matriz con la aplicación lineal inversa									S				S		
	Composición de aplicaciones lineales						S									
	Proceso de obtención de la inversa por Gauss-Jordan	S	S	S	N	N	S	N	N	S	N	S	S	N	N	N
4.2.1. ¿Qué contenidos ha conseguido dominar el alumno? (si-> S) ***4.2.2. ¿Qué contenidos no ha conseguido dominar el alumno?(no->N)***	**TEMA 3**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
	Propiedades de los determinantes					N		S	N			N	S	S	S	N
	Cálculo de rangos/ Rango de una matriz en función de parametros				S		S			N				N		N
	Condiciones de invertibilidad de una matriz por determinantes	S	S	S	S	S	S	N	N	S	S	S	S	S	S	S
4.2.1. ¿Qué contenidos ha conseguido dominar el alumno?(si->S) ***4.2.2. ¿Qué contenidos no ha conseguido dominar el alumno?(no->N)***	**TEMA 4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
	Formulación de sistemas lineales para resolver problemas	N	S	S	S	S	S	S	N			S		S		
	Discusión de sistemas dependientes de parámetros	S	S	S	N	S	N	S	N	N	S	S	S	S	N	N
	Discusión de sistemas sin parámetros	N	N	S	S	N	S	S	N	S	S	S	S	S	N	
	Propiedades de las soluciones de los sistemas lineales							S								
4.2.1. ¿Qué contenidos ha conseguido dominar el alumno?(SI->S) ***4.2.2. ¿Qué contenidos no ha conseguido dominar el alumno?(no->N)***	**TEMA 5**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
	Cálculo de autovalores	S	S		S	S		S	S	S	S		S	S	S	
	Cálculo de autovectores	S	S					S	S	S	S		S		S	
	Diagonalización de una matriz constante	S	S	N	N		S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
	Estudio de la diagonalización de una matriz dependiente de parámetros	N	N	S	N	S	N	N	N	N	N	S	S	N	N	N
	Propiedades de autovalores y autovectoers							N						N	N	
4.2.1. ¿Qué contenidos ha conseguido dominar el alumno?(si->S) ***4.2.2. ¿Qué contenidos no ha conseguido dominar el alumno?(no->N)***	**TEMA 6**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
	Obtención de la matriz asociada a una forma cuadrática	S	S	S	S	S	N	S	S	S	S	S	S	S	N	N
	Clasificación de formas cuadráticas pero de matrices NO SIMETRICAS						S									
	Clasificación de formas cuadráticas	S	S			S		S	S				S	S	S	
	Obtención de una forma cuadrática a partir de la forma matricial												S			S
	Clasificar formas cuadráticas dependientes de parámetros	S	S	S	N	S	N	S	S	N	N	N	S	N	N	N

	TEMA 7	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4.2.1. ¿Qué contenidos ha conseguido dominar el alumno? 4.2.2. ¿Qué contenidos no ha conseguido dominar el alumno?(no->N)	Teorema de Weierstrass						N				N					N
	Conjuntos convexos		S			S	N	S		S	S	S	S			
	Resolución gráfica de problemas de programación lineal					S		N			S	S	S		S	S
4.2.3. ¿Ha sido fundamental el uso de derive para contestar las cuestiones teóricas?	No ha necesitado DERIVE para contestar las cuestiones teóricas más que para realizar algunas comprobaciones de cálculo	X	X				X		X			X	X	X		
	Había dificultades para los planteamientos de las cuestiones teóricas sin derive			X										X		
	Si, porque no sabía calcular autovalores a mano															X
4.2.4. ¿Qué tipo de errores y dificultades conceptuales se han tenido en los problemas, cuestiones y examen final?	Problemas en la visualización de conceptos por ordenador				X											
	Se realizaban los procesos de forma muy mecánica				X											
	Curso poco teórico todo lo que se hacía era resolver ejercicios con derive, la teoría quedaba un poco floja, se ponía poco énfasis en la teoría					X										
	Se pierde cierta habilidad de cálculo											X				

Con estos cuadros hemos realizado las siguientes gráficas que nos han facilitado la interpretación de los datos:

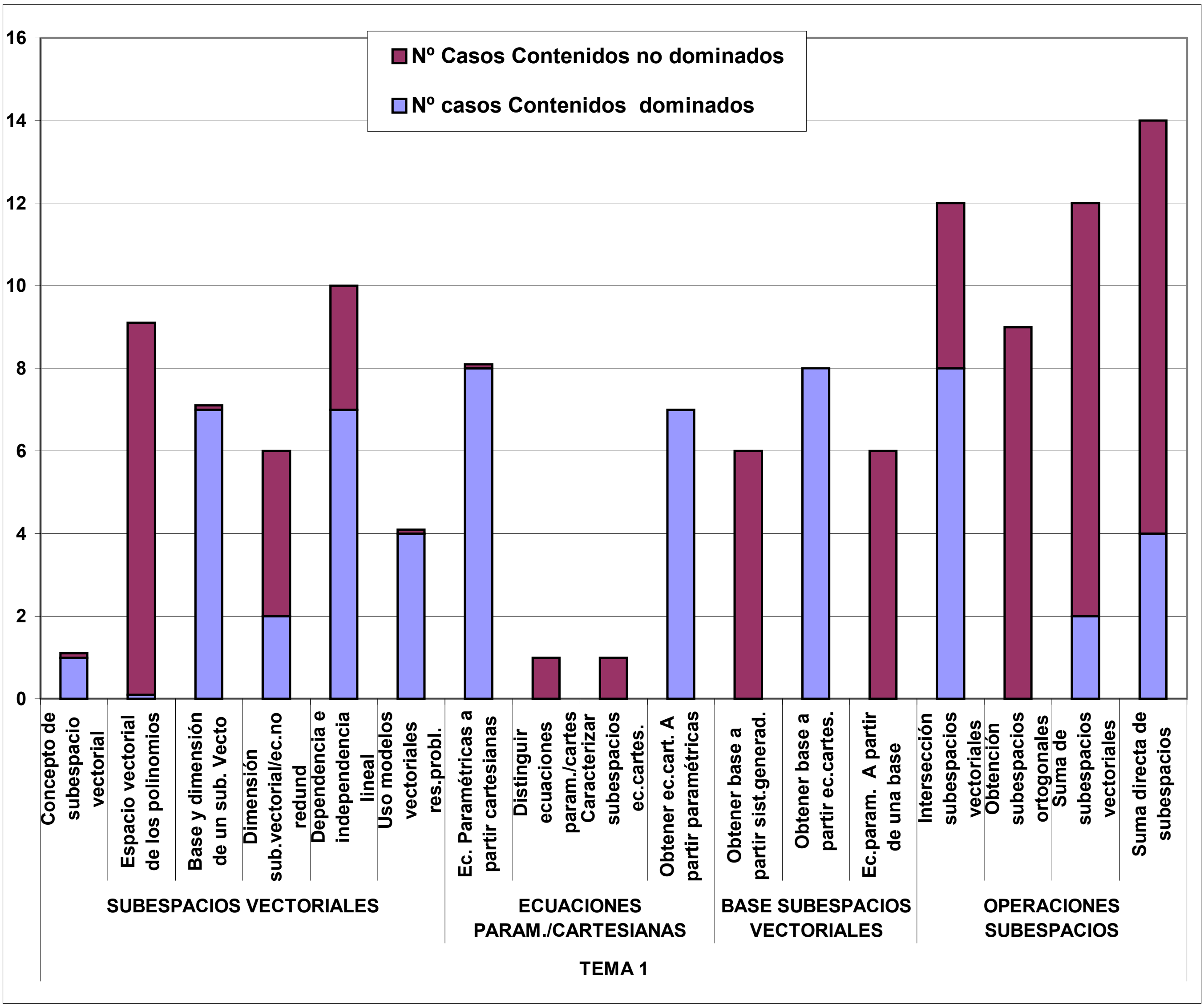
ESTUDIO DE LOS ATRIBUTOS SUBJETIVOS CUESTIÓN 4.



Estudio gráfico ATRIBUTOS

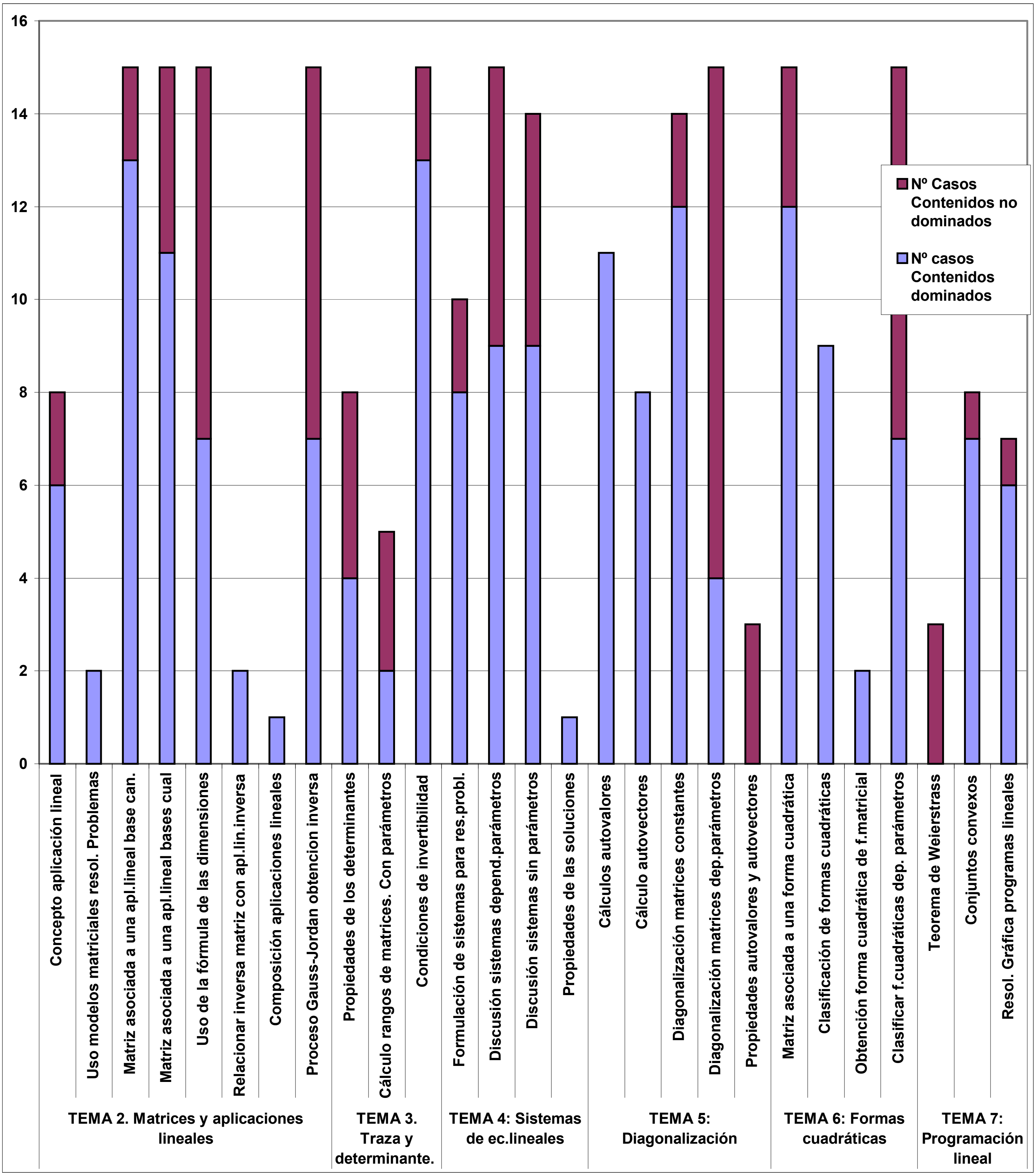
4.2.1. ¿Qué contenidos ha conseguido dominar el alumno?

4.2.2. ¿Qué contenidos no ha conseguido dominar el alumno?
para el TEMA 1.

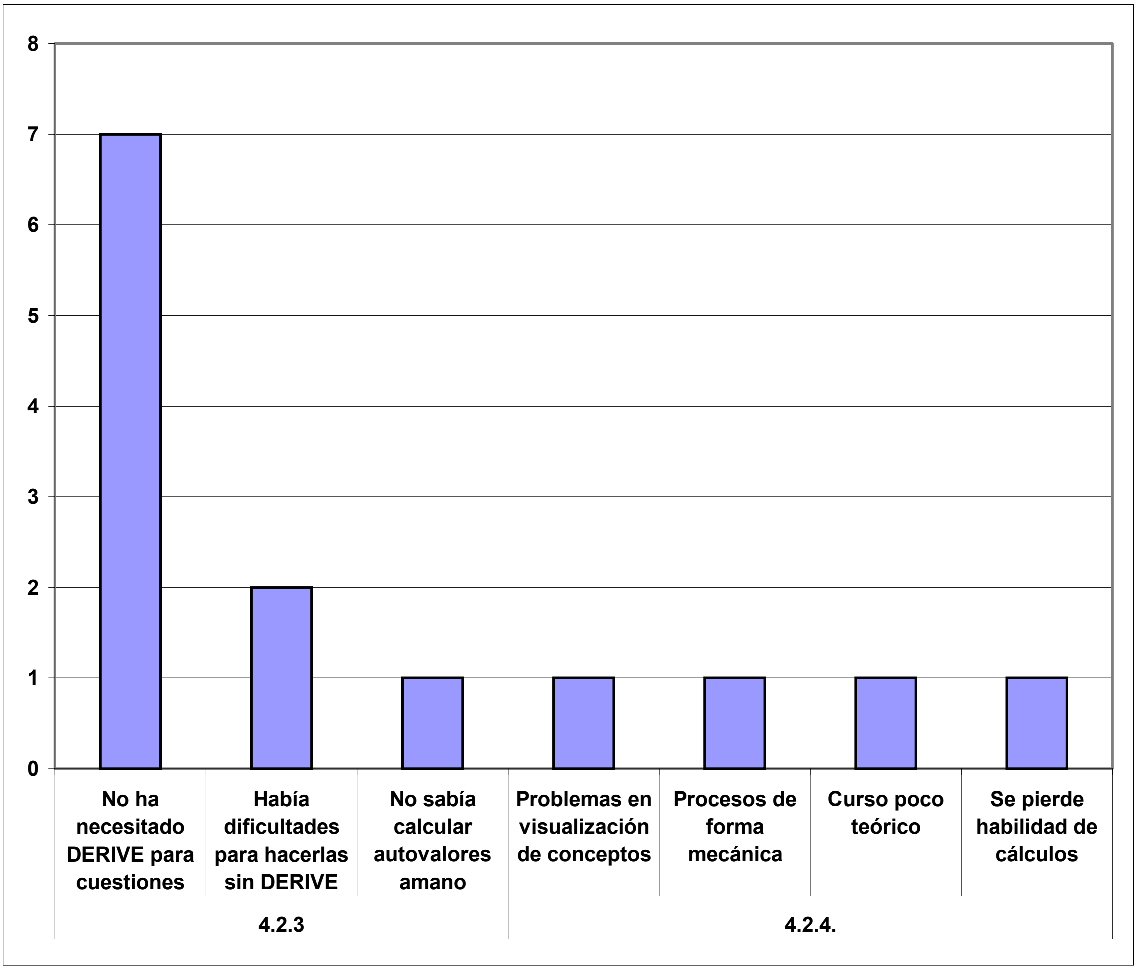


Estudio gráfico ATRIBUTOS

4.2.1. ¿Qué contenidos ha conseguido dominar el alumno?
4.2.2. ¿Qué contenidos no ha conseguido dominar el alumno?
para los TEMAS 2,3,4,5,6 y 7.



Estudio gráficos de los atributos objetivos 4.2.3. y 4.2.4.



A la vista de los cuadros y de los gráficos, podemos extraer las siguientes conclusiones:

De los **atributos de carácter subjetivo** podemos afirmar:

4.1.1. Los alumnos han sabido distinguir en general lo que son contenidos esenciales de los contenidos no esenciales (10 sobre 15)

4.1.2. Parece que existen algunos contenidos esenciales que pueden haber corrido el peligro de convertirse en procesos automatizables como son el cálculo de determinantes, la resolución de sistemas, el cálculo de autovalores y el cálculo de rangos aunque con una incidencia muy pequeña.

4.1.3. Los alumnos han tenido en general claros los contenidos fundamentales de cada tema en una proporción de (7 sobre 15) aunque hay un porcentaje de un 4 sobre 11 que no parece recordar ningún contenido fundamental.

4.1.4. Saben realizar a mano el cálculo de determinantes de orden 3 (8 sobre 15) frente a un (4 sobre 15) . No saben resolver sistemas por Cramer a mano ((6 sobre 15) frente a un (4 sobre 15 que sí). No saben calcular a mano los autovalores de una matriz (6 sobre 15) frente a un (4 sobre 15) que sí sabe.

4.1.5. Derive ha facilitado la comprensión de contenidos por múltiples razones: porque obliga a saber lo que se está haciendo, porque facilita la experimentación y la investigación, porque se visualizan mejor contenidos, y porque centra mejor la atención de los alumnos (6 sobre 15) frente a un (3 sobre 15 que es contrario).

Respecto a los **atributos del nivel objetivo** podemos afirmar que los contenidos que ha conseguido y no han conseguido dominar, se podrían plasmar en la siguiente tabla, teniendo en cuenta que las columnas de la derecha indican si el contenido es un contenido esencial (CE) o bien un contenido no esencial o proceso manipulativo (PM); también debemos tener en cuenta que solo incluimos aquellos contenidos que claramente han dominado mayoritariamente los alumno o bien aquellos que también de forma mayoritaria no han dominado, de tal forma que existen contenidos que no aparecen porque han resultado comprendidos a medias. Observemos la siguiente tabla resumen:

Contenidos que han conseguido dominar		**Contenidos que no han conseguido dominar**	
TEMA 1		TEMA 1	
Concepto de base y dimensión de un subespacio vectorial	CE	Concepto de espacio vectorial para polinomios	CE
Dependencia e independencia lineal de vectores	CE	Obtención de las ecuaciones paramétricas a partir de una base del subespacio	PM
Cálculo de las ecuaciones paramétricas a partir de las ecuaciones cartesianas	PM	Obtención de una base de un subespacio vectorial a partir de un sistema de generadores	PM
Cálculo de las ecuaciones cartesianas a partir de ecuaciones paramétricas	PM	Obtención de subespacios ortogonales	CE
Obtención de la base de un subespacio a partir de sus ecuaciones cartesianas	PM	Obtención de la suma de subespacios	CE
Intersección de subespacios vectoriales	CE	Suma directa de subespacios	CE
TEMA 2		TEMA 2	
Concepto de aplicación lineal	CE		
Obtención de la matriz asociada a una aplicación lineal respecto de cualquier base	CE		
TEMA 3		TEMA 3	
Condiciones de invertibilidad de una matriz	CE		
TEMA 4		TEMA 4	
Formulación de sistemas lineales para resolver problemas	CE		

TEMA 5		TEMA 5	
Cálculo de autovalores	PM	Diagonalización de una matriz en función de parámetros	CE
Cálculo de autovectores	PM		
Diagonalización de matrices constantes	CE		
TEMA 6		TEMA 6	
Obtención de la matriz asociada a una forma cuadrática	PM		
TEMA 7		TEMA 7	
Conjuntos convexos	CE		
Resolución gráfica de problemas de programación lineal	CE		

En esta tabla observamos que de los contenidos que los alumnos han conseguido dominar:

- 10 son contenidos esenciales
- 6 son procesos manipulativos

por otro lado de los contenidos que los alumnos no han conseguido dominar:

- 5 son contenidos esenciales
- 2 son procesos manipulativos.

Aunque el número de contenidos esenciales del programa era muy superior podemos observar que la proporción entre contenidos totalmente comprendido y contenidos no entendidos ha sido del doble por lo que podemos decir que la estrategia ha tenido que influir claramente en la comprensión de contenidos esenciales del programa.

4.2.3. DERIVE no ha sido imprescindible para contestar las cuestiones teóricas, únicamente se utilizaba para realizar algunas comprobaciones de cálculo.

4.2.4. No ha habido una dificultad conceptual claramente manifiesta algunas ideas que han surgido se refieren a la mecánica del uso de DERIVE, que el curso era poco teórico y que se podía perder la habilidad de cálculo.

Por tanto los atributos que caracterizan esta cuestión son los siguientes:

- Los alumnos han sabido distinguir entre contenidos esenciales y procesos rutinarios.
- Ha habido muy pocos contenidos esenciales que han corrido el peligro de automatizarse.
- Los alumnos parecen recordar los contenidos fundamentales del temario

- Los alumnos saber realizar los principales cálculos básicos a mano.
- Derive ha facilitado la comprensión de conceptos.
- Se ha comprendido una proporción alta de contenidos esenciales frente a los que no se han conseguido dominar.
- Derive no ha sido imprescindible para responder a las cuestiones teóricas
- Derive no ha provocado dificultades conceptuales manifiestas

Por tanto podemos afirmar que DERIVE ha servido para evitar al menos de forma parcial que el ordenador se utilizase para desarrollar los contenidos ESENCIALES del programa, si bien es cierto que existen cierto que algunas habilidades básicas han quedado mermadas, dado que no ha sido el alumno el que ha tenido que desarrollar todos los cálculos. Además debemos tener en cuenta que el núcleo básico del programa contiene numerosos cálculos que en un principio debían de haber sido esenciales, como son por ejemplo la función DET que calcula directamente el determinante de una matriz y la función EIGENVALUES que calcula los autovalores de una matriz. Aunque estas funciones no se introdujeron hasta mucho después de haber introducido el concepto hubiera sido mejor que esa automatización se hubiese realizado mediante la operativa necesaria para entender el contenido, por ejemplo en el caso de los autovalores calculando det(A- x Identidad).

CUESTIÓN 5: ESFUERZO RUTINARIO.

El manejo del programa de cálculo simbólico DERIVE, ¿permite prescindir del ESFUERZO RUTINARIO dedicado a desarrollar operaciones algebraicas y de cálculo?

Con el análisis de esta cuestión tratamos de descubrir si el programa de cálculo simbólico DERIVE es efectivamente una herramienta que brinda al alumno la posibilidad de prescindir de aquellos cálculos rutinarios que no muestran ningún conocimiento teórico tan solo son cálculos repetitivos que permiten desarrollar un problema o un ejercicio para encontrar sus posibles soluciones, o bien para investigar acerca de las propiedades que cumple un determinado concepto bajo ciertas condiciones especiales. Bajo estas hipótesis que también habíamos comentado en la fundamentación teórica del capítulo I, consideramos que los atributos que nos permitirían analizar esta cuestión serían los siguientes:

5.1. ¿Cómo ha sido la resolución de problemas con DERIVE? ¿Tenía alguna característica especial en comparación con la forma de resolver los mismos problemas a lápiz y papel? Las contestaciones a esta pregunta permitirán obtener aspectos característicos del atributo que pretende obtener información acerca de la forma de uso de DERIVE en la resolución de problemas.

5.2. Con el uso de DERIVE ¿se libera al alumno de cálculos rutinarios permitiendo que el alumno se oriente más hacia la experimentación y la investigación? El atributo que se pretende perfilar permite determinar si los alumnos se han orientado más hacia la experimentación y la investigación con el uso del programa

5.3. ¿El uso de DERIVE anula las habilidades básicas de cálculo de los alumnos? Si es así ¿son fundamentales las habilidades que se pierden? Tratamos de determinar si ha habido una perdida de habilidades básicas con el manejo del programa y si dichas habilidades son fundamentales.

5.4. ¿Son capaces los alumnos de resolver los mismos problemas sin DERIVE? Debemos determinar si el uso de DERIVE ha sido necesario para resolver los problemas propuestos.

5.5. ¿Era fundamental el uso de DERIVE para resolver cuestiones teóricas? En este caso tratamos de determinar si DERIVE ha sido fundamental para resolver las cuestiones teóricas o si por el contrario tan sólo ha sido una herramienta auxiliar.

5.6. ***¿Qué valoración tienen los alumnos sobre este uso de DERIVE que permite eliminar el esfuerzo rutinario?*** Los aspectos característicos que obtengamos como contestación a esta preguntan nos perfilarán la valoración que ha existido por parte de los alumnos acerca del uso de DERIVE.

Para encontrar los ASPECTOS CARACTERÍSTICOS que nos permitan determinar los caracteres de los atributos que perfilan la cuestión, hemos analizado los datos obtenidos en las conclusiones finales de cada caso para esta cuestión, de tal forma que al encuadrar cada uno de ellos sobre sus atributos correspondientes hemos obtenidos el resumen que se puede consultar en el ANEXO XVIII , parte 5. A partir de este resumen hemos realizado el siguiente cuadro esquemático en el que se recogen los atributos y sus principales ASPECTOS CARACTERÍSTICOS según los diferentes casos (en el cuadro se señala con un aspa X cuando un aspecto característico se ha producido en un caso determinado):

CUESTIÓN 5: ESFUERZO RUTINARIO.																
Aspectos característicos de cada atributo		**CONTESTACIONES EN CASO**														
ATRIBUTOS	**ASPECTOS CARACTERISTICOS**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
5.1. ¿Cómo ha sido la resolución de problemas con DERIVE? ¿Tenía alguna característica especial en comparación con la forma de resolver los mismos problemas a lápiz y papel?	**La rapidez de los cálculos facilita la resolución de problemas evitando que se pierda mucho tiempo en los mismos.**		X		X	X	X	X						X	X	
	El ahorro de cálculo permite que el alumno se enfrente a los problemas de forma diferentes	X														
	Con DERIVE la mayor parte del tiempo se dedica al PLANTEAMIENTO del problema mientras que con lápiz y papel se centra en la operativa, dedicando menos tiempo a pensar			X						X	X	X				
	Con lápiz y papel siempre se tienen que revisar los resultados											X				
	Con DERIVE se dedica el mismo tiempo al planteamiento que con lápiz y papel pero menos a la resolución												X	X		
5.2. Con el uso de DERIVE ¿se libera al alumno de cálculos rutinarios permitiendo que el alumno se oriente más hacia la experimentación y la investigación?	**El programa DERIVE ha permitido que al alumno realice todos los cálculos MÁS RAPIDOS evitando las operaciones rutinarias**								X	X						
	El programa permite que el alumno ahorre mucho esfuerzo y pueda invertir más tiempo en el planteamiento o en la experimentación	X					X		X		X		X	X		
	DERIVE es una herramienta que permite liberar al alumno del esfuerzo rutinario y de la operativa permitiéndole que centre su esfuerzo en los contenidos importantes			X							X	X		X		
	DERIVE es rápido en sus cálculos y permite estar más atento a la clase							X								
	DERIVE es más rápido que lápiz y papel, evitando REPASAR LAS OPERACIONES												X			

ATRIBUTO	ASPECTOS CARACTERÍSTICOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	11	15
5.3. ¿El uso de DERIVE anula las habilidades básicas de cálculo de los alumnos? Si es así ¿son fundamentales las habilidades que se pierden?	El ahorro de tiempo no ha impedido que el alumno maneje de forma MANUAL las principales operaciones como cálculo de determinantes, resolución de sistemas, cálculo de rangos y cálculo de autovalores			X	X	X			X		X	X	X			
	Sabe resolver determinantes a mano y resolver sistemas														X	
	DERIVE RESTA DESTREZA en la realización de procesos de forma manual							X	X	X			X			
	No han sabido calcular autovalores ni rangos a mano													X		
	No tiene seguridad en los cálculos propios										X					
5.4. ¿Son capaces de resolver los mismos problemas sin DERIVE?	En los problemas de sistemas lineales dependientes de parámetros es mejor lápiz y papel		X													
	Hubiera sido COMPLICADO resolver problemas fin de capítulo sin DERIVE por la complejidad de cálculos					X			X		X					
	Sí, hubiera sido capaz de resolverlos sin DERIVE.												X			
5.5. ¿Era fundamental el uso de DERIVE para resolver cuestiones teóricas?	Se ha usado DERIVE tan solo para realizar cálculos no esenciales, o rutinarios.				X	X	X			X	X					
	Ha tenido dificultades para resolver algunas cuestiones sin DERIVE					X										
	Ha utilizado DERIVE para comprobar resultados y tantear posibles soluciones													X		
	Ha utilizado DERIVE para realizar cálculos rutinarios, aunque no es seguro que supiera hacerlos sin DERIVE														X	
5.6. ¿Qué valoración tienen los alumnos sobre este uso de DERIVE que permite eliminar esfuerzo rutinario?	Es en el cálculo rutinario donde el alumno se atasca y con el que se facilita la resolución	X														
	La resolución resulta más lenta con lápiz y papel que con DERIVE, pero no solo por la operativa sino porque con lápiz y papel a veces el alumno invierte mucho tiempo en revisar operaciones.			X												
	Los cálculos rutinarios son la parte menos divertida de las Matemáticas lo que ha provocado mayor motivación			X												
	Con DERIVE se invierte menos tiempo en la operativa				X							X				
	Se automatizaba mucho el uso del programa provocando que a veces se perdiera el sentido de este cálculo					X										

También hemos elaborado una gráfica que nos muestra de una manera más clara los aspectos característicos de mayor incidencia:

A la vista del cuadro resumen y del gráfico anterior, observamos que los atributos que podían definir la cuestión objeto de estudio tienen las siguientes características:

5.1. La rapidez de los cálculos del sistema de cálculo simbólico DERIVE facilita la resolución de problemas por varios motivos fundamentales:

- evita que se pierda mucho tiempo en los cálculos
- este ahorro de tiempo permite que el alumno se enfrente al problema de forma diferente
- permite que la mayor parte del tiempo se dedique al planteamiento del problemas más que a la operativa del mismo.

5.2. El programa DERIVE permite liberar al alumno de los cálculos rutinarios orientando más hacia la experimentación y la investigación, ya que libera al alumno de la realización de estos cálculos, son más rápidos y evita que se invierta esfuerzo innecesario en la operativa.

5.3. El uso de DERIVE no impide que el alumno siga sabiendo realizar las principales operaciones a mano, aunque sí es cierto que se resta un poco de agilidad en la realización de esos procesos, incluso e algún caso aislado ha impedido que no sepa calcular autovalores y también es de destacar que en otro caso se afirma la falta de seguridad en los cálculos que desarrolla cada uno.

5.4. Los alumnos consideran que era complicado resolver los problemas sin DERIVE, salvo un caso aislado.

5.5. En general el uso de DERIVE en las cuestiones teóricas ha sido auxiliar para realizar los cálculos rutinarios que se contenían, o incluso realizar alguna comprobación, aunque en algún caso parece haber resultado fundamenta.

5.6. En cuanto a las valoraciones sobre el uso del programa respecto al esfuerzo rutinario que se elimina, hemos observado varias características importantes a tener en cuenta:

- como en el cálculo rutinario el alumno se suele atascar frecuentemente, el uso del programa facilita la resolución de problemas
- con DERIVE se automatiza mucho el uso del programa provocando a veces que se pierda el sentido del cálculo
- Los cálculos rutinarios se agilizan.

Por tanto podemos concluir afirmando que existe sin lugar a dudas, un acuerdo generalizado entre los alumnos, según su propia experiencia de que el programa DERIVE les ha ayudado a realizar con menos esfuerzo todos los problemas y ejercicios propuestos, incluso a plantearlos de una manera distinta, asimismo es opinión generalizada que con el uso de DERIVE se ha dedicado mucho más tiempo a los planteamientos que a la propia resolución , y se ha podido dedicar más tiempo a la experimentación e investigación en general. Únicamente debemos señalar que existe una pequeña desventaja y es que parece claro que DERIVE ha mermado las habilidades y destrezas manuales en el cálculo como se observa en la necesidad de usar DERIVE en las cuestiones teóricas así como en los pequeños cálculos que se les propusieron en la entrevista final. Sin embargo esta merma de habilidades manipulativas ha permitido por otro lado que el alumno se dedique más a plantear y reflexionar previamente los objetivos de cualquier práctica que a la propia resolución que es sin duda una de las grandes ventajas de uso de este tipo de sistemas de cálculos.

CUESTIÓN 6: HERRAMIENTA DE EXPERIMENTACIÓN.

Las formas de manejo del sistema DERIVE que hemos considerado en nuestra estrategia didáctica ¿convierten al ordenador en una auténtica HERRAMIENTA DE EXPERIMENTACIÓN?

Como bien se indica en la cuestión se trata de intentar analizar cómo se ha usado el programa, si ha sido un uso meramente manipulativo a nivel usuario, es decir como una mera herramienta de cálculo, o bien si el programa ha servido para experimentar con las Matemáticas facilitando así un aprendizaje más constructivista de los contenidos y de los procesos básicos del álgebra lineal, es decir si ha sido una auténtica herramienta de experimentación. Para intentar deducir cuál ha sido el uso del programa DERIVE a lo largo del curso, analizamos en primer lugar como ha sido la experimentación realizada sobre los dos tipos básicos de tareas que propusimos en nuestra estrategia didáctica (ver capítulo II), nos referimos a los ejemplos a investigar de carácter introductorio y los problemas propuestos. Por otro lado, conviene completar este estudio analizando la evolución que ha podido tener el alumno respecto a la experimentación a lo largo del curso. Se trataría de determinar si les ha favorecido para entender los contenidos y como ha sido su actitud ante la experimentación. Estas características se han estudiado sobre cinco atributos:

6.1. ***En los ejemplos a investigar ¿DERIVE ha proporcionado al alumno una herramienta para investigar, experimentar, e intentar que obtuviera resultados por su cuenta?*** . Con las contestaciones obtenidas a esta pregunta podremos contestar a esta pregunta, con lo que *obtendremos si el programa DERIVE ha sido una herramienta para la investigación y experimentación*.

6.2 ***En los problemas, ¿DERIVE ha sido una herramienta que permitía la exploración y experimentación de los problemas?.*** Los aspectos característicos que contestan a esta pregunta nos permitirán determinar este atributo, que *nos permitirá afirmar si DERIVE ha sido una herramienta de exploración y experimentación.*

6.3. ***En el proceso de aprendizaje del programa y de los contenidos de álgebra lineal, ¿se ha aumentado el grado de EXPERIMENTACIÓN en Matemáticas?.*** Con esta pregunta trataremos de determinar si ha habido una evolución en el grado de experimentación, característica que nos permitirá afirmar si *DERIVE potencia la experimentación.*

6.4. El tipo de EXPERIMENTACIÓN que se ha sugerido ¿ha ayudado a entender mejor los contenidos? Se trata de determinar si DERIVE ha sido una herramienta que ha permitido comprender mejor los contenidos, si la experimentación que ha suscitado el programa ha permitido que el alumno experimente con los contenidos de una manera constructivista y por descubrimiento.

6.5. Actitud del alumno ante la experimentación. Se trata de determinar que actitud tenía el alumno ante la experimentación no solo inicialmente sino después de haber utilizado el programa bajo la estructura de nuestra estrategia didáctica.

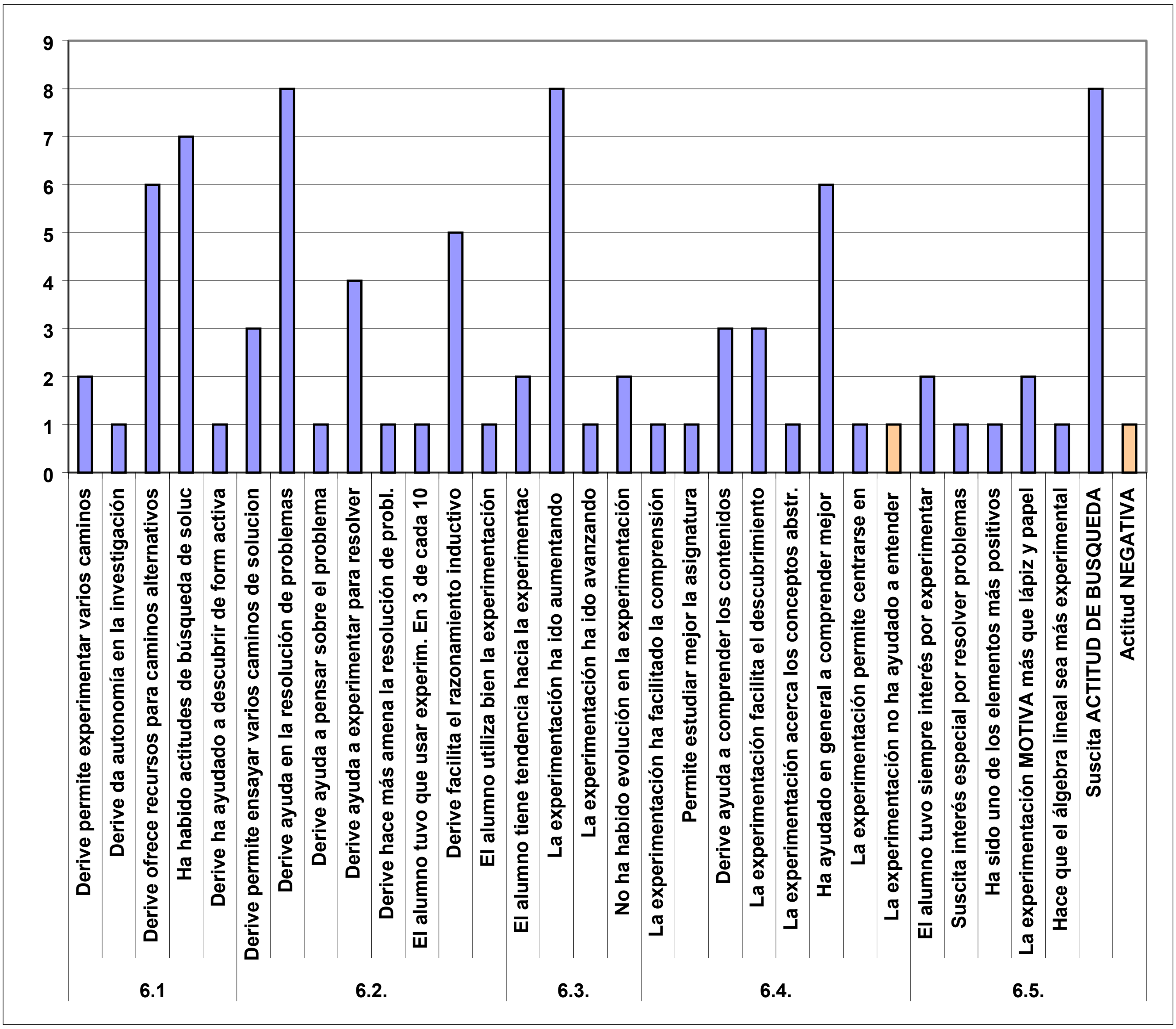
Como en el resto de cuestiones, a partir de las conclusiones finales obtenidas en cada caso para esta cuestión, hemos agrupado los diferentes elementos significativos en torno a cada uno de los atributos, configurando de esta forma algunos de los ASPECTOS CARACTERÍSTICOS de cada atributo. Este proceso se puede consultar en el ANEXO XVIII, parte 6. A partir de este resumen de los aspectos característicos que perfilan los diferentes atributos de la cuestión 6 hemos elaborado un cuadro esquemático en el que incluimos los atributos y sus aspectos característicos fundamental según los diferentes casos, indicando la incidencia de cada aspecto en cada uno de los casos (se marca con un aspa X cuando un aspecto característico se ha producido en un caso determinado):

CUESTIÓN 6: HERRAMIENTA DE EXPERIMENTACIÓN																
Aspectos característicos de cada atributo		**CONTESTACIONES EN CASO**														
ATRIBUTOS	**ASPECTOS CARACTERISTICOS**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
6.1. En los ejemplos a investigar ¿DERIVE ha proporcionado al alumno una herramienta para investigar, experimentar e intentar que obtuviera resultados por su cuenta?	**Al usar DERIVE se evitan los cálculos rutinarios y así el alumno tiene más tiempo para reflexionar lo cual OFRECE LA POSIBILIDAD DE EXPERIMENTAR VARIOS CAMINOS DE RESOLUCIÓN**	X										X				
	DERIVE proporciona RECURSOS PARA ENCONTRAR CAMINOS ALTERNATIVOS									X						
	DERIVE ha proporcionado la POSIBILIDAD DE INTENTAR INVESTIGAR POR SU CUENTA		X		X				X	X	X		X			
	Ha habido ACTITUD DE BÚSQUEDA en las investigaciones planteadas					X	X	X				X	X	X		X
	DERIVE ha AYUDADO A DESCUBRIR DE FORMA ACTIVA el concepto			X												

ATRIBUTOS	ASPECTOS CARACTERÍSTICOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6.2. En los problemas ¿DERIVE ha sido una herramienta que permitía la experimentación?	Con DERIVE se evitan los cálculos rutinarios y así el alumno tiene más tiempo para reflexionar sobre la estrategia, lo cual le ofrece la POSIBILIDAD DE EXPERIMENTAR VARIOS CAMINOS DE RESOLUCION	X							X				X			
	DERIVE ha AYUDADO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS porque ha evitado los cálculos y permitido que el alumno buscase las soluciones comprobando y facilitando búsqueda de otras soluciones		X			X	X		X	X		X	X	X		
	DERIVE ha ayudado a pensar sobre el problema que se quería aplicar			X												
	DERIVE ha ayudado a experimentar para resolver problemas				X		X		X					X		
	DERIVE hace más AMENA la resolución de problemas con la experimentación						X									
	El alumno ha tenido que utilizar experimentación en 3 de cada 10 problemas										X					
	DERIVE ha FACILITADO el razonamiento inductivo con la experimentación			S		N	N			S	S		S	S	N	N
	El alumno ha utilizado la experimentación bien en problemas generales				N	N	N	N	N	N	N		S	N	N	N
6.3. En el proceso de aprendizaje se ha AUMENTADO el grado de experimentación en Matemáticas?	El alumno tenía tendencia natural hacia la experimentación		X								X					
	Según los alumnos su experimentación ha ido aumentando a medida que aumentaba el manejo del programa		X			X			X	X	X	X	X	X		
	La experimentación ha ido avanzando a medida que conocía el programa y tenía nuevos conocimientos											X				
	No ha habido una evolución notable en el nivel de investigación			X				X								
6.4. El tipo de experimentación que se ha sugerido ¿ha ayudado a entender mejor los contenidos?	La experimentación ha facilitado la comprensión de conceptos pues se manipulan de forma directa	X														
	Con el método experimental se ha conseguido estudiar mejor la asignatura											X				
	DERIVE ha ayudado a la comprensión de contenidos porque con la experimentación se quedaban las ideas y se comprendían mejor los contenidos		X											X		
	DERIVE ha ayudado a comprender mejor los contenidos porque sino hubiera sido un estudio memorístico					X										
	La experimentación ha permitido que los alumnos fuesen descubriendo los contenidos a partir de conceptos previos			X										X	X	
	La experimentación ha permitido hacer menos abstractos los conceptos			X												
	La experimentación ha ayudado en general a entender mejor los contenidos				X		X	X	X		X		X			
	DERIVE ayuda a entender mejor los contenidos pues permite centrarse más en la teoría que en el cálculo												X			
	La experimentación NO le ha ayudado a entender mejor los contenidos									X						

ATRIBUTO	ASPECTOS CARACTERÍSTICOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6.5. Actitud del alumno ante la experimentación	El alumno siempre ha tenido interés por experimentar					X			X							
	La experimentación ha suscitado en el alumno un interés especial por resolver problemas								X							
	La experimentación ha sido uno de los elementos más positivos del curso								X							
	La experimentación MOTIVA al alumno en la búsqueda de resultados, estimula más que lápiz y papel	X					X									
	La experimentación hace que el álgebra lineal sea más experimental												X			
	Ha suscitado actitud de búsqueda	X				X	X	X				X	X	X		X
	Actitud negativa ante la experimentación prefiere método expositivos														X	

Para facilitar la interpretación de los datos hemos elaborado también una gráfica que resume los datos contenidos en esta tabla:



A la vista de la tabla de resumen y la gráfica anterior podemos observar que los aspectos característicos que definen cada uno de los atributos son los siguientes:

6.1. Es claro que DERIVE ha proporcionado al alumno una herramienta para la investigación autónoma de las cuestiones, además DERIVE ha generado una actitud de búsqueda de las cuestiones de investigación.

6.2. También resulta evidente que DERIVE ha ayudado a los alumnos en la resolución de problemas fundamentalmente porque ha evitado los cálculos y permitido que buscase soluciones, permitiendo de esta forma, experimentar caminos de resolución, haciendo más ameno el proceso de resolución y ayudando a pensar en el problema. Sin embargo, al analizar los problemas entregados observamos que, en general, los alumnos no han conseguido resolver bien los problemas específicos de experimentación que se habían planteado, salvo algunos relacionados con los procesos de inducción. Esto nos permite afirmar que los alumnos no tenían hábito de resolver problemas mediante el uso de procesos experimentales.

6.3. El grado de experimentación a juicio del alumno ha ido aumentando a medida que avanzaba el curso.

6.4. La experimentación que se ha empleado parece que ha ayudado, a juicio de los alumnos a entender mejor los contenidos por numerosas razones: se manipulaban los conceptos de forma directa, se estudiaba mejor la asignatura, con la experimentación se quedaban mejor las ideas, con la experimentación se descubrían los contenidos, se hacían menos abstractos.

6.5. La principal actitud que ha suscitado la experimentación en los alumnos ha sido una ACTITUD DE BÚSQUEDA, facilitada por el manejo del programa, además se añaden otras actitudes como interés hacia la experimentación, motivación en la resolución.

Así pues podemos decir que la experimentación que ha suscitado la estrategia didáctica con el uso de DERIVE:

- Ha motivado la investigación de las cuestiones iniciales.
- Ha ayudado a los alumnos en la resolución de problemas a pesar de que la experimentación no era un estilo de resolución que dominasen los alumnos, ha ayudado porque han podido dedicar mucho más tiempo al planteamiento del problema y ala reflexión de los mismos más que a la propia resolución.
- Con el curso el grado de experimentación parece haber aumentado

- La propia experimentación ha ayudado a comprender mejor los contenidos
- Se ha suscitado una actitud de búsqueda de soluciones y resultados

Por todo lo anterior podemos decir que nuestra estrategia didáctica efectivamente ha hecho que los alumnos utilicen el programa como herramienta de experimentación, motivando y suscitando un interés por encontrar respuestas y soluciones a las cuestiones y problemas que se planteaban; aunque quizás ha faltado una cierta introducción al alumnado en los procesos experimentales de resolución de problema, heurístico que no parece haber sido dominado a lo largo del curso.

CUESTIÓN 7. APRENDIZAJES SIGNIFICATIVOS

¿Podemos decir que nuestra estrategia didáctica favorece la adquisición de APRENDIZAJES SIGNIFICATIVOS sobre aquellos contenidos del álgebra lineal que hemos ido introduciendo?

Decimos que un aprendizaje es significativo para el alumno si ha sido adquirido a partir de sus conocimientos previos de manera significativa, es decir, generando una conocimiento relacional sobre la estructura conceptual de cada alumno. En esta estrategia el proceso de descubrimiento y construcción por parte del alumno ha podido potenciar este tipo de aprendizaje. En nuestra estrategia didáctica las tareas de enseñanza-aprendizaje que trataban de generar este tipo de aprendizajes eran fundamentalmente los ejemplos de investigación. Con los ejemplos de investigación, los alumnos debían enfrentarse a cuestiones de investigación que proponía el profesor partiendo de unos conocimientos previos y unas manipulaciones conocidas que se podían realizar con DERIVE, de tal forma que con cierto esfuerzo, experimentación, y capacidad de relación el alumno podía llegar a descubrir la solución de las cuestiones propuestas. Pero estos aprendizajes también se producían en otras actividades como son los problemas propuestos donde los alumnos tenían que relacionar y poner en práctica los conocimientos adquiridos y en las cuestiones teóricas, en las que el alumno tenía que relacionar el conjunto de contenidos teóricos que se iban introduciendo. Por eso para determinar si el aprendizaje de los alumnos ha sido significativo consideramos los siguientes interrogantes que configuran ciertos atributos que dan información sobre el tipo de aprendizaje que se ha dado en el aula.

7.1. ¿Qué características ha tenido el aprendizaje suscitado por las diferentes tareas: ejemplos para investigar, problemas propuestos y cuestiones teóricas?. Contestando a esta pregunta podremos perfilar a partir de las actividades concretas el tipo de aprendizaje que han ido adquiriendo los alumnos.

7.2. La investigación, la experimentación y el descubrimiento ¿han facilitado la asimilación y comprensión de contenidos o por el contrario han dispersado la atención del alumnado?. Se trata de determinar si la investigación, la experimentación y el descubrimiento de contenidos ha facilitado la comprensión de contenidos. Analizaremos las opiniones del alumnado en torno a esta cuestión de tal forma que si la contestación es mayoritariamente afirmativa es un indicio que nos puede indicar que los aprendizajes han sido significativos, por el contrario si lo que han hecho ha sido dispersar la atención, entonces el aprendizaje habrá sido mecánico y por tanto no significativo.

7.3. El tipo de aprendizaje ¿ha sido un aprendizaje activo? ¿cómo ha sido la participación del alumnado en las clases?. Si el aprendizaje ha sido activo, con un elevado grado de participación, esto nos muestra un indicador que nos muestra que el aprendizaje adquirido ha podido ser significativo, si por el contrario ha sido pasivo con poca participación estamos ante un indicador negativo ante el aprendizaje significativo, ya que el alumno no ha participado del proceso de aprendizaje ha sido un mero receptor.

7.4. ¿Cómo ha sido la atención y motivación del alumnado en las clases?. Un alumnado que ha estado motivado con un elevado grado de atención, es un indicador más de una aprendizaje significativo. Un alumnado poco motivado y poco atento, es indicador que lo que iba aprendiendo no era significativo para su estructura conceptual.

7.5. ¿Cómo eran los conocimientos previos del alumnado? ¿eran suficientes para los contenidos que se introducían?. Si los conocimientos previos que se requerían para realizar investigaciones, o bien resolver problemas y cuestiones teóricas eran insuficientes, entonces el aprendizaje no se ha cimentado sobre una base teórica, en cuyo caso puede haberse convertido en aprendizaje memorístico y no significativo.

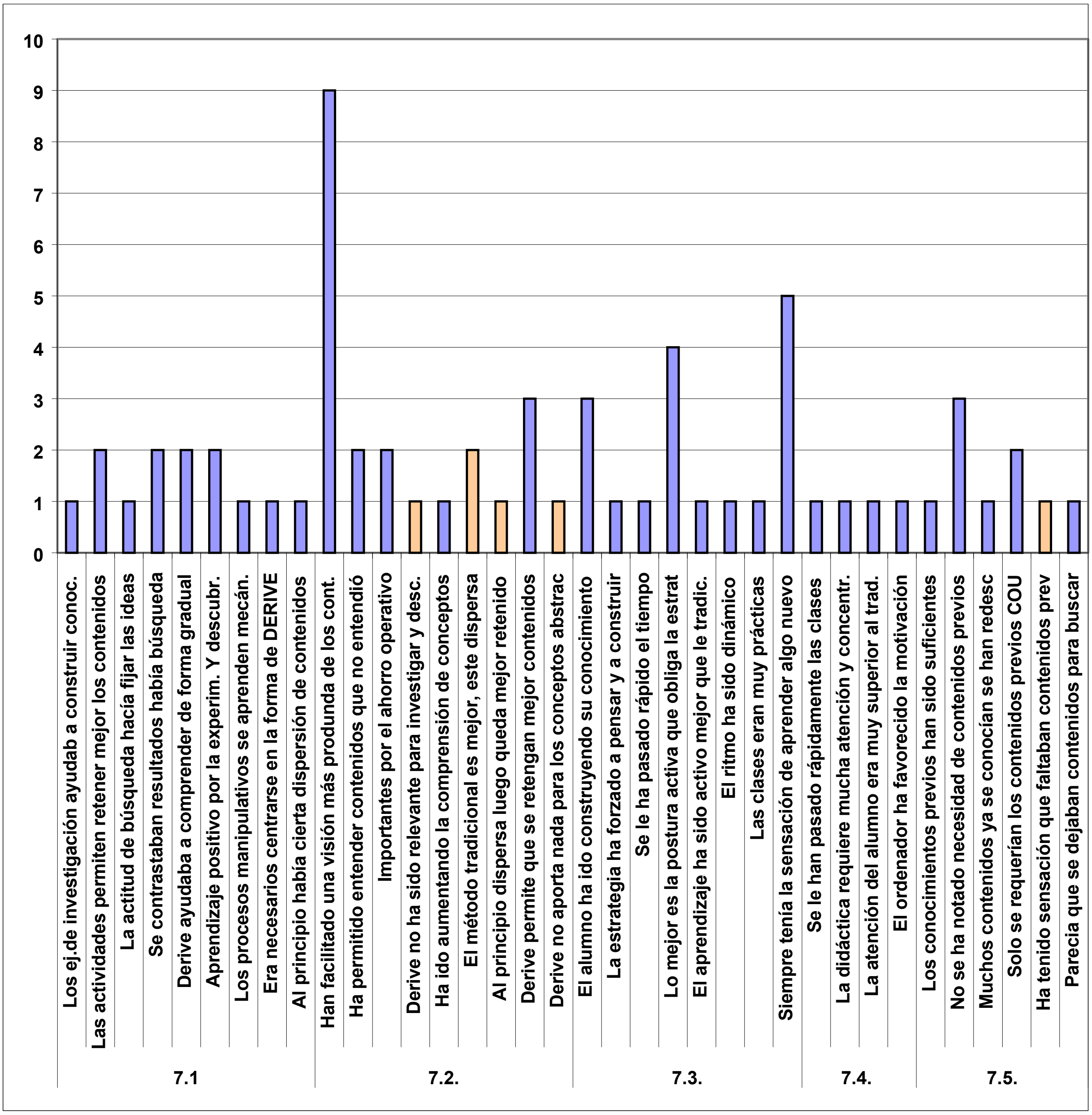
Analizando cada uno de estos atributos sobre el conjunto de datos hemos podido elaborar un resumen de datos que se muestra en el ANEXO XVIII, parte 7, donde podemos observar los ELEMENTOS CARACTERÍSTICOS de cada atributo. Para facilitar el análisis de este resumen hemos realizado la siguiente tabla resumen:

CUESTIÓN 7: APRENDIZAJES SIGNIFICATIVOS

Aspectos característicos de cada atributo		CONTESTACIONES EN CASO														
ATRIBUTOS	**ASPECTOS CARACTERISTICOS**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
7.1. ¿Qué características ha tenido el aprendizaje suscitado por las diferentes tareas: ejemplos para investigar, problemas propuestos y cuestiones teóricas?.	Con los ejemplos de investigación el alumno podía ir construyendo su propio conocimiento con ayuda de DERIVE			X												
	Las actividades permitían retener mejor los contenidos que se iban introduciendo								X					X		
	La búsqueda es la que ha provocado que las ideas fueran quedando poco a poco		X													
	Había actitud de búsqueda de soluciones en las cuestiones de investigación y se contrastaban los resultados				X		X									
	DERIVE no ha ayudado a entender los procesos A LA PRIMERA sino de forma gradual	X									X					
	El aprendizaje a sido positivo con la experimentación y descubrimiento aunque una vez captado el concepto DERIVE lo automatiza					X						X				
	Los procesos manipulativos los ha aprendido de forma mecánica si entender a veces su significado por ejemplo con los rangos función RANK							X								
	La metodología obligaba a concentrarse en el método o forma de hacerlo con DERIVE									X						
	Al principio encontraba una cierta dispersión pero una vez entendidos los conceptos quedaban más fijos								X							
7.2. La investigación, la experimentación y el descubrimiento ¿han facilitado la asimilación y comprensión de contenidos o por el contrario han dispersado la atención del alumnado?.	El haber investigado y descubierto los conceptos por sí mismo ha proporcionado una visión más profunda y amplia de los contenidos que redunda en una mejor comprensión	X		X		X			X		X	X	X	X	X	
	Este método experimental y de descubrimiento ha permitido entender contenidos que no había entendido antes		X									X				
	La investigación y experimentación han sido importantes para el alumno en la comprensión de contenidos , por el ahorro operativo				X					X						
	DERIVE NO ha sido RELEVANTE para la investigación y descubrimiento propuestos aunque ha habido un buen aprendizaje de contenidos				X											
	A medida que iban avanzando las clases y aumentaba su experimentación ha mejorado la comprensión de conceptos						X									
	Es mejor el método tradicional para entender los contenidos pues el uso del programa DISPERSA LA ATENCIÓN							X							X	
	Al principio se encontraba un poco más disperso pero una vez entendidos los conceptos quedaban más fijos								X							
	DERIVE permite que se retengan mejor los contenidos								X		X			X		
	DERIVE NO APORTA nada para los CONCEPTOS abstractos y no es buena herramienta para el análisis									X						

7.3. El tipo de aprendizaje ¿ha sido un aprendizaje activo? ¿cómo ha sido la participación del alumnado en las clases?.	**El alumno ha tenido la sensación de haber ido haciendo y construyendo por sí mismos los conceptos y practicándolos a la vez**	X										X		X		
	La estrategia didáctica ha forzado al alumno a pensar y que sea el mismo el que construye con ayuda del ordenador		X													
	Se le han pasado rápidamente las horas con el ordenador		X													
	Lo más positivo es la postura activa que tienes que adoptar				X	X		X			X					
	El aprendizaje ha sido activo mucho más positivo que el aprendizaje tradicional												X			
	El ritmo de clase era dinámico, el alumno trabaja a la vez que el profesor					X										
	Las clases eran muy prácticas y la búsqueda de soluciones se ha desarrollado de manera activa y participativa						X									
	Siempre ha tenido la sensación de aprender algo nuevo de una forma nueva			X					X		X	X		X		
7.4.¿cómo ha sido la atención del alumnado en las clases?.	**Se le han pasado rápidamente las clases frente al ordenador**		X													
	El tipo de didáctica requiere mucha atención y concentración		X													
	La atención del alumno era muy superior al de metodologías tradicionales pues los cálculos no oscurecían el contenido			X												
	El haber usado el ordenador ha favorecido motivación e interés del alumno						X									
ATRIBUTO	**ASPECTOS CARACTERÍSTICOS**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
7.5. ¿Cómo eran los conocimientos previos del alumnado? ¿eran suficientes para los contenidos que se introducían?	**En general los conocimientos previos han sido suficientes salvo en la introducción de determinantes**		X													
	En las actividades que se proponían no se ha notado la necesidad de contenidos previos						X					X	X			
	Muchos de los contenidos introducido ya los conocía el alumno y lo único que ha hecho es redescubrirlos desde otra perspectiva									X						
	No ha notado la necesidad de contenidos previos salvo los básicos de COU								X					X		
	Ha tenido la sensación de que hacían falta contenidos previos para desarrollar las investigaciones que se planteaban							X								
	Ha tenido la sensación de que faltaba algún contenido previo			X							X					
	Sí parecía faltar algún contenido previo pero que se dejaba de forma voluntaria para tenerlo que buscar				X											

Con esta tabla a su vez hemos elaborado la siguiente gráfica que nos ha facilitado la interpretación de los datos:



A partir de la tabla y el gráfico anteriores podemos destacar que los siguientes aspectos característicos que definen cada uno de los atributos que habíamos enunciado inicialmente son los siguientes:

7.1. El aprendizaje suscitado por las diferentes tareas de enseñanza que se han realizado en la clase ha sido un aprendizaje por descubrimiento, con la experimentación y construcción por parte del alumno de los contenidos. Todo ello ha tenido lugar gracias a la actitud de búsqueda que ha provocado la estrategia didáctica a través del programa de cálculo simbólico DERIVE en el alumnado, sobre todo debemos destacar los ejemplos para investigar.

7.2. En general podemos afirmar que la investigación, la experimentación y el descubrimiento han facilitado la comprensión de los contenidos que se iban introduciendo por varias circunstancias: por el ahorro operativo y porque proporciona una visión más profunda y más amplia de los contenidos. A pesar de todo ha habido opiniones contrarias que afirmaban que el uso del ordenador dispersaba la atención del alumnado.

7.3. El aprendizaje que ha provocado la estrategia didáctica ha sido un aprendizaje activo, a juicio mayoritario de los alumnos, obligando al alumno a participar de forma activa en el desarrollo de las actividades que se iban proponiendo.

7.4. La atención del alumnado hay indicios de que ha sido bastante alta, pero de sus afirmaciones no hemos podido extraer una información significativa.

7.5. Los alumnos en general no se puede afirmar que hayan tenido necesidad de conocimientos previos, pues algunos creen que los conocimientos previos eran los propios contenidos que se iban introduciendo, y ha podido dar la sensación de que faltaban ciertos contenidos. Sin embargo podemos decir que la opinión más generalizada es que no ha habido necesidad de contenidos previos cuando se iban introduciendo los conceptos.

De estos atributos que acabamos de enumerar, podemos inducir que los aprendizajes que han ido adquiriendo los alumnos han sido aprendizajes significativos. Podemos afirmar que han sido aprendizajes significativos porque con las actividades que se han ido proponiendo para introducir los conceptos "ejemplos para investigar" los alumnos debían enfrentarse a situaciones que debían de investigar y experimentar para deducir a partir de unos conocimientos previos (que como se observa en uno de los atributos no parecen haber sido necesarios) y con manipulaciones conocidas se llegaban a descubrir las cuestiones planteadas. Aunque en algunas ocasiones, sobre todo al principio del curso, los alumnos experimentaban pero no llegaban con éxito al resultado que les permitía construir el conocimiento, sin embargo, este tipo de metodología, fue generando en el alumnado un tipo de estructura mental que en la parte final del curso les facilitaba enormemente el descubrimiento de conceptos nuevos por medio del ordenador. A este respecto debemos señalar que ha habido ciertos datos contradictorios obtenidos en la encuesta final, en relación a la facilitad relativa con la que los alumnos han olvidado algunos conceptos en tan solo cuatro meses, señalo facilidad relativa, porque evidentemente los contenidos que han aprendido aunque hayan sido adquiridos de manera significativa no están presenten en el alumnado en la memoria a corto plazo sino que posiblemente se hayan volcado en la memoria a largo plazo y requieren un pequeño estímulo para despertarlos. Por esto esta cuestión que entre los alumnos se denomina comúnmente "borrado de memoria" respecto de los contenidos aprendidos merecería un estudio más específico, y en concreto si esos contenidos han sido adquirido con nuestra estrategia, pero esta cuestión desborda los objetivos de nuestra investigación.

CUESTIÓN 8: ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La metodología empleada y el tipo de uso que hemos hecho del programa DERIVE, ¿favorece el desarrollo de estrategias de resolución de problemas?

Con esta cuestión pretendíamos descubrir si nuestra estrategia didáctica ha provocado en los alumnos un interés por resolver los problemas desde diferentes caminos, con diferentes estrategias. En particular, se trata de estudiar si el programa DERIVE favorece la aparición de diversas estrategias de resolución partiendo de los conocimientos previos que tienen los alumnos, o bien porque conceptualmente los contenidos admiten diferentes puntos de vista y tratamiento y por tanto diferentes formas de atacar los interrogantes que se proponen sobre ellos, o bien porque el programa DERIVE admite diferentes operativas para encontrar la solución de los problemas. Es importante también detectar si en el aula el clima que se ha generado ha sido proclive a la búsqueda de diferentes puntos de vista, diferentes formas de enfocar un problema, situación que ha podido generar esas diferentes estrategias. Es muy común en el aula de Matemáticas, y en especial con el álgebra lineal, enseñar una serie de "recetas" o "trucos" que permiten desarrollar las diferentes situaciones problemáticas. Nosotros pretendíamos mostrar una herramienta que facilitaba la resolución de problemas pero que utilizaba el planteamiento que el alumno deseara. Por eso para contestar a esta cuestión consideramos las siguientes preguntas abiertas cuyas respuestas ofrecerían los diferentes atributos que perfilan la cuestión:

8.1. El tipo de problemas de fin de capítulo que se han propuesto al finalizar cada capítulo a lo largo del curso ¿crees que facilitaban el uso de estrategias de resolución de problemas por parte de los alumnos?. Se trata de determinar si los problemas fin de capítulo eran auténticos problemas, que requerían un planteamiento previo de tal forma que el alumno no podía ponerse de forma automática a su resolución. Este planteamiento previo es el que podría provocar diferentes caminos o estrategias en la resolución.

8.2. El tipo de METODOLOGÍA empleada en el aula facilitaba el hecho de que los alumnos encontraran varias formas o caminos para resolver un problema: En este caso se trata de recoger la opinión de los alumnos respecto a la metodología empleada, en el sentido de recoger el sentir generalizado sobre las formas de resolución de problemas que se proponían, es decir, si se suscitaba el diálogo, si se facilitaba que los alumnos participasen en la resolución de problemas con ideas propias, si en definitiva en la clase se ha favorecido la multiplicidad de métodos de resolución o si se ha propuesto únicamente un único método.

8.3. ¿Cuál ha sido la actitud de los alumnos ante la resolución de problemas?. Se trataría de determinar como ha sido la actitud generalizada de los alumnos ante la resolución, si ha habido rechazos, miedos, si los logros se han conseguido por actitud de búsqueda,... en definitiva descubrir esa actitud que ha sido más generalizada en el grupo de cara a resolver un problema.

8.4. Comparativa de la resolución de problemas con nuestra estrategia didáctica y la resolución de problemas con otras estrategias tradicionales y expositivas. Con esta pregunta pretendemos determinar si nuestra estrategia ha sido más beneficiosa para los alumnos de cara a la multiplicidad de resoluciones respecto a otras metodologías.

8.5. ¿Cuántas estrategias o caminos utilizaba el alumno para resolver los problemas? Se trataría de analizar si los alumnos han utilizado un método de resolución o bien si han utilizado varios caminos, y en qué circunstancias se ha producido este hecho.

8.6. ¿Qué tipo de técnicas de resolución de problemas han sido utilizados y en cuáles ha habido dificultades? . Para responder a esta pregunta debemos analizar si los alumnos han utilizado bien la inducción matemática, la modelización, la experimentación. Para ello basta analizar los problemas propuestos que más han incidido en este tipo de técnicas de resolución.

Con las conclusiones finales de cada caso obtenidas en el análisis vertical realizamos una clasificación de los diferentes elementos significativos entre los atributos que acabamos de considerar, y hemos obtenido un conjunto de aspectos característicos que perfilan estos atributos y perfilan una contestación a la cuestión. El resumen de este proceso se puede consultar en el ANEXO XVIII, parte 8, y nos ha permitido en primer lugar elaborar una tabla que resume cada uno de los atributos y los aspectos característicos de cada uno ellos. Indicamos con un aspa (X) cuando un aspecto característico se verifica en un caso determinado:

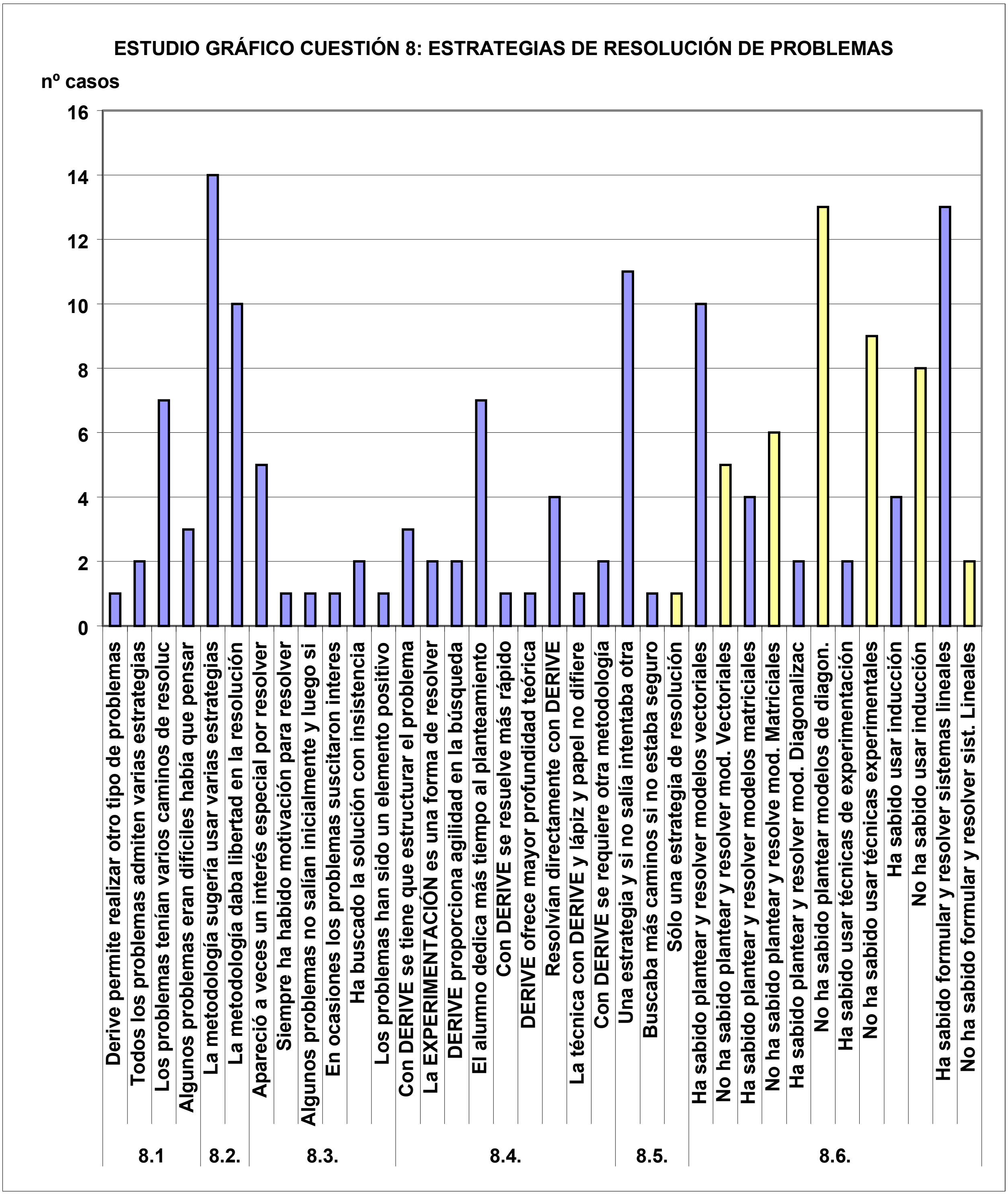
CUESTIÓN 8: ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Aspectos característicos de cada atributo		**CONTESTACIONES EN CASO**														
ATRIBUTOS	**ASPECTOS CARACTERISTICOS**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
8.1. El tipo de problemas de fin de capítulo ¿facilitaba el uso de estrategias de resolución de problemas por parte de los alumnos?	DERIVE permite la realización de OTRO TIPO DE PROBLEMAS en cuanto a dimensión de datos y proximidad a la realidad	**X**														
	Casi todos los problemas tienen varias estrategias pero siempre te quedas con la más sencilla		**X**						**X**							
	Los problemas planteados podían tener varios caminos de resolución			**X**	**X**	**X**					**X**		**X**	**X**	**X**	
	Algunos problemas sí que son difíciles y hay que pensar mucho			**X**					**X**						**X**	
8.2. El tipo de METODOLOGÍA empleada en el aula facilitaba que los alumnos encontraran varias formas o caminos para resolver un problema	**La metodología sugería utilizar varios caminos de resolución**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	
	La metodología permitía libertar a la hora de plantear un problema y resolverlo de la forma que uno quisiera, ofrecía multiplicidad de estrategias	**X**		**X**	**X**	**X**		**X**	**X**	**X**	**X**		**X**	**X**		
8.3. ¿Cuál ha sido la actitud de los alumnos ante la resolución de problemas?	En muchas ocasiones aparecía un interés especial hacia la resolución de problemas, un "gusanillo" que obligaba a intentarlo como fuera, en actitud de BUSQUEDA y PERSISTENCIA	**X**		**X**					**X**			**X**		**X**		
	Siempre se ha encontrado motivado para resolver los problemas y ejemplos a investigar												**X**			
	A veces había problemas que no salían inicialmente por error al introducir los datos que luego al cabo de los días se intentaban y volvían a salir		**X**													
	En ocasiones los problemas han suscitado cierto interés														**X**	
	Ha buscado la solución con insistencia utilizando en numerosas ocasiones la experimentación						**X**				**X**					
	Los problemas han sido uno de los elementos más positivos del curso												**X**			

ATRIBUTO	ASPECTOS CARACTERÍSTICOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
8.4. Comparativa de la resolución de problemas con nuestra estrategia y la resolución de problemas con otras estrategias	El alumno se enfrenta de forma distinta a los problemas como lo hacía con lápiz y papel pues TIENE QUE ESTRUCTURAR EL PROBLEMA CON EL SISTEMA DE NOTACIÓN QUE USA DERIVE	X									X		X			
	DERIVE permite que la EXPERIMENTACIÓN se convierta en una alternativa para resolver problemas ofreciendo nuevas posibilidades a los alumnos	X							X							
	DERIVE proporciona cierta AGILIDAD EN LA BÚSQUEDA de estrategias alternativas, es más dinámico y operativo									X	X					
	Al disminuir el tiempo empleado en los cálculos rutinarios, esto permite que el alumno dedique más tiempo al planteamiento y a la comprobación de soluciones que la resolución respecto al uso con lápiz y papel	X		X			X	X	X		X	X				
	Con DERIVE y lápiz y papel el tiempo dedicado al planteamiento es similar pero con DERIVE se resuelve mucho más rápidamente lo cual permite en ocasiones replantear los problemas cuando se resisten													X		
	Con DERIVE tenía mayor profundidad teórica que ha permitido enfrentarse mejor a los problemas											X				
	Resolvía directamente en DERIVE aunque a veces planteaba inicialmente con lápiz y papel							X	X		X				X	
	La técnica empleada en la resolución de problemas con DERIVE no difiere de usar lápiz y papel		X													
	Al resolver problemas con DERIVE se requiere otra metodología en cuanto a la forma de enfrentarse a los problemas, en cuanto a la forma de pensar						X					X				
8.5. ¿Cuántas estrategias o caminos utilizaba el alumno para resolver problemas?	**En algunos problemas utilizaba una estrategia y si no obtenía solución intentaba otros caminos**	X	X	X	X	X	X		X	X	X	X		X	X	
	Cuando no estaba seguro del resultado buscaba más caminos de resolución, aunque en general ha empleado siempre varias estrategias												X			
	Solo ha empleado una estrategia							X								

ATRIBUTO	**ASPESCTOS CARACTERÍSTICOS**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
8.6. ¿Qué tipo de técnicas de resolución de problemas han sido utilizadas y en cuales ha habido dificultades?	**Ha sabido plantear y resolver MODELOS VECTORIALES**	X	X	X			X	X	X	X	X	X	X			
	Ha sabido plantear y resolver MODELOS MATRICIALES		X							X	X		X			
	Ha sabido plantear y resolver modelos de diagonalización de matrices en los que interviene potencia k-ésima de una matriz												X	X		
	NO ha sabido utilizar MODELOS VECTORIALES				X						X			X	X	X
	No ha sabido utilizar MODELOS MATRICIALES				X		X				X			X	X	X
	No ha sabido plantear y resolver modelos de diagonalización de matrices en los que interviene una potencia k-ésima de una matriz	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			X	X
	Ha sabido utilizar TECNICAS EXPERIMENTALES para resolver problemas										X		X			
	No ha sabido utilizar tecnicas EXPERIMENTALES para resolver problemas				X	X	X		X	X	X			X	X	X
	Ha sabido utilizar INDUCCIÓN						X			X	X		X			
	No ha sabido usar INDUCCIÓN	X	X	X	X	X								X	X	X
	Ha sabido formular y resolver sistemas lineales como MODELO de resolución de problemas generales	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
	No ha sabido formular y resolver sistemas lineales como MODELOS de resolución de problemas														X	X

De nuevo, como en el resto de cuestiones esta tabla resumen nos ha servido para realizar el siguiente diagrama de barras que nos permite obtener una visión más gráfica de los diferentes atributos y aspectos característicos más relevantes de esta cuestión:



A partir de la tabla resumen y de la gráfica anterior podemos afirmar que se verifican los siguientes atributos:

8.1. Los problemas planteados a juicio de los alumnos podían tener varios caminos de resolución, lo cual indica que inicialmente estaban planteados para intentarse resolver por varios métodos, facilitando por tanto la posibilidad de resolver utilizando varias estrategias de resolución.

8.2. La metodología utilizada ha facilitado claramente la utilización de varios métodos de resolución, ya que permitía con total libertad el utilizar una multiplicidad de estrategias.

8.3. La actitud que se ha observado es una **actitud de búsqueda** insistente las soluciones por varias razones: porque los problemas suscitaban en muchas ocasiones un interés especial por resolverlos en el alumnado, porque les ha motivado y porque incitaban en ocasiones a la experimentación.

8.4. La resolución de problemas tenía ciertas características especiales respecto de otras estrategias que utilizan el lápiz y papel, las diferencias de nuestra estrategia con respecto a otras estriban en la resolución de problemas residen en varios elementos:

- la primera y más significativa es que al disminuir el tiempo empleado en los cálculos rutinarios permite que el alumno con nuestra estrategia, que utiliza DERIVE, pueda dedicar más tiempo al planteamiento y comprobación de resultados de los problemas.
- en segundo lugar tenemos que señalar que DERIVE proporciona mayor agilidad en la búsqueda de estrategias alternativas
- además el alumno se enfrenta de forma distinta a los problemas por el propio sistema de notación , entre ellas con la experimentación.

podemos decir que DERIVE es mucho mejor que LAPIZ Y PAPEL para la resolución de problemas por la rapidez de cálculos y porque permite ensayar otros caminos de resolución.

8.5. Los alumnos en general han utilizado una estrategia de resolución, pero si con la estrategia elegida inicialmente no se encontraba, ensayaban con otros caminos. Es curioso observar como un alumno afirma que a veces pasados dos días de intentos obtenía finalmente el camino para resolver el problema.

8.6. En cuanto a las técnicas de resolución de problemas empleadas se puede observar que en general han dominado el uso de modelos vectoriales, pero en los modelos matriciales y en especial en los que usan diagonalización, han tenido en general bastantes dificultades, por lo que podemos decir que la MODELIZACIÓN de problemas no ha sido una técnica bien empleada. En cuanto a las técnicas experimentales parece que objetivamente tampoco han sabido emplearlas, lo mismo ha sucedido con la INDUCCIÓN. Sin embargo la FORMULACIÓN Y RESOLUCION de problemas ha sido una técnica bien utilizada. Por tanto podemos resumir que los alumnos no han dominado algunas de las técnicas básicas de resolución de problemas: INDUCCIÓN, EXPERIMENTACIÓN y MODELIZACIÓN, salvo en los MODELOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Podemos por tanto resumir los resultados obtenidos afirmando que:

- Los problemas que se habían planteado facilitaban el uso de varias estrategias de resolución de problemas.
- La metodología ha favorecido claramente la utilización de varias estrategias de resolución.
- La actitud del alumnado ha sido en general una actitud de BUSQUEDA constante de las soluciones de los problemas propuestos.
- DERIVE ha favorecido la diversidad de planteamientos en los diferentes problemas por la facilitad de cálculo, mejorando por tanto las posibilidades que ofrece el lápiz y papel.
- Los alumnos en general ante un problema han planteado una estrategia o varias en función de si obtenían la solución a la primera o no.
- Las técnicas de resolución de problemas que han dominado fundamentalmente han sido LA MODELIZACIÓN VECTORIAL y LA MODELIZACIÓN CON EL USO DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES, no han conseguido dominar la INDUCCIÓN; ni la EXPERIMENTACIÓN, ni la MODELIZACIÓN MATRICIAL.

Estos atributos nos permiten afirmar que la estrategia didáctica que hemos propuesto, ha introducido varios elementos que favorecen claramente el uso de estrategias alternativas en la resolución de problemas: por un lado el uso de DERIVE que permite que el alumno se centre en los planteamientos más que en los cálculos rutinarios, planteando y replanteando de forma más sencilla los problemas, en segundo lugar los problemas propuestos podían suscitar un interes especial en el alumnado para resolverlos por varios caminos y en tercer lugar la metodología ha favorecido claramente la multiplicidad de estrategias. Sin embargo a pesar de estos tres factores positivos a los que debemos de añadir el interés y motivación con el cual los alumnos se han enfrentado a los problemas, los alumnos no han conseguido dominar correctamente estrategias como la INDUCCIÓN, la EXPERIMENTACIÓN o la MODELIZACIÓN MATRICIAL para resolver los problemas concretos que se les iban planteando. Esto nos sugiere una conclusión: la estrategia ha favorecido estrategias de resolución de problemas pero quizás es necesario incidir de forma más concreta en los diferentes tipos de heurísticos que tiene la matemática para resolver problemas; situación que no hemos contemplado abiertamente en el planteamiento metodológico, ya que hemos considerado que podrían surgir de forma espontánea en los alumnos a partir de sus conocimientos previos. Así pues podemos concluir diciendo que DERIVE y la METODOLOGÍA empleada han favorecido el desarrollo de estrategias de resolución de problemas no tanto por ofrecer posibilidad a resolver por diferentes heurísticos como por el utilizar diferentes operaciones o enfoques en la resolución de problemas.

CUESTIÓN 9: BARRERAS ADICIONALES.

El manejo del programa de cálculo simbólico DERIVE ¿genera BARRERAS ADICIONALES para el aprendizaje de conceptos matemáticos?.

Con esta cuestión pretendemos analizar si el aprendizaje de un programa totalmente nuevo, ha provocado que los alumnos retrasen su aprendizaje matemático por culpa del aprendizaje del programa, es decir, si el hecho de haber tenido que aprender a manejar un programa desconocido ha ensombrecido los contenidos propios de Matemáticas, perjudicando por tanto sus procesos de enseñanza y aprendizaje.

Para responder a esta cuestión hemos planteado algunos interrogantes que nos han permitido obtener los ATRIBUTOS que caracterizan esta cuestión con los que obtenemos la respuesta a la misma:

9.1. ¿Cuál era la actitud inicial de los alumnos frente a los ordenadores?. Si los alumnos tenían una actitud inicial negativa ante los ordenadores, es claro que el aprendizaje de cualquier programa de ordenador se convertía de forma automática en un primer obstáculo que posiblemente dificultase el aprendizaje del álgebra lineal; por el contrario una actitud positiva hacia el uso de los ordenadores nos sitúa ante un panorama totalmente abierto que permitirá que el alumno aprenda los programas informáticos con mayor facilidad.

9.2. ¿Se ha invertido demasiado tiempo en el aprendizaje del programa?. Se trata de determinar si a juicio de los alumnos el aprendizaje y manejo del programa DERIVE suponía mucho tiempo, ya que una dedicación excesiva al aprendizaje del programa iría en detrimento del tiempo empleado en los contenidos de la propia asignatura.

9.3. El aprendizaje y posterior manejo del programa ¿es fácil o difícil?. Si los alumnos consideran que el aprendizaje y manejo del programa es sencillo estamos entonces ante una herramienta que no genera un dificultad inicial para introducir los conceptos del temario, ya que el manejo del la herramienta es sencillo. Por el contrario si se considera difícil, entonces claramente tenemos una barrera adicional a salvar además de la propia dificultad de los contenidos.

9.4. ¿Cuáles han sido los principales problemas o dificultades que se han tenido con el manejo del programa DERIVE?. Pretendemos detectar cuales han sido las dificultades que ha ocasionado el manejo del programa, y si tales dificultades han impedido que los resultados matemáticos se viesen o se descubriesen con facilidad.

9.5. ¿Cuál de las dos herramientas de trabajo resulta más útil DERIVE o LÁPIZ Y PAPEL?. Tratamos de determinar si DERIVE es asimilable al uso de LÁPIZ Y PAPEL; herramienta que ha venido utilizando el alumno habitualmente. Si podemos equiparar el uso de DERIVE a LÁPIZ Y PAPEL o incluso, mejorar la perspectiva de manejo entonces estamos ante un nuevo indicador que muestra el programa DERIVE como una herramienta que lejos de generar barreras adicionales, lo que hace es facilitar el trabajo.

9.6. ¿A juicio de los alumnos, DERIVE ha sido una barrera adicional para el aprendizaje de los contenidos de álgebra lineal que se han impartido?. Con la respuesta a esta pregunta obtenemos una valoración del alumnado ante la cuestión que tratamos de contestar y que nos vuelve a mostrar un indicador muy significativo en cuanto a como ha sido la incidencia del programa en el proceso de enseñanza aprendizaje.

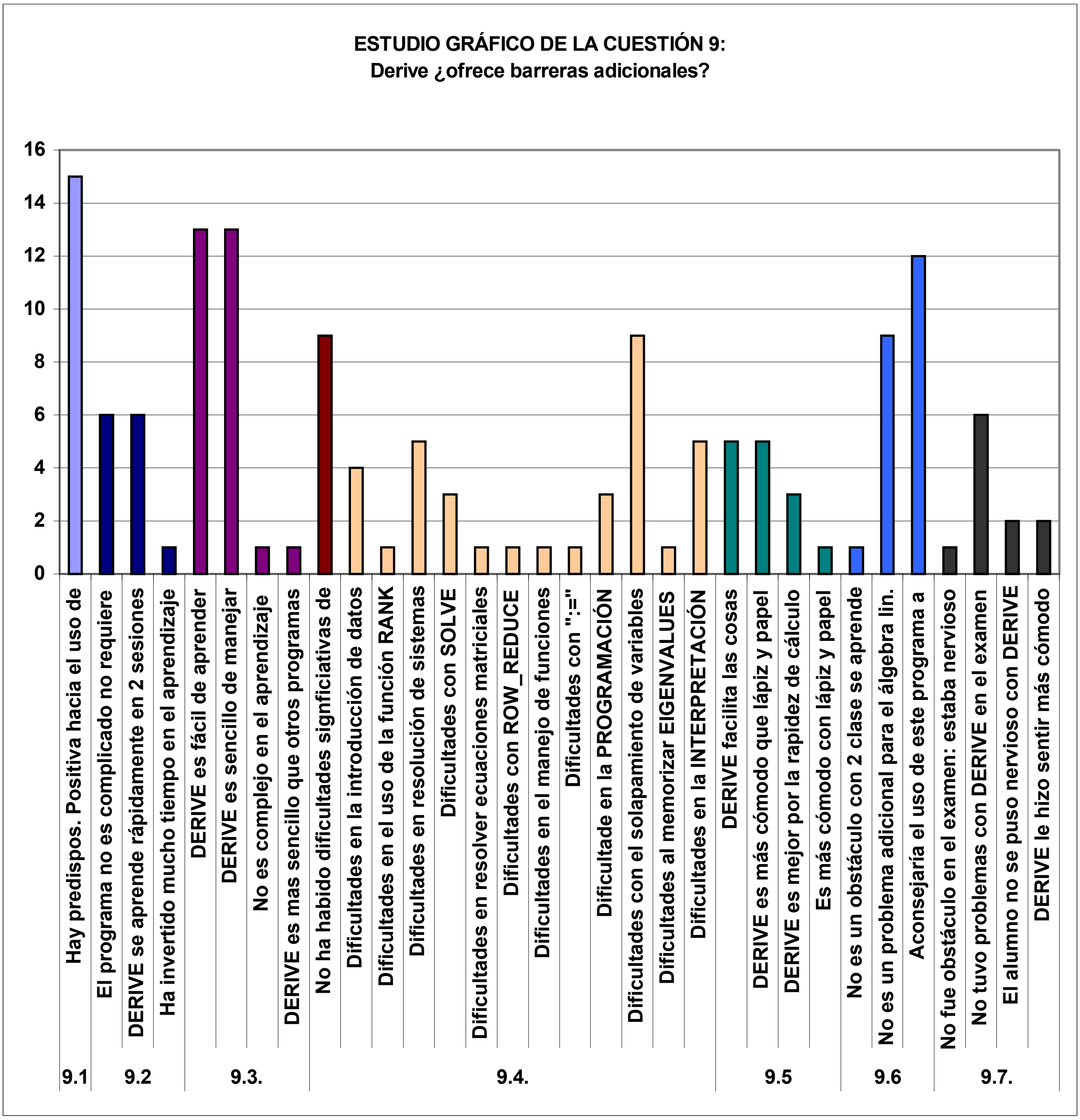
9.7. El programa DERIVE ¿ha impedido que el alumno realice peor el examen de lo que hubiera ocurrido si lo hiciese con lápiz y papel?. Pretendemos determinar si el haber utilizado el programa ha dificultado al alumno en la realización del examen final, o por el contrario si le ha beneficiado su uso, respecto a lo que hubiera ocurrido si lo hace con lápiz y papel.

Para obtener los aspectos característicos que perfilan cada uno de los atributos de estas preguntas hemos analizado la incidencia de estos interrogantes respecto a los datos que hemos obtenido en el análisis vertical. Con este proceso hemos elaborado un resumen que se puede consultar en el ANEXO XVIII parte 9, del cual hemos extraído la siguiente tabla resumen:

CUESTIÓN 9: BARRERAS ADICIONALES																
Aspectos característicos de cada atributo		**CONTESTACIONES EN CASO**														
ATRIBUTOS	**ASPECTOS CARACTERISTICOS**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
9.1. ¿Cuál era la actitud inicial de los alumnos frente a los ordenadores?.	Existe una predisposición positiva hacia el uso de ordenadores	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
9.2. ¿Se ha invertido demasiado tiempo en el aprendizaje del programa?	Me gusta porque no es complicado, no tienes que estar mucho tiempo aprendiendo el programa	X	X					X	X	X				X		
	Se aprende rápidamente en 2 sesiones			X	X	X	X					X	X			
	Sí, se ha invertido mucho tiempo en el aprendizaje del programa										X					
9.3. El aprendizaje y posterior manejo del programa ¿es fácil o difícil?	DERIVE es un programa que resulta muy fácil de aprender	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X	X	X	
	DERIVE es un programa sencillo de manejar	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X	X	X	
	No es complicado el aprendizaje solo hay que acostumbrarse a la nueva notación									X						
	Con respecto a otros programas DERIVE es sencillo de Manejar									X						
9.4. ¿Cuáles han sido los principales problemas o dificultades que se han tenido con el manejo del programa DERIVE?	No ha tenido dificultades significativas en el manejo del programa				X	X	X	X	X		X	X	X	X		
	Están relacionados con la introducción de datos	X	X	X				X								
	En el uso de la función RANK			X												
	En la resolución de sistemas					x		X	X	X				X		
	Con la función SOLVE al intentar resolver con ella sistemas no lineales										X	X	X			
	En resolver ecuaciones matriciales								X							
	En la función ROW-REDUCE														X	
	En el manejo de funciones					X										
	En los signos "=" y ":="			X												
	En la PROGRAMACIÓN de funciones	X				X	X									
	En el SOLAPAMIENTO DE VARIABLES	X				X		X	X	X	X		X	X		X
	En memorizar funciones como EIGENVALUES									X						
	En la INTERPRETACIÓN de resultados	X			X	X								X	X	

ATRIBUTO	ASPECTOS CARACTERÍSTICOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
9.5. ¿Cuál de las dos herramientas de trabajo resulta más útil DERIVE ó LÁPIZ Y PAPEL?	Con DERIVE se facilitan mucho las cosas	X		X	X	X	X									
	Cuando el alumno se ha acostumbrado a la notación de DERIVE, este se hace cómodo y lo usa más que lápiz y papel	X		X					X				X	X		
	Ha sido mejor DERIVE por su rapidez de cálculo										X			X	X	
	A veces ha tenido la sensación de que con LÁPIZ Y PAPEL era más sencillo															
	Es más cómodo LÁPIZ Y PAPEL aunque con DERIVE se facilitan los cálculos										X					
9.6. A juicio de los alumnos ¿DERIVE ha sido una barrera adicional para el aprendizaje de los contenidos de álgebra lineal que se han impartido?	No es un obstáculo, es fácil, estás las dos primeras clases comprendiendo comando y luego cuanto se usan un poco se pueden descubrir las cosas	X														
	No es un problema adicional para el aprendizaje del álgebra lineal		X		X	X			X			X		X		
	No es un problema adicional para el álgebra lineal, al contrario ha ayudado a entender mejor los contenidos			X			X						X			
	DERIVE no ha dificultado al alumno la comprensión de los contenidos		X							X	X				X	
	Aconsejaría el uso de este programa a otros compañeros		X	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X	X	
9.7. El programa DERIVE ¿ha impedido que el alumno realice peor el examen de lo que hubiera ocurrido si lo hiciese con lápiz y papel?	No impidió, lo que pasa es que el día del examen estaba muy nervioso	X														
	No tuvo problemas con el manejo del programa		X		X	X		X			X		X			
	El alumno no se puso nervioso por el manejo del programa								X			X				
	No, todo lo contrario, se encontró más comodo que en otros exámenes			X			X									

Como en el resto de cuestiones a partir de esta tabla hemos elaborado el siguiente diagrama de barras que nos muestra de forma más gráfica el estudio de los atributos de esta cuestión:



A la vista de la tabla y la gráfica podemos extraer los siguientes atributos fundamentales:

9.1. Los alumnos tenían una predisposición positiva al uso de los ordenadores, de hecho en la encuesta inicial ya mostraron todos sus conocimientos iniciales de informática, y quizás era uno de los atractivos iniciales del curso experimental.

9.2. El aprendizaje del programa no ha requerido mucho tiempo, en general se han dedicado tan solo dos sesiones al aprendizaje inicial del programa.

9.3. DERIVE es un programa que a juicio de los alumnos es muy sencillo de manejar y de aprender.

9.4. En general no ha habido dificultades significativas de manejo del programa, aunque podemos señalar que las principales dificultades en orden creciente de importancia han sido:

- Dificultades por el solapamiento de variables, ya que se utilizaban en problemas actuales variables que habían sido definidas en problemas anteriores, lo cual provocaba conflictos entre los datos del problema actual y los resultados que se obtenían.
- Dificultades en la resolución de sistemas.
- Dificultades en la interpretación de los resultados ofrecidos por DERIVE.
- Dificultades en la programación de funciones.

9.5. En general se observa que DERIVE ha sido una herramienta más cómoda y útil que el lápiz y papel empleado anteriormente.

9.6. A juicio de los alumnos DERIVE no ha sido una barrera adicional para el aprendizaje de los contenidos, al contrario ha servido para comprender mejor los contenidos y además es curioso observar que de forma mayoritario casi todos los alumnos aconsejarían a otros compañeros el usar el programa para estudiar álgebra lineal.

9.7. DERIVE no ha impedido que los alumnos realizaran bien el examen final, todo lo contrario ha facilitado su elaboración.

Con estos ATRIBUTOS que caracterizan nuestra cuestión podemos afirmar que efectivamente DERIVE es un programa ante el cual los alumnos han tenido una predisposición positiva para su aprendizaje, pero en todo caso se trata de un programa sencillo tanto en su manejo como en su aprendizaje, prueba de ello es que para aprenderlos han necesitado tan solo dos sesiones, y en cuanto al manejo, se observa que no han tenido dificultades especiales,. Únicamente podemos destacar algunos problemas relacionados con el solapamiento de variables como error más generalizado. Además en general DERIVE ha sido una herramienta más útil que el lápiz y papel prueba de ello es que en el examen final no ha ofrecido dificultades todo lo contrario ha favorecido su desarrollo. Por todo lo que acabamos de comentar y añadiendo que los alumnos en general han valorado positivo el uso de DERIVE para el aprendizaje de los contenidos de álgebra lineal, considerando que lo aconsejarían incluso a otros compañeros para aprender el álgebra lineal, podemos afirmar que DERIVE no ha generado BARRERAS ADICIONALES para el aprendizaje de los conceptos matemáticos, todo lo contrario ha favorecido el aprendizaje de los mismos.

CUESTIÓN 10: AUTONOMÍA COGNITIVA

La metodología suscitada por nuestra estrategia didáctica ¿genera AUTONOMÍA COGNITIVA en los alumnos, permitiéndoles e incitándoles a indagar las situaciones planteadas desde el propio individuo anulando así, ciertas DEPENDENCIAS que existen entre los alumnos y otros expertos o maestros?.

En esta cuestión pretendemos analizar si la estrategia didáctica ha provocado en el alumno una AUTONOMÍA COGNITIVA en el aprendizaje de los contenidos, de tal forma que con la ayuda del programa DERIVE el alumno haya sido capaz de lanzarse a la búsqueda de soluciones de problemas o cuestiones que en otros casos hubiera tenido que resolver con ayuda del profesor.

Para estudiar esta cuestión podemos considerar varios interrogantes que nos permiten obtener ciertos ATRIBUTOS que caracterizan a la cuestión:

10.1. Los ejemplos a investigar que se proponían en el aula ¿han suscitado en el alumno una actitud de búsqueda autónoma de soluciones o respuestas a las cuestiones que se planteaban? Se trata de analizar si los ejemplos a investigar provocaron en el alumnado una ACTITUD clara de BUSQUEDA, de forma autónoma de las soluciones, es decir, de manera independiente el alumno ha intentado encontrar respuesta a estas cuestiones.

10.2. Los ejercicios de manipulación ¿han permitido que el alumno adquiera una cierta AUTONOMÍA de cálculo en los principales procedimientos manipulativos necesarios para el álgebra lineal? Se trata de estudiar si los alumnos con la metodología empleada y con ayuda del programa DERIVE han conseguido manejar los procedimientos básicos del álgebra lineal de tal forma que en procesos similares eran capaces de desarrollarlos de forma autónoma sin ningún tipo de dificultad.

10.3. En la RESOLUCION DE PROBLEMAS propuestos ¿los alumnos han encontrado un interés especial por resolverlos, al tener una herramienta con la que el desgaste operativo era mínimo? . Se trata de analizar si el uso de DERIVE y nuestra metodología han permitido que el alumno pudiera enfrentarse a los problemas con pasión, con interés para resolverlos, con tesón y entrega; es decir si ha intentado por todos los medios resolver los problemas que se planteaban y sobre todo aquellos que más se resistían.

10.4. El uso de DERIVE, ¿ha mermado las habilidades de cálculo del alumno de tal forma que han restado en él cierta AUTONOMÍA para desarrollar procesos matemáticos? .

Se trataría de analizar si los alumnos han perdido habilidades de cálculo de tal forma que esas habilidades han mermado sus capacidades para desarrollar otros procesos.

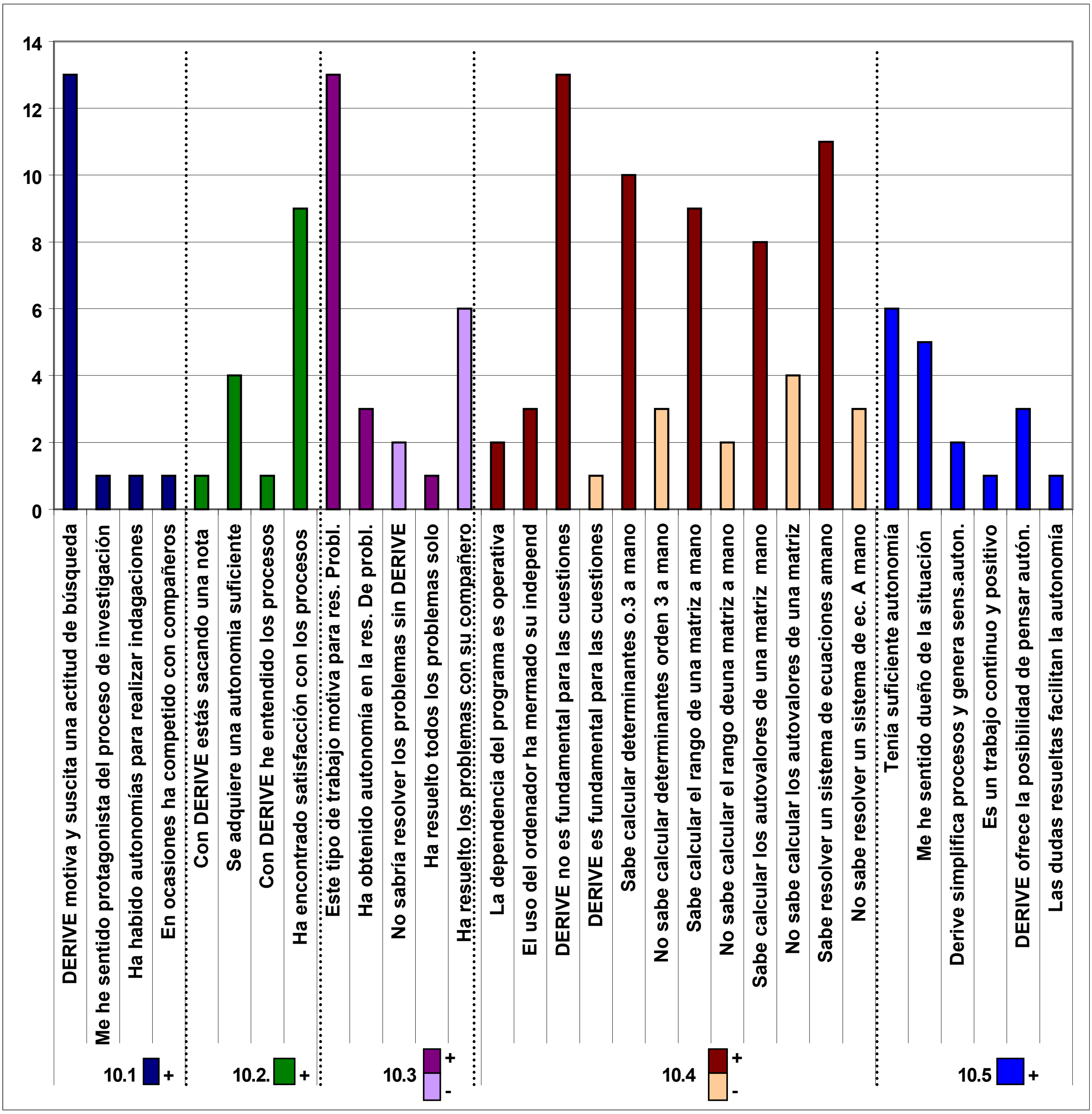
10.5. En general, ¿podemos afirmar que la estrategia didáctica empleada facilitaba al alumno y potenciaba en el su propia autonomía cognitiva?. Con esta pregunta intentamos detectar si de forma general, el alumno ha introducido un factor de AUTONOMÍA en su proceso de aprendizaje, y en la aplicación de los contenidos en la resolución de problemas.

Vamos a analizar cada uno de los interrogantes para obtener los ATRIBUTOS característicos de esta cuestión y así poder formular unas conclusiones al respecto. Para realizar este análisis hemos considerado las conclusiones finales de cada caso para la cuestión 10, y a partir de estos datos hemos clasificado los elementos significativos configurando una serie de aspectos característicos para cada atributo (el resumen se puede consultar en el ANEXO XVIII, parte 10). A partir del mismo como en las cuestiones anteriores hemos elaborado una tabla resumen de cada una de los atributos:

CUESTIÓN 10: AUTONOMÍA COGNITIVA																
Aspectos característicos de cada atributo		**CONTESTACIONES EN CASO**														
ATRIBUTOS	**ASPECTOS CARACTERISTICOS**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
10.1. Los ejemplos a investigar que se proponían ¿han suscitado en el alumno una actitud de BUSQUEDA autonoma de soluciones o respuestas a las cuestiones que se planteaban?	**Siempre he tenido actitud de búsqueda activa, porque DERIVE motiva hacia la búsqueda de respuestas.**	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X	X	
	Me he sentido protagonista del proceso de investigación														X	
	La experimentación, la investigación y el descubrimiento han ofrecido cierta autonomía para realizar las indagaciones								X							
	En ocasiones he entrado en competición con los compañeros de pupitre						X									
10.2. Los ejercicios de manipulación ¿han permitido que el alumno adquiera una cierta autonomía de cálculo en los procedimientos manipulativos?	**Si, pues es como una evaluación continua estás sacando una nota sin que nadie te la te y tienes el resultado inmediato**	X														
	Se adquiere una autonomía suficiente para desarrollar los procesos manipulativos		X						X		X	X				
	Con DERIVE he entendido los procesos pero le ha impedido luego hacerlos con lápzi y papel, le ha mermado habilidad de cálculos							X								
	Ha encontrado satisfacción cuando resolvía los procesos			X	X	X		X	X		X	X	X		X	

ATRIBUTO	ASPECTOS CARACTERÍSTICOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
10.3. En la resolución de problemas propuestos ¿los alumnos han encontrado un interes especial por resolverlos ¿	Con el programa y este tipo de trabajo estaba motivado para resolver problemas obligandole a buscar la solución	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
	Cree haber obtenido cierta autonomía para resolver problemas								X		X			X		
	No sabría resolver los problemas fin de capítulo sin DERIVE					X		X								
	Ha resuelto todos los problemas solo												x			
	Ha resuelto los problemas con su compañero de pupitre							X	X	X						
	Ha resuelto los problemas con su compañero de pupitre para discutir posibles soluciones										X	X		X		
10.4. El uso de DERIVE ¿ha mermado las habilidades de cálculo del alumno de tal forma que han restado en él cierta AUTONOMÍA para desarrollar procesos matemáticos?	La dependencia del programa es totalmente operativa	X		X												
	El uso del ordenador le ha mermado su independencia							X				X		X		
	Para desarrollar las cuestiones teóricas no no es fundamental el uso de DERIVE	X	X	X	X	X		X	X		X	X	X	X	X	X
	Para resolver las cuestiones teóricas usa DERIVE pues no tiene confianza en sus cálculos						X									
	Sabe calcular determinantes de orden 3 a mano	X		X			X		X	X	X	X	X	X	X	
	No sabe calcular determinantes de orden 3 a mano		X		X			X								
	Sabe calcular el rango de una matriz a mano		X	X		X	X			X	X	X	X	X		
	No sabe calcular el rango de una matriz a mano				X			X								
	Sabe calcular los autovalores de una matriz a mano		X	X		X	X		X	X	X		X			
	No sabe calcular los autovalores de una matriz a mano				X			X				X		X		
	Sabe resolver un sistema de ecuaciones lineales a mano	X	X	X			X		X	X	X	X	X	X	X	
	No sabe resolver un sistema de ecuaciones lineales a mano				X	X		X								
10.5. En general, ¿podemos afirmar que la estrategia empleada facilitaba al alumno y potenciaba en él su propia autonomía cognitiva?	Considero que tenía una suficiente AUTONOMÍA para desarrollar las actividades de aula			X	X	X	X						X		X	
	Me he sentido dueño de la situación con respecto al programa DERIVE				X	X			X		X		X		X	
	Con DERIVE se simplifican los procesos y eso genera una sensación de autonomía	X											X			
	Es un trabajo continuo más positivo que en clases tradicionales		X													
	DERIVE da la posibilidad de pensar en múltiples posibilidades de forma autónoma	X	X											X		
	Las dudas se han resuelto en clase lo que ha facilitado la aparición de cierta autonomía		X													

Con estos datos también hemos diseñado un diagrama de barras que nos ha facilitado la interpretación de los aspectos característicos de esta cuestión:



A partir del cuadro resumen y de este gráfico podemos deducir los siguientes atributos que caracterizan la cuestión objeto de estudio:

10.1. En los ejemplos de investigación propuestos en el aula, los alumnos han intentado dar respuesta a estas cuestiones en una ACTITUD DE BÚSQUEDA, motivados por el uso de DERIVE, lo cual nos ofrece la idea de que el alumno se sentía con capacidad para intentar algo, un cierto indicio de autonomía cognitiva para afrontar cuestiones de investigación.

10.2. Los ejercicios de manipulación en general han generado satisfacción en los alumnos cuando los resolvían, pues parece que entendían bien los procesos que se introducían con estos ejercicios; aunque no sabemos si esto ha provocado suficiente autonomía cognitiva en el alumno para desarrollarlos de manera autónoma.

10.3. En la resolución de problemas se observa que en general todos los alumnos han encontrado un elevado grado de motivación para resolverlos, intentando por todos los medios resolver muchos problemas por diferentes caminos de resolución, con ayuda de compañeros o solos. Ese elevado grado de motivación puede estar provocado porque el alumno se sentía nuevamente con capacidad y herramientas suficientes para abordar los problemas, pues la herramienta DERIVE les brindaba esa posibilidad, al no quedar inicialmente atascados en los problemas de cálculo.

10.4. Se observa que DERIVE facilita el cálculo pero no ha mermado excesivamente la habilidades básicas , que los alumnos como se observa han sabido desarrollar en su mayoría. De hecho en las cuestiones teóricos, donde DERIVE se convierte en herramienta auxiliar, no ha sido considerado como elemento fundamental.

10.5. Da la sensación de que en general la estrategia empleada sí ha dotado a los alumnos de cierta AUTONOMÍA COGNITIVA para desarrollar las actividades de aula, pues el alumno no se ha sentido dirigido por el programa, DERIVE ha ofrecido la simplificación del cálculo y ha brindado al alumno la posibilidad de indagar sin perderse en las operaciones.

Por lo tanto podemos concluir que la estrategia didáctica, y en particular el uso del programa DERIVE ha ofrecido:

- en los ejemplos a investigar una ACTITUD DE BÚSQUEDA en los alumnos para resolver las cuestiones propuestas.
- en los ejercicios de manipulación SATISFACCIÓN por su resolución
- en los problemas propuestos un INTERÉS ESPECIAL POR RESOLVERLOS con ayuda de DERIVE,
- sin que parezcan haberse anulado las habilidades básicas

Por lo tanto podemos afirmar que efectivamente se ha generado cierta AUTONOMÍA COGNITIVA en el alumno que le ha permitido indagar, experimentar, investigar por su cuenta aunque en ocasiones no llegase a las soluciones definitivas, pero le ha brindado la posibilidad de iniciar un camino muy positivo para el descubrimiento matemático.

CUESTIÓN 11: RELACIÓN DIALÉCTICA

La estrategia didáctica utilizada ¿Favorece la RELACIÓN DIALÉCTICA entre los usuarios?, es decir, ¿Permite establecer una buena comunicación entre los alumnos y entre alumnos y profesor? ¿Cómo es ese tipo de comunicación?.

En esta cuestión pretendemos analizar el tipo de relaciones de comunicación que se han establecido entre los alumnos y entre alumnos y profesor. Se trata de determinar si la estrategia didáctica ha propiciado las relaciones de comunicación entre los alumnos y entre alumnos y profesor y determinar cómo ha sido ese tipo de comunicación que ha tenido lugar a lo largo de la experiencia didáctica.

Para responder a esta cuestión formulamos algunos interrogantes que nos permitirán obtener los ATRIBUTOS característicos de esta cuestión:

11.1. ¿Crees que esta estrategia didáctica ha favorecido las relaciones interpersonales entre los alumnos? Se trata de analizar si efectivamente con esta estrategia se ha favorecido la relación interpersonal entre los alumnos, si las relaciones entre los participantes han ido más allá de las propias clases.

11.2. ¿Cómo ha sido el tipo de comunicación y relación que se ha observado entre los alumnos? ¿De qué hablaban?. Para analizar este interrogante debemos determinar si la comunicación entre alumnos ha sido fluida o no, si ha habido grupitos de relación, y de qué han hablado en las clases, si ha habido tiempo para comentar cosas personales o si se ha reducido todo al tema matemático.

11.3. ¿Ha habido alguna relación especial entre los alumnos antes y después de las clases? Se trata de determinar si las relaciones entre alumnos han ido más allá de las propias clases y determinar en qué medida.

11.4. ¿Cómo ha sido la relación entre alumnos y profesor? ¿Existen diferencias respecto de otras clases? Se trata de analizar como ha sido la relación entre alumnos y profesor, si ha existido una confianza especial, si se han notado diferencias especiales con respecto a la relación que tienen los alumnos con los profesores de otras asignaturas.

11.5. ¿Las relaciones personales han generado un ambiente que ha favorecido la enseñanza y aprendizaje de los contenidos del curso? Para responder a esta cuestión recurrimos únicamente a la opinión del alumnado, es decir, a la valoración que ha tenido el alumnado respecto a esta pregunta, para determinar si hay una opinión generalizada favorable o discrepante con este interrogante.

11.6. ¿Cómo ha sido la valoración general del ambiente que ha provocado nuestra estrategia didáctica?. Se trata de anotar las valoraciones que han realizado los alumnos respecto al ambiente general del curso, y obtener una media de valoración en una escala de 1 a 5.

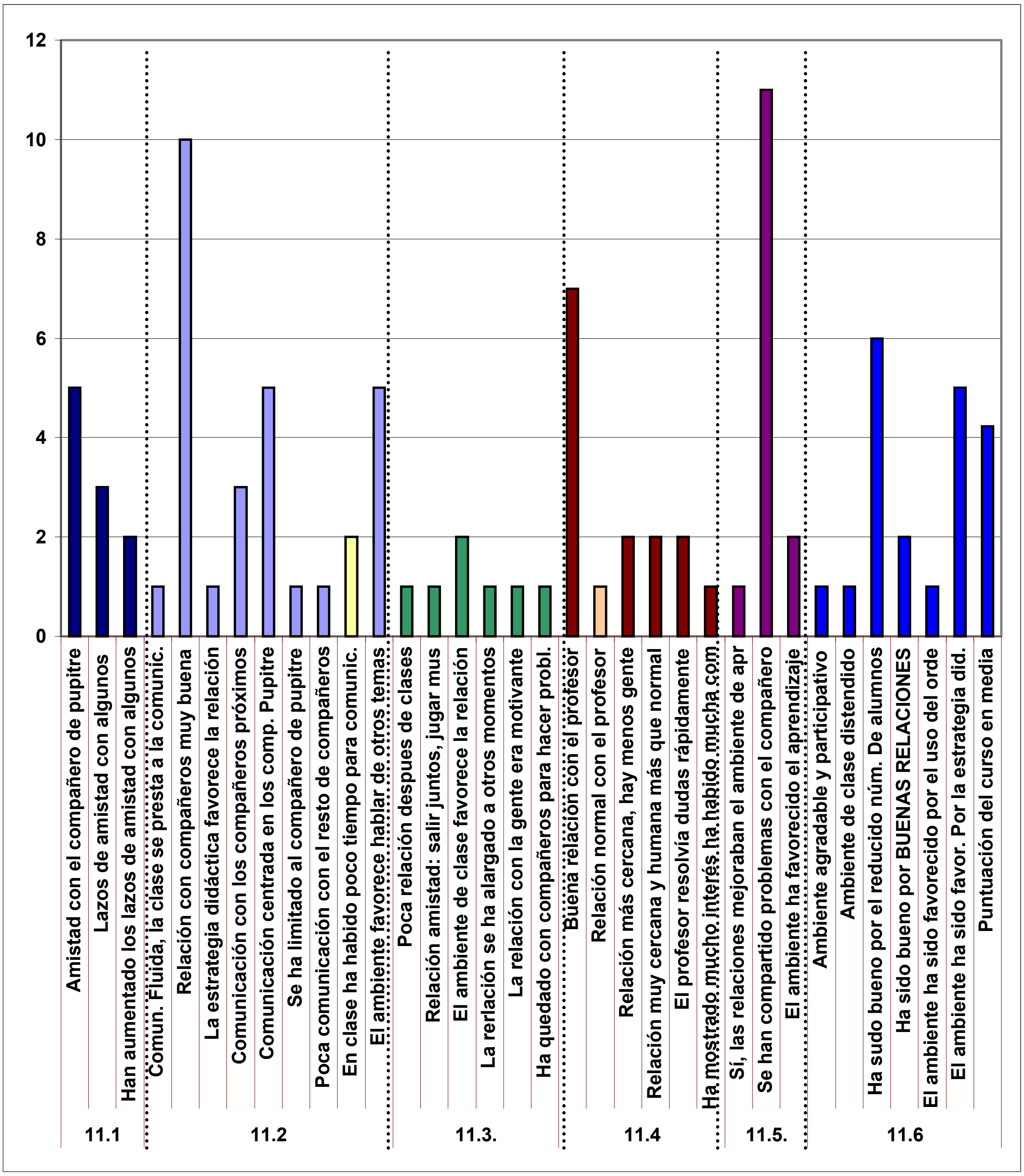
Para contestar estos interrogantes, hemos elaborado como en todas las cuestiones un cuadro resumen a partir de las conclusiones parciales de la cuestión, donde encontramos una serie de elementos característicos que responden a cada uno de los interrogantes y perfilan los atributos de la cuestión (este resumen se puede consultar en el ANEXO XVIII; parte 11).

Para analizar la incidencia de los aspectos característicos de cada atributo podemos considerar el siguiente cuadro en el que se recogen la relevancia de los aspectos característicos al aparecer en cada caso con una X la aparición de dicho aspecto:

CUESTIÓN 11: RELACIÓN DIALÉCTICA																
Aspectos característicos de cada atributo		**CONTESTACIONES EN CASO**														
ATRIBUTOS	**ASPECTOS CARACTERISTICOS**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
11.1. ¿Crees que esta estrategia didáctica ha favorecido las relaciones interpersonales entre los alumnos?	**Con el compañero de pupitre ha conseguido un considerable grado de amistad**		X				X	X	X			X				
	Ha conseguido establecer lazos de amistad con algunos compañeros			X									X	X		
	Ha aumentado los lazos de amistad que había con algunos compañeros de clase				X						X					
11.2. ¿Cómo ha sido el tipo de comunicación y relación que se ha observado entre los alumnos?	**Muy fluida, porque la clase se presta a la comunicación**	X														
	La relación con los compañeros ha sido muy buena y muy distendida			X	X		X		X	X	X	X	X	X	X	
	La estrategia didáctica ha favorecido las relaciones entre alumnos								X							
	La comunicación ha sido básicamente sobre los compañeros más próximos			X							X		X			
	La comunicación se centra sobre todo en el compañero de pupitre	X						X	X			X			X	
	La comunicación se ha LIMITADO al compañero de aula		X													
	Con el resto de compañeros (distintos al compañero de pupitre) ha habido poca comunicación		X													
	En la clase se da poco tiempo a hablar de otra cosa que no sea de Matemáticas	X	X													
	El ambiente ha favorecido que se pudiera hablar de álgebra lineal y otros temas personales				X		X	X			X			X		

ATRIBUTOS	ASPECTOS CARACTERÍSTICOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
11.3. ¿Ha habido alguna relación especial entre los alumnos antes y después de las clases?	**Había poca pues no daba tiempo ya que luego se quedaba después de clase con el ordenador**	X														
	Había una relación de amistad, se jugaba al mus, salir por ahí juntos relación que se mantiene			X												
	Sí ha habido relación favorecido por el ambiente de clase				X						X					
	Sí, la relación se ha alargado a veces a periodos anteriores y posteriores						X									
	Era muy motivante la relación que tenías con la gente									X						
	Ha quedado con compañeros para hacer problemas y ejercicios														X	
11.4. ¿Cómo ha sido la relación entre alumnos y profesor? ¿Existen diferencias respecto de otras clases?	Ha sido una buena relación con el profesor		X	X	X		X		X		X		X			
	La relación con el profesor ha sido normal														X	
	Ha sido una relación mucho más cercana, quizás porque hay mucha menos gente	X											X			
	Ha sido una relación muy cercana y muy humana más que en las clases normales			X									X			
	El profesor pasaba por los pupitres y resolvía las dudas rápidamente	X												X		
	El profesor ha mostrado mucho interés y ha habido mucha comunicación											X				
11.5. ¿Las relaciones personales han generado un ambiente que ha favorecido la enseñanza y aprendizaje de los contenidos del curso	**Si, porque siempre se comentaban los resultados o dudas con el compañero de al lado**	X														
	Casi todos los problemas que he tenido los he compartido con el compañero de pupitre y se contrastaban los resultados	X	X	X		X		X	X		X	X	X	X	X	
	El ambiente del curso ha favorecido el aprendizaje										X				X	
11.6. ¿Cómo ha sido la valoración general del ambiente que ha provocado nuestra estrategia didáctica?	Un ambiente agradable y participativo	X														
	Un ambiente de clase distendido				X											
	El ambiente ha sido bueno por el REDUCIDO NÚMERO DE ALUMNOS		X	X	X		X			X			X			
	El ambiente ha sido bueno por las BUENAS RELACIONES entre los compañeros			X										X		
	El ambiente ha sido favorecido por el uso del ordenador									X						
	El ambiente ha sido favorecido por la estrategia didáctica empleada en el curso		X	X			X		X				X			
	La puntuación del ambiente del curso es 5	X						X		X	X	X				
	La puntuación del ambiente del curso es de 4		X	X			X		X				X	X		
	La puntuación del ambiente del curso es de 3				X	X										

A partir de este cuadro resumen hemos elaborado una diagrama de barras en el que se recogen de forma gráfica los aspectos característicos de esta cuestión que perfilan cada uno de los 6 atributos que hemos estudiado. La gráfica que hemos obtenido es la siguiente:



A la vista del cuadro resumen y el diagrama anterior podemos obtener los siguientes atributos que definen la cuestión objeto de estudio:

11.1. La estrategia ha favorecido las relaciones interpersonales entre los alumnos ya que se han conseguido establecer lazos de amistad entre los alumnos, sobre todo entre los alumnos que han compartido pupitre.

11.2. El tipo de comunicación entre los alumnos ha sido muy buena y muy distendida de forma generalizada. Esta comunicación se ha centrado básicamente en los compañeros de pupitre o del entorno de trabajo, además en estas comunicaciones además de hablar de los contenidos y problemas de álgebra lineal, el ambiente ha propiciado hablar de temas más personales.

11.3. Se observan algunas relaciones entre los alumnos antes y después de las clases.

11.4. La relación entre alumnos y profesor ha sido una relación buena, más cercana que en clases habituales, ya que el profesor era más accesible, y además resolvía las dudas al instante.

11.5. Las relaciones que han tenido los alumnos han estado muy relacionadas con la resolución de dudas y contrastes de resultados que se han desarrollado a lo largo del curso.

11.6. El ambiente del curso ha sido muy positivo, globalmente (con una puntuación media de 4 sobre 5) , debido básicamente a tres razones: el reducido número de alumnos, las situaciones que ha propiciado la estrategia didáctica y las interrelaciones de alumnos.

Partiendo de estos atributos que caracterizan a la cuestión que estamos estudiando podemos finalizar diciendo que la estrategia didáctica ha favorecido las RELACIONES DIALÉCTICAS entre los alumnos y entre alumnos y profesor.

Entre los alumnos porque se ha constatado que:

- se han potenciado relaciones interpersonales más intensas entre los alumnos sobre todo los que han compartido pupitre,
- el tipo de comunicación de los alumnos ha sido muy distendida y muy positiva centrada en el contraste de resultados de los contenidos del programa y otros temas personales,
- han existido relaciones entre alumnos antes y después de las clases.

Entre el profesor y los alumnos también han existido unas buenas relaciones dialécticas, con mayor cercanía del profesor al alumno, lo cual ha permitido resolver las dudas según se iban generando. .

Estas relaciones dialécticas además han sido uno de los factores que han generado un ambiente sumamente positivo en el curso. Aunque uno de las razones de estas buenas relaciones dialécticas ha sido fundamentado el reducido número de alumnos, factor que evidentemente ha redundado positivamente en el ambiente general del curso, sin embargo la estrategia didáctica también ha sido un factor fundamental pues ha permitido esas comunicaciones entre alumnos que han favorecido la colaboración y por otro lado esa comunicación más directa entre alumnos y profesor. Esta estrategia didáctica basada en experimentación y descubrimiento unido al uso del ordenador ha favorecido y propiciado este tipo de ambiente que no generan una rigidez propia de las clases tradicionales, y proporcionan una excusa evidente para colaborar en clase, crear un clima distendido de comunicación entre alumnos, y alumnos y profesor para compartir, discutir y contrastar los descubrimientos y logros que se van obteniendo.

CUESTIÓN 12: APRENDIZAJE COLABORATIVO.

La estrategia didáctica que hemos desarrollado ¿favorece una APRENDIZAJE COLABORATIVO entre los alumnos?.

En esta cuestión tratamos de analizar si la estrategia didáctica que hemos diseñado permite la aparición del llamado APRENDIZAJE COLABORATIVO o APRENDIZAJE COOPERATIVO, aprendizaje que surge del trabajo en grupo, del contraste, comunicación y transferencia de opiniones de unos alumnos a otros, y que tiene una incidencia claramente positiva en los procesos de aprendizaje del alumnado.

Para estudiar esta cuestión, vamos a plantear una serie de interrogantes que perfilen a modo de ATRIBUTOS las características básicas de nuestra cuestión. Consideraremos los siguientes interrogantes:

12.1. ¿Cuál es la actitud del alumno ante el trabajo en grupo? Se trataría de saber si los alumnos tienen una predisposición positiva hacia el trabajo en grupo, si existe una actitud de apertura positiva al trabajo en grupo, que sin duda es el elemento central del aprendizaje colaborativo.

12.2. El tipo de trabajo en grupo que se ha desarrollado en clase ¿crees que ha favorecido el aprendizaje de los contenidos del curso? . Se trata de determinar si el estilo de trabajo en grupo, básicamente un trabajo por parejas, que ha tenido lugar en nuestras clases ha favorecido el aprendizaje por parte de los alumnos, al permitir un feedback entre los alumnos a nivel de dudas, descubrimientos o supuestos tanto del manejo del ordenador como, básicamente, de los contenidos de álgebra lineal.

12.3. ¿Crees que el uso de este programa de ordenador, ha propiciado un TIPO DE COLABORACION ESPECIAL entre los compañeros?. Con esta cuestión tratamos de determinar si el programa DERIVE ha sido un programa que ha facilitado la colaboración entre los alumnos, colaboración que por otro lado se convierte en ESPECIAL porque permite generar un ambiente de colaboración en torno al ordenador.

12.4. ¿Crees que las colaboraciones que se han desarrollado, han favorecido las relaciones personales que había entre los alumnos, y entre alumno y profesor? Se trata de determinar si esa colaboración ha favorecido esas relaciones personales entre alumnos y entre alumnos y profesor, generando así un de colaboración positivo.

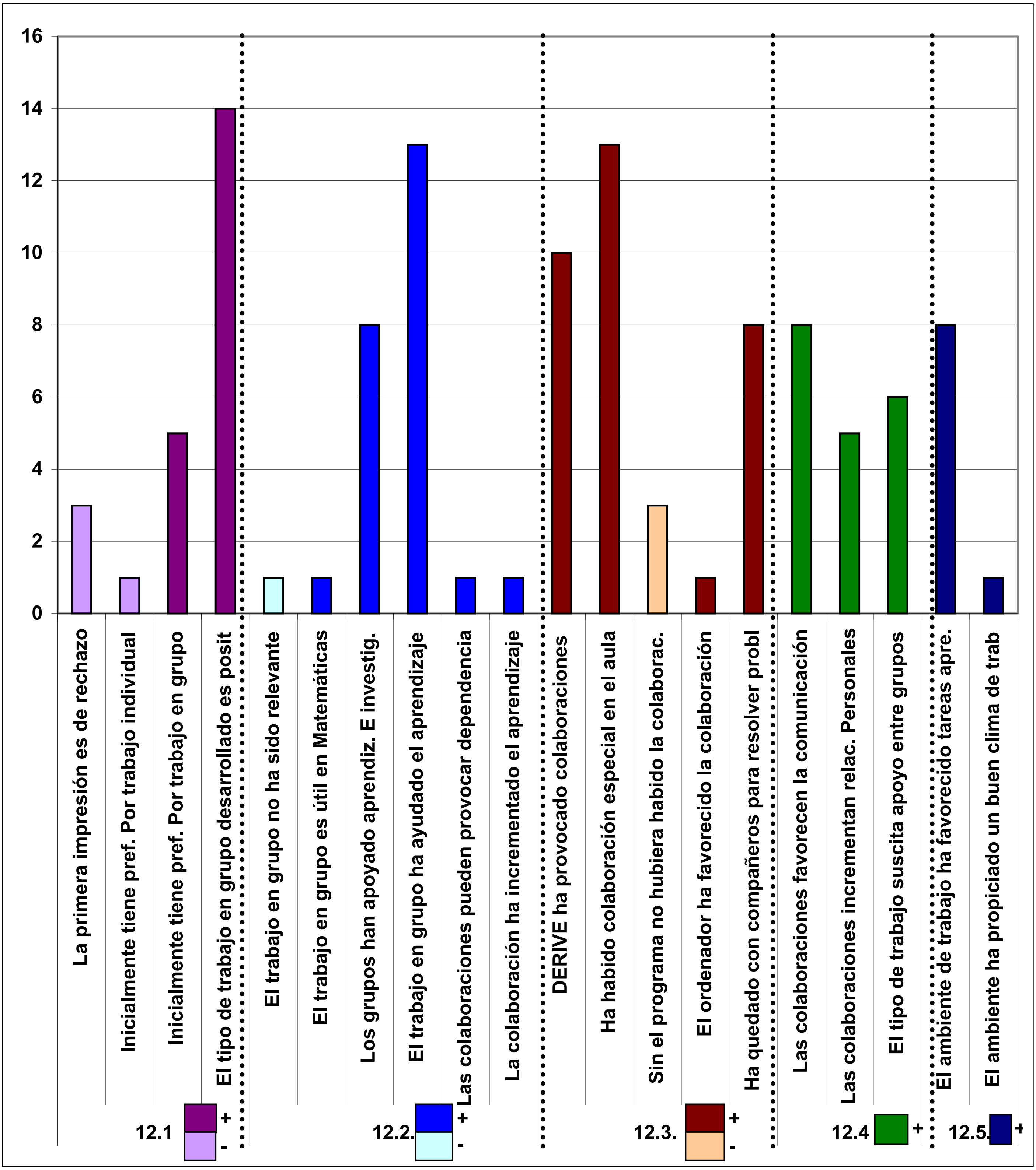
12.5. ¿Crees que el ambiente general ha favorecido la aparición de aprendizajes colaborativos? Con este interrogante tratamos de determinar si el ambiente general del curso, en el que intervienen factores externos como la disposición de los pupitres, el entorno físico, el horario, y todos los demás factores como son las relaciones; todo ese conjunto si ha favorecido esas colaboraciones de aprendizaje.

Para analizar estos interrogantes y obtener aspectos característicos de cada uno de ellos vamos a analizar los datos recogidos y encuadrar las diferentes observaciones dentro de los interrogantes que hemos planteado. Con este análisis hemos obtenido un resumen de datos que se puede consultar en el ANEXO XVIII, parte 12, a partir del cual hemos elaborado la siguiente tabla de resumen, en el que podemos observar con mayor claridad la incidencia de cada uno de los aspectos característicos sobre los casos de la investigación, para así determinar la generalidad de los aspectos y perfilar los atributos de la cuestión. El cuadro que hemos obtenido ha sido el siguiente:

CUESTIÓN 12:

Aspectos característicos de cada atributo		CONTESTACIONES EN CASO														
ATRIBUTOS	**ASPECTOS CARACTERISTICOS**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
12.1. ¿Cuál es la actitud del alumno ante el trabajo en grupo?	La primera impresión es de rechazo	X		X								X				
	Inicialmente tiene preferencia por el trabajo individual		X													
	Inicialmente tiene preferencia por el trabajo en grupo					X				X	X			X	X	
	El tipo de trabajo desarrollado ha sido muy bueno	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
12.2. El tipo de trabajo en grupo que se ha desarrollado en clase ¿crees que ha favorecido el aprendizaje de los contenidos del curso?	El trabajo en grupo no ha sido especialmente relevante									X						
	El trabajo en grupo es muy util en Matemáticas												X			
	Las parejas de trabajo han apoyado y guiado las manipulaciones con el ordenador y las investigaciones	X	X	X				X			X		X	X	X	
	El trabajo en grupo ha ayudado a aprender los conceptos de álgebra lineal	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X	
	Las colaboraciones pueden provocar ciertas dependencias de compañeros					X										
	Las colaboraciones han incrementado el aprendizaje en Matemáticas												X			
12.3. ¿Crees que el uso de este programa de ordenador ha propiciado un TIPO DE COLABORACIÓN ESPECIAL entre los compañeros?	El uso de DERIVE ha provocado una colaboración entre los compañeros en cuanto a comprobaciones, dudas y contraste de resultados	X	X			X	X	X	X	X	X	X	X			
	Ha habido una COLABORACIÓN ESPECIAL porque se comentan todos los resultados con el compañero	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
	Sin el uso del programa no se hubiera suscitado este tipo de colaboración		X										X	X		
	El ordenador ha sido una herramienta que ha favorecido la colaboración										X					
	Ha quedado con los compañeros para resolver problemas, o el examen final y ha tenido una experiencia positiva			X		X		X	X		X		X	X	X	
12.4. ¿Crees que las colaboraciones que se han desarrollado, han favorecido las RELACIONES PERSONALES que había entre los alumnos, y entre alumno y profesor?	Estas colaboraciones favorecen una comunicación fluida entre los compañeros, con los que se puede comentar y preguntar los resultados	X		X		X	X			X	X	X			X	
	Las colaboraciones han incrementado las relaciones personales entre compañeros					X			X				X	X	X	
	Con este trabajo se observa un apoyo entre los grupos de trabajo	X	X	X	X	X						X				
12.5. ¿Crees que el ambiente general ha favorecido la aparición de aprendizajes colaborativos?	La resolución de cuestiones, ejercicios y problemas en parejas de trabajo ha sido favorecida por el ambiente que ha proporcionado el ordenador	X				X	X		X		X	X	X	X		
	El ambiente de la clase ha propiciado un clima de trabajo que contagiaba interés y daba motivación				X											

Como en cuestiones anteriores, a partir de este cuadro hemos elaborado también un diagrama de barras a fin de facilitar la interpretación de los datos de una manera más sencilla. El gráfico obtenido es el siguiente:



A la vista de este resumen podemos observar los aspectos característicos que más incidencia han tenido, y que por tanto nos pueden definir las características de los ATRIBUTOS que perfilan la categoría que responde a nuestra cuestión, y son los siguientes:

12.1. Aunque al principio la actitud de algunos alumnos era de rechazo al trabajo en grupo, después de haber realizado el tipo de trabajo en grupo que se proponía en el aula se ha conseguido una opinión positiva hacia este tipo de metodología que ha favorecido claramente la aparición de colaboración entre los alumnos.

12.2. Es claro que el tipo de trabajo en grupo, a juicio de los alumnos ha favorecido y ha ayudado a aprender los conceptos del álgebra lineal; también ha servido de apoyo para las manipulaciones que iban realizando los alumnos con el ordenador: Es de destacar la opinión de un alumno que ha considerado que este tipo de trabajo y colaboración ha podido generar cierta dependencia entre el alumno y su grupo de trabajo o pareja de trabajo.

12.3. El programa DERIVE y el tipo de uso que proponía nuestra estrategia didáctica del programa ha propiciado una colaboración especial entre los compañeros, ya que ha permitido una comunicación entre los grupos de trabajo en lo relacionado con los desarrollos de las clases: comprobación y contraste de resultados, comentario y consulta de dudas y debates en torno a la forma de resolver problemas. En particular debemos destacar que el programa DERIVE ha sido responsable de este tipo de colaboraciones, que han ido más allá del aula, ya que muchos alumnos han quedado para resolver problemas fuera del aula.

12.4. Las colaboraciones que se han desarrollado han favorecido las relaciones personales, pues se ha obtenido una comunicación muy fluida entre los compañeros así como un apoyo entre los grupos de trabajo.

12.5. La resolución de cuestiones, ejercicios y problemas en parejas o grupos de trabajo ha sido favorecida por el ambiente que ha proporcionado el ordenador, por lo que podemos decir que el ambiente generado ha favorecido la aparición de aprendizajes colaborativos.

Por tanto podemos decir que a pesar de que ha existido inicialmente en algunos alumnos cierto rechazo al trabajo en grupo, con nuestra estrategia didáctica el tipo de trabajo en grupo ha merecido una opinión positiva al alumnado porque:

- ha ayudado a aprender los conceptos de álgebra lineal
- y ha servido de apoyo en las manipulaciones con el programa

Se han provocado por tanto colaboraciones entre los alumnos que han sido favorecidas enormemente por la forma de uso del programa DERIVE, propiciando una una

COLABORACION ESPECIAL entre los alumnos en lo relacionado con la comprobación y contraste de resultados, comentarios y consultas de dudas. Así pues, DERIVE ha sido un factor muy importante para crear este ambiente de colaboración. Esta colaboración ha provocado la adquisición de aprendizajes colaborativos, pro también ha sido muy positivo para las relaciones personales entre los alumnos, sobre todo por el grado de comunicación que ha permitido, construyendo de esta forma un ambiente en el aula de auténtica COOPERACIÓN Y COLABORACIÓN para la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal.

Así pues podemos concluir que nuestra estrategia apoyada en el uso del programa DERIVE ha propiciado un estilo de aprendizaje en el que el elemento social ha intervenido de forma decisiva en la construcción de aprendizajes colaborativos entre los alumnos.

CUESTIÓN 13: ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD.

La estrategia didáctica empleada ¿favorece una adecuada ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD, ofreciendo varios niveles de aprendizaje?.

Con esta cuestión tratamos de analizar si la estrategia didáctica que hemos propuesto ha permitido una atención adecuada a los diversos niveles de aprendizaje existentes en el aula, de tal forma que ha existido la posibilidad de ofrecer materiales específicos para los alumnos más avanzados y actividades a los alumnos más retrasados sin que esta circunstancia haya provocado situaciones de aburrimiento en unos y desconexión por parte de otros.

Para contestar a esta cuestión hemos planteado algunos interrogantes que nos pueden ofrecer diferentes ATRIBUTOS característicos que perfilen adecuadamente la forma en que se ha tratado la atención a la diversidad. En cada atributo podemos incluir varios aspectos característicos que nos permitirán más adelante construir el atributo que contesta cada interrogante. Los interrogantes que hemos planteado son los siguientes:

13.1. El ritmo que hemos llevado en clase ¿cómo ha sido? ¿rápido, lento, normal?. Con esta cuestión se trata de determinar si el ritmo de la clase se ha ido adaptando a los ritmos de aprendizaje de cada uno de los alumnos. El análisis de este interrogante pasa por analizar las respuestas subjetivas de cada uno de los alumnos en relación a este tema.

13.2. Haciendo un balance general de las sesiones de clase ¿la dinámica empleada en clase ha podido generar algún aburrimiento en el alumnado, o por el contrario ha provocado que el alumno se pierda? . Tratamos de estudiar si a partir de las contestaciones de los alumnos, se han podido producir situaciones de aburrimiento de forma generalizada, y en caso de producirse si ha sido motivada por la dinámica de la clase o por otros factores. Del mismo modo tratamos de analizar si algún alumno se ha encontrado perdido en las sesiones y los motivos que han generado esa pérdida.

13.3. A la vista de las observaciones realizadas en clase ¿ha habido varios niveles de aprendizaje?. Se trata de determinar si en la clase había varios niveles de aprendizaje, o si por el contrario era un grupo homogéneo. Las opiniones propias del alumnado también son muy importantes.

13.4. Los problemas planteados ¿se podían clasificar en varios niveles de dificultad?¿han provocado interés?. Se trata de analizar si los problemas que se plantearon al finalizar cada capítulo se han ido adaptando a los niveles de aprendizajes de cada uno, si han motivado realmente hacia la resolución de problemas o por el contrario han provocado desgana.

13.5. Las diferentes actividades que se han propuesto: ejemplos de investigación, ejercicios de manipulación, cuestiones teóricas... ¿permitían una adecuada atención a la diversidad en cuanto a los niveles de aprendizaje?.. Con este interrogante pretendemos analizar si las actividades de la clase han permitido realizar adaptaciones para los diferentes niveles de aprendizaje del alumnado.

13.6. El profesor ¿ha tratado adecuadamente la diversidad?. Se trataría de determinar como ha sido el tratamiento que ha hecho el profesor de la diversidad, si ha habido trato preferencial con algunos alumnos, cómo se han resuelto las dudas.

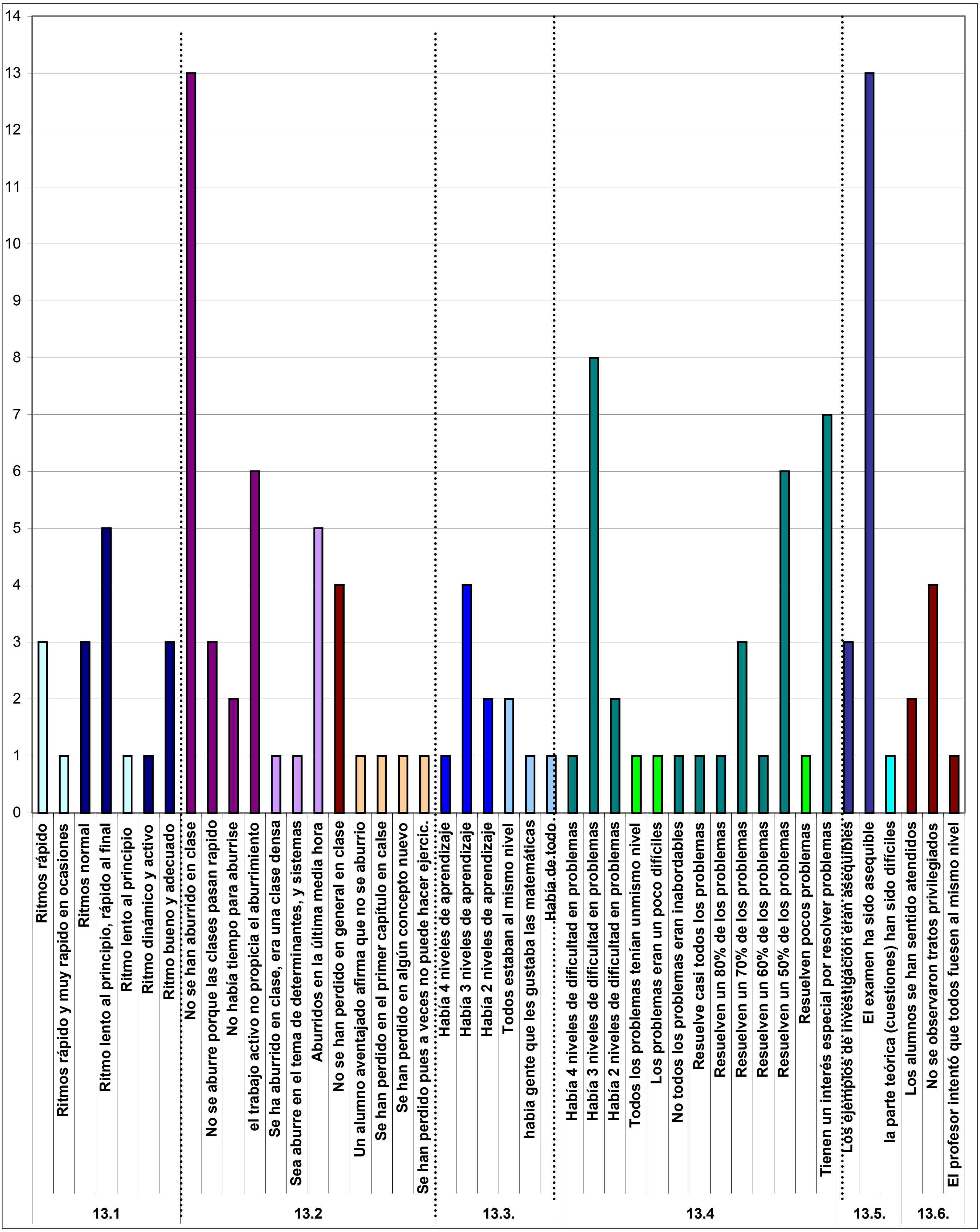
Una vez propuestos los perfiles o interrogantes que nos indicarán los atributos característicos de esta cuestión entramos ahora en el proceso de análisis de datos. En este proceso anotamos los diferentes aspectos característicos que contestaban a cada uno de los interrogantes indicando claramente el dato que refleja la afirmación y el caso en el que se verifica, construyendo el resumen de datos que se pueden consultar en el ANEXO XVIII, parte 13. A partir de estos datos elaboramos como en el resto de cuestiones anteriores un cuadro en el que situamos los diferentes atributos y elementos característicos de cada atributo así como la incidencia de estos elementos característicos en cada uno de los casos (marcamos con X) y obtuvimos el siguiente cuadro:

CUESTIÓN 13: ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Aspectos característicos de cada atributo		CONTESTACIONES EN CASO														
ATRIBUTOS	**ASPECTOS CARACTERISTICOS**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
13.1. El ritmo que hemos llevado en clase ¿cómo ha sido?	El ritmo ha sido más bien RÁPIDO	x				X	X									
	El ritmo ha sido RAPIDO y muy rápido en algunas ocasiones														X	
	El. ritmo ha sido VARIABLE, LENTO al principio y RAPIDO al final	X	X						X			X		X		
	Al final un ritmo un poco AGOBIANTE													X		
	El ritmo de las clases ha sido NORMAL tirando a RAPIDO			X												
	El ritmo ha sido NORMAL y se paraba en caso de dudas				X					X						
	El ritmo ha sido dinámico y activo, se trabaja continuamente					X		X								
	El ritmo de la clase ha sido LENTO al principio										X					
	El ritmo de la clase ha sido bueno y adecuado											X	X		X	
13.2. Haciendo un balance general de las sesiones, ¿la dinámica empleada ha podido generar algún aburrimiento en el alumnado o por el contrario ha provocado que el alumno se pierda en las clases?	El alumno NO SE HA ABURRIDO en las clases	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
	Uno de los alumnos más aventajados afirma que no se ha encontrado perdido												X			
	Los motivos por los que no se han aburrido han sido variados:															
	- se han pasado las clases rápido	X		X			X									
	- no había tiempo para aburrirse		X									X				
	- era un trabajo activo que no propiciaba el aburrimiento		X		X	X		X	X			X				
	El alumno NO SE HA ABURRIDO en las clases solo la ÚLTIMA MEDIA HORA			X	X				X					X	X	
	Se ha ABURRIDO porque se hace muy densa la clase														X	
	Se ha aburrido en el tema de determinantes y sistemas porque los dominaba										X					
	El alumno se ha encontrado perdido en las clases en el primer capítulo	X														
	No se ha encontrado perdido en las clases		X	X	X								X			
	Si faltaba algún día el día siguiente estaba perdida													X		
	En algún concepto nuevo se ha encontrado perdida													X		
	Me he encontrado perdida porque a veces no me da tiempo acabar los ejercicios														X	
13.3. A la vista de las observaciones ¿ha habido varios niveles de aprendizaje?	Habia 4 NIVELES DE APRENDIZAJE			X												
	Había 3 NIVELES DE APRENDIZAJE				X			X			X	X				
	Había 2 NIVELES DE APRENDIZAJE	X							X							
	No había distintos niveles todos estaban al MISMO NIVEL>						X			X						
	No tiene una valoración		X			X										
	Había gente a la que le gustan las Matemáticas y gente a la que no													X		
	Sí, había varios niveles, había de todo												X			

13.4. Los problemas planteados ¿se podían clasificar en varios niveles de dificultad? ¿han provocado interés?	Se podían clasificar en 3 NIVELES				X	X	X	X			X	X	X	X		
	Se podían clasificar en 2 NIVELES	X								X						
	Todos los problemas eran parecidos con una dificultad relativa		X													
	Los problemas eran un poco difíciles														X	
	Los problemas no eran todos inabordables								X							
	Se podían clasificar en 4 niveles			X												
	Ha resuelto pocos problemas						X									
	Ha resuelto un 50% de problemas	X			X			X	X	X		X				
	Ha resuelto un 60%					X										
	Ha resuelto un 70%			X							X			X		
	Ha resuelto un 80%		X													
	Ha resuelto casi todos												X			
	Los problemas han suscitado un INTERES ESPECIAL por su resolución una especie de "gusanillos"	X			X	X	X		X		X		X			
13.5. Las diferentes actividades ¿permitían una adecuada atención a la diversidad en cuanto a los niveles de aprendizaje?	Los ejemplos de investigación eran asequibles			X							X	X				
	El examen ha sido asequible para todos	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
	La parte teórica del examen ha sido difícil					X										
13.6. El profesor ¿ha tratado adecuadamenta la diversidad?	Los alumnos se han sentido totalmente atendidos en las dudas que iban teniendo	X						X								
	No consideran que nadie tuviera un trato privilegiado, todos han tenido un trato similar						X			X			X	X		
	El profesor ha intentado que todos fuesen al mismo nivel												X			

A la vista de este cuadro y para facilitar el análisis elaboramos un diagrama de barras con los diferentes aspectos significativos asociados a los diferentes atributos que mostramos a continuación:



Del cuadro y el gráfico que acabamos de elaborar podemos extraer los siguientes atributos característicos:

13.1. El ritmo que se ha llevado en la clase ha sido variable, parece que al principio ha sido un poco más lento y luego a medida que iban avanzando el curso se ha tornado más rápido. Ha sido un ritmo dinámico, activo en general.

13.2. Los alumnos NO SE HAN ABURRIDO en las clases, incluso uno de los alumnos más aventajados afirma que nunca se ha aburrido. Entre los motivos por los que no se han aburrido podemos decir que se deben a que ha habido mucha actividad en las clases que impedía que apareciera el aburrimiento, y debe haber sido un conjunto de actividades en las que en general el alumnado no se ha encontrado perdido, salvo en temas muy puntuales, porque había faltado la clase anterior o por conceptos nuevos. Por otro lado los únicos momentos de aburrimiento han surgido al finalizar las clases en la última media hora por motivos de cansancio.

13.3. A juicio de los alumnos parece claro que había varios niveles de aprendizaje.

13.4. Los problemas planteados se podían clasificar también en varios niveles de aprendizaje, de los que los alumnos afirman haber resuelto al menos un 50%, suscitando todos ellos en general un interés especial por su resolución.

13.5. El examen final ha sido asequible a juicio unánime de todos los alumnos

13.6. El trato que ha dado el profesor de la diversidad, no ha generado privilegios a unos alumnos sobre otros y parece que se han ido atendiendo las dudas.

De todos estos atributos podemos finalizar afirmando que la estrategia didáctica empleada ha favorecido la ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD porque tal como hemos afirmado:

- el ritmo de las clases ha sido variable, desde un ritmo lento al principio a un ritmo más rápido al final, ha sido en general un ritmo ACTIVO Y DINÁMICO:
- los alumnos no se han aburrido en las clases de forma generalizada, y podemos decir que tampoco se han encontrado perdidos
- había varios niveles de aprendizaje sobre los que se han ido proponiendo diferentes niveles de dificultad de problemas de los que los alumnos han resuelto al menos un 50%.
- el examen ha sido asequible globalmente a todos los alumnos

Así, pues efectivamente la estrategia didáctica ha permitido realizar una atención a la diversidad adecuada.

CUESTIÓN 14: MOTIVACIÓN

La estrategia didáctica que hemos utilizado ¿ha generado una MOTIVACIÓN especial entre el alumnado por el álgebra lineal?.

En esta cuestión tratamos de analizar si la estrategia didáctica ha provocado en el alumnado un grado de MOTIVACIÓN significativo en el desarrollo de toda la asignatura. Para analizar esta circunstancia nos será útil contestar a los siguientes interrogantes:

14.1. ¿Cómo era la actitud inicial ante las mátemáticas, ante el álgebra lineal y ante los ordenadores?. Se trata de determinar que actitud había inicialmente en el alumnado antes las Matemáticas en general y ante los ordenadores para luego establecer comparación con la actitud final y observar si ha habido realmente motivación.

14.2. Haciendo un balance general del curso ¿cómo han resultado las clases, larga, cortas,... se han pasado rápidamente? Se trata de analizar si las clases han resultado corta o largas, indicador muy significativo de motivación, ya que si el alumno estaba motivado lo normal es que las clases se hayan pasado rápidamente, circunstancia que no sucede si el alumno no ha estado motivado.

14.3. El hecho de utilizar el ordenador y especial el programa DERIVE ¿ha motivado especialmente a los alumnos para estudiar Matemáticas? ¿por qué?. Se trata de determinar si el uso del programa DERIVE ha sido un factor importante en la motivación del alumnado. Además pretendemos obtener los motivos por los que el uso de DERIVE ha sido un elemento de motivación. Este aspecto es muy importante pues hay una corriente que pretende justificar la motivación que produce la introducción de las nuevas tecnologías en el aula, por el elemento NOVEDAD. Por ello debemos intentar determinar si existen causas que realmente hayan provocado la motivación, diferentes a ese factor novedad que hemos comentado.

14.4. La metodología que hemos empleado ¿ha aumentado o disminuido el interés por las Matemáticas? ¿cuáles pueden ser los motivos?. Para contestar a esta pregunta debemos analizar si a juicio del alumno el interés por las Matemáticas, y en especial por el álgebra lineal, ha aumentado con la realización de este curso, intentando detectar los motivos que avalan este juicio.

14.5.¿Cuánto ha sido el tiempo que ha dedicado el alumno semanalmente a la asignatura?. Con las contestaciones de los alumnos podemos obtener un promedio de horas semanales dedicadas a la asignatura que no dan un indicador del grado de motivación que ha suscitado la metodología.

14.6. ¿Qué valoración merece este curso?. Una valoración de los alumnos sobre todo el curso nos puede indicar también el grado de aceptación y agrado del alumnado hacia el curso.

14.7. ¿El alumno volvería a elegir este grupo experimental? Se trata de analizar si de forma general los alumnos volverían a elegir este grupo, factor que nuevamente es un indicador importante a la hora de estudiar el grado de motivación del alumnado.

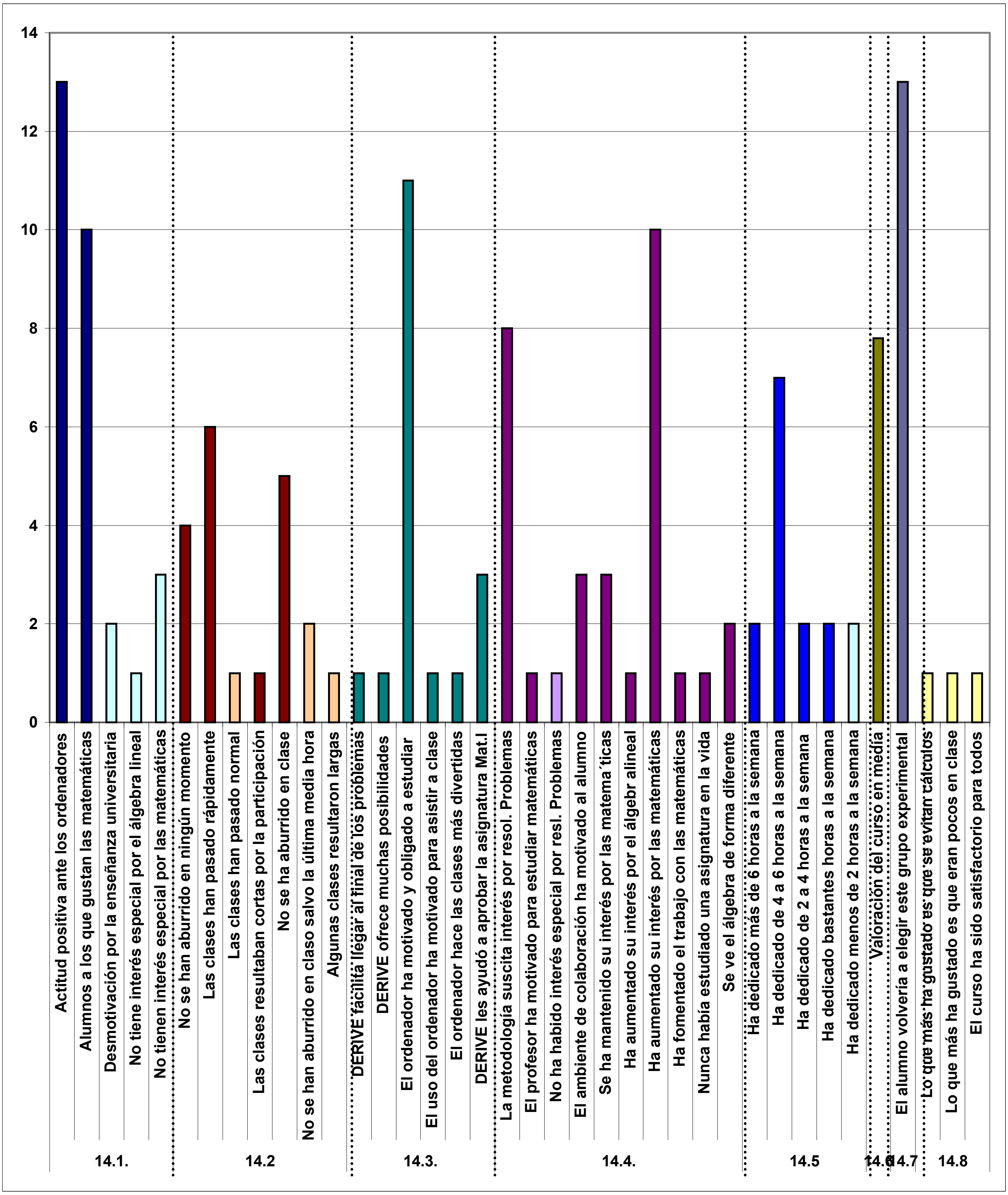
14.8. ¿Cómo ha sido la motivación que ha suscitado el curso en el alumnado? Se trataría de analizar la valoración que tiene el grado de MOTIVACIÓN que ha provocado el curso en el alumnado.

Para analizar estos interrogantes, vamos a examinar los elementos significativos de todos los datos obtenidos, para encontrar así los aspectos característicos de cada uno de los interrogantes y configurar así un ATRIBUTO que determina la cuestión objeto de estudio. El resumen de los diferentes atributos de la cuestión se puede encontrar en el ANEXO XVIII; parte 14. A partir de este resumen hemos elaborado un cuadro resumen que contienen los aspectos característicos que hemos encontrado en cada uno de los interrogantes que hemos propuesto, indicando con una X si ese aspecto se ha verificado en cada uno de los casos. El cuadro que hemos obtenido s el siguiente:

CUESTIÓN 14:MOTIVACIÓN.																
Aspectos característicos de cada atributo		**CONTESTACIONES EN CASO**														
ATRIBUTOS	**ASPECTOS CARACTERISTICOS**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
14.1. ¿Cómo era la actitud inicial ante las Matemáticas, ante el álgebra lineal y ante los ordenadores?	Actitud positiva ante los ordenadores	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	
	Le gustan las Matemáticas		X	X	X	X		X	X	X		X	X	X		
	Tenía cierta desmotivación con la enseñanza universitaria											X			X	
	No tiene interés especial ante el álgebra lineal				X											
	No tiene interés especial por las Matemáticas						X								X	X
ATRIBUTOS	**ASPECTOS CARACTERÍSTICOS**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
14.2.Haciendo un balance general del curso ¿cómo han resultado las clases largas, cortas,... se han pasado rápidamente?	No se ha aburrido en ningún momento y las clases han pasado rápidamente	X						X	X			X				
	Las clases han pasado rápidamente		X			X	X				X		X	X		
	Las clases han pasado normal				X											
	Las clases han resultado cortas porque eran muy participativas				X											
	No se ha aburrido en clase	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
	No se ha aburrido en clase salvo al final la última media hora por cansancio			X					X					X	X	
	Algunas clases han resultado largas porque eran de dos horas									X						
14.3. El hecho de utilizar el ordenador y en especial el programa DERIVE ¿ha motivado especialmente a los alumnos para estudiar Matemáticas?	Al utilizar el programa DERIVE, los cálculos se realizaban rápidamente lo cual permitía que el alumno llegase hasta el final de los problemas	X														
	Lo que más ha gustado son las POSIBILIDADES QUE OFRECE DERIVE de hacer cosas que antes no se podían hacer	X														
	El haber utilizado el ordenador le ha MOTIVADO Y OBLIGADO a estudiar las Matemáticas		X	X	X	X	X		X							
	El haber utilizado el ordenador ha motivado a estudiar las Matemáticas									X	X	X	X	X		
	El hecho de utilizar el ordenador me ha motivado bastante para ASISTIR a clase									X						
	El haber utilizado el ordenador hace más divertidas las clases y más amenas por ser algo nuevo y porque me gustan los ordenadores							X								
	El haber usado el programa ha permitido y ayudado a aprobar la asignatura Matemáticas I en septiembre						X	X						X		

ATRIBUTO	ASPECTOS CARACTERÍSTICOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
14.4. La metodología que hemos empleado ¿ha aumentado o disminuido el interés por las Matemáticas? ¿cuáles pueden ser los motivos?	La metodología ha suscitado un interés especial y una motivación especial por la RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	X	X	X			X		X		X	X	X			
	El profesor ha motivado bastante para estudiar Matemáticas											X				
	En la resolución de problemas no ha tenido un interés excesivo				X											
	El ambiente de colaboración ha motivado bastante al alumno								X			X	X			
	Se ha mantenido su interés por las Matemáticas		X			X				X						
	Ha aumentado su interés por el álgebra lineal porque ahora se observan los resultados	X							X							
	Ha aumentado el interés por el álgebra lineal porque cuando se aprenden las cosas entonces gustan más y motiva más	X														
	Ha aumentado el interés por las Matemáticas, en el primer cuatrimestre llegó a aborrecerlas			X												
	En general ha aumentado su inte´res por las Matemáticas						X	X	X		X	X	X	X	X	
	Ha aumentado su interés por las Matemáticas, y la forma de tratar las Matemáticas ha resultado bonita								X							
	Ha fomentado que trabajase más con las Matemáticas		X													
	Nunca había estudiado tanto una asignatura en la vida		X													
	Me ha gustado mucho porque ves el álgebra lineal de una manera diferente	X							X							
	La dinámica de clase obligaba a estar en situación activa obligando a pensar y eso motiva bastante					X		X								
ATRIBUTO	**ASPECTOS CARACTERÍSTICOS**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
14.5. ¿cuánto ha sido el tiempo dedicado por el alumno semanalmente a la asignatura	Se indican las horas dedicadas por cada caso +: muchas horas -: poco tiempo	+	4 a 6	3 a 8	5	2	10	4	6	-	3 a 6	3 a 4	4 a 5	4 a 5	+	
14.6. ¿Qué valoración merece este curso?	Se indican las diferentes valoraciones sobre una escala de 1 a 10 + : valoración positiva		8,5	7,5	10		7,5		7,5		7	+	7		8,5	
14.7. ¿El alumno volvería a elegir este grupo experimental?	Con total seguridad	X	X	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X	X	
14.8 ¿Cómo ha sido la motivación que ha suscitado el curso en el alumnado?	Lo que más ha gustado del curso es que se evitan los cálculos mecánicos y se da la posibilidad de interpretar								X							
	Lo que más ha gustado del curso es que éramos pocos										X					
	El curso ha sido muy satisfactorio para todos										X					

Para facilitar el análisis, como en el resto de cuestiones elaboramos el siguiente gráfico que nos muestra los índices de cada aspectos característico en un diagrama de barras:



14
12
10
8
6
4
2
0
Actitud positiva ante los ordenadores
Alumnos a los que gustan las matemáticas
Desmotivación por la enseñanza universitaria
No tiene interés especial por el álgebra lineal
No tienen interés especial por las matemáticas
No se han aburrido en ningún momento
Las clases han pasado rápidamente
Las clases han pasado normal
Las clases resultaban cortas por la participación
No se ha aburrido en clase
No se han aburrido en claso salvo la última media hora
Algunas clases resultaron largas
DERIVE facilita llegar al final de los problemas
DERIVE ofrece muchas posibilidades
El ordenador ha motivado y obligado a estudiar
El uso del ordenador ha motivado para asistir a clase
El ordenador hace las clases más divertidas
DERIVE les ayudó a aprobar la asignatura Mat.I
La metodología suscita interés por resol. Problemas
El profesor ha motivado para estudiar matemáticas
No ha habido interés especial por resl. Problemas
El ambiente de colaboración ha motivado al alumno
Se ha mantenido su interés por las matema´ticas
Ha aumentado su interés por el álgebr alineal
Ha aumentado su interés por las matemáticas
Ha fomentado el trabajo con las matemáticas
Nunca había estudiado una asignatura en la vida
Se ve el álgebra de forma diferente
Ha dedicado más de 6 horas a la semana
Ha dedicado de 4 a 6 horas a la semana
Ha dedicado de 2 a 4 horas a la semana
Ha dedicado bastantes horas a la semana
Ha dedicado menos de 2 horas a la semana
Valoración del curso en media
El alumno volvería a elegir este grupo experimental
Lo que más ha gustado es que se evitan cálculos
Lo que más ha gustado es que eran pocos en clase
El curso ha sido satisfactorio para todos
14.1.
14.2
14.3.
14.4.
14.5
14.6
14.7
14.8

A partir de este cuadro podemos extraer las siguientes conclusiones en cada uno de los interrogantes, a partir de los aspectos característicos con mayor incidencia en el global de los casos estudiados:

14.1. La actitud general de los alumnos ha sido inicialmente positiva tanto para los ordenadores como para las Matemáticas, tan solo hay tres casos en los que las Matemáticas no ofrecían un interés especial.

14.2. Se puede afirmar que los alumnos no se han aburrido en las clases y que además las clases se les han pasado en general rápidamente; únicamente podemos decir que se han aburrido en algunos casos en la parte final de las clases pero más que por la metodología y el uso del programa, por el cansancio de estar dos horas frente al ordenador.

14.3. El hecho de haber utilizado el ordenador con el programa DERIVE ha sido un elemento muy motivador para todos los alumnos por varios motivos:por los cálculos que se realizan de forman automática permitiendo llegar al final de los problemas, por las posibilidades de cálculo, porque hace más divertidas las clases y debemos destacar dos observaciones muy importante aunque aisladas: el uso del ordenador ha motivado a uno de los alumnos a asistir a las clases y en otro caso que el uso del programa DERIVE ha permitido a DOS ALUMNOS ha aprobar la asignatura Matemáticas I.

14.4. La metodología empleada podemos decir que ha AUMENTADO en general EL INTERÉS POR LAS MATEMÁTICAS, entre los motivos podemos citar que ha motivado especialmente en la resolución de problemas, el ambiente de colaboración ha motivado bastante, la inmediatez y posibilidad de observar los resultados es otra de las razones, porque ha fomentado trabajar más con las Matemáticas de forma activa, y un caso muy curioso es que la forma de tratar las Matemáticas ha resultado bonita.

14.5. Haciendo una media de las horas semanales que han dedicado los alumnos a la asignatura podemos decir que esta media se eleva a 5 aproximadamente.

14.6. La valoración media de los alumnos respecto a este curso en una escala de 1 a 10 se sitúa en 7,9, teniendo en cuenta únicamente los casos que han ofrecido datos a esta pregunta.

14.7. Los alumnos volverían a elegir claramente y con mayor seguridad este grupo experimental, circunstancia nuevamente que expresa el grado de motivación que tenían los alumnos haciendo este curso.

Así pues podemos decir que la estrategia didáctica que hemos empleado ha suscitado una MOTIVACIÓN ESPECIAL por el aprendizaje del álgebra lineal y por las Matemáticas ya que como acabamos de citar:

- los alumnos en general no se han aburrido en las clases y han sentido que las clases se pasaban rápidamente.
- el programa DERIVE ha sido un elemento muy motivador para el aprendizaje pues ha facilitado el cálculo, ha permitido llegar al final en los problemas, ha hecho más divertidas las clases y ha motivado especialmente a algunos alumnos para poder luego aprobar las asignatura Matemáticas I.
- La metodología ha aumentado en general el interés por las Matemáticas.
- Los alumnos han dedicado una media de 5 horas semanales a las Matemáticas, un número de horas bastante considerable.
- La valoración media de los alumnos respecto al curso ha sido de 7,9 sobre 10
- Los alumnos volverían claramente a elegir este grupo experimental.

CATEGORÍAS EMERGENTES.

A partir de los datos recogidos, hemos podido constatar una serie de CATEGORÍAS EMERGENTES, que han surgido en torno a los siguientes temas, que nosotros etiquetamos como cuestiones 15, 16 y 17:

Cuestión 15: Ambiente y dinámica del curso.

Cuestión 16: Evolución y Expectativas del alumno.

Cuestión 17: Uso de Internet y correo electrónico.

CUESTIÓN 15: AMBIENTE Y DINÁMICA DEL CURSO

A lo largo de la recogida de datos hemos observado que han aparecido algunos elementos significativos que podrían perfilar el ambiente que se ha producido en este curso utilizando la estrategia didáctica que hemos propuesto. Entre los ATRIBUTOS que pueden perfilar esta cuestión podríamos considerar los siguientes:

15.1. Valoración general de los alumnos de las clases. Se trata de establecer la opinión de los alumnos respecto a las clases desarrolladas.

15.2. Comparativa del ambiente de esta clase con las clases tradicionales. Se trata de intentar obtener los elementos comparativos entre el ambiente que se desarrolla en esta clase con los elementos de clases tradicionales.

15.3. Elementos que incorpora el programa DERIVE en el ambiente de la clase. Para intentar obtener las características que ofrece DERIVE en el ambiente general de la clase. Qué novedades ofrece el hecho de estar usando un programa de ordenador en el aula de matemáticas.

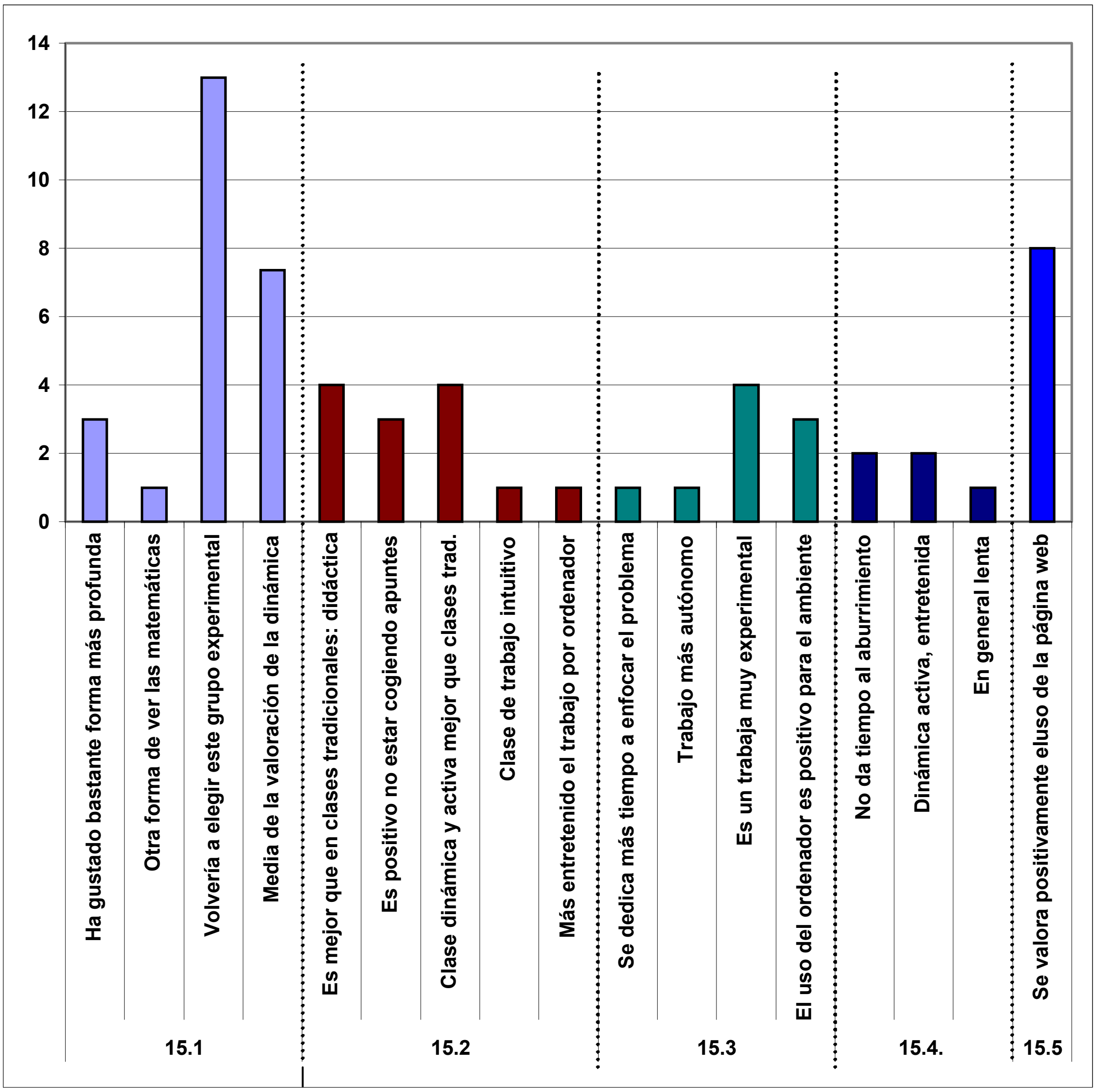
15.4. ¿Cómo es la dinámica del curso?. Se trata de establecer las características generales que perfilan la dinámica que se ha seguido en el curso.

15.5. ¿Qué valoración merece la página web?. Con el fin de obtener información relacionada con la dinámica del curso, sería interesante saber la valoración que han dado los alumnos al uso de la página web.

Para estudiar cada uno de estos ATRIBUTOS hemos estudiado las conclusiones finales de cada caso relacionadas con la cuestión que hemos considerado como emergente. El resumen de los datos se puede consultar en el ANEXO XVIII, parte 15. A partir de este resumen hemos elaborado la siguiente tabla resumen:

CUESTIÓN 15: AMBIENTE DEL CURSO																
Aspectos característicos de cada atributo		**CONTESTACIONES EN CASO**														
ATRIBUTOS	**ASPECTOS CARACTERISTICOS**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
15.1. Valoración general de los alumnos de estas clases	**Han gustado bastante porque se ha visto el álgebra de una forma más profunda**	X		X								X				
	Es otra forma de ver las matemáticas										X					
	Volvería a elegir este grupo experimental	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			X
	Valoración de la dinámica del curso			7,7	10	10	7	10	7		8		7		8,5	
15.2. Comparativa del ambiente de esta clase con las clases tradicionales	**En las clases tradicionales haces casi todo el tiempo teoría, no se hacen casi ejercicios y en estas clases te da tiempo a hacerlos**	X		X						X			X			
	Es muy positivo el hecho de no estar cogiendo apuntes			X			X							X		
	Es una clase muy activa y dinámica, mejor que las clases tradicionales					X		X					X	X		
	Es una clase de trabajo intuitivo descubriendo el concepto											X				
	Es más entretenido el trabajo con el ordenador														X	
15.3. Elementos que incorpora DERIVE en el ambiente de clase	**Se dedica más tiempo a enfocar el problema de varias formas los cálculos no cansan**	X														
	Se puede trabajar de forma autónoma	X														
	Es una clase muy experimental					X		X	X				X			
	El uso del ordenador es positivo para el ambiente de clase				X		X		X							
15.4. ¿Cómo es la dinámica del curso?	**No da tiempo al aburrimiento**	X				X										
	Dinámica activa, entretenida				X			X								
	En general lenta										X					
15.5. ¿Qué valoración merece el uso de la página web?	**Se valora positivamente**			X	X		X			X	X	X	X	X		

A partir de esta tabla resumen podemos elaborar el siguiente diagrama de barras:



A la vista de esta gráfica podemos deducir que los atributos fijados tienen las siguientes características:

15.1. Los alumnos han valorado muy positivamente la experiencia educativa, pues se observa claramente la satisfacción de todos ellos para volver a repetir la experiencia didáctica, que sin duda les ha sido muy positiva, lo cual nos indica que el ambiente desarrollado en la experiencia ha sido en general positivo.

15.2. Los alumnos han considerado que las clases desarrolladas con la estrategia didáctica propuesta han sido mejores que en clases tradicionales fundamentalmente por varios motivos:

- se trata de una clase activa y dinámica, más que las clases tradicionales
- se dedica bastante tiempo a la práctica con ejercicios por medio del ordenador

- el tipo de trabajo es experimental e intuitivo
- son clases más entretenidas
- no tienen que estar tomando apuntes.

15.3. DERIVE incorpora sobre todo experimentalidad al trabajo de los alumnos, y resulta muy positivo para el ambiente que se crea en clase.

15.4. La dinámica del curso se observa que es activa.

15.5. Se ha valorado muy positivamente la página web creada para complementar la asignatura.

Por todo esto podemos afirmar que el ambiente del curso ha sido en general positivo para los alumnos, fundamentalmente por su predisposición a repetir la experiencia y porque consideran que las clases de este curso han sido mejores que las de clases tradicionales porque era más dinámica, activas y experimentales. En este ambiente DERIVE y el uso del ordenador han sido factores muy influyentes de forma positiva. También ha sido muy positiva la página web anexa al curso como herramienta de apoyo.

Como conclusión final podemos afirmar que el ambiente del curso ha sido muy bueno a juicio de los alumnos, que ha sido un ambiente mejor que el que se tiene en las clases tradicionales propiciado por el uso del ordenador y el tipo de didáctica que se ha empleado.

CUESTIÓN 16: EVOLUCIÓN Y EXPECTATIVAS DEL ALUMNO.

A lo largo de la recogida de datos hemos observado que han aparecido algunos elementos significativos que podrían perfilar la evolución y expectativas de los alumnos a lo largo del curso. Entre los ATRIBUTOS que pueden perfilar esta cuestión podríamos considerar los siguientes:

16.1. ¿Qué puntuación esperan obtener los alumnos?. Se trata de analizar la expectativa de los alumnos antes de realizar el examen final y sus resultados finales.

16.2. ¿Qué grado de satisfacción se observa en el alumnado?
Obtener si los alumnos han quedado satisfechos con el curso en líneas generales.

16.3. ¿Cómo ha sido la evolución de los alumnos a lo largo del curso? A partir de todas las calificaciones obtenidas en cuestiones, problemas y examen analizar la evolución que ha seguido cada alumno en el curso.

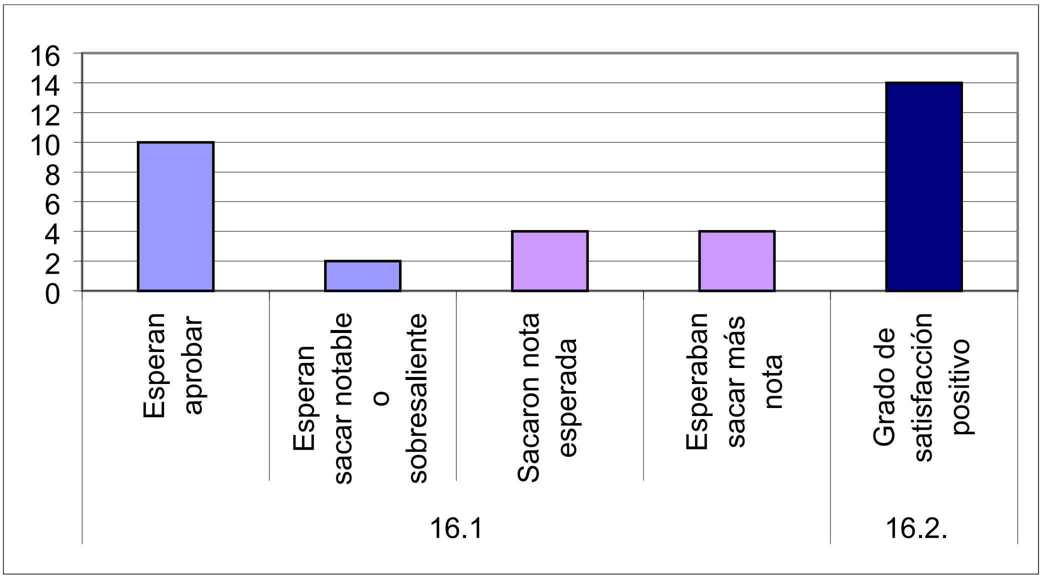
Para estudiar cada uno de estos ATRIBUTOS hemos estudiado las conclusiones finales de cada caso relacionadas con la cuestión que hemos considerado como emergente. El resumen de los datos se puede consultar en el ANEXO XVIII, parte 16. A partir de este resumen hemos elaborado la siguiente tabla resumen:

CUESTIÓN 16:EVOLUCIÓN Y EXPECTATIVAS DEL ALUMNO																
Aspectos característicos de cada atributo		**CONTESTACIONES EN CASO**														
ATRIBUTOS	**ASPECTOS CARACTERISTICOS**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
16.1. ¿Qué puntuación esperan obtener los alumnos?	**Esperan aprobar**	X	X		X		X		X	X	X			X	X	
	Espera sacar un notable o sobresaliente			X									X			
	Sacó la nota esperada								X		X	X	X			
	Esperaba sacar más nota				X		X		X						X	
16.2. ¿Qué grado de satisfacción se observa en el alumnado?	**Muy satisfechos con el curso**	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	

El siguiente atributo 16.3. se puede observar claramente en la tabla:

CASO	Cuestiones entregadas	Nota media cuestiones	Problemas entregados	Nota media problemas	Examen cuestiones	Examen problemas	Nota final
1	4	5,6	2	5,2	3,5	5,5	AP
2	5	5,65	6	4,63	5,5	8,4	NT
3	2	6	5	3,88	3,5	8,1	AP
4	1	7	3	1,9	5,5	3	AP
5	1	7	4	2,45	4	5,9	AP
6	1	1	3	2,53	3,5	8,1	AP
7	5	2,85	5	2,24	4,5	6,3	AP
8	1	5,5	6	2,66	4,5	3,7	AP
9	1	4	4	3,25	9,5	5,5	NT
10	1	1	4	3,16	8	7,2	NT
11	1	6	1	4,1	7	7,4	NT
12	6	7,54	6	7,15	8	9,7	SB
13	5	4,75	6	3,24	3,5	6,1	AP
14	5	4,75	3	2,7	4	2,2	SS
15	1	4	3	2,7	1,5	4	SS

Para un estudio más gráfico de estos atributos hemos elaborado dos gráficos, uno para estudiar los atributos 16.1 y 16.2, y otro para el 16.3. Para los dos primeros atributos tenemos el siguiente diagrama de barras:



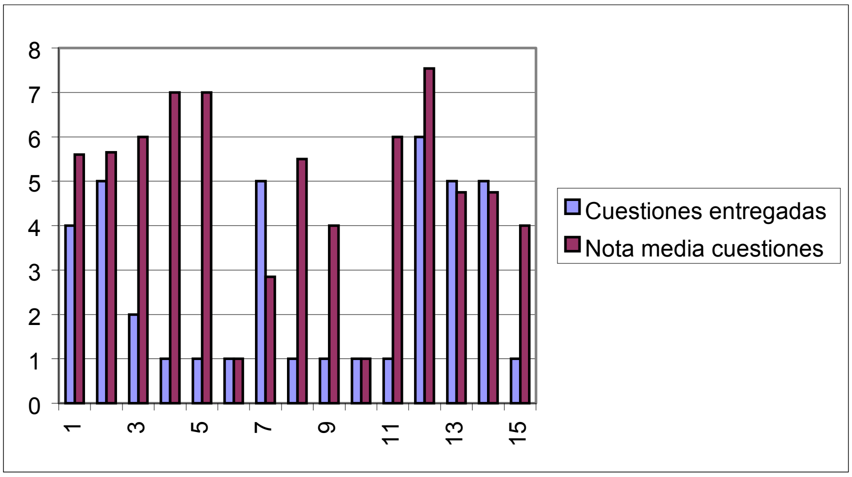
A la vista de este gráfico podemos afirmar lo siguiente con relación a los atributos 16.1 y 16.2:

16.1. Los alumnos tenían gran confianza en aprobar o sacar una buena calificación, y la nota en general era la esperada.

16.2. El grado de satisfacción de los alumnos ante el curso se observa que ha sido muy positivo.

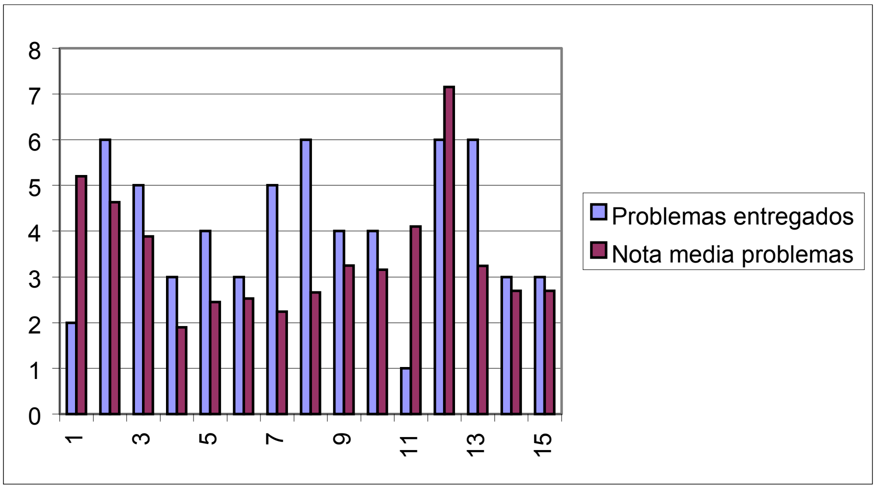
Los datos del atributo 16.3 los realizaremos con los siguientes diagramas de barras comparativos:

RELACIÓN ENTRE CUESTIONES ENTREGADAS Y NOTAS MEDIAS OBTENIDAS



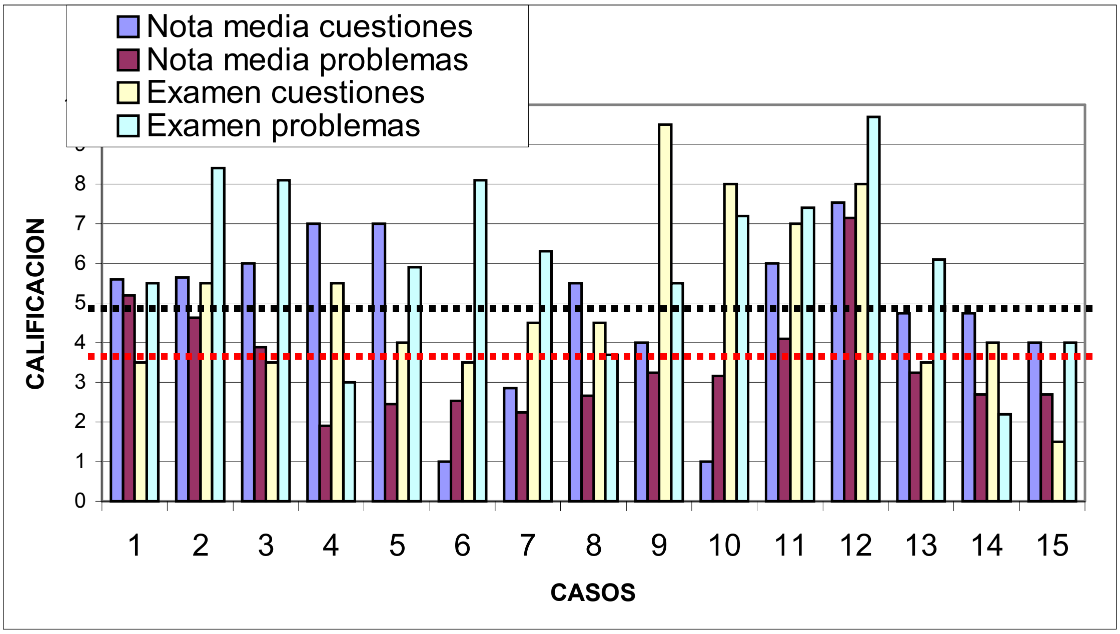
Se observa en este gráfico que el número de cuestiones entregadas ha sido pequeño, pero las calificaciones siempre han sido en general buenas, con respecto las cuestiones entregadas.

RELACIÓN ENTRE PROBLEMAS ENTREGADOS Y NOTAS MEDIAS OBTENIDAS



Comparando esta gráfica con la anterior, observamos que se han entregado más problemas que cuestiones, y esto ha redundado en unas calificaciones medias superiores en la parte práctica.

Por último mostramos una gráfica que relaciona notas en cuestiones, problemas y en el examen final en cada uno de los casos:



Se pueden observar varios grupos de casos:

- El grupo de los alumnos claramente aventajados del resto que correspondería a los casos 2, 11 y 12, se observa que han obtenido una media en problemas y cuestiones de un 5 o más, y en el examen se ha notado una clara evolución positiva de los alumnos.
- Un grupo de 4 alumnos que serían que han realizado una trabajo normal, en el curso y luego en el examen se observa que han mejorado muchísimo se trataría de los casos 3, 5, 7 y 13.
- Tres alumnos que han brillado enormemente en su examen final: los casos 6,9 y 10.
- Un grupo de tres alumnos, que han tenido un trabajo regular en el curso y luego en el examen, han quedado en un nivel límite: casos 1, 4 y 8
- Y por último, dos casos que han tenido un nivel bajo a lo largo del curso y en el examen también: casos 14 y 15.

16.3. A la vista de estos gráficos y de estas observaciones podemos decir que la evolución del alumnado ha sido muy positivo, han evolucionado positivamente a lo largo del curso de forma progresiva. Obsérvese que en problemas la evolución ha sido claramente progresiva, ya que la nota en el examen final ha superado siempre a la media obtenida en problemas a lo largo del curso, no ha sido así en cuestiones en las que se observa una cierta evolución decreciente en 6 de los 15 casos estudiados.

Como conclusión final podemos afirmar que las expectativas del alumno se vieron realizadas, y que la evolución de los alumnos a lo largo del curso ha sido una evolución progresiva y positiva.

CUESTIÓN 17: TRAYECTORIA EDUCATIVA

A lo largo de la recogida de datos hemos observado que han aparecido algunos elementos significativos que podrían perfilar la trayectoria educativa de los alumnos que formaron parte de la investigación. Entre los ATRIBUTOS que pueden perfilar esta cuestión podríamos considerar los siguientes:

17.1. ¿Qué trayectoria educativa han tenido los alumnos antes de venir a la universidad? Se trata de determinar la trayectoria de los alumnos antes de venir a la universidad.

17.2. ¿Qué calificaciones obtienen los alumnos en selectividad? Para saber la calificación de los alumnos en el acceso a la universidad.

17.3. ¿Qué calificaciones tienen los alumnos en Matemáticas antes de la Universidad?

Saber la nota media de los alumnos en los cursos preuniversitarios.

17.4. ¿Qué calificaciones tienen en Matemáticas i?

Para conocer si los alumnos han aprobado o suspendido la asignatura de matemáticas del primer cuatrimestre.

17.5. ¿Cuánto tiempo llevan en la Universidad?

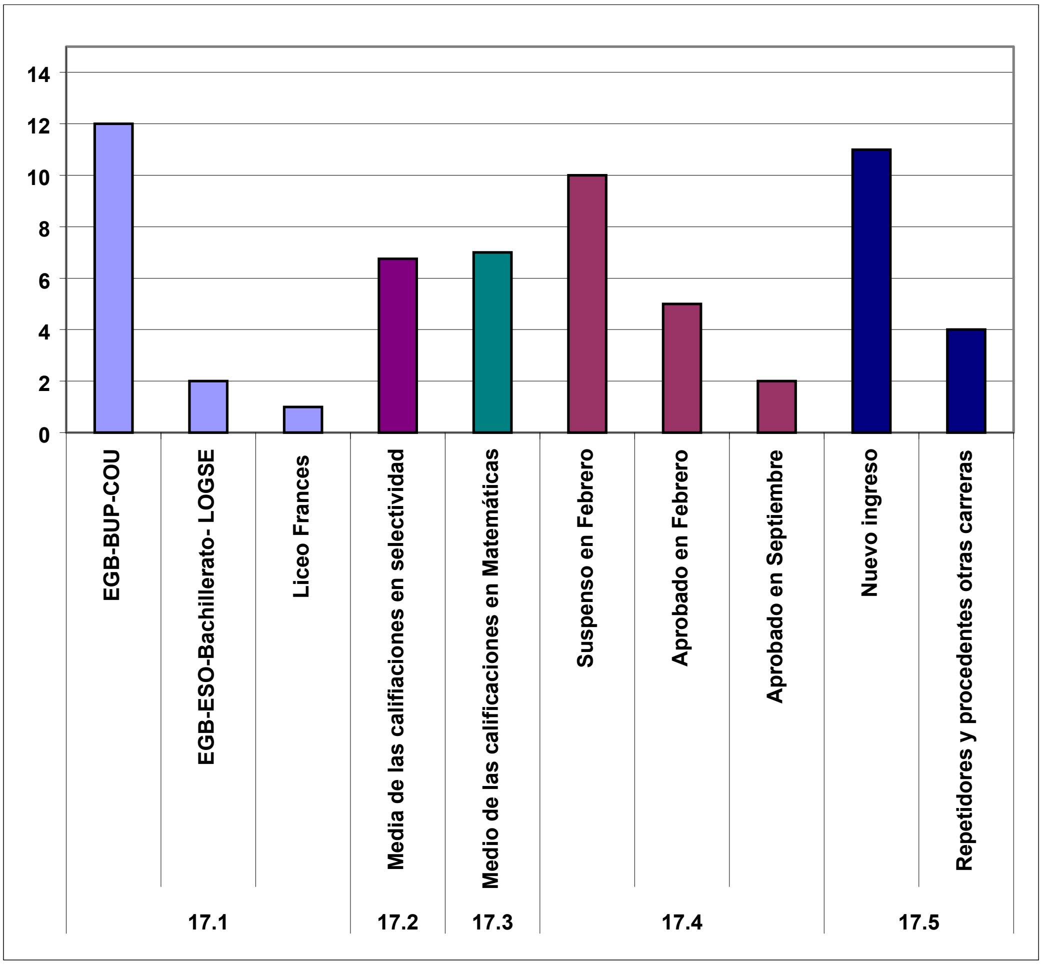
Para conocer si los alumnos proceden de otras carreras o si vienen directamente de Selectividad.

Para estudiar cada uno de estos ATRIBUTOS hemos estudiado las conclusiones finales de cada caso relacionadas con la cuestión que hemos considerado como emergente. El resumen de los datos se puede consultar en el ANEXO XVIII, parte 17. A partir de este resumen hemos elaborado la siguiente tabla resumen:

CUESTIÓN 17: TRAYECTORIA EDUCATIVA

Aspectos característicos de cada atributo		CONTESTACIONES EN CASO														
ATRIBUTOS	**ASPECTOS CARACTERISTICOS**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
17.1. ¿Trayectoria educativa antes de la Universidad?	EGB-BUP-COU	X		X	X		X	X	X		X	X	X	X	X	X
	EGB-ESO-BACHILLERATO LOGSE		X			X										
	Liceo Francés									X						
17.2. ¿Calificaciones en Selectividad?	Notas obtenidas en selectividad		8	6,5	7	6,2	6,8	6,4	6,8	6,3	6,8	7,6	6,8	6,5	6,5	6,35
17.3. ¿Qué calificación en matemáticas antes Universidad?	Nota media en las asignaturas de Matemáticas antes de la Universidad	6	8	9	6	7	6	6	6	6,5	7	9	9	6	7	6,5
17.4. ¿Qué calificaciones en Matemáticas I?	Suspenso en FEBRERO	X		X	X	X	X	X	X					X	X	X
	Aprobado en FEBRERO		X							X	X	X	X			
	Aprobó en SEPTIEMBRE						X							X		
17.5. ¿Cuanto tiempo lleva en la Universidad?	Nuevo ingreso		X	X	X	X	X	X	X		X			X	X	X
	Repetidores y procedentes de otras carreras	X								X		X	X			

Con esta tabla hemos elaborado el siguiente gráfico:



A la vista de este gráfico podemos afirmar lo siguiente en relación con los cinco atributos propuestos:

17.1. Los alumnos han realizado en su mayoría EGB-BUP-COU trayectoria educativa previa a la universidad salvo dos alumnos que realizan los últimos cursos de ESO y Bachillerato LOGSE y un alumno que sigue el sistema de Liceo Francés.

17.2. La media de calificaciones en Selectividad ha sido de 7

17.3. La media en Matemáticas los últimos años es de 7,2

17.4. La mayor parte de los alumnos tenían suspensa la asignatura Matemáticas I en Febrero, y algunos de ellos la aprobaron en Septiembre.

17.5. La mayoría de los alumnos eran de nuevo ingreso, tan solo 4 de ellos procedían o bien de otras carreras o eran repetidores.

A la vista de estos datos podemos dar un perfil general de la trayectoria educativa de los alumnos que han formado parte de la experiencia educativa:

- Se trata de un grupo de alumnos en su mayor parte alumnos de nuevo ingreso, que han realizado EGB-BUP-COU , obteniendo unas calificaciones en Selectividad de 7 y en Matemáticas de 7,2. La mayoría de ellos suspensos en la asignatura Matemáticas I.

Con las conclusiones obtenidas en cada una de las cuestiones de la investigación que acabamos de mostrar, necesitamos realizar una triangulación de datos, de tal forma que podamos contrastar estas conclusiones con las notas de campo del investigador, las calificaciones de los exámenes de ambos subgrupos y las observaciones del investigador cualificado. Este es precisamente el proceso que realizaremos en la siguiente sección.

V.4. Triangulación de datos.

A partir de las conclusiones finales obtenidas en cada una de las cuestiones de los datos obtenidos directamente de los alumnos: entrevistas y pruebas objetivas, en esta sección vamos a realizar el proceso de triangulación de datos, partiendo del análisis de datos obtenidos de otras fuentes diferentes:

a) De las notas de campo realizadas por el investigador, introducidas y comentadas en el capítulo IV.
b) De las calificaciones obtenidas por los SUBGRUPOS A y B en el examen final.
c) De la entrevista con la observadora cualificada.

Aunque en el capítulo IV ya hicimos una descripción de los datos obtenidos en estros tres ámbitos que acabamos de citar, vamos a realizar a continuación un pequeño análisis de los datos obtenidos en cada uno de los apartados anteriores con el fin de obtener información relevante de cada una de las cuestiones de la investigación.

V.4.1. ANÁLISIS DE LAS NOTAS DE CAMPO.

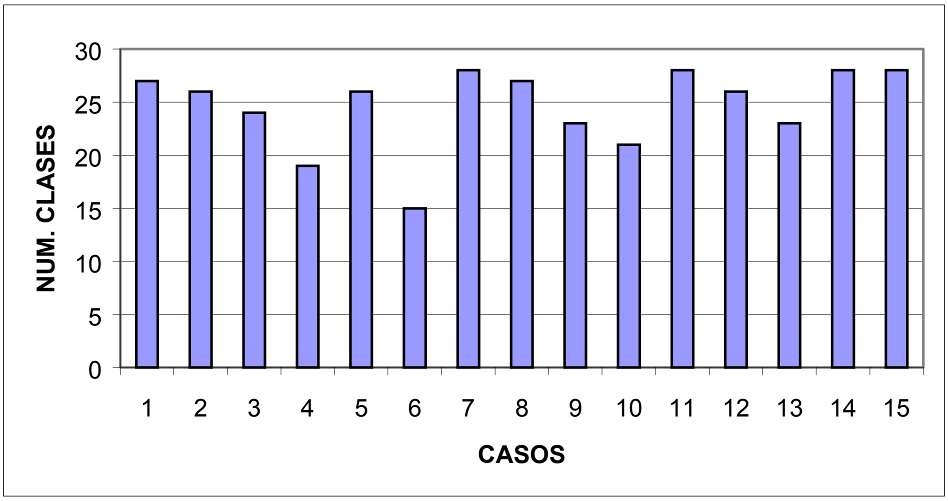
En el apartado IV.3 del capítulo anterior hicimos una descripción general de los datos obtenidos del DIARIO DE CAMPO. Estos datos recogen las observaciones realizadas por el investigador-profesor en el escenario de la investigación. Los datos que describimos allí nos han permitido obtener bastante información relacionada con diversos aspectos:

1. **Resumen de asistencias a clase de los alumnos:**

El número de sesiones fueron 28 en total de las cuales:

4 alumnos asisten al 100% de ellas (28)
2 alumnos asisten al 96,42% (27)
3 alumnos asisten al 92,85% (26)
1 alumno asiste al 85,71% (24)
2 alumnos al 82,14% (23)
1 alumno al 75% (21)
1 alumno al (67,85) (19)
1 alumno al 53,57% (15)
1 alumno al 28,57% (8)

Datos que se pueden observar fácilmente en el siguiente gráfico:



de donde podemos afirmar que la asistencia a clase ha sido muy elevada.

Esta asistencia elevada de los alumnos nos ofrece un dato significativo relacionado con:

- la MOTIVACIÓN del alumnado (cuestión 14)
- el PROTAGONISMO del alumnado (cuestión 3)

2. Planificación de los temas impartidos en las sesiones:

Se impartieron un total de 7 temas distribuido en las 28 sesiones, dedicando más tiempo en las primeras sesiones porque el alumno tenía que habituarse al manejo de DERIVE, luego las clases fueron siendo más llevaderas y sencillas. No ofrece elementos característicos de cara a las cuestiones de la investigación.

3. Ambiente de las clases:

De las observaciones realizadas podemos afirmar que el ambiente que ha habido a lo largo de las sesiones ha sido muy participativo y relajado por parte de los alumnos, se ha observado bastante MOTIVACIÓN y COLABORACIÓN ENTRE LOS ALUMNOS. El aprendizaje colaborativo se ha producido de forma indiscutible en el aula. Así pues podemos afirmar que el ambiente de las clases es un indicador de

1. una elevada MOTIVACIÓN de los alumnos (cuestión 14)
2. la existencia de APRENDIZAJES COLABORATIVOS (cuestión 12)
3. una fuerte interactividad entre los alumnos (cuestión 2).

4. Grado de comodidad del profesor en el aula impartiendo la clase.

En este aspecto podemos afirmar que:

a) El profesor ha vivido con bastante tensión la mayor parte de las clases con el fin de completar temario y que el ritmo de las clases era diferente al de las clases tradicionales.
b) Al principio la atención individualizada para resolver dudas generó mucha tensión al profesor.
c) La parte final del curso el profesor se encontró más cómodo, a medida que el alumno iba manejando el programa.

La dinámica del curso se puede observar que ha sido en general un poco rápida, para poder ajustar el programa a la nueva estrategia didáctica (cuestión 15).

5. El guión de trabajo que se empleó en la didáctica.

- Fue un elemento fundamental para la didáctica, permitiendo que el alumno estuviera atento a las explicaciones (cuestión 14).
- Sirvió como instrumento para el TRATAMIENTO DE LA DIVERSIDAD, pues permitió plantear ejercicios a los alumnos más aventajados, mientras se resolvían las dudas (cuestión 13).
- Este guión ha facilitado la AUTONOMÍA y el PROTAGONISMO de los alumnos, pues podían ir marcando su propio ritmo. (cuestiones 3 y 10)
- Es un eje vertebrador de la estrategia para determinar claramente los CONTENIDOS ESENCIALES del programa. (cuestión 4)

6. Actitudes negativas de los alumnos en el curso.

Las actitudes negativas observadas en los alumnos han sido mínimas, únicamente se han limitado al uso de internet durante la clase para consultar temas totalmente ajenos al álgebra lineal, aunque de forma muy esporádica; también hay que señalar un cierto recelo sobre el tipo de examen a realizar. Puede ser un indicador positivo relacionado con la no existencia de barreras adicionales respecto al uso del programa, ya que en otro caso podrían haberse observado actitudes negativas respecto al manejo del programa (cuestión 9).

7. Actitudes positivas de los alumnos en el curso.

En cuanto a las actitudes positivas podemos señalar las siguientes:

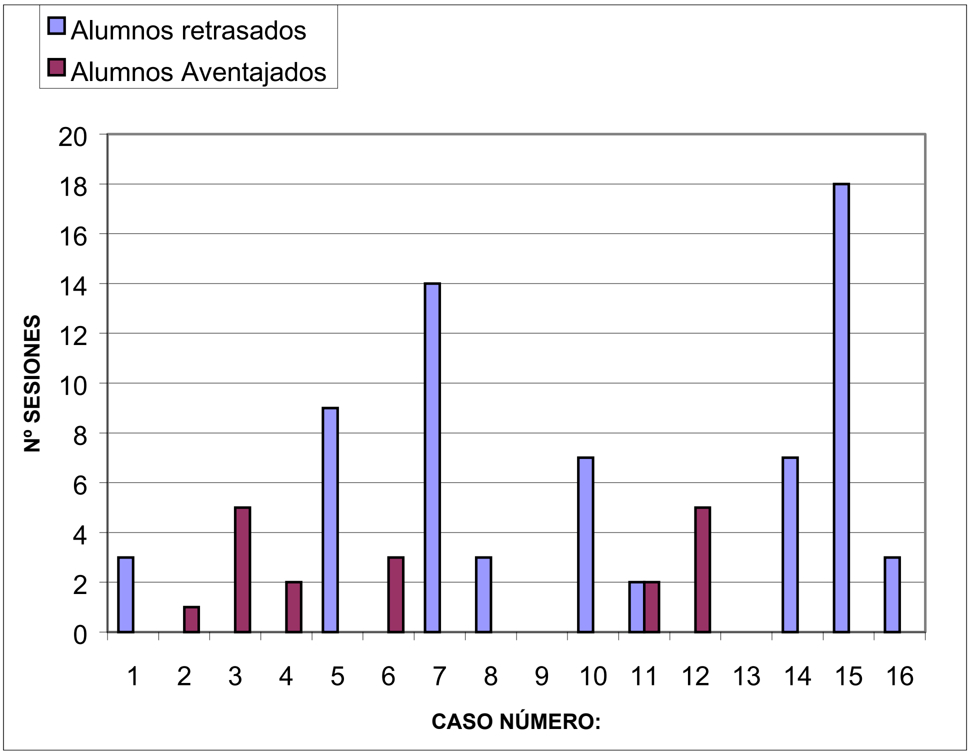
a) Se observa mucha COLABORACIÓN entre los alumnos en el entorno de sus grupos de trabajo para resolverse las dudas que iban surgiendo, para resolver problemas y para contrastar resultados (cuestión 12).
b) Bastante PARTICIPACION de los alumnos en las preguntas y cuestiones que se proponían en el aula, lo cual nos indica por un lado una fuerte motivación

por parte de los alumnos (cuestión 14) y por otro lado que las relaciones de comunicación en el aula eran bastante buenas (cuestión 11).

c) Se observa bastante MOTIVACIÓN e INTERÉS de los alumnos en los contenidos y en la manipulación de estos contenidos con DERIVE (cuestión 14).

8. Alumnos destacados-retrasados a juicio del investigador-profesor.

Con los datos recogidos en las notas de campo hemos elaborado el siguiente gráfico en el que se muestran el número de observaciones realizadas por el investigador con relación a los alumnos aventajados / destacados en cada una de las sesiones:



A la vista de este gráfico podemos deducir que hay dos alumnos especialmente retrasados: casos 7 y 15. Además podemos decir que hay otros 3 casos de retraso menor: casos 5, 10 y 14.

En cuanto a los alumnos aventajados podemos destacar que hay 2: casos 3 y 12.

Estas circunstancias nos han permitido realizar una adecuada atención a la diversidad (cuestión 13), que nos permitió que casos como el 5, y 7 aprobasen. Sin embargo el caso 15 nos ha resultado completamente insalvable.

9. Agrupamiento de los alumnos.

Se han observado los siguientes agrupamientos:

GRUPO 1: Subgrupo 1 (A. Cuéllar y J. Revuelta) y
Subgrupo 2 (E. Sanz y A Perpiñá)

GRUPO 2: Subgrupo 3 (C. Sevilla),
Subgrupo 7 (S. Rosado, D. Rubiano y J.P. Trigo)

GRUPO 3: Subgrupo 4 (L. Tarno y L. Rubio)

GRUPO 4: Subgrupo 5 (M. Verdú y J. Sanz) y
Subgrupo 6 (S. Rúa)

GRUPO 5: Subgrupo 8 (J.I. Gómez y S. Santos)

Indicación de la comunicación que había entre alumnos y los canales de colaboración que se han establecido. (cuestiones 12, 11). Por otro lado podemos observar que los agrupamientos no han sido elitistas, no se han agrupado por un lado los más aventajados y por otro los menos destacados, han sido grupos heterogéneos en este sentido (cuestión 13). De hecho los alumnos más destacados de cada grupo han resuelto numerosas dudas a los alumnos más retrasados.

10. Dudas que presentaban los alumnos.

Las dudas que han presentado los alumnos respecto al programa DERIVE se han concentrado sobre manipulaciones concretas del programa, y concentradas en la primera parte del curso. Esto nos indica claramente que DERIVE no ha sido una barrera adicional para el alumno (cuestión 9).

Sin embargo las dudas sobre ALGEBRA LINEAL han sido superiores enormemente a las presentadas respecto al programa, indicador de que las dudas han estado ubicadas en los contenidos esenciales del programa (cuestión 4).

La comunicación con los alumnos ha sido muy fluida, posibilitada por la rapidez de cálculo del ordenador que facilitaba explicar las dudas de forma rápida y porque el grupo era reducido (cuestión 2)

11. Dificultades que se han presentado en los contenidos.

Las dificultades que se han presentado respecto al programa se han centrado en definición de aplicaciones lineales con DERIVE.

La principal dificultad respecto al álgebra lineal ha sido la obtención de la matriz asociada a una aplicación lineal.

12. Motivación de los alumnos ante los ejercicios y tareas propuestas.

Se ha observado bastante MOTIVACION de forma global por parte de los alumnos en varios niveles: en la resolución de ejercicios y problemas, y en el trabajo en grupo en torno al programa DERIVE. Por tanto podemos decir que por un lado ha habido MOTIVACIÓN para resolver ejercicios y problemas (cuestión 14) y para resolver problemas en grupo (cuestión 12).

13. Grado de comprensión del programa DERIVE: Dudas.

Las principales dudas del programa DERIVE se han centrado en los nuevos comandos que se iban introduciendo (cuestión 9).

14. Autonomía cognitiva o dependencia del programa.

Al principio los alumnos manejaban el programa con cierta dependencia del profesor, no entendían a veces los resultados y sus interpretaciones, pero poco a poco los alumnos han ido adquiriendo autonomía, experimentando con las cuestiones propuestas, y en la resolución de problemas (cuestiones 6, 8 y 10).

15. ¿Los alumnos piensan en procesos o en automatismos?

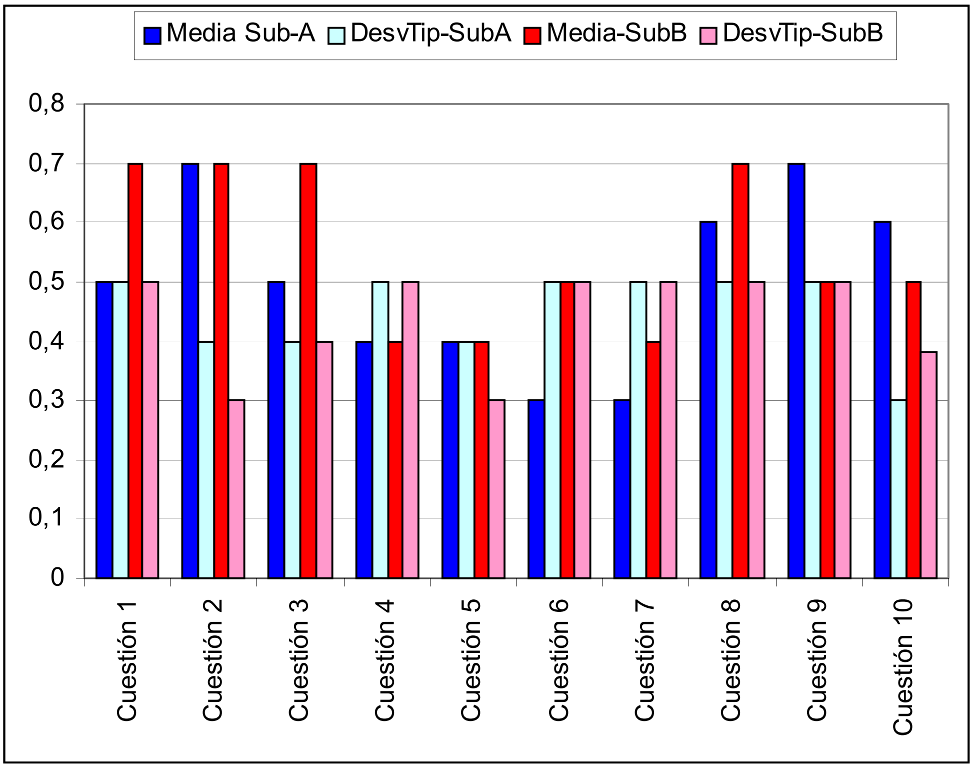
No hemos podido constatar si los alumnos piensan en procesos o automatismos.

Con este pequeño análisis hemos completado los datos relacionados con las notas de campo en cada una de las cuestiones de la investigación.

V.4.2. ANÁLISIS DE LOS DATOS CUANTITATIVOS.

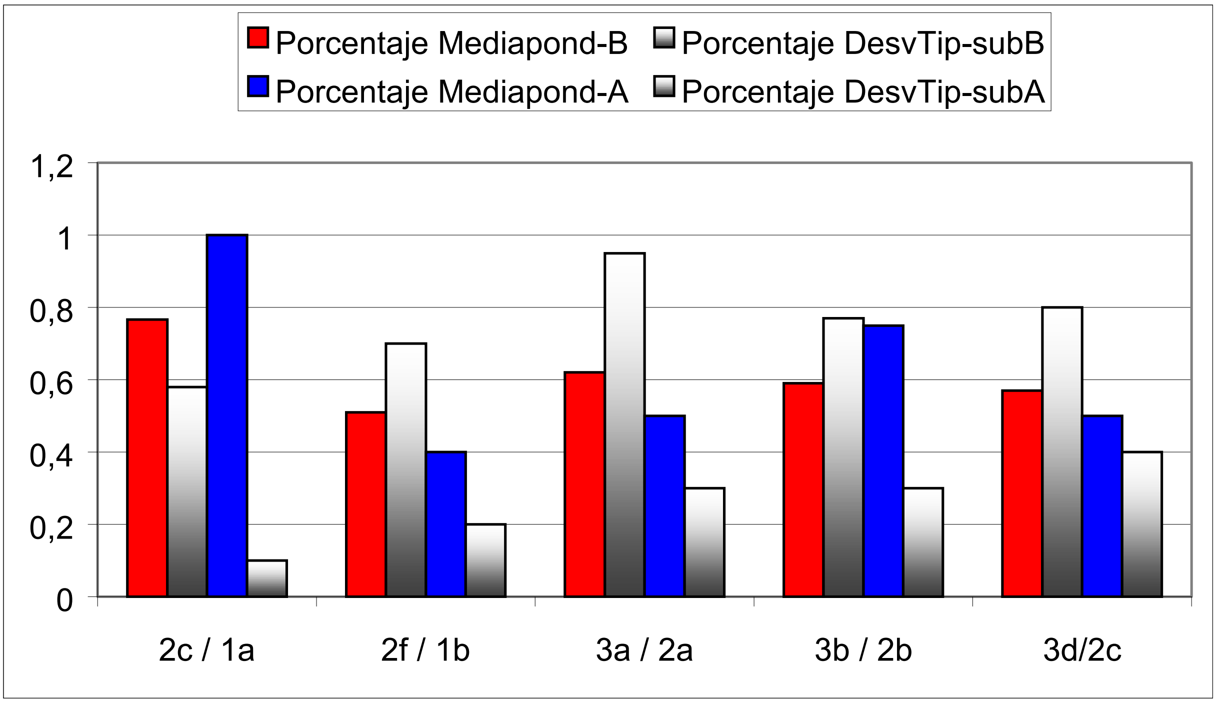
A partir de los datos cuantitativos del examen final de ambos subgrupos hemos elaborado algunas gráficas que nos faciliten la comparación de los resultados obtenidos en diversos aspectos.

Comenzamos con una comparativa entre las calificaciones obtenidas en las cuestiones teóricas en ambos subgrupos, se indican las medias obtenidas de las calificaciones totales y las desviaciones típicas de ambas muestras, el cuadro obtenido es el siguiente:



Como podemos observar las calificaciones en las cuestiones teóricas han sido superiores en el subgrupo B a las obtenidas en el subgrupo A.

Si revisamos las calificaciones medias en problemas obtenemos el siguiente gráfico

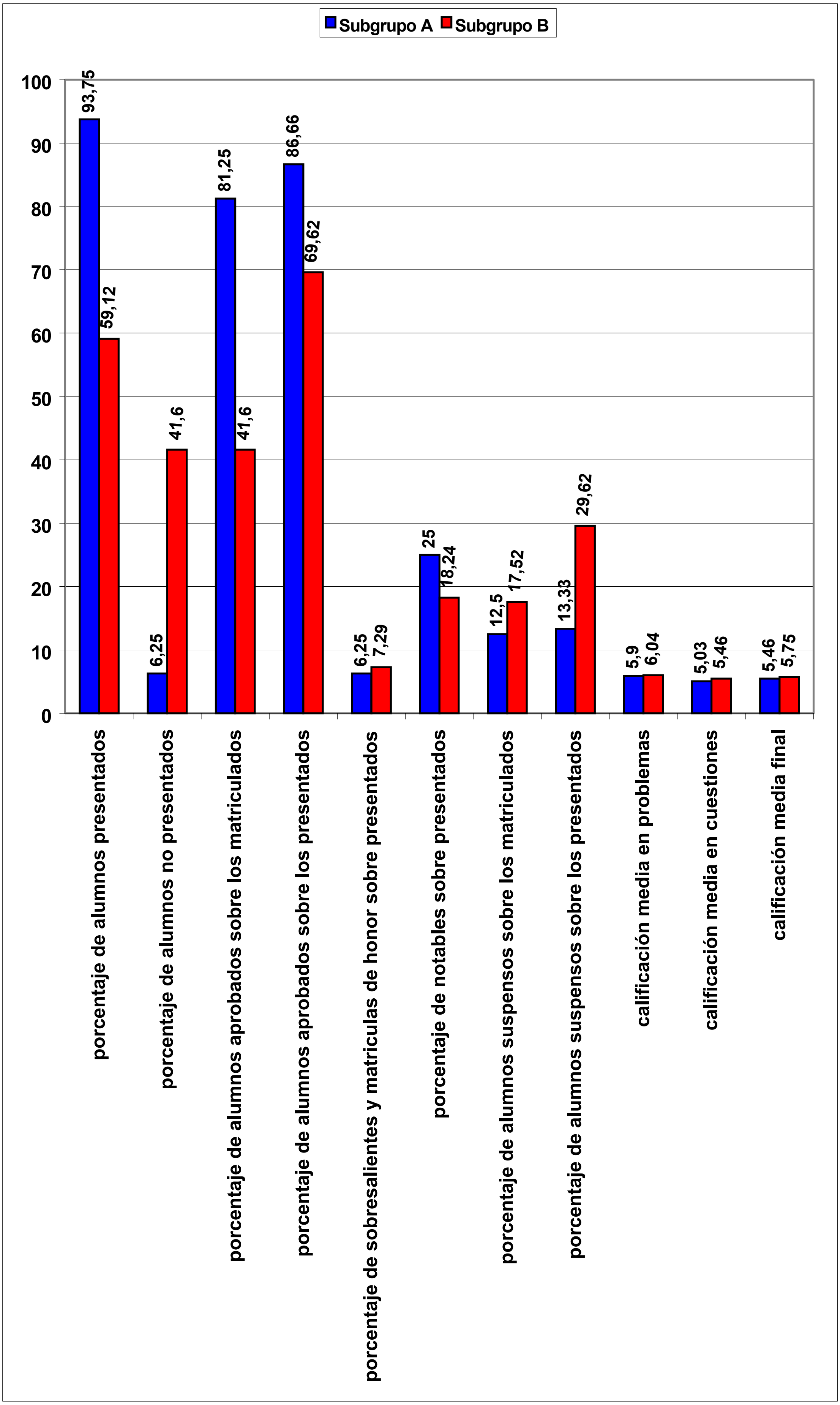


En los problemas podemos observar que las calificaciones han sido mejores en media en el subgrupo A que en el B, teniendo en cuenta las desviaciones típicas de los subgrupos.

Por último podemos considerar varios aspectos de los datos de este examen:

- porcentaje de alumnos presentados
- porcentaje de alumnos no presentados
- porcentaje de alumnos aprobados sobre los matriculados
- porcentaje de alumnos aprobados sobre los presentados
- porcentaje de alumnos suspensos sobre los matriculados
- porcentaje de alumnos suspensos sobre los presentados
- calificación media en problemas
- calificación media en cuestiones
- calificación media final

Estos datos los analizamos considerando el siguiente gráfico que contiene los datos recogidos y que se pueden consultar en el ANEXO XV:


Subgrupo A
Subgrupo B
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
93,75
59,12
6,25
41,6
81,25
41,6
86,66
69,62
6,25
7,29
25
18,24
12,5
17,52
13,33
29,62
5,9
6,04
5,03
5,46
5,46
5,75
porcentaje de alumnos presentados
porcentaje de alumnos no presentados
porcentaje de alumnos aprobados sobre los matriculados
porcentaje de alumnos aprobados sobre los presentados
porcentaje de sobresalientes y matriculas de honor sobre presentados
porcentaje de notables sobre presentados
porcentaje de alumnos suspensos sobre los matriculados
porcentaje de alumnos suspensos sobre los presentados
calificación media en problemas
calificación media en cuestiones
calificación media final

A la vista de esta gráfica podemos extraer las siguientes conclusiones comparativas de ambos subgrupos:

1) El porcentaje de alumnos presentados en el subgrupo A (93,75%) ha sido muy superior al de presentados en el subgrupo B (59,12 %), lo cual es un elemento significativo sobre varias cuestiones de nuestra investigación:
    i. la MOTIVACIÓN del alumnado en el subgrupo A ha sido superior a la del subgrupo B, o al menos los alumnos tenían más interés o creían que iban a conseguir superar la asignatura a partir de la didáctica empleada.
    ii. el grado de PROTAGONISMO del alumno ha sido alto dado que el alumno se ha sentido capaz de aprobar la asignatura en un grado muy superior en un subgrupo que en otro.
    iii. También podríamos llegar a afirmar que posiblemente en el subgrupo A se haya obtenido mayor AUTONOMÍA COGNITIVA, posibilidad que les ofrecía el medio didáctico DERIVE.
    iv. Respecto al tema de ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD, podemos incidir en que efectivamente ha habido una atención a la diversidad más adecuada en el subgrupo A, quizás porque eran menos alumnos y quizás también por la propia metodología.

2) El porcentaje de alumnos aprobados del subgrupo A (81,25 %) respecto de los alumnos que accedieron a este grupo (16 alumnos) es muy superior al porcentaje de alumnos que aprobaron en el subgrupo B (41,6%); incluso si contrastamos los porcentajes respecto de los alumnos presentados en cada subgrupo se vuelve a observar esta situación en el subgrupo A (86,66%) y en el subgrupo B (69,62%). Estas conclusiones nos ofrecen elementos significativos sobre varias cuestiones en nuestra investigación:
    i. En primer lugar podemos afirmar que la estrategia didáctica utilizada en el subgrupo A ha sido más eficaz que en el subgrupo B, lo cual nos puede hacer pensar que se han obtenido mayor aprendizaje, podemos intuir que ha habido APRENDIZAJES SIGNIFICATIVOS
    ii. También podríamos decir que la MOTIVACIÓN del alumnado ha sido bastante elevada en este subgrupo.

3) Aunque el porcentaje de sobresalientes y matrículas en el subgrupo B (7,29%) sobre los presentados ha sido superior ligeramente al del subgrupo A (6,25%), sin

embargo sucede lo contrario respecto al porcentaje de notables que es superior en el subgrupo A (25%) al del subgrupo B (18,25%); información que no nos aporta un dato muy significativo.

4) Respecto a las calificaciones finales se observa que hay una pequeña diferencia en las medias de ambos subgrupos pero es una diferencia que tampoco es muy significativa, podemos decir que las calificaciones han sido prácticamente similares.

V.4.3. ANÁLISIS DE LA ENTREVISTA REALIZADA A LA OBSERVADORA CUALIFICADA.

Teniendo en cuenta la entrevista realizada a la observadora cualificada, que se puede consultar al completo en el ANEXO XIV (apartado 2), y siguiendo un proceso de análisis similar al que realizamos con las entrevistas realizadas a cada uno de los alumnos de la investigación en primer lugar consideramos algunos párrafos de la entrevista que consideramos como ELEMENTOS SIGNIFICATIVOS de la misma, ya que nos ofrecían información relevante relacionada con la investigación que estamos realizando. Este conjunto de elementos significativos así como un comentario de la información que aportan se puede consultar en el ANEXO XIV, apartado 3.

Con estos elementos significativos que hemos resaltado y teniendo en cuenta las ideas que nos aportan, hemos agrupado las mismas en torno a las diferentes cuestiones de la investigación, obteniendo de esta forma las siguientes conclusiones (incluimos a la derecha la referencia a los elementos significativos a los que se refiere, que se pueden consultar en el ANEXO XIV, apartado 3):

CUESTIÓN 1: SISTEMA DE NOTACIÓN INTERMEDIO.

El sistema DERIVE resulta un sistema de notación que facilita bastante la comprensión de contenidos en el álgebra lineal, mucho más que en el cálculo, por la forma propia de introducir los datos; aunque se corre el riesgo de hacer el proceso mecánico (5), (6).

La forma de introducir los datos obliga a pensar al alumno sobre los datos algebraicos que introduce, vuelve a ser menos automático el álgebra que el cálculo(7)

Para introducir conceptos de cálculo es necesario invertir un esfuerzo superior a nivel imaginativo que con el álgebra lineal (8)

Según la observadora, todos los alumnos de esta generación tienen problemas para enfrentarse con un papel en blanco por problemas educativos generales, y en consecuencia los alumnos del grupo de DERIVE no son una excepción para trasladar DERIVE a lápiz y papel, además que el ordenador les resulta más entretenido y cómodo (9)

La observadora afirma que el proceso inverso de trasladar pensamiento de lápiz y papel a DERIVE resulta complejo pero de forma general, ya que ella considera que pensar con el ordenador resulta complejo por eso el proceso de pasar primero por lápiz y papel resulte casi obligado (10), (11).

Dos ideas se pueden extraer de este elemento significativo (12):

- DERIVE al igual que lápiz y papel actúa de sistema intermedio
- DERIVE puede provocar que el alumno llegue al resultado sin saber los pasos intermedios.

Por otro lado a juicio de la observadora el lenguaje usado por DERIVE es más cercano a los alumnos, sienten que hacen algo más cercano a su propio lenguaje, lo cual puede interpretarse como que DERIVE ha sido un SISTEMA DE NOTACIÓN INTERMEDIO en cierta medida. (24)

CUESTIÓN 2: INTERACTIVIDAD.

La comunicación entre los alumnos ha sido muy buena pero la observadora considera que no ha sido únicamente por el haber usado el ordenador, sino que además han intervenido dos factores: que era un grupo reducido de alumnos y que además era un grupo que hacía el curso de forma voluntaria, y se ha sentido en cierta medida diferente al resto, lo cual les ha señalado como distintos. (16), (17), (18).

Respecto a la comunicación entre profesor y alumnos, la observadora afirma que ha habido bastante comunicación por tratarse de una dinámica muy parecida a la de las clases de problemas habituales, sin embargo considera que el tipo de comunicación era muy especial, era de una comunicación concreta, considera que no ha sido profunda pues plantea el hecho de la continuidad en la comunicación incluso después del curso. Por tanto considera que ha habido bastante comunicación pero no una comunicación profunda, que haya generado una conexión profunda con el alumnado sino que ha sido comunicación necesaria. (19), (20), (21).

CUESTIÓN 3: PROTAGONISMO Y AUTOCREACIÓN:

El tipo de actividades que se deben plantear en DERIVE no deben facilitar ver los resultados de forma rápida, sino que sea necesario realizar una serie de procesos intermedios para que sea el alumno el que orqueste y dirija el proceso (13).

La observadora considera que los alumnos han sido PROTAGONISTAS del proceso de aprendizaje, fundamentalmente porque el curso era muy manipulativo, estaban manejando continuamente el ordenador y esta circunstancia les hacía sentirse más cercanos al problema y más actores del proceso de aprendizaje (22)

El PROTAGONISMO era un protagonismo pero para manipular no para investigar, cree que eso sólo se puede dar en alumnos con cierta formación matemática. (23)

La observadora considera que la creatividad solamente es posible en ciertos alumnos que tenían cierta formación, ella considera que había un par de alumnos con esa capacidad para crear matemáticas. (24)

La observadora considera que en álgebra lineal un elemento fundamental es la operativa, y en este sentido DERIVE permite que los alumnos se concentren más en esta operativa necesaria que forma parte de lo esencial en el álgebra lineal. Además hay que tener en cuenta que el álgebra lineal despierta menos la intuición que el cálculo, lo cual facilita que el alumno se centre más en la operativa (26), (27).

CUESTIÓN 4: DESARROLLA CONTENIDOS ESENCIALES.

La forma de introducir los datos obliga a pensar al alumno sobre los datos algebraicos que introduce, vuelve a ser menos automático el álgebra que el cálculo(7)

Para introducir conceptos de cálculo es necesario invertir un esfuerzo superior a nivel imaginativo que con el álgebra lineal (8).

A juicio de la observadora cualificada de forma general no cree que el programa haya sido más beneficioso en cuanto a comprensión de conceptos que la clase habitual, considera que el hecho de ser un grupo muy pequeño y especial es el que ha provocado esa situación de privilegio en cuanto a la comprensión.

Por otro lado cree que a escala general el tipo de clases que se han impartido ha de ser un complemento a clases magistrales. (14), (15).

La observadora considera que el curso estaba muy bien diseñado para que los alumnos se centraran en lo esencial del álgebra lineal, ya que a pesar de que el álgebra lineal no es muy intuitivo, el diseño permitía que se parasen en la operatividad tan necesaria en el álgebra. (28)

CUESTIÓN 5: ESFUERZO RUTINARIO.

El sistema DERIVE resulta un sistema de notación que facilita bastante la comprensión de contenidos en el álgebra lineal, mucho más que en el cálculo, por la forma propia de introducir los datos; aunque se corre el riesgo de hacer el proceso mecánico (5), (6).

Dos ideas se pueden extraer de este elemento significativo (12):

- DERIVE al igual que lápiz y papel actúa de sistema intermedio
- DERIVE puede provocar que el alumno llegue al resultado sin saber los pasos intermedios.

La observadora considera que en álgebra lineal un elemento fundamental es la operativa, y en este sentido DERIVE permite que los alumnos se concentren más en esta operativa necesaria que forma parte de lo esencial en el álgebra lineal. Además hay que tener en cuenta que el álgebra lineal despierta menos la intuición que el cálculo, lo cual facilita que el alumno se centre más en la operativa (26), (27).

A juicio de la observadora cualificada el cálculo rutinario no hay que suprimirlo del todo pues es necesario en cierta medida siempre que no se convierta en el protagonista del aprendizaje, en ese sentido parece que el curso sí ha favorecido la eliminación de cierto cálculo innecesario. En particular considera que algunas de las programaciones realizadas en clase por ejemplo para calcular determinantes han sido suficientes para comprender el proceso de cálculo.(29), (30).

CUESTIÓN 6: HERRAMIENTA DE EXPERIMENTACIÓN.

No está muy claro que el alumno pueda descubrir con más facilidad los contenidos, es más, la observadora considera que el uso del ordenador a priori resulta más entretenido para el alumno pero eso no significa que esté aprovechando todo el tiempo en aprender matemáticas (4)

El tipo de actividades que se deben plantear en DERIVE no deben facilitar ver los resultados de forma rápida, sino que sea necesario realizar una serie de procesos intermedios para que sea el alumno el que orqueste y dirija el proceso (13).

El programa DERIVE potencia la EXPERIMENTACIÓN MATEMÁTICA, pues el ordenador potencia el cálculo, pero para que se de auténtica experimentación matemática depende un poco de como se introduzcan los contenidos y de qué conocimiento tiene el alumno, es decir depende de cómo sean los alumnos. (31)

CUESTIÓN 7: APRENDIZAJES SIGNIFICATIVOS.

El tipo de aprendizaje que se ha intentado llevar a cabo en el aula ha sido un aprendizaje por descubrimiento, no sabemos si ha sido significativo, pero desde luego ha potenciado el descubrimiento (1)

A juicio de la observadora cualificada de forma general no cree que el programa haya sido más beneficioso en cuanto a comprensión de conceptos que la clase habitual, considera que el hecho de ser un grupo muy pequeño y especial es el que ha provocado esa situación de privilegio en cuanto a la comprensión.

Por otro lado cree que a nivel general el tipo de clases que se han impartido han de ser un complemento a clases magistrales. (14), (15).

Sobre el tipo de aprendizaje, si era o no significativo, la observadora afirma que esto tiene mucha relación con el tipo de PROTAGONISMO de los alumnos, considera que lo ideal para un aprendizaje significativo sería un protagonismo para descubrir pero cree que para poder descubrir algo hay que tener necesidad para ello y estos alumnos en general no la tenían. Cree que por el hecho de estar trabajando con el ordenador no es suficiente para que los alumno incitasen su CREATIVIDAD o que les incitase por INVESTIGAR o DESCUBRIR los hechos que se planteaban. Por otro lado considera que los alumnos no tienen tendencia a realizar un esfuerzo para descubrir cosas, aunque cree que con el ordenador el que tenga esa tendencia se le potencia con el uso del ordenador, pero si no lo tiene no se produce nada. (33), (34), (35).

CUESTIÓN 8: ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Respecto a la RESOLUCION DE PROBLEMAS y el uso de diferentes ESTRATEGIAS de resolución, la observadora considera que para que los alumnos ensayen diferentes estrategias deben de aprenderlas, y en este sentido el uso del programa facilita al alumno usar diferentes estrategias, porque facilita el trabajo. (36)

La observadora cualificada considera que los alumnos se satisfacen con encontrar un método de resolución es una tendencia actual de la sociedad, encontrar un método. (37)

CUESTIÓN 9: BARRERAS ADICIONALES.

La observadora considera que DERIVE no ha sido una BARRERA ADICIONAL para el aprendizaje de los contenidos de álgebra lineal, ya que es un programa relativamente sencillo. Además cree que la versión MS-DOS es mucho mejor desde el punto de vista didáctico pues les introduce mucho más en la programación y en la forma de introducir los datos. (38), (39).

CUESTIÓN 10: AUTONOMÍA COGNITIVA.

Respecto a la AUTONOMÍA COGNITIVA, la observadora vuelve a insistir que el programa en sí mismo no hace nada, si el alumno no tiene ese espíritu de creatividad necesario, pues aprende una metodología buena pero nada más, aunque para alumnos que la tengan si se la potencia. (40), (41).

La observadora considera que el programa no les genera DEPENDENCIA, sin embargo cree que si les resulta costoso pasar al papel, de forma similar a otros alumnos. (42).

CUESTIÓN 11: RELACIÓN DIALÉCTICA.

La comunicación entre los alumnos ha sido muy buena pero la observadora considera que no ha sido únicamente por haber usado el ordenador, sino que además han intervenido dos factores que era un grupo reducido de alumnos y que además era un grupo que hacía el curso de forma voluntaria, y se ha sentido en cierta medida diferente al resto, lo cual les ha señalado como distintos. (16), (17), (18).

Respecto a la comunicación entre profesor y alumnos, la observadora afirma que ha habido bastante comunicación por tratarse de una dinámica muy parecida a la de las clases de problemas habituales, sin embargo considera que el tipo de comunicación era muy especial, era de una comunicación concreta, considera que no ha sido profunda pues plantea el hecho de la continuidad en la comunicación incluso después del curso. Por tanto considera que ha habido bastante comunicación pero no una comunicación profunda, que haya generado una conexión profunda con el alumnado sino que ha sido comunicación necesaria. (19), (20), (21).

La observadora considera que con esta estrategia el profesor puede tomar dos tipos de actitudes:

- si el profesor está comprometido con la educación, le obliga a realizar un esfuerzo muy importante para hacer llegar la idea al alumno. Además le permite acercarse más al alumno.
- si por el contrario el profesor pretende escaparse del proceso educativo, el ordenador le permite enmascarar en cierta medida su trabajo haciendo creer que está enseñando cuando lo que puede hacer es hacer perder el tiempo. Puede permitir a un alumno distanciarse del proceso encubriendo su postura de profesor, incluso sin saber nada. (43), (44).

Según la observadora, la forma de ser del profesor y su forma de concebir la educación y la docencia influye mucho si se utiliza esta estrategia didáctica. (45)

CUESTIÓN 12: APRENDIZAJE COLABORATIVO.

Respecto al APRENDIZAJE COLABORATIVO; la observadora considera que la estrategia favorece la interactividad entre los alumnos a nivel colaborativo, pero no es claro que sea positivo pues se pueden transmitir errores y hábitos de unos a otros. Sin embargo, debemos observar que el ordenador actúa en cierta medida de árbitro que le permite al alumno que recibe la posibilidad de comprobar lo que el compañero le explica. (46)

CUESTIÓN 13: ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD.

A juicio de la observadora, la ATENCION A LA DIVERSIDAD ha sido muy positiva, pero no por la propia estrategia, sino por el contexto de los alumnos. Dado que los alumnos eran un grupo especial y ellos se sentían diferentes, esa diferencia , ese sentirse especiales es lo que provocaba que los alumnos más retrasados se esforzaran y los más avanzados que ayudaran a los compañeros y avanzaran más. (47), (48).

CUESTIÓN 14: MOTIVACIÓN:

No está muy claro que el alumno pueda descubrir con más facilidad los contenidos, es más, la observadora considera que el uso del ordenador a priori resulta más entretenido para el alumno pero eso no significa que esté aprovechando todo el tiempo en aprender matemáticas (4).

Según la observadora, todos los alumnos de esta generación tienen problemas para enfrentarse con un papel en blanco por problemas educativos generales, y en consecuencia los alumnos del grupo de DERIVE no son una excepción para trasladar DERIVE a lápiz y papel, además que el ordenador les resulta más entretenido y cómodo (9).

Respecto a la MOTIVACIÓN; considera que los alumnos estaban muy motivados, y no solo los alumnos ella misma estaba muy motivada, aprendió bastante respecto a las posibilidades educativas del ordenador, aunque conviene tener presente que era un grupo de pocos alumnos y diferente. (49)

OTRAS CUESTIONES:

La observadora considera que con esta estrategia el profesor puede tomar dos tipos de actitudes:

- si el profesor está comprometido con la educación, le obliga a realizar un esfuerzo muy importante para hacer llegar la idea al alumno. Además le permite acercarse más al alumno.
- si por el contrario el profesor pretende escaparse del proceso educativo, el ordenador le permite enmascarar en cierta medida su trabajo haciendo creer que está enseñando cuando lo que puede hacer es hacer perder el tiempo. Puede permitir a un alumno distanciarse del proceso encubriendo su postura de profesor, incluso sin saber nada. (43), (44).

Según la observadora, la forma de ser del profesor y su forma de concebir la educación y la docencia influye mucho si se utiliza esta estrategia didáctica. (45)

El curso que incorpora DERIVE debe de estar muy bien diseñado para evitar algunos peligros como es la perdida de conciencia del tiempo. (3)

A la vista de estos aspectos característicos extraídos directamente de los elementos significativos de la entrevista podemos elaborar las siguientes conclusiones que perfilan cada una de las cuestiones de la investigación, incluso aparece alguna cuestión emergente que comentamos a continuación:

1) El sistema de notación que utiliza DERIVE, en particular su forma de introducir los datos obliga al alumno a pensar en el concepto que está intentando representar situación que resulta muy positiva para el álgebra lineal, aunque a veces se puede correr el riesgo de mecanizar el proceso. Este sistema de notación resulta un sistema más cercano al alumno porque es más cercano a su propio lenguaje lo cual nos permite afirmar que DERIVE tiene ciertas características de sistema de notación intermedio, aunque los alumnos tienen dificultades para trasladar los procesos de DERIVE a lápiz y papel pero porque a juicio de la observadora en general los alumnos tienen problemas a enfrentarse con un papel en blanco y por otro lado

también puede provocar que el alumno llegue a veces a los resultados sin saber los pasos intermedios.

2) La interactividad entre los alumnos ha sido muy buena pero por varios factores además del uso del ordenador: era un grupo reducido de alumnos y además un grupo especial al que accedieron de forma voluntaria hecho que convertía a los alumnos en un grupo diferente con todos los elementos que tienen de positivo y negativo este tipo de grupos. Respecto a la interactividad entre alumnos y profesor la interactividad ha sido muy concreta centrada en el curso y en cuestiones concretas, no ha habido una comunicación muy profunda que haya suscitado contactos posteriores y continuados entre alumno y profesor.

3) Los alumnos han sido PROTAGONISTAS de su proceso de aprendizaje pero desde el punto de vista manipulativo, porque han sabido controlar la operativa del álgebra lineal con DERIVE. No se ha tratado de un protagonismo en el sentido de buscar e investigar por sí mismos, ya que para ello el alumno debe tener la inquietud de búsqueda e investigación necesarias, situación que no se daba de forma generalizada en el aula.. La CREATIVIDAD se ha limitado a algunos alumnos más aventajados, con una capacidad para crear Matemáticas.

4) La estrategia con DERIVE no ha sido más beneficiosa para la comprensión de contenidos esenciales que en clases habituales, aunque considera que el curso estaba muy bien diseñado para centrar a los alumnos en lo esencial. Por otro lado las ventajas que pueda haber tenido este grupo respecto a los contenidos esenciales han sido debidas a que era un grupo especial y reducido.

5) DERIVE puede provocar que el alumno llegue al resultado sin saber los pasos intermedios, pero no obstante con DERIVE se permite que los alumnos se concentren en la operativa necesaria para comprender el álgebra lineal, y se ha favorecido la eliminación de cálculos repetitivos innecesarios, sin eliminar la operatividad necesaria para el comprender el álgebra lineal.

6) La experimentación se ha potenciado en aquellos alumnos con cierto conocimiento e inquietud matemática, por sí mismo DERIVE no provoca la experimentación, es necesario que el alumno tenga capacidades. Además no está muy claro a juicio de la observadora que el alumno pueda descubrir con más facilidad los contenidos con DERIVE.

7) El aprendizaje que se ha potenciado ha sido el aprendizaje por descubrimiento, aunque no esta claro que ese DESCUBRIMIENTO haya sido significativo, aunque el hecho de ser un grupo pequeño y diferente ha podido provocar situaciones favorables para el mismo. Este aprendizaje tiene mucha relación con el tipo de protagonismo que adquirieron los alumnos, que en general salvo algunos casos especiales no era un descubrimiento creativo, que incitase al alumno a investigar o descubrir, más bien era un descubrimiento manipulativo que les permitía hacer cosas pero sin saber muy bien adonde llegar. Considera que este tipo de clases es un complemento ideal de las típicas clases magistrales.

8) Para que los alumnos aplicaran varias estrategias de resolución de problemas deben de aprenderlas, y en ese sentido el programa facilitaba el uso de varias estrategias porque facilitaba el trabajo, aunque la tendencia de los alumnos era de buscar un método de resolución y conformarse. Por otro lado DERIVE permite trabajar con problemas más reales e interesantes desde el punto de vista económico, para dar significado a los contenidos.

9) DERIVE no ha sido una BARRERA ADICIONAL para el aprendizaje de los contenidos del álgebra lineal pues se trata de un programa muy sencillo, incluso afirma que la versión de MS-DOS es mejor didácticamente que la versión de WINDOWS.

10) Según la observadora cualificada el programa en sí mismo no provoca AUTONOMÍA COGNITIVA en el alumno, aunque para algunos tuviesen capacidad para adquirirla, de hecho se la potencia.

11) La relación dialéctica entre los alumnos ha sido muy buena pero no por el hecho de usar el ordenador sino porque el grupo era reducido y se trataba de un grupo muy especial. Respecto a las relaciones de comunicación alumnos y profesor, considera que se han limitado a una comunicación concreta, si llegar a relaciones dialécticas profundas que se hubieran manifestado con visitas de los alumnos al profesor en ocasiones posteriores, incluso en años posteriores, situación que no se ha dado. También ha influido positivamente que el profesor tenía una concepción abierta ante al alumnado, pero podría haber sido todo lo contrario pues el profesor puede refugiarse en el ordenador para no establecer comunicaciones con el alumnado.

12) La observadora considera que la estrategia favorece la interactividad entre los alumnos a nivel colaborativo, pero no es claro que sea positivo pues se pueden transmitir errores y hábitos negativos de unos alumnos a otros; aunque los alumnos tenían el ordenador para comprobar esos posibles errores que se pudieran transmitir, pudiendo actuar como árbitro.

13) La atención a la diversidad ha sido muy positiva, pero no sólo por la propia estrategia y el uso de DERIVE sino porque el grupo de alumnos era reducido y además se trataba un grupo en el que los alumnos se sentían diferentes, y este hecho les permitía superarse y esforzarse más.

14) En general el alumno estaba muy entretenido en clase, con la manipulación del ordenador, además estaban motivados por la clase, de hecho ella misma se encontró muy motivada para aprender elementos didácticos que pudiera ofrecer el curso. Esta didáctica hace la clase más amena para el alumno claramente.

15) Hay dos cuestiones que podemos considerar importantes y que se obtienen de forma emergente a la vista de la entrevista relacionadas con:
    - Un profesor que utilice esta estrategia puede tomar dos tipos de actitudes:
        - Si el profesor está comprometido con la educación y desea enseñar, esta estrategia le obliga a un esfuerzo muy importante para acercarse al alumno y para acercar el contenido al alumno.
        - Si el profesor desea escaparse del proceso educativo, esta estrategia, y en particular el ordenador le permite refugiarse en el mismo para enmascarar el trabajo que realiza, de tal forma que sumerja al alumno en un conjunto de actividades que no conduzcan al aprendizaje y solo a la manipulación.
    - La forma de ser del profesor, y su forma de concebir la educación es un factor que puede influir enormemente en la práctica de esta estrategia didáctica.

V.4.4. TRIANGULACIÓN DE DATOS.

Para realizar la triangulación de datos, hemos ido analizando en cada cuestión las conclusiones obtenidas en cuatro ámbitos de datos diferentes:

- el estudio de casos
- las notas de campo
- los datos cuantitativos
- las observaciones de la observadora cualificada

Comparando estos resultados para obtener un denominador común a todos ellos que avalan de esta forma las conclusiones de nuestra investigación. A continuación realizamos este proceso de triangulación:

<u>CUESTIÓN 1. ¿DERIVE como sistema de notación intermedio?</u>

Conclusiones del estudio de casos:

El sistema de notación de DERIVE podemos afirmar que tiene las siguientes características:

- DERIVE es un sistema de notación que no ha facilitado la investigación ni la visualización de los contenidos aunque puede haber sido fundamentalmente a la falta de costumbre.
- La forma de introducir los datos en DERIVE ha facilitado la asimilación de los procesos rutinarios y la comprensión de los métodos que se han ido introduciendo.
- DERIVE proporciona un estilo especial en la resolución de problemas, ya que las operaciones pasan a segundo plano y se puede estar más atento en los planteamientos.
- Los procesos de transferencia entre DERIVE y lápiz y papel no ofrecen grandes dificultades aunque ha sido más difícil el proceso de transferencia de DERIVE a lápiz y papel
- DERIVE es un sistema de notación más cómodo que lápiz y papel, que obliga a entender previamente los contenidos.
- DERIVE es un buen sistema de notación para el aprendizaje pues evita operaciones y procesos intermedios, se motiva y estimula la comprensión y no permite divagar en lo que se está haciendo.
- DERIVE es un sistema de notación complementario al lápiz y papel.

Conclusiones de las notas de campo:

No hay datos para valorar.

Conclusiones de los datos objetivos:

No hay datos para valorar.

Conclusiones de la entrevista con la observadora cualificada:

El sistema de notación que utiliza DERIVE, en particular su forma de introducir los datos obliga al alumno a pensar en el concepto que está intentando representar situación que resulta muy positiva para el álgebra lineal, aunque a veces se puede correr el riesgo de mecanizar el proceso. Este sistema de notación resulta un sistema más cercano al alumno porque es más cercano a su propio lenguaje lo cual nos permite afirmar que DERIVE tiene ciertas características de sistema de notación intermedio, aunque los alumnos tienen dificultades para trasladar los procesos de DERIVE a lápiz y papel pero porque a juicio de la observadora en general los alumnos tienen problemas a enfrentarse con un papel en blanco y por otro lado también puede provocar que el alumno llegue a veces a los resultados sin saber los pasos intermedios.

CONCLUSIONES FINALES DE LA INVESTIGACIÓN:

El sistema de notación que ofrece DERIVE es un sistema de notación intermedio por varios motivos:

- *Es un sistema de notación más cercano al alumno y más cómodo.*
- *La forma de introducir los datos de álgebra lineal en DERIVE permite que el alumno asimile los procesos rutinarios y tenga que comprender los conceptos que está manipulando, pues le obliga a reflexionar en el concepto que va a manejar.*
- *Es un sistema de notación complementario al del lápiz y papel.*

Estas características nos permiten caracterizar positivamente el sistema de notación empleado por DERIVE aunque no haya facilitado la investigación y la visualización de contenidos.

CUESTIÓN 2. Interactividad suscitada por la estrategia didáctica.

Conclusiones del estudio de casos:

En el estudio de casos hemos analizado tres ambientes de interactividad obteniendo las siguientes conclusiones:

A) Respecto de la interactividad entre ALUMNOS-PROFESOR; hemos concluido que la relación entre alumnos y profesor ha sido muy buena, valorándose como una de los tres ambientes más positivos del curso, el profesor ha estado cercano, resolviendo las dudas y ofreciendo un ambiente de gran confianza. Esto ha estado motivado porque se trataba de un grupo reducido de alumnos y porque la estrategia didáctica ha provocado situaciones que favorecían la interacción profesor alumno, donde el ordenador ha jugado un papel importante para esta interactividad.

B) Respecto de la interactividad entre los ALUMNOS, podemos decir que también ha sido una muy buena interactividad, aunque valorada por los alumnos como la peor de las tres. Esta interactividad se ha dado fundamentalmente en parejas de trabajo que en ocasiones ha ampliado su relación a un grupo de entorno, la estrategia didáctica ha sido un elemento fundamental pues ha posibilitado la experimentación y ese tipo de colaboraciones, por otro lado el trabajo con ordenador también es susceptible de este tipo de comunicación entre alumnos.

C) Respecto a la interactividad ALUMNO-PROGRAMA, podemos afirmar que ha sido bastante positiva, valorada por los alumnos con una media de 3,75 sobre 5. La rapidez de respuesta del programa DERIVE y los mensajes que iban recibiendo los alumnos del programa han sido los motivos fundamentales de esta buena interactividad, permitiendo a los alumnos en ocasiones detectar errores y en otras orientar a los alumnos para futuros intentos. Por tanto DERIVE ha sido un mediador positivo en el aprendizaje.

Conclusiones de las notas de campo:

Ha habido bastante interactividad entre los alumnos como muestran las colaboraciones que se han producido.

La interactividad entre alumnos se ha centrado en grupos de trabajo en torno a las ubicaciones que han ido adoptando a lo largo del curso.

La comunicación con los alumnos ha sido muy fluida, posibilitada por la rapidez de cálculo del ordenador que facilitaba explicar las dudas de forma rápida y porque el grupo era reducido.

Conclusiones de los datos objetivos:

No hay datos para valorar

Conclusiones de la entrevista con la observadora cualificada:

La interactividad entre los alumnos ha sido muy buena pero por varios factores además del uso del ordenador: Era un grupo reducido de alumnos y además un grupo especial al que accedieron de forma voluntaria hecho que convertía a los alumnos en un grupo diferente con todos los elementos que tienen de positivo y negativo este tipo de grupos. Respecto a la interactividad entre alumnos y profesor la interactividad ha sido muy concreta centrada en el curso y en cuestiones concretas, no ha habido una comunicación muy profunda que haya suscitado contactos posteriores y continuados entre alumno y profesor.

CONCLUSIONES FINALES DE LA INVESTIGACIÓN:

La interactividad entre los alumnos ha sido muy positiva, propiciada por el uso del ordenador, por ser un grupo reducido, por ser un grupo diferente y por la posibilidad de *experimentación provocado por la estrategia didáctica; suscitando un trabajo en grupo fundamentado básicamente en parejas de trabajo o en grupos de entorno de ubicación.*

La interactividad entre alumnos y profesor también ha sido muy positiva, ya que el profesor ha respondido rápidamente las preguntas y dudas que se iban planteando, ha sido una comunicación concreta centrada en los contenidos de la asignatura generado porque el grupo de alumnos era pequeño, por la propia estrategia didáctica.

La interactividad que ha ofrecido DERIVE a los alumnos ha sido también muy alta por su rapidez de respuesta y porque los mensajes que ofrecía el programa se entendían generalmente bien.

<u>CUESTIÓN 3. Protagonismo y creatividad propiciado por la estrategia didáctica.</u>

Conclusiones del estudio de casos:

El análisis de estas dos características nos ha conducido a las siguientes conclusiones:

a) El tipo de PROTAGONISMO suscitado por la estrategia didáctica al alumnado ha tenido varias características:

   i. Ha sido un protagonismo que les obligaba a pensar en los planteamientos de los problemas y en los ejercicios con el uso de DERIVE.

   ii. Esta estrategia ha suscitado en el alumnado una actitud positiva de búsqueda en las investigaciones que se proponían, estimulando así el descubrimiento de los conceptos con ayuda del programa.

   iii. En la resolución de problemas finales el alumno ha intentado analizar en algunas ocasiones varios caminos alternativos de resolución sin que esto supusiera un coste de cálculo adicional, ya que DERIVE facilitaba el cálculo.

   iv. El grado de protagonismo ha sido bastante elevado pues DERIVE no ha generado excesiva dependencia del alumno al uso del mismo, aunque en las cuestiones teóricas le ha ofrecido cierta seguridad.

b) Respeto a la AUTOCREACIÓN o CREATIVIDAD suscitada por la estrategia didáctica podemos afirmar que las actividades de investigación y los problemas han intentado estimular esta capacidad creativa, por un lado con las actividades de descubrimiento y por otro con las actividades de exploración, aunque se ha podido constatar un grado elevado de creatividad.

Conclusiones de las notas de campo:

Ha habido un elevado índice de asistencia a clases: más del 75% de los alumnos han asistido a más del 75% de las clases, indicador de cierto grado de protagonismo de los alumnos.

El guión de trabajo ha sido un elemento fundamental para que el alumno adquiriera PROTAGONISMO en el proceso de aprendizaje.

Conclusiones de los datos objetivos:

El porcentaje de alumnos presentados en el subgrupo A (93,75%) ha sido muy superior al de alumnos presentados en el subgrupo B (59,12%)

Conclusiones de la entrevista con la observadora cualificada:

Los alumnos han sido PROTAGONISTAS de su proceso de aprendizaje pero desde el punto de vista manipulativo, se han sentido actores del proceso, pero no han sido protagonistas en el sentido de buscar e investigar por sí mismos, ya que para ello el alumno debe tener la inquietud de búsqueda e investigación que no es generalizable. Los alumnos han sido protagonistas porque han sabido controlar la operativa del álgebra lineal con DERIVE. La CREATIVIDAD se ha limitado a algunos alumnos más aventajados, con una capacidad para crear matemáticas.

CONCLUSIONES FINALES DE LA INVESTIGACIÓN:

El grado de protagonismo de los alumnos ha sido bastante elevado como muestran por un lado el elevado índice de asistencia, el elevado porcentaje de alumnos presentados, la valoración de la observadora cualificada y por el estudio de casos que hemos realizado. Se trata por otro lado de un protagonismo favorecido por la estrategia gracias a las actividades de descubrimiento, por la actitud positiva de búsqueda que estimulaba el programa y porque DERIVE obligaba a pensar al alumno en los planteamiento de los problemas y ejercicios.

Sin embargo la creatividad del alumno, aunque se han intentado estimular con actividades de exploración y de investigación no se puede decir que haya sido un elemento claramente observable, salvo en algunos alumnos aislados.

CUESTIÓN 4. La estrategia se centra en los contenidos esenciales.

Conclusiones del estudio de casos:

Los alumnos han sabido distinguir en general lo que eran contenidos esenciales de los contenidos no esenciales del programa y aunque algunos contenidos esenciales han podido correr el peligro de convertirse en procesos automatizables (cálculo de determinantes, cálculo de autovalores y cálculo de rangos), en general podemos afirmar que los alumnos han tenido claros los contenidos fundamentales de cada tema. Por otro lado aunque en general DERIVE ha facilitado la comprensión de los conceptos, no ha provocado dificultades conceptuales especiales y no ha sido imprescindible para contestar a las cuestiones teóricas parece que algunas habilidades básicas de cálculo han quedado algo mermadas ya que el alumno no ha desarrollado todos los cálculos a mano. Estas circunstancias nos muestran que la estrategia ha conseguido que los alumnos sepan entender los contenidos esenciales del programa aunque la tendencia del alumnado haya sido la de intentar automatizar algunos de los procesos que incorporaban estos contenidos.

Conclusiones de las notas de campo:

Con el guión de trabajo se han puesto de manifiesto cuáles eran los contenidos esenciales del programa.

Las dudas se han centrado en contenidos de álgebra lineal más que en dudas de manejo del programa.

Conclusiones de los datos objetivos:

No hay datos para valorar

Conclusiones de la entrevista con la observadora cualificada:

La estrategia con DERIVE no ha sido más beneficiosa para la comprensión de contenidos esenciales que en clases habituales, aunque considera que el curso estaba muy bien diseñado para centrar a los alumnos en lo esencial. Por otro lado las ventajas que pueda haber tenido este grupo respecto a los contenidos esenciales han sido debidas a que era un grupo especial y reducido.

CONCLUSIONES FINALES DE LA INVESTIGACIÓN:

La estrategia didáctica ha centrado la atención del alumno sobre los contenidos esenciales del programa con ayuda del guión de trabajo, este ha sido uno de los elementos que ha permitido que los alumnos hayan sabido distinguir claramente entre los contenidos esenciales y los no esenciales del programa, aunque ha habido una tendencia general de los alumnos para automatizar aquellos procesos que formaban parte de contenidos esenciales. Esto ha provocado que los alumnos hayan perdido habilidades manuales de cálculo.

CUESTIÓN 5. La estrategia didáctica con el uso de DERIVE ¿elimina el esfuerzo rutinario?

Conclusiones del estudio de casos:

El programa DERIVE ha ayudado a los alumnos a realizar con menos esfuerzo tanto los problemas como los ejercicios propuestos, incluso les ha ayudado a plantearlos de una manera distinta invirtiendo en general más tiempo a los planteamientos que a la propia resolución, circunstancia que ha permitido dedicar más tiempo a la experimentación e investigación. Sin embargo DERIVE ha mermado las habilidades y destrezas manuales de cálculo, obligando a los alumnos a utilizar DERIVE en las cuestiones teóricas para resolver los pequeños cálculos, aunque esta disminución de habilidades ha permitido que los alumnos planteen mejor los problemas y reflexionen más en la forma de resolver.

Conclusiones de las notas de campo:

DERIVE ha servido a los alumnos para experimentar una vez que han dominado su filosofía de funcionamiento.

Conclusiones de los datos objetivos:

No hay datos para valorar.

Conclusiones de la entrevista con la observadora cualificada:

DERIVE puede provocar que el alumno llegue al resultado sin saber los pasos intermedios, pero no obstante con DERIVE se permite que los alumnos se concentren en la operativa necesaria para comprender el álgebra lineal, y se ha favorecido la eliminación de cálculos repetitivos innecesarios, sin eliminar la operatividad necesaria para el comprender el álgebra lineal.

CONCLUSIONES FINALES DE LA INVESTIGACIÓN:

DERIVE es un programa que permite realizar con menos esfuerzo los cálculos repetitivos y rutinarios necesarios para resolver los problemas y ejercicios de álgebra lineal, permitiendo que los alumnos se concentren en la propia operativa necesaria para entender el álgebra lineal; esto ha permitido a los alumnos dedicar más tiempo a la experimentación y a la investigación, aunque ha provocado cierta disminución en las habilidades y destrezas manuales de cálculos.

CUESTIÓN 6. ¿DERIVE se convierte en una herramienta de experimentación?

Conclusiones del estudio de casos:

La forma de uso que se ha hecho del programa DERIVE en el aula ha motivado la investigación de cuestiones y ha ayudado a los alumnos a resolver problemas a pesar de que la experimentación no fuese un estilo de resolución dominada por los mismos. Además hemos constatado que el grado de experimentación parece haber aumentado a lo largo del curso. Esta experimentación además de ayudar a comprender mejor los contenidos ha suscitado una actitud de búsqueda de soluciones y resultados. Estas características nos permiten afirmar que DERIVE ha sido utilizado como una herramienta de experimentación, motivando y suscitando interés por buscar la solución a las cuestiones y problemas, a pesar de esa carencia por parte del alumnado en los procesos experimentales.

Conclusiones de las notas de campo:

No hay datos para valorar.

Conclusiones de los datos objetivos:

No hay datos para valorar.

Conclusiones de la entrevista con la observadora cualificada:

La experimentación se ha potenciado en aquellos alumnos con cierto conocimiento e inquietud matemática, por sí mismo DERIVE no provoca la experimentación, es necesario que el alumno tenga capacidades. Además no está muy claro a juicio de la observadora que el alumno pueda descubrir con más facilidad los contenidos con DERIVE.

CONCLUSIONES FINALES DE LA INVESTIGACIÓN:

Aunque la experimentación no es un estilo de pensamiento utilizado por los alumnos, el tipo de uso que hemos hecho del programa DERIVE ha propiciado una actitud de búsqueda de soluciones en los problemas y cuestiones que se planteaban, y podemos decir que ha aumentado el grado de experimentación de los alumnos. Por otro lado DERIVE ha dejado al alumno espacios para pensar, pues se deja lo rutinario para el ordenador y permite dedicarse al alumno más a la investigación. Se ha constatado que en algunos alumnos este grado de experimentación ha sido bastante importante.

CUESTIÓN 7: ¿La estrategia favorece los aprendizajes significativos?

Conclusiones del estudio de casos:

El tipo de aprendizaje que se ha dado en el aula tiene las siguientes características:

- Ha sido un aprendizaje por descubrimiento, en el que los alumnos con experimentación e investigación han ido descubriendo los contenidos con ayuda del programa DERIVE.
- ha sido un aprendizaje activo, en el que el alumno ha sido protagonista del proceso de descubrimiento

Por otro lado podemos decir que los conocimientos previos de los alumnos han sido suficientes para conseguir comprender los principales contenidos de álgebra lineal que se habían introducido. Esto nos muestra que los aprendizajes que han adquirido los alumnos han sido significativos, aunque en ocasiones los alumnos no han conseguido con la experimentación construir el conocimiento pero este tipo de dinámica ha ido generando una estructura de pensamiento que ha facilitado el descubrimiento de conceptos nuevos por medio del ordenador. Sin embargo hemos encontrado algunos datos contradictorios relacionados con la facilidad con la que los alumnos han olvidado algunos conceptos que pueden mostrar que no los han adquirido de forma significativa.

Conclusiones de las notas de campo:

No hay datos para valorar.

Conclusiones de los datos objetivos:

El porcentaje superior de aprobados del subgrupo A (81,25%) sobre el de aprobados en el subgrupo B (41,6%) es un indicador que puede señalar la existencia de más aprendizaje significativo en el subgrupo A.

Conclusiones de la entrevista con la observadora cualificada:

El aprendizaje que se ha potenciado ha sido el aprendizaje por descubrimiento, aunque no está claro que ese DESCUBRIMIENTO haya sido significativo, aunque el hecho de ser un grupo pequeño y diferente ha podido provocar situaciones favorables para el mismo. Este aprendizaje tiene mucha relación con el tipo de protagonismo que adquirieron los alumnos, que en general salvo algunos casos especiales no era un descubrimiento creativo, que incitase al alumno a investigar o descubrir, más bien era un descubrimiento manipulativo que les permitía hacer cosas pero sin saber muy bien a dónde llegar. Considera que este tipo de clases es un complemento ideal de las típicas clases magistrales.

CONCLUSIONES FINALES DE LA INVESTIGACIÓN:

El aprendizaje que se ha potenciado en esta estrategia didáctica ha sido un aprendizaje por DESCUBRIMIENTO y un aprendizaje activo, aunque quizás el hecho de ser un grupo pequeño y diferente puede haber provocado ciertas situaciones favorables para ello que se han sumado a los factores provocados por la propia estrategia didáctica y el uso del ordenador. Sin embargo aunque como veremos más adelante el grado de motivación del alumno ha sido muy elevado y como hemos visto el protagonismo de los alumnos también ha sido fuerte, no podemos garantizar que el tipo de aprendizaje haya sido totalmente significativo. Podemos afirmar que los contenidos que hayan adquirido los alumnos probablemente hayan quedado afianzados de forma significativa en virtud del proceso de aprendizaje que se ha realizado.

<u>CUESTIÓN 8: ¿Se favorecen varias estrategias de resolución de problemas?</u>

Conclusiones del estudio de casos:

Los problemas que se han planteado al finalizar el capítulo podían tener varios caminos de resolución, y estaban planteados para este fin, si a este hecho unimos tres circunstancias:

1) que la metodología utilizaba proponía la utilización de varios caminos en la resolución de problemas
2) la actitud de los alumnos era una actitud de búsqueda de las soluciones podemos decir que las pautas iniciales eran propensas para que los alumnos resolvieran los problemas utilizando varias estrategias de resolución
3) y consideramos que el uso del programa DERIVE facilitaba mayor facilidad en el cálculo y la resolución de problemas,

podemos concluir que la estrategia tenía todos los ingredientes necesarios para que los alumnos utilizaran varias estrategias en la resolución de problemas, mucho más que cuando los tenían que resolver con lápiz y papel. Sin embargo, el alumno ha utilizado en general una sola estrategia si esta le permitía obtener la solución, no obstante en caso contrario buscaba otros caminos. Además podemos observar que los alumnos han sabido dominar problemas en los que intervenían la modelización vectorial y la modelización con el uso de sistemas de ecuaciones lineales, y han tenido problemas con la inducción, la experimentación y la modelización matricial. Estos caracteres nos permiten afirmar que pese a que la estrategia ofrecía todos los condicionantes previos para que los alumnos utilizasen varias estrategias en su resolución sin embargo los alumnos se han conformado en general con una estrategia de resolución.

Conclusiones de las notas de campo:

DERIVE ha servido a los alumnos para resolver problemas por medio de la experimentación.

Conclusiones de los datos objetivos:

No hay datos para valorar.

Conclusiones de la entrevista con la observadora cualificada:

Para que los alumnos apliquen varias estrategias de resolución de problemas deben aprenderlas, y en ese sentido el programa facilitaba el uso de varias estrategias porque facilitaba el trabajo, aunque la tendencia de los alumnos era buscar un método de resolución y conformarse. Por otro lado DERIVE permite trabajar con problemas más reales e interesantes desde el punto de vista económico, para dar significado a los contenidos.

CONCLUSIONES FINALES DE LA INVESTIGACIÓN:

La estrategia didáctica empleada con el uso de DERIVE facilitaba que los alumnos utilizasen varias estrategias de resolución de problemas, de hecho se insistía mucho en la metodología sobre la posibilidad de utilizar varios caminos en la resolución de problemas, incluso los problemas planteados tenían varios caminos sencillos para su resolución. La estrategia tenía por tanto todos los ingredientes necesarios para que los alumnos utilizaran varias estrategias en la resolución de problemas, muchas más que cuando se les daban a resolver con lápiz y papel; sin embargo, el alumno en general ha utilizado una sola estrategia si con esta conseguía la solución del problema, empleando otros caminos o ensayando otros caminos en caso de fracaso. Las estrategias que ofrecieron mayores problemas a los alumnos fueron la inducción, la modelización matricial de problemas reales y la resolución de problemas con experimentación, aunque dominaron los problemas de modelización vectorial y en los que intervenía como modelo un sistema de ecuaciones lineales.

CUESTIÓN 9: ¿DERIVE genera barreras adicionales?

Conclusiones del estudio de casos:

Aunque los alumnos tenían una predisposición positiva hacia el manejo de ordenadores, sin embargo el análisis de los casos nos ha permitido deducir que el programa DERIVE no ha generado barreras adicionales para el aprendizaje de los contenidos de álgebra lineal ya que:

- El aprendizaje del programa no ha requerido mucho tiempo adicional, se trata de un programa fácil de aprender y de manejar

- Los alumnos no han tenido dificultades significativas en el manejo del programa, aunque han surgido dificultades en la programación de función y con el solapamiento de variables.
- DERIVE ha resultad una herramienta más cómoda y útil que el lápiz y papel
- La valoración positiva de los alumnos respecto al uso de DERIVE
- DERIVE no les ha causado problemas en el examen final, al contrario ha favorecido su trabajo.

Además debemos decir que no solo no ha generado barreras sino que además ha facilitado en muchas ocasiones la comprensión de conceptos y la resolución de problemas.

Conclusiones de las notas de campo:

Las dudas que han presentado los alumnos respecto del programa han sido pocas, y han decrecido a medida que avanzaba el curso.

El programa DERIVE no ha ofrecido grandes dificultades para su comprensión.

Conclusiones de los datos objetivos:

No hay datos para valorar.

Conclusiones de la entrevista con la observadora cualificada:

DERIVE no ha sido una BARRERA ADICIONAL para el aprendizaje de los contenidos del álgebra lineal pues se trata de un programa muy sencillo, incluso afirma que la versión de MS-DOS es mejor didácticamente que la versión de WINDOWS.

CONCLUSIONES FINALES DE LA INVESTIGACIÓN:

*DERIVE ha sido un programa que **no ha generado barreras adicionales** para el aprendizaje de los principales contenidos de álgebra lineal ya que se trata de un programa fácil de aprender y de manejar, aunque en ocasiones han surgido pequeñas dificultades relacionadas fundamentalmente con la programación de funciones y ciertos solapamientos de variables. Es más, DERIVE ha facilitado en muchas ocasiones la comprensión de contenidos y la resolución de problemas.*

CUESTIÓN 10: ¿La estrategia favorece la AUTONOMÍA COGNITIVA?

Conclusiones del estudio de casos:

En general la estrategia didáctica ha generado cierta AUTONOMÍA COGNITIVA en los alumnos, permitiéndoles indagar, experimentar e investigar por su cuenta en las diferentes actividades que se les han propuesto, aunque en ocasiones no llegase a soluciones definitivas, pero DERIVE les ha brindado la posibilidad de iniciar un camino muy positivo para el descubrimiento matemático.

Conclusiones de las notas de campo:

El guión de trabajo ha sido un elemento que ha motivado la autonomía del alumno para desarrollar la asignatura.

Al principio los alumnos tenían cierta dependencia del programa, luego han ido adquiriendo autonomía para resolver problemas y cuestiones.

Conclusiones de los datos objetivos:

El grado de autonomía cognitiva que ha proporcionado DERIVE ha sido superior al que tenían los alumnos del subgrupo B, por el número de alumnos presentados.

Conclusiones de la entrevista con la observadora cualificada:

Según la observadora cualificada el programa en sí mismo no provoca AUTONOMÍA COGNITIVA en el alumno, aunque para algunos que ya tuviesen capacidad para adquirirla, de hecho se la potencia.

CONCLUSIONES FINALES DE LA INVESTIGACIÓN:

El grado de autonomía que han adquirido los alumnos, aunque no ha sido muy elevado, sin embargo sí podemos decir que la forma de uso de DERIVE les ha permitido a los alumnos intentar encontrar las soluciones a las tareas propuestas en numerosas ocasiones. Ésta circunstancia viene avalada por un lado por el estudio de los casos que acabamos de comentar, por otro lado teniendo en cuenta el elevado porcentaje de alumnos presentados en el subgrupo A, muy superior al del subgrupo B, y las observaciones realizadas por el investigador nos permiten afirmar que efectivamente la estrategia ha favorecido cierta autonomía cognitiva en los alumnos, aunque a juicio de la observadora cualificada esta autonomía solo se ha dado en alumnos con capacidad.

CUESTIÓN 11: ¿La estrategia favorece la RELACIÓN DIALECTICA?

Conclusiones del estudio de casos:

Las relaciones de comunicación entre los alumnos han sido en general bastante buenas, y se han caracterizado porque se han centrado sobre las PAREJAS DE PUPITRE y han sido muy DISTENDIDAS, centrándose en el contraste de resultados de los contenidos del programa. Aunque en general no ha habido mucha comunicación antes y después de las clases podemos decir que se han establecido solo en algunos casos relaciones personales más profundas, pero no significativas.

Las relaciones entre profesor y alumno han sido bastante buenas, ya que el profesor se encontraba más cercano y accesible que en clases habituales permitiendo resolver muchas dudas según se iban generando; esto ha sido motivado porque eran pocos alumnos aunque también ha influido el tipo de didáctica.

Por otro lado podemos decir que el ambiente general de la clase ha sido bastante comunicativo, potenciando una comunicación más directa entre profesor y alumnos y los propios alumnos, un factor positivo en este ambiente ha sido la estrategia didáctica empleada, que permitía la experimentación y descubrimiento y las colaboraciones entre alumnos.

Conclusiones de las notas de campo:

La actitud positiva de los alumnos relacionada con la participación en clase ha propiciado unas buenas relaciones de comunicación, favoreciendo las relaciones dialécticas entre los mismos.

Los agrupamientos de los alumnos muestran las relaciones de comunicación que ha habido entre los alumnos, estableciéndose básicamente 5 grandes grupos de comunicación, aunque el núcleo básico eran las parejas de trabajo.

Conclusiones de los datos objetivos:

No hay datos para valorar.

Conclusiones de la entrevista con la observadora cualificada:

La relación dialéctica entre los alumnos ha sido muy buena pero no por el hecho de usar el ordenador sino porque el grupo era reducido y se trataba de un grupo muy especial. Respecto a las relaciones de comunicación alumnos y profesor, considera que se han limitado a una comunicación concreta, si llegar a relaciones dialécticas profundas que se hubieran manifestado con visitas de los alumnos al profesor en ocasiones posteriores, incluso en años posteriores, situación que no se ha dado. También ha influido positivamente que el profesor tenía una concepción abierta ante al alumnado, pero podría haber sido todo lo contrario pues el profesor puede refugiarse en el ordenador para no establecer comunicaciones con el alumnado.

CONCLUSIONES FINALES DE LA INVESTIGACIÓN:

Las relaciones de comunicación entre los alumnos han sido bastante buenas, en parte motivadas por el ambiente de comunicación que ha potenciado la estrategia didáctica, porque eran pocos alumnos y quizás porque se trataba de un grupo diferente.

En cuanto a las relaciones dialécticas entre profesor y alumnos han sido también muy positivas, el profesor ha resultado más cercano y accesible que en las clases habituales. En estas circunstancias han influido por un lado la concepción abierta del profesor respecto al alumnado, la propia metodología que propiciaba situaciones de comunicación y que el número de alumnos no era excesivo.

Por último debemos señalar que el ambiente de colaboración y trabajo que ha provocado la estrategia didáctica ha favorecido enormemente este tipo de relaciones dialécticas entre alumnos y entre alumnos y profesor.

CUESTIÓN 12: ¿La estrategia favorece un aprendizaje colaborativo?

Conclusiones del estudio de casos:

El tipo de trabajo realizado en el grupo ha merecido una valoración muy positiva por parte de los alumnos ya que por un lado ha ayudado a aprender mejor los conceptos del álgebra lineal y ha servido de apoyo en las manipulaciones con el programa. Estas colaboraciones que se han establecido entre los alumnos han sido favorecidas por el tipo de uso del programa que ha suscitado un tipo de colaboración ESPECIAL entre los alumnos, suscitando la comprobación y contraste de resultados y comentario así como las dudas. Podemos decir que estas colaboraciones especiales han sentado las bases mínimas para la aparición de aprendizajes colaborativos, y también han potenciado la comunicación en el aula. Por tanto podemos decir que el elemento social ha intervenido de forma positiva en la adquisición de aprendizajes así como para la creación en un buen ambiente de enseñanza.

Conclusiones de las notas de campo:

El ambiente de clase ha sido bastante colaborativo y participativo por parte de los alumnos, propiciando la cooperación entre alumnos.

La actitud de los alumnos ha sido muy positiva respecto a las colaboraciones en clase, compartiendo experimentos, errores y trabajo con DERIVE:

Los agrupamientos que hemos constatado a lo largo del curso han ido creando varios canales de colaboración. Estos han sido los canales que han propiciado una aprendizaje colaborativo, basados en las parejas de trabajo.

Los agrupamientos heterogéneos: alumnos aventajados y retrasados, han propiciado colaboraciones muy interesantes ya que los alumnos aventajados explicaban numerosos contenidos a los retrasados de su grupo.

Los alumnos estaban motivados para resolver los problemas en grupo, para obtener esas colaboraciones que facilitasen comprensión y resolución.

Conclusiones de los datos objetivos:

No hay datos para valorar.

Conclusiones de la entrevista con la observadora cualificada:

La observadora considera que la estrategia favorece la interactividad entre los alumnos a nivel colaborativo, pero no es claro que sea positivo pues se pueden transmitir errores y hábitos negativos de unos alumnos a otros; aunque los alumnos tenían el ordenador para comprobar esos posibles errores que se pudieran transmitir, pudiendo actuar como árbitro.

CONCLUSIONES FINALES DE LA INVESTIGACIÓN:

Se ha constatado que la estrategia didáctica empleada y las formas de uso del programa DERIVE han suscitado un ambiente de colaboración en el aula que se ha puesto de manifiesto a través de las comprobaciones de resultados, la resolución de dudas y la *exploración de problemas por los diferentes grupos de trabajo que se fueron creando a lo largo del curso. Aunque las colaboraciones en ocasiones pueden transmitir errores y malos hábitos entre los alumnos, sin embargo la existencia de un árbitro como el ordenador que permitía contrastar resultados ha podido eliminar esos errores de transferencia. Así pues podemos decir que estas colaboraciones han sido positivas para el aprendizaje de los diferentes conceptos de álgebra lineal que se han ido introduciendo así como para las relaciones de comunicación entre alumnos y entre alumnos y profesor. Circunstancias que nos sitúan en un contexto de ambientes colaborativos en los que se ha favorecido la aparición de aprendizajes colaborativos, donde el factor social ha sido muy beneficioso para el aprendizaje.*

CUESTIÓN 13: ¿La estrategia favorece una adecuada ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD?

Conclusiones del estudio de casos:

La estrategia didáctica ha favorecido una adecuada ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD por varios motivos:

- el ritmo de las clases ha sido en general ACTIVO Y DINÁMICO:
- los alumnos afirman no haberse aburrido en las clases en general, y tampoco parecen haberse perdido en las mismas
- Los tres niveles de aprendizaje que parece que había en clase han estado bien tratados con tres niveles de dificultad en problemas, de los que los alumnos afirman haber resuelto en su mayoría un 50%.
- el examen ha sido asequible de forma global.

Conclusiones de las notas de campo:

El guión de trabajo ha servido para facilitar al profesor una adecuada atención a la diversidad, en especial a los diferentes ritmos de aprendizaje observados en el aula.

Hemos detectado en casi todas las sesiones los alumnos que iban más destacados y los que sobresalían. De hecho algunos de los alumnos que observamos como retrasados hemos conseguido que aprobasen, aunque no en todos los casos.

Los agrupamientos han sido heterogéneos, había alumnos aventajados y retrasados; circunstancia que por otro lado ha favorecido esta atención a la diversidad por las situaciones de colaboración que se han propiciado.

Conclusiones de los datos objetivos:

Un indicador positivo sobre la atención a la diversidad es que el número de presentados en el subgrupo A ha sido superior a la del subgrupo B, tenían quizás más confianza en la metodología.

Conclusiones de la entrevista con la observadora cualificada:

La atención a la diversidad ha sido muy positiva, pero no sólo por la propia estrategia y el uso de DERIVE sino porque el grupo de alumnos era reducido y además se trataba un grupo en el que los alumnos se sentían diferentes, y este hecho les permitía superarse y esforzarse más.

CONCLUSIONES FINALES DE LA INVESTIGACIÓN:

La estrategia didáctica ha favorecido una adecuada ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD, por varios motivos fundamentales:

- *el ritmo de las clases se puede calificar de un ritmo ACTIVO Y DINÁMICO*
- *los alumnos no se han aburrido en las clases, ni siquiera los más aventajados, y además ningún alumno se ha encontrado perdido en las clases ya que ha encontrado rápido solución a sus dudas.*
- *los tres niveles de aprendizaje que parece que había en el aula han sido tratados adecuadamente con los tres niveles de dificultad en problemas, en el examen final, y en las cuestiones propuestas en clases que eran atendidas de forma adecuada por el profesorado con ayuda de los guiones de trabajo de cada sesión.*
- *el programa DERIVE ha permitido resolver las dudas que iban apareciendo de una manera automática*
- *los alumnos tenían confianza en sus posibilidades, situación observable de forma clara en el alto porcentaje de presentados en el subgrupo A, muy superior al del subgrupo B.*

además debemos añadir que el carácter reducido del grupo también ha influido enormemente en esta atención a la diversidad.

CUESTIÓN 14: ¿La estrategia aumenta la MOTIVACIÓN?

Conclusiones del estudio de casos:

La estrategia didáctica que hemos utilizado ha suscitado una MOTIVACIÓN ESPECIAL por el aprendizaje del álgebra lineal ya que:

- los alumnos en general no se han aburrido en clase y han sentido que las clases se pasaban rápidamente.
- El programa DERIVE ha permitido que los alumnos realizasen los cálculos de forma cómoda y rápida, les ha permitido que llegasen al final de los problemas, les hacía las clases más divertidas, e incluso en algunos casos les ha ayudado a aprobar la asignatura Matemáticas I.
- les ha incentivado su asistencia a clase.
- La metodología ha aumentado en general su interés por las matemáticas y en especial por la resolución de problemas

- los alumnos han dedicado una media de 5 horas semanales a las matemáticas.
- la valoración media de los alumnos respecto al curso ha sido de 7,9 sobre 10.
- y los alumnos volverían a elegir claramente este grupo experimental.

Conclusiones de las notas de campo:

Ha habido un elevado índice de asistencia a clases: más del 75% de los alumnos han asistido a más del 75% de las clases

El ambiente de clase ha sido muy participativo.

El guión de trabajo ha servido para facilitar que el alumno prestase toda su atención a las explicaciones del profesor.

Ha habido una actitud muy positiva y participativa por parte de los alumnos en el clase, lo cual es un nuevo indicador de la motivación que tenían éstos en el aula.

Los alumnos han estado muy motivados para la resolución de ejercicios y problemas en el aula.

Conclusiones de los datos objetivos:

El porcentaje de alumnos presentados en el subgrupo A ha sido muy superior al de alumnos presentado en el subgrupo B.

El porcentaje superior de aprobados en el subgrupo A respecto al subgrupo B es un indicador positivo que muestra mayor motivación en el subgrupo A, con nuestra estrategia didáctica.

Conclusiones de la entrevista con la observadora cualificada:

En general el alumno estaba muy entretenido en clase, con la manipulación del ordenador, además estaban motivados por la clase, de hecho ella misma se encontró muy motivada para aprender elementos didácticos que pudiera ofrecer el curso. Esta didáctica hace la clase más amena para el alumno claramente.

CONCLUSIONES FINALES DE LA INVESTIGACIÓN:

La estrategia didáctica que se ha empleado en este curso experimental ha provocado bastante MOTIVACIÓN entre los alumnos, como se puede observar en varios indicadores:

- *los alumnos se encontraban bastante entretenidos en clase, las clases resultaban divertidas y nada aburrida y además se les pasaban rápidamente.*
- *los alumnos han dedicado bastantes horas en media a la semana 5 horas, lo cual indica un enorme interés por la asignatura*
- *la valoración media de los alumnos a este curso ha sido bastante alta 7,9 sobre 10.*
- *los alumnos se han encontrado muy satisfechos con la metodología, de hecho todos en bloque volverían a elegir este grupo experimental.*
- *el programa DERIVE ha sido un elemento muy motivador para el aprendizaje porque les ha facilitado el cálculo, les ha permitido llegar al final en la resolución*

de muchos problemas, era un programa divertido y además en algunos casos les ha motivado para aprobar la asignatura Matemáticas I en septiembre.

- *el índice de asistencia a clase ha sido bastante elevado: más del 75% de los alumnos ha asistido a más del 75% de las clases.*
- *ha aumentado el interés de los alumnos por las matemáticas, sobre todo por la resolución de problemas.*
- *el porcentaje de presentados en este subgrupo ha sido muy elevado*
- *el porcentaje de alumnos aprobados también ha sido superior en este grupo respecto del subgrupo B.*

CUESTIÓN 15: Ambiente y dinámica del curso.

Conclusiones del estudio de casos:

El ambiente y dinámica que se ha generado en el curso ha sido valorado muy positivamente por los alumnos (el curso se ha valorado positivamente un 7,2 sobre 10), afirmando de forma mayoritaria su predisposición a volver a repetir la experiencia por varios motivos:

- ha sido una dinámica entretenida, y activa
- no era necesario estar tomando apuntes ya que se disponía de todo el material en la página web que ha sido valorada positivamente por los alumnos.
- ha sido una dinámica activa y experimental, mucho más que en las clases tradicionales, gracias a la incorporación de ordenador y del programa DERIVE en el aula
- el ambiente ha sido muy participativo, que invitaba al trabajo.

Conclusiones de las notas de campo:

El ambiente del curso ha sido muy participativo por parte de los alumnos.

La dinámica seguida por el profesor ha sido un poco acelerada para intentar ajustar programa con la nueva estrategia.

Conclusiones de los datos objetivos:

No hay datos para valorar.

Conclusiones de la entrevista con la observadora cualificada:

No hay datos para valorar.

CONCLUSIONES FINALES DE LA INVESTIGACIÓN:

El ambiente que se ha generado en el curso ha sido muy participativo, que invitaba a trabajo individual y colectivo, propiciado por la estrategia didáctica empleada y por el uso del programa DERIVE:

La dinámica de las clases ha sido muy activa y experimental, diferente a la realizada en las clases habituales que en ocasiones ha tenido un ritmo un poco rápido pero positiva porque no se requería tomar apuntes como en clases tradicionales ya que se disponía de una página web en la que consultar todos los contenidos. Además ha sido una dinámica entretenida que no inducía al aburrimiento, todo lo contrario.

<u>CUESTIÓN 16: Expectativas y evolución de los alumnos.</u>

Conclusiones del estudio de casos:

En general todos los alumnos tenían esperanzas de aprobar, algunos con nota, y las calificaciones obtenidas han sido las previstas salvo algún caso que se esperaba algo más, pero se puede decir que el curso ha cubierto las expectativas que tenían los alumnos, ya que muestran una gran satisfacción por el curso.

Por otro lado la evolución de los alumnos ha sido positiva, fundamentalmente en los problemas, en los que se observa una trayectoria general ascendente hasta el examen final, no sucede así en las cuestiones que en algunos casos ha sido decreciente, sin embargo podemos afirmar que la evolución ha sido progresiva.

Conclusiones de las notas de campo:

No hay datos para valorar.

Conclusiones de los datos objetivos:

No hay datos para valorar.

Conclusiones de la entrevista con la observadora cualificada:

No hay datos para evaluar

CONCLUSIONES FINALES DE LA INVESTIGACIÓN:

Los alumnos han visto realizadas las expectativas que tenían depositadas en el curso, aunque en algunos caso se esperaba sacar más nota, pero se puede afirmar que globalmente los alumnos muestran una gran satisfacción por el curso.

Respecto a la evolución de los alumnos podemos decir que ha sido una evolución claramente progresiva, sobre todo en la parte relacionada con los problemas.

<u>CUESTIÓN 17: TRAYECTORIA EDUCATIVA.</u>

Conclusiones del estudio de casos:

Los alumnos que han participado en la investigación provienen en su mayoría de EBG-BUP-COU, salvo dos casos que realizan Bachillerato LOGSE. Las calificaciones medias en selectividad han sido de7 y las calificaciones medias en Matemáticas de los últimos cursos era de 7,2. Por otro lado la mayor parte de los alumnos tenían suspensa la asignatura Matemáticas I correspondiente al primer cuatrimestre. 11 de los 15 alumnos eran de nuevo ingreso.

Conclusiones de las notas de campo:

No hay datos para valorar

Conclusiones de los datos objetivos:

No hay datos para valorar

Conclusiones de la entrevista con la observadora cualificada:

No hay datos para valorar.

CONCLUSIONES FINALES DE LA INVESTIGACIÓN:

Se trata de un grupo de alumnos en su mayor parte de nuevo ingreso en la Universidad (11 de 15), que han realizado EBG-BUP-COU, obteniendo unas calificaciones medias en Matemáticas de 7,2 y una calificación media en Selectividad de 7. La mayoría de ellos suspensos en la asignatura Matemáticas I del primer cuatrimestre.

<u>CUESTIÓN 18: CARACTERÍSTICAS DEL PROFESORADO.</u>

De todo el análisis que hemos realizado existen algunos aspectos relacionados con el profesorado que no habíamos previsto en las cuestiones iniciales y que merece la pena destacar:

1) La actitud del profesorado en el uso de esta estrategia didáctica es fundamental, ya que a diferencia de lo que sucede en las clases tradicionales, la actitud puede ensalzar las características positivas o negativas de la estrategia. Un profesor que utilice esta estrategia puede tomar dos tipos de actitudes:
    - Si el profesor adquiere una actitud positiva, en el sentido de que intenta se siente comprometido con el proceso educativo, esta estrategia le obliga a realizar un esfuerzo muy importante que puede verse muy favorecido por la posibilidad de acercamiento al alumno.
    - Si por el contrario el profesor adquiere una actitud negativa, en el sentido de que trata de cumplir únicamente, esta estrategia le permite refugiarse en el mismo de tal forma que puede enmascarar su trabajo en un conjunto de actividades con el ordenador que no son productivas para el alumno.
2) La forma de ser del profesor, y su forma de concebir la educación son otro factor que puede influir enormemente en la práctica de esta estrategia didáctica.
3) El curso inicialmente ha provocado cierta ansiedad y tensión en el profesor, debido a la necesidad de ajustar los contenidos del curso con los del programa oficial, dado que el ritmo de las clases experimentales era diferente al de las clases tradicionales.

CAPÍTULO VI: CONCLUSIONES DE LA INVESTIGACIÓN.

VI.1. Conclusiones de la investigación.

A partir del proceso de triangulación de datos realizado en el último apartado del capítulo anterior, hemos obtenidos un conjunto de conclusiones finales para cada una de las cuestiones iniciales de nuestra investigación y además, hemos obtenido algunas conclusiones para algunas cuestiones que no habíamos considerado inicialmente. Estas conclusiones nos permiten caracterizar de una manera muy exhaustiva la estrategia didáctica que hemos diseñado, incorporando el programa DERIVE en el proceso de enseñanza-aprendizaje de un curso básico de álgebra lineal.

Teniendo en cuenta los aspectos que contextualizan esta experiencia educativa:

1) La experiencia se ha realizado básicamente sobre un subgrupo de 16 alumnos, que eligieron participar libremente en esta experiencia educativa y cuya único criterio restrictivo ha sido el horario de clases de este subgrupo.
2) El profesor que ha llevado a cabo la práctica de la investigación coincide con la figura del investigador.
3) La experiencia educativa se ha referenciado con un grupo principal formado por unos 120 alumnos, sobre los cuales se ha desarrollado la misma asignatura con una metodología tradicional
4) El programa desarrollado en ambos subgrupos ha sido exactamente el mismo, empleando dos metodologías diferentes.

Hemos llegado a las siguientes conclusiones:

1) *El sistema de notación que ofrece* ***DERIVE es un sistema de notación intermedio*** *entre los sistemas de notación formales del álgebra lineal y los sistemas de notación más familiares al alumnado, por varios motivos:*

- *Es un sistema de notación más* ***cercano al alumno*** *y* ***más cómodo*** *de utilizar que el lápiz y papel.*
- ***La forma de introducir los datos*** *de álgebra lineal en DERIVE ha permitido que los alumnos asimilen los procesos rutinarios y manipulativos, teniendo que comprender cada uno de los procesos y operaciones que estaban manipulando, ya que les obligaba a conocer la forma de introducir el datos a manejar y a reflexionar en el concepto que va a manejar.*
- *Es un sistema de notación* ***complementario al del lápiz y papel****.*

Estas características nos permiten caracterizar positivamente el sistema de notación empleado por DERIVE aunque en algunas ocasiones no haya facilitado la investigación y la visualización de contenidos.

2) La interactividad que ha provocado nuestra estrategia didáctica ha sido positiva en los tres entornos de comunicación entre los alumnos, entre alumnos y profesor y entre los alumnos y el programa DERIVE.

a) ***La interactividad entre los alumnos,*** *que sido muy positiva por varios motivos: por el uso del ordenador, porque el grupo era reducido, porque se trataba de un grupo donde los alumnos se podrían sentir diferentes y por la posibilidad de experimentación provocado por la estrategia didáctica. Esta interactividad ha suscitado un trabajo en grupo fundamentado básicamente en parejas de trabajo o en grupos que se correspondían con la ubicación de los alumnos.*

b) ***La interactividad entre alumnos y profesor*** *también ha sido muy positiva, ya que el profesor ha respondido rápidamente las preguntas y dudas que se iban planteando, ha sido una comunicación concreta centrada en los contenidos de la asignatura. Los factores que han influido en este grado de interactividad han sido el número reducido de alumnos y la propia estrategia didáctica que favorecía la interacción entre alumnos y profesor.*

c) ***La interactividad que ha ofrecido DERIVE a los alumnos** ha sido también muy alta por su rapidez de respuesta y porque los mensajes que ofrecía el programa se entendían generalmente bien.*

***3)** La estrategia didáctica ha favorecido el **protagonismo** de los alumnos frente al medio tecnológico, como muestran por un lado el elevado índice de asistencia, el elevado porcentaje de alumnos presentados al examen final, la valoración de la observadora cualificada y por el estudio de casos que hemos realizado. Este protagonismo se ha caracterizado por la elevada participación de los alumnos en las actividades de descubrimiento, por la actitud de búsqueda que suscitaba el programa y porque DERIVE obligaba a pensar al alumno en el planteamiento de los problemas y ejercicios.*

*Sin embargo **la creatividad del alumno**, aunque se han intentado estimular con actividades de exploración y de investigación no se puede decir que haya sido potenciado claramente, salvo en algunos alumnos aislados.*

***4)** La estrategia didáctica ha centrado la atención del alumno sobre los contenidos esenciales del programa con ayuda del guión de trabajo, que ha sido un medio fundamental para que los alumnos hayan sabido **distinguir claramente entre los contenidos esenciales y los no esenciales del programa**, aunque ha habido una tendencia general de los alumnos para automatizar algunos procesos que formaban parte de contenidos esenciales. Esto ha provocado que los alumnos hayan perdido, en cierta medida, algunas habilidades manuales de cálculo. Estas circunstancias muestran la posibilidad de que algunos procesos relacionados con contenidos esenciales se hayan automatizado sin haberse asimilado previamente.*

***5)** El programa DERIVE ha permitido que los alumnos **realicen con menos esfuerzo los cálculos repetitivos y rutinarios** necesarios para resolver los problemas y ejercicios de álgebra lineal, permitiendo que los alumnos se concentren en la propia operativa necesaria para entender el álgebra lineal. Este hecho ha proporcionado a los alumnos la posibilidad de dedicar más tiempo a la experimentación y a la investigación, aunque ha provocado cierta disminución en las habilidades y destrezas manuales de cálculo.*

***6)** Aunque la experimentación no era un estilo de trabajo utilizado por los alumnos, el tipo de uso que hemos hecho del programa **DERIVE ha propiciado una actitud de búsqueda de soluciones** en los problemas y cuestiones que se planteaban, y podemos decir que ha* *aumentado el grado de experimentación de los alumnos. Por otro lado DERIVE ha dejado al alumno espacios para pensar, pues se deja lo rutinario para el ordenador y permite dedicarse al alumno más a la investigación. Se ha constatado que en algunos alumnos este grado de experimentación ha sido bastante importante.*

7) *El aprendizaje que se ha potenciado en esta estrategia didáctica ha sido un* ***aprendizaje por DESCUBRIMIENTO y un aprendizaje activo****, aunque quizás el hecho de ser un grupo pequeño y diferente puede haber provocado ciertas situaciones favorables para ello que se han sumado a los factores provocados por la propia estrategia didáctica y el uso del ordenador. Sin embargo aunque como veremos más adelante el grado de motivación del alumno ha sido muy elevado y como hemos visto el protagonismo de los alumnos también ha sido fuerte, no podemos garantizar que el tipo de aprendizaje haya sido totalmente significativo. Podemos afirmar que los contenidos que han adquirido los alumnos probablemente hayan quedado afianzados de forma significativa en virtud del proceso de aprendizaje que se ha realizado.*

8) *La estrategia didáctica empleada con* ***el uso de DERIVE ha facilitado a los alumnos la posibilidad de utilizar varias estrategias de resolución de problemas****, ya que en el aula se ha insistido mucho en la posibilidad de utilizar varios caminos en la resolución de problemas, incluso los problemas planteados tenían varios caminos sencillos para su resolución. La estrategia tenía por tanto todos los ingredientes necesarios para que los alumnos utilizaran varias estrategias en la resolución de problemas, muchas más que cuando se les dejaba resolver con lápiz y papel; sin embargo, el alumno en general ha utilizado una sola estrategia si con esta conseguía la solución del problema, empleando otros caminos o ensayando otros métodos en caso de fracaso. Las estrategias que han ofrecido mayores problemas a los alumnos fueron la inducción, la modelización matricial de problemas reales y la resolución de problemas con experimentación, por el contrario sí han sabido resolver problemas relacionados con la modelización vectorial y en los que intervenía como modelo un sistema de ecuaciones lineales.*

9) *DERIVE ha sido un programa que* ***no ha generado barreras adicionales*** *para el aprendizaje de los principales contenidos de álgebra lineal ya que se trata de un programa fácil de aprender y de manejar, aunque en ocasiones han surgido pequeñas dificultades relacionadas fundamentalmente con la programación de funciones y ciertos solapamientos de variables. Es* *más, DERIVE ha facilitado en muchas ocasiones la comprensión de contenidos y la resolución de problemas.*

10) *El **grado de autonomía que han adquirido los alumnos aunque no ha sido muy elevado** sin embargo si podemos decir que la forma de uso de DERIVE les ha permitido a los alumnos intentar encontrar de forma autónoma las soluciones a las tareas propuestas en numerosas ocasiones.*

11) *La estrategia didáctica **ha favorecido las relaciones dialécticas entre alumnos y entre alumnos y profesor**. De hecho las relaciones de comunicación entre los alumnos han sido bastante buenas, en parte motivadas por el ambiente de comunicación que ha potenciado la estrategia didáctica, porque eran pocos alumnos y quizás porque se trataba de un grupo diferente. En cuanto a las relaciones dialécticas entre profesor y alumnos han sido también muy positivas, el profesor ha resultado más cercano y accesible que en las clases habituales. En estas circunstancias han influido por un lado la concepción abierta del profesor respecto al alumnado, la propia metodología que propiciaba situaciones de comunicación y que el número de alumnos no era excesivo. Por último debemos señalar que el ambiente de colaboración y trabajo que ha provocado la estrategia didáctica ha favorecido enormemente este tipo de relaciones dialécticas entre alumnos y entre alumnos y profesor.*

12) *Se ha constatado que la estrategia didáctica empleada y las formas de uso del programa DERIVE **han suscitado un ambiente de colaboración** en el aula que se ha puesto de manifiesto en las comprobaciones de resultados, la resolución de dudas y la exploración de problemas realizados en los diferentes grupos de trabajo que se fueron creando a lo largo del curso. Aunque las colaboraciones en ocasiones pueden transmitir errores y malos hábitos entre los alumnos, sin embargo la existencia de un árbitro como el ordenador que permitía contrastar resultados ha podido eliminar esos errores de transferencia. Estas circunstancias nos sitúan en un contexto de ambientes colaborativos en los que se ha favorecido la aparición de aprendizajes colaborativos, donde el factor social ha sido muy beneficioso para el aprendizaje.*

13) *La estrategia didáctica **ha favorecido una adecuada ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD**, como lo muestran algunos indicadores:*

- *El ritmo de las clases se puede calificar de un ritmo ACTIVO Y DINÁMICO.*

- *Los alumnos no se han aburrido en las clases, ni siquiera los más aventajados, y además ningún alumno se ha encontrado perdido en las clases ya que ha encontrado rápido solución a sus dudas.*
- *Los tres niveles de aprendizaje que parece existían en el aula han sido tratados adecuadamente con los niveles de dificultad en problemas, en el examen final, y en las cuestiones propuestas. En las clases las dudas que surgían se atendían de forma adecuada por el profesorado con ayuda de los guiones de trabajo de cada sesión.*
- *El programa DERIVE ha permitido resolver las dudas que iban apareciendo de una manera automática*
- *Los alumnos tenían confianza en sus posibilidades, situación observable de forma clara en el alto porcentaje de presentados en el subgrupo A, muy superior al del subgrupo B.*

Además debemos añadir que el carácter reducido del grupo también ha influido enormemente en esta atención a la diversidad.

14) *La estrategia didáctica que se ha empleado en este curso experimental ha **provocado bastante MOTIVACIÓN** entre los alumnos, como se puede observar en varios indicadores:*

- *Los alumnos se encontraban bastante entretenidos en clase, las clases resultaban divertidas y nada aburrida y además se les pasaban rápidamente.*
- *Los alumnos han dedicado bastantes horas a la asignatura fuera del horario de clase, se puede decir que usaban más de 5 horas en media a la semana, lo cual indica un enorme interés por la asignatura.*
- *La valoración media de los alumnos a este curso ha sido bastante alta 7,9 sobre 10.*
- *Los alumnos se han encontrado muy satisfechos con la metodología, de hecho todos en bloque volverían a elegir este grupo experimental.*
- *El programa DERIVE ha sido un elemento muy motivador para el aprendizaje porque les ha facilitado el cálculo, les ha permitido llegar al final en la resolución de muchos problemas, era un programa divertido y además en algunos casos les ha motivado para aprobar la asignatura Matemáticas I en septiembre.*
- *El índice de asistencia a clase ha sido bastante elevado: más del 75% de los alumnos ha asistido a más del 75% de las clases.*
- *Ha aumentado el interés de los alumnos por las matemáticas, sobre todo por la resolución de problemas.*
- *El porcentaje de presentados en este subgrupo ha sido muy elevado*

- *El porcentaje de alumnos aprobados también ha sido superior en este grupo respecto del subgrupo B*

15) ***El ambiente*** *que se ha generado en el curso ha sido* ***muy participativo****, invitaba al trabajo individual y colectivo, propiciado por la estrategia didáctica empleada y por el uso del programa DERIVE. Por otro lado* ***la dinámica de las clases ha sido muy activa y experimental****, diferente a la realizada en las clases habituales que en ocasiones ha tenido un ritmo un poco rápido, pero ha sido una dinámica positiva porque no era necesario estar tomando apuntes como en clases tradicionales ya que se disponía de una página web donde se podían consultar todos los contenidos. Además ha sido una dinámica entretenida que no inducía al aburrimiento, todo lo contrario.*

Además a lo largo de la investigación hemos podido constatar algunos otros factores que caracterizan la experiencia educativa:

16) *Los alumnos* ***han visto realizadas las expectativas que tenían depositadas*** *en el curso, aunque en algunos caso se esperaba sacar más nota, pero se puede afirmar que globalmente los alumnos muestran una gran satisfacción por el curso. Por otro lado* ***la evolución de los alumnos podemos decir que ha sido una evolución claramente progresiva****, sobre todo en la parte relacionada con los problemas.*

17) *El grupo experimental estaba formado por alumnos en su mayor parte de nuevo ingreso en la Universidad (11 de 15), que han realizado EBG-BUP-COU, obteniendo unas calificaciones medias en Matemáticas de 7,2 y una calificación media en Selectividad de 7. La mayoría de ellos suspensos en la asignatura Matemáticas I del primer cuatrimestre.*

18) *Las características del profesorado pueden influir enormemente en la puesta en práctica de esta estrategia, aumentando o disminuyendo todas sus cualidades, ya que una actitud comprometida del profesor, le permite obtener una relación de comunicación muy estrecha con el alumnado aunque le obliga a invertir un esfuerzo adicional en la preparación de las clases, sin embargo una actitud pasiva puede permitir al profesor enmascarar su trabajo ofreciendo a los alumnos actividades manipulativas que no sean provoquen el aprendizaje y mantenga a los alumnos ocupados. Por otro lado en esta estrategia didáctica se ensalzan las virtudes o defectos del un profesor, en el sentido de que la forma de concebir la educación y la* *docencia así como la propia forma de ser del profesorado influyen enormemente en el desarrollo de la estrategia didáctica.*

El estudio de los sistemas de cálculo algebraico y en particular del programa DERIVE que hemos realizado en esta investigación nos permite afirmar que el programa DERIVE tiene las siguientes características educativas:

1) Ofrece un SISTEMA DE NOTACIÓN INTERMEDIO para el álgebra lineal, ya que es un sistema de notación más cercano al alumno, más cómodo de utilizar y además permite que el alumno centre su atención en los conceptos y objetos propios del álgebra lineal cuando introduce o manipula los objetos y contenidos por medio del programa, convirtiéndose en una complemento del lápiz y papel.

2) Es un programa que favorece la INTERACTIVIDAD, no solo del alumno con el programa sino que además favorece la interactividad entre los alumnos y entre alumnos y profesor.

3) Potencia el PROTAGONISMO del alumno en su proceso de aprendizaje

4) Permite que el alumno sepa RECONOCER LOS CONTENIDOS ESENCIALES del álgebra lineal, aunque en ocasiones se corre el peligro de automatizar algunos cálculos en detrimento de algunas habilidades de cálculo

5) Permite realizar con menos esfuerzo numerosos CALCULOS REPETITIVOS Y RUTINARIOS, que suelen ocupar demasiado tiempo a los alumnos

Estas características del programa DERIVE han favorecido y proporcionado unas **situaciones de enseñanza** que conducen a un aprendizaje que tiene las siguientes características:

a) Se trata de un aprendizaje por descubrimiento y activo, que a partir de los conocimientos previos del alumno, facilita la adquisición de aprendizajes significativos sobre los contenidos básicos del álgebra lineal.

b) Un aprendizaje que proporciona al alumno la posibilidad de utilizar varias estrategias de resolución de problemas, aunque en general el alumno tienda a utilizar una de ellas.

c) Un aprendizaje colaborativo, basado en las colaboraciones que propicia el trabajo en grupo con el programa DERIVE, generando de esta.

d) Un aprendizaje adaptado a las necesidades de cada alumno, ofreciendo la posibilidad de utilizar varios niveles de aprendizaje, motivado fundamentalmente: por la ayuda que presta el programa, por las el ambiente colaborativo que se fomenta entre los alumnos y por el material didáctico disponible en los guiones de trabajo, es decir permite una adecuada **atención a la diversidad**.

Porque al incorporar DERIVE a nuestra estrategia didáctica hemos podido constatar que:

- Se **ha propiciado una actitud de búsqueda de soluciones**, actitud que permite la posibilidad de utilizar el programa como una **auténtica herramienta de experimentación**. Porque DERIVE ha ofrecido a los alumnos más tiempo para pensar, dejando lo rutinario para el ordenador.
- El uso del programa DERIVE, **no ha generado barreras adicionales** para el aprendizaje de los contenidos de álgebra lineal, ya que se trata de un programa fácil de aprender y de manejar.
- Aunque los alumnos no han adquirido un grado de autonomía significativa, sin embargo les ha ofrecido la posibilidad de intentar con cierta autonomía la resolución de muchos problemas que no hubieran sido capaces de intentar ni siquiera con lápiz y papel
- El grado de MOTIVACIÓN del alumnado ha sido bastante elevado, como muestran elevados porcentajes de asistencia, de presentados al examen y también de aprobados.
- el ambiente del curso ha sido muy participativo, y la dinámica de las clases muy activa y experimental
- los alumnos han vistos realizadas sus expectativas, y han mostrado su satisfacción por el curso, notándose una evolución progresiva en su aprendizaje

VI.2. Preguntas abiertas para futuras investigaciones.

A lo largo de la investigación hemos observado algunos factores o elementos que podrían haber mejorado los resultados, en cuanto a la generalización de las bondades de nuestra estrategia didáctica. A continuación mostramos algunos de dichos factores que proporcionarían pautas para futuras investigaciones:

1) Las conclusiones de nuestra investigación estaban enmarcadas en un contexto educativo muy peculiar, donde uno de los factores más condicionantes ha sido el número de alumnos, que sin lugar a dudas a facilitado la consecución de los fines de la experiencia educativa. Sin embargo consideramos que con un número de 36 alumnos, tal y como estaba diseñada la experiencia, habríamos obtenido posiblemente los mismos resultados. Por tanto una cuestión que podría ser objeto de un estudio posterior debería intentar desarrollar nuestra estrategia didáctica con un grupo de alumnos de al menos 36 alumnos con el fin de refrendar o no las conclusiones obtenidas en este trabajo.

2) A la vista de algunas conclusiones relacionadas con el profesorado, obtenidas fundamentalmente de la entrevista con la observadora cualificada, podemos observar cierta influencia del profesorado en la estrategia didáctica. Es claro que en cualquier estrategia didáctica, el tipo de profesor es un condicionante positivo o negativo con relación a los resultados educativos y de aprendizaje que se pueden obtener en el aula. A pesar de ello, las influencia que puede ejercer la actitud del profesorado en una estrategia didáctica que fundamenta su razón de ser en la incorporación de un sistema de cálculo algebraico como DERIVE, podría ser motivo de una futura investigación. En dicha investigación se debería estudiar la influencia de la actitud del profesor que utiliza este tipo de herramientas informáticas.

3) La resolución de problemas, constituía uno de los elementos centrales de nuestra estrategia didáctica, pero sin embargo no insistimos demasiado en la enseñanza de diversas estrategias, suponiendo que los alumnos ya estaban iniciados en técnicas como la inducción, y la experimentación. Quizás haya sido uno de los factores que hayan influido negativamente, ya que los alumnos tenían actitud de búsqueda, se interesaban por resolver problemas pero en ocasiones aunque intentaban la resolución sin embargo no encontraban el método. Les han faltado técnicas o heurísticos de resolución, uno de ellos la inducción. En este sentido el uso de la experimentación matemática en el quehacer matemático es un elemento que los alumnos deben de manejar mucho más para poder obtener más resultados, y de esta manera sacar mayor rendimiento a los sistemas de cálculo algebraico.

4) Al estudiar el tipo de aprendizaje que se ha dado en la experiencia educativa con esta estrategia didáctica, hemos constatado que inicialmente se verificaban los indicadores que parecen mostrar que dicho aprendizaje había sido significativo:

aprendizaje por descubrimiento, aprendizaje activo y un aprendizaje favorecido por la investigación que ha permitido una introducción adecuada de los conceptos; sin embargo se han obtenido ciertos datos contradictorios relacionados con cierta tendencia que han manifestado los alumnos a olvidar algunos contenidos. Esto nos hace preguntarnos si efectivamente ha sido significativo el aprendizaje analizando si los contenidos se han volcado realmente en la memoria a largo plazo y no en la memoria a corto plazo, pues de haberse guardado en la memoria a corto plazo no se habrían alcanzado de forma significativa y el típico "borrado de memoria" que realizan los alumnos una vez que han superado las pruebas de evaluación pueda haber provocado la desaparición de los contenidos. Este tipo de estudio requeriría una atención especial en futuras investigaciones que tratasen de experimentar con esta estrategia didáctica.

5) Aunque en nuestro diseño, dimos mucha importancia al uso del programa DERIVE únicamente en los contenidos no esenciales del curso, la tendencia de los alumnos para automatizar los procesos puede haber convertido en algunas ocasiones ciertos contenidos esenciales en meras rutinas de cálculo, como es el caso del cálculo de determinantes o el cálculo de autovalores. Aunque las cuestiones teóricas pretendían solventar estos problemas, procurando que el alumno no tuviese esa dependencia del programa sin embargo el hecho de haber permitido el uso del programa DERIVE para resolver las cuestiones teóricas quizás haya sido perjudicial para el alumno, ya que no le ha obligado a utilizar el lápiz y papel en cálculos sencillos, sintiéndose más seguro cuando usaba la máquina. Pero teniendo en cuenta que DERIVE era la herramienta con la que aprendían los contenidos, parecía un contrasentido que no lo utilizasen para resolver las cuestiones, donde lo básico no era el cálculo sino la relación de conceptos. Por este motivo sería interesante realizar un estudio en el que se restringiese de forma obligada el uso del programa en ciertos contextos para estudiar si se producen los mismos datos que hemos obtenidos aquí.

6) ¿Qué ocurriría si los alumnos estuviesen más habituados al sistema DERIVE o a sistemas de cálculo algebraico similares en cursos anteriores?, es decir, ¿qué ocurriría si el sistema de cálculo algebraico fuese una herramienta más familiar al alumno, tan familiar como lo es el lápiz y papel en estos momentos?. Estas cuestiones me surgieron de forma natural en la investigación, pero sobre todo cuando estudiaba si DERIVE era un sistema de notación intermedio para el alumnado. Es evidente, que un nuevo sistema de notación ejerce cierta presión

inicial en el alumno, aunque luego le facilita el trabajo, pero si el alumno estuviese habituado al lenguaje común de estos sistemas ¿podríamos constatar que el sistema de notación resulta más cercano al alumno?.

7) Una última cuestión que pretendemos mostrar está relacionada con el currículum. Nuestra experiencia didáctica se ha ceñido a un programa estructurado de álgebra lineal, con lo que algunas posibilidades que brinda en programa han tenido que adaptarse a los contenidos existentes y algunas otras las hemos tenido que enmascararse para que no se pudiese utilizar el programa en toda su potencia, en este sentido surgen dos interrogantes:
   i. ¿No sería mejor adaptar los contenidos del programa a la nueva herramienta metodológica?, es decir ¿no sería mejor modificar el currículum añadiendo algunos contenidos que no se tratan y suprimiendo otros, a la vista de las facilidades que ofrecen estos programas?. Ya que DERIVE nos permite convertir ciertos contenidos en meros cálculos (por ejemplo el cálculo de determinantes), esta circunstancia nos brindaría la posibilidad de incluir nuevos contenidos.
   ii. Una segunda cuestión estaría centrada en el propio sistema de cálculo algebraico, en particular en las funciones básicas que utiliza el programa. ¿no sería posible desarrollar sistemas de cálculo algebraico que permitan determinar al usuario (en este caso al profesor), determinar las funciones que forman parte del núcleo básico del programa?. Se trataría de intentar enmascarar de forma real, funciones que no deseamos que estén accesibles para el alumnado, por ejemplo la existencia de algún comando que permita dejar sin efecto en DERIVE la función *det(A)* que calcula de forma automática el determinante de cierta matriz. Esta solución puede consistir en construir librerías, o bien en facilitar esa nueva posibilidad de eliminar ciertas funciones.

Todas estas cuestiones pueden formar parte de futuras investigaciones para incorporar de una manera adecuada una herramienta informática, que puede ser de gran ayuda para las Matemáticas si sabemos introducirlas de una manera adecuada para salvaguardar una disciplina bella, creativa y útil para nuestra sociedad.

VII. BIBLIOGRAFÍA.

[Alamo-y otros, 1993] J.M. Alonso; J.C. Clavijo y otros(Grupo Anaga), "¿Una nueva enseñanza de las matemáticas?" El País, 2 Feb. 1993.

[Alexandrov y otros, 1973], A.D. Alexandrov; A.N. Kolmogorov y M.A. Laurentiev, *"La matemática: su contenido, métodos y significado"* Vol. I y II. Madrid, Alianza, 1973.

[Amillo-Guadalupe, 1991] J. Amillo, R. Guadalupe y E. Torrano, "El laboratorio de Matemáticas en la Facultad de Informática", Actas de las Jornadas sobre Enseñanza Experimental de la Matemática en la Universidad, Universidad Politécnica de Madrid 10-12 Diciembre 1991, págs. 113-121.

[Anderson, 1988] J.R. Anderson, *"The geometric tutor [software]".* Pittsbugh, PA: Department of Psychology, 1988, Carnegie Mellon University.

[Aspetsberger, 1992] K. Aspetsberger, "Using Derive in Analytic Geometry", Josef Böhm (ed.), Teaching mathematics with DERIVE, Charwell-Bratt, 1992, págs. 21-28.

[Auer-Muller,1990] J.W. Auer y E.R. Muller, "Some Examples of the Use of CAS in Teaching Linear Algebra and Calculus"m MAA Notes, 24, Symbolic Computation in Undergraduate Mathematics Education, (Zaven A. Karian), 1993, pp. 101-108.

[Ausubel, 1963] D.P. Ausubel, "Some phsychological and educational limitations of learning by discovery" The Arithmetic Teacher, 11, 1964, págs. 290-302.

[Ausubel-Novak-Hanesian, 1976] D.P. Ausubel, J.P. Novak y H. Hanesian, *"Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo"* México, 1976, Trillas.

[Ausubel-Robinson, 1969] D.P. Ausubel y F.G. Robinson, *"School Learning. An introduction to Educational Psychology",* Holt Linehart & Winston, 1969, Londres, Gran Bretaña.

[Balacheff, 1990] N. Balacheff, "Future Perspectives for Research in the Psychology of Mathematics" en Nesher: Kilpatrick, "Mathematics and cognition: A research synteshis", Cambridge Univ. Press, 1990, págs. 135-148.

[Barbolla-Sanz, 1998] R. Barbolla y P. Sanz, *"Álgebra Lineal y teoría de matrices",* 1998, Prentice-Hall, Madrid.

[Barclay, 1985], T. Barclay, *"Guess my rule" [software]* Pleasantville, NY: HRM Software, 1985.

[Bautista, 1986] A. Bautista García-Vera, "Los micromundos: elementos de las condiciones externas que facilitan el aprendizaje", Zeus-Logo. ICE Universidad Autónoma. Madrid. nº 0. Julio 1986. págs. 15-16

[Bautista, 1987] A. Bautista García-Vera, "Fundamentos de un método de enseñanza basado en resolución de problemas", Revista de Educación, núm. 282, 1987, pp. 151-160.

[Bautista, 1988] A. Bautista García-Vera, "Evaluación de estrategias de resolución de problemas", Revista de Educación, núm. 287, (1988), págs. 275-286.

[Bautista, 1994] A. Bautista García-Vera, *"Las nuevas tecnologías en la capacitación docente",* Aprendizaje Visor, 1994, Madrid.

[Beatrous, 1996] F. Beatrous, *"The University of Pittsburgh. CALCULUS LABS"*, Wiley, EE.UU., 1996.

[Benítez y otros, 1996-a] F. Benítez, J.M. Díaz y J. Pérez, "Experiencia de Laboratorio de Matemáticas en la Universidad de Cádiz" Matemáticas en Escuelas Técnicas, 1996, Servicio de publicaciones de la Universidad de Huelva, pág. 47-58.

[Benítez y otros, 1996-b] F. Benítez, J.M. Díaz y J. Pérez, *"Laboratorio de matemáticas. Prácticas con Mathematica".* Departamento de Matemáticas. Universidad de Cádiz, 1996.

[Björk, 1987] L.E. Björk, "Mathematics and the new tools" en D.C. Johnson y F. Lovis, Informatics and the Teachin of Mathematics, Proceedings of the IFIP TC/3/WG 3.1 Working Conference, Sofia, 1987, North-Holland, págs. 109-115.

[Boden, 1983] M. Boden, *"Inteligencia artificial y hombre natural",* Madrid, Tecnos, 1983.

[Boyer, 1968] C. B. Boyer, *"A history of Mathematics",* John Wiley, 1968, NY.

[Brandsford-Stein, 1986] J.D. Brandsford y B.S. Stein, *"Solución IDEAL de problemas"* , Labor, Barcelona, 1986.

[Brod, 1984] Brod, *"Technostress: The human cost of the computer revolution".* Readin MA, Addison Wesley,1984.

[Bruner, 1960] J. Bruner, "On learning mathematics" The Mathematics Teacher, 53, págs. 610-619.

[Bruner, 1979] J. Bruner, *"El proceso mental en el aprendizaje",* Madrid, Narcea, 1979.

[Brown-Porta-Uhl, 1990] D. Brown, H. Porta y J. Uhl, "Calculus & Mathematica: Courseware for nineties", The Mathematical Journal, 1990, Addison-Wesley, pág. 43-50.

[Buchberger, 1993] B. Buchberger, "Teaching math by software: Newton's method as an example of the White Box/Black Box principle". Presentation of the Second Int. Krems Conference, Krems, Austria, 1993.

[Calderón, 1986] A.P. Calderón, "Reflexiones sobre el aprendizaje y enseñanza de la matemática", Conferencia Rey Pastor de la XXXVI Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina y IX Reunión de Educación Matemática en Santa Fé, Paraná, 8-11 Octubre 1986.

[Carbonell, 1970] J. Carbonell, "AI in CAI: An artificial intelligence approach to computer-assisted instruction" IEEE Transactions on Man-Machine Systems, MMS-11, 190-222.

[Carrillo, 1994] J. Carrillo, "Resolución de problemas: clave del desarrollo profesional", Epsilon, 30, vol. 10 (3), 1994, págs. 27-38.

[Carrillo-Contreras, 1998] J. Carrillo y L.C. Contreras, "Diversas concepciones sobre resolución de problemas en el aula", Educación Matemática, Vol. 10, No. 1, 1998, págs.26-37.

[Chang-Lederman, 1994] H.P. Chang y H.G. Lederman, "The effect of levels of cooperation within physical science laboratory groups on physical science achievement", Journal of Research in Science Teaching, 31(2), 1994, págs. 167-181.

[Child-Leinbach, 1996] D. Child y C. Leinbach, "Linear Algebra", CAS-CALC Computer Algrebra Systems Calculus, 24-28 Junio, Teacher Teaching with Technology Programs, 1996, págs. 116-127.

[Chumillas,1991] V. Chumillas, "Enseñanza del Álgebra Lineal con DERIVE", Actas de las Jornadas sobre Enseñanza Experimental de la Matemática en la Universidad, Universidad Politécnica de Madrid 10-12 Diciembre 1991, págs. 69-74.

[Cockcroft, 1985] W.H. Cockcroft, *"Las Matemáticas sí cuentan: Informe de la Comisión de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas".* Editado en castellano por el Ministerio de Educación y Ciencias, 1985. (Edición original 1982).

[Corbalán, 1997] F. Corbalán Yuste, *"Juegos de estrategia y resolución de problemas: análisis de estrategias y tipologías de jugadores en el alumnado de secundaria",* Tesis Doctoral, Director: Jordi Deulofreu Fiquet, Junio 1997.

[Crook, 1992] C. Crook, "Young's children skill in using a name to controla graphical computer interface" Computers and Education, 19, 199-207 pp. 1992.

[Crook, 1999] C. Crook, *"Ordenadores y aprendizaje colaborativo",* Ed. Morata, Madrid, 1999.

[Davis, 1990] R.B. Davis, "How computers help us understand people", International Journal of Educational Research, 1990, col. 14, págs. 93-99.

[Debesee-Mialaret y otros, 1973] M. Debesse, G. Mialaret y J. Assa: *"Historia de la Pedagogía. Vol.1, Antigüedad, Edad Media, Renacimiento",* Oikus-Tau, Barcelona 1973.

[Debesee-Mialaret y otros, 1974] M. Debesse, G. Mialaret, G. Snyders, A. Léon y J. Vial: *"Historia de la Pedagogía. Vol.2, Siglos XVII y XVIII, de la Revolución Francesa a la Tercera República, Época Contemporánea",* Oikus-Tau, Barcelona 1974.

[Dechamps, 1988] M. Dechamps, "A European cooperation on the use of computers in mathematics" en T.F. Banchoff et al (eds.) Educational Computing in Mathematics , (Proceedings of ECM/87, Roma, 1987), Norht-Holland, 1988., págs. 107-209.

[Demana-Waits, 1990] F. Demana y D. Waits, "The role of technology in Teaching Mathematics", en The Mathematics Teacher, National Council of Teachers of Mathematics, 1990, vol. 82, no. 1.

[DERIVE, 1990] *DERIVE. Soft Warehouse. User Manual*, 1990.

[Derry, 1989] S. Derry, *"Strategy and expertise in word problem solvine"* In M. Pressley, C. McVormick, & G. Miller (Eds), Cognitive strategi research:from basic resear to educational applications. New York, Springer-Verlag, 1989.

[Dugdale, 1982] S. Dugdale, "Green Globs: A microcomputer application for graphing equations" Mathematics Teacher, 75, 1982, págs. 208-214.

[Dugdale-Kibbey, 1977] S. Dugdale y D. Kibbey, *"Elementary mathematics win PLATO"* Urbana, IL: Computer-based Education Laboratory, University of Illinoys, 1977.

[Duval, 1998] R. Duval, "Signe et objet I, II", Annales de Didactique et de Scienca Cognitiva 6, IREM; Estrasburgo, 1998, págs. 139-165; 165-196.

[Escudero, 1995] J.M. Escudero, "Tecnología e innovación educativa", Bordón, 47, núm. 2, 1995, págs. 161-175.

[Fernández González, 1983] M. Fernández González, *"Enseñanza asistida por ordenador",* Anaya. Salamanca, 1983.

[Franklin, 1995] G. Franklin, "Effects of cooperative tutoring on academic performance", Journal of Educational Technology Systems, 23(1), 1995, págs. 13-25.

[Freudenthal, 1979] H. Freudenthal, "Mathematik als pädogogische Aufgabe" Kett Studienhücher, 1979.

[García, 1999] A. García, "Uso de herramientas informáticas en la enseñanza de la matemática", Conferencia impartida en el curso de verano de la UNED: "La Matemática: su naturaleza, evolución y tratamiento de su didáctica", julio 1999.

[García y otros, 1994] A. García, J.L Coronado, A. Corral, V. Chumillas y otros (Profesores del Dpto. de Matemática Aplicada de la E.U.I. , Univ. Politécnica de Madrid), *"Prácticas de Matemáticas con DERIVE",* (ed. A. García), AGLI, S.L., 1994, Madrid.

[Gil-Rodríguez, 1993] J. Gil Flores y G. Rodríguez Gómez, *"Metodología de la investigación cualitativa",* Ediciones Aljibe, Granada, 1993.

[Gimeno,1988] J. Gimeno Sacristán, *"El currículum: una reflexión sobre la práctica",* Ed. Morata, 1988.

[Goetz-LeCompte,1988] J.P. Goetz y M.D. LeCompte, *"Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa",* Ed. Morata, 1988.

[González, 1995], A. González Rebés, "Inconvenientes de la utilización del ordenador en el aula", Actas de las VII JAEM, 14-16 septiembre 1995, págs. 147-150.

[Grupo Cero, 1987] "De 12 a 16", Mestral, Valencia, 1987.

[Guzmán, 1982] M. de Guzmán, *"Cuentos con cuentas",* Labor , Barcelona, 1982.

[Guzmán, 1984] M. de Guzmán, "Panorama de la Matemática" artículo de la enciclopedia "Avances del Saber", Ed. Labor, tomo 5, 1984.

[Guzmán, 1985] M. de Guzmán, "Enfoque heurístico de la enseñanza matemática. Aspectos didácticos de matemáticas-1/b", Bachillerato, Aula Abierta, 57, Zaragoza: ICE Universidad, 1985, págs 31-46.

[Guzmán, 1991] M. de Guzmán, *"Para pensar mejor",* Labor, Barcelona, 1991. La última edición: "Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos", Pirámide, Madrid, 1997.

[Guzmán,1992] M. de Guzmán, "Los riesgos del ordenador en la enseñanza de la matemática", (Eds. Abellanas, M. y Garcia, A), Enseñanza experimental de la matemática en la Universidad (Univ. Politécnica Madrid), 1992.

[Guzmán, 1997] M. de Guzmán, "Matemáticas y sociedad, acortando distancias", Revista Saber/Leer Fundación Juan March, Vol. 107, Madrid, págs. 10-17.

[Guzmán, 1998] M. de Guzmán, "El tratamiento educativo del talento especial en Matemáticas", documento obtenido en la web:
www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/TrataTalento/00tratam.htm.

[Guzmán, 1998b] M. de Guzmán, "El papel del matemático en la educación matemática", Actas del VIII Congreso Internacional de Educación Matemática ICME-8 (Sevilla, 1996), Sociedad andaluza de Educación Matemática "THALES", Sevilla, 1998.

[Guzmán, 1998c] M. de Guzmán, "Matemáticas y estructura de la naturaleza" en Ciencia y Sociedad. Desafíos del Conocimiento ante el Tercer Milenio, Mora Teruel, F. y Segovia de Arana, J.M. (coordinadores) (Fundación Central Hispano, Madrid, 1998), pp. 327-357.

[Guzmán-Rubio, 1990] M. de Guzmán y B. Rubio, *"Problemas, conceptos y métodos del análisis matemático: estrategias del pensamiento matemático",* Madrid, 1960, Pirámide.

[Halmos, 1991] P.R. Halmos, "Is computer teaching Harmfull?", Notices of the A.M.S., vol. 38, núm. 5, 1991, págs. 420-423.

[Hervas et al, 2000] A. Hervás, R.J. Villanueva y C. Monforte, "Comparativa de Sistemas de Cálculo Algebraico para 57 Problemas Algebraicos", 2000. Preprint.

[Heugl-Klinger-Lechner, 1996] H. Heughl, W. Klinger y J. Lechner, "Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen" (Ein didaktisches Lehrerbuch mit Erfahrungen aus dem österreichischen DERIVE-Projekt), Bonn 1996, Addison-Wesley.

[Hodgson, 1997] B. Hodgson, "Implications of research on CAS in College Algebra", 1997.

[Hodgson-Muller, 1992] B.R. Hodgson, E.R. Muller, "The impact of symbolic Mathematical Systems on Mathematical Education", Bernard Cornu and Anthony Ralston (eds.). The influende of computers and informatics on mathematics and its teaching, Science and technology education, 44, 1992, UNESCO; págs. 93-107.

[Johnson, 1990] D.W. Johnson, "Impacto of group processing on achievement in cooperative groups" Journal of Social Psychology, 130(4), 1990; págs. 507-516.

[Kaput, 1992] J.J. Kaput, "Technology and Mathematics Education", Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, A project of the NCTM, New York, Macmillan Publishing Company (1992),págs. 515-575.

[Kline, 1974] M. Kline, *"Matemáticas en el mundo moderno"* (traducción de M. de Guzmán), Blume, Madrid, 1974.

[Klotz, 1991] E. Klotz, *"The geometer's sketchpad [software]"* Berkeley, 1991, CA: Key Curriculum Press.

[Krulick-Rudnick, 1987] S. Krulick, J.A. Rudnik, *"Problem solving. A handbook for teachers"* , Allyn and Bacon Inc., Boston, 1987.

[Kutzler, 1999] B. Kutzler, "The algebraic calculator as a pedagogical tool for teaching mathematics"; Improving Mathematics Teaching with the TI-92. Langhbaum E.D. (ed.): Hand-Held Technology in Mathematics and Science Education: a collection of ppers, teacher teaching with technology. Short Course Program at the Ohio State University, 1999, págs. 98-109.

[LaTorre, 1990] D. LaTorre, "Using Graphinc Calculator to Enhace the teaching and learning of linear algebra". Symbolic Computation in Undergraduate Mathematics Education, M.A.A. Notes 24, 1990, págs. 109-120.

[Laborde, 1990] J.M. Laborde, *"CABRI Geometry [Software]".* France: Université de Grenoble 1 (Available in the U.S. from Brooks Cole: NY).

[Lampert, 1990] M. Lampert, "When the Problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical Knowing and Teaching", en American Educational Research Journal, 27 (1), 1990, págs. 29-63.

[Landay, 1999] S. Landay, "Compute and Conjecture", Notices of the A.M.S., Febrero 1999, pág. 189.

[Lebesge y otros 1983] H. Lebesge y otros, "La enseñanza de las Matemáticas Modernas" Alianza Editorial, Madrid, 1983.

[Lechner-et al, 1997] J. Lechner, E. Roanes-Lozano, E. Roanes-Macias y J. Wiesenbauer, "An implementation of turtle graphics in Derive 3", The Bulletin of the Derive Newsletter, 25, 1997, págs. 15-22.

[Leinbach, 1991] L. C. Leinbach, *"Calculus Laboratories Using Derive",* Wadsworth New Directions in Mathematics Series, Belmont, California, 1991.

[Llorens, 1993] J.L. Llorens, *"Introducción al uso de DERIVE: aplicaciones al álgebra lineal y al cálculo infinitesimal"* , Dpto. de Matemática Aplicada E.U.I.T.A., Universidad Politécnica de Valencia, 1993.

[Llovet y otros, 1991] J. Llovet, R. Martínez, J.A. Jaén y P. Fabré, "Xcourse: un sistema de enseñanza asistida con ordenador", Actas de las Jornadas sobre enseñanza experimental de la matemática en la Universidad, Diciembre 19991, Universidad Politécnica de Madrid, págs. 75-87.

[López-Plaza, 1988] B. González López-Plaza, "Análisis de la influencia del ordenador en la adquisición de conceptos Geométricos en 7º de EGB". Tesina de licenciatura dirigida por A. Bautista García-Vera 1988. Departamento de Didáctica y organización escolar. UCM. Madrid.

[Luelmo, 2000] M. J. Luelmo, "Retos actuales de la educación matemática en Secundaria" Conf. impartida el 21 de enero de 2000 en el Congreso de los Diputados con objeto de la iniciativa del Congreso de sumarse al año internacional de las Matemáticas.

[MEC, 1992-a] Ministerio de Educación y Ciencia, *"Primaria: Matemáticas"* Cajas Rojas. 1992, Madrid.

[MEC, 1992-b] Ministerio de Educación y Ciencia, *"Secundaria Obligatoria: Matemáticas"*, Cajas Rojas, 1992, Madrid

[MEC, 1993] Ministerio de Educación y Ciencia, *"Secuencias: Secundaria Obligatoria",* Ed. Escuela Española, 1993, Madrid.

[Meissner, 1992] H. Meissner, "The effect of the use of calculators on the initial development and acquisition of mathematical concepts and skills", Proc. of the 4th. Int. Congress of Math. Education, 1992, págs. 605-606.

[Miñano, 1991] R. Miñano Rubio, "Valoración de las Prácticas de Matemáticas I en la E.U. de Informática de la U.P.M.", Actas de las Jornadas sobre enseñanza experimental de la Matemática en la Universidad", 10-12 Diciembre 1991, Universidad Politécnica de Madrid, págs. 245-250.

[Monaghan, 1992] J. Monaghan, "Using a computer algebra system to teach quadratic functions", Teaching Mathematics with DERIVE; Josef Böhm (ed.), 1992, Chartwell Bratt, págs. 51-55

[Murakami-Hata, 1997] H. Murakami, M. Hata, "Mathematical Education in the Computer age", Davenport: Computer Algebra Systems, 1997, págs. 85-92.

[NCTM, 1980] National Council of teacher of Mathematics, Stephen Krulik, Robert E. Reys (eds. 1980 Yearbook), *"Problem solving in school Mathematics"*, Virginia, 1980.

[Neira, 1999] F. Neira, "Uno de cada tres alumnos de matemáticas abandona la carrera tras el primer año". El País, 29 de Junio 1999.

[Nortes, 1993] A. Nortes, *"Matemáticas y su didáctica",* Lerko Print, Murcia, 1993.

[Ortega-Sanz-Vázquez, 1998] P. Ortega, Fco. J. Vázquez, P. Sanz, *"Álgebra Lineal, cuestiones, ejercicios y su tratamiento en DERIVE",* Ed. Prentice-Hall, 1998.

[Orton, 1980] A. Orton, *"Didáctica de las matemáticas",* MEC-Morata, Madrid, 1980.

[Papert, 1982] S. Papert, *"Desafío de la mente: computadores y educación"* (traducción al castellano de Mindstroms: children, computers and powerful ideas de Lidia Espinosa de Matheu), Ediciones Galápago, 2ª edición, Buenos Aires, 1982.

[Peralta, 1995] J. Peralta, *"Principios didácticos e históricos para la enseñanza de las matemáticas",* Huerga & Fierro editores, 1995, Madrid.

[Pérez, 1996] J. Pérez Fernández, "Los sistemas de cálculo simbólico en la enseñanza de las matemáticas", Actas del ICME-8, Sevilla, 1996, Conferencia Ordinaria, págs. 345-368.

[Piaget y otros, 1978] J. Piaget, *"La enseñanza de las matemáticas modernas".* Madrid, Alianza, 1978.

[Piaget-Inhelder, 1975] J. Piaget y B. Inhelder, *"Psicología del niño",* Ediciones Morata, 6ª edición, Madrid, 1975.

[Pozo, 1987] A. Pozo, "El adolescente como científico", Cuadernos de Pedagogía, Octubre 1987, núm. 152, págs. 26-29.

[Polya, 1945] G. Polya, *"How to solve it?",* Princeton University Press, Princeton N.J. , 1945.

[Quesada, 1993] Antonio R. Quesada, "On the effects of Using Graphing Calculators in Calculus" Proc. of the Sixth Ann. Int. Conf. on Techn. in Colleg. Math., Parsippany, New Jersey, Nov. 4-7, 1993, pág. 296-30.

[Quesada, 1994] Antonio R. Quesada, "El impacto de las calculadoras gráficas en la enseñanza de aplicaciones matriciales a nivel preuniversitario", Actas de las VII JAEM, Sevilla, 1994, págs. 151-155.

[Quesada-Maxwell, 1994] A. Quesada y M. Maxwell, "The Effects of Using Graphing Calculators to Enhace College Students' Performance in Precalculus", Educ. Studies in Math., Vol. 27, 1994, pag. 205-215.

[Rebolo, 1992] Patricia Rebolo Medici, "Computer and Education: A High-School Experiment using the Mathematical Software DERIVE", Teaching Mathematics with DERIVE, Proc. of the Int. School on the Didactics of Computer Algebra, 1992, (ed. Joseph Böhm), págs. 175-190.

[Resnick-Ford, 1990] L. Resnick y W. Ford, *"La enseñanza de las matemáticas: fundamentos psicológicos",* Paidós-MEC, 1990, Barcelona.

[Roanes, 1991] E. Roanes Macías y E. Roanes Lozano, "Enseñanza y aprendizaje de la matemática en la era del ordenador", Actas de las Jornadas sobre enseñanza experimental de la Matemática en la Universidad, 10-12 Diciembre 1991, U.P. Madrid, págs. 201-206.

[Salter-Gilligan, 1991] Mary Salter y Lawrence Gilligan, *"Linear Algebra Experiments using the DERIVE program"*, EE.UU. 1991

[Sánchez-Hipola, 1995] M. del Pilar Sánchez Hipola, "Las tareas en el proceso de enseñanza-aprendizaje". ICE de la Univesidad Complutense de Madrid. Cap 1994-95. Formación del Profesorado de Secundaria "Programación y evaluación curricular", 1995, págs. 145-157.

[Santaló y otros, 1994] L.A. Santaló, S. Llinares, V. Sánchez, A. Taib y A. García-Hoz, *"La enseñanza de las matemáticas en la educación intermedia",* Ed. Rialp, Madrid, 1994.

[Schoenfeld, 1985] A.H. Schoenfeld, *"Mathematical Problem Solving*", Academic Press, Orlando, 1985.

[Sierspinska, 1996] Anna Sierspinska, "Razonamiento analítico versus razonamiento sintético en álgebra lineal o cómo un problema de comunicación se convierte en un problema de significado" en Investigación y Didáctica de las Matemáticas, Luis Puig y Juan Calderón (edts), M.E.C., 1996, págs. 47-65.

[Sierspinska-Dreyfus-Hillel, 1999] Anna Sierspinska, Tommy Dreyfus, Joel Hillel, "Evaluation of a teaching design in linear algebra: the case of linear transformations", Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 19, nº 1, 1999, págs. 41-76.

[Simon, 1990] Barry Simon, "Four Computer Mathematical Environments", Notices of the A.M.S., vol. 37, nº 7, Septiembre 1990, págs. 861-868

[Skemp, 1989] R.R. Skemp, *"Mathematics in the Primary School",* 1989, Londres, Gran Bretaña.

[Smith, 1951] D.E. Smith, *"History of mathematics. Vo.1. General survey of the history of elementary mathematics"* Dover, NY, 1951.

[Sullivan, 1990] P. Sullivan, "CAS in Differential Equations and Linear Algebra", Symbolic Computation in Undergraduate Mathematics Education, Zanen A. Karian (ed.), The Mathematical Association of America MAA Notes, 24, 1990, págs. 121-128.

[Torres-Jiménez, 1994] P.M. Torres Verdugo y R. Jiménez Prieto, "El ordenador en el aula: un medio útil para desarrollar actividades complementarias en unidades didácticas", Epsilon, Revista de la S.A.E.M., "Thales", nº. 30, 1994, págs. 39-46.

[Truesdell, 1984] C. Truesdell, "The computer: ruin of science and threat to mankind" An Idiot's Fugitive Essays, 1984, págs. 594-631.

[Vergnand, 1990] G. Vergnand, "Epistemology and Psychology of Mathematics Education" en Nesher: Kilpatrick, "Mathematics and cognition: A research synteshis", Cambridge Univ. Press, 1990, págs. 135-148.

[Villén, 1991] J. Villén Altamirano, "Prácticas de matemáticas en la Escuela Universitaria de Informática de la Universidad Politécnica de Madrid", Jornadas de Matemática Experimental en la Universidad Politécnica de Madrid, 1991, págs. 123-131.

[Watkins, 1992] A.J.P. Watkins, "Introducing calculus with DERIVE", (ed. Joseph Böhm) Teaching mathematics with DERIVE, 1991, págs. 1-19.

[Wertsch, 1991] J.V. Wertsch, *"Voices of the mind"* Cambridge, MA,Harvard University Press (trad. cast.: "voces de la mente. Un enfoque sociocultural para el estudio de la Acción mediada", Madrid, Visor, 1993).

[Wester, 1994] M. Wester, "A review of CAS Mathematical Capabilities" Computer Algebra Nederland Nieusbrief, N. 13. Dec. 1994, págs.41-48

ANEXOS

a la memoria de tesis doctoral

"La enseñanza del álgebra lineal con sistemas informáticos de cálculo algebraico"

Pedro Ortega Pulido

Directores:

Antonio Bautista García-Vera
y
Miguel de Guzmán Ozámiz

INDICE DE LOS ANEXOS

ANEXO I. GUIONES DE TRABAJO DEL CURSO "Matemáticas II con DERIVE"

A continuación presentamos a modo de ejemplo el contenido de los guiones didácticos del capítulo I, ya que los guiones didácticos de todos los capítulo se pueden encontrar en el CD adjunto a la tesis. Todos estos guiones didácticos están disponibles como archivos que puede leer directamente el programa DERIVE, existiendo una archivo para cada uno de los apartados de cada capítulo.

GUIONES DIDÁCTICOS DEL CAPÍTULO I: ESPACIOS VECTORIALES.

GUIÓN DE TRABAJO DEL APARTADO I.1.

```
"====================================================="
"I.1. VECTORES. OPERACIONES CON VECTORES."
"====================================================="
"CONCEPTO DE VECTOR COMO SEGMENTO ORIENTADO"
"¿Cómo dibujar un segmento en DERIVE?"
"Se deberán realizar tres operaciones:"
"1) Introducir los extremos del segmento"
"Por ejemplo  segmento de extremos (1,1) (2,2)"
"en DERIVE se realiza editando la expresión"
" [[1,1],[2,2]]  mediante el comando AUTHOR y se obtiene la matriz"
[[1,1],[2,2]]
"2) Abrir una ventana  2D-Plot en la que se pueda dibujar"
"   Esto se realiza con los comando PLOT-beside-40"
"3) Indicar a DERIVE que dibuje los puntos intermedios"
"    si aplicasemos ahora el comando PLOT , el programa dibujaría"
"     tan solo los dos puntos. Para dibujar los puntos intermedios"
"     aplicamos en la ventana 2D-plot los comandos"
"     OPTIONS-STATE-elegimos CONNECTED"
```

```
"     Ahora se puede comprobar que  se dibuja todo el segmento"
""
"Si queremos dar un nombre a este vector podemos editar"
v:=[[1,1],[2,2]]
"Este vector v tiene tres elementos,"
"MODULO"
"DIRECCION"
"SENTIDO"
"¿Cómo podría dibujar otros vectores con estos mismos elementos?"
"Por ejemplo si tomo el vector orientado"
[[0,1],[1,2]]
"obtendría, al pintarlo con PLOT-PLOT"
"Si ahora tomo el segmento orientado"
[[-3,1],[-2,2]]
"EJERCICIO I-1.INTENTAR DIBUJAR DE ESTA FORMA SEGMENTOS ORIENTADOS"
"CON EL MISMO MODULO, DIRECCION Y SENTIDO QUE EL SEGMENTO ANTERIOR"
"ENTRE DICHOS SEGMENTOS ORIENTADOS TOMAD UNO CON ORIGEN EN (0,0)"
" SI TE PLANTEASEN ELEGIR UN REPRESENTANTE DE TODOS ESOS VECTORES"
"QUE VECTOR ELEGIRIAS?"
"*************práctica de alumnos ******************"
"CONCEPTO DE VECTOR LIBRE"
"******** exposición teórica del concepto vector libre ***************"
"Nueva forma de referirnos a un vector: solo su extremo final"
"Componentes de un vector"
"De los vectores que habéis dibujado antes, ¿cuales son sus componentes?"
"Es claro que las componentes nos las da el vector con origen"
"en el (0,0)"
"¿Cómo calcular el módulo de un vector en DERIVE?"
"Si tenemos el vector de componentes"
u:=[1,1]
```

```
"Su módulo se obtiene editando la expresión"

;User=Simp(User)
"Abs(u)=”

;User=Simp(User)
ABS(u)=SQRT(2)


"EJERCICIO I-1"

"a) Dibujar los vectores fijos siguientes:"

"U1:origen(1,2), extremo (3,2)"

"u2:origen(-2,1),extremo (3,4)"

"U3:origen(2,3),extremo (6,5)"

"U4:origen (1,2), extremo (6,5)"

"U5:origen (-1,2),extremo (9,3)"

"******************"

"b) Dibujar un vector libre"

"equivalente con cada uno"

"de los anteriores que"

"tenga como origen (0,0)"

"******************"

"c) Calcular las componentes"

"de esos cinco vectores"

"******************"

"d) Calcular sus módulos"

"******************"

"¿Tienen alguna relación?

"los vectores dados"


"EJERCICIO 1-2"

"A) Dibujar los vectores que"

"tienen por componentes"

"u=(2,3); v=(1,0), w=(5,3)"

"B) Dibuja vectores libres"
"equivalentes a los anteriores"
```

```
"que tomen como origen"

"el punto (1,1)"

"EJERCICIO 1-3"

"a) ¿Cómo son las componentes"

"de un vector con modulo 0?"

"b) Dibuja un vector fijo"

"de modulo cero que tiene"

"por origen el punto (1,1)"

"c) ¿Cuántos vectores libres de"

"modulo 0 existen?"

"EJERCICIO 1-4"

"A) Calcular el modulo de los"

"vectores de componentes"

"u=(2,3), v=(3,2), w=(-2,3)"

"¨son iguales?"

"b) ¿Qué características tienen"

"que tener dos vectores para"

"ser iguales?"

"************ OPERACIONES CON VECTORES **********"

"Vamos a estudiar las operaciones entre vectores"

"Definiendo en DERIVE dos vectores gen,ricos de 4 componentes"

u:=[u1,u2,u3,u4]

v:=[v1,v2,v3,v4]

"SUMA DE VECTORES"

;User=Simp(User)
u+v=[u1+v1,u2+v2,u3+v3,u4+v4]

"Hagamos un ejemplo concreto definiendo los vectores"

a:=[1,2]

b:=[3,3]
```

```
"¨la suma?"

;User=Simp(User)
a+b=[4,5]

"Estudiar gráficamente la relación entre estos tres vectores"

"Realizar esto en la ventana 2, tener en cuenta que"

"los vectores a y b definidos en la ventana 1 siguen"

"estando en la ventana 2"

"DIFERENCIA DE VECTORES"

;User=Simp(User)
u-v=[u1-v1,u2-v2,u3-v3,u4-v4]

"Con los vectores concretos a y b anteriores"

;User=Simp(User)
a-b=[-2,-1]

"Estudiar nuevamente la relación geométrica que guardan"

"a, b y a-b"

"PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR"

"Si multiplicamos à u ¨qu, resulta?"

;User=Simp(User)
alpha*u=[alpha*u1,alpha*u2,alpha*u3,alpha*u4]

"Y si lo hacemos con un valor à=3"

;User=Simp(User)
3*u=[3*u1,3*u2,3*u3,3*u4]

"Para los vectores concretos que teníamos"

;User=Simp(User)
a=[1,2]

;User=Simp(User)
3*a=[3,6]

;User=Simp(User)
-5*a=[-5,-10]

;User=Simp(User)
-1*a=[-1,-2]

"Estudiar la relación que guardan a, 3a, -a gráficamente"

"Analizar los módulos de los vectores a, 3a, -a"

;User=Simp(User)
ABS(a)=SQRT(5)

;User=Simp(User)
```

```
ABS(3*a)=3*SQRT(5)

;User=Simp(User)
ABS(-5*a)=5*SQRT(5)

;User=Simp(User)
ABS(-a)=SQRT(5)


"PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES"

"En DERIVE esta operación se define con un  punto . "

;User=Simp(User)
u . v=u1*v1+u2*v2+u3*v3+u4*v4

"En los ejemplos concretos"

;User=Simp(User)
a . b=9

;User=Simp(User)
b . a=9


"EJERCICIO 1-5"

"Definir los vectores"

"u=(1,3), v=(3,7), w=(-1,1)"

"y obtener"

"a) u+v, u+w, v+w"

"b) 3u -4 w"

"c) u.v; u.w"


"EJERCICIO 1-6"

"Dados los vectores u,v,w"

"u=(2,3,4,6)"

"v=(3,2,1,3)"

"w=(3,2,1,a)"

"Se pide:"

"a) Calcular los vectores"

"3u - 2v + 5w"

"63 u + 213 v"

"-23 v + 4 w +10u"

"b) ¿Son u y v ortogonales?"
```

"c) Obtener el valor que ha de"

"tener a para que u y w sean"

"ortogonales."

"d) Obtener el valor que ha"

"de tener a para que v y w"

"sean ortogonales"

"EJERCICIO 1-7"

"Definir un vector de la forma u=(4,3)"

"a) Dibujar los vectores u y -u"

"y estudiar los módulos de ambos"

"¿Se puede extraer alguna"

"conclusión para cualquier"

"vector n-dimensional?"

"b) Constuye un vector que tenga"

"la misma dirección y sentido que"

"el vector u pero de tal forma"

"que su módulo sea unitario"

"Comprueba tu construcción"

"gráficamente."

"Deduce el método que debemos"

"emplear para construir un"

"vector unitario a partir de"

"un vector cualquiera n-dimensional"

"c) El producto escalar de vectores"

"también se define como"

"u.v = |u| |v| cos(u,v)"

"Según esta definición se pide"

"Si tomamos el vector v=(2,a)"

"Hallar el valor que ha de"

"tener para que:"

```
"1) u y v sean ortogonales"

"2) u y v formen un ángulo"

"de 30 grados"

"3) u y v formen un ángulo"

"de 28 grados"

"OBSERVACIONES:"

"Existe un bloque de ejercicios de manipulación"

"correspondientes a este apartado en la web indicada"

" web-algebra/capitulo-1/1-1-ejercicios"
```

GUIÓN DE TRABAJO DEL APARTADO I.2.

```
"====================================================="

"I.2. ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL"

"====================================================="

"*********** INTRODUCCION A LA ESTRUCTURA **************"

"Definamos los siguientes vectores"

u:=[1,2]

v:=[3,-1]

w:=[-1,4]

"----------------------------------"

"PROPIEDADES DE LA SUMA DE VECTORES"

"ASOCIATIVA"

"Comprobar que se verifican  que"

"  (u+v) + w = u+(v+w)"

"CONMUTATIVA"

"Comprobar que se verifican las siguientes relaciones"

"u+v=v+u;  u+w=w+u;  v+w=w+v"

"-------------"

"ELEMENTO NEUTRO"

"Podrias definir un vector n  de R^2  tal que"
```

```
" u+n = n+u =u  ;  v+n=n+v=v  ;  w+n=n+w=w"
"Si consideramos ahora el vector"
r:=[1,3,4,9]
"¿Cómo sería el vector  h tal que  r+h=h+r=h?"
"¿Puede existir algún otro vector  m distinto a n"
"tal que   u+m=m+u=u?"
"¿Puedes conjeturar alguna conclusión sobre"
"el aspecto que tiene el elemento neutro en general?"
"-------------"
"ELEMENTO OPUESTO"
"Definir un vector  ou, tal que  u+ou=ou+u=n"
"Definir otro vector, ov, tal que v+ov=ov+v=n"
"Definir un vector ow, tal que w+pw=ow+n"
"¿cuál es la característica común a los vectores"
"ou, ov, ow?"
"¿Cómo se han construido?"
"Si consideramos el vector r definido anteriormente"
"y el neutro asociado a R^4 , m"
"Definir el vector or tal r+or=or+r=m"
"Determina la forma de construir el ELEMENTO OPUESTO"
"************ CONCLUSION *****************"
"A partir de las conjeturas obtenidas se podría"
"afirmar que la suma de vectores verifica"
"las siguientes propiedades (exponer)"
"**************************************"
"PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE UN ESCALAR POR VECTOR"
"--------"
"DISTRIBUTIVA RESPECTO DE LA SUMA DE ESCALARES"
"Comprobar que se verifican las siguientes relaciones"
" (3+4) u = 3u + 4u"
```

```
" (84 + 34) v = 84 v + 34 v"

" (98 + 12) w = 98 w + 12 w"

"¿Podrías conjeturar una propiedad general a partir"

"de estas relaciones?"

"----------"

"DISTRIBUTIVA RESPECTO DE LA SUMA DE VECTORES"

"Comprobar que se verifican las siguientes relaciones"

" 34(u+v) = 34u + 34 v"

"85(u+w) = 85u+85w"

"-34(u-w) = -34 u -34(-w)"

"¿Podrías conjeturar una propiedad general a partir"

"de estas relaciones?"

"----------"

"SEUDOASOCIATIVA"

"Comprueba que se verifican las siguientes relaciones"

"(34*456)u = 34(456 u)"

"(87*324)*v = 87*(324*v)"

"(823*12)w = 823(12 w)"

"¿Podrías conjeturar una propiedad general a partir"

"de estas relaciones?"

"**************** CONCLUSION ****************"

"El producto de escalares por vectores cumple"

"las siguientes propiedades"

"(exponerlas)"

"************************************************"

"DEFINICION DE ESPACIO VECTORIAL (EXPONER)"

"CONCEPTO DE VECTOR COMO ELEMENTO DE UN E.V."

"************************************************"

"OTRAS PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS VECTORIALES"

"--------- PROPIEDAD 1----------"

"Definimos los siguientes vectores gen,ricos de R^4"
```

```
u:=[u1,u2,u3,u4]

v:=[v1,v2,v3,v4]

w:=[w1,w2,w3,w4]

"Suponiendo que se verifica que u+v=u+w"

"Intentar determinar si existe alguna relación entre"

"v y w"

"hacer una demostración formal de propiedad 2 (o exponerla)"

"******** PROPIEDAD 1 (exponer) ***********"

"---------- PROPIEDAD 2 ----------"

"Consideremos el siguiente vector nulo"

o:=[0,0,0,0]

"¿Cuanto vale k*o, siendo k un n£mero real cualquiera?"

"¿Qué propiedad general podrías conjeturar de este ejemplo?"

"hacer una demostración formal de propiedad 1 (exponer)"

"********* PROPIEDAD 2 (exponer) **********"

"---------- PROPIEDAD 3 ----------"

"Consideremos el vector genérico de R^4 definido antes"

;User=Simp(User)
u=[u1,u2,u3,u4]

"¨Cuanto vale  0*u ?"

"¨Se puede asegurar que para cualquier vector u"

" 0*u es igual el vector nulo?"

"---------- PROPIEDAD 4 ----------"

"Sea el vector v definido antes"

"Comprobar que   (-1)*v  es el vector opuesto de v"

"¨Se puede garantizar que para cualquier vector v"

"(-1)*v = -v (vector opuesto de v)?"

"Comprobarlo con algún otro ejemplo"

"---------- PROPIEDAD 5 ----------"

"Sea v el vector genérico de R^4 definido antes"

"Supongamos que  k*v = [0,0,0,0] es decir el vector"
```

```
"nulo de R^4"
"¿Se puede deducir algo de k?"
"¿Y del vector v?"
"Enunciar la propiedad generalizada"
"************************************************"
"ALGUNOS ESPACIOS VECTORIALES"
"************************************************"
"Intentar demostrar que el conjunto de los polinomios"
"con coeficientes reales de orden menor o igual que tres tienen"
"estructura de espacio vectorial"
"¿Cómo son los elementos del conjunto?"
"Sugerencia: definir los vectores"
p1:=a0+a1*x+a2*x^2+a3*x^3
p2:=b0+b1*x+b2*x^2+b3*x^3
p3:=c0+c1*x+c2*x^2+c3*x^3
"Comprobar las propiedades de la suma de vectores"
"(en este caso los vectores son polinomios grado <= 3)"
"¿La suma de dos polinomios de grado <=3 es un polinomio"
"de grado <= 3?"
"¿se cumple la propiedad asociativa?"
"¿se cumple la propiedad conmutativa?"
"¿cuál será el elemento neutro del espacio?"
"¿y el elemento opuesto?"
"-------------------------------------"
"Comprobar las propiedades del producto por escalar"
"¿el producto de un número real por un polinomio de"
"grado <=3 es de grado <=3?"
"¿se cumple la distributiva respecto suma de vectores?"
"¿se cumple la distributiva respecto de la suma de escalares?"
"¿se cumple la seudoasociativa?"
```

"¿cuál será el elemento unidad?"

"--------------------------------------"

"Se puede concluir que es un espacio vectorial?"

"***"

"plantear el siguiente ejemplo a desarrollar"

"Comprobar que el conjunto de polinomios de grado 3"
"no tiene estructura de espacio vectorial"

"***"

"Se sugiere intentar de forma individual los"

"ejercicios de manipulación I-2.1 y I-2.2 que"

"se encuentran en la página web"

GUIÓN DE TRABAJO DEL APARTADO I.3.

"==="

"I.3. SUBESPACIOS VECTORIALES"

"==="

"INTRODUCCION"

"¿Se puede afirmar que todo subconjunto de un"

"espacio vectorial tiene estructura de espacio vectorial?"

" "

"Como quedó patente en el ejemplo anterior"

"Vimos que el espacio de los polinomios de grado"

"menor o igual que 3 es un espacio vectorial"

"El conjunto de los polinomios de grado 3"

"es un subconjunto del anterior y sin embargo"

"no es un espacio vectorial"

"LUEGO: NO TODO SUBCONJUNTO DE UN ESPACIO VECTORIAL"

"TIENE ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL"

"----- EJEMPLO ------"

"Sea el espacio vectorial (R^2,+,.R): el plano real"

```
"Consideremos un subconjunto suyo, por ejemplo"

"los vectores (x,y) tales que  y=x+1"

"Sea uno de estos vectores"

u:=[1,2]

"Sea otro vector de este subconjunto"

v:=[2,4]

"¿Cual será el elemento neutro de este subconjunto?"

"No tiene, pues [0,0] no está en el subconjunto"

"entonces no es un espacio vectorial"

"Nuevamente tenemos un subconjunto de un espacio"

"vectorial que no tiene las propiedades de espacio vectorial"

"*****************************************************"

"**** CONCEPTO DE SUBESPACIO VECTORIAL *****"

"*****************************************************"

"Consideremos el espacio vectorial  (R^2,+,.R)"

"Y sea el subespacio  W={(x,y)/ x=0}"

"¿Este subconjunto de R^2 es un espacio vectorial?"

"Consideremos dos vectores"

u2:=[0,a1]

v2:=[0,a2]

w2:=[0,a3]

"-----> comprobar que cumplen todas las propiedades"

"------"

"¿No existirá alguna forma de deteminar"

"si un subespacio es o no vectorial sin tener"

"que comprobar todas las propiedades?"

"?"

"------"

"Consideremos otro subespacio"

"Sea  M={(x,y) / x=1}"

"Sean tres vectores de M"
```

```
m1:=[1,a1]

m2:=[1,a2]

m3:=[1,a3]

"-----> ¿cumplen las propiedades?"

"?"

"Falta el elemento neutro, NO EXISTE!"

"---------------------------------------------"

"¿Qué caracterización podríamos dar de los subespacios"

"vectoriales?"

"La primera es que la suma de dos vectores del subespacio"

"quede en el mismo subespacio"

"La segunda es que al multiplicar un escalar cualquiera"

"por un vector, el resultado sea un vector del subespacio"

"************** mostrar caracterización *****"

"Pero esta caracterización se puede simplificar con otra"

"de tal forma que"

"W es un subespacio vectorial de V sii"

"para todo α,β escalares y para todo u,v vectores de W"

"se verifica que"

"α*u + β*v   es un vector de W"

"Aplicar esta caracterización para determinar si"

"W1 = {(x,y,z) de R^3/ x+y-z=0} es subespacio vectorial"

"********** FORMAS DE DEFINIR SUBCONJUNTO DE R^n ******"

"Los subconjuntos de R^n se pueden expresar utilizando"

"o bien sus ecuaciones cartesianas"

"W1 = {(x,y,z) de R^3/ x+y-z=0}"

"o bien sus ecuaciones paramétricas"

"construyendo para ello la ecuación vectorial del"

"subespacio. Este proceso se realiza de la siguiente forma"

"como"
```

```
x+y-z=0

"resolviendo este sistema de 1 ecuación con SOLVE"

;Solve(#80)
z=x+y

"por tanto"

x=α
y=β

z=α+β

"En consecuencia W1 se puede expresar tambi,n como"

"W1={(x,y,z) de R^3/ x=α,y=β,z=α+β}"

"Seg£n esta consideraci¢n para determinar si el"

"subespacio W2 es o no subespacio vectorial"

"¿qué podemos hacer?"

"?"

"--> posible solución"

"**** PRIMERA ALTERNATIVA DE RESOLUCION"

"Sean dos vectores genéricos de R^3"

u3:=[x1,y1,z1]

v3:=[x2,y2,z2]

"Probemos la condición"

alpha*u3+beta*v3

;Simp(#99)
[alpha*x3+beta*x2,alpha*y3+beta*y2,alpha*z3+beta*z2]

"Este vector pertenece a W1?"

"Comprobemos si se cumple la relaci¢n entre componentes"

(alpha*x3+beta*x2)+(alpha*y3+beta*y2)-(alpha*z3+beta*z2)

;Simp(#103)
alpha*(x3+y3-z3)+beta*(x2+y2-z2)

"Como x3+y3-z3=0 , pues v3 es de W1"

"Y como x2+y2-z2=0 pues u3 es de W1"

"Entonces"

;User=Simp(User)
alpha*0+beta*0=0
```

```
"Es decir se cumple la condición por tanto w1 es subespacio"

"**** SEGUNDA ALTERNATIVA"

"Como tenemos las ecuaciones param,tricas de W1"

"W1={(x,y,z) de R^3/ x=α,y=β,z=α+β}"

"Consideremos dos vectores de este subespacio as¡"

u4:=[alpha1,beta1,alpha1+beta1]

v4:=[alpha2,beta2,alpha2+beta2]

"Entonces"

alpha*u+beta*v

;Simp(#117)
[alpha*alpha1+alpha2*beta,alpha*beta1+beta*beta2,alpha*(alpha1+beta1)+bet
a*(al~
pha2+beta2)]

"Comprobemos que es de W1"

;User=Simp(User)
(alpha*alpha1+alpha2*beta)+(alpha*beta1+beta*beta2)-
(alpha*(alpha1+beta1)+beta~
*(alpha2+beta2))=0

"******************* plantear ejercicios ******************"

"Determinar si los siguentes subconjuntos son o no subespacios
vectoriales de"

"los espacios vectoriales indicados"

"a) W1={(x,y,z) de R^3/ x=z}"

"b) W2={(x,y,z,t) de R^4/x=1}"

"c) W3={(x,y) de R^2/ x >=0, y>=0}"

"d) W4 ={(x,y,z) de R^3/ x=y, 2x+z=0}"

"e) W5 = {(x,y) de R^2/ x.y=1}"

"f) W6 ={(x,y,z) de R^3/ x^2+y^2-z=0}"

"????? resolver los que se puedan"

"**********************************************"

"*** ALGUNOS SUBESPACIOS VECTORIALES SENCILLOS +++"

"**********************************************"

"Sea el espacio vectorial (R^2,+,.R) y sea el subconjunto"

"del plano  W={(0,0)}   ¿Es un subespacio vectorial?"
```

```
"¿Podrías conjeturar alguna propiedad general?"

"-----"

"Considerar ahora el subespacio W2={(1,1)}"

"¿Es un subespacio vectorial?"

"¿A la vista de los ejercicios anteriores, podrías decir"

"¿cuál es el vector que ha de estar contenido"

"siempre en un subespacio vectorial?"

"?"

"*****************************************************"

"****** OPERACIONES ENTRE SUBESPACIOS VECTORIALES *****"

"*****************************************************"

"****** A) INTERSECCION DE SUBESPACIOS *******"

"------> exponer la definición"

"Ejemplo gráfico"

"Sean  W1 ={(x,y)/ x+y=0}; W2={(x,y)/x-y=0}"

"Representemos estos dos subespacios en R^2"

"NOTA DE USO DE DERIVE ¿cómo representar rectas?"

"¿Cuál es el subespacio intersección?"

"?"

"Podríamos realizar esto de forma analítica"

"Considerando las ecuaciones cartesianas de ambos subespacios"

"a la vez"

[x+y=0,x-y=0]

"al resolver SOLVE"

x:=

y:=

;Solve(#158)
[x=0,y=0]

"W1 intersección W2 = {(0,0)}"

"--------> ejemplos para practicar"

"Dados W1={(x,y)/ 3x-2y=0}, W2={(x,y)/4x+y=0}"
```

```
"W3={(x,y)/ x-2y=0}"

"a) Representarlos en el plano con DERIVE"

"b) Deducir de esta representación los subespacios"

"     W1 intersección W2"

"     W1 intersección W3"

"     W2 intersección W3"

"c) Comprueba analíticamente  los resultados."

"d) Sea W4 ={(x,y)îR^2/2x+y-3 =0}"

"     Calcula de forma analítica y gráfica"

"     W1 intersección W4  ¿es un subespacio vectorial?"

"e) ¿Podrías extraer alguna conjetura de lo que has estudiado"

"     en los apartados anteriores respecto de la intersección?"

"     ¿La intersección de subespacios vectoriales"

"     es un subespacio vectorial?"

"----> ejercicio de mayor dimensión"

"Dados W1={(x,y,z)∈R^3/2x+y-z=0}, W2={(x,y,z)∈R^3/x+2y-z=0,x+2y+z=0}"

"y  W3={(x,y,z)∈R^3/ x+2y+z=0}"

"Obtener W1 intersección W2 y W1 intersecci¢n W3"

"---------"

"?"

"-----> posición relativa de subespacios en el plano"

"Dados W1={(x,y,z)∈R^3/x+2y-z=0}"

"     W2={(x,y,z)∈R^3/x-2y+z=0}"

"     W3={(x,y,z)∈R^3/x=0,y+z=0}"

"     W4={(x,y,z)∈R^3/2x+4y-2z=0,y+x=0}"

"a) Obtener de forma analítica las siguientes intersecciones"

"    de subespacios W1 int. W2; W1 int W3; W1 int. W4;"

"     W2 int. W3; W2 int. W4; W3 int. W4"

"b) Interpretar cual es la posición relativa de los subespacios"

"     vectoriales que intervienen en cada una de las intersecciones"
```

```
"     anteriores"

"--------"

"?"

"******** exponer formalmente la demostración"

"acerca de la intersección de subespacios vectoriales"

"es otro subespacio vectorial"

"--> exponer"

"*******************************************************"

"*** UNION DE SUBESPACIOS ***************************"

"*******************************************************"

"----> exponer la definición formal de la unión"

"Consideremos los subespacios"

"W1 ={(x,y)∈R^2/ x+y=0};  W2={(x,y)∈R^2/x-y=0}"

"Representar gráficamente W1 y W2"

"¿cuál sería la unión?"

"?"

"--> W1 unión W2 = {(x,y)∈R^2/x+y=0 ó x-y=0}"

"---> visualizarla gráficamente"

"W1 unión W2 ¿es un subespacio vectorial?"

"Considerar los vectores"

u5:=[1,-1]

u6:=[1,1]

"Si sumamos estos dos vectores"

;User=Simp(User)
u5+u6=[2,0]

"vector que no pertenece al subespacio W1 unión W2"

"¿Puedes extraer alguna conclusión?"

"?"

"*******************************************************"

"* SUMA DE SUBESPACIOS *********************************"

"*******************************************************"
```

```
"Ya que la unión de subespacios no tiene porqué ser"

"un subespacio vectorial, necesitamos una operación"

"alternativa que recoja en cierta forma la idea de AGREGAR"

"a un subespacio otro, manteniendo la estructura"

"----> exponer la definición de suma de subespacios"

"Considerar los subespacios W1 y W2 anteriores,"

"W1 ={(x,y)∈R^2/ x+y=0};  W2={(x,y)∈R^2/x-y=0}"

"representarlos y deducir cual puede ser el"

"subespacio W1 + W2."

"?"

"Dados los subespacios"

"W1={(x,y,z)∈R^3/z=0}"

"W2={(x,y,z)∈R^3/x=y=0}"

"¿Qué representan en el espacio?"

"¿Cuál es su suma?"

"Sean los vectores"

u7:=[1,2,0]

u8:=[0,0,3]

"su suma ¿a qué subespacio pertenece a W1, W2 ó W1+W2?"

"?"

"Sean los vectores"

u9:=[3,5,0]

u10:=[3,0,0]

"su suma ¿a qué subespacio pertenece W1, W2 ó W1+W2?"

"?"

"Sea el subespacio W3={(x,y,z)∈R^3/x=z=0}"

"Sea el vector de W3"

u11:=[0,4,0]

"y el vector de W1"

;User=Simp(User)
u9=[3,5,0]
```

```
"u9 + u11 ¿a  qué subespacio pertenece W1,W3 ó W1+W3?"
"?"
"Determinar analíticamente el subespacio W1∩W3"
"?"
"Determinar cual puede ser el subespacio W1+W3."
"?"
"¿Podrías deducir alguna conclusión respecto"
"de W1+W2 y W1+W3?"
"?"
"¿Se podría asegurar que la suma de subespacios"
"vectoriales es un subespacio vectorial?"
"?"
"*****************************************************"
"***SUMA DIRECTA DE SUBESPACIOS VECTORIALES ***********"
"*****************************************************"
"En el apartado anterior observemos que"
"W1 intersección W3 era el elemento neutro {(0,0,0)}"
"¿Cuánto valía W1 + W3?"
"Cuando se da esta circunstancia se puede decir"
"que W1 y W3 son SUBESPACIOS SUPLEMENTARIOS"
"Puesto que W1 + W3 = R^3"
"Como además W1∩W3 = {(0,0,0)} entonces"
"Se puede afirmar que"
"W1 suma directa W2 = R^3"
"-----> exposicion teórica de la definición suma directa"
"Si W1={(x,y,z,t)∈R^4/ x=0=z}"
"podr¡as obtener el subespacio suplementario a W1"
"++++++++ fin apartado 1-3 ++++++++"
```

" realizar ejercicios manipulación I-3.1, I-3.2 y I-3.3"

GUIÓN DE TRABAJO DEL APARTADO I.4.

```
"**********************************************************"

"****** I.4. SISTEMAS DE GENERADORES *********************"

"**********************************************************"

"-----> CONCEPTO DE COMBINACION LINEAL"

"Sean los vectores"

u:=[1,1]

v:=[1,0]

"Representarlos en el plano (con origen el (0,0)"

"Recuérdese que hay que indicar a DERIVE que"

"dibuje los segmentos de forma conexa: Options-State-(Connected)"

"Observar cómo se obtiene el vector [1,3]"

w:=3*u-2*v

;User=Simp(User)
w=[1,3]

"podríamos dibujarlo en el plano"

"Calcular otros vectores obtenidos a partir de u y v, de la forma"

" a u + b v , siendo a,b valores reales"

"¿Qué valores deberían tener a y b para obtener  el vector"

r:=[-13,32]

"--->> hacerlo"

"Utilizando esta técnica ¿podríamos calcular  cualquier vector del
plano?"

"----> ¿Se puede obtener alguna conclusión?"

"=========> DEFINICION DE COMBINACION LINEAL <========="

"-----> Ejercitar el concepto"

"Determinar si el vector"

u1:=[26,11]

"se puede expresar como combinación lineal de los vectores"

u2:=[2,5]

u3:=[5,-1]
```

```
"-----> Resolver"

" Segundo ejercicio"

"Determinar si el vector"

u4:=[3,4,1]

"se puede expresar como combinación lineal de los vectores"

u5:=[1,2,1]

u6:=[3,1,4]

u7:=[4,3,5]

"-----> Resolver"

"Tercer ejercicio"

"Escribir si es posible el vector"

u8:=[1,-1,4]

"como combinación lineal de los siguientes vectores de R^3"

"a)  (1,1,2) y (0,0,1)"

"b) (2,-2,0) y (-1,1,2)"

"c) (1,0,1), (0,1,1) y (1,1,0)"

"----> Resolver"

"A partir de esta definición, podríamos preguntarnos si"

"un subespacio vectorial puede estar generado o no por"

"un conjunto de vectores, mediante las infinitas combinaciones"

"lineales de los mismos"

"Vamos a estudiar esto con un ejemplo concreto"

"--------> Ejemplo"

"¿cómo son los vectores que se obtienen"

" de las infinitas combinaciones lineales del vector (1,2)?"

"--> Solución"

u9:=[1,2]

"dibujemos el vector"

"Consideremos ahora el vector  3* (1,2);  4* (1,2);"

" -3*(1,2); -4*(1,2),........"

"Se puede deducir ¿cuál será el subespacio que genera?"
```

"¿es un subespacio vectorial?"

"=======> PROPOSICION <========"

"El conjunto de las infinitas combinaciones lineales de un"

"conjunto de vectores de V es un subespacio vectorial de V"

"-----> Demostración formal"

"-----> EJERCICIO"

"Dados los vectores"

u10:=[1,2,1]

u11:=[0,1,1]

"Calcular el conjunto S=L{u10,u11} y comprobar que es"

"un subespacio vectorial (se trata de obtener sus ecuaciones"

" paramétricas y cartesianas)"

"---> Comentar la forma de resolver con DERIVE"

"-----> EJERCICIO"

"Encontrar los subespacios vectoriales generados por los"

"conjuntos de vectores"

"(a) {(1,2),(2,3)}"

"(b) {(1,2,3),(2,0,-1),(0,4,7)}"

"(c) {(1,2,3,0),(1,0,0,-1),(1,0,0,1),(0,2,3,1)}"

"----> Resolverlos"

"=====> SISTEMA DE GENERADORES <======="

"Esta formas de construir subespacios vectoriales, nos permitirían"

"afirmar en todos los casos que esos subespacios están"

" GENERADOS por esos conjuntos de vectores, al poder"

"obtenerse cualquier vector del subespacio como combinación"

"lineal de los mismos, así podemos definir"

"=====> DEFINICION DE SISTEMA DE GENERADORES <====="

"Si antes hemos construido el subespacio vectorial generado"

"por un conjunto de vectores, vamos a experimentar ahora"

"con el proceso inverso, es decir, obtener un conjunto"

```
"de vectores que genere un determinado subespacio vectorial"

"-----> EJEMPLO"

"Sea el subespacio  S={(x,y,z)∈R^3/y=2x-3z}"

"¨c¢mo son los vectores de S?"

"¨cu les son las ecuaciones paramétricas de S?"

[x=a,y=2*a-3*b,z=b]

"Entonces un conjunto de vectores sería"

"{(1,2,0), (0,-3,1)}"

"El conjunto de vectores {(1,2,0),(2,1,1)}"

"¿genera el mismo subespacio S?"

"----> obtener ecuaciones cartesianas del subespacio generado"

;User=Simp(User)
a=a

;User=Simp(User)
b=b

[x,y,z]=a*[1,2,0]+b*[2,1,1]

"simplifico y obtenemos"

;Simp(#103)
[x=a+2*b,y=2*a+b,z=b]

"intentemos eliminar los parámetros a y b"

"sustituyendo b por z"

" con MANAGE-SUBSTITUTE"

;Sub(#105)
[x=a+2*z,y=2*a+z,z=z]

"cogemos la primera ecuación"

x=a+2*z

"resolvemos respecto de a"

;Solve(#111)
a=x-2*z

"ahora sustituimos en la última expresión 109, a por x-2z"

;Sub(#109)
[x=(x-2*z)+2*z,y=2*(x-2*z)+z,z=z]

"simplifico y"

;Simp(#115)
```

[x=x,y=2*x-3*z,z=z]

"y se obtienen como ecuaciones"

y=2*x-3*z

"luego efectivamente esos dos vectores también generan S"

"Esto nos muestra que un mismo subespacio puede tener varios sistemas de generadores diferentes"

"------> EJERCICIO"

"Hallar un sistema de generadores de los subespacios"

"W1={(x,y,z)∈R^3 / x=y, 2x+z=0}"

"W2={(x,y,z)∈R^3/x=z,y=4x-z}"

"W3={(x,y,z)∈R^3/x+y+z=0}"

"W4={(x,y,z,t)∈R^4/ x-2y+z=0, x-z+2t=0, z-t=0}"

"---"

"---"

"--- ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS SIST. GENERADORES-"

"---"

"==> PROPIEDAD 1"

"Considérense los conjuntos de vectores"

"G1={(1,0,-1),(1,-1,0)}"

"G2={(-1,1,1),(2,-2,0)}"

"Calcular los subespacios que generan G1 y G2."

"¿Qué relación guardan?"

"¿Podrías obtener otro sistema de generadores que genere"

"el mismo subespacio que G1?"

"¿Puedes obtener alguna conclusión de esta experiencia sobre"

"el número de sistemas de generadores que tiene un subespacio vectorial?"

"===============> propiedad:"

"LOS SUBESPACIOS VECTORIALES NO ESTAN GENERADOS DE FORMA UNICA"

"===> PROPIEDAD 2"

"Considérense los siguientes conjuntos de vectores"

"{(1,0,0),(0,1,0)}"
"{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)}"

```
"{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0),(2,0,0)}"

"Obtener los subespacios vectoriales que generan"

"¿Cómo son los subespacios vectoriales que generan?"

"¿Puedes deducir alguna propiedad de los sistemas"

"de generadores a partir de esta situación?"

"===========> propiedad 2"

"Dado un sistema de generadores de W, siempre podemos"

"construir otro sistema de generadores formado los vectores del"

"y otro vector que sea combinación lineal de los anteriores"

"===> comentario"

"======> propiedad 3"

"Consideremos ahora el conjunto de vectores"

"{(1,1,1),(1,1,0),(0,0,1)}"

"¿Qué subespacio generan?"

"Si tomamos ahora un subconjunto de vectores del conjunto anterior"

"{(1,1,1),(1,1,0)}"

"¿generan el mismo subespacio?"

"Y si ahora tomamos el subconjunto"

"{(1,1,1)}"

"¿genera el mismo subespacio?"

"-----> reflexionar"

" ¿qué puedes deducir de este ejemplo ?"

"--------> EJERCICIO"

"Dados los conjuntos de vectores"

"{(1,1,1,1),(1,2,-1,0),(0,1,-2,-1),(1,0,3,2)}"

"{(1,1,1,1),(1,2,-1,0),(0,1,-2,-1)}"

"{(1,1,1,1),(1,2,-1,0)}"

"{(1,1,1,1),(0,1,-2,-1)}"

"{(1,1,1,1)}"

"{(1,2,-1,0)}"
```

```
"Se pide:"
"(a) Obtener los subespacios generados por estos seis conjuntos"
"     de vectores"
"(b) Observar las relaciones que existen entre estos conjuntos"
"(c) ¿Cuál será el mínimo de vectores que debe contener"
"     el sistema de generadores del subespacio"
"L{(1,1,1,1),(1,2,-1,0),(0,1,-2,-1),(1,0,3,2)}"
"----->"
" Completar este estudio con los ejercicios de"
" manipulación propuestos para este apartado 1.4 en la web"
```

GUIÓN DE TRABAJO DEL APARTADO I.5.

```
"**********************************************************"
"*** I.5. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL  *************"
"**********************************************************"
" Al acabar el apartado anterior un interrogante que nos"
" puede asaltar sería"
"¿cuál será el número mínimo de vectores que ha de contener"
"un sistema de generadores para generar un mismo subespacio?"
"Consideremos el siguiente ejemplo:"
"-----> EJEMPLO"
"Sean los vectores"
u1:=[3,-1,0,4]
u2:=[1,0,0,0]
u3:=[0,1,0,-1]
u4:=[5,0,0,3]
"¿se puede expresar u4 como combinación lineal de los vectores"
"u1,u2,u3?"
"¿se puede decir que U4 depende de u1,u2 y u3?"
"¿se trata de una dependencia lineal?"
"¿podrías definir con tus palabras el concepto de"
```

```
"dependencia lineal?"

"========>  CONCEPTO DE VECTORES LINEALMENTE DEPENDIENTES"

"=========> DEFINICION"

"-----> EJEMPLO"

" Dados los vectores"

u5:=[1,1,1]

u6:=[1,1,0]

u7:=[1,0,0]

"¿Se puede expresar el vector u5 como combinación lineal de"

"u6 y u7?"

"----> hacerlo"

"¿Se puede expresar el vector u6 como combinación lineal de"

"u5 y u7?"

"----> hacerlo"

"¿Se puede expresar el vector u7 como combinación lineal de"

"u5 y u6?"

"----> hacerlo"

"=======> ¿existe alguna dependencia en este conjunto de vectores?"

"¿podríamos decir que estos vectores son independientes?"

"si decimos que estos vectores son linealmente independientes"

"¿podrías dar una definición de este concepto?"

"======> reflexión"

"=====> VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES"

"=====> DEFINICION"

"¿Son operativas estas dos definiciones?"

"-----> reflexión"

"===> CARACTERIZACION DE LA DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL DE
VECTORES"



"-----------------------------------------------------------"
```

```
"---- DEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES-----------------------"

"----------------------------------------------------------"

"Respecto de la DEPENDENCIA LINEAL, recordemos que en el"

"primer ejemplo el vector u4 dependía linealmente del resto"

"de tal forma que  u4 = u1 + 2 u2 + u3"

" si agrupamos todos en un miembro tenemos"

"u1 + 2 u2 + u3 - u4 = 0   (0 es el vector nulo)"

"¿podríamos obtener una caracterización de este hecho?"

"---> pensar"

" =====> CARACTERIZACION DE CONJUNTOS L.D."

"Dados n-vectores de un espacio vectorial  u1,u2,u3,...,un de V, diremos"

"que son un conjunto LINEALMENTE DEPENDIENTE si y sólo si"

"existen escalares  α1,α2,...,αn de R  NO TODOS NULOS"

"tales que    α1*u1+α2*u2+...+αn*un=0 (vector nulo)"

"----------------------------------------------------------"

"----- INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES -------------------"

"----------------------------------------------------------"

"Consideremos el ejemplo anterior , donde ten¡amos los vectores"

"que los vectores u5, u6 y u7 eran linealmente independientes"

"¿se podría obtener alguna caracterización similar a la anterior?"

"=====> reflexión"

"=====> CARACTERIZACION DE CONJUNTOS L.I."

"Dados n-vectores de un espacio vectorial  u1,u2,u3,...,un de V, diremos"

"que son un conjunto LINEALMENTE INDEPENDIENTES si y sólo si"

"la ecuación α1*u1+α2*u2+...+αn*un=0

"se verifica sólo si  α1=α2=...=αn"

"---------- > EJEMPLO DE APLICACION"

" Determinar sin son L.I. o L.D. los siguientes conjuntos de vectores"
"(a) u8, u9 y u10 donde"
u8:=[-1,2,0]

u9:=[1,0,1]
```

```
u10:=[0,1,1]

"(b) {u11,u12,u13,u14}  donde"

u11:=[1,2,3,-5]

u12:=[1,4,1,-2]

u13:=[2,0,-3,1]

u14:=[0,6,7,-8]

"------ hacer el ejemplo"

" Se plantea otro ejercicio para practicar"

"---------> EJERCICIO DE MANIPULACION"

"Comprobar si los siguientes conjuntos de vectores son L.I. o L.D."

"(a) {(1,0,0),(0,1,0),(0,0,0)}"

"(b) {(0,0,0)}"

"(c) {(1,2,-1),(3,1,1),(1,0,-1)}"

"(d) {(1,1,0),(0,1,1)}"

"(e) {(1,3,6,5,3,4),(1,0,0,2,3,-1),(1,3,2,3,2,0),(1,1,-1,-2,3,1)}"

"----> resolverlos"

"------------------------------------------------------------"

"--- ALGUNAS PROPIEDADES IMPORTANTES -----------------------"

"------------------------------------------------------------"

"1) ¿puede ser un conjunto de vectores L.I. y a la vez L.D.?"

"2)"

"2) ¿cómo es cualquier conjunto de vectores que contiene al vector nulo?"

"   Ejemplo: considerar los vectores {(1,2,3),(3,4,5),(0,0,0)},"

"Es L.I. o L.D. ?"

"=====> respuesta"

"3) ¿cómo son los conjuntos de vectores unitarios no nulos L.I. ó L.D.?"

"   Ejemplo: Estudiar si son L.I. ó L.D. los siguientes conjuntos"

"   de vectores:"

"   (a) {(1,2,3,4,5)}"

"   (b) {(3,4,2,1,0,8,9)}"

"   (c) {(9,7)}"
```

```
"=====> respuesta"

"3)"

"3) ¿cómo es la relación entre conjuntos de vectores  que se"

"   construyen a partir de conjuntos L.D.?"

"     Ejemplo para investigar:"

"     Sea el conjunto de vectores
{(1,2,3,0),(1,1,3,4),(8,3,4,5),(8,5,1,4)}"

"     Comprobar que es L.D."

"     Estudiar si los siguientes conjuntos de vectores son L.I. o L.D."

"(1) {(1,2,3,0),(1,1,3,4),(8,3,4,5),(8,5,1,4),(1,2,3,4)}"

"(2) {(1,2,3,0),(1,1,3,4),(8,3,4,5),(8,5,1,4),(0,-1,2,2)}"

"(3) {(1,2,3,0),(1,1,3,4),(8,3,4,5),(8,5,1,4),(3,4,5,7),(1,2,3,1)}"

"=====> investiga la relación que guardan estos conjuntos respecto"

"       el conjunto inicial y la relación L.D."

"=====> comentario"

"4)"

"   ¿qué se puede afirmar de los subconjuntos de vectores L.I.?"

"   Consideremos el siguiente conjunto de vectores"

" G={u14, u15, u16}"

"  donde"

u14:=[2,0,3,4]

u15:=[1,1,2,1]

u16:=[3,1,2,0]

" Comprobar que G es un conjunto L.I."

"Estudiar si son L.I. o L.D. los siguientes subconjuntos de G"

"(a)  {u14, u15}"

"(b) {u14}"

"---> hacerlo"

"=====> ¿podrías conjeturar alguna propiedad para estos subconjuntos?"

"=====> conclusión"

"===========> comentario final de las 5 propiedades"
```

```
"----------------------------------------------------------"
"---  CONCEPTO DE RANGO DE UN CONJUNTO DE VECTORES  -------"
"----------------------------------------------------------"
"¿podríamos definir de alguna forma al número de vectores L.I."
"de un conjunto de vectores?"
"¿qué número consideramos el máximo de vectores L.I.?"
"¿y el mínimo de vectores L.I.?"
"====> reflexionar"
"---------> DEFINICION"
"Dado un conjunto de vectores {u1,u2,u3,...,un} de un espacio"
"vectorial V, se define el RANGO de ese conjunto de vectores"
"al número máximo de vectores LINEALMENTE INDEPENDIENTES"
"-----> CALCULO EFECTIVO DEL RANGO DE UN CONJUNTO"
"Determinar el rango del conjunto de vectores"
u15:=[2,1,0]
u16:=[1,-1,3]
u17:=[0,-3,6]
u18:=[6,0,6]
"-----> realizar el ejercicio"
"-----> ¿cuál es el rango?"
"-----> EJERCICIO"
"Calcular el rango del siguiente conjunto de vectores"
"(a) {(1,-2,1,1),(3,0,2,-2),(0,4,-1,1)}"
"(b) {(1,2,3,0),(1,0,0,1),(1,0,0,-1),(0,2,3,1)}"
"-----> realizar el ejercicio"
"-----> respuestas"
"-----------------------------------------------------"
"---  RELACION ENTRE L.I.-SISTEMAS GENERADORES -------"
"-----------------------------------------------------"
"-----> Ejercicio para investigar"
```

```
"Sea W el subespacio generado por el conjunto de vectores"
"G={(1,2,3,1),(0,1,2,3),(1,0,0,0),(1,0,-1,-5),(1,2,4,6)}"
"Determinar"
"(a) el rango del conjunto G"
"(b) el conjunto G' que contiene el mínimo número de vectores"
"   de G precisos para generar  W"
"=====> ¿cuál es el mínimo número de vectores necesario"
"        para generar un subespacio vectorial?"
"=====> reflexionar"
"=====> si G es un sistema de generadores de W"
"      que es L.D., podremos extraer un subconjunto"
"       de G que también genere W?"
"-----> Investigar esta pregunta con el siguiente"
"     ejemplo:"
"Sea el subespacio generado por"
"G={(1,2,4),(1,1,0),(2,3,4)}"
"(a) obtener el subespacio vectorial que genera"
"(b) ¿es G un conjunto L.D.?"
"(c) ¿se puede encontrar algún subconjunto de G que genere"
"     el mismo subespacio?"
"=======> CONLUSION."
"=====> si G es un sistema de generadores de W"
"      que es L.I., ¿podemos obtener un subconjunto"
"       de G que genere W?"
"-----> Investigar esta pregunta con el siguiente"
"     ejemplo:"
"Sea el subespacio generado por"
"G={(1,2,3),(0,1,2)}"
"(a) obtener el subespacio vectorial que genera"
"(b) ¿es G un conjunto L.I.?"
"(c) ¿se puede encontrar algún subconjunto de G que genere"
```

```
"     el mismo subespacio?"
"=======> CONLUSION."
"==============> ENUNCIAR FORMALMENTE LA PROPOSICION"
"-----> Investigar:"
"  Si G y G'  son dos sistemas de generadores de V"
"tales que   G={u1,u2,...,um}  y G'={u1',u2',...,un'}"
"si G' es un conjunto l.i."
"¿qué relación guardarán  el número de vectores de G"
" y el número de vectores de G'?"
"----> Intenta estudiar esto con el siguiente ejemplo"
" Sea G={u20,u21,u22} tales que"
u20:=[1,2,0]
u21:=[0,1,1]
u22:=[1,3,1]
"Y sea G'={u20,u21}"
"(a) comprobar que G y G' generan el mismo subespacio"
"(b) comprobar que G' es un conjunto L.I."
"(c) deducir la relación de G y G'"
```

GUIÓN DE TRABAJO DEL APARTADO I.6.

```
"************************************************************"
"***  I.6. BASE Y DIMENSION DE UN SUB. VECTORIAL  *********"
"************************************************************"
"Del apartado anterior obtuvimos como conclusión que"
"siempre es posible obtener un sistema de generadores"
"que sea un conjunto L.I., capaz de generar un"
"determinado subespacio vectorial. Además esta"
"característica permite deducir que existe una"
"relación entre el número de vectores de un L.I. de"
"un espacio vectorial y el número mínimo de vectores"
"precisos para generar ese espacio."
```

```
"=====> ¿cuántos vectores pueden ser como  máximo L.I. en R^3 ?"

"=====> reflexionar"

"=====> ¿cuántos vectores son precisos como mínimo para generar R^3?"

"=====>"

"-----> ejemplo para investigar"

"Sea el subespacio vectorial  W={(x,y,z)∈R^3/x+y+z=0}"

"Y sean los conjuntos de vectores"

"G1={u1,u2}, G2={u1,u2,u3}, donde"

u1:=[-1,1,0]

u2:=[-1,0,1]

u3:=[-2,1,1]

"(a) Comprobar que son un sistema de generadores de W."

"(b) Comprobar que G1 es L.I. pero G2 es L.D."

"(c) ¿cuál será la combinación lineal de vectores de G1"

"necesaria para obtener el vector (3,0,-3)?"

"(d) ¿cuál será la combinación lineal de vectores de G2"

"necesaria para obtener el vector (3,0,-3)?"

"(e) ¿qué diferencias observas entre ambas combinaciones"

"   lineales?"

"======> ¿por qué se dá  esta diferencia?"

"=====> CONCLUSION"

"------> esto nos permite afirmar que los"

"       sistemas de generadores L.I. determinan"

"       de forma única cualquier vector del subespacio"

"======> DEFINICION DE BASE DE UN SUBESPACIO VECTORIAL"

"-----> EJERCICIO DE MANIPULACION"

"Encontrar una base del subespacio vectorial"

"W = {(x,y,z,t)∈R^4/ x-y+2z+t=0, x+y-t=0}"

"y representar el vector (1,1,-1,2) mediante los elementos"

"de la base obtenida"
```

"-----> resolver"

"=====> reflexionar"

"-----> ¿cuál es la ventaja que tiene la base de un sub. vect.?"

"-----> necesidad de definir el concepto de COORDENADA"

"=====> DEFINICION DE COORDENADAS DE UN VECTOR EN UNA BASE"

"-----> ejemplo de manipulación"

"Dado el subespacio vectorial W={(x,y,z,t)∈R^4/ 2x+z=0}"

"Obtener una base."

"-----> encontrar ecuaciones paramétricas"

"-----> obtener un sistema de generadores"

"-----> que sea l.I."

"¿coordenadas de (-2,3,4,2) en esta base obtenida?"

"-----> plantear la ecuación vectorial"

"-----> resolver con DERIVE."

"-----> EJERCICIO"

"Dados los conjuntos de vectores:"

"B1={u4,45,u6}"

"B2={u7,u8,u9}"

"B3={u10,u11,u12}"

"donde"

u4:=[1,2,3]

u5:=[0,0,1]

u6:=[-1,1,0]

u7:=[1,1,1]

u8:=[1,1,0]

u9:=[1,0,0]

u10:=[1,0,0]

u11:=[0,1,0]

u12:=[0,0,1]

"(a) Comprobar si son bases de R^3"

```
"(b) Obtener las coordenadas del vector (3,2,-1) respecto de las bases
anteriores"

"B1={u4,45,u6}, B2={u7,u8,u9},  B3={u10,u11,u12}"

"--------------------------------------------------------"

"----- DIMENSION DE UN SUBESPACIO VECTORIAL     -------"

"--------------------------------------------------------"

"Estamos considerando espacios vectoriales generados por"

"un número finito de vectores (espacios vectoriales finitos)."

"=====> DEFINICION DE BASE DE UN SUB. VECTORIAL"

"----> el número de vectores de una base es un número"

"       invariante que recibe el nombre de dimensión del subespacio"

"      dim(W) = núm. vectores de una base de W"

"-----> ejercicio manipulación"

"Dado el subespacio vectorial"

"W={(x,y,z,t)∈R^4/ x-y+z=0,2x-t=0}"

"se pide calcular la dimensión del subespacio W"

"--------------------------------------------------------"

"----- BASE CANONICA DE UN ESPACIO VECTORIAL -----------"

"--------------------------------------------------------"

"Para un espacio vectorial como (R^3,+,.R) podemos encontrar"

"infinidad de bases formadas todas ellas por tres elementos,"

"pero a una de ellas se la denomina base canónica"

"Bc={(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)}"

"-----> pensar"

"¿cuáles con las coordenadas del vector (3,4,5) en la base canónica"

"¿cuáles son las coordenadas de (4,-23,9) en Bc?"

"¿podrías obtener alguna conjetura"

"¿qué relación guardan las componentes de un vector"

"y las coordenadas de dicho vector en la base canónica?"

"=====> comentario"

"-----> ejercicio"
```

```
"Sea el espacio vectorial (R^5,+,.R). Obtener tres bases de"
"este espacio vectorial, siendo una de ellas la canónica"
"y obtener las coordenadas del vector (3,2,0,1,0) respecto"
"dichas bases"
"---------------------------------------------------------"
"---- RELACION ENTRE LAS ECUACIONES CARTESIANAS --------"
"----- DE UN SUBESPACIO Y SU DIMENSION -----------------"
"---------------------------------------------------------"
"-----> ejemplo para investigar"
"Sea el subespacio vectorial"
"W={(x,y,z,t,r)∈R^5/ x-y+r=0,2x+z-t=0, 4x+2z-2t=0}"
"Se pide:"
"(a) Obtener la dimensión de dicho subespacio"
"(b) De las tres ecuaciones que definen el subespacio"
"    ¿existe alguna que sea redundante, que se pueda suprimir?"
"     ¿cuantas ecuaciones no redundantes tiene W?"
"(c) ¿podrías deducir alguna relación entre la dimensión"
"     del subespacio y el número de ecuaciones no redundantes?"
"=====> comentar la relación"
"---------------------------------------------------------"
"---- PROLONGACION DE UNA BASE -------------------------"
"---------------------------------------------------------"
"Sea el subespacio vectorial"
"W={(x,y,z)∈R^3/ x=z}"
"(a)  BW={(1,0,1),(0,1,0)} es una base de W?"
"(b) ¿cuál es la dimensión de W?"
"(c) ¿podríamos conseguir una base de R^3 a partir"
"     de la base de W?"
"=====> practicar."
"-----> comentar la idea de prolongación"
"=====> procedimiento para prolongar una base"
```

```
"-----> EJERCICIO de manipulación"

"Dado el subespacio vectorial de R^5"

"W={(x,y,z,t,r)∈R^5/x+y+z=0, 2z-t+r=0}"

"(a) Obtener una base B1 de W"

"(b) Obtener una base B2 de R^5 mediante una prolongaci¢n de la base B1"

"(c) Obtener las coordenadas del vector de W  (1,1,-2,-1,3) en las base
B1"

"     y B2"

"(d) ¿Observas alguna característica?. Enúnciala y compruebala con"

"     otros ejemplos."

"--------------------------------------------------------"

"---BASES ORTONORMALES Y BASES ORTOGONALES-----------"

"--------------------------------------------------------"

"=====> Definición de Base ORTONORMAL"

"=====> Definición de Base ORTOGONAL"

"-----> ejercicio de manipulación"

"Sea B={u13,u14,u15} donde"

u13:=[1,1,0]

u14:=[1,-1,0]

u15:=[0,0,1]

"(a) Comprobar que B es una base ortogonal de R^3"

"(b) Construir una base ortonormal de R^3 a partir de la base"

"     anterior."

" ----->"

" En la página web existen ejercicios de manipulación"

" complementarios para este apartado"
```

ANEXO II: LISTADO DE ALUMNOS MATRICULADOS EN LA ASIGNATURA MATEMÁTICAS II, CURSO 1999-2000.

PCSIGMA LISTADO DE ACTA 21-6-2000

0103 F.C.Econ≤micas y Empresariales

Año Academico/Semestre: 1999/0 Convocatoria: 1 Junio
Asignatura: 10986 MATEMATICAS II Grupo clase: 04
Colectivo : 00 Tribunal: N ACTA GLOBAL Version: 01 Pag 1

DNI/PASAP.	APELLIDOS Y NOMBRE	CALIFICACION
51084346	Agueda De Corneloup ,Alexis	S Suspenso
6259869	Andujar Lara ,Maria Elena	A Aprobado
51463651	Ansar Dezfouli ,Behnoud	S Suspenso
52349453	Arco Pardo ,Javier Del	N Notable
822235	Arespacochaga Rico ,Luis de	NN No consume
11835836	Arnaldo Torrado ,M¬ Bego±a	A Aprobado
2531613	Baro Ollero ,Fernando	NN No consume
47027219	Bellver Soroa ,Alvaro	NN No consume
7473643	Benegas Garcia ,Sonia	NN No consume
2664641	Berga Montardit ,Elena	N Notable
2914296	Cadarso Pe±alver ,Rodrigo	NN No consume
53413223	Camin Canellas ,Lucia	S Suspenso
50315315	Conde de Vega ,Laura	NN No consume
80046401	Contreras Bueno ,Alejandro Carlos	S Suspenso
518028	Cruz Araoz ,Samuel Omar La	NN No consume
50706225	Cuellar Hervas ,Antonio Francisco	A Aprobado
26215422	Delgado Ruiz ,Mariano Jesus	NN No consume
50823842	Diaz Lozano ,Jos θ Antonio	NN No consume
11813437	Diaz Volpini ,Jose Ramon	NN No consume
7499271	Diez Cebollero ,David	NN No consume
2907910	Donoso Lopez ,Fernando	NN No consume
9781391	Fierro Conchouso ,Jose Manuel	NN No consume
51390076	Flandez De Oliveira ,Mauricio	NN No consume
11845623	Fuentes Merino ,Francisco Javier	A Aprobado
2622397	Gallardo Sanchez-Toledo ,Antonio Luis	NN No consume
51448420	Garcia Hortelano ,Ana	N Notable
46856696	Garcia Ossorio ,Ruben Clodoaldo	NN No consume
798703	Garcia Pacheco ,Jose Maria	NN No consume
49000030	Garcia Sanchez ,Ana Belen	N Notable
70054026	Garrido Lopez ,Cristina	A Aprobado
53400489	Gil Iglesias ,Omar	S Suspenso
2643644	Gomez Hernandez ,Jose Ivanoff	N Notable
2252129	Gonzalez Mateo ,Carlos	A Aprobado
11845263	Guerrero Andres ,Fernando	N Notable
51063646	Guitart Carmona ,Francisco De Borja	NN No consume
50116351	Gutierrez Dominguez ,Juan Cirilo	NN No consume
3443571	Gutierrez Gimeno ,Aurora	NN No consume
547	Gveorgnuiev Paplomatas ,Alexander	A Aprobado
3548049368	Hahn Gasanz ,Alejandro	A Aprobado
0774090	Heredia Carranza ,Ana Raquel	S Suspenso
7474412	Hoyo Truchado ,Maria Felisa Del	NN No consume
47018769	Lopez Hernando ,Elena	NN No consume
51082483	Lopez-Polin Pe±a ,Gonzalo	NN No consume
4772796	Ludmilova Kroumova ,Julia	NN No consume
51409314	Luis Guerra ,Nieves de	NN No consume
123/93	Mangue Nsue ,Segismundo	NN No consume
7474718	Martinez Romar ,Jose Manuel	NN No consume
2544313	Mateos Calleja ,Carlota	NN No consume
51075482	Merino Pazos ,Patricia	S Suspenso
16810129	Moraga Delgado ,Jose Miguel	NN No consume

ño Academico/Semestre: 1999/0 Convocatoria: 1 Junio
signatura: 10986 MATEMATICAS II Grupo clase: 04
olectivo : 00 Tribunal: N ACTA GLOBAL Version: 01 Pag 2

NI/PASAP.	APELLIDOS Y NOMBRE	CALIFICACION
2897951	Morales Diaz ,Luisa Elena	NN No consume
51074589	Moratinos Meissner ,Fabian Mario	NN No consume
50734968	Mulder Rougvie ,Alejandra De	NN No consume
51417328	Mu±oz Dφaz ,Sergio	NN No consume
53560341	Oltra Garcia ,Javier	N Notable
7501358	Ortega Mayor ,Jose Antonio	NN No consume
2429622	Ossypov ,Alesandr	NN No consume
50869083	Pedraz Gutierrez ,Nuria	S Suspenso
2638394	Penela Martφn-Andino ,Ana Belθn	NN No consume
7249440	Perdiguero De La Torre ,Gabriel	NN No consume
38846185	Pereiro Lopez ,Illan	S Suspenso
604446	Perez Quiroz ,Myrna Paola	NN No consume
47030362	Perez Sanchez ,Sara	N Notable
52868699	Perez Sosa ,Jose Antonio	NN No consume
51083434	Perpi±a Rodriguez ,Antoni	A Aprobado
51400850	Pinilla Merino ,Antonio Francisco	NN No consume
52882549	Pintado Carde±osa ,Noelia	N Notable
53413550	Pi╤ole Mu╤oz De Baena ,Javier	S Suspenso
51075645	Puyalto De Pablo ,Miguel	N Notable
2905172	Quadra-salcedo Perez ,Sofia De La	N Notable
2907909	Quinto Garcia ,Agustin De	NN No consume
1496214	Rafayle Campos ,Jimmy Carlos	A Aprobado
2535230	Ramal Lopez ,Fco. Javier	S Suspenso
47022443	Recio Perez ,Jaime	A Aprobado
46877637	Redondo Aranda ,Jose Carlos	A Aprobado
51093350	Retuerto Larumbe ,Andrea	A Aprobado
51429341	Revuelto Oca ,Jorge	N Notable
51448827	Rey Berturen ,Ignacio	A Aprobado
53109857	Ribagorda Jimenez ,Macarena	SB Sobresaliente
51946441	Rico Rivas ,Lorena	M Matricula-honor
47030242	Rincon Herrero ,Luis	N Notable
50879100	Rincon Lorente ,Borja	S Suspenso
51082950	Rioja Calcedo ,Luis	N Notable
50835964	Rivas De Frutos ,Jose Manuel	NN No consume
47032264	Rivas Rivera ,Alejandro	S Suspenso
4848022	Rivas Rodriguez ,Jesus	NN No consume
27643063N	Robles ,Esteban Mariano	NN No consume
50121642	Rodriguez Alegre ,Enrique	A Aprobado
2663607	Rodriguez Benitez ,Lucia	S Suspenso
51450355	Rodriguez De La Corte ,Miguel	SB Sobresaliente
50752721	Rodriguez Pe±amaria ,Carmen	N Notable
53411229	Rodriguez Rodriguez ,Ana M	N Notable
47280049	Rodriguez Rodriguez ,Cesar	N Notable
51452412	Rodriguez Velasco ,Rocio	N Notable
51087240	Ropero Martin ,Loreto	N Notable
51087724	Rosa Casta±o ,Fco. Javier De La	N Notable
44775208	Rosado Linares ,Sebastian	A Aprobado
71417326	Rua Navarro ,Sergio	SB Sobresaliente
52875636	Rubiano Fernandez ,Daniel	A Aprobado
51083746	Rubio Gomez ,Laura	N Notable
47024948	Rubio Marquez ,Manuel	S Suspenso
51096998	Ruiz Calle ,Alicia Victoria	S Suspenso
51082852	Ruiz-Oca±a Zaforas ,Carlos	S Suspenso

Año Academico/Semestre: 1999/0 Convocatoria: 1 Junio
Asignatura: 10986 MATEMATICAS II Grupo clase: 04
Colectivo : 00 Tribunal: N ACTA GLOBAL Version: 01 Pag 3

DNI/PASAP.	APELLIDOS Y NOMBRE	CALIFICACION
53004144	Salinas Pozo ,Carlos	S Suspenso
51454840	San Juan Hernanz ,Maria Del Pilar	N Notable
46868776	Sanchez Alfonso ,Rafael	NN No consume
5285022	Sanchez Herreras ,Raquel	NN No consume
50316720	Sanchez-laulhe Grosso ,Ricardo	NN No consume
51085166	Santamaria Fernandez ,Alberto	NN No consume
47026576	Santos Gil ,Sergio	A Aprobado
50730720	Santos Martin ,Silvia Elena	N Notable
2655558	Sanz Castro ,Jessica	S Suspenso
51070247	Sanz Fernandez ,M. Angeles	A Aprobado
2539965	Sanz Ibarra ,Eduardo	A Aprobado
53405947	Sanz Mariano ,Gonzalo	SB Sobresaliente
53407589	Sarabia Fernandez ,Maria	A Aprobado
51076641	Sastre Herrero ,Ignacio	NN No consume
833071	Serna Matamoros ,Beatriz De La	N Notable
51988674	Serrano Calvo ,Veronica	SB Sobresaliente
47023925	Sevilla Casares ,Cristina	S Suspenso
4845616	Sierra Garcia ,Luis	NN No consume
70247500	Sierra Mu±oz ,Adela	N Notable
11840696	Sobrino Sese ,Pedro	NN No consume
51075128	Solesio Larre ,Berta	A Aprobado
51088995	Solis Garcia ,Javier	N Notable
2895319	Talaverano Gonzalo ,Ismael	A Aprobado
51080377	Tarno Corte ,Luis	N Notable
51079758	Teulon Gonzalez ,Jaime	SB Sobresaliente
5683659	Toribio Gomez ,Esther	S Suspenso
50880060	Torre Cantalapiedra ,Alberto Maria	SB Sobresaliente
50880278	Torre Romero ,Nuria De La	M Matricula-honor
51078227	Trigo Arroyo ,Juan Pablo	A Aprobado
51638539	Urieta Calderon ,Jose Luis	NN No consume
51685296	Vallejo Arias ,Daniel	NN No consume
52883183	Varea Blanco ,Ana Maria	A Aprobado
948478	Vargas Rondo ,Anny Geannera	NN No consume
51085204	Vazquez Calle ,Nerea	A Aprobado
51090099	Vedia Sanz ,Vanesa	N Notable
51429967	Vela Mu±oz ,Alvaro	M Matricula-honor
51090101	Vela Navarro-rubio ,Paloma	NN No consume
53400216	Velasco Jones ,Lucia	S Suspenso
47028257	Velasco Ortega ,Maria	A Aprobado
50740382	Velasco Ortiz ,David	S Suspenso
51452995	Verdu Aguilar ,Maria	A Aprobado
53401564	Vicente Hernndez ,Maria	NN No consume
50878281	Vicente Vicente ,Natalia	S Suspenso
2666679	Vicenti Chamon ,Borja	SB Sobresaliente
50878507	Vieco Gonzalez ,Eva Esther	A Aprobado
11837282	Vilela Rodrigo ,Yeray Gonzalo	S Suspenso
51409522	Villar Rotella ,Carolina	NN No consume
52883899	Villegas Bartolome ,Ignacio	S Suspenso
2916503	Vivar Armenteros ,Gonzalo	N Notable
2186787	Zambrano Piguave ,Mariuxi	NN No consume

ESTADÍSTICAS FINALES DE TODO EL SUBGRUPO

Número total de alumnos 153.

Alumnos presentados:	95 (62,75 %)
Matrículas de Honor:	3 (1,96%)
Sobresalientes:	8 (5,23%)
Notables:	29 (18,95%)
Aprobados:	29 (18,95%)
Suspensos:	26 (16,99%)
Alumnos no presentados:	58 (37,9 %)

(Los porcentajes están realizados sobre el total de alumnos)

ESTADÍSTICAS FINALES DE LOS DOS SUBGRUPOS:

SUBGRUPO A.

Número de alumnos: 16

Alumnos presentados:	15 (93,75%)
Sobresalientes:	1 (6,25%)
Notables:	4 (25 %)
Aprobados:	8 (50%)
Suspensos:	2 (12,5%)
Alumnos no presentados:	1 (6,25%)

(porcentajes sobre el número de alumnos del subgrupo A)

SUBGRUPO B.

Número de alumnos: 137

Alumnos presentados:	81 (59,12 %)
Matrículas de Honor:	3 (2,19%)
Sobresalientes:	7 (5,10%)
Notables:	25 (18,24%)
Aprobados:	22 (15,33 %)
Suspensos:	24 (17,52%)
Alumnos no presentados:	57 (41,6%)

(porcentajes sobre el número de alumnos del subgrupo B)

ANEXO III: PROYECTO DE INVESTIGACIÓN PRESENTADO EN DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS ECONÓMICA: ECONOMIA CUANTITATIVA PARA REALIZAR LA INVESTIGACIÓN EDUCATIVA.

A continuación presentamos el proyecto de investigación que se presentó en el Departamento de Análisis Económico: Economía Cuantitativa, para obtener permiso para realizar la investigación educativa.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN EDUCATIVA:

"LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA LINEAL MEDIANTE SISTEMAS INFORMÁTICOS DE CÁLCULO ALGEBRAICO"

PRESENTADO POR: Pedro Ortega Pulido

Este proyecto forma parte de la investigación que estoy realizando para la elaboración de mi tesis doctoral: "La enseñanza del Algebra Lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico" , dirigida por los Profesores: Miguel de Guzmán Ozámiz (Catedrático de Análisis Matemático de la Universidad Complutense de Madrid) y Antonio Bautista Garcia-Vera (Profesor Titular de Didáctica y Organización Escolar de la Universidad Complutense de Madrid). El objeto fundamental del proyecto consiste en estudiar el comportamiento de una estrategia didáctica basada en la introducción de un sistema de cálculo algebraico, en la enseñanza del Algebra Lineal. El proyecto se pretende desarrollar en un grupo de primer curso de la Licenciatura "Administración y Dirección de Empresas" en la asignatura Matemáticas II, impartida en el segundo semestre. La investigación educativa es un trabajo de campo enmarcado en un análisis cualitativo y cuantitativo de los datos. A continuación se presenta una introducción general sobre la introducción de las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas, seguido del proyecto de investigación detallado.

I. INTRODUCCIÓN.

I.1. EVOLUCION HISTÓRICA DEL USO DE LOS ORDENADORES EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS.

Durante las últimas décadas las nuevas tecnologías y muy en particular los ordenadores personales están provocando numerosos cambios en todos los ámbitos de nuestra cultura. La enseñanza, no ha quedado ajena a estos procesos de cambio, y así, desde los niveles iniciales de la enseñanza primaria, pasando por la enseñanza secundaria y terminando en la enseñanza universitaria, han ido desarrollándose un elevado número de experiencias educativas, encaminadas a introducir las nuevas tecnologías de una manera adecuada. En el ámbito de la enseñanza de las matemáticas, esta revolución tecnológica también ha provocado una evolución considerable. Desde mediados de siglo, se han realizado numerosos programas de ordenador que han introducido de forma paulatina los ordenadores en el aula de matemáticas. En [Kaput, 92] podemos encontrar una clasificación básica de los diferentes tipos de programas educativos elaborados para mejorar la enseñanza de las matemáticas: los JUEGOS DE ORDENADOR, los sistemas TUTORIALES o programas de enseñanza asistida por ordenador (CAI), los SIMULADORES, los LENGUAJES DE PROGRAMACIÓN (Logo, Basic, Pascal,...) y diferentes HERRAMIENTAS DE COMPUTACIÓN (las utilidades gráficas, programas de estadística, bases de datos, manipuladores simbólicos,...).

Si bien las primeras utilidades computacionales eran de carácter general (como es el caso de las librerías científicas SSP, IMSL, NAG), sin embargo, poco a poco el vertiginoso avance informático y, muy especialmente, la implantación de los ordenadores personales hicieron surgir los primeros paquetes estadísticos para PC (BMDP. SPSS, SAS,...). Pero la verdadera revolución informática en la enseñanza de las matemáticas, comenzó con la aparición, en la década de los años 70, de los primeros programas de cálculo simbólico o cálculo algebraico, es el caso de MACSYMA(1970) y REDUCE (1978). El auge de los sistemas de cálculo algebraico (CAS) se fue incrementando en los años 80, apareciendo programas como MAPLE, MATHEMATICA y DERIVE, que en la actualidad se han convertido quizás, en los programas de cálculo algebraico más populares y usados. Las características que han propiciado el éxito de este tipo de programas se pueden resumir en tres::

1. Permiten realizar cálculos con ARITMÉTICA EXACTA, es decir, permiten operar con números racionales, números reales y números complejos de forma exacta, sin necesidad de recurrir a sus aproximaciones numéricas.
2. Permiten efectuar OPERACIONES SIMBÓLICAS, es decir, operaciones sobre expresiones parametrizadas; situación que facilita cálculo de tipo simbólico como son: el cálculo de derivadas, el cálculo de integrales, cálculo matricial, ...
3. Facilitan REPRESENTACIONES GRÁFICAS en dos y tres dimensiones.

La implantación de los programas de cálculo simbólico en la enseñanza de las Matemáticas se ha concretado en base a dos modelos didácticos:

a) LABORATORIOS DE PRÁCTICAS, en los que el programa de cálculo simbólico es utilizado como soporte o herramienta para estudiar y analizar los hechos, conceptos y principios desarrollados en las clases teóricas de Matemáticas.
b) El segundo modelo se basa en la introducción total del ordenador en el aula, sustituyendo el encerado del profesor por un ordenador, un retroproyector, una pantalla de cristal líquido y un programa de cálculo simbólico, y el lápiz y papel del alumno por un ordenador personal con el mismo programa.

I.2. VENTAJAS E INCONVENIENTES DEL USO DE LOS ORDENADORES.

El nuevo medio computacional, ofrece algunas características educativas, que pueden aportar importantes avances en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Entre las principales ventajas de este nuevo medio podemos citar:

a) Permiten MULTIPLES REPRESENTACIONES de diferentes sistemas de notación y, en consecuencia, la posibilidad de efectuar transformaciones y traducciones entre los sistemas de notación cercanos al alumno y otros sistemas de notación más formales, es decir, facilita la construcción de SISTEMAS DE NOTACIÓN INTERMEDIOS entre el lenguaje formal y el lenguaje natural intuitivo.
b) El medio computacional es un MEDIO DINÁMICO, que permite una continua transmisión de los estados y procesos intermedios que tienen lugar a lo largo de un proceso global.
c) Los ordenadores son un MEDIO INTERACTIVO, de tal forma que ante la actuación del usuario sobre un objeto determinado el sistema provoca una respuesta inmediata. Estos sistemas de respuesta originan numerosas pautas que orientan al usuario en sus diversas acciones, proporcionando estructuras lógicas a las informaciones que el usuario suministra al programa.

La introducción de programas de cálculo simbólico en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas tiene también numerosos peligros, que pueden hacernos caer en errores educativos muy importantes, entre los que podemos señalar:

a) La posibilidad de que el alumno pierda el sentido de las operaciones que realiza automáticamente el ordenador: comprimiendo los procesos con el fin de ganar tiempo, y dar más importancia a los resultados [Guzman, 92].
b) Confurndir la manipulación matemática con el conocimiento matemático, situación muy común cuando se adquiere un aprendizaje memorístico de las matemáticas, consistente en la memorización de algoritmos, definiciones y teoremas en vez de la construcción de unas matemáticas para la resolución de problemas [Guzman, 92].
c) Pensar que el ordenador lo resuelve todo, sin tener en cuenta las limitaciones del medio, así como los fallos conceptuales que se puede introducir [Amillo-Guadalupe, 91]

I.3. ¿CÓMO HA DE SER LA INTRODUCCIÓN DE LOS ORDENADORES EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS?

La introducción del ordenador en la enseñanza de las matemáticas, ha de potenciar al máximo las ventajas que ofrece este medio, y reducir al mínimo los peligros que puede provocar su uso. Considerando estos aspectos, la introducción del ordenador en el aula de matemáticas debe tener en cuenta varias ideas:

1) Utilizar el ordenador de dos formas complementarias: a) como HERRAMIENTA EXPERIMENTAL que permita desarrollar conjeturas, lanzar hipótesis, en una exploración inductiva de los hechos matemáticos y b) como HERRAMIENTA AUXILIAR eliminando

tareas rutinarias que, en numerosas ocasiones, impiden profundizar en numerosos conceptos matemáticos.

2) El sistema computacional no debe convertirse en un nuevo medio que desempeñe el mismo papel que otros recursos didácticos por simple TRANSFERENCIA MEDIÁTICA, usando únicamente la capacidad de interacción de los ordenadores.
3) El nuevo sistema no debe ser una BARRERA ADICIONAL para el aprendizaje de las matemáticas. Por ello, el contexto en el que se introduzcan los ordenadores, ha de contar con instructores que proporcionen respuestas inmediatas al estudiante sobre cualquier cuestión relacionada con el uso del programa empleado; de tal forma, que se minimicen los problemas que se puedan generar con el uso de este tipo de tecnologías.
4) Debe permitir la construcción de SISTEMAS DE NOTACIÓN INTERMEDIOS que faciliten la comprensión de los sistemas formales, acercando de esta forma, los conceptos abstractos mediante cogniciones de objetos accesibles y manipulables, y por tanto más intuitivos.
5) Las estrategias de RESOLUCION DE PROBLEMAS pueden ser un complemento ideal para la introducción de los ordenadores en la enseñanza de las matemáticas..
6) Ha de potenciar las cualidades que dotan al sistema informático de una PLASTICIDAD REPRESENTACIONAL (medio estático y dinámico) permitiendo sistemas múltiples de representación.

I.4. NECESIDAD DE UNA NUEVA ESTRATEGIA DIDÁCTICA

Es evidente que este avance tecnológico nos obliga a diseñar nuevas estrategias didácticas: no se puede seguir enseñando Matemáticas de la misma forma ignorando la existencia de estas herramientas, ya que estos nuevos recursos tecnológicos pueden aumentar las posibilidades de enseñanza y aprendizaje. En consecuencia, se hace necesaria una NUEVA ESTRATEGIA DIDACTICA que tenga en cuenta los riesgos que puede ocasionar la introducción del medio computacional en el aula de matemáticas y que potencie las características propias de este medio.

I.5. ELECCIÓN DEL CAMPO DE LAS MATEMÁTICAS OBJETO DE NUESTRO ESTUDIO: ALGEBRA LINEAL.

Dada la variedad de áreas de conocimiento que configuran las Matemáticas, centramos nuestra investigación en la enseñanza del ALGEBRA LINEAL, área de especial interés en este ámbito por tres razones fundamentales:

1) El aprendizaje experimental de las matemáticas a través de sistemas de cómputo algebraico ha introducido numerosos esfuerzos y experiencias encaminadas a la enseñanza del CALCULO, sin embargo, en este contexto existen menos trabajos y estudios relacionados con el álgebra, y en especial del ALGEBRA LINEAL; a pesar de que el Algebra Lineal es quizás, el área de conocimiento con el que primero se enfrentan los alumnos.
2) El Algebra Lineal es una de las ramas de las matemáticas con mayor elevado grado de abstracción, ya que forma parte del fundamento del lenguaje algebraico, lenguaje formal que genera numerosas dificultades de aprendizaje.

3) La pedagogía asociada al Algebra Lineal, está asociada frecuentemente con procesos de aprendizaje memorísticos, que ofrecen una pobre visión de las matemáticas y en particular del tópico en cuestión, y necesita una fuerte revisión orientada a ofrecer expectativas más globales de la misma.
4) Son contenidos que se encuentran entre el Bachillerato de la enseñanza secundaria y los primeros cursos de universidad.

II. PROYECTO DE INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

II.1. OBJETIVO DE LA INVESTIGACION

El objetivo de este proyecto de investigación consiste en *estudiar y analizar el comportamiento de una estrategia didáctica que permita diseñar tareas de enseñanza* [Gimeno-88] *del Algebra Lineal basadas en la utilización del programa de cálculo simbólico DERIVE*, *respecto de las siguientes cuestiones:*

1. ¿Favorece el APRENDIZAJE de los contenidos matemáticos de álgebra lineal?
2. ¿Favorece el DESARROLLO DE ESTRATEGIAS DE RESOLUCION DE PROBLEMAS?
3. ¿Aumenta las ESTRATEGIAS DE RESOLUCION DE PROBLEMAS?
4. ¿La manipulación del sistema de cálculo algebraico genera un SISTEMA DE NOTACIÓN INTERMEDIO entre los sistemas de notación de la matemática formal y sistemas de notación intuitivos?
5. ¿Favorece que el alumno sea PROTAGONISTA Y CREADOR frente al medio tecnológico y no un mero USUARIO?
6. ¿Permite prescindir del ESFUERZO RUTINARIO dedicado a desarrollar operaciones algebraicas consideradas no esenciales?
7. ¿Evita la utilización del ordenador para desarrollar, de forma automática , CONTENIDOS ESENCIALES para el desarrollo de hechos, conceptos y principios del álgebra lineal?
8. ¿Convierte al ordenador en una HERRAMIENTA DE EXPERIMENTACIÓN matemática?
9. ¿Permite que los alumnos adquieran AUTONOMÍA COGNITIVA, incitándoles a indagar situaciones planteadas desde el propio individuo, anulando así ciertas dependencias que existen entre los alumnos y otros expertos o maestros?
10. ¿Favorece la RELACIÓN DIALÉCTICA entre los usuarios?
11. ¿Genera BARRERAS ADICIONALES para el aprendizaje de los conceptos matemáticos?
12. ¿Permite la ATENCION A LA DIVERSIDAD, facilitando varios niveles de aprendizaje simultáneo?
13. ¿Aumenta el grado de MOTIVACIÓN ante el álgebra lineal?
14. ¿Permite un adecuado grado de INTERACTIVIDAD entre usuario y programa?

II.2. ESTRATEGIA DIDÁCTICA PLANTEADA.

La enseñanza y aprendizaje tradicional del Algebra Lineal se ha venido desarrollando en tres etapas fundamentales:

1) Una exposición teórica desarrollada por el profesor, con más o menos ejemplos explicativos, de los conceptos y resultados fundamentales del álgebra lineal.
2) Una segunda etapa en la que se plantean ejercicios mediante los cuales, el alumno desarrolla destrezas básicas relacionadas con los conceptos, propiedades y resultados desarrollados en la teoría. Estos ejercicios suelen contener datos sencillos, que no compliquen demasiado la operativa de los mismos.
3) Por último, se propone la resolución de ejercicios más complejos (problemas), en los que el alumno ha de relacionar numerosos conceptos, desarrollando diversas estrategias de resolución.

Dado que el álgebra lineal, así como el álgebra en general, es una materia de un elevado grado de abstracción, si a esta dificultad inicial añadimos el estilo pedagógico utilizado actualmente en la enseñanza aprendizaje del álgebra lineal, podemos obtener como resultado un elevado grado de fracaso escolar. Los motivos de este fracaso se pueden clasificar en tres aspectos fundamentales:

a) Se trata de una enseñanza con ESCASA PARTICIPACION ACTIVA; ya que está centrada en la adquisición de habilidades de manipulación y computación.
b) En algunos casos se obtiene un APRENDIZAJE MEMORÍSTICO, basado en el proceso de memorización de una serie de rutinas de repetición para aprender algoritmos y habilidades de manipulación. Este tipo de aprendizaje impide la transferencia de los conceptos en la resolución de problemas generales. Además, con el aprendizaje memorístico se obtiene una visión de las matemáticas que impide modelar situaciones problemáticas.
c) Dado que los problemas planteados en la tercera etapa se han basado en situaciones muy simples, a fin de no generar cálculos algebraicos excesivamente tediosos, se ha obtenido una percepción del álgebra lineal muy lejana del concepto de HERRAMIENTA DE MODELIZACIÓN de situaciones reales.

La estrategia didáctica que planteamos se basa fundamentalmente en el uso de cuatro elementos esenciales:

a) *LA INTRODUCCION DEL PROGRAMA DE CÁLCULO SIMBÓLICO DERIVE*:

La introducción en nuestra estrategia didáctica, de un programa de cálculo simbólico como DERIVE [Derive-90]; puede ser adecuada a los objetivos que se persiguen ya que:

1) El aprendizaje del programa DERIVE es sencillo, permite manipular los conceptos algebraicos sin demasiado esfuerzo adicional.
2) DERIVE puede facilitar la construcción de un sistema de notación intermedio.
3) Los problemas a plantear pueden contener datos reales, ya que las rutinas algebraicas se dejan al sistema, acercando de esta forma el álgebra lineal a situaciones reales.
4) La utilización del ordenador puede ser un elemento de MOTIVACION para el aprendizaje, ya que además de introducir elementos novedosos, puede facilitar el

APRENDIZAJE COLABORATIVO, aumentando las relaciones de comunicación entre los alumnos.

Aunque actualmente existen numerosos programas de cálculo algebraico: Macsyma, Reduce, Mathematica, Maple, Axiom, Form, GNU-Cal, Derive,.. elegimos DERIVE para esta estrategia didáctica por varios motivos fundamentales:

- su facilidad de aprendizaje, no necesita muchos conocimientos previos de informática, y se puede aprender a utilizar en un corto espacio de tiempo, sin necesidad de invertir muchas horas en la lectura del manual.
- la sencillez de su entorno de trabajo, ya que permite ejecutar los comandos vía menú, o a través de la edición de los mismos por pantalla.
- su portabilidad y pocos requerimientos de hardware: es un programa que “cabe en un disquette”, requiere tan sólo 512K de memoria RAM; procesador 8088 o superior y sistema operativo MS-DOS 2.1 o posteriores. Por tanto es ejecutable desde la mayoría de los ordenadores existentes actualmente en el mercado. Estos datos están basados en la versión 3,.* de DERIVE que funciona bajo DOS; aunque existen versiones que aprovechan las posibilidades de Windows.
- la relación prestaciones y requisitos de hardware es con diferencia la mejor de todos los programas de cálculo simbólico existentes en el mercado.

b) *RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS*.

Las estrategias didácticas basadas en la resolución de problemas están teniendo un fuerte auge en los últimos años, de hecho organismos e instituciones eduactivas como NCTM (National Council of Teachirs of Mathematics) han propuesto como objetivo prioritario de la educación, que los alumnos adquieran y desarrollen estrategias para resolver problemas, ya que la sociedad actual requiere “mentes bien hechas más que mentes llenas de contenido” [Bautista, 88].

Este tipo de estrategias permiten además que los alumnos:

- ASIMILEN unas informaciones, conceptos y principios
- Sean capaces de TRANSFERIRLOS para solucionar problemas más globales
- ANALICEN Y SINTETICEN situaciones problemas
- ADQUIERAN Y DESARROLLEN ESTRATEGIAS de resolución de problemas.

Además, la resolución de problemas permite abordar algunas características educativas importantes como son:

- Permiten elevar el grado de MOTIVACION del alumno.
- Permiten una ATENCION A LA DIVERSIDAD, proponiendo diferentes niveles de resolución según el nivel del alumno.
- Facilita las relaciones de comunicación.
- Las estrategias basadas en la RESOLUCION DE PROBLEMAS , facilitan la introducción del APRENDIZAJE COOPERATIVO, instrumento que facilita las relaciones de comunicación entre alumnos y alumnos y profesor.

c) *APRENDIZAJE POR DESCUBRIMIENTO.*

Las ideas del constructivismo están presentes en la nueva reforma educativa, y señalan que los conceptos se asimilan de una forma más eficaz si son descubiertos por el propio alumno. Por tanto, es importante potenciar un aprendizaje experimental que facilita este tipo de aprendizaje. Este aprendizaje experimental de las matemáticas, y en particular del álgebra lineal, se puede adquirir de forma adecuada, mediante la utilización de programas de cálculo simbólico, sin demasiado esfuerzo y tiempo adicional.

d) *UTILIZACION DE PAGINAS HIPERTEXTO EN INTERNET.*

Las posibilidades que ofrece internet a nivel de comunicación, el uso de páginas hipertexto como sistema secuencial de presentación de los contenidos de álgebra lineal y la utilización del correo electrónico como sistema tutorial interactivo, puede facilitar que nuestra estrategia didáctica consiga una valoración altamente positiva de los objetivos de nuestra investigación.

Tras las consideraciones expuestas sobre estos cuatro elementos fundamentales:

a) Uso de un programa de cálculo simbólico como DERIVE.
b) Utilización de estrategias de RESOLUCION DE PROBLEMAS
c) Potenciar un APRENDIZAJE POR DESCUBRIMIENTO
d) Utilización de INTERNET

planteamos la siguiente estrategia didáctica:

Se trataría de INTEGRAR COMPLETAMENTE el programa de cálculo simbólico DERIVE en el aula, dentro de las tareas de enseñanza-aprendizaje, de tal forma que los conceptos, principios y relaciones de álgebra lineal necesarios se vayan introduciendo de forma simultánea mediante el programa DERIVE. Esta forma de integrar los programas de cálculo simbólico en las tareas de enseñanza-aprendizaje, obliga a construir actividades renovadas en las que el ORDENADOR se convierte en el medio didáctico central del proceso de enseñanza aprendizaje. Este hecho, no obstaculiza que exista algún tipo de interacción distinta utilizando en algunos momentos el sistema clásico de exposición de los contenidos básicos. Este estilo ha sido desarrollado en numerosas centros educativos de todo el mundo: University of Illinois, Ohio State University, Stevens Institute of Technology, Knox College, Westmont College, Vanderbilt University [Brown,Porta,Uhl-91]; University of Pittsburgh [Beatrous-96], University of Plymouth, Sheffield Halam University, Austrian Center for Didactics of Computer Algebra,...

Introducir los sistemas de cálculo simbólico de esta forma, requiere efectuar algunas consideraciones previas. Ya que este tipo de sistemas permiten realizar tareas rutinarias del cálculo algebraico, una pregunta que nos puede surgir de forma inmediata sería: ¿es didáctico reducir u omitir el estudio de aquellos tópicos que ejecuta directamente el ordenador?

Según afirma [Murakami-Hata, 97] para entender un tópico matemático es necesario invertir un primer esfuerzo en resolver los ejercicios que implica a mano. Por tanto, podemos efectuar una clasificación de los tópicos matemáticos en dos tipos:

a) *Contenidos Esenciales*, es decir aquellos contenidos que no deben ejecutarse por medio del ordenador en el momento de ser introducidos, ya que son esenciales e irremplazables por el cálculo automático de rutinas del ordenador. Por ejemplo, si tratamos de introducir el concepto de determinante, no tiene sentido utilizar el ordenador puesto que en este contexto el cálculo de determinantes se convierte en un contenido esencial.
b) *Contenidos no esenciales*, necesarios como herramienta para la comprensión de otros contenidos y que por tanto pueden ser reemplazados por el ordenador. Por ejemplo, si tratamos de discutir un sistema de ecuaciones lineales, el cálculo de determinantes con el ordenador no es esencial para el estudio de la compatibilidad o incompatibilidad del sistema, ya que el concepto esencial en este contexto sería saber aplicar adecuadamente el Teorema de Rouché-Fröbenius.

Según estás últimas consideraciones, nuestra estrategia didáctica contiene tres tipo de actividades:

1) Actividades de introducción teórico-prácticas. Si nuestro objetivo es introducir principios y conceptos fundamentales de un cierto tópico “A” que consideramos esencial, aunque inicialmente no utilicemos el programa de cálculo simbólico, sí utilizaremos una presentación en pantalla mediante páginas escritas en HTML del concepto o principio. Sin embargo pueden existir ciertos tópicos y conceptos “B” que no son esenciales para “A” con los que podríamos utilizar DERIVE. De esta forma introduciremos la manipulación mediante DERIVE de los conceptos no esenciales “B” facilitando la comprensión del tópico “A”. Siguiendo esta metodología se introducirán los conceptos y resultados fundamentales mediante una manipulación paralela de páginas HTML y el programa DERIVE. Así, el programa de cálculo simbólico se convierte en una herramienta didáctica de uso directo en la exposición teórica, de tal forma que el alumno materializa los conceptos y estructuras algebraicas de manera simbólica con el propio programa. Junto a estas actividades se incluyen breves apuntes teóricos acerca del uso de DERIVE. En algunos casos, se pueden introducir reglas o principios mediante exploración matemática usando el programa. En este caso, la regla o principio “A” considerado esencial, se puede manipular con el ordenador ya que el objetivo de la actividad consistirá en tratar de demostrar de forma experimental el resultado. Estas actividades permiten conseguir dos objetivos:
    - reconocer las estructuras y relaciones básicas del álgebra lineal a nivel abstracto.
    - aprender a manejar dichos conceptos y estructuras con DERIVE.

2) Ejercicios de Manipulación, mediante los cuales el profesor propone al alumno la resolución, con la ayuda del programa de cálculo simbólico, de ejercicios de simple manipulación y relación de conceptos. En este apartado, nuevamente utilizaremos el programa DERIVE para

aquellos contenidos no esenciales, auxiliares para la comprensión del tópico, relación o principio objeto de manipulación

3) Resolución de problemas. Con este tipo de actividades los alumnos deberán resolver problemas con enunciados de situaciones cercanas a la realidad utilizando varias estrategias. Estos problemas tendrán diversos niveles de complejidad que permitirán adaptarse a los requerimientos de los alumnos. De esta forma, los conceptos algebraicos se convierten en entidades que facilitan la resolución de problemas reales, permitiendo profundizar al alumno en las estructuras y relaciones expuestas. En este caso, se podrá utilizar DERIVE no sólo en los contenidos no esenciales para "A" sino que también, es posible usarlo sobre sus partes esenciales, ya que los cálculos generados por los problemas de álgebra lineal pueden enturbiar el proceso de resolución. Para utilizar diversas estrategias de resolución se plantearan algunos ejemplos de resolución de problemas mediante DERIVE, incluyendo en los ejemplos los límites y errores que puede provocarnos el programa.

II.4. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.

II.4.1. MODELO DE INVESTIGACIÓN.

Por la naturaleza del objeto de estudio, y de los datos que hemos de recoger y elaborar, nuestra investigación se basará en un estudio mixto con dos dimensiones: cualitativa y cuantitativa [Goetz-LeCompte, 1988].

La dimensión cualitativa del estudio pretende dar respuesta a las cuestiones señaladas en los objetivos que son de naturaleza interna a los sujetos y hemos de interpretarlos. Según los fines enumerados anteriormente, hemos diseñado tareas de enseñanza orientadas en la vía de la resolución de problemas, con las cuales podamos responder a las cuestiones planteadas en los objetivos. Elegimos el método cualitativo, basado en el estudio de casos (grupos de alumnos) para poder confrontar las tendencias así como el comportamiento de los alumnos ante este diseño metodológico. Para este estudio cualitativo proponemos la existencia de 2 grupos A y B que utilizan la estrategia didáctica basada en el uso del programa de cálculo simbólico DERIVE, para poder efectuar comparaciones cualitativas entre dichos grupos (A <-> B)

La dimensión cuantitativa permitirá confrontar cuantitativamente los resultados obtenidos entre cada uno de los grupos que utilizan DERIVE (A y B) y un tercer grupo de control (grupo C) que utiliza la estrategia didáctica clásica, es decir las comparaciones

A <-> C y B <-> C

Mediante este estudio podremos analizar el aumento de los aspectos cuantitativos contenidos en nuestros objetivo.

II.4.2. POBLACIÓN OBJETO DEL ESTUDIO.

Este diseño de investigación se pretende aplicar sobre un grupo de tarde en el que se impartan los contenidos de Matemáticas II. Dicho grupo debería ser dividido en tres subgrupos:

- dos subgrupos (A y B) sobre los cuales se aplicaría la estrategias didáctica basada en DERIVE
- y un tercer grupo de control C sobre el cual se aplicaría la estrategia didáctica clásica sin DERIVE.

Los tres grupos serían impartidos por el mismo profesor utilizando en cada uno de ellos las dos estrategias distintas antes planteadas. De esta forma la variable "profesor" no generaría sesgos adicionales a la investigación.

Dichos grupos tendrían horarios distintos, que no solaparían con sus clases habituales. Una posible propuesta de horarios podría ser la siguiente:

GRUPO A: 14,30-16,30 dos días en semana en el Aula de Informática

GRUPO B: 14,30-16-30 dos días en semana en el Aula de Informática

GRUPO C: horario habitual y el aula asignada a tal efecto.

II.4.3. ESTRATEGIAS DE RECOGIDA DE DATOS.

Para poder efectuar nuestra investigación, requeriremos de instrumentos de recogida de datos que nos permitan registrar de forma adecuada cada uno de los procesos y categorías objeto de nuestro análisis, por lo que planteamos las siguientes estrategias:

- Una ENCUESTA INICIAL, de carácter individual mediante la cual pretendemos recoger varios aspectos: *actitudes personales* (frente a las Matemáticas, frente a los ordenadores y frente al trabajo en grupo); *conocimientos iniciales en matemáticas* (calificaciones en matemáticas en selectividad o el último curso de matemáticas realizado), *valoración de los conocimientos iniciales en informática y valoración de conocimientos iniciales en DERIVE, habilidades computacionales* (cálculo de derivadas, cálculo de raíces de polinomios,..)
- PRUEBAS OBJETIVAS DE CAPÍTULO, en las que los alumnos deberán contestar por escrito (utilizando el programa DERIVE como herramienta de apoyo) de algunos ejercicios, problemas y cuestiones planteados al finalizar cada capítulo.
- PRUEBAS OBJETIVAS DE SESIÓN, se plantearán ejercicios sencillos que se trabajarán en grupo, a fin de asentar los conceptos y el uso de la nueva herramienta.
- PRUEBA OBJETIVA DE RESOLUCION DE PROBLEMAS, se planteará dos veces a lo largo del semestre.
- EVALUACION FINAL, que constará de una parte de CUESTIONES en la que no podrán utilizar DERIVE y una parte de PROBLEMAS mediante el uso de DERIVE.
- NOTAS DE CAMPO, recogidas a lo largo de las sesiones, observaciones del desarrollo del curso en el aula.
- ENCUESTAS FINALES DE VERIFICACION. Se elegirán algunos de los alumnos participantes en la experiencia didáctica a fin de obtener elementos que permitan verificar los constructos y categorías construidos a lo largo de la investigación.

II.5. DESARROLLO DIDÁCTICO DEL CURSO.

El Departamento de Análisis Económico: Economía Cuantitativa de la Facultad de Económicas (Universidad Autónoma de Madrid) ha venido desarrollando durante los últimos cuatro años, unos cursos encaminados a experimentar los contenidos básicos de las asignaturas “Matemáticas I” y “Matemáticas II” con el programa de cálculo simbólico DERIVE, adquirido por el Departamento con este fin.

Estas experiencias han sido muy positivas, obteniéndose un elevado grado de aceptación por parte del alumnado. Con estos cursos se ha podido realizar una pequeña introducción a los sistemas de cálculo algebraico en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

También cabría señalar que el interés de varios profesores del Departamento por el uso de DERIVE en álgebra lineal dio origen al libro [Ortega,Sanz,Vázquez-98].

El proyecto de investigación como se ha comentado se pretende desarrollar en un grupo de tarde de primero de la Licenciatura de Administración y Dirección de Empresas, en la Facultad de Económicas de la Universidad Autónoma de Madrid, en la asignatura “Matemáticas II”.

II.5.1. OBJETIVO DIDÁCTICO.

Desarrollar mediante una ESTRATEGIA DIDÁCTICA BASADA EN EL USO DE DERIVE de los contenidos de la asignatura “Matemáticas II”, motivando muy especialmente mediante la RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

II.5.2. CONTENIDOS.

Son los contenidos propios de la asignatura “Matemáticas II”, estructurada en los siguiente capítulos:

1. Espacios vectoriales.
2. Aplicaciones lineales y Matrices.
3. Traza y Determinante.
4. Sistema lineales.
5. Autovalores y autovectores. Diagonalización de una matriz.
6. Formas cuadráticas
7. Programación Lineal.

II.5.3. METODOLOGÍA.

El grupo se desdoblará en tres subgrupos, en los que se desarrollaran dos tipos de estrategias didácticas con y sin el uso del programa de cálculo simbólico DERIVE::

GRUPO A: utilizando una estrategia didáctica con DERIVE, formado por un máximo de 40 alumnos.

GRUPO B: utilizando una estrategia didáctica con DERIVE, formado por un máximo de 40 alumnos.

GRUPO C: utilizando una estrategia didáctica sin DERIVE.

La forma de obtener los 3 subgrupos del grupo inicial que se propone consideraría dos aspectos fundamentales:

- La posibilidad del alumnado para asistir a las sesiones planteadas en horarios distintos.
- La disponibilidad del alumnado para formar parte de estos grupos experimentales.

Dado que se trata de un estudio experimental y voluntario proyectado por el que suscribe, aunque triplica la dedicación docente, no supondría ningún problema y ningún incremento en la dedicación del profesor. Digamos que formaría parte del proyecto de investigación

Un método de preselección de los subgrupos podría consistir en presentar para este grupo de tarde la posibilidad de elegir, a la hora de la matriculación, uno de los tres horarios diferentes, conociendo que dos de ellos forman parte de un trabajo de campo.

La ESTRATEGIA DIDACTICA empleada en los grupos experimentales A y B, tal como se ha comentado utilizará tres módulos de aprendizaje:

- Un primer módulo con actividades teórico-prácticas, presentadas en páginas HTML con sesiones paralelas de DERIVE.
- Un segundo módulo de ejercicios de Manipulación, utilizando el programa DERIVE
- Un tercer bloque basado en la resolución de problemas.

La estrategia didáctica del grupo de control C, utilizará la clásica exposición en la pizarra con ejemplos y resolución de numerosos ejercicios complementado por la bibliografía correspondiente.

II.5.4. MEDIOS Y MATERIAL DIDÁCTICO.

Para poder llevar a cabo esta investigación será necesario contar con:

- UN AULA DE INFORMÁTICA, de la Facultad de Económicas, disponible a lo largo del segundo semestre del curso 1999-2000, 4 días por semana de 14,30 a 16,30. Se requiere un aula de 20 puestos con ordenadores que permitan el uso de navegadores como Netscape 4.5 o Internet Explorer 5.0, capaces de leer páginas HTML.
- EL PROGRAMA DE CÁLCULO SIMBÓLICO DERIVE, ver. 3.13. Utilizaremos la versión 3.13 estandar de DERIVE para MS-DOS, de la cual existen 20 licencias en el Departamento de Análisis Económico: Economía Cuantitativa.
- UNOS APUNTES ESCRITOS EN HTML, de los contenidos de Algebra Lineal, así como del uso del programa DERIVE, que serán referente básico del desarrollo de la asignatura. Se visualizarán en cualquier navegador, preferentemente Netscape 4.5. Inicialmente se dispondran en una Intranet de Aula, aunque se pretende ampliar su uso RESTRINGIDO a los alumnos del curso por INTERNET.
- QUE LOS ALUMNOS DE LOS CURSOS EXPERIMENTALES DISPONGAN DE CUENTAS DE CORREO ELECTRÓNICO; instrumento que utilizarán para enviar los problemas y ejercicios resueltos en DERIVE, y para realizar consultas tutoriales de la asignatura.

II.5.5. HORARIOS DE LOS CURSOS.

GRUPO A: Experimental, utilizando DERIVE.
Lunes y Jueves de 14,30-16,30, a lo largo del 2º semestre.
Aula de Informática de la Fac. de Económicas.

GRUPO B: Experimental, utilizando DERIVE
Martes y Miércoles de 14,30-16,30, a lo largo del 2º semestre.
Lugar: Aula de Informática de la Facultad de Económicas.

GRUPO C: Grupo de control, sin uso de DERIVE.
Lunes y Jueves de 16,30-18,40.
Lugar: Aula asignada de la Facultad de Económicas.

II.5.6. EVALUACIÓN.

Existirán dos tipos de evaluación, según el tipo de estrategia didáctica utilizada:

- Los grupos A y B, que utilizan una estrategia didáctica que incluye el uso de DERIVE, realizarán la siguiente evaluación:

  EVALUACIÓN PARCIAL: A lo largo del semestre se irán planteando a los alumnos numerosas cuestiones, ejercicios y problemas, que servirán de evaluación parcial en la asignatura.

  EVALUACIÓN FINAL: Constará de dos partes:
    - Un cuestionario teórico tipo test con tres o cuatro respuestas alternativas de las cuales al menos una será correcta. Para resolver este cuestionario no se podrá utilizar DERIVE.
    - Una parte práctica que contendrá varios problemas, para los que se podrá utilizar el programa de cálculo simbólico.

- El grupo C, que utilizará una estrategia didáctica clásica, sin el uso de DERIVE; realizará la siguiente evaluación:.

  EVALUACIÓN PARCIAL: se propondrán cuestiones, problema y ejercicios a lo largo del semestre que los alumnos podrán entregar, y que servirán de evaluación parcial en la asignatura.

  EVALUACIÓN FINAL: que constará de dos partes:
    - Un cuestionario tipo test, similar al empleado con los grupos A y B.

- Unos problemas que los alumnos deberán desarrollar con lápiz y papel, es decir, de forma tradicional.

II. BIBLIOGRAFIA

[Amillo,Guadalupe-91] J. Amillo, R. Guadalupe, E. Torrano, "El laboratorio de Matemáticas en la Facultad de Informática", Actas de las Jornadas sobre Enseñanza Experimental de la Matemática en la Universidad, Universidad Politécnica de Madrid 10-12 Diciembre 1991, pp. 113-121.

[Bautista, 88] Bautista Garcia-Vera, Antonio “Evaluación de estrategias de resolución de problemas”, Revista de Educación, núm. 287, (1988), pp. 275-286.

[Beatrous-96], Frank Beatrous, "The University of Pittsburgh CALCULUS LABS", Wiley, EE.UU., 1996

[Brown,Porta,Uhl-91], Brown, Donald P., Porta, Horacio y Uhl, J.Jerry, "Calculus&Mathematica: Basic, Tutorials and Literacy Sheets", Addison-Wesley, EE.UU., 1991.

[Chumillas-91] Chumillas, Valerio "Enseñanza del Algebra Lineal con DERIVE", Actas de las Jornadas sobre Enseñanza Experimental de la Matemática en la Universidad, Universidad Politécnica de Madrid 10-12 Diciembre 1991, pp. 69-74.

[DERIVE, 90] DERIVE. User Manual, 1990.

[Gimeno, 88] Gimeno Sacristan, J; "El curriculum: una reflexión sobre la práctica", Ed. Morata, 1988.

[Goetz-LeCompte, 88], Goetz, J.P.; LeCompte, M.D.: "Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa", Ed. Morata, 1988.

[Guzman, 97] Guzmán, M. de, "Matemáticas y sociedad, acortando distancias", Revista Saber/Leer Fundación Juan March, Vol. 107, Madrid, pp. 10-17.

[Guzmán, 92] Guzmán, M. de, "Los riesgos del ordenador en la enseñanza de la matemática", (Eds. Abellanas, M. y Garcia, A), Enseñanza experimental de la matemática en la Universidad (Univ. Politécnica Madrid), 1992.

[Murakami-Hata,97] Murakami, H.; Hata, M. "Mathematical Education in the Computer age", Davenport: Computer Algebra Systems, 1997, pp.. 85-92.

[Kaput, 92] Kaput, J.J. "Technology and Mathematics Education", Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, A project of the NCTM, (1992),pp. 515-575.

[Ortega,Sanz,Vázquez-98] Ortega, P.; Sanz, P. y Vázquez, F.J., "Algebra Lineal, cuestiones, ejercicios y su tratamiento en DERIVE", Ed. Prentice-Hall, 1998.

ANEXO IV: PRUEBA PILOTO: “Matemáticas I y Matemáticas II con DERIVE”

1. Introducción.

Durante los últimos años las nuevas tecnologías y muy en particular los ordenadores están causando numerosos cambios en la mayoría de los aspectos de nuestra cultura. La enseñanza de las matemáticas no ha quedado ajena a estos cambios. Así, en muchas universidades de todo el mundo se han venido empleando programas con el fin de mejorar la calidad de la enseñanza en una disciplina, que por su elevado grado de abstracción, es una de la más complicadas del curriculum.

Los tipos de programas matemáticos más utilizados en las últimas décadas han sido: juegos, simulaciones, tutoriales, programas de enseñanza asistida por ordenador y lenguajes de programación, han sido los tipos de programas matemáticos más utilizados en las últimas décadas. Sin embargo, con la aparición de los programas de cálculo simbólico o cálculo algebraico en la década de los años 70, la utilización de este tipo de programas se han ido quedando relegados a un segundo plano.

Los programas de cálculo simbólico se han implantado en numerosas universidades durante los últimos años bajo la forma de laboratorios de matemáticas, dejando de lado al uso de calculadoras y programas basados en el cálculo numérico. Esta situación ha sido provocada fundamentalmente por las dos principales cualidades del cálculo simbólico:

1. Permite realizar <u>cálculos con aritmética exacta</u>, es decir, podemos operar con números racionales, números reales y números complejos de forma exacta, sin necesidad de utilizar sus aproximaciones numéricas.
2. Se pueden efectuar <u>operaciones simbólicas</u>, mediante el uso de variables en sus operaciones, es decir, se pueden realizar operaciones con variables y con parámetros, lo cual permite efectuar operaciones simbólicas como son el cálculo de derivadas, cálculo de integrales,...

La aparición de este tipo de programas ha suscitado numerosas experiencias didácticas, basadas fundamentalmente en la creación de laboratorios de prácticas, en los que el programa de cálculo simbólico es utilizado por los alumnos como soporte o herramienta para estudiar los hechos, conceptos y principios desarrollados en las clases teóricas de matemáticas.

El presente curso, se enmarca dentro de este tipo de laboratorios de prácticas de matemáticas con programas de cálculo simbólico. Se ha venido impartiendo durante los últimos cuatro años en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Autónoma de Madrid, y está configurado como apoyo a las asignaturas “Matemáticas I” y “Matemáticas II” impartidas por profesores del Departamento de Análisis Económico: Economía Cuantitativa de esta Facultad.

Este año, el desarrollo de estas prácticas servirán además como prueba piloto en la investigación educativa de la tesis doctoral en proceso de realización titulada “La enseñanza del álgebra lineal mediante programas de cálculo simbólico” , del Prof. Pedro Ortega Pulido.

2. Desarrollo didáctico del curso.

2.1. Objetivos:

1. Desarrollar mediante el programa de cálculo simbólico DERIVE, los contenidos fundamentales de las asignaturas Matemáticas I y Matemáticas II de las Licenciaturas en Económicas y Admin. y Dir. de Empresas de la U.A.M.

2. Motivar mediante la RESOLUCION DE PROBLEMAS, la utilización de este programa para desarrollar las estrategias de resolución de problemas comunmente empleadas en el cálculo diferencial y el álgebra lineal.

2.2. Contenidos:

Desarrollaremos el curso en tres módulos, en los que experimentaremos mediante el uso de DERIVE los siguientes contenidos:

MODULO 1 (2 horas).

1. Introducción al programa DERIVE, principales comandos.

2.Operaciones algebraicas básicas.

MODULO 2. (4 horas)

3. Comandos básicos de DERIVE para el cálculo diferencial (Calculus)

4. Análisis de Funciones de una variable (estudio analítico de funciones de una variable: crecimiento/decrecimiento, cálculo de máximos y mínimos, intervalos de concavidad/convexidad, puntos de inflexión , asíntotas; estudio gráfico y analítico del desarrollo de Taylor de una funcion de una variable y análisis de la continuidad y derivabilidad de una función en un punto)

5. Cálculo Integral (cálculo de la función integral de una función integrable, cálculo de áreas y estudio de la convergencia de integrales impropias).

6. Análisis de funciones de varias variables (gráfica y curvas de nivel de funciones de dos variables, diferenciabilidad, cálculo del gradiente y matriz hessiana, optimización de funciones de varias variables).

MODULO 3 (2 horas)

7. Principales comandos del programa DERIVE para el álgebra lineal.
8. Cálculo vectorial y matricial (operaciones con vectores y con matrices)
9. Sistemas de ecuaciones lineales (discusión de sistema y resolución de sistemas).
10. Diagonalización
11. Formas cuadráticas. (si diese tiempo)

2.3. Metodología:

El curso se desarrollará en 8 horas, divididas en tres MÓDULOS, que coinciden con los bloques de contenido.

El primer módulo de 2h. de duración estará dedicada a la introducción del programa DERIVE.

El segundo módulo de 4h se dedicará a experimentar con el programa los contenidos básicos de la asignatura "Matemáticas I": análisis y representación gráfica de funciones de una variable, cálculo de primitivas, cálculo de integrales definidas, estudio de integrales impropias, cálculo de derivadas parciales, gráficas y curvas de nivel de funciones de varias variables, estudio de la continuidad de funciones de dos variables y optimización de funciones de dos variables.

El tercer módulo (2 h) servirá para practicar los principales conceptos de la asignatura "Matemáticas II": operaciones con vectores, operaciones con matrices, resolución y discusión de sistemas de ecuaciones lineales y diagonalización de matrices. El estudio de formas cuadráticas se tratará si hubiese tiempo y los alumnos hubiesen tratado el tema en clases teóricas.

2.3.1. ESTRATEGIA DIDÁCTICA:

Para entender un tópico matemático es necesario invertir un primer esfuerzo en resolver los ejercicios a mano. Por tanto los contenidos matemáticos puede clasificarse en:

- CONTENIDOS ESENCIALES, son aquellos contenidos que no deben ejecutarse por medio del ordenador en el momento de ser introducidos ya que son esenciales e irremplazables por el cálculo automático de rutinas del ordenador. Por ejemplo, si tratamos de introducir el concepto de determinante, no tiene sentido utilizar el ordenador puesto que en este contexto al cálculo de determinantes se convierte en un contenido no esencial, pudiéndose realizar de forma automática.
- CONTENIDOS NO ESENCIALES, necesarios como herramienta para la comprensión de otros contenidos y que por tanto pueden ser reemplazados por el ordenador. Por

ejemplo si tratamos de discutir un sistema de ecuaciones lineales, utilizar el cálculo de determinantes con el ordenador no es esencial para el estudio del concepto esencial que en este sentido sería saber aplicar adecuadamente el Teorema de Rouché-Fröbenius.

Los alumnos que asisten al curso, han asistido previamente al desarrollo convencional de los contenidos de las asignaturas "Matemáticas I" y "Matemáticas II" impartidas a lo largo del presente curso, ambas de carácter cuatrimestral. La asignatura "Matemáticas I" se ha desarrollado en el primer cuatrimestre del presente curso y "Matemáticas II" se está desarrollando actualmente. En consecuencia, todos los conceptos matemáticos que se van a manipular son conocidos por los alumnos y han de considerarse como elementos previos al desarrollo de las prácticas, es decir, se puede decir que los contenidos relacionados con el cálculo de derivadas parciales, cálculo de primitivas, cálculo vectorial y cálculo matricial son contenidos no esenciales. Por consiguiente en estas prácticas los alumnos aprenderán a efectuar estos cálculos mediante DERIVE, aplicándolos a la resolución de diversos problemas.

Ante estos supuestos, la estrategia didáctica que utilizaremos, parte de unas destrezas básicas sobre las cuales se centran las prácticas, utilizando el nuevo medio didáctico: el programa de cálculo simbólico DERIVE.

En cada uno de los módulos, seguiremos el siguiente esquema didáctico:

(a) <u>Introducción teórico-práctica del contenido.</u>

Se realizará a través de un desarrollo guiado de ejemplos prácticos, realizados en el ordenador con el programa DERIVE. El alumno irá resolviendo los ejemplos prácticos con la ayuda del ordenador y de las instrucciones que irá recibiendo del profesor.

Estos ejemplos, permitirán conseguir tres objetivos:

1.- Que los alumnos se familiaricen con el programa

2.- Que el alumno sea capaz de utilizar el programa DERIVE para manipular los conceptos y relaciones matemáticas fundamentales ya introducidas en la asignaturas de "Matemáticas I" y "Matemáticas II".

3.- Que el alumno construya un sistema de notación intermedia basada en el programa, que pueda permitirle conocer más a fondo los conceptos previos que posee sobre los contenidos matemáticos de dichas asignaturas.

(b) <u>Ejercicios de manipulación.</u>

Después de haber introducido varios bloques de conceptos a través de DERIVE, se plantearán ejercicios de manipulación y relación conceptual que permitirán al alumno enfrentarse en solitario con la nueva herramienta. En esta parte, será necesario que los alumnos realicen un desarrollo de los ejercicios con la ayuda de DERIVE. Con este tipo de ejercicios, se puede comprobar que DERIVE no es más que una herramienta auxiliar, es decir DERIVE "no lo hace todo", pero nos permitirá ejecutar, de forma cómoda, aquellas rutinas algebraicas que necesitemos para la resolución de cada ejercicio. Un alumno sin conocimientos matemáticos no podrá resolver los ejercicios. (Ver en anexo II, la colección de ejercicios propuestos durante el curso).

(c) Resolución de problemas:

Al finalizar los módulos de contenido matemático (Módulos 2 y 3) se plantearán varios problemas que el alumno deberá resolver, utilizando las estrategias de resolución de problemas explicadas en las clases teóricas pero aplicadas en el nuevo medio computacional. De esta forma, los conceptos analíticos y algebraicos se convierten en entidades que facilitan la resolución de problemas más reales, permitiendo que el alumno profundice en sus estructuras y relaciones.

La introducción de estrategias de resolución de problemas permiten que los alumnos ASIMILEN una informaciones, conceptos y principios; sean capaces de TRANSFERIRLOS para solucionar problemas más globales; ANALICEN Y SINTETICEN situaciones problemáticas y ADQUIERAN Y DESARROLLEN ESTRATEGIAS de resolución de problemas.

2.3.2. MATERIAL DIDÁCTICO

Para poder llevar a cabo estas prácticas los alumnos dispondrán del siguiente material:

a) Unos apuntes, que desarrollan con detalle todos los ejemplos teórico-prácticos practicados a lo largo del curso, así como una relación de ejercicios propuestos, algunos de los cuales formarán parte de los ejercicios de manipulación expuestos anteriormente. Estos apuntes permitirán que la exposición sea más fluida, evitando que el alumno tenga que recurrir al "lápiz y papel", con la consiguiente falta de atención (véanse en anexo I los apuntes entregados a los alumnos del curso).

b) El programa de cálculo simbólico DERIVE, versión 3.13. Aunque actualmente existen numerosos programas de cálculo algebraico: Macsyma, Reduce, Mathematica, Maple, Axiom, Form, GNU-Calc, Derive,... Nosotros elegimos DERIVE para este curso por varios motivos fundamentales:
   1. *Su facilidad de aprendizaje*: no necesita muchos conocimientos previos de informática, y se puede aprender a utilizar en un corto espacio de tiempo, sin necesidad de invertir muchas horas en la lectura del manual.
   2. La *sencillez de su entorno de trabajo*, ya que permite ejecutar los comandos vía menú, o a través de la edición de los mismos por pantalla.

3. Su *portabilidad y pocos requerimientos de hardware:*es un programa que "cabe en un disquette", requiere tan sólo 512K de memoria RAM, procesador 8088 o superior y sistema operativo MS-DOS 2.1 o posteriores. Por tanto es ejecutable desde la mayoría de los ordenadores existentes actualmente en el mercado. Estos datos están basados en la versión 3.* de DERIVE que funciona bajo DOS, aunque existen versiones que aprovechan las posibilidades de Windows.
4. La relación *prestaciones y requisitos físicos* es con diferencia la mejor de todos los programas de cálculo simbólico existentes en el mercado.

Utilizaremos la versión 3.13 estandar de DERIVE para MS-DOS (del año 1995), aunque existen versiones del tipo XM que utilizan más memoria y son más rápidas. También existen actualmente una versión de DERIVE para Windows (4.3).

c) Un ordenador. Se utilizará un ordenador cada dos o tres alumnos, lo cual permitirá introducir una variable didáctica nueva: el aprendizaje colaborativo. El trabajo en grupo introduce un nuevo ambiente educativo: el uso del ordenador en un grupo reducido. Las relaciones de comunicación que surgen en este ambiente, puede propiciar una intercomunicación enriquecedora en lo que se refiere al aprendizaje de las matemáticas.

2.3.3. Diseño de las prácticas. Horarios.

Este curso se impartirá en cinco grupos de 40 alumnos en sesiones de 2h., con el siguiente horario:

GRUPO 1:

Lunes 19 de Abril de 14,30-16,30
Jueves 22 de Abril de 14,30-16,30
Lunes 3 de Mayo de 14,30-16,30
Jueves 6 de Mayo de 14,30-16,30

GRUPO 2:

Lunes 19 de Abril de 16,30-18,30
Martes 20 de Abril de 16-18
Lunes 3 de Mayo de 16,30-18,30
Martes 4 de Mayo de 16-18

GRUPO 3:

Lunes 26 de Abril de 14,30-16,30

Jueves 29 de Abril de 14,30-16,30
Lunes 10 de Mayo de 14,30-16,30
Jueves 13 de Mayo de 14,30-16,30

GRUPO 4:

Lunes 26 de Abril de 16,30-18,30
Martes 27 de Abril de 16-18
Lunes 10 de Mayo de 16,30-18,30
Martes 11 de Mayo de 16-18

GRUPO 5:

Martes 20 de Abril de 18.20
Martes 27 de Abril de 18-20
Martes 4 de Mayo de 18-20
Martes 11 de Mayo de 18-20

Las prácticas se realizarán en el Aula de Informática 4, de la Facultad de CC. Económicas de la Universidad Autónoma de Madrid. En este aula se dispone de 20 ordenadores Pentium II, con sistema operativo Windows NT, por lo que en cada ordenador estarán trabajando 2 ó 3 alumnos.

2.4. Evaluación.

La evaluación se realizará a dos niveles:

Por un lado, evaluaremos el desarrollo de las prácticas a nivel organizativo a través de una encuesta que se realizará al finalizar el curso en la que tendremos en cuenta las siguientes cuestiones:

- Adecuación del curso con los contenidos de la asignatura
- Utilidad de un laboratorio de Matemáticas I y II con este tipo de programas
- Motivación del alumnado

En segundo lugar, evaluaremos el rendimiento de las prácticas realizando una prueba de carácter objetivo al finalizar el curso que se tenga en cuenta

- Rendimiento del alumno en el curso: utilización de DERIVE.
- Rendimiento del alumno en la Asignatura.

3. Investigación educativa: prueba piloto.

3.1. Finalidad del estudio.

La importancia que los ordenadores están adquiriendo en todas las facetas de nuestra cultura es una cuestión que resulta evidente. Esta revolución tecnológica también está presente en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Uno de los programas más utilizados han sido los programas de cálculo simbólico, entre los que se encuentra DERIVE. La introducción de este tipo de programas de cálculo simbólico, y por tanto la introducción de los ordenadores en la enseñanza de las matemáticas, tiene numerosos peligros que debemos tener en cuenta. Entre los peligros más destacables, podemos señalar:

1. La posibilidad de PERDER EL SENTIDO DE LAS OPERACIONES que realiza el ordenador de forma automática: comprimiendo los procesos con el fin de ganar tiempo, y dar más importancia a los resultados.
2. Confundir MANIPULACIÓN MATEMÁTICA CON CONOCIMIENTO MATEMÁTICO, situación muy común cuando se adquiere un aprendizaje memorístico de las matemáticas, consistente en la memorización de algoritmos, definiciones y teoremas en vez de la construcción de unas matemáticas para la resolución de problemas.
3. Pensar que EL ORDENADOR LO RESUELVE TODO; sin tener en cuenta las limitaciones del medio, así como los fallos que puede introducir.
4. La EXCESIVA INMEDIATEZ de las respuestas proporcionadas por el ordenador, deben ser debidamente temporalizadas en los procesos de enseñanza, ya que la automatización de ciertos conceptos en un estadio de enseñanza inadecuado puede provocar graves problemas en el aprendizaje de dichos conceptos.

Pero, a pesar de estos peligros, el nuevo medio computacional ofrece varias características que es necesario aprovechar:

a) Sistemas múltiples de representación: facilita la construcción de SISTEMAS DE NOTACIÓN INTERMEDIOS entre los sistemas de notación de la matemática formal y los sistemas de notación más intuitivos, permitiendo que las cogniciones asociadas a los objetos matemáticos formales tengan un reflejo en las cogniciones producidas en estos sistemas intemedios; y así, de esta forma, se pueden evitar los graves problemas que suscitan las relaciones entre pensamiento y lenguaje matemático.
b) Es un MEDIO DINAMICO, que permite una transmisión continua de los estados y procesos intermedios que tienen lugar en un procedimiento global.

c) Es un MEDIO INTERACTIVO, es decir, que ante la actuación del usuario sobre un objeto determinado, el sistema provoca una respuesta. En los programas de cálculo algebraico, esta respuesta suministra una pautas de orientación al usuario.
d) Permite el ALMACENAMIENTO Y CAPTURA DE PROCEDIMIENTOS, es decir, se pueden construir, guardar o recuperar construcciones genéricas de objetos así como procedimientos de ejecución.
e) SIMPLIFICA LAS RUTINAS ALGEBRAICAS Y DE CALCULO, ofreciendo de esta forma la posibilidad de resolver problemas con datos más cercanos a la realidad así como la posibilidad de emplear más esfuerzo en procesos de orden superior.

La finalidad principal de esta investigación consiste en estudiar la influencia que ejercen los programas de cálculo simbólico en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, introducidos de tal forma que aprovechen las características enumeradas y eviten los peligros en los que podemos caer. Por eso nuestra prueba piloto pretende estudiar si la introducción de DERIVE mediante la estrategia didáctica anteriormente planteada:

1. Permite construir un Sistema de Notación Intermedio, entre los sistemas de notación de la matemática formal y los sistemas de notación más familiares e intuitivos.
2. Admite un grado aceptable de interactividad entre el usuario y el programa.
3. Favorece que el alumno sea PROTAGONISTA y CREADOR frente al medio tecnológico y no un mero USUARIO:
4. Evite la utilización del ordenador para ejecutar la resolución de rutinas ESENCIALES para el desarrollo de conceptos y principios.
5. Permite prescindir del ESFUERZO RUTINARIO dedicado a desarrollar operaciones algebraicas y de cálculo.
6. Convierte al ordenador en una HERRAMIENTA DE EXPERIMENTACIÓN.
7. FAVORECE EL APRENDIZAJE de los contenidos matemáticos de cálculo diferencial y algebra lineal introducidos en la prácticas.
8. Favorece el DESARROLLO DE ESTRATEGIAS DE RESOLUCION DE PROBLEMAS.
9. Aumenta ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS..
10. No genera BARRERAS ADICIONALES para el aprendizaje de los conceptos matemáticos.
11. Genera AUTONOMÍA COGNITIVA para los alumnos, permitiéndole e incitándole a indagar situaciones planteadas desde el propio individuo anulando así ciertas dependencias que existen entre los alumnos y otros expertos o maestros.
12. Favorece la RELACION DIALECTICA entre los usuarios.

13. Permite la ATENCION A LA DIVERSIDAD: ofreciendo varios niveles de aprendizaje.
14. Aumente el grado de MOTIVACION ante las matemáticas.

Estos objetivos de la investigación pueden ser perfilados de forma más concreta en algunos casos en el transcurso de la investigación.

3.2. Modelo de investigación utilizado.

Por la naturaleza de los fines del estudio, y de los datos que hemos de recoger y elaborar, nuestra investigación se basará en un estudio mixto con dos dimensiones: cualitativa y cuantitativa.

La DIMENSIÓN CUALITATIVA del estudio pretende dar respuesta a las cuestiones señaladas en los objetivos que son de naturaleza interna a los sujetos y hemos de interpretarlos. Según los fines enumerados en apartados anteriores, hemos diseñado tareas de enseñanza orientadas en la vía de la resolución de problemas, con las cuales podamos responder a los objetivos planteados. Elegimos el método cualitativo basado en el estudio de casos (grupos de alumnos) para poder confrontar las tendencias así como el comportamiento de los alumnos ante este diseño metodológico.

La DIMENSION CUANTITATIVA permitirá confrontar cuantitativamente los resultados obtenidos con los cinco grupos, efectuando una comparación a dos niveles:

a) comparando entre sí, el resultado de las prácticas con DERIVE.
b) comparando los datos obtenidos de las prácticas con los datos de las calificaciones de los alumnos en las evaluaciones de las asignaturas “Matemáticas I” y “Matemáticas II”.

3.3. Población objeto de estudio.

Este diseño de investigación se aplicará a 5 grupos de unos 40 alumnos, de primer curso de las licenciaturas de Ciencias Económicas y Administración y Dirección de Empresas. Las plazas se ofertaron a todos los alumnos de dicha licenciatura matriculados en las asignaturas “Matemáticas I” y “Matemáticas II” (asignaturas de carácter cuatrimestral), con carácter voluntario. Los grupos se fueron cerrando a medida que se iba cubriendo el número de plazas máximo por grupo (40 plazas). Por tanto el proceso de selección ha sido por exclusivo orden de llegada.

Se trata por tanto de una población formada en su mayor parte por alumnos de Primer curso de Licenciatura (18 años), que teóricamente han elegido sus estudios en primera o segunda opción. Son alumnos que se incorporan a la Universidad, donde el tipo de enseñanza y aprendizaje es distinto al realizado en las enseñanzas medias y que ya han realizado un primer cuatrimestre en la Universidad.

3.4. Estrategias de recogida de datos.

Las estrategias de recogida de datos que consideraremos son las siguientes:

1. UNA ENCUESTA INICIAL

En esta encuesta inicial de carácter individual mediante la cual pretendemos recoger varios aspectos de carácter individual:

- ACTITUDES PERSONALES:
- frente a las Matemáticas antes de iniciar la Licenciatura
- frente a las Matemáticas en este primer curso.
- frente a los ordenadores
- frente al trabajo en grupo
- CONOCIMIENTOS INICIALES EN MATEMATICAS
- Calificaciones en Matemáticas antes de iniciar la Licenciatura
- Calificación de Febrero de la asignatura “Matemáticas I”
- Expectativas para Junio de la asignatura “Matemáticas II”
- CONOCIMIENTOS INICIALES EN INFORMÁTICA.
- CONOCIMIENTOS INICIALES SOBRE DERIVE.
- EXPECTATIVAS PARA ESTE CURSO.
- HABILIDADES COMPUTACIONALES.
- Breve test acerca del cálculo de determinantes y cálculo de derivadas parciales.

La encuesta se puede encontrar en el apartado 4.1.

2. PRUEBAS OBJETIVAS DE SESION.

Estas pruebas consisten en la contestación por escrito (utilizando el programa DERIVE como herramienta de apoyo) de ALGUNOS EJERCICIOS propuestos al finalizar las sesiones segunda y tercera, que deberán entregarse en los modelos entregados al efecto. Los ejercicios intentan ofrecer una variedad en las que se contengan desde ejercicios de fácil resolución hasta otros un poco más complicados, ofreciendo la posibilidad de la adaptación curricular.

Las resolución de estos ejercicios se registrará de dos formas

- por un lado rellenando en un impreso únicamente las soluciones (en el impreso están los enunciados de los ejercicios planteados). De esta forma obtendremos una puntuación objetiva en base a las contestaciones dadas.
- y en un archivo de DERIVE, en el que se pueden analizar los procesos seguidos para obtener la solución. En estos archivos podremos estudiar los procesos utilizados por el grupo de trabajo, la comprensión del sistema de notación de DERIVE y su modo de empleo.

En los impresos se indican las instrucciones para realizar estos ejercicios de sesión.

Se emplearán 15 minutos en cada sesión para desarrollar esta prueba.

Los ejercicios previstos inicialmente para cada sesión se pueden encontrar en el apartado 4.2.

3. PRUEBA OBJETIVA FINAL: RESOLUCION DE PROBLEMAS.

Esta prueba final consiste en la resolución de CINCO PROBLEMAS, tres de cálculo diferencial y dos de álgebra lineal, similares a los propuestos en los exámenes finales de cada asignatura. Con ella pretendemos valorar por un lado el rendimiento de los alumnos en el curso y por otro los indicadores relacionados con estrategias de resolución de problemas, autonomía cognitiva, el uso de DERIVE como sistema de notación intermedio y el grado de experimentación de los alumnos al utilizar el programa. Al igual que en los ejercicios, el grado de dificultad de los problemas es variado, pudiendo de esta forma encontrar cabida un amplio abanico de alumnos.

Junto con los problemas planteados, se indicarán ciertas instrucciones a modo de protocolo, que los alumnos deberán rellenar por escrito.

Para realizar esta prueba se dispondrá de 30 minutos en la última sesión.

Consultar en el apartado 4.3. los protocolos empleados y los problemas planteados.

4. ENCUESTA FINAL.

En esta encuesta se pretende obtener información acerca de las opiniones de los alumnos en relación con:

- LA ORGANIZACIÓN DEL CURSO
- EL PROCESO DE REALIZACIÓN,
- EL PROFESORADO
- LA ACTITUD FRENTE AL USO DE DERIVE.
- TRABAJAR EN GRUPO LAS MATEMÁTICAS.

La encuesta se realizará al finalizar la prueba final, fuera de las 8 horas previstas para el curso. (Véase en el apartado 4.5. la encuesta final) .

5. REGISTROS DE OBSERVACION DEL TRABAJO DE CAMPO.

A lo largo de las sesiones iremos tomando nota de las observaciones que tengamos en el aula basadas en los siguientes registros:

- ¿Cómo es el clima en los grupos de trabajo?, ¿se encuentran agusto, debaten,..?
- ¿Cómo es el ambiente de la clase general? ¿Se atiende, se pierde el tiempo, hay interés,..?
- ¿Se percibe motivación en los alumnos, a la hora de resolver ejercicios, en las dudas que plantean? ¿Tienen prisa cuando termina la clase, hay que avisarles que la clase ha terminado?
- ¿Cómo es el trabajo con DERIVE? ¿se entiende, existe dificultad en su comprensión? ¿Existe autonomía cognitiva, o una excesiva dependencia del programa? ¿Se piensan los procesos?
- ¿Cómo son las dudas que se plantean, son de CONCEPTOS MATEMÁTICOS o del modo de uso del PROGRAMA?

6. ENCUESTAS FINALES DE VERIFICACIÓN.

Una vez finalizado el curso y analizados los datos (no de una forma exhaustiva) se vislumbrarán una serie de constructos y categorías sobre los cuales es necesario realizar una triangulación a fin de validarlos y establecer las conclusiones pertinentes. Por ello un elemento importante de la triangulación puede venir determinado efectuando encuestas sobre un muestreo del grupo total de alumnos. La encuesta estará basada en las categorías analizadas a fin de obtener la información de los protagonistas de la investigación.

La forma de selección será aleatoria, y dado que es difícil obtener una cita con los alumnos, en principio por las fechas, muy próximas a los exámenes, se invitará a todos aquellos que lo deseen realizarla cuando vengan a recoger el diploma de asistencia al curso.

3.5. Desarrollo de las sesiones.

Primera sesión:

El objetivo de esta primera sesión es que el alumno se familiarice con el programa, y efectúe las operaciones básicas de DERIVE tales como:

- Entrar y salir en DERIVE
- Entender las formas de aplicar los comandos y subcomandos del PROGRAMA.
- Editar y reeditar expresiones de la ventana de álgebra
- Manejar los distintos tipos de ficheros del programa.
- Abrir, cerrar y moverse entre ventanas gráficas de 2D y 3D
- Manejar las principales operaciones algebraicas básicas:
    - Simplificar expresiones.
    - Trabajar en Modo aproximado y modo exacto.
    - Expandir expresiones
    - Factorizar números
    - Factorizar polinomios en sus cinco tipos
    - Resolver ecuaciones
    - Resolver inecuaciones
    - Entender el significado de las funciones predefinidas y el modo de definirlas.
- Manejar la ayuda de DERIVE.

<u>ESQUEMA DE LA PRIMERA SESIÓN.</u>

➔ Presentación del curso. (estructura, y contenidos a impartir. Por qué usar el programa)

➔ Encuesta y test inicial. (15 minutos)

➔ Indicar que sirve para realizar una investigación sobre la influencia del ordenador en la enseñanza de la Matemáticas.

➔ Avisos de organización:

- Los grupos de trabajo deben ser siempre los mismos.
- Todos los días realizaremos al finalizar la sesión un prueba objetiva a modo de evaluación.
- Al finalizar el curso se realizará un pequeño exámen de 30 minutos.
- Se ruega puntualidad
- Se entregará un certificado de asistencia al finalizar las 4 sesiones.
- Procurad utilizar siempre el mismo número de diskette en el grupo de trabajo.
- En el desarrollo del curso hay dos formas de trabajo:
- un trabajo guiado, mediante ejemplos. Para lo cual se requiere que TODOS sigan el ritmo marcado
- un trabajo de práctica, donde cada grupo de trabajo podrá experimentar con el programa.
- Los apuntes del curso son importantes para el mayor aprovechamiento del curso.

➔ PRESENTACIÓN DE CONTENIDOS Y DEL PROGRAMA.

➔ Reparto de DISKETTES.

➔ Desarrollo de los contenidos. (1h. 40 min.)

DESARROLLO DE LA SESIÓN

Se ha conseguido finalizar en todos los grupos la Introducción a Derive, a excepción de los últimos puntos relacionados con la resolución de ecuaciones e inecuaciones, la ayuda de DERIVE y el significado de funciones predefinidas, únicamente hemos terminado en los grupos 3 y 4.

Segunda sesión:

En esta segunda sesión pretendemos cubrir dos objetivos:

1. Que el alumno maneje los comandos básicos del cálculo diferencial:
   - Calculo de derivadas y derivadas parciales
   - Cálculo de integrales indefinidas
   - Cálculo de integrales definidas
   - Cálculo de integrales impropias
   - Cálculo de límites
   - Cálculo de sumatorios
   - Cálculo de productorios
   - Cálculo de desarrollos de Taylor
2. Manipular con DERIVE los conceptos básicos necesarios para el análisis de funciones de una variables:
   - Representación gráfica, dominio, recorrido, crecimiento, decrecimiento, intervalos de concavidad, convexidad, extremos locales, puntos de inflexión,...
   - Aproximación de funciones por el polinomio de Taylor.
   - Representación gráfica de funciones definidas a trozos
   - Interpretación geométrica de la derivada
   - Cálculo de límites.
   - (Si diese tiempo) Gráficas de transformaciones de funciones
   - (Si diese tiempo) Representación de funciones en polares y paramétricas.

ESQUEMA DE LA SEGUNDA SESIÓN.

➔ Puesta en marcha del sistema y reparto de diskettes. (10 minutos)

➔ Desarrollo de los contenidos (1h. 35 minutos)

➔ Prueba objetiva sobre la sesión 1 (15 minutos) Comentar como realizarla

DESARROLLO DE LA SEGUNDA SESIÓN:

Se han desarrollados todos los contenidos, a excepción de las prácticas relacionadas con las gráficas de transformaciones de funciones y la representación de funciones en polares y paramétricas. Unicamente con el grupo 4 hemos conseguido verlo y además ha dado tiempo a realizar la práctica dedicada a la integrabilidad de una función. Por la experiencia de la práctica parece conveniente no realizarla con el resto de grupos, dado que es puramente teórica.

Tercera sesión:

En la tercera sesión pretendemos hacer una revisión de los conceptos básicos de cálculo integral y de análisis de funciones de varias variables vistos en la asignatura Matemáticas I.. En concreto:

1. Manipular con DERIVE los problemas básicos de cálculo integral planteados en Matemáticas I:
    - (Si diese tiempo) Integrabilidad de una función: se realizará una práctica sobre la construcción de la integral de Riemann.
    - Función integral de una función integrable
    - Cálculo de integrales indefinidas con parámetros.
    - Cálculo de áreas (aplicación de integrales definidas).
    - Estudio de la convergencia de integrales impropias
2. Conceptos básicos de funciones de varias variables:
    - Gráficas y curvas de nivel de funciones de dos variables.
    - Gradiente y Matriz hessiana.
    - Derivadas direccionales y diferenciabilidad.
    - Teorema de la Función Implícita
    - Extremos relativos.

ESQUEMA DE LA TERCERA SESIÓN.

➔ Puesta en marcha del sistema y reparto de diskettes. (5 minutos)

➔ Desarrollo de los contenidos (1h. 40 minutos)

➔ Prueba objetiva sobre la sesión 1 (15 minutos) Comentar como realizarla

DESARROLLO DE LA TERCERA SESIÓN

En esta sesión se han desarrollado las prácticas elegidas, en todos los grupos a excepción del estudio de derivadas direccionales y diferenciabilidad y el teorema de la función implícita, por falta de tiempo. Tampoco se ha desarrollado la práctica relacionada con la integrabilidad de una función como se comentó en las conclusiones de la segunda sesión.

<u>Cuarta sesión:</u>

En esta última sesión, dado que no resta demasiado tiempo nos centraremos en hacer una revisión de los conceptos básicos del álgebra lineal, divididos en tres partes:

1. Estudiar los principales comandos de DERIVE para el álgebra lineal
   - Vectores y matrices en DERIVE
   - Operaciones con vectores y matrices en DERIVE
   - Operaciones vectoriales y matriciales de ficheros de utilidades.
2. Discusión y resolución de sistemas lineales.
   - Discusión de sistemas lineales con coeficientes constantes
   - Discusión de sistemas lineales con algún parámetro
   - Resolución de sistemas con ROW_REDUCE
   - Resolución de sistemas con SOLVE.
3. Diagonalización de matrices
   - Cálculo de autovalores: EIGENVALUES
   - El polinomio característico: CHARPOLY
   - Cálculo de Autovectores: EXACT_EIGENVALUES.
   - Diagonalización de matrices.
   - Si da tiempo: prácticas del estudio de diagonalización de matrices paramétricas.

Como puede verse, algunos temas no se van a desarrollar: ESPACIOS VECTORIALES y FORMAS CUADRÁTICAS. Ambos por falta de tiempo. Hubiera sido deseable emplear al menos dos horas más en cada curso.

<u>ESQUEMA DE LA CUARTA SESIÓN.</u>

- ➔ Puesta en marcha del sistema y reparto de diskettes (5 minutos)
- ➔ Desarrollo de los contenidos (1h. 25 minutos)
- ➔ Prueba final: RESOLUCION DE PROBLEMAS (30 minutos) Comentar cómo realizarla.

<u>DESARROLLO DE LA CUARTA SESIÓN</u>

Ha sido una sesión bastante ágil, ya que me he centrado en los instrumentos de DERIVE básicos para efectuar el cálculo vectorial y matricial. Se ha desarrollado lo previsto aunque ha faltado algo de tiempo para trabajar más sobre diagonalización. La prueba final ha resultado interesante puesto que he tenido que ampliar casi media hora por grupo en la resolución dado el entusiasmo de los alumnos por acabar sus problemas.

3.6. Análisis de datos.

Después de haber realizado la recogida de datos de la investigación, he procedido a realizar en primer lugar unos resúmenes de todas las pruebas realizadas, para realizar el análisis de datos de una forma más estructurada. A continuación se muestran los resultados obtenidos en cada una de las pruebas, así como del análisis que interpretamos se deducen de esos datos.

a) ENCUESTAS INICIALES

Estas encuestas iniciales pretendían recoger algunos aspectos de carácter individual, algunos de ellos cuantificables (de carácter cuantitativo), y otros que recogen valoraciones de los alumnos, así como los razonamientos de sus valoracionees (de carácter cualitativo). Dada la dificultad de manejar todas las encuestas iniciales, elaboramos un resumen por grupo de estos items. Sobre los items cuantificables, extraimos la media, mediana, moda y desviación típica de los datos obtenidos. En el resto de items, indicamos las opiniones de los alumnos, incluyendo entre paréntesis las veces en las que una opinión semejante se repetía.

Como resúmen global se puede decir que:

1. Respecto a la actitud que tienen los alumnos por las Matemáticas, se observa que en todos los grupos hay un nivel de interés alto (entre 6 y 7 sobre 10) por esta disciplina, aunque se experimenta una leve disminución al entrar en la Universidad, debido fundamentalmente a que en la Universidad se complican y porque son poco prácticas.

2. Respecto a la actitud de los alumnos frente a los ordenadores, se puede constatar una actitud notable, destacando en este sentido el Grupo 2, cuya media de valoración en este item es de 7,62. Las razones más usuales del porqué se centran en que los ordenadores son cómodos, rápidos y por tanto ahorran tiempo y son eficaces y divertidos.

3. La actitud general frente al trabajo en grupo también ha recibido una valoración alta (7-7,4 sobre 10). Los motivos más utilizados sobre este tipo de trabajo, se centran en que el trabajo en grupo es más ameno y divertido, se aprende algo más de los demás, se intercambian puntos de vista y motivan bastante. Aunque han existido opinones contrarias indicando que se pierde mucho tiempo y que existe cierta dependencia.

4. Las calificaciones en Matemáticas antes de iniciar la Licenciatura están en una media de 6,7 aproximadamente.

5. Las calificaciones en Matemáticas en l a asignatura Matemáticas I, han sido ciertamente más bajas, en media podríamos hablar de un 4,5. El grupo con calificaciones más altas es el grupo 3 (5,65), en contraste con el grupo 1 que tiene las calificaciones más bajas (4,64).

6. Los conocimientos en informática se puede decir que en general son bajos, una media de 4,1.

7. Los conocimientos iniciales en DERIVE, son en general casi nulos, salvo alguna excepción.

8. Las expectativas que manifestaron en general tener los alumnos fueron las de aprender matemáticas con ordenador.

Los cuadros resúmen obtenidos se muestran en el apartado 4.1.

b) <u>TEST INICIAL DE HABILIDADES COMPUTACIONALES</u>.

Al iniciar el curso, además de realizar una encuesta inicial en la que se hizo un pequeño sondeo de actitudes personales, conocimientos en matemáticas y expectativas para el curso, también se realizó una prueba objetiva para medir el grado de habilidad computacional de los alumnos asistentes al curso. La prueba (que puede encontrarse en el apartado 4.1), contiene una batería de 8 cuestiones de álgebra lineal (cálculo de determinantes y rangos) y 9 cuestiones de cálculo diferencial (cálculo de derivadas parciales, integrales indefinidas e integrales definidas). Las cuestiones eran sencillas y dependientes unas de otras, de tal forma que por ejemplo, con el cálculo de las integrales indefinidas se obtenían trivialmente las integrales definidas y de igual forma, con los cuatro determinantes calculados se calculaban de forma sencilla los rango de las cuatro matrices cuadradas planteadas.

Una vez evaluadas de forma objetiva las pruebas (asignando una puntuación de 0,5 puntos a todas las cuestiones salvo las 3 cuestiones de integrales indefinidas se valoraron con 1 punto cada una) se elaboraron unos cuadros de puntuación por grupos. (pueden verse en apartado 4.1.).

De estas tablas se puede observar que las cuestiones mejor realizadas fueron las correspondientes al álgebra lineal, que en su mayoría fueron contestadas por todos los alumnos. Por el contrario la mayor parte de las cuestiones de cálculo diferencial no se realizaron. Una posible explicación a esta circunstancia, puede ser que el cálculo de rangos y determinantes lo están ejercitando actualmente, mientras que las habilidades computacionales del cálculo integral, han podido quedar en el olvido, aunque otra posible explicación puede ser los alumnos en general no han aprobado la asignatura "Matemáticas I" (la media de todos los grupos es inferior a 4,5)

Todo ello explica que las calificaciones finales de este test objetivo, hayan sido inferiores a 4. De hecho las medias obtenidas por grupo son:

Grupo 1: 5,66; Grupo 2: 3,88; Grupo 3: 3,34; Grupo 4: 4,46; Grupo 5:3,69.

Sin embargo obsérvese que la calificación media del grupo 3, (3,34) es la menor de todas mientras que la calificación media en Matemáticas I para este mismo grupo era la mayor (5,65), como se puede ver en las tablas de la encuesta inicial.

En el apartado 4.1. se pueden encontrar los cuadros resúmen del Test Inicial por grupos.

c) PRUEBAS OBJETIVAS DE SESION Y RESOLUCION DE PROBLEMAS.

Las pruebas más importantes de la investigación eran las pruebas objetivas de sesión y la prueba final.

Para realizar el análisis de las contestaciones que cada uno de los grupos de trabajo realizaba, se realizó un cuadro de análisis en el que además de los datos de los miembros de grupo se incluyeron, como datos previos al análisis, los relacionados con dada uno de los integrantes del grupo respecto a la encuesta inicial y los datos del test inicial.

Los ejercicios y problemas de las sesiones 2, 3 y 4 tenían dos partes, por un lado la hoja de respuestas a los mismos y por otro un fichero de utilidades de DERIVE que los alumnos habían elaborado como una hoja de trabajo electrónico para ir resolviendo cada ejercicio o problema. En estos ficheros se podían efectuar numerosas observaciones, relacionadas más con los procesos que con el resultado final. En consecuencia para evaluar los ejercicios de las sesiones 2 y 3 y los problemas finales de la sesión 4, consideré conveniente tener en cuenta una valoración de las siguientes cuestiones:

- **Calificación objetiva de la prueba**. Valorando únicamente los resultados incluidos en las hojas de respuestas. Las soluciones a las tres pruebas se pueden encontrar en los apartados 4.2 y 4.3.

- **¿Utilizan DERIVE como sistema de notación intermedio?.** En esta cuestión, se trataba de ver si los alumnos entienden bien el lenguaje de notación utilizado por DERIVE y si lo utilizan bien a la hora de encontrar las soluciones de los ejercicios y problemas propuestos.

- **Grado de interactividad usuario con DERIVE**. Para contestar a esta pregunta, debía observarse si las expresiones utilizadas para la resolución de los diferentes ejercicios y problemas se introducían adecuadamente en función de los objetivos propuestos y si las expresiones devueltas por DERIVE eran interpretadas de forma adecuada por los usuarios del programa

- **Protagonismo con DERIVE ¿es mero usuario o más creador?** En algunas ocasiones, los usuarios de programas, se dejan llevar por la máquina de tal forma que no saben en muchos casos lo que la máquina está realizando. Se pretendía evaluar si DERIVE se utilizaba de forma automática para cualquier cálculo, aunque éste fuese un cálculo inmediato, o bien si su utilización era una utilización creadora, con protagonismo del alumno.

- **¿Es DERIVE herramienta de experimentación?**. En numerosas ocasiones, los resultados Matemáticos son fruto de una experimentación, de una serie de pruebas, algunas con éxito y otras con fracaso que permiten desvelar el funcionamiento interno de ciertos procesos en base a esa experimentación del problema. Por eso, esta cuestión pretende reflejar en qué medida los alumnos utilizan el programa como herramienta de experimentación: búsqueda de soluciones a través del comportamiento del problema en varios casos; aprovechando esa facilidad de cálculo que ofrece el propio programa.

- **¿Favorece el aprendizaje de contenidos de Matemáticas I y Matemáticas II?.** Resultaría muy interesante poder constatar si el programa permite mejorar la asimilación de contenidos de estas dos asignaturas. La forma de observar esta cuestión consiste en ver el grado de dominio de los contenidos planteados en el problema, observando la forma que DERIVE brinda a los alumnos para visualizar por ejemplo, las gráficas de funciones de una y dos variables en “Matemáticas I”, o bien como los cálculos complejos del “álgebra lineal” no ocultan los conceptos básicos que se desarrollan en la asignatura “Matemáticas II”.

- **¿Elimina el esfuerzo rutinario?.** Con esta cuestión se pretendía constatar si efectivamente, DERIVE elimina esfuerzo rutinario, de aquellas cuestiones de contenido no esencial. La forma de medir esta cuestión se basó fundamentalmente en observar si los problemas planteados se podrían haber realizado en el mismo tiempo sin DERIVE, de una forma fiable y exacta.

- **¿Aumenta estrategias de resolución de problemas?.** Se pretendía descubrir si utilizaban varias estrategias de resolución aprovechando las ventajas de cálculo de DERIVE, bien si se limitaban a la estrategia básica planteada en las clases teóricas con lápiz y papel.

- **¿Es una barrera adicional?** (para aprender Matemáticas). En algunas ocasiones, el aprendizaje de un programa matemático auxiliar, lejos de facilitar el aprendizaje, lo que hace es añadir una nueva barrera, ocasionada fundamentalmente porque el programa es súmamente complejo y exige demasiado esfuerzo adicional, o bien porque el lenguaje que emplea el programa se aleja demasiado del sistema de notación empleado en la resolución de problemas con lápiz y papel. Por eso, en esta cuestión se trataba de constatar si efectivamente se observaron rasgos que definieran esta pregunta de una manera concreta observando si se entendían bien los comandos de DERIVE utilizados, si domina bien las técnicas básicas de definición de funciones o de constantes y en definitiva observar las barreras o problemas que ocasinaba el programa a los alumnos.

- **¿Permite atención a la diversidad?.** En las colecciones de ejercicios y problemas de las tres sesiones se intentaron plantear problemas y ejercicios variados en cuanto al grado de dificultad. Se plantearon ejercicios básicos, en los que se supone que todos los alumnos los realizarían; otros un poco más complejos, que realizarían menos alumnos y por último otros que dado su dificultad no podrían ser realizados por todos. Asimismo no se pretendía que se realizaran todos los ejercicios o problemas, esto sólo lo podrían realizar aquellos que tuviesen muy claros los conceptos matemáticos y que por tanto con DERIVE resolverían de una forma automática. Problemas cuya única dificultad era el planteamiento, ya que la resolución con el programa se podría realizar en unos segundos.

- **¿Aumenta la motivación?.** Medir el grado de motivación de los alumnos frente a las Matemáticas, resulta muy difícil. En particular, para estudiar esta cuestión con el desarrollo de los ejercicios y problemas de las tres sesiones nos planteamos observar fundamentalmente el tiempo empleado en la resolución de los mismos. Resulta evidente que cuando un alumno dedica todo el tiempo posible o incluso más, en la resolución de un problema, aunque luego esté mal, es porque tiene un cierto grado de motivación. Ya que puede optar directamente por no hacerlo y dejarlo. En las sesiones de trabajo entregadas, se puede observar también como los alumnos buscan con cierto grado de motivación la solución de los problemas cuando realizan búsquedas incluyendo cierto elemento de curiosidad en sus procesos de resolución.

- **¿Cómo es la relación dialéctica entre los usuarios?.** Ya que en su mayor parte, las cuestiones se desarrollaron en grupos de dos o tres alumnos, resultaba muy interesante determinar cómo son las relaciones entre los usuarios, es decir, que tipo de relación se observa entre los participantes respecto a la resolución de problemas, puesto que la afectividad es una variable educativa que puede afectar enormemente en el rendimiento de los alumnos, y este trabajo en grupo frente al ordenador puede favorecer unas relaciones dialécticas enormemente constructivas. De hecho en la encuesta inicial, una de las cuestiones que se preguntaba estaba relacionada con la valoración que los alumnos tenían del trabajo en grupo.

Para valorar todas estas cuestiones, antes de comentar el proceso de análisis realizado, es necesario comentar brevemente cada una de las pruebas planteadas con respecto a dichos aspectos.

EJERCICIOS DE LA SESIÓN 2.

Los ejercicios planteados en esta sesión (ver anexo V) estaban basados en cuestiones básicas del manejo de DERIVE sobre conceptos de la matemática elemental.

En el primer ejercicio: “Obtener el valor aproximado con 14 dígitos de aproximación del ln(2)” se pretendía determinar el grado de comprensión de lo que significa en DERIVE simplificar y aproximar, así como de las posibilidades que ofrece la aproximación entre las que se encuentra modificar el número de dígitos de aproximación.

El segundo ejercicio: “Calcular el máximo común divisor de los números 259308 y 7200” únicamente requería obtener la factorización numérica de los dos números indicados y deducir de ahí el máximo común divisor por observación directa de las dos descomposiciones en factores primos obtenidos.

El tercero: “Calcular la integral indefinida $\int x^6 e^6 dx$” se planteó para que el alumno decidiese si resolver directamente la sencilla integral inmediata planteada, o bien utilizar DERIVE. Aquí se podía medir el grado de protagonismo que el alumno tenía frente al programa. Si utilizaba DERIVE, además debía dominar el sistema de notación teniendo en cuenta que el número "e" no se introduce en el sistema como una variable sino que con la secuencia ALT-e. Además, al tratarse de una integral indefinida, DERIVE devuelve una de las primitivas, el alumno debía dar como respuesta el resultado que da el programa más una constante de integración.

El cuarto ejercicio "determinar si es o no convergente $\int_0^1 \frac{x-2}{x^2} dx$" pretendía observar el dominio de la secuencia Calculus-Integrate, así como determinar si el alumno observaba previamente si DERIVE daría una respuesta adecuada. A lo largo del curso puntualizamos que cuando en una integral impropia la función integrando tiene puntos de no acotación en el interior, DERIVE no obtenía el resultado adecuado. También se podría utilizar la definición de integral impropia para resolver el ejercicio.

Por último el ejercicio 5: "Calcular el polinomio de Taylor de orden 4 de la función $f(x)=x^4-3x+2$ en $x=0$", pretendía nuevamente medir el grado de protagonismo del alumno frente al programa, ya que un alumno con dominio del concepto directamente indicaría como solución el mismo polinomio. Por el contrario podría suceder que utilizasen el programa, en cuyo caso podríamos observar el grado de sorpresa de los mismos al observar que el resultado es el mismo.

EJERCICIOS DE LA SESION 3.

Los ejercicios de esta sesión (ver sus soluciones en anexo X) estaban centrados en contenidos de cálculo diferencial.

El ejercicio 1: "Una empresa posee las siguientes funciones de ingreso y coste

$$I(x) = 20x - \frac{x^2}{4}$$

$$C(x) = x^2 + 10x - 1800$$

Siendo x el número de unidades. Se pide:

(a) Representar I(x) y C(x).

(b) Representar la función beneficio y determinar analíticamente el número de unidades que maximizan el beneficio."

Pretendía varias cuestiones: en primer lugar observar el dominio de los alumnos con las gráficas de funciones de una variable, ya que al efectuar un Plot de las funciones de ingresos y costes no aparecía ninguna gráfica: estas sólo se obtenían si se modificaba adecuadamente las escalas. En segundo lugar, el problema de optimización requería identificar adecuadamente que la función beneficio se construía en base a las función de ingresos menos función de costes, una cuestión meramente conceptual. En tercer lugar, medir el dominio de los alumnos con las definiciones de funciones en DERIVE, que tuviesen clara la diferencia entre “=” y “:=”.

En el ejercicio 2 “Calcular el área encerrada por la curva $y=\frac{\operatorname{sen}x}{x}$, x=π , x=2π e y=0”, las principales dificultades consistían en primer lugar en plantear adecuadamente la integral definida que calculaba el área pedido y en segundo lugar que una vez planteada, DERIVE al simplificarla daba sucesivamente la misma expresión “$-\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\operatorname{sen}x}{x}$”, lo cual implicaba pensar que no existe una función elemental que exprese dicha primitiva, por tanto lo propio era aproximar la expresión y se obtendría “0’433785”. Darse cuenta de esta última dificultad, exige un cierto dominio del cálculo integral.

El ejercicio 3, planteaba “optimizar la función $f(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$”, un sencillo ejercicio de optimización de una función de dos variables. Utilizando la estrategia analítica clásica a partir del gradiente y la matriz hessiana únicamente se pueden clasificar dos puntos que resultan ser mínimos pero el (0,0) no se podía clasificar. Por eso esto sugería utilizar las curvas de nivel para intentar observar cual es el comportamiento en el (0,0), que como se podría observar es un punto doble lo cual le convierte en un punto de inflexión. Alternativamente se podría experimentar con la gráfica, observando la superficie desde varios puntos de vista con el uso de DERIVE. La única dificultad que ofrecía este problema es la resolución del sistema no lineal que resultaba al igualar el gradiente al vector nulo.

El problema 4, consistía en identificar la gráfica de la función $f(x,y)=y^2-x^2$. Un ejercicio sencillo que podrían hacer todos los alumnos sin mucho esfuerzo.

El ejercicio 5 que estaba previsto plantear en esta sesión no se hizo ya que no había dado tiempo a explicar operaciones con matrices mediante DERIVE.

PROBLEMAS DE LA ÚLTIMA SESIÓN.

Se plantearon cinco problemas, tres de cálculo diferencial y dos de álgebra lineal.

El problema 1 : “Una empresa produce dos tipos de ordenadores O1 y O2 cuyos precios por unidad vienen dados por

$p_{O1}=100$
$p_{O2}=150$

La función de costes de la empresa es

$C(x,y)=40 \ln x + 20 \ln y + 20x^2 + 35 y^2$

siendo x, y las unidades de ordenador producidas de cada uno de los dos tipos. Calcular los niveles de producción que permiten alcanzar el máximo beneficio." era un problema de optimización. Sus principales dificultades consistían en plantear adecuadamente la función de beneficios y optimizarla, aunque en este caso los puntos críticos se obtenían sencillamente resolviendo dos ecuaciones en una variable. Nuevamente se trataba de un problema de optimización de una función de dos variables, ofreciendo dos estrategias de resolución, una de forma analítica con el vector gradiente y la matriz hessiana y otra mediante la gráfica y las curvas de nivel.

El problema 2: "La funciones de costes marginales de una empresa viene dada por

$c(x)=0,03x^2-2x+120$ (en miles de pesetas, siendo x las unidades diarias producidas). Calcular el incremento de los costes si se aumenta la producción diaria de 100 a 105 unidades" se resolvía fácilmente la integral definida " $\int_{100}^{105} c(x)dx$ ", es decir, el problema nuevamente consiste en interpretar adecuadamente un concepto económico, en este caso el significado de la función de COSTES MARGINALES.

El problema 3: "Determinar si la integral impropia $\int_0^\infty x^{1/2}e^{-x^3}dx$ es o no convergente, y en caso de serlo, calcular el valor", era el problema más sencillo, únicamente requería observar que se trataba de una integral impropia de una función acotada en intervalo no acotado; integrales que resuelve de forma directa DERIVE. El problema también permitía estudiar la integral por definición calculando $\lim_{b\to\infty}\int_0^b x^{1/2}e^{-x^3}dx$. La posibilidad de utilizar varias estrategias con DERIVE es totalmente posible ya que los cálculos rutinarios quedan relegados a un plano secundario.

El problema 4, era ya de álgebra lineal "Dada la matriz cuadrada $N=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 2-a & 2a-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$ a) Obtener para qué valores de "a" el rango es máximo., b) Calcular su inversa para a=0." Una de las posibilidades de resolución consistía en obtener el determinante de la matriz N, y resolver la ecuación det(N)=0. De donde se obtiene el único valor a=1, por lo que el rango de N es máximo cuando a es distinto de 1. Como N es una matriz con un parámetro, no podemos utilizar la función de utilidad "rank" contenida en el fichero de utilidades "vector.mth", situación que simplificaría al máximo el problema. Por ello requiere entender adecuadamente qué significa que una matriz N tenga rango máximo. Lo normal para resolver el primer apartado consistía en definir la matriz dada como N, utilizando el operador de asignación ":=" de DERIVE, aunque por tratarse de una matriz paramétrica podría definirse por N(a):= .. situación que probablemente no plantearán normalmente los alumnos. El apartado b), tan sólo requería habilidad con el manejo de DERIVE, de tal forma que no era necesario volver a escribir la matriz, tan solo con asignar al parámetro el valor 0 "a:=0" se podría calcular la inversa, teniendo cuidado de liberar al finalizar esta asignación "a:=".

El problema 5: "Dada la matriz $B=\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$ a) Estudiar si es diagonalizable para a=0, en cuyo caso obtener las matrices P no singular y D diagonal tales que P.D.P $^{-1}$=A.
b) Estudiar para qué valores de a, el sistema $B.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ es compatible y resuélvelo cuando sea posible". El apartado a) es un sencillo problema de diagonalización que mediante los comandos EIGENVALUES y EXACT_EIGENVALUES de DERIVE resulta sencillo de resolver. Nuevamente lo único necesario es tener claro el proceso de DIAGONALIZACIÓN de una matriz. También requiere saber que la función EXACT_EIGENVALUES es una función de utilidades contenida en el fichero VECTOR.MTH. El segundo apartado quizás un poco más complicado requería estudiar los rangos de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada. Al tratarse de matrices paramétricas el problema debía resolverse calculando determinantes y no aplicando la función RANK.

Para valorar las cuestiones señaladas anteriormente, se realizó una análisis directo de los procesos de resolución elaborados por cada uno de los grupos. Para facilitar estos análisis individuales se diseñó una hoja estandar de observaciones realizadas respecto de las hojas de trabajo elaboradas para cada uno de los grupos de alumnos, teniendo en cuenta las consideraciones particulares señaladas antes para cada uno de los ejercicios y problemas planteados.

El resultado del análisis realizado sobre cada uno de los grupos del curso impartido (el grupo 1, no está analizado porque en la última sesión no pudieron realizar la última prueba de resolución de problemas, por dificultades que surgieron con la red) fue el siguiente:

ANÁLISIS DEL GRUPO 2.

Se analizan un total de 9 subgrupos.

En general dedicaron 15 minutos en la sesión 2, 20 minutos en la sesión 3 y 30 minutos en la última sesión.

Calificación objetiva de las pruebas. Las calificaciones medias de las diferentes sesiones han sido:

Sesión 2: 7,4 Sesión 3: 4,5 Sesión 4: 3,2

Teniendo en cuenta que la prueba inicial era de contenidos básicos en DERIVE y que la última consideraba la resolución de problemas en álgebra lineal, se puede decir que DERIVE, no es el problema de contenido de estos resultados.

¿Utilizan DERIVE como sistema de notación intermedio?

En general se observa que dominan los comandos básicos del programa y saben utilizarlos, únicamente han existido algunos problemas en la modificación del número de dígitos de aproximación.

Grado de interactividad usuario con DERIVE.

No es muy grande, sobre todo a la hora de la interpretación de algunos resultados no esperables. Pero esa interpretación está muy vinculada con los conocimientos en matemáticas. De hecho, en los casos en los que no se sabía interpretar el resultado coincide con grupos en los que los alumnos o bien no se presentaron en la asignatura en el último cuatrimestre o bien obtuvieron calificaciones bajas (suspenso o aprobado). Por el contrario para los que tenían una calificación superior el grado de interactividad es superior. Aunque por ejemplo a la hora de manipular gráficas de una variable, en particular en el problema uno de la sesión 2, que requería efectuar un cambio de escala, algunos alumnos se quedan asombrados de que DERIVE no dibujaba la función. El problema no es de DERIVE, es un problema de base matemática.

Protagonismo con DERIVE. ¿usuario /creador?

En la primera sesión, son claramente usuarios, de hecho en su mayoría utilizan DERIVE para resolver la integral indefinida $\int x^6 e^6 dx$, que es una integral inmediata y para calcular el desarrollo de Taylor de orden 4 del polinomio de grado 4 planteado. Se dejan arrastrar por el programa aunque no es necesario utilizarlo. De hecho al efectuar este último ejercicio se observa como muchos repiten el proceso del cálculo de Taylor, extrañados de que diese el mismo resultado. También es destacable que en el problema del cálculo de áreas de la segunda sesión, a pesar de tener bien planteado el problema, al resolver algunos observan que se obtiene la misma integral definida $\int_{\pi}^{2\pi} -\frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ y optan por aproximar, pero muchos otros dieron este resultado.

¿Es DERIVE herramienta de experimentación?

En general no se experimenta con DERIVE, se opta por resolver por métodos clásicos sin buscar otro tipo de resultados.

¿Favorece el aprendizaje de contenidos de Matemáticas I y Matemáticas II?

No se puede constatar con los datos que hay que se favorezca el aprendizaje, creo que lo único que se puede deducir es que se refuerzan los contenidos. No hemos podido constatar una mejora de aprendizaje con los datos recogidos.

¿Elimina el esfuerzo rutinario?

Es evidente que con el poco tiempo dedicado a las sesiones, sin el uso de DERIVE no hubiesen podido resolver todos los ejercicios. En estas pruebas se observa que la dificultad de los ejercicios y problemas no son los cálculos, que en este caso están reemplazados por el ordenador, la dificultad reside en la falta de claridad de muchos conceptos.

¿Aumenta estrategias de resolución de problemas?

No en general, todos los alumnos resuelven los problemas utilizando la estrategia básica que han usado para resolver los mismos problemas con lápiz y papel. Únicamente, se observa un pequeño indicio de estrategias alternativas en los problemas de optimización cuando utilizan en algunos casos además del método analítico el método gráfico, es decir, representación gráfica y uso de curvas de nivel; aprovechando las posibilidades gráficas de DERIVE. En todo caso, en 4 días es muy difícil conseguir este objetivo.

¿Es DERIVE una barrera adicional para aprender Matemáticas?

No, de hecho sólo existieron algunos pequeños problemas propios de DERIVE, en la segunda sesión, pero en el resto se observa que los errores cometidos en la resolución no provienen de DERIVE, es decir, no surgen porque DERIVE les impida manipular sus conceptos. Más bien, resulta al contrario, no tienen claridad de conceptos y por tanto DERIVE no les sirve para ese propósito: DERIVE no lo hace todo.

¿Permite atención a la diversidad?

En este grupo estudiado, los problemas base de cada sesión, los realizan todos los grupos. Solamente algunos consiguen hacer algo más. Por tanto, podemos decir que sí permite una atención a la diversidad.

¿Aumenta la motivación?

Tal y como se ha comentado, los alumnos emplearon todo el tiempo previsto para la resolución de los ejercicios, incluso en algunos casos algo más. Esto es indicativo del grado de motivación. Al menos DERIVE les ha brindado la POSIBILIDAD de resolver los problemas, quizás por ser un método novedoso, o quizás porque decubrieron en el programa un aliciente en la resolución de problemas.

Algunos errores cometidos con DERIVE:

En algunos casos sobre todo en la primera sesión, no supieron editar adecuadamente el número e, introduciéndole como una variable y no con la secuencia ALT-E. “ê”.

No saben cambiar el número de dígitos de aproximación.

Cuando efectúan el cambio de dígitos de aproximación, efectúan el cambio de Precisión modificándole a modo aproximado, lo cual les generó algunos errores en el cálculo de integrales impropias.

Errores y lagunas de CONCEPTOS MATEMÁTICOS:

No se conocía el significado del máximo común divisor.

En el problema 1 de la sesión 4, no saben plantear la función de beneficios.

No se entiende el concepto de COSTES MARGINALES, se interpretan como costes totales y por tanto se produce un error en el resultado.

No dominan la resolución de sistemas no lineales por el método de sustitución, necesario para obtener puntos críticos en funciones de dos variables.

No saben optimizar una función de una variable, ya que igualan a cero la función inicial.

No realizaron el problema 5 de la sesión 4.

ANÁLISIS DEL GRUPO 3.

Se analizan un total de 18 subgrupos.

En general dedicaron 20 minutos en la sesión 2, 30 minutos en la sesión 3 y 40 minutos en la última.

Calificación objetiva de las pruebas. Las calificaciones medias de las diferentes sesiones han sido:

Sesión 2: 8,32 Sesión 3: 3,57 Sesión 4: 5,21

Por estos datos parece que, en general, los contenidos de Matemáticas I se tienen un poco olvidados lo cual provocó que en la sesión 3, dedicada integramente a estos contenido, se haya obtenido en media una nota muy inferior a la prueba final en la que se manejaban contenidos de Matemáticas II, asignatura que se está desarrollando actualmente.

¿Utilizan DERIVE como sistema de notación intermedio?

Se observa que los alumnos entienden y manejan los comandos básicos del programa. Los errores más comunes han surgido cuando tenían que modificar los dígitos de aproximación, ya que además de modificar esta opción también modificaron el tipo de precisión del comando Simplify al modo aproximado. También se han provocado ciertos errores en la definición de funciones, confundiendo el operador "=" con el operador de asignación ":=".

Grado de interactividad usuario con DERIVE.

El grado de interactividad es bastante bueno ya que interpretan en su mayoría bien las expresiones que devuelve DERIVE incluso consiguen manipular adecuadamente los cambios de escala en las gráficas de funciones de una variable. Además introducen bien las expresiones. Los problemas que han surgido a este respecto se limitan a lagunas de conceptos matemáticos.

Protagonismo con DERIVE. ¿usuario /creador?

En la primera sesión, son claramente usuarios, de hecho en su mayoría utilizan DERIVE para resolver la integral indefinida $\int x^6 e^6 dx$, que es una integral inmediata, y para calcular el desarrollo de Taylor de orden 4 del polinomio de grado 4 planteado. Se dejan arrastrar por el programa aunque no es necesario utilizarlo. Respecto de estas últimas cuestiones resulta en algunos casos un poco extraño que realicen este cálculo previo pues tienen calificaciones bastante buenas en Matemáticas I, lo cual nos induce a pensar que en esos casos realizan el cálculo como mera comprobación. Después de la segunda sesión se va observando una evolución positiva en cuanto a que comienzan a adquirir un cierto protagonismo respecto del programa.

Nuevamente cuando algunos subgrupos intentan simplificar $\int_{\pi}^{2\pi} -\frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$, se dan cuenta que se obtiene el mismo resultado y optan por aproximar, aunque muchos otros dieron este resultado como solución, no sé si porque así lo daba DERIVE o bien porque se dan cuenta que la primitiva expresable con funciones elementales.

¿Es DERIVE herramienta de experimentación?

En general no se experimenta con DERIVE, se opta por resolver por métodos clásicos sin buscar otro tipo de resultados.

¿Favorece el aprendizaje de contenidos de Matemáticas I y Matemáticas II?

No se puede constatar con los datos que se favorezca el aprendizaje, creo que lo único que se puede deducir es que se refuerzan los contenidos. No hemos podido constatar una mejora de aprendizaje con los datos recogidos. Ha habido un caso en el que resulta extraño que habiendo obtenido una Matrícula de Honor en la Asignatura "Matemáticas I" no haya sabido resolver algunos problemas de las sesiones 3 y 4 (en estas sesiones obtiene como notas 6 y 7 respectivamente).

¿Elimina el esfuerzo rutinario?

Es evidente que con el tiempo dedicado a las sesiones, sin el uso de DERIVE no se hubiesen podido resolver todos los ejercicios. En estas pruebas se observa que la dificultad de los ejercicios y problemas no son los cálculos, que en este caso están reemplazados por el ordenador, la dificultad reside en la falta de claridad de muchos conceptos matemáticos.

¿Aumenta estrategias de resolución de problemas?

No en general, todos los alumnos resuelven los problemas utilizando la estrategia básica que han usado para resolver los mismos problemas con lápiz y papel. Únicamente, se observa un pequeño indicio de estrategias alternativas en los problemas de optimización cuando utilizan, en algunos casos, además del método analítico, el método gráfico; es decir, representación gráfica y uso de curvas de nivel, aprovechando las posibilidades gráficas de DERIVE. En todo caso, en 4 días es muy difícil conseguir este objetivo.

¿Es DERIVE una barrera adicional para aprender Matemáticas?

No, los errores cometidos en la resolución no provienen de DERIVE, surgen de errores de tipo conceptual. Existe un caso extraño de un alumno que, además prefirió trabajar solo, tuvo Matrícula de Honor en Matemáticas I y sin embargo en la sesión 3 dedicada exclusivamente a Matemáticas I no resolvió bien todos los problemas (obtiene un 6 en la prueba objetiva).

¿Permite atención a la diversidad?

Los problemas básicos de cada sesión fueron realizados por todos los grupos. Para el resto de problemas la resolución fue dependiendo de capacidades. Por ejemplo los dos grupos de alumnos que obtuvieron Sobresaliente en Matemáticas I, consiguieron resolver todos los ejercicios en el tiempo establecido. Y alumnos con calificaciones de aprobado, resolvieron fundamentalmente lo básico. En consecuencia podríamos afirmar que si permite atención a la diversidad.

¿Aumenta la motivación?

Tal y como se ha comentado, los alumnos emplearon todo el tiempo previsto para la resolución de los ejercicios, incluso en algunos casos algo más, únicamente algunos grupos dejaron de realizar algunas pruebas argumentando que tenían prisa.

Lo anterior puede ser indicativo del grado de motivación. Si añadimos al programa el haber resuelto los ejercicios y problemas en Grupo, posiblemente se pueda afirmar que efectivamente se aumenta la motivación por la resolución de ejercicios y problemas matemáticos.

Algunos errores cometidos con DERIVE:

En la primera sesión algunos alumnos modificaron el modo de precisión del comando Simplify (cambiándolo al modo aproximado) a la vez que modificaban los dígitos de aproximación. Esto les ha provocado errores al estudiar la convergencia de la integral impropia $\int_0^1 \frac{x-2}{x^2}dx$, ya que obtenían como resultado -9.034x10^{-20} e interpretaban que era un valor finito, lo cual es falso.

Algunos alumnos no saben distinguir entre "y=0" y la expresión "Y:=0".

Se introduce a veces mal alguna expresión como por ejemplo introducir "$\frac{x^1}{2}$" en vez de "$x^{1/2}$".

En algunas ocasiones intentan utilizar funciones contenidas en ficheros de utilidades sin cargarlos previamente (función rank).

Errores y lagunas de CONCEPTOS MATEMÁTICOS:

Al calcular el área del ejercicio 2 sesión 3 no solo plantean mal la integral definida sino que además, obtienen un valor ¡negativo! y no se cuestionan un posible error.

Confunden el m.c.m. con el m.c.d.

No se conocía el significado del máximo común divisor.

Algunos alumnos no entienden el concepto de COSTES MARGINALES, se interpretan como costes totales y por tanto se produce un error en el resultado.

En el problema 1 de la sesión 4, no saben plantear la función de beneficios.

No dominan la resolución de sistemas no lineales por el método de sustitución, necesario para obtener puntos críticos en funciones de dos variables.

ANÁLISIS DEL GRUPO 4.

Se analizan un total de 15 subgrupos.

En general dedicaron 15 minutos en la sesión 2, 20 minutos en la sesión 3 y 40 minutos en la última sesión.

Calificación objetiva de las pruebas. Las calificaciones medias de las diferentes sesiones han sido:

Sesión 2:7,86 Sesión 3:5,13 Sesión 4: 3,13

Con estos datos se observa que en la primera prueba (que era de contenidos básicos acerca del uso de DERIVE) existe un cierto dominio, mientras que en las siguientes (que exigían un dominio conceptual de los contenidos matemáticas de las asignaturas de cálculo diferencial y álgebra lineal), se produce un descenso notable de las calificaciones objetivas. Esto parece indicar que existe un bajo nivel de contenidos matemáticos.

¿Utilizan DERIVE como sistema de notación intermedio?

En general se observa un cierto dominio de los comandos básicos del programa, aunque han existido algunos problemas en la primera sesión pues se han modificado a la vez el número de dígitos de aproximación y el modo de aproximación de Simplify. Además, algunos subgrupos han tenido difitultades en distinguir el significado de "x=π" y "x:=π".

Grado de interactividad usuario con DERIVE.

En la mayoría de los casos el grado de interacción es bueno ya que corrigen errores, e interpretan adecuadamente las expresiones que lanza DERIVE. Existen algunos casos aislados en los que el grado de interactividad es regular, sobre todo a la hora de la interpretación de algunos resultados no esperables. El problema no es de DERIVE, es un problema de base matemática.

Es de resaltar que en el cálculo del m.c.d., muchos alumnos utilizaron la función predefinida de DERIVE "gcd" que NO habíamos comentado en clase. Es de suponer, (dado que en su mayoría los alumnos no tenían conocimientos previos de DERIVE), que ellos mismos encontrasen esta función por medio de la ayuda de DERIVE.

Protagonismo con DERIVE. ¿usuario /creador?

En la primera sesión, son claramente usuarios, de hecho todos los grupos utilizan DERIVE para resolver la integral indefinida $\int x^6 e^6 dx$, que es claramente inmediata y para calcular el desarrollo de Taylor de orden 4 del polinomio de grado 4 planteado. Se dejan arrastrar por el programa aunque no es necesario utilizarlo. De hecho al efectuar este último ejercicio se observa como muchos repiten el proceso del cálculo de Taylor, extrañados de que diese el mismo resultado.

También es destacable que en el problema del cálculo de áreas de la segunda sesión, aunque plantean mal la integral definida luego no rectifican ni se extrañan de que el resultado de la aproximación sea un valor negativo. En este mismo problema, los que plantean bien la integral definida, al simplificarla, observan que se obtiene la misma integral definida $\int_{\pi}^{2\pi} -\frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ y optan por aproximar.

¿Es DERIVE herramienta de experimentación?

En general no se experimenta con DERIVE, en los casos en que se resuelve el problema, se opta por utilizar los métodos clásicos sin buscar otro tipo de alternativas experimentales.

¿Favorece el aprendizaje de contenidos de Matemáticas I y Matemáticas II?

No se puede constatar con los datos que hay que se favorezca el aprendizaje, creo que lo único que se puede deducir, comparando las notas obtenidas en Matemáticas I en Febrero y las calificaciones de las pruebas objetivas, es que se refuerzan los contenidos, ya que se mantienen las calificaciones. No hemos podido constatar una mejora de aprendizaje con los datos recogidos. Existen algunos casos resaltables en los que la nota en Matemáticas I fue de aprobado ó suspenso y sin embargo obtienen como calificación objetiva en las sesiones 3 y 4 una nota media de 6, aunque no es significativo.

¿Elimina el esfuerzo rutinario?

Es evidente que con el poco tiempo dedicado a las sesiones, sin el uso de DERIVE no hubiesen podido resolver todos los ejercicios. En estas pruebas se observa que la dificultad de los ejercicios y problemas no son los cálculos, la dificultad reside en la falta de claridad de algunos conceptos matemáticas.

¿Aumenta estrategias de resolución de problemas?

No en general, todos los alumnos resuelven los problemas utilizando la estrategia básica que han usado para resolver los mismos problemas con lápiz y papel. Únicamente, se observa un pequeño indicio de estrategias alternativas en los problemas de optimización cuando utilizan en algunos casos además del método analítico el método gráfico, es decir, representación gráfica y uso de curvas de nivel; aprovechando las posibilidades gráficas de DERIVE. En todo caso, en 4 días es muy dificil conseguir este objetivo.

¿Es DERIVE una barrera adicional para aprender Matemáticas?

No, ya que en general los errores que se cometen son de tipo conceptual: desconocen el significado del m.c.d., no entienden el significado de los "costes marginales",.. es decir, no tienen claridad de conceptos y por tanto DERIVE no les sirve para ese propósito. En dos casos concretos posiblemente los resultados obtenidos con DERIVE les hayan podido despistar en la resolución del problema, en concreto en la resolución del sistema no lineal que se plantea al intentar encontrar los puntos críticos del problema 3 de la sesión 3.

¿Permite atención a la diversidad?

Los problemas básicos de cada sesión han sido realizados por todos los subgrupos. Solamente algunos consiguen hacer algo más. Por tanto, podemos decir que sí permite una atención a la diversidad, aunque ningun subgrupo consigue realizar bien todos los ejercicios.

¿Aumenta la motivación?

Los alumnos emplearon en su mayoría al más del tiempo previsto para la resolución de los ejercicios, lo cual puede ser un indicador del grado de motivación. También puede haber influido el trabajo en grupo realizado frente al ordenador. Es de destacar que algunos alumnos no tuvieron tiempo para resolver los problemas.

Algunos errores cometidos con DERIVE:

En la primera sesión algunos alumnos modificaron el modo de precisión del comando Simplify (cambiándolo al modo aproximado) a la vez que modificaban los dígitos de aproximación. Esto les ha provocado errores al estudiar la convergencia de la integral impropia $\int_0^1 \frac{x-2}{x^2}dx$, ya que obtenían como resultado -9.4,...x10^{10} e interpretaban que era un valor finito, lo cual es falso.

Algunos subgrupos no efectúan un cambio de escala adecuado para poder ver bien las gráficas de las funciones del problema 1, sesión 3.

Algunos alumnos no saben distinguir entre "y=0" y la expresión "Y:=0", es decir el significado de una recta y de una asignación de un valor a una variable.

En algunas ocasiones intentan utilizar funciones contenidas en ficheros de utilidades sin cargarlos previamente (función rank).

Errores y lagunas de CONCEPTOS MATEMÁTICOS:

Al calcular el área del ejercicio 2 sesión 3 no solo plantean mal la integral definida sino que además, obtienen un valor ¡negativo! y no se cuestionan un posible error.

Confunden el m.c.m. con el m.c.d.

No se conocía el significado del máximo común divisor.

Algunos alumnos no entienden el concepto de COSTES MARGINALES, se interpretan como costes totales y por tanto se produce un error en el resultado.

En el problema 1 de la sesión 4, no saben plantear la función de beneficios.

No dominan la resolución de sistemas no lineales por el método de sustitución, necesario para obtener puntos críticos en funciones de dos variables.

Se saben calcular los puntos críticos de una función de dos variables pero luego no se saben clasificar.

ANÁLISIS DEL GRUPO 5.

Se analizan un total de 10 subgrupos.

En general dedicaron minutos en la sesión 2, minutos en la sesión 3 y minutos en la última.

Calificación objetiva de las pruebas. Las calificaciones medias de las diferentes sesiones han sido:

Sesión 2: 9,2 Sesión 3: 4 Sesión 4: 3

Obsérvese la diferencia de puntuación entre la primera prueba de la sesión 2, en la que se manipulaban contenidos básicos en derive, respecto de las dos últimas con contenidos explícitos de las asignaturas Matemáticas I y Matemáticas II..

Esta observación nos puede conducir a considerar que DERIVE no es el que genera los malos resultados, parecen ser mas bien de contenido exclusivamente matemático.

¿Utilizan DERIVE como sistema de notación intermedio?

En general se observa que dominan los comandos básicos del programa y saben utilizarlos, únicamente han existido algunos problemas en la comprensión del operador de asignación ":=", ya que algún subgrupo no ha sabido distinguir entre "x=π" y "x:=π".

Grado de interactividad usuario con DERIVE.

No es muy bueno, sobre todo a la hora de la interpretación de algunos resultados no esperables. Pero esa interpretación está muy vinculada con los conocimientos en matemáticas y con la estrategia de resolución empleada.

Hay un ejemplo a este respecto, de un subgrupo que intenta calcular la matriz inversa de una matriz dada, y el resultado que ofrece DERIVE es $+\infty$, sin embargo no se plantea que el resultado esté mal, directamente dan la respuesta como válida.

Un dato positivo, es que algun subgrupo consigue calcular el m.c.d. utilizando la función predefinida de DERIVE "gcd" que NO SE HABÍA EXPLICADO; es de suponer que utilizaron adecuadamente la ayuda para encontrar dicha función.

Protagonismo con DERIVE. ¿usuario /creador?

En la primera sesión, se dejan llevar por el programa, de hecho TODOS LOS SUBGRUPOS utilizaron DERIVE para resolver la integral indefinida $\int x^6 e^6 dx$, que es una integral inmediata, así como para calcular el desarrollo de Taylor de orden 4 del polinomio de grado 4 planteado. Se dejan arrastrar por el uso del programa aunque no sea necesaria su utilización. De hecho al efectuar este último ejercicio se observa como muchos repiten el proceso del cálculo de Taylor, extrañados de que de el mismo resultado.

También es destacable que en el problema del cálculo de áreas de la segunda sesión, a pesar de tener bien planteado el problema, al resolver algunos observan que se obtiene la misma integral definida $\int_{\pi}^{2\pi} -\frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ y optan por aproximar, pero muchos otros dieron este resultado.

¿Es DERIVE herramienta de experimentación?

En general no se experimenta con DERIVE, se opta por resolver por métodos clásicos sin buscar otro tipo de resultados.

¿Favorece el aprendizaje de contenidos de Matemáticas I y Matemáticas II?

No se puede constatar con los datos que hay que se favorezca el aprendizaje, creo que lo único que se puede deducir es que se refuerzan los contenidos. No hemos podido constatar una mejora de aprendizaje con los datos recogidos.

¿Elimina el esfuerzo rutinario?

Es evidente que con el poco tiempo dedicado a las sesiones, sin el uso de DERIVE no hubiesen podido resolver todos los ejercicios. En estas pruebas se observa que la dificultad de los ejercicios y problemas no son los cálculos, que en este caso están reemplazados por el ordenador, la dificultad reside en la falta de claridad de muchos conceptos.

¿Aumenta estrategias de resolución de problemas?

No en general, todos los alumnos resuelven los problemas utilizando la estrategia básica que han usado para resolver los mismos problemas con lápiz y papel. Únicamente, se observa un pequeño indicio de estrategias alternativas en los problemas de optimización cuando utilizan en algunos casos además del método analítico el método gráfico, es decir, representación gráfica y uso de curvas de nivel; aprovechando las posibilidades gráficas de DERIVE. En todo caso, en 4 días es muy difícil conseguir este objetivo.

¿Es DERIVE una barrera adicional para aprender Matemáticas?

No, de hecho sólo existieron algunos pequeños problemas propios de DERIVE, en la segunda sesión, pero en el resto se observa que los errores cometidos en la resolución no provienen de DERIVE, es decir, no surgen porque DERIVE les impida manipular sus conceptos. Más bien, resulta al contrario, no tienen claridad de conceptos y por tanto DERIVE no les sirve para ese propósito: DERIVE no lo hace todo.

¿Permite atención a la diversidad?

En este grupo estudiado, los problemas base de cada sesión, los realizan todos los grupos. Solamente algunos consiguen hacer algo más. Por tanto, podemos decir que sí permite una atención a la diversidad. Ningún subgrupo consigue realizar

¿Aumenta la motivación?

Tal y como se ha comentado, los alumnos emplearon todo el tiempo previsto para la resolución de los ejercicios, incluso en algunos casos algo más. Esto es indicativo del grado de motivación. Al menos DERIVE les ha brindado la POSIBILIDAD de resolver los problemas, quizás por ser un método novedoso, o quizás porque descubrieron en el programa un aliciente en la resolución de problemas.

Algunos errores cometidos con DERIVE:

Cuando efectúan el cambio de dígitos de aproximación, efectúan el cambio de Precisión modificándole a modo aproximado, lo cual les generó algunos errores en el cálculo de integrales impropias.

Errores y lagunas de CONCEPTOS MATEMÁTICOS:

No se conocía el significado del máximo común divisor.

No se entiende el concepto de COSTES MARGINALES, se interpretan como costes totales y por tanto se produce un error en el resultado.

No dominan la resolución de sistemas no lineales por el método de sustitución, necesario para obtener puntos críticos en funciones de dos variables.

No saben optimizar una función de una variable, ya que igualan a cero la función inicial.

Dan como resultado de la inversa de una matriz el valor $+\infty$.

En general no resolvieron el problema 5 de la última sesión.

d) <u>Observaciones y notas de campo</u>.

1. <u>SESIÓN.</u>

Temas impartidos:

GRUPO 1. Temas impartidos: Hasta página 20 de apuntes, es decir casi todo Capítulo 1

GRUPO 2. Temas impartidos: Hasta página 21 de apuntes es decir casi todo Capítulo 1

GRUPO 3. Temas impartidos: Hasta página 23. Es decir se ha completado lo previsto. Este grupo ha resultado más cómodo que los 1,2 y 5. Quizás pueda haber sido porque este grupo forma parte del segundo turno, y por tanto me he centrado más en los temas de interés del alumno y he ido más rápido en aquellos que resultan más fácil.

GRUPO 4. Temas impartidos: Se ha completado el desarrollo de los capítulo 1 y 2. Es decir hasta la página 23.

GRUPO 5. Temas impartidos: Hasta página 20 de apuntes es decir casi todo Capítulo 1

Observaciones:

Parece que ha resultado buena la acogida del curso, ya que desde el primer momento ha habido buena disposición a rellenar la encuesta inicial. Ha habido alguna reticencia sobre el test inicial. Ya he comentado claramente que era una prueba para medir la habilidad computacional actual, no vale para el exámen.

Cuando se han introducido las ventanas de 2D y 3D y se han propuesto ejemplos para explicar su funcionamiento los alumnos han mostrado una enorme expectación en las representaciones de funciones de una y dos variables.

La dinámica de las clases de dar explicación y práctica a la vez, exigía algunas veces llamar la atención a los alumnos. Los dos últimos grupos (3 y 4) resultan inicialmente los mejores, quizás en parte porque tengo más claro lo que es esencial para los alumnos.

Los apuntes para esta sesión son imprescindibles si se quiere ir a un ritmo adecuado, además, cuando un alumno se perdía, muchas veces conectaba con el resto siguiendo los apuntes.

Al finalizar la sesión percibo que va a ser difícil contar todo el material, por lo que me he propuesto recortar las próximas prácticas reduciéndome a lo fundamental. Además he pensado en agilizar la edición de expresiones, facilitando unos ficheros que contenga las expresiones a utilizar. Creo que con esto conseguiré avanzar más.

Respecto al trabajo en grupo, observo que hay un elevado grado de comunicación entre los grupos de trabajo que se han creado de forma espontánea.

En este primer día he recibido el apoyo de una profesora del Departamento que me ha ayudado a resolver las dudas que han surgido sobre el programa.

2. SESIÓN.

Temas impartidos:

GRUPO 1: Sólo ha dado tiempo a desarrollar todo el capítulo 3 y en el capítulo 4 no ha dado tiempo a desarrollar los dos últimos puntos que estaban señalados.

GRUPO 2: Se han estudiado los comandos básicos para el cálculo diferencial, y en el análisis de funciones de una variable no se han podido realizar las prácticas relacionadas con las gráficas de transformaciones de funciones ni las representaciones en polares y paramétricas. Como con este grupo es con el que vamos más avanzados, todo hace suponer que estos dos temas no se consideren en los grupos restantes.

GRUPO 3: Se han tratado el capítulo 3 y el capítulo 4, salvo los dos últimos puntos.

GRUPO 4: Se han impartido capítulos 3 y 4, y ha dado tiempo a realizar dos prácticas sobre los puntos relacionadas con gráficas de transformaciones de funciones y representación en polares. También ha dado tiempo ha realizar la introducción a la Integral de Riemann. Por la experiencia con este grupo, considero que no desarrollaremos esta práctica en el resto de grupos.

GRUPO 5: Se han impartido capítulos 3 y 4 salvo los dos últimos puntos, como ocurrió con los grupos 1 y 3.

Observaciones:

Las preguntas que he recibido antes de realizar la prueba de sesión han sido fundamentalmente del manejo del programa.

La práctica de la sesión, como era de contenidos básicamente de DERIVE creo que la están realizando bien. Aunque he recibido preguntas como ¿qué es el máximo comun divisor de dos números? . También observo que en el ejercicio 5 que pide el desarrollo de Taylor de orden 4 de un polinomio de grado 4, casi todos se lanzan a aplicar con derive su desarrollo. Lo mismo sucede con la integral inmediata del ejercicio 3. Ambos ejemplos se pusieron pensando en que los alumnos se darían cuenta que no es necesario usar el programa, sin embargo pocos son los que no lo han hecho según he percibido.

Durante el tiempo dedicado a la realización de los ejercicios ha habido un enorme grado de comunicación entre los alumnos de cada grupo. Se observa un elevado grado de motivación, de hecho se han quedado algunos subgrupos unos minutos más para acabar los ejercicios en casi todos los turnos.

Otra observación importante, es que me parece que en el grupo 1 y 2, el número de asistencias han descendido, me pregunto cual habrá sido el motivo, ¿no les habrá gustado la primera sesión? ¿les habrá coincidido con algún exámen?. Por otro lado con los grupos 3 y 4 la situación resulta contraria , han aumentado el número de alumnos.

3. SESION.

Temas impartidos:

GRUPO 1: Sólo ha dado tiempo a desarrollar las dos primeras partes, no hemos podido ver nada de álgebra lineal.

GRUPO 2: Lo mismo que con el grupo 1, sólo he desarrollado las dos partes correspondientes a Cálculo Integral y a Funciones de Varias Variables. Igual que en el grupo anterior, noto deficiencias conceptuales que por eso han impedido realizar con mayor agilidad las prácticas de estas partes.

GRUPO 3: Se han impartido las dos partes sobre cálculo integral y funciones de varias variables.

GRUPO 4: Similar al grupo 3.

GRUPO 5: Similar a anteriores.

Observaciones:

Creo que en esta sesión, que era más de conceptos matemáticos, los alumnos se han encontrado perdidos en algunos momentos. Quizás creían que DERIVE lo hiciese todo. A pesar de que no se ocupan todos los ordenadores, en esta sesión planteé que se repartieran los alumnos entre los diversos puestos aunque fuese de forma individual, y optaron de forma autónoma por mantener el grupo. No sé si por miedo a enfrentarse sólos al ordenador o porque en el grupo se sienten más arropados. Parece que ambas pueden ser ciertas. Noto ciertas actitudes negativas, en cuanto a que trabajan demasiado mecánicamente los problemas, no piensan si es útil el empleo del programa o cómo utilizarlo. Necesitarían refrescar conceptos antes de trabajar con prácticas reales. El trabajo en grupo resulta altamente positivo, se observa participación activa y mucho debate en torno a la búsqueda de la solución. He observado poca seguridad en los conceptos matemáticas, parece que al tener que realizar la resolución de una forma distinta, como si el concepto fuese distinto. La actitud frente a las gráficas ha sido altamente motivadora. Sobre motivación parece que los alumnos responden bien. Es significativo que la sesión se ha tenido que ampliar 15 minutos por retrasos y no ha habido problemas por parte del alumnado.

El número de alumnos en el grupo 2 ha disminuido en 3 personas, pero parece ser que por problemas de horario.

La motivación parece importante. El trabajo en grupo les ha permitido discutir con detenimiento los problemas que se planteaban.

Ante el problema de experimentación de cálculo integral se ha producido una gran curiosidad por el hecho de poder demostrar un teorema con el ordenador. Se ve un bajo conocimiento de los conceptos. Parece que se estuviesen contando cosas totalmente nuevas. No sé si es porque se resuelven o manipulan con un sistema de notación distinto (DERIVE) o porque no recuerdan lo que se vió. Supongo que influyen ambos aspectos. Se nota que se les pasa el tiempo sin demasiado esfuerzo, de hecho al plantearles la prueba de esta sesión se han quedado muchos hasta media hora más para intentar resolver los problemas. Les ha motivado bastante el hecho de resolver problemas con DERIVE, en esta sesión. Aunque el comentario de muchos al terminar la sesión es que, no me ha salido casi nada pero he aprendido bastante.

Un problema que he observado es que se guían demasiado por los apuntes y no piensan demasiado lo que hacen.

También me doy cuenta que el problema de la asignatura no estriba en las habilidades computacionales como es el cálculo de derivadas parciales o el cálculo de integrales, su problema reside en los planteamientos, es más en los CONCEPTOS matemáticos que se dominan poco y se realizan quizás los problemas de forma automática.

En el grupo 4, que es el más avanzado ha sucedido algo similar, pero el grado de motivación es más grande que en el resto de grupo, esto lo he notado porque después de haber estado 2 horas y media , (casi una hora para los ejercicios) algunos alumnos se han quedado porque deseaban saber cómo resolver el primer problema relacionado con la optimización.

4. SESIÓN.

Temas impartidos:

GRUPO 1: Operaciones algebraicas básicas , sistemas y diagonalización

GRUPO 2: Idem

GRUPO 3: Idem

GRUPO 4: Idem

GRUPO 5: Idem.

En general han sido muchos los contenidos desarrollados pero hubieran faltado unas 4 horas más para dedicar más tiempo a la parte de álgebra lineal.

Observación:

Esta sesión ha resultado muy interesante porque en el poco espacio de tiempo que hemos tenido, los alumnos han podido experimentar con las principales rutinas algebraicas empleadas en el álgebra lineal : cálculo de determinantes, rangos, resolución de sistemas. Ha motivado bastante el hecho de poder realizar estos cálculos tediosos en poco tiempo. La parte de DIAGONALIZACIÓN ha resultado altamente satisfactoria, porque a pesar de que estaban desarrollando el tema, lo han comprendido de forma sencilla. Respecto a la resolución de problemas, nuevamente a pesar de tener ordenadores libres muchos deseaban seguir con sus grupos. He insistido en que trabajasen si podía ser de forma individual para enfrentarse solos con los problemas. Con el grupo1 que es el menos numeroso, he forzado al trabajo individual, aunque creo que quizás debiera haber dejado los agrupamientos que existían. Como es el primer grupo que ha terminado, creo que esto me servirá para los cuatro grupos restantes. En general no tenían prisa por irse y por terminar, de hecho han dedicado cerca de 15 minutos más en su mayoría. Y hubiesen dedicado más pero he tenido que solicitar la finalización de las sesión porque tenía otro curso a continuación. Realmente hubieran sido necesarias al menos 4 horas más, para los objetivos planteados. Porque creo que es en esta sesión cuando ha habido resolución de problemas cuando he visto mayor entusiasmo por el uso del programa.

Serían necesarias sesiones que tuviesen sólo una parte teórica (por ejemplo 1 hora) y otra parte práctica 1 hora de experimentación guiada por el profesor.

Creo que el hecho de haber planteado pequeños exámenes al finalizar las sesiones han provocado mayor motivación.

El trabajo en grupo creo que está siendo satisfactorio.

El ambiente de clase es distendido, preguntan sin ningún miedo.

e) Encuesta final.

Los resultados de la encuesta final para cada uno de los grupos se muestran en las hojas siguentes. Únicamente hay que señalar que con el grupo 1 no hemos podido realizar la encuesta por un problema de horarios.

Como resúmen a los resultados de la encuesta se pueden citar los siguientes:

1. La relación de contenidos del curso con la asignaturas Matemáticas I y II:

Las medias obtenidas en cada grupo han sido:

Grupo 2: 8,25 Grupo 3: 7,77 Grupo 4: 7,55 Grupo 5: 8

De donde podemos deducir una notable relación entre el curso con las asignatura.

2. ¿Se han aprendido mejor algunos de los contenidos de estas asignaturas?

Las medias obtenidas en cada grupo han sido:

Grupo 2: 6 Grupo 3:5,85 Grupo 4:5,5 Grupo 5:5,5

3. Contenidos que se considere han sido objeto de mejora de aprendizaje.

Las respuestas más frecuentes se han dirigido a los contenidos de diagonalización de matrices, cálculo de autovalores y autovectores.

4. Interés práctico del curso

Las medias obtenidas en cada grupo han sido:

Grupo 2: 7,75 Grupo 3: 6,94 Grupo 4: 7.14 Grupo 5: 7,63

5. Razones más frecuentes que justifican el interés práctico del curso.

Resulta interesante y curioso el uso del ordenador en matemáticas; es práctico, cómodo y ofrece rapidez de cálculos y fácil de utilizar.

6. Valoración del manejo del programa.

Las medias obtenidas en cada grupo han sido:

Grupo 2: 6,93 Grupo 3: 6,94 Grupo 4: 6,96 Grupo 5: 6,89

7. Razones más frecuentes que justifican el manejo del programa.

Es sencillo, rápido y fácil de manejar

8. Valoración del uso del ordenador en el aula de Matemáticas:

Las medias obtenidas en cada grupo han sido:

Grupo 2: 7,35 Grupo 3: 7,2 Grupo 4: 7,5 Grupo 5: 8,28

9. Aspectos más positivos de uso de DERIVE en Matemáticas.

Rapidez y claridad; ahorra tiempo en el cálculo de operaciones costosas; facilita la resolución gráfica de problemas; visualización de gráficas de funciones de una y dos variables; hace amenos y entretenidos los problemas de matemáticas.

10. Aspectos más negativos del uso de DERIVE en Matemáticas.

Evita agilidad mental para los cálculos, puesto que los resuelve automáticamente; no sabemos el mecanismo por el que se ha llegado a la solución; debe conocerse la teoría antes; como te da el resultado, es fácil olvidar el procedimiento y los conceptos básicos.

11. Valoración de los apuntes utilizados en el curso.

Las medias obtenidas en cada grupo han sido:

Grupo 2: 8,61 Grupo 3: 8,54 Grupo 4: 8,61 Grupo 5: 8,41

12. Valoración de la claridad de exposición del profesorado.

Las medias obtenidas en cada grupo han sido:

Grupo 2: 8,38 Grupo 3: 8,5 Grupo 4: 8,77 Grupo 5: 8,33

13. Valoración de la preparación técnica del profesorado.

Las medias obtenidas en cada grupo han sido:

Grupo 2: 8,84 Grupo 3: 8,47 Grupo 4: 8,94 Grupo 5: 9

14. Valoración general del profesorado.

Las medias obtenidas en cada grupo han sido:

Grupo 2: 8,38 Grupo 3: 8,29 Grupo 4: 8,82 Grupo 5: 8,54

15. Principales razones de la valoración general del profesorado.

Sencillez y claridad de las explicaciones; paciencia e interés porque los alumnos aprendan; los apuntes son claros y útiles; dominio de la materia; experiencia en el uso del programa; no se han hecho las clases largas.

16. Valoración del trabajo en grupo frente al ordenador.

Las medias obtenidas en cada grupo han sido:

Grupo 2: 7,53 Grupo 3: 7,88 Grupo 4: 7,89 Grupo 5: 8

17. Principales razones de la valoración del trabajo en grupo frente al ordenador.

Es más entretenido, y la cooperación hace más fácil el entendimiento de algunas cuestiones y la realización de pruebas; fomenta la participación; siempre se aprende algo de los demás; es muy enriquecedor para conocer a las personas de tu entorno.

18. Valoración general de la organización del curso.

Las medias obtenidas en cada grupo han sido:

Grupo 2: 8 Grupo 3: 7,55 Grupo 4: 7,66 Grupo 5: 7,58

19. Aspectos más positivos de la organización del curso.

Los apuntes; es muy positivo trabajar con compañeros en la resolución de ejercicios; se obtiene una visión general del programa.

20. Aspectos más negativos de la organización del curso.

Se ha hecho corto, serían necesarias más horas; poco tiempo y muchos conceptos; las clases deberían haber sido más seguidas y no tan espaciadas semanalmente;

21. Sugerencias.

Que el curso tuviese más horas; haber realizado el curso antes: en marzo o abril para que no se junte con los exámenes.

Los resúmenes de los datos obtenidos en cada grupo se pueden ver en el apartado 4.5.

f) Resultados de las encuestas de validación posteriores al curso.

Una vez finalizado el curso y tras haber realizado unas primeras observaciones sobre las categorías que podrían resultar más interesantes de validar, consideré interesante efectuar realizar una encuesta aleatoria, realizada sobre aquellos alumnos que al recoger el diploma de asistencia desearan responder a la misma.

El modelo de encuesta de validación se puede encontrar en el apartado 4.6.

A continuación ofrecemos un breve resúmen de las contestaciones dadas a la encuesta (obsérvese que colocamos entre paréntesis las frecuencias de contestacion):

1. **¿Crees que DERIVE permite construir un sistema de notación intermedio?**
   Sí (2). No (8) .En parte sí, aunque no en todos los campos, en los que lo permite te ayuda a asimilar conceptos. No sé (7)
2. **¿Por qué?**
   NO(8): Es muy similar al de lápiz y papel. Emplea el mismo sistema que las matemáticas habladas, llegando a ser un poco más complejo que el lenguaje normal. Porque lo que he visto en el curso creo que se acerca mucho más al lenguaje matemático que el lenguaje natural. Sólo nos permite conocer los resultados finales. Requiere una visualización más amplia inclinándonos al lado estrictamente matemático. Porque si no sabes conceptos básicos de matemáticas tampoco entenderías mucho lo que puedes realizar con DERIVE.
   SI (2): Es más rápido.. Utiliza una terminología muy similar al lápiz y papel.

3. **¿Cuál crees que es el grado de interactividad del usuario con DERIVE?**
   Medio (5). Es bastante sencillo.
   Bastante alto (4), ya que no es demasiado sofisticado y tienes tú que introducir casi todas las fórmulas, expresiones y cargar los archivos.
   Muy alto (6). En algunos aspectos de cálculo se pierde un poco la visión de las operaciones.

4. **¿Cómo crees que es el protagonismo del usuario con DERIVE? (se deja llevar por el programa, lo controla,...)**
   Bastante bueno.
   Se deja llevar por el programa (2)
   Se adapta a sus posibilidades algo escasas en algunos casos.
   Creo que el usuario controla bastante el programa (11)

5. **¿Es DERIVE una herramienta de experimentación matemática?**
   Sí (11). Por supuesto te permite curiosear con las matemáticas.
   Pudiera serlo, aunque es necesario para experimentar conocimientos previos, para saber sobre lo que se experimenta.
   No (4).
   No sabe (2).

6. ¿Cómo se cumple lo anterior?

SI (9): Dibujando gráficas u otras operaciones curiosas pero difíciles de calcular. La posibilidad de experimentar con gráficas. Es a la vez una especie de lenguaje de programación que permite realizar ciertas investigaciones que una persona no podría realizar. Permite observar las grandes posibilidades que tiene el apasionante mundo de las matemáticas. Adaptando tus propósitos al programa. Si se conoce su uso permite hacerlo de una manera rápida y eficaz. Te permite experimentar con supuestos un poco más complicados de lo habitual. Una mayor gama de operaciones, de manera más rápida y por lo tanto deja más margen a la experimentación. Comprobar teorías, teoremas, propiedades de forma rápida lo que hace que te preocupes de comprobar éstos, cosa que si tuvieras que hacer a mano no lo harías por el exceso de tiempo.

NO (1).

7. ¿Crees que elimina el esfuerzo de operaciones rutinarias? ¿por qué?

SI (16): Ahorra tiempo y esfuerzo. Sencillo de utilizar potente. Porque el realiza los cálculos básicos. Por que eliminando la parte más sencilla pero que lleva más tiempo y dejando más tiempo para la parte más complicada. Facilita mucho las operaciones matemáticas, haciéndolas sin esfuerzo en un tiempo mínimo. Pero una vez que dominas el sistema. Porque te lleva a la conclusión final, aunque puedes perder esa rutina necesaria para la comprensión. Simplifica el cálculo. Porque sintetiza el proceso matemático y permite ir más directamente a los resultados.

En algunas operaciones sí (2) , en otras lo añade si no tienes práctica.

8. ¿Crees que DERIVE es una barrera adicional para el aprendizaje de las matemáticas?

No (17). Creo que se pierde cálculo pero que ayuda a comprender los conceptos más rápidamente gracias a la visualización. Te acerca más a las matemáticas. Es una forma de acelerar el aprendizaje una vez aprobado. Siempre que se conozcan medianamente los campos en los que se trabaja. Puede servir para comprender el resultado más rápidamente. Porque te ayuda a su comprensión, únicamente no practicas el cálculo, pero te hace pensar qué pasos hay que seguir para llegar a la solución de un problema, lo cual incentiva la comprensión y el pensamiento.

9. ¿Permite la atención a la diversidad?

SI(4): el programa se adapta a tus necesidades. Puede ser utilizado tanto por personas que entienden como los que no.

NO (1):

¿te has aburrido usando el programa?

NO (9): Nos hemos divertido mucho. Me gusta la informática es muy entretenida y además siempre estabamos activos probando comandos y haciendo prácticas de la teoría. Es entretenido. Ha resultado interesante.

SI (3): Para los que ibamos un poco más rápido. Debido a la complicación de algunos temas.

En algunas partes es aburrido (3)

¿te ha resultado complicado?

NO (11): Una vez que conoces la funcionalidad de los comandos. Hay que usarlo mucho para manejarlo sin ayuda de los apuntes.

El ser complicado o no depende del tiempo.

SI (1): Algunas veces. Había algunos detalles que se me escapaban por la rapidez del curso y por la falta de conocimientos previos.

10. ¿Cómo ha resultado tu experiencia de uso de DERIVE en grupo?

Positiva, Buena (17). He aprendido a utilizar mejor el programa. Me ha ayudado a comprender algunas cosas mejor. Te ayuda a una mejor comprensión cuando algún aspecto te resulta más complicado, permite pequeñas discusiones en determinados momentos sobre el resultado de los ejercicios. Mi compañero me explicaba cosas que yo a lo mejor no comprendía. Es mejor que individualmente. Muy agradable por el intercambio de información con el compañero.

Gratificante.

Regular (1): Debido al poco tiempo nos hemos dedicado a hacer muchas cosas sin saber lo que estábamos haciendo.

11. ¿Qué elementos negativos tiene el aprendizaje de las Matemáticas con DERIVE?

Que necesitas conocer informática para aprender matemáticas.

Es un programa que no potencia las habilidades de cálculo (2).

Caer en la pasividad.

No practicar cuentas ni procesos.

Eliinación de procesos "rutinarios".

La pérdida de cálculo. Mecanizar las operciones.

La introducción de expresiones.

Si sólo utilizásemos derive no aprenderíamos nada, pero si es como complementaria bueno.

12. ¿Qué elementos positivos tiene el aprendizaje de las Matemáticas con DERIVE?

Facilita las operaciones matemáticas.

Facilita ligeramente el aprendizaje

La rapidez de cálculo. (10).

Mayor comprensión de conceptos matemáticos (4)

La representación de gráficas (2).

Visualización de ciertos conceptos abstractos.

Se hace mucho más ameno y cómodo (2).

13. El uso de DERIVE , ¿ha aumentado o puede aumentar tu interés por la asignatura? ¿De qué forma?

NO (4).

Indiferencia

Mínimamente.

SI (10): Puesto que incrementa la curiosidad personal por operaciones más complejas. Se hace más ameno estudiar matemáticas. Veo que hay relación con los ordenadores y que cosas que resultan complejas se hacen más sencillas. Da más claridad y transparencia a la resolución de problemas. Porque se pueden comprender conceptos a veces muy abstractos y teóricos y te hace comprender desarrollar mejor la asignatura porque ves los pasos intermedios que se deben realizar para resolver ciertos planteamientos. Facilitándome el trabajo. Aunque requiere un mayor control objetivo del usuario. Me divierto en casa con el programa y aprendo más.

3.7. Interpretación y conclusiones.

Las categorías enumeradas anteriormente nos permiten efectuar las siguientes interpretaciones:

¿DERIVE permite construir un sistema de notación intermedio?

Para que el sistema de notación de DERIVE se convierta en un sistema intermedio entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático, es necesario que los alumnos tengan un cierto dominio de los comandos básicos y del funcionamiento general del programa, dicho de otra forma que se consigan entender y resolver los problemas y conceptos matemáticos "pensando en DERIVE". Aunque es cierto que salvo algunas excepciones, se ha conseguido que los alumnos manejen y manipulen el programa como herramienta, sin embargo no parece evidente que hayamos conseguido que el programa actúe como puente entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático, ya que numerosos errores cometidos en la resolución de los problemas han sido debidos fundamentalmente a lagunas conceptuales. Este sistema intermedio no se ha lanzado, ya que los conceptos matemáticos se han aprendido con "lápiz y papel" un sistema de notación distinto al utilizado por DERIVE. Obsérvese que los problemas de la sesión 2 (sin contenidos matemáticos muy complejos) han sido resueltos con una puntuación muy alta, mientras que en las sesiones posteriores las puntuaciones objetivas han disminuido considerablemente debido a la complicación conceptual.

Si además comparamos estas afirmaciones con la encuesta final, podemos efectuar una verificación clara de esta pregunta: no se ha establecido adecuadamente un sistema de notación intermedio.

¿Cómo ha sido el grado de interactividad de DERIVE con los usuarios?

A nivel general se ha conseguido un buen nivel de interactividad, salvo en el grupo 2 en el que se ha carecido de interpretaciones adecuadas a los resultados que ofrecían las expresiones de salida del programa. Fundamentalmente cabe resaltar que en las gráficas de funciones de una y dos variables ha resultado enormemente interactivo el programa. Nuevamente tenemos que observar la relación directa que guarda el nivel de conocimientos matemáticos con el grado de interactividad. De hecho en los subgrupos con mayor dificultad en la interpretación de resultados de DERIVE o interpretación errónea existía cierta conexión con los datos ofrecidos por las calificaciones de los alumnos en Matemáticas I o en cursos anteriores.

¿Cuál ha sido el grado de protagonismo de los alumnos frente al programa?

En los ejercicios de las primeras sesiones se ha observado un nivel de usuario, es decir, el alumno se dejaba arrastrar claramente por el programa, sin pensar en muchas ocasiones que no era necesario el programa para resolver ciertos problemas, muy especialmente el problema en que se pedía calcular el desarrollo de Taylor de orden 4 en x=0 para un polinomio de grado 4. En las sesiones posteriores parece que los alumnos ha ido dominando más el programa, aunque en algunas ocasiones el problema nuevamente ha topado con carencias de conocimientos matemáticos. Aun así, se han provocado algunos errores que no han suscitado en el alumno una rectificación inmediata de planteamientos, como por ejemplo en el problema que daba un área negativa. Sin embargo, también hay que citar que el protagonismo ha aumentado porque han sido capaces de contruir escalas adecuadas para visualizar las gráficas de una variable de la sesión 3. En el problema de áreas, cuya integral definida no permitía expresarse con funciones elementales han optado muy inteligentemente por la aproximación y también han manipulado muy correctamente el problema final de rangos y diagonalización.

Si contrastamos esta cuestión con la encuesta de validación observamos que los alumnos creen en su mayoría que sí han sabido controlar el programa con cierto protagonismo.

¿Es DERIVE una herramienta de experimentación?

En todos los grupos DERIVE no ha servido excesivamente como herramienta de experimentación.

Sin embargo la encuesta de validación muestra una opinión contraria de los alumnos, ya que consideran que les ha permitido curiosear con las matemáticas, aunque era necesario experimentar conocimientos previos.

Desde luego en los problemas y ejercicios no se ha mostrado esta faceta de experimentación que ofrece el programa. Quizás por un lado por el escaso tiempo del curso, y en segundo lugar porque nuevamente los conceptos matemáticos en algunos casos ni siquiera estaban lo suficientemente claros para poder experimentar sobre algo.

¿Ha favorecido el aprendizaje de contenidos de Matemáticas I y Matemáticas II?

A pesar de que en las sesiones de trabajo lo único que hemos podido constatar es que únicamente se han consolidado algunos conceptos, sin embargo en el desarrollo de todo el curso se han ofrecido nuevas visiones de los conceptos matemáticos fundamentales. Sobre todo habría que resaltar el grado de visualización que DERIVE permite, en las gráficas de funciones de una y varias variables y en el trazado de curvas de nivel. En la encuesta final la valoración general ha sido baja.

¿Elimina DERIVE el esfuerzo en cálculos rutinarios?

Esta cuestión es claramente afirmativa, sin DERIVE, no podríamos haber planteado tal cantidad de problemas a resolver en tan corto espacio de tiempo. Es evidente que los alumnos han resuelto bastantes ejercicios por la facilidad de cálculo que ofrece el programa, permitiendo eliminar ese esfuerzo empleado en los cálculos intermedios que no son esenciales para la resolución de los problemas. Las dificultades que han encontrado los alumnos no han sido de cálculos sino de otro tipo: dificultades de planteamiento, de falta de estrategias claras de resolución o bien por falta de claridad conceptual.

Observando la encuesta de validación final, se puede comprobar que las opiniones de los alumnos están en la misma línea antes citada. Habría que resaltar algunas de las razones que los alumnos han señalado al afirmar esta cuestión: "Derive elimina la parte más sencilla pero que lleva más tiempo y deja más tiempo para la parte más complicada" o bien otra contestación igualmente brillante "Porque sintetiza el proceso matemático y permite ir más directamente a los resultados".

¿El programa aumenta estrategias de resolución de problemas?

Se ha podido constatar que en todos los grupos se ha desarrollado una única estrategia de resolución, una estrategia similar a la utilizada con "lápiz y papel" y en muchos casos ni siquiera eso porque no se ha resuelto el problema o ejercicio. Sólo hay que señalar una salvedad, en los problemas de optimización durante el curso enseñamos una estrategia gráfica alternativa para estudiar los óptimos de una función de dos variables, a través de la gráfica de la función y sus curvas de nivel, pues bien, algunos alumnos han desarrollado esta estrategia alternativa para optimizar funciones. Esto nos lleva a la siguiente conclusión: los alumnos no han recibido estrategias alternativas en la resolución de problemas. DERIVE si permite plantearlas, aunque no se haya comprobado su utilización más que en un único caso.

¿Es DERIVE una barrera adicional para aprender Matemáticas?

En general el programa DERIVE ha sido asimilado adecuadamente por los alumnos que, además, han considerado que el programa es de fácil aprendizaje. Los errores que se han cometido en los ejercicios y problemas de las diferentes sesiones han sido generalmente errores de tipo conceptual, por ejemplo, no saber el significado del m.c.d., no interpretan adecuadamente el significado de los COSTES MARGINALES, o no saben plantear una función de beneficios. Aunque es interesante señalar que un alumnos con Matrícula de Honor en Matemáticas I, en la sesión 3 dedicada a dicha asignatura, tan solo obtiene un 6 en esta sesión. Quizás fuese un día de despiste. Evidentemente DERIVE no lo hace todo, y esta idea fue remarcada numerosas veces a lo largo del curso.

En la encuesta de validación final la opinión generalizada es que DERIVE no ofrece un impedimento para el aprendizaje de las matemáticas, al contrario sus opiniones se centran en que DERIVE "es una forma de acelerar el aprendizaje"

¿El programa DERIVE permite atención a la diversidad?

La atención a la diversidad, fue planteada mediante problemas de diversa complejidad, que DERIVE permitía resolver. Los resultados observados a este respecto, no ofrecen una respuesta generalizada y es que en los ejercicios considerados básicos que todos los alumnos podrían realizar, fueron efectuados correctamente. A partir de ahí se fueron realizando problemas en función de las capacidades de cada subgrupo de trabajo.

Contrastando esta cuestión en la encuesta final, obsérvese que la cuestión de atención a la diversidad puede plantearse de la siguiente forma: para alumnos aventajados puede producirse aburrimiento, situación que no se ha dado en el curso tal como muestra la cuestión 9b, y por otro lado puede provocar desinterés si resulta demasiado complicado, situación que nuevamente no se ha producido si observamos la cuestión 9c, ya que la muestra de alumnos afirma que no ha resultado complicado.

¿Se ha aumentado la motivación de los alumnos?

Atendiendo a la consideración que podía medir el grado de motivación de los alumnos, como es el tiempo dedicado a la resolución de los problemas y ejercicios, podemos generalizar que la motivación se ha suscitado enormemente ya que se ha empleado en general más tiempo del previsto en la resolución de problemas. Los elementos que han podido provocar este aumento de motivación pueden ser por un lado el propio programa DERIVE y el trabajar en grupo las matemáticas.

En la encuesta final, ha habido numerosas afirmaciones sobre este tema, indicando que se ha hecho corto el curso, situación que sólo se produce cuando el tema resulta motivador.

En las observaciones de campo hemos podido comprobar el interés suscitado por los alumnos, dado el elevado número de preguntas que se formulaban, la espontaneidad de la relación en el trabajo de subgrupos.

También habría que señalar que en una cuestión de la encuesta de validación, en particular en la número 13, se pregunta si ¿Derive ha aumentado tu interés por la asignatura? la respuesta mayoritaria ha sido que sí, y una de las razones más significativas es la que afirma "Sí, puesto que incrementa la curiosidad personal por operaciones más complejas". Cuando un asunto suscita curiosidad es porque ha sido motivado adecuadamente.

¿Cómo ha sido la relación dialéctica entre los usuarios?

En las observaciones de campo realizadas, se ha podido observar que la relación mantenida por los alumnos en los diferentes subgrupos de trabajo ha sido satisfactoria. A esta observación añadimos por un lado que la valoración de la encuesta final del trabajo en grupo frente al ordenador ha obtenido una media de 7,8, siendo las principales razones de esta valoración la siguientes: el trabajo en grupo resulta más entretenido, la cooperación hace más fácil el entendimiento de algunas cuestiones y la realización de las pruebas, se fomenta la participación, siempre se aprende algo de los demás. Por otro lado en la encuesta de validación la experiencia del uso de DERIVE en grupo ha sido positiva. Podemos resaltar una de las razones de esta valoración positiva: "Mi compañero me explicaba cosas que yo a lo mejor no comprendía y viceversa".

Por tanto la relación dialéctica entre usuarios ha sido altamente positiva dada su disposición de trabajo en grupo. Además ha sido un trabajo en grupo frente al ordenador, que ofrece elementos de interactividad añadidos que facilitan ese intercambio entre los alumnos.

<u>CONCLUSIONES:</u>

Despues de haber interpretado las cuestiones más relevantes observadas en cada una de las categorías surgidas en la investigación a propósito de los objetivos propuestos, podemos afirmar lo siguiente:

La enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas mediante programas de cálculo simbólico como DERIVE ofrece enormes posibilidades a la hora de diseñar tareas de enseñanza dado que este tipo de programas

1. Ofrecen un grado de interactividad muy adecuado entre los usuarios, dado que permite la elaboración de hojas de trabajo en las que el usuario demanda al sistema mediante expresiones la realización de cálculos rutinarios, no esenciales para el desarrollo de los contenidos que estemos trabajando en ese momento.
2. Permite que el grado de protagonismo de los alumnos frente al programa dependa del grado de conocimiento teórico de los contenidos matemáticos conocidos. De tal forma que sin una adecuada formación base, es difícil que el alumno sea capaz de desarrollar problemas y cuestiones relacionadas con el tema, aunque utilicen un programa de este tipo.
3. La introducción de conceptos matemáticos con DERIVE puede ser complementada con adecuadas prácticas de experimentación, que han de ser muy bien elegidas para que se produzca un equilibrio entre curiosidad suscitada y capacidad del alumno para resolver esa curiosidad.
4. La eliminación de numerosas rutinas de cálculo mediante el programa debe tener en consideración dos aspectos:
    a. nunca deben utilizarse en el ordenador aquellas rutinas que no sean totalmente comprendidas por el usuario, de tal forma que permitan una adecuada interpretación de resultados.
    b. cuando los cálculos necesarios no sean esenciales para el desarrollo de un contenido, el uso de DERIVE resulta altamente beneficioso pues permite vislumbrar más claramente los procesos y estrategias de resolución empleadas en ejercicios y problemas.
5. Para que DERIVE permita aumentar las estrategias de resolución de problemas, han de plantearse previamente las mismas con ejemplos suficientemente claros.
6. Trabajar DERIVE en grupo ofrece elementos añadidos que facilitan el aprendizaje y además favorecen la creación de ambientes de enseñanza muy motivadores para el alumnado.
7. La atención a la diversidad es posible diseñarla con este tipo de programas, elaborando tareas gradualmente complicadas, tales que no aburran a los más adelantados y no provoquen el rechazo de los menos avanzados.

ANEXO V:
RESULTADOS DE LA ENCUESTA INICIAL.

1. Modelo de encuesta

RECOGIDA DE DATOS INICIAL PARA ESTABLECER LA SELECCIÓN DEL GRUPO EXPERIMENTAL DE "MATEMATICAS II CON DERIVE".

Apellidos y Nombre: ____

Estas cuestiones servirán para formalizar la elección del subgrupo al que podrás asistir.

****

1. ¿Estas matriculado por primera vez en la asignatura Matemáticas II? (SI / NO)
2. ¿Tienes conocimientos de Windows-95 o superiores a nivel de usuario (manejo de ficheros, manejo de ventanas,..)? (SI /NO)
3. ¿Manejas algún navegador de Internet? (SI /NO)

   Si tu respuesta es afirmativa indica el nombre del navegador:
4. ¿Manejas algún programa de correo electrónico? (SI /NO)

   Si tu respuesta es afirmativa indica el nombre del mismo:
5. ¿Tienes cuenta de correo electrónico? (SI /NO)

   En caso afirmativo, podrías indicar claramente cual es tu correo electrónico:

7. Podrías indicar cual ha sido tu modo de acceso a la Universidad:
8. Podrías indicar la denominación de tus últimos estudios (COU, Bachillerato LOGSE, Mayores 25 años,....)
9. ¿Cuál ha sido tu nota de acceso a la Universidad?
10. ¿Cuál ha sido tu calificación media en Matemáticas en los últimos años?
11. ¿Te interesan las Matemáticas? (SI /NO)¿Por qué?
12. La docencia de esta asignatura se impartirá en dos subgrupos alternativos:
    - SUBGRUPO A: Se realizara utilizando como soporte didáctico el programa de cálculo simbólico DERIVE, y tendrá lugar los Lunes y Jueves de 14,30-16,30 en las aulas de informática de la Facultad.
    - SUBGRUPO B: Se realizará utilizando la metodología clásica sin ayuda del programa de cálculo simbólico DERIVE. Se impartirá los Lunes y Jueves de 16.30-18,30 en el aula actual.

    Indica el subgrupo con el que desearías realizar la asignatura:

    Podrías hacer un breve comentario del motivo de tu elección:

Para finalizar firma este documento que servirá de referencia para la selección de alumnos. Ten presente que la elección en uno u otro subgrupo supone una evaluación distinta según la didáctica empleada.

2. Tablas resumen de datos de la encuesta inicial.

RECOGIDA DE DATOS: ENCUESTA INICIAL PARA LA SELECCIÓN DEL GRUPO EXPERIMENTAL

ALUMNOS QUE ESCOGEN SUBGRUPO A (Cuestiones 1-9 de la encuesta)

Apellidos, Nombre	C-1	C-2	C-3	Cuestión-3(b)	C-4	Cuestión-4(b)	C-5	Cuestión 7	Cuestión 8	Cuestión 9
Cuéllar Hervas, Antonio F.	NO	SI	SI	Internet Expl	SI	Outlook Express	SI	Selectividad	COU	6
Gómez Hernández, José Ivanof	NO	SI	SI	Todos	SI	Todos	SI	Selectividad	COU	7,6
Perpiña Rodríguez, Antoni	SI	SI	SI	Netscape	SI	Hotmail	SI	Selectividad	COU	6,79
Revuelto Oca, Jorge	SI	SI	SI	Netscape	SI	EUDORA	SI	Selectividad	Bach Logse	8,4
Rosado Linares, Sebastian	SI	SI	SI	Netscape, Exp	SI	Outlook Express	SI	Selectividad	COU	6,42
Rúa Navarro, Sergio	SI	SI	SI	Netscape	NO	...	SI	Selectividad	COU	6,75
Rubiano Fernández, Daniel	SI	SI	SI	Explorer	SI	...	NO	Selectividad	COU	6,95
Rubio Gómez, Laura	SI	SI	SI	Exploresr	SI	Outlook Express	SI	Selectividad	COU	6,88
Sanchez Laulhe, Ricardo	SI	SI	SI	Netscape	SI	EUDORA	SI	Selectividad	Bach Logse	6,64
Santos Gil, Sergio	SI	SI	...	...	NO	...	SI	Selectividad	COU	6,8
Sanz Castro, Jessica	SI	SI	SI	Explorer,Netsc	SI	Outlook Express	SI	Selectividad	COU	6,57
Sanz Ibarra, Eduardo	SI	SI	SI	Netscape	SI	EUDORA	SI	Selectividad	COU	6,45
Sevilla Casares, Cristina	SI	SI	SI	Netscape	SI	EUDORA	SI	Selectividad	COU	6,37
Tarno Corte, Luis	SI	SI	SI	Navigato, Expo	SI	EUDORA	SI	Selectividad	COU	6,29
Trigo Arroyo, Juan Pablo	SI	SI	SI	Netscape	SI	EUDORA	SI	Selectividad	Bach Logse	6,25
Verdú Aguilar, María	SI	SI	SI	Netscape	SI	Hotmail	SI	Selectividad	COU	6,56

Cuestiones 10-12 de la encuesta del SUBGRUPO A.

Apellidos, Nombre	Cuestión 10a	Cuestión 10b	C-11	Cuestión 11	C-12	Cuestión 12(b)
Cuéllar Hervas, Antonio F.	...	...	si	Considero que son una herramienta importante para mi futuro	A	Probar una nueva metodología
Gómez Hernández, José Ivanof	Notable	Sobresaliente	SI	Las matem. Son la ciencia que subyace a la creación. Nada se concibe sin matemáticas	A	Apasionam. Por inform. Fuerte conocim. De herr. Info.
Perpiña Rodríguez, Antoni	...	Apr/Bien	SI	Considero que son una herramienta importante para mi futuro	A	Probar una nueva metodología
Revuelto Oca, Jorge	...	9	SI	Siempre me han gustado y me parecen prácticas por sus aplicaciones	A	Me parece interesante una aplicación de las mate. En inf.
Rosado Linares, Sebastian	...	8	SI	El conocimiento anal.geométrico de la realidad es fundamental para cualquier persona	A	Oportunidad de utilizar un sistema que se está introduc.
Rúa Navarro, Sergio	...	Sobresaliente	SI	Siempre me han gustado	A	Me gustan la informática y las matemáticas
Rubiano Fernández, Daniel	...	5	SI	Asignatura interesante y te ayuda a pensar	A	Me parece ameno, educativo e interesante
Rubio Gómez, Laura	...	Notable	SI	Son de razonar	A	Informática unida a las matemáticas
Sanchez Laulhe, Ricardo	..	7	NO	No las estudiaría si no estuviese como troncales	A	La idea de poder estudiar aplicando programas
Santos Gil, Sergio	...	Bien, 6,5	NO	...	A	Me gusta utilizar ordenadores, y no me gusta calcular
Sanz Castro, Jessica	...	Notable	NO	Me gustan más las asignaturas de letras	A	Me gusta trabajar con ordenadores
Sanz Ibarra, Eduardo	...	Bien	si	Me parece interesante aunque difícil. Te abren la mente y desarrollan capa. Pensar	A	Interesante y útil aprender de forma diferente.
Sevilla Casares, Cristina	...	BIEN	SI	Servirán de base en asignaturas de cursos siguientes	A	Probar un modo diferente de aprender matemáticas
Tarno Corte, Luis	...	6,5	SI	Interés general por las ciencias	A	Distinta forma de aprender matemáticas
Trigo Arroyo, Juan Pablo	...	7	...	...	A	Se supone que tratará problemas más reales.
Verdú Aguilar, María	...	Bien	SI	Necesarias para la carrera	A	Me resulta interesante utilizar un programa en matemáticas

Cuestiones 1-9 de la encuesta Subgrupo B

ALUMNOS QUE ESCOGEN SUBGRUPO B

Apellidos, Nombre	C-1	C-2	C-3	Cuestión-3(b)	C-4	Cuestión-4(b)	C-5	Cuestión 7	Cuestión 8	Cuestión 9
Andújar Lara, Maria Elena	SI	SI	NO	...	NO	...	SI	Selectividad	COU	7,52
De la Quadra-Salcedo,Sofia	SI	SI	SI	Internet Expl	SI	Outlook Express	SI	Selectividad	COU	7,89
De la Serna Matamoros,Beatriz	SI	SI	NO	...	NO	...	SI	Selectividad	COU	7,07
Fuente Merino, Fco. Javier	NO	SI	SI	Netscape,Expl	SI	Mess,Eudora,	SI	Selectividad	COU	7,7
Garcia Hortelano, Ana	NO	SI	NO	...	SI	EUDORA	SI	Selectividad	COU	7,69
García Sánchez, Ana belen	NO	SI	NO	...	SI	EUDORA	SI	...	COU	6,8
Gil Iglesias, Omar	NO	SI	SI	Netscape,Expl	SI	EUDORA	SI	Selectividad	Bach Logse	6,62
Gueorguiev Paplomata, Alex	SI	SI	NO	...	SI	...	SI	Selectividad	Est. Extranj.	5,75
Guerrero Andrés, Fernando	NO	SI	NO	...	NO	...	NO	Selectividad	COU	7,13
Gutiérrez Domínguez, J.Cirilo	SI	SI	NO	...	SI	...	SI	PAU	Fac. Quim.UCM	7,1
Heredia Carranza, Ana Raquel	SI	SI	SI	Netscape	SI	...	SI	Conval. Traslado	Univ. Lima	Convalidación
Moratino Meissner, Fabian	SI	SI	NO	...	SI	Outlook Express	SI	Selectividad	T.Gest.Emp	6,38
Patiño, Santos	SI	SI	NO	...	NO	...	SI	Selectividad	COU	6,29
Pedraz Gutiérrez, Nuria	SI	SI	SI	Netscape	SI	EUDORA	SI	Selectividad	Bach Logse	6,93
Pérez Quirozx, Myrna Paola	SI	SI	NO	...	NO	...	NO	Traslado de Un.	...	Traslado
Pérez Sánchez, Sara	SI	NO	NO	...	NO	...	NO	Selectividad	COU	6,4
Pintado Cardeñosa, Noelia	SI	SI	NO	...	NO	...	NO	Selectividad	Bach Logse	8,19
Piñole, Javier	SI	NO	NO	...	NO	...	NO	Selectividad	COU	6,4
Puyalto de Pablo, Miguel	SI	SI	SI	Navigator	...	...	SI	Selectividad	COU	6,8
Rafayle Campos, Jimmy Carlos	SI	SI	SI	...	SI	Outlook Express	SI	Traslado de Un.	Traslado	...
Recio Pérez, Jaime	SI	SI	SI	Netscape	SI	EUDORA	SI	Selectividad	COU	6,67
Redondo Aranda, Jose Carlos	SI	NO	NO	...	NO	...	NO	Selectividad	COU	6,73
Retuerto, Andrea	SI	NO	NO	...	NO	...	NO	Selectividad	COU	7,27
Ribagorda Jiménez, Macarena	SI	NO	NO	...	NO	...	NO	Selectividad	COU	7,4
Rincón Lorente, Borja	SI	NO	NO	...	NO	...	NO	Selectividad	COU	6,64
Rioja Calcedo, Luis	SI	SI	NO	...	NO	...	NO	Selectividad	COU	6,27
Rivas Rivera, Alejandro	SI	SI	SI	OLE	SI	Netscape	SI	Selectividad	Bach Logse	6,4

Rodríguez Alegre, Enrique	SI	SI	SI	Netscape	SI	EUDORA	SI	Selectividad	COU		7,01
Rodríguez Benitez, Lucia	SI	NO	NO	...	NO	...	NO	Selectividad	COU		6,86
Rodriguez de la Corte, Miguel	SI	SI	SI	Explorer	NO	...	SI	Selectividad	COU		7,6
Rodriguez Peñamaria	SI	NO	NO	...	NO	...	NO	Selectividad	COU		7,66
Rodríguez Rodríguez, Ana M	SI	SI	NO	...	SI	EUDORA	SI	Selectividad	Bach Logse		6,96
Rodriguez Rodriguez, César	SI	SI	SI	OLE	SI	Netscape	SI	Selectividad	COU		6,65
Rodriguez Velasco, Rocio	SI	SI	NO	...	NO	...	NO	Selectividad	COU		7,93
Ropero Martin, Loreto	SI	NO	NO	...	SI	EUDORA	SI	Selectividad	COU		6,57
Rosa Castaño, Javier de la	SI	SI	SI	Navigator	...	...	SI	Selectividad	COU		6,74
Rubio Márquez, Manuel	SI	SI	SI	Netscape	SI	EUDORA	SI	Selectividad	COU		7,02
Ruiz Calle, Alicia Victoria	SI	SI	NO	...	NO	...	NO	Selectividad	COU		6,4
Salinas Pozo, Carlos	NO	SI	SI	Netscape,Exo	SI	EUDORA	SI	Selectividad	COU		7,8
San Juan Hernanz, M. Pilar	SI	NO	NO	...	NO	...	SI	Selectividad	COU		6,73
Santamaría Fernández, Alber	SI	SI	SI	Netscape	SI	EUDORA	SI	Selectividad	Bach Logse		6,75
Sanz Fernández, M. Angeles	SI	NO	NO	...	NO	...	NO	Selectividad	COU		7,9
Sarabia Fernández Maria	SI	NO	NO	...	NO	...	NO	Selectividad	COU		7
Sierra Muñoz, Adela	SI	SI	NO	...	NO	...	NO	Selectividad	Bach Logse		6,7
Solesio Larré, Berta	SI	SI	SI	Netscape	SI	EUDORA	SI	Selectividad	COU		7,2
Toribio Gómez, Esther	SI	SI	SI	Explores,Netsc	SI	Outlook Express	SI	Selectividad	Bach Logse		6,95
Torre Cantalapiedra, Alberto	SI	SI	SI	...	SI	...	SI	PAU	LOGSE	...	
Torre Romero, Nuria de la	SI	NO	NO	...	NO	...	SI	Selectividad	COU		7
Varea Blanco, Ana María	SI	NO	NO	...	NO	..	SI	Selectividad	COU		6,55
Vázquez Calle, Nerea	SI	NO	NO	...	NO	...	SI	Selectividad	COU		6,66
Vela Muñoz, Alvaro	SI	SI	SI	Netscape, Exp	SI	Netscapce,Expl	SI	Selectividad	Bach Logse		7,92
Vela Navarro, Paloma	SI	NO	NO	...	NO	...	SI	Selectividad	COU		6,54
Velasco Ortega, María	SI	SI	NO	...	NO	...	NO	Selectividad	COU		6,9
Velasco Ortiz, David	SI	NO	NO	...	NO	...	NO	Selectividad	COU		6,31
Vicente Hernández, Maria	SI	SI	NO	...	NO	...	NO	Selectividad	COU		6,8
Vicente Vicente, natalia	SI	NO	NO	...	NO	...	SI	Selectividad	Bach Logse		7,2
Vicenti Chamón, Borja	SI	NO	NO	...	NO	...	NO	Selectividad	COU		6,83
Vieco González, Eva Esther	SI	SI	SI	Netscape	SI	EUDORA	SI	Selectividad	Bach Logse		6,51
Vilela Rodrigo, Yeray G.	SI	SI	SI	Netscape Expl	SI	EUDORA	SI	Selectividad	COU		6,31

Villegas Bartolomé, Ignacio	SI	SI	NO	...	NO ...	SI	Selectividad	COU	6,38
Vivar Armenteros, Gonzalo	SI	SI	SI	Internet Expl	NO ...	SI	Selectividad	COU	6,6

Cuestiones 10-12 de la encuesta subgrupo B

Apellidos, Nombre	Cuestión 10a	Cuestión 10b	C-11	Cuestión 11	C-12	Cuestión 12(b)
Andújar Lara, Maria Elena	...	Notable	SI	...	B	Por el horario
De la Quadra-Salcedo,Sofia	...	...	SI	...	B	...
De la Serna Matamoros,Beatriz	...	Bien	SI	...	B	El horario
Fuente Merino, Fco. Javier	MatI(AP)/II(SS)	Sobresaliente	SI	Son aplicables a otros estudios	B	Problemas de horario y ya conozco el pro
Garcia Hortelano, Ana	Suspenso	Bien-Notable	SI	Son utiles otras asignaturas	B	
García Sánchez, Ana belen	Suspenso	Bien	SI	Son entretenidas y útiles	B	Prefiero el método convencional
Gil Iglesias, Omar		6	SI	Es necesaria para el estudio	B	Problemas de horario
Gueorguiev Paplomata, Alex	...	...	SI	Depende del material al que se refiera	B	El horario no me conviene
Guerrero Andrés, Fernando	...	SUFICIENTE	SI	Es lo que peor se me da, no law he entendido nunca	B	Tengo problemas con ordenadores. No se
Gutiérrez Domínguez, J.Cirilo	Suspenso	...	NO	no lo seé	B	Incompatible con horario de trabajo
Heredia Carranza, Ana Raquel	...	Aprobado	SI	Ayuda a agilizar la mente	B	Por el horario
Moratino Meissner, Fabian	...	Notable	NO	aunque me gusta calcular	B	Por el horario, trabajo de 8-15 h.
Patiño, Santos	...	Bien	SI	Son esenciales actualmente, sin ellas no habría progreso, es un lenguaje	B	Pienso que la dificultad del subgrupo A es
Pedraz Gutiérrez, Nuria	...	Bien	SI	Porque me parecen importantes para la carrera	B	Por el horario, y no he hecho el curso de l
Pérez Quirozx, Myrna Paola	...	APROBADO	SI	Me gustan pues son importantes y necesarias y relacion con otras materias	b	Por el horario y no tener conocimientos In
Pérez Sánchez, Sara	...	Notable	SI	Son amenas y útiles para la vida	B	Por el horario y no tengo conocimientos d
Pintado Cardeñosa, Noelia	...	Notable	SI	Me gustan	B	Por el horario
Piñole, Javier	...	BIEN	NO	...	B	Por el horario y no se manejar el ordenad
Puyalto de Pablo, Miguel	...	Notable	SI	...	B	Por el horario
Rafayle Campos, Jimmy Carlos	...	...	si	...	b	Por el horario de los Jueves (estudio ingle
Recio Pérez, Jaime	...	Bien	si	Son útiles para muchas cosas	B	El horario no me viene bien. No manejo b
Redondo Aranda, Jose Carlos	...	Notable	SI	...	B	...
Retuerto, Andrea	...	6	NO		B	
Ribagorda Jiménez, Macarena	...	Notable	SI	Me gustan los números mas que letras	B	Prefiero met. Tradicional por no saber ma

Rincón Lorente, Borja	...	BIEN	SI	...	B	No domino el ordenador y me conviene m
Rioja Calcedo, Luis	...	APROBADO	SI	...	B	Prefiero la metodología tradicional y no te
Rivas Rivera, Alejandro	...	Bien	NO	Se me dan muy mal	B	Creo que lo pasaré mejor en una clase tra
Rodríguez Alegre, Enrique	...	Notable	SI	Siempre se me han dado bien, y me interesa conocer cosas nuevas.	B	No puedo y soy partidario de la neseñanz
Rodríguez Benitez, Lucia	...	6,5	SI	...	B	Por el horario
Rodriguez de la Corte, Miguel	...	Notable	SI	Son muy interesantes y me gustan	B	No me gustan los ordenadores
Rodriguez Peñamaria		Notable	SI	Son mecánicas	B	No tengo conocimiento de DERIVE ni de
Rodríguez Rodríguez, Ana M	...	8	SI	Son interesantes	B	Por el horario que no me viene bien
Rodriguez Rodriguez, César	...	Bien	si	Siempre he preferido los números	B	Prefiero escribir, más tradicional
Rodriguez Velasco, Rocio	...	Sobresaliente	si	...	B	Por el horario
Ropero Martin, Loreto	...	Notable	SI	Porque me gusta trabajar con números	B	No me gustan los ordenadores
Rosa Castaño, Javier de la	...	Notable	SI	...	B	...
Rubio Márquez, Manuel	...	Suficiente/Bien	SI	...	B	Por el horario
Ruiz Calle, Alicia Victoria	...	6,8	SI	Son necesarias, aunque no me apasionan especialmente	B	Horario adecuado, desconocimiento inforı
Salinas Pozo, Carlos	...	Aprobado	si	Dificultad y capacidad de abstracción, util para el estudio económico	B	...
San Juan Hernanz, M. Pilar	...	Notable	SI	...	B	El horario no me lo permite y poco conoci
Santamaría Fernández, Alber	...	Notable	SI	Forman parte de la carrera que me gusta	B	A pesar de mi inter´res el horario no me lo
Sanz Fernández, M. Angeles	...	Notable	NO	...	B	Trabajo por las mañanas
Sarabia Fernández Maria	...	Bien	SI	...	B	Prefiero dar clase con el método tradicion
Sierra Muñoz, Adela	...	6,5-7	SI	...	B	Por el horario. No manejo muy bien el ord
Solesio Larré, Berta	...	Bien	SI	Porque creo que en esta carrera son importantes	B	Por el horario y no he hecho el curso de D
Toribio Gómez, Esther	...	7	SI	Las considero fundamentales en cualquier ocupación	B	El horario del grupo B me es más accesib
Torre Cantalapiedra, Alberto	...	9	SI	Son entretenidas	B	No me convence el primer sistema
Torre Romero, Nuria de la	...	Notable	SI	...	B	Prefiero método tradicional
Varea Blanco, Ana María	...	BIEN	...	...	B	No manejo ningún programa informático
Vázquez Calle, Nerea	...	Notable	SI		B	Por el horario y no tengo conocimientos d
Vela Muñoz, Alvaro	Aprobado	Sobresaliente	SI	Son la base de las ciencias. Toda aplicación requiere su uso	B	Incompatibilidad horaria
Vela Navarro, Paloma	...	Notable	SI	Me gustan y son necesarias para mi carrera	B	No tengo conocimientos de windows ni in
Velasco Ortega, María	...	Notable	SI	Me sirven para relajarme despues de estudiar, me parecen muy intersantes	B	Creo que no podría manejar un ordenado
Velasco Ortiz, David	...	APROBADO	SI	...	B	Horario y no tener conocimientos de infor
Vicente Hernández, Maria	...	6,5	SI	...	B	Por el horario
Vicente Vicente, natalia	...	6	SI	Las considero necesarias en la actualidad	B	Método tradicional no tendo conocimiento

Vicenti Chamón, Borja	...	Notable	SI	Me gustan	B	Método tradicional
Vieco González, Eva Esther	...	Bien	SI	Porque es importante para la carrera y para mi cultura	B	Por el horario y porque no he hecho el cu
Vilela Rodrigo, Yeray G.	...	Bien	SI	Siempre es un reto	B	El horario no me viene bien
Villegas Bartolomé, Ignacio	...	6	SI	...	B	...
Vivar Armenteros, Gonzalo	...	...	SI	Son muy útiles	B	Puede ser complicado estudiar mediante

3. Resultados obtenidos

La encuesta inicial tenía por objeto realizar una recogida de datos para que los alumnos eligiesen el tipo de metodología que deseaban para la asignatura Matemáticas II. En dicha encuesta se recogieron datos generales relacionados con cuatro aspectos importantes:

- Los conocimientos de informatica e internet
- El historial académico de cada alumnos.
- La actitud general ante las Matemáticas
- Motivos de la elección de metodología.

Como inicialmente se desconocía el grado de interés que podría suscitar la metodología que utilizaba DERIVE (Subgrupo A), y ante la existencia de un número de plazas limitado para realizar esta experiencia educativa (36 plazas) se plantearon varias condiciones para elegir el subgrupo:

1. La primera de ellas era el horario. El subgrupo experimental A tendría clase los Lunes y Jueves de 14:30 a 16:30 en el Aula de Informática, mientras que el subgrupo B, tendría clase los Lunes y Jueves de 16:30 a 18:30.
2. Se solicitaba que los alumnos estuviesen matriculados por primera vez en la asignatura.
3. También se solicitaba que existieran unos mínimos conocimientos de Windows, a nivel de usuario.
4. Por último se pedían pequeños conocimientos de Internet y manejo de un programa de correo electrónico.

La encuesta se realizo sobre una muestra de 78 alumnos, de los cuales eligieron el subgrupo experimental un total de 16 alumnos y eligieron el subgrupo B un total de 62.

No hizo falta emplear ningún tipo de criterio de selección pues el número de plazas fue reducido. Por tanto podemos decir que la elección de subgrupo ha sido totalmente libre sin ningún tipo de criterio selectivo, el único elemento selectivo ha sido el horario, motivo por el cual 20 alumnos no eligieron este subgrupo, en cuyo caso, tampoco hubiera sido necesario un criterio de selección pues hubieran sido exactamente el número de plazas.

La elección del subgrupo A suponía una metodología distinta y una evaluación distinta respecto del subgrupo B, por lo que se solicitó a los alumnos que formalizasen la elección firmando el documento, de tal forma que no era posible realizar en adelante ningún cambio de subgrupo.

A continuación vamos a realizar un pequeño estudio de las características de cada uno de los subgrupos que se han formado.

<u>Resumen de datos para SUBGRUPO A.</u>

Los alumnos que eligieron el subgrupo A fueron un total de 16, lo que supone un 20,5% respecto al total de alumnos que realizaron la encuesta. Un porcentaje realmente sorprendente, dado que se trata de una experiencia educativa que podría ofrecer elementos atractivos a los alumnos.

De estos alumnos 14 cursaban la asignatura por primera vez y 2 eran alumnos repetidores, y por tanto conocedores de la metodología tradicional. Por otro lado el porcentaje de mujeres respecto al de hombre es claramente de 1 a 3 , de tal forma que de los alumnos que eligieron esta metodología fue de un 25% de mujeres y un 75 % de hombres, es decir que el grupo estaba formado por 12 alumnos y 4 alumnas, dato que puede resultar significativo si tenemos en cuenta que el porcentaje de mujeres respecto al grupo total es del 46 %.

En cuanto a los conocimientos en informática se puede afirmar que todos tienen conocimientos en Windows a nivel de usuario, manejan Navegadores y correo electrónico.

El historial académico general de estos alumnos es el siguiente: la forma de acceso a la universidad ha sido a través de la selectividad (100%) de ellos 13 han estudiado COU y 3 han realizado el Bachillerato LOGSE. La nota media de acceso de todos ellos ha sido de 6,73 y la nota media en Matemáticas en los últimos años de 6,96. Se trata por tanto de un grupo normal en cuanto a las calificaciones se refiere.

Uno de los elementos que nos resultó muy importante fue la actitud hacia las matemáticas. De los alumnos que eligieron este subgrupo 13 (81,25%) afirmaron en sus contestaciones que les gustaban las matemáticas por numeroso motivos: como herramienta para el futuro, necesaria para la carrera (25%), porque son una asignatura práctica (12%), porque ayudan a pensar y razonar (18,7%) y por otros motivos más específicos (3%). Por el contrario hubo 3 alumnos que dijeron claramente que no les gustaban (18%).

Uno de los bloques de preguntas más importantes fue el relacionado con los motivos de elección del subgrupo. Las respuestas se agruparon de cinco motivos fundamentales:

- por probar una metodología nueva, y una nueva forma de aprender matemáticas, esta respuesta la dieron 5 alumnos (31,25%)
- porque “me gusta mucho la informática, y resulta interesante usar un programa en matemáticas” , respuesta que dieron 3 alumnos (18,75%)
- porque “me gustan la informática unida a las matemáticas” , respuesta formulada por 2 alumnos (12,5%)
- porque “me gusta trabajar con ordenadores” , respuesta dada por 2 alumnos (12,5%)
- porque “me parece ameno, educativo e interesante”, respuesta dada por 1 alumno (6,25%)

- porque "se supone que tratará problema más reales" , 1 alumno (6,25%).

Todas estas argumentaciones de elección, obedecen a un interés y una motivación inicial bastante importante por parte de los alumnos. Las expectativas de novedad unidad al mundo informático puede decirse que han sido las que han generado el interés de los alumnos por su elección de subgrupo.

Resumen de datos para SUBGRUPO B.

Los alumnos que eligieron este subgrupo fueron 62 es decir un 79,5% del total de alumnos encuestados. Esta cifra resultó sorprendente, y la pregunta que surge de forma inmediata es la siguiente ¿cómo es posible que la oferta de una metodología nueva basada en los ordenadores, presente tan poco interés?. Quizás sobre este grupo de elección habría que eliminar a aquellos alumnos que no eligieron el subgrupo por problemas de horario (20 alumnos) lo cual significaría que potencialmente hubieran sido 42 los alumnos que habrían dicho un no rotundo al la metodología es decir un 53%, porcentaje un poco menos escandaloso que el anterior.

De estos 62 alumnos 56 cursaban la asignatura por primera vez y 6 eran alumnos repetidores. Por otro lado el porcentaje de mujeres del grupo es de un 52% sobre un 48% de hombres, es decir 32 mujeres y 30 hombres.

En cuanto a los conocimientos en informática los alumnos que manejan windows (42 alumnos) representaban un 67% del grupo, los alumnos que manejan navegadores (23 alumnos) un 37% del grupo y los alumnos que manejan correo electrónico (26 alumnos) un 42 % del grupo. Parece que aunque no se impusieron criterios de selección a nivel de conocimientos informáticos para formar parte del subgrupo A, los propios alumnos fueron los que se autoseleccionaron, prueba de ello es que las respuestas que motivan la elección del subgrupo B y no el subgrupo A se fundamentaron en no dominar los ordenadores, o tener problemas con los ordenadores.

El historial académico de estos alumnos hay que señalar que en su mayoría proceden del COU (70,5%) aunque existen algunos alumnos que han realizado Bachillerato LOGSE (19,7%) y un porcentaje mínimo proceden de otros estudios (9,84%). La calificación media de acceso ha sido de un 6,93, y en cuanto ala nota media en matemáticas los últimos años es de un 6,7. Se trata de un grupo medio.

En cuanto los motivos de elección de este subgrupo se podría englobar en los siguientes bloques:

- porque "no me cuadra el horario" (20 alumnos) representa un 32,3% de este grupo
- porque "el horario no me va y no domino los ordenadores" (10 alumnos) que representa un 16,1% sobre el grupo.
- Porque "el horario no me viene bien y tengo problemas con los ordenadores" (3 alumnos) un 4,84% del grupo.

- Porque “tengo problemas con los ordenadores y no se manejar internet o windows” (7 alumnos) un 11,3% sobre el grupo.
- Porque “prefiero la metodología tradicional” (7 alumnos) un 11,3%.
- Porque “no me gustan los ordenadores” (2 alumnos) un 3,23 %.
- Porque “no me convence el método del subgrupo A” (1 alumno) un 1,61%
- Porque “puede ser complicado estudiar con ordenador” (2 alumnos) un 3,25%
- No contestaron el motivo (9 alumnos) un 14,5%.

De los datos que hemos comentado de ambos subgrupos podemos extraer varias conclusiones:

- Respecto a los MOTIVOS por los cuales se elige o no este subgrupo experimental, volvemos a recalcar el pequeño número de alumnos que eligieron el subgrupo (16 alumnos, 20% del total). Si tenemos en cuenta que estos alumnos conocían o dominan los ordenadores, y añadimos que un número elevado de alumnos tenían problemas con el horario (20 alumnos, un 23% del total) se puede decir que alrededor de un 43% de los alumnos hubiesen elegido este subgrupo, dato que en todo caso no es esperable, ya que se pensaba que existirían problemas en la selección de alumnos, motivo por el cual se plantearon previamente los criterios de selección. Por otro lado observando que la mayor parte de los alumnos que no eligen este subgrupo alegan o bien problemas con el ordenador, o que no les gustan los ordenadores, podemos afirmar que el motivo fundamental por el cual se realiza la elección del subgrupo experimental es por el manejo, a nivel de usuario, de windows y en general de los ordenadores.
- Si analizamos la actitud de los alumnos frente a las Matemáticas observamos que en el subgrupo A, el porcentaje de alumnos a los que no les gustan las matemáticas es del 18%, y en el subgrupo B del 9,8% casi la mitad, sin embargo podría llevarnos a decir que puede que los alumnos a los que no les gusta las matemáticas hayan encontrado más atractiva esta metodología.
- Resulta significativo que el porcentaje de alumnas que han elegido el subgrupo A respecto del total es de un 5% mientras que las que eligen el subgrupo B respecto del total es de un 41%; y en los alumnos los que eligen el subgrupo A representan un 15% y los que eligen el subgrupo B un 38%, aunque el total de alumnos en el grupo es de un 54% y el de alumnas un 46%. Esto parece indicar que los alumnos tienen una tendencia mayor que las alumnas para seleccionar una nueva metodología basada en los ordenadores. Esta tendencia se hace significativa

cuando comparamos la proporción de alumnos de hombre y mujeres en cada subgrupo, ya que en el subgrupo A hay un 25% de mujeres frente a un 75% de hombres; mientras que en el subgrupo B hay un 52% de mujeres y un 46% de hombre.

ANEXO VI.
Colección de PROBLEMAS PROPUESTOS en cada capítulo y observaciones realizadas.

1. <u>Enunciados de los PROBLEMAS PROPUESTOS en cada uno de los capítulos.</u>

<u>CAPÍTULO I: ESPACIOS VECTORIALES.</u>
<u>PROBLEMAS.</u>

<u>PROBLEMA I-1.</u>
Una compañía constructora almacena tres mezclas básicas A, B y C. Las cantidades se miden en gramos y cada "unidad" de mezcla pesa 60 gramos. Pueden formularse mezclas especiales de argamasa efectuando combinaciones de las tres mezclas básicas. Por ello, las mezclas especiales posibles pertenecen al espacio generado por los tres vectores que representan las tres mezclas básicas. La composición de éstas es:

	A	B	C
Cemento	20	18	12
Agua	10	10	10
Arena	20	25	15
Grava	10	5	15
Tobas	0	2	8

(a) ¿Es posible hacer una mezcla que consiste en 1.000 g. de cemento, 200 g. de agua, 1.000 g. de arena, 5000 g. de grava y 300 g. de tobas? ¿Por qué se puede o por qué no?. Si se puede, ¿cuántas unidades de cada mezcla básica A, B y C se necesitan para formular la mezcla especial?

(b) Supóngase que se desean hacer 5.400 g. de argamasa de manera que contenga 1.350 g. de cemento, 1.675 g. de arena y 1.025 g. de grava. Si la razón de agua a cemento es de

2 a 3, ¿qué cantidad de tobas debe utilizarse para obtener los 5.400 g. de argamasa? ¿Se puede formular esta masa como una mezcla especial? Si es así, ¿cuántas unidades de la mezcla A, B y C se necesitan para formular la mezcla especial?

PROBLEMA I-2.

Sea $P_{<4}$ el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor estrictamente que 4. Demostrar que el conjunto de polinomios $\{1+t, t+t^2, t^2+t^3, t^3\}$ es una base de dicho espacio vectorial.

Extender este conjunto hasta formar una base del espacio vectorial P_4 de los polinomios reales de grado menor o igual que 4.

PROBLEMA I-3.

Sea V_0 un subespacio de R^n. Definir a $V_0^{\perp}$ como el conjunto de todos los vectores de R^n que son ortogonales a TODOS los vectores del subespacio V_0.

a) Comprobar que $V_0^{\perp}$ es un subespacio vectorial de R^n.
b) Si en particular V_0 el subespacio vectorial de R^3 cuya base viene dada por los vectores $\{(2,1,-3),(-1,0,-2)\}$. Encontrar una base para $V_0^{\perp}$.

PROBLEMA I-4.

Sea $H=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)\in R^6/x_1+2x_2-x_3=0, x_2+2x_3-x_4=0, x_3-x_4+x_5=0\}$. Se pide:

a) Obtener una base B de H.
b) Calcular las coordenadas del vector (1,2,3,-8,-11) en dicha base.

PROBLEMA I-5.

Calcular

a) $L_1\cap L_2$, siendo $L_1=\{(x,y,z,t)\in R^4/x=y=z=t\}$ y $L_2=\{(x,y,z,t)\in R^4/x=z, y=t\}$
b) $L_2\cap L_3$, siendo $L_3=\{(x,y,z,t)\in R^4/y=2t, t=2z\}$.
c) Indicar si la suma es directa en cada uno de los siguientes casos: L_1+L_2, L_1+L_3, L_2+L_3 y calcularla.

PROBLEMA I-6.

Una empresa constructora tiene un pedido de ocho tipos de casas: 5 casas de tipo 1, 20 casas de tipo 2, 12 casas de tipo 3, 21 casas de tipo 4 y 87 casas de tipo 5. Supongamos que cada casa del tipo 1 necesita 13 unidades de madera, cada casa del tipo 2 necesita 16 unidades, las del tipo 3 necesita 45 unidades, las del tipo 4 necesitan 21 unidades y las del tipo 5 necesita 87 unidades de madera.

a) Expresar de forma vectorial la solución del problema y calcular la cantidad de madera que se necesita en total.
b) Si por motivos extraordinarios resulta que el suministrador de madera nos ha limitado la cantidad de madera total para la construcción de los cinco tipos de vivenda a 6.238 unidades de madera, suponiendo que ya habíamos construido los cuatro primeros tipos de vivienda, ¿será necesario modificar el modelo de vivienda tipo 5? ¿de qué forma?

PROBLEMA I-7.

Una empresa tiene dos plantas que producen cinco bienes. Sus recursos laborales son constantes. Cuando se asigna a la primera plante una fracción λ de estos recursos laborales y la fracción 1-λ a la segunda (con 0≤λ≤1), la producción total de los tres bienes está dada por el vector

$$\lambda\begin{pmatrix}2\\4\\32\\23\\12\end{pmatrix}+(1-\lambda)\begin{pmatrix}4\\15\\19\\21\\25\end{pmatrix}$$

Suponiendo que no se pierde producción, averiguar si sería posible obtener la siguiente una producción de 3 unidades para el primer producto, 9.5 unidades para el segundo, 20.5 para el tercero, 22 para el cuarto y 18.5 para el quinto.

¿será posible obtener de 12 para el primero, 11 para el segundo , 9 para el tercero, 1 para el cuarto y 12 para el quinto?

PROBLEMA I-8

Una empresa produce las siguientes cantidades no negativas $z_1,z_2,...,z_n$ de n bienes distintos, a partir de cantidades no negativas $x_1,x_2,...,x_n$ de los mismos n bienes. Para cada i=1,...,n se define la PRODUCCIÓN NETA del bien i como $y_i=z_i-x_i$. Sea p_i el precio unitario del bien i. Sean $\overline{p}=(p_1,...p_n), \overline{x}=(x_1,...,x_n)$ (vector de INPUTS), $\overline{y}=(y_1,...,y_n)$ (el vector de producción NETA) y $\overline{z}=(z_1,...,z_n)$ (el vector de PRODUCCIÓN).

Suponiendo que una empresa concreta produce cinco bienes tales que su vector de producción es (2,3,1,8,3). Si el vector de inputs viene dado por (3,9,7,1,2) y el vector de precios es (43, 23, 87,12,34). Hallar:

(a) el vector de producción neta.
(b) Calcular los costes
(c) Calcular los ingresos.
(d) Los beneficios o pérdidas.

PROBLEMA I-9.

Dados los subespacios vectoriales de R^4:

$A=L\{(1,2,1,1),(-1,0,1,0),(2,2,0,1)\}$ y $B=\{(x,y,z,t)\in R^4/2x-2y+2z-t=\}$

Se pide:

a) Obtener una base de cada uno de ellos.
b) Una base de $A\cap B$.
c) Las ecuaciones cartesianas de A+B.
d) Si consideramos el conjunto suplementario de A al conjunto A^c tal que $A\oplus A^c=R^4$. Obtener A^c.

PROBLEMA I-10.

En el espacio vectorial real ordinario R^4 se consideran los subespacios vectoriales:

$A=L\{(1,1,1,0),(0,1,2,c),(c,1,-3,0)\}$

$B=\{(x,y,z,t)\in R^4/x-y+cz-t=0,x-y+cz+t=0, c\in R\}$

En función de los valores de c, hallar:

a) La dimensión de A y una de sus bases.
b) La dimensión de B y una de sus bases.
c) Una base de $A\cap B$
d) Hallar los valores de c para los que $A\subset B$.

CAPÍTULO II: APLICACIONES LINEALES. MATRICES. PROBLEMAS.

Problema II-1

La empresa IMAGE DEVELOPMENT COMPANY, I.D.C., fabrica en su planta de Zaragoza tres tipos de televisores: de 14, 21 y 25 pulgadas. Los almacenes principales se encuentran en Madrid, Barcelona, Vigo y Sevilla. Las ventas durante el año 1996 de almacén de Madrid se cifraron en 400, 100 y 500 televisores de 14, 21 y 25 pulgadas respectivamente; las del almacén de Barcelona en 300, 150 y 400; las del almacén de Vigo en 100, 100 y 200 y las del almacén de Sevilla en 200, 150 y 300. Los precios de venta de los televisores en 1996 fueron de 25.000 ptas. para los de 14 pulgadas, de 50.000 ptas. para los de 20 pulgadas y 80.000 ptas. para los de 25 pulgadas. Se pide:

(a) Expresar las ventas de la empresa mediante una matriz A de orden 4x3.

(b) Expresar mediante un vector columna el precio de cada tipo de televisor.

(c) Interpreta el significado de $A\,\bar{x}$

"Problemas de Álgebra Lineal. Cuestiones, Ejercicios y Tratamiento en DERIVE", P. Sanz; Francisco J. Vázquez y P. Ortega. Prentice Hall. 1998.

Problema II-2.

Un fabricante produce cuatro artículos diferentes, cada uno de los cuales requiere para su elaboración de 5 materias primas. Los cuatro productos se denotan por p_1,p_2,p_3 y p_4, y las cinco materias primas por M_1, M_2, M_3, M_4 y M_5. En la tabla que se indica a continuación se representa el número de unidades de cada materia prima que se requier para elaborar una unidad de cada producto

	p_1	p_2	p_3	p_4
M_1	1	2	1	3
M_2	2	2	1	1
M_3	2	1	4	2
M_4	5	1	8	1
M_5	6	2	1	3

Se pide:

(a) Determinar la ley que asocia a cada vector de producción (p_1,p_2,p_3,p_4) el vector de materias primas (M_1,M_2,M_3,M_4,M_5) que le corresponde para que dicha producción sea posible.

(b) ¿La ley determinada en el apartado anterior es una aplicación lineal?

Problema II-3.

En el Centro Superior de Estudios Empresariales de una empresa se van a seleccionar tres becarios de entre los cinco aspirantes admitidos: Antonio L., Elvira C., Verónica S., María O. y Carlos P. La selección se va a realizar atendiendo a las calificaciones que hayan obtenido en ciertas materias, indicadas en la siguiente tabla:

	Matemáticas Empresariales	Macroeconomía	Microeconomía	Sistemas Dinámicos
Antonio L.	7	5	8	10
Elvira C.	5	9	7	8
Verónica S.	10	7	6	8
María O.	9	6	10	7
Carlos P.	8	7	9	8

Para la concesión de las becas se han establecido unos baremos que, según el Departamento al que vaya a ir destinado el becario (los llamaremos Departamento 1º, 2º y 3º), dan distinto "peso" a cada una de las calificaciones obtenidas por los distintos aspirantes. Estos "pesos" son los que se señalan en la tabla siguiente:

	Departamento 1º	Departamento 2º	Departamento 3º
Matemáticas Empresariales	4	1	1,5
Macroeconomía	1	4,5	1
Microeconomía	3,5	1,5	2,5
Sistemas Dinámicos	1,5	3	5

Si estos baremos funcionan de forma LINEAL, es decir, para cada Departamento la puntuación total que obtiene un aspirante es la suma de los productos de sus notas por los respectivos "pesos" que se les asigna en el Departamento en Cuestión. Se pide:

Utilizar un modelo matricial para realizar el siguiente estudio:

¿Cuál es la puntuación total de los aspirantes en cada Departamento?

¿Quiénes son los becarios elegidos en cada Departamento?

PROBLEMA II-4.

Estudiar si existe alguna matriz real A de orden 3x2 tal que A.A'=I.

PROBLEMA II-5.

Sea la aplicación lineal definida por

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-2x_2+x_3-6x_4,x_2+2x_3+x_4,2x_3+3x_4,6x_1+x_4)$$

Se pide:

(a) Hallar la matriz A asociada a f respecto de la base:

B={(1,1,1,1), (1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0)}

en el espacio inicial y final de R^4

(b) Hallar la matriz C asociada a f respecto de las bases canónicas.

(c) Calcular por el procedimiento de Gauss-Jordan la matriz inversa de C.

(d) Obtener si es posible la aplicación lineal inversa de f: g=f^{-1}, y comprobar que (fog)=(gof)=id.

PROBLEMA II-6.

Sea $f: R^6 \to R^6$ una aplicación lineal tal que

$$f(3,4,2,1,3,0)=(5,14,1,3,-5,1)$$
$$f(2,3,1,0,8,2)=(0,34,-6,9,-47,-6)$$
$$f(1,1,2,0,-3,1)=(6,-13,7,-7,24,-3)$$
$$f(32,1,2,4,8,3)=(14,31,-4,66,-37,-5)$$
$$f(0,0,1,2,8,23)=(-14,31,-6,5,-48,-67)$$
$$f(2,14,2,3,7,5)=(14,40,-3,5,5,-12)$$

Calcular los vectores

$$f(-2159,-1474,-247,-520,-1513,-535)$$
$$f(230,23,18,13,-61,-206)$$

PROBLEMA II-7.

Dadas las siguientes aplicaciones lineales:

$$f_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(4x_1-2x_2,x_3-4x_4,x_1+x_2+x_3+x_4+x_5,6x_1-2x_5)$$
$$f_2(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-x_1+x_2+x_3-x_4,2x_1-2x_2-2x_3+2x_4)$$

Se pide:

(a) Hallar las matrices asociadas a dichas aplicaciones considerando tanto en el espacio de partida como en el de llegada las correspondientes bases canónicas.
(b) Calcular los rangos de dichas aplicaciones lineales.
(c) Obtener los subespacios núcleo e imagen de dichas aplicaciones lineales
(d) Obtener la matriz asociada a la aplicación lineal $(f_2 \circ f_1)$
(e) Obtener las aplicaciones lineales 6f_1 ; 8 f_2 a partir de la matriz obtenida en el apartado (a).

PROBLEMA II-8

Dada la aplicación lineal $f : R^5 \to R^4$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_2, 3x_2 - x_3, x_3 + 2x_4, x_4 + 2x_5)$$

determinar la matriz asociada a f respecto de las bases

$$B_1 = \{(1,2,3,4,5), (0,1,2,3,4), (0,0,1,2,3), (0,0,0,1,2), (0,0,0,0,1)\}.de.R^5$$
$$B_2 = \{(1,1,1,1), (1,2,1,2), (0,0,0,1), (1,3,-1,3)\}.de.R^4$$

PROBLEMA II-9.

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 9 & 8 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} y.C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 9 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & -3 & -5 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & -2 & -1 & 9 \\ 8 & 6 & 3 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinar si son invertibles y, si lo son, calcular la matriz inversa utilizando el método de Gauss-Jordan.

PROBLEMA II-10.

Determinar dos matrices cuadradas de orden 3, X e Y tales que

$$35X + 64Y = \begin{pmatrix} -2141 & 233 & 576 \\ 6272 & 443 & 344 \\ 827 & 693 & 227 \end{pmatrix}$$
$$12X - 2Y = \begin{pmatrix} 80 & 32 & -18 \\ -196 & 104 & 94 \\ 92 & 70 & 6 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA II-11

Demostrar que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

verifica la relación $A^n = 3^{n-1} A$

(sugerencia: intentar hacerlo para distintos valores de n, obteniendo de aquí la posible conjetura)

PROBLEMA II-12.

Demostrar que si a,b,c son tres números reales que verifican que $a^2+b^2+c^2=1$, entonces la matriz

$$M = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

es idempotente.

PROBLEMA II-13

Sea f la aplicación lineal definida por las ecuaciones:

$$f(x,y,z,t) = (x-z, -4y+z+t, -x+ay, x+2t)..(a \in R)$$

(a) Obtener la matriz de f (respecto de las bases canónicas)

(b) Hallar los valores del parámetro “a” para los cuales f tiene inversa.

(c) Determinar para dichos valores, mediante Gauss-Jordan la inversa de dicha matriz.

(d) Para a=2, obtener una base del Ker(f) y de Im(f).

PROBLEMA II-14

Determinar el subespacio vectorial del conjunto de las matrices de orden 3x2, generado por las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

¿Son las matrices A,B y C linealmente independientes?

CAPÍTULO III: TRAZA Y DETERMINANTE DE UNA MATRIZ. PROBLEMAS.

Problema III-1

¿Cuál tiene que ser la condición que se ha de verificar para que la igualdad

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos.a & \cos.b \\ \cos.a & 1 & \cos.c \\ \cos.b & \cos.c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos.a & \cos.b \\ \cos.a & 0 & \cos.c \\ \cos.b & \cos.c & 0 \end{vmatrix} ?$$

Problema III-2.

Hallar el valor máximo que puede tomar un determinante de tercer orden, si todos sus elementos son iguales a: +1 ó a: –1.

Problema III-3.

Hallar el valor máximo que puede tomar un determinante de tercer orden si todos sus elementos son iguales a: +1 ó a: 0

Problema III-4.

Resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & n-x \end{vmatrix} = 0$$

Problema III-5

Encuentra el valor del parámetro t para que el rango de la siguiente matriz sea 2:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & a-1 & -2 & 0 & 4 & 2a \\ 1 & 2 & a^2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 8 & -1 & a+1 & 2a-2 \end{pmatrix}$$

Problema III-6

Resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 1+x & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 1+x & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 1+x \end{vmatrix} = 0$$

DERIVE no entiende los puntos suspensivos.

Si no sabes cómo resolverlo puedes intentar dar valores a n y calcular los sucesivos determinantes. A la vista de los resultados obtenidos intenta generalizarlo de forma razonada.

<u>Problema III-7.</u>

Estudiar para qué valores de a tiene sentido estudiar la inversa de la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular la inversa para aquellos valores que tenga sentido.

<u>Problema III-8.</u>

Calcular el determinante de la matriz de Vandermonde de orden 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & e \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & e^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & e^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & e^4 \end{pmatrix}$$

<u>Problema III-9.</u>

Dada la aplicación lineal $f:R^4 \rightarrow R^4$ definida por

f(x,y,z,t)=(x-y+t, 2x+4z-t, x+y, 2x+y-z+t)

Obtener la dimensión de la Im(f) y Ker(f) sin obtener una base de dichos subespacios.

<u>Problema III-10.</u>

Determinar para qué valores del parámetro t, el siguiente conjunto de vectores es linealmente independiente:

{(1,2,3,t,5),(2,1,3,0,1),(1,1,2,0,2),(4,4,8,1,8)}

Problema III-11.

Dada la aplicación lineal $f:R^4 \rightarrow R^4$ definida por las ecuaciones:

$$f(x,y,z,t) = (4y+az,\ 4x+ay,\ 4x+az,\ 4x+at) \quad (a \text{ número real})$$

Se pide:

a) Determinar para qué valores de a, f tiene inversa.
b) Calcular la inversa de f para esos valores.

Problema III-12.

Calcular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

CAPÍTULO IV: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

PROBLEMAS.

Problema IV-1.

Las condiciones de equilibrio de mercado de tres bienes conduce a que los precios de los mismos cumplan que:

$$P_1 + P_2 - P_3 = 10$$
$$P_1 - P_2 = 0$$
$$P_1 - P_2 + P_3 = 10$$

1) Determinar los precios que satisfacen las condiciones dadas. ¿Son dichos precios únicos?
2) Si las condiciones de equilibrio fuesen sólo las expresadas por las dos primeras ecuaciones. Determinar las condiciones que deben cumplir los precios. ¿Son dichos precios únicos? ¿Cuántos grados de libertad tiene el problema?

Problema IV-2.

Discutir para los distintos valores de “a” y resolver en los casos en que sea compatible el sistema:

$$\begin{cases} (1-a)x+(2a+1)y+(2a+2)z=a \\ ax+ay=2a+2 \\ 2x+(a+1)y+(a-1)z=9-2a+a^2 \end{cases}$$

Problema IV-3.

Sea el sistema:

$$\begin{cases} ax+y+z+t=1 \\ x+ay+z+t=a+3 \\ x+y+az+t=5+a^2 \\ x+y+z`+at=12+a^3 \end{cases}$$

Hallar los valores de “a” que hacen el sistema compatible e indeterminado. Resolverlo en esos casos.

Problema IV-4.

Dado el sistema

$$\begin{cases} x+3y-az=4 \\ -ax+y+az=0 \\ -x+2ay=a+2 \\ 2x-y-2z=0 \end{cases}$$

Se pide:

(a) Discutirlo según los valores de “a”
(b) Resolverlo cuando sea compatible.

Problema IV-5

Estudiar para los distintos valores de “a” y “b” el sistema

$$\begin{cases} ax+y+bz=0 \\ x+ay+2z=b-2 \\ x+ay+bz=a-1 \end{cases}$$

Problema IV-6

La suma de las tres cifras de un número es igual a 6. La cifra de las centenas es igual a la suma de las cifras de unidades y decena. Si se invierte el orden de las cifras, el número disminuye en 198 unidades. Calcular dicho número.

Problema IV-7.

Supóngase que la economía de un país está repercutida por cuatro industrias, cada una de las cuales produce un único bien. Además, el producto final de cada industria se consume con input en todas ellas. Si denotamos por a_{ij}, i,j=1,2,3,4 al número de unidades del bien i-ésimo precisas para producir una unidad del producto que genera la j-ésima industria, se tiene para los cuatro productos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

¿Qué cantidades deben producirse en las cuatro industrias para satisfacer las necesidades de todas ellas y las demandas de sus consumidores finales, que son de 20, 30, 25, 35 unidades de productos respectivamente por cada una de las industrias?

Problema IV-8

Un hotel de la costa levantina tiene un total de 235 camas, y suele llenarse con las reservas fijas que relizan diversas agencias de viajes, en concreto, con una agencia frances, una italiana, una alemana, una inglesa, una portuguesa y una española.

El mes de junio de 1996 el hotel estuvo completo con las reservas de las citadas agencias. El siguiente mes se mantuvo el lleno del hotel pero cambió el numero de reservas de cada agencia, ya que la agencia italiana canceló sus reservas y en su lugar la agencia portuguesa las duplicó. En agosto de 1996 tan sólo se mantuvieron las reservas de las agencias francesa y española y se duplicó la reserva que hizo la agencia italiana en junio, quedando 33 camas libres.

Ante esta situación, la dirección del hotel decidió realizar una promoción para la agencias española y francesa, manteniendo las mismas condiciones de contratación que tenía en junio de 1996 con el resto de compañía. El resultado no fue muy positivo, ya que en junio de 1997 quedaron vacías 3 camas; siendo el hotel ocupado por las reservas de las agencias francesa, española y portuguesa, y duplicándose la reserva de la agencia alemana.

En julio, en el hotel tan sólo hubo 132 personas provenientes de los cupos de reservas de las agencias española, alemana y el doble del cupo de la portuguesa.

Por último, en agosto de 1997 sólo se cumplieron los compromisos de las agencias española, inglesa y alemana y quedaron vacías 150 camas.

¿Cuáles son los cupos de reserva que el hotel tiene contratados con cada una de las agencias?

<u>Problema IV-9</u>

Determinar qué condiciones han de verificar los parámetros a y b para que sean compatibles los siguientes sistemas, calculando sus soluciones cuando existan.

$$(a).\begin{cases} ax+2y+4z=1 \\ -x+ay+3z=b \\ 2y+z=1 \\ -2x+ay+3z=b \end{cases}$$

$$(b).\begin{cases} x-z+3t=b \\ 4x+y+az-2t=1 \\ ax+y+2z+3t=a \\ -x-y+4at=-3 \end{cases}$$

<u>Problema IV-10</u>

Plantear y resolver los siguientes problemas:

(a) De un capital de 20.000 ptas. se ha colocado una parte al 5% y la restante al 4%. La primera produce anualmente 280 ptas. más que la segunda. Hallar los valores de las dos partes del capital.

(b) A una finca de regadío de Badajoz se la asignan mensualmente 48 horas, distribuidas entre los productores que la cultivan, proporcionalmente al terreno que tiene cada uno a su cargo. El productor A tiene 1,5 ha., el B 1 ha y 40 área y el C 70 áreas. Calcular las horas de riego que corresponden a cada uno.

(c) Una profesor de matemáticas para estimular a un alumno suyo le dice: por cada ejercicio que resuelvas bien te daré 70 ptas. y por cada uno que hagas mal me darás 50 ptas. Después de hacer 25 ejercicios, el muchacho se encuentras con 550 ptas. ¿Cuántos ejercicios ha resuelto bien?

(d) Los tres lados de un triángulo rectángulo son proporcionales a los números 3,4 y 5. Hallar la longitud de cada lado sabiendo que el área del triángulo es 24 m^2

CAPÍTULO 5: AUTOVALORES Y AUTOVECTORES DE UNA MATRIZ. DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES.

PROBLEMA V.1

Sabemos que la matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ c & -1 & r \end{pmatrix}$$

admite como autovectores (1,1,0), (-1,0,2) y (0,1,-1).

Hallar los elementos de dicha matriz así como sus autovalores.

PROBLEMA V.2

Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 3 & b \end{pmatrix}$$

Calcular los valores de los parámetros a y b para que

(a) el vector (-1,1) sea un autovector del autovalor λ_1=4 para la matriz M.

(b) El vector (1,1) sea un autovector asociado al autovalor λ_1=5 en la matriz A.

PROBLEMA V.3

Comprobar que las siguientes matrices no son semejantes a pesar de tener el mismo polinomio característico:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \ldots\ldots B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA V.4

Estudiar si son diagonalizables las siguientes matrices, calculando en los casos que sea posible las matrices P_i y D_i (diagonales) para las cuales se verifica que $A_i=P_i.D_i.P_i^{-1}$ para i=1,2.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -6 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 153/112 & -13/56 & 87/112 & 1/2 & -97/112 \\ 113/112 & 139/56 & -353/112 & 7/2 & -505/112 \\ 207/112 & 45/56 & -271/112 & 9/2 & -711/112 \\ 71/56 & 13/28 & -87/56 & 4 & -239/56 \\ 3/7 & 1/7 & -2/7 & 1 & -3/7 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA V.5

Determinar si existe una base B de R^4 respecto de la cual la matriz asociada a la siguiente aplicación lineal sea una matriz diagonal:

f(x,y,z,t)=(2x-t/2, 2y+z-t/4, 2z-t/4, t)

PROBLEMA V.6

Se considera la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & e & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Se pide:

(a) Obtener los autovalores de M.

(b) ¿Qué valor o valores puede tomar e para que M tenga un un autovalor de multiplicidad algebraica 2? Sustituir e por esos valores y estudiar si M es diagonalizable.

(c) ¿Qué valores puede tomar e para que M tenga tres autovalores distintos?

(d) ¿En qué casos no hay autovalores reales?

"Prácticas de Matemáticas con DERIVE" Alfonsa Garcia. (Pág. 281).

PROBLEMA V.7.

Una agencia naviera tiene su flota de barcos distribuida entre los puertos de Barcelona, Málaga y Mallorca. De los barcos que al comienzo de cada més están en Barcelona, al final de mes sólo vuelve la mitad, un 20% se va a Málaga y el resto atraca en el puerto de Mallorca. De la flota de barcos que está al principio de mes en Málaga se encuentra, a fin de mes, un 20% en Barcelona, un 40% en Mallorca y el resto vuelve a Málaga.

Análogamente, de los barcos que hay en Mallorca, un 80% regresa al mismo puerto y el resto se dirige a Barcelona.

Suponiendo que el número de barcos es constante, se pide:

(a) Plantear en forma matricial el modelo que representa la distribución de la flota.

(b) Sabiendo que en el instante actual hay 350, 500 y 200 barcos respectivamente en Barcelona, Málaga y Mallorca, determinar el número de barcos que habrá en cada puerto al cabo de k meses.

(c) ¿Cuál será la flota de barcos en cada puerto a largo plazo?

"Problemas de Algebra Lineal. Cuestiones, ejercicios y tratamiento en DERIVE". Paloma Sanz, Francisco José Vázquez y Pedro Ortega Prentice Hall. (pág. 339).

PROBLEMA V.8.

En una población animal la edad máxima alcanzada por sus individuos es de 12 años y la problación se clasifica en cuatro grupos de edades:

pequeños: [0,3)

jóvenes: [3,6)

adulto: [6,9)

ancianos: [9,12)

Además se ha observado que la relación existente entre la población que hay en un periodo k con respecto a la que había en el periodo anterior k-1 es la que se recoge en la siguiente tabla, expresada en porcentaje, y entendiéndose que un período es un trienio:

		Período k-1			
		PEQUEÑOS	JÓVENES	ADULTOS	ANCIANOS
Periodo k	PEQUEÑOS	0,25	0,25	0,25	0,25
	JÓVENES	0,25	0	0,5	0,25
	ADULTOS	0,25	0,5	0,25	0
	ANCIANOS	0,25	0,25	0	0,5

Se pide:

(a) Formular matemáticamente un modelo que represente la evolución temporal de la población.

(b) ¿Cuál es la distribución de la población a largo plazo (k→∞) si en la actualidad, (k=0) la proporción de individuos en cada uno de los cuatro grupos es del 20%, 20%, 20% y 40% respectivamente?

"Problemas de Algebra Lineal. Cuestiones, ejercicios y tratamiento en DERIVE". Paloma Sanz, Francisco José Vázquez y Pedro Ortega Prentice Hall. (pág. 363).

<u>PROBLEMA V-9.</u>

Estudios de Sociología Laboral que realiza el Instituto de Estadística cada diez años, revelan que de los economistas existentes en el país cuando se realizó el primer estudio (k=0), el 70% trabaja en la Administración y el 30% en la empresa privada. Los mismos estudios han determinado que sólo el 80% de los economistas que hay en un año, siguen siéndolo diez años después sin cambiar de actividad profesional. No obstante, se producen nuevas incorporaciones a la profesión, de manera que a cada actividad profesional (Administración y empresa privada) se incorporan el equivalente al 20% de los economistas dedicados a la otra actividad en el período anterior (diez años antes).

Se quiere saber:

(a) El modelo matemático que representa la evolución de las salidas profesionales de los economistas del país cada diez años.

(b) ¿Cuál es la distribución de los economistas al cabo de un número k de estudios?

(c) ¿Cuál sería la distribución de los economistas en el futuro?

<u>PROBLEMA V-10.</u>

Determinar los valores que han de tener los parámetros correspondientes para que las siguientes matrices sean diagonalizables, obteniendo para dichos valores la matriz cambios de base que la diagonaliza:

$$(a)..A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & b & 2 \end{pmatrix}.(parámetros.a.y.b)$$

$$(b)..A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.(parámetro.a)$$

$$(c)..A_3 = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.(parámetros.a,b.y.c)$$

CAPÍTULO 6: FORMAS CUADRÁTICAS.

PROBLEMA VI.1

Clasificar en función de los valores de los parámetros siguientes la forma cuadrática:

$q(x,y,z) = x^2 -4axy + 4y^2+3z^2$

PROBLEMA VI.2

Clasificar en función de los valores de los parámetros a y b la forma cuadrática:

$q(x,y) = ax^2+2bxy + 2y^2$

PROBLEMA VI.3

Clasificar en función de los valores del parámetro a la forma cuadrática:

$q(x,y,z) = ax^2+2xy + 2xz + 2yz + ay^2+az^2$

PROBLEMA VI.4

Clasificar en función de los valores del parámetro a la forma cuadrática:

$q(x,y,z) = ax^2 + 4xy + y^2 + 2yz + z^2$

PROBLEMA VI. 5

Clasificar en función de los valores de los parámetros a y b la forma cuadrática:

$q(x,y,z) = x^2+ay^2+z^2-2bxy + 2xz + 2yz$

PROBLEMA VI.6

Clasificar en función de los valores de los parámetros a y b la forma cuadrática:

$q(x,y,z,t) = ax^2+ay^2+bz^2+bt^2+2xz+2xt+2yz+2yt$

PROBLEMA VI.7

Hallar TODOS los valores del parámetro a para los cuales la siguientes forma cuadrática es DEFINIDA POSITIVA:

$q(x,y,z) = 5x^2+y^2+az^2+4xz-2xz-2yz$

PROBLEMA VI.8

La forma cuadrática que tiene por matriz simétrica asociada:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 & -1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

¿pueder ser DEFINIDA NEGATIVA para algún valor de a?

2. Observaciones de los problemas entregados.

A partir de los problemas entregados por los alumnos realizamos un estudio pormenorizado de cada uno de ellos y anotamos las observaciones más importantes. Todas estas observaciones se pueden consultar en el CD adjunto a la tesis, pero a modo de ejemplo desarrollamos las observaciones a los problemas del capítulo 1 entregados por el caso 2 J. Revuelto:

Problemas hoja 1. Caso 2. J. Revuelto.

1.1. *Se trataba de construir un modelo vectorial sencillo a través de ciertas mezclas de materiales de tal forma que con la búsqueda de combinaciones lineales se resolvieran las preguntas del mismo. Se deben construir tres vectores de mezclas a, b y c y en cada apartado el vector de mezcla buscada es:*
En el apartado a, no hay mezcla posible , en el apartado b) la combinación lineal adecuada o la mezcla es a=15, b=25 y c=50.
Nota del problema: 1

COMENTARIO: Perfecto el planteamiento y la resolución.
Nota: 1 sobre 1.

1.2. Es un problema de tipo teórico para demostrar que un conjunto de polinomios es base del espacio vectorial P(<4). Se trataba de demostrar que cualquier polinomio de grado menor que 4 se podía expresar como combinación lineal de los vectores indicados y demostrar que forman

una base. Al tener que manipular polinomios como "vectores" en DERIVE (es decir como elementos de un espacio vectorial) el grado de abstracción es bastante grande.
Nota del problema: 1

COMENTARIO: Confunde el subespacio vectorial P(<4) con R^3 lo hace mal.

Nota: 0,1 sobre 1.

1.3. El problema consistía en buscar vectores ortogonales a un subespacio vectorial dado. Se trata de un problema conceptual cuya agilidad se reduce al buen planteamiento del problema y sus posibilidades de resolución, pues se trata de un problema que DERIVE permite resolver de forma sencilla una vez planteado. Se trata de un problema experimental.
Nota del problema: 1.

COMENTARIO:No entiende muy bien el problema no sabe ni como plantearlo
Nota: 0 ,2 sobre 1.

1.4. El problema es de tipo manipulativo. Se trata de obtener una base de un subespacio vectorial de R6 y luego calcular las coordenadas de un vector en dicha base. Nuevamente si el planteamiento es correcto DERIVE permite resolverlo de forma inmediata. En el apartado segundo se les pone una pequeña trampa y es que se trata de un vector de R5, que nunca puede pertenecer a un subespacio vectorial de R6.

Plantea muy bien el problema incluso estudia el número de ecuaciones no redundantes del subespacio, deduciendo que la dimensión de H es 3. Pero luego al intentar obtener las ecuaciones paramétricas al no aparecer en estas ecuaciones la sexta componente (esta ni siquiera aparece en las ecuaciones cartesianas) resulta que hace tomar vectores en la base de 5 componente cuando el espacio vectorial es de R6.
Nota del problema: 1

COMENTARIO: El primer apartado lo hace bien salvo que olvida poner un tercer vector. Se da cuenta que H es de R6 por lo que dos de sus vectores base son (1,0,1,2,1,0) y (0,1,2,5,3) aunque la sexta componente no aparezca en las ecuaciones paramétricas. Pero olvida considerar el vector (0,0,0,0,0,1).
El segundo apartado lo obtiene con un razonamiento correcto.

Nota: 0,4 sobre 1.

1.5. Este problema era un problema de manipulación con subespacios de R4. En concreto se trataba de obtener la intersección de subespacio. Luego en un apartado más conceptual determinar si L1+L2, L1+L3 y L2+L3 se pueden considerar sumas directas y calcularlas en su caso. Las técnicas a emplear eran el paso de ecuaciones paramétricas a cartesianas y viceversa y la interpretación de estos para obtener sistemas de generadores y bases.
Nota del problema: 1

COMENTARIO: Inicialmente plantea el sistema de ecuaciones [x=y=z=t,..] y al intentarlo resolver obtiene una respuesta inesperada con DERIVE, a lo cual concluye no entender el significado, infiere que puede que los subespacios vectoriales no tengan intersección. Esto nos muestra como DERIVE ha generado en el alumno dudas, pero creo que son debidas a que Jorge no entendía bien el concepto, todo parte de considerar en el sistema la expresión [x=y=z=t,..].
Sin embargo para la intersección de L2 y L3 sí obtiene bien su intersección, Ha obtenido bien la intersección ¿el automatismo ha producido el primer error? el hecho de introducir [x=y=z=t,...] en el sistema , que es una falta de maenjo de DERIVE ¡puede ser cauas que le provoque este error? Respecto a la suma directa hace afirmaciones sin demostrar sólo parece basarse en que si L1 int. L2 es el elemento neutro entonces la suma directa de L1 y L2 es el espacio total.

Nota: 0,5 sobre 1

1.6.Se tata de un problema que pretende que los alumnos sean capaces de utilizar el modelo vectorial para representar una situación real, usando adecuadamente el significado del producto escalar y la interpretación de las combinaciones lineales al modelo.
Nota del problema: 1

COMENTARIO: Plantea bien el problema con el modelo requerido. Maneja bien DDERIVE. Incluso deja como incógnita el valor pedido, planteando
[5,10,12,21,87].[13,16,45,21,a]=6238 → a=56
Nota: 1 sobre 1.

1.7. Se trata de un problema de enunciado matemático que se modeliza a través de una combinación lineal convexa. El objetivo del problema es que se planteen dos vectores objetivo a partir de los cuales se puede obtener una combinación lineal (si es posible) de los vectores modelo del problema. En ambos casos se obtendrá que no hay soluciones.
Nota del problema: 1
COMENTARIO: No lo hace
Nota: 0 sobre 1.

1.8. Nuevamente se trata de plantear un modelo vectorial de un modelo económico en el que intervienen vectores muy usados en economía, en particular vectores de inputs, vectores de producción, costes, ingresos.
Nota del problema: 1
COMENTARIO:Perfecto el planteamiento y la resolución
Nota: 1 sobre 1.

1.9. Volvemos a un problema estándar de vectores y subespacios vectoriales. El problema se centra en el dominio e interpretación de dos técnicas básicas:
- *Dado un sistema de generadores de un subespacio obtener una base,*
- *Dadas las ecuaciones cartesianas obtener una base calculando previamente las ecuaciones paramétricas*

También resulta importante el procedimiento de cálculo de la base del subespacio intersección (pasar de ecuaciones cartesianas a paramétricas) y las ecuaciones cartesianas del subespacio suma (pasar de ecuaciones paramétricas a cartesianas). Otro elemento importante que se considera el la obtención del subespacio suplementario.
Nota del problema: 1
COMENTARIO: Sólo sabe obtener la base de A a partir de sus ecuaciones paramétricas (sistema de generadores); y la base de B a partir de sus ecuaciones cartesianas, pero no sabe hacer A+B y A complementario
Nota: 0,4 sobre 1.

1.10.Volvemos a tener un problema de manipulación algebraica donde la única complicación es que introducimos un parámetro, tanto en el sistema de generadores que define al subespacio A como en las ecuaciones cartesianas de B. Se trata de obtener en función de esos parámetros las dimensiones de A y una de sus bases, una base de la intersección y determinar para qué parámetros A está incluido en B.
Nota del problema: 1
COMENTARIO:Al intentar obtener una base de A como aparece "c" como incógnita paramétrica no sabe resolver el sistema con DERIVE. Respecto a la dimensión de B y el cálculo de una base de B tiene un error de manejo de DERIVE pues al plantear x-y+ cz – t = 0 al poner cz juntas en vez de c z , como tiene activada la opción de DERIVE que toma variables tipo carácter , entonces el programa considera que cz es una variable. Por otro lado no considera el caso c=0.
Nota: 0,6 sobre 1.

ANEXO VII:

Cuestiones teóricas propuestas y observaciones realizadas.

1. Enunciados de las CUESTIONES PROPUESTAS en cada uno de los capítulos:

CAPÍTULO I: ESPACIOS VECTORIALES.

Cuestión I-1.

El subespacio vectorial de R^3

$$W=\{(x,y,z)\in R^3/x+2y-2z=0\}$$

Tiene dimensión dos.

(a) Falso, ya que los vectores $\overline{v}_1 = (2,1,2)\in W, \overline{v}_2 = (2,0,1)\in W, \overline{v}_3 = (0,1,1)\in W$ forman una base de W y por tanto dim(W)=3.

(b) Falso, dim(W) = 1 porque W está definido por una ecuación.

(c) Verdadero, ya que los vectores

$$\overline{v}_1 = (-2,1,0)\in W; \overline{v}_2 = (2,0,1)\in W$$

generan W y son linealmente independientes. Por tanto dim(W)=2.

Cuestión I-2.

Sean $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3 .y.\overline{u}_4$ vectores de R^4 distintos entre sí, no nulos y tales que

$$\overline{u}_4 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 + \overline{u}_3$$
$$\overline{u}_4 = 2\overline{u}_1 - \overline{u}_2 + \overline{u}_3$$

Si W es el subespacio vectorial generado por los vectores $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}$, entonces se verifica que dim(W)<3.

(a) Verdadero, ya que W está generado por tres vectores y por tanto tiene dimensión tres.

(b) Verdadero, pues como $\overline{u}_1 + \overline{u}_2 + \overline{u}_3 = 2\overline{u}_1 - \overline{u}_2 + \overline{u}_3$ entonces $\overline{u}_1 - 2\overline{u}_2 = \overline{0}$ y por tanto, $\overline{u}_1, \overline{u}_2$ son linealmente dependientes lo cual implica que dim(W)<3.

(c) Verdadero, pues si existen dos combinaciones lineales distintas de los vectores $\bar{u}_1, \bar{u}_2 . y . \bar{u}_3$ que permiten expresar $\bar{u}_4$ entonces $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ no es una base de W, y por tanto, dim(W)<3.

<u>Cuestión I-3.</u>

Sean $\bar{u}_1, \bar{u}_2 . y . \bar{u}_3$ tres vectores de R^2 no nulos y distintos entre sí. Entonces el subespacio vectorial W generado por estos tres vectores tiene dimensión tres.

(a) Falso, porque W es un subespacio vectorial de R^2 y por tanto su dimensión siempre tiene que ser menor o igual que dos.

(b) En general es falso, pero sería correcto si $\bar{u}_1, \bar{u}_2 . y . \bar{u}_3$ fuesen linealmente independientes.

(c) Verdadero, porque $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ es una base de W.

(d) Falso, W no tiene dimensión tres sino dos ya que en R^2 no podemos encontrar tres vectores linealmente independientes que generen W.

<u>Cuestión I.4.</u>

Estudiar razonando las respuestas, si las siguientes afirmaciones son verdaderas.

(a) Sea W el subespacio vectorial de R^3 generado por el siguiente conjunto de vectores: G={(1,2,1),(0,1,0),(1,0,-1),(1,1,-1)}. Entonces $W=R^3$.

(b) El conjunto $W = \{(x,y,z,t) \in R^4 / x + y + z = 0, x - y + z = 0, x - z = 0\}$ es un subespacio vectorial de R^4 de dimensión 1.

(c) Sean $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4 \in R^3$ cuatro vectores no nulos y distintos entre sí. Sea W el subespacio generado por esos cuatro vectores. Entonces se verifica que $W=R^3$.

(d) Sea W el subespacio vectorial generado por tres vectores $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3 \in R^4$ y sea $\bar{v} \in R^4$ tal que $\bar{v} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3 . y . \bar{v} = 2\bar{u}_1 - \bar{u}_3$. Entonces se verifica que $\dim W \leq 2$.

<u>SOLUCIONES:</u>

<u>Cuestión I.1 (c)</u>

<u>Cuestión I.2 (b y c)</u>

<u>Cuestión I.3 (a)</u>

<u>Cuestión I.4</u> (a)→Verdadero, G es un conjunto L.I.

(b)→ Verdadero, W está definido por tres ecuaciones cartesianas no redundantes, por tanto dim(W)=dim(R^4)-3=4-3=1

(c)→ Falso, pues podrían ser los cuatro vectores proporcionales, en cuyo caso no generan R^3, sino que un subespacio de dimensión 1.

(d) → como el vector v se puede expresar de dos formas, quiere decir que se verifica que u1+u2+u3=2u1-u3, luego u2=u1-2u3, en cuyo caso el conjunto es L.D. por tanto dim(W)<3, es decir dim(W)<=2.

CAPÍTULO II: APLICACIONES LINEALES. MATRICES.

Cuestión II-1.

Sea f:R^3→R^2 una aplicación lineal tal que dim(Imf)=1. Entonces existen dos vectores $\bar{u},\bar{v}\in R^3$ linealmente independientes tales que $f(\bar{u})=f(\bar{v})=\bar{0}$.

(a) Falso, pues dim(Ker(f))=2-dim(Im(f))=1, por tanto el máximo número de vectores linealmente independientes del núcleo de f es uno.

(b) Verdadero, pues dim(Ker(f))=3-dim(Im(f))=2, por tanto existen dos vectores $\bar{u},\bar{v}$ linealmente independientes que pertenecen a Ker(f), es decir $f(\bar{u})=f(\bar{v})=\bar{0}$.

(c) Falso, pues como f es una aplicación lineal, entonces el único vector $\bar{u}\in R^3$ que verifica que $f(\bar{u})=\bar{0}$ es $\bar{u}=\bar{0}$.

Cuestión II-2.

Sea

$$A=\begin{pmatrix} b & 0 & 1 \\ 2b & 0 & 2 \\ 0 & b & 3 \end{pmatrix}$$

(con b≠0) la matriz asociada a una aplicación lineal $f: R^3 \to R^3$ respecto de las bases B_1={(b,0,0),(0,b,0),(0,0,1)} en el espacio inicial y la canónica B_C del espacio final, entonces para cualquier valor de b no nulo se tiene que

$$f(x,y,z)=(bx+z,2bx+2z,by+3z)$$

(a) Falso, pues de la matriz A se deduce que f(b,0,0)=(b,2b,0) y f(0,b,0)=(0,0,a) entonces como f es una aplicación lineal f(b,b,0)=f(b,0,0)+f(0,b,0)=(b,2b,0) y sin embargo al sustituir en la expresión de f dada en el enunciado se obtiene que f(b,b,0)=(b^2,2b^2,b^2).

(b) Verdadero pues

$$f(x,y,z)=\begin{pmatrix} b & 0 & 1 \\ 2b & 0 & 2 \\ 0 & b & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(c) Falso, pues la expresión de cualquier vector $(x,y,z)\in R^3$ en la base B_1 es

$$(x,y,z)=\frac{x}{b}(b,0,0)+\frac{y}{a}(0,b,0)+z(0,0,1),$$

y por tanto

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \frac{x}{b}(b,2b,.0)+\frac{y}{b}(0,0,b)+z(1,2,3)= \\ &=(x,2x,0)+(0,0,y)+(z,2z,3z)= \\ &=(x+z,2x+2z,y+3z) \end{aligned}$$

(d) Es falso en general aunque sería cierto si a=1.

Cuestión II-3

Dada una matriz $A\in M_{3x3}$ entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) A es una matriz no singular

(2) Los vectores columna de A forman una base de R^3

(3) $Tr(A)\neq 0$

(a) Falso, la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es no singular, pues $\det(A)\neq 0$ y sin embargo tr(A)=0 por lo que (1) y (3) no son equivalentes.

(b) Verdadero, ya que A es no singular si y sólo si $tr(A)\neq 0$ por lo tanto el rango de la matriz A es 3, es decir, sus tres vectores columna $\overline{u},\overline{v},\overline{w}$ son linealmente independientes y como $\dim(R^3)=3$ entonces $L\{\overline{u},\overline{v},\overline{w}\}=R^3$

(c) Falso, si A es no singular entonces rg(A)=3 y por tanto los vectores columna de A son linealmente independientes, pero estos no son en general un sistema de generadores de R^3. Por tanto (1) no implica (2)

Cuestión II-4

Sea $B = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ una base de R^3 y sea $f : R^3 \to R^3$ una aplicación lineal que verifica $f(\bar{u}) = \bar{v}, f(\bar{v}) = \bar{v}, f(\bar{w}) = \bar{u} + \bar{v}$. Entonces el rango de la matriz M asociada a f respecto de la base B en los espacios inicial y final es dos.

(a) Verdadero, ya que la matria M es

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ y tiene rango 2.

(b) Falso, ya que con los datos del enunciado no es posible deducir el rango de la matriz asociada, que podría ser 0,1,2 ó 3.

(c) Falso, pues Ker(f)= $\{\bar{0}\}$ ya que ningún vector de la base B se transforma en el vector y, en consecuentia dim[Im(f)]=dim(R^3)=3 que coincide con el rango de la matriz M .

(d) Verdadero, ya que Im(f) está generado por los vectores $f(\bar{u}), f(\bar{v}), f(\bar{w})$ es decir

$$\mathrm{Im}(f) = L\{f(\bar{u}), f(\bar{v}), f(\bar{w})\} = L\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{u} + \bar{v}\} = L\{\bar{v}, \bar{u} + \bar{v}\}$$

y como los vectores $\bar{v}, \bar{u} + \bar{v}$ son linealmente independientes, entonces

2=dim[Im(f)]=rg(M).

SOLUCIONES:

Cuestión II-1 (a)

Cuestión II-2 (a),(c)

Cuestión II-3 (a)

Cuestión II-4 (a);(d)

CAPÍTULO III: TRAZA Y DETERMINANTE.

Cuestión III-1.

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

donde a,b y c son números reales distintos entre sí. Entonces se verifica que |A|≠0

(a) Falso, |A|=0 ya que la segunda y tercera fila son proporcionales.

(b) Verdadero, ya que

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

(c) Verdadero, ya que por ejemplo en el caso a=0, b=1, c=2, se obtiene |A|≠0

Cuestión III-2.

Dada una matriz $A\in M_{3x3}$ entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) A es una matriz no singular.

(2) Los vectores columna de A forman una base de R^3.

(3) tr(A)≠0.

(a) Falso, la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es no singular pues det(A)≠0 y sin embargo tr(A)=0 por lo que (1) y (3) no son equivalentes.

(b) Falso, si A es no singular entonces rg(A)=3 y por tanto los vectores columna de A son linealmente independientes, pero estos no son en general un sistema de generadores de R^3. Por tanto (1) no implica (2).

(c) Verdadero, ya que A es no singular si y sólo si tr(A)≠0 por tanto el rango de la matriz A es 3, es decir, sus tres vectores columna $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ son linealmente independientes y como dim(R^3)=3 entonces $L\{\bar{u},\bar{v},\bar{w}\}$ =R^3.

Cuestión III-3

Sea

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

una matriz tal que |A|≠0. Entonces la matriz

$$B=\begin{pmatrix} 2b-d & d \\ 2a-c & c \end{pmatrix}$$

tiene rango 2.

(a) Verdadero, pues |B|=2bc-2ad = -2|A|≠0.

(b) Falso, rg(B)<2 pues sus columnas son linealmente independientes.

(c) Verdadero, pues por las propiedades de los determinantes:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b & d \\ a & c \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2b & d \\ 2a & c \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2b & d \\ 2a & c \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2b-d & d \\ 2a-c & c \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}|B|$$

y por tanto |B|≠0

Cuestión III-4

Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

se verifica que A es invertible

(a) Falso, pues |A|=0

(b) Verdadero, ya que la matriz $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

es tal que AB=BA=I_3 y, por tanto, B=A^{-1}

(c) Falso, ya que rg(A)=2

(d) Verdadero, pues para todo $\bar{b}\in R^3$, el sistema $A\bar{x}=\bar{b}$ es compatible determinado.

SOLUCIONES:

Cuestión III-1 : b

Cuestión III-2: a

Cuestión III-3 : a y c

Cuestión III-4 : a,c

CAPÍTULO IV: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Cuestión IV-1.

Dada una matriz A∈M_{mxn} y dos vectores $\bar{b},\bar{c}\in R^m$, si el sistema $A\bar{x}=\bar{b}$ es compatible determinado entonces se verifica que el sistema $A\bar{x}=\bar{c}$ $\bar{c}\neq\bar{0},\bar{c}\neq\bar{b}$ es también compatible determinado.

(a) Verdadero. En efecto, si $A\bar{x}=\bar{b}.y.A\bar{x}=\bar{c}$ entonces $\bar{b}=\bar{c}$ y por tanto los sistemas son equivalentes.

(b) Falso, sería verdadero si m=n

(c) Falso, pues no se puede asegurar la compatibilidad del sistema $A\bar{x}=\bar{c}$.

(d) Verdadero, pues si $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $\bar{b}=(2,-1,1),\bar{c}=(4,-2,2)$ ambos sistemas son compatibles determinados

Cuestión IV-2.

Dado el conjunto

$$W=\{(x,y,z)\in R^3 / x+y-z=0; x-y=a\} con.a\in R$$

se verifica que es un subespacio vectorial de R^3 de dimensión 1.

(a) Falso, si $a\neq 0$ W no es subespacio vectorial de R^3 pues el vector (0,0,0) no pertenece a W.

(b) En general es falso, solamente sería cierto si a=0, pues en ese caso el vector (1,1,2)∈W y genera W.

(c) Verdadero, para cualquier valor de A, W coincide con el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y=a \end{cases}$$

por tanto W es un subespacio vectorial y dim(W)=dim(R^3)-2 = 1.

Cuestión IV-3

Sea $A\in M_n$ una matriz cuadrada de orden n y $\bar{b},\bar{c}\in R^n$ vectores linealmente dependientes no nulos. Entonces, si el sistema $A\bar{x}=\bar{b}$ es compatible indeterminado, también lo es el sistema $A\bar{x}=\bar{c}$

(a) Verdadero, como se deduce a partir del Teorema de Rouché-Frobenius y de la hipótesis de dependencia lineal entre $q(\bar{x})\neq 0$ y $A\bar{x}=\bar{0}$

(b) Falso, el sistema $A\bar{x}=\bar{c}$ podría ser compatible determinado.

(c) Falso, el sistema $A\bar{x}=\bar{c}$ podría ser incompatible.

Cuestión IV-4

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ se verifica que el sistema $A\bar{x}=\bar{b}$ es compatible determinado para todo $\bar{b}\in W=\{(\alpha,0,\alpha)/\alpha\in R\}$

(a) Falso, pues el sistema $A\bar{x}=\bar{b}$ tiene 3 ecuaciones y 2 incógnitas, luego nunca puede ser compatible determinado.

(b) Falso, pues considerando la aplicación lineal $f:R^2\rightarrow R^3$ que tiene por matriz asociada respecto de las bases canónicas de R^2 y R^3 la matriz A, se verifica que $\dim(W)\neq\dim[\mathrm{Im}(f)]$ luego el sistema podría ser incompatible.

(c) Verdadero, pues los vectores {(1,0,1),(0,1,1)} son linealmente independientes mientras que el conjunto $\{\bar{b},(1,0,1),(0,1,1)\}$ es linealmente dependiente para todo $\bar{b}\in W$.

SOLUCIONES:

Cuestión IV-1 (b) y (c)

Cuestión IV-2 (a) y (b)

Cuestión IV-3 (a)

Cuestión IV-4 (c.)

CAPÍTULO V: AUTOVALORES Y AUTOVECTORES. DIAGONALIZACIÓN.

Cuestión V-1.

La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es una matriz diagonalizable.

(a) Verdadero, ya que sus tres autovalores son distintos.

(b) Verdadero, puesto que los vectores $\overline{v}_1 = (1,1,0); \overline{v}_2 = (0,1,0).y.\overline{v}_3 = (2,0,1)$ son una base de R^3 y son autovectores asociados a los autovalores de la matriz A.

(c) Falso, ya que A no es una matriz simétrica.

Cuestión V-2.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ y los subespacios vectoriales de R^3:

$$V(\lambda_1) = \{\overline{v} \in R^3 \,/\, A\overline{v} = \lambda_1 \overline{v}\}$$
$$V(\lambda_2) = \{\overline{u} \in R^3 \,/\, A\overline{u} = \lambda_2 \overline{u}\}$$
$$V(\lambda_3) = \{\overline{w} \in R^3 \,/\, A\overline{w} = \lambda_3 \overline{w}\}$$

siendo λ_1,λ_2 y λ_3 los autovalores asociados a A se verifica que

$$\dim(W_1)=\dim(W_2)=\dim(W_3)=1$$

para todo $a \in R$.

(a) Verdadero, porque A es una matriz simétrica.

(b) Falso, aunque sería correcto si $a \neq 1$ y $a \neq 2$, ya que en este caso, los tres autovalores de A son distintos.

(c) Verdadero, para la matriz A y cualquier otra matriz cuadrada de orden 3.

(d) Falso, pues si a=1, entonces $\dim(V(\lambda_1=1))=2$.

Cuestión V-3

Dada una matriz diagonalizable de orden n, se verifica que la matriz αA es diagonalizable para todo $\alpha \in R$.

(a) Verdadero, ya que si A es diagonalizable, existen matrices P invertible y D diagonal tales que $A=PDP^{-1}$. Ahora bien, dado que $\alpha A=\alpha(PDP^{-1})=P(\alpha D)P^{-1}$ podemos concluir que αA es diagoanlizable pues αD es una matriz diagonal.

(b) Verdadero, pues si A es diagonalizable existe una base $\{\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n\}$ de R^n formada por autovectores de A, y puesto que los vectores $\bar{u}_i$ también son autovectores de αA entonces la matriz αA es diagonalizable.

(c) Falso, pues si $\alpha=0$ la matriz αA es la matriz nula que no es diagonalizable.

Cuestión V-4

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Entre las siguientes características de A:

(1) A es simétrica

(2) A es diagonalizable

(3) A tiene n autovalores diferentes

se verifican las siguientes implicaciones:

$(1) \Rightarrow (2)$ y $(2) \Rightarrow (3)$

(a) Verdadero, ya que toda matriz simétrica es diagonalizable y esto implica que A tiene sus n autovalores diferentes.

(b) Falso, las implicaciones correctas son $(1)\Rightarrow(2)$ y $(3)\Rightarrow(2)$.

(c) Falso, la matriz $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es diagoanlizable y sin embargo no todos sus autovalores son diferentes, por lo que no es cierto que $(2) \Rightarrow (3)$.

SOLUCIONES:

Cuestión V-1: a y b

Cuestión V-2: b y c

Cuestión V-3 : a y b

Cuestión V-4 : b y c

CAPÍTULO VI: FORMAS CUADRÁTICAS.

Cuestión VI-1.

Sea A una matriz simétrica e invertible de orden 3. Entonces la forma cuadrática $q(\overline{x}) = \overline{x}^t A\overline{x}$ es definida positiva o definida negativa.

(a) Verdadero, pues |A|≠0 entonces $q(\overline{x}) \neq 0$ para todo $\overline{x} \in R^3$, luego q tiene siempre el mismo signo (positivo o negativo) y es por tanto definida positiva o definida negativa.

(b) Verdadero, pues si A es invertible entonces sus autovalores son no nulos y por tanto no puede ser semidefinida.

(c) Falso, q podría ser indefinida.

Cuestión VI-2.

Sea $A \in M_n$ una matriz simétrica no nula de orden n tal que la forma cuadrática $q(\overline{x}) = \overline{x}^t A\overline{x}$ es semidefinida positiva. Entonces el sistema de ecuaciones homogéneo $A\overline{x} = \overline{0}$ es compatible indeterminado.

(a) Falso, el sistema podría ser incompatible.

(b) En general es falso, pues podría suceder que rg(A)=n

(c) Verdadero, pues si q es semidefinida positiva, entonces aplicando el criterio de autovalores se deduce que A es singular. Así pues, por el Teorema de Rouche-Fröbenius se concluye que el sistema es compaitble indeterminado.

(d) Verdadero, ya que cualquiera de los autovectores asociados al autovalor λ=0 de la matriz A es solución del sistema homogéneo.

Cuestión VI-3

Sea la forma cuadrática $q(\overline{x}) = \overline{x}^t A\overline{x}$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces se verifica que $q(\overline{x})$ es definida positiva.

(a) Verdadero, pues los tres menores principales de A son positivos.

(b) Falso $q(\overline{x})$ es semidefinida positiva ya que

$q(x,y,z) = x^2+4xy+4y^2+z^2=(x+2y)^2+z^2\geq 0$ y $q(-2,1,0)=0$.

(c) Falso, ya que los autovalores de la matriz simétrica asociada a $q(\bar{x})$ son 0, 5 y 1 y por tanto $q(\bar{x})$ es semidefinida positiva.

Cuestión VI-4

Sea A una matriz cuadrada de orden 3, no invertible y simétrica, tal que tr(A)=2. Entonces se verifica que la forma cuadrática $q(\bar{x}) = \bar{x}^t A\bar{x}$ es semidefinida positiva.

(a) En general es falso, aunque sería cierto si rg(A)=I.

(b) Verdadero, pues la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ verifica las hipótesis del enunciado y sus autovalores son $\lambda_1=0,\lambda_2=1/2$ y $\lambda_3=3/2$, por lo que es semidefinida positiva.

(c) Falso, pues según las hipótesis $q(\bar{x})$ podría ser también indefinida.

SOLUCIONES:

Cuestión VI-1 c)

Cuestión VI-2 c y d

Cuestión VI-3 b y c

Cuestión VI-4 a y c

CAPÍTULO VII: PROGRAMACIÓN LINEAL.

Cuestión VII-1.

Todo subconjunto B de un conjunto convexo A es convexo.

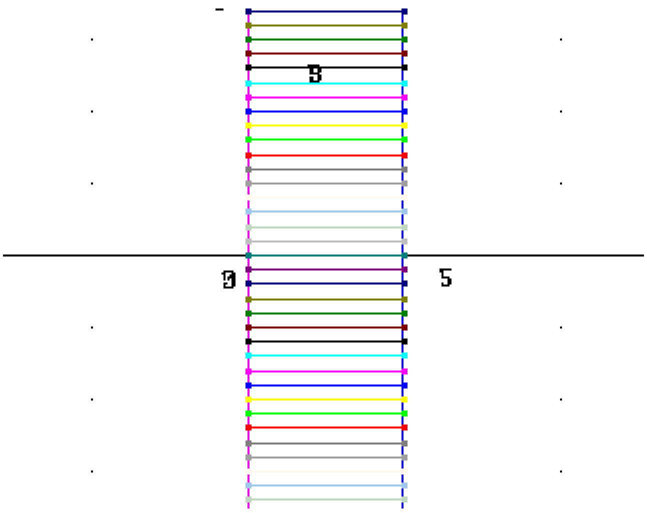
(a) Verdadero, ya que si se cumple la condición de convexidad para A en particular se cumple para B pues $B\subset A$.

(b) Falso, si tomamos A=R y $B=[0,1]\cup[2,3]$, A es un conjunto convexo, $B\subset A$ y sin embargo B no es convexo.

(c) Falso, lo que si es cierto es lo contrario, es decir, si B es convexo y $B\subset A$ entonces A es convexo.

Cuestión VII-2.

Sea B el subconjunto de R^2 que se dibuja a continuación:



Se verifica entonces que el programa lineal

$$\left.\begin{aligned} Opt.f(\bar{x}) &= \bar{c}^t\,\bar{x} \\ s.a.\bar{x} &\in B \end{aligned}\right\}$$

no tiene solución, independientemente del vector $\bar{c} \in R^2$.

(a) Verdadero, pues el conjunto B no tiene puntos extremos y todo programa lineal con solución la alcanza en un punto extremo.

(b) Verdadero, pues el conjunto B no es acotado y por tanto el programa no tiene solución.

(c) Falso, si $\bar{c} = (1-0)$ entonces la función alcanza un mínimo global en cada punto de la recta x=0 y un máximo global en cada punto de la recta x=5.

Cuestión VII-3

Dados los conjuntos $S = \{(x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 < 1\}.y.T = \{(x,y) \in R^2 / x \geq 0\}$, se verifica que S∩T es un conjunto convexo.

(a) Verdadero, ya que S y T son conjuntos convexos.

(b) Verdadero, pues S∩T es un semicírculo y por tanto es un conjunto convexo.

(c) Falso, pues S no es convexo y sólo la intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

Cuestión VII-4

El programa lineal $\left.\begin{array}{r} max.f(x,y)=x+2y \\ s.a..x\geq 0, y\geq 0 \end{array}\right\}$ tiene solución global.

(a) Falso, el programa no tiene solución porque el conjunto factible es no acotaco y existen puntos en dicho conjunto para los que la función toma valores tan grandes como se desee.

(b) Verdadero, todo programa lineal alcanza máximo global.

(c) Falso, si el programa tuviera solución la alcanzaría en (0,0) que es el único punto extremo del conjunto de soluciones factibles, pero f(0,0)<f(1,1).

SOLUCIONES:

Cuestión VII-1 (b)

Cuestión VII-2 c)

Cuestión VII-3 a y b

Cuestión VII-4 a y c

2. Observaciones de las cuestiones propuestas.

Con las cuestiones entregadas realizamos un estudio pormenorizado de cada una de ellas en cada uno de los casos de la investigación, elaborando un conjunto de observaciones que se pueden consultar para cada caso en el CD adjunto a la presente tesis. A continuación mostramos a modo de ejemplo las observaciones realizadas a las cuestiones entregadas por M.Verdú:

DATOS DE LAS CUESTIONES TEÓRICAS ENTREGADAS:

CUESTIONES TEMA 1.

Se plantearon 4 cuestiones:

1ª Consistía en entender perfectamente qué significa que un subespacio vectorial tenga dimensión 2, partiendo de que dos vectores que están en el subespacio l.i. son una base del mismo. También se pretende que apliquen bien la fórmula que relaciona el número de ecuaciones no redundantes con la dimensión del subespacio, en concreto en el ejemplo se daba un subespacio con una ecuación no redundante y una de las respuestas afirmaba que entonces la dimensión del subespacio era 1.

Puntuación: 2.

COMENTARIO: Afirma Que el subespacio dado no tiene dimensión dos porque los vectores que se indican (2,1,2), (2,0,1) y (0,1,1) forman una base de W, lo cual es falso ya que son l.d.

NOTA: 0

2ª Se planteaban 4 vectores de dimensión 4 no nulos, de tal forma que u4 se podía expresar mediante dos combinaciones lineales distintas de los vectores u1,u2,u3 se preguntaba si la dimensión del subespacio generado por u1,u2,u3 tenía dimensión nferior a 3. La clave consistía en igualar las dos combinaciones lineales de la cual se deducía que u1 y u2 eran l.d. lo cual implicaba la afirmación o bien utilizar que para que los tres vectores fuesen base de W deberían expresar de forma única cualquier vector de W (en este caso u4).
Puntuación: 2.
COMENTARIO: Contesta a medias, tan solo afirma que como hay dos combinaciones lineales distintas entonces los tres vectores implicados son l.d. sin embargo no generaliza el resultado que es la contestación de otro item diciendo que cuando dos combinaciones lineales distintas de tres vectores permiten expresar un mismo vector es porque dichos vectores son l.d.
NOTA: 1

3ª Se dan tres vectores de R^2 no nulos y distintos entre sí. El objetivo es que el alumno no deduzca de esto que el subespacio generado por estos 3 vectores tiene que tener dimensión 3, porque en R^2 los subespacios a lo sumo solo pueden tener dimensión 2. Además ni siquiera se puede afirmar que la dimensión tenga que ser 2 porque podrían ser los tres vectores proporcionales.
Puntuación: 2
COMENTARIO: Perfecto
NOTA:2

4ª Esta cuarta cuestión contienes 4 cuestiones en las que había que responder verdadero o falso:

(a) En esta Había que entender que un subespacio de R^3 generado por cuatro vectores, de los cuales 3 son l.i. coincide con el espacio total.

Puntuación: 1
COMENTARIO: Afirma que es verdadero por el vector (1,1,-1) es combinación de los dos anteriores (0,1,0) y (1,0,-1), al ser l.i. los 3 primeros vectores entonces W=R3.
NOTA: 1

(b) En este item, había que relacionar el número de ecuaciones no redundantes (que eran 3) con la dimensión del subespacio vectorial que era de R^4 y por tanto la dimensión era 4-3=1.

Puntuación: 1
COMENTARIO: Afirma que es cierto ya que aplica la formula de las dimensiones de un subespacio a partir del número de ecuaciones no redundantes.
NOTA:1

(c) En esta había que entender que 4 vectores de R^3 no nulos, no tienen porqué ser l.i. pueden ser l.d.

Puntuación: 1
COMENTARIO: Comete un error pues dice que de los 4 vectores escogeremos 3 que al no ser nulo y distintos sí seran independientes, es decir afirma que 3 vectores distintos en R3 son l.i. lo cual es falso pues pueden ser todos proporcionales.
NOTA: 0

(d) Esta cuestión pretende que el alumno entiende que si un subespacio está generado por tres vectores v1,v2,v3 de R^4 y dichos vectores pueden generar con dos combinaciones lineales distintas un cuarto vector v, esto es porque no pueden ser l.i, por lo que la dimensión del subespacio tiene que ser 2. Es decir que para que tres vectores sean l.i. jamás pueden generar de dos formas distintas un mismo vector.

Puntuación: 1
COMENTARIO: Afirma que como v es combinación lineal de v1,v2,v3 se verifica que la dimensión del subespacio es menor o igual que 3, pero además dice que los tres vectores son l.i,

¡no tiene en cuenta que existen dos combinaciones lineales distintas de esos tres vectores para expresar el vector v con lo que tienen que ser l.d.

NOTA:0

PUNTUACIÓN DE LAS CUESTIONTES TEMA 1: 5

CUESTIONES DEL TEMA 2.

Se plantean 4 cuestiones:

1ª Pretende que el alumno utilice la formula de las dimensiones , para que deduzca de los datos del problema la dimensión del Núcleo de una aplicación lineal conociendo la dimensión de la Imagen, y además deben saber que cuando un subespacio tiene dimensión 2, entonces siempre existen 2 vectores l.i. La aplicación de la formula de las dimensiones debe tomar la dimensión del espacio de partida y no del de llegada.

Puntuación: 2,5.

COMENTARIO: Perfecto

NOTA: 2,5

2ª Con esta cuestión se pretenden tres objetivos: primero que sepan la relació que hay entre las columnas de la matriz asociada a una aplicación lineal y las coordenadas en la base final de los vectores de la base inicial de una aplicación lineal. También deben saber manejar la definición de aplicación lineal.

Puntuación: 2,5

COMENTARIO: No contesta

NOTA: 0

3ª Se trata de que el alumno sepa que si una Matriz A es no singular entonces los vectores columna forman una base de R^3, pero sin embargo nada tiene que ver que la matriz sea no singular para que la traza de la matriz valga 0.

Puntuación: 2,5

COMENTARIO: Perfecto

NOTA: 2,5

4ª El alumno debe saber obtener la matriz asociada a una aplicación lineal si se conocen las imágenes de los vectores de la base (si la aplicación lineal es endomorfismo), y de la matriz asociada deducir la dimensión de la Imagen a partir del cálculo del rango de dicha matriz (matriz respecto base canonica en el espacio final)

Puntuación: 2,5.

COMENTARIO: perfecto

NOTA: 2, 5

PUNTUACIÓN CUESTIONTES TEMA 2: 7,5

CUESTIONES TEMA 3.

Se proponen 4 cuestiones:

1ª Se trata de que el alumno sepa aplicar las propiedades del cálculo de determinantes haciendo ceros en algunos lugares. También deben aprender a no afirmar que algo es cierto de forma general por el hecho de que se cumpla una propiedad en casos particulares.

Puntuación: 2,5

COMENTARIO: Incorrecto, pues además de indicar el razonamiento correcto, trata de generalizar a través de un resultado concreto marcando una de las opciones que razonaba de esa forma

NOTA: 0

2ª Se pretende que los alumnos no vinculen que una matriz sea no singular para que su traza sea distinta de cero (es el determinante)
Puntuación: 2,5
COMENTARIO: Perfecto
NOTA: 2,5

3ª Se trata de deducir el que el determinante de una matriz paramétrica es no nulo si se sabe que el determinante de otra (de la cual procede efectuando transformaciones de filas y columnas) es no nulo. Nuevamente se trata de que los alumnos sepan calcular determinantes aplicando propiedades.
Puntuación: 2,5.
COMENTARIO: Le ha faltado usar los determinantes directos de A y B, aunque ha utilizado propiedades de determinantes.
NOTA: 1,25

4ª Esta Cuestión pretende que el alumno tenga clara la relación que hay entre matrices invertibles, valor del determinante y rangos. En el caso concreto se afirma que la matriz es invertible, cuando es falso pues por un lado su determinante es 0 y por otro su rango es 2.
Puntuación: 2,5
COMENTARIO: Perfecto
NOTA 2,5

PUNTUACIÓN DE LAS CUESTIONES DEL TEMA 3.: 6,25

CUESTIONES DEL TEMA 4

Se plantean 4:
1ª Esta cuestión pretende que el alumno sepa que si un sistema es compatible determinado es porque la matriz de coeficientes tiene rango completo en cuyo caso cualquier otro sistema que cambie el vector de términos independientes siempre será compatible determinado. Sin embargo esto no es cierto si el número de ecuaciones e incógnitas es distinto, ya que en unos casos puede que el sistema sea incompatible. También se pretende que no afirmen resultados generales a partir de hechos concretos.
Puntuación: 2,5
COMENTARIO: A medias bien contestado, le ha faltado que sería cierto si m=n es decir que els istema sería compatible determinado si el número de ecuaciones fuese igual al de incógnitas.
NOTA: 1,25

2ª Esta cuestión pretende dos objetivos primer que se reconozca para qué valores de un determinado parámetro "a" un subconjunto definido por un sistema de cuaciones cartesianas en las que aparece ese parámetro tiene estructura de subespacio vectorial y por otro lado, aplicar la fórmula del cálculo de la dimensión de un subespacio definido por ecuaciones cartesianas, es decir dim W = dim espacio total – nº ecuaciones no redundantes.
Puntuación 2,5.
COMENTARIO: Incorrecto, pues si a es no nulo tendríamos que el subespacio estaría definido por ecuaciones no homogéneas que por supuesto no son las ecuaciones de un subespacio vectorial.
NOTA:0'

3º Se pretende que el alumno sepa aplicar el Teorema de Rouché Frobenius para determinar cuando un sistema es compatible indeterminado, partiendo de una misma matriz y de dos vectores columna linealmente independientes que actuan de términos independientes, siempre manejando vectores genéricos y no numéricos.
Puntuación 2,5.

COMENTARIO: Perfecto
NOTA: 2,5

4º Ahora se plantea una matriz de orden 3x2 y se plantea un sistema en el cual el término independiente es un vector perteneciente a un subespacio vectorial de dimensión uno, dado en forma paramétrica. Se trata nuevamente de determinar si el sistema planteado es un sistema compatible determinado. Obsérvese que el sistema podía ser sistema incompatible si la matriz ampliada formada por la matriz que se da de orde 3x2 y el vector de términos independientes forman una matriz de rango completo. situación que no se da pues hay dos vectores columna l.d.
Puntuación 2,5
COMENTARIO: Incorrecto, pues afirma que un sistema con 3 ecuaciones y 2 incógnitas nunca puede ser compatible determinado.
NOTA: 0

PUNTUACIÓN DE LAS CUESTIONES TEMA 4: 3,75

CUESTIONES DEL TEMA 5:
Se plantean 4:
1ª Esta cuestión pretende tres objetivos: primero que no consideren que la simetría de una matriz es condición necesaria y suficiente para que la matriz sea diagonalizable, sino que es solo una condición suficiente, segundo que calculen los autovalores y a partir de ellos determinen si los tres son distintos la matriz es diagonalizable y tercero que si determinan los autovectores de una matriz y estos tres son l.i. entonces la matriz es diagonalizable.
Esta cuestión obliga al CALCULO de autovalores y comprobar si los vectores dados son autovectores de la matriz, o sea que tiene bastante calculo:
Puntuación 2,5.
COMENTARIO: Perfecto
NOTA:2,5

2ª Esta cuestión pretende que los alumnos identifiquen el subespacio de autovectores de una matriz paramétrica dada, y que sepan que cuando los autovectores son distintos, las dimensiones de los tres subespacios de autovectores es 1. Por otro lado deben de saber que cuando un autovalor tiene orden de multiplicidad 2 la dimensión del subespacio de autovectores puede ser 1 o 2, situación en la cual se debe calcular, en concreto para el edjemplo que tenemos este es el cálculo que deben hacer calcular la dimensión del subespacio de autovectores cuando el valor del parámetro a=1, y obtienen que es 2.
El cálculo que tienes esta cuestión se reduce a calcular la dimensión de un subespacio de autovectores.
Puntuación: 2,5
COMENTARIO: Perfecto
NOTA: 2,5

3ª Esta Cuestión se basa en la relación que guardan los autovalores de una matriz A diagonalizable y de la matriz αA, ya que si λ es autovalor de A entonces $\alpha\lambda$ es autovalor de αA. Para utilizar esto se hace o bien le razonamiento de la propiedad de los autovalores o bien se utiliza la relación que guardan las matrices diagonales de A y αA.
No tiene ningún cálculo es totalmente teórica.
Puntuación: 2,5.
COMENTARIO: Bien pero incompleto le ha faltado una afirmación y es que si A es diagonalizable existen matrices P invertible y D diagonal tales que .. y razonar que en consecuencia la matriz alpha A cumple lo mismo respecto de las matrices alpha D.
NOTA: 1,25

4ª Se trata de que el alumno conozca las relaciones que guardan las matrices simétricas, las matrices diagonalizables, y las matrices con n autovalores diferentes, la relación que guardan es

que si A simétrica es diagonalizable, si A tiene n autovalores diferentes entonces es diagonalizable. Por otro lado también el alumno debe saber que una implicación no es cierta en general si en un caso concreto no se verifica, como es el caso de uno de los items que toma un ejemplo de matriz.
No tiene ningún cálculo
Puntuación: 2,5.
COMENTARIO: Perfecto
NOTA: 2,5

PUNTUACIÓN DE LAS CUESTIONTES DEL TEMA 5: 8,25

CUESTIONES DEL TEMA 6:
Se plantean 4:
1ª El alumno debe ser capaz de deducir que, al tratarse de una matriz invertible de orden 3 entonces su determinante es no nulo y por tanto no tiene autovalores nulos, por tanto no puede ser semidefinida, que es la única conclusión pues la forma cuadrática planteada puede ser d.p o d.n.
No tiene ningún cálculo, es una cuestión muy teórica.
Puntuación: 2,5.
COMENTARIO: No entrega
NOTA: 0

2ª El alumno debe ser capaz de deducir que si una forma cuadrática es s.d.p. y su matriz es no nula, entonces, el determinante de la matriz simétrica ha de ser nulo para poder contener uno de los autovalores nulo, y en consecuencia al ser A una matriz cuadrada, el sistema homogéneo Ax=0 es compatible indeterminado, pues el determinante es nulo y por tanto rango no completo. Por otro lado debe también saber que el sistema Ax=0 realmente lo que proporciona son los autovectores del autovalor 0.
No tiene ningún cálculo, es muy teórica.
Puntuación : 2,5
COMENTARIO: No entrega
NOTA: 0

3ª En este ejemplo se pretende que los alumnos se den cuenta que la matriz que define la forma cuadrática no es simétrica por lo que no permite aplicar los criterios de menores principales ni de autovalores, sólo permite para su clasificación la definición, o bien construir una nueva matriz que sea simétrica. A partir de la definición se obtiene una de las respuestas y a partir de la matriz simétrica se obtiene aplicando los autovalores la otra respuesta:
Tan sólo tiene como cálculo el comprobar lo que vale q(-2,1,0) y por otro lado calcular los autovalores de una matriz.
Puntuación: 2,5
COMENTARIO: No entrega
NOTA. 0

4ª Se pretende que el alumno juegue con los datos del determinante (la matriz es noinvertible y por tanto tiene determinante 0) y la traza de la matriz (en este caso es 2) para obtener si es posible información de los autovalores y así clasificar la forma cuadrática que procede de la matriz simétrica dada. De los datos ofrecidos sólo se puede saber que la forma cuadrática no es definida positiva ni definida negativa, por tanto puede ser seimedefinida o indefinida, con una excepción si el rango de (A) es 1, entonces la dimensión del autovalor 0 es 2 en cuyo caso el otro autovalor tiene que ser 2 en cuyo caso la forma cuadrática sería semidefinida positiva.
No es necesario ningún cálculo.
Puntuación: 2,5
COMENTARIO: No entrega
NOTA: 0

NO ENTREGA LAS CUESTIONTES DEL TEMA 6. PUNTUACIÓN 0.

CUESTIONES DEL TEMA 7:

Se plantean 4:

1ª El alumno debe ser capaz de descubrir que un subconjunto de un convexo no tiene que ser convexo, por ejemplo en la recta real, un subconjunto puede ser el formado por dos intervalos separados que no es un conjunto convexo.
No requiere ningún cálculo.
Puntuación: 2,5
COMENTARIO: No entrega
NOTA: 0

2ª Se pretende que el alumno a partir del dibujo del conjunto factible, y de una función genérica sepa deducir en qué casos el programa lineal puede tener solución, debe darse cuenta que si el vector gradiente de la función es el (1,0) la función alcanza una recta de máximos y una de mínimos, aunque el conjunto no esté acotado, es decir no debe confundir que la acotación del conjunto es una condición suficiente para la existencia de máximos y mínimos pero no es necesaria.
No tiene necesidad de cálculos.
Puntuación: 2,5
COMENTARIO: No entrega
NOTA: 0

3ª Se trata de que los alumnos primero reconozcan que los conjuntos dados S y T son conjuntos convexos y luego que sepan aplicar que la intersección de convexos es un convexo.
No requiere muchos cálculos, quizás representar los dos conjuntos.
Puntuación: 2,5:
COMENTARIO: No entrega
NOTA: 0

4ª Se plantea un sencillo programa lineal, del cual deben decidir si tiene solución global,. La clave está en dibujar el conjunto factible, y al ver que el único punto que podría ser el máximo global (0,0) es justamente el mínimo afirmar la negación.
Sólo requiere realizar la representación gráfica del conjunto factible.
Puntuación: 2,5
COMENTARIO: No entrega
NOTA: 0

NO ENTREGA CUESTIONES DEL TEMA 7. `PUNTUACIÓN 0

ANEXO VIII:

Exámenes finales propuestos.

1) CUESTIONES TEÓRICAS COMUNES A AMBOS SUBGRUPOS A Y B

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II
Licenciatura de Administración y Dirección de Empresas.
3 de junio de 2000.

A) CUESTIONES TEST

1. Sea el subespacio vectorial $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = 0\}$. Se verifica que la dimensión de W es 3; es decir, $\dim(W) = 3$.

a. Falso, pues $B = \{(1, -1)\}$ es una base de W y en consecuencia $\dim(W) = 1$.

b. Falso, ya que $\mathcal{L}((1, -1, 0, 0), (1, -1, 0, 3), (2, -2, 1, 0), (-1, 1, 1, 1)) = W$ y por tanto como $W = \mathbb{R}^4$, $\dim(W) = 4$.

c. Verdadero, pues $\{(1, -1, 0, 3), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, -1)\}$ es base de W.

d. Falso, el subespacio vectorial W está definido por una sola ecuación y, por tanto, $\dim(W) = 1$.

---

2. Sean los vectores $\overline{u}_1 = (1, 0, a, 2), \overline{u}_2 = (1, -1, 0, 1)$ y $\overline{u}_3 = (0, 1, a, 1)$ de $\mathbb{R}^4$. Se verifica que $\overline{u}_1, \overline{u}_2$ y $\overline{u}_3$ son linealmente independientes para cualquier valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

a. Falso, ya que si $a = 0$, el subespacio vectorial generado por los vectores $\overline{u}_1, \overline{u}_2$ y $\overline{u}_3$ es
$$\mathcal{L}(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / t = 2x + y, z = 0\}$$
y puesto que $\dim(\mathcal{L}(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)) = 2$, los vectores $\overline{u}_1, \overline{u}_2$ y $\overline{u}_3$ son linealmente dependientes.

b. Verdadero, ya que 3 vectores distintos y no nulos de $\mathbb{R}^4$ son siempre linealmente independientes.

c. Falso, ya que $\overline{u}_3 = \overline{u}_1 - \overline{u}_2$ para cualquier valor del parámetro a.

d. Verdadero, ya que $rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 0 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

---

3. Se verifica que existe una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ para la que se cumple
$$f(1, 0) = (2, 0),\ f(0, 1) = (0, 1) \text{ y } f(1, 2) = (4, 2).$$

a. Verdadero, pues la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas es $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y por tanto $f(1, 2) = (4, 2)$.

b. Falso, pues si f, verificando las condiciones dadas, fuese aplicación lineal se tendría que:
$$f(1, 2) = f((1, 0) + 2(0, 1)) = f(1, 0) + 2f(0, 1) = (2, 0) + 2(0, 1) = (2, 2) \neq (4, 2)$$

c. Verdadero, ya que la aplicación $f(x, y) = (xy + 2x, y)$ cumple las condiciones dadas y f es lineal.

d. Falso, ya que la única aplicación lineal f tal que
$$f(1, 0) = (2, 0),\ f(0, 1) = (0, 1) \text{ es } f(x, y) = (2x, y)$$
y por tanto $f(1, 2) = (2, 2) \neq (4, 2)$.

---

4. Sea A una matriz de orden 3, dada por $A = (\ \overline{a}_{\cdot 1},\ \ \overline{a}_{\cdot 2},\ \ \overline{a}_{\cdot 3}\ )$, donde $\overline{a}_{\cdot 1}, \overline{a}_{\cdot 2}$ y $\overline{a}_{\cdot 3}$ son las columnas de la matriz A y B una matriz tal que

$$B = (\ \overline{a}_{\cdot 1},\ \ 2\overline{a}_{\cdot 1} + \overline{a}_{\cdot 2},\ \ \overline{a}_{\cdot 1} + \overline{a}_{\cdot 2} + \overline{a}_{\cdot 3}\ ) \text{ y } AB = I_3.$$

Entonces se verifica que $|A| = |B|$.

a. Falso, $|A|$ puede ser distinto de cero pero $|B|$ siempre tiene que ser cero pues sus columnas son linealmente dependientes por ser unas combinaciones lineales de las otras.

b. Verdadero, ya que la matriz B se obtiene a partir de la matriz A sumando a la 2^a y 3^a columnas combinaciones lineales del resto de las columnas y esto no modifica el determinante.

c. Falso, pues si $AB = I_3$ entonces $B = A^{-1}$ y una matriz y su inversa no pueden tener el mismo determinante ya que

$$|B| = |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

---

5. Sea A una matriz cuadrada de orden 4 tal que el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $A\overline{x} = \overline{0}$ es un subespacio vectorial de dimensión 2. Entonces se verifica que para todo $\overline{b} \in \mathbb{R}^4$, el sistema $A\overline{x} = \overline{b}$ es compatible indeterminado.

a. Falso, pues existen vectores $\overline{b} \in \mathbb{R}^4$ para los cuales $rg(\widetilde{A}) = 3$ y en esos casos el sistema $A\overline{x} = \overline{b}$ sería incompatible.

b. En general es falso, aunque sería cierto si se supone que $\overline{b}$ no coincide con ningún vector columna de la matriz A.

c. En general es falso, aunque sería cierto si $\overline{b} \in Im(f)$ siendo f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas es A.

d. Verdadero, pues $A\overline{x} = \overline{0}$ es el sistema homogéneo asociado al sistema $A\overline{x} = \overline{b}$ y si el homogéneo es compatible indeterminado también lo es el sistema $A\overline{x} = \overline{b}$.

---

6. Sea A una matriz cuadrada de orden 3 y sean $\overline{u}, \overline{v}$ y $\overline{w}$ autovectores de A. Entonces se verifica que $B = \{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

a. En general es falso, aunque sería cierto si los autovectores estuviesen asociados a autovalores distintos de A.

b. Falso, solamente sería cierto si $|A| \neq 0$.

c. Verdadero, ya que los vectores $\overline{u} = (1,1,1), \overline{v} = (1,0,-1), \overline{w} = (1,-2,1)$ son autovectores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

asociados a los autovalores $0, 1$ y 3 respectivamente y como $\overline{u}, \overline{v}$ y $\overline{w}$ son linealmente independientes $B = \{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

---

7. Sea A una matriz cuadrada de orden 3 tal que $|A| = 0$, $tr(A) = 1$ y $\lambda = 1$ es un autovalor de A. Entonces el subespacio vectorial

$$V(1) = \{\overline{v} \in \mathbb{R}^3 / A\overline{v} = \overline{v}\}$$

tiene dimensión 1.

a. Verdadero, ya que $\lambda = 1$ es un autovalor de A de multiplicidad 1, por lo que $\dim(V(1)) = 1$.

b. Verdadero, ya que los 3 autovalores de A son distintos y, por tanto, todos los subespacios vectoriales de autovectores de A tienen dimensión 1.

c. Falso, ya que con la información que tenemos sólo podemos asegurar que $1 \leq \dim(V(1)) \leq 3$ pues A es de orden 3 y $\lambda = 1$ es un autovalor de A

---

8. Sea q_1 una forma cuadrática con matriz simétrica asociada A y q_2 la forma cuadrática cuya matriz simétrica asociada es A^{-1}(esto es, $q_1(\overline{x}) = \overline{x}^t A \overline{x}$ y $q_2(\overline{x}) = \overline{x}^t A^{-1} \overline{x}$). Entonces se verifica que si q_1 es definida positiva, q_2 también es definida positiva.

a. Falso, ya que la forma cuadrática q_2 puede no existir pues no se puede asegurar la existencia de A^{-1}.

b. Verdadero, pues los menores principales de las matrices A y A^{-1} son iguales y, por tanto, q_2 es definida positiva.

c. Verdadero, ya que como q_1 es definida positiva, entonces los autovalores $\lambda_i \in \mathbb{R}$ de A son positivos. En consecuencia, los autovalores de A^{-1} que son de la forma $\frac{1}{\lambda_i}$ también son positivos y q_2 es definida positiva

---

9. El conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq x^2\}$ es convexo.

a. Verdadero, ya que

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq x^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y - x^2 \leq 0\}$$

y como la función $f(x, y) = y - x^2$ es convexa en $\mathbb{R}^2$, entonces $S = \Lambda_0$ es convexo.

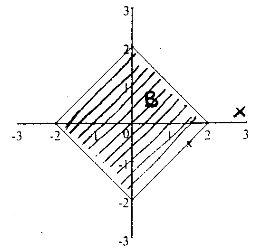
b. Falso, ya que los puntos $(1, 1)$ y $(-1, 1)$ pertenecen al conjunto S y sin embargo

$$\frac{1}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}(-1, 1) = (0, 1) \notin S$$

c. Verdadero, pues si se representa gráficamente el conjunto S, se verifica que el segmento que une cualquier par de puntos de S está contenido en S.

---

10. Se considera el programa matemático, cuyo conjunto factible B es de la forma



siendo la función objetivo $f(x, y) = ax + y$ con $a \in \mathbb{R}$. Entonces se verifica que el programa carece de máximo y mínimo globales para cualesquiera que sea el valor de a.

a. Verdadero, ya que el conjunto B no es convexo y, por tanto, el programa carece de óptimos globales.

b. Falso, pues como el conjunto B es cerrado y acotado y f es continua para todo $a \in \mathbb{R}$, por el teorema de Weierstrass existen máximo y mínimo global.

c. Falso, pues si $a = 0$, el programa tiene mínimo global en el punto $(0, -2)$ y máximo global en el punto $(0, 2)$.

d. Falso, pues si $a = 0$, el programa tiene mínimo global en el punto $(-2, 0)$ y máximo global en el punto $(2, 0)$.

2. PROBLEMAS SUBGRUPO A.

Problema 1.

Se consideran los siguientes subespacios vectoriales:

$W_1=L\{(1,1,1,1),(1,2,3,0),(5,7,9,3),(1,-1,1,-1)\}$

$W_2=\{(x,y,z,t)\in R^4/y=0,t=0\}$

Se pide:

(a) Obtener una base de W_1 *(0,6 ptos)*

(b) Obtener las ecuaciones cartesianas de W_1 *(0,7 ptos)*

(c) Obtener una base de W_2 *(0,4 ptos)*

(d) Hallar una base del subespacio $W_1\cap W_2$ *(0,6 ptos)*

(e) Obtener las ecuaciones cartesianas de W_1+W_2 *(0,6 ptos)*

(f) ¿Se puede expresar R^4 como suma directa de W_1 y W_2?. Razona la respuesta. *(0,1 pto)*

(3 puntos)

Problema 2.

Sea la aplicación lineal $f:R^4\rightarrow R^4$ definida por:

$f(x,y,z,t) = (k\,x-y+t,\ 2x+4z-t,\ x+y,\ 2x+y-z+t)$ (con $k\in R$)

Se pide:

(a) Para **k=1**, obtener la matriz A asociada a f respecto de la base canónica en el espacio inicial y la base $B_2=\{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0)\}$ *(0,6 ptos)*

(b) Obtener si es posible la inversa de A *(0,1 ptos)*

(c) Calcular la matriz B asociada a f respecto de las bases canónicas y para cualquier valor de k. *(0,4 ptos)*

(d) Estudiar para qué valores de k, la matriz anterior B tiene inversa. *(0,1 ptos)*

(e) Calcular la inversa de B para **k=2** usando el método de Gauss-Jordan. *(0,8 ptos)*

(f) Obtener dim(Im(f)) y dim(Ker(f)) en función de los valores de k. *(0,5 ptos)*

(2,5 puntos)

Problema 3.

Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

matriz asociada a una cierta aplicación lineal $f: R^3 \rightarrow R^3$.

Se pide:

(a) Estudiar para qué valores de los parámetros a y b dicha matriz M es diagonalizable. *(1 pto)*

(b) Para los valores de los parámetros a=3 y b=2, calcular una matriz diagonal D y una matriz P no singular tales que $M=P.D.P^{-1}$. *(0,8 ptos)*

(c) Para b=0 consideremos la matriz $J=(-M-M^t)/2$. Obtener la forma cuadrática $q(\overline{x}) = \overline{x}^t J \overline{x}$. *(0,2 ptos)*

(d) Clasificar para los distintos valores del parámetro a, dicha forma cuadrática. *(1 pto)*

(3 puntos)

Problema 4.

(a) Discutir según los valores de t el siguiente sistema

$$\begin{cases} 3x + 3y + 2z = 4 \\ y = 2 \\ tx + ty + tz = 1 \end{cases}$$

(1 punto)

(b) Un ingeniero requiere 4.800 m^3 de arena, 5819 m^3 de grava fina y 5690 m^3 de grava gruesa para la construcción de un proyecto. Existen tres bancos donde se pueden obtener dichos materiales. La composición de cada banco es

Banco	Arena %	Grava fina %	Grava gruesa %
1	52	30	18
2	20	50	30
3	25	20	55

¿Cuántos m^3 deberán tomar de cada banco para cumplir con las necesidades del ingeniero? **(0,5 puntos)**

3. PROBLEMAS SUBGRUPO B.

B) PROBLEMAS

1. Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal $f(x, y, z, t) = (2x + y, y - z, x + t)$. Se pide:

   a. Calcular la matriz asociada a f respecto de la base
   $$B_1 = \{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}$$
   del espacio inicial y la base
   $$B_2 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$
   del espacio final. $(1,5$ puntos)

   b. Obtener una base y la dimensión de los subespacios vectoriales $\mathrm{Im}(f)$ y $\mathrm{Ker}(f)$. (2 puntos)

2. Sea la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

   a. Estudiar para qué valores de los parámetros a y b, dicha matriz es diagonalizable. $(2,5$ puntos)

   b. Para los valores de los parámetros $a = 3$ y $b = 2$, calcular una matriz P no singular y una matriz D diagonal tales que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$. (2 puntos)

   c. Para $b = 0$, obtener la forma cuadrática que tiene como matriz asociada la matriz $A + A^t$ y clasificar dicha forma cuadrática en función del parámetro a. (2 puntos)

ANEXO IX:
PRUEBAS Y DATOS OBTENIDOS DE LA ENTREVISTA INICIAL.

1. MODELO ENTREVISTA INICIAL

Para realizar las ENTREVISTAS INICIALES; elaboramos un modelo general en base al cual realizamos todas las entrevistas con los alumnos. El modelo o esquema que seguimos con estas entrevistas es el siguiente:

Quisiera saber en principio, que ya sé, tengo algunas ideas de cual ha sido tu evolución a nivel de trayectoria educativa, me gustaría saber, si no te importa ¿cuáles han sido tus primeros estudios? ¿has hecho primaria.....?

Y ¿cómo ha sido tu evolución en Matemáticas? ¿Qué tal se te han dado desde el principio más o menos hasta ahora? En la EGB por ejemplo, ¿qué tal se te ha dado? ¿Y en el COU que te salió?

Y por lo que veo la evolución que has tenido en actitudes, en Matemáticas

Y aquí al entrar en la Universidad ¿qué tal se te ha dado el primer cuatrimestre?

Y aún así, aunque se te haya ido dando mal ¿las matemáticas te gustan o no te gustan?

Y de los ordenadores qué tiene que decir, ¿te gustan, no te gustan?

¿Tienes en casa ordenador no?

¿En qué suele utilizar el ordenador?

Cuando estas trabajando en las clases, como verás hay una posibilidad de diálogo inmensa no?

No tienes que estar en silencio, sin poder hablar con el compañero,...¿qué te parece a ti el tema de trabajar en grupo?

Y, cuando te toca trabajar como te toco el otro día trabajar en otro lugar, cambiándote de sitio ¿te descoloca mucho o no?, quiero decir, trabajas igual o encuentras más apoyo cuando estás con la persona con la que tienes más confianza?

¿Tú crees que vas a aprender más haciendo el trabajo como lo estamos haciendo así en grupo, o sea con tu pareja, vas a aprender más así o si te pusiera en un fila individual?

Y con el profesor, imagínate que yo no fuera el profesor y puedes decir todo lo que quieras de él. ¿Tú crees que está orientando bien la asignatura tal como la está dando?
Contesta con total libertad, que yo no te voy a suspender o aprobar. Esto es investigación,...

Te has encontrado alguna vez un poco perdido en alguna exposición, en alguna en concreto
Pero ¿es un problema de Matemáticas o es un problema del programa?

Y bueno, lo que estamos viendo ahora que es álgebra lineal ¿te parece más abstracto de lo que has visto en el primer cuatrimestre o menos? ¿más difícil, menos difícil?

¿Tú crees que te has fiado un poco en que estabas haciendo el trabajo en el ordenador? ¿Te has centrado demasiado en la manipulación del ordenador más que en lo que estaba detrás?

De los conceptos que hemos visto de álgebra lineal cuales son los que has conseguido asimilar bien, o crees tú que has conseguido asimilar bien.

¿Crees que DERIVE te está provocando un cierto obstáculo para que aprendas todo o no?

Pero ¿tú crees que DERIVE te puede ayudar, que te está ayudando algo?

El ambiente de clase ¿cómo te parece?

Tal como se están planteando las dinámicas que normalmente lo que se hace es plantear un ejemplo que tienes tú que manipular y normalmente se dice investigar sobre tal, experimentar sobre cual eso a ti ¿te está motivando? ¿te resulta complicado? Es compleja esa forma de estudiar? De ir intentando descubrir lo que ocurre en los ejemplos...

Te gusta realizar experiencias en matemáticas, es decir experimentar si algo da una cosa y no da otra ,.. todo el tipo de manipulación que se está haciendo con DERIVE; es decir que te plantean un problema diciendo Esto se va a verificar siempre , bueno intenta probarlo en este caso, en este *otro, ... es decir ir experimentando, ¿te parece que eso te ayuda a entender lo que se está explicando o te dispersa?*

¿Te has aburrido en algún momento en el curso?

¿Qué es lo que más te gusta del curso?

¿Y lo que menos?

En cuanto al horario, imagino que como los has elegido te parecerá bien ¿no?

Cuando acabas una clase por ejemplo analizando la evolución de este mes que llevamos más o menos de clase, cuando acabas una clase tienes la sensación de que has aprendido algo, que estás más pez de cuando habías empezado ¿qué sensación estás encontrando últimamente?

¿Podrías hacer una valoración general de las clses las que llevamos?

¿te da la sensación de que has aprendido algo?

Las expectativas que tienes tú de cara al curso, ¿tu crees que las vas a aprobar que va a ser asequible?

¿Qué piensas hacer cuando termines la carrera? A qué te querrías dedicar sector privado, público, banca, empresa?

¿Tu crees que lo que estás aprendiendo de matemáticas va a ser una herramienta fundamental en el trabajo que ejerzas o hay demasiada teoría?

2. TRANSCRIPCIÓN DE LAS ENTREVISTAS INICIALES

A continuación mostramos a modo de ejemplo la transcripción de la entrevista realizada a uno de los alumnos que participaron en la experiencia educativa del SUBGRUPO A. El resto de las transcripciones se pueden consultar en el CD adjunto a este trabajo.

DATOS DE LA ENTREVISTA INICIAL:
Realizada el 29 de Marzo de 2000.
Entrevistado: Sebastián Rosado Linares

CONTENIDO DE LA ENTREVISTA (Grabada)
ENTREVISTADOR:
Yo aquí veo de la encuesta que hiciste inicialmente que estás matriculado por primera vez en Matemáticas II, conocimientos de Windows normales, Manejo de Internet Explores y Netscape. Tu correo electrónico creo que está bien es sebas.rosado@uam.adi.es
SEBASTIAN:
Sí
ENTREVISTADOR.
Vamos a ver, tus conocimientos iniciales en Matemáticas. ¿cuál ha sido tu trayectoria educativa, digamos desde que empezaste a estudiar qué es lo que has hecho? Has ido por la LOGSE
SEBASTIAN
Yo hice BUP y COU el Bachillerato antiguo, antes de la LOGSE y eso
ENTREVISTADOR:
Has hecho EGB, los tres años correspondientes de BUP y COU.
SEBASTIAN:
Sí
ENTREVSITADOR:
Y ¿cómo han sido tus calificaciones en general en todo?
SEBASTIÁN:
En todo, bueno la verdad es que en BUP bastante bien. En 1º BUP tuve me parece que fueron 5 sobresaliente, 3 notables y dos bienes. En 2º de BUP tuve 9 sobresalientes y un bien. 2º de BUP fue un año muy bueno, muy fácil. En 3º de BUP ya fueron 4 sobresalientes , 4 notables y 2 bienes. y en COU fue cuando peor nota saqué.
ENTREVISTADOR:
¿por qué? ¿qué es lo que ten pasó?
SEBASTIAN:
Pues nada, debe ser la edad, la tontería, que te crees que COU es como 3º que no estudias , me costó, bueno no es que me costase , no estudiaba lo que tenía que estudiar y me quedaron 3 en la segunda evaluación. Luego mi padre dijo que las tenía que sacar y al final de curso las saqué y bien.
ENTREVISTADOR:
Y a nivel de Matemáticas, durante todos esos cursos.
SEBASTIÁN:
Hombre, la verdad SB en Matemáticas he sacado siempre en BUP, en los tres cursos SB porque siempre me han gustado. Siempre he sido ciencias puras y tal. Y quería hacer arquitectura, lo que pasa que luego se me quitaron las ganas de hacer arquitectura y me dieron ganas de hacer telecomunicaciones pero tampoco ..
ENTREVISTADOR:
Era mucho, Telecomunicaciones era mucha nota...
SEBASTIAN
Era mucho, mucha nota era Telecomunicaciones y no

ENTREVISTADOR:
Tú tienes de acceso un seis...
SEBASTIAN
cuarenta y dos (6,42). Ese 6,42 lo ha bajado la Selectividad .
ENTREVISTADOR:
O sea que la nota de acceso un 6,52.
SEBASTIAN
Sí pero para Telecomunicaciones la nota me parece que era un 7,8 o algo así , una nota exagerada
ENTREVISTADOR:
Entonces porqué te has decidido por hacer Económicas y Empresariales por la nota o por...
SEBASTIAN:
No solo por la nota, es que de las que había , quería hacer una ingeniería pero como la que me gustaba es la que no me llegaba, pues lo consulté con mis padres y tal y ellos me dijeron que hiciese algo que tuviese algo de futuro, que no fuese ,... que me gustase pero que tuviese algo de futuro . En principio iba a hacer Económicas pero luego dije, bueno cojo primero Adm. y Dir. de Empresas para ver como va y eso,... por ahora va bien , me gusta bastante, o sea que no me parecen difíciles ni nada de eso.
ENTREVISTADOR
Y ¿qué tal te ha ido en Matemáticas el primer cuatrimestre?
SEBASTIAN.
Matemáticas me ha quedado, pero Matemáticas ha sido porque ...
ENTREVISTADOR
no has estudiado...
SEBASTIAN.
NO, es que no he ido ni a clase,.
ENTREVISTADOR
no has ido a clase
SEBASTIAN
No he ido a clase, he de reconocer que no he ido a clase ...
ENTREVISTADOR
Te has ido de pellas con Juan Pablo..
SEBASTIAN
Sí, pero de todas maneras Matemáticas no eran ni mucho menos difícil porque eran conceptos de derivadas y integrales que para mí eran muy fácil lo que pase que.... bueno no fue a revisión . El examen cateé por el tipo test.
ENTREVISTADOR:
O sea que el test te ha parecido complicado.
SEBASTIAN:
No es que fuese complicado , como eran muchas opciones y tan parecidas si no tiene muy claro muy claro, de haber estudiado y haber practicado durante mucho tiempo , claro al final sueles fallar siempre
ENTREVISTADOR:
Y a pesar de eso, ¿te siguen gustando las Matemáticas ?
SEBASTIAN:
La Matemáticas, ... es que yo soy mucho más de aplicar conceptos que intentar meter un mazacote de 70 páginas que aprender conceptos analíticos y pensar los ejercicios saber hacerlos, siempre me gustan mas las Matemáticas por eso. Además es que al ser tan abstractas por eso me gustan, más todavía. Porque son muy abstractas y no tienes que, que sí que a lo mejor lo tienes que aplicar a problemas y tal pero me gusta así cosas que sean muy abstractas mucho más, conceptos que puedas aplicar, no sé ..
ENTREVISTADOR
Los ordenadores imagino que te encantan, por lo que he visto..
SEBASTIAN
sí, sí...

ENTREVISTADOR
¿no tienes ordenador, sigue roto?
SEBASTIAN
sí, sí se ha arreglado, era verdad, parecían escusas pero era verdad
ENTREVISTADOR
No, no, oye si se rompen
SEBASTIAN
No, al final era la tarjeta gráfica que estaban poco apretados los megas y los tuve que apretar hasta que al final averigüé
ENTREVISTADOR
O sea que al final eres hasta un destripa ordenadores
SEBASTIAN
Bua, un poquitín solo , no puedo hacer muchas cosas tampoco.
ENTREVISTADOR
¿Qué sueles hacer con el ordenador en general? No digo Matemáticas, sino en general. ¿juegos...?
SEBASTIAN
Principalmente juegos, porque ahora ya no hay que hacer muchos trabajos y tal, pero antes manejaba el AUTOCAD lo he manejado siempre mucho, Tenía,. conseguí una copia vamos, de AUTOCAD y como quería hacer arquitectura fui a un sitio a aprender AUTOCAD , aprendí AUTOCAD y aprendí un poquito de teorías de estudio y hacía cosas con el AUTOCAD bastante, hice planos, hice el plano por ejemplo de la casa que esta haciendo mi padre en el pueblo, pues lo he hecho yo me daba, ..
ENTREVISTADOR
satisfacción..
SEBASTIAN:
sí, me gustaba bastante. .. NO solamente he hecho juegos, que he hecho muchas cosas con el ordenador pero ahora no tienes ...
ENTREVISTADOR
Tienes Internet?
SEBASTIAN
No, internet no tengo , pero bueno no hay problemas porque voy a la Universidad y , que me parece una idea muy buena que esté en la Universidad y entre amigos y tal , pues quieras que no el poco tiempo que tengo pues, .. lo manejo y tal
ENTREVISTADOR:
Sobre el trabajo en grupo, ¿qué prefieres trabajar sólo o trabajar en grupo?
SEBASTIAN:
Bueno, depende, me gusta trabajar en grupo pero es que, cuando alguien, cuando yo por ejemplo no soy buen profesor ose quiero decir, cuando yo por ejemplo entiendo una cosa y a los demás veo que les cuesta hay muchas veces que me desespero es que digo pero ¿porqué no lo entienden si es muy fácil? entonces al final prefiero hacer yo las cosas que yo si sé, sé que las hago yo las puedo hacer mal o hacer bien pero las hago yo, y sé lo que estoy haciendo pero le dejo a otro y ese no lo hace como a mí me gusta me pongo muy nervioso, pero vamos me gusta trabajar en grupo para coger ideas. O sea yo prefiero que ellos hagan lo que se llama el trabajo sucio y hagan las cosas que vamos a entregar es decir los retoques finales,..
ENTREVISTADOR:
No, pero respecto al tipo de trabajo que hacemos en clase en el desarrollo de la clase, es individual, pero es en grupo porque tienes una pareja al lado con el cual dices oye ¿a mí no me sale esto , lo otro? ese estilo de trabajo , no el de hacer una hoja de problemas
SEBASTIAN
Eso está muy bien, porque eso , principalmente porque es poca gente , entonces estamos todos muy juntos y nos conocemos todos muy bien, nos llevamos todos muy bien pues siempre tener una persona al lado es lo mejor porque mandas tú a lo mejor una cosa y yo empiezo a hacer una parte del problema a lo mejor Juan Pablo está haciendo otra cosa que se ha equivocado y dices, leche, Juan Pa, eso no es así y él lo corrige y dice ¿estás seguro de que no es así? Vamos a comprobar y entonces hacemos cada uno hace nuestro método y cuando esté mal a lo mejor está el otro mal,

pues no fastidiamos si estamos y lo tengo yo bien, le digo mira Juan Pa que a mí me da bien y lo vuelve a hacer y mucho mejor tener una persona al lado que entiende un poco es decir que no sea ,..
ENTREVISTADOR
que no vaya a remolque..
SEBASTIAN
sí que entienda más o menos un poquito
ENTREVISTADOR
O sea que tu pareja ideal, vamos quiero decir en cuanto al trabajo de Matemáticas es Juan Pablo ¿no?
SEBASTIAN
sí,..
ENTREVISTADOR
si pudieras no cambiarte preferirías estar así
SEBASTIAN
sí , si, estoy muy bien con él. , pero vamos que tampoco, me llevo muy bien con mucha gente.
ENTREVISTADOR
con el resto?
SEBASTIAN:
me llevo muy bien, y trabajo igual de bien con la gente
ENTREVISTADOR:
Y como te pare que es, suponiendo que yo no fuera el profesor, suponiendo que yo no lo fuera ¿qué te parece la forma de exposición, eh.. te parece correcta, crees que habría que modificar algo ?.. alguna cosa que tu creas que ...
SEBASTIAN
O sea la forma de ...
ENTREVISTADOR
sí la forma de exponer.
SEBASTIAN
Pues yo creo que es la mejor , es yo no sé otra forma posible de decir con las láminas . Principalmente el no tomar apuntes y el estar atento a lo que te explican porque al tomar apuntes estas tomando apuntes y te olvidas de lo que están explicando y no lo entiendes Y al ser el profesor el que va con las láminas , explica las cosas paso por paso, pues estás atento a lo que estás explicando y luego encima lo trabajas en el mismo instante , lo practicas en el ordenador a mi me parece que es la mejor idea . Hay cosas que, pues no sé cuando vas un poco rápido, cuando a veces vas un poco más rápido y empiezas ya a utilizar conceptos demasiado matemáticas, que si subespacio vectorial del conjunto 3 no se qué no se cuantos , dices joe, un poquito más despacio que ya tengo muchos subespacios vectoriales pero bueno, eso es cuestión de ... el lunes pasado que fuiste paso por paso repetiste la explicación del viernes paso por paso a mí me quedó clarísimo. Es que me parece que es lo mejor Paso por paso explicando , aplicando en ese momento y viéndolo y haciéndolo, a mí me parece que es la mejor forma de hacerlo.
ENTREVISTADOR
O sea que te parece bien la forma de exposición
SEBASTIÁN
sí, sí
ENTREVISTADOR
¿Qué te parece a ti el tema del ALGEBRA LINEAL; te parece una disciplina complicada muy abstracta más sencilla que la de cálculo?
SEBASTIAN
Me parece que , según lo que tengo yo de COU Y 3º BUP que se da y en COU se da hasta... me parece que es más fácil que integrales y derivadas para mí. Y la cuestión de matrices y sistemas lineales que había que aplicar y las posiciones relativas del plano eso siempre me ha parecido mucho más fácil que
ENTREVISTADOR
que el cálculo
SEBASTIAN;

sí, pero hay cosas , si yo tengo amigos que están en Informática y que dan cosas ya más cosas que son ya un poco más difíciles pero lo que son conceptos de vectores o sea a mí es que eso siempre me ha parecido

<u>ENTREVISTADOR</u>

Entonces esta primera parte del tema que llevamos ESPACIOS VECTORIALES así en plan genérico , aunque hemos manipulado vectores te parece más sencillo que cosas de cálculo ¿nó?

<u>SEBASTIAN</u>

Me parece una chorradita pero bueno . Luego ya cuando empecemos con las cosas más serias

<u>ENTREVISTADOR</u>

No hay cosas muchísimo, quiero decir,

<u>SEBASTIAN</u>

Hombre de este tema, difícil difícil que pueda decir, bueno algo más de complicación , no sé, quizás el hallar lo de la base pero claro es que eso a mí no me parece difícil.

<u>ENTREVISTADOR</u>

Porque lo tienes claro de antes.

<u>SEBASTIAN</u>

Lo he tenido claro, eso lo he dado en 1º , 3º y en COU, pero bueno,

<u>ENTREVISTADOR</u>

Esto se da en 1º?

<u>SEBASTIAN</u>

Yo dí en 1º hasta las bases dí , sí, sí,

<u>ENTREVISTADOR</u>

¡qué barbaridad! esto se suele dar en 3º y COU:

<u>SEBASTIAN</u>

sí si yo me acuerdo ...

<u>ENTREVISTADOR</u>

¿qué colegio has ido, qué instituto?

<u>SEBASTIAN</u>

A Los Sauces, un colegio privado de Alcobendas.

<u>ENTREVISTADOR</u>

O sea que no te parece una asignatura muy complicada.

<u>SEBASTIAN:</u>

No es que sea complicada , luego ya veremos si se complica quizás la complicación esté en el utilizar el DERIVE. que eso ya es más complicado, a lo mejor te equivocas, te equivocas en un paréntesis un corchete y dice No tiene solución. Y a lo mejor piensas que está mal de antes, y tienes que empezar a subir para arriba a lo que se ha preguntado del problema y tal ,.. pero a mí no me parece que sea, .. es practicar un poco, es muy sencillo.

<u>ENTREVISTADOR</u>

O sea que DERIVE es lo que te parece un poquito más complicado.

<u>SEBASTIAN:</u>

NO, no es que sea complicado . Hemos aprendido a utilizar DERIVE en 2 días yo no había utilizado en mi vida el DERIVE y ahora sé manejar más o menos DERIVE: Entonces no me parece que sea difícil. Sí es cierto que tienes que tener mucha más, como en todos los programas informáticos, si no los manejas mucho a menudo al final te olvidas de cosas. Bueno si estamos dos días a la semana es imposible que se te olvide. No sé, .. luego he visto algunos problemas y algunos si que son difíciles que ya hay que pensar mucho mucho los problemas

<u>ENTREVISTADOR</u>

Los problemas, claro es que una cosa son los ejercicios de manipulación de apartado

<u>SEBASTIAN</u>

que es lo que has visto del tema

<u>ENTREVISTADOR</u>

procedimientos ...

SEBASTIAN
aplicado sobre números básicamente , los problemas hay que pensar un poquito más. Los problemas he empezado tengo hechos creo que 4
ENTREVISTADOR
¿qué te parece? Vamos a ver a nivel de problemas o el estilo de problemática que se puede plantear con esta asignatura si utilizas DERIVE evidentemente fíjate que de los cálculos casi te tienes que olvidar . La idea fundamental es que sepamos plantear ecuaciones vectoriales o el sistema adecuado y listo. Entonces claro como ya has limitado el tema de cálculo, ya lo has superado, ahora hay que pensar un poquito en el problema...
SEBASTIAN:
ahora hay que pensar mas .Me parece que eso es lo que realmente tenían que hacer las Matemáticas , porque yo por ejemplo ya en COU los problemas en COU y en 3º eran más de manipular que de pensar, los difíciles difíciles eran los de pensar un poquito , eran ya los de pasar del notable al sobresaliente , el típico problema que hay de pasar del notable al sobresaliente y para mí eso era que si te equivocabas en una operación de una suma tenía el problema mal entero y me parecía muy injusto si lo habías planteado bien, por eso me parece que la mejor forma de hacer matemáticas es olvidarte los cálculos que es secundario porque un cálculo una suma una resta es muy secundario, lo que tienes que saber bien es saber lo que te está pidiendo el problema adonde lo tienes que aplicar plantear la ecuación, y resolverla se resuelve sola , simplemente plantearlo y saber lo que te están pidiendo , eso me parece que es lo fundamental , es como se aprenden matemáticas de verdad, no a sumar ni a restar que eso lo aprendes en primero de EGB. , me parece que eso es lo ...
ENTREVISTADOR:
Crees entonces que el programa puede ayudar a mejorar el conocimiento y a profundizar el los conceptos
SEBASTIAN:
sí, si, si, muchísimo más, es que te ahorrar el hacer, ya no sumas y restas sino ecuaciones difíciles con cinco mil parámetros que vale que sí que tienes que saber hacerlo pero eso me lo han enseñado en primero de BUP, a despejar un parámetro lo que tienes que hacer es saber qué significa ese parámetro aplicado al problema o si te está pidiendo acotar una cosa o definir una cosa entender bien lo que se te está pidiendo y no operar hacer uno más uno ,.. sabes me parece que eso ...
ENTREVISTADOR:
Y te parece que el programa puede servir para que el proceso de abstracción que requieren las Matemáticas se mejore, ¿te está ayudando a algo, o en principio de momento no?
SEBASTIAN:
De momento, es que la abstracción de las Matemáticas, todo el mundo intenta quitar la abstracción pero es que la abstracción en matemáticas,...
ENTREVISTADOR:
No yo no la quito quiero decir si el programa ayuda,.
SEBASTIAN:
ya, ya pero como la abstracción está ahí y no se puede quitar , es difícil quitar la abstracción, otra cosa distinta pues es por ejemplo, no sé, es que la abstracción con lo que llevamos visto sigue siendo la misma lo único que pasa que quizás al manejar el ordenador, tener un dispositivo que te ayude en los cálculos que al final son los que te amuerman las Matemáticas y prestes más atención a lo que está explicando el profesor te enteres más de lo que se pide en el problema , tener una situación más real de la situación que te están planteando pues a lo mejor, pero la abstracción a mí personalmente es lo que me gusta
ENTREVISTADOR:
No, no si nadie la va a eliminar , la idea es si DERIVE ayuda a entender esos procesos de abstracción

SEBASTIAN:
sí, sí a mi el DERIVE , es que el DERIVE a mí me parece que es una idea muy buena el utilizar el DERIVE porque a mí ya de por sí me gusta, no sé a la gente que no le guste a mí es que eliminar cálculos que no se dejen y plantear más casos reales y ver como las Matemáticas pueden solucionar

problemas de la vida normal pues eso es que me parece que está muy bien yo creo que es lo que pensaron los que inventaron las Matemáticas

ENTREVISTADOR:

No, las matemáticas surgieron para resolver problemas

SEBASTIAN

Seguro que Aristóteles tenía 5000 tíos que hacían las operaciones y él solamente se encargaba de aplicar la vida real, aplicar los conceptos a las matemáticas. ,.. Arquímedes

ENTREVISTADOR:

Hombre ellos hicieron sus cálculos .

Bueno y en cuanto al estilo de experimentación que se hace, quiero decir, esto de plantear un ejemplo e investigar a ver que es lo que sucede, qué propiedades cumple ¿te parece correcto? ¿te gusta o no te gusta?

SEBASTIAN

Sí, a mí , o sea te refieres por ejemplo cuando dices ... hemos visto este ejemplo...

ENTREVISTADOR:

No, cuando introducimos un concepto,..

SEBASTIAN:

Con un ejemplo introducir los conceptos.

ENTREVISTADOR

Quiero decir, ver como con un ejemplo puedes deducir propiedades o intuir propiedades a nivel general.

SEBASTIAN.

Hombre la verdad es que de todas las maneras cada forma tiene su cosa, pero esta a lo mejor quizás como tienes el ejemplo y dices hacer el ejemplo e intentad vosotros mismos , pues eso ya nos ayuda a intentar pensar lo que está pasando, intentar sacar las conclusiones y eso siempre es mucho mejor sistema que tener cumple estas propiedades y luego mirar con un ejemplo las propiedades y miras y dices joder esto es una chorrada , es mucho mejor tener el ejemplo y dices hay va. pues anda mira si haces esto mas esto , esto suena como una propiedad conmutativa eso a mí me parece que es más , desde un punto de vista educativo hace que se desarrollen mucho mejor las Matemáticas o sea que sean conceptos mucho mejor entendidos a la larga, para mí,

ENTREVISTADOR:

NO, es tu opinión, y a mí es lo que me interesa lo que estás percibiendo tú en lo que estamos haciendo en el curso.

Cuando, ¿ has realizado muchos ejercicios de manipulación?

SEBASTIAN:

sí unos cuantos,

ENTREVISTADOR:

Los has hecho sólo o con gente?

SEBASTIAN

No sólo, los he hecho en mi casa . He hecho del tema 1 del punto 1 todos, o sea los 7 , luego del punto 2 también porque son dos nada mas, y he llegado hasta el tercero, o sea los de manipulación 4,5,6 y 7 no los he hecho porque como tenía que hacer los problemas pues ya es que era mucho , eran muchos.

ENTREVISTADOR:

Bueno la manipulación ya sabes que tiene como objetivo, que una vez que acabamos un apartado te líes a repetir procesos con el ORDENADOR

SEBASTIAN

No los he podido hacer antes porque no tenía Internet, y entonces hasta que los he sacado pues no me ha dado tiempo. Ahora con el tema 2 como ya está pues lo saco y una vez que terminemos el punto 2 pues los haces en una tarde

ENTREVISTADOR

Sí, ya sabes que el tema 2 está ya accesible.

SEBASTIAN.

Sí en una tarde haces los ejercicios del punto 1, y en una semana los has terminado todos.

ENTREVISTADOR
¿Te has aburrido alguna vez en las clases?
SEBASTIAN
No me he aburrido, lo que pasa es que cuando llevas, la primera hora se ta pasa volando, porque es rápido , es entretenido y se te pasa volando la primera hora, pero luego ya la última cuando llevas ya media hora de la segunda dices , vaya, que ya estás cansado , con el culo pegado al asiento , es que se hace muy largo . Yo creo que clases de 1h. y media , serían mejor, pero claro clases de hora y media con esto de DERIVE es casi imposible no he podido, entonces hay días que las 2 horas me dan stress horrible que no he podido y otros que las 2 horas se me han pasado volando depende también del tema, de si he trabajado mucho de si he estado en la clase de cachondeo por que hay días que estás muy cansado y te apetece hablar más, si estás más concentrado y eso a lo mejor ni te das cuenta de que pasan las dos horas.
ENTREVISTADOR
Perdido desde luego no te has encontrado ¿no?
SEBASTIAN
No, no,
ENTREVISTADOR
Salvo a lo mejor un día que faltaste, el día siguiente a la definición de aplicación lineal
SEBASTIAN
Si, bueno, pero tampoco es que fuese una cosa muy difícil a mí simplemente que no viene ese día pero, porque no pude venir,..
ENTREVISTADOR
No, no si no te achaco el que no vinieras
SEBASTIAN
ya, ya,
ENTREVISTADOR
Es que ese día no viniste y al día siguiente tenías dudas , pero eso no genera ningún problema
SEBASTIAN
No, no, faltar una día, hombre faltar dos días, ya puede ser un problema. Pero faltar un día que tampoco es que hayan sido conceptos muy difíciles luego al día siguiente como es una parte más avanzada lo del día anterior simplemente como una parte que ayuda a hacer esta parte nueva , pues no es que sea muy difícil.
ENTREVISTADOR
En general ¿qué es lo que más te gusta del curso?
Evaluando así de forma general.
SEBASTIAN
Pues, muy general,..
ENTREVISTADOR
Bueno, si quieres dar más ideas,
SEBASTIAN:
Principalmente manejar ordenadores, me parece que es una idea fundamental, el estar en el ordenador que es una herramienta que te ayuda , es un avance muy importante .
segundo sobre todo la idea de no coger apuntes , que el profesor explique y estés atento a lo que está explicando, que es lo que los profesores quieren cuando dan las clases , no quieren que los alumnos estén copiando apuntes como descosidos, sino que quieren explicar una cosa y que se entienda, es decir que no resulte diciendo pero qué me ha dicho este hombre, entonces eso al tener el ordenador delante y al saber que los apuntes, que son conceptos teóricos que los vas a aplicar y que te los tendrás que estudiar al sacar de Internet y tener un profesor ahí que te lo explique porque lo muestras con el aparatito ese
ENTREVISTADOR:
Las trasparencias,.
SEBASTIAN:
Sí, las trasparencias lo miras y lo ves en el ordenador ves el ejercicio, ves el ejemplo, ves como se hace a mí eso me parece que es muchísimo mejor que uno esté en clase dictando tal esto es tal tal y tal se tira media hora dictando los apuntes y dice vamos a hacer un ejemplo que tenga encima que

operar, que hacer las operaciones en la pizarra, que luego tienes otra media hora para hacer 5 mas 3 mas 15 no se qué , eso me parece que es una pérdida de tiempo. Es mucho mejor este sistema , la cosa está en que para dar mucho mejor ese tema el DERIVE hay que tenerlo controlado, o sea yo tengo ahora algo de idea y los cinco primeros días de DERIVE, los días primeros me costaban mucho los comandos que te equivocabas pero ahora ya por ejemplo ya hago todo rápido, ya para meter los vectores es mucho más fácil según vas teniendo la práctica, eso a nivel general es mejor.
Luego también somos menos gente. O sea el factor menos gente yo creo que es fundamental porque 120 personas en clase el profesor es que por mucho que quiera no puede dar más de sí , entonces ¿cuántos somos?

<u>ENTREVISTADOR</u>

16

<u>SEBASTIAN</u>

Eso es una maravilla , para mí el número ideal de gente entre 30 y 50, como muchísimo 50 para que el profesor pueda desarrollar la asignatura a su gusto, pero en una clase que son 100 personas es imposible aplicar esto del DERIVE porque es que 100 personas en una clase con lo del DERIVE pues se pueden enterar los que sean más , los que estén mejor preparados, pero al final los que estén atrás de la sala de ordenadores es que no se van a enterar de nada . O sea es mucho mejor en grupos más reducidos. Yo por eso me metí en DERIVE: porque yo no sabía como iba a ser, pero dije bueno vamos a ser como mucho 30 personas y das la asignatura muchísimo mejor, está claro. Claro el problema de las personas no se puede solucionar , la educación nuestra es así y no puedes hacer nada

<u>ENTREVISTADOR:</u>

Se puede solucionar si hay más dotación,..

<u>SEBASTIÁN</u>

Más dinero , pero con el gobierno que hay ahora difícil.

<u>ENTREVISTADOR:</u>

Eso ya, no entremos en temas políticos. No quiero entrar ahí, porque no es el cometido.
El horario te viene muy mal o no?

<u>SEBASTIAN</u>

No, además, me gusta el horario, porque es de dos y media, . bueno a lo mejor la gente que viva muy lejos, hombre yo tampoco vivo cerca pero vivo en Alcobendas y estoy a media hora como a la una y media que no es una hora muy temprano después vienes das la clase y luego encima no es que tengas otra clase después sino que tienes dos horas de descanso que te puedes ir a la Biblioteca si te apetece estudiar, te puede ir al césped y tumbarte para estar más relajado la segunda hora , me parece que a mí el horario me gusta. A lo mejor, puedo comprender que haya gente que le parece muy temprano , y luego los lunes estás hasta las nueve aquí desde las dos y media , mucha gente dice joder, estoy ya harto de estar aquí, y es que es normal. A mi como no me, el horario personalmente me parece que es de todas las posibilidades el mejor porque más tarde, o sea es decir, a partir de las ocho no, o sea porque ya llegas tarde a tu casa , si llegas tarde ahora, y por la mañana tampoco, a mí la mañana me encanta la mañana libre.

<u>ENTREVISTADOR</u>

Por eso elegiste el horario de tarde.

<u>SEBASTIAN</u>

Sí,

<u>ENTREVISTADOR:</u>

Oye y cuando acabas de terminar una clase, cuando termina una clase acabas con la sensación de que has descubierto algo nuevo o no

<u>SEBASTIAN</u>

¡qué pregunta más profunda! conocer algo nuevo.

<u>ENTREVISTADOR.</u>

Haciendo una valoración del mes que llevas sopesando cuantos días has salido diciendo, esto, hay una cosa había dado cuenta,....

<u>SEBASTIAN</u>

Hombre desde luego, día que terminamos DERIVE tienes la sensación de que, cuando terminas otras clases dices qué hago yo en esta clase si no me he enterado absolutamente de nada , no me ha valido nada lo que ha explicado este tío, sin embargo en clase de DERIVE No en DERIVE claro te das cuenta que siempre hay algo nuevo.

ENTREVISTADOR

Entonces, según esto, las expectativas que tienes tú de cara al curso, tu crees que las vas a aprobar que va a ser asequible?

SEBASTIAN

Creo que voy a aprobar con nota.

ANEXO X:
PRUEBAS Y DATOS OBTENIDOS DEL DIARIO DE CAMPO.

1. REGISTRO DIARIO DE LAS ANOTACIONES DE CAMPO:

A continuación ofrecemos el registro de observaciones generales que se realizaron en cada una de las sesiones en que tuvo lugar la investigación educativa:

FECHA: HORARIO: 14,30-16,30

- **¿Qué temas se han impartido?**
- **¿Ha dado tiempo a impartir lo que estaba programado? Más o menos.**
- **¿ Cómo ha sido el ambiente de clase en general?**
- **¿Has estado cómodo impartiendo la clase hoy?**
- **¿El GUION de trabajo ha resultado demasiado teórico, o por el contrario demasiado práctico? ¿Cuál es la percepción general de esto?**
- **¿Has notado ACTITUDES NEGATIVAS en la clase respecto al curso?**
- **¿Has notado ACTITUDES POSITIVAS en la clase respecto al curso?**
- **¿Has observado que algún alumno se ha descolgado demasiado del ritmo de toda la clase?**
- **¿Has percibido si algún alumno se ha aburrido porque íbamos demasiado despacio?**
- **¿Has percibido qué alumnos son los más retrasados y merecen una atención especial?**
- **¿La presencia del OBSERVADOR CUALIFICADO, te ha motivado, te ha hecho sentir mal, has encontrado algún obstáculo por su presencia?**
- **¿Cuál es la disposición de los alumnos, empiezan a formar SUBGRUPOS?**

- **¿Cómo es la disposición de los alumnos, siempre forman mismas parejas, qué cambios ha habido?**

Ubicaciones de la **sesión anterior**

		Pasillo		
		PIZARRA		

Ubicaciones de la sesión de hoy

		Pasillo		
		PIZARRA		

- **¿Cómo son las dudas que se plantean, son de CONCEPTOS MATEMÁTICOS o del modo de uso del PROGRAMA?**

- **¿Se percibe MOTIVACIÓN en los alumnos a la hora de resolver los ejercicios y tareas planteadas?**

- **¿Cómo es el trabajo con DERIVE? ¿Se entiende, existe dificultad en su comprensión? ¿Cuáles han sido las dudas más significativas que has observado sobre el uso del programa?**

- **¿Existe autonomía cognitiva o una excesiva dependencia del programa? Pon ejemplo si los tienes que corroboren una u otra afirmación.**

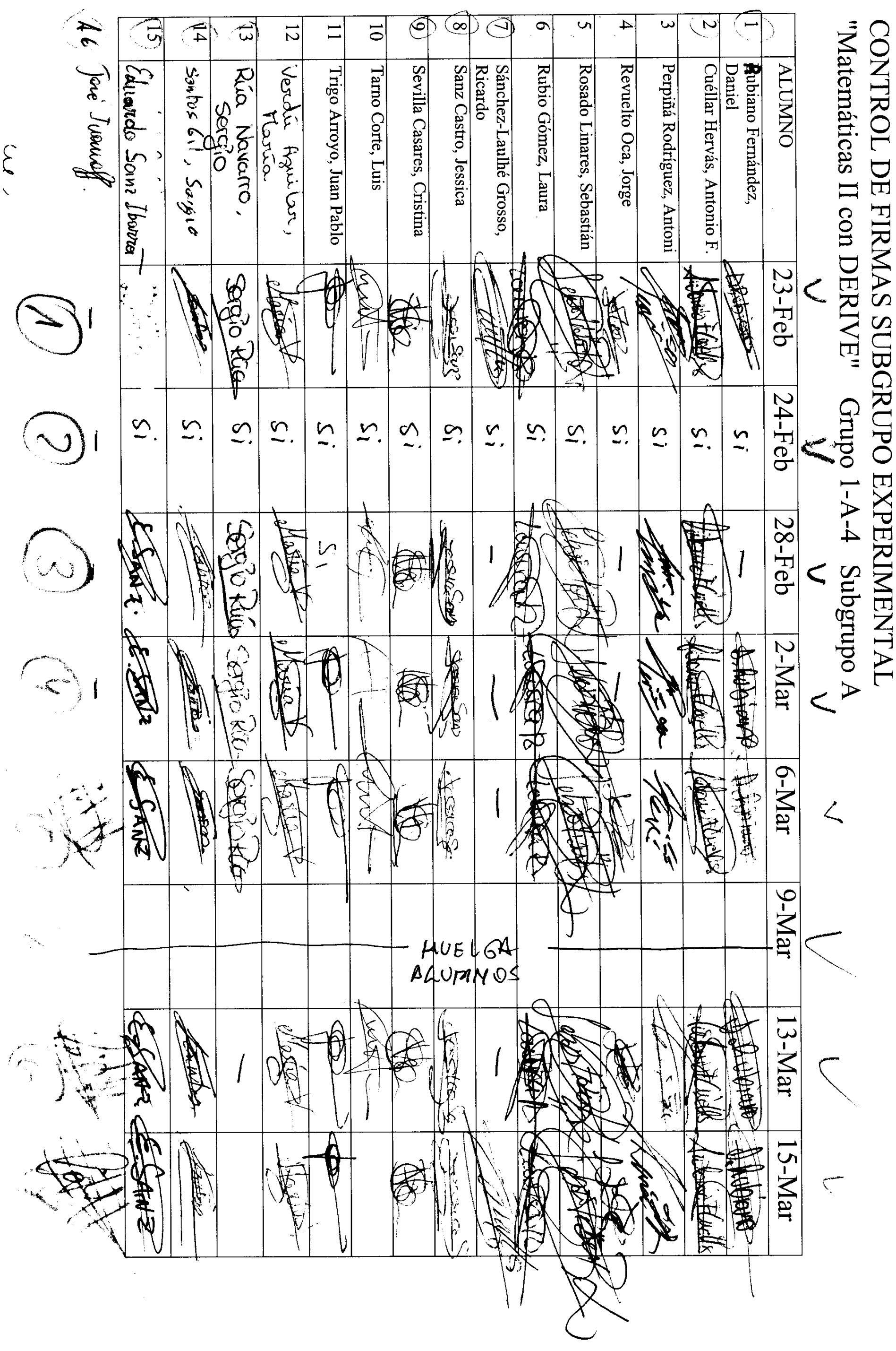
- **¿Se piensan los procesos o por el contrario existe un cierto automatismo? Incluye ejemplos que corroboren una u otro afirmación**

- **¿Ha faltado algún alumno a clase? Observar el registro de firmas.**

- Cualquier otra observación que merezca ser considerada que puede suscitar un nuevo punto de anotación en este guión

2. CONTROL DE ASISTENCIA DE ALUMNOS.

Uno de los datos que recogimos en cada una de las sesiones fue la asistencia de cada uno de los alumnos a las clases. Ofrecemos a continuación los estadillos de control de asistencia de los alumnos:



CONTROL DE FIRMAS SUBGRUPO EXPERIMENTAL
"Matemáticas II con DERIVE" Grupo 1-A-4 Subgrupo A

	ALUMNO	23-Feb	24-Feb	28-Feb	2-Mar	6-Mar	9-Mar	13-Mar	15-Mar
1	Rubiano Fernández, Daniel		Sí	—					
2	Cuéllar Hervás, Antonio F.		Sí						
3	Perpiñá Rodríguez, Antoni		Sí						
4	Revuelto Oca, Jorge		Sí	—	—				
5	Rosado Linares, Sebastián		Sí						
6	Rubio Gómez, Laura		Sí						
7	Sánchez-Laulhé Grosso, Ricardo		Sí	—	—	—		—	
8	Sanz Castro, Jessica		Sí						
9	Sevilla Casares, Cristina		Sí						
10	Tarno Corte, Luis		Sí						
11	Trigo Arroyo, Juan Pablo		Sí	Sí					
12	Verdú Aguilar, María		Sí				HUELGA ALUMNOS		
13	Rúa Navarro, Sergio	Sergio Rúa	Sí	Sergio Rúa	Sergio Rúa			—	
14	Santos Gil, Sergio		Sí						
15	Eduardo Sanz Ibarra		Sí	E. Sanz	E. Sanz	E. SANZ		E. SANZ	E. SANZ
16	José [illegible]								

CONTROL DE FIRMAS SUBGRUPO EXPERIMENTAL
"Matemáticas II con DERIVE" Grupo 1-A-4 Subgrupo A

	ALUMNO	16-Mar	20-Mar	21-Mar	23-Mar	27-Mar	30-Mar	3-Abr	10-Abr	11-16
1	Rubiano Fernández, Daniel	—			—	—				No
2	Cuéllar Hervás, Antonio F.									Sí
3	Gómez, José Ivanoff									Sí
4	Perpiñá Rodríguez, Antoni									Sí
5	Revuelto Oca, Jorge									Sí
6	Rosado Linares, Sebastián			—						No
7	Rubio Gómez, Laura									Sí
8	Rúa Navarro, Sergio				—	—				Sí
9	Sánchez-Laulhé Grosso, Ricardo					—		—	—	No
10	Santos Gil, Sergio								Sí	Sí
11	Sanz Castro, Jessica									Sí
12	Sanz Ibarra, Eduardo									Sí
13	Sevilla Casares, Cristina							—	—	Sí
14	Tarno Corte, Luis									Sí
15	Trigo Arroyo, Juan Pablo									Sí
16	Verdú Aguilar, María									Sí
		8	9		11				15	16

CONTROL DE FIRMAS SUBGRUPO EXPERIMENTAL

"Matemáticas II con DERIVE" Grupo 1-A-4 Subgrupo A

revueltooca@teleline.es

	ALUMNO	13-Abr	25-Abr	27-Abr	3-may	4-may	8-may	9-may	11-may
1	Rubiano Fernández, Daniel						Sí	Sí	
2	Cuéllar Hervás, Antonio F.				—		Sí	Sí	
3	Gómez, José Ivanoff						Sí	NO	
4	Perpiñá Rodríguez, Antoni						Sí	Sí	
5	Revuelto Oca, Jorge						Sí	Sí	
6	Rosado Linares, Sebastián						NO	NO	
7	Rubio Gómez, Laura				—		Sí	Sí	
8	Rúa Navarro, Sergio						Sí	Sí	Enfermo
9	Sánchez-Laulhé Grosso, Ricardo				—	—	—	—	
10	Santos Gil, Sergio						Sí	Sí	
11	Sanz Castro, Jessica				Sí		Sí	NO	
12	Sanz Ibarra, Eduardo						Sí	Sí	
13	Sevilla Casares, Cristina						Sí	NO	
14	Tarno Corte, Luis				—		Sí	NO	
15	Trigo Arroyo, Juan Pablo				|		Sí	NO	
16	Verdú Aguilar, María						Sí	Sí	

17 18 19 20 21 2

CONTROL DE FIRMAS SUBGRUPO EXPERIMENTAL
"Matemáticas II con DERIVE" Grupo 1-A-4 Subgrupo A

	ALUMNO	16-may	18-may	22-may	25-may	29-may	~~1-jun~~ 30 mayo.	1 julio.	
1	Rubiano Fernández, Daniel	D. Rubiano		D. Rubiano	—	—	D. Rubiano		
2	Cuéllar Hervás, Antonio F.								
3	Gómez, José Ivanoff	—	—	—	—	—			
4	Perpiñá Rodríguez, Antoni								
5	Revuelto Oca, Jorge								
6	Rosado Linares, Sebastián								
7	Rubio Gómez, Laura								
8	Rúa Navarro, Sergio	Sergio	Sergio Rúa	—	Sergio Rúa	Sergio Rúa	Sergio Rúa		
9	Sánchez-Laulhé Grosso, Ricardo	—	—	—	—	—	—		
10	Santos Gil, Sergio								
11	Sanz Castro, Jessica	Jessica Sanz	Jessica Sanz	—	Jessica Sanz	Jessica Sanz	Jessica Sanz		
12	Sanz Ibarra, Eduardo	E. Sanz	E. SANZ.	E. SANZ.	E. SANZ	E. SANZ	E. SANZ		
13	Sevilla Casares, Cristina								
14	Tarno Corte, Luis								
15	Trigo Arroyo, Juan Pablo								
16	Verdú Aguilar, María	María	María V	María V	María	María V	María		

3. DATOS RECOGIDOS EN EL DIARIO DE CAMPO:

Las observaciones de campo recogidas cada uno de las sesiones en que tuvo lugar la investigación educativa están recogidas en el CD adjunto a esta tesis. A continuación ofrecemos a modo de ejemplo la transcripción de las notas de campo realizadas un de estos días en particular recogemos la sesión 23 del día 17 de mayo de 200:

REGISTRO DIARIO DE LAS ANOTACIONES DE CAMPO (SESIÓN 23ª):

FECHA:17 de Mayo-2000 **HORARIO: 14,30-16,30**

- **¿Qué temas se han impartido?**
  Hoy hemos terminado el capítulo 5, estudiando la diagonalización de algunas matrices especiales (simétricas, ortogonales), calculando la potencia n-ésima de matrices cuadradas diagonalizables y realizando algunos problemas tipo examen: estudiar para qué valores de ciertos parámetros una matriz es diagonalizable así como problemas relacionados con procesos de potenciación de matrices. También introducimos el tema 6, con los conceptos de polinomio cuadrático y forma cuadrática.

- **¿Ha dado tiempo a impartir lo que estaba programado? Más o menos.**
  Aunque teníamos previsto avanzar un poco más en el tema de formas cuadráticas, considero que ha sido muy productivo el pararse más tiempo en los problemas de diagonalización.

- **¿ Cómo ha sido el ambiente de clase en general?**
  Hoy el ambiente en clase ha sido bastante participativo, los problemas de diagonalización han movilizado el aula en el sentido de aumentar la participación respecto a otras sesiones. Ha habido más sugerencias relacionados con estrategias de resolución de problemas. Los problemas de diagonalización relacionados con clasificar en función de parámetros han resultado complicados pero han motivado bastante a los alumnos,s obre todo porque los cálculos no eran el elemento fundamental, había que pensar y relacionar los conceptos de una manera más profunda.

- **¿Has estado cómodo impartiendo la clase hoy?**
  Sí muy cómodo por la participación

.

- **¿El GUION de trabajo ha resultado demasiado teórico, o por el contrario demasiado práctico? ¿Cuál es la percepción general de esto?**

. El GUION de trabajo, se ha convertido actualmente en el elemento central de la metodología, están totalmente familiarizados con él y creo que hoy ha sido un elemento muy dinamizador, pues para los alumnos aventajados basta irles planteando que realicen los ejercicios siguientes del guión mientras estoy ayudanto a alumnos más desfavorecidos. Creo que definitivamente el GUION tal como se ha planteado es una buena herramienta de atención a la diversidad, quizás harían falta plantear más ejercicios.

- **¿Has notado ACTITUDES NEGATIVAS en la clase respecto al curso?**

No he observado ninguna actitud, la clase ha sido muy activa.

- **¿Has notado ACTITUDES POSITIVAS en la clase respecto al curso**?

Mucha colaboración entre los subgrupos formados y mucha actividad y participación en clase para resolver problemas.

- **¿Has observado que algún alumno se ha descolgado demasiado del ritmo de toda la clase?**

Cristina Sevilla no ha entendido bien le proceso de diagonalización, he tenido que explicarle muchas veces los pasos que comenté en la sesión anterior. Jessica Sanz, no sabía calcular autovalores y autovectores, nuevamente hemos tenido que retomar estos conceptos.

- **¿Has percibido si algún alumno se ha aburrido porque íbamos demasiado despacio?**

No, los momentos en los que un alumno terminaba, completaba su trabajo ayudando a compañeros de su entorno (subgrupo).

- **¿Has percibido qué alumnos son los más retrasados y merecen una atención especial?**

Cristina Sevilla, sigue estando un poco descolgada. También Jessica Sanz, tiene ciertas lagunas.

- **¿La presencia del OBSERVADOR CUALIFICADO, te ha motivado, te ha hecho sentir mal, has encontrado algún obstáculo por su presencia?**

No, no ha intervenido nada en la clase ha observado y realizado los ejercicios como cualquier otro alumno.

- **¿Cuál es la disposición de los alumnos, empiezan a formar SUBGRUPOS?**

Los subgrupos de trabajo están totalmente confirmados, en especial algunas parejas de trabajo, con leves cambios de una sesión a otra.

- **¿Cómo es la disposición de los alumnos, siempre forman mismas parejas, qué cambios ha habido?**

Ubicaciones de la sesión anterior

	Observador			
Jorge Revuelta	Antonio Cuellar		María Verdú	Jessica Sanz
Eduardo Sanz	Antoni Perpiñá	Pasillo	Daniel Rubiano	
Cristina Sevilla	Sergio Rúa		Juan Pablo Trigo	Sebastián Rosado
Laura Rubio	Luis Tarno		Sergio Santos	
PIZARRA				

Ubicaciones de la sesión de hoy 16 de mayo

	Observador			
Jorge Revuelta	Antonio Cuellar		María Verdú	Jessica Sanz
Eduardo Sanz	Antoni Perpiñá	Pasillo	Daniel Rubiano	Sergio Rúa
	Cristina Sevilla		Juan Pablo Trigo	Sebastián Rosado
Laura Rubio	Luis Tarno		Sergio Santos	
PIZARRA				

- **¿Cómo son las dudas que se plantean, son de CONCEPTOS MATEMÁTICOS o del modo de uso del PROGRAMA?**

Las dudas se han centrado en el planteamiento de los problemas reales que requerían el cálculo de potencias n-ésimas. También ha habido dudas en la interpretación del paso al infinito de potencias n-ésimas. Por otro lado en los problemas de diagonalización inicialmente se confundía que una matriz no es diagonalizable cuando su determinante es nulo. Se ha procurado insistir en la eliminación de dicho error. El problema general es que no se sabe trasladar el concepto matemático al procedimiento operativo que permita resolver el concepto o problema. Es decir son más bien problemas de planteamiento.

- **¿Se percibe MOTIVACIÓN en los alumnos a la hora de resolver los ejercicios y tareas planteadas?**

Sí, prueba de ello son las sesiones de trabajo propias que todos van creando de forma paralela anotando y realizando todas las actividades que se van proponiento.

- **¿Cómo es el trabajo con DERIVE? ¿Se entiende, existe dificultad en su comprensión? ¿Cuáles han sido las dudas más significativas que has observado sobre el uso del programa?**

Se entiende perfectamente, las dificultades fundamentales con DERIVE es que alguna variable ha quedado asignada a un valor que no era esperado y luego surgen conflictos o resultados indeseados o bien que no se recuerda cierto comando.

- **¿Existe autonomía cognitiva o una excesiva dependencia del programa? Pon ejemplo si los tienes que corroboren una u otra afirmación.**

Hoy que la sesión exigía planteamientos más que automatismos he observado como ha habido bastante participación sugiriendo estrategias para abordar los problemas, y DERIVE se convertía en herramienta que les aseguraba no errar en los cálculos. Por tanto creo que el programa les dota a los alumnos de una autonomía cognitiva, evitándoles centran demasiada atención en repasar los cálculos pues DERIVE se los realiza de forma automática.

- **¿Se piensan los procesos o por el contrario existe un cierto automatismo? Incluye ejemplos que corroboren una u otro afirmación**

Creo que se piensa más en procesos, tal como he comentado en la pregunta anterior, lo fundamental de la sesión de hoy eran los planteamientos y las estrategias, pues los cálculos que había que hacer con DERIVE eran automático y muy repetitivos.

ANEXO XI:
PRUEBAS Y DATOS OBTENIDOS DE LA ENTREVISTA INTERMEDIA.

1. MODELO DE ENTREVISTA INTERMEDIA.

Esta entrevista está programada realizarla unos días antes de la finalización de las clases, y con ella pretendemos recoger las opiniones e impresiones de los alumnos del SUBGRUPO A de DERIVE en relación a varias cuestiones:

- Marcha del curso.
- Actitud frente al uso de DERIVE en el ALGEBRA LINEAL
- Elementos que favorecen el trabajo en grupo
- Cuestiones que traten de evaluar el estado anímico de los participantes así como el grado de motivación frente a la asignatura.

Esta entrevista es una continuación a la ENTREVISTA INICIAL que se realizó al iniciar el curso de MATEMÁTICAS II CON DERIVE, con esta entrevista pretendemos ir corroborando los datos que obtuvimos entonces y otros nuevos que podemos obtener para dar contestaciones a TODAS LAS CUESTIONES DE NUESTRA INVESTIGACION, una vez que el alumno ha realizado todo el curso.

1) El sistema de cálculo algebraico DERIVE, ¿permite construir un sistema de notación intermedio, entre los sistemas de notación del álgebra lineal y los sistemas de notación más familiares e intuitivos?

   1.1. Cuando has resuelto problemas con DERIVE ¿has notado un estilo distinto en la forma de resolver problemas, es decir, la manera de plantear los problemas y resolverlos ha generado en ti un cierto estilo de pensamiento matemático diferentes al que tenías?

   1.2. Cuando has intentado resolver cuestiones teóricas, sin el uso de DERIVE, has encontrado alguna dificultad especial? ¿de qué tipo? ¿te has encontrado indefenso ante la resolución de las cuestiones teóricas?

   1.3. A la hora de resolver un problema con DERIVE, ¿has tenido que plantearte el problema previamente con lápiz y papel o por el contrario has entrado directamente a manipular los datos con DERIVE?

   1.4. ¿Crees que DERIVE te ha permitido construir un lenguaje, un sistema de notación más cercano al álgebra lineal? Podrías comentar alguna circunstancia concreta relacionada con tu afirmación.

2) ¿Cuál es el grado de INTERACTIVIDAD entre alumnos-profesores y alumnos-mediodidáctico.

2.1. En el desarrollo de las clases ¿cómo ha sido tu comunicación con el profesor? ¿ha sido más cercana que en clases habituales? ¿has encontrado respuesta rápida a tus dudas?

2.2. En el trabajo que has realizado con DERIVE el programa te ha proporcionado respuesta rápidas a los procesos manipulativos o dudas que te pudieran surgir?

2.3. Puntua de 1 a 5 la relación dialéctica con el profesor.

3) La estrategia didáctica que hemos empleado favorece el PROTAGONISMO y AUTOCREACIÓN del alumno frente al medio tecnológico, evitando que el alumno sea un mero USUARIO del sistema.

3.1. En los ejemplos de manipulación que se han realizado en clase, te has sentido dirigido por el programa o por el contrario te has sentido director de tus procesos?

3.2. En los ejemplos para INVESTIGAR que se han realizado en clase, te has sentido perdido, has encontrado cierto protagonismo en la búsqueda de soluciones o respuestas a las cuestiones que se planteaban?

3.3. Cuando el profesor daba una posible solución a los ejemplos a investigar, te has sentido un MERO USUARIO de los procesos que se comentaban o los has asimilado e interiorizado, de tal forma que tu autocreación se ha visto favorecida.

3.4. Cuando se han planteado ejercicios te has encontrado perdido o por el contrario has sabido realizar los procesos que se habían aprendido anteriormente.

3.5. En la resolución de problemas, has encontrado algún protagonismo o capacidad creativa a la hora de resolverlos o por el contrario te has sentido perdido y has desistido de su resolución.

3.6. En la resolución de CUESTIONES TEÓRICAS, has encontrado alguna dificultad por no utilizar DERIVE, has sentido dependencia excesiva del programa de tal forma que te ha costado mucho resolverlas?

4) La estrategia didáctica que hemos utilizado evita la utilización del ordenador para realizar la resolución de CONTENIDOS ESENCIALES para el desarrollo de conceptos y principios.

4.1. Del tema 1 de espacios vectoriales, ¿cuáles crees que son los contenidos esenciales? ¿qué es lo que consideras fundamental para la comprensión de este tema?

4.2. ¿y del tema 2 de matrices y aplicaciones lineales?

4.3. ¿y del tema 3 determinantes y traza?

4.4. ¿y del tema 4 sistemas lineales?

4.5. ¿y del tema 5 de diagonalización, autovalores y autovectores?

4.6. ¿y del tema 6 que estamos dando sobre formas cuadráticas?

4.7. Cuando se desarrollan los diversos capítulos, captas rápidamente cuales son los CONTENIDOS FUNDAMENTALES que se pretenden transmitir, y cuales son meros PROCESOS MANIPULATIVOS?

5) La estrategia y en particular el uso de DERIVE permite prescindir del ESFUERZO RUTINARIO dedicado al desarrollo de operaciones algebraicas y de cálculo?

5.1. Cuando te has puesto a realizar ejercicios de manipulación con DERIVE; has entendido el PROCESO que se pretendía conocer? ¿has captado cuales son los PROCESOS MANIPULATIVOS que los ejercicios pretendían transmitir?

5.2. A la hora de resolver problemas, ¿crees que DERIVE te ha ayudado a encontrar la resolución de manera efectiva, o quizás hubiera sido más fácil hacerlo con lápiz y papel?

5.3. A la hora de realizar cuestiones teóricas, has tenido mucha dificultad en resolverlas sin DERIVE, o existían demasiados cálculos que no sabías hacer sin el programa.

5.4. Sabrías calcular un determinante de orden 3 sin DERIVE.

Por ejemplo (plantearle) que comente lo que tendría que hacer.

5.5. Sabrías resolver un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas sin DERIVE

Por ejemplo (plantearle) que comente los que tendría que hacer

5.6. ¿Crees que DERIVE permite prescindir de los cálculos rutinarios y te permite orientar mejor tus esfuerzos hacia la investigación y el razonamiento?

6) El uso de DERIVE y nuestra estrategia convierta al ordenador en una HERRAMIENTA DE EXPERIMENTACIÓN?

6.1. Cuando se han planteado en clase ejemplos para investigar, cuál ha sido tu actitud: has esperado a que te dieran la solución, has experimentado con DERIVE para intentar obtener el resultado o las cuestiones que se planteaban?

6.2. Has conseguido llegar a descubrir las cuestiones que se planteaban en los ejemplos de investigación ¿podrías indicar un porcentaje de éxitos o de fracasos?

6.3. En los problemas planteados, cuando has tenido que resolverlos, ¿has encontrado rápidamente la estrategia de resolución o por el contrario has tenido que experimentar con el problema para descubrir por donde podrían ir las soluciones?

6.4. ¿Crees que la experimentación que has realizado en el curso de ha ayudado a entender mejor los contenidos que se trataban de impartir o por el contrario te has encontrado perdido porque no sabías exactamente qué es lo que se pedía?

6.5. ¿Crees que el uso de DERIVE facilita que el Algebra Lineal sea una disciplina experimental?

7) La estrategia didáctica favorece el APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO de los contenidos matemáticos del álgebra lineal?

7.1. Cuando has terminado un capítulo, tiene la sensación de haber entendido bien los contenidos de álgebra lineal que se pretendían impartir?

Si no es así, indica tus impresiones al acabar una clase.

7.2. Trabajar los contenidos mediante la investigación y el descubrimiento, crees que te ha facilitado entender mejor los contenidos o por el contrario han dispersado tu atención?

7.3. Podrías decirme de este último capítulo sobre formas cuadráticas cuales crees que son los CONTENIDOS ESENCIALES, qué es lo fundamental del tema?

8) La estrategia didáctica y el uso de DERIVE favorece el desarrollo de ESTRATEGIAS DE RESOLUCION DE PROBLEMAS?

8.1. Cuando has resuelto los problemas de fin de capítulo, ¿has utilizado más de una estrategia de resolución, o por el contrario te has conformado con obtener una?

8.2. ¿Crees que los problemas planteados podrían tener varios caminos de resolución?

8.3. Cuando se ha planteado alguna cuestión en clase, o un problema, ¿has observado si se pedían diferentes puntos de vista para resolver la cuestión o el problema o por el contrario se ha dado LA ESTRATEGIA de resolución? ¿cuál es tu impresión?

9) La estrategia didáctia y el uso de DERIVE genera BARRERAS ADICIONALES para el aprendizaje de los conceptos matemáticos?

9.1. Una vez que hemos casi concluido como valorarías el programa DERIVE: una herramienta sencilla o compleja en su manipulación.

9.2. Si algún compañero te pregunta sobre el programa, se lo aconsejarías para estudiar ALGEBRA LINEAL? Razona la respuesta.

9.3. ¿Cuáles son tus principales problemas con la manipulación del programa DERIVE? : en cálculo de determinantes, cálculo de rangos, resolución de sistemas, definición de constantes, programación de rutinas, ... indica con un ejemplo tus principales problemas de manipulación.

9.4. Cuando has intentado resolver un problema o ejercicio con DERIVE; has tenido la sensación de que hubiera sido más sencillo resolverlo con lápiz y papel, porque el programa es complicado.

9.5. Cuando has intentado resolver un problema o ejercicio con DERIVE, te has sentido engañado por el programa por los resultados que te daban y que quizás no sabías interpretar?

10) La estrategia didáctica y en particular el uso de DERIVE ¿genera AUTONOMÍA COGNITIVA en los alumnos, permitiéndoles e incitándoles a indagar situaciones planteadas desde el propio individuo anulando así, ciertas dependencias existentes entre alumnos y expertos o maestros?

10.1. Los ejemplos de investigación que se planteaban en el desarrollo de las clases, te han resultado inabordables o por el contrario eran muy fáciles.

10.2. Cuando has estado resolviendo problemas, has tenido la sensación de que eras DUEÑO de la situación o por el contrario que DERIVE te estaba dominando?

10.3. Cuando te pones a resolver problemas y ejercicios, consideras que tienes una suficiente AUTONOMÍA para desarrollarlos, o por el contrario dependes mucho del compañero o del profesor para que te indique y oriente.

11) La estrategia didáctica, ¿favorece la RELACIÓN DIALÉCTICA entre los usuarios, es decir permite establecer una dialéctica entre alumnos, alumnos y profesor? ¿cómo es ese tipo de dialéctica?

11.1. ¿Cómo ha sido tu relación personal con tus compañeros de clase?

11.2. ¿Has conseguido establecer un lazo de amistad mayor con algunos compañeros de clase a lo largo de este curso?

11.3. ¿Cómo ha sido tu relación personal con el profesor?

11.4. ¿Crees que el ambiente propiciado por este tipo de estrategia ha favorecido las relaciones dialécticas entre los alumnos? ¿Y entre los alumnos y el profesor?

12) **La estrategia didáctica con el uso de DERIVE ¿favorece un APRENDIZAJE COLABORATIVO entre los alumnos?**

12.1. El trabajo de grupo que se ha desarrollado en clase, ¿crees que te ha ayudado a aprender mejor los conceptos de álgebra lineal?

12.2. La resolución de cuestiones, ejercicios y problemas en parejas de trabajo, ha sido favorecida por el ambiente que proporcionaba el ordenador en la clase?

12.3. ¿Crees que las colaboraciones que habéis tenido los compañeros de tu entorno, han incrementado por un lado tus relaciones personales con dichos compañeros? ¿Y tus aprendizajes en matemáticas ha sido mejores?

12.4. Has quedado con los compañeros para resolver problemas.
¿cómo ha sido la experiencia positiva o negativa?

13) La estrategia didáctica ¿favorece una adecuada ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD; ofreciendo varios niveles de aprendizaje?

13.1. A lo largo de todas las sesiones de clase ¿te has aburrido en algún momento? Recuerdas en qué momento.

13.2. El ritmo de la clase ¿cómo te ha parecido? Lento, normal, rápido. Razona la respuesta.

13.3. A lo largo de todas las sesiones ¿te has encontrado perdido en alguna ocasión? Recuerdas qué sesión fue?

13.4. Los problemas propuestos te han resultado todos inabordables o has conseguido resolver alguno?

13.5. Los problemas propuestos han suscitado en ti interés especial por su resolución o te han desmotivado porque eran demasiado complejos.

13.6. ¿Cuál es el porcentaje de problemas que has conseguido resolver en todos los temas?

14) La estrategia didáctica ¿aumenta el grado de MOTIVACIÓN hacia el álgebra lineal?

14.1. Por lo general, las clases te resultan muy largas, o por el contrario se te pasan rápidamente?

14.2. ¿te parece interesante el álgebra lineal? Razona la respuesta.

14.3. Cuando te has puesto ha resolver problemas has sentido cierto "gusanillo" por intentar resolverlos o por el contrario has desistido rápidamente del intento.

14.4. ¿Cuánto tiempo has dedicado a la semana en media a esta asignatura?
14.5. En una valoración general, ¿ha aumentado con este curso tu interés por las matemáticas? ¿ha descendido? ¿se ha mantenido?

GENERALES.
G.1. Si tuvieras de dar una valoración global del curso indica la nota que le pondrías.
G.2. ¿Qué es lo que más te ha gustado del curso?
G.3. ¿Qué es lo que menos te ha gustado del curso?
G.4. ¿Qué nota esperas sacar en la asignatura?
G.5. ¿Volverías a elegir este grupo experimental si te dieran nuevamente a elegir? ¿Por qué?

2. TRANSCRIPCIÓN DE LAS ENTREVISTAS INTERMEDIAS.

A continuación mostramos a modo de ejemplo la transcripción de una de las entrevistas intermedias realizadas a uno de los participantes en la experiencia educativa del SUBGRUPO A. El resto de transcripciones se puede consultar en el CD adjunto a este trabajo en la sección dedicada a la RECOGIDA DE DATOS de cada caso. Hay que señalar que las entrevistas intermedias fueron realizadas solo a 12 de los 16 casos objeto de estudio ya que con cuatro de los participantes resulto complicada la realización de la misma por problemas de horario.

DATOS DE LA ENTREVISTA INTERMEDIA:

ENTREVISTADOR

1.1. Cuando has resuelto problemas con DERIVE ¿has notado un estilo distinto en la forma de resolver problemas, es decir, la manera de plantear los problemas y resolverlos ha generado en ti un cierto estilo de pensamiento matemático diferentes al que tenías?¿y si ha sido distinto de qué manera?

SERGIO

Sí, un poco más, te preocupas menos por el cálculo numérico y te preocupas más por la resolución teórica.

ENTREVISTADOR

Tu crees que hay más acercamiento a la teoría utilizando el ordenador que con el lápiz y papel?, ¿cómo crees que se acerca uno más a la teoría?

SERGIO

Evidentemente con el ordenador, pero también se pierde cálculo numérico

ENTREVISTADOR

1.2. Cuando has intentado resolver cuestiones teóricas, sin el uso de DERIVE, has encontrado alguna dificultad especial? ¿de qué tipo? ¿te has encontrado indefenso ante la resolución de las cuestiones teóricas?

SERGIO

Yo no pero porque yo ya había visto otro año esta asignatura, pero yo creo que si hubiese ido de nuevo si que hubiese notado alguna dificultad , al no poder utilizar el ordenador y poder hacer ejercicios.

ENTREVISTADOR

1.3. A la hora de resolver un problema con DERIVE, ¿has tenido que plantearte el problema previamente con lápiz y papel o por el contrario has entrado directamente a manipular los datos con DERIVE?

SERGIO

Pues bastantes, previamente con lápiz y papel, otros ya no directamente.

ENTREVISTADOR

O sea que te ha costado un poco el razonar con DERIVE, el hacer un planteamiento y luego ponerte ya a la discusión?

SERGIO

Sí

ENTREVISTADOR

1.4. ¿Crees que DERIVE te ha permitido construir un lenguaje, un sistema de notación más cercano al álgebra lineal? Podrías comentar alguna circunstancia concreta relacionada con tu afirmación.

SERGIO

Yo creo que más que nada ha sido una herramienta de trabajo.

ENTREVISTADOR

2.1. En el desarrollo de las clases ¿cómo ha sido tu comunicación con el profesor? ¿ha sido más cercana que en clases habituales? ¿has encontrado respuesta rápida a tus dudas?

SERGIO

Más cercana, y he encontrado respuesta rápida a tus dudas.

ENTREVISTADOR

2.2. En el trabajo que has realizado con DERIVE el programa te ha proporcionado respuesta rápidas a los procesos manipulativos o dudas que te pudieran surgir?

SERGIO

A veces he dudado, en algun error o alguna respuesta que me ha salido , que no me convencía.

ENTREVISTADOR

3.1. En los ejemplos de manipulación que se han realizado en clase, te has sentido dirigido por el programa o por el contrario te has sentido director de tus procesos?

SERGIO

Yo creo que me he sentido protagonista.

ENTREVISTADOR

3.2. En los ejemplos para INVESTIGAR que se han realizado en clase, te has sentido perdido, has encontrado cierto protagonismo en la búsqueda de soluciones o respuestas a las cuestiones que se planteaban?

SERGIO

En general sí.

ENTREVISTADOR

3.3. Cuando el profesor daba una posible solución a los ejemplos a investigar, te has sentido un MERO USUARIO de los procesos que se comentaban o los has asimilado e interiorizado, de tal forma que tu autocreación se ha visto favorecida.

SERGIO

Intentaba contrastarlo, de lo que iba haciendo con lo que se iba comentando.

ENTREVISTADOR

3.4. Cuando se han planteado ejercicios te has encontrado perdido o por el contrario has sabido realizar los procesos que se habían aprendido anteriormente.

SERGIO

Los he sabido hacer.

ENTREVISTADOR

3.5. En la resolución de problemas, has encontrado algún protagonismo o capacidad creativa a la hora de resolverlos o por el contrario te has sentido perdido y has desistido de su resolución

SERGIO

En general los he visto bastantes fáciles, pero había alguno que había que preparar algo el tema.

ENTREVISTADOR

3.5. En la resolución de CUESTIONES TEÓRICAS, has encontrado alguna dificultad por no utilizar DERIVE, has sentido dependencia excesiva del programa de tal forma que te ha costado mucho resolverlas?

SERGIO

No sentía mucha necesidad.

ENTREVISTADOR

4.1. Del tema 1 de espacios vectoriales, ¿cuáles crees que son los contenidos esenciales? ¿qué es lo que consideras fundamental para la comprensión de este tema?

SERGIO

De espacios vectoriales? no sé que decir.

ENTREVISTADOR

4.2. ¿y del tema 2 de matrices y aplicaciones lineales?

SERGIO

La resolución de aplicaciones lineales.

ENTREVISTADOR

4.3. ¿y del tema 3 determinantes y traza?

SERGIO

Saber hacer determinantes.

ENTREVISTADOR

4.4. ¿y del tema 4 sistemas lineales?

SERGIO

¿de sistemas lineales?... pues también resolución de sistemas.

ENTREVISTADOR

4.5. ¿y del tema 5 de diagonalización, autovalores y autovectores?

SERGIO

Eso sería recopilar información anterior y saber qué es diagonalizar y como .. y autovalores y autovectores..

ENTREVISTADOR

4.6. ¿y del tema 6 que estamos dando sobre formas cuadráticas?

SERGIO

También la teoría, las propiedades.

ENTREVISTADOR

5.1. Cuando te has puesto a realizar ejercicios de manipulación con DERIVE; has entendido el PROCESO que se pretendía conocer? ¿has captado cuales son los PROCESOS MANIPULATIVOS que los ejercicios pretendían transmitir?

SERGIO

No me ha costado trabajo.

ENTREVISTADOR

5.2. A la hora de resolver problemas, ¿crees que DERIVE te ha ayudado a encontrar la resolución de manera efectiva, o quizás hubiera sido más fácil hacerlo con lápiz y papel?

SERGIO

Casi siempre es más fácil con DERIVE, pues te evitas todo el cálculo

ENTREVISTADOR

5.3. A la hora de realizar cuestiones teóricas, has tenido mucha dificultad en resolverlas sin DERIVE, o existían demasiados cálculos que no sabías hacer sin el programa.

SERGIO

Sí, creo que sin práctica te quedas un poco...

ENTREVISTADOR

5.4. Sabrías calcular un determinante de orden 3 sin DERIVE.
Por ejemplo (plantearle) que comente lo que tendría que hacer.

SERGIO

Sí.

ENTREVISTADOR

5.5. Sabrías resolver un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas sin DERIVE
Por ejemplo (plantearle) que comente los que tendría que hacer

SERGIO

Sí.

ENTREVISTADOR

5.6. ¿Crees que DERIVE permite prescindir de los cálculos rutinarios y te permite orientar mejor tus esfuerzos hacia la investigación y el razonamiento?

SERGIO

Evidentemente.

ENTREVISTADOR

6.1. Cuando se han planteado en clase ejemplos para investigar, cuál ha sido tu actitud: has esperado a que te dieran la solución, has experimentado con DERIVE para intentar obtener el resultado o las cuestiones que se planteaban?

SERGIO

Siempre me he puesto a investigar.

ENTREVISTADOR

6.2. Has conseguido llegar a descubrir las cuestiones que se planteaban en los ejemplos de investigación ¿podrías indicar un porcentaje de éxitos o de fracasos?

SERGIO

¿en clase o en las cuestiontes?

ENTREVISTADOR

En clase y también en las cuestiones, a nivel general...

SERGIO

Creo que casi siempre las he entendido y conseguido bastante bien.

ENTREVISTADOR

6.3. En los problemas planteados, cuando has tenido que resolverlos, ¿has encontrado rápidamente la estrategia de resolución o por el contrario has tenido que experimentar con el problema para descubrir por donde podrían ir las soluciones?

SERGIO

En general siempre los sabía hacer, salvo a lo mejor un ejercicio o dos por capítulo que eran más complicados.

ENTREVISTADOR

6.4. ¿Crees que la experimentación que has realizado en el curso te han ayudado a entender mejor los contenidos que se trataban de impartir o por el contrario te has encontrado perdido porque no sabías exactamente qué es lo que se pedía?

SERGIO

Sí, por supuesto.

ENTREVISTADOR

Si no se hubieran hecho, posiblemente hubieras entendido más profundamente,... ¿cómo lo valorarías más profundamente o cual sería tu percepción de los conceptos?

SERGIO

Yo sobre todo el poder ver con las gráficas que hemos visto y evitar los cálculos y todo esto, te centras en la parte teórica y entiendes mejor el contenido

ENTREVISTADOR

6.5. ¿Crees que el uso de DERIVE facilita que el Algebra Lineal sea una disciplina experimental, que se puede manipular ?

SERGIO

Si, sin duda.

ENTREVISTADOR

¿qué percepción tenías tu del Álgebra Lineal como algo experimental o algo muy teórico?

SERGIO

Teórico

ENTREVISTADOR

7.1. Cuando has terminado un capítulo, tiene la sensación de haber entendido bien los contenidos de álgebra lineal que se pretendían impartir?

Si no es así, indica tus impresiones al acabar una clase.

SERGIO

He entendido todo.

ENTREVISTADOR

7.2. Trabajar los contenidos mediante la investigación y el descubrimiento, crees que te ha facilitado entender mejor los contenidos o por el contrario han dispersado tu atención?

SERGIO

No ha sido mucho mejor claro

ENTREVISTADOR

8.1. Cuando has resuelto los problemas de fin de capítulo, ¿has utilizado más de una estrategia de resolución, o por el contrario te has conformado con obtener una?

SERGIO

Hombre, sobre todo cuando no estaba seguro del resultado buscaba más, cuando no llegaba a la respuesta buscaba otros caminos.

ENTREVISTADOR

8.2. ¿Crees que los problemas planteados podrían tener varios caminos de resolución?

SERGIO

Sí si.

ENTREVISTADOR

8.3. Cuando se ha planteado alguna cuestión en clase, o un problema, ¿has observado si se pedían diferentes puntos de vista para resolver la cuestión o el problema o por el contrario se ha dado LA ESTRATEGIA de resolución? ¿cuál es tu impresión?

SERGIO

Que había muchas formas.

ENTREVISTADOR

9.1. Una vez que hemos casi concluido como valorarías el programa DERIVE: una herramienta sencilla o compleja en su manipulación.

SERGIO

Una herramienta sencilla

ENTREVISTADOR

9.2. Si algún compañero te pregunta sobre el programa, se lo aconsejarías para estudiar ALGEBRA LINEAL? Razona la respuesta.

SERGIO

Sí, si porque es sencillo.

ENTREVISTADOR

9.3. ¿Cuáles son tus principales problemas con la manipulación del programa DERIVE? : en cálculo de determinantes, cálculo de rangos, resolución de sistemas, definición de constantes, programación de rutinas, ... indica con un ejemplo tus principales problemas de manipulación.

SERGIO

Ninguna de esas, me ha parecido sencillo.

ENTREVISTADOR

9.4. Cuando has intentado resolver un problema o ejercicio con DERIVE; has tenido la sensación de que hubiera sido más sencillo resolverlo con lápiz y papel, porque el programa es complicado.

SERGIO

He tenido la sensación que con lápiz y papel a veces se podía realizar igualmente.

ENTREVISTADOR

9.5. Cuando has intentado resolver un problema o ejercicio con DERIVE, te has sentido engañado por el programa por los resultados que te daban y que quizás no sabías interpretar?

SERGIO

Normalmente no he tenido problemas con eso.

ENTREVISTADOR

10.1. Los ejemplos de investigación que se planteaban en el desarrollo de las clases, te han resultado inabordables o por el contrario eran muy fáciles.

SERGIO

Eran asequibles.

ENTREVISTADOR

10.2. Cuando has estado resolviendo problemas, has tenido la sensación de que eras DUEÑO de la situación o por el contrario que DERIVE te estaba dominando?

SERGIO

Sí, totalmente.

ENTREVISTADOR

10.3. Cuando te pones a resolver problemas y ejercicios, consideras que tienes una suficiente AUTONOMÍA para desarrollarlos, o por el contrario dependes mucho del compañero o del profesor para que te indique y oriente.

SERGIO

Ha añadido más autonomía, porque no te queda la duda de si estaré haciendo mal el cálculo, si llevaré un error y lo voy arrastrando, sabes que lo tienes bien.

ENTREVISTADOR

Cuando te pongas a resolver problemas de examen, tu crees que vas a sentir ese grado de autonomía tal que cuando termines el examen digas que está clavado, tengas la seguridad de que los procesos están bien o están mal.

SERGIO

Sí, si.

ENTREVISTADOR

11.1. ¿Cómo ha sido tu relación personal con tus compañeros de clase?

SERGIO

Limitada

ENTREVISTADOR

11.2. ¿Has conseguido establecer un lazo de amistad mayor con algunos compañeros de clase a lo largo de este curso?

SERGIO

Sí, con María y Jessica y Juan Pablo

ENTREVISTADOR

11.3. ¿Cómo ha sido tu relación personal con el profesor?

SERGIO

Buena.

ENTREVISTADOR

11.4. ¿Crees que el ambiente propiciado por este tipo de estrategia ha favorecido las relaciones dialécticas entre los alumnos?

SERGIO

Si hombre, al ser una clase tan pequeña pues la gente siempre se une mucho más ...

ENTREVISTADOR

O sea que has sentido más unión que en otras clases a lo mejor?

SERGIO

Si, además como se pueden hacer ejercicios en común, porque hay personas que hacen uno otras hacen otro , está bien.

ENTREVISTADOR

¿Y entre los alumnos y el profesor tu crees que hay más unión?

SERGIO

Sí, más cercanía.

ENTREVISTADOR
Pero por el número de alumnos o quizás también ha influido que haya también un entorno , un estilo de aprendizaje distinto al habitual, y al que haya ordenadores que haya influido en esto...
SERGIO
Hombre por las dos cosas, pero yo creo que sobre todo por el número de alumnos.
ENTREVISTADOR
12.1. El trabajo de grupo que se ha desarrollado en clase, ¿crees que te ha ayudado a aprender mejor los conceptos de álgebra lineal?
SERGIO
....hombre en mi caso yo creo que no me ha ayudado mucho, pero yo creo que sí que ayuda bastante.
ENTREVISTADOR
12.2. La resolución de cuestiones, ejercicios y problemas en parejas de trabajo, ha sido favorecida por el ambiente que proporcionaba el ordenador en la clase?¿qué protagonismo ha supuesto el usar el ordenador en las relaciones interpersonales?
SERGIO
Pues al ser un aula tan limitada de alumnos y ser distinto con respecto a otros grupos, pues se favorece más la relación.
ENTREVISTADOR
Habéis utilizado el mail y estas cosas entre vosotros...?
SERGIO
Sí.
ENTREVISTADOR
12.3. ¿Crees que las colaboraciones que habéis tenido los compañeros de tu entorno, han incrementado por un lado tus relaciones personales con dichos compañeros?
SERGIO
Si, sin duda.
ENTREVISTADOR
Y el aprendizaje en ese entorno, tu crees que se ha visto favorecido por ese entorno?
SERGIO
Sí, puede ser.
ENTREVISTADOR
12.4. Has quedado con los compañeros para resolver problemas.
¿cómo ha sido la experiencia positiva o negativa?
SERGIO
Sí. Resolvíamos problemas entre nosotros y resolvíamos las dudas, ha sido una experiencia positiva de colaboración.
ENTREVISTADOR
13.1. A lo largo de todas las sesiones de clase ¿te has aburrido en algún momento? Recuerdas en qué momento.
SERGIO
Hay alguna que no me ha gustado mucho, pero no me he aburrido.
ENTREVISTADOR
13.2. El ritmo de la clase ¿cómo te ha parecido? Lento, normal, rápido. Razona la respuesta.
SERGIO
Hombre bueno para llevar la asignatura pero rápido en ningún caso.
ENTREVISTADOR
13.3. A lo largo de todas las sesiones ¿te has encontrado perdido en alguna ocasión? Recuerdas qué sesión fue?
SERGIO
No, en ninguna.
ENTREVISTADOR

13.4. Los problemas propuestos te han resultado todos inabordables o has conseguido resolver alguno?

SERGIO

He resuelto casi todos.

ENTREVISTADOR

Cuando has contrastado tus soluciones con las que se colgaban en la web ¿has comprobado que eran las que tú hacías mas o menos?

SERGIO

Sí.

ENTREVISTADOR

13.5. Los problemas propuestos han suscitado en ti interés especial por su resolución o te han desmotivado porque eran demasiado complejos.

SERGIO

Sí, ha habido algunos que me han picado bastante en su resolución.

ENTREVISTADOR

O sea que te ha surgido el gusanillo matemático.

13.6. ¿Cuál es el porcentaje de problemas que has conseguido resolver en todos los temas?

SERGIO

Se me han pasado rápido.

ENTREVISTADOR

Te ha parecido interesante el álgebra lineal? Cuentame un poquillo como te ha parecido.

SERGIO

Sí creo que se ha hecho muy interesante, yo creo que si se hubiese dado la clase estricta me hubiese aburrido mucho más, en este aspecto, seguro.

ENTREVISTADOR

Ese gusanillo por resolver las cosas lo has tenido alguna otra vez?

SERGIO

Sí, en cursos anteriores.

ENTREVISTADOR

14.5. En una valoración general, ¿ha aumentado con este curso tu interés por las matemáticas? ¿ha descendido? ¿se ha mantenido?

SERGIO

Hombre no ha descendido porque ya me gustaban

ENTREVISTADOR

Te ha motivado el ordenador para estudiar matemáticas?

SERGIO

Sí, si.

ENTREVISTADOR

¿cuántas horas has dedicado más o menos a la semana, en media?

SERGIO

Yo creo que cinco o seis.

ENTREVISTADOR

G.1. Si tuvieras de dar una valoración global del curso indica la nota que le pondrías, en todo.

SERGIO

Creo que un 7.

ENTREVISTADOR

G.2. ¿Qué es lo que más te ha gustado del curso?

SERGIO

Lo que más el llevar la asignatura bastante al día , por los problemas que había que hacer al final de cada capítulo, se lleva bien , sino igual se va dejando, igual te parece que lo llevas bien y lo voy dejando, así lo ibas haciendo.

ENTREVISTADOR

G.3. ¿Qué es lo que menos te ha gustado del curso?

SERGIO

Seguro que hay algo pero no se me ocurre.

ENTREVISTADOR

G.4. ¿Qué nota esperas sacar en la asignatura?

SERGIO

Notable sobresaliente.

ENTREVISTADOR

G.5. ¿Volverías a elegir este grupo experimental si te dieran nuevamente a elegir? ¿Por qué?

SERGIO

Sí, sobre todo por eso, por evitarme el cálculo numérico, no depender de hacer mal un problema porque te has confundido en un signo o lo que sea .

ENTREVISTADOR

¿crees que ha habido alguna laguna, que hayas echado en falta, así a nivel de matemáticas?

SERGIO

Hombre sí, pero no es aplicado a la carrera, por ejemplo de geometría .. o de formas cuadráticas también hay alguna cosa.

ENTREVISTADOR

Tu crees que ha sido más práctico o más teórico el curso?

SERGIO

Más práctico.

ENTREVISTADOR

Tu crees que le ha faltado algo más de fundamentar algo más la teoría, ver algunas cosas más...

SERGIO

No tal como está ha sido bien.

ENTREVISTADOR

Y cuando en las CUESTIONES TEORICAS, que es lo que más me preocupa, al ser más práctico el curso de lo normal, pueda existir algún problema para resolver , por lo que tu has percibido en clase, algún problema o miedo especial por las cuestiones teóricas si no se usara el programa?

SERGIO

o sea resolver las cuestiones teóricas sin DERIVE, ... yo creo que sí que se pierde bastante, parece que no pero se pierde mucho.

Yo creo que se pierde bastante, por ejemplo al resolver un determinante o algo de esto, como la gente está acostumbrada a resolverlo con ordenador pues igual ya no se acuerdan. .. no se.

ENTREVISTADOR

Y tú que has tenido contacto con el otro grupo experimental , solo por saber, supongo que habrás contrastado con otra gente las ideas de cómo se daba en un lado y en otro, ¿qué sensación o percepción tienes tú al respecto?

SERGIO

Yo estoy muy contento de este grupo, pero vamos yo creo que para ellos es mucho peor la parte práctica y para nosotros la parte teórica .

ENTREVISTADOR

Si tuvieras que hacer algún comentario a alguien que quisiera implantar un programa de es estas características, tu que razonamiento les darías para su implantación o no, a una autoridad académica ¿qué les dirías? con capacidad de decisión.

SERGIO

Yo le intentaría convencer que se implantase, pero igual que en vez de ser todas las clases con ordenador que fuese alguna, una al mes o dos, de resolver a mano.

ENTREVISTADOR

O sea que crees que a lo mejor le ha faltado un poco resolver con lápiz y papel

SERGIO

Sí el hacer a mano, las cuestiones teóricas sobre todo.

ENTREVISTADOR

Añadir alguna clase con encerado.

Pero bueno tu en particular no la has necesitado, venías bien preparado no?
SERGIO
Sí.

COMENTARIO DE LA ENTREVISTA:
El alumno Sergio R. es bastante escueto y contundente en sus contestaciones, no se extiende más que en lo imprescindible, es una persona correcta pero que no da pie a mucha conversación, el comenta lo justo.

ANEXO XII: PRUEBAS Y DATOS OBTENIDOS DE LA ENCUESTA FINAL.

1. MODELO DE ENCUESTA FINAL.

A continuación mostramos el modelo de ENCUESTA FINAL:

Puntúa de 1 a 5 las siguientes cuestiones:

1. El profesor explica con claridad.
   1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5( )
2. Se preocupa porque los alumnos aprendan.
   1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5( )
3. Suele destacar las cosas que considera importantes:
   1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5( )
4. Contribuye a hacer interesante la asignatura:
   1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5( )
5. Sus clases están bien preparadas:
   1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5( )
6. El profesor parece dominar la asignatura y estar al corriente de los progresos en la materia:
   1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5( )
7. Ha informado sobre el programa y el plan de trabajo de la asignatura:
   1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5( )
8. En líneas generales, el profesor se ha ajustado al plan de trabajo previsto:
   1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5( )
9. Ha informado sobre los criterios y actividades de evaluación de la materia que imparte:
   1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5( )
10. El profesor tiene una actitud receptiva ante las preguntas o sugerencias de los estudiantes:
    1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5( )
11. Fomenta la participación de los estudiantes en clase:
    1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5( )
12. El profesor está disponible para ser consultado en horas de tutoría:
    1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5( )
13. Los conceptos teóricos se complementa adecuadamente con ejemplos, comentarios de textos, ejercicios, problemas...
    1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5( )
14. La bibliografía y/o el material de lectura indicados por el/la profesor/a son útiles para el estudio de la asignatura.
    1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5( )
15. En general el trabajo llevado a cabo por el/la profesor/a ha sido satisfactorio:
    1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5( )

2. DATOS OBTENIDOS DE LA ENCUESTA FINAL.

RESUMEN DE DATOS OBTENIDOS EN LA ENCUESTA FINAL

CUESTIONES:

	Puntuaciones								*Media*	*Desv. Tipica*
1. El Profesor explica con claridad:	5	3	5	4	3	5	4	4	3,83	0,83
	4	3	3	3						
2. El profesor se preocupa por el aprendizaje	5	5	5	5	5	5	4	4	4,58	0,51
de sus alumnos	5	4	4	4						
3. Suele destacar las cosas que considera	5	5	5	5	4	5	5	4	4,50	0,52
importantes	4	4	4	4						
4. Contribuye a hacer interesante la asignatura	5	5	5	4	4	5	3	4	4,17	0,83
	5	3	4	3						
5. Sus clases están bien preparadas	5	4	5	5	5	5	5	4	4,58	0,51
	5	4	4	4						
6. El profesor parece dominar la asignatura y	5	5	5	5	4	5	5	4	4,50	0,67
estar al corriente de los progresos	4	5	4	3						
7. Ha informado sobre el programa y el plan	5	5	5	5	4	4	5	4	4,33	0,65
de trabajo de la asignatura	4	4	4	3						
8. En líneas generales se ha ajustado al plan de	5	5	5	4	4	4	4	4	4,25	0,62
trabajo previsto	4	5	4	3						
9. Ha informado sobre los criterios y actividades	5	5	4	5	4	4	4	4	4,17	0,58
de evaluación de la materia que imparte	4	4	4	3						
10. El profesor tiene una actitud receptiva ante	5	5	5	5	4	5	5	3	4,50	0,67
las preguntas o sugerencias de los alumnos	5	4	4	4						
11. Fomenta la participación de los alumnos	5	4	4	5	4	5	3	3	3,83	0,94
en clase	4	3	4	2						
12. El profesor está disponible para ser		5	5	5	4	5	5	4	4,27	0,79
consultado en horas de tutoría	4	3	4	3						
13. Los conceptos teóricos se complementan	5	5	5	5	5	5	4	4	4,58	0,51
adecuadamente con ejemplos, comentarios,	5	4	4	4						
14. La bibliografía y/o el material de lectura	5	2	5	4	5	5	4	4	4,25	0,97
indicados son útiles para el estudio de la asig	5	4	5	3						
15. En general, el trabajo llevado a cabo por	5	5	5	5	4	5	4	4	4,50	0,52
el profesor ha sido satisfactorio	5	4	4	4						

A continuación se ofrecen las hojas de respuestas: (1)

CUESTIONARIO FINAL: MATEMATICAS II CON DERIVE.

Puntua de 1 a 5 las siguientes cuestiones:

1. El profesor explica con claridad :
1( ) 2( ) 3(X) 4 ( ) 5( )
2. Se preocupa por que los alumnos aprendan:
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
3. Suele destacar las cosas que considera importantes:
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
4. Contribuye a hacer interesante la asignatura:
1( ) 2( ) 3(X) 4 ( ) 5( )
5- Sus clases están bien preparadas:
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
6. El profesor parece dominar la asignatura y estar al corriente de lo progresos en la materia:
1( ) 2( ) 3(X) 4 ( ) 5( )
7. Ha informado sobre el programa y el plan de trabajo de la asignatura.
1( ) 2( ) 3(X) 4 ( ) 5( )
8. En líneas generales, el profesor se ha ajustado al plan de trabajo previsto.
1( ) 2( ) 3(X) 4 ( ) 5( )
9. Ha informado sobre los criterios y actividades de evaluación de la materia que imparte.
1( ) 2( ) 3(X) 4 ( ) 5( )
10. El profesor tiene una actitud receptiva ante las preguntas o sugerencias de los estudiantes.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
11. Fomenta la participación de los estudiantes en clase.
1( ) 2(X) 3( ) 4 ( ) 5( )
12. El profesor está disponible para ser consultado en horas de tutoría.
1( ) 2( ) 3(X) 4 ( ) 5( )
13. Los conceptos teóricas se complementan adecuadamente con ejemplos, comentarios de textos, ejercicios, problemas,...
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
14. La bibliografía y/o el material de lectura indicados por el/la profesor/a son útiles para el estudio de la asignatura.
1( ) 2( ) 3(X) 4 ( ) 5( )
15. En general, el trabajo llevado a cabo por el/la profesor/a ha sido satisfactorio
1( ) 2( ) 3(✓) 4 (X) 5( )

(2)

2

CUESTIONARIO FINAL: MATEMATICAS II CON DERIVE.

Puntua de 1 a 5 las siguientes cuestiones:

1. El profesor explica con claridad :
1( ) 2( ) 3(X) 4 ( ) 5( )
2. Se preocupa por que los alumnos aprendan:
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
3. Suele destacar las cosas que considera importantes:
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
4. Contribuye a hacer interesante la asignatura:
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
5- Sus clases están bien preparadas:
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
6. El profesor parece dominar la asignatura y estar al corriente de lo progresos en la materia:
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
7. Ha informado sobre el programa y el plan de trabajo de la asignatura.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
8. En líneas generales, el profesor se ha ajustado al plan de trabajo previsto.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
9. Ha informado sobre los criterios y actividades de evaluación de la materia que imparte. 1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
10. El profesor tiene una actitud receptiva ante las preguntas o sugerencias de los estudiantes. 1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
11. Fomenta la participación de los estudiantes en clase.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
12. El profesor está disponible para ser consultado en horas de tutoría.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
13. Los conceptos teóricas se complementan adecuadamente con ejemplos, comentarios de textos, ejercicios, problemas,... 1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
14. La bibliografía y/o el material de lectura indicados por el/la profesor/a son útiles para el estudio de la asignatura. 1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
15. En general, el trabajo llevado a cabo por el/la profesor/a ha sido satisfactorio
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )

(3)

CUESTIONARIO FINAL: MATEMATICAS II CON DERIVE.

Puntua de 1 a 5 las siguientes cuestiones:

1. El profesor explica con claridad :
1( ) 2( ) 3(X) 4 ( ) 5( )
2. Se preocupa por que los alumnos aprendan:
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
3. Suele destacar las cosas que considera importantes:
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
4. Contribuye a hacer interesante la asignatura:
1( ) 2( ) 3(X) 4 ( ) 5( )
5- Sus clases están bien preparadas:
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
6. El profesor parece dominar la asignatura y estar al corriente de lo progresos en la materia:
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
7. Ha informado sobre el programa y el plan de trabajo de la asignatura.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
8. En líneas generales, el profesor se ha ajustado al plan de trabajo previsto.
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
9. Ha informado sobre los criterios y actividades de evaluación de la materia que imparte.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
10. El profesor tiene una actitud receptiva ante las preguntas o sugerencias de los estudiantes.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
11. Fomenta la participación de los estudiantes en clase.
1( ) 2( ) 3(X) 4 ( ) 5( )
12. El profesor está disponible para ser consultado en horas de tutoría.
1( ) 2( ) 3(X) 4 ( ) 5( )
13. Los conceptos teóricas se complementan adecuadamente con ejemplos, comentarios de textos, ejercicios, problemas,...
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
14. La bibliografía y/o el material de lectura indicados por el/la profesor/a son útiles para el estudio de la asignatura.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
15. En general, el trabajo llevado a cabo por el/la profesor/a ha sido satisfactorio
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )

(4)

CUESTIONARIO FINAL: MATEMATICAS II CON DERIVE.

Puntua de 1 a 5 las siguientes cuestiones:

1. El profesor explica con claridad :
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
2. Se preocupa por que los alumnos aprendan:
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
3. Suele destacar las cosas que considera importantes:
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
4. Contribuye a hacer interesante la asignatura:
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
5- Sus clases están bien preparadas:
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
6. El profesor parece dominar la asignatura y estar al corriente de lo progresos en la materia:
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
7. Ha informado sobre el programa y el plan de trabajo de la asignatura.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
8. En líneas generales, el profesor se ha ajustado al plan de trabajo previsto.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
9. Ha informado sobre los criterios y actividades de evaluación de la materia que imparte. 1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
10. El profesor tiene una actitud receptiva ante las preguntas o sugerencias de los estudiantes. 1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
11. Fomenta la participación de los estudiantes en clase.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
12. El profesor está disponible para ser consultado en horas de tutoría.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
13. Los conceptos teóricas se complementan adecuadamente con ejemplos, comentarios de textos, ejercicios, problemas,... 1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
14. La bibliografía y/o el material de lectura indicados por el/la profesor/a son útiles para el estudio de la asignatura. 1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
15. En general, el trabajo llevado a cabo por el/la profesor/a ha sido satisfactorio
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)

(5)

5

CUESTIONARIO FINAL: MATEMATICAS II CON DERIVE.

Puntua de 1 a 5 las siguientes cuestiones:

1. El profesor explica con claridad :
1( ) 2( ) 3( ) 4(X) 5( )
2. Se preocupa por que los alumnos aprendan:
1( ) 2( ) 3( ) 4(X) 5( )
3. Suele destacar las cosas que considera importantes:
1( ) 2( ) 3( ) 4(X) 5( )
4. Contribuye a hacer interesante la asignatura:
1( ) 2( ) 3( ) 4(X) 5( )
5- Sus clases están bien preparadas:
1( ) 2( ) 3( ) 4(X) 5( )
6. El profesor parece dominar la asignatura y estar al corriente de lo progresos en la materia:
1( ) 2( ) 3( ) 4(X) 5( )
7. Ha informado sobre el programa y el plan de trabajo de la asignatura.
1( ) 2( ) 3( ) 4(X) 5( )
8. En líneas generales, el profesor se ha ajustado al plan de trabajo previsto.
1( ) 2( ) 3( ) 4(X) 5( )
9. Ha informado sobre los criterios y actividades de evaluación de la materia que imparte.
1( ) 2( ) 3( ) 4(X) 5( )
10. El profesor tiene una actitud receptiva ante las preguntas o sugerencias de los estudiantes.
1( ) 2( ) 3(X) 4( ) 5( )
11. Fomenta la participación de los estudiantes en clase.
1( ) 2( ) 3(X) 4( ) 5( )
12. El profesor está disponible para ser consultado en horas de tutoría.
1( ) 2( ) 3( ) 4(X) 5( )
13. Los conceptos teóricas se complementan adecuadamente con ejemplos, comentarios de textos, ejercicios, problemas,...
1( ) 2( ) 3( ) 4(X) 5( )
14. La bibliografía y/o el material de lectura indicados por el/la profesor/a son útiles para el estudio de la asignatura.
1( ) 2( ) 3( ) 4(X) 5( )
15. En general, el trabajo llevado a cabo por el/la profesor/a ha sido satisfactorio
1( ) 2( ) 3( ) 4(X) 5( )

(6)

6

CUESTIONARIO FINAL: MATEMATICAS II CON DERIVE.

Puntua de 1 a 5 las siguientes cuestiones:

1. El profesor explica con claridad :
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
2. Se preocupa por que los alumnos aprendan:
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
3. Suele destacar las cosas que considera importantes:
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
4. Contribuye a hacer interesante la asignatura:
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
5- Sus clases están bien preparadas:
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
6. El profesor parece dominar la asignatura y estar al corriente de lo progresos en la materia:
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
7. Ha informado sobre el programa y el plan de trabajo de la asignatura.
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
8. En líneas generales, el profesor se ha ajustado al plan de trabajo previsto.
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
9. Ha informado sobre los criterios y actividades de evaluación de la materia que imparte. 1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
10. El profesor tiene una actitud receptiva ante las preguntas o sugerencias de los estudiantes. 1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
11. Fomenta la participación de los estudiantes en clase.
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
12. El profesor está disponible para ser consultado en horas de tutoría.
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5( )
13. Los conceptos teóricas se complementan adecuadamente con ejemplos, comentarios de textos, ejercicios, problemas,... 1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
14. La bibliografía y/o el material de lectura indicados por el/la profesor/a son útiles para el estudio de la asignatura. 1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
15. En general, el trabajo llevado a cabo por el/la profesor/a ha sido satisfactorio
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)

(7)

7

CUESTIONARIO FINAL: MATEMATICAS II CON DERIVE.

Puntua de 1 a 5 las siguientes cuestiones:

1. El profesor explica con claridad :
1( ) 2( ) 3(X) 4( ) 5( )
2. Se preocupa por que los alumnos aprendan:
1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5(X)
3. Suele destacar las cosas que considera importantes:
1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5(X)
4. Contribuye a hacer interesante la asignatura:
1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5(X)
5- Sus clases están bien preparadas:
1( ) 2( ) 3( ) 4(X) 5( )
6. El profesor parece dominar la asignatura y estar al corriente de lo progresos en la materia:
1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5(X)
7. Ha informado sobre el programa y el plan de trabajo de la asignatura.
1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5(X)
8. En líneas generales, el profesor se ha ajustado al plan de trabajo previsto.
1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5(X)
9. Ha informado sobre los criterios y actividades de evaluación de la materia que imparte. 1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5(X)
10. El profesor tiene una actitud receptiva ante las preguntas o sugerencias de los estudiantes. 1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5(X)
11. Fomenta la participación de los estudiantes en clase.
1( ) 2( ) 3( ) 4(X) 5( )
12. El profesor está disponible para ser consultado en horas de tutoría.
1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5(X)
13. Los conceptos teóricas se complementan adecuadamente con ejemplos, comentarios de textos, ejercicios, problemas,... 1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5(X)
14. La bibliografía y/o el material de lectura indicados por el/la profesor/a son útiles para el estudio de la asignatura. 1( ) 2(X) 3( ) 4( ) 5( )
15. En general, el trabajo llevado a cabo por el/la profesor/a ha sido satisfactorio
1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5(X)

(8)

8

CUESTIONARIO FINAL: MATEMATICAS II CON DERIVE.

Puntua de 1 a 5 las siguientes cuestiones:

1. El profesor explica con claridad :
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(x)
2. Se preocupa por que los alumnos aprendan:
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(x)
3. Suele destacar las cosas que considera importantes:
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(x)
4. Contribuye a hacer interesante la asignatura:
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(x)
5- Sus clases están bien preparadas:
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(x)
6. El profesor parece dominar la asignatura y estar al corriente de lo progresos en la materia:
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(x)
7. Ha informado sobre el programa y el plan de trabajo de la asignatura.
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(x)
8. En líneas generales, el profesor se ha ajustado al plan de trabajo previsto.
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(x)
9. Ha informado sobre los criterios y actividades de evaluación de la materia que imparte.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (x) 5( )
10. El profesor tiene una actitud receptiva ante las preguntas o sugerencias de los estudiantes.
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(x)
11. Fomenta la participación de los estudiantes en clase.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (x) 5( )
12. El profesor está disponible para ser consultado en horas de tutoría.
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(x)
13. Los conceptos teóricas se complementan adecuadamente con ejemplos, comentarios de textos, ejercicios, problemas,...
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(x)
14. La bibliografía y/o el material de lectura indicados por el/la profesor/a son útiles para el estudio de la asignatura.
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(x)
15. En general, el trabajo llevado a cabo por el/la profesor/a ha sido satisfactorio
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(x)

(9)

9

CUESTIONARIO FINAL: MATEMATICAS II CON DERIVE.

Puntua de 1 a 5 las siguientes cuestiones:

1. El profesor explica con claridad :
1( ) 2( ) 3( ) 4(X) 5( )
2. Se preocupa por que los alumnos aprendan:
1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5(X)
3. Suele destacar las cosas que considera importantes:
1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5(X)
4. Contribuye a hacer interesante la asignatura:
1( ) 2( ) 3( ) 4(X) 5( )
5- Sus clases están bien preparadas:
1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5(X)
6. El profesor parece dominar la asignatura y estar al corriente de lo progresos en la materia:
1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5(X)
7. Ha informado sobre el programa y el plan de trabajo de la asignatura.
1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5(X)
8. En líneas generales, el profesor se ha ajustado al plan de trabajo previsto.
1( ) 2( ) 3( ) 4(X) 5( )
9. Ha informado sobre los criterios y actividades de evaluación de la materia que imparte. 1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5(X)
10. El profesor tiene una actitud receptiva ante las preguntas o sugerencias de los estudiantes. 1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5(X)
11. Fomenta la participación de los estudiantes en clase.
1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5(X)
12. El profesor está disponible para ser consultado en horas de tutoría.
1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5(.)
13. Los conceptos teóricas se complementan adecuadamente con ejemplos, comentarios de textos, ejercicios, problemas,... 1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5(X)
14. La bibliografía y/o el material de lectura indicados por el/la profesor/a son útiles para el estudio de la asignatura. 1( ) 2( ) 3( ) 4(X) 5( )
15. En general, el trabajo llevado a cabo por el/la profesor/a ha sido satisfactorio
1( ) 2( ) 3( ) 4( ) 5(X)

(10)

10

CUESTIONARIO FINAL: MATEMATICAS II CON DERIVE.

Puntua de 1 a 5 las siguientes cuestiones:

1. El profesor explica con claridad :
1( ) 2( ) 3(X) 4 ( ) 5( )
2. Se preocupa por que los alumnos aprendan:
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
3. Suele destacar las cosas que considera importantes:
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
4. Contribuye a hacer interesante la asignatura:
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
5- Sus clases están bien preparadas:
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
6. El profesor parece dominar la asignatura y estar al corriente de lo progresos en la materia:
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
7. Ha informado sobre el programa y el plan de trabajo de la asignatura.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
8. En líneas generales, el profesor se ha ajustado al plan de trabajo previsto.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
9. Ha informado sobre los criterios y actividades de evaluación de la materia que imparte.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
10. El profesor tiene una actitud receptiva ante las preguntas o sugerencias de los estudiantes.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
11. Fomenta la participación de los estudiantes en clase.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
12. El profesor está disponible para ser consultado en horas de tutoría.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
13. Los conceptos teóricas se complementan adecuadamente con ejemplos, comentarios de textos, ejercicios, problemas,... 1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
14. La bibliografía y/o el material de lectura indicados por el/la profesor/a son útiles para el estudio de la asignatura. 1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
15. En general, el trabajo llevado a cabo por el/la profesor/a ha sido satisfactorio
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )

(11)

11

CUESTIONARIO FINAL: MATEMATICAS II CON DERIVE.

Puntua de 1 a 5 las siguientes cuestiones:

1. El profesor explica con claridad :
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
2. Se preocupa por que los alumnos aprendan:
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
3. Suele destacar las cosas que considera importantes:
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
4. Contribuye a hacer interesante la asignatura:
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
5- Sus clases están bien preparadas:
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
6. El profesor parece dominar la asignatura y estar al corriente de lo progresos en la materia:
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
7. Ha informado sobre el programa y el plan de trabajo de la asignatura.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
8. En líneas generales, el profesor se ha ajustado al plan de trabajo previsto.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
9. Ha informado sobre los criterios y actividades de evaluación de la materia que imparte.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
10. El profesor tiene una actitud receptiva ante las preguntas o sugerencias de los estudiantes.
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
11. Fomenta la participación de los estudiantes en clase.
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
12. El profesor está disponible para ser consultado en horas de tutoría.
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
13. Los conceptos teóricas se complementan adecuadamente con ejemplos, comentarios de textos, ejercicios, problemas,...
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
14. La bibliografía y/o el material de lectura indicados por el/la profesor/a son útiles para el estudio de la asignatura.
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
15. En general, el trabajo llevado a cabo por el/la profesor/a ha sido satisfactorio
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)

(12)

12

CUESTIONARIO FINAL: MATEMATICAS II CON DERIVE.

Puntua de 1 a 5 las siguientes cuestiones:

1. El profesor explica con claridad :
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
2. Se preocupa por que los alumnos aprendan:
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
3. Suele destacar las cosas que considera importantes:
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
4. Contribuye a hacer interesante la asignatura:
1( ) 2( ) 3(X) 4 ( ) 5( )
5- Sus clases están bien preparadas:
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
6. El profesor parece dominar la asignatura y estar al corriente de lo progresos en la materia:
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
7. Ha informado sobre el programa y el plan de trabajo de la asignatura.
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
8. En líneas generales, el profesor se ha ajustado al plan de trabajo previsto.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
9. Ha informado sobre los criterios y actividades de evaluación de la materia que imparte.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
10. El profesor tiene una actitud receptiva ante las preguntas o sugerencias de los estudiantes.
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
11. Fomenta la participación de los estudiantes en clase.
1( ) 2( ) 3(X) 4 ( ) 5( )
12. El profesor está disponible para ser consultado en horas de tutoría.
1( ) 2( ) 3( ) 4 ( ) 5(X)
13. Los conceptos teóricas se complementan adecuadamente con ejemplos, comentarios de textos, ejercicios, problemas,...
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
14. La bibliografía y/o el material de lectura indicados por el/la profesor/a son útiles para el estudio de la asignatura.
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )
15. En general, el trabajo llevado a cabo por el/la profesor/a ha sido satisfactorio
1( ) 2( ) 3( ) 4 (X) 5( )

ANEXO XIII: PRUEBAS Y DATOS OBTENIDOS DE LA ENTREVISTA FINAL.

1. MODELO DE LA ENTREVISTA FINAL.

El objetivo de esta entrevista es intentar validar los resultados que se han ido obteniendo de los datos anteriores. Para ello realizamos una entrevista con cada uno de los participantes en la investigación educativa realizada en el SUBGRUPO-A en el cual se introduce el uso de DERIVE como instrumento central de trabajo.

Para validar las interpretaciones que se parecen desprender de los datos que hemos recogido para cada uno de los participantes, parece correcto seguir un guión más o menos común con todos ellos, incidiendo en las particularidades que hemos observado en los datos particulares e ideas recogidas particularmente con cada uno.

Comenzamos las entrevistas con los dos alumnos que repitieron la asignatura:
ANTONIO F. CUELLAR y
JOSE IVANOFF GOMEZ

La ideas que nos dan estos alumnos en general está un poco sesgada por el hecho de que ya han cursado la asignatura otra vez, pero con la metodología tradición. Sin embargo nos pueden dar mucha información de tipo comparativo con respecto a la otra metodología, son ellos los alumnos que tienen más elementos de juicio para incidir en las diferencias o particularidades de ambas metodologías por lo que deberemos de intentar obtener de ellos toda la información que se precise sobre este tema.

Revisamos cada una de las cuestiones de la investigación y veamos qué preguntas podrían ser necesarias para profundizar.

Iniciaremos la ENTREVISTA recordando algunas ideas anotadas de cada PARTICIPANTE para validarlas.

1) ***El sistema de cálculo algebraico DERIVE; como elemento central de nuestra estrategia ¿permite construir un SISTEMA DE NOTACIÓN INTERMEDIO, entre los sistemas de notación del álgebra lineal y los sistemas de notación más familiares e intuitivos?***
   1.1. *Cuando se introdujeron los conceptos teóricos con los EJEMPLOS A INVESTIGAR te costaba entender lo que se pedía en Matemáticas, DERIVE te ayudaba a descubrir con más facilidad lo que se buscaba?*

1.2. *A la hora de realizar EJERCICIOS DE MANIPULACIÓN, la forma de introducir los datos en DERIVE te servía para asimilar los procesos rutinarios del álgebra lineal, por ejemplo pasar de ecuaciones cartesianas a paramétricas? ¿sabrías relizar esos mismos procesos con lápiz y papel?*
1.3. *En la resolución de PROBLEMAS, ¿has tenido que poner en marcha algún tipo especial de razonamiento que no habías empleado hasta ahora?*
1.4. *Cuando realizaste el EXAMEN FINAL, ¿tuviste la sensación de que DERIVE te proporcionaba un estilo de NOTACIÓN distinto al que venías empleando? ¿tuviste que plantear algún problema con lápiz y papel?*
1.5. *Cuando tienes que realizar cualquier práctica de Matemáticas II con DERIVE ¿sabrías realizarla fácilmente con lápiz y papel?*
1.6. *Y al revés, si resuelves un problema o cuestión con lápiz y papel ¿tienes algún problemas en realizarla en DERIVE?*
1.7. *De las dos formas de NOTACIÓN, DERIVE, o lápiz y papel, cual te resulta más cómoda? ¿y cual crees que es mejor para comprender los conceptos de álgebra lineal? ¿por qué?*
1.8. *(SOLO PARA REPETIDORES) ¿crees que DERIVE proporciona un sistema de notación intermedio entre tus ideas y las ideas que el profesor trata de transmitir?*

2) ***¿Cuál es el grado de INTERACTIVIDAD que suscita esta estrategia entre alumnos y profesores, alumnos y medio didáctico y entre los propios alumnos?***
2.1. *En las clases ¿has tenido una buena comunicación con el profesor? ¿has tenido respuesta rápida a tus dudas o cuestiones?*
2.2. *Da una valoración de 1 a 5 la comunicación con e profesor.*
2.3. *¿cómo ha sido tu comunicación con los compañeros de clase?*
2.4. *(indicar la pareja de clase con la que tenía relación y preguntarle) ¿Además de tu relación con **** , has tenido contacto con otros compañeros?*
2.5. *Valora de 1 a 5 la comunicación que has tenido con tus compañeros.*
2.6. *Respecto al programa DERIVE, cuando manipulabas el programa con el fin de obtener alguna solución, ¿los mensajes que ibas recibiendo del programa o la respuestas que recibías, te han proporcionado nuevas vías de solución o la respuesta a lo que buscabas?*
2.7. *Valora de 1 a 5 el grado de interactividad que tiene el programa DERIVE con respecto al usuario.*
2.8. *(PARA LOS REPETIDORES) ¿Podrías comparar el tipo de comunicación que has vivido en las clases con la que has experimentado en las clases de matemáticas II cuando hiciste por primera vez la asignatura, a nivel de profesor y a nivel de compañeros?*

.

3) ***Este tipo de estrategia didáctica, ¿favorece el PROTAGONISMO y AUTOCREACIÓN del alumno frente al medio tecnológico, evitando que el alumno sea un mero USUARIO del sistema?***

3.1. *Cuando se proponían EJEMPLOS PARA INVESTIGAR, ¿el programa DERIVE te ha servido para buscar las soluciones, o por el contrario, te dejabas llevar por los resultados que el sistema de iba ofreciendo?*
3.2. *Cuando se planteaba la solución de los ejemplos a investigar, te has sentido en cierta medida manipulado, es decir, como si no supieras lo que se había pedido?*
3.3. *Cuando se realizaba los EJERCICIOS DE MANIPULACIÓN, ¿has entendido perfectamente el proceso que pretendías implementar con el programa DERIVE? ¿serías capaz de realizar los procesos que hacías con el ordenador a lápiz y papel?*
3.4. *En la resolución de las CUESTIONES TEÓRICAS, ¿has necesitado DERIVE para resolverlas? Y si la respuesta es afirmativa, ¿sin DERIVE no hubieras sabido resolverlas?*

3.5. Cuando resolvías PROBLEMAS FIN DE CAPITULO, ¿Has encontrado algún tipo de capacidad creativa a la hora de resolverlos, que te propiciaba el utilizar DERIVE? ¿Los hubieras sabido resolver sin DERIVE?

3.6. Cuando hiciste el EXAMEN FINAL, ¿crees que hubiera sido más fácil hacerlo con lápiz y papel?

4) Las pautas que hemos marcado en torno al uso de DERIVE, ¿evitan que el ordenador se utilice para desarrollar conceptos y principios que consideramos como CONTENIDOS ESENCIALES; propiciando un uso adecuado de las rutinas algebraicas que el sistema puede automatizar?

4.1. Cuando se han ido desarrollando los contenidos del curso, has sabido distinguir fácilmente lo que eran CONTENIDOS ESENCIALES de los procesos repetitivos, es decir, sabías qué era lo más importante que se estaba haciendo en cada momento?

4.2. Del tema 1 de espacios vectoriales ¿cuáles crees que son los contenidos esenciales? ¿qué es lo que consideras fundamental para la comprensión de este tema? Y en segundo lugar ¿cuáles eran los procesos manipulativos rutinarios?

4.3. ¿y del tema 2?

4.4. ¿y del tema 3?

4.5. ¿y del tema 4?

4.6. ¿y del tema 5?

4.7. ¿y del tema 6?

4.8. ¿y del tema 7?

4.9. Sabes calcular determinante de cualquier orden a mano? PLANTEAR UNO.

4.10. ¿Sabrías resolver un sistema de ecuaciones usando la regla de Cramer? PLANTEAR UNO

4.11. ¿Sabrías calcular el rango de una matriz? PLANTEAR UNA.

4.12. ¿Sabrias calcular los autovalores de una matriz a mano? PLANTEAR UNO

5) El manejo del programa de cálculo simbólico DERIVE, ¿permite prescindir del ESFUERZO RUTINARIO dedicado al desarrollar operaciones algebraicas y de cálculo?

5.1. ¿Sabes distinguir entre los que es un contenido esencial y un proceso rutinario? Ponme un ejemplo del tema 1.

5.2. A la hora de resolver PROBLEMAS DE FIN DE CAPÍTULO ¿hubieras sido capaz de resolverlos sin DERIVE?

5.3. Cuando resuelves PROBLEMAS ¿encuentras algunas característica especial en el modo de resolución cuando lo has hecho con DERIVE? (sugerir si no dice nada si se puede dedicar más tiempo a pensar)

6) Las formas de manejo del sistema DERIVE que hemos considerado en nuestra estrategia didáctica ¿convierten al ordenador en una auténtica HERRAMIENTA DE EXPERIMENTACIÓN?

6.1. Cuando se planteaban EJEMPLOS PARA INVESTIGAR. ¿has utilizado DERIVE para intentar obtener algo por tu cuenta o por el contrario has esperado a la solución?

6.2. Respecto a los mismos EJEMPLOS PARA INVESTIGAR, a medida que iban pasando los temas, tu grado de EXPERIMENTACIÓN con DERIVE ha ido aumentando o por el contrario, cada vez eras capaz de encontrar menos caminos de solución

6.3. Cuando resolvías PROBLEMAS, ¿has probado muchos caminos, y experimentado posibles soluciones?

6.4. ¿crees que la EXPERIMENTACIÓN que has realizado en el curso te ha ayudado a entender mejor los contenidos?

7) Nuestra estrategia didáctica, ¿podemos decir que favorece la adquisición de APRENDIZAJES SIGNIFICATIVOS de aquellos contenidos matemáticos del álgebra lineal que vamos introduciendo?

7.1. Trabajar como lo hemos hecho el álgebra lineal con la investigación y el descubrimiento te ha permitido entender más los conceptos o por el contrario te han dispersado tu atención de tal forma que no sabías lo que era importante y lo que no lo era?

7.2. Cuando se planteaban EJEMPLOS PARA INVESTIGAR, ¿has sentido en algún momento que necesitabas algunos conceptos previos sin los cuales no podrías encontrar nada?

8) Este tipo de manipulación del programa DERIVE, ¿favorece el DESARROLLO DE ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS?

8.1. Cuando has resuelto los PROBLEMAS FINALES, ¿cuántas formas de resolución has empleado una o varias?

8.2. Si has utilizado solamente una, me puedes indicar el motivo.

8.3. ¿Crees que el tipo de didáctica que se ha planteado en clase facilitaba el que los alumnos encontrarais varias formas o caminos para resolver un problema?

8.4. ¿Crees que en clase se ha favorecido la multiplicidad de métodos de resolución o se ha indicado únicamente UN ÚNICO MÉTODO de resolución?

9) El manejo de un programa de cálculo simbólico como DDERIVE, ¿genera BARRERAS ADICIONALES para el aprendizaje de los conceptos matemáticos?

9.1. ¿Crees que el programa DERIVE te ha dificultado que comprendas los conceptos matemáticos?

9.2. ¿Crees que has dedicado demasiado tiempo al aprendizaje del programa DERIVE?

9.3. Cuando hiciste el exámen te pusiste nervioso en algún momento porque no sabías utilizar algún comando de DERIVE, es decir DERIVE te impidió hacer mejor el exámen de lo que lo hiciste?

9.4. Podrías indicar ¿cuáles son los principales problemas que has tenido cuando manejabas DERIVE?

9.5. Aunque esta pregunta ya te la hice en su día, si algún compañero te pregunta sobre el programa, ¿se lo aconsejarías para estudiar álgebra lineal? Razona la respuesta.

10) Una didáctica guiada por esta estrategia ¿genera AUTONOMIA COGNITIVA en los alumnos, permitiéndoles e incitándoles a indagar situaciones planteadas desde el propio individuo anulando así, ciertas dependencias que existen entre los alumnos y otros expertos o maestros?

10.1. Cuando se planteaban EJEMPLOS PARA INVESTIGAR, ¿te has sentido motivado o picado para resolver o encontrar la solución? ¿siempre, nunca, casi siempre....

10.2. Cuando se han planteado EJERCICIOS DE MANIPULACIÓN, ¿has encontrado satisfacción cuando los resolvías y encontrabas el método o proceso de la resolución?

10.3. ¿cómo has resuelto los PROBLEMAS sólo o en grupo?

10.4. Cuando has resuelto PROBLEMAS, ¿ha aparecido en ti un algo un gusanillo que te obligaba a buscar la solución aunque a priori se resistiese? ¿cuánto tiempo dedicabas a los problemas?

11)¿Favorece la RELACIÓN DIALÉCTICA entre los usuarios, es decir, permite establecer una dialéctica entre los alumnos, alumnos y profesores? ¿Cómo es ese tipo de dialéctica?

11.1. ¿Has establecido alguna relación de amistad especial con algún compañero de clase?
11.2. Durante las clases descríbeme un poco como era el tipo de comunicarión y relación que tenías con los compañeros de tu entorno, qué haciais, hablabais de otras cosas que no fuera de álgebra lineal?
11.3. Antes y después de las clases ¿existía algún tipo de relación con los compañeros de este curso? ¿cómo era? ¿sigue actualmente?
11.4. ¿cómo valorarias el ambiente que se ha desarrollado en clase? . Puntua de 1 a 5.

12) ¿Favorece un APRENDIZAJE COLABORATIVO entre los alumnos?
12.1. El tipo de trabajo en grupo (por parejas) que se ha desarrollado en clase, ¿te ha ayudado a aprender mejor los conceptos que se iban introduciendo?
12.2. ¿Crees que el haber utilizado este programa de ordenador, ha propiciado un tipo de colaboración especial entre los compañeros?
12.3. ¿Has quedado con algunos compañeros para preparar el examen?

13) ¿Favorece una adecuada ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD, ofreciendo varios niveles de aprendizaje?
13.1. El ritmo que hemos llevado en clase ¿cómo ha sido? ¿¿rápido, lento, normal?. Razona la respuesta.
13.2. Haciendo un balance general de las sesiones de clase ¿te has aburrido en algún momento?
13.3. Crees que los problemas que se han planteado se podían clasificar en varios niveles de dificultad? ¿hasta qué tipo de nivel crees que has llegado?
13.4. ¿qué porcentaje de problemas crees que has resuelto?
13.5. ¿Crees que en la clase había varios niveles de aprendizaje? Es decir ¿crees que había alumnos muy inteligentes, otros poco inteligentes,....? En qué grupo te englibarías.
13.6. El examen que se ha propuesto crees que era asequible para todos los alumnos, según lo que se ha dado en clase?

14) ¿Aumenta el grado de MOTIVACIÓN ante el álgebra lineal?
14.1. Si haces un balance general del curso, ¿cómo te han resultado todas las clases largas, cortas,...se te han pasado rápidamente?
14.2. El hecho de utilizar el ordenador, ¿te ha motivado especialmente para estudiar las Matemáticas?
14.3. ¿Cuánto tiempo dedicabas a las matemáticas semanalmente en este cuatrimetre?
14.4. El haber realizado este curso ¿ha aumentado o disminuido tu interés personal por las matemáticas?

GENERALES.
¿Qué ha sido lo más positivo del curso?
¿Qué ha sido lo más negativo del curso?
La nota que sacaste ¿era que esperabas?
¿Volverías a elegir este grupo experimental si te dieran a elegir? ¿por qué?

TIENES ALGUNA OTRA COSA QUE DESEAS MANIFESTAR RELACIONADA CON EL CURSO Y QUE NO HAYAS EXPRESADO?

2. TRANSCRIPCIÓN DE LAS ENTREVISTAS FINALES.

A continuación mostramos a modo de ejemplo la transcripción de la entrevista final realizada a uno de los alumnos que participaron en la experiencia educativa del SUBGRUPO A. El resto de las entrevistas finales se pueden consultar en el CD adjunto a este trabajo.

ENTREVISTA FINAL
Realizada el 4 de Octubre de 15 a 16 h. a L. Rubio.

ENTREVISTADOR
1.9. Cuando se introdujeron los conceptos teóricos con los EJEMPLOS A INVESTIGAR te costaba entender lo que se pedía en Matemáticas, DERIVE te ayudaba a descubrir con más facilidad lo que se buscaba?

LAURA
Algunas veces, pero me costaba hacerlo por ordenador ..o sea lo que es la teoría la entendía, luego lo que es manipular con ordenador ahí sí me podía atascar

ENTREVISTADOR
O sea que DERIVE ¿no te ayudaba a entender las cosas?

LAURA
En algunos conceptos sí

ENTREVISTADOR
1.10. A la hora de realizar EJERCICIOS DE MANIPULACIÓN, la forma de introducir los datos en DERIVE te servía para asimilar los procesos rutinarios del álgebra lineal, por ejemplo pasar de ecuaciones cartesianas a paramétricas?

LAURA
Sí

ENTREVISTADOR
Y luego todos esos procesos, ¿los sabrías trasladar a lápiz y papel?

LAURA
Luego ya al final sí

ENTREVISTADOR
1.11. En la resolución de PROBLEMAS, ¿has tenido que poner en marcha algún tipo especial de razonamiento que no habías empleado hasta ahora? O era muy similar a lo de antes pero con otro medio?

LAURA
Primero tenías que hacer mentalmente como si lo hicieras a lápiz y luego ya lo hacías al ordenador.

ENTREVISTADOR
1.12. Cuando realizaste el EXAMEN FINAL, ¿tuviste la sensación de que DERIVE te proporcionaba un estilo de NOTACIÓN distinto al que venías empleando?

LAURA
NO

ENTREVISTADOR
Tuviste que plantearte algún problema de los del examen con lápiz y papel o lo hiciste directamente

LAURA
Lo hice directamente, bueno para comprobar alguno sí.

ENTREVISTADOR
1.13. Cuando tienes que realizar cualquier práctica de Matemáticas II con DERIVE ¿sabrías realizarla fácilmente con lápiz y papel?

LAURA
Sí.

ENTREVISTADOR

1.14. Y al revés, si resuelves un problema o cuestión con lápiz y papel ¿tienes algún problemas en realizarla en DERIVE?

LAURA

No, bueno, ¿sin haber dado DERIVE o ahora?

ENTREVISTADOR

No, no ahora. , en la situación de ahora.

LAURA

Hombre, tengo que recordar un poco el manejo, pero ...

ENTREVISTADOR

Pero sí serías capaz?

LAURA

Sí, yo creo que sí

ENTREVISTADOR

1.15. De las dos formas de NOTACIÓN, DERIVE, o lápiz y papel, cual te resulta más cómoda?

LAURA

Derive,....

ENTREVISTADOR

¿por qué?

LAURA

Bueno más cómoda me parece lápiz y papel no, porque es lo que se ha hecho siempre y porque es más rápido, pienso yo ... quitando algunos cálculos que te los simplifica DERIVE,...

ENTREVISTADOR

O sea que a ti te parece más cómodo con lápiz y papel?

LAURA

Sí

ENTREVISTADOR

¿cuál te parece que es mejor para entender los conceptos de álgebra lineal, lápiz y papel o DERIVE?

LAURA

eh... hombre el método de DERIVE te ayuda a verlo de forma activa, tienes que trabajar más hasta llegar a la resolución del problema.

ENTREVISTADOR

1.16. ¿crees que DERIVE proporciona un sistema de notación intermedio entre tus ideas y las ideas que el profesor trata de transmitir?

LAURA

Sí.

ENTREVISTADOR

2.9. En las clases ¿has tenido una buena comunicación con el profesor? ¿has tenido respuesta rápida a tus dudas o cuestiones?

LAURA

Buena.

ENTREVISTADOR

2.10. Da una valoración de 1 a 5 la comunicación con el profesor.

LAURA

Hombre, no sé, yo siempre que he tenido una duda, siempre has estado para contestar, y bueno 5.

ENTREVISTADOR

2.11. ¿cómo ha sido tu comunicación con los compañeros de clase?

LAURA

Muy buena.

ENTREVISTADOR

2.12. (indicar la pareja de clase con la que tenía relación y preguntarle) ¿Además de tu relación con Luis, has tenido contacto con otros compañeros?

<u>*LAURA*</u>
Sí
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
2.13. Valora de 1 a 5 la comunicación que has tenido con tus compañeros.
<u>*LAURA*</u>
Un 5.
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
2.14. Respecto al programa DERIVE, cuando manipulabas el programa con el fin de obtener alguna solución, ¿los mensajes que ibas recibiendo del programa o la respuestas que recibías, te han proporcionado nuevas vías de solución o la respuesta a lo que buscabas?
<u>*LAURA*</u>
Hombre alguna vez me desorientaba mucho...
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
¿pero porque no entendías el mensaje o porque no esperabas esa respuesta?
<u>*LAURA*</u>
Porque no entendía..
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
No entendía lo que salía.
2.15. Valora de 1 a 5 el grado de interactividad que tiene el programa DERIVE con respecto al usuario.
<u>*LAURA*</u>
... silencio) Un 4.
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
Por qué un 4 y no un 1 y porqué un 4 y no un 5?
<u>*LAURA*</u>
Pues, más bajo que un 4 no porque, al final yo llegaba a la solución, dándole vueltas... ¿es eso lo que me quiere decir?
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
Si la idea es si en un momento dado te atascabas ¿luego te desatascabas aunque vieras una cosa rara?
<u>*LAURA*</u>
Sí,... y un 5 porque no todo lo entendía a la primera.
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
3.7. Cuando se proponían EJEMPLOS PARA INVESTIGAR, ¿el programa DERIVE te ha servido para buscar las soluciones, o por el contrario, te dejabas llevar por los resultados que el sistema de iba ofreciendo?
<u>*LAURA*</u>
No, iba ... iba... algún cálculo lo tenía que hacer tres veces a lo mejor porque ...
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
No me refiero a los ejemplos de investigación del principo
<u>*LAURA*</u>
A los del principio de la clase?
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
Si
<u>*LAURA*</u>
Um.... me dejaba un poco llegar al principio, porque decía esto será así.... y
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
¿y a medida que avanzaba el curso?
<u>*LAURA*</u>
Pues si salía una cosa extraña intentaba hacerlo otra vez
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
3.8. Cuando se planteaba la solución de los ejemplos a investigar, te has sentido en cierta medida manipulado, es decir, como si no supieras lo que se había pedido?

<u>*LAURA*</u>
En algún problema, igual sí
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
3.9. Cuando se realizaba los EJERCICIOS DE MANIPULACIÓN, ¿has entendido perfectamente el proceso que pretendías implementar con el programa DERIVE?
<u>*LAURA*</u>
Son los de final de capítulo?
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
No, una vez que se había introducido el concepto...
<u>*LAURA*</u>
Ah, si. los del temario...
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
Los de repetición..., ¿has entendido perfectamente lo que se te pedía?
<u>*LAURA*</u>
Bueno en algunos casos... si.
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
¿serías capaz de realizar los procesos que hacías con el ordenador a lápiz y papel?
<u>*LAURA*</u>
Sí, ahora sí.
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
¿por qué me has dicho ahora sí?, porque en su momento no sabías que pasaba
<u>*LAURA*</u>
No.
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
¿por qué, que es lo que ocurría?
<u>*LAURA*</u>
No sé, porque me atascaba
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
Tú estabas super nerviosa
<u>*LAURA*</u>
Sí...
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
El último mes estabas que te salías de nervios, no me hubieras estrangulado de milagro.
<u>*LAURA*</u>
Sí, es verdad, porque le cogí mucha.... que lié muchísimo con el DERIVE y todo el día haciendo problemas con el DERIVE; no salía del ordenador, hasta que llegaba un punto que me atasco, y a lápiz y papel pues cuando me ponían el problema, pues Dios mío, no puedo.
Pero ya al final de curso cuando me relajé ya más o menos antes del examen , pues ya.. he tenido dudas absurdas.
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
3.10. En la resolución de las CUESTIONES TEÓRICAS, ¿has necesitado DERIVE para resolverlas? Y si la respuesta es afirmativa, ¿sin DERIVE no hubieras sabido resolverlas?
<u>*LAURA*</u>
¿en el examen?
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
Bueno las que ibas haciendo y las del examen también
<u>*LAURA*</u>
NO, las de teoría, no, esas no, y en las del examen, utilicé para algunas preguntas para comprobar.
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
O sea y tu eras de las que dijeron que qué pasaba que he utilizado DERIVE en el cuatrimestre y qué pasa ahora que con esto no voy a poderlo usar,... ¿y qué conclusión has sacado?
<u>*LAURA*</u>
Pues que estaba equivocada.

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

Ya os lo dije yo que no era necesario pero bueno, el problema vuestro es que,. bueno creo que la dinámica del curso al final fue un poco acelerada al final, pero en todo caso dejasteis bastante para el final no?

<u>*LAURA*</u>

Yo lo llevaba al día...

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

3.11. Cuando resolvías PROBLEMAS FIN DE CAPITULO, ¿Has encontrado algún tipo de capacidad creativa a la hora de resolverlos, que te propiciaba el utilizar DERIVE?

<u>*LAURA*</u>

Hombre, sí, me he ido a libros ¿es eso?

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

Sí

<u>*LAURA*</u>

Me he ido a la teoría de otros libros , para mirarlos

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

Y ¿los hubieras sabido resolver sin DERIVE?

<u>*LAURA*</u>

Pues digamos que el 40% sí, pero el resto con DERIVE

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

3.12. Cuando hiciste el EXAMEN FINAL, ¿crees que hubiera sido más fácil hacerlo con lápiz y papel?

<u>*LAURA*</u>

(silencio) -.... claro es que yo me lo he estudiado para hacerlo con DERIVE igual con lápiz y papel hubiera tardado más,...

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

Pero tu podrías haber hecho una comparación de el examen que os puse a vosotros con el que puse al resto,... porque las cuestiones son las mismas, pero los problemas los viste?

<u>*LAURA*</u>

No

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

¿no los llegaste a ver?

<u>*LAURA*</u>

No

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

Entonces no tienes valoración.

4.13. Cuando se han ido desarrollando los contenidos del curso, has sabido distinguir fácilmente lo que eran CONTENIDOS ESENCIALES de los procesos repetitivos, es decir, sabías qué era lo más importante que se estaba haciendo en cada momento?

<u>*LAURA*</u>

Sí

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

¿lo has tenido claro?

<u>*LAURA*</u>

Sí, si, me lo iba apuntando en la hojas de teoría y me he hecho mis esquemas ...

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

4.14. Del tema 1 de espacios vectoriales ¿cuáles crees que son los contenidos esenciales? ¿qué es lo que consideras fundamental para la comprensión de este tema? Y en segundo lugar ¿cuáles eran los procesos manipulativos rutinarios?

<u>*LAURA*</u>

(sonríe).... a ver... me has pillado eh? .... en espacio vectorial, ¿lo fundamental del tema?

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

Sí, ... (silencio) si no te acuerdas dejalo pasamos a otra...

<u>*ENTREVISTADOR*</u>
No es un examen o sea que lo primero que te pase por la mente
<u>*LAURA*</u>
No, no me acuerdo.
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
4.15. ¿y del tema 2?
<u>*LAURA*</u>
Las aplicaciones lineales, ... eh... (sonríe)... no me acuerdo
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
¿y un proceso rutinario de ese tema?
<u>*LAURA*</u>
De aplicaciones lineales, pues la matriz en forma de vector, y no sé la determinación...
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
4.16. ¿y del tema 3?
<u>*LAURA*</u>
Resolver determinantes, transformaciones de matriz a aplicación lineal..... (a ver)...
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
Vamos a cambiar de tema
4.17. ¿y del tema 4 de sistemas qué crees que es lo fundamental?
<u>*LAURA*</u>
Clasificarlos
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
¿clasificarlos o resolver?
<u>*LAURA*</u>
Discutirlos
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
¿y los rutinarios?
<u>*LAURA*</u>
de ese tema
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
Si tu crees que hay algo,...
<u>*LAURA*</u>
No ese tema era muy fundamental
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
4.18. ¿y del tema 5 de diagonalización y autovalores qué crees que era lo básico?
<u>*LAURA*</u>
Calcular los autovalores y autovectores
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
¿y lo secundario, lo rutinario?
<u>*LAURA*</u>
Pues...
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
No sería al revés que lo rutinario sería el cálculo de autovalores y autovectores y lo fundamental diagonalizar
<u>*LAURA*</u>
Sí
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
4.19. ¿y del tema 6 de formas cuadráticas?
<u>*LAURA*</u>
(silancio) ah si... bueno lo rutinario es seguir por los autovalores, y lo fundamental saber clasificarlas
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
4.20. ¿y del tema 7 de programación lineal
<u>*LAURA*</u>
Ese tema vi la teoría

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

4.21. Sabes calcular determinante de cualquier orden a mano? PLANTEAR UNO.

<u>*LAURA*</u>

Sí

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

4.22. ¿Sabrías resolver un sistema de ecuaciones usando la regla de Cramer? PLANTEAR UNO

<u>*LAURA*</u>

(silencio) no, no,... me puedo tirar una hora pero si.

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

4.23. ¿Sabrías calcular el rango de una matriz? PLANTEAR UNA.

<u>*LAURA*</u>

Sí

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

4.24. ¿Sabrias calcular los autovalores de una matriz a mano? PLANTEAR UNO

<u>*LAURA*</u>

eh... sí.

SE PLANTEAN 4 EJERCICIOS
LAS OBSERVACIONES A LOS MISMOS SON LAS SIGUIENTES:

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

5.4. ¿Sabes distinguir entre los que es un contenido esencial y un proceso rutinario?

<u>*LAURA*</u>

Sí

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

Un ejemplo, supongamos que te plantean determinar si tres vectores son linealmente independientes, ¿qué es lo esencial y que es lo rutinario para resolver este problema?

<u>*LAURA*</u>

....silencio...

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

¿qué contenido es esencial, y cual es rutinario?

<u>*LAURA*</u>

Tiene que ser distinto de cero ... l.i? si distinto de cero, es esencial,

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

¿el qué tiene que ser distinto de cero el determinante?

<u>*LAURA*</u>

¿qué me has preguntado?

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

¿tres vectores ver si son lí.?

<u>*LAURA*</u>

si el determinante

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

Pero supongamos que no son de dimensión 3 sino que son de dimensión 4.

<u>*LAURA*</u>

Pues... eh... o sea que entre ellos no haya una dependencia.

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

Eso es lo fundamental

<u>*LAURA*</u>

Y como lo haces

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

Por ejemplo u,v,w ¿qué haces para ver que son l.i? ¿no te acuerdas?

LAURA
No
ENTREVISTADOR

5.5. A la hora de resolver PROBLEMAS DE FIN DE CAPÍTULO ¿hubieras sido capaz de resolverlos sin DERIVE?

LAURA
No, bueno y dependiendo de los temas claro.
ENTREVISTADOR
¿cuál es el tema que te pareció más complejo?
LAURA
Pues con el primero me atasqué muchísimo y con el de autovalores y autovectores
ENTREVISTADOR

5.6. Cuando resuelves PROBLEMAS ¿encuentras algunas característica especial en el modo de resolución cuando lo has hecho con DERIVE? (sugerir si no dice nada si se puede dedicar más tiempo a pensar) O sea tu te pone a resolver un problema con DERIVE ¿cuánto dedicas a pensar y cuanto a resolver? y hace el mismo con lápiz y papel ¿cuánto dedicas a pensar y cuanto a resolver?

LAURA
A pensar yo creo que me dedico el mismo tiempo con lápiz y papel que con DERIVE, porque primero lo planteo mentalmente y luego ya lo paso a lápiz o a DERIVE; pero se resuelve antes con DERIVE:
ENTREVISTADOR
Otra pregunta, suponte que te dan 1 hora para resolver un problema, no es un problema sencillo claro, cuanto tiempo crees que dedicarías a plantearlo y resolver en un caso y en otro, aunque tu has dicho que lo mismo en planteamiento, suponiendo que apruebas con ese problema
LAURA
En ese caso, pensaría más con DERIVE porque, ... a lápiz y papel yo puedo dejar plasmado lo que pienso de cómo se hace el problema, puedo tener una ligera idea, sin embargo con DERIVE lo que está en el ordenador es ... no puedes ....
ENTREVISTADOR
O sea que puedes decir que dedicas más tiempo a pensar con DERIVE que con lápiz y papel en esa circunstancia, ¿por qué?
LAURA
Por esa razón porque DERIVE simplemente plasma la fórmula y resuelves, ...
ENTREVISTADOR

6.5. Cuando se planteaban EJEMPLOS PARA INVESTIGAR. ¿has utilizado DERIVE para intentar obtener algo por tu cuenta o por el contrario has esperado a la solución? Es decir se ha dicho se hace esto ... pues me espero o

LAURA
He intentado hacerlo con DERIVE
ENTREVISTADOR

6.6. Respecto a los mismos EJEMPLOS PARA INVESTIGAR, a medida que iban pasando los temas, tu grado de EXPERIMENTACIÓN con DERIVE ha ido aumentando o por el contrario, cada vez eras capaz de encontrar menos caminos de solución

LAURA
Ha ido aumentando
ENTREVISTADOR
O sea que crees que ha habido más experimentación con DERIVE , es decir experimentación matemática
LAURA
Sí
ENTREVISTADOR

6.7. Cuando resolvías PROBLEMAS, ¿has probado muchos caminos, y experimentado posibles soluciones?

<u>LAURA</u>
Sí

<u>ENTREVISTADOR</u>

6.8. ¿crees que la EXPERIMENTACIÓN que has realizado en el curso te ha ayudado a entender mejor los contenidos?

<u>LAURA</u>
Si , si.
<u>ENTREVISTADOR</u>

7.3. Trabajar como lo hemos hecho el álgebra lineal con la investigación y el descubrimiento te ha permitido entender más los conceptos o por el contrario te han dispersado tu atención de tal forma que no sabías lo que era importante y lo que no lo era?

<u>LAURA</u>
No,... los tengo claros, ...
<u>ENTREVISTADOR</u>

7.4. Cuando se planteaban EJEMPLOS PARA INVESTIGAR, ¿has sentido en algún momento que necesitabas algunos conceptos previos sin los cuales no podrías encontrar nada?

<u>LAURA</u>
Sí, ...
<u>ENTREVISTADOR</u>
Un ejemplo que recuerdes, si recuerdas alguno..
<u>LAURA</u>
Al principio del curso, pero creo que también porque era nuevo.
<u>ENTREVISTADOR</u>

8.1. Cuando has resuelto los PROBLEMAS FINALES, ¿cuántas formas de resolución has empleado una o varias? es decir cogías el problema y cuando encontrabas la solución decías ya está este es el método, o decías, no este es un camino ahora voy a ver si por otra forma me da lo mismo.

<u>LAURA</u>
En problemas cortos sí he empleado varias formas, pero en otros más largos la primera que....
<u>ENTREVISTADOR</u>
Cual ha sido el motivo de elegir un solo camino?
<u>LAURA</u>
Que el problema ha sido más largo, y si tengo que utilizar otra forma de hacerlo al final me hago un lio, y al final no sale ninguna.
<u>ENTREVISTADOR</u>

8.3. ¿Crees que el tipo de didáctica que se ha planteado en clase facilitaba el que los alumnos encontrarais varias formas o caminos para resolver un problema?

<u>LAURA</u>
Sí
<u>ENTREVISTADOR</u>

8.4. ¿Crees que en clase se ha favorecido la multiplicidad de métodos de resolución o se ha indicado únicamente UN ÚNICO MÉTODO de resolución?

<u>LAURA</u>
Um.... hombre sinceramente, en el tema, cuando llegamos al tema de determinantes cuando vimos que había varias formas para hallar,.. no se que problema era... ah para hallar el rango, vimos una muy básica y bastante larga, en el tema 2 creo que bastante larga... y luego llegamos al tema 3, y vimos la función RANK; y entonces... hombre el rango yo se hacerlo por COU, y son formas de hacerlo pero con el ordenador tardas muchísimo, pero con la función tardas poco. No se si era lo que preguntabas.
<u>ENTREVISTADOR</u>
Si, la idea es que si se han planteado varios métodos de resolución

LAURA
Sí, pero en algunos se ha insistido mucho. , demasiado.
ENTREVISTADOR
9.1. ¿Crees que el programa DERIVE te ha dificultado que comprendas los conceptos matemáticos?
LAURA
Quizas en autovalores y autovectores.
ENTREVISTADOR
¿qué es lo que te impedía ahí... entender?
LAURA
Me ha costado hasta llegar a .... porqué se tenia que coger esos datos, y porqué salian esos autovalores y autovectores
ENTREVISTADOR
Porque no veías claro el proceso en lápiz y papel
LAURA
NO, con DERIVE; no lo veía claro con DERIVE,
ENTREVISTADOR
9.2. ¿Crees que has dedicado demasiado tiempo al aprendizaje del programa DERIVE?
LAURA
Pues sí.
ENTREVISTADOR
9.3. Cuando hiciste el examen te pusiste nervioso en algún momento porque no sabías utilizar algún comando de DERIVE, es decir DERIVE te impidió hacer mejor el examen de lo que lo hiciste?
LAURA
Um... no.
ENTREVISTADOR
¿DERIVE te ha impedido hacer mejor o peor el exámen?
LAURA
No
ENTREVISTADOR
No ha sido un impedimento.
ENTREVISTADOR
9.4. Podrías indicar ¿cuáles son los principales problemas que has tenido cuando manejabas DERIVE?
LAURA
... (silencio) no recuerdo, vamos algún problema que no saliese....
ENTREVISTADOR
No me refiero al manejo.
LAURA
Hombre como todo, cuanto más practiques, más fácil..
ENTREVISTADOR
9.5. Aunque esta pregunta ya te la hice en su día, si algún compañero te pregunta sobre el programa, ¿se lo aconsejarías para estudiar álgebra lineal? Razona la respuesta.
LAURA
Yo sí. Porque a mí me ha servido de mucho, o sea yo al final de curso, cuando hice el examen de matemáticas hice una valoración para ver interna como había sido, por ejemplo comparando con Matemáticas I, pues ahora la cabo de 15 días me ponen un problema y no ... tengo que repasar antes de hacerlo y con DERIVE me ha ayudado a que no se me olvide tan rápido ..
ENTREVISTADOR
O sea que tú crees que DERIVE te ha ayudado a fijar un poco mejor los conceptos
LAURA
Sí, si.

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

10.1. Cuando se planteaban EJEMPLOS PARA INVESTIGAR, ¿te has sentido motivado o picado para resolver o encontrar la solución? ¿siempre, nunca, casi siempre....

<u>*LAURA*</u>

Si,,... casi siempre

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

10.2. Cuando se han planteado EJERCICIOS DE MANIPULACIÓN, ¿has encontrado satisfacción cuando los resolvías y encontrabas el método o proceso de la resolución?

<u>*LAURA*</u>

Hombre, no hay que hacer bastantes... no con uno..

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

Pero estos ejercicios que se iban repitiendo, por ejemplo, pasar de cartesianas a paramétricas

<u>*LAURA*</u>

Sí...

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

Cuando hacías dos o tres decías ya se hacerlo, ¿se te fijaba claramente el concepto cuando ...?

<u>*LAURA*</u>

Sí

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

O sea el proceso más que el concepto.

<u>*LAURA*</u>

Sí, si.

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

10.3. ¿cómo has resuelto los PROBLEMAS sólo o en grupo?

<u>*LAURA*</u>

Algunos sola, y otros...

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

Los primeros en grupo o al revés

<u>*LAURA*</u>

Hombre depende, depende .. como Luis no tenía el ordenador, pues se venía a mi casa y lo hacíamos los dos, pero vamos que cada uno hacía su planteamiento y luego venían las discusiones....

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

O sea que habéis tenido discusiones sobre el planteamiento

<u>*LAURA*</u>

Sí, si.

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

Y ha resultado positivo, además de vuestra formación matemáticas, para vuestra formación humana, las multiples visiones del mismo problema no?

<u>*LAURA*</u>

Si , claro que sí.

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

10.4. Cuando has resuelto PROBLEMAS, ¿ha aparecido en ti un algo un gusanillo que te obligaba a buscar la solución aunque a priori se resistiese? ¿cuánto tiempo dedicabas a los problemas?

<u>*LAURA*</u>

Sí, nos ha pasado que no sacábamos un problema entonces estabamos machacándolo entre los dos comparándolo, y ya nada los dejábamos.

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

Y otros, ¿os ha pasado lo contrario?

<u>*LAURA*</u>

Sí.

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

11.1. ¿Has establecido alguna relación de amistad especial con algún compañero de clase?

LAURA
No,... a Luis ya le conocía del primer semestres, pero vamos...
ENTREVISTADOR
11.2. Durante las clases descríbeme un poco como era el tipo de comunicación y relación que tenías con los compañeros de tu entorno, qué haciais, hablabais de otras cosas que no fuera de álgebra lineal?
LAURA
¿con Luis?.... Buena, igual desconectábamos un poco, porque el tema de determinantes en resolución de sistemas a veces desconectábamos porque ya lo tenía muy trillado...
ENTREVISTADOR
Y os poníais a contar vuestra vida, vuestros sucesos...
LAURA
NO o simplemente hablando del problema anterior, que tampoco tenía porque ....
ENTREVISTADOR
Había momentos en los que no se hablaba de álgebra lineal
LAURA
...pues sí...
ENTREVISTADOR
11.3. Antes y después de las clases ¿existía algún tipo de relación con los compañeros de este curso? ¿cómo era? ¿sigue actualmente?
LAURA
Sí,... sigue igual.
ENTREVISTADOR
11.4. ¿cómo valorarías el ambiente que se ha desarrollado en clase? . Puntúa de 1 a 5.
LAURA
Un 5. Porque es la clase modelo, de pocos alumnos, ambiente agradable y ... se resuelven las dudas.
ENTREVISTADOR
12.1. El tipo de trabajo en grupo (por parejas) que se ha desarrollado en clase, ¿te ha ayudado a aprender mejor los conceptos que se iban introduciendo?
LAURA
Si.. me ha parecido positivo.

ENTREVISTADOR
12.2. ¿Crees que el haber utilizado este programa de ordenador, ha propiciado un tipo de colaboración especial entre los compañeros?
LAURA
Si, bueno , claro
ENTREVISTADOR
¿En qué sentido, en qué nivel?
LAURA
silencio...
ENTREVISTADOR
Es decir, si no hubiera habido ordenador, el tipo de colaboración hubiera sido igual?
LAURA
También es que Matemáticas por pizarra, se que mandaba ejercicios los mandaba en grupo ... entonces...
ENTREVISTADOR
No tienes el contraste claro..
LAURA
Claro no tengo el contraste porque otros compañeros se que han estado quedando para hacer los ejercicios,....hombre nosotros un poco más porque es más nuevo y tienes más dudas, y... después de clase en cafetería, porque teníamos horas libres, pues nos reuniamos en una mesa e intentábamos solucionar dudas...

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

12.3. ¿Has quedado con algunos compañeros para preparar el examen?

<u>*LAURA*</u>

No.

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

13.1. El ritmo que hemos llevado en clase ¿cómo ha sido? ¿¿rápido, lento, normal?. Razona la respuesta.

<u>*LAURA*</u>

Lento al principio, muy lento.

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

Muy lento, pero has dicho que el tema 1 te fue mal.

<u>*LAURA*</u>

Si, pero bueno, lento porque luego al final se acumuló todo. Y en algunos temas nos hemos detenido demasiado, y excedido

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

¿por ejemplo qué temas?

<u>*LAURA*</u>

Determinantes y sistemas. Es que casi todos veníamos de la opción A y eso venía muy machacado en COU:

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

13.2. Haciendo un balance general de las sesiones de clase ¿te has aburrido en algún momento?

<u>*LAURA*</u>

Pues quitando alguna clase de determinantes y sistemas.

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

13.3. Crees que los problemas que se han planteado se podían clasificar en varios niveles de dificultad?

<u>*LAURA*</u>

Si, nivel sencillo o bajo, nivel intermedio y el alto.

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

¿hasta qué tipo de nivel crees que has llegado?

<u>*LAURA*</u>

Intermedio

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

13.4.¿qué porcentaje de problemas crees que has resuelto?

<u>*LAURA*</u>

70%

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

13.5. ¿Crees que en la clase había varios niveles de aprendizaje? Es decir ¿crees que había alumnos muy inteligentes, otros poco inteligentes,....? En qué grupo te englobarías.

<u>*LAURA*</u>

Hombre hay gente que le cuesta más o menos asimilar los conceptos y ahí ya .. depende como es cada uno...

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

No, pero tu impresión.

<u>*LAURA*</u>

Hombre pues había gente que les costaba, sí ...

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

Y gente que lo cogía

<u>*LAURA*</u>

sí, a la primera

<u>*ENTREVISTADOR*</u>

¿y en qué grupo te englobarías?

<u>*LAURA*</u>

En el nivel intermedio

<u>*ENTREVISTADOR*</u>
¿y cuántos grupos tu crees que habría de aprendizaje, por ejemplo los más listos tu quien crees que eran?
<u>*LAURA*</u>
Pues había un chico que estaba ya en cuarto
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
que se sentaba ¿dónde?
<u>*LAURA*</u>
al principio, con gafas...
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
Sí, José Ivanoff
<u>*LAURA*</u>
Si,... y se veía a gente cogiendo apuntes con el ordenador, y luego comparando, se le veía, la verdad es que ya había hecho matemáticas II, no era la primera vez. Y luego otro chico que se sentaba atrás
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
Sergio Rúa
<u>*LAURA*</u>
Sí
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
Y quien crees que eran los más torpes ¿los menos inteligentes?
<u>*LAURA*</u>
Pero no torpeza, sino a la hora de manipular...
Bueno de los que más he hablado yo, Sebas, estaba un poco perdido no que se iba mucho a las aulas de informática, Dani también,... alguna vez...
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
13.6. El examen que se ha propuesto crees que era asequible para todos los alumnos, según lo que se ha dado en clase?
<u>*LAURA*</u>
Si, si.
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
¿en qué nivel de dificultad Le pondrías? para sacar un aprobado fácilmente, para sacar nota con un poco más de esfuerzo...
<u>*LAURA*</u>
Si yo le veía para aprobar... porque tenía el miedo ese de poner dos preguntas...
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
Si dos problemas sencillos uno complicado y otro menos complicado
<u>*LAURA*</u>
Sí...
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
14.2. El hecho de utilizar el ordenador, ¿te ha motivado especialmente para estudiar las Matemáticas?
<u>*LAURA*</u>
Si.
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
Descríbelo así un poquito el porqué...
<u>*LAURA*</u>
Porque era otro método y... porque contrastaba con el método tradicional de coger tus apuntes del libro y ...
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
14.3. ¿Cuánto tiempo dedicabas a las matemáticas semanalmente en este cuatrimestre?
<u>*LAURA*</u>
Igual ... 5horas o 6, es que depende de los días, había días que dedicaba muchas horas porque había problemas y dedicábamos toda la mañana haciendo problemas ...

<u>*ENTREVISTADOR*</u>
El tiempo que habéis dedicado ha sido fructífero
<u>*LAURA*</u>
Se `pasado bien el tiempo.
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
14.4. El haber realizado este curso ¿ha aumentado o disminuido tu interés personal por las matemáticas?
<u>*LAURA*</u>
(silencio).... se ha mantenido, ha aumentado de hacerlo por este método.
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
¿Qué ha sido lo más positivo del curso?
<u>*LAURA*</u>
....(piensa) .... Pues lo que he dicho antes, yo la teoría, aunque hace 4 meses que no la cojo, pero que no se me ha olvidado como Matemáticas I , por ejemplo, o ... otras asignaturas ...
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
Que haces un borrado de memoria rápido

<u>*LAURA*</u>
Sí
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
¿Qué ha sido lo más negativo del curso?
<u>*LAURA*</u>
El esfuerzo, que me ha costado mucho.
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
La nota que sacaste ¿era que esperabas?
<u>*LAURA*</u>
Sí, la verdad que llegué a mi casa y dije, estoy en un 7 en un siete con algo... porque mentalmente, tienes tus ideas te ha salido bastante bien, y luego los problemas sabes si lo has hecho bien
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
¿Volverías a elegir este grupo experimental si te dieran a elegir? ¿por qué?
<u>*LAURA*</u>
Si, porque ha sido satisfactorio para todos,
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
¿TIENES ALGUNA OTRA COSA QUE DESEAS MANIFESTAR RELACIONADA CON EL CURSO Y QUE NO HAYAS EXPRESADO?
LAURA
....hombre pero ....
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
De cualquier cosa del curso que te parezca interesante manifestar ¿qué podría mejorarse,...?
<u>*LAURA*</u>
Del tema de los apuntes sacados por Internet, muy extensos, demasiado bajo mi punto de vista. Y, faltaban ejemplos, que alguna vez lo he comentado, el ejemplo de cómo se hace con DERIVE, en los ejemplos esos de internet ...
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
Faltaban ejemplos de cómo se hace.
<u>*LAURA*</u>
Porque sí lo haces en clase, pero luego cuando te pones en tu casa pues se te olvida , porque es un método nuevo.
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
Y dando una valoración así al curso qué le darias un aprobado, un suspenso... ¿qué nota le darías?
<u>*LAURA*</u>
Un notable.
<u>*ENTREVISTADOR*</u>
La misma nota que has sacado tú.

LAURA
Sí
ENTREVISTADOR
NO tengo mucho más que preguntarte, porque con las entrevistas que hemos tenido, las cuestiontes, ... más omenos coinciden con lo que me has ido comentando, no ha ninguna cosa antagónica con lo que hemos visto.
LAURA
Bueno otra cosa, los problemas que habias mandado para casa, no había corrección, sí estaban las soluciones, pero no había corrección ...
ENTREVISTADOR
Es verdad, a vosotros se acumula trabajo, pero no pude hacerlo....
LAURA
Simplemente, que a veces no tenía mucho que ver con lo que había hecho yo...
ENTREVISTADOR
Bueno dije que era una de las vías que se me ocurrieron cuando las resolví. Pero si es verdad que dije que los iba a devolver corregidos y no los devolví. Se me acumuló el trabajo, fue imposible, y reconozco que podría haber sido positivo, para rectificaciones... Lo siento....
LAURA
Hombre ya que tenía la solución, pero te motiva, que te digan en qué te has confundido...
ENTREVISTADOR
Muchos los miré después del examen...

ANEXO XIV: PRUEBAS Y DATOS OBTENIDOS DE LA ENTREVISTA REALIZADA AL OBSERVADOR CUALIFICADO.

1. MODELO DE LA ENTREVISTA REALIZADA AL OBSERVADOR CUALIFICADO

El objetivo de esta encuesta es VALIDAR LAS CONCLUSIONES FINALES OBTENIDAS de los datos recogidos de los alumnos participantes en este curso experimental. Se trata de obtener una visión objetiva de la observadora cualificada presente en la experiencia didáctica experta en los contenidos matemáticos de la asignatura Matemáticas II.

Para contestar a las cuestiones generales se sugieren varias preguntas que presentan diversos aspectos particulares de cada una de ellas.

1) ***El sistema de cálculo algebraico DERIVE; como elemento central de nuestra estrategia ¿permite construir un SISTEMA DE NOTACIÓN INTERMEDIO, entre los sistemas de notación del álgebra lineal y los sistemas de notación más familiares e intuitivos?***
   - *1.17. Cuando se introducían los conceptos teóricos con los EJEMPLOS A INVESTIGAR ¿crees que DERIVE ayudaba a descubrir con más facilidad lo que se buscaba?*
   - *1.18. ¿Derive permitía VISUALIZAR con su propio sistema de notación de una manera más clara los contenidos que se iban introduciendo?*
   - *1.19. Cuando se planteaban EJERCICIOS DE MANIPULACIÓN, ¿la forma de introducir los datos en DERIVE crees que servía para que el alumno asimilara los distintos procesos del álgebra lineal? , (por ejemplo pasar de ecuaciones cartesianas a paramétricas)*
   - *1.20. ¿Crees que con esta metodología los alumnos sabrían relizar estos mismos procesos con lápiz y papel?*
   - *1.21. En la resolución de PROBLEMAS, ¿crees que DERIVE ha suscitado al un estilo especial de razonamiento en el alumnado?*
   - *1.22. Con la metodología que se ha utilizado ¿crees que el alumno estaba capacitado para realizar cualquier práctica de Matemáticas II con DERIVE?*
   - *1.23. Y al revés, ¿crees que los alumnos estaban capacitados para transferir un proceso realizado con derive en lápiz y papel?*
   - *1.24. De las dos formas de NOTACIÓN, DERIVE, o lápiz y papel, ¿cual que resulta más cómoda al alumnado?*
   - *1.25. ¿y cual crees que es mejor para comprender los conceptos de álgebra lineal? ¿por qué?*
   - *1.26. ¿crees que DERIVE proporciona un sistema de notación intermedio entre las ideas del alumno y las que el profesor trata de transmitir?*
   - *1.27. ¿crees que con esta metodología el alumno podía complementar el sistema de notación utilizado por derive al sistema de notación usado por lápiz y papel?*
   - *1.28. ¿Tienes alguna valoración sobre el sistema de notación que utiliza DERIVE?*

2) ***¿Cuál es el grado de INTERACTIVIDAD que suscita esta estrategia entre alumnos y profesores, alumnos y medio didáctico y entre los propios alumnos?***
   - *2.16. En las clases ¿cómo percibes que ha sido la comunicación que han tenido los alumnos con el profesor? (comparar con la comunicación que hay en metodologías tradicionales)*
   - *2.17. ¿Crees que la metodología empleada a favorecido la interactividad entre alumno y profesorado?*
   - *2.18. Da una valoración de 1 a 5 la interactividad profesor-alumno*

   ¿Tienes alguna otra valoración u observación relacionado con la interactividad entre alumno y profesor?
   - *2.19. ¿Cómo percibes que ha sido la comunicación que han tenido los alumnos entre sí? (compararla con la comunicación que hay en clases habituales)*

2.20. ¿Crees que la metodología empleada ha favorecido una buena interactividad entre los alumnos?
2.21. ¿Además de las relaciones que se establecían entre los compañeros de pupitre, crees que se favorecía una interactividad entre los compañeros de entorno?
2.22. Valora de 1 a 5 la interactividad que ha habido entre los alumnos.
2.23. ¿Tienes alguna otra valoración u observación sobre la interactividad entre alumnos?
2.24. Respecto al programa DERIVE, cuando los alumnos manipulaban el programa con el fin de obtener alguna solución, ¿crees que los mensajes que iban recibiendo del programa han proporcionado nuevas vías de solución, de búsqueda o la respuesta a lo que se buscaba?
2.25. Valora de 1 a 5 el grado de interactividad que tiene el programa DERIVE con respecto al usuario.
2.26. ¿Tienes alguna observación o valoración añadida respecto a la INTERACTIVIDAD ofrecida por el programa derive?

3) Este tipo de estrategia didáctica, ¿favorece el PROTAGONISMO y AUTOCREACIÓN del alumno frente al medio tecnológico, evitando que el alumno sea un mero USUARIO del sistema?

3.13. Cuando se proponían EJEMPLOS PARA INVESTIGAR, ¿crees que los alumnos sabían dirigir estas investigaciones? ¿el programa DERIVE les ha servido para investigar y experimentar vías o caminos de solución?
3.14. Cuando se planteaba la solución de los ejemplos a investigar, ¿crees que los alumnos se quedaban impasibles en cierta medida manipulado, es decir, como si no supieran lo que se les había pedido?
3.15. Cuando se realizaban los EJERCICIOS DE MANIPULACIÓN, ¿crees que los alumnos entendían la dinámica a seguir entendiendo los pasos del ejercicio o simplemente se aprendían una receta implementada por el programa?
3.16. ¿Crees que los alumnos sabían realizar estos procesos repetitivos una vez que se iban terminando los temas en otros contextos similares?
3.17. En la resolución de las CUESTIONES TEÓRICAS, ¿crees que era necesario el uso de DERIVE para resolverlas? Y si la respuesta es afirmativa, ¿sin DERIVE no hubieras sabido resolverlas?
3.18. En los PROBLEMAS FIN DE CAPITULO, ¿crees que DERIVE ha estimulado algún tipo de capacidad creativa para resolverlos? ¿Crees que se estimulaba la actitud de búsqueda de soluciones o caminos de solución?
3.19. ¿Podrías comparar el grado de protagonismo que se provoca utilizando esta estrategia didáctica con respecto al que se provoca con la estrategia didáctica tradicional?
3.20. ¿Tienes alguna otra observación o valoración relacionada con el PROTAGONISMO Y LA AUTOCREACIÓN que haya podido estimular o provocar esta estrategia?

4) Las pautas que hemos marcado en torno al uso de DERIVE, ¿evitan que el ordenador se utilice para desarrollar conceptos y principios que consideramos como CONTENIDOS ESENCIALES; propiciando un uso adecuado de las rutinas algebraicas que el sistema puede automatizar?

4.25. Cuando se han ido desarrollando los contenidos del curso, ¿crees que el alumno ha sabido distinguir claramente .lo que eran CONTENIDOS ESENCIALES del programa con respecto de los PROCESOS REPETITIVOS Y MANIPULATIVOS?
4.26. ¿Crees que hay algún contenido ESENCIAL del programa que pueda haber corrido el peligro de convertirse en un proceso repetitivo?
4.27. Del tema 1 de espacios vectoriales ¿qué CONTENIDOS has percibido que se consideraban ESENCIALES? ¿cuáles crees que se consideraban procesos manipulativos y rutinarios?
4.28. ¿y del tema 2 aplicaciones lineales y matrices?
4.29. ¿y del tema 3 traza y determinante?
4.30. ¿y del tema 4 sistemas de ecuaciones lineales?
4.31. ¿y del tema 5 autovalores y autovectores, diagonalización?
4.32. ¿y del tema 6 formas cuadráticas?
4.33. ¿y del tema 7 programación lineal?
4.34. ¿crees que los alumnos podrían realizar cálculos básicos a mano: determinantes de orden 3, resolver sistemas, calcular autovalores, calculo rangos matrices pequeñas?
4.35. ¿Tienes alguna otra observación o comentario relacionado con esta cuestión?

5) El manejo del programa de cálculo simbólico DERIVE, ¿permite prescindir del ESFUERZO RUTINARIO dedicado al desarrollar operaciones algebraicas y de cálculo?

5.7. El uso de derive en la resolución de problemas ¿crees que ha generado algún tipo de característica especial en los alumnos a la hora de resolverlos comparando con la forma de resolver los mismos problemas a lápiz y papel?

5.8. ¿Crees que con el uso de DERIVE se libera al alumno de cálculos rutinarios y permite que el alumno se oriente más hacia la experimentación y la investigación?

5.9. ¿Crees que con el uso de DERIVE se anulan las habilidades de cálculo de los alumnos? Si se anulase alguna habilidad ¿crees que son fundamentales las habilidades que se pierden? ¿merece la pena esa pérdida respecto a lo que se consigue?

5.10. ¿Crees que los alumnos serían capaces de resolver los mismos problemas sin DERIVE?

5.11. ¿Tienes algún comentario u observación que quieras añadir a esta cuestión?

6) Las formas de manejo del sistema DERIVE que hemos considerado en nuestra estrategia didáctica ¿convierten al ordenador en una auténtica HERRAMIENTA DE EXPERIMENTACIÓN?

6.9. Cuando se planteaban EJEMPLOS PARA INVESTIGAR. ¿crees que DERIVE proporcionaba al alumno herramientas para investigar y experimentar para intentar obtener algo por su cuenta?

6.10. ¿Crees que a medida que se iba avanzando en el curso ha ido aumentado o podía ir aumentando el grado de experimentación?

6.11. ¿crees que la EXPERIMENTACIÓN que se ha propuesto en el curso te ha ayudado a entender mejor los contenidos?

7) Nuestra estrategia didáctica, ¿podemos decir que favorece la adquisición de APRENDIZAJES SIGNIFICATIVOS de aquellos contenidos matemáticos del álgebra lineal que vamos introduciendo?

7.5. Trabajar el álgebra lineal con la investigación, la experimentación y el descubrimiento ¿crees que ha facilitado la asimilación y comprensión de los contenidos o por el contrario han dispersado la atención de tal forma que no se sabía lo que era importante y lo que no lo era?

7.6. ¿Cuál ha sido a tu juicio el grado de participación del alumnado en las clases? Compáralo con la participación que hay en clases en los que se utiliza una estrategia tradicional.

7.7. ¿Cuál ha sido a tu juicio el grado de ATENCIÓN que ha tenido el alumnado en las clases? Compáralo con la ATENCIÓN que hay en clases en las que se utiliza una estrategia tradicional.

7.8. De acuerdo con las preguntas que se iban haciendo a lo largo del curso ¿crees que los alumnos tenían un nivel inicial adecuado para los contenidos que se estaban impartiendo? es decir ¿crees que en algún momento el alumnado ha podido necesitar algunos conceptos previos sin los cuales no podía descubrir nada de lo que se le proponía? (a nivel general)

7.9. ¿Tienes alguna cuestión o comentario que quieras añadir a esta cuestión?

8) Este tipo de manipulación del programa DERIVE, ¿favorece el DESARROLLO DE ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS?

8.1. El estilo de PROBLEMAS FINALES que se han propuesto al finalizar cada capítulo a lo largo del curso ¿crees que facilitaban el uso de varias estrategias de resolución por parte de los alumnos?

8.2. ¿Crees que el tipo de didáctica que se ha planteado en clase facilitaba el que los alumnos encontrarais varias formas o caminos para resolver un problema?

8.4. ¿Crees que en clase se ha favorecido la multiplicidad de métodos de resolución o se ha propuesto únicamente UN ÚNICO MÉTODO de resolución?

8.5. ¿Podrías comparar la estrategia didáctica empleada en este curso con las estrategias tradicionales respecto a la resolución de problemas?

8.6. ¿Tienes alguna otra observación o comentario a esta cuestión?

9) El manejo de un programa de cálculo simbólico como DERIVE, ¿genera BARRERAS ADICIONALES para el aprendizaje de los conceptos matemáticos?

9.1. ¿Crees que el programa DERIVE ha dificultado la comprensión de los conceptos matemáticos?

9.2. ¿Crees que se ha invertido demasiado tiempo en el aprendizaje del programa DERIVE?

9.3. Podrías indicar ¿cuáles son los principales problemas que has tenido cuando manejabas DERIVE?

9.5. ¿Crees que DERIVE ha sido una barrera adicional para el alumnado respecto a su aprendizaje de los contenidos de álgebra lineal que se han impartido?

9.6. ¿Tienes algún otro comentario o valoración de esta cuestión?

10) ***Una didáctica guiada por esta estrategia ¿genera AUTONOMIA COGNITIVA en los alumnos, permitiéndoles e incitándoles a indagar situaciones planteadas desde el propio individuo anulando así, ciertas dependencias que existen entre los alumnos y otros expertos o maestros?***

10.1. ¿Crees que los EJEMPLOS PARA INVESTIGAR que se proponían han suscitado en el alumnado o han podido suscitar una actitud de búsqueda de soluciones?

10.2. ¿Crees que los EJERCICIOS DE MANIPULACIÓN han permitido que el alumno adquiera con cierta autonomía los principales procedimientos manipulativos necesarios para el álgebra lineal?

10.3. ¿Crees que los PROBLEMAS propuestos han podido provocar en el alumnado un interés especial para resolverlos, al tener una herramienta con la que el desgaste operativo era mínimo?

10.4. En líneas generales ¿crees que la estrategia didáctica empleada facilitaba al alumno la posibilidad de adquirir cierta autonomía cognitiva tanto en su proceso de aprendizaje de contenidos así como en la aplicación de dichos contenidos en la resolución de problemas?

10.5. ¿Tienes alguna otra observación, comentario o valoración relacionado con esta cuestión?

11) ***¿La estrategia didáctica utilizada favorece la RELACIÓN DIALÉCTICA entre los usuarios, es decir, permite establecer una buena comunicación entre los alumnos, alumnos y profesores? ¿Cómo es ese tipo de comunicación?***

11.1. ¿Crees que esta estrategia ha favorecido la relaciones interpersonales entre los alumnos?

11.2. A la vista de las observaciones que has realizado en el aula, ¿podrías describirme cómo era el tipo de comunicación y relación que se observaba entre el alumnado? ¿hablaban siempre de álgebra lineal?

11.3. Antes y después de las clases ¿se ha observado una relación especial entre los alumnos de este curso diferente a la de otros cursos?

11.5. La relación interpersonal entre alumnos y profesor ¿cómo era? ¿había confianza? ¿era distendida? ¿observaste alguna diferencia en esta relación con la que hay en cursos tradicionales?

11.6. ¿Crees que las relaciones intepersonales propiciadas por este tipo de estrategia han generado un ambiente que ha favorecido la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos del curso?

11.7. ¿Podrías describir cómo valorarias el ambiente que se ha desarrollado en clase? . Puntua de 1 a 5.

11.8. ¿Tienes alguna otra observación o valoración que añadir a esta cuestión?

12) ***¿La estrategia didáctica que hemos desarrollado favorece un APRENDIZAJE COLABORATIVO entre los alumnos?***

12.1. El tipo de trabajo en grupo (por parejas) que se ha desarrollado en clase, ¿crees que ha favorecido el aprendizaje de los contenidos del curso? ¿por qué?

12.2. ¿Crees que el uso este programa de ordenador, ha propiciado un tipo de colaboración especial entre los compañeros? ¿por qué? ¿cómo ha sido esa colaboración?

12.3. ¿Crees que las colaboraciones que se han desarrollado han sido favorecidas por las relaciones personales que había en el curso? ¿por qué?

12.4. ¿Crees que el ordenador ha sido un elemento central en las colaboraciones que se desarrollaban en la clase? es decir ¿sin el ordenador el tipo de colaboraciones hubiera sido el mismo?

12.5. ¿Crees que el ambiente ha favorecido la aparición de aprendizajes cooperativos?

13) ***¿La estrategia didáctica empleada favorece una adecuada ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD, ofreciendo varios niveles de aprendizaje?***

13.1. El ritmo que hemos llevado en clase ¿cómo ha sido? ¿rápido, lento, normal?. Razona la respuesta.

13.2. Haciendo un balance general de las sesiones de clase ¿crees que los alumnos se han aburrido en clase? ¿qué impresión tienes? ¿crees que la dinámica empleada en clase podía generar algún aburrimiento en el alumnado?

13.3. ¿Crees que los problemas que se han planteado se podían clasificar en varios niveles de dificultad?

13.4. A la vista de lo que has observado en clase ¿crees que había varios niveles de aprendizaje en la clase? Si es así ¿cuántos?

13.5. ¿Crees que las diferentes actividades que se proponían permitían una adecuada atención a la diversidad de niveles de aprendizaje?

13.6. Los problemas propuestos ¿crees que tenían diversos niveles de dificultad?
¿se adaptaban a los niveles de aprendizaje de la clase?

13.7. ¿Podrías añadir algún comentario u observación a esta cuestión?

14) ¿Aumenta el grado de MOTIVACIÓN ante el álgebra lineal?

14.1. Si haces un balance general del curso, ¿cómo te han resultado todas las clases largas, cortas,...se te han pasado rápidamente? ¿y para los alumnos como crees que han sido las clases?

14.2. El hecho de utilizar el ordenador, ¿crees que ha motivado especialmente a los alumnos para estudiar las Matemáticas?

14.3. ¿Crees que derive ha suscitado una especial motivación entre el alumnado para estudiar álgebra lineal?

14.4. Haber realizado este curso ¿crees que puede haber aumentado o disminuido el interés por las matemáticas de los alumnos? ¿por qué?

14.5. ¿Tienes alguna otra observación o comentario que realizar a esta cuestión?

2. TRANSCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA REALIZADA A LA OBSERVADORA CUALIFICADA

Esta entrevista está precedida por una pequeña toma de contacto entre la observadora cualificada y yo mismo, en la cual hemos cambiado impresiones sobre el curso experimental que se realizó en el curso académido 1999-2000 con la asignatura Matemáticas II con Derive, realizada sobre el grupo 1-A-4 desdoblado en dos subgrupos, subgrupo A que tuvo la experiencia educativa de realizar la asignatura totalmente con el programa de cálculo simbólico DERIVE y el subgrupo B que realizó la asignatura utilizando la metodología tradicional empleada en esta asignatura, es decir, una metodología expositiva lo más cercana al alumno en cuanto a los ejemplos y la claridad de las exposiciones pero sin el uso del programa de cálculo simbólico DERIVE.

La entrevista la realizamos el Jueves 25 de Octubre de 2001 a las 18,30 h.

ENTREVISTADOR:
Te cuento de lo que yo tomé notas en nuestra toma de contacto anterior. De la primera parte no tomé notas y te la vuelvo a preguntas un poco por encima, de la última si tomé notas pero te las vuelvo a preguntar para refrendar si tome las nota bien o no.

Bueno, entonces como te comenté la investigación trataba de estudiar 14 aspectos de la estrategia que he empleado.

OBSERVADORA CUALIFICADA:
En eso estuve pensando y además creo que puede dar un resultado muy distinto para alumnos de enseñanza media, para alumnos que dan matemáticas estrictamente y para alumnos que dan matemática aplicada.

ENTREVISTADOR:
Ah, bueno todo depende del tipo de problemas que se planteen..

OBSERVADORA:
Depende como se aplique en cada enseñanza, porque puede inducir a que el alumno mecanice mucho, vamos a ver depende muchísimo ....

ENTREVISTADOR:
Claro pero todo depende de como sea la estrategia que emplee el profesor, quiero decir, la idea de utilizar esto tiene que se con una pauta muy claras...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Muy claras y que además quizás justamente por ser el método de ir un poco descubriendo, eso puede ... permite que el profesor y el alumno se enreden un poco en el cálculo , si no tienes muy muy bien definidas las pautas y muy bien definido el objetivo eh.... puede .... que el cálculo no deje ver los conceptos... vamos a ver .... que al tener el ordenador permite que el alumno esté entretenido en clase ... o sea, ... en este caso yo no soy la alumna que tiene que descubrir los conceptos con lo cual umm... eh... puede no soy la alumna que te puede ayudar a decir como los ha descubierto aunque sí puedo decirte que ....

ENTREVISTADOR:
Sí claro pero me puedes dar tu visión...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Sí, y ahora la visión pensandolo más atendiendo a las preguntas puede ... si que puede llevar a que el alumno si no está muy muy ajustadas las cosas no tenga, incluso el profesor no tenga conciencia que el alumno se está perdiendo... se está quedando en las hojas un poco.
ENTREVISTADOR:
Hombre ya, lo que pasa que yo antes de elaborar el curso tenía exactamente diseñado lo que había que ver como viste en los guiones y en cada caso lo que había que descubrir o que había que investigar era una cosa concretísima y ...
OBSERVADORA CUALIFICADA:
si, pero el aspecto muy concreto puede hacer que se pierda un poco la perspectiva ...puede correr el riesgo...

ENTREVISTADOR:
Sí, si, se pueden correr muchos riesgos, esto tiene muchos riesgos ...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Si, tiene muchos riesgos...

ENTREVISTADOR:
Tiene muchos riesgos, pero bueno yo creo que en fin, puede merecer la pena.
En ese sentido tu no crees que DERIVE ayudaba a descubrir con más facilidad ...?

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Tengo mis amores y desamores...

ENTREVISTADOR:
Porque, por lo que has dicho puede que el alumno se distraiga un poco....

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Puede que el alumno se enzarze,.... vamos a ver es como cuando tienes una cosa muy manual , cuando tienes una cosa muy manual no tienes conciencia del tiempo que ocupas, si estás haciendo un trabajo muy abstracto el tiempo pesa mucho más , o sea tu delante de una hoja en blanco media hora te pesa mucho. Si estás haciendo algo con las manos, estás tejiendo, estás haciendo cerámica,... se te pasa muchísimo más rápido el tiempo.... entonces al tener el instrumento casi un poco manual y un poco dinámico.... Ayer en clase me pasaba ... es mucho más difícil captar la atención del alumno a un aspecto teórico , a un aspecto que quieras ilustrarles teóricamente. ¿por qué? porque el alumno puede estar ... sobre todo cuando el tiempo es muy justo .. puede estar tan pendiente de hacer algo que le atrae más que se le vaya un poco la idea... por eso al diseñar el curso tienes que incluso pasar esa barrera de atraer la atención de una manera más fuerte al concepto y que no se vaya,. que la dinámica de las manos de construir no se le escape.

ENTREVISTADOR:
Entonces tu crees que el sistema de notación la forma de introducir los datos que utiliza el programa ¿tú crees que le facilita entender?

OBSERVADORA CUALIFICADA:
No...

ENTREVISTADOR:
¿crees que le puede distraer?

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Um... ni atender ni distraer,.. eeh... le cuesta aprender y una vez que lo aprende es algo mecánico ,... no ... puede que en el caso del álgebra facilite un poco más, y además que en este caso creo que el álgebra... es un programa que induce más probablemente.. como todos los programas es que el álgebra y la linealidad pues abunda mucho mejor para los programas.... o sea cuando estás metiendo una matriz y estás diciendo que meta un matriz estás diciendo que tiene que ir fila a fila ... con lo cual hasta que ven esa condición sí que está sirviendo, pero una vez que lo ven.... desde luego permite mucho más ahondar el concepto en el álgebra que en el cálculo.

ENTREVISTADOR:
Porque la forma que dices tú que se introducen las cosas está más cercana a lo que hay que ir pensando...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
a lo que hay que ir pensando ...
y además de hecho en muchas cosas fijate, en muchas cosas que tienes que acercar y programarte es más eehh es más.... menos ... luego es más automático, pero es ménos automático el álgebra que el cálculo...

ENTREVISTADOR:
Quizás haya que tener más imaginación en cálculo que en álgebra ...
OBSERVADORA CUALIFICADA:
si, si mucha más imaginación...

ENTREVISTADOR:
porque en cálculo como que todos los cálculos están hechos ...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Sí, pero al cálculo si le das mucho a la imaginación se puede sacar mucho partido pero hay que echarle mucha imaginación...

ENTREVISTADOR:
Los ejemplos tienen que ser mas...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Por ejemplo ayer me surgió en la explicación con |x+y| ... es muy curioso viendolo como ejemplo que es lo que te pasa en el punto (1,1) pues haciéndolo tienes ocho condiciones distintas y qué haces con esas expresiones , pues el programa se vuelve un poco ... loco. Y si le pones en un punto tan sencillo como |x|+|y| y no te entiende nada...

ENTREVISTADOR:
Ah no...? Ya programaré esa función...
Esto de los que habían hecho el curso, crees que tienen dificultades para trasladar de DERIVE a lápiz y papel sus pensamientos abstractos y sus razonamientos?

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Si, por una razón,... eso no es un problema del programa es una dificultad que estos chicos tienen de enfrentarse al papel ... para ellos les es mucho más cercano jugar con los ordenadores , estos chicos ya no hacen crucigramas, estos chicos ya no leen novelas... entonces no es un problema de este programa, es un problema de la educación. A los otros como no han tenido el entretenimiento del ordenador han tenido que hacerlo en papel aunque les repugna el papel....

ENTREVISTADOR:
Pues fíjate muchos decían que les costaba un montón trasladar... que a veces tenían que pensar en lápiz y papel y luego trasladarlo a derive...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Si pero, tu no me has preguntado...

ENTREVISTADOR:
Te he preguntado al revés....

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Yo no puedo pensar en el ordenador , puedo pensar algunas cosas.... para pensar en el ordenador tengo que tener muy claro... el ordenador me facilita hacer cosas pero no piensa, el ordenador no facilita pensar...

ENTREVISTADOR:
Quiero decir que tú estás acostumbrada a pensar mejor sobre papel...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Pero está acostumbrada muchísima gente a no ser capaces de pensar así, porque en este caso es pensar en una pantalla que te permite algunas cosas, pero pensar, pensar, ... hay mucha gente que no es capaz de escribir.... por una razón porque no te permite tener dos cosas comparadas... hay una serie de cosas.... una cosa es pensar y trasladar ... hombra me permite en grandes demostraciones no te ilustra.... además hay muchos escritores

que te dicen que son capaces de escribir cuando ya tienen el argumento de la obra bien trabado, pero no pueden escribir el trabar el argumento, no lo pueden hacer. Cuando tienen bien hilvanado mentalmente, no hace falta ni siquiera que lo tengan en papel, el ordenador no les facilita el pensar les facilita luego hacer combinaciones de palabras eso si lo potencia mucho, cuando tu quiere ver, como no tienes que borrar, te permite muchísimo porque tienes que hacer un ejercicio de escribir con cuatro palabras barajándolas o con cinco ... o un cuento de 20 líneas... cuando ya tienes la idea qué es lo quieres hacer. Por ejemplo, el año pasado te planteaba azucarero, desierto,...... que es lo que pasa en las matemáticas que en definitiva es un lenguaje, luego sí te permite quitar, comparar y enfatizar con adverbios de lugar... pero si tienes que manejar ... eso tienes que tenerlo en la cabeza. LUego empiezas a mover las palabras puedes comparar...

ENTREVISTADOR:
Entonces en el mismo sentido del lenguaje matemático ¿tu no crees que el programa, al igual que a veces el lápiz y papel actua de intermediario de un producto final de lo que te puede quedar?

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Derive es menor versatil que word...

ENTREVISTADOR:
No me refiero por ejemplo cuando estás resolviendo un problema que tu partes de unos contenidos que tienes que saber

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Pero eso tiene una pega, porque por ejemplo tu te pones a calcular un límite y te da el resultado, como tu no ves.... por ejemplo ... si no eres muy puntilloso y no necesitas ilustrar .. A un alumno como ellos buscan mucho el resultado, les puede facilitar llegar al resultado sin saber lo que pasa en el medio,

ENTREVISTADOR:
Con lo cual quiere decirse que los problemas que se planteen no tienen que ser ejercicios ... tienen que ser

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Cosas más profundas... cosas más largas y que además eh.. no puedan ver el resultado rápido , muy paso a paso... en el fondo tienes que diseñarlo paso a paso, porque ese énfasis que tu haces con la palabra , en el fondo las matemáticas son una fórmula de escritura de partituras sin orquesta entonces el ordenador le falta la orquesta. Es hacer musica electrónica que está muy bien, al contrario la música electrónica necesita una orquesta muy potente no puede ser un cuarteto del barroco , entonces en el fondo

ENTREVISTADOR:
Está exigiendo mucho más....

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Está exigiendo mucho más violines, muchos más contrabajos...

ENTREVISTADOR:
En el contexto del álgebra lineal, ¿tú crees que la forma de haber introducido el progama eh ha sido más beneficiosa que ... en cuanto a comprensión que si se hace en clase habitual?

OBSERVADORA CUALIFICADA:
No

ENTREVISTADOR:
Tu crees que es mejor la clase ...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
No yo creo que son complementarias . Que ... para un grupo muy pequeño y muy especial de alumnos puede dar un buen resultado en índices generales, igual que creo que no se puede sustituir nunca la clase magistral pòrque en esa clase magistral hay un elemento, es la palabra, es la orquesta esa comunicación que en una clase muy pequeña y en una clase muy especial el profesor puede hacerlo, tiene incluso que esforzarse más porque tiene que competir no solamente con los alumnos sino con un elemento que es una máquina con la que ellos se comunican de forma más ... los alumnos en este momento... los chicos estos se pueden estar horas en una pantalla aunque no hagan nada, navegando por ahí... estupideces ...

ENTREVITADOR:
En el trabajo que hay que hacen con el ordenador, tu crees que no les facilitan la comunicación entre ellos?

OBSERVADORA CUALIFICADA:
No necesariamente.

ENTREVISTADOR:
¿Cómo lo viste tú en el curso?

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Pueden.... hombre en este caso,... pero es que hay una cosa... en un grupo tan pequeño, es un grupo muy especial ... y en ese grupo muy especial, es como si tu me dices que en un grupo muy especial consigues que se comuniquen que se presten apuntes , no es....

ENTREVISTADOR:
¿pero tú observaste que había una buena comunicación entre ellos?
¿y entre ellos y el profesor? comparándolo con otro... claro que aquí está el factor número de alumnos.l

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Es que hay dos factores muy importantes, el factor número de alumnos y el factor de alumnos interesados. Porque el alumno que elige libremente y a un tipo de curso como este ya se está señalando como algo distinto, no es el alumno... puede ser bueno o malo no importa, es distinto , es un factor que tienes que tener en cuenta. El ser diferente es un factor que hay que tener en cuenta.

ENTREVISTADOR:
O sea que digamos que la comunicación que hay en la clase tanto en el canal entre alumnos....como el canal entre el profesor....

OBSERVADORA CUALIFICADA:
El canal del profesor, es que es lo que te decía, vamos a ver donde hay una mejor comunicación con un profesor en la clase magistral o en esa clase de problemas? hay una comunicación más directa en los problemas porque estás preguntando una cuestión, pero eso no significa que tu puedas quedarte en ese tipo de clases solamente. Efectivamente tu das una clase y a tí te preguntan mucho pero es que te pregunta una doble cuestión, dudas de matemáticas, pero también te están preguntando dudas del programa que les implica cada uno de los aspectos del programa. Entonces hace que hablen más contigo, lo cual no significa que.... ¿cuantos alumnos de los que tuviste en ese curso han continuado viniendo a preguntarte cosas?

ENTREVISTADOR:
¿de matemáticas?

OBSERVADORA CUALIFICADA:
si

ENTREVISTADOR:
No, perdí el contacto, perdi el contacto hasta despues de Noviembre, tres meses despues del curso....

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Eso es un indicador , cuando tu tienes una muy buena conexión con un grupo de alumnos , continúan viniendo a verte al despacho para cualquier cosa,.... sino es una conexión que se da puntualmente por una necesidad por las preguntas que tienes que hacer o de la necesidad del ordenador, o la necesidad de .... esos alumnos con un grupo tan pequeño lo normal es que hubieran continuado viniendo viéndote, alguno, eso es un indicador de que ...

ENTREVISTADOR:
Bueno vinieron hasta noviembre....

OBSERVADORA CUALIFICADA:
eso es inmediato, pero por ejemplo ¿cuantos alumnos de esos han hecho una optativa del departamento?
ENTREVISTADOR:
Pues no lo sé.

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Pues sería bueno saberlo... en Sistemas Dinámicos no hay ninguna. Ese es un indicador de que algo les atrae

ENTREVISTADOR:
Es un indicador pero no es un determinante ....
El protagonismo de los alumnos....

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Se sienten más protagonistas ....

ENTREVISTADOR:
Por ejemplo cuando se les plantea alguna investigación, intenta investigar a ver que ocurre con este ....

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Pero un protagonismo porque es una cosa mucho más cercana a ellos. O sea es que trabajan en ello... el problema de los alumnos es que les estás dando un elemento mucho más cercano a ellos. Entonces además se sienten que pueden.... ten en cuenta que les das herramientas para manipular,. siempre que les das una herramienta para manipular y sobre todo tan cercana les tiene que hacerse sentirse protagonistas y más actores de la obra....

ENTREVISTADORA:
Pero centrando el protagonismo de la obra para hacer matemáticas,. ¿tú crees que les daba o les incentibaba un cierto protagonismo para buscar por sí mismos algo...?

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Eso ocurriría en una Facultad de Matemáticas... aquí no tienen ese incentivo... hombre alguno, pero fíjate no han continuado, eso sería un elemento... Se sienten que lo que están haciendo es más cercano que es más su lenguaje, ...

ENTREVISTADOR:
Un lenguaje más cercano?

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Sí, para ellos es mucho más cercano ...

ENTREVISTADOR:
Y algún tipo de creatividad tú crees que se generaba o que podía potenciar....?

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Había uno , pero uno que se ponía,... me fijaba yo en él, en la primera fila a mi izquierda uno con gafas, se le notaba... igual que cuando llegas a clase y ves un alumno que se entera lo que le estás diciendo, a ese sí (se refiere al caso 11 J.I. Gómez) además se le notaba las preguntas se veía como movía, ese sí que ... probablemente si que le gustaba....

ENTREVISTADOR:
Bueno luego había otro lo que pasa es que era muy callado (me refiero al caso 12 S.Rua) que se sentaba atras y un poco más al lado de la ventana, ...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Identifica a uno que se sentaba en la segunda fila al lado de la ventana (se está refiriendo al caso 3 S. Rosado), además en la matriz adjunta hizo preguntas interesantes...

ENTREVISTADOR:
Uno de los peligros de utilizar el ordenador es que los alumnos se queden mucho en la operativa y no capten lo esencial, y en álgebra lineal ...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Y para eso tienes que insistir muchísimo...

ENTREVISTADOR:
Entonces según la forma que viste tu como se fue desarrollando, crees que eran capaces o podían llegar a ver que era lo esencial o... se quedaban un poco en manipular.

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Yo creo que con el álgebra lineal pasa una cosa y es que si no les haces muchas referencias a la Geometría y Econometría a algo , el álgebra lineal eh.... permite ... despierta menos la intuición que el cálculo en cierto sentido, es menos rica ... es que ... en el caso del álgebra lineal una cosa muy importante es la operatividad entonces ... en cierto sentido cuando tu tienes que meter elementos en el ordenador te facilita más fijarte en cada uno de los elementos, pero luego el álgebra lineal es muy poco intuitiva, es mucho más machaca, menos creativa que el análisis, eso les permite por ser más operativa que se centren más en la operatividad, pues la operatividad en el álgebra es muy importante. Ten en cuenta que ellos utilizan el álgebra como modelo operativo de modelos lineales fundamentalmente de Econometría de regresiones lineales de econometría y toda la parte que vayan a dar álgebra.

ENTREVISTADOR:
Si te acuerda de la parte de introducción que hacía referencia a ...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Es que con estos chicos y cada vez peor la idea intuitiva espacial, la tienen .. mal,...

ENTREVISTADOR:
Mal...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Horrible y además eso es el bachillerato eh, en primer lugar porque a nadie le gusta explicar ideas espaciales , no tienen ninguna idea espacial.
Yo creo que la idea espacial es más util y más ilustrativa en el cálculo, pero bueno, en el álgebra una parte que si se sabe sacar jugo, que en este sentido estaba muy bien diseñado el curso es que la operatividad y los pasos que no son muy intuitivos le permite tener que pararse a tener que hacer cosas. Tiene esa ventaja y la desventaja que el álgebra no es muy intuitiva.

ENTREVISTADOR:
El haber usado así como se usaba el programa eh... permitía eliminar ese esfuerzo rutinario lo que entendemos por esfuerzo rutinario no lo básico....

OBSERVADORA CUALIFICADA:
El esfuerzo rutinario no hay que eliminarlo del todo creo que el esfuerzo rutinario ayuda a,... no hay que enviciarse en el esfuerzo rutinario pero cierto esfuerzo rutinario de cálculo les ayuda a fijar las ideas, como un poco el ancla ... o sea no enviciarse ni dar una importancia excesiva al cálculo, pero algo de cálculo permite ... esa manipulación que decimos en lugar de con el ordenador con el lápiz ... es como calcular derivadas, hay que calcular alguna vez en la vida a mano y el cálculo es necesario. El cálculo por sí solo no vale pero la abstraccion tiene que tener.... es como un cuadro de un pintor si se dedica a dar brochazos todo es muy ... tiene que tener una estructura tiene que saber que tiene una tela de 1 metros por 1 metros, qué quiere decir en esa tela y luego empezar a mezclar los colores y coger las brochas adecuadas ... entonces ... bueno una técnica básica.... y que tengo un metro por un metro y no 1,30 por 1,30 y el cálculo que tengo que hacer de la brocha es ...

ENTREVISTADOR:
En ese caso cuando está el alumno intentando aprender digamos ese concepto, si ....

OBSERVADORA CUALIFICADA:
El profesor pretende enseñar ese concepto...

ENTREVISTADOR:
Efectivamente el profesor pretende enseñar y que el alumno aprenda , en ese instante eliminar el cálculo es perjudicial... por ejemplo cuando yo intenté enseñarles el cálculo de determinantes, claro si yo desde el principio digo que hay una función de DERIVE que hace det(A) = ... se acabó no he hecho nada, cero.... les intenté hacer ver... que programaran .. que hicieran manualmente la Regla de Sarrus, que luego programaran

su regla de Sarrus para ver como efectuvamente... que fueran calculando menores que intentasen programar una regla determinantes de orden cuatro...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Pero es que ahí estás incidiendo en el cálculo...

ENTREVISTADOR:
Bueno, no estoy incidiendo... en el cálculo de determinantes lo fundamental es saber calcularlos....

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Si pero tu has dicho aprender y entender, para entender tienes que calcular, para aprender la regla de Sarrús y saber lo que estás haciendo tienes que hacer alguno bien , programandolo o a mano... pero en el fondo programando es como hacerlo a mano es pararte a pensar lo que estás haciendo ...

ENTREVISTADOR:
Sí, bueno eso es lo que intenté en buena medida...
Bueno y el tema de experimentación. Por ejemplo, em... la experimentación en matemáticas es fundamental.

OBSERVADORA CUALIFICADA:
¿Qué entiendes por experimentación?

ENTREVISTADOR:
Sí, por ejemplo, cuando les planteas alguna idea nueva que pueda surgir,... que se yo.... ahora mismo no se me ocurre del curso... por ejemplo independencia y dependencia lineal lo quieres abstraer al tema de matrices, cuando dos matrices son li. o l.d. ahí el cálculo realmente no es importante claro tenerse que calcular cuatro matrices de orden tres si son l.i. pues resulta que el cálculo ahí va a entorpecer la idea fundamental ...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
No haría falta poner las matrices de tres por tres bastaría que fuesen de dos por dos ,...

ENTREVISTADOR:
Pero quiero decir que si pones datos más complejos puedes hacer que piensen más no en el cálculo sino en la idea que subyace ....

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Simplificar mucho los cálculos puede no ahondar en el concepto , simplificarlo demasiado puede llevarte a que ... si has puesto los vectores muy feos ...

ENTREVISTADOR:
Bueno a lo mejor he planteado mal la idea, lo que quería decirte es que la experimentación matemática pienso que tal como la plantee era para que ellos manejaran mucho los datos operaran, qué pasa si les multiplico por tal, que pudieran manipular, y ver conjeturas de lo que pasa allí. En ese sentido ¿tú crees que el ordenador potencia ese tipo de trabajo experimental?

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Hombre potencia porque potencia el cálculo, pero tienen que estar una vez más muy anclado con lo que ellos saben, como está dirigido, pero una vez más tiene que ser muy gradual y en el fondo inductivo muy importante.

ENTREVISTADOR:
O sea que crees que puede facilitar la inducción?

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Puede llegar a influir pero siempre que estés fijando bien lo que estás haciendo.

ENTREVISTADOR:
Entonces para fijar muy bien lo que estas haciendo si te acuerdas yo lo que insistía mucho era incidir mucho en lo que era necesario para llegar a... lo que se suele decir que sea significativo para tí el aprendizaje, anclar

la base,... o sea tener muy claro lo inicial para que con eso puedas llegar a algún sitio, entonces en ese sentido ¿tu crees que los alumnos, por lo que viste, ese tipo de manejo del programa, de experimentación...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Eso es incidir un poco en como se sentían ellos de actores en la materia, es que ... es una forma de protagonismo en el fondo , cuando manipulas, tu les estas haciendo que se sientas protagonistas para que descubran algo o si simplemente es un protagonismo .
ENTREVISTADOR:
¿O sea que tu crees que era un protagonismo para descubrir?

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Creo que lo ideal sería un protagonismo para descubrir , pero para eso tiene que haber personas que tengan necesidad de descubrir ... no todo el mundo tiene necesidad de descubrir...

ENTREVISTADOR:
Pero , a ver... el tema por ejemplo de protagonismo, por ejemplo, el tipo de participación...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Pero vamos a ver, cómo se sienten protagonistas, y entre otras cosas sentirse protagonista, necesita que el alumno necesite sentirse protagonista y que le guste investigar, investigar desde que .... tiene que tener esa necesidad que estos chicos no tienen mucha.

ENTREVISTADOR:
Es un condicionante previo...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Es un condicionante... y es que su educación no les induce ... puede haber alguno que se siente protagonista, en el buen sentido de que tiene necesidad de saber, pero en sí porque esté manipulando, no especialmente. Que estén con el ordenador no es suficientemente atractivo lo que tienen en la pantalla para que a un alumno que no tenga intención previa o gusto por la creatividad le vaya a inducir a la creatividad ... no creo que haya muchos que se hayan sentido más creativos ...

ENTREVISTADOR:
por el hecho de ....

OBSERVADORA CUALIFICADA:
por el hecho de haber hecho la clase de álgebra en el ordenador.

ENTREVISTADOR:
Podemos decir que el nivel inicial que tienen los alumnos no es muy lo mas ....

OBSERVADORA CUALIFICADA:
La educación que tienen no es proclive al esfuerzo y a descubrir cosas, y no se les induce la necesidad de descubrir cosas... el que lo tenga se lo potenciará, pero si no lo tiene difícilmente... eso es un dato.

ENTREVISTADOR:
Para la resolución de problemas, tú crees que el utilizar el ordenador les podría permitir pensar en varias formas de plantear , no plantear no, llegar por varios caminos a lo mismo ...?

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Si no les dices los métodos no. si es que estamos siempre en lo mismo Pedro, en el fondo un alumno siempre es,. .. vamos a ver para llegar por varios caminos ¿qué es lo que tiene que hacer? pensar por varios caminos, si tu les das varios caminos pues experimentarán diferentes caminos ...

ENTREVISTADOR:
¿pero los van a intentar?

OBSERVADORA CUALIFICADA:
si tú se los dices si, igual que los intentarán en clase ... en este caso serán menos reticentes porque hay menos trabajo.... pero también al haber menos trabajo les quedará menos de lo que están haciendo.

ENTREVISTADOR:
Tú crees que los alumnos ahora se satisfacen rápidamente por encontrar el método y ya está, ¿no se les puede... por ejemplo en dependencia lineal se puede resolver con un sistema, con el rango...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Y te preguntarán si les va a caer en el examen... Pero es que es lo que viene, y no solo eso sino que es lo que está demandando la sociedad.

ENTREVISTADOR:
Respecto al uso de los ordenadores, hay que tener en cuenta que hay gente que es totalmente reacia al uso de la tecnología en el aula ...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Lo que pasa es que tampoco podemos pensar que hay ciertas cosas que no existen, el mundo está ahí , y no se va a parar porque nosotros no queramos continuar.

ENTREVISTADOR:
El introducir el programa y haberlo aprendido ha provocado algún tipo de barrera adicional, quiero decir si había interferido en el aprendizaje.

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Creo que no ha sido importante, ...

ENTREVISTADOR:
No, pero hay veces que si introduces un programa y resulta que en el aprendizaje del programa te tiras la mayor parte del tiempo...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
No pero yo creo que este programa no es una cosa... no es ... hombre hay que aprenderlo, no es un...

ENTREVISTADOR:
No distrae al alumno de lo que es interesante.

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Yo creo que... proporcionalmente a lo que puede suponer , la distracción que supone tener un ordenador delante la dificultad del programa es lo de menos, no importa mucho.... digo de DERIVE.

ENTREVISTADOR:
Yo habo en ese sentido, si los alumnos han aprendido algebra lineal, o a usar el programa.

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Hombre yo si tuviera que decidirme por alguna de las dos cosas, diría que he aprendido más a usar el programa que matemáticas , porque es un programa que atrae mucho que es muy fácil de manejar. Ten en cuenta .., vamos a ver, son dos cosas distintas, que el programa no es un elemento suficiente para que les distraiga del objetivo fundamental ... el programa en sí no implica,... no es un programa muy complicada... bueno hay una cosa estabamos en la versión MS-DOS que es algo mas complicado, entonces en ese sentido si que puede distraer luego porque cuesta mucho más,.. bueno mucho más... eh... quiero decir que como didáctica, si quieres ponderar la didáctica y no sólamente los resultados el MS-DOS tiene algunas ventajas , permite tener mucho más la cabeza de programar no de facilidad, yo creo que en ese sentido ... este programa no es una barrera adicional lo que pasa que como todo programa se puede quedar en algo más superficial sin llegar al fondo, porque tienes una cosa muy tangible al lado, unos elementos, todo lo visual en el fondo está acaparando una atención. Si tu atención es de 10 tienes que distribuirla pues...

ENTREVISTADOR:
Y en el terreno de la autonomía del individuo, el uso del programa en la didáctica que hemos empleado, tú crees que les generaba más autonomía o una dependencia del programa? Autonomía en el sentido de que no tenía que preguntar mucho al profesor, ellos mismos podrían ponerse a hacer cosas y llegar bien ...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
El alumno que es intuitivo y tiene interés es un elemento más y ese elemento de creatividad le puede ayudar. El programa en sí, por darle las matemáticas con el programa si el alumno no tiene el espíritu de creatividad, pues aprenderá de una metodología muy bien muy chuli , pero no se le va ...puede haber un tanto por ciento que diga que le atraiga porque es como si le metieras algo con un envoltorio , el envoltorio le puede permitir,... bien, sino en ese sentido puedes tener un envoltorio muy bonito y se queda viendo y no va adentro o abre el paquete cuidadosamente o.... en ese sentido el ordenador, el programa en sí, la barrera del ordenador es un elemento de atracción con todo lo positivo y lo negativo que pueda significar que ya implica... y en ese sentido por ser fácil no añade a la lámina de separación, mayor distracción.

ENTREVISTADOR:
¿pero tampoco les genera que tengan dependencia de él?
En el sentido de que sin el ordenador ya no saben hacer nada.

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Es que tampoco van a hacer mucho de álgebra después del curso.

ENTREVISTADOR:
Bueno pero quiero decirte que si no tenían el ordenador ¿podían hacer algo? osea tu crees que el hecho de haber estado continuamente con el y luego les pones algo así....

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Es que antes lo decíamos, es que incide en lo mismo de antes, a los alumnos les cuesta mucho pasar al papel y en este caso , no creo que mucho más, pero desde luego no menos. Como estamos en economía, la franja de variación ...

ENTREVISTADOR:
El otro día me lo comentaste ya y me dijiste que esta metodología podía exprimir más al profesor.

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Sí y en eso estoy totalmente de acuerdo, vamos a ver puede exprimir más al profesor puede ... si es un profesor que se ha planteado muy mucho,... que le ha dedicado dos horas a hacer el plano tangente en clase pues ese profesor le plantea un reto importante, y te lo digo porque a mí me ha pasado, le plantea un reto importante en completar esa idea intuitiva con el ordenador. Ahora bien, el ordenador permite que el profesor que quiere les pone unas funciones así de grandes y mientras están tecleando y le da el error no pegen chapa y además no le de una sola idea. Vamos a ver, permite enmascarar ... y además con una condición un vago en clase tiene que disimular un poco mas.,,, y ahora hacer este problema pues... al cabo de la hora y media... pero además como están los chiquitos muy entretenidos ... por ejemplo en tu caso no porque eres una persona muy interactiva pero un profesor, un programa como el que tú tenías diseñado. osea tu ahora vas al mercado y te puedes comprar lo que quieras, si lo que tú tenías en el ordenador lo coge un profesor y les suelta aquello y ahí queda... y lo máximo que hace es generar unos .. x elevado a 27 que sean tonterías de funciones que no sirven de nada y creyendo los chiquitos, porque si el profesor cree que está haciendo mucho me ahorraría el calificativo, pero que no tengan ninguna conciencia de que no están pegando clavo, ni el profesor ni los alumnos. Y desde luego, es un reto, porque llevarlo muy ordenado para que los alumnos... es muy trabajoso...

ENTREVITADOR:
Lo que hablábamos el otro día que permite o acercarse más el profesor al alumno o distanciarse más.

OBSERVADORA CUALIFICADA:
A distanciarse y además permite encubrir muchísimo al profesor. Permite encubrir al profesor que no sabe nada.... Un profesor que no sabe nada.. es capaz de explicar con trasparencias ... Tu vendes al mercado tus apuntes al mercado y es capaz de explicar todos.

ENTREVISTADOR:
De explicar algo sin explicar nada...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
De tenerles entretenidos....

ENTREVISTADOR:
El otro día comentaste también que influye la propia forma de ser del profesorado ...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
La propia forma de concebir la docencia del profesorado...

ENTREVISTADOR:
¿Y la forma de ser?

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Es que en el fondo están muy unidos. Es el vago para nota... la forma de ser, la forma de concebir la educación, la forma de concebir la docencia.... porque este método le exprime mucho más.
Tú el otro día no estabas muy convencido...

ENTREVISTADOR:
Es algo que no había pensado pero sí...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Y además muchísimo ... tu les pones una función que sólamente en decirles que la escriba se tiran media hora tranquilamente y no has hecho absolutamente nada y encima creen que han estado toda la tarde ocupados haciendo algo. Y además como es muy individualizado, puedes pasar y decirle pues mira, revisa... es como los métodos multimedia .. el profesor que explica no sabe nada del método ...

ENTREVISTADOR:
Otro aspecto de los que hablamos el otro día era el aprendizaje colaborativo , te acuerda que hablábamos que los propios alumnos cuando hablan entre iguales pues muchos conceptos o ideas se las transmiten mejor... se las reexplican mejor entre ellos ... en cosas concretas donde uno es el que domina y otro el que no domina.. esa interactividad ...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Pero puede inducirles a errores, debe ser una actividad muy controlada... es un poco lo de las clases que hablábamos el otro día que tiene que ser una interactividad muy controlada porque se pueden transmitir muchos errores y hábitos muy malos y en el caso del ordenador mucho más porque le permite que le enseñe cosas .. porque si tienes claro lo que estás haciendo ... en el fondo hace falta que la persona que esté tenga la idea muy clara o bien le diga descubre el error ....

ENTREVISTADOR:
Y cuando manejan el ordenador tú crees que los alumnos que tienen poco nivel se acentúa en ellos o utilizando la didáctica que empleamos se acentúa en ellos el que tengan poco nivel y se quedan un poco estancados y los que tienen más nivel... partiendo de alumnos ...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Esa es una experiencia que yo tengo, y la experiencia que hiciste no te vale por una razón porque los alumnos tenían intereses, ... pero tienen un elemento de distinción y la gente que es distinta reacciona intentando superar el reto , partan del nivel que partan. Las gente distinta se enfrente a los problemas que no es la habitual. Entonces en ese sentido esos alumnos eran distintos y esa distinción hacía que incluso los peores no se quedaran atrás , ...

ENTREVISTADOR:
O sea que les promovía... pero por la situación de contexto....

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Para poder hacer ese experimento tendrías que hacerlo con muchísimos alumnos y en centros muy distintos, incluso en barrios muy distintos con capacidad de aprendizaje y de cultura muy distinta a ver como reaccionan... para poder asegurar eso habría que hacer un experimento con muchos alumnos y eligiéndolos aleatoriamente y en conceptos muy distintos.

ENTREVISTADOR:
Pero lo que viste tú allí es justamente lo que has comentado que daba la sensación ...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
daba la sensación... es que ese grupo estaba elegido por ellos mismos , es el tipico alumno que está dispuesto a venir a una hora distinta de , tiene una serie de connotaciones que lo hacen ser distinto y al ser distinto eso provoca la distinción ..

ENTREVISTADOR:
Ya para terminar en cuanto a la motivación ...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Eran alumnos muy motivados.. pero es como antes, es como si me dices qué me parece a mí yo voy muy motivada al curso, puedo ser muy crítica con el curso, pero una persona que está dispuesta a quedarse sin comer después de sus horas de trabajo pues el día que iba aprendía... te da una flexibilidad en muchas cosas... eso te hace un elemento distinto de comportamiento y te hace enfrentarte de una forma distinta ...

ENTREVISTADOR:
Y si hubiera sido sin ordenador crees que hubiera tenido el mismo grado de motivación...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Es que me planteas una hipótesis no contrastadas ...

ENTREVISTADOR:
No quiero decir si el ordenador tenía una cierta incidencia, el hecho de la novedad ...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Ten en cuenta que cuando al grupo le seleccionas hay un elemento fundamental y es que sabe que es una clase con ordenador por tanto es un elemento discriminatorio en su elección, en ese caso están siendo distintos por ese motivo, porque han elegido con ese dato. No es... vamos a hacer unas clases distintas y el día que llegan allí dices que va a ser con ordenador ... lo has dicho previamente, es una información que les has dado, por tanto la elección de ir o no ir ya la han hecho previamente, ya han tomado la decisión con esa información...

ENTREVISTADOR:
Sin embargo muchos de ellos al principio, al principio solo, estaban asustadísimos....

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Pero una cosa es lo que decíamos... al ser distintos ese susto que tenían inicialmente lo superaron en el fondo dijeron me atrae , soy distinto, hago el esfuerzo de venir a una hora distinta ... que requiere mucho esfuerzo, es un alumno ... que al llegar allí le asusta, pero ese ser diferente les hace superarlo ... yo he tenido alumnos de letras fantásticos... ellos saben que se enfrentan a cosas que no conocen, pero han decidido en un momento de su vida cambiar algo... y ha sido con una alumna de letras que hizo un gran esfuerzo , tenía muy buena cabeza. Sin embargo no puedes decir que los alumnos de letras sean muy buenos en matemáticas. En media los alumnos que han ido a mis clases de matemáticas de letras han sido muy buenos , pero no puedo generalizarlo por una razón porque esos son alumnos que se enfrentan con buena cabeza , normalmente han sido buenos en latin y griego , se enfrentan a una cosa que no conocen pero que si tienen capacidad y les ha supuesto un reto lo toman como reto y reaccionan, decir de ahí que los alumnos de letras....

ENTREVISTADOR:
La investigación que hacemos no pretende generalizar jamás, lo único que pretende es ver qué aspectos... y en qué contexto... en este contexto, estos alumnos y con esta didáctica han reaccionado de esta manera.

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Pero incluso esos alumnos que se asustaron era un reto, ese alumno que cuenta con una persona que yo se que le puedo preguntar y que le puedo explicar, era una alumna fantástica. Ahora... eso asustados al principio fueron buenos al final ¿

ENTREVISTADOR:
Pues una de ellas se sentaba delante y estaba criticando continuamente que si no puedo usar DERIVE; que si las cuestiones, que si los problemas no me salen... me tiro horas y no los saco...

OBSERVADORA CUALIFICADA:

Es que probablemente esos asustados no lo hicieron mal al final.. y seguramente fueron alumnos que sacaron un buen rendimiento al curso, porque además seguramente les hizo superar un miedo al ordenador que tenían les hizo superar muchas cosas que para ello les... hicieron un gran esfuerzo...

ENTREVISTADOR:
Hombre el esfuerzo era grande, y además es que venían casi todos todos los días,...

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Y estaban allí muchas veces antes de que llegáramos ... era una cosa...

ENTREVISTADOR:
Y muchos de ellos se quedaban otras dos horas para practicas... en general casi todos han dicho que les ha gustado la experiencia, ..por lo que sea....

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Por muchas cosas, porque han aprendido otro método y además una cosa muy importante han aprendido un método que les sirve para aprender otras muchas cosas, es un método que hoy es necesario, es indudable que una clase como esa a estos alumnos les ha puesto en condiciones de manejar cualquier programa mejor que nadie porque han tenido ... vamos a ver la ventaja comparativa que tienen estos alumnos para enfrentarse en este momento a cualquier programa y a cualquier programa en situaciones de manejar para muy distintas cosas es ...

ENTREVISTADOR:
Luego hay un dato y es que después de tener la entrevista con ellos que fue en octubre, todos vinieron.
Solo faltaron dos chicas que se cambiaron parece ser a turismo...
OBSERVADORA CUALIFICADA:
A esas chicas para aprender el programa les ha servido para un buen aprendizaje .. que en ese sentido sí que es verdad que el aprender bien... eso es independiente de las matemáticas, aprender a manejar un programa la capacidad de estos chicos para enfrentarse a cualquier manejo de programa a cualquier programación son completamente distintas. Porque no son las clases que te permiten manejar un paquete es una clase que te ha permitido adentrarte para saber como se manejan otras muchas cosas, eso les da una capacidad para enfrentarse a manejos de otros paquetes muy importantes. Han aprendido una metodología que pueden pensar buena o no buena que está ahí y que estos chicos están en mejores condiciones que otros ...eso vamos de aquí a Lima.

ENTREVISTADOR:
La lástima es no poder realizar una experiencia más contrastada... contrastada está, no más contrastada sino con más tiempo.... otros profesores.... ver si una estrategia de trabajo funciona.
OBSERVADORA CUALIFICADA:
Hombre si lo dedicas con más tiempo lo que sí podrías hacer es ... es una puerta abierta y sería interesante diseñar algún curso de bachillerato con este método. Porque los cursos de bachillerato tienen la gran ventaja que tienen pocos alumnos,... pero claro es una cosa a pensar. Me parece una lástima que ese trabajo que hay que pulirlo muchísimo se quede ahí solamente para esta experiencia.

ENTREVISTADOR:
Yo en principio no quiero que se quede.

OBSERVADORA CUALIFICADA:
Entonces la experiencia a mi me sirvio para aprender un programa, y a profundizar, a saber hacer una página web, ... pero aprenderlo de una forma así enfrentandote como un reto es algo ... y que alumnos... creo que en la Universidad tiene más sentido como complementario, pero en el caso de Bachillerato puede ser bueno.

ENTREVISTADOR:
Es un tema que quiero profundizar en él.

OBSERVADORA CUALIFICADA:
No sé si sería bueno hacer algún experimento con alumnos de bachillerato, de último curso de bachillerato, incluso hacerlo con distintos tipos de alumnos.
ENTREVISTADOR:
Eso es un proyecto futuro que estoy bastante interesado en él.

3. ELEMENTOS SIGNIFICATIVOS DE LA ENTREVISTA

A partir de la transcripción anterior, hemos extraído algunos párrafos que denominamos elementos significativos y que contienen información que puede aportar datos significativos a nuestra investigación. Después de cada elemento significatido hemos realizado algún comentario indicando las ideas que aportan (indicamos con *(Obs.)* las contestaciones de la observadora cualificada:

(1) "(Obs.)justamente por ser el método de ir un poco descubriendo, eso puede... permite que el profesor y el alumno se enreden un poco en el cálculo, si no tienes muy bien definidas las pautas y muy bien definido el objetivo...al tener el ordenador permite que el alumno esté entretenido"

Esta idea nos señala que el tipo de aprendizaje ha sido un aprendizaje por descubrimiento, no sabemos si ha sido significativo, pero desde luego ha potenciado el descubrimiento.

(3) "(Obs.)...puede llevar a que el alumno si no están muy ajustadas las cosas no tenga, incluso el profesor no tenga conciencia que el alumno se está perdiendo..."

El curso que incorpora DERIVE debe de estar muy bien diseñado para evitar algunos peligros como es la perdida de conciencia del tiempo.

(4) ".. se pueden correr muchos riesgos, esto tiene muchos riesgo...-..¿.crees que DERIVE ayudaba a descubrir con más facilidad...? –(Obs.)Puede que el alumno se enzarze,... es como cuando tienes una cosa muy manual, ... no tienes conciencia del tiempo que ocupas, si estás haciendo un trabajo muy abstracto el tiempo pesa mucho más, o sea tu delante de una hoja en blanco media hora te pesa mucho... cuando el tiempo es muy justo... puede estar tan pendiente de hacer algo que se le vaya un poco la idea... al diseñar el curso tienes que incluso pasar esa barrera de atraer la atención de una manera más fuerte al concepto y que la dinámica de las manos.. no se escape"

No está muy claro que el alumno pueda descubrir con más facilidad los contenidos, es más, la observadora considera que el uso del ordenador a priori resulta más entretenido para el alumno pero eso no significa que esté aprovechando todo el tiempo en aprender matemáticas.

(5) "- entonces tú crees que el sistema de notación la forma de introducir los datos que utiliza el programa, ¿tú crees que le facilita entender? – no -¿crees que le puede distraer?

(6)"-(Obs) le cuesta aprender y una vez que lo aprende es algo mecánico... puede que en el caso del álgebra facilite un poco más, y además que en este caso creo que el álgebra... es un programa que induce más probablemente... cuando estás metiendo una matriz y estás diciendo que meta una matriz estás diciendo que tiene que ir fila a fila... con lo cual hasta que ven esa condición sí que está sirviendo, pero una vez que lo ven... desde luego permite mucho más ahondar el concepto en el álgebra que en el cálculo"

El sistema DERIVE resulta un sistema de notación que facilita bastante la comprensión de contenidos en el álgebra lineal, mucho más que en el cálculo, por la forma propia de introducir los datos; aunque se corre el riesgo de hacer el proceso mecánico.

(7) ."-..la forma que dices tú que se introducen las cosas está más cerca de lo que hay que ir pensando...-(Obs.) a lo que hay que ir pensando... y además de hecho en muchas cosas que tienes que acercar y programarte es.... más automático, pero es menos automático el álgebra que el cálculo"

La forma de introducir los datos obliga a pensar al alumno sobre los datos algebraicos que introduce, vuelve a ser menos automático el álgebra que el cálculo.

(8) –Quizás haya que tener más imaginación en cálculo que en álgebra...-(obs.) sí, si mucha más imaginación"

Para introducir conceptos de cálculo es necesario invertir un esfuerzo superior a nivel imaginativo que con el álgebra lineal.

(9) -..¿crees que tienen dificultades para trasladar de DERIVE a lápiz y papel sus pensamientos abstractos y sus razonamientos? – (Obs.) Sí, por una razón, ... eso no es un problema del programa es una dificultad que estos chicos tienen de enfrentarse al papel.. para ellos les es mucho más cercano jugar con los ordenadores.... no es un problema de este programa es un problema de la educación. A los otros como no han tenido el entretenimiento del ordenador han tenido que hacerlo en papel aunque les repugna el papel"

Según la observadora, todos los alumnos de esta generación tienen problemas para enfrentarse con un papel en blanco por problemas educativos generales, y en consecuencia los alumnos del grupo de DERIVE no son una excepción para trasladar DERIVE a lápiz y papel, además que el ordenador les resulta más entretenido y cómodo.

(10) – muchos decían que les costaba un montón trasladar a derive... que a veces tenían que pensar en lápiz y papel y luego trasladarlo a derive...- (Obs.) sí, pero tu has preguntado al revés.."

(11) - .. tú estás acostumbrada a pensar mejor sobre papel..... –(Obs.) pero está acostumbrada muchísima gente a no ser capaces de pensar así, porque en este caso es pensar en una pantalla que te permite algunas cosas, pero pensar pensar..."

La observadora afirma que el proceso inverso de trasladar pensamiento a DERIVE resulta complejo pero de forma general, ya que ella considera que pensar con el ordenador resulta complejo por eso el proceso de pasar primero por lápiz y papel resulte casi obligado.

(12) - ¿tú no crees que el programa, al igual que a veces el lápiz y papel actúa de intermediario de un producto final de lo que te puede quedar? – (Obs.) Derive es menos versátil que word.... – No me refiero por ejemplo cuando estás resolviendo un problema que tu partes de unos contenidos que tienes que saber... – (Obs.) pero eso tiene una pega porque por ejemplo tu te pones a calcular un límite y te da el resultado... si no eres muy puntilloso y no necesitas ilustrar... un alumno busca el resultado, les puede facilitar llegar al resultado sin saber lo que pasa en el medio "

Dos ideas se pueden extraer de este elemento significativo:

- Derive al igual que lápiz y papel actúa de sistema intermedio
- Derive puede provocar que el alumno llegue al resultado sin saber los pasos intermedios.

(13) "lo cual quiere decir que los problemas que se planteen no tienen que ser ejercicios... tienen que ser .... – (Obs.) cosas más profundas, cosas más largas y que además ... no puedan ver el resultado rápido, muy paso a paso,... en el fondo tienes que diseñarlo paso a paso, porque ese énfasis que tu haces con la palabra, en el fondo las matemáticas son una fórmula de escritura de partituras sin orquesta entonces al ordenador le falta la orquesta"

El tipo de actividades que se deben plantear en DERIVE no deben facilitar ver los resultados de forma rápida, sino que sea necesario realizar una serie de procesos intermedios para que sea el alumno el que orqueste y dirija el proceso.

(14) "-¿tú crees que la forma de haber introducido el programa ha sido más beneficiosa que... en cuanto a comprensión que si se hace en clase habitual? – (Obs.) no"

(15) "- tu crees que es mejor la clase.... – (Obs.) no yo creo que son complementarias.... para un grupo muy pequeño y muy especial de alumnos puede dar un buen resultado en índices generales, igual que creo que no se puede sustituir nunca la clase magistral porque en esa clase

magistral hay un elemento, es la palabra, es la orquesta esa comunicación que en una clase muy pequeña y en una clase muy especial el profesor puede hacerlo, tiene incluso que esforzarse más porque tiene que competir no solamente con los alumnos sino con un elemento que es una máquina... "

A juicio de la observadora cualificada de forma general no cree que el programa haya sido más beneficioso en cuanto a comprensión de conceptos que la clase habitual, considera que el hecho de ser un grupo muy pequeño y especial es el que ha provocado esa situación de privilegio en cuanto a la comprensión.

Por otro lado cree que a nivel general el tipo de clases que se han impartido han de ser un complemento a clases magistrales.

(16) "- en el trabajo que hacen con el ordenador, tú crees que no les facilita la comunicación entre ellos? – (Obs.) No necesariamente"

(17) "-¿cómo lo viste tú en el curso? – (Obs.) ... hombre en este caso, pero es que es un grupo tan pequeño, es un grupo muy especial... y en ese grupo muy especial, es como si tu me dices que en un grupo muy especial consigues que se comuniquen, que se presten sus apuntes.."

(18) "- tu observaste que había una buena comunicación entre ellos? – (Obs.) es que hay dos factores muy importantes, el factor número de alumnos y el factor de alumnos interesados. Porque el alumno que elige libremente y a un tipo de curso como este ya se está señalando como algo distinto... es un factor a tener en cuenta. El ser diferentes es un factor que hay que tener en cuenta"

La comunicación entre los alumnos ha sido muy buena pero la observadora considera que no ha sido únicamente por el haber usado el ordenador, sino que además han intervenido dos factores: que era un grupo reducido de alumnos y que además era un grupo que hacía el curso de forma voluntaria, y se ha sentido en cierta medida diferente al resto, lo cual les ha señalado como distintos.

(19) "-...digamos que la comunicación que hay en clase tanto en el canal entre alumnos... como el canal entre el profesor.... – (Obs.) es que es lo que te decía, vamos a ver donde hay una mejor comunicación con un profesor ¿en la clase magistral o en esa clase de problemas? hay una comunicación más directa en los problemas porque estás preguntando una cuestión, pero eso no significa que tu puedas quedarte en ese tipo de clases solamente. Efectivamente tu das una clase y a ti te pregunta mucho pero es que te pregunta una dobla cuestión, dudas de matemáticas... pero también te están preguntando dudas del programa que les implica uno de los aspectos del programa... ¿cuantos alumnos de los que tuviste en ese curso han continuado viniendo a preguntarte cosas?..."

(20) "-(Obs.) cuando tu tienes una muy buena conexión con un grupo de alumnos, continúan viniendo a verte al despacho para cualquier cosa,... sino es una conexión que se da puntualmente por una necesidad por las preguntas que tienes que hacer..."

(21) "-es un indicador pero no un determinante"

Respecto a la comunicación entre profesor y alumnos, la observadora afirma que ha habido bastante comunicación por tratarse de una dinámica muy parecida a la de las clases de problemas habituales, sin embargo considera que el tipo de comunicación era muy especial, era de una comunicación concreta, considera que no ha sido profunda pues plantea el hecho de la continuidad en la comunicación incluso después del curso. Por tanto considera que ha habido bastante comunicación pero no una comunicación profunda, que haya generado una conexión profunda con el alumnado sino que ha sido comunicación necesaria.

(22) "-.respecto al protagonismo ...-(Obs.) se sienten más protagonistas.... pero un protagonismos porque es una cosa mucho más cercana a ellos. O sea es que trabajan en ello... el problema de los alumnos es que les estás dando un elemento mucho más cercano a ellos. Entonces además se sienten que pueden... ten en cuenta que les das herramientas para manipular... siempre que les das una herramienta para manipular y sobre todo tan cercana les tiene que hacerse sentirse protagonistas y más actores de la obra..."

La observadora considera que los alumnos han sido PROTAGONISTAS del proceso de aprendizaje, fundamentalmente porque el curso era muy manipulativo, estaban manejando continuamente el ordenador y esta circunstancia les hacía sentirse más cercanos al problema y más actores del proceso de aprendizaje.

(23) -¿tú crees que les daba o les incentivaba un cierto protagonismos para buscar por sí mismos algo...? – (Obs.) eso ocurriría en una Facultad de Matemáticas... aquí n tienen ese incentivo... hombre alguno, pero fíjate no han continuado, eso sería un elemento... se sienten que lo que están haciendo es más cercano que es más de su lenguajes ....”

(24) - ¿un lenguaje más cercano? –(Obs.)Sí, para ellos es mucho más cercano”

El PROTAGONISMO era un protagonismo pero ha manipular no a investigar, cree que eso sólo se puede dar en alumnos con cierta formación matemática.

Por otro lado a juicio de la observadora el lenguaje usado por DERIVE es más cercano a los alumnos, sienten que hacen algo más cercano a su propio lenguaje, lo cual puede interpretarse como que DERIVE ha sido un SISTEMA DE NOTACIÓN INTERMEDIO en cierta medida.

(25) – y ¿había algún tipo de creatividad, tú crees que se generaba o que podía potenciarse...? – (Obs.) había uno, pero uno que se ponía... en la primera fila a mi izquierda.. se le notaba... se le notaba las preguntas, ese sí que probablemente que le gustaba... “

La observadora considera que la creatividad solamente es posible en ciertos alumnos que tenían cierta formación, ella considera que había un par de alumnos con esa capacidad para crear matemáticas.

(26) – Uno de los peligros de utilizar el ordenador es que los alumnos se queden mucho en la operativa y no capten lo esencial, y en álgebra lineal...- (Obs.) y para eso tienes que insistir muchísimo...”

(27) “-Entonces según la forma que viste tu como se fue desarrollando crees que eran capaces o podían llegar a ver que era lo esencial o... se quedaban un poco en manipular... –(Obs.) el álgebra lineal ... despierta menos la intuición que el cálculo en cierto sentido... en el caso del álgebra lineal una cosa muy importante es la operatividad entonces... en cierto sentido cuanto tu tienes que meter elementos en el ordenador te facilita más fijarte en cada uno de los elementos pero luego el álgebra lineal es muy poco intuitiva, es mucho más machaca, menos creativa que el análisis, eso les permite por ser más operativa que se centren más en la operatividad, pues la operatividad del álgebra es muy importante...”

La observadora considera que en álgebra lineal un elemento fundamental es la operativa, y en este sentido DERIVE permite que los alumnos se concentren más en esta operativa necesaria que forma parte de lo esencial en el álgebra lineal.

(28) “-(Obs.) yo creo que la idea espacial es más útil y más ilustrativa en el cálculo, pero bueno, en el álgebra una parte que si se sabe sacar juego, que en este sentido el curso estaba muy bien diseñado el curso es que la operatividad y los pasos que no son muy intuitivos le permite tener que pararse a hacer las cosas. Tiene esa ventaja y la desventaja que el álgebra no es muy intuitiva”

La observadora considera que el curso estaba muy bien diseñado para que los alumnos se centraran en lo esencial del álgebra lineal, ya que a pesar de que el álgebra lineal no es muy intuitivo, el diseño permitía que se parasen en la operatividad tan necesaria en el álgebra.

(29) “-El haber usado así como se usaba el programa... permitía eliminar ese esfuerzo rutinario lo que entendemos por esfuerzo rutinario no lo básico...- (Obs.) el esfuerzo rutinario no hay que eliminarlo del todo creo que el esfuerzo rutinario ayuda a... no hay que enviciarse en el esfuerzo rutinario pero cierto esfuerzo rutinario de cálculo les ayuda a fijar las ideas, como un poco el ancla... o sea no enviciarse ni dar una importancia excesiva al cálculo, pero algo de calculo permite... esa manipulación que decimos en lugar de con el ordenador con el lápiz... ..... el cálculo por sí solo no vale pero la abstracción lo requiere....”

(30) "- para entender tienes que calcular, para aprender la regla de Sarrus y saber lo que estás haciendo tienes que hacer alguno bien, programando o a mano, pero en el fondo programando es como hacerlo a meno es pararte a pensar lo que estás haciendo.

A juicio de la observadora cualificada el cálculo rutinario no hay que suprimirlo del todo pues es necesario en cierta medida siempre que no se convierta en el protagonista del aprendizaje, en ese sentido parece que el curso sí ha favorecido la eliminación de cierto cálculo innecesario. En particular considera que algunas de las programaciones realizadas en clase por ejemplo para calcular determinantes han sido suficientes para comprender el proceso de cálculo.

(31) ".... la experimentación matemática pienso que tal como la plantee era para que ellos manejaran mucho los datos operaran, qué pasa si les multiplico por tal, que pudieran manipular, y ver conjeturas de lo que pasa allí. En ese sentido ¿tú crees que el ordenador potencia ese tipo de trabajo experimental? – (Obs.) Hombre potencia porque potencia el cálculo, pero tienen que estar una vez más muy anclado con lo que ellos saben, como está dirigido, pero una vez más tiene que ser muy gradual y en el fondo inductivo muy importante...- o sea que tu crees que puede facilitar la inducción? – (Obs.) puede llegar a influir pero siempre que estés fijando bien lo que estás haciendo"

El programa DERIVE potencia la EXPERIMENTACIÓN MATEMÁTICA, pues el ordenador potencia el cálculo, pero para que se de auténtica experimentación matemática depende un poco de como se introduzcan los contenidos y de qué conocimiento tiene el alumno, es decir depende de cómo sean los alumnos.

(32) "- Entonces para fijar muy bien lo que estás haciendo si te acuerdas yo lo que insistía mucho era incidir mucho en lo que era necesario para llegar a... lo que se suele decir que sea significativo para ti el aprendizaje, anclar la base,... o sea tener muy claro lo inicial para que con eso puedas llegar a algún sitio, entonces en ese sentido ¿tu crees que los alumnos, por lo que viste se daba... – (Obs.) eso es incidir un poco en como se sentían ellos de actores en la materia, es que ... es una forma de protagonismo en el fondo, cuando manipulas, tu les estás haciendo que se sientan protagonistas para que descubran algo o simplemente es un protagonismos... "

(33) "- o sea que ¿tu crees que era un protagonismo para descubrir? – (Obs.) creo que lo ideal sería un protagonismo para descubrir, pero para eso tiene que haber personas que tengan necesidad de descubrir... no todo el mundo tiene necesidad para descubrir "

(34) "..- el tema por ejemplo de protagonismo por ejemplo, el tipo de participación... – (Obs.) ....sentirse protagonista necesita que el alumno necesite sentirse protagonista que le guste investigar, investigar desde que tiene que tener esa necesidad que estos chicos no titnen mucha..... y es que su educación no les induce.. puede haber alguno que se sienta protagonista, en el buen sentido de que tiene necesidad de saber, pero en sí porque esté manipulando, no especialmente. Que estén con el ordenador no es suficientemente atractivo lo que tienen en la pantalla para que a un alumno que no tenga intención previa o gusto por la creatividad le vaya a inducir a la creatividad, no creo que haya muchos que se hayan sentido más creativos...

(35) "-podemos decir que el nivel inicial que tienen los alumnos no es lo mas... – (Obs.) la educación que tienen no es proclive al esfuerzo y a descubrir cosas, y no se les induce la necesidad de descubrir cosas... el que lo tenga se lo potenciará, pero si no lo tiene difícilmente, eso es un dato.

Sobre el tipo de aprendizaje, si era o no significativo, la observadora afirma que esto tiene mucha relación con el tipo de PROTAGONISMO de los alumnos, considera que lo ideal para un aprendizaje significativo sería un protagonismo para descubrir pero cree que para poder descubrir algo hay que tener necesidad para ello y estos alumnos en general no la tenían. Cree que por el hecho de estar trabajando con el ordenador no es suficiente para que los alumno incitasen su CREATIVIDAD o que les incitase por INVESTIGAR o DESCUBRIR los hechos que se planteaban. Por otro lado considera que los alumnos no tienen tendencia a realizar un esfuerzo para descubrir cosas, aunque cree que con el ordenador el que tenga esa tendencia se le potencia con el uso del ordenador, pero si no lo tiene no se produce nada.

(36) "- la resolución de problemas, tú crees que el utilizar el ordenador les podría permitir pensar en varias formas de .... llegar por varios caminos a lo mismo.... – (Obs.) si no les dices los métodos no, ... para llegar por varios caminos ¿qué es lo que tiene que hacer? pensar por varios caminos, si tu les das varios caminos pues experimentarán diferentes caminos... – pero ¿los van a intentar? – (Obs.) si tú se los dices si, igual que los intentarán en clase... en este caso serán menos reticente porque hay menos trabajo... pero también al haber menos trabajo les quedará menos de lo que están haciendo"

Respecto a la RESOLUCION DE PROBLEMAS y el uso de diferentes ESTRATEGIAS de resolución, la observadora considera que para que los alumnos ensayen diferentes estrategias deben de aprenderlas, y en este sentido el uso del programa facilita al alumno usar diferentes estrategias, porque facilita el trabajo.

(37) ¿Tú crees que los alumnos ahora se satisfacen rápidamente por encontrar el método y ya está ... – (Obs.) es que es lo que viene, y no solo eso sino que es lo que está demandando la sociedad..."

La observadora cualificada considera que los alumnos se satisfacen con encontrar un método de resolución es una tendencia actual de la sociedad, encontrar un método.

(38) "-el introducir el programa y haberlo aprendido ha provocado algún tipo de barrera adicional, quiero decir si había interferido en el aprendizaje..? – (OBS.) creo que no ha sido importante...- No, pero, hay veces que si introduces un programa y resulta que en el aprendizaje del programa te tiras la mayor parte del tiempo...- (Obs.) No pero yo creo que este programa no es una cosa... hay que aprenderlo pero no es... creo que .. proporcionalmente a lo que puede suponer, la distracción que supone tener un ordenador delante la dificultad del programa es lo de menos, no importa mucho ... DERIVE..."

(39) ".-... los alumnos han aprendido álgebra lineal o a usar el programa...? – (OBS.) Hombre yo si tuviera que decidirme por alguna de las dos, diría que he aprendido más a usar el programa que matemáticas, porque es un programa que atrae mucho que es muy fácil de manejar... el programa en si no implica no es un programa complicado... incluso el de MESDOS tiene algunas ventajas, permite tener mucho más la cabeza de programar y no de facilidad... este programa no es una barrera adicional lo que pasa que como todo programa se puede quedar en algo más superficial sin llegar al fondo..."

La observadora considera que DERIVE no ha sido una BARRERA ADICIONAL para el aprendizaje de los contenidos de álgebra lineal, ya que es un programa relativamente sencillo. Además cree que la versión MS-DOS es mucho mejor desde el punto de vista didáctico pues les introduce mucho más en la programación y en la forma de introducir los datos.

(40,41) "-Y en el terreno de la AUTONOMÍA del individuo, el uso del programa en la didáctica que hemos empleado, tú crees que les generaba más autonomía o una dependencia del programa? Autonomía en el sentido de que no tenía que preguntar mucho al profesor, ellos mismos podrían ponerse a hacer cosas ... – (Obs.) el alumno que es intuitivo y tiene interés es un elemento más y ese elemento de creatividad le puede ayudar. El programa en sí, por darle matemáticas con el programa si el alumno no tiene el espíritu de creatividad, pues aprenderá de una metodología muy bien muy chili, pero se le va... "

Respecto a la AUTONOMÍA COGNITIVA, la observadora vuelve a insistir que el programa en sí mismo no hace nada, si el alumno no tiene ese espíritu de creatividad necesario, pues aprende una metodología buena pero nada más, aunque para alumnos que la tengan si se la potencia.

(42) "-pero tampoco les genera que tengan dependencia de él...¿ - (obs.) es que tampoco van a hacer mucho álgebra después del curso... a los alumnos les cuesta mucho pasar al papel y en este caso , no creo que mucho más, pero desde luego no menos. "

La observadora considera que el programa no les genera DEPENDENCIA, sin embargo cree que si les resulta costoso pasar al papel, de forma similar a otros alumnos.

(43) "- Me dijiste que esta metodología podía exprimir más al profesor...- (obs.) si, y en eso esto totalmente de acuerdo, vamos a ver puede exprimir más al profesor puede ... si es un profesor que se ha planteado muy mucho... ... le plantea un reto importante en completar la idea intuitiva con el ordenador. Ahora bien, el ordenador permite que el profesor que quiere les ponga unas funciones así de grandes y mientras están tecleando y le da el error no peguen chapa y además no le de una sola idea.. permite enmascarar"

(44) "- permite o acercarse más el profesor al alumno o distanciarse más...- (obs.) a distanciarse y además permite encubrir muchísimo al profesor. permite encubrir al profesor que no sabe nada... "

La observadora considera que con esta estrategia el profesor puede tomar dos tipos de actitudes:

- si el profesor está comprometido con la educación, le obliga a realizar un esfuerzo muy importante para hacer llegar la idea al alumno. Además le permite acercarse más al alumno.
- si por el contrario el profesor pretende escaparse del proceso educativo, el ordenador le permite enmascarar en cierta medida su trabajo haciendo creer que está enseñando cuando lo que puede hacer es hacer perder el tiempo. Puede permitir a un alumno distanciarse del proceso encubriendo su postura de profesor, incluso sin saber nada.

(45) "- el otro día comentaste también que influye la forma de ser del profesorado.... – (obs.) la forma de ser, la forma de concebir la educación, la forma de concebir la docencia, ... porque este método te exprime mucho más..."

Según la observadora, la forma de ser del profesor y su forma de concebir la educación y la docencia influye mucho si se utiliza esta estrategia didáctica.

(46) "- respecto al aprendizaje colaborativo... hablábamos que los propios alumnos cuando hablan entre iguales pues muchos conceptos o ideas se las transmiten mejor... se las re-explican mejor entre ellos... en cosas concretas donde uno es el que domina y otro el que no domina... esa interactividad....- (obs.) pero puede inducirles a errores, debe ser una actividad muy controlada... es un poco lo de las clases que hablábamos el otro día que tiene que ser una interactividad muy controlada porque se puede transmitir muchos errores y hábitos muy malos y en el caso del ordenador mucho más porque le permite que le enseñe cosas... porque si tienes claro lo que estás haciendo... en el fondo hace falta que la persona que esté tenga la idea muy clara o bien le diga descubre el error... "

Respecto al APRENDIZAJE COLABORATIVO; la observadora considera que la estrategia favorece la interactividad entre los alumnos a nivel colaborativo, pero no es claro que sea positivo pues se pueden transmitir errores y hábitos de unos a otros. Sin embargo, debemos observar que el ordenador actúa en cierta medida de árbitro que le permite al alumno que recibe la posibilidad de comprobar lo que el compañero le explica.

(47) "- ... crees que los alumnos que tienen poco nivel se acentúa en ellos o utilizando la didáctica que empleamos se acentúa en ellos que tengan poco nivel y se quedan un poco estancados y los que tienen más nivel.... –(obs.) tienen un elemento de distinción y la gente que es distinta reacciona intentando superar el reto, partan del nivel que partan. La gente distinta se enfrenta a los problemas de forma no habitual. Entonces en ese sentido esos alumnos eran distintos y esa distinción hacía incluso que los peores no se quedaran atras..."

(48) "- pero lo que viste tú allí es justamente lo que has comentado que daba la sensación – (obs.) daba la sensación, ... es que ese grupo estaba elegido por ellos mismos, es el típico alumno que está dispuesto a venir a una hora distinta, de que tiene una serie de connotaciones que lo hacen ser distinto y al ser distinto eso provoca la distinción.

A juicio de la observadora, la ATENCION A LA DIVERSIDAD ha sido muy positiva, pero no por la propia estrategia, sino por el contexto de los alumnos. Dado que los alumnos eran un grupo especial y ellos se sentían diferentes, esa diferencia , ese sentirse especiales es lo que provocaba que los alumnos más retrasados se esforzaran y los más avanzados que ayudaran a los compañeros y avanzaran más.

(49) "-... en cuanto a la motivación...- (obs.) eran alumnos muy motivados, pero es como antes, es como si me dices qué me parece a mí yo voy muy motivada al curso, puedo ser muy crítica con el curso, pero una persona que está dispuesta a quedarse sin comer después de sus horas de trabajo pues el día que iba aprendía,... te da una flexibilidad en muchas cosas... eso te hace un elemento distinto de comportamiento y te hace enfrentarte de una forma distinta..."

Respecto a la MOTIVACIÓN; considera que los alumnos estaban muy motivados, y no solo los alumnos ella misma estaba muy motivada, aprendió bastante respecto a las posibilidades educativas del ordenador.

ANEXO XV:
RESUMEN DE DATOS DEL EXÁMEN FINAL.

En este anexo vamos a incluir el conjunto de datos obtenidos del examen final en ambos subgrupos: el subgrupo experimental SUBGRUPO A, y el subgrupo que no utilizaba DERIVE, SUBGRUPO B. Incluimos un apartado en el que se comentan por separado las cuestiones teóricas en cada uno de los subgrupos y por otro lado los problemas realizados.

1. OBSERVACIONES DE LAS CUESTIONES TEÓRICAS DEL SUBGRUPO-A "MATEMÁTICAS II CON DERIVE"

En este apartado vamos a agrupar el conjunto de datos obtenidos en relación al examen final realizado por los alumnos del subgrupo experimental "Matemáticas II con DERIVE". Debemos señalar que las cuestiones teóricas fueron IDENTICAS las que realizaron los alumnos del subgrupo B.

Para realizar las cuestiones teóricas los alumnos del SUBGRUPO A podían hacer uso del programa DERIVE siempre y cuando las operaciones que realizasen con el programa las incluyeran en un fichero adjunto, para que pudiésemos examinar los cálculos que realizaban a fin de determinar el grado de dependencia que tenían los alumnos del programa.

Comenzamos incluyendo un cuadro de las contestaciones que realizaron los alumnos de este subgrupo experimental, comentando los resultados de las mismas. A continuación incluimos una descripción comentada de cómo realizaron las cuestiones teóricas cada uno de los 15 alumnos del subgrupo A.

CONTESTACIONES A LAS CUESTIONES

Apellidos, Nombre	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	
RESPUESTA CORR.	**d**	**c,d**	**c,d**	**c**	**a,b**	**c**	**c**	**b**	**b**	**a,c**	
Cuellar, Antonio	c	d	d	c	d	c	a	a	c	b	3,5
Gómez Hdez, J. Ivanoff	d	c,d	c,d	b	b	a	c	b	b	a	6,5
Perpiña Rodríguez, Antoni	a	d	c	a	c	a	c	b	b	a	4,5
Revuelto Oca, Jorge	b	c,d	b	b	c	c	c	b	b	a	5,5
Rosado Linares, Sebastián	d	c,d	d	a	a,b	a	a	a	a	b	3,5
Rúa Navarro, Sergio	d	c,d	c,d	c	d	c	a	b	b	a,c	8
Rubiano Fernández, Daniel	d	c,d	b	c	b,c	c	a	b,c	b	a	5
Rubio Gómez, Laura	d	c,d	d	c	a,b	c	a	b	b	a	8
Santos, Gil, Sergio	c	c,d	b	b	a,b	b	a	b	a	c	3,5
Sanz Castro, Jessica	d	c	c,d	a,b	d	b,c	b	a	b	a	4
Sanz Ibarra, Eduardo	d	c	c	b	a	a	a	b	b	b,c	5
Sevilla Casares, Cristina	b	d	b	a,b	b	a	a	b,c	a	c	1,5
Tamo Corte, Luis	d	d	c,d	c	a,b	c	c	b	b	a,b	9,5
Trigo Arroyo, Juan Pablo	a,c	d	c	a	a,c	a	a	b	b	a,c	4
Verdú Aguilar, María	b	a,b	c,d	c	a,c	a	a	a	a,c	a,c	3,5
Recuento de respuestas:	a:1	a,b:1	b:4	a:3	a:1	**a:7**	**a:10**	a:4	a:3	**a:6**	
	b:3	c:2	c:3	b:4	b:2	b:1	b:1	**b:9**	**b:10**	b:2	
	c:2	d:5	d:3	**c:6**	c:2	c:6	c:4	b,c:2	c:1	c:2	
	d:8	**c,d:7**	**c,d:5**	a,b:2	d:3	b,c:1			a,c:1	a,c:3	
	a,c:1				**a,b:4**					a,b:1	
					a,c:2					b,c:1	
					b.c:1						

Como se puede observar las cuestiones 1, 2, 3, 4,5, 8 y 9 han sido en general bien contestadas, la cuestión 10 se ha contestado a medias bien, pero sin duda las cuestiones 6 y 7 han sido las más difíciles para los alumnos.

A continuación comentamos cada una de las cuestiones contestadas por cada uno de los alumnos de la investigación:

1ª Alumno:/a
CRISTINA SEVILLA CASARES.
Obtiene como nota total 1,5 puntos.
Vamos a analizar cada una de las cuestiones:

Cuestión 1: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar la dimensión de un subespacio vectorial obteniendo una base de dicho subespacio, así como la relación entre dimensión y número de ecuaciones.

Incorrecta, utiliza DERIVE para obtener las ecuaciones paramétricas del subespacio, muy sencillas en este caso pues las ecuaciones cartesianas del subespacio son x+y=0. Se da cuenta que x=-y, pero no se da cuenta que no vale con cualquier conjunto de vectores, ya que deben ser vectores L.I., marca una opción incorrecta en este sentido porque escoge un sistema de generadores que no es L.I..

Cuestión 2: (PUNTUACIÓN 0,5 puntos)
Objetivo de la cuestión: Estudio de la dependencia o independencia lineal de tres vectores de 4 componentes con un parámetro.
La alumna utiliza DERIVE y define primer los vectores a estudiar con u1, u2, u3. A continuación define una matriz paramétrica M(a), con la que estudia la matriz para a=0 mediante M(0) y calcula su rango obteniendo que el rango de estos tres vectores para a=0 es 2. Sin embargo no hace un estudio generalizado para cualquiera a. Concluye que la respuesta correcta es la que afirma que uno de los vectores se puede expresar como diferencia de los otros dos. Sin embargo no marca la otra respuesta que había correcta basada en las ecuaciones cartesianas del subespacio generado por dichos vectores.

Cuestión 3: (PUNTUACIÓN 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar las características de una aplicación lineal partiendo de las imágenes de tres vectores suyos.
No utiliza DERIVE. Contesta mal, no se da cuenta que no puede ser aplicación lineal.

Cuestión 4: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Deducir que el determinante de una matriz no varia si se sustituye una columna por una combinación lineal de columnas de dicha matriz.
No efectúa cálculos en DERIVE. Es una cuestión totalmente teórica, donde se podrían intentar hacer experimentos en DERIVE. Contesta mal afirmando que es falso por dos de los motivos que se enuncian en el examen.

Cuestión 5: (PUNTUACIÓN: 0,5 puntos)
Objetivo de la cuestión: Aplicar teorema de Rouché-Frobenius en sus dos versiones con rangos y con la pertenencia o no del vector de términos independientes a la Imagen de cierta aplicación lineal.
Sólo contesta afirmativamente utilizando una de las dos posibles respuestas: la de la Imagen.

Cuestión 6: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar cuando un conjunto de autovectores de una matriz forman base del espacio total.
Utiliza DERIVE; define la matriz A, calcula con DERIVE sus autovectores (0, 1, 3) y también estudia si los autovectores que se indican son linealmente independientes. Al final después de estos cálculos deduce que la respuesta correcta es la que afirma este hecho. Sin embargo la cuestión se planteaba de forma general, y la alumna cae en uno de los errores típicos: generalizar con casos concretos, es decir, como en este caso concreto se verifica (porque todos sus autovalores son distintos) generaliza para cualquier caso (incluyendo el caso con autovalores múltiples). No es un error de concepto sino un error de LOGICA matemática: no se puede generalizar a partir de casos concretos.

Cuestión 7. (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar traza, determinante, autovalores y dimensión del subespacio de autovectores de una cierta matriz.
Con los datos del problema se debía deducir que 0 era un autovalor doble y que 1 un autovalor simple. La alumna contesta que no tiene información suficiente para obtener esto.

Cuestión 8: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar las formas cuadráticas que tienen por matrices asociada a una matriz A y su inversa, así como la relación que guardan los tipos de formas cuadráticas.

En el caso concreto se trataba de ver que al ser una matriz asociada a una forma cuadrática definida positiva, su determinante no era nulo y por tanto tenía inversa, en cuyo caso los autovalores la inversa de la matriz inicial son los inversos de los autovalores de dicha matriz. Ademas ambas tienen mismos carácter: definidas positivas.
La alumna marca una opción correcta, pero además indica que los menores principales de una matriz y su inversa han de ser iguales lo cual es falso.
No utiliza DERIVE, ya que se trata de una cuestión muy teórica.

Cuestión 9: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar cuando un subconjunto del plano es un conjunto convexo utilizando la definición.
La alumna utiliza DERIVE para representar la curva $y=x^2$ sin embargo debe identificar mál la región $y \leq x^2$ por lo que contesta mal la cuestión, ya que el conjunto no es convexo y afirma que sí.

Cuestión 10: (PUNTUACIÓN: 0,5)
Objetivo de la cuestión: resolver gráficamente un programa lineal y aplicar el Teorema de Weierstrass.
La alumna únicamente resuelve gráficamente, pero no considera la cuestión que utiliza el Teorema de Weierstrass para afirmar que una función continua en un cerrado y acotado siempre tiene máximo y mínimo globales.

Puntuación total obtenida: 1,5.

Claramente se observa falta de conocimientos teóricos por parte de la alumna. Además utiliza DERIVE para hacer meras comprobaciones, que no siempre la llevan a buen puerto.

2º Alumno:/a
SERGIO SANTOS GIL

Obtiene como nota total 3,5 puntos.
Vamos a analizar cada una de las cuestiones:

Cuestión 1: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar la dimensión de un subespacio vectorial obteniendo una base de dicho subespacio, así como la relación entre dimensión y número de ecuaciones.
Su contestación es errónea pues afirma que una base de un subespacio de R^2 está formada por un vector de 2-componentes ¡error grave!
Utiliza DERIVE para obtener las ecuaciones paramétricas y las obtiene correctamente sin embargo no sabe deducir que la dimensión de W es tres.

Cuestión 2: (PUNTUACIÓN 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Estudio de la dependencia o independencia lineal de tres vectores de 4 componentes con un parámetro.
Estudia correctamente la dependencia lineal de estos vectores.
No utiliza DERIVE

Cuestión 3: (PUNTUACIÓN 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar las características de una aplicación lineal partiendo de las imágenes de tres vectores suyos.
Contesta mal, pues afirma que la aplicación puede ser lineal.
No utiliza DERIVE.

Cuestión 4: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Deducir que el determinante de una matriz no varia si se sustituye una columna por una combinación lineal de columnas de dicha matriz.
Intenta plantear con DERIVE una situación general que relacione columnas y su deducción final es que no puede darse esta situación pues la inversa tiene que tener como determinante el inverso del determinante de la primera matriz, no se da cuenta que puede ocurrir que el determinante de dicha matriz puede ser 1.

Cuestión 5: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Aplicar teorema de Rouché-Frobenius en sus dos versiones con rangos y con la pertenencia o no del vector de términos independientes a la Imagen de cierta aplicación lineal.
Contesta correctamente a la cuestión.
No utiliza DERIVE.

Cuestión 6: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar cuando un conjunto de autovectores de una matriz forman base del espacio total.
Contesta incorrectamente pues afirma que los autovectores de una matriz A forman base sólo si el determinante de dicha matriz es no nulo.
No utiliza DERIVE.

Cuestión 7. (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar traza, determinante, autovalores y dimensión del subespacio de autovectores de una cierta matriz.
Contesta incorrectamente afirmando que no tiene información suficiente.
No utiliza DERIVE.

Cuestión 8: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar las formas cuadráticas que tienen por matrices asociada a una matriz A y su inversa, así como la relación que guardan los tipos de formas cuadráticas.
Contesta correctamente sin utilizar DERIVE.

Cuestión 9: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar cuando un subconjunto del plano es un conjunto convexo utilizando la definición.
Utiliza DERIVE para representar la parábola $y=x^2$ pero no representa adecuadamente el conjunto o no lo identifica pues afirma que el conjunto es convexo cuando no lo es.

Cuestión 10: (PUNTUACIÓN: 0,5)
Objetivo de la cuestión: resolver gráficamente un programa lineal y aplicar el Teorema de Weierstrass.
Contesta bien a medias, pues no utiliza el Teorema de Weierstrass.
No utiliza DERIVE.

Puntuación total obtenida: 3,5
Resumen de las observaciones:
En general no utiliza DERIVE en la mayor parte de las cuestiones.
Contesta bien las cuestiones relacionadas con el estudio de la independencia lineal, propiedades de los determinantes, formas cuadráticas y algo de programación lineal. Tiene ciertas lagunas en aplicaciones lineales y diagonalización.

3º. Alumno:/a
ANTONIO F. CUELLAR HERVAS

Obtiene como nota total 3,5 puntos.
Vamos a analizar cada una de las cuestiones:
Cuestión 1: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar la dimensión de un subespacio vectorial obteniendo una base de dicho subespacio, así como la relación entre dimensión y número de ecuaciones.
Contesta incorrectamente pues afirma que un vector de 2 componentes es una base del subespacio W que es un subespacio de R^4.
Utiliza DERIVE para obtener ecuaciones paramétricas.
Quizás de estas ecuaciones paramétricas [x=@1, y=-@1] es de donde obtiene el error, pues no se da cuenta que los vectores de W tienen otras dos componentes más z y t.

Cuestión 2: (PUNTUACIÓN 0,5 puntos)
Objetivo de la cuestión: Estudio de la dependencia o independencia lineal de tres vectores de 4 componentes con un parámetro.
Contesta correctamenta a medias, observando que uno de los vectores siempre se obtiene como diferencia de los otros dos, pero no se da cuenta de la afirmación que construye sus ecuaciones cartesianas.
Utiliza DERIVE para intentar demostrar si los vectores son o no l.i. pero no obtiene ningún resultado claro.

Cuestión 3: (PUNTUACIÓN 0,5 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar las características de una aplicación lineal partiendo de las imágenes de tres vectores suyos.
Nuevamente contesta a medias. No utiliza DERIVE.

Cuestión 4: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Deducir que el determinante de una matriz no varia si se sustituye una columna por una combinación lineal de columnas de dicha matriz.
Contesta correctamente. No utiliza DERIVE.

Cuestión 5: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Aplicar teorema de Rouché-Frobenius en sus dos versiones con rangos y con la pertenencia o no del vector de términos independientes a la Imagen de cierta aplicación lineal.
Contesta incorrectamente afirmando que si un sistema homogéneo es compatible indeterminado entonces también lo debe ser el sistema no homogéneo con cierto vector b de términos independientes.
No utiliza DERIVE.

Cuestión 6: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar cuando un conjunto de autovectores de una matriz forman base del espacio total.
Contesta correctamente.
Utiliza DERIVE para calcular el determinante de la matriz A. De este resultado debe deducir que la respuesta que se basaba en el determinante de A no era correcto.

Cuestión 7. (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar traza, determinante, autovalores y dimensión del subespacio de autovectores de una cierta matriz.
Contesta incorrectamente afirmando que la información que no tenemos información suficiente para obtener el resultado.

Cuestión 8: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar las formas cuadráticas que tienen por matrices asociada a una matriz A y su inversa, así como la relación que guardan los tipos de formas cuadráticas.
Contesta incorrectamente afirmando que la forma cuadrática de la inversa puede no existir pues no se puede asegurar la existencia de la inversa de A,hecho que se garantiza pues la forma cuadrática es d.p. y por tanto el determinante de A es no nulo.
Utiliza DERIVE, se plantea un ejemplo de una matriz y su inversa.

Cuestión 9: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar cuando un subconjunto del plano es un conjunto convexo utilizando la definición.
Contesta incorrectamente, al no identificar con exactitud la representación gráfica del subconjunto S. Aunque se ayuda de DERIVE para representar la curva, sin embargo no toma el recinto adecuado, pues de lo contrario claramente hubiese deducido que el conjunto no es convexo. De hecho tiene un dibujo en las hojas de sucio en la que identifica justamente el conjunto como el contrario.

Cuestión 10: (PUNTUACIÓN: 0,5 puntos)
Objetivo de la cuestión: resolver gráficamente un programa lineal y aplicar el Teorema de Weierstrass.
Contesta parcialmente bien, al resolver solamente gráficamente, y no utilizar el teorema de Weierstrass.

Puntuación total obtenida: 3,5

Resumen de las observaciones:
Contesta correctamente o parcialmente a 5 cuestiones, ninguna de autovalores y autovectores. La parte teórica está un poco escasa.

3º Alumno:/a
SEBASTIÁN ROSADO LINARES .

Obtiene como nota total 3,5 puntos.

Vamos a analizar cada una de las cuestiones:

Cuestión 1: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar la dimensión de un subespacio vectorial obteniendo una base de dicho subespacio, así como la relación entre dimensión y número de ecuaciones.
Utiliza DERIVE para estudiar la dependencia o independencia lineal de los vectores y obtiene información que le permite señalar las dos respuestas correctas.

Cuestión 2: (PUNTUACIÓN 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Estudio de la dependencia o independencia lineal de tres vectores de 4 componentes con un parámetro.
Contesta correctamente la cuestión con la ayuda de DERIVE, pues estudia la dependencia e independencia lineal de los vectores que se indican en los diferentes apartados.

Cuestión 3: (PUNTUACIÓN 0,5 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar las características de una aplicación lineal partiendo de las imágenes de tres vectores suyos.

Contesta bien pero parcialmente a una de las respuestas correctas sobre aplicaciones lineales. Utiliza DERIVE para definir la aplicación lineal y hacer algunas cuentas, aunque creo que no se sirven demasiado para la respuesta final.

Cuestión 4: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Deducir que el determinante de una matriz no varia si se sustituye una columna por una combinación lineal de columnas de dicha matriz.
Utiliza DERIVE, para contestar esta cuestión. Se plantea una matriz genérica A e intenta construir la matriz B a partir de la misma que cumpla las condiciones. Pero construye mal dicha matriz B por lo que no obtiene información adecuada con estos cálculos. Quizás por eso contesta incorrectamente a la cuestión.

Cuestión 5: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Aplicar teorema de Rouché-Frobenius en sus dos versiones con rangos y con la pertenencia o no del vector de términos independientes a la Imagen de cierta aplicación lineal.
Contesta correctamente la cuestión, no utiliza DERIVE para la misma.

Cuestión 6: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar cuando un conjunto de autovectores de una matriz forman base del espacio total.
Utiliza DERIVE para calcular autovalores y autovectores de la matriz dada, aunque este hecho no era necesario pues se trataba de una cuestión teórica que pretendía que los alumnos reconocieran una de las circunstancias que nos permite asegurar a priori si un conjunto de autovectores puede formar base y es cuando los autovalores son todos distintos. Su contestación es errónea no por el contenido que afirma sino por la lógica que expresa, ya que con esta contestación se pretende demostrar un resultado general con un ejemplo concreto, es decir, del hecho de que una matriz cumpla la afirmación no se puede deducir que todas las matrices cumplan la propiedad.

Cuestión 7. (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar traza, determinante, autovalores y dimensión del subespacio de autovectores de una cierta matriz.
Contesta incorrectamente a la cuestión afirmando que con la información de que se dispone no podemos obtener información. No utiliza DERIVE.

Cuestión 8: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar las formas cuadráticas que tienen por matrices asociada a una matriz A y su inversa, así como la relación que guardan los tipos de formas cuadráticas.
Contesta incorrectamente a la cuestión afirmando que la forma cuadrática puede no existir sin darse cuenta que la forma cuadrática inicial es d.p. y por tanto el determinante de su matriz simétrica asociado es siempre no nulo. No utiliza DERIVE.

Cuestión 9: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar cuando un subconjunto del plano es un conjunto convexo utilizando la definición.
Aunque utiliza DERIVE para representar la curva, sin embargo no determina correctamente cuál es el conjunto que se pide, por lo que le sale un conjunto convexo, hecho que le provoca una respuesta incorrecta.

Cuestión 10: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: resolver gráficamente un programa lineal y aplicar el Teorema de Weierstrass.
Contesta incorrectamente al realizar mal la resolución gráfica del problema.

Puntuación total obtenida: 3,5

Resumen de las observaciones:
Utiliza DERIVE varias veces y en general le conduce a llegar a conclusiones acertadas. Aunque en un par de ocasiones la manipulación del programa le impide descubrir las características propias contenidas en la Teoría. Contesta correctamente o parcialmente a cuatro cuestiones. Tiene deficiencias en programación lineal y en diagonalización y formas cuadráticas. Los primeros tres temas parece dominarlos bastante bien.

5º Alumno:/a
MARÍA VERDÚ AGUILAR .

Obtiene como nota total 3,5 puntos.

Vamos a analizar cada una de las cuestiones:

Cuestión 1: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar la dimensión de un subespacio vectorial obteniendo una base de dicho subespacio, así como la relación entre dimensión y número de ecuaciones.
Contesta incorrectamente al afirmar que un sistema de generadores de W de cuatro vectores da la dimensión del subespacio, pues este sistema de generadores no es base al resultar L.D. No utiliza DERIVE

Cuestión 2: (PUNTUACIÓN 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Estudio de la dependencia o independencia lineal de tres vectores de 4 componentes con un parámetro.
Utiliza DERIVE para comprobar para distintos valores del parámetro a si los vectores son l.i., y en el caso a=0 no sabe interpretar que el resultado que da DERIVE es que no son l.i. por lo que debería haber marcado correctamente uno de los falsos. Contesta incorrectamente, no interpreta bien la condición de independencia lineal.

Cuestión 3: (PUNTUACIÓN 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar las características de una aplicación lineal partiendo de las imágenes de tres vectores suyos.
Contesta correctamente a la cuestión. Utiliza DERIVE definiendo diversas aplicaciones que la conducen a las afirmaciones correctas.

Cuestión 4: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Deducir que el determinante de una matriz no varia si se sustituye una columna por una combinación lineal de columnas de dicha matriz.
Contesta correctamente, sin ayuda de DERIVE.

Cuestión 5: (PUNTUACIÓN: 0,5 puntos)
Objetivo de la cuestión: Aplicar teorema de Rouché-Frobenius en sus dos versiones con rangos y con la pertenencia o no del vector de términos independientes a la Imagen de cierta aplicación lineal.
Contesta parcialmente bien, sin ayuda de DERIVE.

Cuestión 6: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar cuando un conjunto de autovectores de una matriz forman base del espacio total.
Con la ayuda de DERIVE intenta contestar a la cuestión pero comete un error de lógica, ya que trata de generalizar con un resultado particular.

Cuestión 7. (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar traza, determinante, autovalores y dimensión del subespacio de autovectores de una cierta matriz.
Contesta incorrectamente, pues afirma que no hay información suficiente. No utiliza DERIVE.

Cuestión 8: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar las formas cuadráticas que tienen por matrices asociada a una matriz A y su inversa, así como la relación que guardan los tipos de formas cuadráticas.
Contesta incorrectamente al afirmar que la forma cuadrática podría no existir.
No utiliza DERIVE.

Cuestión 9: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar cuando un subconjunto del plano es un conjunto convexo utilizando la definición.
Aunque utiliza DERIVE para representar la gráfica de la función sin embargo no representa bien el conjunto por lo que le sale un conjunto convexo.

Cuestión 10: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: resolver gráficamente un programa lineal y aplicar el Teorema de Weierstrass.
Contesta perfectamente la cuestión.
No utiliza DERIVE.

Puntuación total obtenida: 3,5

Resumen de las observaciones:
Contesta bien o parcialmente 4 de las 10 cuestiones. Sus deficiencias se centran en diagonalización y formas cuadráticas sobre todo y en la dependencia e independencia lineal de vectores.

6º Alumno:/a
LAURA RUBIO GÓMEZ .

Obtiene como nota total 8 puntos.

Vamos a analizar cada una de las cuestiones:

Cuestión 1: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar la dimensión de un subespacio vectorial obteniendo una base de dicho subespacio, así como la relación entre dimensión y número de ecuaciones.
Contesta correctamente y utiliza DERIVE para comprobar si algunos vectores son L.i:

Cuestión 2: (PUNTUACIÓN 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Estudio de la dependencia o independencia lineal de tres vectores de 4 componentes con un parámetro.
Contesta correctamente, utilizando DERIVE para comprobar la dependencia de los tres vectores para caso a=0 y caso general.

Cuestión 3: (PUNTUACIÓN 0,5 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar las características de una aplicación lineal partiendo de las imágenes de tres vectores suyos.
Contesta correctamente. No utiliza DERIVE.

Cuestión 4: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Deducir que el determinante de una matriz no varia si se sustituye una columna por una combinación lineal de columnas de dicha matriz.
Contesta correctamente utilizando DERIVE para hacer algunas comprobaciones sobre casos concretos y para comprobar la propiedad de los determinantes.

Cuestión 5: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Aplicar teorema de Rouché-Frobenius en sus dos versiones con rangos y con la pertenencia o no del vector de términos independientes a la Imagen de cierta aplicación lineal.
Contesta correctamente y no utiliza DERIVE.

Cuestión 6: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar cuando un conjunto de autovectores de una matriz forman base del espacio total.
Tras utilizar DERIVE y realizar algunas comprobaciones sobre las matrices contesta correctamente.

Cuestión 7. (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar traza, determinante, autovalores y dimensión del subespacio de autovectores de una cierta matriz.
Contesta incorrectamente al afirmar que no existen datos suficientes. No utiliza DERIVE.

Cuestión 8: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar las formas cuadráticas que tienen por matrices asociada a una matriz A y su inversa, así como la relación que guardan los tipos de formas cuadráticas.
Contesta correctamente sin usar DERIVE.

Cuestión 9: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar cuando un subconjunto del plano es un conjunto convexo utilizando la definición.
Contesta correctamente sin usar DERIVE.

Cuestión 10: (PUNTUACIÓN: 0,5 puntos)
Objetivo de la cuestión: resolver gráficamente un programa lineal y aplicar el Teorema de Weierstrass.
Contesta parcialmente bien, pues resuelve gráficamente el programa lineal y marca la respuesta correcta en este sentido pero no tiene en cuenta que se cumple también el Teorema de Weierstrass. No utiliza DERIVE.

Puntuación total obtenida: 8
Resumen de las observaciones: únicamente contesta mal a una de las 10 cuestiones, y dos de ellas las contesta parcialmente bien. Domina claramente la teoría y utiliza DERIVE para realizar meras comprobaciones de cálculo.

Contesta incorrectamente al cometer el error lógico de tratar de generalizar una propiedad que se cumple para un caso concreto, en este caso por el hecho de que una matriz verifique que todos sus autovectores forman una base eso no quiere decir que todas las matrices lo cumplan.

7º Alumno:/a
JOSÉ IVANOFF GÓMEZ HERNÁNDEZ .

Obtiene como nota total 7 puntos.

Vamos a analizar cada una de las cuestiones:

Cuestión 1: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar la dimensión de un subespacio vectorial obteniendo una base de dicho subespacio, así como la relación entre dimensión y número de ecuaciones.
Cuestión resuelta correctamente sin DERIVE.

Cuestión 2: (PUNTUACIÓN 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Estudio de la dependencia o independencia lineal de tres vectores de 4 componentes con un parámetro.
Cuestión resuelta correctamente, utiliza DERIVE para comprobar la dependencia de ciertos vectores y para calcular las ecuaciones cartesianas del subespacio W:

Cuestión 3: (PUNTUACIÓN 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar las características de una aplicación lineal partiendo de las imágenes de tres vectores suyos.
Cuestión resuelta correctamente, utiliza DERIVE para comprobar que una de las aplicaciones descrita no es lineal.

Cuestión 4: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Deducir que el determinante de una matriz no varia si se sustituye una columna por una combinación lineal de columnas de dicha matriz.
Cuestión resuelta incorrectamente, pues considera que es falsa la afirmación, no tiene en cuenta la propiedad de los determinantes y le despista la propiedad AB=I. Utiliza DERIVE para hacer algunas comprobaciones relacionadas con el determinante de una matriz y su inversa.

Cuestión 5: (PUNTUACIÓN: 0,5 puntos)
Objetivo de la cuestión: Aplicar teorema de Rouché-Frobenius en sus dos versiones con rangos y con la pertenencia o no del vector de términos independientes a la Imagen de cierta aplicación lineal.
Cuestión parcialmente resuelta, no considera del teorema de Rouche para la imagen. No utiliza DERIVE.

Cuestión 6: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar cuando un conjunto de autovectores de una matriz forman base del espacio total.
No utiliza DERIVE pero generaliza a partir de un caso concreto, con lo que tiene mal la cuestión.

Cuestión 7. (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar traza, determinante, autovalores y dimensión del subespacio de autovectores de una cierta matriz.
Cuestión contestada correctamente sin DERIVE.

Cuestión 8: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar las formas cuadráticas que tienen por matrices asociada a una matriz A y su inversa, así como la relación que guardan los tipos de formas cuadráticas.
Cuestión contestada correctamentes in DERIVE.

Cuestión 9: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar cuando un subconjunto del plano es un conjunto convexo utilizando la definición.
Cuestión contestada correctamente sin DERIVE.

Cuestión 10: (PUNTUACIÓN: 0,5 puntos)
Objetivo de la cuestión: resolver gráficamente un programa lineal y aplicar el Teorema de Weierstrass.
Sin la ayuda de DERIVE contesta parcialmente bien, ya que no considera el caso del Teorema de Weierstrass.

Puntuación total obtenida: 7
Resumen de las observaciones:
Contesta bien o parcialmente 8 de las 10 cuestiones.
Las que contesta mal están relacionadas con un problema de lógica (generalizar desde casos concretos) y la otra relacionada con las propiedades de los determinantes.

8º Alumno:/a
LUIS TARNO CORTE .

Obtiene como nota total 9,5 puntos.

Vamos a analizar cada una de las cuestiones:

Cuestión 1: (PUNTUACIÓN: 0,5 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar la dimensión de un subespacio vectorial obteniendo una base de dicho subespacio, así como la relación entre dimensión y número de ecuaciones.
Contesta parcialmente bien, utiliza DERIVE para realizar comprobaciones sobre dependencia e independencia lineal de los vectores en cuestión .

Cuestión 2: (PUNTUACIÓN 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Estudio de la dependencia o independencia lineal de tres vectores de 4 componentes con un parámetro.
Contesta correctamente, sin la ayuda de DERIVE.

Cuestión 3: (PUNTUACIÓN 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar las características de una aplicación lineal partiendo de las imágenes de tres vectores suyos.
Contsta correctamente, sin la ayuda de DERIVE.

Cuestión 4: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Deducir que el determinante de una matriz no varia si se sustituye una columna por una combinación lineal de columnas de dicha matriz.
Contesta correctamente, sin la ayuda de DERIVE.

Cuestión 5: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Aplicar teorema de Rouché-Frobenius en sus dos versiones con rangos y con la pertenencia o no del vector de términos independientes a la Imagen de cierta aplicación lineal.
Contesta correctamente, sin la ayuda de DERIVE.

Cuestión 6: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar cuando un conjunto de autovectores de una matriz forman base del espacio total.

Contesta correctamente sin la ayuda de DERIVE.

Cuestión 7. (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar traza, determinante, autovalores y dimensión del subespacio de autovectores de una cierta matriz.
Contesta correctamente sin la ayuda de DERIVE.

Cuestión 8: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar las formas cuadráticas que tienen por matrices asociada a una matriz A y su inversa, así como la relación que guardan los tipos de formas cuadráticas.
Contesta correctamente sin la ayuda de DERIVE.

Cuestión 9: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar cuando un subconjunto del plano es un conjunto convexo utilizando la definición.
Contesta correctamente, aunque hace uso de DERIVE para representar gráficamente.

Cuestión 10: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: resolver gráficamente un programa lineal y aplicar el Teorema de Weierstrass.
Contesta correctamente sin la ayuda de DERIVE.

Puntuación total obtenida: 9,5

Resumen de las observaciones:
Contesta a todo bien, y no utiliza DERIVE más que para hacer algunas comprobaciones sencillas. Un ejemplo de la no dependencia que puede generar el programa para los contenidos teóricos.

9º Alumno:/a
SERGIO RÚA NAVARRO .

Obtiene como nota total 8 puntos.

Vamos a analizar cada una de las cuestiones:

Cuestión 1: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar la dimensión de un subespacio vectorial obteniendo una base de dicho subespacio, así como la relación entre dimensión y número de ecuaciones.
Contesta correctamente usando DERIVE para obtener las ecuaciones paramétricas del subespacio.

Cuestión 2: (PUNTUACIÓN 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Estudio de la dependencia o independencia lineal de tres vectores de 4 componentes con un parámetro.
Contesta correctamente y utiliza DERIVE para comprobar que el rango siempre es 3 usando determinantes

Cuestión 3: (PUNTUACIÓN 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar las características de una aplicación lineal partiendo de las imágenes de tres vectores suyos.
Contesta correctamente sin la ayuda de DERIVE.

Cuestión 4: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)

Objetivo de la cuestión: Deducir que el determinante de una matriz no varia si se sustituye una columna por una combinación lineal de columnas de dicha matriz.
Contesta correctamente sin la ayuda de DERIVE.

Cuestión 5: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Aplicar teorema de Rouché-Frobenius en sus dos versiones con rangos y con la pertenencia o no del vector de términos independientes a la Imagen de cierta aplicación lineal.
Contesta incorrectamente, no usa DERIVE, y parece mostrar cierta laguna teórica en la aplicación del Teorema de Rouché.

Cuestión 6: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar cuando un conjunto de autovectores de una matriz forman base del espacio total.
Contesta incorrectamente, porque generalizar una propiedad que se cumple para un caso particular. Utiliza DERIVE para comprobar que los autovectores son l.i. usando el cálculo de su determinante.

Cuestión 7. (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar traza, determinante, autovalores y dimensión del subespacio de autovectores de una cierta matriz.
Contesta correctamente sin la ayuda de DERIVE.

Cuestión 8: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar las formas cuadráticas que tienen por matrices asociada a una matriz A y su inversa, así como la relación que guardan los tipos de formas cuadráticas.
Contesta correctamente sin la ayuda de DERIVE.

Cuestión 9: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar cuando un subconjunto del plano es un conjunto convexo utilizando la definición.
Contesta correctamente sin la ayuda de DERIVE.

Cuestión 10: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: resolver gráficamente un programa lineal y aplicar el Teorema de Weierstrass.
Contesta correctamente sin la ayuda de DERIVE.

Puntuación total obtenida: 8
Resumen de las observaciones:
Contesta correctamente a 8 de las 10 cuestiones. No utiliza apenas DERIVE, solo en tres cuestiones y para realizar comprobaciones inmediatas.

10º Alumno:/a
JUAN PABLO TRIGO .

Obtiene como nota total 4 puntos.

Vamos a analizar cada una de las cuestiones:

Cuestión 1: (PUNTUACIÓN: 0,5 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar la dimensión de un subespacio vectorial obteniendo una base de dicho subespacio, así como la relación entre dimensión y número de ecuaciones.
Contesta incorrectamente, sin ayuda de DERIVE. Hay que observar que en el test tenía marcada la respuesta correcta pero luego en la hoja de respuestas marca otras distintas.

Cuestión 2: (PUNTUACIÓN 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Estudio de la dependencia o independencia lineal de tres vectores de 4 componentes con un parámetro.
Contesta parcialmente bien, con ayuda de DERIVE; no calcula las ecuaciones cartesianas del subespacio.

Cuestión 3: (PUNTUACIÓN 0,5 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar las características de una aplicación lineal partiendo de las imágenes de tres vectores suyos.
Contesta parcialmente bien, sin ayuda de DERIVE.

Cuestión 4: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Deducir que el determinante de una matriz no varia si se sustituye una columna por una combinación lineal de columnas de dicha matriz.
Contesta incorrectamente, sin ayuda de DERIVE, pero volvemos a observar que había marcado la respuesta correcta en el enunciado y sin embargo rectifica en la hoja de respuestas.

Cuestión 5: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Aplicar teorema de Rouché-Frobenius en sus dos versiones con rangos y con la pertenencia o no del vector de términos independientes a la Imagen de cierta aplicación lineal.
Contesta incorrectamente, pues una de las respuestas es correcta la relacionada con el Teorema clásico de Rouche, sin embargo marca mal la que se refiere al Teorema de Rouche para la Imagen. No utiliza DERIVE.

Cuestión 6: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar cuando un conjunto de autovectores de una matriz forman base del espacio total.
Contesta incorrectamente, generaliza desde un caso particular. No utiliza DERIVE.

Cuestión 7. (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar traza, determinante, autovalores y dimensión del subespacio de autovectores de una cierta matriz.
Contesta incorrectamente, parece desconocer o ignorar las relaciones anteriores, pues afirma que no hay información suficientes. No utiliza DERIVE.

Cuestión 8: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar las formas cuadráticas que tienen por matrices asociada a una matriz A y su inversa, así como la relación que guardan los tipos de formas cuadráticas.
Contesta correctamente sin DERIVE.

Cuestión 9: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar cuando un subconjunto del plano es un conjunto convexo utilizando la definición.
Contesta correctamente sin DERIVE.

Cuestión 10: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: resolver gráficamente un programa lineal y aplicar el Teorema de Weierstrass.
Contesta correctamente sin DERIVE.

Puntuación total obtenida: 4
Resumen de las observaciones:

Contesta bien o parcialmente bien a 5 de las 10 cuestiones. Parece que los temas relacionados con autovalores y autovectores y propiedades de los determinantes son lo más flojos.

11º Alumno:/a
<u>JESSICA SANZ CASTRO</u>

Obtiene como nota total 4 puntos.

Vamos a analizar cada una de las cuestiones:

<u>Cuestión 1: </u>(PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar la dimensión de un subespacio vectorial obteniendo una base de dicho subespacio, así como la relación entre dimensión y número de ecuaciones.
Contesta correctamente con la ayuda de DERIVE.

<u>Cuestión 2</u>: (PUNTUACIÓN 0,5 puntos)
Objetivo de la cuestión: Estudio de la dependencia o independencia lineal de tres vectores de 4 componentes con un parámetro.
Contesta parcialmente bien, sin DERIVE.

<u>Cuestión 3:</u> (PUNTUACIÓN 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar las características de una aplicación lineal partiendo de las imágenes de tres vectores suyos.
Contesta correctamente sin la ayuda de DERIVE.

<u>Cuestión 4: </u>(PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Deducir que el determinante de una matriz no varia si se sustituye una columna por una combinación lineal de columnas de dicha matriz.
Contesta incorrectamente, utiliza DERIVE para hacer algunas comprobaciones sin importancia, y parece desconocer las propiedades de los determinantes.

<u>Cuestión 5: </u>(PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Aplicar teorema de Rouché-Frobenius en sus dos versiones con rangos y con la pertenencia o no del vector de términos independientes a la Imagen de cierta aplicación lineal.
Contesta incorrectamente sin la ayuda de DERIVE. No sabe aplicar el Teorema de Rouche en ninguna de sus dos versiones.

<u>Cuestión 6: </u>(PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar cuando un conjunto de autovectores de una matriz forman base del espacio total.
Contesta incorrectamente, utiliza DERIVE para calcular los autovalores de la matriz constante que aparece en uno de los ejemplos. Una de sus afirmaciones es la que afirma que es falso solo es cierto si det(A) es no nulo, parece confundir dependencia lineal con propiedades de autovectores.

<u>Cuestión 7. </u>(PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar traza, determinante, autovalores y dimensión del subespacio de autovectores de una cierta matriz.
Afirma que los tres autovalores son distintos, lo cual es falso, no aplica correctamente estas relaciones. No utiliza derive.

<u>Cuestión 8: </u>(PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar las formas cuadráticas que tienen por matrices asociada a una matriz A y su inversa, así como la relación que guardan los tipos de formas cuadráticas.

Cuestión incorrecta, no utiliza DERIVE: Su error se basa en afirmar que la forma cuadrática puede no existir pues no se garantiza la existencia de la inversa.

Cuestión 9: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar cuando un subconjunto del plano es un conjunto convexo utilizando la definición.
Contesta correctamente sin la ayuda de DERIVE.

Cuestión 10: (PUNTUACIÓN: 0,5 puntos)
Objetivo de la cuestión: resolver gráficamente un programa lineal y aplicar el Teorema de Weierstrass.
Contesta parcialmente bien, no utiliza el Teorema de Weierstrass.
No utiliza DERIVE:

Puntuación total obtenida: 4

Resumen de las observaciones:
Contesta bien o parcialmente bien a 5 de las 10 cuestiones. Sus deficiencias se centran en autovalores y autovectores, formas cuadráticas y Teorema de Rouché.

12º. Alumno:/a
ANTONI PERPIÑÁ RODRÍGUEZ

Obtiene como nota total 4,5 puntos.

Vamos a analizar cada una de las cuestiones:

Cuestión 1: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar la dimensión de un subespacio vectorial obteniendo una base de dicho subespacio, así como la relación entre dimensión y número de ecuaciones.
Contesta de forma incorrecta al afirmar que un subespacio con una ecuación cartesiana tiene dimensión 1. Utiliza DERIVE para obtener ecuaciones paramétricas del subespacio.

Cuestión 2: (PUNTUACIÓN 0,5 puntos)
Objetivo de la cuestión: Estudio de la dependencia o independencia lineal de tres vectores de 4 componentes con un parámetro.
Contesta parcialmente bien, pues detecta la dependencia de los vectores, pero no construye las ecuaciones cartesianas del subespacio. Utiliza DERIVE para obtener la dependencia lineal.

Cuestión 3: (PUNTUACIÓN 0,5 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar las características de una aplicación lineal partiendo de las imágenes de tres vectores suyos.
Contesta parcialmente bien, pues no marca la respuesta por la cual f no puede tomar esos valores. Utiliza DERIVE, pero no le conduce a muchas conclusiones, solo realiza algunas operaciones.

Cuestión 4: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Deducir que el determinante de una matriz no varia si se sustituye una columna por una combinación lineal de columnas de dicha matriz.
Contesta incorrectamente sin la ayuda de DERIVE. No conoce propiedades de los determinantes.

Cuestión 5: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)

Objetivo de la cuestión: Aplicar teorema de Rouché-Frobenius en sus dos versiones con rangos y con la pertenencia o no del vector de términos independientes a la Imagen de cierta aplicación lineal.
No utiliza DERIVE. Contesta incorrectamente no parece saber aplicar bien el Teorema de Rouché en ninguna de sus versiones.

Cuestión 6: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar cuando un conjunto de autovectores de una matriz forman base del espacio total.
Contesta incorrectamente, aunque utiliza DERIVE para calcular los autovalores y autovectores de la matriz constante, pero al final concluye generalizando una propiedad por el caso concreto.

Cuestión 7. (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar traza, determinante, autovalores y dimensión del subespacio de autovectores de una cierta matriz.
Contesta correctamente sin la ayuda de DERIVE.

Cuestión 8: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar las formas cuadráticas que tienen por matrices asociada a una matriz A y su inversa, así como la relación que guardan los tipos de formas cuadráticas.
Contesta correctamente sin la ayuda de DERIVE.

Cuestión 9: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar cuando un subconjunto del plano es un conjunto convexo utilizando la definición.
Contesta correctamente sin ayuda de DERIVE.

Cuestión 10: (PUNTUACIÓN: 0,5 puntos)
Objetivo de la cuestión: resolver gráficamente un programa lineal y aplicar el Teorema de Weierstrass.
Contesta parcialmente bien sin la ayuda de DERIVE. No resuelve gráficamente sino que aplica el Teorema de Weierstrass.

Puntuación total obtenida: 4,5
Resumen de las observaciones:
Contesta bien o parcialmente bien a 6 de las 10 cuestiones.
Las deficiencias teóricas las encuentra en autovalores y autovectores, en propiedades de los determinantes y el Teorema de Rouché.

13º. Alumno:/a
EDUARDO SANZ IBARRA

Obtiene como nota total 4,5 puntos.

Vamos a analizar cada una de las cuestiones:

Cuestión 1: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar la dimensión de un subespacio vectorial obteniendo una base de dicho subespacio, así como la relación entre dimensión y número de ecuaciones.
Contesta correctamente. Con DERIVE comprueba la dependencia lineal de algunos vectores.

Cuestión 2: (PUNTUACIÓN 0,5 puntos)
Objetivo de la cuestión: Estudio de la dependencia o independencia lineal de tres vectores de 4 componentes con un parámetro.

Contesta parcialmente bien, utilizando DERIVE: El programa lo utiliza para comprobar l a independencia lineal de tres vectores para a=0. Resulta incompleta pues no considera las ecuaciones cartesianas para el caso a=0.

Cuestión 3: (PUNTUACIÓN 0,5 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar las características de una aplicación lineal partiendo de las imágenes de tres vectores suyos.
Contesta parcialmente bien, sin ayuda de DERIVE,

Cuestión 4: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Deducir que el determinante de una matriz no varia si se sustituye una columna por una combinación lineal de columnas de dicha matriz.
Contesta incorrectamente, aunque utiliza DERIVE, pues no parece dominar las propiedades de los determinantes.

Cuestión 5: (PUNTUACIÓN: 0,5 puntos)
Objetivo de la cuestión: Aplicar teorema de Rouché-Frobenius en sus dos versiones con rangos y con la pertenencia o no del vector de términos independientes a la Imagen de cierta aplicación lineal.
Contesta parcialmente bien, pues no aplica Teorema de Rouche para el caso de Imagen.
No utiliza DERIVE:

Cuestión 6: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar cuando un conjunto de autovectores de una matriz forman base del espacio total.
Contesta incorrectamente, pues marca la respuesta que era correcta y por otro lado también marca la que trata de generalizar son el caso concreto. Precisamente utiliza DERIVE para comprobar las propiedades de este caso concreto.

Cuestión 7. (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar traza, determinante, autovalores y dimensión del subespacio de autovectores de una cierta matriz.
Contesta incorrectamente, y no utiliza DERIVE. Su error estriba en afirmar que no se tiene información suficiente: no relaciona adecuadamente los conceptos indicados en el objetivo.

Cuestión 8: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar las formas cuadráticas que tienen por matrices asociada a una matriz A y su inversa, así como la relación que guardan los tipos de formas cuadráticas.
Contesta correctamente sin ayuda de DERIVE.

Cuestión 9: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar cuando un subconjunto del plano es un conjunto convexo utilizando la definición.
Contesta correctamente, usando DERIVE para representar el conjunto del plano.

Cuestión 10: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: resolver gráficamente un programa lineal y aplicar el Teorema de Weierstrass.
Contesta incorrectamente no usa DERIVE. Su error está en considerar que todos los vértices son máximos o mínimos. ¡grave error!

Puntuación total obtenida: 4,5

Resumen de las observaciones:
Contesta bien o parcialmente bien 6 de las 10 cuestiones. Sus deficiencias están en el tema relacionado con diagonalización de matrices y formas cuadráticas. También en la resolución gráfica de problemas lineales.

14º. Alumno:/a
DANIEL RUBIANO FERNÁNDEZ

Obtiene como nota total 5 puntos.

Vamos a analizar cada una de las cuestiones:

Cuestión 1: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar la dimensión de un subespacio vectorial obteniendo una base de dicho subespacio, así como la relación entre dimensión y número de ecuaciones.
Contesta correctamente utilizando DERIVE para realizar algunas comprobaciones de dependencia lineal.

Cuestión 2: (PUNTUACIÓN 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Estudio de la dependencia o independencia lineal de tres vectores de 4 componentes con un parámetro.
Contesta correctamente sin uso de DERIVE.

Cuestión 3: (PUNTUACIÓN 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar las características de una aplicación lineal partiendo de las imágenes de tres vectores suyos.
Contesta incorrectamente, no utiliza DERIVE. Su afirmación consiste en decir que una aplicación que no es lineal es la que cumple las condiciones del enunciado. Precisamente se trata de una aplicación que no es lineal.

Cuestión 4: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Deducir que el determinante de una matriz no varia si se sustituye una columna por una combinación lineal de columnas de dicha matriz.
Contesta correctamente, usa DERIVE para realizar algunos cálculos de comprobación en matrices inversas.

Cuestión 5: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Aplicar teorema de Rouché-Frobenius en sus dos versiones con rangos y con la pertenencia o no del vector de términos independientes a la Imagen de cierta aplicación lineal.
Contesta incorrectamente, no utiliza DERIVE, aplica bien el Teorema de Rouche para el caso del rango, pero no lo aplica bien para la Imagen.

Cuestión 6: (PUNTUACIÓN: 0,5 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar cuando un conjunto de autovectores de una matriz forman una base del espacio total.
Contesta parcialmente bien, utiliza DERIVE para comprobar que la matriz constante tiene los autovalores que se indican.

Cuestión 7. (PUNTUACIÓN: 0 puntos)

Objetivo de la cuestión: Relacionar traza, determinante, autovalores y dimensión del subespacio de autovectores de una cierta matriz.
Contesta incorrectamente, no utiliza DERIVE. Su error se basa en afirmar que no tiene información suficiente, lo cual muestra la falta de dominio de las relaciones que se pretendían en la cuestión.

Cuestión 8: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar las formas cuadráticas que tienen por matrices asociada a una matriz A y su inversa, así como la relación que guardan los tipos de formas cuadráticas.
Contesta incorrectamente, no utiliza DERIVE. Su error se basa en marcar una respuesta correcta y otra incorrecta. La respuesta incorrecta afirma que los menores principales de una matriz simétrica y su inversa son iguales.

Cuestión 9: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar cuando un subconjunto del plano es un conjunto convexo utilizando la definición.
Contesta correctamente, no utiliza DERIVE.

Cuestión 10: (PUNTUACIÓN: 0,5 puntos)
Objetivo de la cuestión: resolver gráficamente un programa lineal y aplicar el Teorema de Weierstrass.
Contesta parcialmente bien sin DERIVE. Aplica Teorema de Weierstrass pero no resuelve gráficamente el problema.

Puntuación total obtenida: 5

Resumen de las observaciones:
Contesta bien o parcialmente bien a 6 de las 10 cuestiones. Sus deficiencias se centran en el Teorema de Rouché, en formas cuadráticas y relaciones de traza y determinante con autovalores y autovectores.

15º. Alumno:/a
JORGE REVUELTO OCA

Obtiene como nota total 5,5 puntos.

Vamos a analizar cada una de las cuestiones:

Cuestión 1: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar la dimensión de un subespacio vectorial obteniendo una base de dicho subespacio, así como la relación entre dimensión y número de ecuaciones.
Contesta incorrectamente, y no utiliza DERIVE. Su error se basa en tomar un sistema de generadores como base de un subespacio vectorial sin comprobar si dicho sistema de generadores es o no l.i.

Cuestión 2: (PUNTUACIÓN 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Estudio de la dependencia o independencia lineal de tres vectores de 4 componentes con un parámetro.
Contesta correctamente con la ayuda de DERIVE. Utiliza DERIVE para realizar comprobaciones de dependencia lineal entre los vectores implicados.

Cuestión 3: (PUNTUACIÓN 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar las características de una aplicación lineal partiendo de las imágenes de tres vectores suyos.

Contesta incorrectamente. No utiliza DERIVE: Su error se basa en afirmar que la aplicación lineal debe ser una aplicación que NO ES LINEAL.

Cuestión 4: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Deducir que el determinante de una matriz no varia si se sustituye una columna por una combinación lineal de columnas de dicha matriz.
Contesta incorrectamente. Utiliza DERIVE para intentar obtener la relación de la matriz A y B que cumplan las condiciones del enunciado. A pesar de todo llega a una conclusión errónea por no aplicar las propiedades de los determinantes.

Cuestión 5: (PUNTUACIÓN: 0 puntos)
Objetivo de la cuestión: Aplicar teorema de Rouché-Frobenius en sus dos versiones con rangos y con la pertenencia o no del vector de términos independientes a la Imagen de cierta aplicación lineal.
Contesta correctamente, sin la ayudad de DERIVE.

Cuestión 6: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Determinar cuando un conjunto de autovectores de una matriz forman base del espacio total.
Contesta correctamente, utilizando DERIVE para calcular autovalores y autovectores de la matriz constante dada.

Cuestión 7. (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar traza, determinante, autovalores y dimensión del subespacio de autovectores de una cierta matriz.
Contesta correctamente, sin la ayuda de DERIVE.

Cuestión 8: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Relacionar las formas cuadráticas que tienen por matrices asociada a una matriz A y su inversa, así como la relación que guardan los tipos de formas cuadráticas.
Contesta correctamente, sin la ayuda de DERIVE.

Cuestión 9: (PUNTUACIÓN: 1 puntos)
Objetivo de la cuestión: Identificar cuando un subconjunto del plano es un conjunto convexo utilizando la definición.
Contesta correctamente utilizando DERIVE para representar el conjunto.

Cuestión 10: (PUNTUACIÓN: 0,5 puntos)
Objetivo de la cuestión: resolver gráficamente un programa lineal y aplicar el Teorema de Weierstrass.
Contesta parcialmente bien, pues únicamente aplica el Teorema de Weierstrass pero no resuelve gráficamente el programa.

Puntuación total obtenida: 5,5
Resumen de las observaciones:
Contesta bien o parcialmente bien a 6 de las 10 cuestiones.
Utiliza DERIVE en 4 cuestiones.
Las deficiencias teóricas se centran en los primeros temas de espacios vectoriales y aplicaciones lineales.

2. OBSERVACIONES DE LOS PROBLEMAS DEL SUBGRUPO-A DE "MATEMÁTICAS II CON DERIVE"

PROBLEMA 1. Se dan dos subespacios vectoriales uno por medio de un sistema de generadores y otro con sus ecuaciones cartesianas y se pide:

1.a) Obtener una base de W1., para lo cual deben de estudiar si los cuatro vectores que generan el subespacio W1 son l.i. resultan ser l.d. y resulta que una posible base esta formada por los 3 últimos vectores v2,v3,v4. (0,6 puntos)

RESPUESTAS:

C.S.: No ha sabido obtener perfectamente la base a partir de las ecuaciones cartesianas, pues no ha sabido plantear las ecuaciones cartesianas, lo que ha hecho es intentar ver si los cuatro vectores son l.i. planteado la ecuación vectorial igualada a cero, y al resolver toma los parámetros infinitos que resolvían esa ecuación (en cuyo caso los 4 vectores eran l.d.) por la ecuación paramétrica.
NOTA: 0,1 sobre 0,6.

S.S.: Perfecto, define bien los vectores, observa que los 4 son l.d., mira a ver cuantos son l.i. y descubre que los tres primeros, por lo que esots forma la base. Perfecto. NOTA: 0,6 sobre 0,6

A.C.: Plantea una ecuación vectorial formada por la combinación lineal de los cuatro vectores dados igualada al vector nulo de R4, al resolver que lo hace bien, le sale que existen infinitos valores para a,b,c,d que eran los coeficientes de la combinación lineal, y el sin embargo considera que el resultado son las ecuaciones paramétricas del subespacio ¡no interpreta bien DERIVE!. NOTA: 0,1 puntos

S.R.: Perfecto. NOTA: 0,6 sobre 0,6

M.V.: Calcula primero las ecuaciones cartesianas (es decir resuelve primero el siguiente apartado) y luego tan solo afirma que la base serán "todos aquellos vectores que cumplan la ecuación t=x+y-z" Lo cual es incorrecto. NOTA: 0

L.R.: Plantea bien la ecuación vectorial que permite estudiar si son l.i. al darse cuenta que son l.d. los cuatro vectores elimina el cuarto, pero es justamente el que no debió eliminar pues para el parámetro salía nulo, debió suprimir cualquier otro. por ello construye una base formada solo por 2 vectores. NOTA: 0,4 sobre 0,6.

J.I.G.: Determina SI son li, deduce que son l.d., luego construye las ecuaciones paramétricas, elimina los parámetros y obtiene bien las ecuciones cartesianas. Con todo ello deduce que la base del subespacio es de dimensión 3 luego toma tres vectores que sabe son l.i. NOTA:0,6 sobre 0,6.

L.T.: Plantea bien la ecuación vectorial para estudiar si los cuatro vectores son l.i. y deduce que son l.d. pues no todos los parámetros le salen nulos, y elimna bien uno de los vectores cuyo parámetro es no nulo, considerando tres vectoes que ahora sí le salen l.i, y forman la base de W1 Perfecto. NOTA: 0,6 sobre 0,6.

S.Rua: Perfecto. NOTA: 0,6 sobre 0,6.

J.Pa.: Plantea bien los vectores, intenta ver si son l.i, pero luego al obtener la solución de esa ecuación obtiene las infinitas soluciones dadas por
[a=@1 m b=2@1/3 c=-@1/3, d=0] de donde debería deducir que no son l.i. esos cuatro vectores y sin embargo deduce que una base de W1 viene dada por esas ecuaciones, como si esas fuesen las ecuaciones paramétricas de W1 ¿no entiende li./ld con DERIVE?. NOTA: 0,1 sobre 0,6.

J.S.: No hace nada. NOTA: 0 sobre 0,6

A.P.: Aunque plantea bien la ecuación vectorial para determinar si los cuatro vectores son o no l.i., sin embargo al resolver el sistema homogéneo obtiene como solucón [x=@2 , y= 2 @2 /3 z = -@2/3 t=0] de donde debería haber deducido que son l.d., sin embargo el considera que esas son las ecuaciones paramétricas del subespacio y por tanto da valores a @2 y considera que una base de W1 es (1,2/3,-1/3,0). NOTA:0,1 sobre 0,6)

E.S.: Correcto el proceso seguido, perfecto resultado. En el proceso calcula las ecuaciones cartesianas y las paramétricas también. NOTA: 0,6 sobre 0,6

D.R.: Plantea la una combinación lineal de los cuatro vectores igualada al vector nulo para comprobar si son li. o l.d., al resolver obtiene que los parámetros a,b,c,d no han de ser nulo, sin embargo en vez de concluir que es l.d. da valores a los nuevos parámetros es decir, la solución da [a=@1, b= 2 @1/3 , c= - @1 /3, d=0] , y el da valores a @1 ¡gran error! NOTA:0,1 sobre 0,6.

J.R.: Perfecto. NOTA: 0,6

1.b) Se pide obtener las ecuaciones cartesianas de W1. Para ello tienen que plantear las ecuaciones paramétricas apartir de los tres vectores anteriores que son base, y eliminando los tres parámetros introducidos en la combinación lineal. esto conduce a que las ecuaciones cartesianas de W1 son {(x,y,z,t)/ t=x+y-z} (0,7 puntos)

RESPUESTAS:

C.S.: Aunque tiene una ligera idea de cómo efectuar el paso de paramétricas a cartesianas al final no sabe deducir los resultados y confunde paramétricas con cartesianas. NOTA:0,4 sobre 0,7.

S.S.: Plantea ecuaciones paramétricas bien, y luego elimina los tres parámetros bien. Perfecto
NOTA: 0,7 sobre 0,7.

A.C.: Ahora plantea bien la ecuación vectorial del subespacio, para obtener sus ecuaciones paramétricas, sin embargo se queda ahí , esas no son las ecuaciones cartesianas. NOTA:0,1 puntos.

S.R.: Perfecto. NOTA: 0,7 sobre 0,7

M.V.: Perfecto. NOTA: 0,7 .

L.R.: Construye bien sus ecuaciones cartesianas, pues parte de todos los vectores y sus ecuaciones paramétricas. NOTA: 0,7 sobre 0,7.

J.I.G.: Ya había hecho en el apartado anterior las ecuaciones cartesianas que las hace perfectamente. NOTA: 0,7 sobre 0,7.

L.T.: Efectúa muy bien el proceso de construcción de las ecuaciones cartesianas a partir de las paramétricas, que por cierto las construye sobre los tres vectores de la base. Perfecto. NOTA: 0,7 sobre 0,7

S.R.: Perfecto. NOTA: 0,7 sobre 0,7.

J.Pa.: Plantea las ecuaciones paramétricas bien, aunque sobre 4 vectores y tendría que ser con menos para ahorrar trabajo, pero lo hace bien y va eliminando los parámetros a, ,b,c,d y deduce que las ecuaciones serían z=x+y-t perfecto. NOTA: 0,7 sobre 0,7.

J.S.: No hace nada. NOTA: 0 sobre 0,7.

A.P.: Claro a partir de las ecuaciones que el supone paramétricas para el subespacio W1, [x=@2 , y= 2 @2 /3 z = -@2/3 t=0] deduce que las ecuaciones cartesianas son sencillas, pues quedarían de la forma [x=0, y= 2x/3, z=-x/3, t=0] lo cual es lógico en cierta forma, pero claro ha partido unas ecuaciones paramétricas erróneas. NOTA: 0,3 sobre 0,7.

E.S.: Correcto. NOTA: 0,7 sobre 0,7

D.R.: No hace nada. NOTA: 0 sobre 0,7

J.R.: Perfecto. NOTA: 0,7

1.c) Se pide obtener una base de W2 que estaba dado con ecuaciones cartesianas. Aquí hay que pasar de cartesianas a paramétricas, pero hay que tener cuidado porque en las ecuaciones cartesianas sólo están explícitas las componentes y y t por lo que puede

suceder que se olviden de x y z, una solución buena consiste en añadir a las ecuaciones cartesianas, las ecuaciones triviales x=x, z=z, y entonces resulta [x=@1,y=0,z=@2,t0=] por tanto una posible base de W2 será B={(1,0,0,0),(0,0,1,0)} (0,4 puntos)

RESPUESTAS:

C. S.: No sabe deducir una base del subespacio vectorial del que se tenían ecuaciones cartesianas. NOTA: 0 sobre 0,4

S.S.: Plantea las ecuaciones cartsianas muy bien considerando las dos variables que no estaba es decir [x=x,y=0, z=z, t=0] y al resolver obtiene las paramétricas de las que deduce una base. Perfecto
NOTA: 0,4 sobre 0,4.

A.C.: No se da cuenta del error posible que solo estaban expresadas las componentes y=0 y t=0, y claro al resolver obtiene lo mismo yh no sabe que hacer.NOTA: 0 puntos.

S.R.: Perfecto. NOTA: 0,4 sobre 0,4

M.V.: Bien lo deduce directamente de las ecuaciones. NOTA: 0,4 sobre 0,4.

L.R.: Perfecto. NOTA: 0,4 sobre 0,4.

J.I.G.: Construye las ecuaciones cartesianas de la intersección agrupando las de ambos subespacios, No hace operacones en DERIVE; sencillamente sustituye en una de ellas los valores nulos de y y de t y obtiene las ecuaciones del subespacio intersección.Nuevamente deduce que al ser 3 ecuaciones cartesianas la dimensión sería uno, por lo que coge un vector que las satisface y es ees la base. NOTA: 0,6 sobre 0,6.

L.T.: Perfecto, si hacer nada con DERIVE, obtiene la base a ojo.NOTA: 0,4 sobre 0,4.

S.R.: Perfecto. NOTA: 0,4 sobre 0,4.

J.Pa.: No lo hace. NOTA: 0 sobre 0,4.

J.S.: No hace nada. NOTA: 0 sobre 0,4

A.P.: No sabe obtener la base de las ecuaciones paramétricas, pues el da valores cualesquiera a los parámetrocs, de hecho considera que una base de W2 es el vector (1,0,1,0). NOTA:0,1 sobre 0,4.

E.S.: El razonamiento es incorrecto pues afirma que una base será un vector que hace y=0 y t=0, (1,0,2,0) por ejemplo, eso es falso, le faltaría otro vector. NOTA: 0,1 sobre 0,4

D.R.: con funde ecuaciones cartesianas con ecuaciones paramétricas, de hecho plantea bien las paramétricas llamándolas cartesianas. Para hallar una base toma valores para los parámetros, y claro como los parámetros eran [x=@1,y=0,z=@2,t=0] @1 y @2 los da un valor 3, 5 y dice que la base es [2,0,5,0] ¡burrada!. NOTA: 0,1 sobre 0,4

J.R.: Perfecto. NOTA: 0,4

1.d) Hallar una base del subespacio intersección entre W1 y W2. La forma más cómoda de atacar este problema consiste en tomar las ecuaciones cartesianas de ambos subespacios que ya las hemos calculado la de W1 en el apartado b y la W2 que ya viene dada, y juntarlas se añade un 0 porque hay solo tres ecuaciones y 4 incógnitas por lo que se obtiene al resolve [x=@5,y=0,z=@5,t=0] pòr tanto una base de W1 int. W2 es {(1,0,1,0)} (0,6 puntos)

RESPUESTAS:

C.S.: No hace nada. NOTA: 0 sobre 0,6

S.S.: Pone todas las ecuaciones cartesianas de W1 y W2 una tras otra y al resolver obtiene que la intersección está generada por el vector (1,0,1,0)
NOTA: 0,6 sobre 0'6

A.C.: No lo hace. NOTA: 0

S.R.: Perfecto. NOTA: 0,6 sobre 0,6

M.V.: Perfecto. NOTA: 0,6 sobre 0,6.

L.R.: Perfecta la obtención de laintersección a partir de las ecuaciones cartesianas de ambos subespacios. NOTA: 0,6 sobre 0,6.

J.I.G.: No hace nada, no debe saber calcular la base. NOTA: 0 sobre 0,6.

L.T.: No hace nada. NOTA: 0 sobre 0,6.

S.Rua: Perfecto. NOTA: 0,6 sobre 0,6.

J.Pa.: NO lo hace. NOTA: 0 sobre 0,6.

J.S.: No hace nada. NOTA: 0 sobre 0,6

A.P.: Aunque las ecuaciones cartesianas que tiene son erróneas las de W1, sin embargo efectúa perfectamente el procedimiento de cálculo de las ecuaciones cartesianas de la intersección, añadiendo las de W1 a las de W2, NOTA: 0,6 sobre 0,6

E.S.: Perfecto, construye ecuaciones cartesianas de la intersección resuelve y obtiene las paramétricas de donde deduce una base. NOTA: 0,6 sobre 0,6

D.R.: Hace un planteamiento raro, para definir ecuaciones de la intersección coge una combinación lineal de vectores q1[@1 ,2 @1/3 , -@1/3 ,0] + q2[@2,0,@3,0]=[0,0,0,0] ¿ nada de significado? No sabe lo que es base?. NOTA: 0

J.R.: Perfecto. NOTA: 0,6

1.e) Obtener las ecuaciones cartesianas de W1+W2. En este caso se trata de obtener un sistema de generadores de W1 y W2 y luego agruparlos. Como el de W1 ya le tenemos por datos del problema (v2,v3,v4) y el de W2 lo hemos obtenido en (c) al hallar la base, entonces con los cinco vectore constrimos las ecuaciones paramétricas y eliminamos uno a uno por el procedimiento habitual los cinco parámetros y se obtienen como ecuaciones [x=x,y=y,z=z,t=t] luego W1+W2 = R4. (0,6 puntos)

RESPUESTAS:

C.S.: No hace nada. NOTA: 0 sobre 0,6

S.S.: Pone todas las ecuaciones cartesianas de W1 y W2 una tras otra y al resolver obtiene que la intersección está generada por el vector (1,0,1,0)
NOTA: 0,6 sobre 0’6

A.C.: No lo hace. NOTA: 0

S.R.: No hace nada. NOTA: 0 sobre 0,6

M.V.: No calcula bien la suma, no sabe calcularla, plantea mal. NOTA: 0

L.R.: Le ha faltado incluir un vwector de W1, que le falto en el apartado a) de otro modo el proceso de construcción está correcto. NOTA: 0,4 sobre 0,6.

J.I.G.: NO hace nada. NOTA:0 sobre 0,1.

L.T.: No hace nada. NOTA: 0 sobre 0,6

S.R.: Perfecto. NOTA: 0,6 sobre 0,6.

J.Pa.: No lo hace. NOTA: 0 sobre 0,6.

J.S. : No hace nada. NOTA: 0 sobre 0,6.

A.P.: No lo hace. NOTA: 0 sobre 0,6.

E.S.: No lo hace. NOTA: 0 sobre 0,6

D.R.: Para obtener las ecuaciones cartesianas de la suma hace una suma de vectores rara, no tiene claro. NOTA: 0

J.R.: No sabe calcular las ecuaciones de la suma, lo que hace es agrupar las de W1 que eran z=x+y-t y las de W2 que son y=0, t=0 y por tanto coge z=x, y=0, t=0. NOTA: 0,1

1.f) Este último apartado consiste en determinar si R4 se puede expresar como suma directa de W1 y W2, cuya respuesta es negativa claramente pues W1 y W2 tienen intersección no vacía como se vió en el apartado (d). (0,1 puntos)

RESPUESTAS:

C.S.: No razona bien.NOTA: 0 sobre 0,1

S.S.: Correcto pues su intersección es no vacia.
NOTA:0,1 sobre 0,1.

A.C.: No lo hace. NOTA: 0
S.R.: No hace nada. NOTA: 0 sobre 0,1
M.V.: No hace nada. NOTA: 0
L.R.: Perfecto. NOTA: 0,1 sobre 0,1
J.I.G.: No hace nada. NOTA: 0
L.T.: No hace nada. NOTA: 0 sobre 0,1.
S.R.: Perfecto. NOTA: 0,1 sobre 0,1.
J.Pa.: No lo hace. NOTA: 0 sobre 0,1
J.S.: No hace nada. NOTA: 0 sobre 0,1
A.P.: No lo hace. NOTA: 0 sobre 0,1
E.S.: No lo hace. NOTA: 0 sobre 0,1
D.R.: Dice que como W1 y W2 son R4 y por tanto no se puede expresar la suma???? NOTA:0 sobre 0,1
J.R.: No hace nada. NOTA:0

PROBLEMA 2: Dada la aplicación lineal f:R4→R4 definida por
f(x,y,z,t)=(k x – y + t, 2x+4z-t, x+y, 2x+y-z+t) con un parámetro k real.
Se pide:

2.a) Para k=1, es decir una aplicación lineal sin parámetros se pide obtener la matriz asociada a f respecto de la base canónica del espacio inicial y la base B2={(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0)} del final. El proceso en DERIVE debe comenzar definiendo la función para k=1. Luego definir los vectores de la base canónica que pueden ser e1,e2,e3,e4 y los vectores de la base B2 como v1,v2,v3,v4. Para obtener la matriz asociada hay que ir obteniendo columna a columna los datos de la siguiente forma resolviendo las ecuacioens vectoriales: para la primera columna mediante la ecuación f(e1)=x1 v1 + x2 v2 + x3 v3 + x4 v4 , se obtiene como soluciones de xi (2,-1,2,-1)
f(e2)=x1 v1 + x2 v2 + x3 v3 + x4 v4, se obtienen (1,0,-1,-1)
f(e3)=x1 v1 + x2 v2 + x3 v3 + x4 v4, se obtienen (-1,1,4,-4)
f(e4)=x1 v1 + x2 v2 + x3 v3 + x4 v4 y se obtienen (1,-1,-1,2) con lo que se tienen las cuatro columnas de la matriz A. (0,6 puntos)

RESPUESTAS:
C.S.: Perfecto. NOTA: 0,6 sobre 0,.6
S.S.: Perfecto NOTA:0,6 sobre 0,6
A.C.: Define bien la aplicación lineal f para a=1, luego edita bien los vectores v1,v2,v3,v4, calcula las imágenes de los vectores de la base canónica y luego sus coordenadas. Perfecto. NOTA: 0,6 puntos
S.R.: Perfecto. NOTA: 0,6 sobre 0,6
M.V.: Perfecto. NOTA: 0,6 sobre 0,6.
L.R.: Perfecto. NOTA: 0,6 sobre 0,6.
J.I.G.: Plantea muy bien la aplicación lineal para k=1 y obtiene las imágenes de los vectores de la base canónica y luego va calculando las coordenadas de esas imágenes en la base final colocando esas coordenadas en columna. Muy bien el proceso. NOTA: 0,6 sobre 0,6
L.T.: Define bien la matriz asociada, y calcula bien las imágenes de los vectores de la base B1, y considera que las imágenes son las columnas de la matriz asociada a B1, también calcula las imágenes de los vectores de la base pero sin embargo no calcula sus coordenadas en la base B2, es decir, que las imágenes de cada una de las bases generan dos bases distintas, no tiene claro el proceso de construcción de la matriz asociada respecto a dos bases distintas en el espacio inicial y final. NOTA: 0,2 sobre 0,6
S.R.: Perfecto. NOTA: 0,6 sobre 0,6.

<u>J.Pa.:</u> Define bien los vectores de la base B1, los de la base B2, la aplicación lineal de forma general, y obtiene las coordenadas de las imágenes de cada vector de la base B1 en la base B2, de forma general y luego para el cso k=1, lo hace perfecto. NOTA: 0,6 sobre 0,6.

<u>J.S.:</u> Define bien la aplicación lineal para k=1, y luego calcula las imágenes de los vectores de B2, y define una matriz , luego rectifica y calcula las imágenes de los vectores de la base canónica, pero no calcula sus coordenadas en la base B2. NOTA: 0,2 sobre 0,6. Define primero bien la aplicación lineal en el caso general, luego la vuelve a definir para k=1, pero toma una variable distinta, es decir primero hace f(u):=[k u1......] y luego f(v):= [1.u2....] esa v, no se corresponde, por lo que le da resultados erróneos. de tal forma que la última definición es la válida y claro al intentar calcular la imagen de cualquier vector le sale la propia definición con ui ... De hecho al hacer los intentos para calcular las coordenadas de las imágenes de los vectores de B2 respecto de la misma base plantea bien f([1,0,0,0]) = a [1,1,1,1]+b[1,1,1,0] + c [1,1,0,0] + d [1,0,0,0] que al simplificar le da un resultado que ni el mismo entiende. DERIVE en este caso por un leve error le ha complicado bastante el cálculo. NOTA: 0,2 sobre 0,6

<u>E.S.:</u> Perfecto desarrollo. NOTA: 0,6 sobre 0,6

<u>D.R.:</u> Plantea una matriz sobre k, que sería la matriz asociada respecto de bases canónicas pero no de las bases dadas y luego calcula para k=1. NOTA: 0 sobre 0,6

<u>J.R.:</u> Perfecto. NOTA:0,6

2.b) Obtener la inversa de la matriz anterior si es posible. Para ello basta con calcular el determinante de la matriz y se observa que sale cero, por lo que no tiene inversa. (0,1 puntos)

<u>RESPUESTAS:</u>

<u>C.S.:</u> No ha sabido deducir que no tenía inversa se ha limitado a realizar el cálculo con el parámetro k no se da cuenta que para k=1 no tiene inversa . NOTA: 0 sobre 0,1

<u>S.S.</u>: Perfecto NOTA:0,1 sobre 0,1.

<u>A.C.:</u> Intenta calcular la inversa de la matriz y claro como no tiene para k=0, resulta que deja la operación indicada ¡problema de interpretación de lo que saca derive¡NOTA:0 puntos.

<u>S.R.:</u> Perfecto. NOTA: 0,1 sobre 0,1

<u>M.V.:</u> Perfecto. NOTA:0,1

<u>L.R.</u>: Perfecto. NOTA: 0,1 sobre 0,1.

<u>J.I.G.</u>: Calcula el determinante y como sale nulo, afirma que no tiene inversa. NOTA 0,1 sobre 0,1.

<u>L.T.:</u> Calcula la inversa y como no le sale, luego calcula el determinante y ve que le da cero, por lo que concluye que no tiene inversa, aunque hace todo esto sobre una matriz que no era la adecuada. NOTA: 0,1 sobre 0,1

<u>S.Rua:</u> Perfecto. NOTA: 0,1 sobre 0,1.

<u>J.Pa.:</u> Calcula el determinante de la matriz definida antes y sale cero por lo que afirma que no se puede calcular inversa. NOTA:0,1 sobre 0,1.

<u>J.S.:</u> Aunque parte de la matriz mal definida, intenta primero aplicar función ROW_REDUCE y lo le sale, porque la escribe mal, ella escribe “row reduce” sin el subrayado , luego lo intenta con la forma directa y observa que DERIVE deja indicada la operación de donde deduce que no es posible obtener la inversa. Es una alternativa, aunque el método correcto sería calcular el determinante. NOTA:0,1 sobre 0,1.

<u>A.P.:</u> No lo hace. NOTA: 0 sobre 0,1

<u>E.S.:</u> Afirma que para obtener la inversa tiene que resolver la ecuación A.R = identity_matriz(4), pero no había definido previamente la matriz R, con lo que obtiene unas ecuaciones sin sentido, de ellas deduce que no tiene inversa A. NOTA:0 sobre 0,1.

<u>D.R.:</u> Intenta obtener la inversa y como no le sale, calcula su determinante y le sale cero, con lo cual dice que no tiene inversa. Aunque no lo hace sobre la matriz adecuada, sin embargo entiende bien el proceso a realizar. NOTA: 0,1 sobre 0,1.

<u>J.R.:</u> Perfecto. NOTA:0,1

2.c) Calcular la matriz B asociada a f respecto de las bases canónicas para cualquier valor de k. para resolver el apartado, hay que plantear la aplicación lineal f con el parámetro k, y luego se define B:= [f(e1),f(e2),f(e3),f(e4)]` (obsérvese que se pone porque son columnas no filas). $B = \begin{pmatrix} k & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **(0,4 puntos)**

RESPUESTAS:

C.S.: Perfecto. NOTA: 0,4 sobre 0,4

S.S.: Perfecto. NOTA:0,4 sobre 0,4.

A.C.: Redefine bien la aplicación lineal para k cualquiera. Calcula imágenes del vector en bases canónicas y plantea bien la matriz b. Perfecto. NOTA: 0,4 puntos.

S.R.: Perfecto. NOTA: 0,4 sobre 0,4

M.V.: Perfecto. NOTA: 0,4.

L.R.: Perfecto. NOTA: 0,4 sobre 0,4.

J.I.G.: Plantea bien la aplicación genérica respecto cualquier k, y luego calcula la imágenes de los vectores de la base canónica, los cuales los coloca en columna, perfecto. NOTA: 0,4 sobre 0,4.

L.T.: Calcula bien las imágenes de los vectores de la base canónica pero los coloca en fila en vez de en columnas, por lo que obtiene la matriz traspuesta. NOTA: 0,2 sobre 0,4.

S.Rua: Perfecto . NOTA: 0,4 sobre 0,4.

J.Pa.: Utiliza el proceso anterior con f definida para todo k, perfecto. NOTA: 0,4 sobre 0,4.

J.S.: Redefine bien la aplicación lineal para un parámetro k cualquiera, luego calcula las imágenes de los vectores de la base canónica y define mal la matriz porque pone los vectores en fila en vez de poner estas imágenes en columna. NOTA: 0,2 sobre 0,4.

A.P.: No lo hace. NOTA: 0 sobre 0,4

E.S.: Perfecto. 0,4.

D.R.: Obtiene una matriz que no es la matriz adecuada, no se sabe de donde sale. NOTA: 0 sobre 0,4.

J.R.: Perfecto. NOTA: 0,4

2.d) Estudiar para qué valores de k, la matriz anterior tiene inversa: se plantea la ecuación det(B)=0 cuya solución es k=1. Luego sólo tiene inversa si k es distinto de 1. (0,1)

RESPUESTAS:

C.S.: Perfecto. NOTA:0,1 sobre 0,1

S.S.: Perfecto NOTA: 0,1 sobre 0,1.

A.C.: Correcto. NOTA: 0,1

S.R.: Perfecto. NOTA: 0,1 sobre 0,1

M.V.: Perfecto. NOTA: 0,1

L.R.: Perfecto. NOTA:0,1 sobre 0,1.

J.I.G.: Determina con el determinante que para k=1 el determinante es cero, valores para los cuales no es invertible. NOTA:0,1 sobre 0,1.

L.T.: Perfecto, a traves del determinante obtiene que el valor k=1 es para el cual no hay inversa y para el resto de valores sí. NOTA: 0,1 sobre 0,1.

S.Rua: Perfecto. NOTA: 0,1 sobre 0,1.

J.Pa.: Perfecto. NOTA: 0,1 sobre 0,1.

J.S.: Considera para k=2, como sería la inversa de la matriz que ha definido (mal porque es la traspuesta de la pedida) en el apartado anterior, y obtiene que sí hay inversa, hace lo mismo para k=5, para k=-1 para k=77 y para esos casos obtiene la inversa, sin embargo para k=1 no la obtiene.

Aunque es cierto que para k=1 no tiene inversa, este procedimiento casuístico, no es el procedimiento adecuado , lo suyo hubiera sido calcular el determinante, en todo caso se la puntúa porque ha experimentado algo. NOTA:0,1 sobre 0,1.

A.P.: No lo hace. NOTA: 0 sobre 0,1

E.S.: Incorrecto. Nota: 0.

D.R.: Sobre la matriz anterior efectúa bien el proceso y determina los valores . Nuevamente no es sobre la matriz adecuada, pero entiende el procedimiento. NOTA: 0,1 sobre 0,1.

J.R.: Perfecto. NOTA:0,1

2.e) Calcular la inversa de B para k=2, usando método de Gauss-Jordan. Consideramos primero la matriz B para ese valor y se van efectuando los paso de Gauss-Jordan.Lo normal es realizarlo aproximadamente en 6 pasos (0,8 puntos).

RESPUESTAS:

C.S.: No sabe aplicar el método. NOTA: 0 sobre 0,8

S.S.: Perfecto, utiliza 6 paso de Gauss-Jordan. NOTA: 0,8 sobre 0,8.

A.C.: Efectúa bien el proceso para convertir la primera columna en el vector (1,0,0,0) pero le falta proceso. NOTA: 0,3 puntos.

S.R.: Hace bien el método de Gauss-Jordan en 11 pasos. NOTA: 0,8 sobre 0,8

M.V.: No hace nada. NOTA:0

L.R.: Calcula la inversa pero de forma directa sin usar Gaus-Jordan, lo cual es incorrecto. NOTA: 0 sobre 0,8

J.I.G.: Construye la matriz para k=2, y con 14 pasos de Gauss-Jordan construye la inversa, que luego comprueba que está bien calculada. NOTA: 0,8 sobre 0,8.

L.T.: Aunque toma una matriz que no era la adecuada, sin embargo efectúa el proceso de Gauss Jordan en 8 pasos de manera correcta. NOTA: 0,8 sobre 0,8

S.Rua: Perfecto lo hace además en 4 pasos ¡¡ muy bien¡¡ . NOTA: 0,8 sobre 0,8.

J.Pa.: No , intenta hacer algo, pero no concluye nada. NOTA: 0,2 sobre 0,8.

J.S.: Intenta aplicar el método de Gauss-Jordan que viene implementado en DERIVE por la función ROW_REDUCE; pero como en un apartado anterior primero le sale mal, luego lo aplica mal y le sala la matriz identidad, y no hace más. Debía darse cuenta que esa no era la inversa. NOTA: 0,2 sobre 0,8

A.P.: No lo hace. NOTA: 0 sobre 0,8

E.S.: Calcula la inversa usando el comando ^(-1) pero no usa el método de Gauss Jordan. NOTA:0,1 sobre 0,8

D.R.: Calcula la inversa pero no por Gauss Jordan, NOTA: 0,4 sobre 0,8

J.R.: No aplica el proceso de Gauss-Jordan aplica la función ROW_REDUCE que hace lo mismo, pero no especifica cual es la inversa resultante. NOTA:0,6

2.f) Obtener la dimensión de la Im(f) y Ker(f) en función de los valores de k. Para esto basta tomar la matriz B, y estudiar el rango en función de k, y nos dará la dimensión de la imagen y luego utilizar la fórmula de las dimensiones. Para estudiar el rango de B en función de k, calculamos el determinante de B, que resulta cero si k =1, luego si k distinto de 1, el rango de B es 4, y en consecuencia dim(im(f))=4, y dim(Ker(f))=0. Por otro lado si k=1, se estudia con la función rank y sale 3. En cuyo caso dim(im(f))=3 y dim(Ker(f))=1. (0,5 puntos)

RESPUESTAS:

C.S.: Intenta algo sobre las dimensiones pero no concluye nada.
NOTA: 0,2 sobre 0,5.

S.S.: Perfecto. NOTA: 0,5 sobre 0,5.

A.C.: Plantea una ecuaciones vectoriales para ver si los vectores de la base son o no l.d., resulta que sí , pero no continua. NOTA: 0, 2

S.R.: Plantea mal pues en vez de tomar f([x1,x2,x3,x4])=[0,0,0,0] toma f(x1,x2,x3,x4)=[0,0,0,0] obteniendo en consecuencia resultados equivocados. No ha sabido manipular bien el significado de la aplicación lineal en DERIVE pues es la imagen de un vector, no la imagen de 4 componentes. NOTA: 0,2 sobre 0,5

M.V.: No hace nada. NOTA:0

L.R.: Sólo hace esl estudio para k=1. NOTA: 0,3 sobre 0,5.

J.I.G.: Intenta calcular el núcleo para lo cual plantea f([x,y,z,t])=[0,0,0,0], de forma genérica obtiene un sistema con un parámetro k, que al resolver le da que el núcleo es (0,0,0,0) , evidentemente este ejemplo es un poco sofisticado, pues en él DERIVE ¡engaña! En cierta forma al alumno ya que de hecho deduce, aunque el comprueba que la dimensión de la aplicación es 4. Pero hay un matriz, al resolver con DERIVE si hay un parámetro, DERIVE al resolver con este parámetro, ha dividido por el valor (3-3k) que en general no es cero, pero para k=1 se hace cero, en cuyo caso estaría efectuando una operación inválida. NOTA: 0,2 sobre 0,5.

L.T.: Perfecto el estudio a partir de los rangos de la matriz asociada de la base canónica y la fórmula de las dimensiones. NOTA: 0,5 sobre 0,5.

S.Rua: Perfecto. NOTA: 0,5 sobre 0,5.

J.Pa.: Intenta calcular el núcleo planteando f([x1,x2,x3,x4])=[0,0,0,0] y resulta que le sale el vector nulo, lujego intenta la imagen con f([1,x2,x3,x4])=[y1,y2,y3,y4] intentando eliminar los parámetros x2, x2, x3, x4, pero no acaba el proceso. Y no concluye en nada. NOTA: 0,2 sobre 0,5.

J.S.: No lo hace. NOTA: 0 sobre 0,5.

A.P.: No lo hace. NOTA: 0 sobre 0,5

E.S.: Plantea la ecuación para obtener el núcleo, y deduce que el vector (0,0,0,0) es el único que pertenece al núcleo, pero luego hace una afirmación incorrecta al decir que la dimensión del núcleo es 0 , en todo caso es incorrecto pues para k=1 el núcleo tiene que salir de dimensión 1. Por otro lado para calcular la dimensión de la imagen, hace un proceso correcto al intentar calcular su rango, para lo cual obtiene los valores para los que eld eterminante se anula se obtiene que para k distinto de 1 el rango es 4 y esa sería la dimensión de la imagen, y si k=1 su rango es 3, usa la función RANK, Muy bien el razonamiento salvo el caso del núcleo. NOTA: 0,3 sobre 0,5.

D.R.: No sabe. NOTA: 0 sobre 0,5

J.R.: Perfecto. NOTA: 0,5

PROBLEMA 3:

Dada la matriz paramétrica $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ **matriz asociada a cierta aplicación lineal, se pide:**

3.a) Estudiar para qué valores de a y b la matriz M es diagonalizable. Para ello definimos primer m(a,b) como la matriz dada y calculamos los autovalores de M en función de a y b, a traves de la definición, es decir det(m(a,b)-k identity_matrix(3)) = … después de factorizar el polinomio que se obtiene obtenemos que los autovalores son a, 2, 3. Por tanto estudiamos los siguientes casos. 1) Si a distinto de 2 y de 3 la matriz siempre es diagonalizable. 2) Si a=2, entonces se estudia el subespacio asociado al autovalor 2, y resulta que depende de b, de tal forma que si b=4 es diagonalizable y si b distinto de 4 no, por último 3) si a=3, estudiamos el subespacio asociado al autovalor 3, y resulta que depende de b, lo cual obliga a estudiar rango y resulta que si b=2 es diagonalizable y si b distinto de 2 no. (1 punto)

RESPUESTAS:

C.S.: Calcula los autovalores correctamente pero confunde que para que una matriz no sea diagonalizable su determinante no ha de ser nulo, gran error. NOTA: 0 SOBRE 1.

S.S.: Aunque calcula bien autovalores, sin embargo no hace bien el estudio dice que es diagonalizable sal a=3.NOTA: 0,2 sobre 1.

A.C.: Calcula con eigenvalues los autovalores de la matriz que la define bien dependiente de dos parámetros. Luego para a=2, como resulta que el determinante de la matriz para a=2, y b cualquiera le sale no nulo, entonces determina que no es diagonalizable, pero comoete un error, pues tenía que haber calculado el determinante de la matriz M(2,b)-2 Identidad, claro confunde las matrices y le da un resultado equivocado. Sin embargo para a=3 no lo estudia. NOTA: 0,4 puntos.

S.R.: Plantea bien en derive los autovalores, y los calcula, pero a la hora de calcular los autovectores del 2, resulta que no se da cuenta que está manejando un parámetro, por otro lado calcula con RANK una matriz con un parámetro. NOTA:0,7 sobre 1.

M.V.: Tan solo calcula autovalores y afirma que es diagonalizable si los tres son distintos. NOTA: 0,2.

L.R.: Al intentar obtener las soluciones del sistema [-x+y+2z=0, -x+2y+bz=0,0,0] obtiene la solución [x=@2,y=@2,z=0] y claro es incorrecta pues depende el parámetro b, hace mal esl estudio, no debe estudiar los autovectores si la dimensión de los subespacios usando rangos. NOTA: 0,7 sobre 1.

J.I.G.: Hace una discusión perfecta. NOTA: 1 sobre 1.

L.T.: Calcula bien los autovalores a,2,3, y afirma que es diagonalizable para cualquier valor de b, pero que tiene que estudiar el rango para a=2 y a=3. Para el caso a=2, estudia el determinante de la matriz para a=2, pero claro como le sale no nulo es porque el rango es completo y afirma que entonces es diagonalizable, pero tendría que haber estudiado el rango de las matrices M-2Id en este caso y para el caso a=3 de M-3Id, por lo que el resultado final de su conclusión "M será diagonalizable para todo valor de b y a (incluidos 2 y 3)" es erróneo. NOTA: 0,2 sobre 1

S.Rua: Afirma que es diagonalizable si a distinto de 2 y 3, pero al ewstudiar el caso a=2, resulta que obtiene al resolver el sistema que las soluciones son [x=@1, y=@1, z=0], evidentemente el sistema que tenía contenía un parámetro, por lo que lo propio hubiera sido en vez de obtener los subespacios de autovectores, calcular sus dimensiones en funcion de b, pues en este caso DERIVE ha engañado al alumno. Lo mismo le sucede con a=3. NOTA: 0,7 sobre 1.

J.Pa.: Estudia los autovalores saca a, 2,3 para a distinto de 3 y 2 deduce con un ejemplo que es diagonalizable y para los otros casos realiza una distinción de casos equivocada pero con cierta intención. NOTA:0,7 sobre 1.

J.S.: Obtiene bien los autovalores con EIGENVALUES, luego intenta calcular los autovectores pero en uno de los casos no considera bien los paréntesis, es decir hace h-2 i [x,y,z]=[0,0,0] en vez de (h-2I)[x,y,z]=[0,0,0] y claro obtiene un resultado incorrecto, además intentan obtener autovectores para el parámetro a, obtniendo un resultado raro, luego define la matriz para b=3,a=2, y obtiene dos autovalores, y no hace nada, luego estudia la matriz para a=1 y b=5 y obtiene sus autovalores, concluye que si b=1 y a=5 la matriz es digonalizable, pero es un estudio casuístico y no detallado. NOTA: 0,3 sobre 1

A.P.: Estudia los autovalores en general y le salen 2,3,a, luego determina que para a distintos de 2 y 3 la matriz es diagonalizable y luego estudia qué sucede si a=3. , detecta que si b=2 es diagonalizable, luego para a=2 y afirma que si b=3 si es diagonalizable, situación incorrecta. No completa el estudio. NOTA: 0,7 sobre 1

E.S.: Calcula los autovalores, y obtiene que son a,2,3. Luego para cada uno de dichos autovalores intenta obtener autovectores y los obtiene bien, pero claro luego no sabe decidir cuando es diagonalizable, pues plantea una matriz P que depende de los parámetros a y b en su tercer vector columna y no sabe operar. NOTA: 0,2 sobre 1.

D.R.: Calcula los autovalores y deduce solo una parte que es diagonalizable si a distinto de 2 y 3, pero no estudia más casos. NOTA: 0,4 sobre 1.

J.R.: Calcular los autovalores y luego afirma que todos son distintos, no considera que a podría valer 2 o 3, sin embargo los calculos de autovectores los entiende bien. No discute la diagonalización. NOTA: 0,3

3. b) Para los valores a=3 y b=2, diagonalizar. Es un proceso repetitivo, que nos permite obtener la matriz diagonal que es de 2,3,3 y la matriz de paso [[1,1,0],[1,0,1],[0,1,-1/2]] (0,8 puntos)

RESPUESTAS:

C.S. : Perfecto. NOTA 0,8 sobre 0,8.

S.S.: Diagonaliza perfectamente. NOTA 0,8 sobre 0,8.

A.C.: Perfecto. NOTA 0,8 puntos.

S.R.: Calcula los autovalores, pero no los autovectores. De hecho para calcular la matriz de paso tan solo la plantea y además con errores de forma genérica. NOTA 0,2 sobre 0,8

M.V.: Perfecto. NOTA 0,8

L.R.: Perfecto. NOTA 0,8 sobre 0,8

J.I.G.: Diagonaliza perfectamente y además luego comprueba. NOTA : 0,8 sobre 0,8

L.T.: Perfecto proceso de diagonalización. NOTA 0,8 sobre 0,8

S.Rua: Perfecto. NOTA 0,8 sobre 0,8.

J.Pa.: Calcula autovalores y dice que se repetía el 3, es decir autovalores 3,3,2 y luego calcula bien la matriz de paso, pero al definir la matriz diagonal, obtiene la misma definiéndola de forma genérica y resolviendo la ecuación matricial p.d.p(-1) = a , y claro obtiene la matriz d. Forma original de diagonalizar. NOTA 0,6 sobre 0,8.

J.S.: Para a=3, b=2 obtiene sus autovalores, le salen 2 y 3, luego al estudiar los autovectoes, aunque hace bien el proceso con DERIVE; luego no interpreta bien y resulta que de la ecuación paramétrica [x=@4, y=@5, z=(2@4-@5)/2] deduce que dos autovectores l.i. son (1,2,0), (1,1,0) es decir obtiene mal la matriz de paso. Problema de interpretación de los datos ofrecidos con DERIVE. Es mas al intentar luego la comprobación p.d.p(-1) no obtiene la matriz que tenía que salir, incluso obtiene que det(p)=0 luego sabe que ha hecho mal el problema. NOTA 0,4 sobre 0,8.

A.P.: Perfecto. NOTA 0,8 sobre 0,8

E.S.: Efectua bien el cálculo de polinomio característico, autovalores y autovectores, únicamente tiene un error de un signo en la matriz de paso, al extraer información de las ecuaciones paramétricas, un error que le provoca que al efectuar la comprobación p.d.p^{-1} resulte que no le da la matriz a, lu cual le lleva a afirma "podemos apreciar que no es diagonalizable". NOTA 0,5 sobre 0,8

D.R.: Calcula para este caso los autovalores, y afirma "al haber un autovalor repetido sabemos que no es diagonalizable" incorrecto del todo, y dice que claro no es diagonalizable. NOTA 0,1 sobre 0,8

J.R.: Perfecto. NOTA 0,8

3.c) Para b=0 se considera la matriz J=1/2 (-M-Mt), y se pide obtener la forma cuadrática q(x)=xtJx. Primero se ha de obtener la matriz J que resulta ser simétrica si se opera bien resultando ser J(a) = $\begin{pmatrix} -1 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & -a \end{pmatrix}$ **de pendiente del parámetro a. Obtener la forma cuadrática es fácil basta operar [x,y,z]` J(a) [x,y,z] resultando** $-x^2+x(y-2z)-4y^2-az^2$ **(0,2 puntos)**

RESPUESTAS:

C.S.: Perfecto. NOTA: 0,2 sobre 0,2

S.S.: COMENTARIO:Calcula la matriz J, pero no construye la forma cuadtática NOTA: 0,1 sobre 0,2.

A.C.: Perfecto. NOTA: 0,2 puntos.

S.R.: Calcula mal la matriz J(a) pues es justo la opuesta. ha debido cometer un leve error de signo al definir la matriz. NOTA: 0,2 sobre 0,2

M.V.: Plantea o calcula mal la matriz, NOTA: 0.

L.R.: Perfecto el cálculo de la matriz simétrica y de la construcción de la forma cuadrática. NOTA: 0,2 sobre 0,2.

J.I.G.: Calcula bien la matriz y su forma cuadrática. NOTA: 0,2 sobre 0,2.

L.T.: No lo hace. NOTA: 0 sobre 0,2

S.Rua: Perfecto. NOTA: 0,2 sobre 0,2.

J.Pa.: Determina correctamente J y la forma cuadrática. NOTA: 0,2 sobre 0,2.

J.S.: No obtiene bien la matriz. NOTA: 0,1 sobre 0,2.

A.P.: Obtiene bien la matriz J(a) pero luego no sabe definir la forma cuadrática. q(x,y,z). NOTA: 0,1 sobre 0,2

E.S.: Calcula bien la matriz, pero no extrae la forma cuadrática. NOTA: 0,1 sobre 0,2.

D.R.: Calcula J(a) pero con b cualquiera, le hubiera faltado que b=0. NOTA: 0,1 sobre 0,2.

J.R.: Calcula la matriz J(a) pero no obtiene la forma cuadrática. NOTA: 0,2

3.d) Clasificar para los distintos valores del parámetro a, la forma cuadrática anterior. Para ello calculamos primero d1, vemos que es negativo, d2 vemos que es positivo, y ahora al calcular d3 se obtiene 4-15 a/4 , al estudiar cuando es negativo para ver cuando es d.n. sale a>16/15 lueso es d.n. si a>16/15, si a<16/15 es indefinida calarmente, y falta para a=16/15, en cuyo caso aplicando autovalores eigenvalues(j(16/15)) se obtienen autovalores aproximados, que son 2 negativos y un positivo luego es s.d.n. si a=16/15. (1 punto)

RESPUESTAS:

C.S.: Perfecta la clasificación. NOTA: 1 sobre 1.

S.S.: Clasifica mal para el caso a>16/15, el dice que es en ese caso indefinida, cuando es d.negativa. NOTA: 0,4 sobre 1

A.C.: Lo hace todo perfecto, solo confunde el signo de la a, y claro obtiene un error, pero el proceso es perfecto. NOTA: 1 punto

S.R.: Salvo el error cometido, clasifica bien la forma cuadrática. NOTA: 1 sobre 1.

M.V.: Clasifica sobre una matriz que no es, y además no es ni siquiera la matriz simétrica. NOTA:0,4.

L.R.: Hace algún planteamiento pero genérico solo estudia en el caso que el determinante es cero donde efectivamente es .d.n. pero no da el valor , luego considera generalización sin estudiar nada. NOTA: 0,2 sobre 1.

J.I.G.: No lo hace. NOTA: 0 sobre 1.

L.T.: No lo hace. NOTA: 0 sobre 0,2

S.Rua: Perfecto. NOTA: 1 sobre 1.

J.Pa.: Aunque en el apartado anterior tenía bien definida la matriz asociada sin embargo aquí construye otra que consiste en multiplicar en J todos los elementos que no estan en diagonal principal por 2, Cklasifica en base a esa nueva matriz. Aunque la clasifica bien. NOTA: 0,8 sobre 1.

J.S.: No hace nada. NOTA: 0 sobre 1

A.P.: Al clasificarla utilizando menores principales, calcula d1 le sale negativo, d2 le sale positivo y hace la siguiente afirmación “tenemos un menor principal negativo y otro positivo, por tanto no puede ser ni definida positiva, ni negativa” un razonamiento del todo incorrecto, únicamente clasifica bien para el caso a=16/15 que la clasifica como s.d.n. NOTA: 0,6 sobre 1.

E.S.: Calcula el determinante de la matriz simétrica asociada, le sale nulo su a=16/15, si a>16/15 por ejemplo toma a=2, resulta que el determinante le sale negativo, en cuyo caso calcula d2, que dice ser negativo en ese caso, no lo ha calculado con DERIVE lo hace mentalmente y se confunde, por ello afirma que es indefinida en a>16/15, luego para a=16/15 aplica autovalores, s.d.n. correcto, y luego clasifica para a entre 0 y 16/15 afirma que es d.n. Es incorrecta la clasificación pero tiene una idea clara el proceso. NOTA: 0,5 sobre 1.

D.R.: Calcula menores pero no sabe donde llegar. NOTA: 0 sobre 1.

J.R.: Perfecto. NOTA: 1

PROBLEMA 4:

4.a) Discutir según valores del parámetro t, el sistema no homogéneo. Se plantean la matriz ampliada M(t) = $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ t & t & t & 1 \end{pmatrix}$ **y la matriz C(t):= delete_element(M(t)',4)'. La matriz de coeficientes tiene rango máximo si det(C(t)) distinto de 0, como det(C(t))=t resulta que rg(C)=3 si t distinto de cero, en cuyo caso el sistema es compatible determinado. Luego si t=0, basta estudiar con RANK, RANK(m(0)) = 3, RANK(c(0))=2, en cuyo caso el sistema es incompatible. (1 punto)**

RESPUESTAS:

C.S.: Comete el error de calcular el rango de la matriz paramétrica usando RANK lo cual le produce un error a lo largo del problema. NOTA: 0,1 sobre 1.

S.S.: No hace nada NOTA:0 sobre 1.

A.C.: Perfecto. NOTA: 1 punto.

S.R.: Perfecto. NOTA: 1 sobre 1.

M.V.: Perfecto. NOTA:1

L.R.: Perfecto. NOTA: 1 sobre 1.

J.I.G.: Hace bien la distinción de casos t =0 o distinto de cero, pero al tratar el caso t=0, no sustituye su valor, y en consecuencia al estudiar el rango de la matriz ampliada, obtiene otro valor distinto de t, con lo cual obtiene un pequeño lio. NOTA: 0,4 sobre 1.

L.T.: No lo hace. NOTA: 0 sobre 1.

S.Rua: Perfecto. NOTA: 1 sobre 1.

J.Pa.: Perfecta resolución. Usando RANK en caso de matrices constantes. NOTA: 1 sobre 1.

J.S.: No hace nada. NOTA: 0 sobre 1

A.P.: La primera afirmación es que “solo con observar el sistema, se ve que si t=0 el sistema es incompatible, porque 0+0+0=1 no se puede cumplir”, luego plantea el sistema de forma general y la matriz de coeficientes. resuelve y obtiene soluciones dependientes de t, pero luego para estudiar los valores de t, obtiene dos valores t=2/(2-x) y t=3/(z+4) y deduce que para estos valores el sistema es incompatible, ¡no hace una buena discusión! A continuación plantea varios ejemplos para distintos valores de t. NOTA: 0,2 sobre 1.

E.S.: Perfecto NOTA: 1 sobre 1.

D.R.: Correcto el razonamiento. NOTA: 1 sobre 1.

J.R.: Perfecto. NOTA:1

4.b) Se trata de un problema de planteamiento de un sistema: un ingeniero requiere 4.800 metros cúbicos de arena, 5819 de grava fina y 5690 de grava gruesa para la cosntrucción de un proyecto. Existen tres bancos donde puede obtener dichos materiales siendo la composición de cada banco $\begin{pmatrix} banco & arena & \mathrm{gra}\,va-fina & \mathrm{gra}\,va-gruesa \\ 1 & 52 & 30 & 18 \\ 2 & 20 & 50 & 30 \\ 3 & 25 & 20 & 55 \end{pmatrix}$ **se pide ¿cuántos metros cúbicos deberán tomar de cada banco para cumplir con las necesidades del ingeniero?. El modelo a plantear sería el siguiente:**

x: cantidad del banco 1, y: cantidad del banco 2, z=cantidad del banco 3

0.52 x + 0.20 y + 0.25 z = 4800

0.30 x + 0.50 y + 0.20 z = 5819

0.18 x + 0.30 y + 0.55 z = 5690

y al resolver se obtienen

x= 344685/86 y= 618169/86 z= 219860/43 es decir aproximadamente
x=4007.96 y= 7188.01 z= 5113.02 (1 punto)

RESPUESTAS:

C.S.: No lo hace. NOTA:0 sobre 1

S.S.: Planteamiento correcto salvo que no considera porcentajes. NOTA: 0,4 sobre 0,5.

A.C.: No lo hace.

S.R.: Perfecto el planteamiento y resolución. NOTA: 0,5 sobre 0,5

M.V.: No tiene en cuenta que son porcentajes, pero el planteamiento está bien. NOTA: 0,4.

L.R.: Toma mal el modelo al construir justo la matriz traspuesta. NOTA: 0,2 sobre 0,5.

J.I.G.: Perfecto planteamiento y resolución. NOTA:0,5 sobre o,5

L.T.: Plantea perfectamente, el problema con sus porcentajes, y resuelve muy bien. NOTA: 0,5 sobre 0,5.

S.Rua: Perfecto. NOTA: 0,5 sobre 0,5.

J.Pa.: Tiene un error en el planteamiento pues coge una matriz que debería ser la traspuesta. NOTA: 0,2 sobre 0,5.

J.S.: No hace nada. NOTA: 0 sobre 0,5.

A.P.: No lo hace. NOTA: 0 sobre .

E.S.: Le ha faltado multiplicar por 100 pero el resto está bien. NOTA: 0,5 sobre 0,5.

D.R.: Plantea y resuelve bien. NOTA:0,5

J.R.: Perfecto. NOTA: 1 punto

3. CUADRO DE PUNTUACIONES OBTENIDAS POR LOS ALUMNOS SUBGRUPO A.

CALIFICACIONES DE LA ASIGNATURA MATEMATICAS II. SUBGRUPO EXPERIMENTAL A. "Matemáticas II con DERIVE"

ALUMNO	Teor	Prob	NOTA	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	P1A	P1B	P1C	P1D	P1E	P1F	P2A	P2B	P2C	P2D	P2E	P2F	P3A	P3B	P3C	P3D	P4A	P4B
Cuellar, Antonio	3,5	5	4,25	0	0,5	0,5	1	0	1	0	0	0	0,5	0,1	0,1	0	0	0	0	0,6	0	0,4	0,1	0,3	0	0,4	0,8	0,2	1	1	0
Gómez, Jose Ivanor	7	7,3	7,15	1	1	1	0	0,5	0	1	1	1	0,5	0,6	0,7	0,4	0,6	0	0	0,6	0,1	0,4	0,1	0,8	0,2	1	0,8	0,2	0	0,4	0,4
Perpiña, Antoni	4,5	3,2	3,85	0	0,5	0,5	0	0	0	1	1	1	0,5	0,1	0	0,2	0,4	0	0	0,1	0	0	0	0	0	0,7	0,8	0,1	0,6	0,2	0
Revuelto, Jorge	5,5	8,4	6,95	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0,5	0,6	0,7	0,4	0,6	0,1	0	0,6	0,1	0,4	0,1	0,6	0,5	0,3	0,8	0,1	1	1	0,5
Rosado, Sebastian	3,5	8,1	5,8	1	1	0,5	0	1	0	0	0	0	0	0,6	0,7	0,4	0,6	0	0	0,6	0,1	0,4	0,1	0,8	0,2	0,7	0,2	0,2	1	1	0,5
Rúa Navarro, Sergio	8	9,7	8,85	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0,6	0,7	0,4	0,6	0,6	0,1	0,6	0,1	0,4	0,1	0,8	0,5	0,7	0,8	0,2	1	1	0,5
Rubiano, Daniel	5	3,4	4,2	1	1	0	1	0	0,5	0	0	1	0,5	0,2	0	0,1	0	0,4	0	0	0,1	0,4	0,1	0	0	0,4	0,1	0,1	0	1	0,5
Rubio , Laura	8	7,1	7,55	1	1	0,5	1	1	1	0	1	1	0,5	0,4	0,7	0,4	0,6	0,3	0,1	0,6	0,1	0,4	0,1	0	0,3	0,7	0,8	0,2	0,2	1	0,2
Santos, Sergio	3,5	6,3	4,9	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0,5	0,6	0,7	0,4	0,6	0	0,1	0,6	0,1	0,4	0,1	0,8	0,5	0	0	0	0	1	0,4
Sanz Castro, Jessica	4	1,7	2,85	1	0,5	1	0	0	0	0	0	1	0,5	0	0	0	0	0	0	0,2	0,1	0,4	0,1	0,2	0	0,3	0,4	0	0	0	0
Sanz, Eduardo	4,5	6,1	5,3	1	0,5	0,5	0	0,5	0	0	1	1	0	0,6	0,7	0,1	0,6	0	0	0,6	0	0,4	0	0,1	0,3	0,2	0,5	0,1	0,5	1	0,4
Sevilla Casares, Cristina	1,5	4,3	2,9	0	0,5	0	0	0,5	0	0	0	0	0,5	0,1	0,4	0	0	0	0	0,6	0	0,4	0,1	0,2	0,2	0,2	0,8	0,2	1	0,1	0
Tarno, Luis	9,5	5,3	7,4	0,5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,6	0,7	0,4	0	0	0	0,2	0,1	0,2	0,1	0,8	0,5	0,4	0,8	0	0	0	0,5
Trigo, Juan Pablo	4	5,9	4,95	0,5	0	0,5	0	0	0	0	1	1	1	0,1	0,7	0	0	0	0	0,6	0,1	0,4	0,1	0,2	0,2	0,7	0,6	0,2	0,8	1	0,2
Verdú Aguilar, María	3,5	6,7	5,1	0	0	1	1	0,5	0	0	0	0	1	0,3	0,7	0,4	0,6	0,3	0	0,6	0,1	0,4	0,1	0	0	0,2	0,8	0	0,8	1	0,4

	Teor	Prob	Tot	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	P1A	P1B	P1C	P1D	P1E	P1F	P2A	P2B	P2C	P2D	P2E	P2F	P3A	P3B	P3C	P3D	P4A	P4B
MEDIA	5,03	5,9	5,47	0,5	0,7	0,5	0,4	0,4	0,3	0,3	0,6	0,7	0,6	0,4	0,5	0,2	0,3	0,1	0	0,5	0,1	0,4	0,1	0,4	0,2	0,5	0,6	0,1	0,5	0,7	0,3
VARIANZA	4,73	4,62	3,18	0,2	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1	0	0,1	0	0	0	0	0	0	0,1	0	0,1	0,1	0	0,2	0,2	0
DESVIACION	2,18	2,15	1,78	0,5	0,4	0,4	0,5	0,4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,3	0,2	0,3	0,2	0,3	0,2	0	0,2	0	0,1	0	0,3	0,2	0,3	0,3	0,1	0,4	0,4	0,2
MEDIANA	4,5	6,1	5,1	0,5	1	0,5	0	0,5	0	0	1	1	0,5	0,4	0,7	0,4	0,6	0	0	0,6	0,1	0,4	0,1	0,2	0,2	0,4	0,8	0,1	0,6	1	0,4
MODA	3,5	####	####	1	1	0,5	0	0	0	0	1	1	0,5	0,6	0,7	0,4	0,6	0	0	0,6	0,1	0,4	0,1	0,8	0	0,7	0,8	0,2	1	1	0,5
NOTAS MAXIMAS				**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0,6**	**0,7**	**0,4**	**0,6**	**0,6**	**0,1**	**0,6**	**0,1**	**0,4**	**0,1**	**0,8**	**0,5**	**1**	**0,8**	**0.2**	**1**	**0,5**	**1**

CONTENIDO DEL EXAMEN FINAL DEL SUBGRUPO A

CONTENIDO DE LAS CUESTIONES

Cuestión 1: Determinar la dim. de un subespacio vectorial obteniendo una base de dicho subespacio, asi como la relación entre dimensión y nº ecuaciones
Cuestión 2: Estudio de la independencia lineal de tres vectores que contienen un parámetro
Cuestión 3: Identificar las características de una aplicación lineal, de tal forma que permita deducir que la imagen de cierto vector no puede ser el dado.
Cuestión 4: Deducir que el determinante de una matriz obtenida por combinaciones lineales de columnas de otra tiene el mismo determinante.
Cuestión 5: Aplicar el teorema de Rouché-Frobenius para determinar si un sistema es compatible indeterminado, en su versión de rangos y de la imagen
Cuestión 6: Determinar cuando un conjunto de autovectores de una matriz forman base del espacio total
Cuestión 7: Relacionar determinante, traza, autovalores y dimensión del subespacio de autovectores de cierta matriz.
Cuestión 8: Relacionar las formas cuadráticas que tiene por matrices asociada a una matriz A y su inversa, así como el carácter la la forma cuadrática.
Cuestión 9: Identificar cuando un conjunto del plano es un conjunto convexo utilizando definición.
Cuestión 10: Resolver gráficamente un programa lineal, y aplicar el teorema de Weierstrass.

CONTENIDO DE LOS PROBLEMAS

Problema 1a	Obtener una base de un subespacio vectorial del cual se tiene un sistema de generadores
Problema 1b	Obtener las ecuaciones cartesianas de un subespacio vectorial del cual se tiene un sistema de generadores
Problema 1c	Obtener una base de un subespacio vectorial del cual se tienen sus ecuaciones cartesianas
Problema 1d	Obtener una base del subespacio intersección de dos subespacios vectoriales
Problema 1e	Obtener las ecuaciones cartesianas del subespacio suma de dos subespacios vectoriales
Problema 1f	Deducir si el espacio total se puede obtener como suma directa de los subespacios vectoriales estudiados antes
Problema 2a	Dada una aplicación lineal obtener la matriz asociada a f respecto de la base canónica en el espacio inicial y otra base distinta
Problema 2b	Obtener si es posible la inversa de la matriz anterior
Problema 2c	Calcular la matriz asociada a una aplicación lineal con un parámetro respecto de las bases canónicas en espacio inicial y fina
Problema 2d	Dada una matriz cuadrada con un parámetro estudiar para qué valores de dicho parámetro esa matriz tiene inversa
Problema 2e	Calcular la inversa de cierta matriz constante utilizando el método de GAUSS-JORDAN
Problema 2f	Obtener la dimensión de la Im(f) y Ker(f) en función de distintos valores del parámetro k que contiene la aplicación lineal f
Problema 3a	Dada una matriz cuadrada con dos parámetros estudiar para qué valores de dichos parámetros dicha matriz es diagonalizabl
Problema 3b	Dada una matriz cuadrada constante de orden 3, diagonalizar dicha matriz
Problema 3c	Obtener la forma cuadrática que tiene por matriz asociada cierta matriz simétrica
Problema 4a	Discutir un sistema según los distintos valores de un cierto parámetro t.
Problema 4b	Plantear el sistema de ecuaciones que resuelve cierto problema concreto.

4. CUADRO DE PUNTUACIONES OBTENIDAS POR LOS ALUMNOS DEL SUBGRUPO B.

CALIFICACIONES GRUPO 1A4 MATEMATICAS II SIN DERIVE																		
Apellidos, Nombre	junio	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	P1A	P1B	P2A	P2B	P2C	TEOR	PROB	Tipo
Agueda Corneloup, Alexis de	SS	1	0,5		0	0	0	0	0	0	0	1,5	1,9	0,4	2	1,2	1,5	7	2
Andújar, M. Elena	AP	1	0,5	0	0	0,5	1	0,5	1	1	0,5	0,5	0	2,5	2	0	6	5	4
Ansar Dezfouli, Behnoud	SS	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0,5	0,6	0,8	0	1,5	1,2	3,5	4,1	2
Arco Pardo, Javier del	NT	1	0	0,5	0	0,5	1	0	0	1	0,5	1,5	0,3	2,5	2	2	4,5	8,3	1
Berga Montarleit, Elena	NT	1	0,5	1	1	0	0	1	1	0	1	1,5	1	0,7	2	2	6,5	7,2	4
Camin, Canellas, Lucía	SS	1	1	0,5	0	0	0	0	1	0	0	0,2	2	0,2	0,2	0	3,5	2,6	4
Contreras Bueno, Alejandro	SS	0	0,5	0,5	1	0	0	0	1	0	0,5	1,5	0,2	2,5	0,2	0	3,5	4,4	1
Fuentes Merino, Fco. Javier	AP	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1,5	0,8	1	0,6	2	4	5,9	1
Garcia Hortelano, Ana	NT	0	1	1	1	0,5	1	0	1	1	0,5	1,5	2	1,1	0,5	2	7	7,1	2
García Sánchez, Ana Belen	NT	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0,5	1,5	1,5	1,8	1	0,5	6,5	6,3	3
Garrido López, Cristina	AP	1	1	0,5	0	1	1	1	0	1	1	1,5	1	1,2	0,2	0,8	7,5	4,7	1
Gil Iglesias, Omar	SS	0	0,5	0,5	0	0,5	0	0	0	0	0	1,5	0	1,5	2	0	1,5	5	2
González Mateo, Carlos	AP	1	1	1	0	0,5	0	0	1	0	0	1,5	2	0,5	0,4	2	4,5	6,4	1
Gueorguiev Paplomatas, Alexander	AP	1	0,5	0,5	1	0,5	0	0	0	1	0,5	0	0	2,5	2	1,2	5	5,7	2
Guerrero Andrés, Fernando	NT	0	1	0,5	1	0,5	1	1	1	0	0,5	1,5	1,7	2,5	1,3	1,8	6,5	8,8	3
Hahn Gasanz, Alejandro	AP	0	0,5	0	1	0,5	0	1	1	0	0,5	1,5	0,8	2,2	0,6	0,5	4,5	5,6	3
Heredia Garranza, Ana R.	SS	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0,5	1,5	0,9	0,7	1	0,2	3,5	4,3	2
Merino Pazos, Patricia	SS	1	0	0,5	0	0	1	0	1	1	0,5	0	1,5	0	0,2	0,6	5	2,3	2
Oltra Garcia, Javier	NT	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1,5	1	2,2	1,2	2	6	7,9	4
Pedraz Gutiérrez, Nuria	SS	1	0,5	0,5	0	0,5	0	0	1	0	1	0,3	0	1,2	0	2	4,5	3,5	1
Pereiro López, Illan	SS	0	0,5	0,5	1	0,5	0	0	0	0	0	0,7	0	0,1	0	0	2,5	0,8	1
Pérez Sánchez, Sara	NT	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0,5	1,5	1,5	1,2	2	0	6,5	6,2	2
Pintado Cardeñosa, Noelia	NT	1	1	1	0	0,5	0	1	0	0	0,5	1,5	0,2	2,5	2	2	5	8,2	3
Piñole Muñoz de la Baesa, Javier	SS	1	0,5	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0,6	2	2	3,5	4,6	4
Puyalto de Pablo, Miguel	NT	1	1	0,5	0	0,5	0	0	1	1	0,5	1,5	0,6	2,5	2	1,7	5,5	8,3	3
Quadra Salcedo, Alicia de la	NT	1	0,5	1	1	0,5	1	1	1	1	0,5	1,5	2	2,5	1	0,4	8,5	7,4	1

Rafayle Campos, Jimmy	AP	0	0,5	0,5	0	0,5	0	1	1	1	1	1,5	0,3	2,5	1,7	0,1	5,5	6,1	4
Ramal López, Fco. Javier	SS	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0,5	0	1	0	1	5	2,5	3
Recio Pérez, Jaime	AP	0	0,5	1	1	0,5	1	0	0	1	1	0,75	0	1,2	0,2	2	6	4,15	1
Redondo Aranda, José Carlos	AP	1	0,5	0,5	1	0,5	0	0	1	0	0,5	0	0	2	2	1,6	5	5,6	2
Retuerto Larumbe, Andrea	AP	1	0,5	0	0	0	1	1	1	0	0	0,2	1,8	2,5	0,8	1	4,5	6,3	4
Rey Barturen, Ignacio	AP	1	0,5	1	1	0,5	0	0	1	0	0	1,5	1,5	0,2	2	0,1	5	5,3	4
Ribagorda Jiménez, Macarena	SB	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1,5	1,7	2,5	2	2	8	9,7	2
Rico Rivas, Lorena	SB	1	1	1	0	0,5	1	1	1	1	0,5	1,5	1,6	2,5	2	2	8	9,6	3
Rincon Herrero, Luis	NT	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1,5	1,1	2	1,2	2	5	7,8	1
Rincón Lorente, Borja	SS	1	0,5	1	0	0	1	1	0	1	1	0,1	1,2	0	0,7	0	6,5	2	3
Rioja Calcedo, Luis	NT	1	0,5	1	1	0	0	0	0	1	1	1,5	1,3	2,5	1	1	5,5	7,3	4
Rivas Rivera, Alejandro	SS	1	0,5	0	0	0,5	0	0	0	0	1	0,3	2	0,4	0,2	1,2	3	4,1	3
Rodríguez Alegre, Enrique	AP	1	1	1	1	0,5	0	0	0	0	1	1,5	1	1,2	1	1	5,5	5,7	2
Rodríguez Benítez, Lucía	SS	0	1	0	0	0,5	1	0	1	0	0	1,5	0,8	1	0,6	0,4	3,5	4,3	3
Rodríguez de la Corte, Miguel	SB	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1,5	1,2	2,5	2	2	8	9,2	4
Rodríguez Peñamaria, Carmen	NT	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1,5	2	2,5	1,5	0,4	7	7,9	2
Rodríguez Rodríguez, Ana M.	NT	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,5	1,5	2	1,6	0,8	0,6	9,5	6,5	3
Rodríguez Rodríguez, César	NT	1	1	1	0	0,5	1	1	1	1	1	1,4	0,7	2,5	2	1,5	8,5	8,1	4
Rodríguez Velasco, Rocío	NT	1	0,5	0,5	0	0,5	1	1	1	0	0,5	1,5	1,4	2,5	0,8	1,7	6	7,9	2
Ropero Martín; Loreto	NT	1	0,5	0,5	1	0,5	1	1	1	1	1	1,5	1	0,6	0,5	2	8,5	5,6	4
Rosa Castaño, Fco. Javier de la	NT	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0,5	1,5	1,5	2,5	2	1,1	6,5	8,6	3
Rubio Márquez, Manuel	SS	0	1	0	1	0,5	0	1	1	0	1	1,5	1	0,1	0,5	0,5	5,5	3,6	1
Ruiz Calle, Alicia Victoria	SS	0	0,5	1	1	0	0	0	0	1	1	0	2	0,8	0,5	0	4,5	3,3	2
Ruiz-Ocaña Zaforas, Carlos	SS	0	0,5	0	0,5	0	1	1	0	1	0	0	0	0,6	1,2	2	4	3,8	3
Salinas Pozo, Carlos	SS	1	1	1	0	0,5	0	0	0	0	0,5	1,5	0	0,2	0	0	4	1,7	4
San Juan Hernanz , Pilar	NT	1	1	1	0	0,5	1	1	1	1	0,5	1,5	0,6	1,6	2	2	8	7,7	1
Santos Martin, Silvia Elena	NT	1	0,5	0,5	0	0	1	1	0	1	0,5	1,5	1,3	2,5	2	2	5,5	9,3	4
Sanz Fernández, M. Angeles	AP	1	0,5	0,5	0	0	1	1	1	0	0	1,5	1	1,8	0,7	0,2	5	5,2	1
Sanz Mariano, Gonzalo	SB	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0,5	1,5	1	2,5	2	2	7,5	9	1
Sarabia Fernández, María	SS	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0,5	1,5	2	0,5	0	1,2	3,5	5,2	4
Serna Matamoros, Beatriz de la	NT	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1,5	0,5	2,5	2	1,1	6	7,6	3
Serrano Calvo, Verónica	SB	1	1	1	0	0,5	0	1	1	0	0,5	1,5	1,7	2,5	2	2	6	9,7	4

Sierra Muñoz, Adela	NT	0	1	0,5	0	0,5	0,5	1	1	0	0,5	1,5	1,2	2,5	2	2	5	9,2	4
Solesio Larré, Berta	AP	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0,5	0,3	1,8	1,3	0,8	0	5,5	4,2	4
Solis García, Javier	NT	1	0,5	1	0	0,5	0	1	1	0	0,5	1,5	1,8	1,6	2	1,7	5,5	8,6	3
Talaverano Gonzalo, Ismael	AP	1	1	1	0	0,5	0	1	0	0	0	1,5	0,9	1,7	2	0,8	4,5	6,9	2
Teulón González, Jaime	SB	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1,5	1	2,5	2	2	9	9	2
Toribio Gómez, Esther	SS	1	1	1	0	0,5	1	0	1	0	1	0,3	0,4	0,4	0,2	1,2	6,5	2,5	1
Torre Cantalapiedra, Alberto	SB	1	0,5	1	0	1	1	0	1	1	0	1,5	2	2,5	2	2	6,5	10	1
Torre Romero, Nuria de la	MH	1	0,5	1	1	1	1	1	1	1	1	1,5	0,9	2,5	2	2	9,5	8,9	2
Varea Blanco, Ana Maria	AP	0	0,5	1	1	0,5	1	1	1	0	0,5	1,5	0,2	0,2	0,4	1,8	6,5	4,1	3
Vázquez Calle, Nerea	AP	0	1	0	0	0,5	1	0	1	1	0	0,3	1,7	1,5	0,8	1,7	4,5	6	2
Vedia Sanz, Vanesa	NT	1	1	0,5	1	0,5	0	1	1	0	0	1,5	0,4	2,5	2	1,7	6	8,1	2
Vela Muñoz, Álvaro	MH	1	0,5	1	1	0	1	1	1	1	1	1,5	2	2,5	2	2	8,5	10	1
Velasco Jones, Lucía	SS	0	1	0,5	0	0,5	0	0	1	0	0	1,5	0,7	2,5	0,5	2	3	7,2	1
Velasco Ortega, María	AP	1	1	0,2	0	0,5	0	1	0	0	0,5	1,5	1	1,8	0,5	0,5	4,2	5,3	1
Velasco Ortiz, David	SS	0	1	0	0	0,5	0	0	1	0	0,5	1,5	0,2	0,2	0	0	3	1,9	1
Vicente Vicente, Natalia	SS	0	0,5	1	0	0,5	0	0	0	1	1	0,2	1,5	0,4	0,7	0,2	4	3	4
Vicenti Chamón, Borja	SB	1	1	0,5	0	0,5	1	1	1	1	0,5	1,5	2	2,5	2	2	7,5	10	4
Vieco González, Eva	AP	0	0,5	1	0	0,5	0	0	1	1	1	0	0	2,5	1,5	0,5	5	4,5	3
Vilela Rodrigo, Yeray	SS	1	0,5	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3,5	0	3
Villegas Bartolomé, Ignacio	SS	1	0,5	0,5	0	0	1	0	0	0	0	1,5	0,6	0	0	0,3	3	2,4	2
Vivar Armenteros, Gonzalo	NT	1	0,5	0,5	0	0,5	1	0	0	1	0,5	1,5	1,7	2,5	2	0	5	7,7	1

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	P1A	P1B	P2A	P2B	P2C	TEOR	PROB
MEDIAS DE CALIFICACIONES	0,7	0,7	0,7	0,4	0,4	0,5	0,4	0,7	0,5	0,51	1,15	1,02	1,55	1,18	1,14	**5,4646**	**6,0437**
MEDIANA DE CALIFICACIONES	1	0,5	0,8	0	0,5	0,5	0	1	1	0,5	1,5	1	1,7	1,2	1,2		
VARIANZA DE CALIFIACIONES	0,2	0,1	0,2	0,2	0,1	0,3	0,2	0,2	0,3	0,14	0,34	0,48	0,89	0,6	0,64		
DESVIACION TÍPICA	0,5	0,3	0,4	0,5	0,3	0,5	0,5	0,5	0,5	0,38	0,58	0,7	0,95	0,77	0,8		
MODA DE CALIFICACIONES	1	1	1	0	0,5	0	0	1	1	0,5	1,5	0	2,5	2	2	5	4,1

CONTENIDOSDEL EXAMEN FINAL SUBGRUPO B

CONTENIDOS DE LAS CUESTIONES

Cuestión 1: Determinar la dim. de un subespacio vectorial obteniendo una base de dicho subespacio, asi como la relación entre dimensión y nº ecuaciones
Cuestión 2: Estudio de la independencia lineal de tres vectores que contienen un parámetro
Cuestión 3: Identificar las características de una aplicación lineal, de tal forma que permita deducir que la imagen de cierto vector no puede ser el dado.
Cuestión 4: Deducir que el determinante de una matriz obtenida por combinaciones lineales de columnas de otra tiene el mismo determinante.
Cuestión 5: Aplicar el teorema de Rouché-Frobenius para determinar si un sistema es compatible indeterminado, en su versión de rangos y de la imagen
Cuestión 6: Determinar cuando un conjunto de autovectores de una matriz forman base del espacio total
Cuestión 7: Relacionar determinante, traza, autovalores y dimensión del subespacio de autovectores de cierta matriz.
Cuestión 8: Relacionar las formas cuadráticas que tiene por matrices asociada a una matriz A y su inversa, así como el carácter la la forma cuadrática.
Cuestión 9: Identificar cuando un conjunto del plano es un conjunto convexo utilizando definición.
Cuestión 10: Resolver gráficamente un programa lineal, y aplicar el teorema de Weierstrass.

CONTENIDOS DE LOS PROBLEMAS

Problema 1a: Calcular la matriz asociada a una cierta aplicación lineal respecto de una base distinta de la canónica en el espacio inicial y la canónica en el final
Problema 1b: Obtener una base y la dimensión de los subespacios Im(f) y Ker(f)

Problema 2a: Dada una matriz con dos parámetros, estudiar para qué valores de dichos parámetros dicha matriz es diagonalizable

Problema 2b: Diagonalizar una matriz constante de orden 3.

Problema 2c: Para cierta matriz simétrica, obtener la forma cuadrática y su clasificación en función de un parámetro.

ANEXO XVI: CODIFICACIÓN DE LAS UNIDADES SIGNIFICATIVAS DEL CASO 12.

A modo de ejemplo presentamos el conjunto de todas las unidades significativas extraídas de los datos que se obtuvieron del caso 12 con su correspondiente codificación. También podemos observar que se indica en cada elemento significativo un número referido a la precategoría en la que se puede encuadrar. Esta relación de elementos significativos va dividido en varios bloques, según las herramientas de recogida de datos que lo han generado.

ENCUESTA INICIAL

Matriculado por primera vez en Matemáticas II [ENCINI-caso12-1] (17)

Con conocimientos de windows-95, maneja internet pero no el correo electrónico [ENCINI-caso12-2] (17), (1),(14).

Sus últimos estudios fueron el COU, nota de acceso a la universidad 6,75 (selectividad). Su calificación media en matemáticas en los últimos años fue de sobresaliente. [ENCINI-caso12-3] (14), (17).

Siempre le han gustado las matemáticas, y elige el subgrupo porque le gustan la informática y las matemáticas [ENCINI-caso11-4], (14), (1).

ENTREVISTA INICIAL
No la hizo

ENTREVISTA INTERMEDIA

"Cuando ha resuelto problemas con derive ¿has notado un estilo distingo en la forma de resolver problemas, es decir, la manera de plantear los problemas y resolverlos ha generado en ti un cierto estilo de pensamiento matemático diferentes al que tenías? – sí, un poco más, te preocupas menos por el cálculo numérico y te preocupas más por la resolución teórica" [ENTINT-caso12-1.1], (1), (4).

"crees que hay más acercamiento a la teoría utilizando el ordenador que con lápiz y papel? – evidentemente con el ordenador, pero también se pierde cálculo numérico" [ENTINT-caso12-1.1-b] (1), (4).

"Cuando has intentado resolver cuestiones teóricas, sin el uso de derive, has encontrado alguna dificultad especial? – yo no pero porque yo ya había visto otro año esta asignatura, pero yo creo que si hubiese ido de nuevo si que hubiese notado alguna dificultad, al no poder utilizar el ordenador y poder hacer ejercicios" [ENTINT-caso12-1.2] (1), (4).

"A la hora de resolver un problema con derive, ¿has tenido que plantearte el problema previamente con lápiz y papel...? –pues bastantes, previamente con lápiz y papel, otros ya directamente ...- te ha costado un poco el razonar con derive, el hacer un planteamiento y luego ponerte ya a la discusión? - si " [ENTINT-caso12-1.3] (1).

"¿crees que derive te ha permitido construir un lenguaje, un sistema de notación más cercano al álgebra lineal? – yo creo que más que nada ha sido una herramienta de trabajo" [ENTINT-caso12-1.4] (1)

"En el desarrollo de las clases ¿cómo ha sido tu comunicación con el profesor? – más cercana, y he encontrado respuesta rápida a tus dudas" [ENTINT-caso12-2.1] (2)

"En el trabajo que has realizado con derive el programa te ha proporcionado respuesta rápida a los procesos manipulativos o dudas que te pudieran surgir? ... – a veces he dudado, en algún error o alguna respuesta que me ha salido, que no me convencía" [ENTINT-caso12-2.2](2)

"En los ejemplos de manipulación que se han realizado en clase, te has sentido dirigido por el programa o por el contrario te has sentido director de tus procesos? – yo creo que me he sentido protagonista" [ENTINT-caso12-3.1] (3)

"En los ejemplos para investigar, que se han realizado en clase, te has sentido perdido, has encontrado cierto protagonismo en la búsqueda de soluciones...- en general sí!" [ENTINT-caso12-3.2] (3)

"Cuando el profesor daba una posible solución a los ejemplos a investigar, te has sentido un mero usuario de los procesos que se comentaban o los has asimilado e interiorizado..- intentaba contrastarlo, de lo que iba haciendo con lo que se iba comentando " [ENTINT-caso12-3.3] (3)

"Cuando se han planteado ejercicios te has encontrado perdido o por el contrario has sabido realizar los procesos que se habían aprendido anteriormente...- los he sabido hacer." [ENTINT-caso12-3.4] (3)

"En la resolución de problemas, has encontrado algún protagonismo o capacidad creativa a la hora de resolverlos o por el contrario te has sentido perdido...- en general los he visto bastante fáciles, pero había alguno que había que preparar algo el tema" [ENTINT-caso12-3.5]

"En la resolución de cuestiones teóricas, has encontrado alguna dificultad por no utilizar derive, has sentido dependencia del programa...- no sentía mucha necesidad" [ENTINT-caso12-3.5b] (3)

"Del tema 1 de espacios vectoriales ¿cuáles crees que son los contenidos esenciales? – no sé que decir" [ENTINT-caso12-4.1] (4)

"¿y del tema 2 de matrices y aplicaciones lineales? – la resolución de aplicaciones lineales" [ENTINT-caso12-4.2] (4)

"¿y del tema 3 de determinantes y traza? – saber hacer determinantes" [ENTINT-caso12-4.3] (4)

"¿y del tema 4 de sistemas lineales? – pues también resolución de sistemas" [ENTINT-caso12-4.4] (4)

"¿y del tema 5 de diagonalización, autovalores y autovectores? .- saber qué es diagonalizar y como... y autovalores y autovectores" [ENTINT-caso12-4.5] (4)

"¿y del tema 6 que estamos dando sobre formas cuadráticas? – las propiedades" [ENTINIT-caso12-4.6] (4)

"Cuando te has puesto a realizar ejercicios de manipulación con derive, has entendido el proceso que se pretendía conocer? – no me ha costado trabajo" [ENTINT-caso12-5.1] (5)

"resolver problemas, ¿crees que derive te ha ayudado a encontrar la resolución de manera efectiva, o quizás hubiera sido más fácil hacerla con lápiz y papel? – casi siempre es más fácil con derive, pues te evitas todo el cálculo" [ENTINT-caso12-5.2] (5)

"...en cuestiones teóricas, has tenido mucha dificultad en resolverlas sin derive, o existían demasiados cálculos...- sí, creo que sin práctica te quedas un poco.." [ENTINT-caso12-5.3] (5)

"Sabrías calcular un determinante de orde 3 sin derive – si" [ENTINT-caso12-5.4] (5)

"Sabrías resolver un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas sin derive -. si" [ENTINT-caso12-5.5] (5)

"¿crees que derive permite prescindir de los cálculos rutinarios y te permite orientar mejor tus esfuerzos hacia la investigación y el razonamiento? ...- evidentemente" [ENTINT-caso12-5.6] (5)

"Cuando se han planteado en clase ejemplos para investigar, cual ha sido tu actitud: has esperado a que te dieran la solución, has experimentado con derive...- siempre me he puesto a investigar" [ENTINT-caso12-6.1] (6)

"has conseguido llegar a descubrir las cuestiones que se planteaban en los ejemplos de investigación? ....- creo que casi siempre las he entendido y conseguido bastante bien" [ENTINT-caso12-6.2] (6)

"En los problemas planteados, cuando has tenido que resolverlos, ¿has encontrado rápidamente la estrategia de resolución o por el contrario has tenido que experimentar con el problema para descubrir por donde podrían ir las soluciones ...- en general siempre los sabía hacer, salvo a lo mejor un ejercicio o dos por capítulo que eran más complicados" [ENTINT-caso12-6.3] (6)

"¿crees que la experimentación que has realizado en el curso te ha ayudado a entender mejor los contenidos que se trataban de impartir...- sí por supuesto..- si no se hubieran hecho,, posiblemente hubieras entendido más profundamente... ¿cómo lo valorarías más profundamente o cual sería tu percepción de los conceptos? ...- yo sobre todo el poder ver con las gráficas que hemos visto y evitar los cálculos y todo esto, te centras en la parte teórica y entiendes mejor el contenido" [ENTINT-caso12-6.4] (6)

"¿crees que el uso de derive facilita que el álgebra lineal sea una disciplina experimental...? – si, sin duda- ¿qué percepción tenías tu del álgebra lineal como algo experimental? ...- teórica" [ENTINT-caso12-6.5] (6)

"Cuando has terminado un capítulo, tienes la sensación de haber entendido bien los contenidos – he entendido todo" [ENTINT-caso12-7.1] (7)

"Trabajar los contenidos mediante la investigación y el descubrimiento crees que te ha facilitado entender mejor los contenidos o por el contrario han dispersado tu atención? – no ha sido mucho mejor claro" [ENTINT-caso12-7.2] (7)

"Cuando has resuelto los problemas de fin de capítulo, ¿has utilizado más de una estrategia de resolución....- hombre sobre todo cuando no estaba seguro del resultado buscaba más, cuando no llega a la respuesta buscaba otros caminos" [ENTINT-caso12-7.3] (8)

"¿crees que los problemas planteados podrían tener varios caminos de resolución? – si, si " [ENTINT-caso12-8.2] (8)

"Cuando se ha planteado alguna cuestión en clase, o un problema ¿has observado si se pedían diferentes puntos de vista para resolver la cuestión ...? – que había muchas formas " [ENTINT-caso12-8.3] (8)

"Una vez que hemos concluido casi como valorarías el programa derive, una herramienta sencilla o compleja en su manipulación? – una herramienta sencilla" [ENTINT-caso12-9.1] (9)

"Si algún compañero te pregunta sobre el programa, se lo aconsejarías para estudiar álgebra lineal? ...- si, si porque es sencillo" [ENTINT-caso12-9.2] (9)

"¿cuáles son tus principales problemas con la manipulación del programa derive? ...- me ha parecido sencillo" [ENTINT-caso12.-9.3] (9)

"Cuando has intentado resolver un problema o ejercicio con derive, has tenido la sensación de que hubiera sido más sencillo resolverlo con lápiz y papel,....? – he tenido la sensación que con lápiz y papel a veces se podía realizar igualmente" [ENTINT-caso12-9.4] (1)
(9)

“Cuando has intentado resolver un problema o ejercicio con derive, te has sentido engañado por el programa por los resultados que te daban y que quizás no sabías interpretar? ...- normalmente no he tenido problemas con eso” [ENTINT-caso12-9.5] (9)

“Los ejemplos de investigación que se planteaban en el desarrollo de las clases, te han resultado inabordables o por el contrario eran muy fáciles...- eran asequibles” [ENTINT-caso12-10.1] (10)

“...has tenido la sensación de que eras dueño de la situación o por el contrario que derive te estaba dominando? ...- sí totalmente. “ [ENTINT-caso12-10.2] (10)

“Cuando te pones a resolver problemas y ejercicios, consideras que tienes una suficiente autonomía para desarrollarlos...- ha añadido más autonomía, porque no te queda la duda de si estaré haciendo mal el cálculo, si llevaré un error y lo voy arrastrando, sabes que lo tienes bien” [ENTINT-CASO12-10.3] (10)

“Cuando te pongas a resolver problemas de examen, tu crees que vas a sentir ese grado de autonomía...- si, si” [ENTINT-caso12-10.3-b] (10)

“¿cómo ha sido tu relación personal con los compañeros de clase? – limitada” [ENTINT-caso12-11.1] (11)

“¿has conseguido establecer un lazo de amistad mayor con algunos compañeros de clase a lo largo de este curso? ...- si, con Maria y Jessica y Juan Pablo” [ENTINT-caso12-11.2] (11)

“¿cómo ha sido tu relación personal con el profesor? .- buena” [ENTINT-caso12-11.3] (11)

“¿Crees que el ambiente propiciado por este tipo de estrategia ha favorecido las relaciones dialécticas entre los alumnos? ...- si hombre, al ser una clase tan pequeña pues la gente siempre se une mucho más...- o sea que has sentido más unión que en otras clases a lo mejor? ..- si, además como se pueden hacer ejercicios en común, porque hay personas que hacen unas otras hacen otro, está bien” [ENTINT-caso12-11.4] (11)

“¿y entre los alumnos y el profesor tu crees que hay más unión? – si, más cercanía- pero por el número de alumnos o quizás también ha influido que haya también un entorno, un estilo de aprendizaje distinto al habitual...- hombre por las dos cosas, pero yo creo que sobre todo por el número de alumnos” [ENTINT-caso12-11.4-b] (11), (2)

“El trabajo de grupo que se ha desarrollado en clase ¿crees que te ha ayudado a aprender mejor los conceptos de álgebra lineal? - ... hombre en mi caso yo creo que no me ha ayudado mucho, pero yo creo que sí que ayuda bastante” [ENTINT-caso12-12.1] (12)

“La resolución de cuestiones, ejercicios y problemas en parejas de trabajo, ha sido favorecida por el ambiente que proporcionaba el ordenador en la clase? ...- pues al ser un aula tan limitada de alumnos y ser distinto con respecto a otros grupos, pues se favorece más la relación...- habéis utilizado el mail y estas cosas entre vosotros...? – si” [ENTINT-caso12-12.2] (12)

“¿crees que las colaboraciones que habéis tenido los compañeros de tu entorno, ha incrementado por un lado tus relaciones personales con dichos compañeros? ...- si, sin duda” [ENTINT-CASO12-12.3] (12)

“Has quedado con los compañeros para resolver problemas, ¿cómo ha sido la experiencia positiva o negativa? – si, resolvíamos problemas entre nosotros y resolvíamos las dudas, ha sido una experiencia positiva de colaboración” [ENTINT-caso12-12.3] (12)

“...¿te has aburrido en algún momento? – hay alguna que no me ha gustado mucho, pero no me he aburrido “ [ENTINT-caso12-13.1] (13)

“El ritmo de la clase ¿cómo te ha parecido? - hombre bueno para llevar la asignatura pero rápido en ningún caso” [ENTINT-caso12-13.2] (13)

“¿te has encontrado perdido en alguna ocasión? – no, en ninguna” [ENTINT-caso12-13.3] (13)

"Los problemas propuestos te han resultado todos inabordables o has conseguido resolver alguno? – he resuelto casi todos- cuando has encontrado tus soluciones con las que se colgaban en la web ¿has comprobado que eran las que tú hacías más o menos? – si" [ENTINT-caso12-13.4] (13)

"Los problemas propuestos han suscitado en ti interés especial por su resolución...? – si, ha habido algunos que me han picado bastante en su resolución.." [ENTINT-caso12-13.5] (13)

"te ha parecido interesante el álgebra lineal? cuéntame un poquillo como te ha parecido...- sí creo que se ha hecho muy interesante, yo creo que si se hubiese dado la clase estricta me hubiese aburrido mucho más, en este aspecto seguro" [ENTINT-caso12-13.6] (14)

"ese gusanillo por resolver las cosas lo has tenido alguna otra vez? – si en cursos anteriores " [ENTINT-caso12-13.6-b] (14)

"En una valoración general, ¿ha aumentado con este curso tu interés por las matemáticas? – hombre no ha descendido porque ya me gustaban – te ha motivado el ordenador para estudiar matemáticas – sí,. si" [ENTINT-caso12-14.5] (14)

"¿cuántas horas has dedicado más o menos a la semana, en media? – yo creo que cinco o seis" [ENTINT-caso12-14.5-b] (14)

"Si tuvieras que dar una valoración global del curso indica la nota que le pondrías en todo- creo que un 7" [ENTINT-caso12-g1.] (14), (15)

"¿qué es lo que más te ha gustado del curso? – lo que más el llevar la asignatura bastante al día, por los problemas que había que hacer al final de cada capítulo, se lleva bien, sino igual se va dejando, igual te parece que lo llevas bien y lo voy dejando, así lo ibas haciendo" [ENTINT-caso12-g.2] (14), (15)

"¿qué es lo que menos te ha gustado del curso? – seguro que hay algo pero no se me ocurre? " [ENTINT-caso12-g.3] (14)

"¿qué nota esperas sacar en la asignatura? – notable sobresaliente" [ENTINT-caso12-g.4] (16)

"¿volverías a elegir este grupo experimental si te dieran nuevamente a elegir? – si, sobre todo por eso, por evitarme el cálculo numérico, no depender de hacer mal un problema porque te has confundido en un signo o lo que sea" [ENTINT-caso12-g.5] (14), (15)

"¿crees que ha habido alguna laguna, que hayas echado en falta, así a nivel de matemáticas? – hombre sí, pero no es aplicado a la carrera, por ejemplo de geometría... o de formas cuadráticas también hay alguna cosa" [ENTINT-caso12-g.6] (15)

"tu crees que ha sido más práctico o más teórico el curso? – más práctico" [ENTINT-caso12-g.7] (14), (6), (4)

"tú crees que le ha faltado algo más de fundamenta algo más la teoría, ver algunas cosas más... – no tal como está ha sido bien" [ENTINT-caso12-g.8] (15), (4)

"cuando en las cuestiones teóricas .. al ser más práctico el curso de lo normal, puede existir algún problema para resolver por lo que tú has percibido a mano.. ..- o sea resolver las cuestiones teóricas sin derive... yo creo que sí que se pierde bastante, parece que no pero si se pierde mucho. Yo creo que se pierde bastante, por ejemplo al resolver un determinante o algo de esto, como la gente está acostumbrada a resolverlo con ordenador pues igual ya no se acuerda... no se" [ENTINT-caso12-g.9] (4), (5), (9)

"tú que has tenido contacto con el otro grupo experimental, solo por saber, supongo que habrás contrastado con otra gente las ideas de cómo se daba en un lado y en otro ¿qué sensación o percepción tiene tú al respecto? – yo estoy muy contento de este grupo, pero vamos yo creo que para ellos es mucho peor la parte práctica y para nosotros la parte teórica" [ENTINT-caso12-g.10] (1), (14), (15), (4) "yo le intentaría convencer que se impartiese pero igual que en vez de ser todas las clases con ordenador que fuese alguna, una al mes o dos, de resolver a mano- le ha faltado un poco resolver con lápiz y papel – sí, el hacer a mano, las cuestiones teóricas sobre todo...- añadir alguna clase con encerado. Pero bueno tú en particular no la has necesitado, venías bien preparado no? – si" [ENTINT-caso12-g.11] (14), (15)

CUESTIONES PROPUESTAS

Entiende el concepto de dimensión de un subespacio vectorial [CUES-caso12-1.1]

Sabe relacionar el número de ecuaciones no redundantes con la dimensión de un subespacio [CUES-caso12-1.1-b]

Sabe determinar si cuatro vectores no nulos son li. o ld [CUES-caso12-1.2]

No ha sabido deducir que un conjunto de vectores l.i. no puede expresar de dos formas distintas un mismo vector [CUES-caso12-1.2-b]

Sabe deducir que en R^2 tres vectores son siempre l.d. [CUES-caso12-1.3]

Sabe que un conjunto de tres vectores l.i. en R^3 es una base de R^3 [CUES-caso12-1.4-a]

Sabe relacionar el número de ecuaciones no redundantes de un subespacio con la dimensión del mismo [CUES-caso12-1.4-b]

Sabe que 4 vectores de R^3 no nulos no tienen porqué ser l.i. pueden ser l.d. [CUES-caso12-1.4-c]

Sabe que tres vectores no pueden ser l.i. si generan de dos formas distintas un mismo vector, cuestión que se contradice con el no haber completado la cuestión 2 [CUES-caso12-1.4-d]

Sabe utilizar correctamente la fórmula de las dimensiones para relacionar la dimensión del núcleo y la imagen [CUES-caso12-2.1]

No ha sabido relacionar las coordenadas en la base final de los vectores imagen de la base inicial de una aplicación lineal con las columnas de la matriz [CUES-caso12-2.2]

Sabe deducir que si una matriz es no singular entonces los vectores columna de ella forman una base pero no tiene que ver con la traza [CUES-caso12-2.3]

Sabe obtener la matriz asociada a una aplicación lineal conocidas las imágenes de la base, así como deducir la dimensión de la imagen a partir del rango de la matriz [CUES-caso12-2.4]

Ha generalizado a partir de un resultado concreto [PROB-caso12-3.1]

Sabe que la traza de una matriz no tiene nada que ver con el hecho de que dicha matriz sea o no singular [PROB-caso12-3.2]

Sabe calcular determinantes usando propiedades [CUES-caso12-3.3]

Sabe la relación entre matrices invertibles, determinantes y rango [CUES-caso12-3.4]

Sabe que un sistema que tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas es compatible siempre que su rango sea completo pero que también puede ser incompatible [CUES-caso12-4.1]

No ha sabido determinar para qué valores de un parámetro un subconjunto definido por ecuaciones cartesianas es un subespacio vectorial [CUES-caso12-4.2]

Sabe aplicar el teorema de Rouche para discutir un sistema teórico [CUES-caso12-4.3]

Sabe determinar la compatiblidad de un sistema que depende de parámetros [CUES-caso12-4.4]

Sabe que la simetría de una matriz no es condición necesaria para la diagonalización, y que si una matriz tiene autovalores distintos es diagonalizable [CUES-caso12-5.1]

Sabe relacionar entre el orden de multiplicidad de un autovalor y la dimensión del subespacio de autovectores [CUES-caso12-5.2]

No ha sabido determinar que si una matriz A es diagonalizable entonces k.A también lo es [CUES-caso12-5.3]

Sabe que la relación que hay entre los autovalores de una matriz A y kA [CUES-caso12-5.3-b]

Sabe la relación que existe entre matrices simétricas y matrices diagonalizables [CUES-caso12-5.4]

Sabe deducir que si una matriz de orden 3 es invertible entonces no tiene autovalores nulos y por tanto no puede ser semidefinida [CUES-caso12-6.1]

Sabe deducir que si una forma cuadrática es s.d.p. y su matriz asociada es no nula entonces el sistema homogéneo Ax=0 es compatible indeterminado [CUES-caso12-6.2]

Ha aplicado mal el criterio de los menores, pues lo hace sobre una matriz que no es la simétrica [CUES-caso12-6.3]

No ha sabido deducir a partir del determinante de la matriz y la traza los posibles valores que pueden tener sus autovalores a fin de clasificarla [CUES-caso12-6.4]

PROBLEMAS PROPUESTOS

Plantea y resuelve perfectamente un modelo vectorial que se basaba en el uso de combinaciones lineales para obtener mezclas de ciertos materiales [PROB-caso12-1.1]

No ha sabido manejar polinomios de grado menor que 4 como vectores de un espacio vectorial [PROB-caso12-1.2]

No ha sabido calcular los vectores ortogonales a un subespacio vectorial [PROB-caso12-1.3]

Sabe obtener la base de un susbespacio vectorial a partir de las ecuaciones cartesianas [PROB-caso12-1.4]

Sabe determinar cuando un vector pertenece a un subespacio vectorial [PROB-caso12-1.4-b]

Sabe calcular perfectamente la intersección entre subespacios vectoriales [PROB-caso12-1.5]

Sabe calcular perfectamente la suma entre subespacios vectoriales [PROB-caso12-1.5-b]

No entiende claramente el concepto de suma directa de subespacios [PROB-caso12-1.5-c]

Plantea y resuelve perfectamente un modelo vectorial basado en combinaciones lineales [PROB-caso12-1.6]

Plantea y resuelve perfectamente un modelo vectorial sobre combinaciones lineales convexas para una aplicación económica [PROB-caso12-1.7]

Plantea y resuelve perfectamente un modelo vectorial sobre un problema económico [PROB-caso12-1.8]

Sabe obtener una base de un subespacio vectorial a partir de un sistema de generadores, así como las ecuaciones cartesianas del mismo [PROB-caso12-1.9]

Sabe discutir la dimensión de un subespacio vectorial en función de parámetros [PROB-caso12-1.10]

Ha sabido plantear y resolver perfectamente problemas de modelización matricial [PROB-caso12-2.1],

Ha sabido plantear y resolver perfectamente un problema de modelización matricial basado en aplicaciones lineales [PROB-caso12-2.2]

ha sabido plantear y resolver nuevamente un problema de modelización matricial basado en el estudio de calificaciones de ciertos alumnos [PROB-caso12-2.3]

No ha sabido resolver un problema de experimentación e investigación sobre propiedades de matrices [PROB-caso12-2.4]

Sabe calcular la matriz asociada a una aplicación lineal respecto de bases distintas de las canónicas [PROB-caso12-2.5]

Sabe aplicar el método de Gauss-Jordan para obtener la inversa de una matriz [PROB-caso12-2.5-b]

Sabe obtener la aplicación lineal inversa a partir de la matriz inversa [PROB-caso12-2.5-c]

Sabe obtener una aplicación lineal a partir de las imágenes de ciertos vectores [PROB-caso12-2.6]

Sabe calcular la matriz asociada de una aplicación lineal respecto de las bases canónicas [PROB-caso12-2.7]

Sabe determinar el núcleo e imagen de una aplicación lineal a partir de la matriz asociada y de la fórmula de las dimensiones [PROB-caso12-2.7-b]

No ha calculado bien la matriz asociada a una aplicación lineal respecto de bases distintas de la canónica por un error de despiste pues se le ha olvidado calcular una de las columnas, sin embargo el proceso del resto está perfecto [PROB-caso12-2.8]

Ha tenido un error de solapamiento de variables que le ha provocado un error en el problema [PROB-caso12-2.9-a]

Domina el proceso de gauss-Jordan para calculo de inversas [PROB-caso12-2.9-b]

Ha sabido resolver un problema de ecuaciones matriciales, manejando perfectamente derive [PROB-caso12-2.10]

Ha utilizado muy bien un razonamiento inductivo para resolver una ecuación que igualaba matrices y potencias n-ésimas [PROB-caso12-2.11]

Ha planteado perfectamente y resuelto las condiciones de ciertos valores para que una matriz tuviese ciertas propiedades [PROB-caso12-2.12]

No ha realizado procesos básicos de matrices como el cálculo de la matriz asociada, cálculo de la inversa en función de parámetros, era una aplicación lineal con parámetros [PROB-caso12-2.13]

Ha sabido plantear bien un estudio de independencia lineal de vectores a partir de una ecuación vectorial , concepto de independencia lineal [PROB-caso12-2.14]

Ha sabido experimenta e investigar para obtener solución de un problema con determinantes [PROB-caso12-3.1]

Sabe experimentar e investigar las propiedades que tiene que tener una matriz para que el determinante sea máximo [PROB-caso12-3.2]

Sabe experimentar e investigar para disponer en una matriz 0 y 1 para que su determinante sea mínimo [PROB-caso12-3.3]

Sabe utilizar un proceso de inducción para resolver un determinante n-ésimo [PROB-caso12-3.4]
Ha tenido ciertos problemas para obtener el rango de una matriz 4x6 le han faltado estudiar menores [PROB-caso12-3.5]

Problema de experimentación e inducción para resolver una ecuación en la que interviene un determinante n-ésimo [PROB-caso12-3.6]

Sabe determinar las condiciones que debe cumplir un parámetro de cierta matriz para tener inversa [PROB-caso12-3.7]

No ha sabido calcular el determinante de Vandermonde usando propiedades de determinante y utilizó directamente la función DET [PROB-caso12-3.8]

Sabe obtener perfectamente el núcleo e imagen de una aplicación lineal [PROB-caso12-3.9]

En un problema con vectores paramétricos en el que intervenían los conceptos de independencia lineal le han faltado casos para determinar cuando esos vectores eran l.i. nuevamente ha tenido problemas con rangos [PROB-caso12-3.10]

Sabe determinar perfectamente cuando una ecuación paramétrica tiene inversa [PROB-caso12-3.11]

Ha sabido calcular un determinante n-ésimo utilizando un proceso inductivo [PROB-caso12-3.12]

Ha sabido plantear y resolver perfectamente un modelo económico basado en sistemas de ecuaciones lineales [PROB-caso12-4.1]

Sabe discutir un sistema de ecuaciones con un parámetro [PROB-caso12-4.2]

Ha sabido discutir un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas con un parámetro [PROB-caso12-4.3]

Discute mal un sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas pues como la matriz de coeficientes es de orden 4x3 y la ampliada de 4x4 primero estudia el rango de la matriz de coeficientes, y lo hace mal, hace una mala distinción de casos [PROB-caso12-4.4]

Tiene un problema de solapamiento de variables en la discusión de un sistema en función de parámetros, el solapamiento le viene en el parámetro que debió tener previamente definido [PROB-caso12-4.5]

Sabe discutir perfectamente un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas con 2 parámetros [PROB-caso12-4.5-b]

Sabe formular un sistema que pretende obtener propiedades de números naturales [PROB-caso12-4.6]

Sabe formular un sistema de ecuaciones que resuelve un problema económico sobre matrices de inputs [PROB-caso12-4.7]

Ha sabido formular y resolver un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas que modeliza un problema de reservas de hoteles de seis agencias de viajes [PROB-caso12-4.8]

No ha hecho un tratamiento adecuación en la discusión de un sistema con dos parámetros, por un problema de distinción de casos en el estudio de los rangos [PROB-caso12-4.9]

Sabe formular perfectamente sistemas que modelizan situaciones reales [PROB-caso12-4.9]

Ha sabido obtener los valores incógnita de una matriz sabiendo que se conocen ciertos autovalores y autovectores, en definitiva el problema se reduce a resolver un sistema de 9 ecuaciones con 9 incógnitas [PROB-caso12-5.1]

No ha hecho un problema que pretendía conocer ciertos valores incógnita de una matriz a partir de los conceptos de autovalor y autovector [PROB-caso12-5.2]

Al plantear una ecuación matricial del tipo $B=P.A.P^{-1}$ derive le ha generado una matriz enorme irreconocible que le ha dificultado resolución por problemas de interpretación [PROB-caso12-5.3]

Sabe estudiar si dos matrices son diagonalizables [PROB-caso12-5.4]

Sabe relaciona el concepto de diagonalización de una matriz con la matriz de paso de dicho proceso de diagonalización [PROB-caso12-5.5]

Ha sabido obtener los autovalores de una matriz paramétrica y determinar los valores que ha de tomar dicho parámetro para cumplir ciertas condiciones relacionadas con la diagonalización [PROB-caso12-5.6]

Ha realizado bien la modelización de un problema en el que interviene el calculo de la potencia k-ésima de una matriz usando diagonalización [PROB-caso12-5.7] y también la resolución.

Modelización de un problema en el que interviene la potencia k-ésima de una matriz [PROB-caso12-5.8]

Efectúa perfectamente la modelización y resolución de un problema en el que interviene potencia k-ésima de una matriz así como el paso al límte [PROB-caso12-5.9]

No ha hecho un tratamiento exhaustivo del estudio de los valores que tiene que tomar un parámetro para que una matriz sea diagonalizable [PROB-caso12-5.10]

Ha sabido clasificar una forma cuadrática en función de un parámetro [PROB-caso12-6.1]

Sabe clasificar una forma cuadrática en función de 2 parámetros [PROB-caso12-6.2]

Nuevamente sabe clasificar una forma cuadrática en función de 2 parámetros [PROB-caso12-6.3]

Sabe clasificar una forma cuadrática en función de un parámetro (3 variables) [PROB-caso12-6.4]

Sabe clasificar una forma cuadrática de orden 3 en función de 2 parámetros pero le falta alguna distinción de casos [PROB-caso12-6.5]

No ha hecho un problema que pretendía obtener la clasificación una forma cuadrática de orden 4 en función de 2 parámetros [PROB-caso12-6.6]

Ha sabido calcular los valores que debe tener un parámetro para que una forma cuadrática sea definida positiva [PROB-caso12-6.7]

ha sabido determinar si una forma cuadrática puede ser definida negativa para cierto valor de un parámetro [PROB-caso12-6.8]

EXAMEN FINAL

Sabe determina la dimensión de un subespacio vectorial obteniendo una base de dicho subespacio así como mediante la relación entre dimensión y número de ecuaciones no redundantes [EXFIN-caso12-cues-1]

Sabe estudiar la independencia lineal de tres vectores que contienen un parámetro [EXFIN-caso12-cues-2]

Sabe identificar las características de una aplicación lineal, de tal forma que se permita deducir que la imagen de cierto vector no puede ser uno dado [EXFIN-caso12-cues-3]

Sabe deducir que el determinante de una matriz obtenida por combinaciones lineales de columnas de otra tiene el mismo determinante [EXFIN-caso12-cues-4]

No ha sabido aplicar el teorema de Rouche para determinar si un sistema es compatible indeterminaro [CUES-caso12-cues-5]

No ha sabido determinar cuando un conjunto de autovectores de una matriz pueden formar base del espacio total [CUES-caso12-cues-6]

Sabe relacionar determinante, traza, autovalores y dimensión del subespacio de autovectores de cierta matriz [EXFIN-caso12-cues-7]

Sabe relacionar las formas cuadráticas que tienen por matrices asociadas a una matriz A y su inversa, así como el carácter de las mismas [EXFIN-caso12-cues8]

Sabe identificar cuando un conjunto del plano es un conjunto convexo utilizando la definición [EXFIN-caso12-cues9]

Sabe resolver gráficamente un programa lineal y aplicar el teorema de Weierstrass [EXFIN-caso12-cues10]

Para resolver la cuestión 1, plantea una matriz y estudia una submatriz de orden 3 de la que deduce con el determinante que tiene rango 3, con derive [EXFIN-caso12-cues1-b]

En la cuestión 2, plantea las ecuaciones cartesianas del subespacio y obtiene sus ecuaciones paramétricas con derive [EXFIN-caso12-cues2-b]

En la cuestión 6 comprueba si los autovectores dados son l.i. utilizando determinantes con derive [EXFIN-caso12-cues6-b]

Sabe obtener una base de un subespacio vectorial del cual se tiene un sistema de generadores [EXFIN-caso12-prob1-a]

Sabe obtener las ecuaciones cartesianas de un subespacio vectorial del cual se tiene un sistema de generadores [EXFIN-caso12-prob1-b]

Sabe obtener una base de un subespacio vectorial del que se tienen sus ecuaciones cartesianas [EXFIN-caso12-prob1-c]

Sabe obtener una base del subespacio intersección de dos subespacios vectoriales [EXFIN-caso12-prob1-d]

Sabe obtener las ecuaciones cartesianas del subespacio suma de dos subespacios vectoriales [EXFIN-caso12-prob1-e]

Sabe deducir si el espacio total se puede obtener como suma directa de los subespacios vectoriales anteriores [EXFIN-caso12-prob1-f]

Sabe obtener la matriz asociada a una aplicación lineal respecto de bases distintas de la canónica [EXFIN-caso12-prob2-a]

Sabe determinar si una matriz constante tiene inversa [EXFIN-caso12-prob2-b]

Sabe calcular la matriz asociada a una aplicación lineal con un parámetro respecto de las bases canónicas [EXFIN-caso12-prob2-c]

Sabe estudiar para qué valores de cierta matriz cuadrada paramétrica tiene inversa [EXFIN-caso12-prob2-d]

Sabe calcular la inversa de una matriz constante usando Gauss-Jordan y además utilizando muy pocos casos en este caso tan solo 4 pasos [EXFIN-caso12-prob2-e]

Sabe obtener la dimensión de la imagen y el núcleo de una aplicación lineal en función de distintos valores del parámetro que define cierta aplicación lineal [EXFIN-caso12-prob2-f]

Ha tenido problemas para determinar para qué valores de ciertos parámetros a y b cierta matriz es diagonalizable, su error ha venido fundamentalmente por un error que le ha provocado derive ya que al resolver un sistema no ha tenido en cuenta que era un sistema no lineal que con SOLVE daba soluciones erróneas [EXFIN-caso12-prob3-a]

Sabe diagonalizar una matriz constante de orden 3 [EXFIN-caso12-prob3-b]

Sabe obtener la forma cuadrática a partir de su matriz simétrica asociada [EXFIN-caso12-prob3-c]

Sabe discutir un sistema en función de los distintos valores de cierto parámetro a [EXFIN-caso12-prob4-a]

Sabe formular y resolver perfectamente un sistema de ecuaciones que modeliza un problema concreto [EXFIN-caso12-prob4-b]

ENTREVISTA FINAL

“Cuando se introdujeron los conceptos teóricos con los ejemplos a investigar, te costaba entender lo que se pedía en Matemáticas con derive ..? – no, no me costaba nada, y me ayudaba con seguridad a buscar” [ENTFIN-caso12-1.1] (1)

“A la hora de realizar ejercicios de manipulación, la forma de introducir los datos en derive te servía para asimilar los procesos rutinarios del álgebra lineal ...? – sí, creo que si” [ENTFIN-caso12-1.2] (1)

“¿sabrías realizar esos mismos procesos con lápiz y papel? – si, claro pero porque ya lo he hecho antes, sino no sabría con seguridad” [ENTFIN-caso12-1.2b] (1)

“En la resolución de problemas ¿has tenido que poner en marcha algún tipo especial de razonamiento que no habías empleado hasta ahora? – en principio en casi todos muy bien, pero en algunos igual tenía que hacerlo primero en lápiz y papel y luego en derive” [ENTFIN-caso12-1.3] (1)

“Cuando realizaste el examen final,, ¿tuviste la sensación de que derive te proporcionaba un estilo de notación distinto al que venías empleando?...- no, que va, muy parecido... no tuve que plantear ningún problema con lápiz y papel” [ENTFIN-caso12-1.4] (1)

“Cuando tienes que realizar cualquier práctica de matemáticas II con derive ¿sabrías realizarla fácilmente con lápiz y papel? – si, tenía la sensación de que sí” [ENTFIN-caso12-1.5] (1)

“Y al revés, si resuelves un problema o cuestión con lápiz y papel ¿tienes algún problema en realizarla en derive? – sí, el programa derive era muy sencillo...” [ENTFIN-caso12-1.6] (1)

“De las dos formas de notación, derive o lápiz y papel, cual te resulta más cómoda? – el programa ayuda mucho , y es más cómodo pues es mucho más rápido y evita repasar operaciones...” [EENTFIN-caso12-1.7] (1), (8), (5), (9)

“¿cuál crees que es mejor para entender conceptos uno u otro? – la teoría yo creo que es mejor evidentemente con una clase con pizarra y lápiz y papel, pero los problemas y las prácticas se ve mucho mejor con derive- o sea que tú crees que la parte teórica es mejor introducirla con el método tradicional? – si” [ENTFIN-caso12-1.7-b] (1), (4)

"¿crees que derive proporciona un sistema de notación intermedio entre tus ideas y las ideas que el profesor trata de transmitir? ...- sí" [ENTFIN-caso12-1.8] (1)

"¿has tenido una buena comunicación con el profesor? ...- era una clase con pocos alumnos y cualquier duda se resolvía.." [ENTFIN-caso12-2.1] (2)

"da una valoración de 1 1 5 de la comunicación con el profesor – un 4 ó 5" [ENTFIN-caso12-2.2] (2)

"¿cómo ha sido tu comunicación con los compañeros de clase? – pues bien, sobre todo con los que tenía alrededor, no con todo el mundo – o sea con el entorno de tu alrededor" [ENTFIN-caso12-2.3] (2)

"además de tu relación con Maria y Jessica, has tenido contacto con otros compañeros? – todo lo más con uno o do más, más o menos" [ENTFIN-caso12-2.4] (2)

"Valora de 1 a 5 la comunicación que has tenido con tus compañeros..- pues un 2... 3 .. un 3" [ENTFIN-caso12-2.5] (2)

"respecto al programa derive, cuando manipulabas el programa con el fin de obtener alguna solución ¿los mensajes que ibas recibiendo del programa o la respuesta que recibías, te han proporcionado nuevas vías de solución o la respuesta a lo que buscabas? ...- sí, más o menos sí..- ... el grado de comunicación con el programa cómo le valoras...? – yo pienso que el programa es muy sencillo de manejar y ayuda mucho" [ENTFIN-caso12-2.6] (2)

Valora de 1 a 5 el grado de interactividad que tiene el programa derive – un 4" [ENTFIN-caso12-2.7] (2)

"Cuando se proponían ejemplos para investigar, ¿el programa derive te ha servido para buscar las soluciones, o por el contrario, te dejabas llevar por los resultados que el sistema te iba ofreciendo? – me ayudaba" [ENTFIN-caso12-3.1] (3)

"cuando se planteaba la solución de los ejemplos a investigar, te has sentido en cierta medida manipulado, es decir, como si no supieras lo que se había pedido? ...- no, en ningún caso" [ENTFIN-caso12-3.2] (3)

"cuando se realizaban los ejercicios de manipulación ¿has entendido perfectamente el proceso que pretendías implementar con el programa derive? ...- si, y no era nada complicado hacerlos con lápiz y papel" [ENTFIN-caso12-3.3] (3)

"En la resolución de las cuestiones teóricas ¿has necesitado derive para resolverlas? – he utilizado derive, pero no es que hiciese falta, - y en el examen final ¿las utilizaste? – si era para comprobar una cosa sí, pero nada más - ¿sin derive no hubieras sabido resolverlas? – sin ningún problema – o sea que no crees que fuese fundamental derive para resolverlas...- no en absoluto" [ENTFIN-caso12-3.4] (3), (4)

"cuando resolvías problemas fin de capítulo, ¿has encontrado algún tipo de capacidad creativa a la hora de resolverlas, que te propiciaba el utilizar derive...? – sí, pues con derive si utilizas más de un camino para llegar a la solución, te facilita buscar más caminos... porque de la otra forma como es muy largo el proceso, pues lo haces de una forma y ya está ..." [ENTFIN-caso12-3.5] (3), (6)

"o sea que lo que te proporcionaba era la posibilidad de manipular varios caminos...- si" [ENTFIN-caso12-3.5-b] (3), (6)

"Cuando hiciste el examen final, ¿crees que hubiera sido más fácil hacerlo con lápiz y papel? – no, mucho más fácil con derive por la operativa" [ENTFIN-caso12-3.6] (3)

"Cuando se han ido desarrollando los contenidos del curso, has sabido distinguir fácilmente lo que eran contenidos esenciales de los procesos repetitivos...? – si" [ENTFIN-caso12-4.1] (4) "del tema 1 de espacios vectoriales ¿cuáles crees que son los contenidos esenciales? – pues lo que es espacio vectorial y subespacio vectorial - ¿y procesos rutinarios... – pues operaciones con vectores, es lo que más se repetía..." [ENTFIN-caso12-4.2] (4)

"- ¿y del tema 2 de matrices y aplicaciones lineales que crees que era lo fundamental? - yo creo que lo fundamental era lo de aplicaciones lineales, era lo más, y las propiedades de las matrices" [ENTFIN-caso12-4. 3] (4)

"¿y del tema 5, de diagonalización de matrices qué te pareció lo fundamental? – pues el proceso de diagonalización y poco más – y lo más repetitivo de ese tema? - ... " [ENTFIN-caso12-4.6] (4)

"¿y del tema 6 de formas cuadráticas? - ... no te sabría decir lo que he dado aquí y lo que he dado en física..." [ENTFIN-caso12-4.7] (4)

"¿y del tema 7, de programación lineal? – no me acuerdo.." [ENTFIN-caso12-4.8] (4)

"Sabes calcular determinantes de cualquier orden a mano? – sí, por supuesto" - ¿sabrías resolver un sistema de ecuaciones usando la regla de Cramer? – si - ¿sabrías calcular el rango de una matriz? – también - ¿sabrías calcular los autovalores de una matriz a mano? – también (hizo perfectamente el determinante de orden 3, la regla de Cramer no sabe aplicarla, la confunde con el método de Gauss, el rango lo resuelve perfectament en 10 segundos, y el cálculo de autovalores en 5 segundos deduce que los autovalores son los elementos de la diagonal principal, se le propuso una matriz triangular superior" [ENTFIN-caso12-4.9] (4)

¿Sabes distinguir entre lo que es un contenido esencial y un proceso rutinario? – yo creo que sí, - por ejemplo, suponte que te plantean un problema que consiste en diagonalizar una matriz de orden 3, qué crees que es lo fundamental para resolver el problema y cuáles son los procesos rutinarios...- fundamentalmente sería,... saber lo que es diagonalizar, sacar autovalores y autovectores...- y proceso rutinario? – pues saber la operativa de ese cálculo" [ENTFIN-caso12-5.1] (5)

"A la hora de resolver problemas de fin de capítulo ¿hubieras sido capaz de resolverlos sin derive' – si" [ENTFIN-caso12-5.2] (5)

"Cuando resuelves problemas ¿encuentras algunas característica especial en el modo de resolución cuando lo has hecho con derive...? – que es más rápido – en cuanto al tiempo que dedicas a los planteamientos de lo problemas cuando lo haces con derive y cuando lo hacías a lápiz y papel, cuanto tiempo le dedicas a derive y cuanto dedicarías haciendo a lápiz y papel? ...- pues depende del problema... pero si es un problema largo tardaría el doble en lápiz y papel que en derive..." [ENTFIN-caso12-5.3] (5)

"Cuando se planteaban ejemplos para investigar ¿has utilizado derive para intentar obtener algo por tu cuenta ...? – he intentado muchas veces hacerlos ..- qué proporción de fracaso error, tenías en las investigaciones que hacías...- un 75% " [ENTFIN-caso12-6.1] (6)

"... respecto a los mismos ejemplos para investigar, a medida que iban pasando los temas, tu grado de experimentación con derive ha ido aumentando...? – en otra metodología nunca la llegué a usar y con derive sí que la haces" [ENTFIN-caso12-6.2] (6)

"Cuando resolvías problemas, ¿has probado muchos caminos, y experimentado posibles soluciones? – si" [ENTFIN-caso12-6.3]

"¿crees que la experimentación que has realizado en el curso te ha ayudado a entender mejor los contenidos? – si, seguro que si" [ENTFIN-caso12-6.4] (6)

"Trabajar como lo hemos hecho el álgebra lineal con la investigación y el descubrimiento te ha permitido entender más los conceptos o por el contrario te han dispersado tu atención...- si" [ENTFIN-caso12-7.1] (7)

"Te gusta más que te den las cosas hechas, o que las tengas que buscar tú más con una cierta orientación? ...- siempre es más, mejor buscarlas por tu cuenta" [ENTFIN-caso12-7.1b] (7)

"Cuando se planteaban ejemplos para investigar, ¿has sentido en algún momento que necesitabas algunos conceptos previos sin los cuales no podrías encontrar nada? .- no, creo que se daba lo necesario" [ENTFIN-caso12-7.2] (7)

"Cuando has resuelto los problemas finales, ¿cuántas formas de resolución has empleado una o varias? ...- sí, varias formas" [ENTFIN-caso12-8.1] (8)

"...el tipo de didáctica que se ha planteado en la clase facilitaba el que los alumnos encontrarais varias formas o caminos para resolver un problema? ...- sí, porque además, en cada tema tú explicabas varias formas" [ENTFIN-caso12-8.3] (8)

"¿Crees que en clase se ha favorecido la multiplicidad de métodos de resolución o se ha indicado únicamente un único método de resolución? ... –si, si" [ENTFIN-caso12-8.4] (8)

"¿crees que el programa derive te ha dificultado que comprendas los conceptos matemáticos? ...- no todo lo contrario? ... [ENTFIN-caso12-9.1] (9)

"has dedicado demasiado tiempo al aprendizaje del programa derive? – no, es muy sencillo" [ENTFIN-caso12-9.2] (9)

"Cuando hiciste el examen te pusiste nervioso en algún momento porque no sabías utilizar algún comando de derive... ¿ - no, solamente que en un ejercicio estuve con el demasiado tiempo porque no lo repetí mil veces y no me daba la solución, había algo que no estaba bien, que no estaba bien hecho... creo que era de diagonalizar, que estuve con el pro lo menos media hora y no..." [ENTFIN-caso12-9.3] (9)

"pero en cuanto al manejo...- no, de manejo no" [ENTFIN-caso12-9.3b] (9)

"podrías indicar ¿cuáles son los principales problemas que has tenido cuando manejabas derive? – no recuerdo" [ENTFIN-caso12-9.4] (9)

"...si algún compañero te pregunta sobre el programa ¿se lo aconsejarías para estudiar álgebra lineal? ...- para los problemas sí, para la teoría no" [ENTFIN-caso12-9.5] (9)

"...tu crees que la forma de introducir los conceptos, quedaban poco claras, para alguien que no hubiera conocido el concepto previamente o alguna idea de él? ...- yo creo que es mejor en ese sentido el método tradicional, la práctica es mucho más fácil con derive" [ENTFIN-caso12-9.5b] (4), (9)

"Cuando se planteaban ejemplos para investigar, ¿te has sentido motivado o picado para resolver o encontrar la solución? – si, siempre a mí me gusta mucho la asignatura" [ENTFIN-caso12-10.1] (10), (14)

"Cuando se han planteado ejercicios de manipulación, ¿has encontrado satisfacción cuando los resolvías y encontrabas el método o proceso de la resolución? .- si, por supuesto" [ENTFIN-caso12-10.2] (10)

"¿cómo has resuelto los problemas sólo o en grupo? – casi siempre sólo" [ENTFIN-caso12-10.3] (10)

"Cuando has resuelto problemas, ¿ha aparecido en ti un algo un gusanillo que te obligaba a buscar la solución aunque a priori se resistiese? ...- siempre había alguno en cada tema que era más complejo y suscitaba ese tipo de actitud" [ENTFIN-caso12-10.4] (10)

"¿cuánto tiempo dedicabas más o menos en media a los problemas a la semana? ...- dos o tres horas" [ENTFIN-caso12-10.4b] (10)

"¿has establecido alguna relación de amistad especial con algún compañero de clase? – si " [ENTFIN-caso12-11.1] (11)

"...descríbeme un poco como era el tipo de comunicación y relación que tenías con los compañeros de tu entorno...? – pues quitando con María y Jessica que eran los del grupo, con el resto sobre todo de derive

– y con Jessica y Maria? – pues de todo un poco – o sea que tenías tiempo en las clases de hablar de derive y de algo más ¿ - si, si” [ENTFIN-caso12-11.2] (11)

“Antes y después de las clases, ¿existía algún tipo de relación con los compañeros de este curso? – sí, era mucho más que en una clase de ochenta personas” [ENTFIN-caso12-11.3] (11)

“¿cómo valorarías el ambiente que se ha desarrollado en clase?. Puntúa de 1 a 5 – un 7 de 1 a 10” [ENTFIN-caso12-11.4] (11)

“El tipo de trabajo en grupo que se ha desarrollado en clase, ¿te ha ayudado a aprender mejor los conceptos que se iban introduciendo? ..- en cuanto al manejo del programa, el tener gente al lado siempre te ayuda mucho, pero en cuento a los contenidos no” [ENTFIN-caso12-12.1] (12)

“¿crees que el haber utilizado este programa de ordenador, ha propiciado un tipo de colaboración especial entre los compañeros? -. si, seguro” [ENTFIN-caso12-12.2] (12)

“Si no hubiera habido ordenador ¿hubiera sido el mismo grado de colaboración? – no .- ¿por qué? - ... es que tener una duda y que se te resuelva justamente en ese momento, con tu compañero al lado, es mejor que en una clase teórica que no se te van a plantear las dudas en ese momento, se te plantean mucho más en casa” [ENTFIN-caso12-12.2.b] (12)

“¿has quedado con algunos compañeros para preparar el examen? – si, con María y Jessica” [ENTFIN-caso12-12.3] (12)

“El ritmo que hemos llevado en clase ¿cómo ha sido? ¿¿rápido, lento, normal...? – adecuado, lento pero bien” [ENTFIN-caso12-13.1] (13)

“Crees que lo problemas que se han planteado se podían clasificar en varios niveles de dificultad? – no sé, en general sí, - ¿cuántos crees que habría? ..-... tres niveles, por ejemplo, uno muy fácil, unos normales y otros complejos” [ENTFIN-caso12-13.4] (13)

“El porcentaje de problemas que has resuelto en general... yo creo que todos, salvo uno o dos “ [ENTFIN-caso12-13.4-b] (13), (8)

“...en la clase había varios niveles de aprendizaje? ... – si habría de todo vamos” [ENTFIN-caso12-13.5] (13)

“¿Crees que ha habido algún trato especial con algún compañero que te ha molestado en algún momento, y que no has tenido el trato que han tenido otros y te ha motivado cierta queja interior? – no” [ENTFIN-caso12-13.5-b] (13)

“¿crees que ha habido un trato igualitario de tratamiento para todo el mundo? ...- si, si” [ENTFIN-caso12-13.5-c] (13)

“El examen que se ha propuesto crees que era asequible para todos los alumnos, según lo que se ha dado en clase? --- no era difícil en absoluto. Yo creo que si se tenían los conocimientos porque había un poco de todo, pero no era difícil” [ENTFIN-caso12-13.6] (13)

“..crees que se ha tratado a todo el mundo para que todos fueran más al mismo ritmo? ..- si, si” [ENTFIN-caso12-13.6.b] (13)

“Y los que ibais un poco más adelantados, tú eras uno de ellos, te has sentido un poco más retrasado por esperar a los que iban un poco más lentos... ¿ - no que vá, yo creo que había que cimentar los conocimientos” [ENTFIN-caso12-13.6.c] (13)

“...¿cómo te han resultado todas las clases, largas, cortas... se te han pasado rápidamente? – hombre a mí se me han pasado rápido, igual a otra persona no...” [ENTFIN-caso12-14.1] (14)

“El hecho de utilizar el ordenador, ¿te ha motivado especialmente para estudiar las Matemáticas? – sí, una clase tradicional se me hubiese hecho más larga” [ENTFIN-caso12-14.2] (14)

"¿cuánto tiempo dedicabas a las matemáticas semanalmente...? - unas 4 o 5 horas " [ENTFIN-caso12-14.3] (14)

"El haber realizado este curso ¿ha aumentado o disminuido tu interés personal por las matemáticas? – se ha mantenido, antes era bastante alto" [ENTFIN-caso12-14.4](14)

"El material que se ha dado en internet, ¿te ha ayudado a trabajar la asignatura? – si, mucho – crees que era un material adecuado para el seguimiento de la asignatura? – sí, por supuesto – y las cuestiones teóricas que estaban resueltas las hacías? – si .." [ENTFIN-caso12-14.14.b] (14), (15), (4)

"¿qué ha sido lo más positivo del curso? - ... pues los problemas, que las clases con derive son perfectas para eso" [ENTFIN-caso12-g.1] (8), (14), (15)

"¿qué ha sido lo más negativo del curso? – lo más negativo, yo creo que la parte teórica" [ENTFIN-caso12-g.2]

"La nota que sacaste, ¿era la que esperabas? – bueno, aunque una pregunta tipo test se que le he fallado sabiendo que la iba a fallar,.. pero no, creo que sí es la que esparaba" [ENTFIN-caso12-g.3] (16)

"¿volverías a elegir este grupo experimental si te dieran a elegir? ...- lo cogería, seguro, con más decisión que antes" [ENTFIN-caso12-g.4] (14)

"..el hecho de ser solamente 15 en clase, crees que ha sido un condicionante muy importante para la forma en la que se ha desarrollado el curso, si hubiéramos sido en vez de 15, 30, hubiera sido muy distinto? .-.No, creo que hubiera sido más o menos igual" [ENTFIN-caso12-g.5] (14), (15)

Para acceder a las unidades significativas del resto de casos se puede consultar el CD-ROM adjunto a esta investigación.

ANEXO XVII:
PROCESO DEL ANÁLISIS VERTICAL.

En este apartado vamos a mostrar los diferentes documentos que hemos ido elaborando a lo largo del proceso de análisis vertical sobre el caso 12, aunque se puede encontrar toda la documentación relacionada con el resto de casos en el CD-ROM adjunto a esta investigación. Los documentos que vamos a mostrar son:

1. Síntesis de las cuestiones teóricas entregadas.
2. Síntesis de los problemas entregados
3. Síntesis del examen final
4. Tabla de conclusiones de datos subjetivos
5. Conclusiones parciales del caso 12

1. SÍNTESIS DE LAS CUESTIONES TEÓRICAS ENTREGADAS.

Tema 1. Espacios vectoriales.
PUNTUACIÓN: 9

ERRORES CONCEPTUALES QUE SE PARECEN DEDUCIR:
No ha sabido deducir que un conjunto de vectores l.i. no puede expresar de dos formas distintas un mismo vector [CUES-caso12-1.2-b]

CONCEPTOS QUE PARECE DOMINAR:
Entiende el concepto de dimensión de un subespacio vectorial [CUES-caso12-1.1]
Sabe relacionar el número de ecuaciones no redundantes con la dimensión de un subespacio [CUES-caso12-1.1-b]
Sabe determinar si cuatro vectores no nulos son li. o ld [CUES-caso12-1.2]
Sabe deducir que en R^2 tres vectores son siempre l.d. [CUES-caso12-1.3]
Sabe que un conjunto de tres vectores l.i. en R^3 es una base de R^3 [CUES-caso12-1.4-a]
Sabe relacionar el número de ecuaciones no redundantes de un subespacio con la dimensión del mismo [CUES-caso12-1.4-b]
Sabe que 4 vectores de R^3 no nulos no tienen porqué ser l.i. pueden ser l.d. [CUES-caso12-1.4-c]
Sabe que tres vectores no pueden ser l.i. si generan de dos formas distintas un mismo vector, cuestión que se contradice con el no haber completado la cuestión 2 [CUES-caso12-1.4-d]

Tema 2. Aplicaciones lineales. Matrices.
PUNTUACIÓN: 7,5

ERRORES CONCEPTUALES QUE SE PARECEN DEDUCIR:
No ha sabido relacionar las coordenadas en la base final de los vectores imagen de la base inicial de una aplicación lineal con las columnas de la matriz [CUES-caso12-2.2]

CONCEPTOS QUE PARECE DOMINAR:
Sabe utilizar correctamente la fórmula de las dimensiones para relacionar la dimensión del núcleo y la imagen [CUES-caso12-2.1]
Sabe deducir que si una matriz es no singular entonces los vectores columna de ella forman una base pero no tiene que ver con la traza [CUES-caso12-2.3]

Sabe obtener la matriz asociada a una aplicación lineal conocidas las imágenes de la base, así como deducir la dimensión de la imagen a partir del rango de la matriz [CUES-caso12-2.4]

Tema 3. Determinantes y traza.
PUNTUACIÓN: 7,5

ERRORES CONCEPTUALES QUE SE PARECEN DEDUCIR:
Ha generalizado a partir de un resultado concreto [PROB-caso12-3.1]

CONCEPTOS QUE PARECE DOMINAR:
Sabe que la traza de una matriz no tiene nada que ver con el hecho de que dicha matriz sea o no singular [PROB-caso12-3.2]
Sabe calcular determinantes usando propiedades [CUES-caso12-3.3]
Sabe la relación entre matrices invertibles, determinantes y rango [CUES-caso12-3.4]

Tema 4. Sistemas de ecuaciones lineales
PUNTUACIÓN:7,5

ERRORES CONCEPTUALES QUE SE PARECEN DEDUCIR:
No ha sabido determinar para qué valores de un parámetro un subconjunto definido por ecuaciones cartesianas es un subespacio vectorial [CUES-caso12-4.2]

CONCEPTOS QUE PARECE DOMINAR:
Sabe que un sistema que tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas es compatible siempre que su rango sea completo pero que también puede ser incompatible [CUES-caso12-4.1]
Sabe aplicar el teorema de Rouche para discutir un sistema teórico [CUES-caso12-4.3]
Sabe determinar la compatiblidad de un sistema que depende de parámetros [CUES-caso12-4.4]

Tema 5. Diagonalización.
PUNTUACIÓN: 7,5

ERRORES CONCEPTUALES QUE SE PARECEN DEDUCIR:
No ha sabido determinar que si una matriz A es diagonalizable entonces k.A también lo es [CUES-caso12-5.3]

CONCEPTOS QUE PARECE DOMINAR:
Sabe que la simetría de una matriz no es condición necesaria para la diagonalización, y que si una matriz tiene autovalores distintos es diagonalizable [CUES-caso12-5.1]
Sabe relacionar entre el orden de multiplicidad de un autovalor y la dimensión del subespacio de autovectores [CUES-caso12-5.2]
Sabe que la relación que hay entre los autovalores de una matriz A y kA [CUES-caso12-5.3-b]
Sabe la relación que existe entre matrices simétricas y matrices diagonalizables [CUES-caso12-5.4]

Tema 6.. Formas cuadráticas.
PUNTUACIÓN: 6,25

ERRORES CONCEPTUALES QUE SE PARECEN DEDUCIR:
Ha aplicado mal el criterio de los menores, pues lo hace sobre una matriz que no es la simétrica [CUES-caso12-6.3]
No ha sabido deducir a partir del determinante de la matriz y la traza los posibles valores que pueden tener sus autovalores a fin de clasificarla [CUES-caso12-6.4]

CONCEPTOS QUE PARECE DOMINAR:
Sabe deducir que si una matriz de orden 3 es invertible entonces no tiene autovalores nulos y por tanto no puede ser semidefinida [CUES-caso12-6.1]
Sabe deducir que si una forma cuadrática es s.d.p. y su matriz asociada es no nula entonces el sistema homogéneo Ax=0 es compatible indeterminado [CUES-caso12-6.2]

Tema 7. Programación lineal.
PUNTUACIÓN: 0 No entrega

2. SÍNTESIS DE LOS PROBLEMAS ENTREGADOS

Tema 1. Espacios vectoriales:
PUNTUACIÓN: 6
DIFICULTADES CONCEPTUALES DEL ÁLGEBRA LINEAL:
No ha sabido manejar polinomios de grado menor que 4 como vectores de un espacio vectorial [PROB-caso12-1.2]
No ha sabido calcular los vectores ortogonales a un subespacio vectorial [PROB-caso12-1.3]

DIFICULTADES DE MANEJO DEL PROGRAMA
No se observan

PROCEDIMIENTOS QUE PARECE DOMINAR
Plantea y resuelve perfectamente un modelo vectorial que se basaba en el uso de combinaciones lineales para obtener mezclas de ciertos materiales [PROB-caso12-1.1]
Sabe obtener la base de un susbespacio vectorial a partir de las ecuaciones cartesianas [PROB-caso12-1.4]
Sabe determinar cuando un vector pertenece a un subespacio vectorial [PROB-caso12-1.4-b]
Sabe calcular perfectamente la intersección entre subespacios vectoriales [PROB-caso12-1.5]
Sabe calcular perfectamente la suma entre subespacios vectoriales [PROB-caso12-1.5-b]
No entiende claramente el concepto de suma directa de subespacios [PROB-caso12-1.5-c]
Plantea y resuelve perfectamente un modelo vectorial basado en combinaciones lineales [PROB-caso12-1.6]
Plantea y resuelve perfectamente un modelo vectorial sobre combinaciones lineales convexas para una aplicación económica [PROB-caso12-1.7]
Plantea y resuelve perfectamente un modelo vectorial sobre un problema económico [PROB-caso12-1.8]
Sabe obtener una base de un subespacio vectorial a partir de un sistema de generadores, así como las ecuaciones cartesianas del mismo [PROB-caso12-1.9]
Sabe discutir la dimensión de un subespacio vectorial en función de parámetros [PROB-caso12-1.10]

Tema 2: Aplicaciones lineales y matrices.
PUNTUACIÓN: 8,5
DIFICULTADES CONCEPTUALES DEL ÁLGEBRA LINEAL:
No ha realizado procesos básicos de matrices como el cálculo de la matriz asociada, cálculo de la inversa en función de parámetros, era una aplicación lineal con parámetros [PROB-caso12-2.13]
No ha sabido resolver un problema de experimentación e investigación sobre propiedades de matrices [PROB-caso12-2.4]

DIFICULTADES DE MANEJO DEL PROGRAMA
Ha tenido un error de solapamiento de variables que le ha provocado un error en el problema [PROB-caso12-2.9-a]

PROCEDIMIENTOS QUE PARECE DOMINAR
Ha sabido plantear y resolver perfectamente problemas de modelización matricial [PROB-caso12-2.1],
Ha sabido plantear y resolver perfectamente un problema de modelización matricial basado en aplicaciones lineales [PROB-caso12-2.2]
ha sabido plantear y resolver nuevamente un problema de modelización matricial basado en el estudio de calificaciones de ciertos alumnos [PROB-caso12-2.3]
Sabe calcular la matriz asociada a una aplicación lineal respecto de bases distintas de las canónicas [PROB-caso12-2.5]
Sabe aplicar el método de Gauss-Jordan para obtener la inversa de una matriz [PROB-caso12-2.5-b]
Sabe obtener la aplicación lineal inversa a partir de la matriz inversa [PROB-caso12-2.5-c]
Sabe obtener una aplicación lineal a partir de las imágenes de ciertos vectores [PROB-caso12-2.6]
Sabe calcular la matriz asociada de una aplicación lineal respecto de las bases canónicas [PROB-caso12-2.7]
Sabe determinar el núcleo e imagen de una aplicación lineal a partir de la matriz asociada y de la fórmula de las dimensiones [PROB-caso12-2.7-b]
No ha calculado bien la matriz asociada a una aplicación lineal respecto de bases distintas de la canónica por un error de despiste pues se le ha olvidado calcular una de las columnas, sin embargo el proceso del resto está perfecto [PROB-caso12-2.8]
Domina el proceso de gauss-Jordan para calculo de inversas [PROB-caso12-2.9-b]
Ha sabido resolver un problema de ecuaciones matriciales, manejando perfectamente derive [PROB-caso12-2.10]
Ha utilizado muy bien un razonamiento inductivo para resolver una ecuación que igualaba matrices y potencias n-ésimas [PROB-caso12-2.11]
Ha planteado perfectamente y resuelto las condiciones de ciertos valores para que una matriz tuviese ciertas propiedades [PROB-caso12-2.12]
Ha sabido plantear bien un estudio de independencia lineal de vectores a partir de una ecuación vectorial , concepto de independencia lineal [PROB-caso12-2.14]

Tema 3. Determinantes. Traza.
PUNTUACIÓN: 7,7

DIFICULTADES CONCEPTUALES DEL ÁLGEBRA LINEAL:

En un problema con vectores paramétrico en el que intervenían los conceptos de independencia lineal le han faltado casos para determinar cuando esos vectores eran l.i. nuevamente ha tenido problemas con rangos [PROB-caso12-3.10]

Ha tenido ciertos problemas para obtener el rango de una matriz 4x6 le han faltado estudiar menores [PROB-caso12-3.5]

No ha sabido calcular el determinante de Vandermonde usando propiedades de determinante y utilizó directamente la función DET [PROB-caso12-3.8]

DIFICULTADES DE MANEJO DEL PROGRAMA

No se observan

PROCEDIMIENTOS QUE PARECE DOMINAR

Ha sabido experimenta e investigar para obtener solución de un problema con determinantes [PROB-caso12-3.1]

Sabe experimentar e investigar las propiedades que tiene que tener una matriz para que el determinante sea máximo [PROB-caso12-3.2]

Sabe experimentar e investigar para disponer en una matriz 0 y 1 para que su determinante sea mínimo [PROB-caso12-3.3]

Sabe utilizar un proceso de inducción para resolver un determinante n-ésimo [PROB-caso12-3.4]

Problema de experimentación e inducción para resolver una ecuación en la que interviene un determinante n-ésimo [PROB-caso12-3.6]

Sabe determinar las condiciones que debe cumplir un parámetro de cierta matriz para tener inversa [PROB-caso12-3.7]

Sabe obtener perfectamente el núcleo e imagen de una aplicación lineal [PROB-caso12-3.9]

Sabe determinar perfectamente cuando una ecuación paramétrica tiene inversa [PROB-caso12-3.11]

Ha sabido calcular un determinante n-ésimo utilizando un proceso inductivo [PROB-caso12-3.12]

Tema 4. Sistemas de ecuaciones lineales.
PUNTUACIÓN: 7,2

DIFICULTADES CONCEPTUALES DEL ÁLGEBRA LINEAL:

No ha hecho un tratamiento adecuación en la discusión de un sistema con dos parámetros, por un problema de distinción de casos en el estudio de los rangos [PROB-caso12-4.9]

Discute mal un sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas pues como la matriz de coeficientes es de orden 4x3 y la ampliada de 4x4 primero estudia el rango de la matriz de coeficientes, y lo hace mal, hace una mala distinción de casos [PROB-caso12-4.4]

DIFICULTADES DE MANEJO DEL PROGRAMA

Tiene un problema de solapamiento de variables en la discusión de un sistema en función de parámetros, el solapamiento le viene en el parámetro que debió tener previamente definido [PROB-caso12-4.5]

PROCEDIMIENTOS QUE PARECE DOMINAR

Ha sabido plantear y resolver perfectamente un modelo económico basado en sistemas de ecuaciones lineales [PROB-caso12-4.1]

Sabe discutir un sistema de ecuaciones con un parámetro [PROB-caso12-4.2]

Ha sabido discutir un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas con un parámetro [PROB-caso12-4.3]

Sabe discutir perfectamente un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas con 2 parámetros [PROB-caso12-4.5-b]

Sabe formular un sistema que pretende obtener propiedades de números naturales [PROB-caso12-4.6]

Sabe formular un sistema de ecuaciones que resuelve un problema económico sobre matrices de inputs [PROB-caso12-4.7]

Ha sabido formular y resolver un sistema de 6 ecuaciones con 6 incognitas que modeliza un problema de reservas de hoteles de seis agencias de viajes [PROB-caso12-4.8]

Sabe formular perfectamente sistemas que modelizan situaciones realez [PROB-caso12-4.9]

Tema 5. Diagonalización.
PUNTUACIÓN:7,5

DIFICULTADES CONCEPTUALES DEL ÁLGEBRA LINEAL:

No ha hecho un problema que pretendía conocer ciertos valores incógnita de una matriz a partir de los conceptos de autovalor y autovector [PROB-caso12-5.2]

No ha hecho un tratamiento exhaustivo del estudio de los valores que tiene que tomar un parámetro para que una matriz sea diagonalizable [PROB-caso12-5.10]

DIFICULTADES DE MANEJO DEL PROGRAMA

Al plantear una ecuación matricial del tipo $B=P.A.P^{-1}$ derive le ha generado una matriz enorme irreconocible que le ha dificultado resolución por problemas de interpretación [PROB-caso12-5.3]

PROCEDIMIENTOS QUE PARECE DOMINAR

Ha sabido obtener los valores incógnita de una matriz sabiendo que se conocen ciertos autovalores y autovectores, en definitiva el problema se reduce a resolver un sistema de 9 ecuaciones con 9 incógnitas [PROB-caso12-5.1]

Sabe estudiar si dos matrices son diagonalizables [PROB-caso12-5.4]

Sabe relaciona el concepto de diagonalización de una matriz con la matriz de paso de dicho proceso de diagonalización [PROB-caso12-5.5]

Ha sabido obtener los autovalores de una matriz paramétrica y determinar los valores que ha de tomar dicho parámetro para cumplir ciertas condiciones relacionadas con la diagonalización [PROB-caso12-5.6]

Ha realizado bien la modelización de un problema en el que interviene el calculo de la potencia k-ésima de una matriz usando diagonalización [PROB-caso12-5.7] y también la resolución.

Modelización de un problema en el que interviene la potencia k-ésima de una matriz [PROB-caso12-5.8]

Efectúa perfectamente la modelización y resolución de un problema en el que interviene potencia k-ésima de una matriz así como el paso al límte [PROB-caso12-5.9]

Tema 6. Formas cuadráticas.

PUNTUACIÓN:6,9

DIFICULTADES CONCEPTUALES DEL ÁLGEBRA LINEAL:

No ha hecho un problema que pretendía obtener la clasificación una forma cuadrática de orden 4 en función de 2 parámetros [PROB-caso12-6.6]

DIFICULTADES DE MANEJO DEL PROGRAMA

No se observan

PROCEDIMIENTOS QUE PARECE DOMINAR

Ha sabido clasificar una forma cuadrática en función de un parámetro [PROB-caso12-6.1]

Sabe clasificar una forma cuadrática en función de 2 parámetros [PROB-caso12-6.2]

Nuevamente sabe clasificar una forma cuadrática en función de 2 parámetros [PROB-caso12-6.3]

Sabe clasificar una forma cuadrática en función de un parámetro (3 variables) [PROB-caso12-6.4]

Sabe clasificar una forma cuadrática de orden 3 en función de 2 parámetros pero le falta alguna distinción de casos [PROB-caso12-6.5]

Ha sabido calcular los valores que debe tener un parámetro para que una forma cuadrática sea definida positiva [PROB-caso12-6.7]

ha sabido determinar si una forma cuadrática puede ser definida negativa para cierto valor de un parámetro [PROB-caso12-6.8]

3. SÍNTESIS DEL EXAMEN FINAL

ANÁLISIS DE LAS CUESTIONES TEÓRICAS.

Cuestiones.

Puntuación: 8

DIFICULTADES CONCEPTUALES DE ÁLGEBRA LINEAL QUE SE OBSERVAN:

No ha sabido aplicar el teorema de Rouche para determinar si un sistema es compatible indeterminaro [CUES-caso12-cues-5]

No ha sabido determinar cuando un conjunto de autovectores de una matriz pueden formar base del espacio total [CUES-caso12-cues-6]

DIFICULTADES DE MANEJO DEL PROGRAMA:

No se observan

¿UTILIZÓ DERIVE PARA CONTESTARLAS?

Para resolver la cuestión 1, plantea una matriz y estudia una submatriz de orden 3 de la que deduce con el determinante que tiene rango 3, con derive [EXFIN-caso12-cues1-b]

En la cuestión 2, plantea las ecuaciones cartesianas del subespacio y obtiene sus ecuaciones paramétricas con derive [EXFIN-caso12-cues2-b]

En la cuestión 6 comprueba si los autovectores dados son l.i. utilizando determinantes con derive [EXFIN-caso12-cues6-b]

CONCEPTOS QUE PARECE DOMINAR BIEN:

Sabe determina la dimensión de un subespacio vectorial obteniendo una base de dicho subespacio así como mediante la relación entre dimensión y número de ecuaciones no redundantes [EXFIN-caso12-cues-1]

Sabe estudiar la independencia lineal de tres vectores que contienen un parámetro [EXFIN-caso12-cues-2]

Sabe identificar las características de una aplicación lineal, de tal forma que se permita deducir que la imagen de cierto vector no puede ser uno dado [EXFIN-caso12-cues-3]

Sabe deducir que el determinante de una matriz obtenida por combinaciones lineales de columnas de otra tiene el mismo determinante [EXFIN-caso12-cues-4]

Sabe relacionar determinante, traza, autovalores y dimensión del subespacio de autovectores de cierta matriz [EXFIN-caso12-cues-7]

Sabe relacionar las formas cuadráticas que tienen por matrices asociadas a una matriz A y su inversa, así como el carácter de las mismas [EXFIN-caso12-cues8]

Sabe identificar cuando un conjunto del plano es un conjunto convexo utilizando la definición [EXFIN-caso12-cues9]

Sabe resolver gráficamente un programa lineal y aplicar el teorema de Weierstrass [EXFIN-caso12-cues10]

PROBLEMAS DEL EXÁMEN FINAL.

Calificación de problemas: 9,7

DIFICULTADES OBSERVADAS DEL MANEJO DE DERIVE.

Ha tenido problemas para determinar para qué valores de ciertos parámetros a y b cierta matriz es diagonalizable, su error ha venido fundamentalmente por un error que le ha provocado derive ya que al resolver un sistema no ha tenido en cuenta que era un sistema no lineal que con SOLVE daba soluciones erróneas [EXFIN-caso12-prob3-a]

DIFICULTADES CONCEPTUALES DE ÁLGEBRA LINEAL:

Ha tenido problemas para determinar para qué valores de ciertos parámetros a y b cierta matriz es diagonalizable, su error ha venido fundamentalmente por un error que le ha provocado derive ya que al resolver un sistema no ha tenido en cuenta que era un sistema no lineal que con SOLVE daba soluciones erróneas [EXFIN-caso12-prob3-a]

PROCEDIMIENTOS QUE PARECE DOMINAR:

Sabe obtener una base de un subespacio vectorial del cual se tiene un sistema de generadores [EXFIN-caso12-prob1-a]

Sabe obtener las ecuaciones cartesianas de un subespacio vectorial del cual se tiene un sistema de generadores [EXFIN-caso12-prob1-b]

Sabe obtener una base de un subespacio vectorial del que se tienen sus ecuaciones cartesianas [EXFIN-caso12-prob1-c]

Sabe obtener una base del subespacio intersección de dos subespacios vectoriales [EXFIN-caso12-prob1-d]

Sabe obtener las ecuaciones cartesianas del subespacio suma de dos subespacios vectoriales [EXFIN-caso12-prob1-e]

Sabe deducir si el espacio total se puede obtener como suma directa de los subespacios vectoriales anteriores [EXFIN-caso12-prob1-f]

Sabe obtener la matriz asociada a una aplicación lineal respecto de bases distintas de la canónica [EXFIN-caso12-prob2-a]

Sabe determinar si una matriz constante tiene inversa [EXFIN-caso12-prob2-b]

Sabe calcular la matriz asociada a una aplicación lineal con un parámetro respecto de las bases canónicas [EXFIN-caso12-prob2-c]

Sabe estudiar para qué valores de cierta matriz cuadrada paramétrica tiene inversa [EXFIN-caso12-prob2-d]

Sabe calcular la inversa de una matriz constante usando Gauss-Jordan y además utilizando muy pocos casos en este caso tan solo 4 pasos [EXFIN-caso12-prob2-e]

Sabe obtener la dimensión de la imagen y el núcleo de una aplicación lineal en función de distintos valores del parámetro que define cierta aplicación lineal [EXFIN-caso12-prob2-f]

Sabe diagonalizar una matriz constante de orden 3 [EXFIN-caso12-prob3-b]

Sabe obtener la forma cuadrática a partir de su matriz simétrica asociada [EXFIN-caso12-prob3-c]

Sabe discutir un sistema en función de los distintos valores de cierto parámetro a [EXFIN-caso12-prob4-a]

Sabe formular y resolver perfectamente un sistema de ecuaciones que modeliza un problema concreto [EXFIN-caso12-prob4-b]

4. TABLA DE LAS CONCLUSIONES LOS DATOS SUBJETIVOS

SÍNTESIS DE CATEGORÍAS CASO 12		
CATEGORÍA	ELEMENTOS SIGNIFICATIVOS	CONCLUSIONES
1.Sistema de Notación Intermedio	Con conocimientos de windows-95, maneja internet pero no el correo electrónico [ENCINI-caso12-2] Siempre le han gustado las matemáticas, y elige el subgrupo porque le gustan la informática y las matemáticas [ENCINI-caso11-4] "Cuando ha resuelto problemas con derive ¿has notado un estilo distingo en la forma de resolver problemas, es decir, la manera de plantear los problemas y resolverlos ha generado en ti un cierto estilo de pensamiento matemático diferentes al que tenías? – sí, un poco más, te preocupas menos por el cálculo numérico y te preocupas más por la resolución teórica" [ENTINT-caso12-1.1] "crees que hay más acercamiento a la teoría utilizando el ordenador que con lápiz y papel? – evidentemente con el ordenador, pero también se pierde cálculo numérico" [ENTINT-caso12-1.1-b] "Cuando has intentado resolver cuestiones teóricas, sin el uso de derive, has encontrado alguna dificultad especial? – yo no pero porque yo ya había visto otro año esta asignatura, pero yo creo que si hubiese ido de nuevo si que hubiese notado alguna dificultad, al no poder utilizar el ordenador y poder hacer ejercicios" [ENTINT-caso12-1.2] "A la hora de resolver un problema con derive, ¿has tenido que plantearte el problema previamente con lápiz y papel...? –pues bastantes, previamente con lápiz y papel, otros ya directamente ...- te ha costado un poco el razonar con derive, el hacer un planteamiento y luego ponerte ya a la discusión? - si " [ENTINT-caso12-1.3] "¿crees que derive te ha permitido construir un lenguaje, un sistema de notación más cercano al álgebra lineal? – yo creo que más que nada ha sido una	El alumno tiene buena predisposición al uso de los ordenadores, ya que tiene conocimientos previos de windows e internet [ENCINI-caso12-2]. y también tiene predisposición adecuada hacia las matemáticas [ENCINI-caso11-4] En la resolución de problemas el alumno afirma que el uso de derive permite que el alumno se preocupe menos por el cálculo y más por la resolución teórica [ENTINIT-caso12-1.2] El alumno considera que los conocimientos teóricos se acercan más usando el ordenador que usando lápiz y papel, aunque se pierde habilidad de cálculo [ENTINIT-caso12-1.1b] El alumno afirma que personalmente no ha encontrado dificultades para resolver las cuestiones teóricas sin el uso de derive, aunque afirma que otros pueden tener esa dificultad [ENTINT-caso12-1.2] El alumno se ha planteado algunos problemas previamente con lápiz y papel y otros de forma directa, porque le costaba razonar con derive directamente [ENTINT-caso12-1.3] Más que un sistema de notación intermedio, el alumno afirma que derive ha sido una herramienta de trabajo [ENTINT-caso12-1.4] Cuando ha resuelto problemas o ejercicios con derive, considera que

	herramienta de trabajo" [ENTINT-caso12-1.4] "Cuando has intentado resolver un problema o ejercicio con derive, has tenido la sensación de que hubiera sido más sencillo resolverlo con lápiz y papel,....? – he tenido la sensación que con lápiz y papel a veces se podía realizar igualmente" [ENTINT-caso12-9.4] "tú que has tenido contacto con el otro grupo experimental, solo por saber, supongo que habrás contrastado con otra gente las ideas de cómo se daba en un lado y en otro ¿qué sensación o percepción tiene tú al respecto? – yo estoy muy contento de este grupo, pero vamos yo creo que para ellos es mucho peor la parte práctica y para nosotros la parte teórica" [ENTINT-caso12-g.10]	se podrían haber realizado igualmente con lápiz y papel [ENTINT-caso12-9.4] El alumno afirma que con derive se acerca más el alumno a la parte práctica pero se complica la parte teórica, justo al revés de lo que sucede en la clase tradicional [ENTINT-caso12-g.10]
2. Interactividad	"En el desarrollo de las clases ¿cómo ha sido tu comunicación con el profesor? – más cercana, y he encontrado respuesta rápida a tus dudas" [ENTINT-caso12-2.1] "En el trabajo que has realizado con derive el programa te ha proporcionado respuesta rápida a los procesos manipulativos o dudas que te pudieran surgir? ... – a veces he dudado, en algún error o alguna respuesta que me ha salido, que no me convencía" [ENTINT-caso12-2.2] "¿y entre los alumnos y el profesor tu crees que hay más unión? – si, más cercanía- pero por el número de alumnos o quizás también ha influido que haya también un entorno, un estilo de aprendizaje distinto al habitual...- hombre por las dos cosas, pero yo creo que sobre todo por el número de alumnos" [ENTINT-caso12-11.4-b]	La comunicación con el profesor ha sido buena y ha encontrado rápidamente respuesta a sus dudas [ENTINT-caso12-2.1] El alumno afirma que derive le ha proporciona respuesta rápida a los procesos manipulativos, aunque en ocasiones ha obtenido resultados o errores que no le convencían [ENTINT-caso12-2.2] Considera que hay más unión entre alumnos y profesores, más cercanía sobre todo por el número reducido de alumnos, aunque también ha influido el estilo de didáctica empleado [ENTINT-caso12-11.4-b]
3. Protagonismo.	"En los ejemplos de manipulación que se han realizado en clase, te has sentido dirigido por el programa o por el contrario te has sentido director de tus procesos? – yo creo que me he sentido protagonista" [ENTINT-caso12-3.1] "En los ejemplos para investigar, que se han realizado en clase, te has sentido perdido, has encontrado cierto protagonismo en la búsqueda de	El alumno se ha sentido protagonista totalmente en los ejercicios de manipulación que se realizaban en clase [ENTINT-caso12-3.1] En los ejemplos para investigar el alumno no se ha encontrado perdido y nuevamente afirma haber adoptado una actitud de protagonismo del proceso [ENTINT-caso12-3.2]

	soluciones...- en general sí!” [ENTINT-caso12-3.2] “Cuando el profesor daba una posible solución a los ejemplos a investigar, te has sentido un mero usuario de los procesos que se comentaban o los has asimilado e interiorizado..- intentaba contrastarlo, de lo que iba haciendo con lo que se iba comentando “ [ENTINT-caso12-3.3] “Cuando se han planteado ejercicios te has encontrado perdido o por el contrario has sabido realizar los procesos que se habían aprendido anteriormente...- los he sabido hacer.” [ENTINT-caso12-3.4] “En la resolución de problemas, has encontrado algún protagonismo o capacidad creativa a la hora de resolverlos o por el contrario te has sentido perdido...- en general los he visto bastante fáciles, pero había alguno que había que preparar algo el tema” [ENTINT-caso12-3.5] “En la resolución de cuestiones teóricas, has encontrado alguna dificultad por no utilizar derive, has sentido dependencia del programa...- no sentía mucha necesidad” [ENTINT-caso12-3.5b]	Cuando se daban posibles soluciones a los ejemplos para investigar el alumno ha optado por contrastar estos resultado nuevamente actitud de protagonismo [ENTINT-caso12-3.3] En los ejercicios de manipulación el alumno afirma no haberse encontrado perdido, los ha sabido hacer [ENTINT-caso12-3.4] El alumno afirma que con la resolución de problemas en general los ha visto fáciles y había algunos un poco más complejos, pero en todos ellos sí ha encontrado nuevamente protagonismo y en alguno una especial autocreación para encontrar soluciones [ENTINT-caso12-3.5] En las cuestiones teóricas no ha encontrado dificultades por el hecho de no utilizar derive, no se ha sentido dependiente del programa [ENTINT-caso12-3.5b]
4. Contenidos esenciales	“Cuando ha resuelto problemas con derive ¿has notado un estilo distingo en la forma de resolver problemas, es decir, la manera de plantear los problemas y resolverlos ha generado en ti un cierto estilo de pensamiento matemático diferentes al que tenías? – sí, un poco más, te preocupas menos por el cálculo numérico y te preocupas más por la resolución teórica” [ENTINT-caso12-1.1] “crees que hay más acercamiento a la teoría utilizando el ordenador que con lápiz y papel? – evidentemente con el ordenador, pero también se pierde cálculo numérico” [ENTINT-caso12-1.1-b] “Cuando has intentado resolver cuestiones teóricas, sin el uso de derive, has encontrado alguna dificultad especial? – yo no pero porque yo ya había visto otro año esta asignatura, pero yo creo que si hubiese ido de nuevo si que hubiese notado alguna dificultad, al no poder utilizar el ordenador y poder hacer ejercicios” [ENTINT-caso12-1.2] “Del tema 1 de espacios vectoriales ¿cuáles crees que son los contenidos esenciales? – no sé que decir” [ENTINT-caso12-4.1]	En la resolución de problemas ha notado un estilo diferente, ya que se preocupaba más por la resolución teórica que por los cálculos que había que realizar [ENTINT-caso12-1.1] El alumno considera que con derive existe mayor acercamiento teórico al álgebra lineal, aunque se pierde habilidad de cálculo [ENTINT-caso12-1.1.b] Cuando ha resuelto las cuestiones teóricas considera que derive no era imprescindible, aunque considera que ha sido porque los contenidos los había visto antes, sino quizás hubiera tenido problemas por no usar el ordenador [ENTINT-caso12-1.2] No ha sabido enunciar los contenidos esenciales del tema 1 [ENTINT-caso12-4.1] Tampoco tiene claros los contenidos esenciales del tema 2

	esenciales? – no sé que decir” [ENTINT-caso12-4.1] “¿y del tema 2 de matrices y aplicaciones lineales? – la resolución de aplicaciones lineales” [ENTINT-caso12-4.2] “¿y del tema 3 de determinantes y traza? – saber hacer determinantes” [ENTINT-caso12-4.3] “¿y del tema 4 de sistemas lineales? – pues también resolución de sistemas” [ENTINT-caso12-4.4] “¿y del tema 5 de diagonalización, autovalores y autovectores? .- saber qué es diagonalizar y como... y autovalores y autovectores” [ENTINT-caso12-4.5] “¿y del tema 6 que estamos dando sobre formas cuadráticas? – las propiedades” [ENTINIT-caso12-4.6] “tu crees que ha sido más práctico o más teórico el curso? – más práctico” [ENTINT-caso12-g.7] “tú crees que le ha faltado algo más de fundamenta algo más la teoría, ver algunas cosas más... – no tal como está ha sido bien” [ENTINT-caso12-g.8] “cuando en las cuestiones teóricas .. al ser más práctico el curso de lo normal, puede existir algún problema para resolver por lo que tú has percibido a mano.. ..- o sea resolver las cuestiones teóricas sin derive... yo creo que sí que se pierde bastante, parece que no pero si se pierde mucho. Yo creo que se pierde bastante, por ejemplo al resolver un determinante o algo de esto, como la gente está acostumbrada a resolverlo con ordenador pues igual ya no se acuerda... no se” [ENTINT-caso12-g.9] “tú que has tenido contacto con el otro grupo experimental, solo por saber, supongo que habrás contrastado con otra gente las ideas de cómo se daba en un lado y en otro ¿qué sensación o percepción tiene tú al respecto? – yo estoy muy contento de este grupo, pero vamos yo creo que para ellos es mucho peor la parte práctica y para nosotros la parte teórica” [ENTINT-caso12-g.10]	[ENTINT-caso12-4.2] En el tema 4 de sistemas lineales considera que el contenido esencial es la resolución, cuando es uno de los procesos rutinarios [ENTINIT-caso12-4.4] Del tema 5 tiene claro que el contenido esencial es determinar cuando una matriz es diagonalizable y saber calcular autovalores y autovectores [ENTINT-caso12-4.5] Del tema 6 considera como contenido esencial las propiedades de las formas cuadráticas [ENTINT-caso12-4.6] Considera que le curso ha sido más práctico que teórico [ENTINT-caso12-g.7], aunque no considera que le haya faltado teoría, sino que ha estado en general bien [ENTINT-caso12-g.8]. Sin embargo puede ocurrir que el alumno tuviera problemas con las cuestiones teóricas, ya que si se tratan resolver sin derive, puede faltar alguna habilidad de cálculo para resolverlas [ENTINT-caso12-g.9]. El alumno considera que en el curso de derive los alumnos tenían más problemas en la parte teórica mientras que en el curso tradicional los alumnos tenían más problemas en la parte práctica [ENTINT-caso12-g.10] **CONTENIDOS ESENCIALES QUE PARECE DOMINAR**

	CONTENIDOS ESENCIALES QUE PARECE DOMINAR **TEMA 1** Entiende el concepto de dimensión de un subespacio vectorial [CUES-caso12-1.1] Sabe relacionar el número de ecuaciones no redundantes con la dimensión de un subespacio [CUES-caso12-1.1-b] Sabe relacionar el número de ecuaciones no redundantes de un subespacio con la dimensión del mismo [CUES-caso12-1.4-b] Sabe obtener la base de un susbespacio vectorial a partir de las ecuaciones cartesianas [PROB-caso12-1.4] Sabe determinar cuando un vector pertenece a un subespacio vectorial [PROB-caso12-1.4-b] Sabe obtener una base de un subespacio vectorial a partir de un sistema de generadores, así como las ecuaciones cartesianas del mismo [PROB-caso12-1.9] Sabe discutir la dimensión de un subespacio vectorial en función de parámetros [PROB-caso12-1.10] Sabe determinar la dimensión de un subespacio vectorial obteniendo una base de dicho subespacio así como mediante la relación entre dimensión y número de ecuaciones no redundantes [EXFIN-caso12-cues-1] Sabe obtener una base de un subespacio vectorial del cual se tiene un sistema de generadores [EXFIN-caso12-prob1-a] Sabe obtener las ecuaciones cartesianas de un subespacio vectorial del cual se tiene un sistema de generadores [EXFIN-caso12-prob1-b] Sabe obtener una base de un subespacio vectorial del que se tienen sus ecuaciones cartesianas [EXFIN-caso12-prob1-c]	**TEMA 1** Domina todo los conceptos relacionados con subespacios vectoriales: dimensión de un subespacio vectorial [CUES-caso12-1.1], cálculo de la dimensión de un s.v. usando el número de ecuaciones no redundantes [CUES-caso12-1.4-b], [EXFIN-caso12-cues-1], la base de un susbespacio vectorial a partir de sus ecuaciones cartesianas [PROB-caso12-1.4], [EXFIN-caso12-prob1-c] o a partir de un sistema de generadores [PROB-caso12-1.9], [EXFIN-caso12-prob1-b], o las ecuaciones cartesianas de un subespacio a partir de un sistema de generadores [EXFIN-caso12-prob1-b].
	Sabe determinar si cuatro vectores no nulos son li. o ld [CUES-caso12-1.2] Sabe deducir que en R^2 tres vectores son siempre l.d. [CUES-caso12-1.3] Sabe que un conjunto de tres vectores l.i. en R^3 es una base de R^3 [CUES-caso12-1.4-a] Sabe que 4 vectores de R^3 no nulos no tienen porqué ser l.i. pueden ser l.d. [CUES-caso12-1.4-c] No ha sabido deducir que un conjunto de vectores l.i. no puede expresar	Domina los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores [CUES-caso12-1.2], [CUES-caso12-1.3], [CUES-caso12-1.4-a], [CUES-caso12-1.4-c], [CUES-caso12-1.2-b], [CUES-caso12-1.4-d], [EXFIN-caso12-cues-2] Sabe obtener la intersección entre subespacios vectoriales [PROB-caso12-1.5], [EXFIN-caso12-prob1-d] Sabe calcular perfectamente la suma de subespacios vectoriales

	de dos formas distintas un mismo vector [CUES-caso12-1.2-b] Sabe que tres vectores no pueden ser l.i. si generan de dos formas distintas un mismo vector, cuestión que se contradice con el no haber completado la cuestión 2 [CUES-caso12-1.4-d] Sabe estudiar la independencia lineal de tres vectores que contienen un parámetro [EXFIN-caso12-cues-2] Sabe calcular perfectamente la intersección entre subespacios vectoriales [PROB-caso12-1.5] Sabe obtener una base del subespacio intersección de dos subespacios vectoriales [EXFIN-caso12-prob1-d] Sabe calcular perfectamente la suma entre subespacios vectoriales [PROB-caso12-1.5-b] No entiende claramente el concepto de suma directa de subespacios [PROB-caso12-1.5-c] Sabe deducir si el espacio total se puede obtener como suma directa de los subespacios vectoriales anteriores [EXFIN-caso12-prob1-f] Sabe obtener las ecuaciones cartesianas del subespacio suma de dos subespacios vectoriales [EXFIN-caso12-prob1-e] **TEMA 2** Sabe utilizar correctamente la fórmula de las dimensiones para relacionar la dimensión del núcleo y la imagen [CUES-caso12-2.1] Sabe determinar el núcleo e imagen de una aplicación lineal a partir de la matriz asociada y de la fórmula de las dimensiones [PROB-caso12-2.7-b] Sabe obtener la dimensión de la imagen y el núcleo de una aplicación lineal en función de distintos valores del parámetro que define cierta aplicación lineal [EXFIN-caso12-prob2-f] Sabe obtener perfectamente el núcleo e imagen de una aplicación lineal [PROB-caso12-3.9] Sabe determinar si una matriz constante tiene inversa [EXFIN-caso12-prob2-b] Sabe estudiar para qué valores de cierta matriz cuadrada paramétrica tiene	[PROB-caso12-1.5-b], [EXFIN-caso12-prob1-e] Y aunque al principio tuvo errores con el concepto de suma directa [PROB-caso12-1.5-c] parece haber dominado finalmente el concepto [EXFIN-caso12-prob1-f] TEMA 2 Sabe obtener perfectamente el núcleo e imagen de una aplicación lineal [PROB-caso12-2.7-b], aplicar la fórmula de las dimensiones, [PROB-caso12-3.9] [CUES-caso12-2.1], [EXFIN-caso12-prob2-f] Domina las condiciones de invertibilidad de una matriz [CUES-caso12-2.3], , [EXFIN-caso12-prob2-b], [EXFIN-caso12-prob2-d]

	inversa [EXFIN-caso12-prob2-d] Sabe obtener la aplicación lineal inversa a partir de la matriz inversa [PROB-caso12-2.5-c] Sabe deducir que si una matriz es no singular entonces los vectores columna de ella forman una base pero no tiene que ver con la traza [CUES-caso12-2.3] No ha sabido relacionar las coordenadas en la base final de los vectores imagen de la base inicial de una aplicación lineal con las columnas de la matriz [CUES-caso12-2.2] No ha realizado procesos básicos de matrices como el cálculo de la matriz asociada, cálculo de la inversa en función de parámetros, era una aplicación lineal con parámetros [PROB-caso12-2.13] No ha calculado bien la matriz asociada a una aplicación lineal respecto de bases distintas de la canónica por un error de despiste pues se le ha olvidado calcular una de las columnas, sin embargo el proceso del resto está perfecto [PROB-caso12-2.8] Sabe obtener la matriz asociada a una aplicación lineal conocidas las imágenes de la base, así como deducir la dimensión de la imagen a partir del rango de la matriz [CUES-caso12-2.4] Sabe calcular la matriz asociada a una aplicación lineal respecto de bases distintas de las canónicas [PROB-caso12-2.5] Sabe calcular la matriz asociada de una aplicación lineal respecto de las bases canónicas [PROB-caso12-2.7] Sabe obtener la matriz asociada a una aplicación lineal respecto de bases distintas de la canónica [EXFIN-caso12-prob2-a] Sabe calcular la matriz asociada a una aplicación lineal con un parámetro respecto de las bases canónicas [EXFIN-caso12-prob2-c]	Aunque en algún problema no ha sabido obtener la matriz asociada [CUES-caso12-2.2], [PROB-caso12-2.13], [PROB-caso12-2.8], sin embargo se observa que luego ha sido un proceso que domina [CUES-caso12-2.4], [PROB-caso12-2.5], [PROB-caso12-2.7], [EXFIN-caso12-prob2-a], [EXFIN-caso12-prob2-c].
	Domina el proceso de gauss-Jordan para calculo de inversas [PROB-caso12-2.9-b] Sabe aplicar el método de Gauss-Jordan para obtener la inversa de una matriz [PROB-caso12-2.5-b] Sabe calcular la inversa de una matriz constante usando Gauss-Jordan y además utilizando muy pocos casos en este caso tan solo 4 pasos [EXFIN-caso12-	Domina el método de Gauss para el cálculo de la inversa [PROB-caso12-2.9-b], [PROB-caso12-2.5-b], [EXFIN-caso12-prob2-e] Sabe obtener una aplicación lineal a partir de la imágenes de una base [PROB-caso12-2.6] y en general las características de una aplicación lineal [EXFIN-caso12-cues-3]

	prob2-e] Sabe obtener una aplicación lineal a partir de las imágenes de ciertos vectores [PROB-caso12-2.6] Sabe identificar las características de una aplicación lineal, de tal forma que se permita deducir que la imagen de cierto vector no puede ser uno dado [EXFIN-caso12-cues-3]	
	TEMA 3 Sabe la relación entre matrices invertibles, determinantes y rango [CUES-caso12-3.4] Sabe determinar las condiciones que debe cumplir un parámetro de cierta matriz para tener inversa [PROB-caso12-3.7] Sabe determinar perfectamente cuando una ecuación paramétrica tiene inversa [PROB-caso12-3.11] Sabe que la traza de una matriz no tiene nada que ver con el hecho de que dicha matriz sea o no singular [PROB-caso12-3.2] Sabe calcular determinantes usando propiedades [CUES-caso12-3.3] Sabe deducir que el determinante de una matriz obtenida por combinaciones lineales de columnas de otra tiene el mismo determinante [EXFIN-caso12-cues-4]	**TEMA 3** Entiende las condiciones fundamental de invertibilidad usando determinantes [CUES-caso12-3.4], [PROB-caso12-3.7], [PROB-caso12-3.11] Parece conocer las principales propiedades de los determinantes [CUES-caso12-3.3], [ESXFIN-caso12-cues-4]
	TEMA 4 Sabe que un sistema que tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas es compatible siempre que su rango sea completo pero que también puede ser incompatible [CUES-caso12-4.1] Sabe aplicar el teorema de Rouche para discutir un sistema teórico [CUES-caso12-4.3] Sabe determinar la compatiblidad de un sistema que depende de parámetros [CUES-caso12-4.4] Sabe discutir un sistema de ecuaciones con un parámetro [PROB-caso12-4.2] Ha sabido discutir un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas con un	**TEMA 4** Parece dominar perfectamente el Teorema de Rouche, para la discusión de sistemas [CUES-caso12-4.1], [CUES-caso12-4.3], incluso la discusión con parámetros [CUES-caso12-4.4], [PROB-caso12-4.2], [PROB-caso12-4.3], [PROB-caso12-4.5-b], [`EXFIN-caso12-prob4-a]

	parámetro [PROB-caso12-4.3] Sabe discutir perfectamente un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas con 2 parámetros [PROB-caso12-4.5-b] Sabe discutir un sistema en función de los distintos valores de cierto parámetro a [EXFIN-caso12-prob4-a] **TEMA 5** Sabe que la simetría de una matriz no es condición necesaria para la diagonalización, y que si una matriz tiene autovalores distintos es diagonalizable [CUES-caso12-5.1] Sabe la relación que existe entre matrices simétricas y matrices diagonalizables [CUES-caso12-5.4] Sabe relacionar entre el orden de multiplicidad de un autovalor y la dimensión del subespacio de autovectores [CUES-caso12-5.2] Sabe que la relación que hay entre los autovalores de una matriz A y kA [CUES-caso12-5.3-b] No ha hecho un problema que pretendía conocer ciertos valores incógnita de una matriz a partir de los conceptos de autovalor y autovector [PROB-caso12-5.2] Ha sabido obtener los valores incógnita de una matriz sabiendo que se conocen ciertos autovalores y autovectores, en definitiva el problema se reduce a resolver un sistema de 9 ecuaciones con 9 incógnitas [PROB-caso12-5.1] Sabe relacionar determinante, traza, autovalores y dimensión del subespacio de autovectores de cierta matriz [EXFIN-caso12-cues-7] Sabe relaciona el concepto de diagonalización de una matriz con la matriz de paso de dicho proceso de diagonalización [PROB-caso12-5.5] Sabe estudiar si dos matrices son diagonalizables [PROB-caso12-5.4] Ha sabido obtener los autovalores de una matriz paramétrica y determinar los valores que ha de tomar dicho parámetro para cumplir ciertas condiciones relacionadas con la diagonalización [PROB-caso12-5.6] Ha tenido problemas para determinar para qué valores de ciertos parámetros a y b cierta matriz es diagonalizable, su error ha venido fundamentalmente por un error que le ha provocado derive ya que al resolver un sistema no ha tenido en cuenta que era un sistema no lineal que con SOLVE daba	**TEMA 5** Relaciona perfectamente las diferentes condiciones de diagonalización: para matrices simétricas [CUES-caso12-5.1], [CUES-caso12-5.4], cuando los autovalores se repiten [CUES-caso12-5.2], Aunque no ha hecho un problema que pretencía resolver un problema usando conceptos de autovalor y autovectore [PROB-caso12-5.2], sin embargo parece que entiende dichos conceptos autovalor y autovector y sabe aplicarlos para resolver problemas en los que hay incógnitas de la matriz [PROB-caso12-5.1] Sabe relacionar los conceptos de determinante, traza, autovalores y dimensión de subespacio de autovectores [EXFIN-caso12-cues-7] Sabe determinar cuando una matriz constante es diagonalizable [PROB-caso12-5.4], [PROB-caso12-5.5], incluso estudiar cuando una matriz con parámetros es diagonalizable [PROB-caso12-5.6], aunque en ocasiones ha tenido problemas para el estudio de casos exhaustivo [PROB-caso12-5.10] incluso en el examen tuvo ciertos problemas para estas clasificaciones [EXFIN-caso12-prob3-a] , Sabe diagonalizar matrices constantes [EXFIN-caso12-prob3-b]

	soluciones erróneas [EXFIN-caso12-prob3-a] No ha hecho un tratamiento exhaustivo del estudio de los valores que tiene que tomar un parámetro para que una matriz sea diagonalizable [PROB-caso12-5.10] Sabe diagonalizar una matriz constante de orden 3 [EXFIN-caso12-prob3-b] **TEMA 6** Sabe deducir que si una matriz de orden 3 es invertible entonces no tiene autovalores nulos y por tanto no puede ser semidefinida [CUES-caso12-6.1] Sabe deducir que si una forma cuadrática es s.d.p. y su matriz asociada es no nula entonces el sistema homogéneo Ax=0 es compatible indeterminado [CUES-caso12-6.2] Sabe relacionar las formas cuadráticas que tienen por matrices asociadas a una matriz A y su inversa, así como el carácter de las mismas [EXFIN-caso12-cues8] Sabe obtener la forma cuadrática a partir de su matriz simétrica asociada [EXFIN-caso12-prob3-c] Ha aplicado mal el criterio de los menores, pues lo hace sobre una matriz que no es la simétrica [CUES-caso12-6.3] No ha sabido deducir a partir del determinante de la matriz y la traza los posibles valores que pueden tener sus autovalores a fin de clasificarla [CUES-caso12-6.4] No ha hecho un problema que pretendía obtener la clasificación una forma cuadrática de orden 4 en función de 2 parámetros [PROB-caso12-6.6] Ha sabido clasificar una forma cuadrática en función de un parámetro [PROB-caso12-6.1] Sabe clasificar una forma cuadrática en función de 2 parámetros [PROB-caso12-6.2] Nuevamente sabe clasificar una forma cuadrática en función de 2 parámetros [PROB-caso12-6.3] Sabe clasificar una forma cuadrática en función de un parámetro (3 variables) [PROB-caso12-6.4] Sabe clasificar una forma cuadrática de orden 3 en función de 2	**TEMA 6** Maneja básicamente las principales condiciones de clasificación de las formas cuadráticas [CUES-caso12-6.1], [CUES-caso12-6.2], relacionar el carácter de formas cuadráticas con una matriz A y su inversa [EXFIN-caso12-cues8] . Sabe obtener la forma cuadrática a partir de su forma matricial [EXFIN-caso12-prob3-c] Ha cometido al principio algunos errores en la clasificación de formas cuadráticas en la aplicación del criterio de menores pero para una matriz no simétrica [CUES-caso12-6.3], en la clasificación en función de 2 parámetro [PROB-caso12-6.6] o deducir a partir de la matriz y de la traza información de los autovalores para clasificar la forma cuadrática [CUES-caso12-6.4], pero sin embargo en general podemos decir que parece dominar la clasificación de formas cuadráticas en función de parámetros [PROB-caso12-6.1], [prob-CASO12-6.2], [`PROB-caso12-6.3], [PROB-caso12-6.4], [PROB-caso12-6.5], [PROB-caso12-6.7], [PROB-caso12-6.8]

	parámetros pero le falta alguna distinción de casos [PROB-caso12-6.5] Ha sabido calcular los valores que debe tener un parámetro para que una forma cuadrática sea definida positiva [PROB-caso12-6.7] ha sabido determinar si una forma cuadrática puede ser definida negativa para cierto valor de un parámetro [PROB-caso12-6.8] **TEMA 7** Sabe identificar cuando un conjunto del plano es un conjunto convexo utilizando la definición [EXFIN-caso12-cues9] Sabe resolver gráficamente un programa lineal y aplicar el teorema de Weierstrass [EXFIN-caso12-cues10] **CONTENIDOS ESENCIALES QUE NO PARECE COMINAR** **TEMA 1.** No ha sabido manejar polinomios de grado menor que 4 como vectores de un espacio vectorial [PROB-caso12-1.2] No ha sabido calcular los vectores ortogonales a un subespacio vectorial [PROB-caso12-1.3] **TEMA 3** Ha generalizado a partir de un resultado concreto [PROB-caso12-3.1] En un problema con vectores paramétrico en el que intervenían los conceptos de independencia lineal le han faltado casos para determinar cuando esos vectores eran l.i. nuevamente ha tenido problemas con rangos [PROB-caso12-3.10] Ha tenido ciertos problemas para obtener el rango de una matriz 4x6 le han faltado estudiar menores [PROB-caso12-3.5] No ha sabido calcular el determinante de Vandermonde usando propiedades de determinante y utilizó directamente la función DET [PROB-caso12-3.8]	**TEMA 7** Sabe identificar por definición cuando un conjunto es convexo [EXFIN-caso12-cues9] Sabe resolver gráficamente un programa lineal [EXFIN-caso12-cues10] **CONTENIDOS ESENCIALES QUE NO PARECE DOMINAR** **TEMA 1** No ha sabido menejar espacios vectoriales con el de los polinomios de grado menor o igual que 4 [PROB-caso12-1.2] No ha sabido calcular vectores ortogonales a un subespacio vectorial dado [PROB-caso12-1.3] **TEMA 3** Ha tenido ciertos problemas con el cálculo de rangos [PROB-caso12-3.10], [PROB-caso12-3.5] Tampoco ha sabido calcular el determinante de Vandermonde usando propiedades y ha usado directamente la función DER [PROB-caso12-3.8]

	TEMA 4 No ha sabido determinar para qué valores de un parámetro un subconjunto definido por ecuaciones cartesianas es un subespacio vectorial [CUES-caso12-4.2] No ha hecho un tratamiento adecuación en la discusión de un sistema con dos parámetros, por un problema de distinción de casos en el estudio de los rangos [PROB-caso12-4.9] Discute mal un sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas pues como la matriz de coeficientes es de orden 4x3 y la ampliada de 4x4 primero estudia el rango de la matriz de coeficientes, y lo hace mal, hace una mala distinción de casos [PROB-caso12-4.4] No ha sabido aplicar el teorema de Rouché para determinar si un sistema es compatible indeterminado [CUES-caso12-4.5] **TEMA 5** No ha sabido determinar que si una matriz A es diagonalizable entonces k.A también lo es [CUES-caso12-5.3] No ha sabido determinar cuando un conjunto de autovectores de una matriz pueden formar base del espacio total [CUES-caso12-cues-6] **¿USÓ DERIVE EN LAS CUESTIONES TEÓRICAS?** Para resolver la cuestión 1, plantea una matriz y estudia una submatriz de orden 3 de la que deduce con el determinante que tiene rango 3, con derive [EXFIN-caso12-cues1-b] En la cuestión 2, plantea las ecuaciones cartesianas del subespacio y obtiene sus ecuaciones paramétricas con derive [EXFIN-caso12-cues2-b] En la cuestión 6 comprueba si los autovectores dados son l.i. utilizando determinantes con derive [EXFIN-caso12-cues6-b]	**TEMA 4.** Ha tenido ciertos problemas en la discusión de sistemas de ecuaciones con parámetros [PROB-caso12-4.9], [PROB-caso12-4.4], [CUES-caso12-4.5] **TEMA 5.** Ha tenido problemas en algunas propiedades de autovalores [CUES-caso12-5.3], [CUES-caso12-cues-6] **¿USÓ DERIVE EN LAS CUESTIONES TEÓRICAS?** Ha usado DERIVE en cálculos rutinarios como el cálculo de determinantes [EXFIN-caso12-cues1-b] [EXFIN-caso12-cues6-b] y en la resolución de un sistema lineal [EXFIN-caso12-cues2-b]
5. Esfuerzo rutinario	"Cuando te has puesto a realizar ejercicios de manipulación con derive, has entendido el proceso que se pretendía conocer? – no me ha costado trabajo" [ENTINT-caso12-5.1] "resolver problemas, ¿crees que derive te ha ayudado a encontrar la resolución de manera efectiva, o quizás hubiera sido más fácil hacerla con lápiz y papel? – casi siempre es más fácil con derive, pues te evitas todo el cálculo" [ENTINT-caso12-5.2]	El alumno afirma que no le ha costado entender los procesos que se implementaban en los ejercicios de manipulación [ENTINT-caso12-5.1] En la resolución de problemas el alumno afirma que ha sido más fácil resolverlos con derive pues evitas el cálculo [ENTINT-caso12-

	"...en cuestiones teóricas, has tenido mucha dificultad en resolverlas sin derive, o existian demasiados cálculos...- sí, creo que sin práctica te quedas un poco.." [ENTINT-caso12-5.3] "Sabrías calcular un determinante de orde 3 sin derive – si" [ENTINT-caso12-5.4] "Sabrías resolver un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas sin derive -. si" [ENTINT-caso12-5.5] "¿crees que derive permite prescindir de los cálculos rutinarios y te permite orientar mejor tus esfuerzos hacia la investigación y el razonamiento? ...- evidentemente" [ENTINT-caso12-5.6] "cuando en las cuestiones teóricas .. al ser más práctico el curso de lo normal, puede existir algún problema para resolver por lo que tú has percibido a mano.. ..- o sea resolver las cuestiones teóricas sin derive... yo creo que sí que se pierde bastante, parece que no pero si se pierde mucho. Yo creo que se pierde bastante, por ejemplo al resolver un determinante o algo de esto, como la gente está acostumbrada a resolverlo con ordenador pues igual ya no se acuerda... no se" [ENTINT-caso12-g.9]	fácil resolverlos con derive pues evitas el cálculo [ENTINT-caso12-5.2] En las cuestiones teóricas considera que sin derive puede que se tuvieran problemas porque se pierde habilidad de cálculo[ENTINT-caso12-5.3] El alumno afirma que sabría calcular un determinante de orden 3 sin derive [ENTINT-caso12-5.4]; un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas sin derive [ENTINT-caso12-5.5] El alumno afirma que derive permite prescindir de los cálculos rutinarios y orientar los esfuerzos hacia la investigación y el razonamiento [ENTINT-caso12-5.6] El alumno considera que al ser un curso eminentemente práctico, más de lo normal en las cuestiones teóricas pueden surgir problemas al intentar resolverlas sin derive [ENTINT-caso12-g.2]
6. Herramienta de Experimentación	"Cuando se han planteado en clase ejemplos para investigar, cual ha sido tu actitud: has esperado a que te dieran la solución, has experimentado con derive...- siempre me he puesto a investigar" [ENTINT-caso12-6.1] "has conseguido llegar a descubrir las cuestiones que se planteaban en los ejemplos de investigación? ....- creo que casi siempre las he entendido y conseguido bastante bien" [ENTINT-caso12-6.2] "En los problemas planteados, cuando has tenido que resolverlos, ¿has	En los ejemplos para investigar la actitud del alumno ha sido de búsqueda y de experimentación, siempre se ha puesto a investigar [ENTINT-caso12-6.1], y ha conseguido llegar en bastantes ocasiones a la solución de estas cuestiones [ENTINT-caso12-6.2] En la resolución de problemas el alumno afirma que casi siempre los ha sabido hacer, aunque a veces había algún problema un poco más complicado [ENTINT-caso12-6.3]

	encontrado rápidamente la estrategia de resolución o por el contrario has tenido que experimentar con el problema para descubrir por donde podrían ir las soluciones ...- en general siempre los sabía hacer, salvo a lo mejor un ejercicio o dos por capítulo que eran más complicados” [ENTINT-caso12-6.3] “¿crees que la experimentación que has realizado en el curso te ha ayudado a entender mejor los contenidos que se trataban de impartir...- sí por supuesto..- si no se hubieran hecho,, posiblemente hubieras entendido más profundamente... ¿cómo lo valorarías más profundamente o cual sería tu percepción de los conceptos? ...- yo sobre todo el poder ver con las gráficas que hemos visto y evitar los cálculos y todo esto, te centras en la parte teórica y entiendes mejor el contenido” [ENTINT-caso12-6.4] “¿crees que el uso de derive facilita que el álgebra lineal sea una disciplina experimental...? – si, sin duda- ¿qué percepción tenías tu del álgebra lineal como algo experimental? ...- teórica” [ENTINT-caso12-6.5] “tu crees que ha sido más práctico o más teórico el curso? – más práctico” [ENTINT-caso12-g.7] **EXPERIMENTACIÓN** No ha sabido resolver un problema de experimentación e investigación sobre propiedades de matrices [PROB-caso12-2.4] Ha sabido resolver un problema de ecuaciones matriciales, manejando perfectamente derive [PROB-caso12-2.10] Ha planteado perfectamente y resuelto las condiciones de ciertos valores para que una matriz tuviese ciertas propiedades [PROB-caso12-2.12] Ha sabido plantear bien un estudio de independencia lineal de vectores a partir de una ecuación vectorial , concepto de independencia lineal [PROB-caso12-2.14] Ha sabido experimenta e investigar para obtener solución de un problema con determinantes [PROB-caso12-3.1] Sabe experimentar e investigar las propiedades que tiene que tener una matriz para que el determinante sea máximo [PROB-caso12-3.2] Sabe experimentar e investigar para disponer en una matriz 0 y 1 para que su determinante sea mínimo [PROB-caso12-3.3]	El alumno considera que la experimentación le ha ayudado a entender mejor los contenidos, sobre todo cuando se utilizaban representaciones gráficas de conceptos. El motivo es que derive le permite centrarse más en la teoría que en el cálculo y así se entiende mejor [ENTINT-caso12-6.4] El uso de derive de esta forma hace que el álgebra lineal sea una disciplina más experimental y menos teórica [ENTINT-caso12-6.5] Considera que el curso es mucho más práctico que teórico [ENTINT-caso12-g.7] **EXPERIMENTACIÓN>** Ha utilizado la experimentación para resolver problemas variados sobre propiedades de matrices [PROB-caso12-2.4], [PROB-caso12-2.10], [PROB-caso12-2.12], para la independencia lineal [PROB-caso12-2.14], sobre determinantes [PROB-caso12-3.1], [PROB-caso12-3.2], [PROB-caso12-3.3]

	su determinante sea mínimo [PROB-caso12-3.3] **INDUCCIÓN** Ha utilizado muy bien un razonamiento inductivo para resolver una ecuación que igualaba matrices y potencias n-ésimas [PROB-caso12-2.11] Sabe utilizar un proceso de inducción para resolver un determinante n-ésimo [PROB-caso12-3.4] Problema de experimentación e inducción para resolver una ecuación en la que interviene un determinante n-ésimo [PROB-caso12-3.6] Ha sabido calcular un determinante n-ésimo utilizando un proceso inductivo [PROB-caso12-3.12]	**INDUCCIÓN** Utilizó razonamientos inductivos de forma correcta en problemas de cálculo de determinantes n-ésimo [PROB-caso12-3.4], [PROB-caso12-3.6], [PROB-caso12-3.12] y en ecuaciones matriciales con potencias n-ésimas [PROB-caso12-2.11]
7. Aprendizajes significativos	"Cuando has terminado un capítulo, tienes la sensación de haber entendido bien los contenidos – he entendido todo" [ENTINT-caso12-7.1] "Trabajar los contenidos mediante la investigación y el descubrimiento crees que te ha facilitado entender mejor los contenidos o por el contrario han dispersado tu atención? – no ha sido mucho mejor claro" [ENTINT-caso12-7.2]	Cuando terminaban los capítulo el alumno tenía siempre la sensación de haber entendido todo [ENTINT-caso12-7.1] El haber trabajado los contenidos mediante la investigación y el descubrimiento le ha facilitado la comprensión de contenidos bastante más [ENTINT-caso12-7.2]

8. Estrategias de Resolución de Problemas	“Cuando has resuelto los problemas de fin de capítulo, ¿has utilizado más de una estrategia de resolución....- hombre sobre todo cuando no estaba seguro del resultado buscaba más, cuando no llega a la respuesta buscaba otros caminos” [ENTINT-caso12-7.3] “¿crees que los problemas planteados podrían tener varios caminos de resolución? – si, si “ [ENTINT-caso12-8.2] “Cuando se ha planteado alguna cuestión en clase, o un problema ¿has observado si se pedían diferentes puntos de vista para resolver la cuestión ...? – que había muchas formas “ [ENTINT-caso12-8.3] **MODELOS** Plantea y resuelve perfectamente un modelo vectorial que se basaba en el uso de combinaciones lineales para obtener mezclas de ciertos materiales [PROB-caso12-1.1] Plantea y resuelve perfectamente un modelo vectorial basado en combinaciones lineales [PROB-caso12-1.6] Plantea y resuelve perfectamente un modelo vectorial sobre combinaciones lineales convexas para una aplicación económica [PROB-caso12-1.7] Plantea y resuelve perfectamente un modelo vectorial sobre un problema económico [PROB-caso12-1.8] Ha sabido plantear y resolver perfectamente un problema de modelización matricial basado en aplicaciones lineales [PROB-caso12-2.2] ha sabido plantear y resolver nuevamente un problema de modelización matricial basado en el estudio de calificaciones de ciertos alumnos [PROB-caso12-2.3] Ha sabido plantear y resolver perfectamente problemas de modelización matricial [PROB-caso12-2.1], Ha sabido plantear y resolver perfectamente un modelo económico basado en sistemas de ecuaciones lineales [PROB-caso12-4.1] Sabe formular un sistema que pretende obtener propiedades de números naturales [PROB-caso12-4.6] Sabe formular un sistema de ecuaciones que resuelve un problema económico sobre matrices de inputs [PROB-caso12-4.7]	El alumno ha utilizado más de una estrategia de solución cuando no se quedaba convencido de la solución o cuando no llegaba a la respuesta, en estos casos buscaba otros caminos [ENTINT-caso12-7.3] El alumno considera que los problemas que se planteaban podían resolverse de varias formas [ENTINT-caso12-8.2] El alumno ha percibido que en clase siempre se daban varios puntos de vista para resolver los problemas [ENTINT-caso12-8.3] **MODELOS** Plantea y resuelve problemas utilizando modelos vectoriales [PROB-caso12-1.1], [PROB-caso12-1.6], [PROB-caso12-1.7], [PROB-caso12-1.8] Plantea y resuelve bien problemas utilizando modelos matriciales [PROB-caso12-2.2], [PROB-caso12-2.3], [PROB-caso12-2.1] Plantea y resuelve bien problemas que utilizan sistemas de ecuaciones lineales [PROB-caso12-4.1], [PROB-caso12-4.6], [PROB-caso12-4.7], [PROB-caso12-4.8], [PROB-caso12-4.9], [EXFIN-caso12-prob4-b] Ha sabido modelizar y resolver problemas en los que intervenía el cálculo de la potencia k-ésima de una matriz diagonalizable [PROB-

	Ha sabido formular y resolver un sistema de 6 ecuaciones con 6 incognitas que modeliza un problema de reservas de hoteles de seis agencias de viajes [PROB-caso12-4.8] Sabe formular perfectamente sistemas que modelizan situaciones realez [PROB-caso12-4.9] Sabe formular y resolver perfectamente un sistema de ecuaciones que modeliza un problema concreto [EXFIN-caso12-prob4-b] Ha realizado bien la modelización de un problema en el que interviene el calculo de la potencia k-ésima de una matriz usando diagonalización [PROB-caso12-5.7] y también la resolución. Modelización de un problema en el que interviene la potencia k-ésima de una matriz [PROB-caso12-5.8] Efectúa perfectamente la modelización y resolución de un problema en el que interviene potencia k-ésima de una matriz así como el paso al límte [PROB-caso12-5.9] **INDUCCIÓN** Ha utilizado muy bien un razonamiento inductivo para resolver una ecuación que igualaba matrices y potencias n-ésimas [PROB-caso12-2.11] Sabe utilizar un proceso de inducción para resolver un determinante n-ésimo [PROB-caso12-3.4] Problema de experimentación e inducción para resolver una ecuación en la que interviene un determinante n-ésimo [PROB-caso12-3.6] Ha sabido calcular un determinante n-ésimo utilizando un proceso inductivo [PROB-caso12-3.12]	caso12-5.7], [PROB-caso12-5.8], [PROB-caso12-5.9] **INDUCCIÓN** Utilizó razonamientos inductivos de forma correcta en problemas de cálculo de determinantes n-ésimo [PROB-caso12-3.4], [PROB-caso12-3.6], [PROB-caso12-3.12] y en ecuaciones matriciales con potencias n-ésimas [PROB-caso12-2.11]
9. Barreras adicionales	“Una vez que hemos concluido casi como valorarías el programa derive, una herramienta sencilla o compleja en su manipulación? – una herramienta sencilla” [ENTINT-caso12-9.1] “Si algún compañero te pregunta sobre el programa, se lo aconsejarías para estudiar álgebra lineal? ...- si, si porque es sencillo” [ENTINT-caso12-9.2] “¿cuáles son tus principales problemas con la manipulación del programa	El alumno considera que derive es una herramienta sencilla de manejar [ENTINT-caso12-9.1] El alumno aconsejaría el programa a aquellos compañeros que desearan estudiar álgebra lineal, es más sencillo [ENTINT-caso12-9.2] No recuerda problemas de manipulación con el programa [ENTINT-

	derive? ...- me ha parecido sencillo” [ENTINT-caso12.-9.3] “Cuando has intentado resolver un problema o ejercicio con derive, has tenido la sensación de que hubiera sido más sencillo resolverlo con lápiz y papel,....? – he tenido la sensación que con lápiz y papel a veces se podía realizar igualmente” [ENTINT-caso12-9.4] “Cuando has intentado resolver un problema o ejercicio con derive, te has sentido engañado por el programa por los resultados que te daban y que quizás no sabías interpretar? ...- normalmente no he tenido problemas con eso” [ENTINT-caso12-9.5] “cuando en las cuestiones teóricas .. al ser más práctico el curso de lo normal, puede existir algún problema para resolver por lo que tú has percibido a mano.. ..- o sea resolver las cuestiones teóricas sin derive... yo creo que sí que se pierde bastante, parece que no pero si se pierde mucho. Yo creo que se pierde bastante, por ejemplo al resolver un determinante o algo de esto, como la gente está acostumbrada a resolverlo con ordenador pues igual ya no se acuerda... no se” [ENTINT-caso12-g.9] DIFICULTADES OBJETIVAS: Ha tenido un error de solapamiento de variables que le ha provocado un error en el problema [PROB-caso12-2.9-a] Tiene un problema de solapamiento de variables en la discusión de un sistema en función de parámetros, el solapamiento le viene en el parámetro que debió tener previamente definido [PROB-caso12-4.5] Ha tenido problemas para determinar para qué valores de ciertos parámetros a y b cierta matriz es diagonalizable, su error ha venido fundamentalmente por un error que le ha provocado derive ya que al resolver un sistema no ha tenido en cuenta que era un sistema no lineal que con SOLVE daba soluciones erróneas [EXFIN-caso12-prob3-a]	caso12-9.3] En la resolución de problemas a veces ha tenido la sensación de que se podían realizar de igual forma con lápiz y papel [ENTINT-caso12-9.4] Normalmente no ha tenido problemas de interpretación con derive en la resolución de problemas [ENTINT-caso12-9.5] Considera que al ser un curso más práctico en las cuestiones pueden haber existido problemas al realizarlas sin derive , porque se pierde bastante habilidad de cálculo [ENTINT-caso12-g.9] DIFICULTADES OBJETIVAS Sus principales dificultades con derive han venido ocasionadas por SOLAPAMIENTO DE VARIABLES; es decir usar variables previamente definidas con otros valores [PROB-caso12-2.9-a], [PROB-caso12-4.5] o en el uso de SOLVE para resolver sistemas de ecuaciones [EXFIN-caso12-prob3-a] que en realidad eran sistemas no lineales, obteniendo soluciones incorrectas.

10. Autonomía cognitiva	"Los ejemplos de investigación que se planteaban en el desarrollo de las clases, te han resultado inabordables o por el contrario eran muy fáciles...- eran asequibles" [ENTINT-caso12-10.1] "...has tenido la sensación de que eras dueño de la situación o por el contrario que derive te estaba dominando? ...- sí totalmente. " [ENTINT-caso12-10.2] "Cuando te pones a resolver problemas y ejercicios, consideras que tienes una suficiente autonomía para desarrollarlos...- ha añadido más autonomía, porque no te queda la duda de si estaré haciendo mal el cálculo, si llevaré un error y lo voy arrastrando, sabes que lo tienes bien" [ENTINT-CASO12-10.3] "Cuando te pongas a resolver problemas de examen, tu crees que vas a sentir ese grado de autonomía...- si, si" [ENTINT-caso12-10.3-b] **¿USÓ DERIVE EN LAS CUESTIONES TEÓRICAS?** Para resolver la cuestión 1, plantea una matriz y estudia una submatriz de orden 3 de la que deduce con el determinante que tiene rango 3, con derive [EXFIN-caso12-cues1-b] En la cuestión 2, plantea las ecuaciones cartesianas del subespacio y obtiene sus ecuaciones paramétricas con derive [EXFIN-caso12-cues2-b] En la cuestión 6 comprueba si los autovectores dados son l.i. utilizando determinantes con derive [EXFIN-caso12-cues6-b]	El alumno considera que los ejemplos de investigación eran asequibles [ENTINT-caso12-10.1] El alumno ha tenido normalmente la sensación de que era dueño del proceso de aprendizaje, es decir tenía autonomía para desarrollar las actividades totalmente [ENTINT-caso12-10.2] El alumno considera que derive le ha añadido más autonomía cognitiva pues sin derive le quedaba la duda de los errores de cálculo y así daba los pasos con más seguridad [ENTINT-caso12-10.3] El alumno considera que en el examen tendrá ese mismo grado de autonomía que ha adquirido [ENTINT-caso12-10.3-b] **¿USÓ DERIVE EN LAS CUESTIONES TEÓRICAS?** Ha usado DERIVE en cálculos rutinarios como el cálculo de determinantes [EXFIN-caso12-cues1-b] [EXFIN-caso12-cues6-b] y en la resolución de un sistema lineal [EXFIN-caso12-cues2-b]
11. Relación dialéctica	"¿cómo ha sido tu relación personal con los compañeros de clase? – limitada" [ENTINT-caso12-11.1] "¿has conseguido establecer un lazo de amistad mayor con algunos compañeros de clase a lo largo de este curso? ...- si, con Maria y Jessica y Juan Pablo" [ENTINT-caso12-11.2] "¿cómo ha sido tu relación personal con el profesor? .- buena" [ENTINT-caso12-11.3]	La relación del alumno con los compañeros de clase ha sido limitada [ENTINT-caso12-11.1] Ha entablado amistad con María, Jésica y Juan Pablo [ENTINT-caso12-11.2]

	“¿Crees que el ambiente propiciado por este tipo de estrategia ha favorecido las relaciones dialécticas entre los alumnos? ...- si hombre, al ser una clase tan pequeña pues la gente siempre se une mucho más...- o sea que has sentido más unión que en otras clases a lo mejor? ..- si, además como se pueden hacer ejercicios en común, porque hay personas que hacen unas otras hacen otro, está bien” [ENTINT-caso12-11.4] “¿y entre los alumnos y el profesor tu crees que hay más unión? – si, más cercanía- pero por el número de alumnos o quizás también ha influido que haya también un entorno, un estilo de aprendizaje distinto al habitual...- hombre por las dos cosas, pero yo creo que sobre todo por el número de alumnos” [ENTINT-caso12-11.4-b]	La relación personal con el profesor ha sido buena [ENTINT-caso12-11.3] Al haber muchos alumnos el ambiente y las relaciones entre alumnos han sido mejores, y también ha favorecido estas relaciones dialécticas el hecho de poder hacer ejercicios en común contrastando resultados [ENTINT-caso12-11.4] Entre alumnos y profesor considera que ha habido más unión, sobre todo por el número de alumnos aunque también ha influido la didáctica empleada [ENTINT-caso12-11.4-b]
12. Aprendizaje colaborativo	“El trabajo de grupo que se ha desarrollado en clase ¿crees que te ha ayudado a aprender mejor los conceptos de álgebra lineal? - ... hombre en mi caso yo creo que no me ha ayudado mucho, pero yo creo que sí que ayuda bastante” [ENTINT-caso12-12.1] “La resolución de cuestiones, ejercicios y problemas en parejas de trabajo, ha sido favorecida por el ambiente que proporcionaba el ordenador en la clase? ...- pues al ser un aula tan limitada de alumnos y ser distinto con respecto a otros grupos, pues se favorece más la relación...- habéis utilizado el mail y estas cosas entre vosotros...? – si” [ENTINT-caso12-12.2] “¿crees que las colaboraciones que habéis tenido los compañeros de tu entorno, ha incrementado por un lado tus relaciones personales con dichos compañeros? ...- si, sin duda” [ENTINT-CASO12-12.3] “Has quedado con los compañeros para resolver problemas , ¿cómo ha sido la experiencia positiva o negativa? – si, resolvíamos problemas entre nosotros y resolvíamos las dudas, ha sido una experiencia positiva de colaboración” [ENTINT-caso12-12.3]	El alumno considera que el trabajo en grupo a él personalmente no le ha ayudado, aunque reconoce que en general sí ha ayudado a sus compañeros [ENTINT-caso12-12.1] El hecho de ser pocos alumnos ha favorecido la relación entre alumnos y un ambiente de más colaboración [ENTINT-caso12-12.2] Las colaboraciones de aprendizaje que se han tenido entre compañeros han favorecido las relaciones dialécticas entre los compañeros [ENTINT-caso12-12.3] El alumno afirma que ha quedado con algunas compañeras para resolver problemas y considera que ha sido una experiencia positiva de colaboración [ENTINT-caso12-12.3]

13. Atención a la diversidad	"...¿te has aburrido en algún momento? – hay alguna que no me ha gustado mucho, pero no me he aburrido " [ENTINT-caso12-13.1] "El ritmo de la clase ¿cómo te ha parecido? - hombre bueno para llevar la asignatura pero rápido en ningún caso" [ENTINT-caso12-13.2] "¿te has encontrado perdido en alguna ocasión? – no, en ninguna" [ENTINT-caso12-13.3] "Los problemas propuestos te han resultado todos inabordables o has conseguido resolver alguno? – he resuelto casi todos- cuando has encontrado tus soluciones con las que se colgaban en la web ¿has comprobado que eran las que tú hacías más o menos? – si" [ENTINT-caso12-13.4] "Los problemas propuestos han suscitado en ti interés especial por su resolución...? – si, ha habido algunos que me han picado bastante en su resolución.." [ENTINT-caso12-13.5]	El alumno no se ha aburrido en las clases [ENTINT-caso12-13.1] El ritmo de las clases ha sido el adecuado [ENTINT-caso12-13.2] El alumno no se ha encontrado perdido en las clases en ninguna ocasión [ENTINT-caso12-13.3] El alumno afirma haber resuelto casi todos los problemas y luego contrastaba las soluciones con la web [ENTINT-caso12-13.4] Ha habido algunos problemas que le han suscitado un interés especial para su resolución [ENTINT-caso12-13.5]
14. Motivación	Con conocimientos de windows-95, maneja internet pero no el correo electrónico [ENCINI-caso12-2] Sus últimos estudios fueron el COU, nota de acceso a la universidad 6,75 (selectividad). Su calificación media en matemáticas en los últimos años fue de sobresaliente. [ENCINI-caso12-3] Siempre le han gustado las matemáticas, y elige el subgrupo porque le gustan la informática y las matemáticas [ENCINI-caso12-4] "te ha parecido interesante el álgebra lineal? cuentame un poquillo como te ha parecido...- sí creo que se ha hecho muy interesante, yo creo que si se hubiese dado la clase estricta me hubiese aburrido mucho más, en este aspecto seguro" [ENTINT-caso12-13.6] "ese gusanillo por resolver las cosas lo has tenido alguna otra vez? – si en cursos anteriores " [ENTINT-caso12-13.6-b] "En una valoración general, ¿ha aumentado con este curso tu interés por las matemáticas? – hombre no ha descendido porque ya me gustaban – te ha motivado el ordenador para estudiar matemáticas – sí,. si" [ENTINT-caso12-14.5]	El alumno estaba motivado inicialmente al curso pues tenía conocimientos de informática (internet, windows) [ENCINI-caso12-2] Por otro lado su motivación por las matemáticas ha sido alta, de hecho ha tenido una calificación media de sobresaliente en los últimos años [ENCINI-caso12-3] Elige el curso porque le gustan matemáticas e informática [ENCINI-caso12-4] Considera que el curso de álgebra lineal ha sido muy interesante, de hecho afirma que el mismo curso en la clase tradicional le hubiese aburrido [ENTINT-caso12-13.6] El alumno afirma que el gusanillo para resolver problemas lo ha tenido en cursos anteriores [ENTINT-caso12-13.6-b] El alumno afirma que en líneas generales el curso ha mantenido su interés por las matemáticas y se ha sentido especialmente motivado

	“¿cuántas horas has dedicado más o menos a la semana, en media? – yo creo que cinco o seis” [ENTINT-caso12-14.5-b] “Si tuvieras que dar una valoración global del curso indica la nota que le pondrías en todo- creo que un 7” [ENTINT-caso12-g1.] “¿qué es lo que más te ha gustado del curso? – lo que más el llevar la asignatura bastante al día, por los problemas que había que hacer al final de cada capítulo, se lleva bien, sino igual se va dejando, igual te parece que lo llevas bien y lo voy dejando, así lo ibas haciendo” [ENTINT-caso12-g.2] “¿qué es lo que menos te ha gustado del curso? – seguro que hay algo pero no se me ocurre? “ [ENTINT-caso12-g.3] “¿volverías a elegir este grupo experimental si te dieran nuevamente a elegir? – si, sobre todo por eso, por evitarme el cálculo numérico, no depender de hacer mal un problema porque te has confundido en un signo o lo que sea” [ENTINT-caso12-g.5] “tu crees que ha sido más práctico o más teórico el curso? – más práctico” [ENTINT-caso12-g.7] “tú que has tenido contacto con el otro grupo experimental, solo por saber, supongo que habrás contrastado con otra gente las ideas de cómo se daba en un lado y en otro ¿qué sensación o percepción tiene tú al respecto? – yo estoy muy contento de este grupo, pero vamos yo creo que para ellos es mucho peor la parte práctica y para nosotros la parte teórica” [ENTINT-caso12-g.10] “yo le intentaría convencer que se impartiese pero igual que en vez de ser todas las clases con ordenador que fuese alguna, una al mes o dos, de resolver a mano- le ha faltado un poco resolver con lápiz y papel – sí, el hacer a mano, las cuestiones teóricas sobre todo...- añadir alguna clase con encerado. Pero bueno tú en particular no la has necesitado, venías bien preparado no? – si” [ENTINT-caso12-g.11]	interés por las matemáticas y se ha sentido especialmente motivado por el uso del ordenador [ENTINT-caso12-14.5] ha dedicado en media semanal unas 5-6 horas semanales [ENTINT-caso12-14.5-b] El alumno valora el curso con un 7 sobre 10 [ENTINT-caso12-g.1] El alumno considera que lo más positivo ha sido la posibilidad de llevar la asignatura al día por los ejercicios que s proponían [ENTINT-caso12-g.2] No se le ocurre nada negativo del curso [ENTINT-caso12-g.3] El alumno volvería a realizar este grupo experimental, sobre todo por la posibilidad de evitar el cálculo y no depender de este para hacer mal los problemas [ENTINT-caso12-g.5] Considera que el curso ha sido más práctico que teórico [ENTINT-caso12-g.7] En una comparación entre el grupo de derive y el grupo tradicional afirma que en el curso con derive la parte compleja era la teórica mientras que en el curso tradicional la parte compleja era la parte práctica [ENTINT-caso12-g.10] Considera que el curso hubiera estado mejor si se hubiese intercalado clases de pizarra y lápiz y papel entre las clases con ordenador [ENTINT-caso12-g.11]

15. Dinámica del curso	“Si tuvieras que dar una valoración global del curso indica la nota que le pondrías en todo- creo que un 7” [ENTINT-caso12-g1.] “¿volverías a elegir este grupo experimental si te dieran nuevamente a elegir? – si, sobre todo por eso, por evitarme el cálculo numérico, no depender de hacer mal un problema porque te has confundido en un signo o lo que sea” [ENTINT-caso12-g.5] “¿crees que ha habido alguna laguna, que hayas echado en falta, así a nivel de matemáticas? – hombre sí, pero no es aplicado a la carrera, por ejemplo de geometría... o de formas cuadráticas también hay alguna cosa” [ENTINT-caso12-g.6] “¿qué es lo que más te ha gustado del curso? – lo que más el llevar la asignatura bastante al día, por los problemas que había que hacer al final de cada capítulo, se lleva bien, sino igual se va dejando, igual te parece que lo llevas bien y lo voy dejando, así lo ibas haciendo” [ENTINT-caso12-g.2] “tú crees que le ha faltado algo más de fundamenta algo más la teoría, ver algunas cosas más... – no tal como está ha sido bien” [ENTINT-caso12-g.8] “tú que has tenido contacto con el otro grupo experimental, solo por saber, supongo que habrás contrastado con otra gente las ideas de cómo se daba en un lado y en otro ¿qué sensación o percepción tiene tú al respecto? – yo estoy muy contento de este grupo, pero vamos yo creo que para ellos es mucho peor la parte práctica y para nosotros la parte teórica” [ENTINT-caso12-g.10] “yo le intentaría convencer que se impartiese pero igual que en vez de ser todas las clases con ordenador que fuese alguna, una al mes o dos, de resolver a mano- le ha faltado un poco resolver con lápiz y papel – sí, el hacer a mano, las cuestiones teóricas sobre todo...- añadir alguna clase con encerado. Pero bueno tú en particular no la has necesitado, venías bien preparado no? – si” [ENTINT-caso12-g.11]	El alumno valora el curso con un 7 sobre 10 [ENTINT-caso12-g.1] El alumno volvería a elegir el grupo experimental sobre todo por evitar el cálculo numérico y no depender de errores para resolver problemas [ENTINT-caso12-g.5] Considera que ha faltado un poco de geometría en el desarrollo de la asignatura [ENTINT-caso12-g.6] Lo que más le ha gustado del curso es llevar la asignatura al día por los problemas que se iban proponiendo diariamente [ENTINT-caso12-g.2] Considera que el curso aunque ha sido muy práctico estaba bien [ENTINT-caso12-g.8] El alumno afirma que el grupo experimental tenía más problemas con la teoría mientras que el grupo tradicional con los problemas [ENTINT-caso12-g.10] Considera que en el curso han faltado algunas clases de pizarra y lápiz y papel para ciertos conceptos teóricos [ENTINT-caso12-g.11]

<table>
<tr>
<td>16. Expectativas del curso</td>
<td>“¿qué nota esperas sacar en la asignatura? – notable sobresaliente” [ENTINT-caso12-g.4]
<table>
<tr><td colspan="9">CUESTIONES ENTREGADAS:</td></tr>
<tr><td>Tema1</td><td>Tema 2</td><td>Tema 3</td><td>Tema</td><td>Tema 5</td><td>Tema 6</td><td>Tema 7</td><td>Media</td><td>Media total</td></tr>
<tr><td>9</td><td>7,5</td><td>7,5</td><td>7,5</td><td>7,5</td><td>6,25</td><td>0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="9">PROBLEMAS ENTREGADOS</td></tr>
<tr><td>Tema 1</td><td>Tema 2</td><td>Tema 3</td><td>Tema 4</td><td>Tema 5</td><td>Tema 6</td><td>Tema 7</td><td>Media</td><td>Media total</td></tr>
<tr><td>6</td><td>8,5</td><td>7,7</td><td>7,2</td><td>7,5</td><td>6,0</td><td>no hay</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="9">EXAMEN FINAL</td></tr>
<tr><td>Teoría</td><td>8</td><td>Proble m</td><td>9,7</td><td>MEDIA</td><td>SOB</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>El alumno espera sacar un notable o sobresaliente en el examen [ENTINT-caso12-g.4]

La misma tabla de antes</td>
</tr>
<tr>
<td>17. Trayectoria educativa.</td>
<td>Matriculado por primera vez en Matemáticas II [ENCINI-caso12-1]

Con conocimientos de windows-95, maneja internet pero no el correo electrónico [ENCINI-caso12-2]

Sus últimos estudios fueron el COU, nota de acceso a la universidad 6,75 (selectividad). Su calificación media en matemáticas en los últimos años fue de sobresaliente. [ENCINI-caso12-3]</td>
<td>El alumno tiene conocimientos de windows-95 y maneja internet pero no el correo electrónico [ENTINT-caso12-2]

Respecto a su trayectoria educativa, hizo COU, en la Selectiviad saca un 6,75, con una calificación media en matemáticas en los últimos años de sobresaliente [ENCINI-caso12-3] y luego se matricula por primera vez en Matemáticas II [ENCINI-caso12-1]</td>
</tr>
</table>

5. CONCLUSIONES PARCIALES DEL CASO 12.

1. SISTEMA DE NOTACIÓN INTERMEDIO.

El alumno tiene buena predisposición al uso de los ordenadores, ya que tiene conocimientos previos de windows e internet [ENCINI-caso12-2]. y también tiene predisposición adecuada hacia las matemáticas [ENCINI-caso11-4]

En la resolución de problemas el alumno afirma que el uso de derive permite que el alumno se preocupe menos por el cálculo y más por la resolución teórica [ENTINIT-caso12-1.2]

El alumno considera que los conocimientos teóricos se acercan más usando el ordenador que usando lápiz y papel, aunque se pierde habilidad de cálculo [ENTINIT-caso12-1.1b]

El alumno afirma que personalmente no ha encontrado dificultades para resolver las cuestiones teóricas sin el uso de derive, aunque afirma que otros pueden tener esa dificultad [ENTINT-caso12-1.2]

El alumno se ha planteado algunos problemas previamente con lápiz y papel y otros de forma directa, porque le costaba razonar con derive directamente [ENTINT-caso12-1.3]

Más que un sistema de notación intermedio, el alumno afirma que derive ha sido una herramienta de trabajo [ENTINT-caso12-1.4]

Cuando ha resuelto problemas o ejercicios con derive, considera que se podrían haber realizado igualmente con lápiz y papel [ENTINT-caso12-9.4]

El alumno afirma que con derive se acerca más el alumno a la parte práctica pero se complica la parte teórica, justo al revés de lo que sucede en la clase tradicional [ENTINT-caso12-g.10]

2. INTERACTIVIDAD.

La comunicación con el profesor ha sido buena y ha encontrado rápidamente respuesta a sus dudas [ENTINT-caso12-2.1]

El alumno afirma que derive le ha proporciona respuesta rápida a los procesos manipulativos, aunque en ocasiones ha obtenido resultados o errores que no le convencían [ENTINT-caso12-2.2]

Considera que hay más unión entre alumnos y profesores, más cercanía sobre todo por el número reducido de alumnos, aunque también ha influido el estilo de didáctica empleado [ENTINT-caso12-11.4-b]

3. PROTAGONISMO Y AUTOCREACIÓN.

El alumno se ha sentido protagonista totalmente en los ejercicios de manipulación que se realizaban en clase [ENTINT-caso12-3.1]

En los ejemplos para investigar el alumno no se ha encontrado perdido y nuevamente afirma haber adoptado una actitud de protagonismo del proceso [ENTINT-caso12-3.2]

Cuando se daban posibles soluciones a los ejemplos para investigar el alumno ha optado por contrastar estos resultado nuevamente actitud de protagonismo [ENTINT-caso12-3.3]

En los ejercicios de manipulación el alumno afirma no haberse encontrado perdido, los ha sabido hacer [ENTINT-caso12-3.4]

El alumno afirma que con la resolución de problemas en general los ha visto fáciles y había algunos un poco más complejos, pero en todos ellos sí ha encontrado nuevamente protagonismo y en alguno una especial autocreación para encontrar soluciones [ENTINT-caso12-3.5]

En las cuestiones teóricas no ha encontrado dificultades por el hecho de no utilizar derive, no se ha sentido dependiente del programa [ENTINT-caso12-3.5b]

4. CONTENIDOS ESENCIALES.

En la resolución de problemas ha notado un estilo diferente, ya que se preocupaba más por la resolución teórica que por los cálculos que había que realizar [ENTINT-caso12-1.1]

El alumno considera que con derive existe mayor acercamiento teórico al álgebra lineal, aunque se pierde habilidad de cálculo [ENTINT-caso12-1.1.b]

Cuando ha resuelto las cuestiones teóricas considera que derive no era imprescindible, aunque considera que ha sido porque los contenidos los había visto antes, sino quizás hubiera tenido problemas por no usar el ordenador [ENTINT-caso12-1.2]

No ha sabido enunciar los contenidos esenciales del tema 1 [ENTINT-caso12-4.1]

Tampoco tiene claros los contenidos esenciales del tema 2 [ENTINT-caso12-4.2]

En el tema 4 de sistemas lineales considera que el contenido esencial es la resolución, cuando es uno de los procesos rutinarios [ENTINIT-caso12-4.4]

Del tema 5 tiene claro que el contenido esencial es determinar cuando una matriz es diagonalizable y saber calcular autovalores y autovectores [ENTINT-caso12-4.5]

Del tema 6 considera como contenido esencial las propiedades de las formas cuadráticas [ENTINT-caso12-4.6]

Considera que le curso ha sido más práctico que teórico [ENTINT-caso12-g.7], aunque no considera que le haya faltado teoría, sino que ha estado en general bien [ENTINT-caso12-g.8]. Sin embargo puede ocurrir que el alumno tuviera problemas con las cuestiones teóricas, ya que si se tratan resolver sin derive, puede faltar alguna habilidad de cálculo para resolverlas [ENTINT-caso12-g.9].

El alumno considera que en el curso de derive los alumnos tenían más problemas en la parte teórica mientras que en el curso tradicional los alumnos tenían más problemas en la parte práctica [ENTINT-caso12-g.10]

CONTENIDOS ESENCIALES QUE PARECE DOMINAR
TEMA 1

Domina todo los conceptos relacionados con subespacios vectoriales: dimensión de un subespacio vectorial [CUES-caso12-1.1], cálculo de la dimensión de un s.v. usando el número de ecuaciones no redundantes [CUES-caso12-1.4-b], [EXFIN-caso12-cues-1], la base de un susbespacio vectorial a partir de sus ecuaciones cartesianas [PROB-caso12-1.4], [EXFIN-caso12-prob1-c] o a partir de un sistema de generadores [PROB-caso12-1.9], [EXFIN-caso12-prob1-b], o las ecuaciones cartesianas de un subespacio a partir de un sistema de generadores [EXFIN-caso12-prob1-b].

Domina los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores [CUES-caso12-1.2], [CUES-caso12-1.3], [CUES-caso12-1.4-a], [CUES-caso12-1.4-c], [CUES-caso12-1.2-b], [CUES-caso12-1.4-d], [EXFIN-caso12-cues-2]

Sabe obtener la intersección entre subespacios vectoriales [PROB-caso12-1.5], [EXFIN-caso12-prob1-d]

Sabe calcular perfectamente la suma de subespacios vectoriales [PROB-caso12-1.5-b], [EXFIN-caso12-prob1-e]

Y aunque al principio tuvo errores con el concepto de suma directa [PROB-caso12-1.5-c] parece haber dominado finalmente el concepto [EXFIN-caso12-prob1-f]

TEMA 2

Sabe obtener perfectamente el núcleo e imagen de una aplicación lineal [PROB-caso12-2.7-b], aplicar la fórmula de las dimensiones, [PROB-caso12-3.9] [CUES-caso12-2.1], [EXFIN-caso12-prob2-f]

Domina las condiciones de invertibilidad de una matriz [CUES-caso12-2.3], , [EXFIN-caso12-prob2-b], [EXFIN-caso12-prob2-d]

Aunque en algún problema no ha sabido obtener la matriz asociada [CUES-caso12-2.2], [PROB-caso12-2.13], [PROB-caso12-2.8], sin embargo se observa que luego ha sido un proceso que domina [CUES-caso12-2.4], [PROB-caso12-2.5], [PROB-caso12-2.7], [EXFIN-caso12-prob2-a], [EXFIN-caso12-prob2-c].

Domina el método de Gauss para el cálculo de la inversa [PROB-caso12-2.9-b], [PROB-caso12-2.5-b], [EXFIN-caso12-prob2-e]

Sabe obtener una aplicación lineal a partir de la imágenes de una base [PROB-caso12-2.6] y en general las características de una aplicación lineal [EXFIN-caso12-cues-3]

TEMA 3

Entiende las condiciones fundamental de invertibilidad usando determinantes [CUES-caso12-3.4], [PROB-caso12-3.7], [PROB-caso12-3.11]

Parece conocer las principales propiedades de los determinantes [CUES-caso12-3.3], [ESXFIN-caso12-cues-4]

TEMA 4

Parece dominar perfectamente el Teorema de Rouche, para la discusión de sistemas [CUES-caso12-4.1], [CUES-caso12-4.3], incluso la discusión con parámetros [CUES-caso12-4.4], [PROB-caso12-4.2], [PROB-caso12-4.3], [PROB-caso12-4.5-b], [`EXFIN-caso12-prob4-a]

TEMA 5

Relaciona perfectamente las diferentes condiciones de diagonalización: para matrices simétricas [CUES-caso12-5.1], [CUES-caso12-5.4], cuando los autovalores se repiten [CUES-caso12-5.2],

Aunque no ha hecho un problema que pretencía resolver un problema usando conceptos de autovalor y autovectore [PROB-caso12-5.2], sin embargo parece que entiende dichos conceptos autovalor y autovector y sabe aplicarlos para resolver problemas en los que hay incógnitas de la matriz [PROB-caso12-5.1]

Sabe relacionar los conceptos de determinante, traza, autovalores y dimensión de subespacio de autovectores [EXFIN-caso12-cues-7]

Sabe determinar cuando una matriz constante es diagonalizable [PROB-caso12-5.4], [PROB-caso12-5.5], incluso estudiar cuando una matriz con parámetros es diagonalizable [PROB-caso12-5.6], aunque en ocasiones ha tenido problemas para el estudio de casos exhaustivo [PROB-caso12-5.10] incluso en el examen tuvo ciertos problemas para estas clasificaciones [EXFIN-caso12-prob3-a] ,

Sabe diagonalizar matrices constantes [EXFIN-caso12-prob3-b]

TEMA 6

Maneja básicamente las principales condiciones de clasificación de las formas cuadráticas [CUES-caso12-6.1], [CUES-caso12-6.2], relacionar el carácter de formas cuadráticas con una matriz A y su inversa [EXFIN-caso12-cues8] .

Sabe obtener la forma cuadrática a partir de su forma matricial [EXFIN-caso12-prob3-c]

Ha cometido al principio algunos errores en la clasificación de formas cuadráticas en la aplicación del criterio de menores pero para una matriz no simétrica [CUES-caso12-6.3], en la clasificación en función de 2 parámetro [PROB-caso12-6.6] o deducir a partir de la matriz y de la traza información de los autovalores para clasificar la forma cuadrática [CUES-caso12-6.4], pero sin embargo en general podemos decir que parece dominar la clasificación de formas cuadráticas en función de parámetros [PROB-caso12-6.1], [prob-CASO12-6.2], [`PROB-caso12-6.3], [PROB-caso12-6.4], [PROB-caso12-6.5], [PROB-caso12-6.7], [PROB-caso12-6.8]

TEMA 7
Sabe identificar por definición cuando un conjunto es convexo [EXFIN-caso12-cues9]
Sabe resolver gráficamente un programa lineal [EXFIN-caso12-cues10]

CONTENIDOS ESENCIALES QUE NO PARECE DOMINAR
TEMA 1
No ha sabido menejar espacios vectoriales con el de los polinomios de grado menor o igual que 4 [PROB-caso12-1.2]

No ha sabido calcular vectores ortogonales a un subespacio vectorial dado [PROB-caso12-1.3]

TEMA 3
Ha tenido ciertos problemas con el cálculo de rangos [PROB-caso12-3.10], [PROB-caso12-3.5]

Tampoco ha sabido calcular el determinante de Vandermonde usando propiedades y ha usado directamente la función DER [PROB-caso12-3.8]

TEMA 4.

Ha tenido ciertos problemas en la discusión de sistemas de ecuaciones con parámetros [PROB-caso12-4.9], [PROB-caso12-4.4], [CUES-caso12-4.5]

TEMA 5.

Ha tenido problemas en algunas propiedades de autovalores [CUES-caso12-5.3], [CUES-caso12-cues-6]

¿USÓ DERIVE EN LAS CUESTIONES TEÓRICAS?
Ha usado DERIVE en cálculos rutinarios como el cálculo de determinantes [EXFIN-caso12-cues1-b] [EXFIN-caso12-cues6-b] y en la resolución de un sistema lineal [EXFIN-caso12-cues2-b]

5. ESFUERZO RUTINARIO.
El alumno afirma que no le ha costado entender los procesos que se implementaban en los ejercicios de manipulación [ENTINT-caso12-5.1]

En la resolución de problemas el alumno afirma que ha sido más fácil resolverlos con derive pues evitas el cálculo [ENTINT-caso12-5.2]

En las cuestiones teóricas considera que sin derive puede que se tuvieran problemas porque se pierde habilidad de cálculo[ENTINT-caso12-5.3]

El alumno afirma que sabría calcular un determinante de orden 3 sin derive [ENTINT-caso12-5.4]; un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas sin derive [ENTINT-caso12-5.5]

El alumno afirma que derive permite prescindir de los cálculos rutinarios y orientar los esfuerzos hacia la investigación y el razonamiento [ENTINT-caso12-5.6]

El alumno considera que al ser un curso eminentemente práctico, más de lo normal en las cuestiones teóricas pueden surgir problemas al intentar resolverlas sin derive [ENTINT-caso12-g.2]

6. HERRAMIENTA DE EXPERIMENTACIÓN

En los ejemplos para investigar la actitud del alumno ha sido de búsqueda y de experimentación, siempre se ha puesto a investigar [ENTINT-caso12-6.1], y ha conseguido llegar en bastantes ocasiones a la solución de estas cuestiones [ENTINT-caso12-6.2]

En la resolución de problemas el alumno afirma que casi siempre los ha sabido hacer, aunque a veces había algún problema un poco más complicado [ENTINT-caso12-6.3]

El alumno considera que la experimentación le ha ayudado a entender mejor los contenidos, sobre todo cuando se utilizaban representaciones gráficas de conceptos. El motivo es que derive le permite centrarse más en la teoría que en el cálculo y así se entiende mejor [ENTINT-caso12-6.4]

El uso de derive de esta forma hace que el álgebra lineal sea una disciplina más experimental y menos teórica [ENTINT-caso12-6.5]

Considera que el curso es mucho más práctico que teórico [ENTINT-caso12-g.7]

EXPERIMENTACIÓN
Ha utilizado la experimentación para resolver problemas variados sobre propiedades de matrices [PROB-caso12-2.4], [PROB-caso12-2.10], [PROB-caso12-2.12], para la independencia lineal [PROB-caso12-2.14], sobre determinantes [PROB-caso12-3.1], [PROB-caso12-3.2], [PROB-caso12-3.3]

INDUCCIÓN
Utilizó razonamientos inductivos de forma correcta en problemas de cálculo de determinantes n-ésimo [PROB-caso12-3.4], [PROB-caso12-3.6], [PROB-caso12-3.12] y en ecuaciones matriciales con potencias n-ésimas [PROB-caso12-2.11]

7. APRENDIZAJES SIGNIFICATIVOS.

Cuando terminaban los capítulo el alumno tenía siempre la sensación de haber entendido todo [ENTINT-caso12-7.1]

El haber trabajado los contenidos mediante la investigación y el descubrimiento le ha facilitado la comprensión de contenidos bastante más [ENTINT-caso12-7.2]

8. ESTRATEGIAS DE RESOLUCION DE PROBLEMAS.

El alumno ha utilizado más de una estrategia de solución cuando no se quedaba convencido de la solución o cuando no llegaba a la respuesta, en estos casos buscaba otros caminos [ENTINT-caso12-7.3]

El alumno considera que los problemas que se planteaban podían resolverse de varias formas [ENTINT-caso12-8.2]

El alumno ha percibido que en clase siempre se daban varios puntos de vista para resolver los problemas [ENTINT-caso12-8.3]

MODELOS
Plantea y resuelve problemas utilizando modelos vectoriales [PROB-caso12-1.1], [PROB-caso12-1.6], [PROB-caso12-1.7], [PROB-caso12-1.8]

Plantea y resuelve bien problemas utilizando modelos matriciales [PROB-caso12-2.2], [PROB-caso12-2.3], [PROB-caso12-2.1]

Plantea y resuelve bien problemas que utilizan sistemas de ecuaciones lineales [PROB-caso12-4.1], [PROB-caso12-4.6], [PROB-caso12-4.7], [PROB-caso12-4.8], [PROB-caso12-4.9], [EXFIN-caso12-prob4-b]

Ha sabido modelizar y resolver problemas en los que intervenía el cálculo de la potencia k-ésima de una matriz diagonalizable [PROB-caso12-5.7], [PROB-caso12-5.8], [PROB-caso12-5.9]

INDUCCIÓN
Utilizó razonamientos inductivos de forma correcta en problemas de cálculo de determinantes n-ésimo [PROB-caso12-3.4], [PROB-caso12-3.6], [PROB-caso12-3.12] y en ecuaciones matriciales con potencias n-ésimas [PROB-caso12-2.11]

9. BARRERAS ADICIONALES

El alumno considera que derive es una herramienta sencilla de manejar [ENTINT-caso12-9.1]

El alumno aconsejaría el programa a aquellos compañeros que desearan estudiar álgebra lineal, es más sencillo [ENTINT-caso12-9.2]

No recuerda problemas de manipulación con el programa [ENTINT-caso12-9.3]

En la resolución de problemas a veces ha tenido la sensación de que se podían realizar de igual forma con lápiz y papel [ENTINT-caso12-9.4]

Normalmente no ha tenido problemas de interpretación con derive en la resolución de problemas [ENTINT-caso12-9.5]

Considera que al ser un curso más práctico en las cuestiones pueden haber existido problemas al realizarlas sin derive , porque se pierde bastante habilidad de cálculo [ENTINT-caso12-g.9]

DIFICULTADES OBJETIVAS
Sus principales dificultades con derive han venido ocasionadas por SOLAPAMIENTO DE VARIABLES; es decir usar variables previamente definidas con otros valores [PROB-caso12-2.9-a], [PROB-caso12-4.5] o en el uso de SOLVE para resolver sistemas de ecuaciones [EXFIN-caso12-prob3-a] que en realidad eran sistemas no lineales, obteniendo soluciones incorrectas.

10. AUTONOMÍA COGNITIVA.

El alumno considera que los ejemplos de investigación eran asequibles [ENTINT-caso12-10.1]

El alumno ha tenido normalmente la sensación de que era dueño del proceso de aprendizaje, es decir tenía autonomía para desarrollar las actividades totalmente [ENTINT-caso12-10.2]

El alumno considera que derive le ha añadido más autonomía cognitiva pues sin derive le quedaba la duda de los errores de cálculo y así daba los pasos con más seguridad [ENTINT-caso12-10.3]

El alumno considera que en el examen tendrá ese mismo grado de autonomía que ha adquirido [ENTINT-caso12-10.3-b]

¿USÓ DERIVE EN LAS CUESTIONES TEÓRICAS?
Ha usado DERIVE en cálculos rutinarios como el cálculo de determinantes [EXFIN-caso12-cues1-b] [EXFIN-caso12-cues6-b] y en la resolución de un sistema lineal [EXFIN-caso12-cues2-b]

11. RELACIÓN DIALÉCTICA.

La relación del alumno con los compañeros de clase ha sido limitada [ENTINT-caso12-11.1]

Ha entablado amistad con María, Jésica y Juan Pablo [ENTINT-caso12-11.2]

La relación personal con el profesor ha sido buena [ENTINT-caso12-11.3]

Al haber muchos alumnos el ambiente y las relaciones entre alumnos han sido mejores, y también ha favorecido estas relaciones dialécticas el hecho de poder hacer ejercicios en común contrastando resultados [ENTINT-caso12-11.4]

Entre alumnos y profesor considera que ha habido más unión, sobre todo por el número de alumnos aunque también ha influido la didáctica empleada [ENTINT-caso12-11.4-b]

12. APRENDIZAJE COLABORATIVO

El alumno considera que el trabajo en grupo a él personalmente no le ha ayudado, aunque reconoce que en general sí ha ayudado a sus compañeros [ENTINT-caso12-12.1]

El hecho de ser pocos alumnos ha favorecido la relación entre alumnos y un ambiente de más colaboración [ENTINT-caso12-12.2]

Las colaboraciones de aprendizaje que se han tenido entre compañeros han favorecido las relaciones dialécticas entre los compañeros [ENTINT-caso12-12.3]

El alumno afirma que ha quedado con algunas compañeras para resolver problemas y considera que ha sido una experiencia positiva de colaboración [ENTINT-caso12-12.3]

13. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD.

El alumno no se ha aburrido en las clases [ENTINT-caso12-13.1]

El ritmo de las clases ha sido el adecuado [ENTINT-caso12-13.2]

El alumno no se ha encontrado perdido en las clases en ninguna ocasión [ENTINT-caso12-13.3]

El alumno afirma haber resuelto casi todos los problemas y luego contrastaba las soluciones con la web [ENTINT-caso12-13.4]

Ha habido algunos problemas que le han suscitado un interés especial para su resolución [ENTINT-caso12-13.5]

14. MOTIVACIÓN

El alumno estaba motivado inicialmente al curso pues tenía conocimientos de informática (internet, windows) [ENCINI-caso12-2]

Por otro lado su motivación por las matemáticas ha sido alta, de hecho ha tenido una calificación media de sobresaliente en los últimos años [ENCINI-caso12-3]

Elige el curso porque le gustan matemáticas e informática [ENCINI-caso12-4]

Considera que el curso de álgebra lineal ha sido muy interesante, de hecho afirma que el mismo curso en la clase tradicional le hubiese aburrido [ENTINT-caso12-13.6]

El alumno afirma que el gusanillo para resolver problemas lo ha tenido en cursos anteriores [ENTINT-caso12-13.6-b]

El alumno afirma que en líneas generales el curso ha mantenido su interés por las matemáticas y se ha sentido especialmente motivado por el uso del ordenador [ENTINT-caso12-14.5]

ha dedicado en media semanal unas 5-6 horas semanales [ENTINT-caso12-14.5-b]

El alumno valora el curso con un 7 sobre 10 [ENTINT-caso12-g.1]

El alumno considera que lo más positivo ha sido la posibilidad de llevar la asignatura al día por los ejercicios que s proponían [ENTINT-caso12-g.2]

No se le ocurre nada negativo del curso [ENTINT-caso12-g.3]

El alumno volvería a realizar este grupo experimental, sobre todo por la posibilidad de evitar el cálculo y no depender de este para hacer mal los problemas [ENTINT-caso12-g.5]

Considera que el curso ha sido más práctico que teórico [ENTINT-caso12-g.7]

En una comparación entre el grupo de derive y el grupo tradicional afirma que en el curso con derive la parte compleja era la teórica mientras que en el curso tradicional la parte compleja era la parte práctica [ENTINT-caso12-g.10]

Considera que el curso hubiera estado mejor si se hubiese intercalado clases de pizarra y lápiz y papel entre las clases con ordenador [ENTINT-caso12-g.11]

15. DINÁMICA DEL CURSO

El alumno valora el curso con un 7 sobre 10 [ENTINT-caso12-g.1]

El alumno volvería a elegir el grupo experimental sobre todo por evitar el cálculo numérico y no depender de errores para resolver problemas [ENTINT-caso12-g.5]

Considera que ha faltado un poco de geometría en el desarrollo de la asignatura [ENTINT-caso12-g.6]

Lo que más le ha gustado del curso es llevar la asignatura al día por los problemas que se iban proponiendo diariamente [ENTINT-caso12-g.2]

Considera que el curso aunque ha sido muy práctico estaba bien [ENTINT-caso12-g.8]

El alumno afirma que el grupo experimental tenía más problemas con la teoría mientras que el grupo tradicional con los problemas [ENTINT-caso12-g.10]

Considera que en el curso han faltado algunas clases de pizarra y lápiz y papel para ciertos conceptos teóricos [ENTINT-caso12-g.11]

16. EXPECTATIVAS DEL CURSO

“¿qué nota esperas sacar en la asignatura? – notable sobresaliente” [ENTINT-caso12-g.4]

CUESTIONES ENTREGADAS:								
Tema1	Tema 2	Tema 3	Tema	Tema 5	Tema 6	Tema 7	Media	Media total
9	7,5	7,5	7,5	7,5	6,25	0		
PROBLEMAS ENTREGADOS								
Tema 1	Tema 2	Tema 3	Tema 4	Tema 5	Tema 6	Tema 7	Media	Media total
6	8,5	7,7	7,2	7,5	6,0	no hay		
EXAMEN FINAL								
Teoría	8	Problem	9,7	MEDIA	SOB			

17. TRAYECTORIA EDUCATIVA

El alumno tiene conocimientos de windows-95 y maneja internet pero no el correo electrónico [ENTINT-caso12-2]

Respecto a su trayectoria educativa, hizo COU, en la Selectiviad saca un 6,75, con una calificación media en matemáticas en los últimos años de sobresaliente [ENCINI-caso12-3] y luego se matricula por primera vez en Matemáticas II [ENCINI-caso12-1]

6. ELABORACIÓN DE LA SÍNTESIS DE DATOS DE LA ENTREVISTA FINAL

1. SISTEMA DE NOTACIÓN INTERMEDIO.

"Cuando se introdujeron los conceptos teóricos con los ejemplos a investigar, te costaba entender loq ue se pedía en Matemáticas con derive ..? – no, no me costaba nada, y me ayudaba con seguridad a buscar" [ENTFIN-caso12-1.1]

"A la hora de realizar ejercicios de manipulación, la forma de introducir los datos en derive te servía para asimilar los procesos rutinarios del álgebra lineal ...? – sí, creo que si" [ENTFIN-caso12-1.2]

"¿sabrías realizar esos mismos procesos con lápiz y papel? – si, claro pero porque ya lo he hecho antes, sino no sabría con seguridad" [ENTFIN-caso12-1.2b]

"En la resolución de problemas ¿has tenido que poner en marcha algún tipo especial de razonamiento que no habías empleado hasta ahora? – en principio en casi todos muy bien, pero en algunos igual tenía que hacerlo primero en lápiz y papel y luego en derive" [ENTFIN-caso12-1.3]

"Cuando realizaste el examen final,, ¿tuviste la sensación de que derive te proporcionaba un estilo de notación distinto al que venías empleando?...- no, que va, muy parecido... no tuve que plantear ningún problema con lápiz y papel" [ENTFIN-caso12-1.4]

"Cuando tienes que realizar cualquier práctica de matemáticas II con derive ¿sabrías realizarla fácilmente con lápiz y papel? – si, tenía la sensación de que sí" [ENTFIN-caso12-1.5]

"Y al revés, si resuelves un problema o cuestión con lápiz y papel ¿tienes algún problema en realizarla en derive? – sí, el programa derive era muy sencillo..." [ENTFIN-caso12-1.6]

"De las dos formas de notación, derive o lápiz y papel, cual te resulta más cómoda? – el programa ayuda mucho , y es más cómodo pues es mucho más rápido y evita repasar operaciones..." [EENTFIN-caso12-1.7]

"¿cuál crees que es mejor para entender conceptos uno u otro? – la teoría yo creo que es mejor evidentemente con una clase con pizarra y lápiz y papel, pero los problemas y las prácticas se ve mucho mejor con derive- o sea que tú crees que la parte teórica es mejor introducirla con el método tradicional? – si" [ENTFIN-caso12-1.7-b]

"¿crees que derive proporciona un sistema de notación intermedio entre tus ideas y las ideas que el profesor trata de transmitir? ...- sí" [ENTFIN-caso12-1.8]

2. INTERACTIVIDAD.

"¿has tenido una buena comunicación con el profesor? ...- era una clase con pocos alumnos y cualquier duda se resolvía.." [ENTFIN-caso12-2.1]

"da una valoración de 1 1 5 de la comunicación con el profesor – un 4 ó 5" [ENTFIN-caso12-2.2]

"¿cómo ha sido tu comunicación con los compañeros de clase? – pues bien, sobre todo con los que tenía alrededor, no con todo el mundo – o sea con el entorno de tu alrededor" [ENTFIN-caso12-2.3]

"además de tu relación con Maria y Jessica, has tenido contacto con otros compañeros? – todo lo más con uno o do más, más o menos" [ENTFIN-caso12-2.4]

"Valora de 1 a 5 la comunicación que has tenido con tus compañeros..- pues un 2... 3 .. un 3" [ENTFIN-caso12-2.5]

"respecto al programa derive, cuando manipulabas el programa con el fin de obtener alguna solución ¿los mensajes que ibas recibiendo del programa o la respuesta que recibías, te han proporcionado nuevas vías de solución o la respuesta a lo que buscabas? ...- sí, más o menos sí..- ... el grado de comunicación con el programa cómo le valoras...? – yo pienso que el programa es muy sencillo de manejar y ayuda mucho" [ENTFIN-caso12-2.6]

Valora de 1 a 5 el grado de interactividad que tiene el programa derive – un 4" [ENTFIN-caso12-2.7]

3. PROTAGONISMO Y AUTOCREACIÓN.

"Cuando se proponían ejemplos para investigar, ¿el programa derive te ha servido para buscar las soluciones, o por el contrario, te dejabas llevar por los resultados que el sistema te iba ofreciendo? – me ayudaba" [ENTFIN-caso12-3.1]

"cuando se planteaba la solución de los ejemplos a investigar, te has sentido en cierta medida manipulado, es decir, como si no supieras lo que se había pedido? ...- no, en ningún caso" [ENTFIN-caso12-3.2]

"cuando se realizaban los ejercicios de manipulación ¿has entendido perfectamente el proceso que pretendías implementar con el programa derive? ...- si, y no era nada complicado hacerlos con lápiz y papel" [ENTFIN-caso12-3.3]

"En la resolución de las cuestiones teóricas ¿has necesitado derive para resolverlas? – he utilizado derive, pero no es que hiciese falta, - y en el examen final ¿las utilizaste? – si era para comprobar una cosa sí, pero nada más - ¿sin derive no hubieras sabido resolverlas? – sin ningún problema – o sea que no crees que fuese fundamental derive para resolverlas...- no en absoluto" [ENTFIN-caso12-3.4]

"cuando resolvías problemas fin de capítulo, ¿has encontrado algún tipo de capacidad creativa a la hora de resolverlas, que te propiciaba el utilizar derive...? – sí, pues con derive si utilizas más de un camino para llegar a la solución, te facilita buscar más caminos... porque de la otra forma como es muy largo el proceso, pues lo haces de una forma y ya está ..." [ENTFIN-caso12-3.5]

"o sea que lo que te proporcionaba era la posibilidad de manipular varios caminos...- si" [ENTFIN-caso12-3.5-b]

"Cuando hiciste el examen final, ¿crees que hubiera sido más fácil hacerlo con lápiz y papel? – no, mucho más fácil con derive por la operativa" [ENTFIN-caso12-3.6]

4. CONTENIDOS ESENCIALES.

"¿cuál crees que es mejor para entender conceptos uno u otro? – la teoría yo creo que es mejor evidentemente con una clase con pizarra y lápiz y papel, pero los problemas y las prácticas se ve mucho mejor con derive- o sea que tú crees que la parte teórica es mejor introducirla con el método tradicional? – si" [ENTFIN-caso12-1.7-b]

"En la resolución de las cuestiones teóricas ¿has necesitado derive para resolverlas? – he utilizado derive, pero no es que hiciese falta, - y en el examen final ¿las utilizaste? – si era para comprobar una cosa sí, pero nada más - ¿sin derive no hubieras sabido resolverlas? – sin ningún problema – o sea que no crees que fuese fundamental derive para resolverlas...- no en absoluto" [ENTFIN-caso12-3.4]

"Cuando se han ido desarrollando los contenidos del curso, has sabido distinguir fácilmente lo que eran contenidos esenciales de los procesos repetitivos...? – si" [ENTFIN-caso12-4.1] “del tema 1 de espacios vectoriales ¿cuáles crees que son los contenidos esenciales? – pues lo que es espacio vectorial y subespacio vectorial - ¿y procesos rutinarios... – pues operaciones con vectores, es lo que más se repetía...” [ENTFIN-caso12-4.2]

“- ¿y del tema 2 de matrices y aplicaciones lineales que crees que era lo fundamental? - yo creo que lo fundamental era lo de aplicaciones lineales, era lomás, y las propiedades de las matrices” [ENTFIN-caso12-4. 3]

“¿y del tema 5, de diagonalización de matrices qué te pareció lo fundamental? – pues el proceso de diagonalización y pco más – y lo más repetitivo de ese tema? - ... “ [ENTFIN-caso12-4.6]

“¿y del tema 6 de formas cuadráticas? - ... no te sabría decir lo que he dado aquí y lo que he dado en física...” [ENTFIN-caso12-4.7]

“¿y del tema 7, de programación lineal? – no me acuerdo..” [ENTFIN-caso12-4.8]

“Sabes calcular determinantes de cualquier orden a mano? – sí, por supuesto” - ¿sabrías resolver un sistema de ecuaciones usando la regla de Cramer? – si - ¿sabrías calcular el rango de una matriz? – también - ¿sabrías calcular los autovalores de una matriz a mano? – también (hizo perfectamente el determinante de orden 3, la regla de Cramer no sabe aplicarla, la confunde con el método de Gauss, el rango lo resuelve perfectament en 10 segundos, y el cálculo de autovalores en 5 segundos deduce que los autovalores son los elementos de la diagonal principal, se le propuso una matriz triangular superior” [ENTFIN-caso12-4.9]

“...tu crees que la forma de introducir los conceptos, quedaban poco claras, para alguien que no hubiera conocido el concepto previamente o alguna idea de él? ...- yo creo que es mejor en ese sentido el método tradicional, la práctica es mucho más fácil con derive” [ENTFIN-caso12-9.5b]

“El material que se ha dado en internet, ¿te ha ayudado a trabajar la asignatura? – si, mucho – crees que era un material adecuado para el seguimiento de la asignatura? – sí, por supuesto – y las cuestiones teóricas que estaban resueltas las hacías? – si ..” [ENTFIN-caso12-14.14.b]

5. ESFUERZO RUTINARIO.

“De las dos formas de notación, derive o lápiz y papel, cual te resulta más cómoda? – el programa ayuda mucho , y es más cómodo pues es mucho más rápido y evita repasar operaciones...” [EENTFIN-caso12-1.7]

¿Sabes distinguir entre lo que es un contenido esencial y un proceso rutinario? – yo creo que sí, - por ejemplo, suponte que te plantean un problema que consiste en diagonalizar una matriz de orden 3, qué crees que es lo fundamental para resolver el problema y cuáles son los procesos rutinarios...- fundamentalmente sería,... saber lo que es diagonalizar, sacar autovalores y autovectores...- y proceso rutinario? – pues saber la operativa de ese cálculo” [ENTFIN-caso12-5.1]

“A la hora de resolver problemas de fin de capítulo ¿hubieras sido capaz de resolverlos sin derive’ – si” [ENTFIN-caso12-5.2]

“Cuando resuelves problemas ¿encuentras algunas característica especial en el modo de resolución cuando lo has hecho con derive...? – que es más rápido – en cuanto al tiempo que dedicas a los planteamientos de lo problemas cuando lo haces con derive y cuando lo hacías a lápiz y papel, cuanto tiempo le dedicas a derive y cuanto dedicarías haciendo a lápiz y papel? ...- pues depende del problema... pero si es un problema largo tardaría el doble en lápiz y papel que en derive...” [ENTFIN-caso12-5.3]

6. HERRAMIENTA DE EXPERIMENTACIÓN

“cuando resolvías problemas fin de capítulo, ¿has encontrado algún tipo de capacidad creativa a la hora de resolverlas, que te propiciaba el utilizar derive...? – sí, pues con derive si utilizas más de un camino para llegar a la solución, te facilita buscar más caminos... porque de la otra forma como es muy largo el proceso, pues lo haces de una forma y ya está ...” [ENTFIN-caso12-3.5] "o sea que lo que te proporcionaba era la posibilidad de manipular varios caminos...- si" [ENTFIN-caso12-3.5-b]

"Cuando se planteaban ejemplos para investigar ¿has utilizado derive para intentar obtener algo por tu cuenta ...? – he intentado muchas veces hacerlos ..- qué proporción de fracaso error, tenías en las investigaciones que hacías...- un 75% " [ENTFIN-caso12-6.1]

"... respecto a los mismos ejemplos para investigar, a medida que iban pasando los temas, tu grado de experimentación con derive ha ido aumentando...? – en otra metodología nunca la llegué a usar y con derive sí que la haces" [ENTFIN-caso12-6.2]

"Cuando resolvías problemas, ¿has probado muchos caminos, y experimentado posibles soluciones? – si" [ENTFIN-caso12-6.3]

"¿crees que la experimentación que has realizado en el curso te ha ayudado a entender mejor los contenidos? – si, seguro que si" [ENTFIN-caso12-6.4]

7. APRENDIZAJES SIGNIFICATIVOS.

"Trabajar como lo hemos hecho el álgebra lineal con la investigación y el descubrimiento te ha permitido entender más los conceptos o por el contrario te han dispersado tu atención...- si" [ENTFIN-caso12-7.1]

"Te gusta más que te den las cosas hechas, o que las tengas que buscar tú más con una cierta orientación? ...- siempre es más, mejor buscarlas por tu cuenta" [ENTFIN-caso12-7.1b]

"Cuando se planteaban ejemplos para investigar, ¿has sentido en algún momento que necesitabas algunos conceptos previos sin los cuales no podrías encontrar nada? .- no, creo que se daba lo necesario" [ENTFIN-caso12-7.2]

8. ESTRATEGIAS DE RESOLUCION DE PROBLEMAS.

"De las dos formas de notación, derive o lápiz y papel, cual te resulta más cómoda? – el programa ayuda mucho , y es más cómodo pues es mucho más rápido y evita repasar operaciones..." [EENTFIN-caso12-1.7]

"Cuando has resuelto los problemas finales, ¿cuántas formas de resolución has empleado una o varias? ...- sí, varias formas" [ENTFIN-caso12-8.1]

"...el tipo de didáctica que se ha planteado en la clase facilitaba el que los alumnos encontrarais varias formas o caminos para resolver un problema? ...- sí, porque además, en cada tema tú explicabas varias formas" [ENTFIN-caso12-8.3]

"¿Crees que en clase se ha favorecido la multiplicidad de métodos de resolución o se ha indicado únicamente un único método de resolución? ... –si, si" [ENTFIN-caso12-8.4]

"El porcentaje de problemas que has resuelto en general... yo creo que todos, salvo uno o dos " [ENTFIN-caso12-13.4-b]

"¿qué ha sido lo más positivo del curso? - ... pues los problemas, que las clases con derive son perfectas para eso" [ENTFIN-caso12-g.1]

9. BARRERAS ADICIONALES

"De las dos formas de notación, derive o lápiz y papel, cual te resulta más cómoda? – el programa ayuda mucho , y es más cómodo pues es mucho más rápido y evita repasar operaciones..." [EENTFIN-caso12-1.7]

"¿crees que el programa derive te ha dificultado que comprendas los conceptos matemáticos? ...- no todo lo contrario? ... [ENTFIN-caso12-9.1]

"has dedicado demasiado tiempo al aprendizaje del programa derive? – no, es muy sencillo" [ENTFIN-caso12-9.2]

"Cuando hiciste el examen te pusiste nervioso en algún momento porque no sabías utilizar algún comando de derive... ¿ - no, solamente que en un ejercicio estuve con el demasiado tiempo porque no lo repetí mil veces y no me daba la solución, había algo que no estaba bien, que no estaba bien hecho... creo que era de diagonalizar, que estuve con el pro lo menos media hora y no..." [ENTFIN-caso12-9.3]

"pero en cuanto al manejo...- no, de manejo no" [ENTFIN-caso12-9.3b]

"podrías indicar ¿cuáles son los principales problemas que has tenido cuando manejabas derive? – no recuerdo" [ENTFIN-caso12-9.4]

"...si algún compañero te pregunta sobre el programa ¿se lo aconsejarías para estudiar álgebra lineal? ...- para los problemas sí, para la teoría no" [ENTFIN-caso12-9.5]

"...tu crees que la forma de introducir los conceptos, quedaban poco claras, para alguien que no hubiera conocido el concepto previamente o alguna idea de él? ...- yo creo que es mejor en ese sentido el método tradicional, la práctica es mucho más fácil con derive" [ENTFIN-caso12-9.5b]

10. AUTONOMÍA COGNITIVA.

"Cuando se planteaban ejemplos para investigar, ¿te has sentido motivado o picado para resolver o encontrar la solución? – si, siempre a mí me gusta mucho la asignatura" [ENTFIN-caso12-10.1]

"Cuando se han planteado ejercicios de manipulación, ¿has encontrado satisfacción cuando los resolvías y encontrabas el método o proceso de la resolución? .- si, por supuesto" [ENTFIN-caso12-10.2]

"¿cómo has resuelto los problemas sólo o en grupo? – casi siempre sólo" [ENTFIN-caso12-10.3]

"Cuando has resuelto problemas, ¿ha aparecido en ti un algo un gusanillo que te obligaba a buscar la solución aunque a priori se resistiese? ...- siempre había alguno en cada tema que era más complejo y suscitaba ese tipo de actitud" [ENTFIN-caso12-10.4]

"¿cuánto tiempo dedicabas más o menos en media a los problemas a la semana? ...- dos o tres horas" [ENTFIN-caso12-10.4b]

11. RELACIÓN DIALÉCTICA.

"¿has establecido alguna relación de amistad especial con algún compañero de clase? – si " [ENTFIN-caso12-11.1]

"...descríbeme un poco como era el tipo de comunicación y relación que tenías con los compañeros de tu entorno...? – pues quitando con María y Jessica que eran los del grupo, con el resto sobre todo de derive – y con Jessica y Maria? – pues de todo un poco – o sea que tenías tiempo en las clases de hablar de derive y de algo más ¿ - si, si" [ENTFIN-caso12-11.2]

"Antes y después de las clases, ¿existía algún tipo de relación con los compañeros de este curso? – sí, era mucho más que en una clase de ochenta personas" [ENTFIN-caso12-11.3]

"¿cómo valorarías el ambiente que se ha desarrollado en clase?. Puntúa de 1 a 5 – un 7 de 1 a 10" [ENTFIN-caso12-11.4]

12. APRENDIZAJE COLABORATIVO

"El tipo de trabajo en grupo que se ha desarrollado en clase, ¿te ha ayudado a aprender mejor los conceptos que se iban introduciendo? ..- en cuanto al manejo del programa, el tener gente al lado siempre te ayuda mucho, pero en cuento a los contenidos no" [ENTFIN-caso12-12.1]

"¿crees que el haber utilizado este programa de ordenador, ha propiciado un tipo de colaboración especial entre los compañeros? -. si, seguro" [ENTFIN-caso12-12.2]

"Si no hubiera habido ordenador ¿hubiera sido el mismo grado de colaboración? – no .- ¿por qué? - ... es que tener una duda y que se te resuelva justamente en ese momento, con tu compañero al lado, es mejor que en una clase teórica que no se te van a plantear las dudas en ese momento, se te plantean mucho más en casa" [ENTFIN-caso12-12.2.b]

"¿has quedado con algunos compañeros para preparar el examen? – si, con María y Jessica" [ENTFIN-caso12-12.3]

13. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD.

"El ritmo que hemos llevado en clase ¿cómo ha sido? ¿¿rapido, lento, normal...? – adecuado, lento pero bien" [ENTFIN-caso12-13.1]

"Crees que lo problemas que se han planteado se podían clasificar en varios niveles de dificultad? – no sé, en general sí, - ¿cuántos crees que habría? ..-... tres niveles, por ejemplo, uno muy fácil, unos normales y otros complejos" [ENTFIN-caso12-13.4]

"El porcentaje de problemas que has resuelto en general... yo creo que todos, salvo uno o dos " [ENTFIN-caso12-13.4-b]

"...en la clase había varios niveles de aprendizaje? ... – si habría de todo vamos" [ENTFIN-caso12-13.5]

"¿Crees que ha habido algún trato especial con algún compañero que te ha molestado en algún momento, y que no has tenido el trato que han tenido otros y te ha motivado cierta queja interior? – no" [ENTFIN-caso12-13.5-b]

"¿crees que ha habido un trato igualitario de tratamiento para todo el mundo? ...- si, si" [ENTFIN-caso12-13.5-c]

"El examen que se ha propuesto crees que era asequible par atodos los alumnos, según lo que se ha dado en clase? --- no era difícil en absoluto. Yo creo que si se tenían los conocimientos porque había un poco de todo, pero no era difícil" [ENTFIN-caso12-13.6]

"..crees que se ha tratado a todo el mundo para que todos fueran más al mismo ritmo? ..- si, si" [ENTFIN-caso12-13.6.b]

"Y los que ibais un poco más adelantados, tú eras uno de ellos, te has sentido un poco más retrasado por esperar a los que iban un poco más lentos... ¿ - no que vá, yo creo que había que cimentar los conocimientos" [ENTFIN-caso12-13.6.c]

14. MOTIVACIÓN

"Cuando se planteaban ejemplos para investigar, ¿te has sentido motivado o picado para resolver o encontrar la solución? – si, siempre a mí me gusta mucho la asignatura" [ENTFIN-caso12-10.1]

"...¿cómo te han resultado todas las clases, largas, cortas... se te han pasado rápidamente? – hombre a mí se me han pasado rápido, igual a otra persona no..." [ENTFIN-caso12-14.1]

"El hecho de utilizar el ordenador, ¿te ha motivado especialmente para estudiar las Matemáticas? – sí, una clase tradicional se me hubiese hecho más larga" [ENTFIN-caso12-14.2]

"¿cuánto tiempo dedicabas a las matemáticas semanalmente...? - unas 4 o 5 horas " [ENTFIN-caso12-14.3]

"El haber realizado este curso ¿ha aumentado o disminuido tu interés personal por las matemáticas? – se ha mantenido, antes era bastante alto" [ENTFIN-caso12-14.4]

"El material que se ha dado en internet, ¿te ha ayudado a trabajar la asignatura? – si, mucho – crees que era un material adecuado para el seguimiento de la asignatura? – sí, por supuesto – y las cuestiones teóricas que estaban resueltas las hacías? – si .." [ENTFIN-caso12-14.14.b]

"¿qué ha sido lo más positivo del curso? - ... pues los problemas, que las clases con derive son perfectas para eso" [ENTFIN-caso12-g.1]

"¿qué ha sido lo más negativo del curso? – lo más negativo, yo creo que la parte teórica" [ENTFIN-caso12-g.2]

"¿volverías a elegir este grupo experimental si te dieran a elegir? ...- lo cogería, seguro, con más decisión que antes" [ENTFIN-caso12-g.4]

"..el hecho de ser solamente 15 en clase, crees que ha sido un condicionante muy importante para la forma en la que se ha desarrollado el curso, si hubiéramos sido en vez de 15, 30, hubiera sido muy distinto? .-.No, creo que hubiera sido más o menos igual" [ENTFIN-caso12-g.5]

15. DINÁMICA DEL CURSO

"El material que se ha dado en internet, ¿te ha ayudado a trabajar la asignatura? – si, mucho – crees que era un material adecuado para el seguimiento de la asignatura? – sí, por supuesto – y las cuestiones teóricas que estaban resueltas las hacías? – si .." [ENTFIN-caso12-14.14.b]

"¿qué ha sido lo más positivo del curso? - ... pues los problemas, que las clases con derive son perfectas para eso" [ENTFIN-caso12-g.1]

"..el hecho de ser solamente 15 en clase, crees que ha sido un condicionante muy importante para la forma en la que se ha desarrollado el curso, si hubiéramos sido en vez de 15, 30, hubiera sido muy distinto? .-.No, creo que hubiera sido más o menos igual" [ENTFIN-caso12-g.5]

16. EXPECTATIVAS DEL CURSO

"La nota que sacaste, ¿era la que esperabas? – bueno, aunque una pregunta tipo test se que le he fallado sabiendo que la iba a fallar,.. pero no, creo que sí es la que esparaba" [ENTFIN-caso12-g.3]

17. TRAYECTORIA EDUCATIVA

No hay elementos significativos.

7. VERIFICACIÓN DE DATOS: CONCLUSIONES PARCIALES Y DATOS DE LA ENTREVISTA FINAL. CASO 12.

Dada la extensión de este apartado remitimos al lector al CD-ROM en el que se puede consultar esta verificación de datos para el caso 12.

8. CONCLUSIONES FINALES DEL CASO 12.

1. SISTEMA DE NOTACIÓN INTERMEDIO

Para analizar esta cuestión debemos observar varios aspectos:

1) El alumno tiene buena predisposición al uso de los ordenadores, ya que tiene conocimientos previos de windows e internet [ENCINI-caso12-2]. y también tiene predisposición adecuada hacia las matemáticas [ENCINI-caso11-4] por tanto el nuevo sistema de notación que puede ofrecer el programa no resulta en principio un elemento distante.

2) El trabajo que ha desarrollado en derive en la resolución de problemas le ha permitido preocuparse menos por el cálculo y prestar más atención a la resolución teórica [ENTINT-caso12-1.2], por otro lado en las cuestiones teóricas no ha encontrado ningún tipo de dificultad para realizarlas sin derive [ENTINT-caso12-1.2], en los ejemplos a investigar derive le ha ayudado en general a buscar lo que se pedía [ENTFIN-caso12-1.3] y en el examen final no ha encontrado dificultades de manejo y de hecho no tuvo que plantear previamente problemas con lápiz y papel [ENTFIN-caso12-1.4]. Estas características del uso de derive en las diferentes actividades nos muestran que el sistema de notación empleado por derive ha quedado integrado totalmente en el quehacer matemático del alumno.

3) Si comparamos el sistema de notación empleado por derive y el sistema de notación tradicional observamos que según el alumno los conocimientos teóricos se acercaban más con el ordenador que usando lápiz y papel pero se pierde habilidad de cálculo [ENTINI-caso12-1.1.b]; sin embargo a pesar de esa cercanía el alumno considera que la teoría se entiende mejor con pizarra y lápiz y papel que con derive; por otro lado observamos que en los problemas a veces el alumno ha tenido que plantearlos previamente con lápiz y papel [ENTINT-caso12-1.3] sin embargo derive ha permitido que se comprendieran mejor los problemas que con lápiz y papel [ENTFIN-caso12-1.7.b] porque la rapidez de cálculo, y la eliminación de operaciones hacen más cómoda la resolución de problemas con derive [ENTFIN-caso12-1.7]. No obstante se observa que el alumno sabía transferir las prácticas hechas con derive a lápiz y papel [ENTFIN-caso12-1.2.b] [ENTFIN-caso12-1.5] y viceversa problemas hechos a lápiz y papel pasarlos a derive [ENTFIN_caso12-1.6]

4) Según el alumno derive ha sido una herramienta de trabajo que inicialmente no la ha considerado como un sistema de notación intermedio [ENTINT-caso12-1.4], pero que más tarde sí parece considerarle como intermediaro ente los conceptos y el alumno [ENTFIN-caso12-1.8]; es más la propia forma de introducir los datos en derive le ha servido al alumno par entender y asimilar los procesos de álgebra lineal [ENTFIN-caso12-1.2], aunque quizás este sistema era más complicado en la teoría que en la práctica [ENTINT-caso12-g.10]

Estas características nos permiten afirmar que derive ha sido sobre todo un sistema de notación intermedio básico sobre todo en la resolución de problemas, ya que en la introducción de conceptos teóricos parece que el sistema tradicional tenía cierta preeminencia y ofrecía mejores condiciones para el aprendizaje.

2. INTERACTIVIDAD.

En esta cuestión podemos analizar la interactividad desde tres puntos de vista:

1) En cuanto a la interactividad entre alumnos y profesor, observamos que la comunicación del alumno con el profesor ha sido buena [ENTFIN-caso12-2.1], con el que ha encontrado respuesta rápida a sus dudas [ENTINT-caso12-2.1] y con el que además ha tenido mayor unión y cercanía, quizás por el reducido número de alumno pero también ha influido el estilo de didáctica empleado [ENTINT-caso12-11.4-b]
2) En cuanto a la interactividad entre los alumnos, observamos que la relación que ha tenido el alumno con los compañeros que se sentaban a su alrededor ha sido buena pero no con todo el mundo [ENTFIN-caso12-2.3], sobre todo con las compañeras que se situaban cerca de él , María y Jessica [ENTFIN-caso12-2.4], por eso quizás valora en general esta comunicación menos positivamente con u 2 o 3 sobre 5 [ENTFIN-caso12-2.5]

3) Por último en cuanto a la interactividad que ofrecía el programa podemos decir que derive le proporcionaba al alumno una respuesta rápida sobre todo en los procesos maniplativos, que le iban orientando por lo que en general el grado de interactividad ha sido buena por la sencillez del programa [ENTFIN-caso12-2.6] hecho que hace valorar esta interactividad de forma positiva con un 4 sobre 5 [ENTFIN-caso12-2.7]

3. PROTAGONISMO Y AUTOCREACIÓN.

Para analizar esta cuestión podemos observar cual ha sido el comportamiento del alumno en las diferentes actividades que se han ido realizando

1) En los ejemplo para investigar el alumno no se ha encontrado perdido y adoptaba siempre una actitud de búsqueda de las solución con una auténtica actitud de protagonismo [ENTINT-caso12-3.2], incluso después de darse las soluciones de estos ejemplos el alumno ha optado siempre por contrastar estos resultados de forma autónoma con el programa [ENTINT-caso12-3.3]; en este sentido podemos decir que derive le ha servido encontrar las soluciones facilitándole así un elevado grado de protagonismo y de capacidad creativa en la búsqueda de soluciones [ENTFIN-caso12-3.1].
2) En los ejercicios de manipulación nuevamente el alumno no se ha encontrado perdido, y el alumno lo ha sabido realizar [ENTINT-caso12-3.4], y se ha sentido protagonista en los procesos que se iban realizando en clase [ENTINT-caso12-3.1] de tal forma que luego no encontraba grandes complicaciones en trasladar estos procesos a lápiz y papel [ENTFIN-caso12-3.3].
3) En la resolución de problemas el alumno ha encontrado nuevamente protagonismo, porque en general los ha visto accesibles y fáciles aunque había algunos un poco más complejos, y precisamente en estos gracias a derive la autocreación se ha visto aumentada en la búsqueda de soluciones [ENTINT-caso12-3.5] y posibilidad de varias vias de solución [ENTFIN-caso12-3.5], [ENTFIN-caso12-3.5-b].
4) En las cuestiones teóricas no ha encontrado dificultades por el hecho de no utilizar derive, no se ha sentido dependiente del programa [ENTINT-caso12-3.5b], aunque ha utilizado en algunas ocasiones derive para resolverlas no era fundamental lo hacía por comprobar resultado [ENTFIN-caso12-3.4]
5) Por último en el examen final afirma que con derive era muco más sencillo por la operativa [ENTFIN-caso12-3.6]

Por todo lo anterior podemos decir que derive le ha facilitado al alumno obtener mayor protagonismo en las actividades que se han ido realizando en clase así como su capacidad de autocreación.

4. CONTENIDOS ESENCIALES.

Para analizar esta cuestión debemos tener en cuenta los siguientes aspectos:

1) En cuanto a los contenidos que parece dominar podemos decir que son los siguientes:

TEMA 1

Domina todo los conceptos relacionados con subespacios vectoriales: dimensión de un subespacio vectorial [CUES-caso12-1.1], cálculo de la dimensión de un s.v. usando el número de ecuaciones no redundantes [CUES-caso12-1.4-b], [EXFIN-caso12-cues-1], la base de un susbespacio vectorial a partir de sus ecuaciones cartesianas [PROB-caso12-1.4], [EXFIN-caso12-prob1-c] o a partir de un sistema de generadores [PROB-caso12-1.9], [EXFIN-caso12-prob1-b], o las ecuaciones cartesianas de un subespacio a partir de un sistema de generadores [EXFIN-caso12-prob1-b].

Domina los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores [CUES-caso12-1.2], [CUES-caso12-1.3], [CUES-caso12-1.4-a], [CUES-caso12-1.4-c], [CUES-caso12-1.2-b], [CUES-caso12-1.4-d], [EXFIN-caso12-cues-2]

Sabe obtener la intersección entre subespacios vectoriales [PROB-caso12-1.5], [EXFIN-caso12-prob1-d]

Sabe calcular perfectamente la suma de subespacios vectoriales [PROB-caso12-1.5-b], [EXFIN-caso12-prob1-e]

Y aunque al principio tuvo errores con el concepto de suma directa [PROB-caso12-1.5-c] parece haber dominado finalmente el concepto [EXFIN-caso12-prob1-f]

TEMA 2

Sabe obtener perfectamente el núcleo e imagen de una aplicación lineal [PROB-caso12-2.7-b], aplicar la fórmula de las dimensiones, [PROB-caso12-3.9] [CUES-caso12-2.1], [EXFIN-caso12-prob2-f]

Domina las condiciones de invertibilidad de una matriz [CUES-caso12-2.3], , [EXFIN-caso12-prob2-b], [EXFIN-caso12-prob2-d]

Aunque en algún problema no ha sabido obtener la matriz asociada [CUES-caso12-2.2], [PROB-caso12-2.13], [PROB-caso12-2.8], sin embargo se observa que luego ha sido un proceso que domina [CUES-caso12-2.4], [PROB-caso12-2.5], [PROB-caso12-2.7], [EXFIN-caso12-prob2-a], [EXFIN-caso12-prob2-c].

Domina el método de Gauss para el cálculo de la inversa [PROB-caso12-2.9-b], [PROB-caso12-2.5-b], [EXFIN-caso12-prob2-e]

Sabe obtener una aplicación lineal a partir de la imágenes de una base [PROB-caso12-2.6] y en general las características de una aplicación lineal [EXFIN-caso12-cues-3]

TEMA 3

Entiende las condiciones fundamental de invertibilidad usando determinantes [CUES-caso12-3.4], [PROB-caso12-3.7], [PROB-caso12-3.11]

Parece conocer las principales propiedades de los determinantes [CUES-caso12-3.3], [ESXFIN-caso12-cues-4]

TEMA 4

Parece dominar perfectamente el Teorema de Rouche, para la discusión de sistemas [CUES-caso12-4.1], [CUES-caso12-4.3], incluso la discusión con parámetros [CUES-caso12-4.4], [PROB-caso12-4.2], [PROB-caso12-4.3], [PROB-caso12-4.5-b], [`EXFIN-caso12-prob4-a]

TEMA 5

Relaciona perfectamente las diferentes condiciones de diagonalización: para matrices simétricas [CUES-caso12-5.1], [CUES-caso12-5.4], cuando los autovalores se repiten [CUES-caso12-5.2],

Aunque no ha hecho un problema que pretencía resolver un problema usando conceptos de autovalor y autovectore [PROB-caso12-5.2], sin embargo parece que entiende dichos conceptos autovalor y autovector y sabe aplicarlos para resolver problemas en los que hay incógnitas de la matriz [PROB-caso12-5.1]

Sabe relacionar los conceptos de determinante, traza, autovalores y dimensión de subespacio de autovectores [EXFIN-caso12-cues-7]

Sabe determinar cuando una matriz constante es diagonalizable [PROB-caso12-5.4], [PROB-caso12-5.5], incluso estudiar cuando una matriz con parámetros es diagonalizable [PROB-caso12-5.6], aunque en ocasiones ha tenido problemas para el estudio de casos exhaustivo [PROB-caso12-5.10] incluso en el examen tuvo ciertos problemas para estas clasificaciones [EXFIN-caso12-prob3-a] ,

Sabe diagonalizar matrices constantes [EXFIN-caso12-prob3-b]

TEMA 6

Maneja básicamente las principales condiciones de clasificación de las formas cuadráticas [CUES-caso12-6.1], [CUES-caso12-6.2], relacionar el carácter de formas cuadráticas con una matriz A y su inversa [EXFIN-caso12-cues8] .

Sabe obtener la forma cuadrática a partir de su forma matricial [EXFIN-caso12-prob3-c]

Ha cometido al principio algunos errores en la clasificación de formas cuadráticas en la aplicación del criterio de menores pero para una matriz no simétrica [CUES-caso12-6.3], en la clasificación en función de 2 parámetro [PROB-caso12-6.6] o deducir a partir de la matriz y de la traza información de los autovalores para clasificar la forma cuadrática [CUES-caso12-6.4], pero sin embargo en general podemos decir que parece dominar la clasificación de formas cuadráticas en función de parámetros [PROB-caso12-6.1], [prob-CASO12-6.2], [`PROB-caso12-6.3], [PROB-caso12-6.4], [PROB-caso12-6.5], [PROB-caso12-6.7], [PROB-caso12-6.8]

TEMA 7

Sabe identificar por definición cuando un conjunto es convexo [EXFIN-caso12-cues9]

Sabe resolver gráficamente un programa lineal [EXFIN-caso12-cues10]

2) Respecto de los contenidos que no parece haber dominado finalmente podríamos citar:

TEMA 1

No ha sabido manejar espacios vectoriales con el de los polinomios de grado menor o igual que 4 [PROB-caso12-1.2]

No ha sabido calcular vectores ortogonales a un subespacio vectorial dado [PROB-caso12-1.3]

TEMA 3

Ha tenido ciertos problemas con el cálculo de rangos [PROB-caso12-3.10], [PROB-caso12-3.5]

Tampoco ha sabido calcular el determinante de Vandermonde usando propiedades y ha usado directamente la función DER [PROB-caso12-3.8]

TEMA 4.

Ha tenido ciertos problemas en la discusión de sistemas de ecuaciones con parámetros [PROB-caso12-4.9], [PROB-caso12-4.4], [CUES-caso12-4.5]

TEMA 5.

Ha tenido problemas en algunas propiedades de autovalores [CUES-caso12-5.3], [CUES-caso12-cues-6]

3) El alumno parece saber distinguir entre lo que es un contenido esencial y un proceso rutinario [ENTFIN-caso12-4.1], hecho que ha quedado confirmado en las contestaciones que ha realizado el alumno ante los diferentes temas del curso, parece tener una visión general clara de la diferencia que hay entre contenido esencial y proceso repetitivo [EN FIN-caso12-4.1], [ENTFIN-caso12-4.2], [ENTFIN-caso12-4.3], [ENTFIN-caso12-4.6], aunque de los últimos temas no recuerda mucho [ENTFIN-caso12-4.7], [ENTFIN-caso12-4.8]

4) Se le ha propuesto al alumno que realizase a mano algunos cálculos manipulativos, en particular el el cálculo de un determinante de orden 3 que ha realizado bien, resolución de un sistema que lo ha hecho por Gauss, el cálculo de autovalores de una matriz triangular que ha resuelto perfectamente y el cálculo de un rango que lo ha hecho bien [ENTFIN-caso12-4.9] lo cual nos permite afirmar que los procesos básicos los sabía realizar a mano, pero a pesar de eso ha utilizado derive en las cuestiones teóricas aunque no era imprescindible, pero por hacer ciertas comprobaciones [ENTINT-caso12-1.2], [ENTFIN-caso12-3.4] ya que utilizaba derive para cálculos rutinarios como cálculos de determinantes [EXFIN-caso12-cues1-b], [EXFIN-caso12-cues6-b] y en la resolución de sistemas lineales [ENTFIN-caso12-3.4]. Por otro lado el alumno afirma que con derive existe mayor acercamiento teórico al álgebra lineal, aunque se pierde cierta habilidad de cálculos [ENTINT-caso12-1.1.b].

5) El alumno no ha sabido exponer los contenidos esenciales de cada tema de forma exhaustiva [ENTINT-caso12-4.1], [ENTINT-caso12-4.2], [ENTINT-caso12-4.4], [ENTINT-caso12-4.5], [ENTINT-caso12-4.6]

6) En la resolución de problemas ha notado un estilo diferente, ya que se ha preocupado más por la resolución teórica que por los cálculos que había que realizar [ENTINT-caso12-1.1], de hecho según el alumno el curso ha sido más práctico que teórico [ENTINT-caso12-g.7], no es que faltase teoría [ENTINT-caso12-g.8] pero afirma que podrían reducirse las habilidades de cálculo para poderlas resolver al poder usar derive [ENTINT-caso12-.g.9], de hecho según afirma el alumno con derive los alumnos tenían más problemas en la parte teórica mientras que en el curso tradicional los alumnos tenían más problemas en la parte práctica [ENTINT-caso12-g.10], es más el alumno afirma que la teoría se prendería mejor con pizarra y lápiz y papel que con derive [ENTFIN-caso12-1.7.b] pues la forma de introducir los conceptos con derive es peor que con el método tradicional [ENTFIN-caso12-9.5.b]; aunque por otro lado los problemas resultaban más fáciles con derive que de forma tradicional [ENTFIN-caso12-9.5.b]

De todas estas observaciones podemos concluir que el alumno parece haber dominado la mayor parte de los contenidos esenciales,, ha habido pocos contenidos que no haya sabido dominar. Por otro lado al hacer una valoración de la forma de introducir los contenidos con derive, se parece deducir que no ha sido un buen método para desarrollar la parte teórica, pero para los problemas resultaba mejor porque permitía concentrar la atención en el proceso teórico de resolución más que en los cálculos. No está muy claro según la visión de este alumno que la didáctica haya favorecido la comprensión de los contenidos esenciales, aunque por otro lado sus calificaciones y el dominio que ha adquirido de la asignatura nos muestra todo lo contrario, aunque en ese sentido debemos valorar que había estudiado estos contenidos previamente en los estudios que hizo en físicas.

5. ESFUERZO RUTINARIO.

Para analizar este cuestión consideremos los siguientes aspectos:

1) En las cuestiones teóricas considera que sin derive puede que se tuvieran problemas porque se pierde habilidad de cálculo[ENTINT-caso12-5.3], aunque evidentemente derive es mucho más rápido y más cómodo que lápiz y papel pues evita tener que repasar las operaciones que se realizan [ENTFIN-caso12-1.7]
2) Derive ofrece una característica fundamental en la resolución de problemas y es que es más rápido, y demás el tiempo que dedica en planteamiento es similar con derive y con lápiz y papel, no así en la resolución [ENTFIN-caso12-5.3], así pues la resolución de problemas ha sido más fácil con derive pues se evitan mucho esfuerzo rutinario [ENTINT-caso12-5.2], aún así esta característica no ha impedido que el alumno afirmase que sin derive también sabría resolver estos problemas [ENTFIN-caso12-5.2]
3) El alumno sabe diferenciar lo que es un contenido esencial de un proceso rutinario, de hecho se le ha planteado un ejemplo sobre diagonalización y ha sabido diferencia los procesos esenciales de los rutinarios que habría que hacer en ese caso concreto [ENTFIN-caso12-5.1]
4) El alumno afirma que sabría calcular un determinante de orden 3 sin derive [ENTINT-caso12-5.4]; un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas sin derive [ENTINT-caso12-5.5], además se le ha propuesto al alumno que realizase a mano algunos cálculos manipulativos, en particular el el cálculo de un determinante de orden 3 que ha realizado bien, resolución de un sistema que lo ha hecho por Gauss, el cálculo de autovalores de una matriz triangular que ha resuelto perfectamente y el cálculo de un rango que lo ha hecho bien [ENTFIN-caso12-4.9] lo cual nos permite afirmar que los procesos básicos los sabía realizar a mano.
5) Por último según el alumno podemos decir que derive permite prescindir de los cálculos rutinarios y orientar los esfuerzos hacia la investigación y el razonamiento [ENTINT-caso12-5.6].

Todas estas observaciones nos permiten afirmar que efectivamente derive permite prescindir de esfuerzos rutinarios y orientar más los esfuerzos hacia la investigación y el razonamiento de los problemas.

6. HERRAMIENTA DE EXPERIMENTACIÓN

Para analizar esta cuestión debemos tener en cuenta los siguientes aspectos:

1) Según el alumno derive le ha facilitado ensayar más de un camino de resolución ya que el programa ofrece mayores posibilidades de experimentación, caminos que de otra forma habrían sido muy costosos por los cálculos que conlleva [EENTFIN-caso12-3.5], quizás este haya sido el motivo por el cual casi siempre ha sabido hacer todos los problemas [ENTINT-caso12-6.3]. Por otro lado analizando los problemas que ha resuelto observamos que ha utilizado bastante la experimentación en la resolución de problemas sobre propiedades de matrices [PROB-caso12-2.4], [PROB-caso12-2.10], [PROB-caso12-2.12], para la independencia lineal [PROB-caso12-2.14], sobre determinantes [PROB-caso12-3.1], [PROB-caso12-3.2], [PROB-caso12-3.3]; también ha utilizado razonamientos inductivos de forma correcta en problemas de cálculo de determinantes n-ésimo [PROB-caso12-3.4], [PROB-caso12-3.6], [PROB-caso12-3.12] y en ecuaciones matriciales con potencias n-ésimas [PROB-caso12-2.11]
2) El alumno afirma que siempre ha intentado en los problemas probar varios caminos y experimentar posibles soluciones [ENTFIN-caso12-6.3], y en los ejemplos para investigar, el alumno afirma que ha ido adquiriendo mayor experimentación a medida que avanzaba el curso ; de hecho afirma que en otras metodologías nunca ha utilizado la experimentación y con derive sí lo ha hecho [ENTFIN-caso12-6.2]

3) El alumno considera que la experimentación le ha ayudado a entender mejor los contenidos [ENTFIN-caso12-6.4], sobre todo cuando se utilizaban representaciones gráficas de conceptos. El motivo es que derive le permite centrarse más en la teoría que en el cálculo y así se entiende mejor [ENTINT-caso12-6.4]
4) Por otro lado la actitud del alumno en los ejemplos para investigar ha sido de búsqueda y de experimentación, siempre se ha puesto a investigar [ENTINT-caso12-6.1], y ha conseguido llegar en bastantes ocasiones a la solución de estas cuestiones [ENTINT-caso12-6.2] en un porcentaje que ronda el 75% según el propio alumno [ENTFIN-caso12-6.1], lo cual nos indica que el alumno ha tenido cierta simpatía a la experimentación.

Así pues el uso de derive de esta forma hace que el álgebra lineal sea una disciplina más experimental y menos teórica [ENTINT-caso12-6.5] y ha facilitado enormemente la experimentación el la resolución de problemas y en la investigación para entender los contenidos, de hecho el alumno considera que el curso ha sido mucho más práctico que teórico [ENTINT-caso12-g.7]

7. APRENDIZAJES SIGNIFICATIVOS.

El haber trabajado los contenidos mediante la investigación y el descubrimiento le ha facilitado la comprensión de contenidos bastante más [ENTINT-caso12-7.2], ENTFIN-CASO12-7.1], de hecho a juicio del alumno esta didáctica ha provocado una aprendizaje activo, mucho más positivo que el aprendizaje tradicional [ENTFIN-caso12-7.1.b]. Ha sido un tipo de aprendizaje en el cual cuando se planteaban investigaciones el alumno no necesitaba más contenidos que nos impartidos hasta ese momento para descubrirlos [ENTFIN-caso12-7.2], es decir se trataba de descubrir por sí mismo el contenido en base a la significación obtenida de los contenidos ya existentes; situación que posiblemente haya provocado que el alumno tuviese siempre la sensación de entender todo lo que se iba introduciendo en la clase [ENTINT-caso12-7.1]

8. ESTRATEGIAS DE RESOLUCION DE PROBLEMAS.

Para analizar esta cuestión consideremos los siguientes aspectos:

1) El alumno ha sabido utilizar los contenidos utilizado para modelizar problemas reales utilizando modelos vectoriales [PROB-caso12-1.1], [PROB-caso12-1.6], [PROB-caso12-1.7], [PROB-caso12-1.8]; modelos matriciales [PROB-caso12-2.2], [PROB-caso12-2.3], [PROB-caso12-2.1]; sistemas de ecuaciones lineales [PROB-caso12-4.1], [PROB-caso12-4.6], [PROB-caso12-4.7], [PROB-caso12-4.8], [PROB-caso12-4.9], [EXFIN-caso12-prob4-b]; y problemas en los que intervenía el cálculo de la potencia k-ésima de una matriz diagonalizable [PROB-caso12-5.7], [PROB-caso12-5.8], [PROB-caso12-5.9]. Pero además también ha utilizado razonamientos inductivos inductivos de forma correcta en problemas de cálculo de determinantes n-ésimo [PROB-caso12-3.4], [PROB-caso12-3.6], [PROB-caso12-3.12] y en ecuaciones matriciales con potencias n-ésimas [PROB-caso12-2.11]. De hecho ha resuelto casi todos los problemas finales salvo uno o dos [ENTFIN-caso12-13.4.b]
2) En segundo lugar según el alumno derive utiliza una notación más cómoda que la de lápiz y papel y más rápida para realizar operaciones [ENTFIN-caso12-1.7], de hecho según el alumno uno de los elementos más positivos del curso ha sido el poder realizar los problemas con derive, pues es una herramienta perfecta para la resolución de problemas [ENTFIN-caso12-g.1]
3) El alumno afirma haber utilizado más de una estrategia de solución cuando no se quedaba convencido de la solución o cuando no llegaba a la respuesta, en estos casos buscaba otros caminos [ENTINT-caso12-7.3]; aunque en general siempre ha utilizado varias estrategias de resolución [ENTFIN-caso12-8.1].
4) El alumno ha percibido que en clase siempre se facilitaban varios puntos de vista para resolver problemas [ENTINT-caso12-8.3] , facilitando que los alumnos encontrases varios métodos de resolución [ENTFIN-caso12-8.3], [ENTFIN-caso12-8.3]

Por tanto podemos decir que derive ha facilitado que el alumno utilizase diversos métodos de resolución de problemas, ha modelizado problemas ha utilizado inducción, experimentación, circunstancia que ha sido favorecida por la estrategia didáctica.

9. BARRERAS ADICIONALES

Para analizar esta cuestión debemos considerar las siguientes características:

1) El alumno no recuerda haber tenido dificultades especiales de manipulación con el programa [ENTINT-caso12-9.3], [ENTFIN-caso12-9.4], ni siquiera en la interpretación para resolver problemas [ENTINT-CASO12-9.5]; de hecho sus principales dificultades con derive han venido ocasionadas por SOLAPAMIENTO DE VARIABLES; es decir usar variables previamente definidas con otros valores [PROB-caso12-2.9-a], [PROB-caso12-4.5] o en el uso de SOLVE para resolver sistemas de ecuaciones [EXFIN-caso12-prob3-a] que en realidad eran sistemas no lineales, obteniendo soluciones incorrectas. Además por último podemos decir que en el examen final el alumno tampoco ha encontrado problemas para manipular el programa no ha sido un obstáculo para realizar mejor el examen [ENTFIN-caso12-9.3].
2) Según el alumno el programa no ha dificultado su comprensión de los conceptos, todo lo contrario, la ha favorecido [ENTFIN-caso12-9.1]
3) El programa es una herramienta sencilla de manejar según el alumno [ENTINT-caso12-9.1], de un aprendizaje rápido [ENTFIN-caso12-9.2], lo cual le ha motivado al alumno para afirmar que aconsejaría el programa a compañeros para estudiar el álgebra lineal [ENTINT-caso12-9.2], [ENTFIN-caso12-9.5]
4) Según el alumno derive emplea una notación mejor y más cómoda que lápiz y papel para resolver problemas [ENTFIN-caso12-1.7], pero peor para la teoría para la cual considera mejor el método tradicional de pizarra y lápiz y papel [ENTFIN-caso12-9.5.b]; aunque derive puede haber generado perdida de habilidad en el cálculo [ENTINT-caso12-g.9].
5) En la resolución de problemas a veces ha tenido la sensación de que se podían realizar de igual forma con lápiz y papel [ENTINT-caso12-9.4]

De estas características podemos deducir que derive no ha sido una barrera adicional para comprender los contenidos ya que se trata de una herramienta de fácil aprendizaje y manejo, y muy útil en la resolución de problemas , aunque en la teoría a juicio del alumno es mejor el método tradicional.

10. AUTONOMÍA COGNITIVA.

La autonomía cognitiva que ha adquirido en alumno ha sido muy positiva en todas las actividades que se han ido realizando en el curso, así en los ejemplos a investigar demás de encontrarse motivado para realizarlos [ENTFIN-caso12-10.1], considera que eran asequibles [ENTINT-caso12-10.1]; en los ejercicios de manipulación ha encontrado satisfacción porque encontraba rápidamente el método desarrollado [ENTFIN-caso12-10.2]; en los problemas, además de haberlos resuelto casi siempre solo [ENTFIN-caso12-10.3], se ha encontrado siempre motivado para resolverlos, de hecho siempre había alguno en cada tema que era más complejo y suscitaba este tipo de actitud [ENTFIN-caso12-10.4]; en las cuestiones teóricas ha utilizado derive en cálculos rutinarios como el cálculo de determinantes [EXFIN-caso12-cues1-b] [EXFIN-caso12-cues6-b] y en la resolución de un sistema lineal [EXFIN-caso12-cues2-b], pero en general no ha tenido necesidad del programa con lo cual podemos decir que tenía autonomía del programa; y en el examen final el alumno considera que en el examen tendrá ese mismo grado de autonomía que ha adquirido [ENTINT-caso12-10.3-b]

Por otro lado el alumno afirma haber tenido la sensación de que era dueño del proceso de aprendizaje, es decir tenía autonomía para desarrollar las actividades de forma autónoma [ENTINT-caso12-10.2], y además considera que derive le ha añadido más autonomía cognitiva pues sin derive le quedaba la duda de los errores de cálculo y así daba los pasos con más seguridad [ENTINT-caso12-10.3]

De esto podemos deducir que la didáctica y el uso de derive sí que han producido cierta autonomía cognitiva en el alumno.

11. RELACIÓN DIALÉCTICA.

Las relaciones dialécticas podemos dividirlas en dos bloques:

a) Las relaciones dialécticas alumno-profesor: en este sentido la relación personal de este alumno con el profesor ha sido buena [ENTINT-caso12-11.3], y considera que las relaciones entre alumnos y profesor han sido mejores pues ha habido más unión, sobre todo por el número de alumnos aunque también ha influido la didáctica empleada [ENTINT-caso12-11.4-b]

b) En cuanto a las relaciones entre alumnos podemos decir que el alumno se ha limitado en sus relaciones [ENTINT-caso12-11.1] sobre todo con los compañeros de clase que estaban en un entorno de su pupitre [ENTINT-caso12-11.2], [ENTFIN-caso12-11.2] es con estos compañeros con los que ha establecido una relación especial [ENTFIN-caso12-11.1]. No obstante el ambiente del curso ha sido positivo de hecho el valora con un 7 sobre 10 [ENTFIN-caso12-11.4], este buen ambiente ha sido favorecido primero porque había pocos alumnos en clase y porque se podían hacer ejercicios en común contrastando resultados [ENTINT-caso12-11.4]. Además el ambiente ha facilitado que hubiera relación antes y después de las clases con mayor intensidad que en otras clases [ENTFIN-caso12-11.3]

12. APRENDIZAJE COLABORATIVO

Para analizar esta cuestión debemos considerar los siguientes aspectos:

1) Según el alumno el trabajo en grupo a él no le ha ayudado especialmente aunque reconoce que sí ha favorecido a sus compañeros [ENTINT-caso12-12.1], ya que a él le ha ayudado fundamentalmente a manejar mejor el programa pero no para los contenidos [ENTFIN-caso12-12.1]
2) El ordenador ha propiciado un tipo especial de colaboraciones entre los compañeros [ENTFIN-caso12-12.2], de hecho el alumno afirma que el ordenador ha sido especialmente causante de las colaboraciones que había, porque con el ordenador las dudas y problemas se resuelven en el momento , a diferencia de lo que sucede en clases teóricas que las dudas se plantean en casa [ENTFIN-caso12-12.2.b]
3) El hecho de ser pocos alumnos ha favorecido la relación entre alumnos y un ambiente de más colaboración [ENTINT-caso12-12.2], de hecho esas colaboraciones han favorecido el aprendizaje entre compañeros y también las relaciones dialéctica entre los mismos [ENTINT-caso12-12.3]
4) El alumno afirma que ha quedado con algunas compañeras para resolver problemas y considera que ha sido una experiencia positiva de colaboración [ENTINT-caso12-12.3], también ha quedado con ellas para preparar el examen [ENTFIN-caso12-12.3]

De estas características podemos concluir que la estrategia didáctica ha favorecido un aprendizaje colaborativo que ha potenciado por un lado las relaciones dialécticas entre compañeros, y mejorado el aprendizaje, siendo el programa derive uno de los elementos fundamentales de estas colaboraciones.

13) ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD.

Para analizar esta cuestión consideremos los siguientes aspectos:

1) El ritmo de la clases según el alumno ha sido bueno, y adecuado [ENTINT-caso12-13.2], [ENTFIN-caso12-13.1]
2) El alumno no se ha aburrido en las clases [ENTINT-caso12-13.1]
3) El alumno no se ha encontrado perdido en las clases en ninguna ocasión [ENTINT-caso12-13.3]
4) Para el alumno los problemas se podrían clasificar en tres niveles: muy fáciles, normales y complejos [ENTFIN-caso12-13.4], y afirma haber resuelto casi todos [ENINT-caso12-13.4], [ENTFIN-caso12-13.5]
5) Ha habido algunos problemas que le han suscitado un interés especial para su resolución [ENTINT-caso12-13.5]
6) Según el alumno, que era uno de los más aventajados, no se ha sentido aburrido y desmotivado pues cree que había que ir cimentando los conocimientos [ENTFIN-caso12-13.6.c]
7) El examen propuesto cree que ha sido asequible para todos [ENTFIN-caso12-13.6]
8) El trato que ha dado el profesor a los alumnos no ha sido especial con ninguno [ENTFIN-caso12-13.5.b], ha sido igualitario [ENTFIN-caso12-13.5-c], intentando que todos fuesen al mismo ritmo [ENTFIN-caso12-13.6.b], situación que era posible por el tipo de didáctica empleada.

Por todo lo anterior podemos decir que este tipo de didáctica se ha adaptado a los niveles de aprendizaje de cada alumno y en particular con el alumno del caso en cuestión que ha sido sin duda uno de los mejores.

14) MOTIVACIÓN

La actitud inicial del alumno hacia las matemáticas y el álgebra lineal era positiva, de hecho está muy motivado con esta asignatura, pues según comenta siempre ha tenido una calificación media de sobresaliente en los últimos años [ENCINI-caso12-3], y de hecho eligió el curso porque le gustan las matemáticas y la informática [ENCINI-caso12-4]. Hacia la informática tiene también una predisposición positiva pues tenía conocimientos de informática (internet, windows) [ENCINI-caso12-2]
El curso en sí le ha motivado en varios aspectos, en primer lugar porque como bien afirma en los problemas ha encontrado interés especial por resolverlos con el programa [ENTINT-caso12-13.6.-b], también se ha encontrado motivado en los ejemplos para investigar [ENTFIN-caso12-g.2] en segundo lugar considera que ha sido muy interesante, cree que en la clase tradicional se hubiese aburrido [ENTINT-caso12-13.6], esto puede haber motivado su alta dedicación semanal a la asignatura, a la que ha dedicado 5-6 horas semanales además de las clases [ENTINT-caso12-14.5-b]. Y en líneas generales el curso ha mantenido su alto interés por las matemáticas y se ha sentido especialmente motivado por el uso del ordenador [ENTINT-caso12-14.5], [ENTFIN-caso12-14.4]
l
Esto le ha permitido valora el curso con un 7 sobre 10 [ENTINT-caso12-g.1], destacando del curso la posibilidad de llevar la asignatura al día por los ejercicios que s proponían [ENTINT-caso12-g.2] sin encontrar ningun aspecto especialmente negativo en este curso [ENTINT-caso12-g.3], quizás la parte teórica [ENTFIN-caso12-g.2], es decir que el curso ha sido más práctico que teórico [ENTINT-caso12-g.7] y que hubiese estado mejor si se hubiese intercalado clases de pizarra y lápiz y papel entre las clases con ordenador [ENTINT-caso12-g.11]; de hecho al efectuar una comparación entre el grupo de derive y el grupo tradicional afirma que en el curso con derive la parte compleja era la teórica mientras que en el curso tradicional la parte compleja era la parte práctica [ENTINT-caso12-g.10]. El alumno volvería a realizar este grupo experimental, sobre todo por la posibilidad de evitar el cálculo y no depender de este para hacer mal los problemas [ENTINT-caso12-g.5], [ENTFIN-caso12-g.4]

Las clases se le han pasado rápidamente [ENTFIN-caso12-14.1], el ordenador le ha estimulado mucho para estudiar matemáticas, en una clase tradicional se le habría hecho más larga [ENTFIN-caso12-14.2], el material de internet era adecuado y le ayudaba [ENTFIN-caso12-14.4.b], y considera que el hecho de que hubiese pocos alumnos en clase ha sido importante pero no ha sido el elemento determinante para el ambiente y didáctica desarrollado en clase [ENTFIN-caso12-g.5]

Estas características que hemos comentado nos permiten afirmar que el grado de motivación del alumno por el curso gracias a la estrategia didáctica empleada ha sido bastante alto.

15) DINÁMICA DEL CURSO

Para analizar esta cuestión debemos observar las siguientes cuestiones:

1) El alumno considera que en el curso han faltado algunas clases de pizarra y lápiz y papel para ciertos conceptos teóricos [ENTINT-caso12-g.11], de hecho afirma que el grupo experimental tenía más problemas con la teoría mientras que el grupo tradicional con los problemas [ENTINT-caso12-g.10]
2) Lo que más le ha gustado del curso es llevar la asignatura al día por los problemas que se iban proponiendo diariamente [ENTINT-caso12-g.2], así como el poder hacer los problemas con derive pues son clases perfectas [ENTFIN-caso12-g.1]
3) Considera que ha faltado un poco de geometría en el desarrollo de la asignatura [ENTINT-caso12-g.6]
4) El alumno valora el curso con un 7 sobre 10 [ENTINT-caso12-g.1], volvería a elegir el grupo experimental sobre todo por evitar el cálculo numérico y no depender de errores para resolver problemas [ENTINT-caso12-g.5], considera que el curso ha sido muy práctico pero estaba bien [ENTINT-caso12-g.8]
5) El hecho de ser pocos alumnos en clase no ha sido fundamental para la dinámica que se ha tenido en la clase [ENTFIN-caso12-g.5]
6) El material de internet según el alumno era un material adecuado para el seguimiento de la asignatura, así como las cuestiones teóricas resueltas [ENTFIN-caso12-14.4b]

16) **EXPECTATIVAS DEL CURSO**

El alumno esperaba sacar un notable sobresaliente" [ENTINT-caso12-g.4] , que es la que esperaba sacar totalmente [ENTFIN-caso12-g.3]

CUESTIONES ENTREGADAS:								
Tema1	Tema 2	Tema 3	Tema	Tema 5	Tema 6	Tema 7	Media	Med.tot
9	7,5	7,5	7,5	7,5	6,25	0		
PROBLEMAS ENTREGADOS								
Tema 1	Tema 2	Tema 3	Tema 4	Tema 5	Tema 6	Tema 7	Media	Med.tot
6	8,5	7,7	7,2	7,5	6,0	no hay		
EXAMEN FINAL								
Teoría	8	Probl.	9,7	MEDIA	SOB			

17) <u>TRAYECTORIA EDUCATIVA</u>

El alumno tiene conocimientos de windows-95 y maneja internet pero no el correo electrónico [ENTINT-caso12-2]

Respecto a su trayectoria educativa, hizo COU, en la Selectividad saca un 6,75, con una calificación media en matemáticas en los últimos años de sobresaliente [ENCINI-caso12-3] y luego se matricula por primera vez en Matemáticas II [ENCINI-caso12-1]

ANEXO XVIII
PROCESO DEL ANÁLISIS HORIZONTAL.

PARTE 1:

ATRIBUTOS Y ASPECTOS CARACTERÍSTICOS DE LA CUESTIÓN 1:

Atributo 1.1: ¿La investigación con DERIVE en los ejemplos a investigar propuestos ayuda a descubrir con más facilidad el concepto que se trataba de introducir?

- DERIVE ayuda a descubrir los conceptos [ENTFIN-caso2-1.1]
- Derive es una buena herramienta para investigar los conceptos teóricos, convirtiendo al ordenador en un buen instrumento para introducir los conceptos [ENTFIN-caso6-1.1]
- No tiene muy claro que el uso del programa favorezca la abstracción y el análisis [ENTINI-caso9-18]
- Aunque entendía previamente los conceptos teóricos luego al tratarlos en el ordenador se quedaba atascada [ENTFIN-caso10-1.1] por lo que no parece que haya favorecido.
- Derive ha ayudado a investigar en los ejemplos propuestos [ENTFIN-caso12-1.3]

Atributo 1.2. ¿La INTRODUCCIÓN DE DATOS permite VISUALIZAR de una manera más clara los contenidos?

- La sintaxis del sistema de cálculo simbólico OBLIGABA a entender perfectamente el significado de los datos que se iban a introducir, de tal forma que se necesitaba entender previamente el contenido para manejar DERIVE [ENTINT-caso1-1.1], [ENTINT-caso1-1.4], [ENTFIN-caso1-1.2]
- El sistema de notación que proporcionaba derive ha generado un cierto hábito de uso en el alumno de forma que cuando se habla de álgebra lineal parece que pensaba primero en cómo se hace con derive, creándole una especie de esquema mental asociado [ENTINT-caso4-1.4]
- La novedad del programa es que motiva y estimula la comprensión [ENTFIN-caso4-1.8] pero la comprensión no es propio del sistema de notación
- En el caso 5, el alumno afirma que el álgebra lineal esta llena de contenidos abstractos [ENTINI-caso5-9], y quizás sea esta uno de los motivos por los que ha tenido problemas en la visualización de conceptos a través del ordenador [ENTINI-caso5-8], [ENTINI-caso5-31], no percibe de forma gráfica el concepto [ENTFIN-caso5-1.1], sobre todo lo que no visualiza es el concepto de espacio y subespacio vectorial [ENTFIN-caso5-9.1]
- La forma de introducir los datos a través de la pantalla ofrece ciertas dificultades respecto al papel en parte por la falta de costumbre de usar este medio [ENTFIN-caso8-1.7] y porque es una visión distinta [ENTFIN-caso8-1.2]
- Casi todas las prácticas las había realizado con lápiz y papel por lo que no puede afirmar que derive le haya servido para aprender los conceptos [ENTFIN-caso9-1.5]

Atributo 1.3. ¿La INTRODUCCION DE DATOS permite asimilar los procesos manipulativos del álgebra lineal?

- En ocasiones la introducción de datos con DERIVE le ha provocado ciertos errores [PROB-caso2-1], [PROB-caso2-3], que luego han desaparecido en el examen final.
- La forma de introducir los datos en DERIVE sirve para asimilar los procesos rutinarios [ENTFIN-caso1-1.2].
- El sistema de notación de derive le servía para asimilar los procesos rutinarios que con lápiz y papel no sabría hacer de forma directa [ENTFIN-caso5-1.2]
- La forma de introducir los datos en derive sirve para asimilar rápidamente los procesos manipulativos que se planteaban [ENTFIN-caso6-1.2]
- El sistema de notación de derive ha permitido asimilar los procesos rutinarios [ENTFIN-caso8-1.2]
- La forma de introducir los datos en derive especial le ha permitido asimilar los procesos rutinarios del álgebra lineal [ENTFIN-caso9-1.2]
- Derive le ha servido para asimilar los procesos rutinarios para realizarlos luego a lápiz y papel [ENTFIN-caso10-1.2]
- La forma de introducir los datos en derive le han servido para reforzar esos procesos manipulativos que por otro lado ya conocía [ENTFIN-caso11-1.1b]
- La forma de introducir los datos ha servido para entender y asimilar los procesos de álgebra lineal [ENTFIN-caso12-1.2]
- La forma de introducir los datos ha proporcionado una mejor comprensión de los métodos [ENTFIN-caso13-1.2], [ENTINT-caso13-1.4], [ENTINI-caso13-14].

Atributo 1.4. ¿Derive proporciona un estilo especial en la resolución de problemas?

- Derive se convierte en HERRAMIENTA PARA BUSCAR SOLUCIONES, potencia que sustituye al lápiz y papel [ENTINT-caso1-1.3], [ENTFIN-caso1-1.4], [ENTFIN-caso1-1.5], [ENTFIN-caso1-1.6]
- Derive proporciona un sistema de notación similar al empleado por lápiz y papel para resolver problemas [ENTINT-caso2-1.1], solo había que tener claro lo que se estaba haciendo [ENTFIN-caso2-1.7]
- Después de cierta aclimatación al programa [ENTINT-caso2-1.3] ha conseguido plantear los problemas de forma directa con DERIVE [ENTFIN-caso2-1.5], aunque algunos problemas los haría más rápidos en lápiz y papel [ENTINT-caso2-5.2]
- Ha asimilado bien el programa pues DERIVE le permite plantear y resolver directamente los problemas [ENTINT-caso3-1.3], [ENTFIN-caso3-1.2].
- Con DERIVE las operaciones pasan a un segundo plano y se puede estar más atento a los fines del planteamiento y a los resultados obtenidos [ENTFIN-caso3-1.7.a]
- Con DERIVE al menos podía plantear los problemas aunque en ocasiones no llegase a la solución directa [ENTFIN-caso4-1.4]
- Planteaba y resolvía directamente los problemas con derive [ENTINT-caso5-1.3], sin tener necesidad de replantearlos en lápiz y papel [ENTFIN-caso5-1.4]
- Derive obliga a un cambio en la forma de pensar sobre los problemas [ENTINT-caso6-1.1], de tal forma que ha obligado a invertir mucho tiempo en su realización [ENTFIN-caso6-1.3]
- El caso 6 ha resuelto directamente los problemas con derive sin necesidad de plantearlos con lápiz y papel [ENTINT-caso6-1.3]
- El razonamiento de los problemas es muy similar usando derive o lápiz y papel [ENTFIN-caso7-1.3] y no tuvo que plantear ningún problema previamente con lápiz y papel [ENTFIN-caso7-1.4]

- El estilo de notación que ofrece derive es muy distinto a lápiz y papel de tal forma que con derive en la resolución de problemas no sólo tenía que entenderlos sino que realizar una asociación de datos con el programa [ENTINT-caso8-1.1], de tal forma que entendía mejor con lápiz y papel y saberlos enfocar [ENTFIN-caso8-1.3], sobre todo los de enunciado largo [ENTINT-caso8-1.2]
- La nueva forma de notación que emplea el programa ha obligado a modificar un tanto la forma de enfrentarse a los problemas "cambiar el chip" de cómo venía haciéndolo con lápiz y papel [ENTINI-caso9-15] aunque el razonamiento en la resolución ha sido la misma, se requería una cierta aclimatación al nuevo sistema [ENTINI-caso9-14], [ENTFIN-caso9-1.3]
- Siempre ha realizado mentalmente el planteamiento como si lo hiciera con lápiz y papel y luego pasarlo a derive [ENTFIN-caso10-1.3], aunque luego en el examen final resolvió directamente los problemas en derive [ENTFIN-caso10-1.3]
- En este caso el alumno no ha tenido que poner en marcha ningún tipo especial de razonamiento [ENTFIN-caso11-1.2], de hecho no ha tenido que plantear ningún problema antes con lápiz y papel [ENTFIN-caso11-13.b]
- En la resolución de problemas derive le ha permitido preocuparse menos por el cálculo y prestar más atención a la resolución teórica [ENTINT-caso12-1.2], y no tuvo que plantear problemas previamente con lápiz y papel [ENTFIN-caso12-1.4]
- Derive ha generado un mecanismo especial para resolver problemas [ENTFIN-caso13-1.13], y en ocasiones ha necesitado plantearlos previamente con lápiz y papel [ENTINT-caso13-1.3] ya que en ocasiones ha tenido que adaptar su forma de pensar al nuevo sistema de notación [ENTINT-caso13-1.1]; aunque en el examen ya no se produjo esa circunstancia [ENTFIN-caso13-1.4]
- Los problemas se resuelven de forma distinta con derive pero el estilo de pensamiento es más o menos el mismo [ENTINT-caso14-1.1], de hecho ha realizado todos los problemas directamente con DERIVE sin usar lápiz y papel [ENTINT-caso14-1.3]

Atributo 1.5. ¿Resulta imprescindible el uso de DERIVE para contestar a las cuestiones teóricas?

- Derive no ha sido un instrumento fundamental para resolver las cuestiones teóricas [ENTINT-caso4-1.2], [ENTINT-caso4-1.2.b]
- Cuando resolvía cuestiones teóricas inicialmente se encontraba un poco indefenso al realizarlas sin derive [ENTINT-caso5-1.2]
- En el caso 4 se observa que no ha habido dificultades por resolver las cuestiones teóricas sin derive [ENTINT-caso5-1.2], [ENTINT-caso6-1.2]
- Derive ayudaba para realizar algunas operaciones intermedias [ENTINI-caso10-1.2]
- No ha encontrado dificultad para realizarlas sin derive [ENTINT-caso12-1.2]
- Considera que era necesario derive para desarrollar las cuestiones teóricas [ENTINT-caso13-1.2]
- Al principio cuesta un poco pero luego te acostumbras [ENTINT-caso14-1.2]

Atributo 1.6. La transferencia de procesos o conceptos de lápiz y papel a DERIVE ¿resulta sencilla?

- Para transferir información de lápiz y papel a derive había que entender bien los contenidos para poder manejar DERIVE [ENTINT-caso1-1.1], [ENTINT-caso1-1.4], [ENTFIN-caso1-1.2]
- Al principio tenía dificultades en manejar derive pero una vez dominado el problemas no tenía dificultades en traducir los contenidos y los problemas de un sistema a otro [ENTFIN-caso2-1.2.b], [ENTFIN-caso2-1.6]

- Parece que hay menos dificultades en trasladar planteamientos hechos en lápiz y papel a DERIVE que al revés [ENTFIN-caso3-1.6]
- No tendría problemas en trasladar las prácticas hechas en lápiz y papel pasarlas a derive [ENTFIN-caso4-1.5], [ENTFIN-caso4-1.6]
- No parece tener problemas en trasladar los procesos de lápiz y papel a derive [ENTFIN-caso5-1.6]
- No parece tener problemas en trasladar procesos hechos a lápiz y papel a derive [ENTFIN-caso6-1.6]
- Cualquier problema resulta más cómodo trasladarlo de lápiz y papel a derive [ENTFIN-caso7-1.7].
- La transferencia de procesos de lápiz y papel a derive es más cómoda pues permite ahorrar tiempo [ENTFIN-caso9-1.7]
- Considera que derive era un sistema de notación más lejano al lápiz y papel [ENTINT-caso10-1.4].
- No tiene problemas en trasladar las prácticas de lápiz y papel a derive [ENTFIN-caso11-1.5]
- Sabía transferir las prácticas hechas a lápiz y papel a derive [ENTFIN-caso12-1.6]
- No tiene problemas en trasladar prácticas de lápiz y papel a derive [ENTFIN-caso13-1.6]

Atributo 1.7. La transferencia de procesos o conceptos de DERIVE a lápiz y papel ¿resulta sencilla?

- Al principio tenía dificultades en manejar derive pero una vez dominado el problemas no tenía dificultades en traducir los contenidos y los problemas de un sistema a otro [ENTFIN-caso2-1.2.b], [ENTFIN-caso2-1.6]
- Resulta más compleja la transferencia de procesos de DERIVE a lápiz y papel que al revés [ENTFIN-caso3-1.5]
- Los procesos realizados en derive no le costarían demasiado realizarlos en lápiz y papel [ENTFIN-caso4-1.2]
- Pasar de derive a lápiz y papel le cuesta un poco quizás por la falta de práctica en el manejo del cálculo [ENTFIN-caso5-1.5]
- Sabe trasladar las prácticas hechas en lápiz y papel a DERIVE [ENTFIN-caso6-1.5]
- Sabría realizar cualquier práctica realizada en DERIVE con lápiz y papel aunque con pérdida de cierta seguridad en los cálculos [ENTFIN-caso7-1.6]
- Sabría trasladar las prácticas hechas con derive a lápiz y papel [ENTFIN-caso8-1.7].
- Parece menos difícil trasladar procesos de derive a lápiz y papel [ENTFIN-caso10-1.6], [ENTFIN-caso10-1.5]
- No tiene problemas en trasladar las prácticas de matemáticas II de derive a lápiz y papel [ENTFIN-caso11-1.4], [ENTFIN-caso11-13.3.b]
- Sabía transferir las prácticas hechas con derive a lápiz y papel [ENTFIN-caso12-1.2.b], [ENTFIN-caso12-1.5]
- No tiene problemas en trasladar de derive a lápiz y papel [ENTFIN-caso13-1.6], pero resulta más fácil de lápiz y papel a derive [ENTFIN-caso13-1.6-b]

Atributo 1.8. ¿Cuál de los dos sistemas es más cómodo para estudiar álgebra lineal?

- Al principio resultaba más cómodo LÁPIZ Y PAPEL puesto que el uso de DERIVE obligaba a entender previamente el contenido y por falta de costumbre a usar este nuevo medio [ENTFIN-caso1-1.7], [ENTFIN-caso1-1.8]
- Al principio resultaba más cómodo LÁPIZ Y PAPEL hasta que se cogía un poco de práctica y entonces era más cómodo DERIVE [ENTFIN-caso2-1.8]

- Derive resulta más cómodo porque ahorra operaciones [ENTFIN-caso3-1.7]
- Con DERIVE se evita la operativa y empiezas a pensar de otra forma de cómo hace el programa [ENTINT-caso4-1.1], es un sistema más cómodo y más rápido [ENTFIN-caso4-1.8],
- Derive es un sistema de notación más CERCANO al lápiz y papel pues permite realizar los cálculos más rápidamente [ENTINT-caso5-1.5]
- El programa es derive evita los cálculos rutinarios [ENTFIN-caso6-1.7]
- Derive es más cómodo que lápiz y papel para realizar los cálculos evidentemente [ENTFIN-caso7-1.7]
- Derive es más cómodo que lápiz y papel porque ahorra tiempo [ENTFIN-caso9-1.7]. Además aunque conocía los conceptos por cursos anteriores derive la ha permitido ir redescubriendo numerosos conceptos desde otra perspectiva [ENTFIN-caso9-1.1]
- Derive es más cómodo que lápiz y papel pero porque se simplifican los cálculos [ENTFIN-caso10-1.7].
- Le ha resultado más cómodo derive que lápiz y papel [ENTFIN-caso11-1.6]
- Resulta más cómodo derive por su rapidez de cálculo y porque se eliminan operaciones [ENTFIN-caso12-1.7]
- Resulta más cómodo derive que lápiz y papel porque es más rápido en el cálculo [ENTFIN-caso13-1.6.c]

Atributo 1.9. ¿Cuál de los dos sistemas de notación es MEJOR para comprender los conceptos?

- DERIVE no ayudaba a la primera a descubrir los contenidos requería una cierta manipulación y aclimatación previa [ENTFIN-caso1-1.1]
- Se aprende mejor la teoría con DERIVE porque tienes que saber exactamente lo que estás haciendo y no se puede divagar como con el lápiz y papel [ENTINT-caso2-1.2]
- El sistema de notación de DERIVE es mejor que el de lápiz y papel para comprender los contenidos ya que se evitan operaciones y procesos intermedios [ENTINT-caso3-1.1e], [ENTFIN-caso3-1.7.c]
- Ayuda a comprender los conceptos matemáticos pues motiva y estimula esa comprensión [ENTFIN-caso4-1.8], aunque al final el profesor explicaba los resultados en la pizarra [ENTFIN-caso4-1.8]
- Derive ofrece ciertos problemas en la visualización de conceptos [ENTINI-caso5-8], [ENTFIN-caso5-1.1]
- La notación tradicional de pizarra y lápiz y papel es mejor para entender los conceptos teóricos [ENTFIN-caso5-1.7]
- Derive es una buena herramienta para investigar los conceptos teóricos, convirtiendo al ordenador en un buen instrumento para introducir los conceptos mejor que la pizarra [ENTFIN-caso6-1.1]; el sistema de notación de derive es bueno para entender los conceptos pues "te los deja machacados" [ENTFIN-caso6-1.7]
- Es mejor el lápiz y papel para comprender los conceptos [ENTFIN-caso7-1.7]
- El sistema de notación empleado por derive permitía entender los conceptos que se introducían porque permitía tantear y obtener las ideas de forma aproximada [ENTFIN-caso8-1.1]
- Tiene dificultades a estudiar con derive por la falta de costumbre [ENTFIN-caso8-1.7] y porque es otra visión distinta [ENTFIN-caso8-1.2] además en ocasiones necesitaba lápiz y papel para entender mejor los contenidos [ENTFIN-caso8-1.3]
- Resultaba mejor el de lápiz y papel de hecho los problemas siempre los planteaba previamente con lápiz y papel [ENTINT-caso10-1.3]

- Es mucho mejor derive que lápiz y papel para comprender los conceptos quizás porque se le da bien el manejo del ordenador y porque se evitan los errores de cálculo [ENTFIN-caso11-1.6.b]; insiste mucho en el concepto de aplicación lineal que nunca había entendido en cursos anteriores y con derive lo ha entendido perfectamente [ENTINI-caso11-16]; además que el hecho de poder realizar muchos ejercicios ayuda a comprender mejor [ENTFIN-caso11-1.1].
- La teoría se entiende mejor con pizarra y lápiz y papel que con derive aunque el sistema de notación acercaba más los conceptos [ENTINI-caso12-1.1.b] , aunque por otro lado los problemas se entendían mejor con DERIVE [ENTFIN-caso12-1.7.b] por su rapidez de cálculo.
- Veía mejor los contenidos con derive que con el método tradicional [ENTFIN-caso13-1.1], permitiéndola entender mejor la teoría [ENTFIN-caso13-1.7], centrándose menos en métodos y más en contenidos [ENTINT-caso13-1.4]

Atributo 1.10. Complementariedad del sistema de notación usado por DERIVE y el de LÁPIZ Y PAPEL.

- El alumno está sumamente vinculado al sistema tradicional de lápiz y papel, lastre que ha impedido que utilice con mayor soltura el sistema de cálculo simbólico, y haya tenido que utilizar ambos sistemas uno
- +-como complemento del otro [ENTFIN-caso1-1.8], [ENTFIN-caso1-1.7]
- Parece que ambos sistemas han sido complementarios, pero en el sentido de que con lápiz y papel realiza mejor la comprensión y planteamientos de procesos y con derive los cálculos [ENTFIN-caso8-1.3]
- Son dos sistemas de notación complementarios [ENTFIN-caso9-1.7], aunque derive es más cómodo para los cálculos porque ahorra tiempo [ENTFIN-caso9-1.7]

Atributo 1.11. ¿La INTEPRETACIÓN de los resultados en DERIVE era difícil o fácil?

- El proceso de interpretación, resultó un poco complejo en DERIVE más que con lápiz y papel [PROB-caso1-prob2], [ENTFIN-caso1-prob1], [EXFIN-caso1-prob2]
- La comprensión o interpretación de datos de la pantalla podría tener ciertas dificultades [ENTFIN-caso8-1.2]

Atributo 1.12. Valoración sobre la cuestión, es decir, a juicio del alumno ¿DERIVE proporciona un sistema de notación intermedio?

- Derive es un sistema de notación intermedio positivo, ya que se convierte en un sistema mediador de aprendizaje [ENTFIN-caso2-1.9]
- Derive automatiza mucho los cálculos [ENTINT-caso5-g.3]
- Derive sí se ha convertido en un sistema de notación intermedio [ENTFIN-caso5-1.8]
- Derive puede decirse que es un sistema de notación intermedio entre las ideas del profesor y las que capta el alumno [ENTFIN-caso6-1.8]
- Más que un sistema de notación mediador derive ha sido una herramienta de cálculo [ENTFIN-caso7-1.8]
- Derive es una mezcla entre sistema de notación y herramienta, pues es por un lado calculadora y por otro una forma de escribir [ENTINT-caso8-1.4]
- Aunque derive la ha oscurecido algunos conceptos, cree que derive proporcionaba una forma de notación más dinámica y más operativa que lápiz y papel [ENTINI-caso10-1.1] proporcionando un sistema de notación intermedio [ENTFIN-caso10-1.8]

- Como en cualquier otro programa de ordenador, hay que abstraer la realidad y volcar en derive el lenguaje matemático [ENTFIN-caso11-1.3]
- Derive es un sistema de notación intermedio ya que hay que volcar en él la teoría y luego el alumno interpretar y observar resultados [ENTFIN-caso11-1.7]
- Inicialmente se consideró más como herramienta de trabajo [ENTINT-caso12-1.4], aunque luego al final si parece haber sido un sistema intermedio [ENTFIN-caso12-1.8]
- Derive la ha dotado de un sistema de notación más cercano al álgebra lineal que le ha permitido acercarse más al concepto, más en los contenidos que en los métodos [ENTINT-caso13-1.4], [ENTFIN-caso13-1.8]

Atributo 1.13. Inconvenientes observados del sistema de notación que utiliza DERIVE.

- El sistema de notación, bueno la mecánica puede provocar que los conceptos se adquieran de una forma mecánica [ENTINT-caso6-1.4]
- El uso del programa distrae al alumno de la comprensión de los conceptos teóricos, pues estás más atento a lo que tienes que hacer con el ordenador [ENTFIN-caso7-1.1]
- Derive es más una herramienta de cálculo que un auténtico sistema de notación [ENTFIN-caso7-1.8].
- La didáctica utilizada con el programa tiene demasiada práctica lo cual puede provocar que el alumno no sepa realizar los cálculos a mano [ENTINI-caso9-17]
- Derive en ocasiones la ha oscurecido algunos contenidos que luego ha tenido que resolver leyendo otros libros, pues con el ordenador no los ha entendido [ENTINI-caso10-1.26], desorientando por tanto su aprendizaje [ENTFIN-caso10-1.26]

PARTE 2:

<u>ATRIBUTOS Y ASPECTOS CARACTERÍSTICOS DE LA CUESTIÓN 2.</u>

Atributo 2.1.1. Descripción del tipo de comunicación entre alumnos y profesor.

- Comunicación grande motivada porque había pocos alumnos y por el tipo de dinámica de trabajo [ENTINT-caso1-2.1], [ENTINT-caso1-11.4], [ENTFIN-caso1-2.1], [ENTFIN-caso1-2.2]
- Comunicación cercana y positiva [ENTFIN-caso2-2.5], [ENTINI-caso2-13], [ENTINI-caso2-15].
- Ha sido muy buena porque se resolvían dudas [ENTFIN-caso3-2.1], [ENTFIN-caso3-2.2], [ENTINT-caso3-2.1]
- En parte porque había pocos alumnos [ENTINT-caso3-34b], [ENTINT-caso3-2.1].
- Más cercana que en clases habituales [ENTFIN-caso4-2.1], quizás porque había pocos alumnos y había más confianza [ENTINT-caso4-2.1], [ENTFIN-caso4-2.8]
- El profesor resolvía rápido sus dudas [ENTINT-caso4-2.1.b]
- Tenía mucha confianza con el profesor para preguntarle las dudas [ENTINT-caso5-14] estableciendo una comunicación muy buena [ENTFIN-caso5-2.1], en parte motivada por el reducido número de alumnos [ENTINT-caso5-2.1]
- Ha sido una comunicación cercana, y siempre encontró respuesta rápida a sus dudas [ENTINT-caso6-2.1], ha sido una comunicación buena [ENTFIN-caso6-2.1]
- Ha sido muy buena [ENTFIN-caso7-2.1]

- Ha sido buena, porque había pocos alumnos en clase y porque era fácil consultar las dudas [ENTFIN-caso8-2.1]
- Buena porque el profesor ha estado muy atento a los alumnos [ENTINT-caso8-2.1]
- El trato del profesor con los alumnos ha sido bueno, aunque en ocasiones el lenguaje que utilizaba era demasiado técnico [ENTINI-caso9-10].
- Ha sido buena [ENTFIN-caso10-2.1], más cercana que en otras clases [ENTINT-caso10-2.1]
- Siempre que ha tenido una duda se la ha resuelto rápido [ENTFIN-caso10-2.2], [ENTINT-caso10-2.1]
- Conocía al profesor de años anteriores [ENTINI-caso11-10] por estar matriculado en esta asignatura antes. Las exposiciones eran buena [ENTINI-caso11-11], ha motivado al alumnado, haciendo divertida la clase, que ha provocado una buena pauta para la interactividad [ENTINI-caso11-30] y eso ha provocado una buena comunicación [ENTFIN-caso11-2.1]
- Ha sido buena [ENTFIN-caso12-2.1] encontrando respuesta rápida a sus dudas [ENTINT-caso12-2.1]
- Ha tenido una mayor unión y cercanía quizás por el reducido número de alumnos y por la metodología empleada [ENTINT-caso12-11.4-b]
- Ha sido buena, quizás porque eran pocos en clase [ENTINT-caso13-2.1]
- Se han resuelto las dudas rápidamente [ENTFIN-caso13-2.1]
- Ha sido buena y siempre ha encontrado respuesta rápida a sus dudas [ENTINT-caso14-2.1]

Atributo 2.1.2. ¿La metodología empleada ha favorecido la interactividad entre alumnos y profesor?

- La dinámica que ofrecía la metodología ha favorecido interactividad [ENTINT-caso1-2.1], [ENTINT-caso1-11.4], [ENTFIN-caso1-2.1], [ENTFIN-caso1-2.2].
- Las exposiciones hacían divertida la clase provocando la interactividad con los alumnos [ENTINI-caso11-30]
- La metodología empleada ha favorecido una mayor cercanía entre alumno y profesor [ENTINT-caso12-11.4-b]

Atributo 2.1.3. Valoración en escala 1 a 5 de la interactividad profesor-alumno.

- 5 sobre 5 [ENTFIN-caso2-2.5]
- Muy positiva [ENTFIN-caso3-2.1]
- 5 sobre 5 antes del examen [ENTINT-caso4-2.3] y 4 sobre 5 después del examen [ENTFIN-caso4-2.2]
- 4 sobre 5 [ENTINT-caso5-2.3], [ENTFIN-caso5-2.2]
- 4 sobre 5 [ENTINT-caso6-2.3]
- 4 sobre 5 [ENTFIN-caso7-2.2]
- 7 sobre 10 antes del examen [ENTINT-caso8-2.3] y 4 sobre 5 después del examen [ENTFIN-caso8-2.2]
- 5 sobre 5 [ENTFIN-caso10-2.2]
- 5 sobre 5 [ENTFIN-caso11-2.2]
- 4 sobre 5 [ENTINT-caso13-2.3], [ENTFIN-caso13-2.2]
- 3 o 4 sobre 5 [ENTINT-caso14-2.3]

Atributo 2.1.4. ¿Existen otras valoraciones adicionales?

- Uno de los aspectos más positivos del curso [ENTFIN-caso3-g.4] por que el trato humano y personal ha sido estrecho.

Atributo 2.2.1. ¿Los mensajes del programa han guiado y orientado suficientemente al alumno?

- Había ciertos problemas de interpretación del usuario respecto a los mensajes, y también había mensajes inesperados quizás por errores en planteamiento [ENTINT-caso1-2.2], [ENTINT-caso1-6.4], [ENTINT-caso1-7.1], [PROB-caso1-prob2], [EXFIN-caso1-prob], [ENTFIN-caso1-2.7], [ENTFIN-caso1-2.7]
- Los mensajes del programa se entienden perfectamente; a veces los errores no lo sabía identificar si eran conceptuales o de introducción de datos [ENTINT-caso2-2.2].
- Los mensajes que recibía del programa le ayudaban a detectar errores propios [ENTINT-caso3-2.2]
- Ayudaba a resolver las dudas que se planteaban [ENTFIN-caso3-2.6]
- Se manejaban bien los datos [ENTINT-caso3-3.1]
- Los mensajes le orientaban [ENTFIN-caso4-2.6], recibiendo respuestas de formas rápida [ENTINT-caso4-2.2]
- Ha proporcionado respuesta rápida a sus dudas y planteamientos [ENTINT-caso5-2.2], [ENTFIN-caso5-2.6]
- Los mensajes que recibía del programa le iban encaminando hacia la resolución de las cuestiones y los problemas [ENTFIN-caso6-2.6]
- Derive proporciona respuestas rápidas a los datos que iba introduciendo [ENTFIN-caso7-2.6]
- Ha sido buena [ENTFIN-caso9-2.7], aunque lo considera un programa un poco desfasado.
- Aunque en ocasiones le ha desorientado por no entender los mensajes [ENTFIN-caso10-2.6] sin embargo le ha proporcionado respuesta rápida a los procesos manipulativos [ENTINT-caso10-2.2]
- Cuanto aprendió el programa el grado de interactividad que ha ofrecido derive ha sido bueno [ENTFIN-caso11-2.6]
- Ha ofrecido una respuesta rápida a los procesos manipulativos, orientándole en la resolución [ENTFIN-caso12-2.6]
- Las respuestas que proporcionaba el programa permitían continuar la resolución de ejercicios y problemas [ENTFIN-caso13-2.7]
- Derive le ha proporcionado respuesta rápida a los procesos manipulativos [ENTINT-caso14-2.2] aunque al principio le costaba entender y visualizar [ENTINI-caso14-16].

Atributo 2.2.2. Valoración en escala de 1 a 5 de la interactividad programa-usuario

- 5 sobre 5 [ENTFIN-caso2-2.7]
- Positiva [ENTFIN-caso3-2.7]
- 3 sobre 5 [ENTFIN-caso4-2.7]
- 4 sobre 5 [ENTFIN-caso5-2.7]
- 4 ó 5 sobre 5 [ENTFIN-caso6-2.7]
- 3 sobre 5 [ENTFIN-caso7-2.7]
- 7 sobre 10 antes del examen [ENTINI-caso9-16] y 3 sobre 5 después del examen [ENTFIN-caso9-2.8]
- 4 sobre 5 [ENTFIN-caso10-2.7]
- 4,5 sobre 5 [ENTFIN-caso11-2.7]
- 4 sobre 5 [ENTFIN-caso12-2.7]
- 3 sobre 5 [ENTFIN-caso13-2.7]
- 3 sobre 5 [ENTINT-caso14-2.3.b]

Atributo 2.3.1. Descripción del tipo de comunicación entre los alumnos.

- Se basaba fundamentalmente en la pareja de trabajo en la que se consultaban dudas, contrastaban resultados [ENTINT-caso1-2.1], [ENTINT-caso1-11.2], [ENTFIN-caso1-2.3], [ENTFIN-caso1-2.5].
- Se ha limitado a una comunicación con el compañero de pupitre [ENTFIN-caso2-2.5], [ENTINT-caso2-13], [ENTINT-caso2-15]
- ha sido con todos los compañeros del entorno [ENTFIN-caso3-2.3], [ENTFIN-caso3-2.4] y el hecho de tener un compañero al lado ayuda a entender mejor los conceptos [ENTINI-caso3-13]
- Ha sido muy buena [ENTFIN-caso4-2.3]
- Ha sido buena [ENTFIN-caso5-2.3], teniendo relación con numerosos alumnos no sólo con el compañero de pupitre [ENTFIN-caso5-2.4].
- Ha sido buena [ENTFIN-caso6-2.3], manteniendo una relación con varios compañeros del curso diferentes al compañero de pupitre [ENTFIN-caso6-2.4]
- Se ha reducido con el compañero de pupitre [ENTFIN-caso7-2.4]
- Ha sido buena ha podido hablar con la gente [ENTFIN-caso8-2.3], aunque se ha centrado en el compañero de pupitre [ENTFIN-caso8-2.4]
- Al ser un grupo pequeño y tener horas libres ha mejorado la comunicación [ENTFIN-caso9-2.3]
- Relación muy buena en especial con la compañera de pupitre [ENTFIN-caso9-2.4], [ENTINI-caso9-9]
- Ha sido positiva la comunicación [ENTFIN-caso10-2.3], manteniendo contacto con otros compañeros además del compañero de pupitre [ENTFIN-caso10-2.4]
- La estrategia didáctica ha favorecido la interactividad y comunicación entre alumnos [ENTINI-caso11-9]
- La posibilidad de comunicar con el compañero dificultades y logros conseguidos con el programa ha sido muy positivo pues provocaba intercambios entre alumnos sobre todo entre compañeros de pupitre [ENTINI-caso10-22]
- La comunicación ha sido positiva [ENTINI-caso11-24], [ENTFIN-caso11-2.3], provocando buenos lazos entre los alumnos [ENTINI-caso11-24], pero fundamentalmente con su compañero de pupitre [ENTFIN-caso11-2.4], con el que ha entablado una buena relación de amistad [ENTFIN-caso11-11.2], [ENTFIN-caso11-11.2b]
- Ha sido buena [ENTFIN-caso13-2.3] aunque la relación se ha centrado en los compañeros de alrededor y en especial con su compañera de pupitre [ENTFIN-caso13-2.4], la confianza que tenía con ellos le ha permitido compartir dudas [ENTINI-caso13-21] provocando así un buen ambiente de trabajo [ENTINI-caso13-7], [ENTINI-caso13-19], [ENTINT-caso13-g.2], propiciado porque había pocos alumnos en clase [ENTINI-caso13-16].
- Este tipo de trabajo ha favorecido la comprensión de contenidos [ENTINI-caso14-17] y la resolución de las dudas [ENTINI-caso14-19], de hecho ha sido una dinámica positiva [ENTINI-caso14-29] generando un buen ambiente en el curso [ENTINI-caso14-30]
- La comunicación fundamental ha sido con su compañera de pupitre [ENTINI-caso14-33] que ha favorecido el intercambio de opiniones y dudas [ENTINI-caso14-32]

Atributo 2.3.2. ¿La metodología empleada ha favorecido una buena interactividad entre los alumnos?

- La estrategia didáctica ha favorecido la interactividad entre los alumnos [ENTINI-caso11-9]
- Ha sido buena [ENTFIN-caso12-2.3], pero se ha reducido a las compañeras cercanas [ENTFIN-caso12-2.4]

Atributo 2.3.3. Valoración en escala de 1 a 5 de la interactividad alumno-alumno

- Valora con un 4 sobre 5 [ENTFIN-caso2-2.5]
- 3-4 sobre 5 [ENTFIN-caso4-2.5]
- 4 sobre 5 [ENTFIN-caso3-2.5]
- 4 sobre 5 [ENTFIN-caso5-2.5]
- 4 sobre 5 [ENTFIN-caso6-2.5]
- 2 sobre 5 [ENTFIN-caso7-2.5] porque se ha reducido al compañero de pupitre
- 3,5 sobre 5 [ENTFIN-caso8-2.5]
- 4 sobre 5 [ENTFIN-caso9-2.5]
- 5 sobre 5 [ENTFIN-caso10-2.5]
- 4 sobre 5 [ENTFIN-caso11-2.5]
- 2 o 3 sobre 5 [ENTFIN-caso12-2.5]
- 4 sobre 5 [ENTFIN-caso13-2.5]

Atributo 2.3.4. ¿Existen otras valoraciones adicionales?

- La interactividad entre alumnos facilita el aprendizaje, y en ocasiones generar cierta dependencia entre alumnos [ENTINI-caso5-15]
- La relación entre alumnos comparada con otras clases ha sido muy buena [ENTFIN-caso11-2.8]

PARTE 3:

ATRIBUTOS Y ASPECTOS CARACTERÍSTICOS DE LA CUESTIÓN 3

Atributo 3.1.1. ¿Qué características tiene el protagonismo que han desarrollado los alumnos con esta estrategia didáctica?

- Existía en el alumno cierto grado de predisposición al aprendizaje por descubrimiento que contiene un elevado grado de protagonismo por parte del alumno [ENTINI-caso3-23], [ENTINI-caso3-23], [ENTINT-caso3-1.4], [ENTINT-caso4-3.2], [ENTFIN-caso4-3.2], [ENTINT-caso6-3.3], [ENTFIN-caso6-3.1]
- La utilización del sistema de cálculo simbólico ha obligado a pensar al alumno en el planteamiento de los problemas, ejercicios y situaciones a desarrollar, comprendiendo los procesos y métodos que se implementaban [ENTINT-caso1-3.1], [ENTFIN-caso1-1.7], [ENTINI-caso2-18], [ENTINT-caso4-3.4], [ENTFIN-caso5-3.3], [ENTINT-caso8-3.1], [ENTINT-caso8-3.2], [ENTFIN-caso8-3.5], [ENTFIN-caso9-3.3], [ENTFIN-caso10-3.3], [ENTFIN-caso11-3.3], [ENTINT-caso12-3.4], [ENTINT-caso13-3.4] , [ENTINT-caso14-3.4]
- El alumno ha **intentado descubrir por sí mismo** las investigaciones propuestas en una actitud de búsqueda , estimulando así un protagonismo especial por la investigación [ENTFIN-caso2-3.1], [ENTFIN-caso3-3.1], [ENTINI-caso3-3.2], [ENTINI-caso5-28], [ENTFIN-caso5-3.1], [ENTINT-caso5-3.2], [ENTFIN-caso5-3.1], [ENTINT-caso6-3.3], [ENTFIN-caso6-3.1], [ENTFIN-caso7-3.1], [ENTINT-caso8-3.1], [ENTINT-caso8-3.2], [ENTFIN-caso9-3.1], [ENTINT-caso10-3.4], [ENTFIN-caso10-3.1], [ENTFIN-caso11-g.3.1], [ENTINT-caso12-3.2], [ENTFIN-caso13-3.1], [ENTFIN-caso13-3.1], [ENTINT-caso14-3.1], [ENTINT-caso14-3.2]

- El uso de derive ha facilitando el protagonismo del alumno en el momento de la **búsqueda** de soluciones porque permite ensayar sobre múltiples opciones y caminos alternativos sin un coste de cálculo adicional excesivo, [ENTINT-caso1-3.4], [ENTINT-caso3-3.2], [ENTFIN-caso3-6.1], [ENTFIN-caso3-3.6], [ENTINT-caso6-3.4], [ENTFIN-caso9-3.1], [ENTFIN-caso9-3.5], [ENTFIN-caso9-3.5.b], [ENTINT-caso10-3.3], [ENTFIN-caso10-3.5], [ENTINT-caso10-3.5], [ENTFIN-caso11-3.5], [ENTFIN-caso12.3.1], [ENTINT-caso12-3.5.b], [ENTFIN-caso12-3.4], [ENTINT-caso13-3.2], [ENTFIN-caso13-3.5], [ENTINT-caso14-3.5]
- La utilización de derive ha permitido que el alumno **comprobara las soluciones** que se proponían ya que se eliminan las trabas que ocasionan los cálculos. [ENTFIN-caso1-1.7], [ENTINT-caso6-3.1], [ENTFIN-caso7-3.2], [ENTINT-caso8-3.3], [ENTINT-caso12-3.3], [ENTINT-caso13-3.3], [ENTINT-caso14-3.3]

Atributo 3.1.2. ¿Qué grado de protagonismo ha suscitado nuestra estrategia didáctica en las diferentes actividades desarrolladas?

- Aunque el uso de DERIVE ha sido importante se observa que no ha habido dependencia del programa pues las CUESTIONES TEÓRICAS las ha resuelto sin el uso del programa en general, tan solo lo ha usado para realizar comprobaciones o cálculos sencillos [CUES-caso1], [ENFIN-caso1-3.5], [ENTFIN-caso1-3.1], [ENTFIN-caso2-3.2], [EXFIN-caso2-cues], [ENTFIN-caso3-3.4]., [ENTFIN-caso4-3.4], [ENTFIN-caso4-3.5], [ENTINT-caso5-3.5], [ENTFIN-caso5-3.4], [ENTFIN-caso8-3.4], [ENTFIN-caso9-3.4], [EXFIN-caso9-cues], [ENTINT-caso10-3.6], [ENTFIN-caso10-3.6], [ENTFIN-caso11-3.4], [ENTINT-caso12-3.5.b], [ENTFIN-caso12-3.4], [ENTFIN-caso13-3.4], [ENTINT-caso14-3.6]
- Ha utilizado DERIVE en la resolución de las CUESTIONES TEÓRICAS pues le daban seguridad en los cálculos no se fiaba de sus propios cálculos [ENTFIN-caso6-3.4], necesitaba el programa [ENTFIN-caso7-3.4]
- Sabe trasladar fácilmente los procesos hechos con lápiz y papel a DERIVE y viceversa lo cual quiere decir que no ha adquirido una dependencia excesiva del programa al menos en los procesos básicos [ENTFIN-caso1-3.3], [ENTFIN-caso1-3.4], [ENTFIN-caso4-3.3], [ENTFIN-caso12-3.3]
- El alumno no se ha sentido manejado por el programa derive [ENTFIN-caso6-3.2]
- En ocasiones se ha sentido manipulado por el programa [ENTFIN-caso10-3.3]
- Esta didáctica ha suscitado un protagonismo superior al que provoca la estrategia tradicional porque la metodología fuerza a trabajar con mayor asiduidad ejercicios y contenidos, es un aprendizaje más constructivo [ENTINI-caso2-19], [ENTINI-caso2-31], ofrece mayor satisfacción [ENTINT-caso3-6.5], [ENTFIN-caso3-6.4.b], [ENTINI-caso10-7], ha entendido procesos que no comprendía con lápiz y papel [ENTFIN-caso11-3.3.b]
- El alumno se ha sentido protagonista de su aprendizaje pues ha guiado al ordenador en los procesos que pretendía realizar [ENTINT-caso4-3.1], [ENTINT-caso4-3.2], [ENTINT-caso12-3.1]
- En ocasiones se ha encontrado perdido al realizar procesos en derive como si derive restase protagonismo e hiciese de forma automática los procesos [ENTINT-caso5-26], [ENTINT-caso5-3.1], [ENTINT-caso5-5.1], [ENTINT-caso6-3.1], ha adquirido cierta dependencia del programa [ENTFIN-caso7-3.3], [ENTFIN-caso8-3.1], se dejaba llevar por la mecánica del programa [ENTINT-caso13-3.1], [ENTINT-caso13-3.5]

- Gracias a DERIVE ha conseguido aprobar la asignatura Matemáticas I, pues le ha permitido afianzar procesos y corregir errores operativos [ENTFIN-caso6-g.5]
- Ha tenido cierta dependencia en la resolución de cuestiones y problemas con el compañero de pupitre [ENTFIN-caso8-9.3-b]

Atributo 3.2.1. ¿Qué características tiene la capacidad de autocreación que ha podido suscitar este tipo de estrategia? ¿Qué grado de autocreación ha suscitado nuestra estrategia en las diferentes actividades desarrolladas?

- En las investigaciones el tipo de estrategia ha estimulado cierta capacidad creativa para la búsqueda de soluciones, facilitada sin duda por el uso de DERIVE [ENTINT-caso1-3.2], [ENTINT-caso1-3.4], [ENTFIN-caso2-3.1], [ENTFIN-caso11-g.3.1], [ENTFIN-caso12-3.1],
- También en los problemas se ha estimulado la capacidad creativa, facilitada nuevamente por el uso de DERIVE para buscar las soluciones [ENTINT-caso1-3.5], [ENTINT-caso1-1.8], [ENTINT-caso2-3.4], [ENTFIN-caso8-3.5], [ENTFIN-caso9-3.5.b], [ENTINT-caso12-3.5], [ENTFIN-caso13-3.5], [ENTINT-caso14-3.5]
- La construcción de modelos a partir de los contenidos que se introducían ha sido una de las capacidades de creación que ha estimulado esta estrategia [PROB-caso2-prob1], [PROB-caso2-prob2], [EXFIN-caso2-prob]

PARTE 4:

ATRIBUTOS Y ASPECTOS CARACTERÍSTICOS DE LA CUESTIÓN 4

Atributo 4.1.1. ¿El alumno ha sabido distinguir entre contenidos esenciales y contenidos no esenciales o procesos manipulativos?

- Sabe distinguir lo que es un contenido esencial de un contenido no esencial o proceso manipulativo, aunque en ocasiones los mezcla confundiendo los procedimientos con los contenidos fundamentales [ENTINT-CASO1-4.1], [ENTINT-caso1-4.2], [ENTINT-caso1-4.3], [ENTINT-caso1-4.4], [ENTINT-caso1-4.5], [ENTINT-caso1-4.6], [ENTINT-caso1-1.7], [ENTFIN-caso1-4.2], [ENTFIN-caso1-4.3], [ENTFIN-caso1-4.4], [ENTFIN-caso1-4.5], [ENTFIN-caso1-4.6], [ENTFIN-caso1-4.7], [ENTFIN-caso1-4.8], [ENTFIN-caso1-4.9], [ENTFIN-caso1-4.10], [ENTFIN-caso1-4.12], [ENTFIN-caso8-4.1]
- En ocasiones los ejemplos de manipulación al ser muy repetitivos impedían al alumno quedarse con el proceso esencial [ENTFIN-caso1-4.1]
- Crees saber distinguir entre contenidos esenciales y no esenciales [ENTINT-caso2-4.7], [ENTFIN-caso2-4.1], [ENTFIN-caso2-5.1], [ENTINT-caso3-4.7], [ENTINT-caso3-4.1], [ENTINT-caso3-4.2], [ENTINT-caso3-4.3], [ENTINT-caso3-4.5], [ENTINT-caso3-4.1], [ENTFIN-caso5-4.1], [ENTFIN-caso5-5.1], [ENTINT-caso6-4.7], [ENTFIN-caso6-4.1], [ENTFIN-caso7-4.1], [ENTFIN-caso9-4.1], [ENTFIN-caso10-4.1], [ENTFIN-caso11-4.1], [ENTFIN-caso12-4.1], [ENTFIN-caso13-4.1], [ENTFIN-caso13-5.1]
- No ha tenido muy clara la diferencia entre contenidos esenciales y contenidos no esenciales [ENTFIN-caso4-4.1], [ENTFIN-caso4-4.2], [ENTFIN-caso4-4.3], [ENTFIN-caso4-4.6]

Atributo 4.1.2. ¿Existen contenidos esenciales del programa que pueden haber corrido el riesgo de convertirse en procesos automatizables?

- El cálculo de determinantes y la aplicación de sus propiedades puede haber sido un contenido esencial automatizable [ENTINT-caso1-5.5], [ENTINT-caso1-5.4], [ENTFIN-caso2-4.9]
- Las técnicas de resolución de sistemas pueden haber sido un procedimiento en algún momento esencial que se ha automatizado rápidamente [ENTINT-caso1-5.5], [ENTINT-caso1-5.4], [ENTFIN-caso2-4.10]
- El cálculo de autovalores , el cálculo del rango [EXFIN_caso15-cues1.d], [EXFIN-caso15-cues2.d], [EXFIN-caso15-cues6.d], [EXFIN-caso15-cues9.d]

Atributo 4.1.3. ¿Qué contenidos esenciales recuerda el alumno?

- Parece tener claros los contenidos fundamentales de cada tema [ENTINT-caso2-4.1], [ENTINT-caso2-4.2], [ENTINT-caso2-4.3], [ENTINT-caso2-4.4], [ENTINT-caso2-4.5], [ENTINT-caso2-4.7], [ENTFIN-caso3-4.2], [ENTFIN-caso3-4.3], [ENTFIN-caso3-4.4], [ENTFIN-caso3-4.5], [ENTINT-caso5-4.3], [ENTINT-caso5-4.4], [ENTINT-caso5-4.5], [ENTFIN-caso8-4.2], [ENTFIN-caso8-4.3], [ENTFIN-caso8-4.5], [ENTFIN-caso8-4.6], [ENTINT-caso8-4.1], [ENTINT-caso8-4.2], [ENTINT-caso8-4.3], [ENTINT-caso8-4.4], [ENTINT-caso8-4.5], [ENTINT-caso8-4.6] , [ENTFIN-caso10-4.4], [ENTFIN-caso10-4.5], [ENTFIN-caso10-4.7], [ENTFIN-caso10-4.2], [ENTFIN-caso11-4.2], [ENTFIN-caso11-4.3], [ENTFIN-caso11-4.4], [ENTFIN-caso11-4.5], [ENTFIN-caso12-4.2], [ENTFIN-caso12-4.3], [ENTFIN-caso12-4.6],
- No recuerda casi ningún contenido fundamental [ENTFIN-caso5-4.2], [ENTINT-caso6-4.1], [ENTINT-caso6-4.2], [ENTFIN-caso6-5.2], [ENTFIN-caso6-4.3], [ENTFIN-caso6-4.4], [ENTFIN-caso6-4.5], [ENTFIN-caso6-4.6], [ENTFIN-caso6-4.7], [ENTFIN-caso7-4.2], [ENTFIN-caso7-4.3], [ENTFIN-caso9-4.2], [ENTFIN-caso13-4.2], [ENTINT-caso14-4]

Atributo 4.1.4. ¿Los alumnos saben realizar operaciones básicas a mano?

- Parece que habilidades de cálculos básicos como el cálculo de determinantes y la resolución de sistemas parecen no haberse perdido [ENTINT-caso1-5.5], [ENTINT-caso1-5.4]
- Sabe realizar a mano el cálculo de determinantes de orden 3 [ENTINT-caso1-5.5], [ENTFIN-caso3-4.4], [ENTFIN-caso8-4.8], [ENTFIN-caso9-4.3] , [ENTFIN-caso10-4.9], [ENTFIN-caso11-4.8.b], [ENTFIN-caso12-4.9], [ENTFIN-caso13-4.3]
- No sabe realizar a mano el cálculo de determinantes [ENTFIN-caso2-4.9], [ENTFIN-caso4-4.9], [ENTFIN-caso6-4.9], [ENTFIN-caso7-4.4]
- Sabe realizar a mano la resolución por Cramer de un sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas [ENTFIN-caso3-4.10], [ENTFIN-caso10-4.10], [ENTFIN-caso11-4.8.b], [ENTFIN-caso13-4.4]
- No sabe resolver a mano un sistema de ecuaciones [ENTFIN-caso2-4.10], [ENTFIN-caso4-4.10], [ENTFIN-caso6-4.10], [ENTFIN-caso7-4.5], [ENTFIN-caso8-4.9], [ENTFIN-caso9-4.5]
- Sabe calcular a mano el rango de una matriz constante [ENTFIN-caso3-4.11], [ENTFIN-caso9-4.5], [ENTFIN-caso10-4.11], [ENTFIN-caso11-4.8.b], [ENTFIN-caso12-4.9],
- No sabe calcular a mano el rango de una matriz constante [ENTFIN-caso4-4.11], [ENTFIN-caso6-4.11], [ENTFIN-caso7-4.6], [ENTFIN-caso8-4.10], [ENTFIN-caso13-4.5]

- Sabe calcular a mano los autovalores de una matriz de orden 3 [ENTFIN-caso3-4.12], [ENTFIN-caso9-4.6], [ENTFIN-caso10-4.12], [ENTFIN-caso11-4.8.b]
- No sabe calcular a mano los autovalores de una matriz orden 3 [ENTFIN-caso4-4.12], [ENTFIN-caso6-4.12] , [ENTFIN-caso7-4.7] , [ENTFIN-caso8-4.11], [ENTFIN-caso13-4.6], no sabía hacerlos a mano [ENTINT-caso13-3.5].

Atributo 4.1.5. ¿Cómo ha sido la comprensión de los contenidos esenciales con DERIVE?

- *La comprensión de los contenidos esenciales con DERIVE ha sido inicialmente más compleja que con LÁPIZ Y PAPEL, aunque después de haber practicado con el programa derive era mejor [ENTFIN-caso1-1.1], [ENTFIN-caso1-5.3]*
- *La comprensión de contenidos ha sido mejor con DERIVE que con lápiz y papel [ENTFIN-caso13-1.7], [ENTINI-caso13-10]*
- *DERIVE ha ayudado a descubrir los conceptos [ENTFIN-caso2-1.1], porque tienes que saber lo que estas haciendo [ENTINT-caso2-1.2], y hay mayor acercamiento al álgebra lineal [ENTINT-caso12-1.1.b]*
- *DERIVE ha ayudado a entender los contenidos porque facilitaba la experimentación y la investigación [ENTINI-caso3-27], [ENTINI-caso3-29b]*
- *DERIVE ha permitido que visualice mejor los conceptos porque ha permitido mucha práctica y un ahorro de tiempo que se puede emplear en investigación [ENTINI-caso11-16], [ENTINI-caso11-20], [ENTFIN-caso11-g.3.1], [ENTINI-caso13-12] , [ENTINI-caso13-18]*
- *DERIVE ha ayudado a entender los contenidos porque se centraba la atención más en los contenidos que en los procesos rutinarios [ENTINT-caso3-1.1.f], [ENTFIN-caso3-8.4-b] quedando las operaciones relegadas aun segundo plano [ENTFIN-caso3-1.7.c], [ENTINT-caso10-7]*
- *Con lo que se dio en este curso no cree que hubiera aprendido los procesos manipulativos que se han impartido en este curso [ENTFIN-caso7-3.3]*
- *Un uso indiscriminado del programa puede provocar que el alumno no comprenda los contenidos y sin embargo los manipule de forma mecánica [ENTFIN-caso9-1.7]*
- *El uso del programa no aportaba nada para reforzar la comprensión de los contenidos [ENTINI-caso9-13], además no favorece el análisis [ENTINI-caso9-18]*
- *Con DERIVE pueden reducirse habilidades de cálculo [ENTINT-caso12-g.9]*
- *Con DERIVE es peor la introducción de contenidos, es mejor con el método tradicional [ENTFIN-caso12-9.5.b]*

Atributo 4.2.1. ¿Qué contenidos ha conseguido dominar?

TEMA 1

- ***Concepto de subespacio vectorial*** [CUES-caso4-1.1], [CUES-caso4-1.4]
- ***Concepto de base y dimensión de un subespacio vectorial*** [CUES-caso4-1.3], [EXFIN-caso4-cues1], [CUES-caso7-1.1], [PROB-caso7-1.10], [EXFIN-caso7-cues1], [EXFIN-caso9-cues1], [EXFIN-caso10-cues1], [EXFIN-caso11-cues1.b], [CUES-caso12-1.1], [EXFIN-caso14-cues1a]
- ***Calculo de dimensión de un subespacio a partir del número de ecuaciones no redundantes que lo definen*** [CUES-caso11-1.1], [EXFIN-caso11-cues1.a], [CUES-caso12-1.4.b], [EXFIN-caso12-cues1], [EXFIN-caso12-cues1.b]
- ***Dependencia e independencia lineal de vectores*** [EXFIN-caso1-cues4], [EXFIN-caso4-cues2], [EXFIN-caso4-cues6], [EXFIN-caso7-cues2], [EXFIN-caso10-cues2], [EXFIN-caso10-prob1.a], [CUES-caso11-1.4.c], [EXFIN-

caso11-cues2], [CUES-caso11-1.2], [CUES-caso11-1.4.d], [CUES-caso14-1.2], [CUES-caso14-1.3], [CUES-caso14-1.4.a], [EXFIN-caso14-cues2], [PROB-caso14-2.14], [PROB-caso14-3.10], [CUES-caso15-1.2], [CUES-caso15-1.4.d], [EXFIN-caso14-cues2], [PROB-caso15-3.10]

- ***Uso de los modelos vectoriales para la resolución de problemas*** [PROB-caso2-1.1], [PROB-caso2-1.6], [PROB-caso2-1.8], [PROB-caso3-1.1], [PROB-caso3-1.6], [PROB-caso3-1.8], [PROB-caso7-1.1], [PROB-caso7-1.6], [PROB-caso7-1.8], [CUES-caso12-1.2], [CUES-caso12-1.3], [CUES-caso12-1.4], [CUES-caso12-1.4.c], [CUES-caso12-1.2.b], [CUES-caso12-1.4.d], [EXFIN-caso12-cues2]
- ***Cálculo de las ecuaciones paramétricas a partir de las ecuaciones cartesianas de un subespacio*** [EXFIN-caso2-prob1.a], [EXFIN-caso3-prob1.a], [EXFIN-caso6-prob1.a], [EXFIN-caso7-prob1.a], [EXFIN-caso10-prob1.a], [EXFIN-caso11-prob1.a], [EXFIN-caso12-prob1.a], [EXFIN-caso13-prob1.a]
- ***Cálculo de ecuaciones cartesianas a partir de las ecuaciones paramétricas*** [EXFIN-caso2-prob1.b], [PROB-caso3-1.9], [EXFIN-caso3-prob1.b], [EXFIN-caso6-prob1.b], [EXFIN-caso7-prob1.b], [EXFIN-caso10-prob1.b], [EXFIN-caso11-prob1.b], [EXFIN-caso12-prob1.b, [EXFIN-caso12-prob1.b],
- ***Obtención de una base de un subespacio a partir de sus ecuaciones cartesianas*** [EXFIN-caso2-prob1.c], [EXFIN-caso3-prob1.c], [EXFIN-caso6-prob1.c], [CUES-caso9-1.4.a], [PROB-caso9-1.4.a], [EXFIN-caso10-prob1.c], [EXFIN-caso11-prob1.c] , [PROB-caso12-1.4], [EXFIN-caso12-prob1.c], [EXFIN-caso13-prob1.c]
- ***Intersección de subespacios vectoriales*** [EXFIN-caso2-prob1.d], [EXFIN-caso6-prob1d], [EXFIN-caso7-prob-1.d], [PROB-caso7-1.5], [PROB-caso8-1.9], [EXFIN-caso8-prob-1.d], [PROB-caso10-1.5], [PROB-caso10-1.9], [EXFIN-caso10-prob-1.d], [PROB-caso11-1.5], [EXFIN-caso11-prob1.d], [PROB-caso12-1.5], [EXFIN-caso12-prob1.d], [EXFIN-caso13-prob1.d]
- ***Obtención de la suma de subespacios vectoriales*** [EXFIN-caso10-prob1.e], [EXFIN-caso12-prob1.3]
- ***Suma directa de subespacios*** [EXFIN-caso6-prob1.f], [EXFIN-caso7-prob1.f], [EXFIN-caso10-1.f], [EXFIN-caso12-1.f]

TEMA 2

- ***Concepto de aplicación lineal*** [EXFIN-caso2-cues3], [EXFIN-caso5-cues3], [EXFIN-caso7-cues3], [EXFIN-caso10-cues3], [PROB-caso12-2.6], [EXFIN-caso12-cues3], [EXFIN-caso13-cues3], [EXFIN-caso13-cues3]
- ***Uso de los modelos matriciales para la resolución de problemas*** [PROB-caso2-2.1], [PROB-caso2-2.2], [PROB-caso2-2.3], [PROB-caso3-2.3]
- ***Obtención de la matriz asociada a una aplicación lineal respecto de las bases canónicas*** [EXFIN-caso1-prob2c], [PROB-caso2-2.7], [EXFIN-caso2-prob2c], [EXFIN-caso3-prob2c], [CUES-caso3-2.4], [PROB-caso5-3.9], [PROB-caso5-3.11], [EXFIN-caso5-prob2c], [EXFIN-caso5-prob2.c], [EXFIN-caso6-prob2.c], [EXFIN-caso7-prob2.c], [EXFIN-caso7-prob2.c], [PROB-caso8-2.5], [PROB-caso8-2.3], [PROB-caso9-2], [EXFIN-caso9-prob2.c], [EXFIN-caso10-prob2.c], [EXFIN-caso10-prob2.c], [PROB-caso10-2.7], [EXFIN-caso11-prob2.c], [PROB-caso13-2.7], [PROB-caso13-2.8], [EXFIN-caso12-prob2.c], [EXFIN-caso13-prob2.c], [EXFIN-caso15-prob2.c]
- ***Obtención de la matriz asociada a una aplicación lineal respecto de bases cualesquiera*** [EXFIN-caso1-prob2a], [PROB-caso2-2.7], [EXFIN-caso2-prob2a], [EXFIN-caso3-prob2a], [CUES-caso3-2.4], [PROB-caso5-3.9], [PROB-caso5-3.11], [EXFIN-caso5-prob2a], [EXFIN-caso6-prob2a], [EXFIN-

caso7-prob2a], [EXFIN-caso10-prob2-a], [EXFIN-caso11-prob2a], [CUES-caso12-2.4], [PROB-caso12-2.5], [PROB-caso12-2.7], [EXFIN-caso12-prob2a], [EXFIN-caso12-prob2a], [EXFIN-caso13-prob2a], [EXFIN-caso15-prob2a]

- ***Obtención de las dimensiones de los subespacios imagen y núcleo de una aplicación lineal usando la fórmula de las dimensiones*** [EXFIN-caso2-prob2.f], [CUES-caso3-2.1], [EXFIN-caso3-prob2.f], [PROB-caso3-3.9], [EXFIN-caso6-prob2.f], [PROB-caso6-2.6], [EXFIN-caso9-prob2.f], [PROB-caso12-3.9], [CUES-caso12-2.1], [EXFIN-caso12-prob2.f], [CUES-caso13-1.4.b], [EXFIN-caso7-prob2.f], [PROB-caso12-2.7.b]
- ***Composición de aplicaciones lineales*** [PROB-caso6-2.7]
- ***Proceso de Gauss-Jordan para el cálculo de la inversa*** [EXFIN-caso1-prob2.e], [EXFIN-caso2-prob2.e], [EXFIN-caso3-prob2.e], [EXFIN-caso6-prob2.e], [PROB-caso6-2.5], [EXFIN-caso9-prob2.e], [EXFIN-caso11-prob2.e], [PROB-caso12-2.9.b], [PROB-caso12-2.5.b], [EXFIN-caso12-prob2.e]

TEMA 3

- ***Propiedades de los determinantes*** [CUES-caso7-2.3], [CUES-caso12-3.3], [EXFIN-caso12-cues4], [CUES-caso13-3.2], [PROB-caso13-3.3.a], [EXFIN-caso13-cues14], [CUES-caso14-3.1.a], [CUES-caso14-3.3], [EXFIN-caso14-cues4], [PROB-caso14-3.8]
- ***Cálculo de rangos*** [PROB-caso4-2.7], [PROB-caso6-2.7]
- ***Condiciones de invertibilidad de una matriz por determinantes*** [EXFIN-caso1-prob2.d], [EXFIN-caso2-prob2.b], [EXFIN-caso2-prob2.d], [EXFIN-caso3-prob2-d], [EXFIN-caso3-prob2.b], [PROB-caso4-3.1], [EXFIN-caso4-prob2-d], [PROB-caso5-2.9], [PROB-caso5-3.6], [EXFIN-caso5-prob2-d], [EXFIN-caso6-prob2.d], [PROB-caso6-3.11], [EXFIN-caso9-prob2.b], [EXFIN-caso9-prob2.d], [EXFIN-caso10-prob2.b], [EXFIN-caso10-prob2.d], [EXFIN-caso11-prob2.d], [CUES-caso12-2.3], [EXFIN-caso12-prob2.b], [EXFIN-caso12-prob2.d], [CUES-caso12-3.4], [PROB-caso12-3.7], [PROB-caso12-3.11], [CUES-caso13-2.3], [PROB-caso13-2.9], [EXFIN-caso13-prob2.c], [PROB-caso13-3.7], [PROB-caso13-3.11], [PROB-caso14-3.7], [PROB-caso14-3.11], [EXFIN-caso14-prob2.b], [EXFIN-caso15-prob2.b], [EXFIN-caso15-prob2.d], [PROB-caso15-3.7]

TEMA 4

- ***Formulación de sistemas lineales para resolver problemas*** [EXFIN-caso2-prob4.b], [PROB-caso3-4.1], [PROB-caso3-4.6], [PROB-caso3-4.8], [PROB-caso3-4.10], [EXFIN-caso3-prob4.b], [EXFIN-caso4-prob4.b], [EXFIN-caso5-prob4b], [PROB-caso5-4.6], [PROB-caso5-4.10], [EXFIN-caso6-4.b], [EXFIN-caso7-prob4.b], [EXFIN-caso11-prob4.b], [EXFIN-caso13-prob4.b]
- ***Discusión de sistemas dependientes de parámetros*** [EXFIN-caso1-prob4.a], [EXFIN-caso2-prob4.a], [PROB-caso3-4.4], [EXFIN-caso3-prob4.a], [EXFIN-caso3-cues5], [EXFIN-caso4-cues5], [EXFIN-caso5-prob4a], [PROB-caso5-4.2], [PROB-caso5-4.3], [CUES-caso7-4.1], [EXFIN-caso7-cues5], [EXFIN-caso7-prob4.a], [EXFIN-caso10-prob4a], [CUES-caso12-4.4], [PROB-caso12-4.2], [PROB-caso12-4.3], [PROB-caso12-4.5.b], [EXFIN-caso12-prob4.a], [EXFIN-caso13-prob4.a]
- ***Discusión de sistema de sistemas con coeficientes constantes*** [EXFIN-caso3-cues5], [EXFIN-caso6-cues5], [EXFIN-caso7-cues5], [EXFIN-caso9-cues5], [EXFIN-caso10-cues5], [EXFIN-caso11-cues5], [CUES-caso12-4.1], [CUES-caso12-4.3], [EXFIN-caso13-cues5]

- ***Propiedades de las soluciones de los sistemas lineales*** [CUES-caso7-4.2]

TEMA 5

- ***Cálculo de autovalores*** [EXFIN-caso1-prob3.b], [EXFIN-caso2-prob3.b], [EXFIN-caso4-prob3.b], [EXFIN-caso4-prob3.a], [EXFIN-caso5-prob3.a], [EXFIN-caso5-prob3.b], [PROB-caso7-5.3], [PROB-caso7-5.4], [PROB-caso7-5.6], [EXFIN-caso7-prob3.a], [EXFIN-caso7-prob3.b], [PROB-caso8-5.4], [PROB-caso8-5.3], [PROB-caso8-5.6] , [EXFIN-caso9-cues6], [EXFIN-caso9-cues7], [EXFIN-caso10-prob3-b], [EXFIN-caso12-prob3a], [EXFIN-caso12-prob3.b] [EXFIN-caso13-prob3.a.1], [EXFIN-caso14-prob3.a.1], [EXFIN-caso14-prob3.c]
- ***Cálculo de autovectores*** [EXFIN-caso1-prob3.b], [EXFIN-caso2-prob3.b], [PROB-caso7-5.3], [PROB-caso7-5.4], [PROB-caso7-5.6], [EXFIN-caso7-prob3.a], [EXFIN-caso7-prob3.b], [PROB-caso8-5.4], [PROB-caso8-5.3], [PROB-caso8-5.6] , [EXFIN-caso9-cues6], [EXFIN-caso9-cues7], [EXFIN-caso10-prob3.b], [EXFIN-caso14-prob3.a], [EXFIN-caso14-prob3.c]
- ***Diagonalizar una matriz constante*** [EXFIN-caso1-prob3.b], [EXFIN-caso2-prob3.b], [EXFIN-caso3-prob3.b], [EXFIN-caso5-prob3.b], [EXFIN-caso6-prob3.b], [PROB-caso7-5.6], [CUES-caso7-5.1], [EXFIN-caso7-prob3-b], [EXFIN-caso8-prob3.b], [EXFIN-caso9-prob3.c], [EXFIN-caso10-prob3.b], [EXFIN-caso11-prob3.b], [CUES-caso12-5.2], [PROB-caso12-5.4], [PROB-caso12-5.5], [EXFIN-caso12-prob3.b], [CUES-caso13-5.a.b], [CUES-caso13-5.1.b], [EXFIN-caso13-prob3.b], [CUES-caso13-5.5], [CUES-caso13-5.2], [PROB-caso13-5.3], [CUES-caso14-5.4], [EXFIN-caso15-prob3.b]
- ***Estudio de la diagonalización de una matriz para distintos valores de un parámetro*** [EXFIN-caso11-prob3.a], [PROB-caso12-5.6], [PROB-caso12-5.10], [EXFIN-caso12-prob3.a],
- ***Propiedades de autovalores y autovectores*** [PROB-caso7-5.2],.

TEMA 6

- ***Obtención de la matriz asociada a una forma cuadrática*** [EXFIN-caso1-prob3.c], [EXFIN-caso2-prob3.c], [EXFIN-caso3-prob3.c], [EXFIN-caso4-prob3-c], [EXFIN-caso5-prob3.c], [PROB-caso7-6.1], [PROB-caso7-6.2], [PROB-caso7-6.5], [EXFIN-caso7-prob3.c], [EXFIN-caso7-cues8], [PROB-caso8-6.1], [PROB-caso8-6.2], [PROB-caso8-6.5], [EXFIN-caso9-prob3.c], [EXFIN-caso10-prob3.c], [EXFIN-caso11-prob3.c], [EXFIN-caso12-prob3.c], [PROB-caso13-6.1.a], [PROB-caso13-6.2.a], [PROB-caso13-6.3.a], [PROB-caso13-6.4.a].

- ***Clasificación de formas cuadráticas*** [EXFIN-caso1-prob3.d], [EXFIN-caso2-prob3.d], [EXFIN-caso5-cues8], [EXFIN-caso5-prob3.d], [CUES-caso7-6.2], [PROB-caso7-6.1], [PROB-caso7-6.7], [EXFIN-caso7-prob3.d], [PROB-caso8-6.1], [PROB-caso8-6.7], [EXFIN-caso8-prob3.d], [CUES-caso12-6.1], [CUES-caso12-6.2], [EXFIN-caso13-prob3.c] para valores constantes [PROB-caso13-6.1.b], [PROB-caso13-6.2.b], [PROB-caso13-6.6], [PROB-caso14-6.1.b], [PROB-caso14-6.2.b], [PROB-caso14-6.6]
- ***Obtención de la forma cuadrática a partir de la forma matricial*** [EXFIN-caso12-prob3.c], [EXFIN-caso15-prob3.c]
- ***Clasificación formas cuadráticas dependientes de parámetros*** [EXFIN-caso1-prob3.d], [EXFIN-caso2-prob3.d], [EXFIN-caso3-prob3.d], [EXFIN-caso5-prob3.d], [EXFIN-caso7-prob3.d], [EXFIN-caso8-prob3.d], [EXFIN-caso13-prob3.d].

TEMA 7

- ***Conjuntos convexos*** [EXFIN-caso2-cues9], [EXFIN-caso5-cues9], [EXFIN-caso7-cues9] , [EXFIN-caso9-cues9], [EXFIN-caso10-cues9], [EXFIN-caso11-cues9], [EXFIN-caso12-cues9], [EXFIN-caso14-cues9]
- ***Resolución gráfica de problemas de programación lineal*** [EXFIN-caso5-cues10], [EXFIN-caso10-cues10], [EXFIN-caso11-cues10], [EXFIN-caso12-cues10], [EXFIN-caso14-cues10], [EXFIN-caso15-cues10]

Atributo 4.2.2. ¿Qué contenidos no ha conseguido dominar?

TEMA 1

- ***Concepto de ESPACIO VECTORIAL para conjuntos que no son R^n*** como el de los polinomios [PROB-caso1-1.2], [PROB-caso2-1.2], [PROB-caso3-1.2], [PROB-caso5-1.2], [PROB-caso7-1.2], [PROB-caso9-1.2], [PROB-caso10-1.2], [PROB-caso11-1.2], [PROB-caso12-1.2], [PROB-caso13-12]
- ***Dependencia e independencia lineal de vectores*** [CUES-caso6-1.4.c] [CUES-caso8-1.2], [CUES-caso8-1.4.a], [CUES-caso8-4.c], [EXFIN-caso8-prob1.a], [CUES-caso13-1.2], [CUES-caso13-1.4.c], [CUES-caso13-1.4.c], [CUES-caso13-1.4.d], [CUES-caso13-1.1], [EXFIN-caso13-cues2]
- ***Cálculo de la suma de subespacios*** [EXFIN-caso1-prob1.e], [EXFIN-caso2-prob1.e], [EXFIN-caso3-prob1.e], [PROB-caso3-1.5], [PROB-caso3-1.9]. [PROB-caso4-1.5], [PROB-caso4-1.9], [EXFIN-caso4-prob1.e], [PROB-caso5-1.5], [EXFIN-caso5-prob1.e], [EXFIN-caso7-prob1.e], [PROB-caso7-1.5] , [PROB-caso8-1.9], [EXFIN-caso8-prob1.e], [PROB-caso9-1.6], [PROB-caso9-1.9], [EXFIN-caso9-prob1.e], [PROB-caso11-1.5], [EXFIN-caso11-prob1.e], [PROB-caso13-1.9.a], [PROB-caso13-1.9.a], [PROB-caso13-1.5.b], [EXFIN-caso13-prob1.e], [EXFIN-caso14-prob1.e] [EXFIN-caso15-prob1.e]
- ***Suma directa de subespacios*** [EXFIN-caso1-prob1.f][PROB-caso2-1], [EXFIN-caso2-prob1.f], [EXFIN-caso3-prob1.f], [EXFIN-caso5-prob1.f], [PROB-caso8-1.5], [EXFIN-caso8-prob1.f], [EXFIN-caso9-prob1.f], [EXFIN-caso11-prob1.f], [PROB-caso13-1.5.c], [EXFIN-caso14-prob1.f], [EXFIN-caso15-prob1.f]
- ***Cálculo del subespacio intersección*** [EXFIN-caso1-prob1.d][EXFIN-caso4-prob1.d], [EXFIN-caso5-prob1.d], [EXFIN-caso14-prob1.d], [EXFIN-caso15-prob1.d]
- ***Relacionar número de ecuaciones no redundantes que definen un subespacio con su dimensión*** [EXFIN-caso1-prob1.a], [EXFIN-caso6-cues1], [CUES-caso13-1.1.b], [EXFIN-caso13-cues1.a], [EXFIN-caso14-prob1.a],
- ***Caracterización de subespacios vectoriales definidos por ecuaciones cartesianas*** [PROB-caso3-1.4]
- ***Distinción entre ecuaciones paramétricas y ecuaciones cartesianas*** [PROB-caso4-1.4], [EXFIN-caso4-prob1.c], [EXFIN-caso14-prob1.c], [EXFIN-caso15-prob1.c]
- ***Obtención de una base de un subespacio a partir de un sistema de generadores*** [EXFIN-caso1-prob1.a], [EXFIN-caso4-prob1.a], [EXFIN-caso5-prob1.a], [EXFIN-caso8-prob1.a], [EXFIN-caso14-prob1.a], [EXFIN-caso15-prob1.a]
- ***Obtención de las ecuaciones paramétricas de un subespacio a partir de una base del mismo*** [EXFIN-caso1-prob1.b], [EXFIN-caso4-prob1.b], [EXFIN-caso5-prob1.b],[PROB-caso8-1.4], [EXFIN-caso14-prob1.b], [EXFIN-caso15-prob1.b]

- ***Obtención de subespacios ortogonales*** [PROB-caso1-1.3], [PROB-caso2-1.3] [PROB-caso5-1.3], [PROB-caso7-1.3], [PROB-caso9-1.3], [PROB-caso10-1.3], [PROB-caso11-1.3], [PROB-caso12-1.3], [PROB-caso13-1.3]

TEMA 2

- ***Concepto de aplicación lineal*** [EXFIN-caso2-cues3], [EXFIN-caso15-cues3]
- ***Matriz asociada a una aplicación lineal respecto de bases cualesquiera*** [PROB-caso4-2.6], [PROB-caso4-2.8], [EXFIN-caso4-prob2.a], [EXFIN-caso4-prob2.a], [PROB-caso8-2.5], [PROB-caso8-2.8], [EXFIN-caso8-prob2.a], [EXFIN-caso9-prob2.a], [PROB-caso9-2.5], [PROB-caso14-2.13.A], [EXFIN-caso14-prob2.a]
- ***Matriz asociada a una aplicación lineal respecto bases canónicas*** [PROB-caso14-2.13], [PROB-caso14-2.7], [PROB-caso4-2.7], [EXFIN-caso14-prob2.c]
- ***Obtención de la aplicación lineal a partir de su matriz asociada*** [PROB-caso6-2.5],
- ***Obtención de núcleo e imagen de una aplicación lineal así como el cálculo de sus dimensiones usando la fórmula de las dimensiones*** [EXFIN-caso1-prob2.f], [PROB-caso4-2.7], [PROB-caso4-3.9], [EXFIN-caso4-prob2.f], [EXFIN-caso5-prob2.f], [EXFIN-caso8-prob2.f], [EXFIN-caso11-prob2.f], [EXFIN-caso13-prob2.f], [CUES-caso14-2.1], [PROB-caso14-2.7], [EXFIN-caso14-prob2.f], [EXFIN-caso15-prob2.f], [PROB-caso15-3.9]
- ***Proceso de obtención de la inversa por Gauss-Jordan*** [PROB-caso4-2.6], [PROB-caso4-3.7], [EXFIN-caso4-prob2.e], [EXFIN-caso5-prob2.e], [PROB-caso5-2.9], [EXFIN-caso7-prob2.e], [EXFIN-caso8-prob2.b], [EXFIN-caso10-prob2.e], [EXFIN-caso13-prob2.e], [PROB-caso13-2.9.b], [PROB-caso14-2.5.b], [EXFIN-caso14-prob2.e], [EXFIN-caso15-prob2.e]
- ***Relacionar la inversa de una matriz con la aplicación lineal inversa*** [PROB-caso9-2.6], [PROB-caso13-1.13.b], [PROB-caso13-2.11]

TEMA 3

- ***Aplicar las propiedades de los determinantes*** [PROB-caso5-3.8], [PROB-caso5-3.1], [EXFIN-caso5-cues5] , [PROB-caso8-3.5], [PROB-caso8-3.8], [EXFIN-caso8-cues4], [PROB-caso12-3.8] (determinante de Vandermonde) , [PROB-caso15-3.8], [PROB-caso15-5.3], [EXFIN-caso15-cues4]
- ***Condición de invertibilidad*** [EXFIN-caso7-prob2.b], [EXFIN-caso7-prob2.d], [PROB-caso8-2.13], [PROB-caso8-3.7], [EXFIN-caso8-prob2.b]
- ***Estudio del rango de una matriz en función de parámetros*** [PROB-caso9-3.5], [PROB-caso13-3.5], [PROB-caso15-3.5], [PROB-caso10-3.5], [PROB-caso12-3.5], [PROB-caso12-3.10], [PROB-caso14-3.5]

TEMA 4

- ***Discusión de sistemas de ecuaciones lineales con parámetros*** [EXFIN-caso6-prob6a], [PROB-caso8-4.3], [PROB-caso8-4.5], [PROB-caso8-4.4], [EXFIN-caso8-cues5], [EXFIN-caso8-prob4.a], [PROB-caso9-4.3], [PROB-caso9-4.4], [PROB-caso9-4.5], [EXFIN-caso9-prob3.d], [EXFIN-caso11-prob4.a], [PROB-caso12-4.9], [EXFIN-caso14-prob4.a], [PROB-caso15-4.5], [PROB-caso15-4.9], [EXFIN-caso15-prob4.a]
- ***Discusión de sistemas*** [EXFIN-caso1-cues5], [EXFIN-caso2-cues5], [EXFIN-caso5-cues5], [EXFIN-caso8-cues5], [CUES-caso14-4.3], [CUES-caso14-4.1], [EXFIN-caso14-cues5]

- ***Formulación de sistemas para la resolución de probl***emas [EXFIN-caso1-prob4.b], [PROB-caso8-4.6], [PROB-caso8-4.8], [PROB-caso8-4.10], [EXFIN-caso8-prob4.b]

TEMA 5

- ***Proceso de diagonalización de una matriz*** [PROB-caso3-5.4], [PROB-caso3-5.5], [EXFIN-caso3-prob3.b], [PROB-caso3-2.1], [PROB-caso3-5.7], [PROB-caso3-5.8], [EXFIN-caso4-prob3.b], [EXFIN-caso4-cues6].
- ***Estudio de la diagonalización de matrices en función de parámetros*** [EXFIN-caso1-prob3], [PROB-caso1-prob5], [EXFIN-caso2-prob3.a], [EXFIN-caso4-prob3.a], [EXFIN-caso6-prob3a], [EXFIN-caso7-prob3.a], [EXFIN-caso8-prob3.a], [EXFIN-caso9-prob3.a], [EXFIN-caso10-prob3.a], [EXFIN-caso13-prob3.a], [EXFIN-caso14-prob3.a] , [EXFIN-caso15-prob3.a]
- ***Modelos en los que interviene la potencia k-ésima de una matriz*** [PROB-caso2-5], [PROB-caso8-5.7], [PROB-caso8-5.8], [PROB-caso8-5.9]
- ***Propiedades de autovalores*** [CUES-caso12-5.3], [CUES-caso12-cues6], [EXFIN-caso13-cues7] ,[EXFIN-caso14-cues7]
- ***Propiedades de autovectores*** [EXFIN-caso13-cues6], [CUES-caso14-5.1.b], [EXFIN-caso14-cues6.a]

TEMA 6

- ***Obtención de la matriz asociada a una forma cuadrática*** [EXFIN-caso6-prob3.c], [EXFIN-caso14-prob3.c], [EXFIN-caso15-prob3.c].
- ***Forma cuadrática asociada a una matriz simétrica*** [EXFIN-caso6-prob3d], [EXFIN-caso8-prob3-d]
- ***Clasifica bien formas cuadráticas pero partiendo de matrices no simétricas*** [EXFIN-caso6-prob3d], [PROB-caso6-6.1], [PROB-caso6-6.2], [PROB-caso6-6.3], [PROB-caso6-6.4], [PROB-caso6-6.5], [PROB-caso6-6.6], [PROB-caso6-6.7], [PROB-caso6-6.8]
- ***No sabe clasificar correctamente formas cuadráticas dependientes de parámetros*** [EXFIN-caso4-prob3.d], [EXFIN-caso6-prob3.d], [EXFIN-caso9-prob3.d], [EXFIN-caso10-prob3.d], [EXFIN-caso11-prob3.d], [PROB-caso13-6.1.c], [PROB-caso13-6.2.c], [PROB-caso13-6.4], [PROB-caso13-6.8], [PROB-caso14-6.1.c], [PROB-caso14-6.2.c], [PROB-caso14-6.3.c], [PROB-caso14-6.4], [PROB-caso14-6.8], [EXFIN-caso14-cues8], [EXFIN-caso14-prob3.d], [EXFIN-caso15-prob3.d].

TEMA 7

- ***Identificar un conjunto convexo por definición*** [EXFIN-caso6-cues9]
- ***Aplicar el Teorema de Weierstrass*** [EXFIN-caso6-cues10], [EXFIN-caso10-cues10], [EXFIN-caso15-cues10.b]
- ***Resolución gráfica de programas lineales*** [EXFIN-caso7-cues10]

Atributo 4.2.3. ¿Ha sido fundamental el uso de DERIVE para contestar las cuestiones teóricas?

- No ha necesitado DERIVE para contestar las cuestiones teóricas que contenían relaciones teóricas entre contenidos esenciales [CUES-caso1], [EXFIN-caso2-cues], [EXFIN-caso1-cues], [EXFIN-caso2-cues], [ENTINT-caso6-3.5], solo para realizar algunas comprobaciones [ENINT-caso8-5.3],

[ENTINT-caso8-1.2], [EXFIN-caso11-cues3.c][, [EXFIN-caso11-cues4], [EXFIN-caso11-cues1.c], [ENTINT-caso12-1.2], [ENTFIN-caso12-3.4], [EXFIN-caso12-cues1.b], [EXFIN-caso12-cues6.b], [ENTFIN-caso12-3.4], [ENTFIN-caso13-3.4]
- Había dificultades para los planteamientos de las cuestiones teóricas sin derive [ENTFIN-caso3-3.6-b], si en los que tenían autovalores que no sabía hacerlos a mano [ENTINT-caso13-3.5],
- Ha tenido que hacer cálculos varios [EXFIN-caso15-cues1.d], [EXFIN-caso15-cues2.d], [EXFIN-caso15-cues6.d], [EXFIN-caso15-cues9.d]

Atributo 4.2.4. ¿Qué tipo de errores y dificultades conceptuales se han tenido en los problemas, cuestiones y examen final?

- Problemas en la visualización de conceptos por ordenador [ENTINI-caso5-9], [ENTINI-caso5-19]
- A veces se realizaban los procesos de forma muy mecánica [ENTINI-caso5-21]
- El curso ha sido poco teórico todo lo que se hacía era resolver ejercicios con derive la teoría quedaba un poco floja [ENTINT-caso6-g.7], [ENTINT-caso6-3.5] se ponía poca énfasis en la teoría [ENTFIN-caso9-1.7]
- Se pierde cierta habilidad de cálculo [ENTINT-caso12-1.1.b]

PARTE 5:

ATRIBUTOS Y ASPECTOS CARACTERÍSTICOS DE LA CUESTIÓN 5:

Atributo 5.1. ¿Cómo ha sido la resolución de problemas con derive? ¿Tenía alguna característica especial en comparación con la forma de resolver los mismos problemas a lápiz y papel?

- La rapidez de los cálculos [ENTINT-caso2-2.6] FACILITA LA RESOLUCION DE PROBLEMAS [ENTINT-caso2-g.2], [ENTINT-caso2-5.3], [ENTINT-caso4-5.4], [ENTINT-caso5-5.2], [ENTINT-caso6-5.1], [ENTFIN-caso7-5.2], [ENTFIN-caso13-5.2], [ENTINT-caso14-5.1] evitando que se PIERDA MUCHO TIEMPO EN LOS CÁLCULOS [ENTINT-caso2-9.4], [ENTINT-caso4-5.2], [ENTINT-caso5-5.6]
- El ahorro de cálculo permite que el alumno se enfrente a los problemas de forma diferentes [ENTINT-caso1-5.5]
- Con DERIVE la mayor parte del tiempo se dedica al planteamiento del problema mientras que con lápiz y papel el tiempo se centra en la operativa dedicando menos tiempo a pensar [ENTFIN-caso3-5.3], [ENTFIN-caso3-5.3.b], [ENTINT-caso9-5.3], [ENTFIN-caso10-5.3], [ENTFIN-caso11-5.3]
- Con DERIVE se dedica más tiempo al planteamiento [ENTFIN-caso7-5.3], [ENTFIN-caso8-5.3] , [ENTINT-caso8-5.2]
- Con lápiz y papel siempre se tienen que revisar los resultados [ENTFIN-caso11-5.3]
- Con DERIVE se dedica el mismo tiempo al planteamiento que con lápiz y papel pero menos a la resolución [ENTFIN-caso12-5.3], [ENTINT-caso12-5.2], [ENTFIN-caso13-5.3]

Atributo 5.2. Con el uso de DERIVE ¿se libera al alumno de cálculos rutinarios permitiendo que el alumno se oriente más hacia la experimentación y la investigación?

- El programa DERIVE ha permitido que el alumno realice TODOS LOS CÁLCULOS MÁS RÁPIDOS, evitando las operaciones rutinarias [ENTINT-caso2-5.2], [ENTFIN-caso9-1.7]
- El programa permite que el alumno ahorre mucho esfuerzo y pueda invertir más tiempo en el planteamiento o en la experimentación y búsqueda de caminos alternativos [ENTINT-caso1-4.7], [ENTINT-caso1-9.2], [ENTFIN-caso6-5.3], [ENTFIN-caso8-5.3], [ENTINT-caso8-5.6], [ENTINT-caso8-g.2], [ENTINT-caso8-g.2], [ENTINT-caso10-5.6], [ENTFIN-caso12-5.6]., [ENTINI-caso13-12], [ENTINT-caso13-5.6]
- Derive es una herramienta que permite liberar al alumno del esfuerzo rutinario y de la operativa permitiéndole que centre su esfuerzo en los contenidos importantes [ENTINI-caso3-24], [ENTFIN-caso3-1.2], [ENTFIN-caso3-1.7.a], [ENTFIN-caso3-1.7.c], en la experimentación [ENTINI-caso10-20], [ENTINI-caso11-16], [ENTFIN-caso11-5.2], [ENTINI-caso13-12]
- Derive es rápido en sus cálculos y permite estar más atento a la clase [ENTFIN-caso7-1.7]
- Derive es más rápido que lápiz y papel, evitando repasar las operaciones que se realizan [ENTFIN-caso12-1.7]

Atributo 5.3. ¿El uso de DERIVE anula las habilidades básicas de cálculo de los alumnos? Si es así ¿son fundamentales las habilidades que se pierden?

- El ahorro de tiempo que provoca el uso de derive no ha impedido que el alumno maneje de forma manual las principales operaciones como son cálculo de determinantes, resolución de sistemas, cálculo de rangos y cálculo de autovalores [ENTINT-caso3-5.4], [ENTINT-caso3-5.5], [ENTINT-caso4-5.3], [ENTINT-caso4-5.4], [ENTINT-caso5-5.4], [ENTFIN-caso5-4.3], [ENTINT-caso5-5.5], [ENTFIN-caso5-4.4] , [ENTFIN-caso8-5.1], [ENFIN-caso10-4.9], [ENTFIN-caso10-4.10], [ENTFIN-caso10-4.10], [ENTFIN-caso10-4.12], [ENTFIN-caso11-4.8.b], [ENTINT-caso12-5.4], [ENTINT-caso12-5.5], [ENTFIN-caso12-4.9],
- Sabe resolver determinantes a mano y resolver sistemas [ENTINT-caso14-5.4], [ENTINT-caso14-5.5]
- Derive resta destreza en la realización de procesos de forma manual [ENFIN-caso7-5.3], [ENTFIN-caso7-3.6]; [ENTFIN-caso8-g.2], [ENTFIN-caso9-5.3.b], [ENTINT-caso12-5.3]
- No ha sabido calcular autovalores ni rangos a manos [ENTFIN-caso13-4.5], [ENTFIN-caso13-4.6], [ENTINI-caso13-3.5.b]
- No tiene seguridad en sus propios cálculos [ENTINT-caso10-5.2]

Atributo 5.4.¿Son capaces los alumnos de resolver los mismos problemas sin derive?

- En los problemas de sistemas lineales dependientes de parámetros es mejor lápiz y papel [ENTINT-caso2-5.2]
- Hubiera sido complicado resolver problemas fin de capítulo con lápiz y papel [ENTFIN-caso5-5.3], por la complejidad de algunos cálculos [ENTFIN-caso8-5.2], [ENTFIN-caso10-5.2]
- Sí hubiera sido capaz de resolver los problemas con lápiz y papel [ENTFIN-caso12-5.2]

Atributo 5.5. ¿Era fundamental el uso de DERIVE para resolver cuestiones teóricas?

- Para resolver las cuestiones teóricas ha usado derive tan solo para realizar algunos cálculos no esenciales, o rutinarios [EXFIN-caso4-cues], [EXFIN-caso5-cues], [EXFIN-caso9-cues], [ENTINT-caso6-5.3], [EXFIN-caso10-cues1-d], [CUES-caso10-cues2], [EXFIN-caso10-cues6.d] en general no es fundamental el uso de derive [ENTFIN-caso4-5.2], [ENTFIN-caso9-5.2],[ENTFIN-caso10-5.2], [ENTINT-caso10-1.2]
- Ha tenido dificultades para resolver algunas cuestiones sin derive [ENTINT-caso5-5.3].
- Ha utilizado derive para comprobar resultados y tantear posibles soluciones [ENTFIN-caso13-3.4]
- Ha utilizado derive para realizar cálculos rutinarios [EXFIN-caso14-cues2-d], [EXFIN-caso14-cues7.d], aunque no sabe si sabría realizarlos sin derive [ENTINT-caso14-5.3]

Atributo 5.6. ¿Qué valoración tienen los alumnos sobre este uso de DERIVE que permite eliminar el esfuerzo rutinario?

- Es en el cálculo rutinario donde en ocasiones el alumno se atasca con el que se facilita la resolución [ENTINT-caso1-5.5], [ENTINT-caso1-4.7], [ENTFIN-caso1-3.5]
- La resolución resulta más lenta con lápiz y papel que con derive, pero no solo por la operativa [ENTFIN-caso3-5.3], [ENTFIN-caso3-9.4] sino porque con lápiz y papel a veces el alumno invierte mucho tiempo en revisar las operaciones [ENTINT-caso3-9.1]
- Los cálculos rutinarios son la parte menos divertida de las Matemáticas lo que ha provocado mayor motivación [ENTINI-caso3-26]
- Con DERIVE se invierte mucho menos tiempo en la operativa [ENTFIN-caso4-5.3] , [ENTFIN-caso11-5.2]
- Se automatizaba mucho el uso del programa [ENTINT-caso5-g.3] provocando que a veces se perdiera el sentido de los mismos [ENTINT-caso5-5.1].

PARTE 6:

<u>ATRIBUTOS Y ASPECTOS CARACTERÍSTICOS DE LA CUESTIÓN 6:</u>

Atributo 6.1. En los ejemplos a investigar ¿derive ha proporcionado al alumno una herramienta para investigar, experimentar e intentar que obtuviera resultados por su cuenta? GRADO DE EXPERIMENTACIÓN:

- Al usar DERIVE se evitan los cálculos rutinarios y así el alumno tiene más tiempo para reflexionar sobre la estrategia, lo cual le ofrece la posibilidad de experimentar varios caminos de resolución [ENTINT-caso1-6.5], [ENTFIN-caso1-1.7], [ENTFIN-caso11-g.3.1]
- Derive proporciona recursos para encontrar caminos alternativos [ENTFIN-caso9-3.1]
- El uso de DERIVE le ha proporcionado la posibilidad de intentar investigar por su cuenta [ENTFIN-caso2-6.1], [ENTFIN-caso4-6.1], [ENTFIN-caso9-6.1], [ENTFIN-caso10-6.1] encontrando las soluciones en ocasiones [ENTINT-caso8-3.5], [ENTFIN-caso8-6.1], [ENTINT-caso10-6.2], [ENTFIN-caso12-6.2]
- Ha habido actitud de búsqueda de las investigaciones que se planteaban [ENTINT-caso5-6.1], [ENTINT-caso6-6.1], [ENTFIN-caso6-5.3], [ENTFIN-caso7-6.1], [ENTFIN-caso11-6.1] , [ENTFIN-caso12-6.1], [ENTFIN-caso13-6.1], [ENTINT-caso13-6.1], [ENTINT-caso15-6.1]
- Derive ha ayudado a descubrir de forma activa el concepto a diferencia de lo que ocurre en la clase tradicional [ENTINT-caso3-6.4]

Atributo 6.2. En los problemas ¿derive ha sido una herramienta que permitía la experimentación? GRADO DE EXPERIMENTACIÓN

- Al usar DERIVE se evitan los cálculos rutinarios y así el alumno tiene más tiempo para reflexionar sobre la estrategia, lo cual le ofrece la *posibilidad de experimentar varios caminos de resolución* [ENTINT-caso1-6.5], [ENTFIN-caso1-1.7], [ENTFIN-caso8-5.6], [ENTFIN-caso12-3.5]
- Derive ha ayudado en la resolución de problemas porque ha evitado muchos cálculos [ENTINT-caso2-g.2] *permitiendo que el alumno buscase las soluciones comprobando en unos casos* [ENTINT-caso2-7.3] *y facilitando la búsqueda de soluciones por medio de otras estrategias* [ENTINT-caso2-7.3], [ENTFIN-caso2-6.3], [ENINT-caso5-6.3], [ENTFIN-caso5-6.3], [ENTFIN-caso6-5.3], [ENTFIN-caso8-6.3], [ENTFIN-caso9-6.3], [ENTFIN-caso11-5.2], [ENTFIN-caso11-6.3], [ENTFIN-caso12-6.3], [ENTFIN-caso13-6.3]
- Derive ha ayudado a pensar sobre el concepto o problema que se quería aplicar en la experimentación [ENTINT-caso3-1.4]
- Derive ha ayudado a intentar experimentar para resolver los problemas e intentar encontrar la solución [ENTINT-caso4-6.3], [ENTFIN-caso6-6.3], [ENTINT-caso8-6.3], [ENTINT-caso13-6.3] aunque algunas veces no ha sabido resolverlos [ENTINT-caso6-6.3].
- El alumno ha tenido que utilizar la experimentación en 3 de cada 10 problemas [ENTINT-caso10-6.3]
- Derive ha facilitado el razonamiento inductivo [PROB-caso3-2.11], [PROB-caso3-2.12] , [PROB-caso9-3.4], [PROB-caso10-3.4], [PROB-caso10-3.6], [PROB-caso12-3.4], [PROB-caso12-3.6], [PROB-caso13-2.12],
- El alumno ha utilizado muy bien la experimentación en el cálculo de potencias n-ésimas de matrices [PROB-caso9-2.1], en resolver ecuaciones matriciales [PROB-caso9-2.12] , [PROB-caso10-2.12], [PROB-caso10-2.11], [PROB-caso12-2.11],
- El alumno ha tenido dificultades en problemas en los que había que desarrollar proceso inductivo [PROB-caso5-2.11], [PROB-caso5-3.6], [PROB-caso6-3.2], [PROB-caso6-3.6], [PROB-caso14-2.11], [PROB-caso14-3.2], [PROB-caso5-3.2]
- En los problemas en los que se exigía cierta experimentación el alumno ha tenido dificultades [PROB-caso4-2.4], [PROB-caso4-2.12], [PROB-caso4-3.3], [PROB-caso4-3.4], [PROB-caso4-3.6], [PROB-caso4-3.12], [PROB-caso7-3.2], [PROB-caso7-3.3], [PROB-caso7-3.4], [PROB-caso7-3.6], [PROB-caso13-2.4], [PROB-caso14-2.4]
- El alumno ha tenido dificultades en problemas de experimentación matricial [PROB-caso5-2.4], [PROB-caso5-3.4], [PROB-caso6-2.4], [PROB-caso6-2.10]; [PROB-caso8-2.10], [PROB-caso8-2.12], [PROB-caso15-2.4] de determinantes [PROB-caso6-3.3], [PROB-caso6-3.4], [PROB-caso8-3.1], [PROB-caso8-3.2], [PROB-caso8-3.13], [PROB-caso9-3.1], , [PROB-caso9-3.2], [PROB-caso9-3.3], [PROB-caso9-3.12], [PROB-caso10-3.1], [PROB-caso10-3.2], [PROB-caso10-3.3], [PROB-caso10-3.12], [PROB-caso13-3.1], [PROB-caso14-3.3], [PROB-caso14-3.1], [PROB-caso15-3.1], [PROB-caso15-3.2], [PROB-caso15-3.3]
- Derive hace más AMENA la resolución de problemas, permitiendo que el alumno dedique más tiempo al planteamiento y a la revisión que a los cálculos [ENTFIN-caso6-5.3]

Atributo 6.3 En el proceso de aprendizaje del programa y de los contenidos de álgebra lineal, ¿se ha aumentado el grado de EXPERIMENTACIÓN en matemáticas? (EVOLUCIÓN DE LA EXPERIMENTACIÓN)

- El alumno tenía una tendencia natural hacia la experimentación en matemáticas [ENTINT-caso2-6.1], [ENTINI-caso10-7]

- A juicio del alumno su experimentación ha ido aumentando a medida que aumentaba el manejo del programa [ENTFIN-caso2-6.2], [ENTFIN-caso5-6.2], [ENTFIN-caso8-6.2], [ENFIN-caso9-6.2], [ENTINT-caso10-6.2], [ENTFIN-caso11-6.2], [ENTFIN-caso12-6.2], [ENTFIN-caso13-6.2]
- La experimentación ha ido avanzando a medida que conocía mejor el programa y tenía más conocimientos [ENTFIN-caso11-6.2]
- No ha habido una evolución notable en cuanto al nivel de investigación adquirido por el uso de DERIVE [ENTFIN-caso3-6.2] , [ENTFIN-caso7-6.2]

Atributo 6.4. El tipo de EXPERIMENTACIÓN que se ha sugerido ¿ha ayudado a entender mejor los contenidos? (COMPRENSIÓN DE CONCEPTOS A TRAVÉS DE LA EXPERIMENTACIÓN)

- La experimentación que se ha realizado ha facilitado la comprensión de conceptos pues los manipula de forma directa [ENTINT-caso1-6.1], [ENTFIN-caso1-6.4]
- Con el método experimental ha conseguido estudiar mejor la asignatura [ENTINI-caso11-19]
- Derive ha ayudado en la comprensión de contenidos porque con la experimentación quedaban las ideas [ENTINT-caso2-6.4] y comprendía mejor contenidos [ENTFIN-caso2-6.4], [ENTFIN-caso13-6.4]
- Derive ha ayudado a comprender mejor los contenidos con la experimentación [ENTINT-caso5-6.4] porque sino hubiera sido un estudio más memorístico [ENTFIN-caso5-6.4]
- La experimentación ha permitido que los alumnos fuesen descubriendo los contenidos a partir de unos contenidos previos [ENTINI-caso3-29b], [ENTFIN-caso3-1.b], [ENTINI-caso13-23] en un proceso de construcción del conocimiento [ENTINT-caso3-14], resultando además un proceso gratificante y positiva para la comprensión de contenidos.
- La experimentación le ha permitido hacer menos abstractos los conceptos que manipulaba [ENTINT-caso3-6.5], entendiendo de manera más clara la utilidad [ENTFIN-caso3-7.1]

- La experimentación le ha ayudado a entender mejor los contenidos [ENTFIN-caso4-6.4], [ENTFIN-caso6-6.4], [ENTFIN-caso7-6.4], [ENTINT-caso8-6.4], [ENTFIN-caso8-6.4], [ENTFIN-caso10-6.4], [ENTINT-caso10-6.4], [ENTFIN-caso12-6.4]
- Derive ayuda a entender mejor los contenidos porque permite centrarse más en la teoría que en el cálculo [ENTINT-caso12-6.4]
- La experimentación NO cree que le haya ayudado a entender mejor los contenidos [ENTFIN-caso9-6.4]

Atributo 6.5. Actitud del alumno ante la experimentación.

- El alumno siempre ha tenido interés por experimentar y comprobar las ideas que se iban lanzando [ENTINI-caso5-28], [ENTFIN-caso5-6.1], [ENTINT-caso8-6.1]
- La experimentación ha suscitado en el alumno un interés especial ya que le ha permitido ver las matemáticas de otra forma no un conjunto de reglas, y ha llegado a cosas bonitas [ENTINT-caso8-14.3]
- La experimentación ha sido uno de los elementos más positivos del curso [ENTFIN-caso8-g.1]
- La experimentación MOTIVA al alumno en la búsqueda de resultados aunque en algunas ocasiones no se llegue a la solución, estimula mucho más a la búsqueda que el lápiz y papel [ENTINT-caso1-5.2], [ENTFIN-caso6-3], [ENTFIN-caso1-6.1]
- La experimentación hace que el álgebra lineal sea más experimental y menos teórica [ENTINT-caso12-6.5]
- Actitud de búsqueda hacia la experimentación [ENTFIN-caso13-6.1], [ENTFIN-caso1-6.1], [ENTINT-caso5-6.1], [ENTINT-caso6-6.1], [ENTFIN-caso6-5.3], [ENTFIN-

caso7-6.1], [ENTFIN-caso11-6.1] , [ENTFIN-caso12-6.1], [ENTFIN-caso13-6.1], [ENTINT-caso13-6.1], [ENTINT-caso15-6.1]
- Actitud negativa ante la experimentación prefiere métodos expositivos [ENTINI-caso14-31]

PARTE 7:

ATRIBUTOS Y ASPECTOS CARACTERÍSTICOS DE LA CUESTIÓN 7:

Atributo 7.1. ¿Qué características ha tenido el aprendizaje suscitado por las diferentes tareas: ejemplos para investigar, problemas propuestos y cuestiones teóricas?.

- Derive no ha ayudado a entender los conceptos a la primera sino de forma gradual [ENTFIN-caso1-1.1], [ENTINT-caso10-3.2], [ENTINI-caso10-12],
- La búsqueda de contenidos es la que ha provocado que las ideas fuesen quedando poco a poco [ENTINT-caso2-6.4]
- Con los ejemplos de investigación el alumno podía ir construyendo su propio conocimiento con ayuda de DERIVE [ENTINT-caso3-6.5], [ENTFIN-caso3-1.1b]
- Las actividades permitían retener mejor los contenidos que se iban introduciendo [ENTINI-caso8-3.3], [ENTINI-caso13-23]
- El aprendizaje ha sido positivo con la experimentación y descubrimiento aunque una vez captado el concepto derive automatizaba los procesos [ENTFIN-caso5-7.1], [ENTINI-caso11-18]
- El alumno tenía actitud de búsqueda de soluciones en las cuestiones de investigación [ENTINT-caso6-7.2], [ENTINT-caso4-6.1], y solía contrastar los resultados teóricos y las cuestiones que se iban planteando [ENTINT-caso6-3.3]
- Los procesos manipulativos los ha aprendido de forma mecánica sin entender a veces su significado por ejemplo el cálculo de rangos con RANK [ENTFIN-caso7-4.7]
- La metodología obligaba a concentrarse en el método o forma de hacerlo con derive [ENTFIN-caso9-7.1]
- Al principio encontraba una cierta dispersión pero una vez entendido los conceptos quedaban más fijos [ENTFIN-caso8-3.3]

Atributo 7.2. La investigación, la experimentación y el descubrimiento ¿han facilitado la asimilación y comprensión de contenidos o por el contrario han dispersado la atención del alumnado?.

- El haber investigado y descubierto los contenidos por sí mismo ha proporcionado una visión más profunda y amplia de los contenidos que redunda en una mejor comprensión [ENTINT-caso1-7.2], [ENTFIN-caso1-7.1], [ENTFIN-caso1-7.2], [ENTINI-caso3-29], [ENTINI-caso5-27], [ENTINT-caso5-7.2], [ENTINT-caso8-7.2], [ENTINT-caso10-7.2], [ENTFIN-caso10-7.1] , [ENTFIN-caso11-1.1], [ENTFIN-caso11-7.1], [ENTINT-caso12-7.2], [ENTFIN-caso12-7.1], [ENTINT-caso13-7.2], [ENTINT-caso14-7.2].
- Este método experimental y de descubrimiento le ha permitido entender contenidos que no había entendido antes [ENTINI-caso2-24], [ENTFIN-caso2-7.1], [ENTINI-caso11-16]
- La investigación y experimentación han sido importantes para el alumno en la comprensión de contenidos [ENTINI-caso3-29b], [ENTINT-caso8-6.4] ya que el ahorro operativo de derive ha permitido que los contenidos se viesen de forma clara [ENTFIN-caso3-1.7.c]
- Derive no ha sido relevante para la investigación y descubrimiento propuestos [ENTINT-caso4-7.2], [ENTFIN-caso4-7.1], aunque ha habido un buen aprendizaje de los contenidos [ENTINT-caso4-7.1]

- A medida que iban avanzando las clases y aumentaba su experimentación ha mejorado la comprensión de conceptos [ENTFIN-caso6-6.2]
- Cree que es mejor usar el método tradicional para entender los contenidos [ENTFIN-caso7-1.7], [ENTINI-caso14-31], pues en los ejemplos de investigación se dispersaba su atención por el uso del programa [ENTFIN-caso7-7.1], o bien porque tarda menos tiempo con el método expositivo.
- Al principio se encontraba un poco más disperso pero una vez entendidos los conceptos quedaban más fijos [ENTFIN-caso8-3.3]
- Derive permite que se fijen y se retengan mejor los contenidos [ENTFIN-caso8-3.3], [ENTFIN-caso10-g.1], [ENTINI-caso13-17]
- Derive no aporta nada para los conceptos abstractos [ENTINI-caso9-13] y no es una buena herramienta para el análisis [ENTINI-caso9-18].

Atributo 7.3. El tipo de aprendizaje ¿ha sido un aprendizaje activo? ¿cómo ha sido la participación del alumnado en las clases?.

- El alumno ha tenido la sensación de haber ido haciendo y construyendo por sí mismo los concepto y practicándolos a la vez lo que le ha permitido no perderse en la asignatura [ENTFIN-caso1-7.2], [ENTINI-caso11-27], [ENTINT-caso12-7.1]
- La estrategia didáctica ha forzado al alumno a pensar y a que sea el mismo el que construye los conceptos con ayuda del ordenador [ENTINI-caso2-18]
- Se le han pasado rápidamente las horas ha estado todo el tiempo trabajando con el ordenador [ENTINI-caso2-29]
- Lo más positivo es la postura activa que tienes que adoptar [ENTINT-caso4-7.2], [ENTFIN-caso4-7.1], [ENTFIN-caso10-2.7] aunque no se llegase a una solución [ENTFIN-caso5-6.1]
- El aprendizaje ha sido activo mucho más positivo que el aprendizaje tradicional [ENTFIN-caso12-7.1.b]
- El ritmo de clase era dinámico el alumno trabaja a la vez que el profesor [ENTINI-caso5-30]
- Las clases eran muy prácticas [ENTFIN-caso6-9.1b] y la búsqueda de soluciones se ha desarrollado de manera activa y participativa [ENTINT-caso6-7.2]
- Siempre ha tenido la sensación de aprender algo nuevo, de una forma nueva [ENTINT-caso3-7.1], [ENTFIN-caso8-7.1], [ENTINI-caso10-29], [ENTINI-caso11-29], [ENTINT-caso13-28]

Atributo 7.4.¿cómo ha sido la atención del alumnado en las clases?.

- Se le han pasado rápidamente las clases frente al ordenador por lo que parece que ha habido una alta atención [ENTINI-caso2-29]
- El tipo de didáctica requiere mucha atención y concentración, mucho tiempo no solo en clase sino en casa [ENTINT-caso2-7.2]
- La atención del alumno era superior al de metodologías tradicionales pues los cálculos no oscurecían el contenido y no generaban el aburrimiento de otras clases [ENTINI-caso3-26]
- El haber usado el ordenador ha favorecido motivación e interés del alumno, lo que hacía las clases más fáciles de seguir [ENTINT-caso6-g.6]

Atributo 7.5. ¿Cómo eran los conocimientos previos del alumnado? ¿eran suficientes para los contenidos que se introducían?

- En general los conocimientos previos han sido suficientes salvo en la introducción de determinantes que se presuponía cierto dominio inicial [ENTFIN-caso2-7.1]
- En las actividades que se proponían no ha notado la necesidad de contenidos previos [ENTFIN-caso6-g.6], [ENTFIN-caso11-7.2], [ENTFIN-caso12-7.2],
- Ha tenido la sensación de que hacían falta contenidos previas para desarrollar las investigaciones que se planteaban [ENTFIN-caso7-7.2]

- No ha notado la necesidad de contenidos previos salvo los básicos de COU [ENTFIN-caso8-7.2] o de cursos anteriores [ENTFIN-caso13-7.2]
- Muchos de los contenidos introducidos ya los conocía el alumno y lo único que ha hecho es redescubrirlos desde otra perspectiva [ENTFIN-caso9-1.1], por lo que no ha necesitado contenidos previos para entender lo que se iba desarrollando [ENTFIN-caso9-7.2]
- Ha tenido la sensación de que faltaba algún contenido previo [ENTFIN-caso3-7.2], [ENTFIN-caso10-7.2],
- Sí faltaba algún contenido previo, pero eso se hacía aposta para buscarlo [ENTFIN-caso4-7.2]

PARTE 8:

ATRIBUTOS Y ASPECTOS CARACTERÍSTICOS DE LA CUESTIÓN 8:

Atributo 8.1. El tipo de problemas de fin de capítulo que se han propuesto al finalizar cada capítulo a lo largo del curso ¿crees que facilitaban el uso de estrategias de resolución de problemas por parte de los alumnos?.

- Derive permite la realización de OTRO TIPO DE PROBLEMAS en cuanto a dimensión de datos y proximidad a la realidad [ENTINT-caso1-9.2]
- Casi todos los problemas tienen varias estrategias pero siempre te quedas con la más sencilla [ENTINT-caso2-1], [ENTINT-caso8-8.2]
- Los problemas planteados podían tener varios caminos de resolución [ENTINT-caso3-8.2], [ENTINT-caso4-8.2] , [ENTINT-caso5-8.2] , [ENTINT-caso10-8.2], [ENTINT-caso12-8.2], [ENTINT-caso13-8.2], [ENTINT-caso14-8.2]
- Algunos problemas sí que son difíciles y hay que pensar mucho [ENTINI-caso3-21], [ENTINT-caso3-1.1.c], [ENTFIN-caso8-1.7.a], [ENT-caso14-41]

Atributo 8.2. El tipo de METODOLOGÍA empleada en el aula facilitaba el hecho de que los alumnos encontraran varias formas o caminos para resolver un problema

- La metodología sugería utilizar varios caminos de resolución [ENTINT-caso1-8.3], [ENTINT-caso2-8.3], [ENTFIN-caso3-8.3], [ENTFIN-caso4-8.3] , [ENTINT-caso4-8.3], [ENTINT-caso5-8.3], [ENTINT-caso6-8.2], [ENINT-caso6-8.3], [ENTFIN-caso7-8.3], [ENTFIN-caso8-8.3], [ENTINT-caso8-8.3], [ENTFIN-caso9-8.3], [ENTFIN-caso10-8.3], [ENTFIN-caso11-8.1], [ENTFIN-caso11-6.3], [ENTINT-caso12-8.3], [ENTFIN-caso13-6.3], [ENTFIN-caso13-8.3], [ENTFIN-caso14-8.3]
- La metodología permitía libertad a la hora de plantear un problemas y resolver lo de la forma que uno quisiera, se ofrecían multiplicidad de estrategias [ENTFIN-caso1-8.4], [ENTFIN-caso3-8.4], [ENTFIN-caso4-8.4], [ENTFIN-caso5-8.4], [ENTFIN-caso7-8.4], [ENTFIN-caso8-8.4], [ENTFIN-caso9-8.4], [ENTFIN-caso10-8.4], [ENTFIN-caso12-8.4], [ENTFIN-caso13-8.4]

Atributo 8.3. ¿Cuál ha sido la actitud de los alumnos ante la resolución de problemas?.

- En muchas ocasiones aparecía un interés especial hacia la resolución de problemas un “gusanillo” que obligaba a intentarlo como fuera una actitud de búsqueda y persistencia [ENTFIN-caso1-10.4], [ENTFIN-caso3-10.4], [ENTFIN-caso8-10.4], [ENTFIN-caso11-10.4], [ENTINT-caso13-27]
- Siempre se ha encontrado motivado para resolver los problemas y los ejemplos para investigar [ENTFIN-caso12-10.1]
- A veces había problemas que no salían inicialmente por error al introducir los datos [ENTINI-caso2-6.3] y otras porque había que dedicarles mucho tiempo se dejaban y a los dos días los volvía a intentar y salían [ENTINT-caso2-14.3]
- En ocasiones los problemas han suscitado cierto interese [ENTINT-caso14-14.3]

- Ha buscado la solución con insistencia, utilizando en numerosas ocasiones la experimentación para ver qué podría salir [ENTFIN-caso6-6.3], [ENTINI-caso10-28]
- Los problemas han sido uno de los elementos más positivos del curso [ENTFIN-caso12-g.1]

Atributo 8.4. Comparativa de la resolución de problemas con nuestra estrategia didáctica y la resolución de problemas con otras estrategias tradicionales y expositivas.

- El alumno se enfrenta de forma distinta a los problemas de cómo lo hacía con lápiz y papel pues TIENE QUE ESTRUCTURAR EL PROBLEMA CON EL SISTEMA DE NOTACIÓN QUE USA DERIVE [ENTINT-caso1-1.1], [ENTINT-caso10-1.3], [ENTFIN-caso12-1.7]
- Derive permite que la EXPERIMENTACIÓN se convierta en una alternativa para la resolución de problemas lo cual ofrece nuevas posibilidades para el alumno [ENTFIN-caso1-5.2]
- El programa DERIVE ha permitido que los alumnos se lancen a la experimentación cuando no salían las soluciones cosa que no hubiera sido posible sin el ordenador [ENTFIN-caso8-3.5], [ENTFIN-caso8-5.2],
- Derive proporciona cierta agilidad en la búsqueda de estrategias alternativas [ENTFIN-caso9-3.1], es más dinámico y operativo [ENTINT-caso10-1.1]
- Al disminuir el tiempo empleado en los cálculos rutinarios, esto permite que el alumno dedique MÁS TIEMPO AL PLANTEAMIENTO Y A LA COMPROBACIÓN de soluciones que a la resolución respecto al uso con lápiz y papel [ENTFIN-caso1-5.2], [ENTFIN-caso3-1.3], [ENTFIN-caso3-5.3], [ENTFIN-caso3-5.3.b], [ENTFIN-caso6-5.3], [ENTFIN-caso7-1.8], [ENTFIN-caso8-5.3], [ENTFIN-caso10-5.3], [ENTFIN-caso11-5.3],
- Con derive y lápiz y papel el tiempo dedicado al planteamiento es similar pero con derive se resuelve mucho más rápidamente lo cual permite en ocasiones replantear los problemas cuando se resisten [ENTFIN-caso13-5.3]
- Con derive tenía mayor profundidad teórica que ha permitido enfrentarse mejor a los problemas [ENTFIN-caso11-5.2]
- Resolvía directamente en DERIVE aunque a veces planteaba inicialmente con lápiz y papel]ENTFIN-caso7-5.3], [ENTINT-caso8-1.3], [ENTINT-caso10-1.3], [ENTINT-caso14-1.3]
- La técnica empleada en la resolución de problemas con derive no difiere de usar lápiz y papel [ENTINT-caso2-1.1]
- Al resolver problemas con DERIVE se requiere otra metodología en cuanto a la forma de enfrentarse a los problemas, en cuanto a la forma de pensar en el problema [ENTINT-caso6-1.1], [ENTFIN-caso13-1.3]

Atributo 8.5. ¿Cuántas estrategias o caminos utilizaba el alumno para resolver los problemas?

- En los problemas utilizaba en general una estrategia de resolución en caso de resolverlos por ese método, en otro caso intentaba buscar por otro camino la resolución del problema [ENTFIN-caso1-8.1], [ENTINI-caso2-21], [ENTFIN-caso2-8.2], [ENTFIN-caso3-8.1], [ENTINT-caso3-8.3], [ENTINT-caso4-8.1], [ENTFIN-caso4-8.1], [ENTINT-caso5-8.3], [ENTFIN-caso5-8.1], [ENTFIN-caso5-8.2], [ENTFIN-caso6-6.3], [ENTFIN-caso6-8.1], [ENTFIN-caso8-6.3], [ENTFIN-caso8-8.1], [ENFIN-caso9-8.1], [ENTFIN-caso10-8.1], [ENTINT-caso10-8.1], [ENTINT-caso11-8.1], [ENTFIN-caso11-6.3], [ENTINT-caso13-8.1], [ENTFIN-caso13-8.2], [ENTINT-caso14-8.1],
- Cuando no estaba seguro del resultado buscaba más caminos de resolución [ENTINT-caso12-7.3], no obstante siempre ha empleado varias estrategias de resolución [ENTFIN-caso12-8.1]
- Solo ha empleado una estrategia de resolución, con una valía [ENTFIN-caso7-8.1]

Atributo 8.6. ¿Qué tipo de técnicas de resolución de problemas han sido utilizados y en cuáles ha habido dificultades?

- Ha sabido plantear y resolver modelos matemáticos de diversos tipos:
  - modelos vectoriales [PROB-caso1-1.1], [PROB-caso1-1.6], [PROB-caso1-1.7], [PROB-caso2-1.1], [PROB-caso2-1.6], [PROB-caso2-1.8], [PROB-caso3-1.1], [PROB-caso3-1.6], [PROB-caso6-1.8], [PROB-caso7-1.1], [PROB-caso7-1.6], [PROB-caso7-1.8], [PROB-caso8-1.6], [PROB-caso8-1.8], [PROB-caso8-1.1], [PROB-caso8-2.3], [PROB-caso8-2.1], [PROB-caso9-1.7], [PROB-caso9-1.1], [PROB-caso10-1.7], [PROB-caso10-1.1], [PROB-caso11-1.1], [PROB-caso11-1.6], [PROB-caso11-1.8], [PROB-caso11-1.7], [PROB-caso12-1.1], [PROB-caso12-1.6], [PROB-caso11-1.7], [PROB-caso12-1.8]
  - modelos matriciales [PROB-caso2-2.1], [PROB-caso2-2.3], [PROB-caso2-2.4], [PROB-caso9-2.1], [PROB-caso9-2.4], [PROB-caso10-2.1], [PROB-caso10-2.4], [PROB-caso10-2.1], [PROB-caso10-2.2], [PROB-caso2.3], [PROB-caso10-4.1], [PROB-caso12-2.1], [PROB-caso12-2.2], [PROB-caso12-2.3]
  - modelos de diagonalización en los que interviene el cálculo de la potencia k-ésima de una matriz [PROB-caso12-5.7], [PROB-caso12-5.8], [PROB-caso12-5.9], [PROB-caso13-5.7], [PROB-caso13-5.8], [PROB-caso13-5.9]
- No ha sabido plantear modelos matemáticos para resolver problemas generales en particular:
  - modelos vectoriales [PROB-caso4-1.7], [PROB-caso4-1.8], [PROB-caso5-1.7], [PROB-caso5-1.8], [PROB-caso10-1.8], [PROB-caso10-1.6], [PROB-caso13-1.1], [PROB-caso13-1.6], [PROB-caso13-1.7], [PROB-caso13-1.8], [PROB-caso14-1.1], [PROB-caso14-1.6], [PROB-caso14-1.7], [PROB-caso14-1.8], [PROB-caso15-1.1], [PROB-caso15-1.6], [PROB-caso15-1.7], [PROB-caso15-1.8].
  - modelos matriciales [PROB-caso4-2.2], [PROB-caso6-2.3], [PROB-caso6-2.2], [PROB-caso10-2.2], [PROB-caso13-2.2], [PROB-caso13-2.3], [PROB-caso14-2.2], [PROB-caso14-2.1], [PROB-caso15-2.3]
  - modelos de diagonalización en los que interviene el cálculo de la potencia k-ésima de una matriz [PROB-caso1-5.7], [PROB-caso1-5.8], [PROB-caso1-5.9], [PROB-caso2-5.7], [PROB-caso2-5.8], [PROB-caso2-5.9], [PROB-caso3-5.7], [PROB-caso3-5.8], [PROB-caso3-5.9], [PROB-caso4-5.7], [PROB-caso4-5.8], [PROB-caso4-5.9], [PROB-caso5-5.7], [PROB-caso5-5.8], [PROB-caso5-5.9], [PROB-caso6-5.7], [PROB-caso6-5.8], [PROB-caso6-5.9] [PROB-caso7-5.7], [PROB-caso7-5.8], [PROB-caso7-5.9], [PROB-caso8-5.7], [PROB-caso8-5.8], [PROB-caso8-5.9], [PROB-caso9-5.7], [PROB-caso9-5.8], [PROB-caso9-5.9], [PROB-caso10-5.7], [PROB-caso10-5.8], [PROB-caso10-5.9], [PROB-caso11-5.7], [PROB-caso11-5.8], [PROB-caso11-5.9] [PROB-caso13-5.7], [PROB-caso13-5.8], [PROB-caso13-5.9], [PROB-caso14-5.7], [PROB-caso14-5.8], [PROB-caso14-5.9], [PROB-caso15-5.7], [PROB-caso15-5.8], [PROB-caso15-5.9]

- Ha sabido utilizar técnicas experimentales en [PROB-caso10-3.12], [PROB-caso12-2.4], [PROB-caso12-2.10], [PROB-caso12-2.12], [PROB-caso12-2.14], [PROB-caso12-3.1], [PROB-caso12-3.2], [PROB-caso12-3.3]

- No ha sabido realizar problemas de experimentación: [PROB-caso4-2.4], [PROB-caso6-3.12], [PROB-caso5-4.3], [PROB-caso5-2.4], [PROB-caso6-2.4],[PROB-caso6-2.10], [PROB-caso6-3.2], [PROB-caso6-3.3], [PROB-caso8-3.1], [PROB-caso8-3.2], [PROB-caso8-3.12], [PROB-caso9-3.1], [PROB-caso9-3.2], [PROB-caso9-3.3], [PROB-caso10-3.1], [PROB-caso10-3.2], [PROB-caso10-3.3], [PROB-caso13-2.4], [PROB-caso13-2.12], [PROB-caso13-3.1], [PROB-caso13-3.2], [PROB-caso13-3.3], [PROB-caso14-2.4], [PROB-caso14-2.11], [PROB-caso14-3.1], [PROB-caso14-3.2], [PROB-caso14-3.3], [PROB-caso15-2.4], [PROB-caso15-3.1], [PROB-caso15-3.2], [PROB-caso15-3.3]

- Ha sabido resolver problemas por inducción:
  [PROB-caso6-2.11], [PROB-caso6-3.12], [PROB-caso9-2.11], [PROB-caso9-3.4], [PROB-caso9-3.6], [PROB-caso10-3.4], [PROB-caso10-3.6], [PROB-caso10-2.11], [PROB-caso12-2.11], [PROB-caso12-3.4], [PROB-caso12-3.6], [PROB-caso12-3.13]

- No ha sabido realizar procesos de inducción:
  [PROB-caso1-2.11], [PROB-caso1-3-4], [PROB-caso1-3.6], [PROB-caso1-3.12], [PROB-caso2-2.11], [PROB-caso2-3.4], [PROB-caso2-3.6], [PROB-caso2-3.12], [PROB-caso3-2.11], [PROB-caso3-3.4], [PROB-caso3-3.6], [PROB-caso3-3.12], [PROB-caso4-3.6], [PROB-caso4-3.4], [PROB-caso4-3.12] [PROB-caso5-2.11], [PROB-caso5-3.6], [PROB-caso6-3.6], [PROB-caso13-2.11], [PROB-caso13-3.4], [PROB-caso13-3.6], [PROB-caso14-3.4], [PROB-caso14-3.6], [PROB-caso15-3.6], [PROB-caso15-3.12]

- Ha sabido formular y resolver sistemas de ecuaciones lineales para resolver problemas generales [PROB-caso1-4.1], [PROB-caso1-4.7], [PROB-caso1-4.8], [PROB-caso2-4.1], [PROB-caso2-4.6], [PROB-caso2-4.7], [PROB-caso2-4.8], [PROB-caso2-4.10], [EXFIN-caso2-prob4b], [PROB-caso3-4.1], [PROB-caso3-4.6], [PROB-caso3-4.8], [PROB-caso3-4.10], [EXFIN-caso3-prob4.b], [EXFIN-caso4-prob4-b], [EXFIN-caso5-prob4-b], [EXFIN-caso6-prob4-b], [EXFIN-caso7-prob4-b], [PROB-caso8-4.1], [PROB-caso8-4.7], [PROB-caso8-4.10], [EXFIN-caso9-4.b], [PROB-caso10-4.1], [PROB-caso10-4.6], [EXFIN-caso10-prob4-b], [EXFIN-caso11-prob4-b], [PROB-caso12-4.7], [PROB-caso12-4.9], [EXFIN-caso12-prob4-b], [PROB-caso13-4.7], [PROB-caso13-4.8], [PROB-caso13-4.10], [PROB-caso13-4.1].

- No ha sabido formular y resolver sistemas de ecuaciones lineales para resolver problemas generales [EXFIN-caso14-prob4-b], [EXFIN-caso14-prob4-b]

PARTE 9:

ATRIBUTOS Y ASPECTOS CARACTERÍSTICOS DE LA CUESTIÓN 9:

Atributo 9.1. ¿Cuál era la actitud inicial de los alumnos frente a los ordenadores?.

- Existe una predisposición positiva al uso de los ordenadores [ENTINI-caso1], [ENCINI-caso2], [ENTINI-caso2], [ENCINI-caso3], [ENTINI-caso3], [ENCINI-caso4], [ENCINI-caso5], [ENTINI-caso5], [ENCINI-caso6], [ENCINI-caso6], [ENCINI-caso7], [ENTFIN-caso8-9.4], [ENCINI-caso9], , [ENTINIT-caso10-4], [ENCINI-caso11-5], [ENCINI-caso12], [ENTINI-caso14-13], [ENTINT-caso14-3.6] , [ENTINI-caso15-7]

Atributo 9.2. ¿Se ha invertido demasiado tiempo en el aprendizaje del programa?

- Me gusta porque no es complicado, no tienes que estar mucho tiempo aprendiendo el programa [ENTINI-caso1], [ENTFIN-caso1-9.2], [ENTFIN-caso2-9.1], [ENTFIN-caso7-9.2] , [ENTFIN-caso8-9.2], [ENTFIN-caso9-9.2], [ENTFIN-caso13-9.2]

- Se aprende rápidamente prácticamente en 2 sesiones [ENTINI-caso3-19], [ENTFIN-caso3-9.2], [ENTFIN-caso4-9.2], [ENTFIN-caso5-9.2], [ENTFIN-caso6-9.2], [ENTFIN-caso11-9.2] , [ENTFIN-caso12-9.2]
- Sí, se ha invertido mucho tiempo en el aprendizaje del programa [ENTFIN-caso10-9.2], de hecho es uno de los elementos más negativos del curso [ENTFIN-caso10-g.2]

Atributo 9.3. El aprendizaje y posterior manejo del programa ¿es fácil o difícil?

- Derive es un programa que resulta muy fácil de aprender [ENTINI-caso1], [ENTINT-caso1-9.1], [ENTFIN-caso1-9.2], [ENTINI-caso2-22], [ENTFIN-caso2-9.1], [ENTINI-caso3-19], [ENTINT-caso4-9.2], [ENTFIN-caso5-9.1], [ENTFIN-caso6-9.1] , [ENTFIN-caso7-9.3], [ENTINT-caso8-9.1], [ENTINT-caso10-9.1], [ENTINI-caso11-15], [ENTFIN-caso11-2.7.b] , [ENTINT-caso12-9.1], [ENTINT-caso13-9.1], [ENTINI-caso14-25]
- Derive es un programa sencillo de manejar [ENTFIN-caso1-9.2], [ENTINI-caso2-22] , [ENTFIN-caso2-9.1], [ENTFIN-caso3-7.b], [ENTINT-caso4-9.2], [ENTFIN-caso5-9.1], [ENTFIN-caso6-9.1], [ENTFIN-caso7-9.3], [ENTINT-caso8-9.1], [ENTINT-caso10-9.1], [ENTINI-caso11-15], [ENTFIN-caso11-2.7.b], [ENTINT-caso12-9.1] , [ENTINT-caso13-9.1], [ENTINI-caso14-25]
- No es complicado el aprendizaje, sólo hay que acostumbrarse a la nueva notación [ENTINI-caso9-14]
- Con respecto a otros programas como MATHCAD, el programa DERIVE es mucho más sencillo de manejar [ENTFIN-caso9-2.8]

Atributo 9.4. ¿Cuáles han sido los principales problemas o dificultades que se han tenido con el manejo del programa derive?

- No ha tenido dificultades significativas en el manejo del programa [ENTINT-caso4-9.3], [ENTFIN-caso4-9.4], [ENTFIN-caso5-9.4], [ENTFIN-caso6-9.2] , [ENTFIN-caso7-9.3] , [ENTINT-caso8-9.3] , [ENTFIN-caso10-9.4] , [ENTFIN-caso11-9.4], [ENTINT-caso12-9.3], [ENTFIN-caso12-9.4], [ENTINI-caso13-11], [ENTFIN-caso13-9.4]
- Están relacionados con la introducción de datos con el comando AUTOR, que produce cierta incomodidad a la hora de introducir los datos debido principalmente a la sintaxis rigurosa, por ejemplo cuando no se introduce un paréntesis [ENTFIN-caso1-1.7], [ENTINT-caso2-9.5], [PROB-caso3-2.8], [EXFIN-caso3-prob2.f], [EXFIN-caso3-cues3], [PROB-caso7-9.5]

- En el uso de la función RANK para el cálculo de rangos de funciones paramétricas [EXFIN-caso3-prob3.a]
- Ha tenido dificultades en la resolución de sistemas [EXFIN-caso5-prob1.a], [PROB-caso7-1.4], [PROB-caso7-1.10] , [PROB-caso8-1.10], [PROB-caso9-2.4], [PROB-caso13-1.5.a]
- Ha tenido problemas con SOLVE por intentar resolver sistemas de ecuaciones no lineales [PROB-caso10-2.4], [EXFIN-caso11-prob2.f], [EXFIN-caso12-prob3.a]
- Ha tenido problemas en resolver ecuaciones matriciales por no definir previamente los elementos de la matriz [PROB-caso8-6.1]
- Ha tenido dificultades en el manejo de la función ROW-REDUCE [EXFIN-caso14-prob2.e]
- Ha tenido dificultades en el manejo de funciones [PROB-caso5-4.8]
- Ha tenido problemas a veces al confundir "=" con ":=" en la definición de constantes vectoriales [PROB-caso3-2.8]
- La programación de funciones resulta un poco compleja [ENTINI-caso1], [ENTINT-caso1-9.3], [ENTFIN-caso1-9.1], [ENTINT-caso5-9.3], [ENTINT-caso6-9.3]

- El solapamiento de variables que en ocasiones ha despistado al alumno [EXFIN-caso1-cues1], [PROB-caso5-4.8], [PROB-caso7-6.1], [PROB-caso8-6.1], [PROB-caso9-4.5] , [PROB-caso10-4.5] , [EXFIN-caso10-cues], [PROB-caso12-2.9.a], [PROB-caso12-4.5] , [PROB-caso13-5.1.b] , [PROB-caso15-4.8].
- Ha tenido problemas en memorizar el nombre de algunas funciones como EIGENVALUES [ENTFIN-caso9-9.4]
- La interpretación de resultados en ocasiones no ha sido el adecuado [PROB-caso1-prob1], [EXFIN-caso1-prob1], [EXFIN-caso1-prob2] [ENTINT-caso4-9.5] , [EXFIN-caso5-prob1.a] , [PROB-caso13-5.4] , [EXFIN-caso14-prob3.b]

Atributo 9.5. ¿Cuál de las dos herramientas de trabajo resulta más útil DERIVE o LÁPIZ Y PAPEL?

- Con derive se facilitan mucho las cosas [ENTFIN-caso1-3.6], [ENTFIN-caso3-9.1], [ENTINT-caso4-9.4] , [ENTFIN-caso5-9.5], [ENTFIN-caso6-2.6]
- Cuando el alumno se ha acostumbrado a la notación de DERIVE, ya se hace cómodo y lo usa más que lápiz y papel [ENTFIN-caso1-1.7], [ENTFIN-caso3-1.7], [ENINT-caso8-9.3], [ENTFIN-caso12-1.7] , [ENTFIN-caso13-1.4.b]
- Ha sido mejor derive por su rapidez de cálculo [ENTFIN-caso13-1.6] , [ENTFIN-caso13-1.6.c]
- A veces ha tenido la sensación de que con lápiz y papel hubiera sido más sencillo [ENTINT-caso10-9.4], [ENTINT-caso14-9.4]
- Es más cómodo lápiz y papel aunque con derive se facilitan a veces los cálculos [ENTFIN-caso10-1.7]
-

Atributo 9.6. ¿A juicio de los alumnos, DERIVE ha sido una barrera adicional para el aprendizaje de los contenidos de álgebra lineal que se han impartido?

- No es un obstáculo, es fácil, estás las dos primeras clases comprendiendo los comando y luego cuanto se usan un poco se pueden descubrir las cosas [ENTINI-caso1]
- No es un problema adicional para el aprendizaje del álgebra lineal [ENTINI-caso2-23], [ENTFIN-caso4-9.1] , [ENTFIN-caso5-9.1], [ENTFIN-caso8-9.1], [ENTFIN-caso11-9.1], [ENTINI-caso13-10], [ENTFIN-caso13-9.1]
- No es un problema adicional para el álgebra lineal, al contrario ha ayudado a entender mejor los contenidos [ENTFIN-caso3-9.1], [ENTFIN-caso6-1.1], [ENTFIN-caso12-9.1]
- Derive no ha dificultado al alumno la comprensión de los contenidos matemáticos [ENTFIN-caso2-9.1], [ENTFIN-caso9-9.1], [ENTINI-caso10-13], [ENTINI-caso14-26]
- Aconsejaría el uso del programa a otros compañeros para estudiar álgebra lineal [ENTINI-caso2-25], [ENTINT-caso2-9.2], [ENTFIN-caso3-10.2], [ENTINT-caso3-9.2], [ENTFIN-caso4-10.2], [ENTINT-caso5-g.3], [ENTFIN-caso6-9.5], [ENTINT-caso6-9.2] , [ENTINT-caso8-9.2], [ENTFIN-caso8-9.5], [ENTFIN-caso9-9.5], [ENTINT-caso10-9.2], [ENTFIN-caso10-9.5], [ENTFIN-caso11-9.5], [ENTINT-caso12-9.2], [ENTFIN-caso12-9.5], [ENTINT-caso13-9.2], [ENTFIN-caso13-9.5] , [ENTINT-caso14-9.2]

Atributo 9.7. El programa DERIVE ¿ha impedido que el alumno realice peor el examen de lo que hubiera ocurrido si lo hiciese con lápiz y papel?.

- No impidió, lo que pasa es que el día del examen estaba muy nervioso [ENTFIN-caso1-9.3]
- No tuvo problemas con el manejo del programa en el examen final [EXFIN-caso2-prob], [ENTFIN-caso2-9.3], [ENTFIN-caso4-9.3] , [ENTFIN-caso5-9.3], [ENTFIN-

caso7-9.1], [EXFIN-caso10-cues], [EXFIN-caso10-prob], [ENTFIN-caso10-9.4], [ENTFIN-caso12-9.3]

- El alumno no se puso nervioso por el manejo del programa en el examen final [ENTFIN-caso8-9.3], [ENTFI-caso11-9.3]
- No, todo lo contrario se encontró más cómodo que en otros exámenes [ENTFIN-caso3-9.3], [ENTFIN-caso6-9.1]

PARTE 10:

ATRIBUTOS Y ASPECTOS CARACTERÍSTICOS DE LA CUESTIÓN 10:

Atributo 10.1. Los ejemplos a investigar que se proponían en el aula ¿han suscitado en el alumno una actitud de búsqueda autónoma de soluciones o respuestas a las cuestiones que se planteaban?

- Siempre he tenido ACTITUD DE BÚSQUEDA ACTIVA, porque en clase estás totalmente concentrado y además derive ayuda y además porque DERIVE motivaba hacia la búsqueda de respuestas [ENTFIN-caso1-10.1] , [ENTINT-caso2-10.1], [ENTINI-caso2-28] , [ENTINT-caso3-10.1] , [ENTFIN-caso3-10.1], [ENTFIN-caso4-10.1], [ENTINT-caso5-10.3], [ENTFIN-caso5-10.1] , [ENTFIN-caso6-10.1], [ENTINT-caso6-10.1], [ENTFIN-caso7-10.1] , [ENTINT-caso8-7.2], [ENTFIN-caso8-10.1], [ENTFIN-caso9-10.1], [ENTFIN-caso11-10.1], [ENTFIN-caso12-10.1] , [ENTINT-caso13-10.1], [ENTFIN-caso13-10.1] , [ENTINT-caso14-3.3] , [ENTINT-caso14-6.1]
- Me sentido protagonista del proceso de investigación [ENTINT-caso14-3.1]
- La experimentación, la investigación y el descubrimiento han ofrecido cierta AUTONOMÍA para realizar indagaciones por uno mismo [ENTINT-caso8-7.2]
- En ocasiones ha entrado en competición con su compañero de pupitre para ver quien los acababa antes [ENTFIN-caso6-10.2]

Atributo 10.2. Los ejercicios de manipulación ¿han permitido que el alumno adquiera una cierta AUTONOMÍA de cálculo en los principales procedimientos manipulativos necesarios para el álgebra lineal?

- Si, pues es como una evaluación continua estás sacando una nota sin que nadie te la de, tienes el resultado inmediato y puedes decir que está bien o mal [ENTINT-caso1-7.1]
- Se adquiere una autonomía suficiente para desarrollar los procesos manipulativos [ENTINT-caso2-10.3] , [ENTINT-caso8-10.1], [ENTINT-caso10-3.1], [ENTFIN-caso11-10.2]
- Con DERIVE ha entendido los procesos pero le ha impedido que luego pudiera hacerle con lápiz y papel le ha mermado habilidad de cálculo [ENTFIN-caso7-3.3]
- He encontrado satisfacción cuando los resolvía pues entendía el método y proceso realizado [ENTFIN-caso3-10.2] , [ENTFIN-caso4-10.2], [ENTFIN-caso5-10.2] , [ENTFIN-caso7-10.2] , [ENTFIN-caso8-10.2], [ENTFIN-caso10-10.2] , [ENTFIN-caso11-10.2] , [ENTFIN-caso12-10.2], [ENTINT-caso14-3.4]

Atributo 10.3. En la RESOLUCION DE PROBLEMAS propuestos ¿los alumnos han encontrado un interés especial por resolverlos, al tener una herramienta con la que el desgaste operativo era mínimo? .

- Con el programa y este tipo de trabajo estaba motivado para resolver problemas obligándole a buscar la solución [ENTFIN-caso1-10.4], [ENTINT-caso1-7.1] , [ENTFIN-caso2-101], [ENTFIN-caso2-10.4], [ENTFIN-caso3-10.4] , [ENTFIN-caso4-10.4] , [ENTINT-caso4-10.1], [ENTFIN-caso5-10.4] , [ENTFIN-caso6-10.4] , [ENTFIN-caso7-10.4] , [ENTINT-caso8-10.4], [ENTINT-caso10-10.4], [ENTINT-caso9-10.4] , [ENTINT-caso10-10.4], [ENTFIN-caso11-10.4] , [ENTFIN-caso12-10.4] , [ENTFIN-caso13-10.4]
- Cree haber obtenido cierta autonomía para resolver problemas [ENTINT-caso8-10.3] , [ENTINT-caso10-10.3] , [ENTINT-caso13-10.3], [ENTINT-caso13-10.2]
- No sabría resolver los problemas fin de capítulo sin DERIVE [ENTFIN-caso5-5.2], [ENTFIN-caso7-5.2]
- Ha resuelto todos los problemas solo [ENTFIN-caso12-10.3]
- Ha resuelto los problemas con su compañero de pupitre [ENTFIN-caso7-10.4], [ENTFIN-caso8-10.3], [ENTFIN-caso9-10.3],
- Ha resuelto los problemas con su compañero pero ha sido positivo para discutir los posible caminos de solución [ENTFIN-caso10-10.3], [ENTFIN-caso11-10.3] , [ENTFIN-caso13-10.3]

Atributo 10.4. El uso de DERIVE, ¿ha mermado las habilidades de cálculo del alumno de tal forma que han restado en él cierta AUTONOMÍA para desarrollar procesos matemáticos?

- La DEPENDENCIA DEL PROGRAMA es totalmente operativa pues “el ordenador no sabe hacer nada por sí mismo” [ENTINT-caso1-10.3], [ENTINT-caso3-10.2]
- El uso del ordenador le ha mermado su INDEPENDENCIA para efectuar cálculos rutinarios sin el ordenador, [ENTFIN-caso7-3.3], [ENTFIN-caso7-4.7], [ENTFIN-caso11-3.1] , [ENTFIN-caso13-5.2]
- Para desarrollar las cuestiones teóricas no he tenido dificultades en resolverlas en derive, solo se requerían algunos cálculos rutinarios [ENTINT-caso1-5.3], [ENTINT-caso2-5.3], [ENTINT-caso2-3.5], [ENTFIN-caso3-3.4], [ENTINT-caso5-5.3], [ENTFIN-caso7-3.4], [ENTINT-caso14-5.3] , [EXFIN-caso15-cues-1], [EXFIN-caso15-cues-2], [EXFIN-caso15-cues6], [EXFIN-caso15-cues9] , [EXFIN-caso4-cues], [ENTFIN-caso8-5.6], , [EXFIN-caso10-cues1], [EXFIN-caso10-cues6], [ENTFIN-caso11-3.4] , [ENTFIN-caso12-3.4], [ENTFIN-caso13-3.4].
- Para resolver las cuestiones teóricas usa derive pues no tiene confianza en sus cálculos [ENTFIN-caso6-3.4]
- Saben calcular determinantes de orden 3 a mano [ENTINT-caso1-5.4], [ENTFIN-caso1-4.9], [ENTFIN-caso3-4.9], [ENTFIN-caso6-4.9], [ENTINT-caso14-5.4], [ENTFIN-caso8-4.8], [ENTFIN-caso9-4.3], [ENTFIN-caso10-4.9], [ENTFIN-caso11-4.8.b], [ENTFIN-caso12-4.9], [ENTFIN-caso13-4.3],
- No saben calcular determinantes de orden 3 a mano [ENTFIN-caso2-4.9] , [ENTFIN-caso4-4.9], [ENTFIN-caso7-4.4]
- Saben calcular el rango de una matriz a mano [ENTFIN-caso2-4.11], [ENTFIN-caso3-4.11], [ENTFIN-caso5-4.4], [ENTFIN-caso6-4.11], [ENTFIN-caso9-4.5], [ENTFIN-caso10-4.11], [ENTFIN-caso11-4.8.b], [ENTFIN-caso12-4.9], [ENTFIN-caso13-4.5]
- No saben calcular el rango de una matriz a mano [ENTFIN-caso4-4.9], [ENTFIN-caso7-4.6]

- Saben calcular los autovalores de una matriz a mano [ENTFIN-caso2-4.12], [ENTFIN-caso3-4.12] , [ENTFIN-caso5-4.5], [ENTFIN-caso6-4.12], [ENTFIN-caso8-4.11], [ENTFIN-caso9-4.6], [ENTFIN-caso10-4.12], [ENTFIN-caso12-4.9],
- No saben calcular los autovalores de una matriz a mano [ENTFIN-caso4-4.9], [ENTFIN-caso7-4.7], [ENTFIN-caso11-4.8.b], [ENTFIN-caso13-4.6]
- Sabe resolver un sistema de ecuaciones lineales a mano [ENTINT-caso1-5.5], [ENTFIN-caso1-4.10], [ENTFIN-caso2-4.10], [ENTFIN-caso3-4.10], [ENTFIN-caso6-4.10], [ENTINT-caso14-5.5] , [ENTFIN-caso8-4.9], [ENTFIN-caso9-4.4], [ENTFIN-caso10-4.10], [ENTFIN-caso11-4.8.b], [ENTFIN-caso12-4.9], [ENTFIN-caso13-4.4],
- No sabe resolver un sistema de ecuaciones lineales a mano [ENTFIN-caso4-4.9], [ENTFIN-caso5-4.3], [ENTFIN-caso7-4.5],

Atributo 10.5. En general, ¿podemos afirmar que la estrategia didáctica empleada facilitaba al alumno y potenciaba en él su propia autonomía cognitiva?.

- Considero que tenía una suficiente AUTONOMÍA para desarrollar las actividades del aula [ENTINT-caso4-10.3] , [ENTINT-caso3-10.3] , [ENINT-caso5-10.3], [ENTINT-caso6-10.3] , [ENTINT-caso12-10.3.b] , [ENTINT-caso14-10.2.b]
- Me he sentido DUEÑO DE LA SITUACIÓN con respecto al programa DERIVE [ENTINT-caso4-10.2], [ENTINT-caso5-10.2] , [ENTINT-caso8-10.2], [ENTINT-caso10-10.2] , [ENTINT-caso12-10.2] , [ENTINT-caso14-10.2]
- Con derive se SIMPLIFICAN LOS PROCESOS y eso genera una sensación de autonomía pues permite replantear y pensar más además de motivar [ENTINT-caso1-3.5], [ENTINT-caso12-10.3]
- Es un trabajo CONTINUO más positivo que en clases tradicionales [ENTINI-caso2-19] ,
- Derive da la posibilidad de PENSAR EN MULTIPLES POSIBILIDADES de forma autónoma y según los resultados se van obteniendo los resultados posibles [ENTFIN-caso1-1.7] , [ENTINT-caso2-10.3], [ENTINI-caso2-18] , [ENTINI-caso13-23]
- Las dudas se han resuelto en clase lo cual ha facilitado la aparición de la AUTONOMÍA [ENTINT-caso2-10.3]

PARTE 11:

ATRIBUTOS Y ASPECTOS CARACTERÍSTICOS DE LA CUESTIÓN 11:

Atributo 11.1. ¿Crees que esta estrategia didáctica ha favorecido las relaciones interpersonales entre los alumnos? .

- Con el compañero de pupitre ha conseguido un considerable grado de amistad [ENTINT-caso2-11.2] , [ENTFIN-caso6-11.1], [ENTFIN-caso7-11.1] , [ENTINT-caso8-11.3], [ENTFIN-caso8-11.1] , [ENTFIN-caso11-11.2], [ENTFIN-caso11-11.2.b]
- Ha conseguido establecer lazos de amistad con algunos compañeros [ENTINT-caso3-11.3] , [ENTFIN-caso3-11] , [ENTFIN-caso12-11.1] , [ENTINT-caso13-11.1], [ENTFIN-caso13-11.3]
- He aumentando los lazos de amistad que había con algunos compañeros de clase [ENTFIN-caso4-11.2], [ENTINT-caso10-11.2]

Atributo 11.2. ¿Cómo ha sido el tipo de comunicación y relación que se ha observado entre los alumnos? ¿De qué hablaban?.

- Muy fluida, porque la clase se presta a la comunicación [ENTFIN-caso1-11.2]
- La relación con los compañeros ha sido muy buena [ENTINT-caso3-11.1], [ENTFIN-caso3-11.1], [ENTINT-caso8-11.1] , [ENTFIN-caso9-11.1], [ENTINT-caso10-11.1] , [ENTINI-caso11-24], [ENTFIN-caso11-2.3], [ENTINT-caso14-11.1], [ENTINT-caso14-g.2] , muy distendida [ENTINT-caso4-11.1], [ENTINT-caso6-11.1] , [ENTFIN-caso9-g.1] , [ENTINT-caso12-11.1] , [ENTFIN-caso13-11.2]
- La estrategia didáctica ha favorecido las relaciones entre alumnos [ENTINT-caso8-11.4]
- La comunicación ha sido básicamente sobre los compañeros más próximos [ENTINI-caso3-14], [ENTINT-caso3-11.4], [ENTFIN-caso10-11.2] , [ENTINT-caso12-11.2], [ENTFIN-caso12-11.2]
- La comunicación se centra sobre todo con el compañero de al lado [ENTFIN-caso1-11.2] , [ENTFIN-caso7-11.1] , [ENTINT-caso8-11.1] , [ENTFIN-caso11-2.4], [ENTINI-caso14-32]
- La comunicación se ha limitado al compañero de pupitre [ENTFIN-caso2-27], [ENTINT-caso2-11.1], [ENTFIN-caso2-11.1]
- Con el resto de compañeros (distintos a la pareja de trabajo) ha habido poca comunicación [ENTFIN-caso2-11.3]
- En la clase da poco tiempo a hablar de otra cosa que no sea matemáticas [ENTFIN-caso1-11.2] , [ENTFIN-caso2-11.2]
- El ambiente ha favorecido que se pudiera hablar de temas de álgebra lineal y de otros temas más personales [ENTFIN-caso4-11.2] , [ENTFIN-caso6-11.2], [ENTFIN-caso6-11.3] , [ENTFIN-caso7-11.2] , [ENTFIN-caso10-11.2] , [ENTFIN-caso13-11.2]

Atributo 11.3. ¿Ha habido alguna relación especial entre los alumnos antes y después de las clases?

- Había poca pues no daba tiempo ya que luego se quedaba después de la clase con el ordenador [ENTFIN-caso1-11.3]
- Había una relación de amistad, de jugar al mus, de salir por ahí juntos y la relación se mantiene [ENTFIN-caso3-11.3]
- Sí ha habido relación favorecido por el ambiente de clase [ENTFIN-caso4-11.3] , [ENTFIN-caso10-11.3]
- Sí, la relación se ha alargado a veces a periodos anteriores y posteriores a la propia clase [ENTFIN-caso6-11.3]
- Era muy motivante la relación que tenías con la gente [ENTINI-caso9-19]
- Ha quedado con los compañeros para hacedr problemas y ejercicios [ENTINI-caso14-34]

Atributo 11.4. ¿Cómo ha sido la relación entre alumnos y profesor? ¿Existen diferencias respecto de otras clases

- Ha sido una buena relación con el profesor [ENTINT-caso2-11.3], [ENTINT-caso3-11.3.b], [ENTFIN-caso4-11.1] , [ENTINT-caso6-11.3] , [ENTINT-caso8-11.3] , [ENTINT-caso10-11.3] , [ENTINT-caso12-11.3], [ENTINT-caso12-11.3]
- La relación con el profesor ha sido normal [ENTINT-caso14-11.3]
- Ha sido una relación mucho más cercana, quizás porque hay mucha menos gente [ENTINT-caso1-2.1], [ENTINT-caso12-11.4.b]
- Ha sido una relación muy cercana y muy humana más que en las clases normales [ENTFIN-caso3-g.4] , [ENTINT-caso12-11.4.b]

- El profesor pasaba por los pupitres y resolvía las dudas rápidamente [ENTINT-caso1-2.1] , [ENTINI-caso13-25]
- Conocía al profesor de años anteriores [ENTINI-caso11-10]
- El profesor ha mostrado mucho interés [ENTINI-caso11-30], y ha habido muy buena comunicación con el profesor [ENTFIN-caso11-2.1] , la valora con 5 sobre 5 [ENTFIN-caso11-2.2]

Atributo 11.5. ¿Las relaciones personales han generado un ambiente que ha favorecido la enseñanza y aprendizaje de los contenidos del curso

- Si porque siempre se comentaban los resultados o dudas con el compañero de al lado [ENTFIN-caso1-11.2]
- Casi todos los problemas que he tenido los he compartido con el compañero de pupitre y se contrastaban los resultados [ENTINT-caso1-2.1], [ENTFIN-caso2-11.2], [ENTFIN-caso3-11.2], [ENTINI-caso5-15], [ENTFIN-caso7-11.2], [ENTFIN-caso8-11.2], [ENTINI-caso10-22] , [ENTINI-caso11-22] , [ENTINT-caso13-11.4], [ENTINT-caso12-11.4] , [ENTINI-caso14-32]
- El ambiente del curso ha favorecido el aprendizaje [ENTINI-caso10-19] , [ENTINI-caso14-15] , [ENTINI-caso14-17]

Atributo 11.6. ¿Cómo ha sido la valoración general del ambiente que ha provocado nuestra estrategia didáctica?.

- Un ambiente agradable y participativo [ENTFIN-caso1-11.4]
- El ambiente de clase era distendido [ENTFIN-caso4-11.2]
- El ambiente ha sido bueno por el reducido número de alumnos [ENTINT-caso2-11.4], [ENTINI-caso3-34b], [ENTINT-caso4-11.2] , [ENTINT-caso6-11.4], [ENTINI-caso9-19], [ENTINT-caso12-11.4]
- El ambiente ha sido bueno por las buenas relaciones entre los compañeros [ENTFIN-caso3-11.4] , [ENTINT-caso13-11.4]
- El ambiente del curso ha sido favorecido por el uso del ordenador [ENTINI-caso9-19]
- El ambiente ha sido favorecido por la estrategia didáctica empleada en el curso [ENTINT-caso2-11.4] , [ENTINI-caso3-14], [ENTINT-caso3-11.4] , [ENTINT-caso6-11.4], [ENTFIN-caso8-11.2] , [ENTINT-caso12-11.4]
- Puntuación del ambiente del curso: 5 [ENTFIN-caso1-11.4], [ENTFIN-caso7-11.4], [ENTFIN-caso9-11.4] , [ENTFIN-caso10-11.4] , [ENTFIN-caso11-2.5]
- Puntuación del ambiente del curso: 4 [ENTFIN-caso2-11.4], [ENTFIN-caso3-11.4] , [ENTFIN-caso6-11.4] , [ENTFIN-caso8-11.4] , [ENTINT-caso12-11.4] , [ENTFIN-caso13-11.4]
- Puntuación del ambiente del curso: 3 [ENTFIN-caso4-11.4]

PARTE 12:

ATRIBUTOS Y ASPECTOS CARACTERÍSTICOS DE LA CUESTIÓN 12:

Atributo 12.1. ¿Cuál es la actitud del alumno ante el trabajo en grupo?

- La primera impresión es de rechazo y reticencia hacia el trabajo en grupo [ENTINI-caso1], [ENTINI-caso3-12] , [ENTINI-caso11-9]
- Inicialmente tiene preferencia por el trabajo individual [ENTINI-caso2-12]

- Inicialmente tiene preferencia por el trabajo en grupo [ENTINI-caso5-12] , [ENTINI-caso9-7] , [ENTINI-caso10-6], [ENTINI-caso13-4], [ENTINI-caso14-14], [ENTINI-caso14-15]
- El tipo de trabajo que hemos desarrollado en clase ha sido muy bueno [ENTFIN-caso1-g.3] , [ENTINI-caso2-13], [ENTFIN-caso3-10.3] , [ENTFIN-caso4-12.1] , [ENTFIN-caso5-12.1], [ENTFIN-caso6-12.1], [ENTFIN-caso7-12.1] , [ENTINT-caso8-12.1], [ENTFIN-caso9-12.1], [ENTFIN-caso10-12.1], [ENTFIN-caso11-12.1], [ENTFIN-caso12-12.1], [ENTFIN-caso13-12.1], [ENTINI-caso14-18]

Atributo 12.2. El tipo de trabajo en grupo que se ha desarrollado en clase ¿crees que ha favorecido el aprendizaje de los contenidos del curso? .

- El trabajo en grupo no ha sido especialmente relevante [ENTINI-caso9-8]
- El trabajo en grupo es muy util en Matemáticas [ENTINI-caso12-5]
- Las parejas de trabajo han apoyado y guiado las manipulaciones con el ordenador y las investigaciones [ENTINI-caso1] , [ENTFIN-caso2-12.1], [ENTFIN-caso3-12.1], [ENTFIN-caso7-12.1], [ENTFIN-caso10-10.3.b] , [ENTFIN-caso12-12.1] , [ENTINI-caso13-19] , [ENTINI-caso14-31]
- El trabajo en grupo ha ayudado a aprender mejor los conceptos de álgebra lineal [ENTINT-caso1-12.1] , [ENTFIN-caso1-12.1] , [ENTFIN-caso2-12.1] , [ENTFIN-caso3-12.1], [ENTFIN-caso2-12.3], [ENTFIN-caso4-12.1] , [ENTINT-caso4-12.1] , [ENTINT-caso5-12.2.b] , [ENTFIN-caso5-12.1] , [ENTINT-caso6-12.1] , [ENTFIN-caso6-12.1] , [ENTFIN-caso7-12.1] , [ENTFIN-caso8-12.1] , [ENTFIN-caso9-12.1], [ENTINT-caso10-12.1] , [ENTINT-caso10-12.1] , [ENTINT-caso13-12.1] , [ENTFIN-caso13-12.1.b] , [ENTINT-caso14-12.1]
- Las colaboraciones pueden provocar ciertas dependencias del compañeros [ENTINI-caso5-15]
- Las colaboraciones han incrementado el aprendizaje en matemáticas [ENTINT-caso12-3]

Atributo 12.3. ¿Crees que el uso de este programa de ordenador, ha propiciado un TIPO DE COLABORACION ESPECIAL entre los compañeros?.

- El uso de derive ha provocado una colaboración entre los compañeros en cuanto a comprobaciones, dudas y contrastes de resultados [ENTINI-caso1] , [ENTINT-caso1-2.1] , [ENTINI-caso2-13], [ENTINI-caso2-14], [ENTINT-caso2-12.2] , [ENTINT-caso5-12.2.c] , [ENTFIN-caso6-12.2] , [ENTFIN-caso7-12.2], , [ENTFIN-caso8-12.2] , [ENTFIN-caso9-12.2] , [ENTFIN-caso10-12.2], [ENTFIN-caso11-12.2.b] , [ENTFIN-caso12-12.2]
- Ha habido una colaboración especial porque se comentaban todos los resultados con el compañeros [ENTFIN-caso1-12.2], [ENTINI-caso2-14] , [ENTFIN-caso3-12.2] , [ENTFIN-caso4-12.2] , [ENTINT-caso5-12.2.c], [ENTFIN-caso5-12.2] , [ENTFIN-caso6-12.2] , [ENTFIN-caso7-12.2] , [ENTFIN-caso8-12.2] , [ENTFIN-caso9-12.2] , [ENTFIN-caso10-12.2], [ENTFIN-caso11-12.2.b] , [ENTFIN-caso13-12.2]
- Sin el uso del programa no se hubiera suscitado este tipo de colaboración [ENTINT-caso2-12.2], [ENTFIN-caso12-12.2.b] , [ENTFIN-caso13-12.2.b]
- El ordenador ha sido una herramienta que ha favorecido la colaboración [ENTINT-caso10-12.2.b] , [ENTINT-caso10-12.3.b] ,
- Ha quedado con los compañeros para preparar el examen final [ENTFIN-caso3-12.3]
- Ha quedado con los compañeros para resolver problemas y ha tenido una experiencia positiva [ENINT-caso5-12.4] , [ENTFIN-caso7-10.3] , [ENTINI-caso10-23] , [ENTINT-caso8-12.4] , [ENTINT-caso10-12.4] , [ENTINT-

caso12-12.3] , [ENTINI-caso13-21] , [ENTINT-caso13-12.4] , [ENTINI-caso14-34] , [ENTINT-caso14-12.4]

Atributo 12.4. ¿Crees que las colaboraciones que se han desarrollado, han favorecido las relaciones personales que había entre los alumnos, y entre alumno y profesor?.

- Estas colaboraciones favorecen una comunicación fluida entre los compañeros con el que se puede comentar y preguntar los resultados [ENTFIN-caso1-11.2] , [ENTFIN-caso3-12.2.b] , [ENTINT-caso5-12.3] , [ENTINT-caso6-12.3], [ENTINT-caso10-12.3.b], [ENTFIN-caso11-12.2.b], [ENTINI-caso14-33]
- Las colaboraciones han incrementado las relaciones personales entre compañeros [ENTINT-caso5-12.2.c] , [ENTINT-caso8-12.3] , [ENTINT-caso12-12.3] , [ENTINT-caso13-12.3] , [ENTINT-caso14-12.3]
- Con este trabajo en grupo se observa un apoyo entre las parejas de trabajo [ENTINI-caso1], [ENTINI-caso2-13], [ENTINI-caso3-13] , [ENTINT-caso4-12.1] , [ENTINI-caso5-13] , [ENTINI-caso11-22]

Atributo 12.5. ¿Crees que el ambiente general ha favorecido la aparición de aprendizajes colaborativos?

- La resolución de cuestiones, ejercicios y problemas en parejas de trabajo ha sido favorecida por el ambiente que ha proporcionado el ordenador [ENTINT-caso1-12.2], [ENTINT-caso5-12.2.a] , [ENTINT-caso6-12.2], [ENTINT-caso8-12.2] , [ENTINT-caso10-12.2] , [ENTINI-caso11-23] , [ENTINT-caso12-12.2] , [ENTINT-caso13-12.2]
- El ambiente de la clase ha propiciado un clima de trabajo que contagiaba interés y daba motivación [ENTINT-caso4-12.2]

PARTE 13:

ATRIBUTOS Y ASPECTOS CARACTERÍSTICOS DE LA CUESTIÓN 13:

Atributo 13.1. El ritmo que hemos llevado en clase ¿cómo ha sido? ¿rápido, lento, normal?.

- El ritmo ha sido más bien RAPIDO: [ENTINT-caso1-13.2] , [ENTFIN-caso5-13.1], [ENTINT-caso6-13.2], [ENTFIN-caso6-13.1]
- El ritmo ha sido rápido y muy rápido en algunas ocasiones [ENTINT-caso14-13.2] , [ENTINI-caso14-20]
- El ritmo ha sido variable, lento al principio y rápido al final [ENTFIN-caso1-13.1], [ENTINT-caso2-13.2] , [ENTINT-caso8-13.2], [ENTFIN-caso8-13.1] , [ENTFIN-caso11-13.1], [ENTINT-caso13-13.1],
- Al final un ritmo un poco agobiante [ENTINT-caso13-13.2]
- El ritmo de las clases ha sido normal tirando a rápido [ENTINT-caso3-13.2], [ENTFIN-caso3-13.1]
- El ritmo de la clase ha sido normal, si había dudas se paraba [ENTINT-caso4-13.2], [ENTFIN-caso4-13.1] , [ENTFIN-caso9-13.1]
- El ritmo ha sido dinámico y activo, se trabajaba continuamente [ENTINT-caso5-30] , [ENTFIN-caso7-13.1]
- El ritmo de la clase ha sido lento al principio [ENTINI-caso10-17] , [ENTINT-caso10-13.2]

- El ritmo de la clase ha sido bueno y adecuado [ENTFIN-caso11-13.1], [ENTINT-caso12-13.2], [ENTFIN-caso12-13.1], [ENTINI-caso14-28], [ENTINI-caso14-29]

Atributo 13.2. Haciendo un balance general de las sesiones de clase ¿la dinámica empleada en clase ha podido generar algún aburrimiento en el alumnado o por el contrario ha provocado que el alumno se pierda?.

- El alumno no se ha aburrido en las clases: [ENTINT-caso1-13.1], [ENTFIN-caso1-13.2], [ENTFIN-caso2-13.2] , [ENTFIN-caso3-13.2], [ENTINT-caso4-13.1], [ENTINT-caso5-13.1], [ENTFIN-caso5-13.2] , [ENTINT-caso6-13.1], [ENTFIN-caso6-13.2], [ENTFIN-caso7-13.2] , [ENTINT-caso8-13.1], [ENTFIN-caso8-13.4], [ENTFIN-caso9-13.2] , [ENTINT-caso10-13.1], [ENTFIN-caso10-13.2], [ENTINI-caso11-28], [ENTFIN-caso11-13.2], [ENTINT-caso12-13.1] , [ENTFIN-caso12-13.6.c], [ENTINI-caso13-22], [ENTINT-caso13-13.1], [ENTFIN-caso13-13.2]
- Uno de los alumnos más aventajados afirma que no se ha encontrado perdido [ENTFIN-caso12-13.6.c]
- Motivos de que no se aburriera:
  - Se le han pasado las clases rápidamente [ENTINT-caso1-13.1], [ENTINI-caso3-30], [ENTINT-caso3-13.1], [ENTFIN-caso3-13.2] , [ENTINT-caso6-13.1], [ENTFIN-caso6-13.2],
  - No había tiempo para aburrirse [ENTFIN-caso2-13.2], [ENTFIN-caso11-13.2]
  - Se ha tratado de un trabajo activo que no propiciaba el aburrimiento [ENTFIN-caso2-13.2], [ENTFIN-caso4-13.2] , [ENTINT-caso5-13.2], [ENTFIN-caso7-13.1], [ENTINT-caso8-13.1], [ENTFIN-caso11-13.2]
- El alumno no se ha aburrido en las clases solo la última media hora por cansancio [ENTINI-caso3-30], [ENTINT-caso3-13.1] , [ENTFIN-caso3-13.2], [ENTINT-caso4-13.1], [ENTINT-caso8-13.1], [ENTINI-caso13-22] , [ENTINT-caso13-13.1], [ENTINI-caso14-37]
- Se ha aburrido porque se hace muy densa la clase con mucho trabajo [ENTINI-caso14-37]
- Se ha aburrido en el tema de determinantes y sistemas porque ya los dominaba [ENTINI-caso10-24]

- El alumno se ha encontrado perdido en las clases?:
  - En el primer capítulo de aplicaciones lineales me quede atascado [ENTINT-caso1-13.1]
  - No me he encontrado perdido en las clases [ENTINT-caso2-13.3], [ENTINI-caso3-31] , [ENTINT-caso3-3.4] , [ENTINT-caso4-13.3], [ENTINT-caso12-13.3]
  - Si algún día faltaba el día siguiente estaba perdida y tenía que hacer muchos esfuerzos [ENTINI-caso13-24]
  - En algún concepto nuevo sí se ha encontrado perdida [ENTINT-caso13-13.3]
  - Me he encontrado perdida porque a veces no me da tiempo hacer un ejercicio y ya estamos en otro [ENTINT-caso14-13.3]

Atributo 13.3. A la vista de las observaciones realizadas en clase ¿ha habido varios niveles de aprendizaje?.

- Había cuatro niveles de aprendizaje: un nivel muy alto (con 1 alumno) un nivel alto (3 alumnos) un nivel normal (4 alumnos) y un nivel bajo (7 alumnos) [ENTFIN-caso3-13.5]

- Había tres niveles de aprendizaje: nivel alto , nivel normal y los despistados [ENTFIN-caso4-13.5] , [ENTFIN-caso7-13.3], [ENTFIN-caso7-13.5] , [ENTFIN-caso10-13.5] , [ENTFIN-caso11-13.5]
- Había dos niveles de aprendizaje: nivel avanzado, y nivel normal: [ENTFIN-caso1-13.5], [ENTFIN-caso8-13.5]
- Consideran que no había distintos niveles de aprendizaje, todos estaban en un mismo nivel [ENTFIN-caso6-13.5], [ENTFIN-caso9-13.5]
- No tiene una valoración de que existieran varios niveles de aprendizaje [ENTFIN-caso2-13.5], [ENTFIN-caso5-13.5]
- Cree que había gente que le gustaban más las matemáticas y otra que no [ENTFIN-caso13-13.5]
- Si había varios niveles, había de todo [ENTFIN-caso12-13.5]
- Considera que está en el nivel normal [ENTFIN-caso1-13.4], [ENTFIN-caso7-13.5]
- Considera que está en el nivel bajo [ENTFIN-caso8-13.5]

Atributo 13.4. Los problemas planteados ¿se podían clasificar en varios niveles de dificultad?¿han provocado interés?.

- Se podrían clasificar en problemas fáciles, problemas normales y problemas difíciles 3 niveles de dificultad [ENTFIN-caso4-13.3] , [ENTINT-caso5-13.4], [ENTFIN-caso6-13.3], [ENTFIN-caso7-13.4], [ENTINT-caso10-13.4], [ENTFIN-caso10-13.3] , [ENTFIN-caso11-13.3], [ENTFIN-caso12-13.4], [ENTFIN-caso13-13.3]

- Se podrían clasificar en problemas asequibles y problemas complejos: [ENTINT-caso1-13.3], [ENTFIN-caso1-13.3], [ENTFIN-caso9-13.5]
- Todos los problemas eran parecidos con un una dificultad relativa [ENTFIN-caso2-13.3]
- Los problemas eran un poco difíciles [ENTINI-caso14-41]
- Los problemas no eran todos inabordables [ENTFIN-caso8-13.4]
- Se podrían clasificar en cuatro niveles: muy alta, alta, medio alta y normal [ENTFIN-caso3-13.3]
- Ha resuelto pocos [ENTFIN-caso6-13.4] ,
- Ha resuelto al menos un 50% de los problemas: [ENTFIN-caso1-13.4], , [ENTINT-caso4-13.4] [ENTFIN-caso4-13.4] , [ENTFIN-caso7-13.4], [ENTINT-caso8-13.6] , [ENTFIN-caso9-13.3], [ENTFIN-caso11-13.4] (aunque no entrega ninguno) ,
- Ha resuelto al menos un 60% de los problemas [ENTINT-caso5-13.4]
- Ha realizado un 80% de los problemas [ENTFIN-caso2-13.4]
- Ha realizado un 70% de los problemas [ENTFIN-caso3-13.4], [ENTFIN-caso10-13.4] , [ENTFIN-caso13-13.4]
- Ha resuelto casi todos [ENTFIN-caso12-13.4.b], [ENTINT-caso12-13.4]
- Los problemas han suscitado un INTERES ESPECIAL un “gusanillo” en su resolución: [ENTINT-caso1-13.5], [ENTINT-caso4-13.5], [ENTINT-caso5-13.5], [ENTINT-caso6-13.5] , [ENTINT-caso8-13.5], [ENTINT-caso10-13.5] , [ENTINT-caso12-13.5]

Atributo 13.5. Las diferentes actividades que se han propuesto: ejemplos de investigación, ejercicios de manipulación, cuestiones teóricas... ¿permitían una adecuada atención a la diversidad en cuanto a los niveles de aprendizaje?..

- Los ejemplos de investigación eran asequibles para todos: [ENTINT-caso3-10.1], [ENTINT-caso10-10.1], [ENTINI-caso11-18]

- El examen ha sido asequible para todos: [ENTFIN-caso1-13.6] , [ENTFIN-caso2-3.6], [ENTFIN-caso3-13.5] , [ENTFIN-caso4-13.6] , [ENTFIN-caso5-13.6] , [ENTFIN-caso6-13.6] , [ENTFIN-caso7-13.5], [ENTFIN-caso8-13.6] , [ENTFIN-caso9-13.6], [ENTFIN-caso10-13.6], [ENTFIN-caso11-13.6], [ENTFIN-caso12-13.6], [ENTFIN-caso13-13.6]
- En el examen la parte teórica ha sido difícil [ENTFIN-caso5-13.6]

Atributo 13.6. El profesor ¿ha tratado adecuadamente la diversidad?

- Se ha sentido totalmente atendido en las dudas que ha ido teniendo [ENTINT-caso1-2.1], [ENTFIN-caso7-13.6]
- No considera que nadie tuviese un trato privilegiado, todos los alumnos han tenido un trato similar [ENTFIN-caso6-13.6], [ENTFIN-caso9-13.6.b], [ENTFIN-caso12-13.5.b], [ENTFIN-caso12-13.5.c], [ENTFIN-caso13-13.6.b]
- El profesor ha intentado que todos fuesen al mismo ritmo [ENTFIN-caso12-13.6.b]

PARTE 14:

ATRIBUTOS Y ASPECTOS CARACTERÍSTICOS DE LA CUESTIÓN 14:

Atributo 14.1. ¿Cómo era la actitud inicial ante las matemáticas, ante el álgebra lineal y ante los ordenadores?. .

- Actitud positiva ante los ordenadores [ENCINI-caso1], [ENINI-caso2-11] , [ENCINI-caso3], [ENCINI-caso4], [ENCINI-caso6-6] , [ENCINI-caso7], [ENCINI-caso8] , [ENTINI-caso9-20], [ENTINI-caso10-4] , [ENCINI-caso10-4], [ENCINI-caso11-5], [ENCINI-caso12-4] , [ENCINI-caso12-2] , [ENCINI-caso13-2] , [ENCINI-caso14-5] , [ENTINI-caso14-3], [ENTINI-caso14-13],
- Le gustaban las matemáticas [ENTINI-caso2-10], [ENTINT-caso3-14.2], [ENCINI-caso4], [ENTINI-caso5-7], [ENCINI-caso7-5], [ENCINI-caso8-5], [ENCINI-caso9-4], [ENCINI-caso11-4] , [ENCINI-caso12-3] , [ENCINI-caso12-4],[ENCINI-caso13-2], [ENTINT-caso13-14.2]
- Tenía cierta desmotivación con la enseñanza universitaria de las matemáticas [ENTINI-caso11-5], [ENTINI-caso14-11]
- No tiene un interés especial ante el álgebra lineal [ENTINT-caso4-14.2]
- No tiene interés especial por las matemáticas [ENCINI-caso6-5], [ENCINI-caso14-4], [ENTINI-caso15-7]

Atributo 14.2. Haciendo un balance general del curso ¿cómo han resultado las clases, larga, cortas,... se han pasado rápidamente?.

- No se ha aburrido en ningún momento y las clases han pasado rápidamente [ENTINT-caso1-13.1], [ENTINT-caso1-14.1], [ENTFIN-caso1-13.2], [ENTFIN-caso1-14.1] , [ENTFIN-caso7-13.2], [ENTFIN-caso7-14.1] , [ENTINT-caso8-1.41], [ENTFIN-caso8-14.4] , [ENTFIN-caso11-14.1]
- Las clases han pasado rápidamente [ENTINI-caso2-29] , [ENTINT-caso2-14.1] , [ENTFIN-caso2-14.1] , [ENTFIN-caso5-14.1] , [ENTFIN-caso6-14.1], [ENTINT-caso10-14.b] ,[ENTFIN-caso12-14.1] , [ENTFIN-caso13-14.2.b], [ENTINT-caso13-14.1] , [ENTFIN-caso13-14.1]
- Las clases han pasado normal, salvo el último cuarto de hora [ENTFIN-caso3-14.1]

- Las clases han resultado cortas porque eran muy participativas [ENTINT-caso4-14.1],
- No se ha aburrido en las clases [ENTFIN-caso2-13.2], [ENTINI-caso5-29] , [ENTINT-caso6-13.1], [ENTINI-caso10-24], [ENTINI-caso11-28], [ENTFIN-caso11-13.2] ,
- El alumno no se ha aburrido en las clases, salvo al final por cansancio [ENTINI-caso3-30], [ENTINI-caso13-22]
- Algunas clases han resultado largas porque eran clases de dos horas [ENTFIN-caso9-14.1]

***Atributo 14.3. El hecho de utilizar el ordenador y especial el programa derive ¿ha motivado especialmente a los alumnos para estudiar Matemáticas? ¿por qué?.*.**

- Al utilizar el programa DERIVE, los cálculos se realizaban rápidamente, lo cual permitía que el alumno llegase hasta el final de los problemas [ENTFIN-caso1-4.2]
- Lo que más ha gustado son las posibilidades que ofrece DERIVE de hacer cosas que antes no se podían hacer [ENTINT-caso1-g.2]
- El haber utilizado el ordenador le ha motivado y OBLIGADO a estudiar las matemáticas bastante [ENTFIN-caso2-14.3], [ENTFIN-caso4-14.2], [ENTFIN-caso3-14.2] , [ENTINT-caso4-g.2], , [ENTFIN-caso4-g.1], [ENTFIN-caso5-14.2], [ENTFIN-caso6-5.3] , [ENTINT-caso6-g.6] , [ENTFIN-caso6-1.42] , [ENTINT-caso8-14.2]
- El haber utilizado el ordenador ha motivado a estudiar las matemáticas [ENTINI-caso9-20] , [ENTINI-caso10-21], [ENTFIN-caso10-14.2], [ENTINI-caso11-14] , [ENTFIN-caso11-14.2], [ENTINI-caso11-13], [ENTINT-caso12-14.5], [ENTFIN-caso12-14.4] , [ENTFIN-caso12-14.2], [ENTINI-caso13-32], [ENTFIN-caso13-14.4]
- El hecho de utilizar el ordenador me ha motivado bastante para IR A CLASE [ENTFIN-caso9-14.2]
- El haber utilizado el ordenador hace más divertidas las clases y más amenas por ser algo nuevo y porque le gustan los ordenadores [ENTFIN-caso7-14.2]
- El haber usado el programa le ha permitido y ayudado a aprobar la asignatura Matemáticas I en septiembre (suspendió en febrero) [ENTFIN-caso6-14.2] , [ENTFIN-caso7-g.4] , [ENTFIN-caso13-14.4.b]
- El hecho de que hubiera poca gente en el curso ha sido muy motivador [ENTFIN-caso8-g.6]

Atributo 14.4. La metodología que hemos empleado ¿ha aumentado o disminuido el interés por las matemáticas? ¿cuales pueden ser los motivos?.

- La metodología ha suscitado un interés especial y una motivación especial por la RESOLUCION de problemas [ENTINT-caso1-14.3] , [ENTINT-caso2-14.3] , [ENTINT-caso3-14.3] , [ENTFIN-caso6-5.3] , [ENTINT-caso6-14.3] , [ENTINT-caso8-13.5] , [ENTINI-caso10-33], [ENTINI-caso11-2], [ENTINT-caso12-13.6.b],
- El profesor ha motivado bastante para estudiar matemáticas [ENTINI-caso11-30]
- En la resolución de problemas no ha tenido un interés excesivo [ENTINT-caso4-14.3]
- El ambiente de COLABORACION ha motivado bastante al alumno [ENTINT-caso6-12.3] , [ENTINI-caso13-25], [ENTINT-caso13-14.3]
- Las investigaciones que se planteaban han sido muy motivadoras para el alumno [ENTFIN-caso8-10.1] , [ENTINT-caso8-13.5], [ENTINI-caso11-27] , [ENTINI-caso11-19], [ENTFIN-caso12-g.2]

- Se ha mantenido su interés por las matemáticas [ENTFIN-caso2-14.4], [ENTFIN-caso5-14.4] , [ENTFIN-caso9-14.4]
- Ha aumentado el interés por el álgebra lineal porque ahora se observan los resultados [ENTINT-caso1-14.2], [ENTINT-caso1-14.5], [ENTINT-caso8-14.2]
- Ha aumentado el interés por el álgebra lineal porque cuando se aprenden las cosas entonces gustan más y motiva más [ENTFIN-caso1-14.4]
- Ha aumentado el interés por las matemáticas, en el primer cuatrimestre llegó a aborrecerlas [ENTINT-caso3-14.5] , [ENTFIN-caso3-14.4]
- En general ha aumentado su interés por las matemáticas [ENTINT-caso14.14.5], [ENTINT-caso6-14.5], [ENTFIN-caso6-g.1] , [ENTFIN-caso7-14.4] , [ENTINT-caso8-14.5] , [ENTFIN-caso8-14.4], [ENTINT-caso10-14.5], [ENTFIN-caso10-14.4] , [ENTINI-caso11-26], [ENTINI-caso11-26] , [ENTFIN-caso11-14.4] , [ENTINT-caso12-13.6], [ENTINT-caso13-14.5], [ENTINT-caso14-14.5]
- Ha aumentado su interés por las matemáticas, y la forma de tratar las matemáticas ha resultado bonita [ENTINT-caso8-14.3]
- Ha fomentado que trabajase más con las matemáticas [ENTINT-caso2-14.5]
- Nunca había estudiado una asignatura tanto en la vida [ENTINT-caso2-g.4]
- Me ha gustado mucho porque ves el álgebra lineal de una manera diferente [ENTINT-caso1-2.3] , [ENTFIN-caso8-14.4]
- Siempre el hecho de hacer algo distinto motiva más [ENTFIN-caso4-1.8]
- La dinámica de clase obligaba a estar en situación activa obligando a pensar y eso motiva bastante [ENTINI-caso5-27] , [ENTFIN-caso7-2.8]

Atributo 14.5.¿Cuánto ha sido el tiempo que ha dedicado el alumno semanalmente a la asignatura?.

- Muchas horas [ENTINT-caso1-14.4]
- Ha dedicado más horas que a cualquier otra asignatura del curso [ENTINT-caso14-14.4]
- Ha dedicado de 4 a 6 horas semanales [ENTINT-caso2-14.4] , [ENTFIN-caso2-14.3]
- Ha dedicado entre 3 y 6 horas semanales [ENTINT-caso10-14.4], [ENTFIN-caso10-14.3]
- Al principio dedicaba 3 horas semanales [ENTINT-caso3-14.4] y luego al final 8 horas [ENTFIN-caso3-14.3]
- Ha dedicado 10 horas semanales [ENTINT-caso6-14.4] , [ENTFIN-caso6-14.3] ,
- Ha dedicado 3 o 4 horas semanales [ENTFIN-caso11-14.3]
- Ha dedicado 6 horas semanales [ENTFIN -caso8-14.3.]
- Ha dedicado 4 ó 5 horas semanales [ENTFIN-caso12-14.3], [ENTINT-caso13-14.4], [ENTFIN-caso13-14.3]
- Ha dedicado 5 horas semanales [ENTINT-caso4-14.4]
- Ha dedicado 4 horas semanales [ENTFIN-caso7-14.3]
- Ha dedicado 2 horas semanales [ENTFIN-caso5-14.3]
- Ha dedicado poco tiempo solo al final del curso [ENTFIN-caso9-14.3]

Atributo 14.6. ¿Qué valoración merece este curso?.

- Un 8,5 sobre 10 [ENTINT-caso2-g.1]
- Un 7,5 sobre 10 [ENTINT-caso3-g.1] , [ENTINT-caso6-g.1] , [ENTINT-caso8-g.1]
- Un 7 sobre 10 [ENTINI-caso10-30], [ENTFIN-caso10-g.6], [ENTINT-caso12-g.1]
- Un 8,5 sobre 10 [ENTINT-caso14-g.1]

- Un 10 sobre 10 [ENTINT-caso4-g.1]
- Valoración positiva [ENTINI-caso11-31]

Atributo 14.7. ¿El alumno volvería a elegir este grupo experimental?.

- El alumno volvería a elegir con más seguridad este grupo experimental [ENTINT-caso1-g.5], [ENTFIN-caso1-g.2] , [ENTFIN-caso2-gen] , [ENTINT-caso3-g.5], [ENTFIN-caso3-g.3], [ENTFIN-caso4-g.4] , [ENTFIN-caso5-g.4], [ENTINT-caso5-g.5], [ENTINI-cvaso5-35], [ENTINT-caso6-g.5], [ENTFIN-caso6-g.4] , [ENTFIN-caso8-g.4], [ENTINT-caso8-g.1] , [ENTFIN-caso8.g,4] , [ENTFIN-caso9-g.4], [ENTINI-caso10-33], [ENTINT-caso10-g.5] , [ENTINI-caso11-33], [ENTINT-caso12-g.5], [ENTFIN-caso12-g.4] , [ENTINI-caso13-31], [ENTINT-caso13-g.5] , [ENTFIN-caso13-g.5] , [ENTINI-caso14-42], [ENTINT-caso14-g.5]

Atributo 14.8. ¿Cómo ha sido la motivación que ha suscitado el curso en el alumnado? .

- Lo que más ha gustado del curso es que se evitan los cálculos mecánicos y se da la posibilidad de interpretar [ENINT-caso8-g.2]
- Lo que más me ha gustado del curso es que éramos pocos [ENTINI-caso10-26]
- El curso ha sido muy satisfactorio para todos [ENTFIN-caso10-g.4]

PARTE 15:

ATRIBUTOS Y ASPECTOS CARACTERÍSTICOS DE LA CUESTIÓN 15:

Atributo 15.1. Valoración general de los alumnos de estas clases.

- Ha gustado bastante porque se ha visto el álgebra de una manera mucho más profunda [ENTINT-caso1-2.3], [ENTINT-caso3-g.2] , [ENTINI-caso11-27],
- Es otro método de ver las matemáticas [ENTINT-caso10-g.2]
- Cuando terminaban las clases tenías la sensación de que habías aprendido algo nuevo [ENTIN-caso3-36], [ENTINI-caso10-22] ,
- Volverían a elegir este grupo experimental [ENTFIN-caso1-g2], [ENTFIN-caso2-g2], [ENTFIN-caso3-g.5], [ENTFIN-caso4-g.4] , [ENTFIN-caso5-g.4] , [ENTFIN-caso6-g.4], [ENTFIN-caso7-g.4], [ENTFIN-caso8-g.4], [ENTFIN-caso9-g.4] , [ENTINT-caso10-g.5] , [ENTINI-caso11-33], [ENTINT-caso12-g.5] , [ENTINT-caso15-g.5],
- Valoración de la dinámica del curso:
  - Un 10 [ENTFIN-caso4], [ENTFIN-caso5-11.4], [ENTFIN-caso7-11.4]
  - Un 8,5 [ENTINT-caso14-g.1]
  - Un 8 [ENTINT-caso10-g.1]
  - Un 7,75 [ENTINT-caso3]
  - Un 7 [ENTINT-caso6-g.1], [ENTINT-caso8-g.1], [ENTINT-caso12-g.1]

Atributo 15.2. Comparativa del ambiente de esta clase con las clases tradicionales.

- En las clases normales haces casi todo el tiempo en teoría, no se hacen casi ejercicios y en estas clases da tiempo a hacerlos, haces muchos [ENTINT-caso1-7.1], [ENTINI-caso3-15] , [ENTINI-caso9-17] , [ENTINT-caso12-g.8],
- Es muy positivo el hecho de no estar cogiendo apuntes [ENTIN-caso3-33] , [ENTFIN-caso6-g.2] , [ENTINT-caso13-g.2]

- Es una clase muy activa y dinámica [ENTINT-caso5-g.2], mejor que las clases habituales [ENTFIN-caso7-2.8] , [ENTINT-caso12-g.10] , [ENTFIN-caso13]
- Es una clase con un trabajo intuitivo, descubriendo el concepto [ENTINI-caso11-27]
- Es más entretenido el trabajo con ordenador [ENTINI-caso14-37]
-

Atributo 15.3. Elementos que incorpora el programa DERIVE en el ambiente de la clase.

- Con el programa DERIVE se puede dedicar más tiempo a enfocar el problema de varias formas pues los cálculos no cansan porque los hace rápido [ENTINT-caso1-9.2],
- Se puede trabajar de forma autónoma pues DERIVE permite descubrir nuevos caminos [ENTINT-caso1-12.2],
- Sin estar delante del ordenador encuentras a veces un problema y es que no sabes hacer nada [ENTINT-caso1-13.5],
- El uso del programa ha sido un elemento muy positivo en el ambiente de clase [ENTFIN-caso4-g.1], [ENTINT-caso6-g.2b], [ENTFIN-caso8-g.6],
- Se trata de una clase muy experimental con la ayuda del ordenador [ENTINT-caso5-g.2] , [ENCINI-caso7-6], [ENTINT-caso8-5.6], , [ENTFIN-caso12-g.1]

Atributo 15.4. ¿Cómo es la dinámica del curso?

- No da tiempo al aburrimiento, se está trabajando continuamente de forma activa [ENTINT-caso1-13.1], [ENTINI-caso5-30]
- No me he encontrado perdido en las clases [ENTINT-caso1-6.4]
- Es una dinámica rápida, se lleva un ritmo rápido [ENTIN-caso1], [ENTIN-caso2-26]
- Dinámica activa, entretenida [ENTINT-caso4-g.5] , [ENTFIN-caso7-10.1]
- La dinámica no me ha gustado pues al principio se va despacio y luego se acelera para dar el programa [ENTINT-caso8-g.3]
- La dinámica generaba cierta dependencia del ordenador [ENTINI-caso9-17]
- Dinámica en general lenta [ENTINI-caso10-17]

Atributo 15.5. ¿Qué valoración merece el uso de una página web?

- Se ha valorado muy positivamente el tener todos los contenidos disponibles en la web [ENTINI-caso3-33] , [ENTFIN-caso4-g.5] , [ENTFIN-caso6-g.1] , [ENTFIN-caso9-14.4b], [ENTFIN-caso10-g.7] , [ENTINI-caso11-31] , [ENTFIN-caso12-14.4,b] , [ENTFIN-caso13-14.3.a]

PARTE 16: EVOLUCIÓN Y EXPECTATIVAS DEL ALUMNO

ATRIBUTOS Y ASPECTOS CARACTERÍSTICOS DE LA CUESTIÓN 16:

Atributo 16.1. ¿Qué puntuación esperan obtener los alumnos?

- Espera aprobar [ENTINT-caso1-g4], [ENTINI-caso2-32], [ENTINT-caso4-g.4], [ENTINT-caso6-g.4] , [ENINT-caso8-g.4], [ENTFIN-caso9-g.3], [ENTINI-caso10-32] , [ENTINT-caso13-g.4] , [ENTINT-caso14-g.4]
- Espera sacar notable [ENTINT-caso10-g.4]
- Espera sacar un notable o sobresaliente [ENTINT-caso3-g.4], [ENTINT-caso12-g.4]
    - Esperaba sacar más nota de la que sacó [ENTFIN-caso3-g.2], [ENTFIN-caso5-g.3], [ENTFIN-caso7-g.7] , [ENTFIN-caso13-g.4]
    - Sacó la nota que esperaba [ENTFIN-caso8-g.3] , [ENTFIN-caso10-g.3], [ENTFIN-caso11-g.1] , [ENTFIN-caso12-g.3]

Atributo 16.2. ¿Qué grado de satisfacción se observa en el alumnado?

- Bastante satisfecho por el curso [ENTFIN-caso1] , [ENTFIN-caso2], [ENTFIN-caso3], [ENTFIN-caso4], [ENTFIN-caso5], [ENTFIN-caso6] , [ENTFIN-caso7], [ENTFIN-caso8], [ENTFIN-caso9], [ENTFIN-caso10] , [ENTFIN-caso11], [ENTFIN-caso12], [ENTFIN-caso13], [ENTINT-caso14], [ENTINT-caso13]

Atributo 16.3. ¿Cómo ha sido la evolución de los alumnos a lo largo del curso?

CASO	*Cuestiones entregadas*	*Nota media cuestiones*	*Problemas entregados*	*Nota media problemas*	*Examen cuestiones*	*Examen problemas*	*Nota final*
1	*4*	*5,6*	*2*	*5,2*	*3,5*	*5,5*	*AP*
2	*5*	*5,65*	*6*	*4,63*	*5,5*	*8,4*	*NT*
3	*2*	*6*	*5*	*3,88*	*3,5*	*8,1*	*AP*
4	*1*	*7*	*3*	*1,9*	*5,5*	*3*	*AP*
5	*1*	*7*	*4*	*2,45*	*4*	*5,9*	*AP*
6	*1*	*1*	*3*	*2,53*	*3,5*	*8,1*	*AP*
7	*5*	*2,85*	*5*	*2,24*	*4,5*	*6,3*	*AP*
8	*1*	*5,5*	*6*	*2,66*	*4,5*	*3,7*	*AP*
9	*1*	*4*	*4*	*3,25*	*9,5*	*5,5*	*NT*
10	*1*	*1*	*4*	*3,16*	*8*	*7,2*	*NT*
11	*1*	*6*	*1*	*4,1*	*7*	*7,4*	*NT*
12	*6*	*7,54*	*6*	*7,15*	*8*	*9,7*	*SB*
13	*5*	*4,75*	*6*	*3,24*	*3,5*	*6,1*	*AP*
14	*5*	*4,75*	*3*	*2,7*	*4*	*2,2*	*SS*
15	*1*	*4*	*3*	*2,7*	*1,5*	*4*	*SS*

PARTE 17: TRAYECTORIA EDUCATIVA

ATRIBUTOS Y ASPECTOS CARACTERÍSTICOS DE LA CUESTIÓN 17:

Atributo 17.1. ¿Qué trayectoria educativa han tenido los alumnos antes de venir a la universidad?

- EGB-BUP-COU [ENTIN-caso1], [ENTINI-caso3-2], [ENCINI-caso4], [ENCINI-caso6], [ENCINI-caso7], [ENCINI-caso8-2], [ENTINI-caso10-3], [ENTINI-caso11], [ENCINI-caso12], [ENCINI-caso13] , [ENTINI-caso14-6], [ENTINI-caso15-1]
- EGB-3,4 ESO-BACHILLERATO [ENCINI-caso2], [ENCINI-caso5-1.3]
- EGB, BUP (Liceo Francés) y COU [ENTINI-caso9-1]

Atributo 17.2. ¿Qué calificaciones se obtienen en las notas de selectividad?

- 8 [ENCINI-caso2]
- 7,6 [ENCINI-caso11-3]
- 6,95 [ENCINI-caso4]
- 6,8 [ENCINI-caso6-3], [ENCINI-caso8-3], [ENCINI-caso10-3]
- 6,75 [ENCINI-caso12-3]
- 6,52 [ENTINI-caso3-6]
- 6,56 [ENTINI-caso13-1] , [ENCINI-caso14-4],
- 6,45 [ENCINI-caso7]
- 6,37 [ENCINI-caso15-3]
- 6,25 [ENTINI-caso5-5]
- 6,29 [ENCINI-caso9-3]

Atributo 17.3. ¿Qué calificaciones tiene en Matemáticas antes Universidad?

- 6 [ENCINI-caso1], [ENCINI-caso4], [ENCINI-caso6-4] , [ENCINI-caso7-3], [ENCINI-caso8-1], [ENCINI-caso13-3]
- 6,5 [ENCINI-caso9-3] , [ENTINI-caso15-5]
- 7 [ENTINI-caso5-4.] , [ENCINI-caso10-3] , [ENTINI-caso14-9],
- 8 [ENCINI-caso2]
- 9 [ENTINI-caso3-5], [ENCINI-caso11-3], [ENCINI-caso12-3]

Atributo 17.4. ¿Qué calificaciones tiene en Matemáticas I?

- Suspenso en Febrero [ENTINI-caso1], [ENTINI-caso3-8], [ENTINI-caso5-1.3], [ENTINI-caso4], [ENTINI-caso6] , [ENTINI-caso7], [ENTFIN-caso8], [ENCINI-caso13], [ENTINI-caso14-10] , [ENTINI-caso15-3]
- Aprobado en Febrero [ENTIN-caso2-1.8], [ENCINI-caso9], [ENCINI-caso10], [ENCINI-caso11-3], [ENCINI-caso12],
- Aprobó en Septiembre [ENTFIN-caso13-14.4b]

Atributo 17.5. ¿Cuanto tiempo lleva en la Universidad?

- Varios años [ENTIN-caso1], (hizo Agrónomos) [ENTINI-caso9-1], (repite varias veces) [ENTINI-caso11-2] , (hizo Físicas) [ENTINI-caso12-1]
- Primer curso [ENTINI-caso2], [ENTINI-caso3], [ENTINI-caso4], [ENTINI-caso5] , [ENCINI-caso6-1], [ENCINI-caso7], [ENCINI-caso8], [ENCINI-caso10-1], [ENCINI-caso13], [ENCINI-caso14], [ENCINI-caso15]

ANEXO XIX:
ESTRUCTURA DEL CD ADJUNTO A ESTA TESIS.

El CD que se adjunta a esta tesis contiene tanto la redacción de la TESIS, sus ANEXOS y todos los documentos relacionados con la recogida, elaboración y análisis de datos que hicieron falta para desarrollar esta investigación. A continuación mostramos la estructura de este CD con el fin de facilitar el acceso a la documentación que hemos contenido en el mismo:

Este CD funciona bajo sistema Windows 95. Para ejecutar el CD deberá tener cargado un navegador, preferentemente Netscape 4.1. Al insertar el CD ejecutará automáticamente el navegador que tenga asignado por defecto y arranca el fichero INDEX.HTML en el que se pueden encontrar todos los datos de la tesis doctoral. En el directorio inicial de este archivo podemos seleccionar varias opciones:

a) **Texto de la Tesis Doctoral.**

   Si se desea consultar todo el desarrollo de la tesis así como los anexos. Estos textos están en formato .PDF por lo que para visualizar su contenido deberá tener instalado ACROBAT READER. Si no lo tuviera instalado, puede instalarlo desde este CD (recuérdese que este programa es gratuito).

b) **Datos recogidos para la realización de la investigación educativa.**

   A través de este enlace se accede a todos los datos obtenidos en la tesis: los datos recogidos en cada uno de los 16 casos objeto de estudio (entrevistas, encuestas, observaciones a datos objetivos) y las notas de campo recogidas por el investigador.

c) **Acceso a la página web del curso "Matemáticas II con DERIVE"**

   Desde este acceso se accede a todos los contenidos de la página web, incluidos dentro del CD, tal y como aparecieron disponibles por los alumnos desde internet.

d) **Materiales didácticos.**

   A través de este enlace se puede acceder a los materiales didácticos utilizados: GUIONES DIDÁCTICOS que servían para desarrollar la asignatura (escritos en DERIVE 3.01), un pequeño manual introductorio del programa DERIVE, las cuestiones propuestas, y los exámenes que se plantearon.

e) **Proceso completo de análisis de la investigación**

   Desde aquí se puede acceder al proceso completo de análisis de datos realizado sobre cada uno de los casos.