UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación

METACOGNICIÓN, RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS. UNA PROPUESTA INTEGRADORA DESDE EL ENFOQUE ANTROPOLÓGICO

MEMORIA PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR POR

Esther Rodríguez Quintana

Bajo la dirección de los Doctores:

Jesús Beltrán Llera
Marianna Bosch Casabó

Madrid, 2005

ISBN: 84-669-2873-1

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE PSICOLOGÍA EVOLUTIVA Y DE LA EDUCACIÓN

METACOGNICIÓN, RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS. UNA PROPUESTA INTEGRADORA DESDE EL ENFOQUE ANTROPOLÓGICO

TESIS DOCTORAL

DIRECTORES:
JESÚS A. BELTRÁN LLERA
MARIANNA BOSCH CASABÓ

ESTHER RODRÍGUEZ QUINTANA

MADRID, 2005

AGRADECIMIENTOS

Durante estos años han sido muchas las personas e instituciones que han participado en que sea posible este trabajo y a quienes quiero expresar mi gratitud:

A mis directores de tesis, Jesús Beltrán y Marianna Bosch, por la calidez, sugerencias, apoyo y confianza que me han prestado a lo largo de todos estos años.

Al grupo BAHUJAMA, por sus ánimos constantes y por haber apoyado la discusión y reflexión de este trabajo. En especial a Tomás Sierra y Josep Gascón, por el tiempo dedicado y a Noemí Ruiz y Berta Barquero por haber corregido cada palabra de la redacción final.

Al Ministerio de Educación y Ciencia, por la concesión de una beca de Formación de Profesorado Universitario que me ha permitido brindar la dedicación adecuada a este trabajo. Así como al Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación de la Universidad Complutense, que me acogió y me ha dejado ir aprendiendo de cada uno de sus miembros.

Al Instituto Químico de Sarriá de la Universidad Ramón Llull, por cedernos todos los medios a su disposición para poder desarrollar nuestro trabajo durante las estancias en Barcelona. A Marianna y Marcos, que me ofrecieron una familia lejos de mi casa.

A los profesores y alumnos que han participado en los estudios empíricos.

A mi familia. En especial a mis padres, Adolfo y Marisol, y a mis hermanos, Adolfo y Sole, por su apoyo incondicional. También, como no, a Sergio, por su permanente comprensión y por saber entender el tiempo robado. Esto también es vuestro premio.

ÍNDICE

CONTENIDO DEL CD

- "Versión usuario" de *Material 3* de *Anexo B.2*: Hoja de cálculo de Excel para comparación de tarifas de telefonía móvil.

- "Versión usuario" de *Material 4* de *Anexo B.2*: Hoja de cálculo de Excel para comparación de tarifas de telefonía móvil (versión "para vagos").

- "Versión usuario" de *Material 5* de *Anexo B.2*: Hoja de cálculo de Excel para comparación de tarifas de telefonía móvil (versión "para muy vagos").

- "Versión usuario" de *Material 7* de *Anexo B.4*: Hoja de cálculo de Excel para comparación de tarifas de telefonía móvil.

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

Contextualización del problema de investigación

La investigación sobre la cuestión a la que hacemos frente en este trabajo la inició el matemático de origen húngaro Georg Pólya (1945) y se refiere a la dificultad generalizada de los alumnos frente a la resolución de problemas matemáticos.

Con anterioridad a Pólya, pueden destacarse las reflexiones del filósofo griego Sócrates (469aC-399aC), que es plasmada en un Diálogo con Platón en que dirigió a un esclavo por medio de preguntas para la solución de un problema: la construcción de un cuadrado de área doble a la de un cuadrado dado, mostrando un conjunto de estrategias, técnicas y contenido matemático aplicado al proceso de resolución.

Otro momento importante estuvo protagonizado por el filósofo René Descartes (1596-1650), quien, en su propósito por encontrar un método universal para la resolución de problemas destacó lo que se ha denominado "modelos de pensamiento productivo" o "consejos para resolver problemas con facilidad".

En la época en que publicó el libro *How to solve it* (Pólya, 1945) los conductistas, cuyo movimiento había sido generado en América y Europa en la segunda década del siglo XX como respuesta al subjetivismo y al abuso del método introspectivo, no consideran la resolución de problemas sino como una serie de intentos provocados por un estímulo para lograr una respuesta. Así, los trabajos que desarrollan están dirigidos a la búsqueda de pasos o etapas que permitan el entrenamiento.

Una de las primeras propuestas para secuenciar el proceso de resolución de problemas es la de Dewey (1910). Este autor, filósofo preocupado por lo que tradicionalmente se ha denominado "epistemología" o "teoría del conocimiento" -aunque él rechazó expresamente dicha denominación, prefiriendo las expresiones "teoría de la pregunta" o "lógica experimental" para diferenciarse de los modos de acercamiento al pensamiento precedentes-, fuertemente influenciado por la teoría de la selección natural de Darwin, planteó que un acercamiento productivo a la teoría del conocimiento debe comenzar con una consideración del desarrollo del mismo como una respuesta humana a las condiciones ambientales dirigida a la reestructuración de dichas condiciones; considerando el pensamiento como el producto de una interacción entre organismo y ambiente y el conocimiento como un instrumento para la guía y control de esa interacción. Debido a su carácter funcional, se adopta el término "instrumentalismo" para su planteamiento.

En *Studies of Logic Theory* (1903) Dewey articuló para la lógica un instrumentalismo funcional similar al que William James había desarrollado para la psicología y distinguió tres fases del proceso de "pregunta", insistiendo en que es el único modo adecuado de entender cómo adquirimos el conocimiento: (i) Comienza con una situación problemática, donde las respuestas instintivas o habituales del organismo humano son inadecuadas para la continuación de la actividad en busca del cumplimiento de necesidades y deseos; (ii) La segunda fase implica el aislamiento de los datos o la materia que define los parámetros dentro de los que debe dirigirse la reconstrucción de la situación inicial; (iii) La fase tercera, basada en la reflexión sobre el proceso, las suposiciones, teoría, ideas... del sujeto son tomadas como soluciones hipotéticas a la situación. La acción permite poner a prueba la carácter adecuado de las soluciones planteadas, modificándose su carácter hipotético en función del tipo de resultados que se obtiene.

Posteriormente Dewey (1910, 1933) comparó la actitud natural de los niños, marcada por una curiosidad ardiente, una imaginación fértil y un amor hacia la investigación experimental con la actitud de la mente del científico. El autor argumenta que pensar es un proceso activo que implica experimentación y resolución de problemas, afirmando que el proceso de pensamiento está realmente en marcha cuando existe un problema a resolver, una cuestión a responder o una ambigüedad a aclarar. Propone que nuestro pensamiento sigue un proceso de cinco pasos: existencia de un problema (identificación); análisis del problema (definición); formulación de hipótesis de solución; desarrollo de las mismas y deducción de sus propiedades; y comprobación de hipótesis.

En la línea conductista han sido desarrollados diversos programas de instrucción en resolución de problemas como "Patrones de Resolución de problemas" (Rubinstein, 1980), que fue implementeado desde 1975 hasta el año en que se publicaron sus resultados.

La reacción frente a los estudios analíticos de la conciencia mediante introspección provocó en Alemania un efecto diferente al de América y Europa. En vez de profundizar en las ideas asociacionistas dando lugar al conductismo, en Alemania se desarrolla la escuela de la Gestalt, que rechaza el atomismo conductista y modifica la unidad de análisis en consecuencia dado que el objeto de estudio es el significado y este no es divisible en elementos más simples.

Algunos autores consideran a esta escuela la pionera en los trabajos sobre resolución de problemas porque destacan la relación de dicha actividad con aspectos creativos que llegado el momento permite una "comprensión súbita" o "insight" al sujeto. Este insight supone encontrar la solución antes de ponerla en prática, destacando su carácter novedoso. Siguiendo a Mayer (1983), podemos decir que el proceso de resolución de un problema, desde esta perspectiva, es un intento de relacionar un aspecto de una situación problemática con otro, obteniendo como respuesta una comprensión de la estructura, que implica reorganizar los elementos de la situación problemática de forma tal que resuelva el problema.

Köhler y Wertheimer realizaron diversos experimentos sobre la resolución de problemas con chimpancés (ver Köhler, 1917). En ellas nos explican un experimento en que, estando "Sultán" encerrado en una jaula, se situó una banana colgada del techo fuera de la jaula y, dentro de ella se dejó un palo y una caja. El chimpancé intentó alternativamente utilizando el palo y subiéndose a la caja por separado lograr alcanzar la banana sin éxito, hasta que, *de pronto*, se dirigió con precisión al palo, subió a la caja y encontró la solución. Según Köhler, este acontecimiento se puede explicar por el hecho de que el chimpancé experimentó una reorganización constructiva de los elementos que le condujo a la solución.

Desde la Gestalt se planteó que las tareas de resolución de problemas que implicaban reorganización y agrupamiento no eran estudiadas por la lógica, a pesar de ser procesos esenciales del pensamiento humano. Se diferenció en consecuencia entre lo que se denominó "pensamiento reproductivo", que consiste en la aplicación de destrezas adquiridas con anterioridad, en tareas por tanto similares a aquellas en que el conocimiento se originó, y el "pensamiento productivo", que tiene lugar cuando es necesario llevar a cabo una reorganización estructural que da lugar a la creación de la solución a un problema nuevo. De este modo una gran ventaja de la resolución productiva, frente al aprendizaje memorístico, radica en la potencialidad de transferencia.

> *"There are several objects. (The way in which they are segregated, and why just so, how an object constitutes itself in separation from other objects, is a question neglected in traditional logic, is taken for granted without real investigation.) I compare them. In their qualities of their parts I find similarities and differences. Abstracting from the differences, and concentrating on common qualities or parts in the objects, I get a general concept. The content is given by these common parts. This is the 'intension.' The 'extension' is the manifold of objects embraced by the class concept. " (Wertheimer, 1945, p. 207).*

Otra propuesta de etapas en la resolución de problemas de destacado interés en la época es la realizada por el sociólogo y científico político de origen británico, Graham Wallas, conocido defensor de la necesidad de un acercamiento psicológico al estudio de la política. El modelo está basado en la introspección y lo presenta en su obra *The art of Thought* (Wallas, 1926):

1. Preparación –en forma de conocimiento en el campo de estudio y estar bien preparado-, necesaria para elaborar "insights"
2. Incubación –producida cuando estamos alejados del problema, normalmente después de haber estado trabajando activamente sobre él-. Cita, por ejemplo, la experiencia de Arquímedes cuando tuvo su idea en los baños públicos.
3. Iluminación. El "clic" de una nueva idea. Es una fase misteriosa. Wallas sólo ofrece como sugerencia descansar la mente con otras actividades.
4. Verificación. Es la fase final, donde se verifica si la "idea" realmente resuelve el problema.

Como hemos podido observar, estos trabajos parten de una concepción de la resolución de problemas como actividad por antonomasia del pensamiento.

Mayer (*Op. Cit.*, p. 21) utiliza indistintamente, a lo largo de su estudio, los términos pensamiento, cognición y resolución de problemas y lo hace sobre la base de la siguiente caracterización:

1. El pensamiento es cognitivo, pero se infiere de la conducta. Ocurre internamente y debe ser inferido indirectamente.
2. El pensamiento es un proceso que implica manipulación de, o establece un conjunto de operaciones sobre, el conocimiento.
3. El pensamiento es dirigido y tiene como resultado la "resolución" de problemas o se dirige hacia la solución.

Así, el pensamiento, según Mayer, es lo que sucede cuando una persona resuelve un problema, es decir, produce un comportamiento que mueve al individuo desde un estado inicial a un estado final, o al menos trata de lograr ese cambio, llegando a definir directamente el pensamiento como resolución de problemas (Mayer, 1994).

Mientras, Pólya, tomando como base su experiencia y las observaciones realizadas como profesor, ofrece un diccionario de heurística y pone de relieve lo que luego sería la base de su *Mathematics and plausible reasoning* (1954), el uso de la intuición en matemáticas, los razonamientos por inducción y analogía y el empleo de heurística, defendiendo que la estructura matemática da indicaciones útiles para la instrucción.

Si bien, como hemos indicado, la consideración de fases en la resolución de problemas en general, no exclusivamente matemáticos, puede verse ya en otros autores, lo original de Pólya para la instrucción es la consideración de la importancia del área en que se desarrolla el proceso de resolución así como la propuesta de una serie de heurísticos que plantea en cada fase, de las cuatro que postula deben seguirse: comprender el problema, planificar la resolución, llevar a cabo el plan y revisar el proceso (Pólya, 1957).

La resolución de problemas matemáticos ha mantenido un doble lugar en la enseñanza: como ámbito privilegiado para el desarrollo del pensamiento – con el objetivo de que los alumnos sean buenos "resolutores de problemas", esto es, buenos pensadores-, y como objetivo más concreto, dirigido a que los alumnos sean capaces de resolver problemas matemáticos. Aunque, como veremos, cada uno de estos objetivos cuenta con diferentes interpretaciones; en general, ambos se refieren a la transferencia de los aprendizajes, aplicándolos a situaciones nuevas.

La idea de desarrollar expertos en resolución de problemas "en general" está basada en la idea de que, con independencia de su complejidad y naturaleza, los problemas tienen una anatomía similar, aunque a simple vista no parezca así. Lo mismo si son de física, de matemática, de bioquímica, etc., en todos se pueden detectar un estado inicial –que comprende lo dado en la situación problemática de partida y los recursos disponibles para enfrentarla-; un estado final -que representa la solución-; una serie de operaciones, físicas o mentales, que van a permitir pasar de un estado a otro; y limitaciones para realizar ciertas acciones (Newell y Simon, 1972). En el caso de los problemas que surgen en escenarios naturales y sin la intención de crearlos artificialmente, un componente que se suma a los anteriores es la causa de problema.

Como ocurre con las diferentes estrategias de aprendizaje, incluso los intentos por desarrollar estrategias aplicables en diferentes áreas de conocimiento, defienden hoy día la importancia fundamental de trabajar dentro de áreas de conocimiento concretas incluso para favorecer la transferencia. Beltrán (1998, 2003), explicando las ventajas de una enseñanza de las estrategias de aprendizaje mixta, que combine la enseñanza dentro de un área de contenido con la enseñanza fuera de él –persiguiendo esta última la generalización y la transferencia más allá del ámbito donde ha sido inicialmente estudiada-, señala:

"Las ventajas que se obtienen al incorporar las estrategias al currículo parecen hoy mucho mayores que las que se logran mediante el entrenamiento fuera de él, ya que la transferencia resulta, en este caso, menos probable." (Beltrán, 2003, p. 69).

De este modo, las propuestas actuales están fundamentalmente dirigidas a formar alumnos competentes en la resolución de problemas en general y matemáticos en particular. Especialmente la sociedad se muestra preocupada, en el ámbito de las matemáticas, al finalizar la enseñanza obligatoria, por la capacidad de los alumnos para hacer frente a los desafíos que les surgirán como ciudadanos. En el último estudio realizado dentro del Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos –auspiciado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OECD, 2004b)- se observa claramente este la importancia dada a este objetivo, así como la asunción de que esto no se logra desde los sistemas educativos actuales:

"The assessment is forward-looking, focusing on young people's ability to use their knowledge and skills to meet real-life challenges, rather than just examining the extent to which they have mastered a specific school currículum. This orientation reflects a change in the goals and objectives of curricula themselves, which are increasingly concerned with how students use what they learn at school, and not merely whether they can reproduce what they have learned" (p. 12).

Recio y Rico (2003), a partir de un análisis de los resultados obtenidos en el estudio anteriormente mencionado, afirman que:

"Necesitamos imperiosamente mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas en la educación obligatoria. La sociedad y los educadores demandan esta formación con carácter urgente."

Este trabajo está dirigido al objetivo de estudiar cómo mejorar la instrucción en matemáticas de modo que facilite la capacidad de resolución de problemas de los alumnos y se centra especialmente en la educación secundaria.

Estructura del trabajo

Se ha considerado que la opción más conveniente para presentar este trabajo es mostrar una estructura lineal que, aunque no es reflejo fiel del proceso seguido, sí facilita la comprensión del recorrido de investigación llevado a cabo, donde se sucedieron -a partir del planteamiento inicial de estudiar "Cómo mejorar la instrucción en matemáticas de modo que facilite la capacidad de resolución de problemas de los alumnos"- estudios teóricos, investigaciones empíricas, conclusiones, reflexiones y replanteamientos del trabajo.

En primer lugar, se llevó a cabo un análisis de la bibliografía más relevante relativa a las dificultades que se presentan en el desarrollo de la capacidad de resolución de problemas y al modo de mejorar la instrucción con el objetivo de lograr este aprendizaje en los alumnos. Con esta revisión se pudo constatar el papel fundamental que se asigna a la metacognición en la resolución de problemas en general y matemáticos en particular, así como la gran cantidad de cuestiones que se mantienen abiertas en torno a qué es la metacognición, qué otros componentes están implicados en la resolución de problemas, qué papel concreto juega cada uno de ellos en la resolución de problemas y cómo se relacionan todos ellos. También se observó en esta revisión una gran ambigüedad terminológica relativa a gran número de cuestiones como por ejemplo: ¿qué es un problema?, qué es un problema en matemáticas?, ¿todos los problemas en matemáticas implican modelización?, ¿es lo mismo metacognición que calibración?, ¿qué relación existe entre la reflexión y la metacognición?, ¿existen procedimientos algorítmicos o heurísticos por naturaleza?, por citar algunas.

Se razonó la necesidad, en consecuencia, de elaborar un modelo sobre la resolución de tareas matemáticas que intentara reducir de la ambigüedad en la terminología, a la vez que diera luz en el intento de clarificación sobre los aspectos anteriormente descritos. La reinterpretación de los estudios precedentes bajo el modelo planteado permitió ir describiendo y analizando la información de ambos de modo organizado.

Para poner a prueba la calidad del modelo, profundizando en algunas de las ambigüedades y problemas de investigación analizados en el Capítulo I, se llevó cabo un trabajo empírico, presentado en el Capítulo II, donde se constataron las hipótesis de partida, que se concretan en la importancia de los conocimientos previos en el carácter problemático que "una" tarea puede suponer para "un" alumno; el hecho de que la definición del carácter problemático de una tarea no se puede centrar exclusivamente en si ésta implica o no modelización o está contextualizada; y la adecuidad de interpretar el conocimiento fundamental para la transferencia del aprendizaje en matemáticas- esto es, la resolución de problemas de matemáticas-, denominado tradicionalmente metacognitivo, como el conocimiento condicional relativo a la elección y aplicación de los conocimientos.

Si bien el planteamiento inicial del trabajo estaba centrado en la búsqueda de un modo de mejorar la instrucción en matemáticas –para favorecer la competencia en resolución de problemas de los alumnos- a partir de las dificultades que estos presentan frente a tareas problemáticas así como de las características de los resolutores exitosos, las deficiencias observadas en el proceso de enseñanza-aprendizaje vivido en las aulas objeto de análisis en el primer trabajo empírico, junto con la lectura de bibliografía relativa a la instrucción dirigida a la resolución de problemas en matemáticas, nos hizo plantearnos la necesidad de ampliar el objeto de estudio profundizando en las razones que llevan a la gran dificultad que se observa en los intentos por llevar a la práctica en las aulas un sistema de instrucción dirigido enseñar a resolver problemas a pesar de las décadas de investigación y de considerarse el objetivo fundamental de la enseñanza de las matemáticas.

Así, en el Capítulo III se profundiza en las propuestas de instrucción en matemáticas que han sido planteadas para favorecer una formación de los alumnos en resolución de problemas, destacándose aquellos aspectos que se consideran más importantes. También en este capítulo se describen las numerosas dificultades que han sido encontradas para la puesta en práctica de las mismas.

En esta situación, el enfoque antropológico en didáctica de las matemáticas, iniciado por Yves Chevallard se tornó sumamente útil para continuar desarrollando nuestro trabajo.

En el Capítulo IV se describe cómo la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) permite, gracias al modelo de la actividad matemática que plantea, integrar la resolución de problemas y los aspectos metacognitivos dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje. Desde este enfoque, la resolución de problemas se concibe como el origen y razón de ser de toda actividad matemática y por tanto es inseparable de la misma; de ahí que se utilice el término praxeología para referirse a teoría y práctica, como aspectos inseparables.

Este enfoque permite además describir los aspectos metacognitivos a través de la completitud creciente de la praxeologías que se construyen en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Esto hace posible explicitar dicho conocimiento, de modo que podemos llegar a hablar incluso de diferentes niveles de conocimiento metacognitivo, según si se refiere a la conexión entre temas, áreas o sectores de las matemáticas.

La transposición que, según la TAD, necesariamente debe sufrir un saber desde su construcción en un ámbito ajeno a la escuela hasta llegar a ser aprendido por un alumno, así como las restricciones que unos niveles ejercen sobre otros, resultó ser fundamental para profundizar en las causas que dificultan la incorporación de la resolución de problemas en el aula de matemáticas. Para ello analizamos, en el Capítulo V –utilizando como material empírico los documentos curriculares-, cuál es el papel que se asigna a la resolución de problemas en la propuesta educativa y, especialmente, si se produce adecuadamente el necesario proceso de transposición o, por el contrario es posible que estos niveles superiores, del "saber a enseñar", estén provocando restricciones que dificulten la incorporación de la resolución de problemas como eje integrador de las matemáticas, tal y como se proponen las instituciones educativas.

Finalmente, en el Capítulo VI, mostramos la puesta en práctica de una modelo instruccional dirigido a incorporar la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. Esta propuesta está basada en el desarrollo de un proceso de estudio en torno a un problema –o cuestión problemática- cuya resolución es tomada en serio por la comunidad de estudio (profesores y alumno).

La experiencia se lleva a cabo con un Recorrido de Estudio e Investigación en torno a la comparación de tarifas de telefonía móvil, que permite hacer vivir en el aula la razón de ser de los conocimientos metacognitivos a través de la necesidad de construir, para la resolución de la cuestión, praxeologías más allá de puntuales.

Otras cuestiones relativas a los aspectos metacognitivos, tales como la planificación, regulación y evaluación del proceso y los resultados afloran a través de los REI en la actividad de los estudiantes. Esto se debe a una asunción de responsabilidad por parte de los alumnos en el proceso de estudio, que lleva a que aspectos considerados tradicionalmente como didácticos –en el sentido de que su gestión corresponde exclusivamente al profesor- pasen a ser responsabilidad de toda la comunidad de estudio, incluyendo esta a los alumnos.

CAPÍTULO I. UN MARCO COHERENTE Y COMPRENSIVO PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS: RELACIÓN ENTRE COGNICIÓN, METACOGNICIÓN Y ACTUACIÓN METACOGNITIVA

La dificultad de enseñar a resolver problemas en general y matemáticos en particular, presente aún hoy día en nuestras aulas a pesar de los intentos de mejora de las reformas curriculares, ha sido analizada desde diferentes perspectivas; proponiendo diferentes componentes, procesos e interrelaciones entre ellos. En la actualidad, es comúnmente admitido el destacado papel que juega la metacognición, si bien numerosas cuestiones permanecen abiertas. Son detectadas además otras muchas ambigüedades y discusiones en relación con los factores que permiten el éxito en la resolución de problemas, lo cual dificulta realizar conclusiones fundamentadas para la caracterización de resolutores exitosos así como sobre el modo de enseñanza más adecuado.

Un análisis inicial de la bibliografía precedente concluyó con la necesidad de plantear un modelo coherente y comprensivo de los componentes y procesos implicados en la resolución de problemas matemáticos que permitiera analizar las aportaciones de los diferentes autores y poder así definir el estado actual de la investigación en torno a cómo mejorar la instrucción con el objetivo de desarrollar en los alumnos la capacidad de resolver problemas.

1.1. EL ESTADO DE LA CUESTIÓN

1.1.1. Qué es la metacognición y qué papel juega en la resolución de problemas matemáticos

El concepto metacognición, bastante complejo y de muy reciente data en el campo de la educación, se inició como objeto de estudio en psicología en la década de los setenta con las investigaciones de John Flavell sobre algunos procesos cognitivos, particularmente aquellos involucrados en la memoria. Flavell define la metacognición como:

> "*One's knowledge concerning one's own cognitive processes and products or anything related to them (...) Metacognition refers furthermore to the active monitoring of these processes in relation to the cognitive objects or data on which the bear, usually in service of some concrete goal or objective*" (Flavell, 1976, p. 32).

Desde los documentos curriculares se promueve la importancia de la metacognición para que los estudiantes aprendan (p.e., Cockroft, 1982; National Council of Teachers of Mathematics, 1989; Treffers, De Moor, y Feys, 1989, citado por De Corte, Verschaffel, y Op't Eynde, 2000), pero existe mucha confusión en este campo sobre lo que el término metacognición significa en la práctica (Wilson, 1999; Osborne, 2002) y ha sido utilizado a menudo por los investigadores y educadores de formas vagas, confusas e incluso contradictorias (Brown, 1987; Weinert, 1987). Tras décadas de discusión, incluso Flavell (1987) admite que "*none of us has yet come up with deeply insightful, detailed proposals about what metacognition is*" (p. 28), existiendo aún un debate referido a su alcance y la naturaleza de las interrelaciones entre los diversos tipos de conocimiento y los procesos metacognoscitivos (Schraw y Moshman, 1995).

La metacognición es descrita por gran número de investigadores como multi-dimensional y ha sido utilizada como un término general con referencia a un rango de dispares habilidades cognitivas de nivel superior (Wilson, 1999). Perkins, Simmons y Tishman (1990) sugieren que el término metacognición es difícil y lo definen como:

> "*Something you want to do more o less continuously, and the actions you need to take to maintain monitoring and to shift yourself back on task when you were off task*" (p. 286).

Existen definiciones variadas de metacognición en la literatura, pero la gran mayoría de ellas incluyen una serie de componentes que están interrelacionados (Shcraw y Dennison, 1994). Generalmente hay un acuerdo en que la metacognición implica dos componentes principales: conocimiento sobre la cognición y regulación de la cognición (Brown, 1987; Brown, Brandsford, Ferrara y Campione, 1983; Garofalo y Lester, 1985; Schöenfeld, 1990; y Schraw y Dennison, 1994), pero la naturaleza de la relación entre esos componentes no está claramente definida.

El hecho de postular una naturaleza dual de la metacognición proporciona sólo un modelo superficial de ese constructo (Wilson, 1999). Además de la problemática relacionada con la difícil tarea de definir y separar estos dos aspectos, también ha sido causa de frustración en los investigadores las dificultades encontradas al intentar distinguir entre cognición y metacognición (Brown et al., 1983).

Estas dificultades se ven reflejadas claramente en las instrumentos diseñados con el objetivo de evaluar la metacognición. Por ejemplo, Osborne (2002), en un trabajo que lleva a cabo con el fin de analizar las propiedades psicométricas de una serie de pruebas disponibles actualmente que afirman evaluar la metacognición[1], tras definirla de la siguiente manera, para diferenciarla de la metamemoria o metacomprensión:

> "*Higher-order cognitive functioning, such as monitoring, predicting, reliaty checking, and/or coordination of cognitive functioning, or awareness of one's own knowledge and the abiblity to understand, control, and manipulate individual cognitive processes*" (p. 5).

Concluye que no se dispone de ninguna medida que cumpla las condiciones psicométricas mínimas para poder ser aceptada, ya que, explica, las que no tienen graves problemas psicométricos, miden sólo una faceta de la metacognición.

La investigación sobre relaciones entre el rendimiento en matemáticas y metacognición ganó popularidad en la década de los 80 (Adibnia y Putt, 1998; Lester, 1994; Silver y Marshall, 1990). Un gran número de investigaciones ha afirmado la importancia de la metacognición para el pensamiento matemático efectivo y la resolución de problemas (p.e., Clarke, Stephens y Waywood, 1992; Garofalo y Lester, 1985; Goos, 1995; Lester y Garofalo, 1982; Schöenfeld, 1985a, 1985b, 1985c, 1987a, 1992b; Silver y Marshall, 1990). Y es que, a pesar de tener los conceptos y estrategias necesarias, los estudiantes no son siempre capaces de completar con éxito la resolución de los problemas (Kilpatrick, 1985). Algunos autores consideran que esta fuente primaria de dificultades en la resolución de problemas consiste en una falta de habilidad de los estudiantes para monitorizar y regular activamente sus procesos cognitivos (Garofalo y Lester, 1985; Lester y Garofalo, 1982; Schöenfeld, 1987a), mientras que otros la concretan en la dificultad para utilizar el conocimiento necesario de modo correcto y/o en el momento apropiado (McAfee y Leong, 1994). Apoyando esta segunda

[1] Los cuestionarios de evaluación de la metacognición que analiza son: Metacognitive Questionnaire (MQ); Metacognition in Multiple Contexts Inventory (MMCI); Dynamic assessment of metacognition; y Grade/performance e prediction.

explicación, Sternberg (1998) afirma que es la metacognición sobre las estrategias, más que las estrategias en sí mismas, lo que parece ser esencial.

En el área de matemáticas, un gran número de cuestiones permanecen sin respuesta sobre qué acciones cognitivas y metacognitivas realizan los estudiantes mientras hacen frente a problemas (Davidson y Sternberg, 1998; Dunlosky, 1998). La mayoría de los estudios apoyan la idea de que los componentes de la metacognición están estrechamente relacionados e interactúan, pero cada componente principal requiere mayor clarificación (Wilson, 1999). Concretamente en relación con el tipo de problema, Dunlonsky (1998) afirma que el conocimiento de la interacción entre procesos metacognitivos y tipos de problemas en un área necesita exploración adicional si quiere ser mejorado el rol de la metacognición dentro de la resolución de problemas.

Estos límites imprecisos y poco claros hacen la investigación difícil (Brown et al, 1983), de modo que se tornan necesarios una definición y un modelo más detallados y menos ambiguos de la metacognición para responder a cuestiones sobre el éxito en la resolución de problemas de matemáticas y proporcionar los parámetros adecuados para investigar y analizar los resultados de la investigación.

La consideración explícita de un modelo a partir del cual analizar la literatura existente es un requisito imprescindible dadas las condiciones que acabamos de describir. Por eso, el modelo de resolución de problemas del que partimos, así como el papel que juega la metacognición en el mismo, será lo primero que concretemos tras analizar otro aspecto de fundamental importancia que es la relación existente entre el conocimiento general y el conocimiento específico de área.

1.1.2. Conocimiento general vs. conocimiento específico de área

Existe un gran debate sobre qué estrategias son más importantes durante la resolución de problemas, si las estrategias generales o las del área específica, pero, si revisamos la literatura, podemos observar que no hay un acuerdo generalizado respecto a cuáles son de un tipo y de otro.

Entre los defensores de la importancia del conocimiento de dominio específico sobre las estrategias de resolución de problemas en matemáticas destacan los psicólogos australianos Owen y Sweller (1989), que, aludiendo a las investigaciones desarrolladas en Psicología cognitiva, insisten en que "*el dominio en un área específica, como las matemáticas, está caracterizado por la posesión de un gran cuerpo de conocimiento específico del dominio*" (p. 326)[2], y que la diferencia entre expertos y noveles está en la posesión de esquemas de dominio específico, entendidos estos como "*a cognitive structure that specifies both the category to which a problem belongs and the most appropiate moves for problems of that category*" (*Ibíd.*). Consideran inapropiada la conclusión de que las dificultades en la resolución de problemas sean debidas a una carencia de adecuadas estrategias generales de resolución, sugiriendo, por el contrario, que dichas habilidades de resolución podrían ser adquiridas solamente a través un conocimiento muy detallado del área de conocimiento correspondiente.

> *"Most available evidence suggest that the superior problem-solving skills does not derive from superior heuristics but rather from domain specific skills" (…) "evidence that the teaching of heuristics is effective in sparse" (Owen y Sweller, 1989, p. 327).*

[2] En ocasiones nos tomamos la licencia de citar entre comillas fragmentos traducidos al castellano por nosotros mismos de documentos elaborados en otros idiomas -en cuyo caso se entrecomillan pero no se utiliza cursiva-. Esto se hace para intentar favorecer la lectura y comprensión del texto pero intentando mantener a la vez el sentido textual de la cita.

Por su parte, el matemático también australiano Lawson (1990) se sitúa contra Owen y Sweller (1989) insistiendo en el impacto positivo resultante del entrenamiento en estrategias generales de resolución de problemas:

> *"There is encouraging evidence that training in the use of the different types of general problem-solving strategies has positive impact on performance in both mathematics and other curriculum areas (…)*
>
> *The instruction in the use of these strategies is not quite as slender as Owen and Sweller imply" (Lawson, 1990, p. 406).*

También critica la reducción del proceso de transferencia de conocimientos a una generalización –entendida como una transferencia limitada a un campo muy semejante de problemas- que considera constituye una sobre-simplificación. Así, postula que la mejora en la competencia en resolución de problemas provocada por la adquisición de esquemas de dominio específico sería bastante escasa, defendiendo que las estrategias generales de resolución de problemas juegan un importante rol en la activación y uso de los esquemas existentes, en estrecha relación con el proceso de transferencia de los conocimientos:

> "*The development of a more detailed model of transfer provides good reason for the continued study of the role of general problem-solving strategies in mathematics problem-solving and for attention to these strategies in mathematics teaching*" (…) "*efficient operation of general problem solving strategies can be expected to lead to successful transfer provided the students have a well-organized knowledge base*" (pp. 408-409).

Sweller (1990) responde a las afirmaciones de Lawson centrándose básicamente en la necesidad de que la instrucción fomente que las estrategias funcionen en situaciones de transferencia o contextos nuevos de resolución de problemas, afirmando que, "aunque las pruebas de evaluación de la transferencia son un ingrediente esencial de cualquier estudio diseñado para proporcionar evidencia sobre la eficacia del entrenamiento en resolución de problemas" (p. 413), no se han utilizado problemas suficientemente diferentes a los utilizados durante la instrucción en el campo de la investigación sobre intervención para la adquisición de estrategias, tales como la de Charles y Lester (1982). Por tanto, concluye que "*there is very little evidence of successfully teaching general problem-solving techniques in mathematics education*" (p. 414).

Nunokawa (1991), matemático japonés, está de acuerdo con la tendencia señalada por Sweller (1990). Nunokawa analizó dos programas de instrucción en estrategias y encontró que sólo se observaban efectos de dichos programas cuando los problemas utilizados durante el proceso de enseñanza y los del post-test coincidían en la estructura, de manera que podían ser resueltos de modo similar. En uno de los programas, en que se concluían beneficios significativos de la instrucción sobre la resolución de problemas, se enseñaron estrategias de trabajo "hacia atrás", y resultó que los problemas del post-test coincidían con los utilizados durante la instrucción en que seguían la estructura $a = f_n (f_{n-1} (...f_1(x))$, donde a es una constante dada, x es un valor desconocido a ser buscado y las f_i son operaciones aritméticas. Por tanto, podemos afirmar que estos alumnos aprendieron una serie de pasos a realizar (adquirieron un conocimiento procedimental algorítmico), pero no podríamos decir lo mismo respecto a si sabrían reconocer un problema cuya resolución sería adecuada a través de este procedimiento o si sabrían aplicarlo con algunas variaciones. En el otro programa se enseñaron, además de las estrategias de trabajo "hacia atrás", otras estrategias de pensamiento más simples pero, a pesar de ello, no se detectó ningún efecto de la instrucción de esta estrategia en la resolución de los problemas que se plantearon en la evaluación post-test. En este segundo programa, los problemas del post-test, explica Nunokawa, no eran "similares" a los utilizados durante la enseñanza de esta estrategia.

Chinnappan y Lawson (1996) señalan, como causa de la controversia anterior entre Lawson y Sweller, la ambigüedad con que son examinados estos estudios, y entonces plantean la necesidad de clarificación sobre los tipos de estrategias.

En ese mismo trabajo, estos autores hacen una propuesta de clasificación de tipos de estrategias, pero, tras analizarla, hemos detectado deficiencias debidas a que no es exhaustiva y además produce de nuevo ambigüedad, ya que no utilizan criterios claros de diferenciación. Así, por ejemplo citan dibujar un diagrama e intentar casos más simples como estrategias relacionadas con el dominio, siendo que estas estrategias son útiles para muchos otros tipos de problemas.

En la misma línea, Mayer y Wittrock (1996) categorizan estrategias heurísticas tales como "elaborar un diagrama donde se representen las afirmaciones del problema", "dividir el problema en partes" o "encontrar un problema relacionado" también como herramientas de pensamiento específicas del área de conocimiento (p. 58).

Ya los matemáticos Stanic y Kilpatrick (1988), reflexionando sobre la historia de intervenciones para la mejora de la resolución de problemas en educación matemática, señalaron que la naturaleza de las estrategias heuristicas ha sido distorsionada:

> *"There are those today who on the surface affiliate themselves with the work of Pólya, but who reduce the rule-of-thumb heuristics to procedural skills, almost taking an algorithmic view of heuristics (i.e., specific heuristics fit in specific situation). A heuristics becomes a skill, a technique, even, paradoxically, an algorithm." (p. 17).*

De igual forma, se detecta una necesidad generalizada de "clarificar la interacción que tienen lugar entre el conocimiento específico de área y el conocimiento más general relativo a la metacognición" (Alexander y Judy, 1988, p. 397).

En relación con los obstáculos para el dominio de estrategias heurísticas, autores como Alan Schöenfeld (1985a) defienden que el éxito en cualquier dominio está basado en una fundamentación de las fuentes en ese dominio e incluso que un buen manejo de los heurísticos no puede esperarse que reemplace un débil dominio de la materia. Por eso afirma que "*one cannot expect too much of heuristic strategies*" (p. 96) respecto a su posibilidad para guiar a los resolutores hacia las soluciones adecuadas.

Todo lo anterior nos lleva a la necesidad elaborar un modelo de la resolución de problemas matemáticos que dé luz a todas las cuestiones que hemos mostrado que permanecen abiertas y nos ayude a avanzar en la investigación.

1.2. PROPUESTA DE UN MODELO DE RESOLUCIÓN DE TAREAS MATEMÁTICAS

El modelo de resolución de tareas matemáticas que presentamos pretende dar respuesta a las necesidades detectadas en la revisión de los trabajos precedentes.

Se utiliza intencionadamente el término "tareas matemáticas" en vez de "problemas de matemáticas" para denominar al modelo aquí propuesto porque, como mostraremos más adelante, se parte de una diferenciación inicial, de gran importancia para la interpretación del mismo, entre tareas de práctica y tareas problemáticas y por tanto el modelo hace referencia a ambos tipos.

Postulamos que están implicados dos componentes en la resolución de tareas matemáticas: el *conocimiento* y las *creencias*. Ambos componentes están caracterizados por dos variables: *posibilidad potencial de aplicación* y *tipo de conocimiento*. De la primera surge la característica *generalidad-especificidad* del componente (como polos de una misma línea); en función de la segunda se consideran tres *tipos de conocimiento: conceptual, procedimental y condicional*. Profundizaremos en cada uno de los componentes seguidamente.

1.2.1. Conocimiento: relación entre cognición y metacognición

Uno de los componentes de la resolución de tareas matemáticas es el conocimiento, que puede ser de tres tipos: conceptual, procedimental y condicional. Los conocimiento conceptuales y procedimentales (en cuanto conocimientos estáticos) tienen carácter cognitivo, mientras que el conocimiento condicional se correspondería con el conocimiento metacognitivo. Estos dos niveles de conocimiento -cognitivo y metacognitivo- se caracterizan por su interactividad e interdependencia.

Poseer conocimiento metacognitivo de un concepto o procedimiento implica, como condición necesaria pero no suficiente, disponer de conocimiento conceptual y/o procedimental del mismo. El conocimiento condicional (metacognitivo) será el que permita tanto la puesta en juego (selección) del concepto y/o procedimiento cuando sea necesario, como que sea aplicado de manera flexible (adaptación) en función de las características de la tarea. Así podemos definir el *conocimiento metacognitivo* como el conocimiento condicional, tanto de los conceptos como de los procedimientos, necesario para su selección y aplicación adaptada a las condiciones de la tarea.

En la *Tabla I.1* se distingue entre conceptos y procedimientos. Los primeros se diferencian de los segundos en que no implican un conocimiento procedimental. Ambos se pueden dar en dos modalidades: algorítmicos y no algorítmicos. Las formas algorítmicas tienen lugar cuando para su selección y/o aplicación es suficiente una "transferencia directa" de los conocimientos (analítica) y las no-algorítmicas cuando es necesaria una transferencia indirecta (exploratoria)[3]. Esta característica no diferencia entre tipos de conceptos, ni entre procedimientos,

3 Los términos "transferencia analítica" y "transferencia exploratoria" están basados en la terminología de Schöenfeld, que denomina "exploración" al proceso que es necesario que un sujeto ponga en juego cuando se enfrenta a una tarea cuyo modo de resolución no deduce de manera directa, esto es, a través del "análisis".

sino que son modalidades en que cada concepto y cada procedimiento pueden darse.

		CONOCIMIENTO COGNITIVO		CONOCIMIENTO METACOGNITIVO (CONDICIONAL)	
		CONOCIMIENTO CONCEPTUAL	**CONOCIMIENTO PROCEDIMENTAL**	**SELECCIÓN**	**APLICACIÓN**
CONCEPTOS	**ALGORÍTMICOS**	SÍ	---	Transferencia analítica	Transferencia analítica
	NO-ALGORÍTMICOS	SÍ	---	Transferencia exploratoria	Transferencia exploratoria
PROCEDIMIENTOS	**ALGORÍTMICOS**	SÍ	SÍ	Transferencia analítica	Transferencia analítica
	NO-ALGORÍTMICOS	SÍ	SÍ	Transferencia exploratoria	Transferencia exploratoria

Tabla I.1 Tipos-niveles de conocimiento que implican diferentes objetos de aprendizaje.

Pensemos en un procedimiento algorítmico típico, como el de la suma, para entender este hecho. El procedimiento de la suma se denomina algorítmico porque la realización de una serie de pasos prefijados lleva a la solución, pero una persona no sabe sumar con simplemente conocer cuáles son los pasos algorítmicos a seguir para realizar la operación, sino que conlleva: que se produzca la selección de la suma como mejor solución a la tarea a resolver; que se seleccione, si se conocen varios algoritmos de la suma, el más adecuado; y que se aplique el algoritmo de forma adecuada (por ejemplo, situar en el numerador y en el denominador los datos correctos). Del mismo modo, hay procedimientos que, aún no siendo considerados algorítmicos, por ejemplo los heurísticos, pueden ser rutinizados, como afirman Stanic y Kilpatrick (1988).

Profundizaremos en la comprensión de esta tabla seguidamente, al describir la clasificación que proponemos de tareas matemáticas.

1.2.1.1. Generalidad-especificidad del conocimiento: características de la tarea

Esta característica permite dar luz a dos de las cuestiones sin resolver que se detectan en la literatura: necesidad de una clasificación de estrategias en función de su carácter general o específico y dar luz a la relación entre el conocimiento general y el de dominio específico. Dos cuestiones que en definitiva se reducen a una, ya que el conocimiento se refiere tanto a conceptos como a procedimientos, incluyendo estos últimos tanto las técnicas como las estrategias.

La propuesta que hacemos aquí es considerar la generalidad-especificidad del conocimiento como un continuo donde es necesario situarse en un marco concreto, al que llamaremos contexto, a partir del cual determinar el carácter genérico-específico de los componentes, en este caso el conocimiento.

El contexto en el caso que nos ocupa es la resolución de tareas matemáticas. Este abarca siempre conocimiento matemático (microcontexto) y en algunos casos conocimientos más generales (macrocontexto) (ver *Figura I.1*). Los procedimientos relativos al microcontexto, es decir, los propios del contenido matemático se denominarán *técnicas*, mientras que los procedimientos tomados del macrocontexto (aplicables a otras tareas no matemáticas) se etiquetarán como *estrategias*.

La diferencia fundamental entre las técnicas y las estrategias es que las primeras son relativas al dominio de conocimiento específico (microcontexto), mientras que las otras son aplicables a otras tareas (macrocontexto).

Las características de cada tarea matemática determinarán si es necesario aplicar para su resolución solamente conocimiento matemático o también conocimiento del macrocontexto, así como qué conocimientos concretos de ambos tipos.

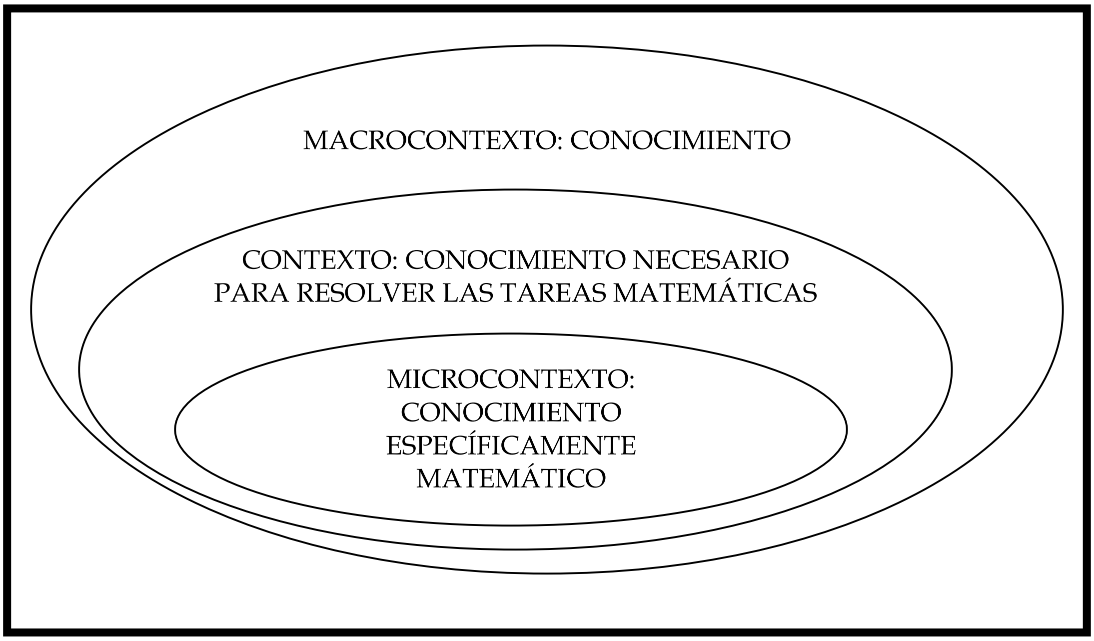


Figura I.1 Carácter inclusivo de los niveles de contexto.

Este carácter general de las estrategias heurísticas se ve reflejado en numerosos estudios. Así, Annie y John Selden (Selden y Selden, 1997), en un trabajo en el que analizan, partiendo de gran número de investigaciones, cuáles son las características de los resolutores de problemas con éxito llegan a la siguiente conclusión:

> *"General heuristics like means-ends analysis or backward chaining, while good for solving general logic problems such as the missionaries-and-cannibals problem, are almost useless for problems in content rich domains like mathematics."*

Por ejemplo, DeFranco (1996), realizó un estudio con ocho doctores en matemáticas donde concluyó que no eran buenos resolutores de problemas. Posteriormente Schöenfeld le aconsejó estudiar también las características de ocho matemáticos de reconocido prestigio y resultó que, mientras que los doctores eran expertos en un ámbito más específico de problemas, las eminencias sí eran expertos en resolución de problemas más alejados de la materia específica.

Las propuestas de instrucción que se centran en formar a los alumnos en el dominio de heurísticos generales para la resolución de problemas novedosos, tipo "Olimpiadas matemáticas", se ven en la necesidad, durante la instrucción, de ejemplificar tipos de problemas que son resolubles a través de ellos (p.e., Callejo, 1991; Guzmán, 1991; Puig, 2004). De este modo, estrategias tales como empezar por lo fácil, hacer un esquema, una figura o un diagrama, buscar un problema semejante o suponer que está resuelto no constituyen estrategias aplicables a cualquier tipo de problema, sino que su eficacia y las variaciones necesarias en su modo de aplicación dependerán de las características propias de cada uno.

Para explicar qué conocimientos son potencialmente aplicables para la resolución de una tarea matemática, será necesario previamente definir qué es una tarea de matemáticas, para lo cual partiremos del concepto de problema, explicando posteriormente las razones que hacen que utilicemos la denominación general "tareas" y el término "problemas" para un tipo de tareas con unas características específicas.

1.2.1.2. El concepto de problema matemático

Pólya no definió lo que entendía por problema cuando escribió su primer libro *How to solve it* (1945), con el cual inauguró la heurística moderna, sino que esperó a una publicación posterior, que tenía por título *Mathematical discovery* (1962-65), y nada menos que al capítulo quinto, después de haber realizado un análisis de los procesos que intervienen en la resolución de problemas, para afirmar que resolver un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata.

A pesar de los numerosos trabajos que se han realizado en torno a la resolución de problemas, aún queda mucho por sistematizar en este campo y un ejemplo de ello es que no existe aún una caracterización universalmente aceptada de los términos *problema* y *resolución de problemas*.

Carr (1989) añade un matiz interesante al afirmar que resolver un problema es "*el proceso de aplicar el conocimiento previamente adquirido a las situaciones nuevas y no familiares*" (p. 471); es decir, el resolutor debe disponer de los medios necesarios para resolver el problema, pero no puede tratarse de problemas que comprueben simplemente que se posee un conocimiento inerte, sino que deben implicar una transferencia del mismo. Profundizaremos sobre esta cuestión seguidamente, planteando una clasificación de tipos de tareas matemáticas. Consideraremos para ello la distinción planteada por Perkins (Perkins y Salomon, 1988) entre dos tipos de transferencia, "low-road" y "high-road". La primera se refiere a rutinas que han sido practicadas y son "automáticamente" puestas en juego en situaciones que tienen una gran similitud con el contexto en que fueron aprendidas. El segundo tipo requiere pensamiento reflexivo y un intento directo de hacer conexiones; implica extraer los principios y aplicarlos en otra parte (búsqueda hacia delante) o buscar en la memoria (búsqueda hacia atrás). Se asemejan estos dos tipos a los aquí planteados, pero en el campo de la resolución de problemas consideramos más adecuada la denominación "*transferencia directa o analítica*" y "*transferencia indirecta o exploratoria*", caracterizándose la primera porque se seleccionan y/o aplican los conocimientos (adaptados a las características de la tarea) de forma analítica, rutinaria; mientras que en la segunda es necesaria una exploración previa, ya que se produce un bloqueo debido a que no se trata de una tarea rutinaria, sino de una tarea problemática y es necesario por tanto la puesta en juego de heurísticos dirigidos a la búsqueda de solución.

1.2.1.3. Tipos de tareas matemáticas

Encontramos en la literatura dos clasificaciones de tipos de problemas de marcada importancia, las cuales describiremos a continuación para permitir posteriormente su comparación con la clasificación que proponemos en este trabajo.

Charles y Lester (1982) clasifican los problemas en: (a) problemas estándar (de palabras o historia), los cuales requieren que el sujeto transforme las afirmaciones verbales en un modelo matemático; (b) problemas no estándar (de búsqueda abierta), que fomentan el uso de métodos flexibles, ya que el resolutor no posee procedimientos rutinarios para encontrar una respuesta; (c) problemas de la vida real, que implican situaciones donde los estudiantes necesitan seleccionar y aplicar las herramientas matemáticas a su discreción; y (d) puzzles, cuya resolución depende de la suerte, la adivinación o el uso de estrategias inusuales.

Por otra parte, Borasi (1986) ofrece una clasificación de los problemas utilizando, como elementos estructurales (a) el contexto del problema (la situación en que se enmarca el problema, que puede ser inexistente, explícita en el texto, o explícita sólo de forma parcial); (b) la formulación del problema (definición de la tarea a realizar, que puede ser única y explícita, parcialmente dada, implícita o inexistente); (c) el conjunto de soluciones que pueden considerarse aceptables (que puede ser única y exacta; generalmente única, muchas posibles o formulación del problema); y (d) el método de aproximación que podría utilizarse para alcanzar la solución (combinación de algoritmos conocidos, elaboración de un algoritmo nuevo, exploración del contexto con reformulación y elaboración de nuevos algoritmos, exploración del contexto con reformulación y planteamiento del problema, o simplemente formulación del problema). En función de las cuales concluye que se pueden clasificar en: ejercicios; problemas con texto; puzzles; pruebas de una conjetura; problema de la vida real; situación problemática; y situación, con un carácter más amplio donde no está definido un problema.

La clasificación que proponemos en este trabajo considera como variable de caracterización fundamental de una *tarea problemática* el que implique un *bloqueo*, es decir, que no pueda ser resuelta de manera inmediata, en consonancia con las definición de problema propuesta por Pólya (1961). Sin embargo, la variable que se ha considerado tradicionalmente, de manera implícita, para caracterizar una tarea matemática como problema ha sido que implique la modelización de una situación (ver, p.e., Charles y Léster, 1982; Borasi, 1986). Esto puede haber sido debido a no considerar, por un lado, que las tareas que no implican modelización pueden provocar también bloqueo, y no ser por tanto rutinarias; y, por otro lado, que no todas las tareas que implican una modelización requieren un procedimiento de resolución no-algorítmico y que por tanto su resolución puede ser rutinaria, inmediata, sin conllevar bloqueo.

El mismo Schöenfeld (1992a) admite que se necesita mucha más claridad sobre el significado del término resolución de problemas, que ha funcionado como un paraguas bajo el cual han sido conducidos tipos radicalmente distintos de investigación. También afirma este autor que, con relación a los recursos, resta elaborar una interacción dinámica entre dichos recursos y otros aspectos del comportamiento al resolver problemas, para lo cual, postulamos en este trabajo, se torna necesario considerar explícitamente el tipo de tarea matemática que se realiza.

Inicialmente nos planteamos la posibilidad de, para evitar que la asiduidad del posible lector con la terminología tradicional le provocara dificultades de comprensión, denominar ejercicios a aquellas tareas que no implican una modelización y problemas a las que sí –aún siendo conscientes de que ambos pueden conllevar o no el bloqueo del resolutor al que hace referencia la propia definición de problema-; pero nuestra pretensión de máxima claridad y mínima ambigüedad para hacer frente a los problemas detectados en la literatura precedente nos hizo abandonar esta idea y optar por la opción conceptualmente más correcta, que es considerar dos tipos de *tareas matemáticas*: las *tareas problemáticas* (no algorítmicas, no rutinarias, que implican una transferencia exploratoria) y las *tareas de práctica* (algorítmicas, rutinarias; la transferencia que implican es analítica).

Cuando decimos que la resolución de una tarea matemática tiene carácter algorítmico- es decir, es una tarea de práctica-, nos referimos a que el sujeto que va a llevar a cabo su resolución conoce, con carácter rutinario, estático, los pasos a seguir para llegar a la solución, los cuales son practicados al resolver la tarea. Podríamos decir, por tanto, que implican tan sólo un conocimiento conceptual y/o procedimental rígido, no flexible, que se practica durante la resolución, pero no un conocimiento condicional –metacognitivo-, el cual permite la transferencia del conocimiento a una tarea problemática, ya sea para su selección -recuperación de la MLP- cuando es conveniente o/y para su aplicación adaptada en función de las condiciones concretas de la tarea. Es decir, como concluimos al definir una tarea problemática, su resolución conlleva la transferencia de conocimiento a una situación de características diferentes a aquéllas en las que se ha aprendido. Nos estamos refiriendo por tanto a que la resolución de tareas problemáticas implica que el conocimiento que se aplica no sea inerte, adjetivo que se utiliza para referirse a un conocimiento potencialmente aplicable en una variedad de contextos pero que sólo es accesible en un pequeño conjunto de circunstancias (Whitehead, 1929, citado por Van Haneghan , Barron, Young, Williams, Vye y Bransford, 1992).

Una vez caracterizada una tarea problemática y diferenciada de una tarea de práctica, describiremos los tipos de tareas matemáticas en función, no sólo de la clasificación anterior, sino también de si implican o no modelización, teniendo en cuenta: (a) las tareas que no implican modelización, es decir, su resolución no implica elaborar un modelo de la situación planteada -este tipo de tareas pueden hacer referencia a la situación modelizada, pero no forma parte del trabajo del alumno valorar su validez-, son denominadas "tareas de ejecución"; y (b) mientras que las tareas de ejecución no incluyen, por definición, modelización, las tareas de modelización sí pueden y suelen implicar, posteriormente, la tarea de ejecución, basada en el modelo que previamente ha sido elaborado, tratándose entonces de lo que hemos denominado "tareas mixtas". La propuesta de clasificación de tareas matemáticas es expuesta en la siguiente tabla:

1) *Tareas problemáticas*:

1.1) *De modelización*: tanto la modelización como la ejecución (si es necesaria) son no rutinarias, es decir, implican bloqueo, son no-algorítmicas.

1.2) *De ejecución*: sólo implican ejecución y ésta es de carácter no-rutinario.

1.2.1) *Contextualizadas*: se hace referencia en la tarea a la situación que modeliza.

1.2.2) *Descontextualizadas*: la tarea no hace referencia a ningún contexto.

2) *Tareas de práctica*:

2.1) *De modelización*: tanto la modelización como la ejecución (si es necesaria) son rutinarias.

2.2) *De ejecución*: sólo implican ejecución y ésta es de carácter rutinario.

2.2.1) *Contextualizadas*: se hace referencia en la tarea a la situación que modeliza.

2.2.2) *Descontextualizadas*: no se hace referencia en la tarea a la situación que modeliza.

3) *Tareas mixtas* (implican tanto modelización como ejecución, teniendo uno de los procesos carácter rutinario y el otro no rutinario). En estos casos será imprescindible especificar:

3.1) De modelización algorítmica y ejecución no-rutinaria.

3.2) De modelización no-algorítmica y ejecución rutinaria

Tabla I.2 Tipos de tareas matemáticas

Una tarea, o una parte de ella, es rutinaria si su ejecución (tanto la elección de los procedimientos y/o conceptos adecuados para su resolución como su aplicación adaptada a las características concretas) ha sido rutinizada por los sujetos que la quieren resolver y por tanto es resoluble mediante *"transferencia analítica"*. Mientras que una tarea, o parte de ella, no rutinaria lo es porque implica un bloqueo y es necesaria una *"transferencia exploratoria"* para resolverla.

En la *Figura I.2* se describen los procesos implicados en la resolución de una tarea matemática[4] en función de si ésta implica modelización y/o ejecución y de si se trata de una tarea problemática o una tarea de práctica.

En las tareas de modelización se parte de una situación que requiere ser modelizada, mientras que en las de ejecución se parte en la tarea de una situación ya modelizada matemáticamente (pudiéndose hacer referencia o no a la situación que modeliza), en la que será necesario seleccionar y ejecutar la técnica de resolución. La existencia de un contexto en que aparece enmarcada la tarea conllevará normalmente la necesidad de interpretar los resultados dentro del dicho contexto.

En las tareas de práctica, se llega al objetivo (modelización y/o ejecución) a través de realizar simples análisis (líneas discontinuas en el gráfico), no teniendo lugar bloqueos y no siendo necesarias por tanto acciones de exploración, que sí son necesarias en las tareas problemáticas. Tras obtener un resultado, será necesario, en el caso de tratarse de una tarea de modelización o bien de una tarea de ejecución contextualizada, llevar a cabo una interpretación del mismo, para concluir una solución, es decir, de qué forma el resultado obtenido soluciona la situación planteada.

[4] Aunque investigaciones actuales defienden la idea de que cualquier actividad matemática puede considerarse como una actividad de modelización, de modo que la modelización intramatemática se revela como fundamental (García, 2005), en este caso nos referimos a la modelización a partir de situaciones extramatemáticas.

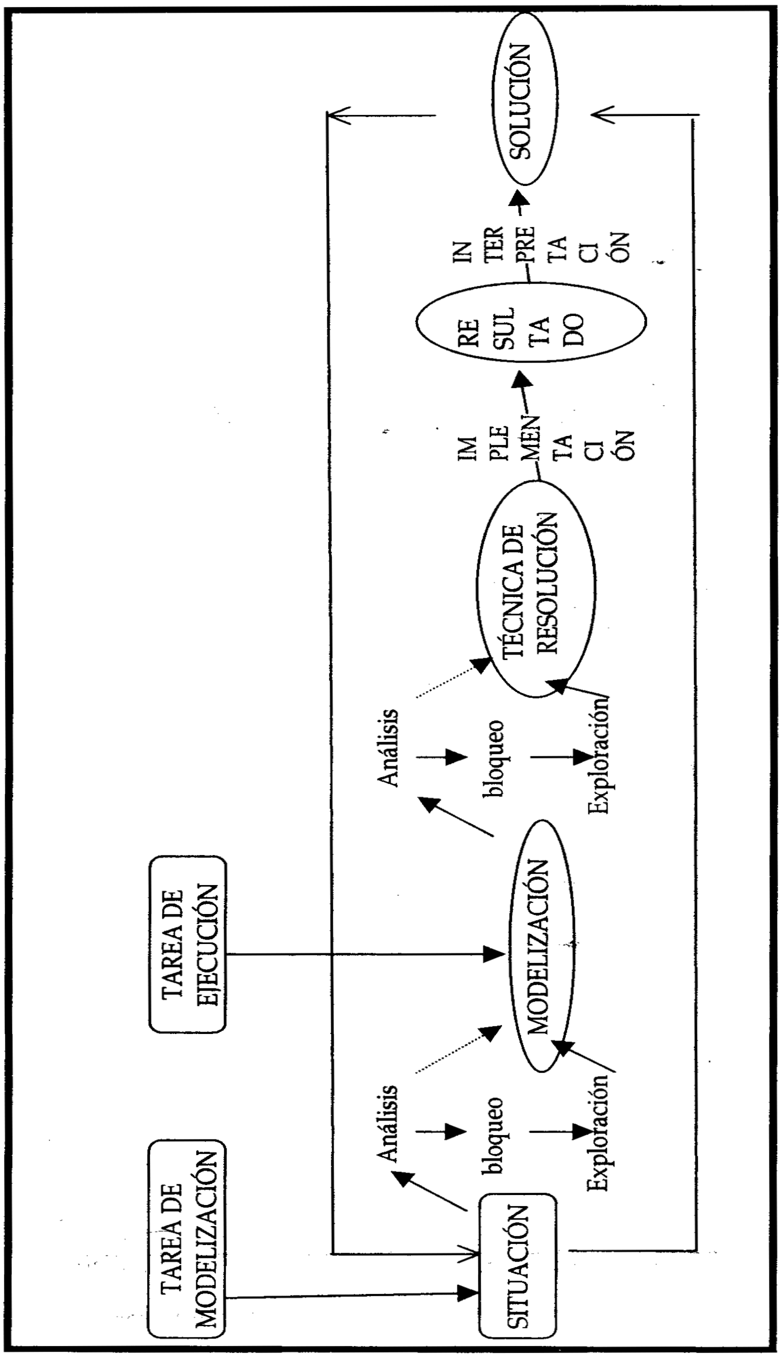


Figura I.2 Implicaciones del tipo de tarea matemática en su proceso de resolución.

Por ejemplo, si la tarea solicita repartir siete globos entre 5 niños, la solución no será 1’4, sino 1 para cada niño y sobran dos (o quizá dos niños tienen dos globos y los demás uno); sin embargo, si lo que se pidiera es repartir 3 chocolatinas entre dos niños sí se podría responder que a cada niño le corresponden una chocolatina y media, que coincide con el resultado de la división.

Recordemos que el carácter no rutinario puede ser: (a) en la selección del conocimiento; o/y (b) en la utilización del mismo (flexible, adaptada a las nuevas circunstancias). Es importante destacar que, aunque hay procedimientos definidos por naturaleza, en el campo de las matemáticas, como algorítmicos, debido a que si se siguen una serie de pasos adecuadamente se llega con seguridad a la solución, nosotros consideramos que ningún procedimiento es algorítmico por naturaleza, ya que depende del grado del conocimiento de un sujeto respecto al mismo. Además, defendemos que dominar un procedimiento implica, además de su aplicación adaptada a las características de la tarea, la selección como el más adecuado en una determinada situación, aspecto que no ha sido considerado en el concepto de algorítmico utilizado tradicionalmente en matemáticas.

Por otro lado, tanto la selección como la implementación de los procedimientos pueden ser “rutinizadas”- tal como afirmaban Stanic y Kilpatrick (1988)- pero no sólo aplicado a las estrategias heurísticas, sino a cualquier procedimiento.

Por tanto, nosotros definiremos el carácter algorítmico/no-algorítmico de un conocimiento en función de la relación entre el tipo de uso que es necesario hacer de él para resolver una tarea y el conocimiento de que dispone el sujeto, es decir, del grado de rutinización que tiene un sujeto sobre el modo de resolución de una tarea. Así, el conocimiento algorítmico será aquel que un sujeto debe aplicar para resolver una tarea de práctica, mientras que se tratará de una tarea problemática cuando el sujeto dispone de un conocimiento no algorítmico para su resolución.

A continuación ejemplificaremos los diferentes tipos de tareas en función de si implican o no modelización, pero no podemos ejemplificar si se trata de tareas problemáticas o de práctica debido a que esta característica, como hemos indicado anteriormente, depende del conocimiento previo de los sujetos:

Ejemplo de tarea de modelización sin ejecución:

> *"En un aparcamiento tienen los siguientes precios:*
>
> *- Primera hora o fracción de hora: 200 pesetas*
>
> *- Más de 1 hora: cada hora o fracción 100 pesetas*
>
> *- Más de 10 horas, cada hora o fracción: 50 pesetas*
>
> *¿Cómo podemos saber el precio a pagar por el aparcamiento en función del tiempo?"*

Ejemplo de tarea de modelización que implica ejecución:

> *"En un aparcamiento tienen los siguientes precios:*
>
> *- Primera hora o fracción de hora: 1 euro*
>
> *- A partir de la primera hora: cada hora 0'5 euros*
>
> *- A partir de 10 horas: cada hora o fracción 0'2 euros*
>
> *¿Cuánto dinero deberá pagar una persona que haya dejado el coche en este aparcamiento durante 3 horas y 27 minutos?"*

Ejemplo de tarea de ejecución contextualizada:

> *"En un aparcamiento la función que representa el precio (en euros, "e") a pagar en función del tiempo (en horas, "h") que se ha dejado el coche en él es la siguiente: t=2h+2. ¿Cuánto dinero tendrá que pagar una persona que haya dejado el coche en el aparcamiento 4 horas y 22 minutos?"*

Ejemplo de tarea de ejecución descontextualizada:

> *"Calcula "t" sabiendo que "t = 2x + 2"* y *"x = 4"*.

Respecto a la generalidad-especificidad del conocimiento, en la ejecución (halla sido precedida o no de modelización) el conocimiento puesto en juego es específicamente matemático, perteneciente por tanto al microcontexto (ver *Figura I.3*).

Para llevar a cabo la modelización, así como la interpretación del resultado -existente esta última en los casos de tareas mixtas o tareas de ejecución contextualizadas- será necesario, por norma general, el uso de conocimientos tanto del microcontexto, esto es, conocimiento específicamente matemático, como del macrocontexto –es decir, conocimiento no específicamente matemático. Sin embargo, la ejecución implica únicamente la utilización de conocimientos propiamente matemáticos.

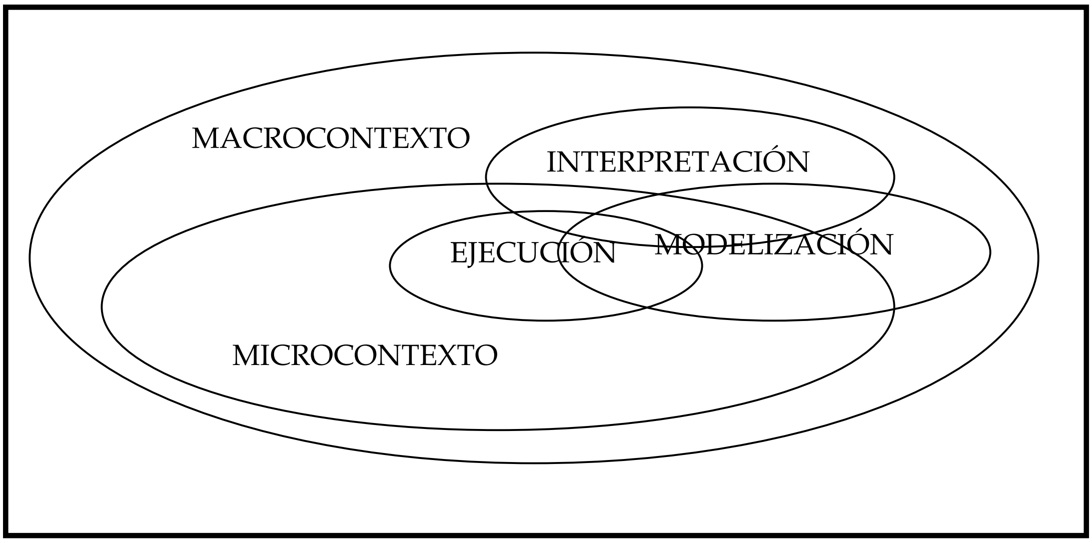


Figura I.3 Generalidad-especificidad del conocimiento implicado en la resolución de una tarea matemática.

Los tres grandes procesos que hemos considerado en la resolución de tareas matemáticas son la modelización, la ejecución y la interpretación. Pasaremos a continuación a describir, sin la intención de ser exhaustivos, sino con el objetivo de aclarar conceptos, cuáles son las fases que, de modo interconectado, engloba cada uno de ellos[5].

En el proceso de *modelización* el paso inicial está constituido por la comprensión de la situación y de qué pide la tarea. Aquí pueden surgir dificultades como: una falta de conocimiento de la acepción adecuada de determinados términos o expresiones del enunciado; o bien, que sí conozca el sujeto la acepción adecuada para el problema pero no se produzca la recuperación.

En el primer caso podríamos decir que la tarea está mal planteada, a no ser que se facilite a los sujetos medios para averiguar el significado de dichos términos desconocidos.

En esta fase tendrán mucha utilidad estrategias heurísticas como dibujar un diagrama, por ejemplo, o hacer una tabla, dependiendo del tipo de cuestión.

El sujeto necesita comprender qué es necesario solucionar y determinar qué datos son importantes para la resolución y cuáles son las relaciones importantes entre ellos. Esta elaboración, asunción, de un modelo matemático que permita dar respuesta a la cuestión, consiste propiamente el proceso de modelización.

El proceso de *ejecución* conlleva la elección y aplicación de una técnica. La ejecución exitosa exige además que la técnica seleccionada sea la más apropiada en función de lo que pide el problema (eficacia) y su mínimo coste (eficiencia); para ello, normalmente será necesario considerar diferentes técnicas de resolución. Tras la aplicación de la técnica y la obtención del consecuente resultado, en los casos de tareas mixtas o contextualizadas, tiene lugar el proceso de *interpretación*.

[5] Siempre existirá además una fase previa necesaria en la que el sujeto asume la responsabilidad de realizar la tarea. Esa motivación será además fundamental durante todo el proceso, especialmente en tareas problemáticas, donde el resolutor debe enfrentarse a obstáculos e intentar superarlos.

Respecto a esta última fase, es fundamental en primer lugar plantearse la necesidad de analizar el resultado en el contexto de la situación marco de la tarea. Es necesario así diferenciar el *resultado* –fruto de la ejecución-, de la *solución*, que se refiere a la respuesta final que se da a la situación problemática como resultado del trabajo llevado a cabo para su resolución y que implica la interpretación del resultado.

En todos los procesos hay dos formas de resolución, a través de análisis o de exploración, dependiendo de si la forma de consecución del objetivo de la fase en cuestión es algorítmica (análisis) o produce bloqueos que hacen necesario el uso de heurísticos para profundizar en la tarea.

Los *heurísticos* son los protagonistas en las actividades de *exploración*, ayudando a profundizar sobre la tarea. Se postula aquí que estos no son generales implícitamente, sino que también tienen un carácter genérico-específico; es decir, hay heurísticos implicados en la fase de modelización, que tienen una aplicación a otros dominios (son tomados del macrocontexto) y que denominaremos en este modelo "*estrategias heurísticas*", pero también hay heurísticos utilizados para hacer frente a los bloqueos que tienen lugar durante ejecución y que son más específicos de la materia de conocimiento (pertenecen al microcontexto), y que denominaremos "*técnicas heurísticas*".

El *análisis* se centra en las características superficiales de la tarea, en vez de en la estructura profunda. Para resolver con éxito una tarea problemática serán siempre necesarias tareas de exploración, ya que se produce un obstáculo, mientras que en las tareas de práctica será suficiente realizar una "transferencia directa" de los conocimientos.

1.2.2. Creencias: relación entre conocimiento metacognitivo y actuación metacognitiva

Actuar metacognitivamente se refiere a la utilización del conocimiento metacognitivo (condicional). Pero para actuar metacognitivamente no es suficiente con disponer del conocimiento condicional necesario, sino que aquí serán determinantes las variables motivacionales, las cuales permiten inicialmente asumir el reto, la responsabilidad, de resolver el problema, y, durante la resolución, afrontar el/los bloqueo/s, haciendo uso del conocimiento metacognitivo.

Estas variables motivacionales constituyen el segundo de los componentes del modelo de resolución de problemas, las creencias; las cuales podemos decir que incluyen tres tipos de conocimiento: conceptual, procedimental y condicional; pero en un sentido diferente al del primer componente; y es que "*los trabajos referidos a las creencias han abandonado el campo metacognitivo para ocupar un espacio entre lo cognitivo y lo afectivo*" (Bermejo, Lago y Rodríguez [en prensa], citado por Lago y Rodríguez, 1996, p. 91). La defensa de las creencias metacognitivas como un componente separado de la metacognición está apoyada por gran número de autores (p.e., García y Pintrich, 1994; Lucangeli y Cornoldi, 1997; Lucangeli, Cornoldi, y Tellarini, 1998; Masui y De Corte, 1999; Vermut, 1996).

El campo de las creencias es complejo, y los diferentes constructos que lo conforman tienen límites poco precisos, pero podemos decir que estaría formado por las actitudes y las creencias afectivas, atribucionales y de autoeficacia (Schöenfeld, 1985a, 1985b, 1985c; Garofalo y Léster, 1985; si bien estos las consideran como componentes de la metacognición).

El conocimiento conceptual son creencias propiamente, es decir, lo que la persona cree; el procedimental se refiere a las formas que se conocen para hacer frente a las creencias; y el condicional a la selección y aplicación de las formas que se conocen para hacer frente a las creencias en función de las circunstancias. Pero no se consideran dos niveles: cognición y metacognición, ya que, para empezar, no existe un conocimiento como tal, sino una creencia.

Las creencias tienen, al igual que los conocimientos, un carácter genérico-específico, y también siempre en referencia a un contexto, que se concretará en función de las características de la tarea. Así, las creencias que conformarán el contexto de una tarea matemática concreta formarán parte del macrocontexto de creencias del sujeto, y, de entre estas, algunas se referirán al conocimiento específicamente matemático (microcontexto).

En el caso de las tareas de ejecución influirán mayormente las creencias respecto a las matemáticas y al contenido propiamente matemático. En las tareas que implican modelización se amplía el contexto de las creencias potencialmente influyentes en la resolución, ya que entran en juego no sólo conocimientos matemáticos, sino los relativos a la situación que contextualiza la tarea, por ejemplo, los relacionados con el texto, que implica la influencia de creencias sobre la lectura o la escritura; o hacia los campos a los que se refieran los términos no matemáticos de la situación que es necesario modelizar.

El ambiente (p.e., expectativas sobre las posibilidades del sujeto o valoración del contenido de aprendizaje de los profesores, padres, amigos...) interactúa con su sistema de creencias, de forma que sus experiencias modelan sus creencias, si bien a su vez sus creencias influyen en la forma de percibir las experiencias. La cuestión de la formación y modificación de las creencias no va a ser tratada aquí en profundidad, sino que nos centramos en destacar cómo las creencias son referenciadas a contextos, con diferente grado de generalidad-especificidad. Por ejemplo el alumno puede tener una creencia sobre su autoeficacia en relación al aprendizaje en general, que influirá y se verá influida por su creencia de autoeficacia hacia las matemáticas pero no tienen por qué coincidir; de igual modo ambas interactuarán con sus creencias de autoeficacia hacia las tareas de geometría, pero no teniendo por qué ser coincidentes. Por otro lado, sus experiencias percibidas en la resolución de tareas de geometría influirán fundamentalmente en sus creencias de autoeficacia sobre la resolución de tareas de geometría, si bien ésta es probable que influya a su vez, aunque en menor medida, en sus creencias de autoeficacia en matemáticas y en el aprendizaje en general.

1.2.3. Conceptos y constructos relacionados con la metacognición: un intento de clarificación y diferenciación

Para completar el modelo, consideramos necesario abordar la relación entre la metacognición y otros conceptos estrechamente relacionados, que incluso en ocasiones se hacen equivalentes, pero que se refieren a aspectos diferentes de la metacognición a la vez que ddiferenciados entre ellos. Nos estamos refiriendo concretamente a la calibración y la reflexión.

La *calibración* se refiere al grado de correspondencia entre las creencias del sujeto y la realidad –como hecho social, convencional-, y se suele concretar en la relación entre las tareas que un sujeto cree que va a hacer o ha hecho bien y las que realmente logra completar con éxito.

Lo que aquí se postula es que la calibración -campo en el que se han situado numerosos estudios bajo el título de “metacognición”-, se refiere al componente de creencias, pero de alto grado de especificidad. La diferencia entre “¿Crees que vas a resolver bien este ejercicio?” y “¿Crees que eres bueno en matemáticas?” está en el grado de generalidad de la pregunta y no el carácter metacognitivo. Las preguntas realizadas con posterioridad a la ejecución por parte del sujeto, como por ejemplo, “¿Crees que has hecho bien este ejercicio?” no dejan de estar situadas en el ámbito de las creencias. Como afirma Sternberg (1998): “*The problem is that when there is a positive manifold, almost everything correlates with everything else, and it is easy to slip into causal inferences from these* *correlations, despite admonitions to the contrary from elementary statistics teachers*" (p. 131). No sólo lleva este hecho a inferencias causales erróneas, sino también a la confusión entre constructos.

Un alumno con el conocimiento necesario para solucionar una tarea problemática, si las creencias son apropiadas, resolverá adecuadamente el mismo, lo cual conllevará una gran seguridad en su acierto; pero también será un buen calibrador aquel alumno que acierte sobre el error en su ejecución. Pero la importancia desde el punto de vista la resolución de problemas no está en la calibración, sino en la fundamentación de la calibración, que se corresponderá con los aspectos metacognitivos. Las causas de una mala calibración pueden ser tanto la ausencia del conocimiento necesario como las creencias que entran en juego. Un alumno que al resolver una tarea justifique en sus conocimientos la causa del acierto o error mostrará una actuación metacognitiva, pero no si esa fundamentación se apoya simplemente en creencias.

El análisis de las relaciones entre calibración y metacognición nos lleva ineludiblemente a plantearnos otra de las discusiones que se mantienen actualmente en este campo y que se refiere al carácter consciente de la resolución de problema.

Estamos de acuerdo con numerosos autores (p.e., Borkowski y Muthukrishna, 1992; Bracewell, 1983; Carr, Alexander y Folds-Bennett, 1994; Davidson, Deuser y Sternberg, 1994; Hacker, 1998; Paris y Winograd, 1990) en que la actuación metacognitiva implica un comportamiento consciente y deliberado, es más, creemos que la base de la metacognición no es sólo la realización de elecciones conscientes adecuadas, sino que conlleva una justificación fundamentada de las mismas. Esta es la clave que permite dar luz a la discusión sobre si las elecciones aparentemente automáticas y no conscientes que toma un sujeto pueden considerarse metacognitivas. En el caso de tareas problemáticas la exteriorización de sus reflexiones será más probable, pero si se trata de tareas de práctica el sujeto puede actuar adecuadamente pero de manera rutinizada, resultando más difícil la exteriorización de las causas de sus actos debido a ese carácter rutinario que han adquirido. Pero si un sujeto ha actuado metacognitivamente sabrá fundamentar las razones de sus elecciones, aunque en los casos en que se haya rutinizado implicará un mayor esfuerzo por parte del sujeto.

Sternberg (1985) afirma que cuando el funcionamiento es automático, la actividad metacognitiva, concebida como reflexión durante la acción, puede realmente obstaculizar el funcionamiento. Es una realidad que es necesario ir automatizando una serie de conocimientos para que se puedan alcanzar niveles superiores en que esos conocimientos estén involucrados. Puede haber conocimientos, por tanto, necesarios para la resolución de una tarea, que hayan sido automatizados por el resolutor que se enfrenta a ella, pero de nuevo la clave está en su justificación: si se dispone de conocimiento metacognitivo se tomarán elecciones adecuadas, pero además se sabrán justificar; esta justificación, en el caso de acciones mecanizadas no se hará durante su realización, pero se sabrá realizar posteriormente.

La habilidad para pensar sobre las propias actividades de resolución de problemas es considerada por algunos autores (p.e., Gardner, 1991) la diferencia entre ser un buen y un mal resolutor de problemas. La reflexión es una forma de hacer explícito, consciente, el conocimiento condicional -metacognitivo-, facilitando el dominio de los procesos seguidos, concretado en el conocimiento de las razones para la selección de los conocimientos conceptuales y procedimentales así cómo del modo cómo se deben adaptar los procedimientos a las circunstancias concretas de la tarea. Pero no se debe confundir el producto -conocimiento metacognitivo- con un modo, aunque fundamental, para profundizar sobre él como es la reflexión.

Beltrán (2003), respecto al modo más adecuado de enseñar las estrategias, afirma que:

> *"Algunos optimistas piensan que la mejor forma de enseñar estrategias es estimular a los estudiantes por medio de preguntas inquietantes y provocadoras que les inciten a poner en marcha las actividades características y esenciales del pensamiento, o facilitar la activación de esas mismas actividades poniendo a los alumnos en condiciones de realizarlas (...).Pero esto es una utopía, ya que está comprobado que los alumnos –al menos, los de mediano y bajo rendimiento- no ponen en marcha estas actividades por sí mismos si no reciben una enseñanza expresa (...)" (p. 68).*

Esa reflexión sí será fructífera, postulamos, si se utiliza en el marco de una enseñanza a través de la resolución de tareas problemáticas, donde los alumnos vayan construyendo su conocimiento como respuesta a la resolución de tareas para las cuales disponen de un conocimiento básico pero que necesita ser reconstruido para hacer frente al bloqueo que les presenta, explicitándose en el proceso de enseñanza-aprendizaje, como objetivo, el conocimiento específico necesario para llevar a cabo esa reconstrucción. Pero, si se siguen planteando en las aulas simplemente tareas de práctica donde aplicar los conocimientos adquiridos previamente, de forma casi-algorítmica, donde la importancia está simplemente en seguir adecuadamente los pasos que se han aprendido previamente, entonces la probabilidad de que la reflexión aumente la capacidad de resolver problemas de los alumnos, consideramos que es muy reducida.

La formación de alumnos metacognitivos conllevaría por tanto una selección y secuenciación adecuada de tareas que permita la construcción de los conocimientos por parte de los alumnos como forma de resolución a los mismos. Además, sería necesaria una enseñanza explícita de los aspectos metacognitivos, en torno a la justificación de la utilidad y validez de las resoluciones planteadas –profundización en el conocimiento condicional-. Finalmente, será necesario prestar la atención adecuada a las dificultades que puede provocar las creencias.

1.3. REINTERPRETACIÓN DE INVESTIGACIONES PRECEDENTES

El modelo planteado de componentes y procesos implicados en la resolución de problemas matemáticos, es a la vez fruto y origen del análisis del papel que juega la metacognición en dicha actividad.

Pretendemos en este momento reinterpretar los estudios anteriores a la luz de dicho modelo, pretendiendo con ello dos objetivos fundamentales: por un lado, mostrar la bondad del modelo para analizar la información sobre este campo de investigación de modo coherente y comprensivo; y, por otro, obtener nuevas conclusiones que nos permitan redirigir el proceso de investigación.

Inicialmente analizaremos una selección de estudios de notada importancia realizados sobre metacognición concebida como calibración y como reflexión, para apoyar la afirmación de que se trata de cuestiones diferentes al conocimiento metacognitivo (condicional). Estudiaremos además cómo se relacionan estos dos aspectos, así como los estudios sobre "solución a través de la estructura profunda vs. superficial" con la metacognición.

En cuarto lugar revisaremos el modelo de Schöenfeld, debido a que se trata de un autor pionero en cuanto a destacar la importancia de la metacognición en resolución de problemas matemáticos y en el cual se basan la mayoría de los trabajos en este campo de investigación. Mostraremos las diferencias y semejanzas, así como las ambigüedades y solapamientos del primero a las que hace frente el aquí propuesto.

Finalmente, con el propósito de reinterpretar las conclusiones de la literatura referidas a cómo mejorar el proceso de resolución de problemas en general, y al papel que en ello juega la metacognición en particular, describiremos las síntesis de investigación existente sobre intervenciones para la mejora de la capacidad de resolución de problemas matemáticos en los alumnos. Aquí mostraremos que la ambigüedad hace poner en tela de juicio la validez de algunas de estas conclusiones debido a la falta de una consideración común sobre qué es un problema, tipos de problemas, generalidad-especificidad del conocimiento...; esto es, las ambigüedades que hemos ido mostrando y que pretende solventar el modelo que proponemos.

1.3.1. Metacognición como calibración

Nos referimos a aquellas investigaciones que conciben la metacognición como el grado en el que los juicios de confianza sobre el éxito en la resolución de una tarea matemática se acerca al rendimiento real en esa tarea. La calibración se postula en este trabajo que es una forma de creencia con alto grado de especificidad (en relación a la tarea concreta).

Los autores más representativos de esta tendencia son Nietfeld y Schraw, que en 2002 concluyen que el conocimiento previo está relacionado positivamente con la calibración –que denominan "monitoring accuracy" y definen como "*the extent to which confidence judgments of test performance on an item-by-item basis matched actual test performance*" (p. 131)-, mientras que el entrenamiento en estrategias incrementa el rendimiento y la calibración inmediatamente, pero no tanscurrida una semana. Además, concluyen que medidas de habilidad general y autoeficacia en matemáticas no están relacionadas con la calibración.

El modelo que presentan para interpretar el proceso de resolución de problemas se sitúa en el contexto de resolución de tareas matemáticas sobre probabilidad; no se sabe si las tareas propuestas son problemáticas o de práctica, ya que no se analiza específicamente el conocimiento previo de los alumnos, sino que éste se operativiza en tres niveles en función de si no han recibido ninguna formación previa en probabilidad, han realizado un curso introductorio de estadística o han desarrollado cursos de profundización en probabilidad. Las tareas son mixtas, es decir, implican modelización y ejecución, aunque lo concibe como un todo, sin diferenciar entre los dos procesos, sino que sólo se muestran interesados por si la respuesta es correcta o no. Se debe elegir en cada tarea entre cuatro opciones de respuesta. El autor se centra en el estudio de la correlación entre la calibración realizada por el resolutor sobre la confianza en la el carácter adecuado de su respuesta y el carácter adecuado real de la misma.

El entrenamiento en estrategias que se lleva a cabo consiste en una técnica procedimental en parte algorítmica concretada en (p. 137):

1. Hacer una gráfica
2. Mirar las palabras clave: "or" significa suma; y "and" significa multiplicación.
3. Preguntarse a sí mismo si los hechos son independientes o dependientes.
4. Preguntarse si hay re-emplazamiento o no.
5. Calcular la probabilidad construyendo una razón de comparación entre el espacio de la muestra y el espacio del resultado total. Identificar el número total de posibles hechos y utilizarlo como denominador. Entonces identificar el número de hechos observados y utilizarlo como numerador.

Es una técnica porque es específica del contenido matemático puesto en juego. Los alumnos deben aprender –rutinizar- los pasos y aplicarlos ante los problemas de probabilidad que se les presentan. La ejecución de los pasos, y en el orden adecuado, es fácilmente rutinizable, como también lo es la aplicación de algunos de los pasos (2 y 5) . Sin embargo, el resto de los pasos (el 1, el 3 y el 4) conllevan dominar un conocimiento más allá, relativo a cómo aplicar esos pasos a las características concretas de la tarea y por tanto son más difícilmente rutinizables.

Respecto a la falta de relación de la calibración con la auto-eficacia puede ser explicada por el hecho de que el cuestionario de auto-eficacia es referido a las matemáticas en general, mientras que la calibración es frente a una tarea concreta de resolución de tareas de probabilidad (importancia del grado de especificidad-generalidad de las creencias).

1.3.2. Metacognición como reflexión

La reflexión sobre el proceso de resolución (actitud metacognitiva), si se realiza sobre tareas de práctica, sólo ayuda a fortalecer la ejecución rutinaria de los conocimientos aprendidos y facilitar la "transferencia directa". Es decir, una actitud reflexiva, si bien favorece la metacognición, no lo es en sí misma. Un alumno metacognitivo será reflexivo, pero un alumno puede ser reflexivo sin ser metacognitivo. Por ejemplo, un alumno que se pregunta: ¿qué me pide el problema?, ¿qué datos tengo?, ¿qué relaciones hay entre ellos?,..., sólo se considerará metacognitivo si responde a esas preguntas de forma fundamentada correctamente, para lo cual es necesario que disponga del conocimiento necesario o sea capaz de desarrollarlo.

Por ejemplo, Wilson (1999), se plantea como objetivo investigar sobre la naturaleza de la metacognición, que es operativizada analizando la secuencia de comportamiento cognitivo-metacognitivo. Como trabajo con niños de 6 años, utiliza cartulinas con acciones para que los alumnos las elijan y las ordenen mientras resuelven el problema. Las acciones metacognitivas las clasifica en: conciencia (p.e., "Pienso en lo que ya sé", "Pienso si conozco este tipo de problemas"); evaluación (p.e., "Pienso si esto es correcto", "Pienso que no puedo hacerlo", "Pienso en cómo lo estoy haciendo", "Estoy comprobando mi respuesta según estoy trabajando"); y regulación (p.e., "He hecho un plan para llevarlo a cabo", "Pienso en lo que haré después", "Cambio la forma según estoy trabajando"). Las acciones cognitivas que considera son "Pido ayuda", "Dibujo un diagrama", "Leo la pregunta de nuevo", "Sumo", "Resto", "Multiplico", "Divido" y "Cuento". Lo que evalúa como acciones metacognitivas es una actitud reflexiva, la cual no será suficiente para afirmar que se lleva a cabo una acción metacognitiva, ya que ésta implica un conocimiento metacognitivo y una actitud adecuada. Esa debe ser la razón por la que este autor concluye que la secuencia de los estudiantes durante la resolución de problemas mostró algunas diferencias pero extremadamente raras, siendo que todos los estudiantes comunican un uso frecuente de metacognición en todas las tareas de todos los colegios y todas las clases y por tanto concluye que no existe relación entre metacognición y éxito. Afirma que el único factor que parece estar relacionado con el éxito fue la clase, y la única diferencia entre clases era el profesor, lo cual parece apoyar que la metodología de enseñanza es fundamental en el éxito en la resolución de tareas. Concluye Wilson que es necesaria una línea de investigación que examine en profundidad las variables que determinan el éxito en la resolución de problemas. Podemos postular que la razón para que este estudio apoye que la metacognición no es importante para el éxito en la resolución de problemas es que ha considerado operativamente la metacognición como la reflexión sobre el proceso, sin analizar el contenido de dicha reflexión, que es verdaderamente lo metacognitivo. Y es que, el valor de la reflexión, cobra sentido, para el aumento del conocimiento metacognitivo, en la realización de tareas problemáticas; es decir, donde el alumno, a partir de conocimientos que posee, deba construir nuevos conocimientos para hacer frente al bloqueo cognitivo al que se enfrenta.

1.3.3. Resolución a través de la estructura profunda vs. superficial

La conclusión general de estos estudios es que los resolutores con éxito en la resolución de "problemas" se basan en su estructura profunda, mientras que los que fracasan se debe a que utilizan para ello la estructura superficial del mismo (p.e., Chi, Feltovich y Glaser, 1981; Chi, Glaser y Rees, 1982; Lakin, McDermott, Simon y Simon, 1980).

Un grupo de trabajos de este tipo se dedica a investigar las características de la tarea que determinan la elección de la técnica de resolución. Para ello utilizan tareas problemáticas, presumiblemente, de modelización, situándose el problema en la terminología utilizada. Es decir, en las tareas que plantean se utilizan términos que habitualmente en la enseñanza se corresponden con determinadas técnicas de resolución, pero que en esas tareas no. Por ejemplo Hegarty y sus colegas (Hegarty, Mayer y Monk, 1995) describen la estrategia de palabra clave en el contexto de tareas aritméticas de texto como un enfoque que selecciona los números del problema y las palabras clave (tales como "más" o "menos") y desarrolla un plan de resolución que incluya una combinación de ambas (utilizando la adición si la palabra clave es "más" y la sustracción si la palabra es "menos"). Este enfoque es utilizado por los alumnos sin éxito, mientras que los alumnos con éxito basan su plan de resolución en modelos de la situación de la tarea. Lo que ocurre es que realizan una modelización incorrecta de la situación que plantea el problema.

Lithner (2000), al analizar las principales características y el trasfondo de las dificultades de los estudiantes universitarios cuando intentan resolver una tarea matemática, concluye que se centran en lo que es familiar y recordado en un nivel superficial, en vez de en el razonamiento basado en propiedades matemáticas de los componentes involucrados. Un trabajo similar es el de Vinner (1997), que diferencia entre comportamiento analítico y seudo-analítico.

Entre los estudios que focalizan su investigación en la fase de ejecución de las tareas destaca el realizado por Schöenfeld (1985a y 1985c), centrado en la resolución de problemas geométricos, donde muestra que los estudiantes que se centran en métodos que denomina "empirismo ingenuo" (probar ideas por figuras construidas y entonces determinar la corrección de las ideas por la forma de las figuras) cometen diferentes tipos de errores; mientras que lo más útil sería utilizar las propiedades matemáticas de los objetos para construir algún tipo de razonamiento deductivo.

Stacey y Scott (2000) platean la tarea "staircase number", de Stacey y Grovers (1985), cuya técnica heurística más apropiada para obtener información útil para la resolución de la tarea es "probar con ejemplos" y analizan los diferentes usos que se pueden hacer de este heurístico, para descubrir rasgos superficiales que ayuden a averiguar cuál debe ser el proceso de resolución –esto es, las verdades evidentes sobre una situación matemática-, o la estructura profunda del problema –es decir, las razones por las que son verdad las características superficiales-. Concluyen que no todas las soluciones de estructura profunda son exitosas y que no todas se corresponden con episodios gráficos de tipo experto (para lo cual utilizan el análisis de episodios gráficos de Schöenfeld, 1985c).

Lo que se esconde detrás de estos hallazgos es que los alumnos no disponen de una fundamentación sobre cuándo y cómo (conocimiento condicional, metacognitivo) utilizar determinadas técnicas. Se olvida así que "*uno de los objetivos más importantes de los cursos de matemáticas es enseñar a los estudiantes razonamiento lógico (...) (que es) la fundamentación de las matemáticas. Mientras la ciencia se verifica a través de la observación, la matemática se verifica a través del razonamiento lógico*", y si la habilidad del razonamiento no es desarrollada en los estudiantes, entonces las matemáticas se convierten en una cuestión de simplemente seguir una serie de procedimientos por imitación sin pensar en el sentido que tienen (Ross, 1998). Esta necesidad de demostración del carácter adecuado de las elecciones no tiene lugar en las escuelas, fundamentalmente debido a que en el contrato didáctico escolar[6] (Brousseau, 1984) el alumno no asume la responsabilidad de que el resultado sea correcto, siendo esa labor del profesor, lo cual reduce considerablemente el rigor lógico requerido.

[6] El contrato didáctico "es la el resultado de la negociación de las relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio y un sistema educativo con el fin de hacer apropiar a los alumnos un saber construido o en vías de construcción (...) Este contrato define el papel de unos y de otros y la parte de responsabilidad de cada uno en la gestión de los saberes" (Briand y Chevallierd, 1995, pp. 69-70).

Por tanto, cuando frente a los estudios que muestran que los alumnos tienen dificultad para reconocer la estructura abstracta subyacente de los problemas (p. e., Reed, 1987; Reed, Dempster y Ettinger, 1985; Anderson, 1984), Blais (1988) concluye que "*they resist learning anything that is not part of the algorithms they depend on for success*" (p. 627), deberíamos reflexionar sobre la dependencia entre el tipo de enseñanza que llevan a cabo los alumnos y el aprendizaje que resulta; es decir, sobre el peligro de considerar la dificultad como propia del alumno –en modo de resistencia a aprenderlo- si no se ha llevado a cabo una adecuada enseñanza que favorezca dicho aprendizaje.

1.3.4. El modelo de Schöenfeld

Un gran número de propuestas para la enseñanza de estrategias generales o heurísticos han sido diseñadas tomando como base el modelo de Pólya. Entre ellas, podemos citar el modelo "IDEAL" de Bransford y Stein (1986, 1993) y el de Krulik y Rudnik (1980, 1988, 1989) –que han seguido de manera fiel el modelo propuesto por Pólya-; y los de Schöenfeld (1985a, 1992b) y Léster (1985) –que incorporan al modelo inicial la importancia de factores cognitivos para una adecuada enseñanza-aprendizaje dirigida a formar resolutores de problemas.

Los entornos de instrucción centrados en un proceso "ideal" de resolución de problemas destacan la importancia del aprendizaje cooperativo y la instrucción guiada para mejorar la capacidad de resolución de problemas de los alumnos, afirmaciones acorde con importantes síntesis de investigación (p.e., Hembree, 1992a, Jitendra y Ping, 1997). Estos entornos, con gran influencia de las ideas de Vigotsky, están basadas en la instrucción guiada –concretada en el uso del modelado y la auto-interrogación– y en el aprendizaje cooperativo, dado que el intercambio de información en torno al proceso de resolución favorece tanto al sujeto que da la información como al que la recibe.

Schöenfeld, además de ser el primero en considerar la metacognición en la resolución de problemas matemáticos, es una referencia básica en los trabajos que se realizan en la actualidad. Analizaremos por ello su modelo en relación con el que aquí presentamos, centrándonos específicamente en el papel que se asigna a los aspectos metacognitivos.

Schöenfeld (1985a, 1992b), basándose en los trabajos realizados por Pólya, plantea un marco para el análisis del comportamiento durante la resolución de problemas complejos. Para ello, describe cuatro aspectos que considera cualitativamente diferentes de la actividad intelectual compleja: (a) recursos cognitivos (conjunto de hechos y procedimientos de que el sujeto dispone); (b) heurísticos (reglas para la exploración para progresar en situaciones difíciles); (c) control (que tiene que ver con la eficiencia con la que los individuos utilizan el conocimiento de que disponen); y (d) sistema de creencias (las perspectivas del sujeto hacia la naturaleza de la disciplina y sobre su trabajo en ella).

En nuestro modelo de análisis de tareas matemáticas los componentes que se consideran son dos: conocimiento y creencias. Los componentes que están implicados en la resolución de problemas (no utilizamos el término "tareas" para facilitar la comprensión de su modelo), bajo la concepción de Schöenfeld, son cuatro, situando en un lugar separado un tipo de procedimientos, los heurísticos, y una acción, el "control". Bajo la denominación "conocimiento" considera únicamente lo que nosotros denominamos "conocimiento cognitivo".

Si analizamos los estudios que hace Schöenfeld sobre el "control" podemos deducir que se refieren, implícitamente, a una de las facetas de la metacognición que plantea nuestro modelo: la selección, centrada en la elección de técnicas. Los trabajos sobre "recursos cognitivos" analizan la otra faceta de la metacognición: la implementación adaptada a las circunstancias de la tarea. No considera este autor explícitamente la selección y adaptación de los conceptos, excepto en el carácter procedimental que la mayoría de ellos conllevan en matemáticas.

1.3.4.1. Realizar elecciones adecuadas: selección de técnicas

Afirma Schöenfeld (1985a) que "*when the instruction focuses almost exclusively on mastery of facts and procedures, students are not likely to develop some of the higher-order skills necessary for using mathematics*" (p. xiii). Para ello es necesario centrarse en el control, que concibe como la selección, en cada momento, de los pasos adecuados; y que concreta en dos decisiones metacognitivas fundamentales: la elección de las técnicas y de los heurísticos más apropiados a cada problema. Como vemos, lo que Schöenfeld concibe como control, en el modelo de metacognición aquí presentado se corresponde con el conocimiento metacognitivo (condicional) relativo a la selección de los procedimientos adecuados a cada tarea.

Ejemplifica la importancia de las elecciones situándose en un capítulo sobre integración, planteando una tarea de ejecución. Muestra cómo, ante una integral que se resolvería en un minuto utilizando la sustitución de uno de sus factores, sólo 44 de 178 alumnos lo hacen así, mientras que el resto utiliza la técnica de fracciones parciales o una sustitución trigonométrica. Es cierto que en todos los casos el problema es resuelto adecuadamente, pero "*they violate a cardinal rule of control in problem solving: Never implement difficult or time-consuming procedures unless you have checked to see whether other, far simpler procedures will work*" (Schöenfeld, 1985a, p. 101), pasando de tardar 1 minuto los primeros, a 5-10 los segundos, y 10-15 los terceros. La solución que plantea Schöenfeld es buscar los patrones de elección de la técnica que son consistentes en los resolutores de problemas expertos en el dominio y construir una estrategia que produzca patrones de resolución similares. En este caso, el patrón adecuado, que denomina "estrategia de integración" estaría formado por tres fases: simplificar la integral (a través de manipulaciones algrebráicas simples o sustituciones obvias), clasificar la integral (determinar la técnica de integración adecuada por la forma de la integral) y modificar la integral (en el caso de que el paso 2 no sea suficiente para resolver el problema, se utiliza la forma de la integral para llevar a cabo "*intentos desesperados*" (bis, p. 105) que podrían ayudar a progresar). Es en esta última fase en la que sitúa la utilización de heurísticos, que en este caso concreta en probar con problemas similares, manipulaciones especiales y análisis de necesidades; y una vez que se progresa en esta fase se inicia el proceso de resolución propiamente dicho. Aquí se observa claramente las diferencias entre las fases de análisis y de exploración: el sujeto dispondría en este caso de una técnica heurística (que Schöenfeld denomina "estrategia de integración"), que facilita la búsqueda de la técnica más adecuada para resolver una integral. Schöenfeld considera que sólo se utilizan heurísticos en la última fase de la "estrategia de integración", pero ¿qué es la "estrategia de integración" sino un heurístico que facilita la búsqueda de la técnica más adecuada? Y lo que se encuentra tras esa técnica heurística es el conocimiento condicional de las técnicas de integración referido a cuándo son la mejor forma de resolver una tarea propuesta.

También podemos observar la importancia del contexto. Schöenfeld para analizar el control se situó en el contexto de "tareas de ejecución de integración", de modo que no considera el conocimiento condicional de las técnicas referido a cuándo la integración es la mejor solución a la tarea propuesta. Así, la primera elección que deberían hacer los resolutores, consistente en determinar que deben utilizar la integración y no otro tipo de técnicas, no se considera; como tampoco se analiza el conocimiento condicional relativo a la aplicación adaptada de la técnica en función de la tarea concreta, para lo cual habría sido necesario analizar los conocimientos previos de los alumnos referidos a las técnicas y, en función de ellos, plantear una tarea cuya resolución conllevara una modificación de la técnica conocida, o una combinación de esa con otras.

Para valorar la efectividad de una instrucción basada en estos hallazgos, en una clase de cálculo, cuatro días antes de realizar el examen de integración, a la mitad de la clase les distribuyó los materiales instruccionales que habían diseñado al efecto, y que consistían en patrones de elección de la técnica adecuada de resolución de las integrales utilizados por los expertos, con los que practicaron, mientras la otra mitad simplemente realizaba los ejercicios propuestos por el libro. Es decir, les entrenaba en la utilización de una técnica heurística que permitía la elección de la forma más adecuada para resolver una integral. Los alumnos que recibieron instrucción afirmaron haber dedicado menos tiempo a estudiar para el examen y obtuvieron mejor puntuación (9,9 sobre 100, con $p < .15$) que la otra mitad de la clase en las preguntas del examen que consistían en tareas de ejecución de integrales (para más información, ver Schöenfeld, 1978).

Podemos concluir que los alumnos que practicaron la "estrategia de integración" resuelven con mayor grado de éxito las tareas de ejecución de integrales propuestas en el examen, pero para hacer otras afirmaciones sería necesario profundizar en la instrucción seguida así como en las tareas trabajadas y las propuestas en el examen. Si la resolución de las tareas de integración del examen requería un conocimiento procedimental de las técnicas de resolución de integrales y un conocimiento condicional referido a cuándo seleccionar qué técnica de integración es más adecuada, es lógico que los que explícitamente trabajaron en la segunda cuestión resolvieran mejor las tareas que los que no. Pero fijémonos en que la diferencia es que para los alumnos que fueron entrenados en cómo elegir la técnica de resolución de integrales más adecuada los ejercicios del examen eran tareas de práctica, mientras que para los que no habían recibido instrucción explícita las tareas eran problemáticas en cuanto a la elección de la técnica más adecuada. En definitiva, lo que mostró Schöenfeld en este tipo de trabajos es que se puede enseñar a los alumnos a elegir la técnica más adecuada en vez de dejar bajo la responsabilidad de estos la deducción del conocimiento condicional relativo a cuándo cada técnica es más apropiada.

1.3.4.2. Realizar elecciones adecuadas: selección de heurísticos

Schöenfeld afirma que el control sobre las estrategias es más complejo que el que se debe realizar sobre las técnicas. Para ello se basa en dos razones que analizaremos a continuación.

Es necesario aclarar previamente que Schöenfeld utiliza el término "técnicas" para referirse a los procedimientos matemáticos en cuanto a su carácter estático, no considerando que éstas incluyan un conocimiento condicional, relativo a la selección de la técnica adecuada y la aplicación adaptada de ésta en situaciones diferentes. A pesar de que, como vimos en el apartado anterior, muchos de sus trabajos se centran en el estudio de dicho conocimiento condicional, lo considera como algo diferenciado de las técnicas, que denomina "control". El término "estrategias" o "heurísticos" lo asume en el sentido tradicional de Pólya.

Una de las razones que da es que las técnicas son algorítmicas, de modo que, aplicadas correctamente, garantizan producir el resultado adecuado, mientras que los heurísticos, aunque sean aplicados correctamente, no garantizan el resultado. Con esta afirmación se está refiriendo al conocimiento condicional de aplicación adaptada a la tarea de las técnicas y heurísticos, y no al conocimiento condicional de selección, el cual no se ve facilitado por el carácter algorítmico (en el sentido tradicional, que se refiere a que los pasos en su implementación no son variables, sino fijos) que además no poseen todas las técnicas.

La segunda razón en que basa su afirmación es que los resolutores deben seleccionar las técnicas adecuadas para resolver el problema de entre una cantidad menor que los heurísticos. Esta afirmación es correcta en el ejemplo en que se sitúa Schöenfeld, que es ante una tarea de integración (para cuya resolución existen sólo una docena de técnicas), pero, si se sitúa ante un problema más complejo, en el que por ejemplo la primera duda fuera si se deben utilizan técnicas de integración para resolverlo, el círculo se amplía, de modo que la cantidad de técnicas entre las que hay que elegir aumenta. Además, en contraste, cuando hace referencia a la gran cantidad de heurísticos entre los que hay que realizar la selección, lo afirma en general, en vez de situarse, como para explicar el caso de las técnicas, en un ejemplo concreto, como el de la integración. En caso de que lo hubiera hecho de esta forma observaría que, en su propia descripción de la "estrategia de integración", describe sólo tres tipos de heurísticos adecuados: analizar problemas similares, realizar manipulaciones especiales y analizar las necesidades, concretándose en tres o cuatro acciones concretas cada una de ellas. Esta explicación quiere mostrar cómo la cantidad tanto de técnicas como de heurísticos entre los que hay que elegir dependen del grado de especificidad en que nos situemos, siendo que en este caso ha elegido Schöenfeld un dominio tan general como la resolución de problemas matemáticos en sentido amplio para explicar los heurísticos, mientras que, para explicar las técnicas, ha elegido un tipo de tareas concreto en relación con el conocimiento matemático utilizado.

Así, para analizar los heurísticos, ya considera los principales estados que considera Pólya en la resolución de problemas: análisis, diseño, exploración, implementación y verificación, en forma de un diagrama de flujo. Considera heurísticos para cada fase, excepto para el diseño y la implementación.

El diseño lo describe como un "control maestro", que permanece durante todo el proceso de resolución y cuya función es asegurar que se están realizando las actividades más adecuadas. Sería la fase de planificación, donde se da una estructura global a lo que se está haciendo, antes de llevar a cabo la ejecución, considerando subobjetivos de forma jerárquica. Durante esta fase sería en la que se valoraría la viabilidad, justificación, efectividad y eficiencia de la/s opción/es que se consideraran a priori adecuadas. Se referiría a la plausibilidad de la solución.

La implementación del diseño, según Schöenfeld (1985a, 1992b), es normalmente la última fase de la resolución del problema. Esto será así siempre que se haya desarrollado previamente una planificación adecuada, que ésta se siga, y que no se cometan otros tipos de errores no previsibles por el diseño, como errores de cálculo. En la fase de verificación, según este autor, pueden detectarse, además de errores, soluciones alternativas e incluso tomar conciencia de los aspectos que se han utilizado para resolver el problema y cuál ha sido su utilidad. Están por tanto estrechamente relacionadas estas tres fases –planificación, implementación y verificación- siendo la diferencia real entre ellas el momento en que se realiza (planificación primero, y verificación tras la implementación) y no el contenido de ellas.

Además, se reducen sus ejemplificaciones y explicaciones a tareas de ejecución, no considerando las de modelización. Esto explica que al describir los heurísticos más frecuentemente utilizados sólo considere "técnicas heurísticas", es decir, referidas propiamente a la ejecución (ver p. 109 de Schöenfeld, 1985a): "examinar casos especiales" o "intentar simplificar el problema" para el análisis; y tres estados para la exploración, con nivel creciente de diferenciación respecto a las condiciones iniciales de la tarea, que son "considerar problemas esencialmente equivalentes", "considerar problemas ligeramente modificados" y "considerar problemas ampliamente modificados". Cita para el análisis un heurístico de origen macrocontextual, que es "dibujar un diagrama si es posible", el cual tiene gran utilidad también para la modelización, pero él lo describe en su uso para la selección de la técnica y no para la comprensión de la situación a modelizar, por la cual no se preocupa.

Podemos decir que el planteamiento de Schöenfeld (1985a, 1992b) para diferenciar los heurísticos de la fase de análisis de los correspondientes a la de exploración es que los primeros sólo utilizan información textual de la tarea (simplificarlo, reformularlo, representarlo,...), mientras que los segundos introducen variaciones del problema para ayudar a su compresión cuando no ha sido posible plantear un diseño adecuado a partir de la fase de análisis. En nuestro modelo hemos tomado los conceptos de análisis y exploración en un sentido similar pero con matices de diferenciación importantes: el análisis se refiere a la consecución del objetivo (sea modelización, ejecución o interpretación) sin bloqueo, es decir, de forma rutinaria (no constituye la tarea un problema para el alumno, sino que se trata de una tarea de práctica), mientras que la existencia de un bloqueo hace necesaria la utilización de heurísticos para profundizar en la comprensión de la tarea y superar el bloqueo. Por tanto, en nuestro modelo, todos los heurísticos a que hace referencia Schöenfeld entrarían en juego sólo en la fase de exploración, ya que el análisis no precisa de ellos.

1.3.4.3. Utilización de los recursos de que se dispone

Se refiere a "*How do a problem solver's decisions at the control level affect the ways that person's knowledge- resources, heuristics, or anything else that might be brought to bear on a problem –is used.*" (Schöenfeld, 1985a, p. 115).

Los rangos de efecto que el control, según describe este autor, puede tener en la resolución de un problema son:

- Tipo A: Malas decisiones que garantizan fallar: búsqueda inútil que persigue recursos inútiles y donde direcciones potencialmente útiles son ignoradas.
- Tipo B: El comportamiento ejecutivo es neutral: búsquedas inútiles que son frenadas antes de que causen desastres, pero los recursos no son explotados como deberían.
- Tipo C: Las decisiones de control son una fuerza positiva para la resolución: los recursos son elegidos cuidadosamente y explotados o abandonados apropiadamente como resultado de una cuidadosa monitorización.

- Tipo D: No hay (virtualmente) necesidad de control: los hechos y procedimientos adecuados para resolver el problema están accesibles en la memoria a largo plazo.

Su análisis permite concluir que estos efectos se refieren al uso del conocimiento condicional que realizan los resolutores de problemas, el cual permite tomar decisiones respecto a la selección y aplicación de diferentes procedimientos. Estos rangos de efecto no son un componente de la resolución de problemas, sino una consecuencia, durante la ejecución, de los dos componentes que planteamos en nuestro modelo: los conocimientos y las creencias. Es decir, si el sujeto dispone del conocimiento condicional necesario para seleccionar y adaptar las técnicas necesarias para resolver una tarea de ejecución y las creencias permiten, ante los bloqueos que se presentan, intentar superarlos, el control estará asegurado. Estos dos componentes nos permitirán desarrollar la explicación sobre los diferentes grados de control a que hace referencia este autor.

¿A qué se debe que se produzca un control del tipo A y B que plantea Schöenfeld? La explicación en forma de "control" es poco fructífera para dar respuesta a ¿qué debería mejorarse en esos alumnos para que evolucionaran al tipo C? Lo que será necesario es que dispongan del conocimiento condicional necesario referente a las técnicas y estrategias que es necesario poner en juego y que sean capaces de enfrentarse a los bloqueos en vez de frenar su trabajo. El tipo D es un caso especial, y se correspondería con las tareas de práctica, donde al resolutor no se le presentan bloqueos, sino que ha rutinizado la forma de resolución y lo que hace es aplicarla.

Analizar lo que Schöenfeld (1985a, 1992b) considera que forma parte del sistema de "recursos" nos ayudará a detectar la carencia que presenta. Según este autor, los aspectos del conocimiento relevantes para el rendimiento en resolución de problemas incluyen: el conocimiento intuitivo e informal sobre el dominio del problema, los hechos, las definiciones y los procedimientos algorítmicos, los procedimientos rutinarios, las competencias relevantes y el conocimiento acerca de las reglas del lenguaje en ese dominio. No explicita la importancia del conocimiento condicional que permite seleccionar los conocimientos y aplicarlos de forma adaptada a la tarea; está dejando a parte por tanto el conocimiento metacognitivo, que es la base para la resolución de problemas.

1.3.5. Investigaciones comparativas sobre la enseñanza dirigida a la resolución de problemas matemáticos

Si bien existen síntesis de investigación relativas a la eficacia de la instrucción en resolución de problemas matemáticos que hemos analizado previamente, el primer y único estudio que se ha realizado con la pretensión de realizar un análisis conjunto y comparativo de los trabajos realizados sobre resolución de problemas en alumnos sin dificultades específicas de aprendizaje utilizando la técnica del meta-análisis es el de Hembree (1992a), y por tanto merece una especial atención.

Las revisiones de investigación sobre resolución de problemas matemáticos que consideran el papel de factores denominados metacognitivos se han centrado en los alumnos con dificultades de aprendizaje, donde destacan dos síntesis de investigación (Jitendra y Xin, 1997; Montague y Marjorie, 1997) y un meta-analísis (Xin y Jitendra, 1999). En otro lugar (Rodríguez, 2001) presentamos un análisis de las conclusiones de estos trabajos –donde fueron consideradas además investigaciones realizadas desde 1997 hasta el 2001, ya que el último año considerado en los trabajos anteriores era 1996- concluyendo que gran parte de los informes de investigación de este campo no cumplen algunas condiciones mínimas necesarias para analizar los efectos diferenciales de la instrucción, desde el punto de vista que aquí nos ocupa, referidas en su mayoría a la ausencia de una concreción operativa de lo que se consideran "alumnos con dificultades de aprendizaje" así como a una falta de explicitación de la línea base de los sujetos a los que va dirigida la instrucción. Estos trabajos presentan por tanto dificultades añadidas a la obtención de conclusiones válidas y por esa razón no van a ser aquí objeto de estudio.

En trabajo de Hembree (1992a) son analizados los resultados de 487 estudios (publicados entre 1920 y 1990). Estos estudios son previamente clasificados, en función del objetivo que persiguen, en: (a) características de los resolutores de problemas; (b) condiciones para "problemas" más fáciles y más difíciles; (c) efectos de diferentes métodos instruccionales sobre el rendimiento en resolución de problemas, y; (d) efectos de las condiciones relacionadas con la clase sobre el rendimiento en resolución de problemas.

1.3.5.1. Consideraciones previas

Hembre (1992a) no describe un marco desde el cual analizar los resultados obtenidos, ni respecto a los componentes y procesos implicados en la resolución de problemas ni en relación con el papel que juega la metacognición. Únicamente hace una afirmación explícita respecto a la metacognición y es que sólo ha encontrado un estudio sobre metacognición en la resolución de problemas, el de Garofalo y Léster (1985), el cual excluye debido a que no concluye datos estadísticos. Sin embargo, se analizan aspectos relacionados con la metacognición al estudiar tanto las "características de los resolutores de problemas" como "efectos de diferentes métodos instruccionales", y por tanto estas serán las cuestiones objeto de nuestro análisis.

Las características propias del meta-análisis hacen que se excluyan aquellos estudios que no cumplen unas determinadas características, tales como tamaño suficiente de la muestra, conclusión de datos estadísticos (media, desviación estándar, correlaciones, diferencias entre grupos,...), etc.. Estas investigaciones, que sí han sido consideradas en el trabajo que aquí exponemos anteriormente, aportan datos muy interesantes, pero no se considerarán en el meta-análisis.

Además del trabajo de Garofalo y Léster (1985), se excluyen gran parte de las investigaciones de naturaleza observacional, donde los grupos son formados con el propósito de analizar los comportamientos mientras los sujetos resuelven problemas, debido a que informan en términos de porcentajes o medidas similares, las cuales, si bien son numéricas, no son adecuadas para la realización del meta-análisis. Además, indica que hay estudios tan particulares en el tema y contenido que no se habían desarrollado aún cuerpos de evidencia sobre ellos, por ejemplo, desarrollo de esquemas en resolución de problemas (p.e., Alsina, 1990; Woods, 1985), transferencia de información en resolución de problemas (p. e., Kulm y Days, 1979), tranfer analógico en resolutores expertos y noveles (p. e., Novick, 1988), efectos de tutorización de estrategias sobre errores en álgebra (p. e., Rosnick y Clement, 1980), relaciones entre memoria visual a corto plazo y resolución de problemas (p. e., Talsma, 1986), o cuestionamiento sobre heurísticos en ayudantes de profesores de matemáticas universitarios (p. e., Tubb, 1975). Un cuerpo de trabajo observacional se centraba en el tema común de cómo los niños enfocan la resolución de problemas. Los temas representativos incluyen las estrategias de las que parten los niños al comienzo de la instrucción (Carpenter, Hiebert y Moser, 1981; Ibarra y Lindvall, 1980; Rosenthal y Resnick, 1974), representaciones que realizan los niños de los problemas (p.e., Bebout, 1990; De Corte y Verschaffel, 1985) y estados importantes en el desarrollo de conceptos y habilidades para la resolución de problemas (p.e. Carpenter y Moser, 1984; Fuson, 1982; Kouba, 1989).

Las muestras implicadas en los estudios considerados para este meta-análisis abarcan desde "kindergarden" -jardin de infancia- hasta post-secundaria. Consideraremos diferencias en función de esta variable cuando éstas tengan lugar.

Cuando se hace referencia, en el análisis de los resultados, a correlaciones significativas, siempre son referidas a un nivel de significatividad del 1%.

1.3.5.2. Características de los resolutores de problemas

Respecto a la primera categoría de resultados, referida a las características de los resolutores de problemas, se analizan investigaciones que estudian la correlación entre rendimiento en resolución de problemas y (a) medidas básicas de rendimiento; (b) medidas de habilidades mentales; (c) medidas de estilo afectivo y cognitivo; (d) medidas relacionadas con las condiciones del grupo (curso, estado piagetiano, género, etnia y estatus sociométrico); y (e) medida de "subskills" de resolución de problemas y comportamientos. Se analizarán en este trabajo las referidas a los bloques (a), (b), (c) y (e).

En el primer bloque se encuentran correlaciones positivas y significativas para todas las variables, si bien no son estables (los datos son inicialmente heterogéneos como resultado de las interacciones con el curso escolar), siendo la tendencia encontrada en todos los casos "*small results in the earlier grades, increases to peaks near middle school, small declines in high school, and a trend toward stabilization thereafter*" (Hembree, 1992a, p. 253). Pero, a todas las edades, las mayores correlaciones son con las habilidades básicas en matemáticas, que incluyen cálculo, conceptos, razonamiento y vocabulario, donde la medida de "r" alcanza 0.70, 0.73, 0.75 y 0.70, respectivamente; frente a las encontradas con el cociente intelectual (con las correlaciones más bajas de este bloque, media máxima de $r = 0.63$), el rendimiento verbal en lectura (media máxima de $r = 0.62$) y el vocabulario general (media máxima de $r = 0.51$).

Estos hallazgos apoyan la idea de una mayor influencia de las características más específicamente relacionadas con el tema en cuestión -en este caso las matemáticas-, si bien no se excluye la influencia de otras características más generales del sujeto. Así, por ejemplo, el cociente intelectual limitará las posibilidades de aprendizaje y el rendimiento lector y el vocabulario general influirán en la resolución de problemas, pero específica y básicamente en la comprensión general del problema.

Respecto a la correlación detectada entre el rendimiento en resolución de problemas y medidas de habilidades mentales, tales como pensamiento creativo, pensamiento crítico, memoria, percepción, razonamiento, habilidad para realizar analogías, habilidad para realizar inferencias y habilidad espacial, todas las correlaciones resultan positivas y significativas. La mayor correlación es la que se encuentra con la habilidad para realizar analogías (media de r = 0.57), mostrando el razonamiento general un nivel casi equivalente (media de r = 0.56) y situándose el resto de habilidad mentales con correlaciones menores, aunque todas ellas con carácter significativo.

Al analizar la relación entre estilo cognitivo y afectivo, concretado en actitudes hacia las matemáticas y/o la resolución de problemas, la autoconfianza en matemáticas, la autoestima, las actitudes hacia las matemáticas mostrada por los padres, madres y profesores y la independencia de campo, con el rendimiento en resolución de problemas, todas las correlaciones resultan significativas pero modestas. Las más altas son las correlaciones que se detectan entre la auto-confianza en matemáticas y altos niveles de independencia de campo (media de r = 0.35, para ambas).

Al igual que ocurría con otras medidas básicas de rendimiento, tanto las habilidades mentales como las relacionadas con el estilo cognitivo y afectivo correlacionan en menor medida con el rendimiento en resolución de problemas que las habilidades básicas matemáticas, lo que continúa apoyando una supuesta mayor influencia de las variables más específicas del dominio de conocimiento.

El bloque referido a la correlación entre lo que denomina "subskills" de resolución de problemas y comportamientos resulta de gran interés para el objetivo que nos ocupa. No define "subskills", pero las concreta en "comprender el problema", "seleccionar las operaciones correctas", "reconocer problemas similares" y "traducir desde inglés a símbolos matemáticos correctamente". Con comportamientos se refiere aquellos detectados durante el pensamiento en voz alta que realiza el sujeto mientras resuelve el problema (se refiere a si ha realizado o no el comportamiento, sin considerar si se ha hecho correctamente), e incluye "releer el problema", "aplicar un heurístico (dibujar un diagrama, utilizar un correcto diagrama, utilizar ecuaciones, conjetura y comprobación y utilización del ensayo y error)", "aplicar varios heurísticos", "comprobar la corrección de lo que se ha hecho" y el "tiempo empleado en la resolución".

Entre las subskills incluye: (a) superación adecuada de diferentes fases de la resolución de problemas, como "comprender el problema", "traducirlo al lenguaje matemático" y "seleccionar las operaciones correctas" (adecuada planificación); y (b) estrategias de un grado mucho mayor de espeficidad del dominio, referidas a la utilización de un conocimiento condicional más específico, relativo a técnicas matemáticas tales como "reconocer problemas similares" –es decir, resolubles por la misma técnica- en función de la estructura interna y no por los detalles superficiales.

El término "comportamientos" se refiere a la utilización o no por parte del sujeto, durante la resolución del problema, de: (a) estrategias específicas de comprensión lectora, "releer el problema"; (b) lo que correctamente denomina "heurísticos", excepto "guess and test" (ver (c)); (c) realización de dos de las fases de la resolución de problemas: "comprobar la corrección del trabajo realizado", y "conjeturar antes de actuar", que se refiere a llevar a cabo la fase de planificación; y (d) el tiempo utilizado para la resolución.

Podemos reagrupar por tanto los componentes considerados en este bloque en cuatro tipos en función de la especificidad-generalidad de las variables implicadas:

1. Realización de diferentes fases de la resolución del problema (que implicarán la utilización de diferentes estrategias pero las cuales no se explicitan). Se incluirían aquí los componentes del bloque (a) de "subskills" y del bloque (c) de "comportamientos".

2. Utilización de heurísticos (estrategias específicas de resolución de problemas, implicadas en cada una de las fases). Se corresponde con el bloque (b) de "comportamientos".

3. Utilización de estrategias de comprensión lectora: "releer el problema" (específica para la resolución de problemas escritos).

4. Conocimiento de las técnicas (estrategias específicamente matemáticas) implicadas en la resolución del problema: bloque (b) de subskills.

En función de esta reagrupación de los componentes, analizaremos los resultados obtenidos, lo que apoyará la opción tomada de reorganizarlos y permitirá a su vez interpretar los hallazgos.

Respecto a la superación de diferentes fases, todas ellas, como es lógico, obtienen una correlación positiva y significativa con la resolución correcta del problema, siendo mayor la correlación cuanto más avanzada sea la fase que se supera. Así, la comprensión del problema correlaciona con una media de $r = 0.54$, mientras que seleccionar las operaciones correctas, lo cual implica haber comprendido previamente el problema, correlaciona con una media de $r = 0.72$. Traducir el problema correctamente al lenguaje matemático correlaciona en un nivel similar, aunque levemente superior, a comprender el problema -media de r = 0.58- lo que parece lógico dado que implica haber comprendido el problema, pero de una forma más correcta desde el punto de vista matemático. Sin embargo, revisar el proceso realizado y conjeturar antes de actuar correlacionan en menor medida con la resolución correcta del problema (media de $r = 0.25$ y 0.42 respectivamente). Una explicación posible es que estas dos variables se refieren a si se el sujeto realiza ese comportamiento, pero no a si se hace correctamente.

En cuanto al segundo tipo de variables, la aplicación de heurísticos, todos ellos incluidos en "comportamientos", no se hace referencia a si se realizan de un modo correcto o no, sino simplemente a su utilización, excepto en un caso, el cual, como es lógico, obtiene una mayor correlación que los demás –éste es la "utilización de un diagrama correcto", cuya media de r es 0.54- y cuya correlación coincide, lógicamente, con la de comprender el problema, siendo que realizar un diagrama correcto implica haber comprendido el problema. Dos de los heurísticos que se plantean –dibujar un diagrama y utilizar ecuaciones que relacionen los datos del problema- se utilizan en la fase de comprensión del problema, pareciendo más útil la primera estrategia (media de $r = 0.31$) que la segunda (media de $r = 0.20$). El tercer heurístico –consistente en la "búsqueda y eliminación de datos extraños"- obtiene la correlación más baja ($r = -0.04$). Dado que esta estrategia ha sido considerada por otros autores como muy útil (p.e., Schöenfeld, 1985a) consideramos que la explicación de esta baja corelación con el éxito en la resolución de problemas puede encontrarse en el hecho fundamental de que en este trabajo no se considera específicamente si se utilizó adecuadamente la estrategia o no, sino simplemente si el resolutor hizo uso de ella.

Finalmente, la única estrategia considerada dirigida específicamente a la comprensión lectora -la relectura del problema- presenta una correlación muy baja con la solución correcta del problema (media de $r = 0.06$). Esto quizá es provocado, o al menos explicado en parte, por que un sujeto que haya comprendido el problema en la primera lectura y no necesite repetir el proceso será considerado entre aquellos que deben obtener un fracaso en la resolución de problema para que se pudiera concluir que la relectura correlaciona con el éxito. Quizá los resultados serían diferentes si se hubiera considerado la influencia de la relectura en la resolución exitosa del problema solamente una vez que no se hubiera comprendido éste tras la primera lectura, momento en el cual puede esta estrategia comenzar a tener utilidad para resolverlo adecuadamente.

Respecto a la otra variable que es analizada en este bloque por Hembree, el tiempo utilizado en la resolución, cuya índole es diferente a la del resto, no parece estar relacionada con el rendimiento en resolución de problemas, ya que obtiene una correlación media de $r = -0.10$.

Otros estudios, que se han centrado en características más específicas y que complementan los resultados del meta-análisis, como en el de Owen y Sweller (1989), afirman que la literatura sobre experto-novel sugiere que los expertos:

(1) tienen una mejor memoria de detalles relevantes de los problemas;

(2) clasifican los tipos de problemas de acuerdo con sus principios subyacentes, más que por su estructura superficial;

(3) trabajan hacia delante hacia un objetivo, más que hacia atrás;

(4) utilizan procedimientos bien establecidos o reglas automatizadas.

1.3.5.3. Efectos de diferentes métodos instruccionales

La tercera categoría de resultados se refiere a los efectos de diferentes métodos de instrucción sobre el rendimiento en resolución de problemas. La información será estudiada analizando la claridad en la clasificación y definición de los diferentes métodos de instrucción, así como los efectos diferenciales según su generalidad-especificidad de las estrategias sobre las que se realiza instrucción.

Clasifica los tipos de instrucción en: (a) instrucción en un método de resolución de problemas; (b) instrucción en subskills de resolución de problemas (p.e. hacer figuras o escribir ecuaciones); y (c) instrucción en campos relacionados (p.e. sistemas computerizados). Compara, a través del tamaño del efecto -ya que en todos los casos se realizan tratamientos- los efectos de los diferentes métodos instruccionales analizados en medidas de rendimiento en resolución de problemas.

Nos centraremos, en función de los objetivos que hemos planteado al inicio de este capítulo, en los dos primeros tipos de instrucción. Ambos se refieren, a simple vista, a dos tipos de instrucción diferente por el grado de especificidad de las estrategias entrenadas respecto a la resolución de problemas matemáticos, de modo que el primero está centrado en el seguimiento de una serie de fases, mientras que el segundo entrena estrategias específicas para superar con éxito cada fase. El tercer bloque, sin embargo, analiza una cuestión de naturaleza diferente, que es el efecto de la utilización de instrumentos instruccionales específicos, especialmente de programas computerizados. En este último bloque se centra la atención en la utilización o no de esos medios sin analizar el tipo de instrucción que se lleva a cabo utilizándolos.

Al referirse a la instrucción dirigida a la adquisición de métodos de resolución de problemas como fases a seguir (bloque "a") lo subdivide en dos tipos: la práctica informal y los métodos formales. Dentro de estos últimos señala los grupos de procedimientos "algorítmicos" y los "heurísticos" siguiendo el estilo de Pólya (1945):

> *"Algorithms. The set of procedures most commonly found was the method of wanted-givens, where the solver responds to four questions: What is asked for in the problem? What facts are given? How should these facts be used to get the answer? What is the answer?" (Hembree, 1992a, p. 261). "Approaches called formal analysis have enlarged these basic guidelines though such added steps as estimating a reasonable answer." (Kinney, 1959, citado por Hembree, 1992a, p. 261).*

> *"Heuristics. Algorithms treat problem solving as unitary, deductive in nature, and systematic. Heuristics treat the process like mathematics in the making, experimental, y governed less by rigorous guidelines than by techniques of discovery and invention. Pólya's four phases were used as the basic heuristical method: (a) understanding the problem; (b) obtain a plan of the solution; (c) carry out the plan; (d) examine the solution obtained." (Hembree, 1992a, p. 261-262).*

Se puede percibir cierta confusión en la diferenciación entre ambos tipos de instrucción: con ambas se refiere al método heurístico propuesto por Pólya. Concretamente, "¿Qué se pide en el problema?, ¿qué se da?", se corresponde con la fase de comprensión del problema; "¿cómo se pueden utilizar lo que tenemos para llegar a la respuesta?" se identifica con la obtención de un plan de resolución; y llevar a cabo el plan con "¿cuál es la respuesta?".

Esta cuestión no influye en los análisis de comparación que se realizan sobre "instrucción" vs. "ausencia de contacto con problemas" ni tampoco en las comparativas entre "instrucción" y "sólo práctica" –donde se muestra el beneficio de la instrucción en ambos casos-. Sin embargo, sí tiene influencia al analizar la comparación del "method of wanted-givens" vs. "heuristics", tratándose, en ambos casos, según hemos mostrado anteriormente, de un mismo contenido instruccional.

Por otro lado, cuando analiza, posteriormente, los efectos diferenciales del método "formal analysis" vs. "method of wanted-givens" sucede que está comparando dos métodos que, según su propia definición son "algorítmicos" ambos. Esto podría explicar los bajos tamaños del efecto que encuentra en "method of wanted-givens" vs. "formal analysis" (tamaño medio del efecto = -0.09[7]). También se podría considerar esta cuestión, relativa a la concepción algorítmica de las estrategias, al interpretar el hecho de que la ganancia obtenida por la enseñanza de heurísticos es ninguna en primaria (cursos 4 y 5) (tamaño

[7] En todos los tamaños del efecto se ha considerado un nivel de significatividad del 1%.

medio del efecto = 0.17) y pequeña en el nivel universitario (tamaño medio del efecto = 0.40), ya que se refiere a la comparación con el "method of wanted-givens"; pero, sin embargo, se obtiene un tamaño del efecto alto con alumnos de los cursos enseñanza secundaria (cursos 6 a 8), con un tamaño medio del efecto de 0.72.

Para el segundo tipo de instrucción que considera utiliza la misma denominación que al analizar las características de los resolutores, "subskills". Dentro de este bloque, respecto a la generalidad-especificidad, en un extremo se sitúan las "subskills" propiamente dichas, y que se refieren a estrategias específicamente dirigidas a la superación de alguna de las diferentes fases de resolución del problema, aplicables a cualquier tipo de problema. Algunas de ellas se aplican en el proceso de modelización: realización de diagramas o gráficos que representan el problema, transformar las afirmaciones del problema en ecuaciones matemáticas, y búsqueda y eliminación de datos innecesarios. Mientras que otras inciden en la fase de ejecución, como la de conjetura y comprobación. En el otro extremo, dentro de este mismo espacio –subskills- considera los efectos de la instrucción sobre conceptos matemáticos, a través de "expresar ideas matemáticas en palabras" y el "aumento del vocabulario matemático[8]".

En el análisis, destaca el tamaño del efecto del entrenamiento en la representación del problema con un diagrama o dibujo (con un valor de 1.16) y en la traducción del problema a ecuaciones matemáticas (1.06). Situándose bastante por debajo, aunque también con tamaños del efecto significativos, se

[8] Otros métodos, en cuya descripción no se hace referencia a aspectos relacionados con su carácter general-específico son la "estimación", la "lectura matemática" y "componer problemas originales".

encuentra la instrucción en la búsqueda y eliminación de datos extraños (0.80)[9] junto con las propuestas centradas en conjeturar y comprobar (0.45).

La verbalización de conceptos matemáticos tienen un tamaño del efecto bajo, aunque significativo (0.35), que coincide con el detectado en relación con el aumento del vocabulario matemático.

Otra cuestión a considerar, que tendrá una importancia fundamental en la interpretación tanto en los resultados de esta última categoría como en los referentes a las características de los buenos resolutores de problemas, es que no se explicitan los conocimientos previos de los alumnos ni la relación entre esos conocimientos y las tareas de evaluación propuestas, es decir, no se analiza cuál es el carácter problemático de las tareas de evaluación de la eficacia de la instrucción. Ésta es una variable de gran importancia, ya que en el caso de evaluar con tareas de práctica sólo se están comprobando la existencia de un conocimiento conceptual y procedimental de carácter estático, mientras que para comprobar que el alumno ha construido un conocimiento metacognitivo es necesario utilizar tareas problemáticas. Esto guarda íntima relación con la crítica realizada por diversos autores (p.e., Sweller, 1990; Nunokawa, 1991, 2000) respecto al hecho de que las tareas del post-test, en la evaluación de la eficacia de programas dirigidos a la enseñanza de resolución de problemas, suelen ser excesivamente similares a las utilizadas durante la instrucción.

Además, Schöenfeld (1985a), a partir de un exhaustivo estudio sobre las características de diferentes programas de instrucción de estrategias de resolución de problemas, señala que no se tiene en cuenta la enseñanza de estrategias más específicas y vinculadas al contenido del problema. Esta variable, que no se considera en el meta-análisis analizado, excepto en los métodos que se dedican específicamente a su desarrollo, podría ser también

[9] En este caso se trata de un tamaño de efecto, aunque significativo, heterogéneo, sin haber podido detectar cuáles son los factores que provocan esa heterogeneidad. Por tanto, este dato debe ser tratado con cautela.

determinante en el análisis de los efectos diferenciales de los métodos de instrucción para la mejora de la capacidad de resolución de problemas, ya que muchos autores afirman, como Pifarré y Sanuy (2002), que "*El conocimiento sobre cómo ajustar la estrategia general a las características del campo conceptual específico sobre el que versa el problema es un factor decisivo en la resolución de los expertos*" (p. 229).

1.4. CONCLUSIONES

El modelo de resolución de tareas matemáticas propuesto en este capítulo ha permitido reinterpretar algunas de las ambigüedades presentes actualmente en el campo de investigación de la metacognición en la resolución de problemas matemáticos. Sin embargo, el hecho de que los estudios precedentes objeto de análisis no hayan sido descritos considerando dicho modelo, ha dificultado la obtención de conclusiones en los términos inicialmente pretendidos.

A pesar del acuerdo generalizado dentro del campo de investigación de que las tareas son problemáticas para un sujeto en la medida en que difieren de aquellas tareas que éste sí sabe realizar, los estudios relacionados con la instrucción en resolución de problemas matemáticos no detallan este aspecto, que consideramos de crucial interés y que conlleva un análisis de los conocimientos previos de los alumnos.

La consideración, además, de diferentes tipos de aspectos problemáticos en una tarea permitiría determinar diferentes tipos de influencia según el tipo de instrucción. Esto cobra especial importancia en la situación actual, donde la mayoría de los trabajos sobre resolución de problemas matemáticos, a pesar de no exponerlo de manera explícita, como hemos mostrado anteriormente, reducen el carácter problemático de una tarea al hecho de que conlleve modelización.

Por todo esto, se concluyó necesario llevar a cabo un trabajo empírico que, utilizando el modelo descrito, mostrara de manera práctica, en el análisis de la realidad de las aulas, la necesidad de concretar las características de las tareas – de modelización, ejecución o mixta; tarea de práctica o tarea problemática- para el análisis de las dificultades de los alumnos al intentar resolverlas, así como para profundizar en los factores implicados en su resolución. También se pretende con dicho estudio destacar la ineludible responsabilidad del investigador de definir con adecuada precisión el carácter problemático de las tareas –dependiente del conocimiento previo de los sujetos- para permitir un adecuado análisis de los componentes y procesos implicados en la resolución de problemas.

El trabajo al que nos estamos refiriendo también nos permitió obtener otras conclusiones, que son presentadas con detalle en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO II. DE LA EXPLORACIÓN DEL MODELO A UN REPLANTEAMIENTO DEL TRABAJO

2.1. OBJETIVOS E HIPÓTESIS

El objetivo inicial de este estudio exploratorio es analizar la bondad del modelo propuesto en el primer capítulo para el análisis de la resolución de tareas matemáticas. Concretamente, utilizando dicho modelo, nos planteamos los siguientes objetivos:

OB_1.- Mostrar la necesidad de concretar las características de la tarea (modelización/ ejecución/ mixta; tarea de práctica/ tarea problemática) para el análisis de las dificultades de los alumnos en la resolución de tareas matemáticas.

OB_2.- Ejemplificar cómo definir el carácter problemático de una tarea matemática a partir del conocimiento previo de los alumnos.

Se concretan, a partir de lo anterior, las siguientes hipótesis:

H_1.- El conocimiento fundamental para el éxito en la resolución de tareas problemáticas es el conocimiento condicional (que se refiere a cuándo y cómo poner en juego un determinado concepto o procedimiento y se fundamenta en el por qué de dicha acción).

H_2.- El carácter problemático de una tarea depende del conocimiento previo de los alumnos.

H_3.- El carácter problemático de las tareas matemáticas no sólo debe situarse en la fase de modelización, sino también en la de ejecución.

Creemos que, en las tareas mixtas, se puede dar que un problema matemático sea muy complejo en la fase de modelización y simple en la de ejecución. De igual modo, un problema puede ser complejo en la fase de ejecución pero simple en la de modelización. También puede ocurrir que el problema sea de ejecución o que esté contextualizado pero no implique modelización.

Incluso, en muchas ocasiones, la dificultad al nivel de la ejecución, debida por ejemplo a la necesidad de articular distintas técnicas, de variarlas fuertemente, etc., comporta un aumento de la complejidad en la comprensión del enunciado. Esta dificultad, en cierto sentido "secundaria", se confunde entonces con la fuente primaria de problematicidad de la tarea. Estas dificultades de la tarea dependen, además, del conocimiento previo de los alumnos: mientras que para una tarea de práctica –resoluble mediante "transferencia directa"-, el conocimiento condicional no rutinizado necesario será muy reducido; para resolver una tarea problemática será necesario disponer de un conocimiento condicional mucho más profundo y fundamentado, ya que será necesario aplicarlo en modos que no han sido previamente rutinizados, adaptándolo a la nueva situación.

Para empezar a someter a contraste estas hipótesis, necesitamos:

(1) Conocer las tareas de ejecución que los alumnos han rutinizado, es decir, las técnicas cuya aplicación se puede llevar a cabo a través del análisis, sin conllevar bloqueos fuertes que impliquen una exploración, para poder proponerles una tarea problemática en la que tengan que articularlas o variarlas.

(2) Que en el problema que se administre a los alumnos, la fase de modelización forme parte de las tareas rutinarias que los alumnos saben realizar, es decir que no sea un factor de la problematicidad de la tarea, para poder centrarnos en el carácter problemático de la ejecución. Se tratará por tanto de tareas problemáticas de ejecución, que pueden estar contextualizados o tareas problemáticas mixtas de modelización rutinaria y ejecución no rutinaria.

2.2. DESARROLLO

2.2.1. Elección del tema

El tema elegido fue *"Funciones"* porque, además de ser un tema de marcado interés en las matemática actual, tiene importantes aplicaciones en la modelización (economía, física, etc.). Esta cuestión es importante porque nuestro objetivo es analizar, a la luz del modelo planteado, las dificultades de los alumnos en la resolución de tareas y tenemos interés en utilizar para ello una tarea que implique tanto modelización como ejecución, si bien la modelización debe tener un carácter rutinario para poder centrarnos en la problematicidad de la ejecución.

2.2.2. Participantes

Se seleccionó como curso académico primero de Bachillerato debido a que "Funciones y gráficas" es un tema que se plantea en 1º y 2º de Bachillerato y tenía que ser por tanto uno de estos dos cursos. Segundo de Bachillerato fue descartado porque la realización de la prueba de Selectividad lleva a los profesores al entrenamiento en un tipo de tareas muy rígido.

Los participantes en la investigación fueron dos cursos de *1º de Bachillerato* de un Instituto público de Enseñanza Secundaria de la Comunidad Autónoma de Madrid; y dos profesores, los que impartían las clases de matemáticas en cada uno de esos cursos. Un grupo desarrollaba la asignatura de "Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I" –1º D–, mientras que en el otro –1º E– la asignatura era "Matemáticas I".

2.2.3. Procedimiento

Se explicó al profesorado de matemáticas del centro que el objetivo del estudio era analizar las dificultades de los alumnos en la resolución de problemas, así como aquellos aspectos en que íbamos a requerir tanto su colaboración como la de los alumnos.

Inicialmente se llevó a cabo una recogida de documentación para deducir el tipo de tareas que los alumnos habían practicado y en qué medida (cantidad), de modo que se pudiera suponer qué tipo de resoluciones habían sido rutinizadas. Para ello se tomaron los apuntes de dos alumnos de cada clase –que fueron elegidos por los profesores por su calidad-. Para concluir esta cuestión era necesario además analizar las tareas planteadas en los exámenes y los resultados de los alumnos, para lo cual los profesores nos facilitaron fotocopia de los exámenes de todos los alumnos; que fueron analizados. Estos exámenes fueron "recorregidos" por el grupo investigador y en función de los resultados se recalificaron en los casos en que consideró necesario.

A la luz de los resultados de los análisis anteriores, se planteó la elaboración de la tarea problemática de prueba, donde se pretendían poner a prueba los objetivos inicialmente planteados. Esta tarea problemática fue administrada a los alumnos para su resolución el día después de que los profesores dieran las notas y corrigieran en clase los exámenes de la evaluación de "Funciones y gráficas". El tiempo de que dispusieron para la realización de la prueba fue de 50 minutos.

Con anterioridad a la administración de la prueba, se preguntó a los profesores sobre la dificultad que consideraban que conllevaría la prueba y tras su realización se llevó a cabo una entrevista con cada uno en relación con los resultados obtenidos y las posibles causas.

2.3. RESULTADOS INICIALES

2.3.1. Papel que juegan en clase las tareas problemáticas y la fundamentación

Del análisis de los apuntes de clase de los alumnos llegamos a la conclusión de que el *proceso de enseñanza* en los dos grupos era básicamente el siguiente:

1.- Presentación, por parte del profesor, del concepto a enseñar, en ocasiones contextualizando alguno de sus posibles usos.

2.- Presentación, por parte del profesor, del procedimiento asociado al concepto presentado.

3.- Realización por parte del profesor de tareas donde muestra la ejecución del procedimiento a enseñar;

4.- Práctica de los alumnos en la aplicación del procedimiento aprendido (rutinización a través de tareas de práctica).

Detectamos cuatro aspectos o dimensiones de la disciplina matemática que cita Gascón (1999) como bastante ausentes en la matemática escolar:

(1) Se olvidan las cuestiones problemáticas a las que los conocimientos matemáticos responden y que, por tanto, constituyen las "razones de ser" de dichos conocimientos. Así, la actividad de resolución de tareas de modelización, por ejemplo, no se presenta como un medio para responder a cuestiones relativas a cierta problemática que se pretende estudiar, sino como un fin en sí misma. Los alumnos no adquieren por tanto el sentido de la matemática, no son conscientes de la forma en que la matemática se construye, reduciéndose ésta a un recetario de procedimientos a aplicar en

"tareas tipo" de problemas, que son reconocidos por su estructura superficial.

(2) Se ignora el razonamiento matemático plausible o conjetural, los "patrones" que rigen dicho razonamiento (Pólya, 1954) y, por tanto, su función complementaria del razonamiento deductivo. Por esta razón, las fases exploratorias de la actividad matemática (formulación de hipótesis, búsqueda de contraejemplos, elaboración de estrategias, tanteo de técnicas, etc.) quedan muy debilitadas, puesto que se dejan bajo la responsabilidad casi exclusiva del alumno, sin ningún tipo de institucionalización.

(3) No se respetan suficientemente las leyes que rigen el desarrollo interno de las técnicas matemáticas. Esto provoca una clasificación "temática" de los problemas, muy pormenorizada e independiente del desarrollo de las técnicas y de sus interconexiones, lo que provoca la aparición escolar de microuniversos matemáticos aparentemente aislados (Bosch y Gascón, 1994). Así, los alumnos saben resolver tipos de problemas, que reconocen por la estructura superficial, causando gran dificultad la combinación o variación de técnica.

(4) El discurso "tecnológico-teórico", esto es, el discurso matemático que justifica y permite interpretar el trabajo técnico –es decir, la fundamentación, que es la base sobre la que se cimienta el conocimiento metacognitivo-, no se integra en la práctica matemática para hacerla más comprensible y eficaz. Se echa en falta un cuestionamiento de la práctica matemática que se realiza; en la cual no se cuestiona ni la justificación de las técnicas matemáticas que se utilizan, ni la interpretación de los resultados que proporciona, ni su alcance o ámbito de aplicabilidad, ni su pertinencia para llevar a cabo una tarea determinada, ni su eficacia, ni su economía.

La ausencia de todo tipo de cuestionamiento tecnológico determina que los conocimientos matemáticos que se estudian sean puntuales y muy rígidos y, en consecuencia, provoca que dichas conocimientos aparezcan muy atomizados e independientes entre sí. De este modo, no resulta extraño que los alumnos no dispongan del conocimiento condicional necesario para seleccionar y aplicar de forma adaptada los conocimientos frente a tareas problemáticas.

2.3.2. Conocimiento previo de los alumnos

Para realizar una prueba que consistiera en una tarea problemática para los alumnos –recordamos que la problematicidad depende de los conocimientos previos- y poner así a prueba las hipótesis planteadas, era necesario analizar qué tipos de tareas habían practicado en mayor medida en clase y realizado además correctamente en el examen, para lo cual realizamos una clasificación previa de posibles tareas de cada tipo:

A) Tareas de modelización

TM_1: Dada una situación, hallar la expresión algebraica de la función que mejor la modeliza.

TM_2: Dada una situación, hacer un esbozo de la gráfica de la función que mejor la modeliza.

TM_3: Establecer una correspondencia entre un conjunto de situaciones y un conjunto de gráficas.

TM_4: Establecer una correspondencia entre un conjunto de situaciones y un conjunto de expresiones algebraicas.

B) Tareas de ejecución

TE_1: Hallar algunas características de una función a partir de su expresión algebraica (valor en un punto, dominio, recorrido, límites, asíntotas, signo). Especialmente cálculo de límites.

TE_1': Hallar algunas características de una función a partir de su expresión algebraica (valor en un punto, dominio, recorrido, límites, asíntotas, signo) y representarlas gráficamente.

TE_1'': Hallar algunas características de una función a partir de su expresión algebraica y de su gráfica (dominio, recorrido, límites, asíntotas, signo, máximos y mínimos, crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad).

TE_1''': Hallar algunas características de la función a partir de su gráfica.

TE_1^{iv}: Dibujar la gráfica de una función a partir de su expresión algebraica dando valores o partir de la tabla de valores dada.

TE_2: Hallar la expresión algebraica de una función a partir de su gráfica.

TE_3: Establecer una correspondencia entre un conjunto de gráficas y un conjunto de expresiones algebraicas.

TE_4: Dibujar la gráfica de la inversa de una función dada por su expresión algebraica.

TE_4': Dibujar la gráfica de la inversa de una función dada por su gráfica.

TE_4'': Dibujar la gráfica de la inversa de una función dada por su gráfica y su expresión algebraica.

TE_4''': Hallar la expresión algebraica de la inversa de una función dada por su expresión algebraica.

TE_5: Hallar la expresión algebraica de la función compuesta a partir de las expresiones algebraicas de dos funciones.

TE_5': Hallar el valor de un parámetro para que la composición de funciones cumpla una característica (conmutatividad).

TE_6: Hallar el valor de un parámetro para que una función[10] cumpla determinadas características (continuidad, etc.).

TE_7: Dada la expresión algebraica de una función y un valor k, hallar el valor de la variable x para el cual se tiene $f(x) = k$.

TE_8: Dada la gráfica de una función y un valor k, hallar el valor aproximado de la variable x para el cual se tiene $f(x) = k$.

TE_9: Determinar, a partir de la representación gráfica de una función, el intervalo en el que se cumple una desigualdad de tipo $f(x) > k$.

TE_{10}: Determinar, a partir de la representación gráfica de dos funciones, el intervalo en el que se cumple una desigualdad del tipo $f(x) > g(x)$.

Todas estas tareas podrían aparecer en su "versión contextualizada", donde la función que se estudia viene dada como modelo de una situación y las cuestiones planteadas hacen referencia a la situación inicial.

[10] En este tipo de tareas sólo se acostumbran a plantear funciones lineales a trozos.

C) Tareas mixtas

$TMIX_1$: Dada una situación, hallar la expresión algebraica de una función que la modeliza y utilizarla para determinar alguna característica de la función (valor de la función en algunos puntos, el valor en el que la función toma determinados valores, etc.).

$TMIX_2$: Dadas dos situaciones, hallar dos funciones con una variable común que las modelizan y utilizarlas para compararlas (para qué valores de la variable una función es mayor que la otra, etc.).

$TMIX_3$: Dadas dos situaciones, hallar las funciones que mejor las modelizan y, a partir de sus expresiones algebraicas, hallar el punto de corte entre ellas.

2.3.2.1. Tareas realizadas en clase

Las tareas realizadas en clase fueron concluidas a partir del análisis de los apuntes de dos alumnos de cada grupo (2 de 1ºD y 2 de 1ºE).

Los apuntes de clase, además de proporcionarnos información sobre el proceso de estudio llevado a cabo (uso de tareas problemáticas vs. de práctica, fundamentación dada a los conocimientos conceptuales y procedimentales,...), y que hemos analizado anteriormente; también fueron de gran utilidad para determinar los tipos de tareas que los alumnos saben presumiblemente realizar, con qué grado de variación..., lo que nos permitió elaborar la tarea problemática y determinar explícitamente el tipo y nivel de problematicidad; si bien esta última cuestión necesitó ser confirmada a través de las actuaciones de los alumnos en los exámenes realizados en clase.

El análisis de las tareas prácticas en clase (ver *Tabla II.1*) nos conduce a las siguientes conclusiones:

- En cualquier tarea, ya sea de ejecución o mixta, en la que haya que representar la gráfica de una función, se utiliza casi siempre una expresión algebraica de la misma, ya sea porque viene dada, ya sea porque se debe establecer en una etapa anterior de la resolución. Incluso aunque se plantee realizar un análisis gráfico *per se*, se facilita además la expresión algebraica de la función que se presenta representada.

- No aparecen nunca situaciones, ni de ejecución ni de modelización, en las que intervengan dos funciones distintas, por ejemplo para compararlas. Este rasgo hace que, en muchas ocasiones, la utilización de una función para resolver un problema de modelización sea relativamente superflua, dado que bastaría con un simple cálculo o, a lo sumo, una ecuación, para realizar la tarea.

- Las tareas que se plantea a los alumnos no se pueden considerar como verdaderos problemas, dado que el alumno siempre sabe qué tipo de técnica debe utilizar y qué tipo de resultado debe obtener; además no debe realizar variaciones importantes de las técnicas que utilizan. En particular, raramente (excepto tal vez en los exámenes) se plantea a los alumnos tareas que requieran estrategias, es decir combinaciones de distintas técnicas.

- Raramente las tareas solicitan proponer una justificación, validación o interpretación de los resultados obtenidos, ni del proceso utilizado.

- No se realiza ninguna tarea de modelización. Si bien sí es realizada la modelización, evidentemente, en las tareas mixtas propuestas, no se ha detectado ninguna tarea de modelización exclusivamente.

		NÚMERO DE TAREAS REALIZADAS	
TIPO DE TAREA		***1º D***	***1º E***
TE_1	Dominio	22	25
	Dominio y Recorrido	-	11
	Recorrido	-	6
	Límites	66	79
	Continuidad	18	21
	Asíntotas	17	21
	PCE, Asíntotas y Mym	1	-
	Simetría	-	1
	Asíntotas y simetría	-	3
	Puntos de corte con los ejes	2	4
	Todo[11]	4	-
TE_1'	Asíntotas	2	-
	Representarla gráficamente	3	2
TE_1''	Domino	4	3
	Simetría	3	9
	Puntos de inflexión	2	2
	Todo[4]	1	2
TE_1'''	Dominio y Recorrido	4	4
	Dominio	2	-
	Mym y PCE	1	-
	CyD, Mym, PCE	1*	1*
	Mym	1*	-
	Todo[12]	3	3
TE_1^{iv}		16	18
TE_2		3	2
TE_4'		1	1
TE_4''		9	8
TE_4'''		9	8
TE_5		6	7

[11] Hallar "Todo" se refiere a: dominio, recorrido, en un punto (el punto es indicado por la tarea explícitamente), asíntotas, puntos de corte con los ejes y signo.
[12] "Todo" en este caso incluye: dominio, recorrido, asíntotas, signo, máximos y mínimos y crecimiento y decrecimiento.

TE_5'		2	3
TE_6	Continuidad de funciones definidas a trozos	3	-
TE_7		4	5
TE_9		3*	-
TE_{10}		3*	-
$TMIX_1$		2[13] //1	2[10]
$TMIX_2$		1	-
$TMIX_3$		2	2

Tabla II.1 Tipos de tareas realizadas en clase.

NOTAS: 1) Las tareas que no se incluyen en la tabla es porque no se ha realizado ninguna de ese tipo.

2) El profesor realizó en todos los casos al menos un ejemplo, y habitualmente dos, de cada tipo de tarea antes de planteársela a los alumnos. Estos ejemplos no son contabilizados como tareas realizadas por los alumnos.

3) Abreviaturas utilizadas: CyD (crecimiento y decrecimiento); Mym (máximos y mínimos); PCE (Puntos de corte con los ejes).

4) El asterisco (*) simboliza que la tarea es contextualizada.

Las tareas de los exámenes proporcionarán información adicional para poder determinar concluir las características que deberá tener la tarea problemática que constituirá la prueba.

[13] Si bien por su formato se trata de tareas mixtas, en realidad se trata simplemente de aplicación de fórmulas, ya que se explica previamente a los alumnos que va a realizar análisis de situaciones que responden a un tipo de función ($P(t)=P_3.a^t$), de forma que se convierte simplemente en una tarea de aplicación de fórmulas.

2.3.2.2. Tareas planteadas en los exámenes

Dispusimos de todos los exámenes que habían realizado los alumnos en la evaluación correspondiente a “Funciones y gráficas”. Cada grupo había realizado un examen parcial y el examen final (ver *Anexo A.1*). Su análisis consistió en re-corregir los resultados de los alumnos en los exámenes (ver *Anexo A.2*), necesario para poder concretar qué aspectos concretos había realizado cada alumno con éxito. Además, esto nos permitió también ser conscientes de qué aspectos los profesores valoraban más –por cómo los puntuaban- e incluso qué errores no consideraban como tales y por tanto formaban parte del aprendizaje “correcto” de los alumnos. Para ello fue necesario analizar las ejecuciones y las puntuaciones de cada alumno en cada examen. En el *Anexo A.2*, como muestra, se adjuntan los comentarios relativos a los análisis llevados a cabo en relación con dos de los exámenes y que nos permitieron profundizar en las técnicas que los alumnos sabían aplicar.

El análisis de esta información nos permitió concluir qué tareas sabían, con seguridad, resolver la mayoría de los alumnos –se mostraba que habían rutinizado el proceso de resolución correspondiente- las cuales fueron tomadas como base para la elaboración de la prueba -tarea problemática-, y que son:

- Determinar las características de una función a partir de la gráfica de la misma.

- Realizar la gráfica de la función inversa de una función a partir de su gráfica.

- Determinar para qué valores $f(x)$ es mayor o igual (o menor o igual) que el valor k

No fue posible incluir en la prueba una tarea problemática que exigiera modelización debido a que no se había detectado que los alumnos hubieran rutinizado ningún proceso de resolución de tareas de este tipo. Durante el desarrollo de las clases, como ya hemos indicado: no se había desarrollado ninguna tarea de modelización exclusivamente; sólo dos tipos de tareas de ejecución habían tenido un carácter contextualizado en 1º D, mientras que en 1º E ninguna; un grupo (1º D) había realizado cuatro tareas mixtas, mientras que el otro (1º E), sólo dos.

Además, recordamos, la modelización realizada en dos de las tres tareas realizadas en clase de tipo $TMIX_1$ pueden no ser consideradas como parte de la tarea, ya que consistían en situaciones tipo cuya modelización responde a un tipo de función, y los profesores (en ambos grupos) primero indicaron el tipo de función de la cual iban a estudiar su aplicación práctica ($P(t)=P_3.a^t$), realizaron un ejemplo, y después realizaron tareas de práctica en las que los alumnos sabían que debían aplicar esa "fórmula". Y en las $TMIX_3$, si bien es necesaria la modelización, la utilización que se hace de ella es tan sólo para hallar los puntos de corte.

En ninguno de los exámenes de ambos grupos se planteó tarea alguna de modelización. Sí se proponían dos tareas mixtas en el examen parcial de 1º E. Precisamente, estas tareas nos resultan de especial interés, ya que apoyan el necesario análisis del proceso de estudio seguido por los alumnos para ayudarnos a interpretar sus dificultades, así como los problemas de ejecución que pueden estar enmascarados tras una aparente complejidad debida a la modelización.

Respecto al ejercicio 4 del examen parcial de 1ºE (ver *Anexo A.2*), podríamos pensar inicialmente que es la necesidad de modelización lo que dificulta la tarea, pero un análisis más minucioso nos permite determinar que donde se sitúa el carácter problemático es en que las tareas de este tipo que habían realizado previamente los alumnos consistían en restar (o sumar) siempre la misma cantidad para hallar los valores en diferentes momentos, mientras que en este caso, al tratarse de tantos por ciento, debían tener en cuenta que el tanto por ciento cada vez es diferente, ya que se calcula en relación con el precio anterior. Así una gran cantidad de alumnos calcula correctamente el precio pasado un año e incluso plantean adecuadamente la función que modeliza la situación que se presenta en la tarea, pero no calculan adecuadamente el precio pasados más años, ya que restan siempre la misma cantidad.

En ejercicio 6 de ese mismo examen (primer parcial de 1º E), el error fundamental está en intentar calcular algebraicamente el precio pasadas 2 horas y 45 minutos de tener el coche en el aparcamiento; error que cometen algunos alumnos a pesar de haber dibujado correctamente la gráfica que representa el precio en función del tiempo. En el recorrido de estudio llevado a cabo en las clases analizadas, la gráfica se ha utilizado para hallar muchas características, pero siempre ha ido acompañada de la expresión algebraica, que ha sido la utilizada para hallar puntos de la gráfica. Eso explicaría que muchos alumnos intenten utilizar el procedimiento habitual para hallar este dato.

Otro ejercicio de los exámenes que llamó nuestra atención, por el gran fracaso obtenido, es la tarea contextualizada planteada en el examen parcial de 1ºD – ejercicio 2 (ver *Anexo A.2*)- que solamente llevó a cabo correctamente un alumno. Esta tarea consistía en hallar las características de la función a partir de su expresión algebraica y posteriormente interpretarlas gráficamente para poder representar la función. En todos los casos, durante las clases, donde se había pedido hallar alguna característica y representar la función (TE_1'), el ejercicio había indicado qué característica hallar, sin formar parte del proceso que el alumno determinara qué características eran importantes según la función.

Durante el proceso de estudio, siempre que el profesor no había indicado qué características debían hallarse, la gráfica se realizaba a partir de hallar puntos (utilizando una tabla de valores). En este caso, todos los alumnos, menos uno, intentaron representar la función hallando puntos, como era previsible, y todos ellos operaron erróneamente, fundamentalmente debido al hecho de considerar "$-t^2$" como "$-(t)^2$" en vez de cómo "$(-t)^2$". Lo que llevó a la gran mayoría a representarla erróneamente. Otra cuestión es qué habría ocurrido si hubieran dispuesto de las características de la gráfica y hubieran tenido que representarla. Precisamente en esa cuestión se centra la primera parte de la tarea problemática planteada (el primer apartado), dado que los alumnos dominan la determinación de las características de una función a partir de su gráfica y los profesores suponen que, por esa razón, también sabrán representar la gráfica de una función una vez conocidas las características de la misma.

El análisis de las ejecuciones de los alumnos también nos llevó a concluir que la prueba que planteáramos debía evitar la realización de cálculos, ya que, no formando parte de lo que queríamos investigar, era muy probable que provocará dificultades en la interpretación de la utilización de las técnicas objeto de nuestro análisis.

Ya disponíamos por tanto de la información necesaria para poder elaborar una tarea problemática para estos alumnos y poder así afrontar los objetivos que nos habíamos planteado.

2.4. DISEÑO DE LA PRUEBA

2.4.1. Elección de la tarea problemática

Las hipótesis, en este momento del proceso de investigación, se concretan en:

(1) La necesidad de realizar pequeñas combinaciones de las técnicas anteriormente mencionadas o integrar dos o tres técnicas, para elaborar una técnica más compleja, en la resolución de la tarea, que será por tanto problemática, provocarán un aumento significativo (catastrófico) de la dificultad.

(2) Si introducimos variaciones en las tareas planteadas que sean nuevas en relación con proceso de estudio vivido por los alumnos, entonces la explicación de las dificultades puede hallarse, en primera instancia, analizando las características de la actividad matemática realizada durante el proceso de estudio.

Para ello, se eligió plantear a los alumnos una tarea problemática de ejecución, que se muestra en el *Anexo A.3* con las dos variaciones siguientes entre lo que se pide y las tareas que los alumnos habían aprendido previamente: (1) En lugar de pedir las características de una función a partir de su expresión algebraica, para que luego la representen, se pide que representen una función a partir de ciertas características dadas; (2) se plantean tres tareas articuladas con el objetivo último de determinar en qué intervalo una función es mayor que su inversa utilizando la gráfica de cada una. Es necesario realizar por tanto una comparación entre las gráficas de dos funciones.

2.4.2. Análisis *a priori*

Presentamos a continuación, para cada subtarea incluida en la prueba elaborada, el desglose de la posible técnica[14] de resolución; el tipo de tarea (de práctica, de ejecución; tarea problemática o de práctica), así como la explicitación de su problematicidad (tipo y grado de variación respecto a las tareas que los alumnos saben realizar); y, en función del tipo de tarea y de la problematicidad, las dificultades que se prevé pueden aparecer.

Las características comunes a todas las subtareas que incluye la prueba son:

- Se trata de tareas de ejecución.
- No es necesario realizar cálculos. Se evitan por tanto este tipo de errores.

Apartado (a)

Técnica de resolución:

(a1) Dibujar los ejes coordenados en papel cuadriculado.

(a2) Trazar la recta vertical $x = 1$ que marca los puntos del plano por los que seguro no pasa la gráfica.

(a3) Marcar los puntos por los que seguro pasa la gráfica: (0;0) y (3;3).

(a4) La información proporcionada en términos de límites, traducirla en asíntotas verticales y horizontales y trazar la recta horizontal $y = 2$.

(a5) Sabiendo que la función es decreciente, trazar un esbozo de curva.

(a6) Comprobar la coherencia entre el dibujo realizado y la información sobre el signo de la función.

[14] Se trata en la mayoría de los casos de técnicas complejas (que implican una combinación de varias técnicas conocidas y/o una variación de las mismas). La literatura tradicional denomina a este tipo de técnicas complejas, estrategia de resolución, pero nosotros, como indicamos en la explicitación del modelo en que nos enmarcamos, consideramos más correcto denominar técnicas (ya sean simples o complejas) a las utilizadas durante el proceso de ejecución .

Tipo de tarea:

Se trata de una tarea problemática.

Problematicidad:

Los alumnos saben resolver tareas de tipo TE_1', TE_1'' y TE_1'''. Esta tarea varía respecto a TE_1' y TE_1'' en que no se dispone de la expresión algebraica, pero en ambos casos es utilizada la técnica de representación de la gráfica a partir de características conocidas. La variación respecto a TE_1''' consiste en que se trata de la técnica inversa (deducción de las características de la función a partir de su gráfica).

Dificultades previstas:

- La principal dificultad será el no disponer de la expresión algebraica de la función, aunque en realidad se trata de una dificultad "aparente" puesto que, cuando los alumnos disponen de la expresión algebraica, sólo la utilizan para determinar las características de la función, que en esta tarea les vienen ya dadas; evitamos así errores de cálculo pero aparece esa nueva dificultad para los alumnos, provocada presumiblemente porque, en ambos grupos, siempre que se ha representado gráficamente una función a partir de sus características estas han sido deducidas previamente a partir de su expresión algebraica.

- La segunda dificultad, ligada a la anterior, es la imposibilidad de calcular valores de la función en tantos puntos como se desee. Aquí el alumno sólo dispone de información acerca de dos puntos: (0;0) y (3;3). Deberá saber interpretar que si $f(x) = y$, entonces la gráfica pasa por el punto $(x;y)$. Hubiéramos podido dar una tabla de valores como información alternativa, lo que hubiera simplificado este aspecto de la tarea.

- La última información proporcionada, sobre el signo de la función, es redundante, pero puede servir para comprobar la corrección de la gráfica. Esta redundancia suele comportar una dificultad debida al tipo de cultura didáctica imperante, por la cual los alumnos se prevé que consideren que debe dar nueva información, y no tratarse de una información de comprobación.

Apartado (b)

Técnica de resolución:

(b1) Dibujar la recta $y = x$ (pasa por los puntos (0;0) y (3;3)).

(b2) Dibujar la curva simétrica de la curva anterior respecto de esta recta.

Tipo de tarea:

Tarea- problema.

Problematicidad:

Esta tarea que podría suponerse inicialmente de práctica, ya que los alumnos saben realizar la gráfica de la función inversa a partir la representación gráfica de una función, se prevé que puede ser problemática debido a que en la gran mayoría de las tareas realizadas por los alumnos de este tipo se indicaba además la expresión algebraica de la función (TE_4''), a pesar de que no era utilizada para la representación gráfica de la función inversa; mientras que en muy pocas sin embargo se omitía la expresión algebraica de función original (TE_4').

Dificultades previstas:

- Las dificultades pueden ser debidas a una falta de memorización de la estrategia de ejecución. La principal causa se prevé que sea recordar el eje respecto al cual realizar la simetría de la gráfica para representar la inversa (utilizar, en vez del eje x=y, por ejemplo el eje de ordenadas o el de abscisas).

- Para aquellos alumnos que no hallan sabido realizar el primer apartado no será posible realizar adecuadamente éste. Sí sería posible que lo hicieran correctamente si dispusieran en la expresión algebraica de la función original y realizaran la tarea hallando primero la expresión algebraica de la función inversa, para después hallar las características de la misma y finalmente representarla, pero en este caso no disponen de ella.

  La decisión que se tomó, dado que lo que nos interesaba era el tipo de tarea, para no perder este tipo de información, fue considerar la corrección de las respuestas en función de la gráfica realizada por el alumno en el apartado *(a)*, aunque no fuera correcta, si bien es necesario indicar explícitamente en qué grado se diferencia de la gráfica de la función propuesta, y debe tratarse en todos los casos de curvas (para que sea posible estudiar las características propuestas).

- Otra dificultad debida el hecho de que este apartado dependa de la correcta resolución del apartado anterior es la posible desconfianza de los alumnos en la corrección de la tarea anterior, lo que puede desmotivar a los alumnos.

Respecto a esta última cuestión señalar que se previó que, si indicaban los alumnos que no realizaban la inversa debido a que no sabían si era correcta la representación del apartado anterior, se les indicaría que ésta no era una causa real de imposibilidad para realizar este apartado y que debían continuar.

- Puede ser que los alumnos tengan de nuevo esa necesidad "aparente" de la expresión algebraica de la función, si bien en este caso es menos probable que en el apartado *(a)*, ya que el procedimiento utilizado en clase de representación de la función inversa no utiliza la expresión algebraica aunque la incluyan como información, mientras que el procedimiento de representación gráfica de una función siempre ha utilizado como paso intermedio hallar las características a partir de su expresión algebraica.

Apartado (c)

Técnica de resolución:

Indicar las características de la curva a partir de la gráfica:

Dominio: R – {2}

Recorrido: R

Signo: x > 0 → (-infinito, 0) ∪ (2, infinito)

x < 0 → (0, 2)

No hay máximos ni mínimos (la inversa de una función decreciente es creciente).

Intervalos de crecimiento: siempre crece.

Asíntotas: $y = 1$ e $y = 2$. (que son las simétricas de las curvas anteriores)

Tipo de tarea:

Es una tarea problemática.

Problematicidad:

Este apartado guarda relación con las tareas TE_1''' y $TMIX_1$ (se utiliza la misma técnica que es necesaria para resolver esta tarea, pero para algunas características sólo se ha estudiado de forma contextualizada, de forma que se considera presumiblemente problemático que sea necesaria la aplicación descontextualizada del conocimiento).

También se relaciona con las tareas que implican representar la gráfica a partir de una serie de características conocidas (TE_1', TE_1''), siendo necesario utilizar técnicas inversas.

Dificultades previstas:

- Los alumnos han realizado tareas en las que debían determinar características de la función a partir de la gráfica (TE_1''') fundamentalmente referidas al recorrido y al dominio, características en las que se prevé por tanto que las dificultades para la resolución por parte de esos alumnos sean mínimas. Sin embargo, en relación con la determinación de máximos y mínimos y crecimiento y decrecimiento la práctica en tareas de ejecución ha sido realizada en todos los casos dentro de tareas contextualizadas o mixtas ($TMIX_1$), lo que puede dificultar su uso descontextualizado.

- Puede aparecer de nuevo la necesidad "ficticia" de disponer de la expresión algebraica de la función.

- También en este caso la gráfica de partida no viene dada sino que es el resultado de la tarea anterior, de forma que se pueden producir igualmente dificultades debidas a la falta de confianza por parte del alumno en su nivel de corrección.

- También puede ocurrir, como en el caso anterior, que el alumno desarrolle adecuadamente las tareas planteadas en este apartado pero que el resultado sea incorrecto porque lo haga respecto a una gráfica que no es correcta porque no fue desarrollada de modo correcto previamente.

La decisión tomada, como en el caso anterior, es analizar la corrección de los resultados tomando como base el carácter correcto o erróneo de la resolución a partir de la función representada gráficamente por el alumno como inversa, si bien se indicará el grado de incorrección de la misma. Se analizarán del mismo modo los resultados del apartado *(d)*.

Apartado (d)

Técnica de resolución:

(d1) Hallar en la gráfica en qué puntos la curva de la función corta la curva de su función inversa.

(d2) Determinar los intervalos en los que la primera está por encima de la segunda.

Solución: x E (-infinito, 0) U (3, infinito)

Tipo de tarea:

En este caso, se tratará de una tarea problemática para un grupo (1ºE) y presumiblemente de una tarea de práctica para el otro (1ºD).

Problematicidad:

Se relaciona con las tareas TE_9 y TE_{10}.

El primer tipo (TE_9) es semejante a la tarea aquí propuesta, pero siendo el segundo miembro de la desigualdad un valor *k*; el segundo tipo (TE_{10}) implica la misma técnica de resolución aquí propuesta, si bien todas las tareas realizadas de ambos tipos (en 1ºD, que ha sido el único grupo que ha realizado estos dos tipos de tareas) han sido de carácter contextualizado, lo cual puede ser causa de problematicidad.

La problematicidad hemos deducido que es probable que se produzca debido a que no se ha realizado la institucionalización de la relación entre las preguntas a las que se respondía (contextualizadas) y la característica de la función a la que correspondían.

Describiremos una de las tareas de tipo TE_9 para explicar esta cuestión: se presenta a los alumnos una representación gráfica indicando que la función representada relaciona el tiempo (en años) con las ganancias (en pesetas) de una empresa; se pregunta entonces "¿durante qué años el beneficio fue superior a dos millones?", pero no se institucionaliza que se está realizando una desigualdad del tipo $f(x) > k$.

Un ejemplo de TE_{10} es el siguiente: se presentan las gráficas de dos funciones; se explica que las gráficas representan la relación entre las ganancias (en pesetas) y el tiempo (en años) de dos empresas; se pide determinar "Durante qué años el beneficio de la empresa A es superior al de la empresa B?", pero no se explicita a los alumnos en ningún momento que se está utilizando una desigualdad del tipo $f(x) > g(x)$.

<u>Dificultades previstas:</u>

- La primera dificultad consiste en transformar en información gráfica la información simbolizada.

- En el caso de los alumnos de 1ºD que saben resolver las tareas del tipo TE_9 y TE_{10}, deben establecen la relación entre ellas y la aquí planteada. Para los alumnos de 1ºE, así como para los alumnos de 1ºD que no hayan llegado a dominar la resolución de las tareas del tipo en cuestión, la tarea aquí propuesta revestirá mayor dificultad.

- En cualquier caso, aún conocida la técnica de comparación, la respuesta implica una dificultad debida a tener que analizar la correspondencia entre la "altura" de la curva y el valor de la ordenada *y*, entre la ordenada y la abscisa. Así como el hecho de que la solución es en forma de intervalo.

- Se presentan de nuevo dificultades debidas al hecho de tener que tratar con información previamente obtenida por ellos mismos.

  Como ya hemos indicado para los apartados anteriores *(b)* y *(c)*, la justificación de no realizar la tarea por la desconfianza de los resultados anteriores no será aceptada y serán valoradas las respuestas a las preguntas en función de los resultados anteriores. En este caso, será evaluado basándonos en la corrección de la respuesta respecto a las representaciones gráficas realizadas por el alumno, aunque estas no hayan sido correctas.

Durante la administración de la prueba los profesores de cada grupo no estaban presentes. Se indicaba a los alumnos que:

- Disponían de una hoja cuadriculaba, que debían utilizar para realizar las representaciones gráficas correspondientes.

- Cuando se confundieran, no debían borrar, sino tacharlo con una x, indicando que "no valía" y explicando por qué. Además, debían entregar todas las hojas en sucio que utilizaran.

- Cuando tuvieran que desarrollar un apartado, aunque su desarrollo dependiera del resultado del apartado anterior, debían llevarlo a cabo aunque no tuvieran la seguridad de si el apartado previo era correcto debido a que los apartados, aunque relacionados, eran evaluables de modo independiente.

Es importante también que los profesores no conocieron la prueba hasta después de haber sido administrada, de modo que no pudieron entrenar explícitamente a los alumnos para realizarla.

2.5. DIFICULTADES DETECTADAS EN LA RESOLUCIÓN DE LA TAREA PROBLEMÁTICA

2.5.1. Tipos de conocimientos implicados en la resolución

La evaluación se lleva a cabo a partir de los resultados escritos de resolución de la tarea problemática planteada donde se les solicitaba que no borraran nada, aunque fuera erróneo y que entregaran el papel "en sucio". Además, se les pedía que indicaran, cuando no supieran cómo realizar alguna de las tareas, por qué no sabían hacerlo y si sabrían hacerlo con alguna variación.

La consideración de la estrategia de resolución planteada en el análisis a priori es de gran ayuda para profundizar en la comprensión de los errores durante el proceso.

Lo que se evalúa sobre las respuestas de los alumnos en la tarea problemática es: en el apartado *(a),* si consideran la característica en la realización de la gráfica; en *(b),* si realizan la gráfica inversa de una función de la que disponen de su gráfica pero no de su expresión algebraica; en *(c),* si determinan las características de una función a partir de su gráfica; y en *(d),* si determinan gráficamente los intervalos en que la función toma valores mayores que su inversa. Además, se tienen en cuenta sus explicaciones en relación con las dificultades que han encontrado y con qué variaciones creen que sí podrían resolverlo correctamente.

Aunque todos los alumnos de ambos grupos realizaron la prueba, nos centraremos en el análisis de los resultados obtenidos en cada sub-tarea por aquellos alumnos que sí mostraron en el examen que dominaban las técnicas básicas que se necesitan para resolver los problemas planteados.

La ejecución (éxito-fracaso) de los alumnos en cada apartado de la tarea problemática incluye los siguientes conocimientos:

a) Conceptuales

a.1) *Posesión*. Posesión del conocimiento adecuado para resolver la tarea. Por ejemplo, deben saber qué es el dominio de una función, pero es necesario que posean el conocimiento útil.

Por ejemplo, pueden conocer qué es el recorrido de una función en términos de "los valores de f(x) que corresponde a x que pertenecen al dominio de la función", o en términos de cálculo a partir de la expresión algebraica, "los valores de f(x) que tienen solución dentro de los números reales", pero para esta tarea deben utilizar un conocimiento gráfico del dominio, por ejemplo "proyección sobre el eje *y* de la gráfica de la función". Aquí podemos observar la estrecha relación entre conceptos y procedimientos que tiene lugar dentro de las matemáticas en la mayoría de los casos.

a.2) *Selección*. Por ejemplo, deben determinar, a partir de las características de la función, cuál es la versión del conocimiento relativo a las características de las funciones que será más útil en este tarea concreta. Así, en el recorrido, además de poseer el conocimiento apropiado, deben determinar que será el que utilicen aquí.

Es necesaria una "transferencia analítica" de los conceptos, ya que en el enunciado de la tarea se indica que debe representar gráficamente o traducir información a partir de la gráfica, es decir, se deduce por la estructura superficial de la tarea que el tipo de conocimiento relativo a las características de las funciones es gráfico; por esta razón podemos deducir, si los alumnos no seleccionan el conocimiento conceptual apropiado que es porque no lo poseen.

b) Procedimentales

b.1) *Posesión*. Deben conocer las técnicas básicas de resolución de la tarea. Por ejemplo, en el caso del recorrido, la técnica básica que los alumnos dominan es qué pasos seguir para llevar a cabo la proyección de la gráfica sobre el eje y, y posteriormente, a partir de esta proyección, determinar los valores de y que están incluidos en la proyección.

b.2) *Selección*. En la mayoría de las propuestas de la tarea, el tipo de selección que deben realizar no es analítica sino exploratoria, ya que no saben con qué técnicas se resuelven este tipo de tareas concreto, sino que deben deducir cuáles son las técnicas básicas de las que deben partir para su resolución.

a.3) *Aplicación adaptada*. Finalmente, deben utilizar ese conocimiento de forma adaptada a la tarea. Esta adaptación será analítica (transferencia analítica) en el caso de tareas de práctica y exploratoria (transferencia exploratoria) para las tareas problemáticas.

En nuestro caso, los alumnos que saben realizar la tarea de determinar el recorrido de una función a partir de su gráfica deben invertir la técnica para lograr determinar las características de la gráfica sabiendo cuál es el dominio.

También se podría tratar de otro tipo de problema si, por ejemplo, los alumnos supieran determinar el recorrido de una función a partir de su representación gráfica pero sólo con funciones de un determinado tipo (por ejemplo cuadráticas), y tuvieran que aplicarlos con funciones de grado superior.

Las variaciones necesarias para llevar a cabo la tarea propuesta en relación con los conocimientos previos de los alumnos han sido detalladas anteriormente en el "Análisis *a priori*".

2.5.2. Resultados

A continuación presentamos una síntesis de los resultados de los alumnos en la realización de la tarea problemática que les fue administrada, donde se confirman las dificultades previstas a partir de sus conocimientos previos, así como que las "pequeñas" variaciones que deben realizar sobre las técnicas que conocen- para resolver las diferentes tareas propuestas- conllevan gran dificultad:

Apartado (a)

(a1) Todos los alumnos dibujan los ejes de coordenadas en el papel cuadriculado. Prácticamente todos (90%) numeran los ejes adecuadamente, si bien el 20% no tiene en cuenta una diferencia constante entre los fragmentos que dividen cada eje.

(a2) El 70% marca la recta vertical $x = 1$. El 20% marca la recta $y = 1$ erróneamente. De entre los alumnos que marcan los valores que no formarán parte del dominio, 25% tienen en cuenta este dato al representar la gráfica.

(a3) El 70% marca correctamente los puntos (0;0) y (3;3), pero el 50% de ellos no lo tienen en cuenta al dibujar la gráfica. Es decir, a pesar de disponer de la información, la gráfica que dibujan no pasa por esos puntos.

(a4) El 60% marca la recta $y = 2$, pero sólo el 10% traduce los datos facilitados en términos de límites a información en términos de asíntotas, es decir, tienen en cuenta esa recta como una asíntota al representar la gráfica.

(a5) Sólo 2 alumnos (uno de 1ºD y otro de 1ºE) dibujaron un esbozo adecuado de la gráfica. Ambos confiaban en que el esbozo de la gráfica era correcto. Del resto, gran parte afirmaba que no sabían cómo seguir, o que creían que estaba mal, porque no disponían de la expresión algebraica (60%) o especificando que necesitaban la expresión algebraica para hallar puntos de la función (20%). El 10%, a pesar de haber hecho un esbozo erróneo de la gráfica, no mostraron desconfianza en su actuación.

(a6) La información sobre el signo de la función se percibe de modo confuso. Sólo los dos alumnos que realizaron la gráfica correctamente utilizaron adecuadamente esta información. Pero también ambos plantearon a la profesora la duda sobre que este dato no aportara nada nuevo.

Los alumnos para los que esta información era incoherente con la representación gráfica que habían realizado con la información anterior, no lo tuvieron en cuenta.

Apartado (b)

Los dos alumnos que realizaron bien el primer apartado realizaron también adecuadamente el segundo.

Del resto, el 80% dibujó al menos curvas y por tanto son considerados en el análisis de los resultados de este segundo apartado. Entre ellos, el 20% realizó adecuadamente la representación gráfica de la función inversa a la que hubieran dibujado. Entre los errores más comunes, encontramos: considerar como línea de simetría el eje x (20%), o incluso el eje y (15%); otros (25%), a pesar de trazar adecuadamente el eje de simetría, no continuaron, indicando que no saben cómo representar la inversa o lo hicieron erróneamente. Sin embargo, todos los alumnos que erraron en la ejecución de este apartado, sí indicaron cómo se obtiene la inversa de una función algebraicamente.

Apartado (c)

Todos los alumnos que han realizado adecuadamente el apartado b) determinan adecuadamente el dominio y el recorrido de la función representada.

La predominancia de la determinación de características gráficas a partir la representación se observa en que incluso alumnos que no desarrollan adecuadamente el apartado b) y cuyos resultados en este apartado son por tanto contradictorios con los que se pueden deducir de las características dadas de la función originaria en el apartado a), no muestran ningún signo de alarma por la falta de coherencia.

Respecto a determinar el "dominio" y el "recorrido", los alumnos que realizaron bien los dos apartados anteriores no presentan dificultades en este.

De los alumnos que han llevado a cabo adecuadamente la representación gráfica de la inversa, siendo esta una curva, pero partiendo de una representación gráfica de la original errónea, el 70% deduce correctamente el dominio y el recorrido. El 30% restante, debido a su desconfianza en la gráfica realizada en el apartado anterior, y a pesar de las indicaciones contrarias del profesor, obviaron la gráfica que habían dibujado y se centraron en deducir las características a partir de las características conocidas de la función original y que se dan en el apartado *(a)*. Todos los alumnos de este 30% mencionado en último lugar concluyen, erróneamente, que el recorrido de la función original, dado como datos en el primer apartado, se convierte en el dominio de la función inversa, y, a la vez, el dominio de la primera en el recorrido de la segunda.

En relación con el dominio, sólo la mitad de los alumnos que habían realizado correctamente los apartados anteriores lo desarrolla adecuadamente. De los alumnos que no habían realizado bien el primer apartado pero sí el segundo, ninguno responde adecuadamente a este apartado.

De las gráficas que se dibujaron erróneamente, ninguna de ellas contenía máximos ni mínimos (al igual que la correcta), pero sólo un alumno supo contestar adecuadamente a la cuestión de máximos y mínimos y de crecimiento.

Las asíntotas fueron encontradas adecuadamente por los dos alumnos que habían realizado adecuadamente los apartados anteriores.

Parte de los alumnos que fracasaron en este apartado (el 40%), sí explicaron cómo se podrían hallar estos datos a partir de la expresión algebraica de la función, si se dispusiera de ella, es decir, expusieron cuál sería la "fórmula" que aplicarían a la expresión algebraica para hallarlo. Otros (20%), aunque afirmaban que sí podrían hacerlo si dispusieran de la expresión algebraica, no indicaron correctamente cómo lo harían.

Apartado (d)

Sólo 3 alumnos, dos de 1º D y uno de 1ºE (dos de ellos son los que realizaron adecuadamente el resto de apartados), llevaron a cabo adecuadamente este apartado. La gran mayoría de los alumnos plantearon que hay que dar valores a las funciones para responder a esta cuestión (40%). Y el resto afirma simplemente que no sabe cómo hacerlo.

A pesar de estos resultados, coherentes con los previstos a partir del análisis de los conocimientos previos de los alumnos, cuando se llevó a cabo una entrevista con cada uno de los profesores, que tuvieron lugar inmediatamente antes de la realización de la prueba por parte de los alumnos –el mismo día, una hora antes de su realización-, donde se les preguntó acerca de la complejidad que implicaría la realización de los problemas planteados, ambos afirmaron que la dificultad sería mínima para los alumnos que sí sabían resolver los tipos de tareas que debían tomarse como base para su resolución en cada caso, es decir, que dominaban la técnica básica que debían adaptar.

Se pudo constatar que ambos profesores suponían que, por el hecho de dominar una técnica, el alumno dominaría la técnica inversa –por ejemplo, si los alumnos sabían determinar las características de una función a partir de su gráfica, suponía que también sabrían llevar a cabo el proceso contrario, consistente en representar gráficamente una función conocidas sus características.

Tampoco se mostraron conscientes de la falta de conocimiento gráfico de los alumnos ni de la relación de ello con el hecho de que siempre, durante las clases y en los exámenes, se planteaban a los alumnos tareas de representación gráfica donde se les facilitaba la expresión algebraica de la función y que ésta se había transformado en la herramienta básica para determinar las características gráficas.

En general, no tenían conciencia de las grandes dificultades que pueden implicar tareas que conllevan para su resolución una variación de una técnica conocida y de ello se deduce que se deja bajo la responsabilidad del alumno este importante y difícil aspecto del aprendizaje por considerarlo de reducida dificultad.

2.6. CONCLUSIONES

Se ha mostrado en este capítulo que el análisis del carácter problemático de una tarea, partiendo de los conocimientos previos de los alumnos -fruto del proceso de estudio que han vivenciado-, es de importancia fundamental para interpretar el origen de las dificultades que aparecen en su resolución.

Se ha constatado además cómo la necesidad de realizar pequeñas variaciones en las técnicas que se conocen para resolver una tarea de ejecución, cuyo grado de problematicidad, en principio, es muy reducido, conlleva gran dificultad, y que, en ocasiones, dificultades aparentemente provocadas por la necesidad de modelización enmascaran, como se observa en un análisis más minucioso, el carácter problemático de las técnicas que es necesario utilizar durante la ejecución.

Estas cuestiones resultan de marcado interés, como adelantábamos en el primer capítulo, para analizar, para el análisis tanto de los factores implicados en el éxito-fracaso en la resolución de problemas, como de la eficacia de los modelos de instrucción dirigidos a la mejora de la capacidad de resolución de problemas.

Pero este estudio nos llevó además a un replanteamiento del trabajo. El análisis de las dificultades de un grupo de alumnos frente a la resolución de una tarea problemática nos da luz sobre los problemas fundamentales de los que adolecen los alumnos, especialmente al comparar los resultados obtenidos con la información resultante de estudios semejantes. Pero la consideración del proceso de enseñanza-aprendizaje vivido por esos alumnos para analizar sus dificultades, y el determinar que éstas eran fácilmente previsibles en función de dicho proceso, nos hizo plantearnos la necesidad de ampliar el objeto de estudio, profundizando en los objetivos que se persiguen en las propuestas de enseñanza dirigidas a la mejora de la capacidad de resolución de problemas de los alumnos así como en cómo se han cristalizado esas propuestas en la práctica y las dificultades que se han detectado para su implementación.

CAPÍTULO III. LA INSTRUCCIÓN EN TORNO A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN MATEMÁTICAS

En este capítulo se abarcan las diferentes concepciones que han sido planteadas sobre el papel de la resolución de problemas en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, así como las propuestas de instrucción que han derivado de cada una de ellas. Nos centraremos posteriormente en el marco más prometedor según las investigaciones actuales en relación con la enseñanza de la resolución de problemas y que está basado en el aprendizaje situado y la enseñanza anclada.

Finalmente mostraremos cómo, a pesar de que el objetivo fundamental de la enseñanza de las matemáticas es que los alumnos sean competentes en la resolución de problemas, y de los esfuerzos de décadas, hoy día sigue existiendo una gran dificultad para lograr este objetivo.

3.1. PROPUESTAS DE INSTRUCCIÓN EN MATEMÁTICAS PARA LA ENSEÑANZA EN TORNO A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

3.1.1. Papel de la resolución de problemas matemáticos en la enseñanza

A lo largo del tiempo han aparecido diferentes modos de concebir el papel que debe o puede cumplir la resolución de problemas en la enseñanza, muchas de las cuales han coexistido y coexisten actualmente. Es necesario concretar el ámbito en que sitúan las diferentes propuestas de instrucción, así como los objetivos que se plantean, para poder llevar a cabo un análisis de los modelos instructivos que plantean.

Stanic y Kilpatrick (1988) afirman que el término resolución de problemas se ha convertido en un eslogan que ha acompañado a diferentes concepciones sobre qué es la educación, qué es la escuela, qué es la matemática y por qué debemos enseñar matemática en general y resolución de problemas en particular. Estos autores detectaron diferentes modos de concebir la importancia de la resolución de problemas y las clasificaron en tres tipos.

El primer significado que citan estos autores es *resolver problemas como contexto*, donde los problemas son utilizados como vehículos al servicio de otros objetivos curriculares. Así, los roles principales son: como justificación para enseñar matemáticas, que consiste en mostrar su valor en la vida cotidiana; para proveer de especial motivación a ciertos temas, utilizando problemas como introducción de los diferentes contenidos; y como actividad creativa, utilizándolos para mostrar que la matemática puede ser divertida y que hay usos entretenidos de los conocimientos matemáticos.

En segundo lugar se refieren al significado que está relacionado con la concepción de la *resolución de problemas como habilidad*, convirtiéndose así en un "conocimiento" que debe ser objeto de enseñanza explícita en el currículum.

En relación con estas dos primeras formas de concebir el papel de la resolución de problemas en matemáticas, Villanova, Rocerau, Valdez, Oliver, Vecino, Medina, Astiz y Álvarez (2003) postulan que

> *"Aún cuando en esta segunda interpretación del término los problemas son vistos como una habilidad en sí misma, las concepciones pedagógicas y epistemológicas que subyacen son precisamente las mismas que las señaladas en la interpretación anterior: las técnicas de resolución de problemas son enseñadas como un contenido, con problemas de prácticos relacionados, para que las técnicas puedan ser dominadas" (p. 2).*

El tercer significado que enumeran Stanic y Kilpatrick (1988) se refiere a aquellos planteamientos que consideran que el trabajo de los matemáticos es la resolución de problemas y que la matemática realmente consiste en tratar con problemas. Es éste el planteamiento más aceptado actualmente y desde ya hace algunos años, en que la resolución de problemas ha sido señalada como el foco primario de la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos.

Otro importante análisis y clasificación de los diferentes modos de concebir el papel que debe jugar la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas es la realizada por Schroeder y Lester (1989), en la cual profundizaremos a continuación, ya que será utilizada como base para la realización de una síntesis de las principales propuestas de instrucción en este campo.

3.1.2. Propuestas de instrucción en función del papel que se asigna a la resolución de problemas

En este ámbito resulta de marcado interés el trabajo que llevó a cabo Nunokawa (2004) y que intenta responder, entre otras, a las siguientes cuestiones:

> *"(a) What sort of learning do we expect students to obtain from problem solving experiences?*
>
> *(b) In order to maximize this learning, what kind of experiences should the students be exposed to, and with what pedagogical support?" (p. 1)*

Para desarrollar este trabajo, parte del concepto de resolución de problemas matemáticos propuesto por Lester y Kehle (2003):

> *"Mathematical Problem Solving is a thinking process in which a solver tries to make sense of a problem situation using mathematical knowledge he/she has and attempts to obtain new information about that situation and/or to "resolve the tension or ambiguity" (Lester & Kehle, 2003) about that." (Nunokawa, 2004, p.3)*

A partir de dicha concepción, se describe la resolución de un problema como un proceso en que se parte del conocimiento matemático que los alumnos poseen para, a través de una situación problemática, adquirir o bien nueva información no matemática sobre la situación o bien nuevo conocimiento matemático. Utilizando esta descripción, se muestra una síntesis de los aspectos implicados en el proceso de resolución de un problema para clasificar las investigaciones en función de en cuál de ellos han puesto en énfasis.

En relación con las preguntas que se plantea- esto es, en primer lugar, qué tipo de aprendizaje esperamos que obtengan los estudiantes a partir de la resolución de problemas; y, en segundo lugar, a qué tipo de experiencias deberían ser expuestos los estudiantes y con qué apoyo pedagógico para maximizar dichos aprendizajes- Nunokawa considera cuatro tipos de respuestas a la primera cuestión según el aspecto del proceso de resolución en que se sitúe el énfasis y en función de ello responde a la segunda.

A continuación mostraremos las diferentes propuestas de instrucción en función de los ámbitos de la resolución de problemas en que pretende centrarse la enseñanza, así como los autores fundamentales que han desarrollados sus trabajos en cada una de ellas:

(a) *Énfasis en el proceso de resolución*[15]

Los aprendizaje fundamentales en que se pueden centrar los trabajos que ponen el énfasis en el proceso resolución son: cómo llevar a cabo procesos de resolución de problemas o utilización del pensamiento; adquirir modelos de actuación matemática o competencia crítica (p.e., Blum y Niss, 1991), o en mostrar modos de hacer matemáticas (p. e., Schöenfeld, 1994).

En estos casos, las propuestas de instrucción han sido:

- Desarrollar repertorios de formas de probar situaciones problemáticas (Nunokawa, 2000, Stylianou, 2002) o el uso de estrategias heurísticas (Lawson y Chinnappan, 1994).
- Proporcionar herramientas para probar situaciones (Nunokawa y Fukuzawa, 2002).
- Desarrollar sus competencias metacognitivas (Schöenfeld, 1992b) a través, por ejemplo, del andamiaje (Holton y Thomas, 2001) o el aprendizaje cooperativo (Artz, 1996).
- Incrementar sus creencias adecuadas (Schöenfeld, 1992b).

[15] Se corresponde con la "enseñanza *sobre* resolución de problemas" de Schroeder y Lester (1989).

- Hacerles preguntas que esperamos que utilicen en futuros problemas (Pólya, 1945).
- Invitarles a participar en prácticas de hacer matemáticas (Schöenfeld, 1994), aprendizaje cognitivo (Brown y Palincsar, 1989) sobre resolución de problemas matemáticos o sobre hacer matemáticas.

b) *Énfasis en la aplicación del conocimiento matemático*[16], es decir, la utilización fundamental de la resolución de problemas está dirigida a cómo y cuando aplicar el conocimiento matemático previo.

Las propuestas de instrucción en este bloque se pueden sintetizar en:

- Enriquecer los esquemas de los estudiantes de situaciones típicas (Greeno, 1987; Verschaffel y De Corte, 1997).
- Enriquecer esquemas específicos del área (Owen y Sweller, 1985).
- Utilizar situaciones que pueden ser asociadas fácilmente con el conocimiento objetivo (Hudson, 1983) y utilizar situaciones familiares o significativas para los alumnos (Bottge, Heinrichs, Chan y Serlin, 2001; Woolnough, 2000).
- Dirigir la atención de los estudiantes hacia interpretaciones adecuadas de la solución (Silver y Shapiro, 1992).
- Reducir la ansiedad provocada por las matemáticas (Archambeault, 1993).

c) *Énfasis en la nueva información que se adquiere*, a través del proceso de resolución del problema, *sobre la situación analizada*.

En este caso, los modelos de instrucción se han centrado en:

[16] Se correspondería con la "enseñanza *para* resolver problemas" de Schroeder y Lester (1989).

- Seleccionar situaciones que provoquen el interés de los estudiantes y sobre las cuales quieren obtener nueva información.
- Proporcionar situaciones donde se pueda observar el poder de las matemáticas; por ejemplo, adelantar resultados a través del análisis matemático (Nunokawa, 2001).
- Proporcionar herramientas que ayuden a los estudiantes a investigar las situaciones (p.e. calculadoras gráficas o computadoras, Osawa, 1996).

d) *Énfasis en el nuevo conocimiento matemático que se adquiere a través de la resolución del problema.* Es decir, el énfasis está en la creación de nuevo conocimiento, específicamente matemático (Brown y Palincsar, 1989).

- Proporcionar objetos o herramientas pedagógicas que ayuden a vincular el conocimiento de los estudiantes con el nuevo conocimiento que se quiere construir a través del problema (Fuson y Burghardt, 2003).
- Explicitar el conocimiento matemático de los estudiantes a través de la reflexión sobre sus propias actividades (De Corte, Verschaffel y Greer, 1996).
- Ayudar a los estudiantes a que sus ideas lleguen a ser más matemáticas. Por ejemplo, a través de la trascripción de situaciones a notación matemática (Fuson y Burghardt, 2003), o haciendo uso de la técnica del modelado (Gravemeijer, 1997).
- Crear normas de clase donde la construcción de conocimiento sea central (Carpenter, Fennema, Fuson, Hiebert,, Human, Murray, Oliver y Wearne, 1999), desarrollando normas socio-matemáticas (Cobb y Yackel, 1998) sobre los tipos de conocimientos que son respetados en matemáticas y cuándo el conocimiento está validado.

Este último enfoque parece corresponderse con el "enfoque de investigación" propuesto por Baroody (2003), que está caracterizado por:

> *"(a) Like conceptual approach, un aim of mathematics instruction is to help students learn needed facts, formulas, and procedures in a meaningful fashion; (b) Like the problem-solving approach, students are regularly engaged in mathematical inquiry; (c) Like the problem solving approach, a teacher indirectly incites doubt, curiosity, or cognitive conflict by posing worthwhile tasks and by creating a social environment that encourage questioning, inquiry, and reflection; (d) Unlike the proble-solving approach, children's active construction of understanding is mediated, guided, and prompted by the teacher." (Baroody, 2003, p. 22)*

Nunokawa (*Op. Cit.*), concluye en su análisis que la perspectiva de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas está apoyada por las siguientes razones:

(i) Hace posible la creación de nuevo conocimiento que los estudiantes necesitan aprender de modo conectado con el conocimiento previo, ya sea matemático o no matemático.

(ii) Hace posible que el aprendizaje esté dirigido a la creación de nuevo conocimiento matemático de modo compatible con la reciente visión de que el conocimiento es situado (Brown y Palincsar, 1989; De Corte et al., 1996). Este tipo de aprendizaje permite aprender además sobre el rol que pueden jugar las matemáticas en las situaciones, cómo evaluarlo y por qué es necesario.

(iii) Apoya la imagen de las matemáticas como actividad humana (De Corte et al., 1996) y favorece que los estudiantes lleguen a ser aprendices autónomos.

Pero también se presentan limitaciones y dificultades en tal enfoque de enseñanza aprendizaje, como por ejemplo las siguientes:

- El pensamiento de los estudiantes necesita ser guiado por un profesor de modo que dirija el conocimiento matemático que puede ser formulado (Fuson y Burghardt, 2003).
- Cuando se presentan varios soluciones a los estudiantes, no siempre es fácil integrarlas y hacer que converjan en ideas matemáticas. Necesitamos un contexto donde las ideas canónicas matemáticas sean seleccionadas naturalmente por los aprendices (Nunokawa y Kuwayama, en prensa, citado por Nunokawa, 2004).

Sintetiza estas dificultades Nunokawa afirmando que:

> *"There may be some parts of a mathematical theory which students need a great deal of teachers' intervention to learn. In such cases, we need to examine whether students can gain the above-mentioned benefits through that problem solving even when we provide such intervention or guide students' thinking processes". (Op. Cit., p. 7).*

Esta afirmación muestra una paradoja: si nuestro objetivo es que los alumnos aprendan a resolver problemas –esto es, sean capaces de transferir el conocimiento de que disponen-, ¿cómo podemos lograrlo? Una posibilidad es enseñar a resolver problemas resolviendo problemas pero, entonces, si debe tratarse de problemas, se plantea la necesidad de guía del profesor como un impedimento, ya que reduce la autonomía del alumno, coartando su ámbito de creación en relación con la trasferencia de ese aprendizaje. Se muestra así la dificultad que conlleva la puesta en práctica de la enseñanza "constructivista" dialéctica (Vigotsky, 1978), que se basa en suministrar al alumno la ayuda estrictamente necesaria, pero no más, para que, en función de su zona de desarrollo próximo pueda construir sus conocimientos.

3.2. EL APRENDIZAJE SITUADO Y LA ENSEÑANZA ANCLADA: "THE ADVENTURES OF JASPER WOODBURY"

Los estudios en torno a una enseñanza dirigida a la resolución de problemas apoyan la eficacia de que los alumnos adquieran habilidades metacognitivas (p.e., Costa, 1991; Perkins, 1992, 1995; Fogarty, Perkins y Barell, 1992, 1994; Kendall y Marzano, 1997; Tishman, Perkins, and Jay, 1995), pero lograr este objetivo -enseñar a los alumnos a resolver problemas-, se ha mostrado claramente difícil cuando se intenta implementar en las aulas. Numerosos autores han destacado esta dificultad a pesar de los esfuerzos tanto de los investigadores como de las instituciones educativas (p.e., Cooney, 1985; Silver, 1985; Thompson, 1989).

Los modelos instruccionales más importantes actualmente dirigidos a la enseñanza de la resolución de problemas en el campo de las matemáticas se han desarrollando en el marco de los ambientes de aprendizaje constructivistas (Jonassen, Mayes y McAleese, 1993; Jonassen, 1999; Jonassen, Peck y Wilson, 1999); destacando las propuestas dentro de la enseñanza basada en problemas (PBL), y especialmente la instrucción anclada basada en ambientes computerizados (Bransford y Vye, 1989; Bransford, Sherwood, Hasselbring, Kinzer y Williams, 1990; CTGV, 1989, 1990, 1992, 1993; Goldman, Zech, Biswas, Noser y CTGV, 1999).

Estos modelos de enseñanza-aprendizaje tienen importantes similitudes:

> *"Using authentic problems as the learning focus; using technology support the learning process; using stories, cases or scenarios to provide the contextual information." (Hung, Tan, Cheung y Hu, 2004, p. 120).*

Todas estas propuestas están basadas en los planteamientos de Dewey (1933), que defiende que encontrar un problema es el comienzo del verdadero aprendizaje y se muestran contrarios a las prácticas que consisten en utilizar los problemas como aplicación una vez que cierto conocimiento matemático ha sido introducido, con el objetivo de utilizarlos para resolver situaciones "reales".

De acuerdo con Laughbaum (1999), la denominada "teaching in context" también utiliza situaciones, pero "*they are used at the beginning of a math topic for the purpose of helping students understand the mathematics to be taught, or to create a motivating experience of the mathematics to follow*" (p. 1). Por eso, el denominado Cognition and Technology Group at Vanderbilt (CTGV) realiza las siguientes críticas a los problemas de aplicación:

> *"1. Instead of bringing real world standards to the work, students seem to treat word problems mechanically and often fail to think about constraints imposed by real-world experiences.*
>
> *2. Single correct answers to application problems lead to misconceptions about the nature of problems solving and inadvertently teaches students for a single answer rather than seek multiple answers.*
>
> *3. The goal of one´s search for a solution is to retrieve previously presented information rather than rely one's own intuition. This may limit the development of people's abilities to think for themselves.*
>
> *4. They explicitly define the problems to be solved rather than help students to learn to generate and pose their own problems. Mathematical thinkers tend to generate their own problems.*
>
> *5. The use of application problems lead to inert knowledge. Inert knowledge is that which is accessed only in a restricted set of contexts even though it is applicable to a wide variety of domain." (CTGV, 1997, p. 40).*

Shea y Bishop (1999), afirman que "*research has shown the importance of the idea situated cognition which describes the fact that when you learn anything you learn it in a certain situation*" (p. 41).

El aprendizaje situado, siguiendo a Brown, Collins y Duguid (1988) es propuesto como un método dirigido a un aprendizaje "anclado" dentro del contexto del área de estudio. En vez de abstraer trozos de conocimiento aislados defiende que los estudiantes deberían aprender sobre una materia por inmersión en la cultura, de modo que un contexto rico en situaciones problemáticas que deben ser resueltas se convierte en un aspecto fundamental.

Según la Encyclopedia of Educational Technology, el modelo de instrucción anclada fue desarrollado entre 1980 y 1990 por el Cognition and Tecnology Group at Vanderbilt (en adelante CTGV). Esta propuesta, dirigida por John Bransford, se inserta dentro del paradigma del constructivismo social, consistiendo en una combinación entre los modelos de escenarios basados en objetivos y el aprendizaje basado en problemas (PBL), y sus principios de enseñanza-aprendizaje están estrechamente relacionado con el aprendizaje situado y la teoría de la flexibilidad cognitiva (Oliver, 1999a y 1999b; Kearsley, 1994-2004).

El CTGV, en 1991, muestra un ejemplo de cómo puede fomentarse un aprendizaje situado "auténtico" en relación con las matemáticas utilizando como apoyo un formato de video. Ese grupo ha elaborado "The Adventures of Jasper Woodbury", que consiste en 12 videos cada uno de los cuales narra una aventura en torno a la cual girará el proceso de aprendizaje. En concreto, han elaborado tres vídeos, que describen historias basadas en la vida real, para cada uno de los siguientes bloques: álgebra, geometría, probabilidad y distancia/tiempo/razón[17], si bien se plantean conexiones con otras áreas, como por ejemplo ciencia, estudios sociales, literatura o historia. En concreto los títulos de los videos propuestos son los que exponemos a continuación:

[17] Visitar http://peabody.vanderbilt.edu/projects/funded/jasper/preview/AdvJW.html).

- Complex Trip Planning: *Journey to Cedar Creek, Rescue at Boone's Meadow, Get Out the Vote*.
- Statistics and Business Plans: *The Big Splash, Bridging the Gap, A Capital Idea.*
- Geometry: *Blueprint for Success, The Right Angle, The Great Circle Race.*
- Algebra: *Working Smart, Kim's Komet, The General is Missing.*

La empresa que se encarga de la distribución de estos videos, que es Erlbaum, explica respecto a ellos que se trata de "*a multimedia videodisc series to improve both basic and higher-order mathematics learning in grades 5 and up*".

Cada aventura presentada en los videos persigue el objetivo de que los alumnos, motivados por la identificación entre ellos mismos y los protagonistas, en la situación descrita en el video, se enfrenten a la resolución de la situación problemática planteada al final del mismo. Están basados en una instrucción anclada, como decíamos, según la cual "*instruction is situated in engaging, problem rich environments that allow sustained exploration by students and teachers.*" (Cognition and Technology Group at Vanderbilt, 1992, p. 65).

El paradigma de la instrucción anclada está basado en un modelo general de la resolución de problemas (Bransford y Stein, 1993; Lincoln, 1998), en el marco del constructivismo social, donde adquiere una importancia fundamental la zona de desarrollo próximo descrita por Vigotsky. Este marco teórico asume, según Osman y Jouchoux (1998), los siguientes principios de enseñanza-aprendizaje:

- Los objetivos son ayudar a los estudiantes a ser pensadores independientes.

- En un ambiente de aprendizaje generativo, los aprendices relacionan, interpretan, explicar y reflexionan sobre la información.

- El aprendizaje generativo es fomentado por la instrucción anclada y el aprendizaje situado en contextos significativos de resolución de problemas.

- Diferentes tipos de materiales instruccionales permiten diferentes tipos de actividades de aprendizaje.

Crews y sus colegas resumen los objetivos de la instrucción anclada en los siguientes: "*to invite the kinds of thinking and reasoning necessary for students to develop (i) the general skills and attitudes necessary for effective problem solving, and (ii) the specific concepts and principles that allow them to think effectively about particular domains*" (Crews, Biswas, Goldman y Bransford, 1997, p. 143).

Esas propuestas están caracterizadas por contener información no relevante, que los alumnos deben desechar y por el énfasis en la existencia de más de un modo de enfocar la resolución de los problemas. Otra característica importante de este proyecto es que intenta presentar diferentes conceptos de modos diferentes en diferentes videos o incluso dentro de cada video (CTGV, 1993), intentando con ello favorecer la transferencia de los conocimientos.

Se propone que los alumnos trabajen en un ambiente colaborativo en pequeños grupos y presenten sus soluciones a los demás compañeros, que deben ser defendidas y discutidas. La colaboración en el conocimiento es una necesidad debido a que los problemas son complejos y es por tanto improbable que los estudiantes puedan resolverlos de modo individual (CTGV, 1993).

El papel del profesor es fundamentalmente guiar las interacciones entre estudiantes mientras se trabaja de modo cooperativo para resolver los problemas (Young, Nastasi y Braunhardt, 1996), y estos "*must be flexible; they cannot follow a fully-scripted lesson plan. In addition, teachers cannot be experts in each topic (...) so they must often become learners along with their students*" (CTGV, 1993, p. 54). Este enfoque favorece la "negociación de perspectivas", ya que los estudiantes deben "*pose and resolve discrepant viewpoints*" (Young, Nastasi & Braunhardt, 1996, p. 183); y también hace posible el andamiaje a través del apoyo experto-novel que se produce durante el trabajo colaborativo.

El andamiaje también está favorecido por la "*structure within the environment that constrained the types of interactions students could have with the problem, the local expert (teacher) and with one another*" (Young, Nastasi y Braunhardt, 1996, p. 127) y las sesiones de "embedded teaching" que se incluyen en los videos – que sólo pueden ser visionadas una vez que se los alumnos han detectado la necesidad de su uso en el contexto de la aventura cuyo problema tienen que resolver-, que se refieren a aspectos como, por ejemplo, cómo utilizar un compás, cómo estimar tamaños o cómo leer mapas topográficos (CTGV, 1993).

En los videos se proporcionan propuestas adicionales de resolución de problemas dirigidos a facilitar la transferencia de lo aprendido a situaciones análogas. Además, algunos videos exigen a los estudiantes que utilicen diarios para fomentar su reflexión sobre las experiencias vividas en la resolución del problemas (Young, Nastasi y Braunhardt, 1996) o que evalúan si necesitan comprender mejor un concepto para resolver un problema concreto (CTGV, 1993).

Se plantea también la posibilidad de que los alumnos lleven a cabo un trabajo más independiente a través de proyectos que ellos mismo planteen relacionados con las aventuras trabajadas. A este respecto, los autores añaden que "We have suggested to teachers that they allow students to guide the course of their learning to the extent that students are able" (CTGV, 1993, p. 54).

En resumen, podemos decir que las series Jasper utilizan un principio de aprendizaje cognitivo que es la instrucción anclada, convirtiéndose los materiales videográficos en las "anclas" (macro-contextos) para todo el proceso de aprendizaje e instrucción y están basadas también en los principios del aprendizaje colaborativo (Lincoln, 1998).

Sobre las diferencias que presentan estas series en relación con otras propuestas de instrucción anclada, el CTGV (1993) y Lincoln (1998) señalan que, a diferencia de otras propuestas de video, las series Jasper tienen como objetivo crear contextos interesantes, basados en la realidad, que fomenten la construcción activa del conocimiento por parte de los aprendices, siendo las anclas las historias en vez de lecturas, que permiten a los alumnos, guiados por los profesores, embarcarse en aventuras en que los conocimientos matemáticos son utilizados para resolver problemas.

En CTGV (1997) se indica que esta propuesta está dirigida por los siguientes principios instruccionales:

1. Un formato de aprendizaje generativo, que mejora la motivación permitiendo a los aprendices crear o "generar" la continuación de la historia resolviendo los problemas que se plantean al final de cada aventura.

2. Una presentación en vídeo, que mejora el aprendizaje comparándolo con el basado en el llevado a cabo a partir de libros de texto porque el video permite añadir información relacionada con el contexto, animaciones, gráficos, audio, simulaciones, ricos colores y realismo.

3. Un formato narrativo, que favorece la contextualización de la historia, el conocimiento de los protagonistas, las situaciones inicial y final, enriqueciendo el realismo y la autenticidad de la historia.

4. La complejidad del problema motiva al alumno, captando su interés y requiere un gran compromiso para continuar los pasos interrelacionados hasta llegar a resolver el problema.

5. El diseño incluye, durante las historias, datos tanto necesarios como innecesarios y por tanto exigen la exploración en un proceso de descubrimiento para identificar el problema y buscar qué datos son los pertinentes.

6. Se proponen oportunidades para que los alumnos lleven a cabo la transferencia de los conocimientos, que están basadas fundamentalmente en el hecho de que se presenta un mismo tema dentro de diferentes "aventuras". Por ejemplo, geometría aparece dentro de tres ambientes realistas diferentes, característica que permite a los estudiantes ver otras oportunidades donde pueden utilizar lo aprendido.

7. Se favorecen relaciones entre diferentes áreas curriculares dentro de una misma historia con contenidos que se aplican a otras áreas de estudio.

Respecto a su efectividad, Hickey, Moore y Pellegrino (2001) evaluaron la implementación de *The Adventures of Jasper Woodbury* en el contexto de un programa de reforma educativa de las matemáticas al nivel de distrito, basado en los estándares curriculares del National Council of Teachers of Mathematics de 1989. Participaron en el estudio 19 grupos de alumnos de quinto curso de cuatro colegios diferentes, que fueron clasificados en función de si en las aulas se empleaba el software de las series Jasper y el grado en que los profesores incorporaban reformas constructivistas en su currículum (considerando dos grupos en función de este aspecto: clases menos consistente vs. más consistentes).

En este estudio se utilizaron, para la evaluación de la eficacia del uso de las Series Jasper, las siguientes pruebas: "Motivational Experience and Motivational Belief surveys" y subsecciones de "Test Basic Skills" (ITBS) de Iowa. Se encontraron los siguientes resultados en relación con el uso de las series Jasper como complemento a la enseñanza tradicional:

- Los estudiantes que utilizaron las series Jasper:
  - Mejoran su rendimiento en resolución de problemas y en el bloque de Interpretación del ITBS;
  - Muestran un menor rendimiento en el bloque de Cálculo Matemático del ITBS.
  - Los alumnos de más alto rendimiento mejoran sus resultados en los bloques de Conceptos y Estimación del ITBS.
  - Es menos probable que estén motivados por el ego o por el deseo de hacerlo bien que los estudiantes que no lo utilizaron.

Entre los estudios sobre la eficacia de la utilización de las Series Jasper, también destacan los resultados del realizado en 1990. En él participaron diecisiete colegios de nueve estados con población muy diversa, incluyendo alumnos con necesidades educativas especiales. Las clases que participaron utilizaron tres o cuatro aventuras de la Serie Jasper durante un año académico y se compararon los resultados de esos alumnos con los de un grupo control, correspondiente a aulas donde no había sido utilizado este apoyo. Se comprobó que ambos grupos eran equivalentes en sus puntuaciones en las pruebas pre-test y utilizaron para evaluar la eficacia un conjunto de tests estandarizados.

Se detectan como resultados una mejora de los alumnos que han utilizado las Series Jasper en problemas escritos de un paso, de dos y que implican múltiples pasos, así como en la planificación de sub-objetivos y la comprensión de problemas. Además, en encuestas sobre actitudes, los estudiantes que han utilizado las Series Jasper muestran menos ansiedad hacia las matemáticas y una mayor probabilidad tanto de detectar la relevancia de las matemáticas en la vida diaria como de apreciar desafíos complejos.

Los resultados obtenidos en este estudio apoyan los beneficios de la instrucción anclada en situaciones basadas en la realidad para favorecer una mejor actitud hacia las matemáticas, así como unos mejores resultados en determinados aspectos de diferentes cuestionarios estandarizados, y en el uso de la planificación, que redunda en un mayor rendimiento al comprender y resolver problemas complejos –que implican varios pasos-.

Si bien creemos que son necesarios estudios más profundos, donde se analice, por ejemplo, de modo más profundo, el tipo de transferencia que se produce, en qué medida los alumnos aprender a resolver problemas o en qué grado estas se asemejan a las trabajadas durante el estudio, parece que las características básicas de este modelo, tales como enseñanza anclada y aprendizaje cooperativo son las que resultan más prometedoras.

Además es un hecho la dificultad de implementar en los sistemas de enseñanza, de modo organizado y explícito, un aprendizaje dirigido a fomentar la capacidad de resolución de problemas en los alumnos, como han mostrado numerosas investigaciones, así como los resultados que se obtienen en las diferentes evaluaciones internacionales sobre los aprendizajes de los alumnos.

Pasaremos a continuación a analizar cuáles son las causas fundamentales que se han detectado como origen de la gran dificultad de lograr dicho objetivo en las aulas.

3.3. LA DIFICULTAD DE ENSEÑAR EN TORNO A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En PISA (OECD, 2003b), donde han participado estudiantes de 15 años de 41 países, incluido España, se evalúa el nivel de conocimientos en relación con las matemáticas, la lectura, la ciencia y la resolución de problemas. La competencia matemática se define como "*An individual's capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make Web-founded judgements and to use the engage with mathematics in ways that meet the needs of that individual's life as a constructive, concerned and reflective citizen*" (p. 15); mientras que la competencia en resolución de problemas es descrita como "*An individual's capacity to use cognitive processes to confront and solve real, cross-disciplinary situations where the solution path is not immediately obvious and where the literacy domains or curricular areas that might be applicate are not within a single domain of mathematics, science or reading*" (p. 15).

Aquí podemos observar la tendencia que ya destacamos en el primer capítulo y que se refiere a la concepción del término problema. En efecto, en la definición de la competencia en resolución de problemas, se añade, al hecho de que el proceso de resolución no debe ser obvio para el resolutor, que dicha búsqueda implique varios dominios; es decir, que se trate de situaciones de la vida real.

Amplían el concepto de competencia matemática afirmando que "[it] *is concerned with the ability of students to analyse, reason, and communicate ideas effectively as they pose, formulate, solve and interpret solutions to mathematical problems in a variety of situations*" (OECD, 2003b, p. 15).

El "Danish KOM Project" (KOM: Competencias y el aprendizaje de las matemáticas), iniciado por el Ministerio de Educación danés, dirigido por el matemático, nacido en Copenhague, Mogens Niss[18] y cuyo objetivo fundamental es: "*to base the description of mathematics curricula primarily on the notion of 'mathematical competency`, rather than on syllabi in the traditional sense of lists of topics, concepts, and results*" (Niss, 2003, p.1), ha tenido un gran impacto de carácter internacional en relación con su descripción de la competencia matemática, compuesta a su vez por una serie de competencias (ver Niss, 1999), en la cual, por ejemplo, están basados los criterios de evaluación de la OECD/PISA de 2003:

1. *Pensar matemáticamente* (dominar modelos matemáticos de pensamiento), que implica el planteamiento de preguntas y los tipos posibles de respuestas que las matemáticas ofrecen.
2. *Plantear y resolver problemas*, identificándolos y especificando el tipo (puros o aplicados, generales o cerrados).
3. *Modelizar matemáticamente*, es decir, analizar y construir modelos matemáticos para describir situaciones.
4. *Razonar matemáticamente*, siguiendo y evaluando cadenas de argumentos, sabiendo qué es una prueba matemática y en que se diferencia de otros tipos de razonamientos, como por ejemplo, la heurística o reconociendo las ideas básicas de un argumento.
5. *Representar objetos y situaciones* matemáticos, comprendiendo y utilizando diferentes tipos de representaciones así como las relaciones entre las mismas, siendo capaces de elegir la más adecuada e intercambiarlas.
6. *Comunicar* en, con y sobre las matemáticas tanto con otros como con uno mismo con precisión teórica y técnica y en los diferentes formatos oral, visual y escrito.

[18] Mogens Niss es el responsable matemático de las evaluaciones del Informe PISA sobre rendimiento educativo en la OECD.

7. *Utilizar ayudas y herramientas*, conociendo sus propiedades y sus posibilidades y limitaciones de uso.

Aquí, como vemos, "plantear y resolver problemas" se incluye como un aspecto más de la competencia matemática, si bien no deja de ser a su vez el eje central de la competencia matemática.

Llinares (2003), tras describir en profundidad los diferentes aspectos o dimensiones que engloba el desarrollo integral de una competencia matemática, señala que "*Todas las capacidades anteriores se manifiestan en la habilidad de los estudiantes para plantearse, representarse y resolver problemas." (p. 9)*

Este autor (Llinares, 2003), reduce las dimensiones de la competencia matemática en cinco. Las cuatro primeras son: comprensión conceptual de las nociones, propiedades y relaciones matemáticas; el desarrollo de destrezas procedimentales; el pensamiento estratégico, concretado en formular, representar y resolver problemas; y la capacidad de comunicar y explicar matemáticamente. A estas añade, además, entre las dimensiones de ser matemáticamente competente, la formación de unas actitudes positivas en el alumno en relación con sus propias capacidades matemáticas, basada en una admisión de diferentes niveles de sofisticación en la respuesta que permita que alumnos con diferentes capacidades puedan general, en sus grupos, resoluciones a la tarea planteada.

El estudio de OCDE/PISA deja patente la conciencia por parte de la comunidad investigadora de la distancia entre lo que se evalúa en dicho estudio –"*la habilidad para utilizar su conocimiento para enfrentarse a los desafíos dela vida real*" - y lo que se enseña en las aulas –"*el grado en que dominan un currículum escolar específico*".

> *"PISA seeks to measure how well young adults, at age 15 – and therefore approaching the end of compulsory schooling – are prepared to meet the challenges of today's knowledge societies. The assessment is forward-looking, focusing on young people's ability to use their knowledge and skills to meet real-life challenges, rather than just examining the extent to which they have mastered a specific school curriculum. This orientation reflects a change in the goals and objectives of curricula themselves, which are increasingly concerned with how students use what they learn at school, and not merely whether they can reproduce what they have learned" (OECD, 2004b, p. 12).*

Estamos de acuerdo con Hersh (1986) cuando afirma que la concepción sobre la matemática afecta fuertemente a la concepción sobre cómo debe ser enseñada, pero otra cuestión son las dificultades que se encuentran cuando se intenta llevar a la práctica. ¿Qué ocurre entonces?, ¿por qué, a pesar de gran acuerdo que existe sobre el hecho de que la resolución de problemas debería ser el eje central del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, es tan difícil llevarlo a la práctica?

Blais (1988), analizando las dificultades para incorporar la resolución de problemas en las aulas, se lamenta de que la instrucción convencional en matemáticas "*permits, allows, and sometimes blatantly encourages algorithmic activity that is separate and isolated from the perception of essence*" (p. 627).

Osborne y Kasten (1980), en un trabajo donde exponen las conclusiones sobre encuestas realizadas investigadores y educadores sobre el papel de la resolución de problemas en las matemáticas, tras explicar que una de las conclusiones fundamentales es que los participantes indican que usar problemas como el vehículo para desarrollar o introducir tópicos matemáticos es la metodología que ven más adecuada para enseñar matemáticas, lanzan la siguiente pregunta: "*¿Qué variables situaciones en la escuela o en clase de matemáticas restringen el uso de los problemas para el desarrollo e introducción de conceptos matemáticos?*" (p. 57).

Arrieta (1989), tras analizar diferentes propuestas para el uso de la resolución de problemas como eje integrador de las matemáticas escolares, realiza la siguiente reflexión:

> *"Tanto en la investigación y descubrimiento de los conceptos, como en el desarrollo y en la construcción de estructuras así como en la ejercitación y práctica de las mismas, tiene sentido utilizar un enfoque centrado en la resolución de problemas. Si los conceptos matemáticos se han ido construyendo a lo largo de la historia como instrumentos para resolver determinados problemas, ¿por qué en el ámbito educativo no podemos efectuar la transposición didáctica para que los estudiantes sientan su misma necesidad?." (p. 64).*

Numerosas investigaciones se han preocupado por buscar las dificultades para lograr este objetivo en el papel del profesor. En un estudio reciente se concluyen las siguientes como las razones fundamentales por las que enseñar matemáticas a partir de la resolución de problemas se hace difícil para los docentes:

> *"1. Matemáticamente, porque los docentes deben poder percibir las implicaciones de las diferentes aproximaciones que realizan los alumnos, darse cuenta de si pueden ser fructíferas o no, y qué podrían hacer en lugar de eso.*
>
> *2. Pedagógicamente, porque el docente debe decidir cuándo intervenir, qué sugerencias ayudarán a los estudiantes, sin impedir que la resolución siga quedando en sus manos, y realizar esto para cada alumno o grupo de alumnos de la clase.*
>
> *3. Personalmente, porque el docente estará a menudo en la posición (inusual e incómoda para muchos profesores) de no saber. Trabajar bien sin saber todas las respuestas requiere experiencia, confianza y autoestima." (Villanova et al., 2003, p. 9).*

Villanova et al. (2003) también señalan que existe una necesidad urgente de formar a los profesores sobre cómo enseñar a través de la resolución de problemas y destacan tres aspectos principales en los que la investigación debe profundizar:

> *"1. El rol del docente en una clase centrada en la resolución de problemas: poca literatura relacionada con la investigación en la enseñanza a través de la resolución de problemas discute la especificidad del rol del profesor.*
>
> *2. Lo que realmente ocurre en las clases centradas en la resolución de problemas: no hay una descripción adecuada de lo que realmente ocurre en estas clases, a pesar de existir largas listas sobre los comportamientos de los docentes, sobre los comportamientos de los alumnos, sobre sus interacciones y la clase de atmósfera que existe.*
>
> *3. La investigación debe centrarse en los grupos y las clases como un todo, y no en los individuos aislados: gran parte de lo investigado en resolución de problemas se ha centrados en los procesos de pensamiento usados por los individuos mientras resuelven problemas. Sin embargo, queda pendiente profundizar la investigación centrándose en los grupos y en los ambientes de clase, indagando los procesos desde la perspectiva del aprendizaje situado."*

3.4. CONCLUSIONES

Realmente ¿qué papel puede o debe jugar la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas? Y una vez contestada esta pregunta deberemos plantearnos ¿cómo puede lograrse la implementación de un sistema de enseñanza dirigido a la resolución de problemas?

Las dificultades encontradas para lograr el objetivo de enseñar a resolver problemas matemáticos a pesar de los numerosos intentos y grandes esfuerzos dedicados a ello nos hizo plantearnos la necesidad de una modificación en el enfoque con que se trataba la cuestión, tal y como presentamos en el capítulo siguiente.

CAPÍTULO IV. UNA PROPUESTA DE INTEGRACIÓN DESDE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO

4.1. LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO ASPECTO INSEPARABLE DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA

4.1.1. La importancia del modelo de la actividad matemática

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante TAD), que fue iniciada por el matemático especialista en enseñanza de las matemáticas Yves Chevallard, plantea un modelo que describe el saber matemático en general, y el escolar en particular, como una actividad humana más, en términos de *praxeologías* (Chevallard, 1998b, 1999) que se desarrollan como respuestas a una cuestión o a un conjunto de cuestiones. Se puede afirmar por tanto que el saber matemático se construye en torno a la búsqueda de la respuesta a cuestiones.

En este proceso de respuesta a las cuestiones, como elementos constituyentes de las praxeologías, se distinguen dos aspectos inseparables: la "praxis" o "saber hacer", que engloba un cierto *tipo de problemas* que se estudian así como las *técnicas* para resolverlos; y el "logos" o "saber", que se refiere a *tecnología* necesaria para la descripción, explicación y justificación de las técnicas, así como a la *teoría*, o el argumento formal, que permite justificar dicha tecnología.

Una cuestión fundamental de esta teoría es que explicita cuál es el modelo de actividad matemática que toma como base de su planteamiento, aspecto que gran parte de los trabajos en torno a la resolución de problemas matemáticos no hacen. Si quisiéramos describir el modelo de la actividad matemática implícito comúnmente asumido por los planteamientos actuales -o que podemos denominar transparente por el hecho de que es asumido sin ningún planteamiento previo y/o sin explicitarlo-, podríamos decir que en él se consideran como aspectos "separados" la construcción del conocimiento y la resolución de problemas, considerando que por un lado se adquieren los conocimientos –a través de diferentes vías, entre ellas la resolución de problemas- y después se "aplican" dichos conocimientos para resolver problemas. Sin embargo, el modelo epistemológico de la TAD no separa estos dos aspectos de la actividad matemática, sino que postula que frente a una tarea problemática, una persona, a la vez, usa y construye matemáticas. De hecho, el término praxeología, como proceso y producto del aprendizaje, hace referencia explícita al hecho de que el saber y el saber hacer son ambos elementos constituyentes tanto de la actividad matemática desarrollada como del producto logrado como resultado, siendo además proceso y producto aspectos difícilmente distinguibles.

Resulta de especial interés para comprender este modelo de la actividad matemática su descripción en forma de "momentos del proceso de estudio", a través de los cuales se construyen las praxeologías, siendo proceso y producto dos caras de la misma moneda.

Se utiliza el término "estudio" para destacar, más allá de una intención de enseñanza y un resultado de aprendizaje, una asunción de responsabilidad por parte de la comunidad que lleve a cabo el estudio[19] en la construcción del conocimiento o, lo que es lo mismo, en la construcción de la respuesta a la cuestión en juego.

> *"Los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son aspectos particulares del proceso de estudio de las matemáticas, entendiendo la palabra "estudio" en un sentido amplio que engloba tanto el trabajo matemático del alumno, como el del matemático profesional que también "estudia" problemas de matemáticas."(Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 47).*

[19] Se utiliza el término "comunidad de estudio" en sentido amplio. Puede ser desde un alumno o una clase, hasta un grupo matemáticos profesionales o la sociedad en su conjunto.

Los “momentos” son concebidos como dimensiones que tienen lugar en el proceso de desarrollo de la actividad matemática. No son descritos con una intención de descripción cronológica, dado que la estructura no es lineal, sino que cada momento puede ser vivido en distintos tiempos, con diferentes intensidades y tantas veces como se necesite. Además, algunos momentos pueden aparecer simultáneamente.

La importancia fundamental de los “momentos” está que cada uno desempeña una función necesaria para un adecuado proceso de estudio, que lleve a la elaboración relativamente completa de las respuestas a las cuestiones planteadas como origen de su construcción.

Chevallard (1999, pp. 249-255) describe los momentos del proceso de estudio del siguiente modo:

- El *primer momento* es el del “primer encuentro” con la praxeología que va a ser construida. Éste puede tener lugar de diferentes modos, pero un modo de encuentro (o reencuentro) inevitable, a menos que uno se quede en la superficie de la praxeología, es el que consiste en encontrarla a través de al menos uno de los tipos de tareas que la constituyen.

- El *segundo momento* es el de la “exploración de un tipo de tareas”, de las constitutivas de la praxeología, y de una técnica relativa a ese tipo de tareas. Este segundo momento siempre debe existir emparejado al primero, dado que un tipo de problema se comienza a considerar tal cuando tiene lugar un intento de resolución del mismo, aunque sea a través de un embrión de técnica, que podrá ir evolucionando.

- El *tercer momento* de estudio se refiere a la “constitución del entorno tecnológico-teórico” relativo al tipo de problemas y la técnica correspondiente que se han desarrollado previamente. Este momento suele ir emparejado a cada uno del resto de momentos, ya que desde el primer encuentro se suele establecer una relación con el entorno tecnológico-teórico anteriormente elaborado o con gérmenes de un entorno por crear.

- El *cuarto momento* es el del "trabajo de la técnica", que debe a la vez mejorar la técnica, volviéndola más eficaz y fiable, lo que exige generalmente retocar la tecnología elaborada hasta entonces, y acrecentar la maestría que se tiene de ella. Este momento de puesta a prueba de la técnica supone en particular unos cuerpos de tareas adecuados tanto cualitativa como cuantitativamente.

- El *quinto momento* es de la "institucionalización", cuyo objetivo es precisar lo que es exactamente la praxeología elaborada, distinguiendo claramente, por una parte, los elementos que, habiendo concurrido a su construcción, no hayan sido integrados en ella; y, por otra parte, los elementos que entrarán de manera definitiva en la praxeología considerada y que por tanto deben ser "aprendidos".

- El *sexto momento* consiste en la "evaluación". Es el momento de evaluar lo aprendido, porque este momento de reflexión participa de hecho en la respiración misma de toda actividad humana.

Una actividad matemática completa partirá de problemas pertinentes, cuya resolución será tomada en serio y abordará todos los momentos del proceso de estudio. Este es el modelo de enseñanza-aprendizaje natural que defiende esta teoría. Así, no tiene sentido considerar el trabajo en torno a la resolución de problemas de modo complementario a "aprender matemáticas", porque la actividad matemática consiste en estudiar problemas, que incluye resolverlos y, además, otros muchos aspectos, como plantearlos, valorar la calidad de la respuesta, etc. –profundizaremos en esta cuestión en el Capítulo VI-.

4.1.2. Papel asignado a la resolución de problemas y "momentos del proceso de estudio"

Históricamente se han sucedido diferentes reformas de los sistemas de enseñanza de las matemáticas en función de los objetivos que planteaba la sociedad a la escuela. El modelo desarrollado por la TAD nos permite analizar las relaciones entre la concepción de la actividad matemática de la que se parte, el papel que se asigna a la resolución de problemas en el proceso de enseñanza-aprendizaje y los momentos del proceso de estudio que se consideran fundamentales o se ignoran en función de los aspectos anteriores.

Bajo la premisa de que un adecuado sistema de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, desde la TAD, debe abarcar todos los momentos del proceso de estudio, vamos a describir e interpretar, siguiendo un trabajo realizado por Gascón (1994), las principales formas "ideales"[20] de entender la resolución de problemas y su función en la enseñanza de las matemáticas para ir mostrando su relación con el énfasis o infravaloración de cada uno de esos momentos.

4.1.2.1. Paradigma "teoricista"

Se enmarcan en el paradigma teoricista las tendencias que, poniendo el acento en los conocimientos acabos y cristalizados en "teorías", consideran la resolución de problemas como un aspecto secundario dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, ignorándose las tareas dirigidas a la elaboración de estrategias de resolución de problemas.

En este paradigma los problemas tienden a ser trivializados y descompuestos en ejercicios rutinarios, es decir, en una cadena de simples ejercicios, lo que

[20] En el trabajo realizado por Gascón se insiste en que los diferentes paradigmas descritos no se corresponden necesariamente con formas que hayan existido o existan actualmente en estado puro sino formas ideales que aparecen frecuentemente entremezcladas en la práctica docente real.

conlleva no sólo la eliminación de la dificultad principal del problema sino, incluso, la desparición del propio problema (cf. Gascón, 1989, p. 3 y ss.).

Bajo este paradigma, donde se parte del supuesto implícito de que los problemas son algo ajeno a las teorías matemáticas o, en todo caso, no juegan ningún papel importante en su constitución, los problemas pueden utilizarse para aplicar o ejemplificar los conceptos teóricos, e incluso para motivarlos, introducirlos o justificarlos, pero con la única finalidad de que el alumno adquiera un cuerpo de conocimientos que conforman una teoría determinada de antemano. El proceso de construcción de la teoría no sólo no se cuestiona, sino que tiende a ignorarse por completo.

Por tanto, la característica esencial de este paradigma es que ignora absolutamente los procesos de la actividad matemática como tal y, en consecuencia, no concede ninguna importancia a la génesis y el desarrollo de los conocimientos matemáticos. Esto explica la preeminencia que se concede al momento del primer encuentro de los alumnos con los objetos matemáticos, considerados como algo estático que el profesor "muestra" a los alumnos en su estado definitivo, y que los alumnos deben aprender a reproducir.

La falta de interés por parte del paradigma teoricista en la construcción de técnicas y estrategias por parte de los alumnos y la ausencia de un cuestionamiento relativo a dichos conocimientos no sólo hace difícil el dominio de las técnicas y estrategias para ser aplicadas en la resolución de problemas, sino que también provoca dificultades en su simple memorización.

4.1.2.2. Paradigma "tecnicista"

Este paradigma, que podría situarse en el extremo opuesto del "teoricista", enfatiza los aspectos más rudimentarios del momento de "exploración de un tipo de tareas". Sí pone énfasis por tanto en la construcción de la técnica relativa a la resolución de un tipo de tareas, pero sin avanzar a la "constitución de un entorno tecnológico teórico" que permitiría posteriormente relacionar unas técnicas con otras permitiendo un dominio real de estas. Se trata por tanto de un dominio ficticio, que puede llevar a caer en una apología de las técnicas –especialmente de las algorítmicas-, como el objetivo último de la enseñanza-aprendizaje, lo que conduce a un "operacionismo" estéril.

Paradójicamente, el paradigma tecnicista comparte con el teoricista la trivialización de los problemas; en efecto, el énfatis exclusivo en las técnicas algorítmicas que lleva a considerarlas como principio y fin de la actividad matemática, hace olvidar los "auténticos" problemas, alejándose incluso del dominio de la aplicación de técnicas, cuya dificultad principal consiste en escoger las pertinentes y reconstruir la estrategia adecuada de resolución.

En el paradigma "tecnicista" la trivialización de las técnicas no es producto, como en el teoricista, de una descomposición abusiva de las estrategias necesarias para resolver un problema, sino de una concentración en el dominio de técnicas y estrategias algorítmicas que impide la preocupación por problemas matemáticos no rutinarios, donde los alumnos deben reconstruir el proceso de resolución.

Ambos paradigmas –teoricista y tecnicista- comparten además una concepción del proceso de enseñanza-aprendizaje que tiene en el conductismo su referencia más clara y que considera al alumno como una caja vacía que debe llenarse a lo largo de un proceso gradual que parte de los conceptos lógicamente más simples hasta llegar, paso a paso, a los sistemas conceptuales más complejos, o bien como un autómata que mejora el dominio de las técnicas mediante la simple repetición. Debido a ello, Gascón denomina a estos paradigmas "clásicos", en contraposición al paradigma modernista, que será descrito a continuación.

Una última cuestión relativa a la deficiencia de estos paradigmas en relación con el papel que asignan a la resolución de problemas es que consideran los problemas como si existieses aislados y descontextualizados. Esto implica, por una parte, que los problemas se tratan individualmente y no como representantes de ciertas clases de problemas –incluso en el caso "tecnicista", dado que no se relacionan unos tipos de problemas con otros, estos no adquieren la categoría de "tipos"-; y, por otra parte, que se tiende a presentar los problemas separados de contexto, sin conexión alguna con el sistema (matemático o extramatemático) a partir del cual surgen de manera natural en el seno de una actividad matemática desarrollada en torno a esos problemas, en vez de lo cual se utilizan en todo caso, dentro del paradigma tecnicista, para introducir un concepto o practicar su aplicación.

4.1.2.3. Paradigma "modernista"

Frente a las claras limitaciones de los paradigmas descritos anteriormente, el modernista pretende rescatar la actividad de resolución de problemas.

En concreto, este paradigma lucha contra una situación en la que los problemas se utilizan, engañosamente, como motivación o justificación de los nuevos conceptos o procedimientos para posteriormente pasar a ser ignorados dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje. Esto hace que el paradigma modernista, en un afán por dar el protagonismo que se merece a la resolución de problemas, tienda a identificar la actividad matemática con la exploración de problemas no triviales, obviando otros aspectos también importantes. En concreto, se caracteriza por conceder una predominancia absoluta al momento exploratorio –o de trabajo de la técnica-, lo que lleva a una identificación de enseñar y aprender matemáticas con esta actividad exploratoria frente a tareas problemáticas, obviando, por ejemplo, aspectos relativos al estudio de las relaciones entre tipos de problemas ya que, en defensa de una actividad realmente creativa, se olvida que el fundamento de la creatividad están en el dominio robusto de los conocimientos a aplicar. Se produce por tanto una situación paradójica en la que se pretende que los alumnos aprendan a resolver problemas pero no se les puede enseñar a resolver problemas porque se coartaría la actividad creativa del alumno. Parece estar por tanto en una interpretación superficial de la psicología genética que, frente a la directividad extrema de los paradigmas anteriores, se sitúa en el polo opuesto, defendiendo una construcción libre por parte del alumno.

En resumen, tanto los paradigmas clásicos como el modernista constituyen perspectivas reduccionistas extremas como consecuencia de situar el énfasis del proceso de enseñanza-aprendizaje en uno de los momentos de la actividad matemática, ignorando los demás.

A continuación se describirán otros paradigmas que son menos reduccionistas porque implícitamente relacionan –aunque sea parcialmente- al menos dos momentos distintos de la actividad matemática. Se trata de tendencias que, además, dan gran importancia a la gestión del grupo-clase dentro de su forma de entender y utilizar la actividad de resolución de problemas.

4.1.2.4. Paradigma procedimental

Este paradigma se preocupa explícitamente por guiar al alumno en la elección de la técnica adecuada para resolver un problema, cómo crear las condiciones que le permitan construir una estrategia de resolución mediante una combinación adecuada de técnicas. Se plantea así como objetivo principal del proceso de enseñanza-aprendizaje el dominio de sistemas estructurados de procedimientos.

Desde este paradigma no se pretende analizar el papel del momento teórico (que se pone entre paréntesis) en el aprendizaje de las matemáticas ni, en particular, su relación con la actividad de resolución de problemas. Se parte de un alumno que, se supone, ha adquirido los conocimientos necesarios y domina las técnicas básicas para abordar los problemas de una cierta clase. En estas condiciones iniciales, el paradigma procedimental se centra en una enseñanza dirigida a posibilitar el diseño, la utilización y el dominio de métodos de resolución de problemas elaborados a partir de las técnicas básicas citadas.

Se trata por tanto de un paradigma que conecta funcionalmente el momento exploratorio con algunos aspectos del momento de trabajo de la técnica. Sus limitaciones más importantes provienen del olvido del momento teórico y se ponen de manifiesto en que únicamente trata con clases prefijadas de problemas; no puede tomar en consideración el desarrollo de las técnicas en manos del alumno más allá de aquellas prefijadas ni la correspondiente ampliación de las clases de problemas explorados.

Dentro de este paradigma, la resolución de problemas se utiliza como una estrategia de enseñanza-aprendizaje encaminada a que el alumno llegue a dominar sistemas estructurados de procedimientos (o técnicas) matemáticas que pueden cristalizar, o no, en un método de resolución. Este punto de vista comporta necesariamente trabajar con "clases de problemas" y pone de relieve una cuestión central: ¿cómo determinar la amplitud más adecuada en cada caso de la clase de problemas que se tomará como base para enseñar un método de resolución?

> *Si se quieren enseñar, por ejemplo, métodos de resolución de "problemas de contar", ¿qué clase de problemas es la más adecuada?", ¿la de problemas de variaciones?, ¿la de problemas de contar "simples" (que la incluye) o, incluso, la de todos los problemas7 de contar "descomponibles"? ¿Cómo se relacionan entre sí los correspondientes métodos de resolución? (cf. Gascón, 1989, pp. 59-65).*

El paradigma procedimental también se puede interpretar como una complementación del paradigma tecnicista que sólo toma en consideración clases algorítmicas de problemas, excesivamente pequeñas, y como una reacción al paradigma modernista que parece no querer poner ningún límite al universo de problemas potencialmente utilizables, en una exploración descontrolada que -en la práctica- equivale a considerar cada problema absolutamente aislado de los otros.

4.1.2.5. Paradigma "constructivista"

Se sitúan en este paradigma todas aquellas tendencias que utilizan la resolución de problemas con el objetivo de que los alumnos puedan construir nuevos conocimientos.

Se trata de un paradigma muy complejo donde se pueden enmarcar muchas maneras de entender la resolución de problemas. Este paradigma se fundamenta en una teoría del aprendizaje, más o menos explícita, dependiendo de los casos, pero que hunden sus raíces en la psicología genética y la psicología social (cf. p.e., Arsac, 1988, pp. 94-95), que le proporcionan una base mucho más sólida que la que poseen los paradigmas anteriormente descritos.

Para simplificar, tomaremos la caracterización que hace Douady (1986) de este tipo de tareas, utilizando dicho autor la denominación "situación problema" -no sin antes recordar que eso no significa que se enmarque a este autor en este paradigma exacta y exclusivamente, sino que se están describiendo situaciones ideales que aparecen relacionadas en la práctica real-:

(i) El alumno ha de poder introducirse en la resolución del problema y ha de poder considerar lo que es una solución posible.

(ii) Los conocimientos del alumno han de ser, en principio, insuficientes para resolver el problema.

(iii) La "situación problema" ha de permitir al alumno decidir si una solución determinada es correcta o no.

(iv) El conocimiento que se desea que el alumno adquiera ("construya") ha de ser la herramienta más adecuada para resolver el problema al nivel de conocimientos del alumno.

(v) El problema se ha de poder formular en diferentes "cuadros" (por ejemplo, cuadro físico, geométrico, algebraico) entre los que han de poderse establecer correspondencias.

Un ejemplo de situación problema (citado por Gascón, 1994, tomado de Arsac et al., 1988, p. 106) -que es propuesto a los alumnos antes de estudiar la simetría octogonal pero después de manipular objetos geométricos, trazar rectas perpendiculares, rectas paralelas, etc.- mediante la cual se pretende que el alumno se construya una imagen mental de la mediatriz como recta que divide el plano en dos semiplanos; es el siguiente:

> *Una curva XY es la trayectoria de una nave espacial que puede comunicar con las estaciones de radio situadas en los puntos A y B. La nave sólo recibe la señal de la estación más próxima.*
>
> *¿Sobre qué parte de la trayectoria se comunicará con A? ¿Y con B? Se lanza una segunda nave espacial cuya trayectoria se puede trazar de manera arbitraria. Contestar a las mismas preguntas anteriores. Volver a empezar con una tercera nave espacial. Si ahora tenemos tres estaciones a la vez A, B y C (y la nave sólo se comunica con la más próxima), determinar la porción de la trayectoria sobre la cual se comunicará A, con B y con C.*

El avance fundamental de este paradigma consiste es que relaciona funcionalmente el momento exploratorio con el momento teórico, dando gran importancia al papel de la actividad de resolución de problemas en la génesis de los conocimientos. Está basado en una base psicológica sólida y, además, en un modelo epistemológico –de la génesis del conocimiento matemático- mucho más elaborado. Sin embargo, no se explicita la importancia del trabajo de la técnica en la resolución de problemas en particular y en el aprendizaje de las matemáticas en general. A pesar de que los problemas se presentan contextualizados, haciendo a menudo referencia a otros contextos matemáticos o extramatemáticos, se sigue produciendo un aislamiento de los problemas; es decir, se sigue sin trabajar explícitamente el conocimiento condicional relativo a tipos de problemas, que constituiría la base de la metacognición, permitiendo determinar cuándo es conveniente aplicar un conocimiento concreto para resolver un problema, así como llevar a cabo su aplicación adaptada a las características específicas de la tarea.

Un avance en este sentido lo constituye en planteamientos como los del Grupo Vanderbilt una intención explícita de reflexionar sobre cuáles son las relaciones entre los modos de resolución de los diferentes tipos de tareas; pero estos intentos se encuentran con numerosas dificultades debido a que ese conocimiento no es objeto de enseñanza explícita y estructurada, sino que se deja en manos de la reflexión por parte de los alumnos.

4.1.2.6. Paradigma de la modelización

Podríamos trazar una línea relativa a la importancia que se da a la contextualización en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas que, de modo creciente, empezaría en el paradigma teoricista, pasando por el constructivista y desembocando en el paradigma de la modelización. La separación entre los problemas de matemáticas y el sistema (matemático o extramatemático) a partir del cual los problemas se generan de una manera natural- a lo largo de una determinada actividad matemática- decrece hasta el punto de llegar a identificarse- en el paradigma de la modelización- el conocimiento del sistema modelizado con el objetivo de la resolución de los problemas resultantes en el modelo.

Se denomina paradigma de la modelización a aquel para el cual los problemas sólo adquieren pleno sentido en el contexto de un sistema y, según el cual, la resolución de un problema pasa siempre por la construcción explícita de un modelo del sistema subyacente. En este paradigma el objetivo de la actividad matemática –y por tanto, en gran parte, de la enseñanza de las matemáticas- es la obtención de conocimientos relativos a los sistemas modelizados que, en principio, pueden ser tanto extramatemáticos como matemáticos.

La actividad de resolución de problemas se engloba, por tanto, en una actividad más amplia que podemos llamar actividad de "modelización matemática" y que se puede esquematizar en cuatro estadios que, sin entrar en detalles, intentando tan sólo mostrar la sucesión temporal que tiene lugar, pueden ser (Gascón, 1994, pp. 10-12):

(1) El punto de partida o primer estadio lo constituye una situación problemática en la que pueden formularse preguntas y conjeturas, normalmente con poca precisión, y en la que se pueden llegar a detectar y formular provisionalmente algunos problemas matemáticos.

(2) El segundo estadio lo engloba la definición o delimitación del sistema subyacente a la situación problemática y la elaboración del modelo matemático correspondiente. El disponer del lenguaje y de las técnicas propias del modelo matemático permite reformular matemáticamente los problemas que han sido enunciados provisionalmente en el estadio anterior.

(3) El tercer estadio incluye, además del trabajo técnico dentro del modelo, la interpretación de este trabajo y de sus resultados dentro del sistema modelizado.

(4) En el último estadio de la actividad de modelización matemática se pueden enunciar problemas nuevos, cuya resolución permitirá responder a cuestiones-relativas al sistema- cuya formulación era, cuanto menos, poco probable antes de la elaboración del modelo matemático.

El paradigma de la modelización engloba, en cierta forma, al constructivista, ya que, cómo éste, utiliza la actividad de resolución de problemas para que el alumno "construya" conocimientos nuevos. Pero el paradigma de la modelización profundiza en el significado de construir conocimientos nuevos al referirlos a sistemas concretos y operativizar esta construcción mediante la elaboración de un modelo matemático. Además, esta forma de entender la resolución de problemas, lleva hasta sus últimas consecuencias la contextualización que era un factor incipiente en el paradigma constructivista.

4.1.2.7. Hacia un paradigma integrador

Se destacan aquí aquellas aportaciones que, desde la TAD, constribuyen directamente a conformar un nuevo modo de interpretar la resolución de problemas y su papel en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

En primer lugar, se considera que todo problema de matemáticas es el punto de partida de un (virtual) campo de problemas. Los problemas se pueden agrupar en función de las técnicas y estrategias matemáticas que se pueden utilizar para estudiarlos. Esta consideración de tipos de problemas implica caracterizarlos y diferenciarlos de otros tipos. De este modo, explicitando las características de cada tipo de problemas y sus relaciones con otros tipos, y englobando incluso los tipos en clases más amplias, es posible explicitar en gran medida y planificar explícitamente la enseñanza del conocimiento condicional, el cual llevará al alumno a saber, por ejemplo, elegir la técnica más adecuada para resolver la tarea en cuestión, así como llegar a reconstruir una técnica para adaptarla en función de las circunstancias o combinarlas para elaborar técnicas más complejas.

En segundo lugar, se postula que el proceso de estudio de campos o tipos de problemas conlleva un trabajo explícito de evolución interna de las técnicas en manos del alumno que provoca nuevas necesidades teóricas, es decir, la necesidad de ir ampliando el marco teórico que explica y justifica las elecciones y variaciones que realiza a medida que los campos de problemas se van ampliando a su vez.

Lo anterior pone de manifiesto que un campo de problemas no es nunca (salvo en los casos triviales) un conjunto completamente definido; se va constituyendo a medida que se desarrollan las técnicas y estrategias. Si a lo largo de este proceso cristalizan métodos de resolución (algorítmicos o no), entonces pueden estudiarse clases de problemas definidos con más precisión dentro del campo.

La actividad de resolución de clases de problemas se enmarca, por tanto, en la actividad, más general, de estudio de campos de problemas. Así, este nuevo paradigma contiene el cierta forma al paradigma procedimental y lleva hasta sus últimas consecuencias el análisis de las funciones del momento de la técnica dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje.

En tercer lugar, se considera que toda actividad matemática puede ser interpretada como un proceso de estudio de campos de problemas en el sentido explicado anteriormente. En particular, la actividad de producción de teorías -en el sentido de modelos matemáticos amplios en los que se interpretan e interrelacionan diversos campos de problemas y las correspondientes técnicas de estudio- se puede analizar como un proceso de construcción de campos de problemas "teóricos" que, de nuevo, requiere técnicas específicas para su estudio y, consiguientemente, de teorías que den razón de estas técnicas. La actividad matemática se muestra así como esencialmente recursiva y en la que no es posible hacer una distinción absoluta entre práctica matemática y teoría matemática; sólo puede hacerse una distinción relativa y hablar de la teoría asociada a una cierta práctica matemática.

En resumen, este paradigma pone de manifiesto una interacción dialéctica entre el desarrollo de las técnicas matemáticas, la evolución de los campos de problemas y la construcción recursiva de las teorías matemáticas asociadas. En particular, el hecho de que este paradigma considere las teorías matemáticas como modelos (matemáticos) del sistema subyacente a ciertos campos de problemas permite afirmar que, potencialmente, también engloba el paradigma de la modelización. Desde esta perspectiva, enseñar matemáticas consistirá en hacer que el alumno sea capaz de estudiar ciertos campos de problemas de manera autónoma. Esto es, posibilitar que el alumno llegue a dominar e incluso a producir –en función de su zona de desarrollo próximo, técnicas de estudio de ciertos campos de problemas. Eso no significa que se propugne una concentración de los esfuerzos del sistema de enseñanza de las matemáticas en un aspecto parcial de la actividad matemática. Al contrario, el "estudio de campos de problemas" en el sentido que se ha explicado, contiene estrictamente e integra todas las actividades matemáticas que se han destacado unilateralmente en los diversos paradigmas descritos.

4.2. LA INTEGRACIÓN DE LO METACOGNITIVO EN LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA

A partir de la consideración de la actividad matemática como actividad humana -donde el conocimiento, como saber, y los problemas, como origen "natural" de la construcción de ese saber, son indisolubles- los aspectos metacognitivos pueden ser definidos como integrantes también inseparables de la actividad matemática. En una primera aproximación, podríamos plantear que el conocimiento metacognitivo hace referencia a un conocimiento en proceso de creación y que podría decirse, en términos de otros modelos, que todavía no ha alcanzado en consecuencia el estatus de cognitivo. En términos de la TAD, estos conocimientos pueden ser explicitados en términos de praxeologías de complejidad creciente, correspondiendo al ámbito metacognitivo aquellos aspectos que, a modo de andamieaje, corresponden a una praxeologías todavía en construcción.

No debemos olvidar que, dado que proceso y producto –esto es, estudio y praxeología construida- se codeterminan -hasta el punto de que incluso en ocasiones es difícil, como veremos, determinar qué aspectos de la actividad matemática forman parten de cada uno-, es fundamental tomar en consideración que el tipo de praxeologías a construir mantienen una estrecha relación con la existencia en el proceso de los diferentes momentos del proceso de estudio y del énfasis puesto en alguno de los momentos sobre los otros.

Para entender en mayor medida en qué consiste dicho conocimiento, como parte integrante de la propia actividad matemática, mostraremos a continuación los tipos de praxeologías que describe Chevallard (1995, 1998b) a través de sus componentes. Pero será importante tener en cuenta también que esa descripción debe completarse con los rasgos principales de las relaciones que se establecen necesariamente entre dichos componentes, lo que podría denominarse la dinámica interna de las praxeologías.

Es necesario profundizar previamente en algunas nociones primitivas que fueron presentadas durante la presentación inicial de la TAD y que serán utilizadas en la descripción de los tipos de praxeologías, para lo cual utilizaremos el trabajo llevado a cabo por Fonseca (2004) en su tesis doctoral.

La noción "tipos de tareas" es muy general e incluye cualquier tipo de tareas, en este caso matemáticas, consideradas en la institución de referencia, la escolar en el caso que nos ocupa.

Se postula que la realización de cualquier tipo de tareas requiere poner en funcionamiento una técnica, esto es, una "manera de hacer sistemática y compartida", que depende obviamente del tipo de tareas y de la institución en que nos situemos. Esto no significa que dado un tipo de tareas y una institución de referencia exista una única técnica que viva en dicha institución y que permita realizar (alguna de) las tareas de ese tipo, sino que lo que quiere destacar esta afirmación es que, para una misma tarea, las técnicas que se consideran adecuadas para su resolución dependen de la institución. Por ejemplo, existen tareas matemáticas que, según sean planteadas en el ámbito de la enseñanza secundaria o el ámbito universitario, se consideran adecuadas diferentes técnicas para su resolución. Se constituye así el bloque práctico-técnico, que está formado por un tipo de tareas y una técnica que la institución considera pertinente para llevar a cabo tareas de ese tipo. Es importante subrayar que cada técnica concreta sólo permite realizar un pequeño subconjunto de tareas de un determinado tipo, fracasando en la realización de las restantes tareas de ese tipo.

Estas técnicas matemáticas están claramente limitadas. Por ejemplo, las técnicas para descomponer un polinomio en factores primos tienen un ámbito de validez muy restringido y las técnicas que permiten buscar una base en el caso de espacios vectoriales de dimensión finita, no siempre son aplicables en el caso de espacios vectoriales de dimensión infinita. Estos mismo ejemplos muestran que una técnica matemática no es, excepto rarísimas excepciones, ni algorítmica ni casi-algorítmica.

Las descripciones anteriores no pretenden tener el rango de definiciones. De hecho, la noción de "tarea" y "técnica" son primitivas, esto es, no definibles mediante nociones más elementales, en el estado actual de desarrollo de la TAD. Lo mismo hay que decir de las nociones de "tecnología" y "teoría", que serán descritas a continuación.

El bloque práctico-técnico no puede vivir aisladamente en una institución. Requiere la existencia de un "discurso racional" (logos) que justifique la técnica y que muestre su pertinencia para llevar a cabo el tipo de tareas. Se denomina tecnología de una técnica a ese discurso. Así, por ejemplo, el teorema de Bolzano puede hacer el papel de elemento tecnológico (esto es, componente de la tecnología) de una de las técnicas que se utilizan inicialmente para aproximar las soluciones de una ecuación.

Otras funciones de la tecnología son: explicar y hacer inteligible el funcionamiento de la técnica –por ejemplo, cuándo y por qué es adecuada para resolver un tipo de tareas y cuál es su grado de eficacia-, relacionarla con otras técnicas y producir nuevas técnicas. Aunque profundizaremos en ello más adelante, podemos adelantar que en este nivel se encuentra un tipo de conocimiento que se define, en términos de otras teorías, como metacognitivo.

En este punto ocurre un fenómeno importante: la sub-explotación de las tecnologías matemáticas disponibles en las instituciones docentes, tanto desde el punto de vista de la justificación como de la explicación y, sobre todo, de la producción de nuevas técnicas. Es muy habitual que cada institución reconozca únicamente un pequeño número de técnicas y excluya otras alternativas que pueden existir en otras instituciones (Chevallard, 1999).

El discurso tecnológico contiene siempre afirmaciones más o menos explícitas que, a su vez, pueden requerir una justificación. Se pasa entonces del nivel de justificación-explicación-producción de la técnica (que es el nivel de la tecnología) al nivel de justificación-explicación-producción de la tecnología, que se refiere al componente teórico de la praxeología. Este crecimiento de la praxeología implica un aumento del tamaño y constitución de los tipos de problemas que se estudian. Aquí podemos hablar, como desarrollaremos más adelante, de un nivel de conocimiento metacognitivo superior a los anteriores, que hace posible las relaciones entre campos de problemas, así como la elaboración de estrategias complejas de resolución.

La teoría juega, respecto a la tecnología, el mismo papel que ésta jugaba respecto a la técnica. Así, por ejemplo, el teorema de Bolzano, considerado como un elemento tecnológico, puede ser justificado, a su vez, en una teoría axiomática de los números reales que contenga el axioma del supremo.

Las nociones de "tarea", "técnica", "tecnología" y "teoría" son doblemente relativas. En primer lugar, son relativas a la institución de referencia. Esto significa, como ya adelantábamos, que lo que es considerado como una tarea (o técnica, o tecnología o teoría) en una institución no tiene por que serlo en otra institución. De hecho, en una institución dada únicamente pueden considerarse como "tipos de tareas" aquellas para las que se dispone de algún tipo de técnica con su entorno tecnológico teórico más o menos explícito. Así, por ejemplo, en Secundaria la descomposición en factores primos de números "pequeños" es un tarea, pero la de números "grandes" no lo es. Por simetría, podría decirse que las técnicas siempre responden a algún tipo de tareas planteables en dicha institución (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

En segundo lugar, las nociones citadas son relativas a la función que desempeña cada objeto matemático en una actividad matemática determinada. Así, en una institución un mismo objeto matemático puede desempeñar diversas funciones. Por ejemplo, en la Universidad, el teorema de Bolzano, puede cumplir la función de técnica, como elemento tecnológico teórico o incluso como parte de una tarea.

4.2.1. Complejidad creciente de las praxeologías: explicitación del ámbito metacognitivo dentro de la actividad matemática

Mostraremos aquí cómo desde el modelo de la actividad matemática que plantea la TAD se puede describir el conocimiento metacognitivo en función de la "complejidad creciente" de las praxeologías que se construyen durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Esto nos permitirá explicitar en qué consiste ese conocimiento y en consecuencia hará posible su enseñanza explícita.

Pasaremos a describir las praxeologías en función de su "complejidad creciente" (Chevallard, 1999), para ir mostrando la relación entre estas y lo que hemos considerado diferentes niveles de conocimiento metacognitivo.

(a) Una praxeología es *puntual* en una institución si está generada por lo que se considera en una institución como un único tipo de tareas. Resulta por tanto que la praxeología es relativa a la institución considerada y está definida, en principio, a partir del bloque práctico-técnico, es decir, por el tipo de tareas y las técnicas correspondientes para su resolución.

Podemos citar muchos ejemplos de praxeología concretas que viven dentro del nivel de la enseñanza Secundaria, tantos tipos como tareas. Por ejemplo, resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas o determinar la ecuación de una recta dada por un punto y un vector director. Pero para describir adecuadamente cada una de las praxeologías puntuales sería necesario detallar con cierta precisión el tipo exacto de tareas que se están considerando y las pequeñas variaciones de la técnica que se consideran en la institución de referencia como una "misma técnica" y, en consecuencia, en qué punto una determinada variación de una técnica concreta ya no puede ser considera como la "misma técnica". Esto nos permitiría determinar las praxeologías puntuales que aparecen y cuál es su relación con la praxeología puntual inicial.

En el momento en que emergen de modo incipiente los tipos de tareas y sus relaciones con otros tipos podemos hablar, en términos que no utiliza la TAD, de un primer nivel de planteamiento metacognitivo que surge de la necesidad de determinar qué tipo de tareas son resolubles por qué tipo de técnicas *-nivel* que podemos denominar *intra-puntual-*, así como las relaciones que pueden establecerse entre las técnicas correspondientes a diferentes tipos de tareas *–nivel inter-puntual-*. El conocimiento del nivel inter-puntual, que en este momento está sólo emergiendo, se consolidará en las praxeologías de nivel superior, esto es, las praxeologías locales.

(b) Una praxeología es *local* en una institución si se obtiene como resultado de la integración de diversas praxeologías puntuales. Cada praxeología local está caracterizada por una tecnología que sirve para justificar, explicar, relacionar entre sí y producir las técnicas de todas las praxeologías puntuales que la integran. En general, las praxeologías puntuales se integran en praxeologías locales para poder dar respuesta satisfactoria a un conjunto de cuestiones problemáticas que no se podían resolver completamente en ninguna de las praxeologías puntuales de partida. A lo largo del proceso de estudio, se va desarrollando un discurso tecnológico común que permite describir, interpretar, justificar, explicar y relacionar entre sí a las antiguas técnicas matemáticas, así como producir técnicas nuevas. De este modo, en el momento en que organizan las praxeologías puntuales en locales, a través de la tecnología que les es común, se vuelve explícito en conocimiento metacognitivo inter-puntual, pasando a ser intra-local. Esto tendrá una importancia fundamental para determinar las relaciones entre las técnicas de resolución de cada tipo de tareas que lo constituyen y, en consecuencia, para relacionar las técnicas necesarias para resolver una tarea que implique una combinación de las mismas constituyendo técnicas nuevas.

Una cuestión importante en relación con las praxeologías locales es que, dado que su funcionalidad viene dada por la respuesta a un tipo de cuestiones que no podían ser resueltas en las praxeologías puntuales anteriores, estas cuestiones problemáticas se postula que deberían constituir la "razón de ser" que diera sentido a su construcción. Pero, paradójicamente, en determinadas instituciones se produce el siguiente fenómeno: a medida que las praxeologías puntuales se integran para construir praxeologías más complejas, la relación entre la cuestión que les da sentido y la respuesta tiende a invertirse hasta el punto de que las razones de ser (o conjunto de cuestiones problemáticas que le dan sentido porque son cuestiones a las que ésta responde) tienen tendencia a desaparecer (Chevallard, 1999). Entre los múltiples ejemplos de este fenómeno se puede citar el caso de la geometría en la enseñanza secundaria española. En efecto, aunque la problemática de la geometría sintética que se estudia en la enseñanza secundaria obligatoria en España (12-16 años) podría dar sentido a la geometría analítica que se estudia en Bachillerato (16-18 años) –puesto que las técnicas analíticas permiten resolver muchas de las cuestiones geométricas que no podían abordarse con las técnicas sintéticas, lo que permitiría englobarlas en una praxeología local- lo cierto es que la geometría analítica se presenta de una forma completamente desconectada de la problemática de la geometría sintética que en Bachillerato ya ha desparecido completamente (Gascón, 2002a).

Una característica muy marcada del discurso tecnológico asociado a una praxeología local es la preponderancia de la función justificativa (que asegura que cada técnica sirve para lo que ha de servir y da el resultado que debe dar) por encima de la función explicativa (que debería aclarar por qué la técnica es correcta, pertienente y eficaz) que se corresponde con el conocimiento condicional, esto es, metacognitivo. Este fenómeno tiene relación con el hecho de que en cada institución, para cada tipo de tareas, se tiende a privilegiar una única técnica que es considerada en dicha institución como "la manera evidente e incuestionable de resolver las tareas del tipo en cuestión". Esta técnica privilegiada por la institución, al ser incuestionable y carecer de técnica rival, puede llegar a asumir un carácter autotecnológico[21], dificultando así su desarrollo (porque se ignoran sus limitaciones) y su integración en praxeologías más amplias.

(c) Una praxeología es *regional* en una institución si se obtiene mediante la coordinación, articulación y posterior integración, alrededor de una teoría matemática común, de diversas praxeologías locales. La reconstrucción institucional de una teoría matemática requiere elaborar un lenguaje común que permita describir, interpretar, relacionar, justificar y producir las diferentes praxeologías locales que integran la praxeología regional.

También podemos citar etiquetas que aluden a praxeologías regionales, como hicimos con respecto a las puntuales. Por ejemplo, la teoría de las ecuaciones dierenciales, el álgebra lineal, la teoría de la medida o la teoría de funciones analíticas. Pero el hecho de que existan como "etiquetas" no implica que estén construidas en toda su amplitud. Es decir, para que una organización regional exista en una institución será necesario que se expliciten, además de la teoría unificadora, las praxeologías locales que la integran, las relaciones que se establecen entre ellas y las nuevas cuestiones problemáticas que pueden abordarse con su construcción siendo que no podía hacerse con la existencia independiente de las praxeologías puntuales que la integran. Si

[21] Son técnicas que "se justifican a sí mismas" o, en otros términos, técnicas tan *naturalizadas* y *transparentes* para la institución que no parecen "necesitar" ninguna justificación externa a ellas mismas.

esto se hace, con ello se amplían las relaciones entre tipos de tecnologías, convirtiéndose el conocimiento que podríamos denominar metacognitivo de nivel inter-local en conocimiento explícito al nivel *intra-regional.*

La consideranción de diferentes niveles de conocimiento metacognitivo –en función de la complejidad de las praxeologías que se van construyendo y que se va convirtiendo en explícito a medida que nos situamos en una praxeología de mayor nivel- permite que dicho conocimiento sea objeto de enseñanza explícita y por tanto aumentará las probabilidades de aprendizaje por parte de los alumnos.

Es importante destacar la noción de "completitud relativa" de las praxeologías. Considerándose la praxeología local como la unidad mínima necesaria para la resolución de problemas, describiremos la caracterización que de este tipo de praxeologías, respecto a su completitud relativa, hacen Bosch, Fonseca y Gascón (2004) y que está basada en que existen praxeologías locales más o menos "completas" que otras en función del grado en que sus componentes cumplen las condiciones descritas por los siguientes indicadores siguientes: (1) Integración de los diferentes tipos de tareas; (2) Existencia de diferentes técnicas para realizar un mismo tipo de tareas; (3) Independencia (relativa) entre las técnicas matemáticas y los ostensivos que se utilizan para describirlas y aplicarlas; (4) Posibilidad de invertir las técnicas para realizar las tareas "inversas"; (5) Existencia de las tareas consistentes en interpretar el resultado de aplicar las técnicas; (6) Existencias de tareas matemáticas "abiertas" y (7) Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica matemática.

En resumen, se puede explicitar el conocimiento metacognitivo como aquellos aspectos que, inicialmente, pretende relacionar diferentes variaciones de una misma técnica (relaciones internas de las praxeologías puntuales), tipos de técnicas (relaciones entre praxeologías puntuales), diferentes tipos de tecnologías (relaciones entre praxeologías locales), o diferentes tipos de teorías (relaciones entre praxeologías globales). Podríamos entonces hablar de diferentes niveles de metacognición dentro del campo de las matemáticas y, lo más importante, ese conocimiento puede ser explicitado y, en consecuencia, puede constituirse en objeto de enseñanza.

4.2.2. La necesidad de conectar niveles para la integración de lo metacognitivo en la actividad matemática

A partir de la concepción de la enseñanza-aprendizaje como un proceso de reconstrucción de praxeologías cada vez más amplias y completas y por tanto fuertemente integrado y articulado, la dificultad de enseñar a resolver problemas puede interpretarse como un aspecto y hasta como un efecto del fenómeno de la *desarticulación o atomización escolar del curriculum de matemáticas* descrito por Chevallard, Bosch y Gascón (1997, pp. 119-136). La defensa que hacen de esta afirmación puede resumirse del siguiente modo (Bosch y Gascón, 2004, pp. 10-12):

(a) En la enseñanza de las matemáticas en el nivel de Primaria y Secundaria, pero también de manera reciente en la Universidad, existe una tendencia a "atomizar" los contenidos matemáticos en una serie de *cuestiones puntuales* relativamente independientes entre sí. La desconexión entre diferentes cuestiones es tal que se corre el peligro de convertir la enseñanza de las matemáticas en un conjunto de anécdotas o "adivinanzas" aisladas. Correlativamente, las técnicas matemáticas que se utilizan aparecen también aisladas y presentan una gran rigidez que se manifiesta especialmente en el paso de Secundaria a la Universidad y, últimamente, en el paso de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (12-16 años) al Bachillerato (16-18 años). Existen pruebas empíricas de los diferentes aspectos de esta rigidez extraídas tanto de la actividad matemática de los alumnos como de los libros de texto y demás documentos curriculares (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004). Podríamos resumir esta tendencia diciendo que en la práctica matemática escolar se observa una influencia creciente del tecnicismo que identifica implícitamente "enseñar y aprender matemáticas" con "enseñar y aprender técnicas simples" (principalmente algorítmicas) olvidando los "auténticos" problemas que son aquellos cuya dificultad principal consiste en escoger las técnicas adecuadas y adaptar a la situación para construir una estrategia de resolución. Estas tendencias tecnicistas chocan frontalmente con la ideología modernista imperante en las instituciones docentes y que es, en definitiva, la ideología que sustenta el movimiento que identifica "enseñar y aprender matemáticas" con "enseñar y aprender una actividad exploratoria libre y creativa de problemas no triviales" (Gascón 2001a).

(b) También se observa una fuerte desconexión entre los sectores de una misma área de la matemática escolar –como, por ejemplo, entre la geometría sintética y la geometría analítica- y entre las diferentes áreas de la matemática escolar –como, por ejemplo, entre las áreas de "Geometría" y "Funciones y gráficas" en la Enseñanza Secundaria Obligatoria española (12-16 años). En el caso de las geometrías analítica y sintética, y a pesar de la continuidad y hasta complementariedad que existe entre ambas, el hecho es que continúan estudiándose completamente separadas a lo largo de la Enseñanza Secundaria (sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato). La "tozudez" de este hecho, que se mantiene inalterable a lo largo de las últimas reformas educativas, parece dar a entender que no se trata de una separación accidental, sino que responde a un fenómeno más profundo y que, por tanto, merece ser indagado (Gascón, 2001b). Parece razonable suponer que la desarticulación de estos niveles "superiores" dificultará enormemente la construcción y utilización de estrategias complejas de resolución de problemas, teniendo en cuenta que dicha construcción requiere combinar técnicas provenientes de diferentes sectores y hasta diferentes áreas del currículum de matemáticas.

Esta ausencia de articulación entre los conocimientos ha sido destacada por autores como Schöenfeld, que denuncia la práctica escolar tradicional que descompone el saber matemático en pequeñas porciones y asigna a los estudiantes un papel pasivo en la construcción y utilización de los métodos de resolución de problemas:

> *"[I]nstruction has traditionally focused on the content aspect of knowledge. Traditionally one defines what students ought to know in terms of chunks of subject matter, and characterizes what a student knows in terms of the amount of content that has been `mastered'. As natural as innocuous as this view of `knowledge as substance' may seem, it has serious entailments. From this perspective, `learning mathematics' is defined as mastering, in some coherent order, the set of facts and procedures that comprise the body of mathematics. The route to learning consists of delineating the desired subject matter content as clearly as possible, carving it into bite-sized pieces, and providing explicit instruction and practice on each of those pieces so that students master them. From the content perspective, the whole of a student's mathematical understanding is precisely the sum of these parts. […] One consequence of experiencing the curriculum in bite-size pieces is that students learn that answers and methods to problems will be provided to them; the students are not expected to figure out the methods themselves. Over time most students come to accept their passive role, and to think of mathematics as `handed down' by experts for them to memorize" (Schöenfeld, 1992, p. ??)*

También Guy Brousseau, en relación con esta cuestión, afirma que en los sistemas actuales de enseñanza de las matemáticas:

> *El alumno [...] debe, no sólo aprender nuevos conocimientos, sino también re-aprender y re-organizar los antiguos y olvidar- o más bien des-aprender- un parte. [...] Actualmente la integración de los conocimientos nuevos a los antiguos se deja completamente a cargo del alumno (Brousseau, 1989, p. 6).*

Bosch y Gascón (2004) plantean una reformulación del problema de Pólya que se concreta en:

> *"¿Cómo diseñar organizaciones didácticas que permitan articular las cuestiones puntuales dentro de cada tema (como, por ejemplo, las diferentes cuestiones que se estudiante dentro del tema "Teorema de Pitágoras"), los diferentes temas que conforman cada uno de los sectores (como, por ejemplo, los diferentes temas del sector "Trigonometría"), los sectores de una misma área (como, por ejemplo, los diferentes sectores de la "Geometría") y las diferentes áreas ("Geometría", "Aritmética", "Funciones y gráficas", etc.) de la disciplina Matemáticas? ¿Cómo organizar un proceso de estudio que provoque la articulación de las diferentes dimensiones de la actividad matemática escolar, desde el trabajo más rutinario hasta la resolución de problemas "abiertos" y "creativos" que se situarán en la "frontera" de las organizaciones matemáticas elaboradas?" (p. 12).*

Esta reformulación sitúa el problema más allá del currículum de un curso escolar, pudiendo abarcar toda una etapa educativa (como, por ejemplo, la Enseñanza Secundaria Obligatoria) e incluso la articulación entre las diferentes etapas educativas. Por esta razón, proponen la posibilidad de una nueva reformulación de la cuestión en términos aún más genéricos:

> *"¿Cuál debería ser la estructura y las funciones de los dispositivos de una organización didáctica escolar que permitiera retomar los contenidos antiguos, incluso los estudidos en etapas educativas anteriores, para cuestionarlos, desarrollarlos y articularlos en praxeologías cada vez más amplias y complejas" (Ibíd.).*

Estas reformulaciones del problema de Pólya tienen la virtud de poner de manifiesto que si se formula el problema relativo a que los alumnos sean capaces de construir y utilizar adecuadamente estrategias complejas para resolver "verdaderos" problemas matemáticos sin modificar la actual estructura global de la propuesta de enseñanza –en particular, sin conectar y articular adecuadamente los temas de cada sector y los sectores de cada área del curriculum- entonces el problema de Pólya se convierte en irresoluble. En efecto, la ideología modernista que sustenta el citado enfoque puntual del problema es la misma que sitúa la resolución de problemas matemáticos "abiertos" como núcleo y objetivo principal del proceso de enseñanza-aprendizaje y, en consecuencia, extrema el aislamiento y descontextualización de los problemas matemáticos con la intención de provocar que la exploración que realizan los alumnos sea "libre" y "creativa". Como consecuencia, se refuerza la atomización y desarticulación del curriculum que acaba impidiendo la solución del problema de Pólya. Este hecho es considerado como un aspecto de la paradoja de la creatividad que puede describirse como sigue:

> *Al identificar la actividad matemática "creativa" con una actividad puntual desligada ("libre") de las técnicas rutinarias y no sometida a las restricciones de un proceso de estudio estructurado, la organización escolar dificulta objetivamente el desarrollo normal de la verdadera creatividad matemática. Dado que, sin embargo, la escuela otorga un gran valor a la creatividad, se produce un desfase entre los medios o dispositivos escolares que pone en juego y los fines que pretende alcanza (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 290).*

Cabe entonces una nueva reformulación del problema de Pólya en los términos siguientes:

> *"¿Cómo diseñar un proceso de enseñanza-aprendizaje que comprenda todas las dimensiones de la actividad matemática y que, por tanto, permita que los alumnos resuelvan de una forma integrada, y a lo largo de un mismo proceso de estudio, todo tipo de problemas matemáticos desde los más rutinarios hasta los más abiertos y creativos?*

Esta propuesta de enseñanza-aprendizaje -que nos recuerda al curriculum en espiral propuesto por el neoyorquino Jerome Seymour Bruner, en defensa del aprendizaje por descubrimiento, implica, como veremos a continuación, la consideración de los diferentes niveles de transposición didáctica que están implicados en la organización del conocimiento hasta cristalizar en el conocimiento que finalmente construye cada alumno como resultado del proceso.

4.3. LA TRANSPOSICIÓN DE SABERES: NECESIDAD DE AMPLIAR LA UNIDAD DE ANÁLISIS

4.3.1. La transposición de los saberes

En la TAD se concibe al profesor y al alumno como parte de una comunidad de estudio con un proyecto común y en el marco de una institución concreta que condiciona el tipo de actividad que es posible desarrollar dentro de ella. Se postula, además, que en el estudio de un fenómeno es indispensable analizar las restricciones impuestas por la institución en que se desarrolla (Chevallard, 1992b, 1999).

En las primeras formulaciones de la TAD, se pone en evidencia la distancia entre las matemáticas producidas y valoradas en diferentes instituciones. Así, se detecta un "saber sabio", en el ámbito de la matemática sabia, más allá del ámbito escolar; un "saber a enseñar", que es el que se pretende enseñar y se concreta en los documentos curriculares, un "saber enseñado", que es el producido en el aula y que se corresponde con la actividad matemática desarrollada en él, y un "saber aprendido", que es el que construye cada alumno a partir de la vivencia de ese proceso de enseñaza-aprendizaje. Esta descripción se concreta en la denominada *teoría de la transposición didáctica* (Chevallard, 1985). Antibi y Brousseau (2002) elaboran un esquema de dicha transposición, que ha sido adaptado en la *Figura IV.1.*

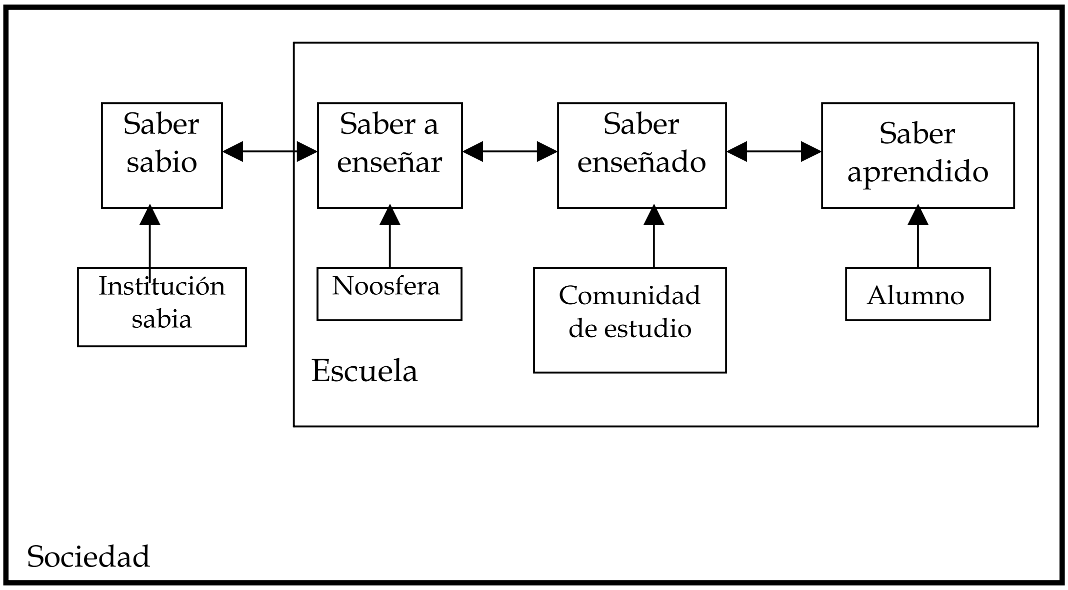


Figura IV.1. Esquema de la transposición didáctica (adaptado de Antibi y Brousseau, 2002).

Entendiendo por saber –que en la TAD se utiliza como sinónimo de praxeología- un conjunto de saber y saber hacer –de teoría y de praxis–, en la teoría de la transposición se quiere destacar el proceso que todo saber debe sufrir para poder vivir "lejos" de sus lugares de producción para adaptarse a las ecologías particulares correspondientes; así, el saber, que vive en una institución, se transpone en otra institución. Se trata de una transposición y no de una simple transferencia porque conlleva una recreación del saber en cada institución. Se habla de transposición didáctica en los casos particulares en que un saber se transpone en una institución para ser estudiada, haciendo referencia por tanto el adjetivo didáctica al sustantivo estudio.

Se describe en la gráfica la transposición que una obra debe sufrir desde su elaboración fuera del ámbito escolar hasta llegar a convertirse en la construcción personal de cada uno de los alumnos que forman parte de un proceso de enseñanza-aprendizaje dentro de un aula.

Una obra es cualquiera de los saberes que, en plural, constituyen el saber global de una institución. El término institución es utilizado en sentido muy amplio, que puede abarcar desde la sociedad en su conjunto hasta un alumno individual. Cada institución está constituida a su vez por instituciones hasta llegar a desembocar en cada alumno, como protagonista del proceso.

Para comenzar, la Escuela debe transformar unos saberes que han sido construidos fuera de ella. Las obras de las matemáticas o de la gramática, por ejemplo, no han sido construidas con el objetivo de ser enseñadas, sino como respuesta a cuestiones planteadas en el ámbito más amplio de la problemática de la sociedad que constituyen las "razones de ser" de esas obras. Dado que estos saberes no fueron construidos dentro del ámbito escolar, sino fuera de él, necesitarán ser transpuestos para adaptarse a las condiciones especiales de la escuela.

Incluso la Escuela es una obra de la sociedad, que responde a la necesidad de formar a las nuevas generaciones y por tanto ésta es su "razón de ser". Del mismo modo, la organización de las comunidades de estudio dentro de la Escuela, formadas por alumno/s y profesor/es, son características particulares que la Escuela y la Sociedad deben decidir.

Los seres humanos que forman parte de una escuela como estudiantes –que se sitúan al final de esta cadena de transposición- llevarán a cabo una reconstrucción de las obras que son objeto de estudio, de manera semejante a la reconstrucción que necesariamente se produjo en el resto de instituciones, para adaptarse a las ecologías particulares; pero una diferencia fundamental es que sus características no son determinadas por la Sociedad sino que, precisamente, las características de los seres humanos son determinantes respecto a cómo deben constituirse la Escuela para permitir el objetivo último de ésta, que es su formación como ciudadanos.

Así, las diferentes obras se pretenden transmitir en la Escuela con el objetivo último de ayudar a vivir, o a vivir mejor, a los seres humanos. Por ejemplo, constituye un saber el desarrollo de una actitud positiva o un equilibrado autoconcepto, que queremos transmitir a los alumnos porque les permitirá vivir mejor.

La primera decisión que debe tomarse por tanto en relación con la Escuela afecta a la elección de las obras que deben incluirse como objeto del proceso de enseñanza-aprendizaje. Porque los tiempos cambian, también cambian las razones de ser de la escuela –la formación que se pide que la escuela ofrezca a los jóvenes- y con ello los saberes que se considera que deben formar parte del "pacto nacional de instrucción" (Chevallard, 1992b). Este aspecto está teniendo un papel relevante actualmente en el marco de la convergencia europea a nivel universitario. Quizá por tanto dentro de poco podamos hablar, en este nivel, de un "pacto europeo de instrucción".

Como indica Chevallard, es necesario este planteamiento de las razones que dan sentido a los saberes que forman parte de la Escuela. Por ejemplo, incluso una obra fundamental como la lecto-escritura, que es esencial para el acceso a muchas obras (aunque no a todas) no posee intrínsecamente ese carácter fundamental ni su pertinencia como saber escolar. Así, por ejemplo, el paso de la escritura manual al tratamiento de texto aumenta actualmente la pertinencia del saber tipográfico, que en otras épocas era más reducida.

Además de este ejemplo, que es históricamente inédito a esta escala, existen otras numerosas cuestiones que deben ser retomadas regularmente para que la escuela mantenga su "razón de ser" a riesgo, si no lo hace, de perder su sentido o al menos perder en parte el sentido de su función. También se podría plantear la pertinencia, en el momento actual, quizá, de incluir, en la enseñanza no universitaria, dentro de esta formación necesaria de todo ciudadano, el derecho, la medicina o las ciencias “antropológicas”. ¿Por qué no?, aunque también ¿por qué sí?

Es necesario además hablar de las razones de ser de cada una de las obras, y no sólo de la obra a nivel general. Es decir, no sólo será importante determinar si es conveniente enseñar matemáticas o no en la escuela, sino que cada obra deberá estar asociada a su razón de ser si no queremos que se convierta en lo que Chevallard (2001) denomina cuestiones “muertas” y que se refiere a obras cuya razón de ser se ha olvidado y con ello su carácter funcional. Fonseca (2004) cita como ejemplos de cuestiones muertas o encerradas en sí mismas en las matemáticas de Educación Secundaria las siguientes:

- Resolución de problemas con regla y compás. ¿Cómo se puede dibujar el ortocentro de un triángulo?
- Poliedros regulares. ¿Cuánto vale, para todos los poliedros regulares, $C + V - A$?
- Factorización de polinomios. ¿Cómo descomponer un polinomio de grado 2 con raíces enteras en producto de dos polinomios de primer grado?

Deberemos por tanto plantearnos si tiene sentido el estudio de estos saberes en la Enseñanza Secundaria. Si la respuesta es afirmativa, deberían explicitarse sus razones de ser si no queremos correr el riesgo de que desaparezcan, sino del sistema educativo, sí de las mentes de los alumnos al poco tiempo de haberlas aprendido.

Lo importante es ser conscientes de la importancia de esta necesaria elección para que no se considere “transparente” y con ello fuera de todo cuestionamiento. También será fundamental darnos cuenta de que los saberes no son transpasados a la escuela desde la sociedad, sino transpuestos, transformándose de modo que puedan ser enseñados y aprendido, lo que conlleva una reconstrucción de esos saberes.

Una vez que los saberes elegidos son transpuestos a la Escuela –de modo más o menos adecuado- constituyen el saber a enseñar, que se concreta básicamente en los documentos curriculares y, en segundo término, los libros de texto. Posteriormente, cada comunidad de estudio, constituida en las escuelas por alumnos y profesores, reconstruirá los saberes en el aula. Finalmente, cada alumno reconstruirá el saber enseñado, en función de sus características propias, resultando con ello el saber aprendido de cada uno.

Lo que plantea la TAD es que para el estudio de cualquier fenómeno que se dé en los niveles posteriores, más concretos, de la transposición de los saberes, deberán ser también tenidos en cuenta los niveles anteriores. De este modo, la unidad de análisis a estudiar como investigadores deberá abarcar los diferentes niveles de la transposición.

Por ejemplo, ante el problema detectado de la falta de motivación de los estudiantes hacia las matemáticas, nos será de gran utilidad analizar los problemas particulares de motivación de cada alumno pero, si se observa la aparición del fenómeno a gran escala será necesario quizá plantearse que algunas razones de este problema se sitúen a niveles superiores como, por ejemplo, la no pertinencia de los saberes matemáticos que se estudian en la escuela o si se olvidan en el aula sus razones de ser, aspectos que podrían ser causa de la falta de motivación de los estudiantes y que también pueden ser objeto de cuestionamiento. Es evidente que las particularidades de cada alumno serán determinantes en su motivación pero también lo es que existen características del contexto, determinado por los niveles anteriores de la transposición, que están influyendo en la motivación.

Será necesario además determinar el nivel exacto en que sitúa el problema si se quiere llevar a cabo una intervención oportuna. Por ejemplo, es evidente que en las clases de matemáticas, como el caso del aula que analizamos en el Capítulo II, se olvidan las razones de ser de los saberes que quieren ser enseñados en la escuela pero, ¿de quién es la responsabilidad? Si tenemos en cuenta que las razones de ser de las obras a estudiar por lo general no son explicitadas en el nivel del saber a enseñar, ¿es el profesor en su aula el que debe analizar cuáles son las razones de ser de las obras para incluirlas en el saber enseñado o sería necesario que estas razones de ser fueran explicitadas en el nivel de saber a enseñar y por tanto corresponde la responsabilidad a la noosfera, es decir, a los profesionales preocupados por la institución escolar, que incluye a los maestros pero también a psicólogos, políticos, pedagogos, didácticos, etc.?

Estas restricciones no actúan solamente en una dirección sino que, a su vez, se producen una influencia inversa que hace que los saberes que se estudian en la escuela estén necesariamente adaptados a las características de los seres humanos protragonistas últimos del proceso de enseñanza-aprendizaje. Estas características serán importantes tanto a nivel general, como seres humanos, como en la particularidad de las diferentes etapas evolutivas e incluso la individualidad de cada uno. Se deben tener en cuenta, por ejemplo, aspectos sobre limitaciones de almacenamiento en la memoria en la determinación de la estructura del saber a enseñar y por tanto estas características propias de los alumnos se constituyen en restricciones que condicionarán el proceso de enseñanza-aprendizaje. También podemos tomar como claro ejemplo de estas restricciones "inversas" el citado anteriormente para representar las restricciones "directas": la motivación. No se pueden elaborar propuestas de enseñanza que no tengan en cuenta la importancia fundamental que la motivación tiene para el aprendizaje de los alumnos y, aún más allá, deberemos tener en cuenta que las características particulares de cada alumno pueden hacer que, a pesar de haberle situado en un ambiente de aprendizaje bien elaborado y organizado, se presenten dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje que no serán resolubles si no se lleva a cabo un análisis individual de su circunstancia y se adapta la propuesta a dichas condiciones particulares.

Las restricciones "inversas" se observan con mayor claridad en situaciones de cambio, donde el mantenimiento de una situación durante largo tiempo provoca reticencias a que se produzcan modificaciones. Por ejemplo, si un grupo de alumnos ha trabajado en clase de matemáticas siempre sobre tareas puntuales, cuyo procedimiento de resolución ha sido explicado previamente por el profesor y cuya aplicación por su parte implica tan sólo la repetición con variaciones ligeras, se puede producir una "exigencia" por parte de esos alumnos hacia el profesor de que las tareas sean de ese tipo, lo cual dificultará el cambio.

Estas descripciones previas vienen a introducir la conclusión fundamental de la teoría de la transposición didáctica, que se concreta en necesidad de considerar todas las etapas de la transposición debido a las restricciones que unos niveles ejercen sobre otros, siendo necesario por tanto ampliar la unidad de análisis, en el ámbito del estudio de los procesos de enseñanza-aprendizaje, a toda la institución escolar.

4.3.2. Ampliación de la unidad de análisis: los niveles de codeterminación didáctica

Para describir las restricciones que suponen unos niveles sobre otros, dentro del proceso de transposición didáctica, se elaboró una herramienta denominada *niveles de codeterminación* (Chevallard, 2001, 2002a, 2002b), que consiste en una jerarquía que se estructura mediante una sucesión de niveles en los que se va transponiendo un saber y que parte del nivel más genérico –la *Sociedad*-, para llegar hasta el más concreto –el de las *Cuestiones*-. Cada uno de estos niveles afectan, al mismo tiempo que posibilitan, tanto el tipo de "contenidos" que se pueden estudiar como la forma de estudiarlos.

En la *Figura IV.2*, partiendo del esquema de la teoría de la transposición didáctica de Chevallard, se muestra el papel que puede cumplir la resolución de problemas según el nivel en que nos situemos.

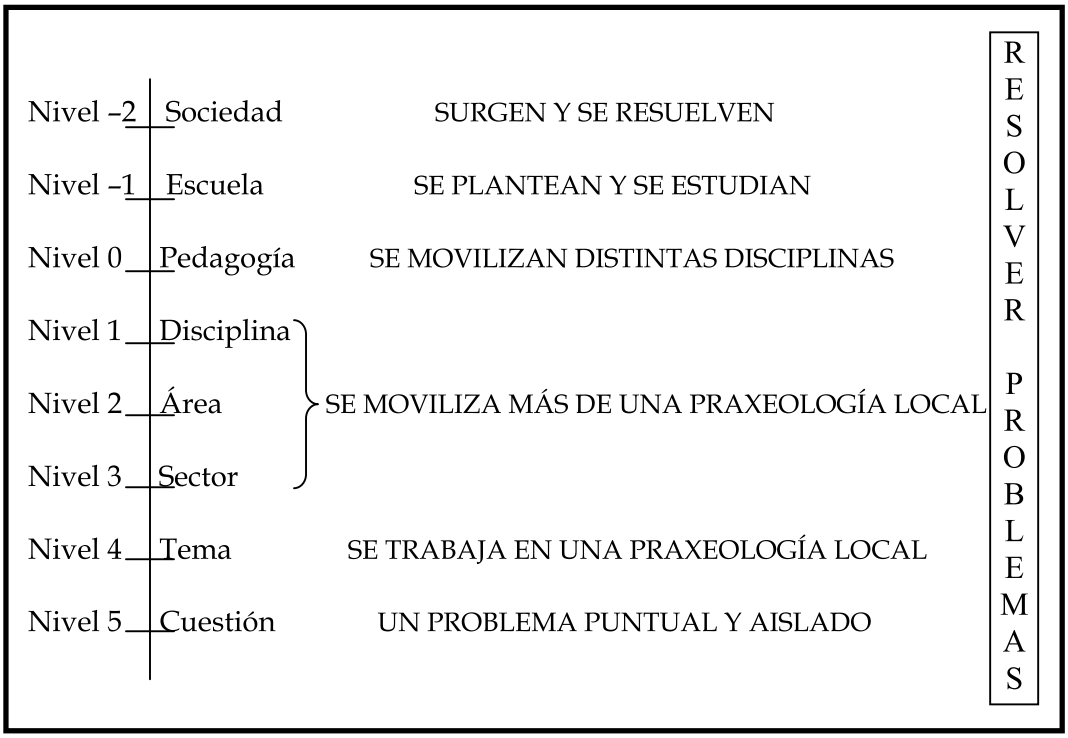


Figura IV.2 Relación entre niveles de codeterminación didáctica (Chevallard, 2001) y papel de la resolución de problemas

En el nivel de la *Sociedad* existen problemas, que puede ocurrir que pasen a ser ignorados o que algunas personas decidan enfrentarse a su resolución. Estos problemas, en cualquier caso, surgen de manera natural y fruto de su resolución se van creando los saberes que forman parte de una Sociedad.

No podemos olvidar que los niveles son incluyentes y, así, en la Escuela surgen problemas que se "deben" resolver igual que a un alumno le puede surgir un problema como ciudadano que puede decidir resolver. En estos casos, los problemas cumplen el mismo papel que se describe de modo genérico en el nivel de la *Sociedad*.

La Sociedad debe decidir qué saberes deben pasar a ser objeto de aprendizaje en la enseñanza formal y por tanto deben ser transpuestos por la Noosfera para llegar a formar parte del "saber a enseñar" que propone la Escuela. Una vez transpuestos en este nivel, los problemas comienzan a tener una carga didáctica –es decir, de transformación para su estudio- que implica plantearlos y resolverlos.

Esta transposición de los problemas en la *Escuela* podría tratarse a nivel pedagógico. Aunque los saberes en la *Escuela* están organizados por disciplinas, en el nivel pedagógico los problemas no se plantearían enmarcados en una sola disciplina, sino que, acercándose en mayor medida a cómo los problemas se resuelven en la sociedad, serían planteados para resolverse utilizando lo que se considerara necesario, como resolutor, de cada disciplina.

El siguiente nivel lo constituye el ámbito de cada *disciplina* –la matemática en el caso que nos ocupa-. Los problemas son así planteados para ser resueltos dentro del área de Matemáticas. Aún más, los problemas pueden ser planteados dentro de un *área* o de un *sector* de las matemáticas. En estos niveles –disciplina, área y sector- es necesario, para la resolución del problema, la puesta en juego de una praxeología más allá de local, ya que la local se refiere –como explicamos al describir la completitud creciente de las praxeologías- al nivel de tema.

Finalmente, cuando un problema es planteado a nivel de *cuestión* se caracterizará por ser puntual y aislado, siendo solamente necesario para su resolución el trabajo en el ámbito de una praxeología puntual.

Así, por ejemplo, podemos considerar un problema práctico de construcción de un depósito de agua (nivel de la Sociedad), designarlo como digno de ser estudiado en la escuela (nivel Escolar), mediante la modelización por un conjunto de disciplinas (nivel Pedagógico). La elección de un modelo dentro de una disciplina nos sitúa en un nivel mayor de especificidad y, si la disciplina elegida es la matemática, podremos considerar el problema dentro de una u otra área (geometría, álgebra, estadística o cálculo, por ejemplo), dentro un sector concreto del área (cálculo de volúmenes o integración de funciones), en un tema más específico (cálculo del volumen de un cilindro) hasta llegar al nivel en que sólo nos preocuparía la cuestión como problema a resolver pero no el tipo de conocimientos que hay que aplicar. Este último nivel se correspondería con los procedimientos de enseñanza que otorgan libertad completa al alumno en la construcción del conocimiento, con una ausencia de directividad por parte del profesor en la actuación de los estudiantes frente a la resolución de los problemas.

Del mismo modo que en la Escuela se plantean problemas a resolver, también los investigadores nos planteamos problemas. De igual manera que la Escuela debe decidir el nivel en que situará el planteamiento de un problema para su resolución, los investigadores deben tomar una decisión sobre el nivel en que plantearán el problema que están investigando para intentar resolverlo. Pero también ocurre que, del mismo modo que en la Escuela puede resultar transparente esta elección, también para los investigadores puede parecer que el nivel en que sitúa la cuestión a investigar está fuera de todo cuestionamiento.

Esto cobra gran importancia porque, del mismo modo que se observa el fenómeno que Chevallard ha denominado "autismo temático del profesor"[22]

[22] Este fenómeno consiste en un "abandono" por parte del profesor de los niveles superiores al tema y se concreta en un retraimiento de la acción del profesor al nivel de temas.

(Chevallard, 2001 y 2002b, Gascón, 2003) podríamos hablar de un "autismo temático de las investigaciones sobre resolución de problemas matemáticos", siendo el nivel de cuestiones y, a lo sumo, de temas en el que se sitúan la mayoría de las investigaciones en este campo.

Sí encontramos planteamientos a niveles superiores desarrollados en el campo de la psicología dirigidos al estudio de la resolución de problemas en un nivel más allá del disciplinar, como hemos descrito en capítulos anteriores. Precisamente es en el ámbito de la psicología –en el cual la resolución de problemas se plantea más allá del nivel puntual, más allá incluso del nivel disciplinar- donde se ha podido concluir la importancia de los aspectos metacognitivos. Pero los intentos por llevar a cabo las propuestas de resolución de problemas al área de la matemática han fracasado, postulamos, en parte, porque se han pretendido aplicar estas propuestas "trasladándolas", como objetos, sin considerar la necesidad de coordinar los diferentes niveles implicados en su transposición.

Dedicaremos el siguiente capítulo a analizar si, dentro del ámbito de las matemáticas, existe o no la articulación necesaria entre niveles que permita operativizar el objetivo de formar alumnos competentes en la resolución de problemas. De no ser así, nos preocuparemos por intentar determinar cuáles son las restricciones que provocan esa dificultad de articulación entre niveles frente al objetivo de formar alumnos competentes en la resolución de problemas.

CAPÍTULO V. LA TRANSPOSICIÓN DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS: SALTOS EN LOS NIVELES DE CODETERMINACIÓN

5.1. OBJETIVOS E HIPÓTESIS

Enseñar a resolver problemas se plantea en la actualidad como uno de los objetivos fundamentales de la enseñanza de las matemáticas. Este encargo planteado a la Escuela se ha mostrado difícil de lograr, como lo muestra el hecho de que, a pesar de las décadas de investigación, tanto los investigadores como las instituciones educativas y las evaluaciones –como se ha mostrado con anterioridad- asuman la distancia entre este objetivo educativo y lo que realmente aprenden los alumnos.

Mientras que la mayoría de los planteamientos de investigación en torno a la resolución de problemas de matemáticas se han situado en el nivel de Cuestión y, a lo sumo, de Tema, en este capítulo nos planteamos estudiar qué ocurre en los niveles intermedios, superiores al tema, y especialmente nos centraremos en analizar si se produce una adecuada transposición en los diferentes niveles para que la resolución de problemas pueda vivir en el aula de matemáticas o si, por el contrario, la ausencia de esta transposición o su carácter inadecuado puede estar provocando restricciones que dificulten lograrlo[23].

Dado el autismo temático sufrido por el profesor -que ha sido descrito en el capítulo anterior-, para analizar cuestiones más allá de los temas es necesario situarse en el "saber a enseñar", determinado por los documentos curriculares. Por esta razón, y dados los objetivos de este estudio, los documentos oficiales sobre educación constituirán los elementos empíricos básicos.

La hipótesis es que los textos oficiales sitúan la resolución de problemas en niveles de generalidad muy distintos, desde el más concreto relativo a un

[23] Una versión anterior del estudio presentado en este capítulo ha sido publicada en Bosch, Gascón y Rodríguez (2004).

tema o subtema de matemáticas hasta el más general relativo a cualquier actividad social, pero se producen "saltos" entre estos niveles sin que aparezca una solución de continuidad que permita hacer vivir en el aula la resolución de problemas. Esto conllevaría una restricción fuerte para profesores y alumnos, que no podrían sino reproducir esos saltos en el proceso de enseñanza-aprendizaje llevado a cabo en el aula debido a su incapacidad para recomponer por sí mismos los niveles intermedios necesarios. De mostrarse este hecho, podríamos llegar a hablar de un *autismo temático de la institución escolar* en relación con la inclusión de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas.

5.2. EVOLUCIÓN DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO OBJETIVO DE ENSEÑANZA

5.2.1. Antecedentes: los trabajos de Pólya

Para entender el papel que juega en la actualidad la resolución de problemas en el currículo de matemáticas, será necesario hacer un recorrido sobre cuál ha sido el papel que se le ha asignado en el pasado y que ha confluido en la consideración que tiene lugar en estos momentos. Este análisis longitudinal comienza con las propuestas de Pólya e implica el estudio del proceso seguido en Estados Unidos, donde se originó el movimiento por la defensa de la inclusión de la resolución de problemas en los currículos de matemáticas.

El mismo Pólya sitúa el origen de sus trabajos más de trescientos años atrás, en las propuestas que hace Descartes en sus "Reglas para la dirección del espíritu" (1701), con sus "consejos para resolver problemas con facilidad" o sus "modelos de pensamiento productivo".

Antes que Pólya, otros autores también se ocuparon de analizar la actividad de resolución de problemas no exclusivamente matemáticos, incorporando la consideración de fases de la actividad (Dewey 1910, 1929 y Wallas 1926). Pero lo original del trabajo de Pólya es la sugerencia de heurísticos dentro de cada fase de la resolución de problemas. Esta idea es bastante anterior a "How to solve it" (1945), puesto que ya en 1931 Pólya pronunció una conferencia en Zurich bajo el título "Cómo buscar la solución de problemas matemáticos", en la que enuncia cuatro fases y algunas sugerencias para avanzar en cada fase. La pretensión inicial de Pólya era enseñar a resolver problemas más allá de los resueltos en clase:

> *"There are two aims which the teacher may have in view when addressing to his students a question or a suggestion (…): First, to help the student to solve the problem at hand. Second, to develop the student's ability so that he may solve future problems by himself." (Pólya, 1957, pp. 3-4).*

Para ello considera que es fundamental que el profesor realice preguntas y sugerencias generales y de sentido común, para centrar la atención de los alumnos sobre los aspectos que considera más importantes en la resolución de cualquier problema de matemáticas, situando la cuestión de la resolución de problemas de este modo a nivel general de la disciplina:

> *"[Appropriate questions and suggestions] have two common characteristics, common sense and generality. As they proceed from plain common sense they very often come naturally; they could have occurred to the student himself. As they are general, they help unobtrusively; they just indicate a general direction and leave plenty for the student to do." (Ibíd.)*

Analizando lo inadecuado de preguntas específicas tales como "¿Podrías utilizar el teorema de Pitágoras?" –que sería una pregunta posible cuando se intenta encontrar la longitud de la diagonal de un paralelepípedo rectangular– Pólya (1957) indica:

> *"The intention may be the best, but the question is about the worst. […] [T]here is a long sequence of objections against that sort of help:*
>
> *1. If the student is near to the solution, he may understand the suggestion implied by the question; but if he is not, he quite possibly will not see at all the point at which the question is driving. Thus the question fails to help where help is most needed.*
>
> *2. If the suggestion is understood, it gives the whole secret away, very little remains for the student to do.*
>
> *3. The suggestion is of too special a nature. Even if the student can make use of it in solving the present problem, nothing is learned for future problems. The question is not instructive.*
>
> *4. Even if he understands the suggestion, the student can scarcely understand how the teacher came to he idea of putting such a question. And how could… the student… find such a question by himself? It appears as an unnatural surprise, as a rabbit pulled out of a hat; it is really not instructive." (Pólya, 1957, p. 22).*

Es decir, Pólya defiende la autonomía del estudiante en la búsqueda de la respuesta, en lugar de la imposición externa, para favorecer su posterior aplicación en situaciones semejantes.

> *"Begin with a general question or suggestion... and, if necessary, come down gradually to more specific and concrete questions or suggestions till you reach one which elicits a response in the student's mind." (Op. Cit., p. 20).*

Este autor considera que el logro del objetivo de resolver problemas más allá de los desarrollados en clase implica explicitar tanto las relaciones entre los diferentes problemas matemáticos, como entre lo matemático y lo no matemático.

> *"One of the first and foremost duties of the teacher is not to give his students the impression that mathematical problems have little connection with each other; and no connection at all with anything else...*

> *The teacher should encourage the students to imagine cases in which they could utilise again the procedure used, or apply the result obtained" (Pólya, 1957, pp. 15-16).*

El planteamiento de Pólya se basa inicialmente en la solución de problemas referidos a situaciones reales en que sea adecuado utilizar estrategias previamente aprendidas, que puede ser necesario adaptar o modificar, pero cuya diferencia fundamental con lo practicado anteriormente radica en que están inmersas en una problemática real. Así, por ejemplo, a partir del problema inicial de encontrar la medida de la diagonal de un paralelepípedo, señala el problema de la vida real de determinar la longitud de varias cuerdas necesarias para asegurar un mástil erguido.

A medida que avanzaba en sus estudios, Pólya fue evolucionando hacia planteamientos en torno a especificaciones mayores de los tipos de problemas considerados. Así, en sus últimos trabajos (Pólya, 1962-1965), presenta los *patrones de solución de problemas* en torno a grandes áreas o sectores de las matemáticas que llama *modelos,* como "el modelo de los dos lugares (geométricos)"; "el modelo cartesiano"; "la recurrencia"; y "la superposición". Lo que queremos destacar de estos *modelos* son dos aspectos; por un lado el hecho de que sitúan la resolución de problemas a un *nivel de mayor especificidad dentro de las matemáticas*; y, por otro, que no se corresponden dichas especificaciones con los sectores o áreas clásicos de las matemáticas porque no responden a la lógica organizativa estándar –conceptual o axiomática–, sino a una estructuración centrada en los tipos de problemas abordados y en grandes líneas o estrategias de resolución.

Podremos observar en lo que sigue que los planteamientos actuales de la resolución de problemas, tanto en España como en Estados Unidos, distan bastante de las últimas propuestas de Pólya, situándose más cerca de sus planteamientos iniciales en torno a la solución de problemas generales –más allá incluso de los problemas matemáticos. Poco quedará en los currículos de matemáticas de esta nueva estructuración del contenido matemático en torno a grandes tipos de "modelos" de resolución. Todo seguirá organizado según la compartimentación curricular clásica que no parece aceptar fácilmente la incorporación de la resolución de problemas como nueva necesidad formativa.

5.2.2. Matemática clásica, matemática moderna y "vuelta a lo básico"

Cuando el 4 de octubre de 1957, la Unión Soviética lanzó al espacio el primer satélite artificial, el Sputnik, la repercusión en Estados Unidos, y posteriormente en Europa, fue inmediata y de gran alcance. Se planteó la necesidad inminente de renovar la enseñanza de las matemáticas mediante una modernización de los contenidos que habían quedado obsoletos respecto a la matemática universitaria utilizada en la investigación. La "reforma de las matemáticas modernas" proponía unos contenidos nuevos basados en la introducción de la teoría de conjuntos, las estructuras algebraicas y la construcción axiomática de los sistemas numéricos, la erradicación de la geometría euclidiana, etc.

En el sistema de enseñanza anterior a la reforma de las matemáticas modernas, los contenidos de enseñanza se repartían en tres grandes continentes: la aritmética, la geometría y el álgebra. Así, de manera bastante universal, se dedicaban los primeros cursos de la enseñanza Primaria a la aritmética; los cursos posteriores a aprender un poco de álgebra y algunos elementos de geometría, como las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de las figuras más frecuentes. El inicio de la enseñanza Secundaria venía claramente marcado por el estudio del álgebra elemental junto con la geometría, evolucionando hacia el álgebra intermedia, la superior y la trigonometría.

Las críticas al sistema de enseñanza clásico giran en torno a una crítica básica que el matemático Morris Kline expresó muy claramente en su libro "Why Johnny can't add" (Kline 1973, pp. 9 y ss.):

> *"Impone un proceso mecánico y por tanto fuerza al alumno a confiar sobre todo en la memoria antes que en la comprensión. Un buen maestro no dudaría en hacer todo lo posible para ayudar a comprender la fundamentación ..., pero, por lo general, el plan tradicional no presta mucha atención a la comprensión. Confía en la práctica para lograr que los alumnos hagan el proceso rápidamente. Se enseñan multitud de procedimientos (...) [en que se] pide [a los alumnos] que imiten lo que el maestro y el libro hacen." (Ibíd.)*

De este modo, los alumnos tienen que aprender de memoria gran variedad de procedimientos que, además, se presentan desconectados entre sí:

> *"Raramente están relacionados. Aunque todos estos procedimientos contribuyen al objetivo de lograr que los alumnos realicen operaciones algebraicas, en matemáticas superiores, por lo que los alumnos alcanzan a ver los temas inconexos. Son como páginas arrancadas de un centenar de libros diferentes, ninguno de los cuales expresa la vida, el significado y el espíritu de la matemática." (Ibíd.)*

Otra crítica que se achacó a la enseñanza clásica de las matemáticas fue la falta de motivación que provocaba en los alumnos, debido a que no se mostraba la utilidad de lo que se enseñaba. Siguiendo siempre a Kline:

> *"No se puede defender el álgebra, la geometría y la trigonometría diciendo que se utilizarán después en la vida práctica [...]. Los futuros matemáticos, científicos e ingenieros encontrarán las matemáticas útiles en sus carreras. Pero si las matemáticas que se ofrecen no indican en qué serán útiles carecen totalmente de atractivo, decir a los estudiantes que son necesarias para la ciencia y la ingeniería sólo les animará a buscar otra carrera." (Ibíd.)*

Ante los defensores que aludían a la importancia de los problemas, especialmente en aritmética, se antepuso el hecho que estos problemas clásicos (de hombres cavando fosos, llenado de depósitos, mezclas, móviles, edades, etc.) eran "desesperadamente artificiales" (Kline 1973) y por esa razón no lograban su objetivo de mostrar a los alumnos la utilidad de las matemáticas.

El mensaje principal del movimiento a favor de la matemática moderna era que la matemática clásica había fracasado porque el plan tradicional enseñaba unas matemáticas anticuadas, entendiendo por ello las matemáticas creadas antes de 1700. Así, su propuesta básica fue la renovación radical del contenido a tratar, proponiendo abandonar los temas clásicos a favor de campos como el álgebra abstracta, la topología, la lógica simbólica, la teoría de conjuntos y el álgebra de Boole.

La excesiva mecanización de procedimientos de la matemática clásica es afrontada por la matemática moderna con la explicitación del razonamiento en que se apoya cada paso, para que los alumnos lleguen así a comprender las matemáticas. La interpretación lógica o deductiva, ya utilizada en el plan tradicional en la geometría de la enseñanza secundaria, se amplía a los demás contenidos matemáticos partiendo del principio que la construcción axiomática de los conceptos matemáticos era también la mejor construcción didáctica. No desarrollaremos aquí las causas y efectos de la reforma de las matemáticas modernas, ni tampoco las restricciones que el sistema de enseñanza impuso a este movimiento renovador y que, en cierto sentido, se sitúan en el origen de la elaboración de una ciencia de la didáctica de las matemáticas (Brousseau 1998). Sólo señalaremos rápidamente tres características que consideramos interesantes para el tema que nos ocupa. En primer lugar, que la reforma se basaba en una particular epistemología de las matemáticas que postulaba un modelo concreto de la construcción del conocimiento matemático basado en los principios Bourbakistas[24] de axiomatización y formalización global de las matemáticas, modelo que se apoyaba en una supuesta analogía entre la construcción axiomática de la matemática y el desarrollo de las estructuras cognitivas de los niños puesto en evidencia por la psicología genética de Piaget. En segundo lugar, que el modelo epistemológico adoptado, dado que propugnaba, al igual que el proyecto de Bourbaki, una construcción global de las matemáticas, se concretaba, al menos en parte, a todos los niveles de determinación didáctica, relacionando las distintas áreas de las matemáticas y los distintos sectores de las áreas. La propuesta de la construcción axiomática de los sistemas de números (naturales, enteros, racionales) o de la introducción de la geometría analítica y vectorial son buenos ejemplos de esta articulación teórica de los contenidos. En último lugar, debemos mencionar lo que se convirtió en la crítica principal contra la reforma y que, en cierto sentido, era principalmente una crítica al modelo epistemológico que la fundamentaba: la problemática "teoricista" que guiaba la construcción del conocimiento matemático sin asociarlo a sus razones de ser en detrimento de una problemática más "funcionalista" que pusiera en evidencia el carácter instrumental de las matemáticas en la problematización del mundo y en la resolución de los problemas planteados.

Kline, por ejemplo, formula esta crítica en los términos siguientes (*Op. Cit.* pp. 88-89):

---

[24] Nicolás Bourbaki es el nombre colectivo de un grupo de matemáticos franceses que en los años 30 propusieron revisar los fundamentos de las matemáticas. El grupo, fundado en 1935, intentó mantener la ficción de que Nicolás Bourbaki era un matemático "poldavo". Por eso el nombre de sus miembros, que cambian a lo largo del tiempo, es uno de los secretos mejor guardados (al igual que su forma de organizarse), aunque se sabe que en su mayoría son franceses. En la página Web de la "Asociación Bourbaki" ya se reconoce que fue fundado inicialmente por Henri Cartan, Claude Chevallev, Jean Coulomb, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, Charles Ehresmann, René de Possel, Szolem Manderbroit y Andre Weil.

> *"Los conceptos, operaciones, teoremas, e incluso métodos de demostración más importantes fueron sugeridos por situaciones y fenómenos reales. La matemática nació de nuestras experiencias en el mundo físico [...] [Así] las matemáticas han quedado aisladas de todos los otros cuerpos de conocimiento [...]. Entonces parece como si las estructuras deductivas así construidas se ajustaran casualmente a algunos fenómenos físicos y las matemáticas pudieran ser aplicadas a fenómenos reales. Sin embargo, este valor aparentemente fortuito no se utiliza. Las matemáticas, en los textos de matemática moderna, no se aplican a problemas reales."*

Fijémonos en que un aspecto de la crítica es, precisamente, el nuevo aislamiento curricular que provocaba la reforma al separar la matemática de las demás disciplinas que la utilizan como herramienta fundamental. Pero la crítica principal no era ésta. Alan Schöenfeld, el discípulo de Pólya que más ha impulsado la investigación y enseñanza de la resolución de problemas, llega a afirmar que (Schöenfeld 1985d):

> *"La impresión general es que las matemáticas modernas han sido, con mucho, peor que la enseñanza de las matemáticas que venían a reemplazar. Los alumnos no solamente no conseguían dominar las matemáticas abstractas del nuevo plan de estudios, sino que tampoco conseguían dominar las operaciones básicas." (p. 26)*

En este contexto surgió, en los mismos países que habían realizado la reforma de las matemáticas modernas, un movimiento anti-reformista de "vuelta a lo básico", que se desarrolló a partir de mediados de los 70, y que puso énfasis en los ejercicios y en la repetición, centrándose en el dominio de operaciones y algoritmos básicos.

Pero tampoco este nuevo sistema de plantear la enseñanza de las matemáticas –de "vuelta a lo básico"– producía los resultados deseados. Por ejemplo, en las pruebas estadounidenses de ingreso a la Universidad ("College Board's Mathematics Examination"), se constató que la media alcanzada en las pruebas relativas al conocimiento matemático, en todo el país, había bajado continuamente desde 1964 hasta 1980. Se concluyó que estos alumnos sabían resolver los ejercicios básicos para los que habían sido "entrenados", pero que tenían un éxito muy limitado cuando se les proponían problemas de mayor complejidad:

> *"Los estudiantes no entendían qué operación debían aplicar a los distintos tipos de problemas. Dicho sin rodeos, no se les había enseñado a pensar. De bien poco sirve saber lo fundamental si no se sabe cómo y cuándo usarlo" (Schöenfeld, 1985d, p. 27).*

5.2.3. Más allá de lo básico: enseñar a resolver problemas

El movimiento a favor de la enseñanza de la "resolución de problemas" nació en este período post-reformista, guiándose fundamentalmente por los trabajos de Pólya y las investigaciones de Schöenfeld sobre las estrategias elaboradas por los matemáticos cuando se enfrentan a problemas no triviales. Es necesario destacar que este movimiento introdujo la "resolución de problemas" como un nuevo objetivo de la enseñanza de las matemáticas. Ni la matemática clásica, ni mucho menos la reforma de las matemáticas modernas, pero tampoco la "vuelta a lo básico", incluían un tipo de actividad curricular que se pudiera designar con esta expresión general. Surge así el germen de un nuevo modelo epistemológico, menos desarrollado que la epistemología Bourbakista, pero que nace específicamente del problema de la enseñanza de las matemáticas y que, tal vez por su simplicidad y por la fuerza de sus proponentes, no tuvo dificultades para introducirse en el sistema de enseñanza.

Por ejemplo Luis Rico (1988) relata esta incorporación del modo siguiente:

> *"No es hasta mediados de la década de los 70 cuando, coincidiendo con la búsqueda de una nueva visión global para el currículo de matemáticas en la enseñanza obligatoria, se plantea la resolución de problemas como un campo autónomo sobre el que trabajar e investigar sistemáticamente. [...]*

> *Por supuesto que, hasta ese momento [...] se han venido haciendo problemas en las aulas escolares, por muy rutinarios y mecánicos que éstos hayan sido, desde el comienzo del sistema escolar tal y como hoy lo conocemos. La diferencia estriba en que, hasta ese momento, la resolución de problemas no se contemplaba como algo específico, cuyo desarrollo necesitase de consideraciones especiales. Los problemas, eran, simplemente, la forma más adecuada para mostrar la utilidad y conveniencia de las reglas y conceptos, estrictamente matemáticos, que se habían estudiado." (pp. 5-6)*

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) de los EEUU –es el ejemplo más conocido, aunque no el único–, en su "Agenda for Action", publicada en 1980, presentó un plan para actuar en educación matemática con recomendaciones para la matemática escolar de los años 80. La primera de esas recomendaciones fue: la resolución de problemas debe ser el objetivo principal de la enseñanza matemática. Esta Organización llevó a cabo dos anuarios, en 1980 y en 1983, con recopilaciones de problemas con aplicaciones útiles y resúmenes de trabajos de investigación respecto al tema.

Como también se observa en el Informe Cockroft (1985), la resolución de problemas se ha alejado del enfoque propuesto por Pólya –resolución de problemas como resolución de tareas novedosas– centrándose en la aplicación a tareas de la vida cotidiana. En el punto 243, considera, como recomendación general para la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles que ésta debe "incluir resolución de problemas, con aplicación de las matemáticas a situaciones de la vida cotidiana". En el punto 249 sintetiza las consideraciones generales a tener en cuenta en la resolución de problemas y, de nuevo, en los puntos 321 y 324, vuelve a enfatizar su importancia en la Escuela Primaria.

> *"La resolución de problemas es consustancial a las matemáticas. Las matemáticas sólo son útiles en la medida en que pueden aplicarse a una situación concreta; precisamente la aplicación a diversas situaciones posibles es lo que se denomina resolución de problemas."*

En este contexto, "*la resolución de problemas abarca desde una forma general de pensamiento y aprendizaje hasta tareas muy específicas dentro de un campo más limitado de conocimientos*" (Rico, 1988, p. 7).

Posteriormente, en 1989, aparecieron los *Standards* del NCTM. En ellos se señalan como objetivos a lograr desde la educación infantil hasta la secundaria obligatoria:

1º Las matemáticas como resolución de problemas

2º Las matemáticas como comunicación.

3º Las matemáticas como razonamiento

Según el NCTM (1989), saber matemáticas significa:

> *"Ser capaz de usarla con propósitos definidos. Para aprender matemáticas, los estudiantes tienen que involucrarse en la exploración, conjeturación y razonamiento más que en el aprendizaje memorístico de reglas y procedimientos... (Para) dar sentido a las matemáticas (necesitan) verlas y emplearlas como herramientas de razonamiento y de resolución de problemas." (p. 5)*

La resolución de problemas continúa así enfatizándose como el modo fundamental de dar sentido a las matemáticas, a través de la aplicación de lo aprendido a situaciones reales y evitando así la mecanización no comprensiva de la misma.

Uno de los miembros de la NCTM, expresando la posición de la asociación, nombra doce componentes esenciales en las matemáticas para el siglo XXI (en los que los alumnos deben ser competentes para facilitar posteriores estudios y una vida adulta responsable): comunicación de ideas matemáticas, razonamiento matemático, aplicación de las matemáticas a situaciones cotidianas, comprobación de la racionabilidad de los resultados, estimación, destrezas apropiadas de cómputo, pensamiento algebraico, medida, geometría, estadística, probabilidad y, la primera de ellas, resolución de problemas (relacionada con todas las demás). De ella señala:

> *"Aprender a resolver problemas es el principal objetivo para estudiar matemáticas. La resolución de problemas es el proceso de aplicar el conocimiento previamente adquirido a situaciones nuevas y no familiares. Resolver problemas verbales en textos es una forma de resolución de problemas, pero los estudiantes también deberían ser capaces de enfrentarse a problemas sin texto. Las estrategias de resolución de problemas implican proponer cuestiones, analizar situaciones, traducir resultados, ilustrar resultados, dibujar diagramas, y usar ensayo y error. Los estudiantes deberían ver soluciones alternativas a problemas; deberían tener experiencia de problemas con más de una solución."* (Carl 1989, p. 471).

El proceso a través del cual la resolución de problemas se va convirtiendo en un objetivo en sí mismo, independientemente del contenido matemático que utilice, hace que tome un valor fundamental, como objetivo básico de las matemáticas, el fomento de una actitud favorable hacia la creación de conocimiento. Veremos más adelante que la conciliación entre ambas formas de pensar los objetivos de la enseñanza de las matemáticas –como un conjunto de contenidos nocionales y como una actividad de resolución de problemas– sigue sin estar claramente resuelta en los documentos curriculares ni, más generalmente, en los actuales sistemas de enseñanza.

5.2.4. La evolución en España

En las Orientaciones Pedagógicas de los años 70, a pesar de que se indica que "la enseñanza de la matemática en todos los niveles debe centrarse en el proceso de matematización de problemas, creación de sistemas formales, utilización de las leyes de estos sistemas para obtener resultados e interpretación de los mismos", ocurre que esta idea se articula en torno a uno de los objetivos específicos de área: "Capacidad de plantear simbólicamente situaciones problemáticas". Siguiendo siempre a Rico (1988, p. 11):

> *"Sólo van a tener interés para estos Programas aquellos problemas en los que se ejemplifican determinadas relaciones entre conceptos abstractos (...). En las sugerencias de posibles actividades en las que se dan indicaciones sobre Observación y Manipulación, Intuición Espacial, Traducción del pensamiento cuantitativo en frases matemáticas, Mecanismos y Automatismos, Vocabulario, Relación, Análisis, Síntesis, Abstracción, Razonamiento Lógico y Creatividad, sólo hay dos referencias explícitas a la resolución de problemas, que se concretan en los enunciados genéricos: "Formular problemas tomados de la vida real" e "Identificar problemas y establecer gradualmente los pasos para su solución" (...) En el desarrollo posterior de los contenidos los problemas aparecen citados expresamente en sólo dos ocasiones, 1º y 7º niveles, y siempre como aplicación de unos contenidos específicamente matemáticos previamente estudiados."*

En su análisis sobre los Programas Oficiales, respecto a los Programas Renovados de 1981, continúa afirmando:

> *"La resolución de problemas no aparece considerada tampoco con carácter específico ni en la estructura de los Programas, ni en el nivel de Profundización que debe lograrse; es decir, la resolución de problemas no es un contenido ni tampoco un proceso. La única opción que aparece es la de ejercicios de ampliación, en concreto al estudiar los Conjuntos numéricos y la Proporcionalidad. (...)*
>
> *Al finalizar el listado de destrezas aritméticas a adquirir sobre algún tópico concreto aparece un único objetivo cuyo enunciado dice "resolver situaciones problemáticas relacionadas con..." y termina indicando el tópico correspondiente." (Ibíd.)*

A partir de 1982 tuvieron lugar sucesivas fases del proyecto de reforma que intentaban incorporar la resolución de problemas como una de sus referencias básicas. Sin embargo, como comenta Rico:

> *"Estos intentos han sido insuficientes, ya que no han seguido sistematización alguna ni han logrado elaborar pautas mínimas para incorporar la resolución de problemas al currículo de la EGB con una visión más amplia que la ya clásica de los ejercicios de aplicación. (Ibíd.)*
>
> *[En] este curso 86-87 podemos decir que el Currículo de Matemáticas para la EGB, FP, BUP, tanto en sus versiones oficiales como en las oficiosas, no incorporan la resolución de problemas de manera precisa. Sólo en algunos casos aparecen algunos enunciados genéricos que hablan de los problemas que pueden resolverse con los contenidos y técnicas estudiados previamente. Los problemas siguen siendo ejercicios más o menos complicados que hay que solucionar después de haber estudiado unos contenidos. La resolución de problemas como método de trabajo no está incorporada a nuestro currículo, hechas todas las excepciones- muy minoritarias- que quieran hacerse." (Ibíd.)*

Centrando su crítica en la falta de consideración de la resolución de problemas en los currículos como metodología de aprendizaje –en el sentido de aprender a partir de situaciones de la vida cotidiana–, este mismo autor señala una serie de deficiencias que presenta el aprendizaje de los Ciclos Inicial y Medio:

> *"1. La resolución de cada tipo de problemas se ha realizado excesivamente ligada a cada operación particular.*
>
> *2. Aunque pueda resultar extraño, no se utiliza material concreto en la resolución de problemas, todo lo más que se hace es justificar algún ejemplo mediante representaciones gráficas.*
>
> *3. El problema se plantea siempre como un enunciado verbal conciso, con la información muy sintetizada, ajustándola a patrones establecidos y en los que no falta ni sobra nada. El enunciado de un problema es una entidad cerrada, que florece en las páginas de los libros de texto, y cuya relación con el mundo real en que vive el niño es muy tenue o inexistente.*
>
> *4. La solución es un valor numérico que se obtiene al combinar los datos del enunciado mediante una secuencia de operaciones. No se consideran soluciones cualitativas o relacionales, no se plantean problemas con varias*

> *posibles soluciones distintas, no existen soluciones aproximadas, ni tanteo, ni evaluación de la solución obtenida." (Op. Cit., pp. 20-21)*

Y encuentra la razón de estos hechos en que "*Los problemas de la EGB no tienen, por el momento, entidad propia; se trata exclusivamente de ejercicios de aplicación del contenido matemático (conceptos y propiedades) estudiado*" (p. 21).

Frente a esta situación, el autor propone una enseñanza de las matemáticas regida por los siguientes principios:

> *"1. La resolución de problemas es un método de trabajo con entidad propia en el aula, que precede y justifica la aparición de los contenidos matemáticos.*
>
> *2. Los problemas surgen de situaciones reales, no cerradas. La información hay que elaborarla, no está previamente seleccionada.*
>
> *3. La pregunta de un problema debe tener sentido para quien a debe responder tanto como para el que la plantea. El alumno puede plantear cuestiones significativas dentro de un contexto.*
>
> *4. La respuesta a una cuestión no tiene por qué ser única; hay cuestiones de solución múltiple, dependiendo del contexto y de la mayor o menor precisión que se busque.*
>
> *5. El debate y discusión entre los alumnos sobre la forma más adecuada de localizar y manejar una información mejora la capacidad de expresión, de plantear cuestiones y buscar la(s) respuesta(s), obliga a los alumnos a justificar sus actuaciones y permite conocer cuáles son los procedimientos puestos en juego; también permite enfrentar a los alumnos con las consecuencias de sus elecciones y mejorar sus actuaciones.*
>
> *6. El profesor puede favorecer el pensamiento creativo y conseguir que los alumnos se sientan satisfechos por el trabajo matemático mediante la resolución de problemas." (Op. Cit., p. 21).*

Es pues manifiesta la presión, desde el nivel de la Sociedad, para que la resolución de problemas se incorpore como uno de los objetivos fundamentales de la enseñanza de las matemáticas, y es de sobras conocida su consideración explícita por parte de los profesores y demás miembros del sistema educativo. Ya nadie discute la máxima de que enseñar matemáticas es enseñar a resolver problemas, siendo ésta tal vez, paradójicamente, la mayor herencia que nos haya dejado la reforma de la matemática moderna. Nuestro propósito ahora es analizar de qué manera, y en qué niveles de determinación didáctica, el sistema educativo español incorpora esta actividad, y qué estatuto le asigna en el cuerpo de conocimientos que propone para la escolaridad obligatoria.

5.3. LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL SISTEMA EDUCATIVO ACTUAL: EJE FUNDAMENTAL E INTEGRADOR DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

5.3.1. La resolución de problemas en el currículo español

5.3.1.1. El nivel escolar

Entre los fines que persigue el sistema educativo español, según la Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo[25] de 1990, la resolución de problemas no está contemplada. Sí se hace referencia, por ejemplo, a la adquisición de conocimientos científicos y técnicos, entre otros, y a la adquisición de hábitos intelectuales y de técnicas de trabajo, pero no al estudio o consideración de los temas problemáticos o "sensibles" para la sociedad.

Nuestro sistema educativo, a partir de los planteamientos generales de la ley que incluyen capacidades a desarrollar en cada etapa, especifica las

[25] Aunque en 2002 ha sido publicada la Ley Orgánica de Calidad de la Educación (LOCE), todavía no ha sido totalmente implantada, estando actualmente vigentes algunos aspectos de la Ley Orgánica de Organización General del Sistema Educativo (LOGSE).

"enseñanzas mínimas"[26] y el currículo (objetivos, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación) para cada una de las etapas, ciclos, grados y modalidades que lo componen. Nosotros nos centraremos aquí en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria (ESO).

En esta etapa, las enseñanzas mínimas son planteadas directamente a un nivel disciplinar (es decir especificadas para cada una de las asignaturas o áreas de conocimiento)[27] y, en algunos casos, al nivel pedagógico como objetivos comunes a las distintas disciplinas o "campos de conocimiento". Entre los "objetivos a largo plazo" que fueron propuestos en los Reales Decretos 1007/1991 (enseñanzas mínimas) y 1345/1991[28] (currículo) para la Educación Secundaria Obligatoria, si bien no se hace referencia en los preámbulos al papel de la resolución de problemas, se enuncia en cuarto lugar:

> *"Elaborar estrategias de identificación y resolución de problemas en los diversos campos de conocimiento y la experiencia, mediante procedimientos intuitivos y de razonamiento lógico, contrastándolas y reflexionando sobre el proceso seguido."*

El planteamiento que se realiza es por tanto a *nivel pedagógico*, ya que se refiere a los diversos campos de conocimiento. Esto está estrechamente relacionado con el hecho de que la enseñanza está estructurada en áreas de conocimiento y los desarrollos posteriores estarán organizados en función de estos.

En el Real Decreto 3473/2000 para las enseñanzas mínimas de la ESO desaparece el objetivo de etapa planteado anteriormente y es sustituido por el siguiente:

---

[26] Son los contenidos comunes a todas las Comunidades Autónomas. En la Ley Orgánica de Calidad en la LOCE han pasado a denominarse "enseñanzas comunes".

[27] En la LOCE se utiliza la denominación "asignaturas" en lugar de áreas de conocimiento.

[28] Modificado y ampliado por el Real Decreto 1345/1995.

> *"Concebir el conocimiento científico como un saber integrado que se estructura en distintas disciplinas, matemáticas y científicas, y conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos de conocimiento y de la experiencia, para su resolución y toma de decisiones."*

Se destaca aquí la integración de conocimientos que debe llevarse a cabo, situando el planteamiento a un nivel intermedio entre el pedagógico y el disciplinar (el de las "disciplinas matemáticas y científicas"). Sin embargo, el objetivo mantiene las mismas características que el anterior, con el matiz de que destaca aún más, en contradicción con la concepción integrada del saber que propugna, el carácter disciplinar del planteamiento que se realiza sobre la resolución de problemas.

5.3.1.2. El nivel disciplinar

El currículum español actual desarrolla, para cada etapa educativa, una concreción de los objetivos generales y se presentan, para cada área de conocimiento, la filosofía, objetivos, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación correspondientes. Con esto queremos destacar que la ley no especifica objetivos para cada una de las disciplinas o áreas de conocimiento, por ejemplo las matemáticas, que sean comunes para todo el sistema educativo, independientemente del nivel. También conviene aclarar que las Comunidades Autónomas con competencias en educación elaboran su propio desarrollo del currículo. En nuestro caso, nos centraremos en los desarrollos propuestos por el denominado "territorio MEC" que engloba las comunidades sin competencias en educación, entre ellas la Comunidad de Madrid. Las enseñanzas mínimas no precisan de aclaración, ya que son comunes para todo el territorio español.

El objetivo principal de las matemáticas para la Enseñanza Secundaria Obligatoria es planteado a un nivel de desarrollo de capacidades cognitivas superiores:

> *"La finalidad fundamental de la enseñanza de las Matemáticas es el desarrollo de la facultad de razonamiento y abstracción."*

La resolución de problemas surge muy pronto, presentándose como el eje integrador del proceso de enseñanza-aprendizaje:

> *"La resolución de problemas debe contemplarse como una práctica habitual, que no puede tratarse de forma aislada, sino integrada en todas y cada una de las facetas que conforman el proceso de enseñanza y aprendizaje."*

La resolución de problemas, presentada aquí a *nivel disciplinar*, se verá ahora concretada en el *nivel de las áreas* o "bloques de contenido" propuestos para las matemáticas. De todos modos, el carácter genérico atribuido a la resolución de problemas dificulta esta especificación. En la cita presentada a continuación se manifiesta esta dificultad al tiempo que se empieza a vislumbrar que la resolución de problemas pueda ser concebida como un área más:

> *"Se deberá procurar la adquisición de destrezas numéricas básicas y el desarrollo de competencias geométricas de carácter elemental, así como de estrategias personales que permitan al alumno enfrentarse ante varias situaciones problemáticas relacionadas con la vida cotidiana."*

Además, la resolución de problemas se centra aquí en el afrontamiento de situaciones problemáticas relacionadas con la vida cotidiana, alejándose en cierto sentido de la resolución de problemas como medio de construcción de conocimientos, para dirigirse hacia la solución de problemas como actividad autónoma de utilización de conocimientos previamente aprendidos.

Entre los objetivos específicos de las matemáticas en la ESO, en las enseñanzas mínimas (2000), encontramos uno primero muy general:

> *"Utilizar las formas de pensamiento lógico en los distintos ámbitos de la actividad humana."*

De lo que se deduce, en coincidencia con la introducción de las matemáticas en la etapa, que el primer objetivo del estudio de las matemáticas es el desarrollo genérico del pensamiento lógico. Este objetivo se sitúa más allá de la disciplina, al *nivel de la Sociedad*.

De los demás objetivos, tres se refieren a la aplicación de conocimientos a problemas de la vida diaria. Dos de ellos se sitúan al *nivel del área*: aplicación a la vida diaria de los conocimientos geométricos y de los métodos y procedimientos estadísticos y probabilísticos. El tercero, más general, se mantiene al *nivel disciplinar*:

> *"Aplicar con soltura y adecuadamente las herramientas matemáticas adquiridas a situaciones de la vida diaria."*

Parece detectarse por tanto una redundancia, a no ser que se considere que los conocimientos geométricos y los procedimientos estadísticos y probabilísticos no son herramientas matemáticas. Pero lo interesante es notar que el único objetivo relativo explícitamente a la resolución de problemas se mantiene en el *nivel disciplinar*:

> *"Resolver problemas matemáticos utilizando diferentes estrategias, procedimientos y recursos, desde la intuición hasta los algoritmos."*

El currículo desarrollado posteriormente (Real Decreto 937/2001) añade otro objetivo a los anteriores:

> *"Desarrollar técnicas y métodos relacionados con los hábitos de trabajo, la curiosidad y el interés para investigar y resolver problemas, la responsabilidad y*

> *colaboración en el trabajo en equipo y la flexibilidad suficiente para cambiar de punto de vista en la búsqueda de soluciones."*

Esta evolución posterior separa todavía más la resolución de problemas del resto de conocimientos matemáticos. Veremos que, curiosamente, en los últimos estándares americanos que analizaremos posteriormente, se percibe una tendencia análoga a concentrar todo el bloque relativo a la resolución de problemas en un ámbito aparte, aunque asignándole un estatuto distinto al de las demás áreas o bloques de contenido.

5.3.1.3. El nivel de las áreas y sectores

Seguiremos profundizando en el papel que se asigna a la resolución de problemas en el currículo analizando cuáles son los contenidos y los criterios de evaluación que son propuestos por la legislación educativa. Según la terminología curricular, lo que nosotros designamos como disciplina (matemáticas, lengua, ciencias, etc.) aparecen como "áreas de conocimiento", mientras que las áreas y sectores que constituye el nivel inmediatamente inferior al de las disciplinas vienen recogidas en el currículum mediante la expresión de "bloques de contenido".

En las enseñanzas mínimas, los contenidos especificados para cada uno de los cuatro cursos que componen la ESO son divididos en cuatro bloques: *Aritmética y álgebra*, *Geometría, Funciones y gráficas*[29] y *Estadística y probabilidad*[30]. En el caso del bloque de *Funciones y gráficas*, se presenta, como contenido último, la "Interpretación y lectura de gráficas en problemas relacionados con la vida cotidiana". En el resto de los bloques no aparecen ningún contenido que explícitamente refiera a la resolución de problemas.

[29] En el primer curso de ESO se denomina "Tablas y gráficas".

[30] En primer curso este bloque no está incluido.

En el currículum los contenidos están más especificados que en las enseñanzas mínimas. Pero, antes de introducirnos en el estudio de los contenidos propuestos para cada curso, queremos destacar otra cuestión llamativa: en el currículo de matemáticas de la ESO, en el que se diferencian dos itinerarios (Matemáticas A y Matemáticas B), se indica explícitamente en los diferentes desarrollos curriculares que "Los contenidos de las Matemáticas de tercer y cuarto curso, opción A, se orientan hacia un desarrollo más práctico y operacional de los conocimientos básicos de la asignatura. De esta manera, se ofrece a los alumnos que cursen esta opción, la posibilidad de resolver problemas relativos, tanto a la actividad cotidiana como a otros ámbitos del conocimiento". En primer lugar llama la atención que, siendo la resolución de problemas el eje propuesto como parte indisoluble de la actividad matemática y su aprendizaje, se destaque específicamente en la opción A, como diferencia con la opción B, el hecho de se trabajen problemas. En segundo lugar, un análisis de los contenidos nos muestra que no tienen lugar diferencias en su desarrollo, entre las opciones A y B, en relación con la consideración de la resolución de problemas. Este segundo aspecto hace posible un análisis conjunto de los contenidos para el tercer y cuarto curso aunque existan dos itinerarios diferentes.

Situándonos ya en el nivel de las áreas, constatamos que la resolución de problemas es considerada como un contenido específico general para algunos de los bloques (por ejemplo, para Geometría en algunos cursos), mientras que para otros sólo se especifica la "aplicación a la vida cotidiana" en algunos de los sectores propuestos dentro del área. En el bloque de *Probabilidad* no se hace ninguna referencia en los contenidos ni a la resolución de problemas ni a la aplicación a la vida cotidiana. Para entender mejor la situación, explicitaremos a continuación de qué modo, para cada curso y bloque, aparecen referencias a la "aplicación a la vida diaria" o a la "resolución de problemas".

En el primer curso, dentro del bloque de *Aritmética y álgebra*, se explicita como contenido "Números naturales. El sistema de numeración decimal. Interpretación de códigos numéricos presentes en la vida cotidiana" y, "Magnitudes directamente proporcionales. Porcentajes. Aplicaciones a la resolución de problemas"; en el bloque de Geometría (dedicado a las figuras planas), como contenido final se indica "Resolución de problemas geométricos que precisen de la representación, el reconocimiento y el cálculo de las medidas de las figuras planas"; y en el de *Tablas y gráficas*, "Interpretación y lectura de gráficas relacionadas con los fenómenos naturales, la vida cotidiana y el mundo de la información".

En el segundo curso, para el bloque de *Aritmética y álgebra*: "Porcentajes: cálculo de aumentos y disminuciones porcentuales. Aplicación a la resolución de problemas" y "Ecuaciones de primer grado. Resolución de la ecuación de primer grado con una incógnita y coeficientes enteros. Utilización de las ecuaciones de primer grado en la resolución de problemas"; en el de Geometría: "Resolución de problemas geométricos que precisen de la representación, el reconocimiento y el cálculo de las medidas de los cuerpos elementales o de configuraciones geométricas formadas por triángulos, paralelogramos u ortoedros"; *Funciones y gráficas*: "Interpretación y lectura de gráficas relacionadas con los fenómenos naturales, la vida cotidiana y el mundo de la información"; *Estadística*: "Aplicaciones de la estadística en la vida cotidiana. Aplicaciones de la estadística en la ciencia".

En el tercer curso, para *Aritmética y álgebra*: "Interés simple. Aplicación a la resolución de problemas prácticos de la vida cotidiana" y "utilización de las ecuaciones de primer grado y de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas en la resolución de problemas relacionados con los fenómenos naturales, la vida cotidiana y el mundo de la información"; *Geometría*: no aparece ninguna referencia a la solución de problemas; *Funciones y gráficas*: "Interpretación y lectura de gráficas de problemas relacionados con los fenómenos naturales, de la vida cotidiana y el mundo de la información"; *Estadística y probabilidad*: no se hace referencia a la resolución de problemas.

En el cuarto curso, tanto para la opción A como para la B, en *Aritmética y álgebra*:

"Revisión de la proporcionalidad numérica y aplicación a la resolución de problemas prácticos de la vida cotidiana" y "Utilización de las ecuaciones y de los sistemas de ecuaciones en la resolución de problemas"; *Geometría*: no aparece resolución de problemas; *Funciones y gráficas*: "Interpretación y lectura de gráficas relacionadas con los fenómenos naturales, la vida cotidiana y el mundo de la información"; *Estadística y probabilidad*: no se hace referencia a resolución de problemas.

Respecto a los criterios de evaluación, curiosamente, se observan las tres tendencias que se vislumbraron en los contenidos: los criterios relativos al bloque de *Aritmética* y *Funciones y gráficas* indican que se deben aplicar *en actividades relacionadas con la vida diaria*; mientras que en los bloques de *Álgebra* y *Geometría* lo que se especifica es su uso *en la resolución de problemas* o, en todo caso, *en problemas de contexto real*; y en el bloque de *Estadística y probabilidad* no se especifica nada en estos sentidos.

Podemos afirmar en conclusión que es en los criterios de evaluación, que son comunes a los distintos bloques, donde vuelve a tomar un papel fundamental la resolución de problemas, reforzando así el carácter ya mencionado de actividad autónoma de utilización de contenidos previamente aprendidos. Además, parece detectarse una distribución no uniforme de los criterios, dando la sensación de que, para algunos de los bloques –*Geometría* y *Álgebra*–, lo adecuado es que sepan resolver problemas, mientras que, para otros –*Aritmética* y *Funciones y gráficas*–, lo importante es saber aplicarlos a la vida diaria. El caso de la *Probabilidad* queda nuevamente sin especificación alguna.

Lo que podemos considerar pues como un "fracaso" de la consideración de la resolución de problemas como eje integrador del currículo de matemáticas, queda patente en el análisis de algunos currículos, donde la resolución de problemas acaba apareciendo como uno de los bloques de contenidos de las matemáticas, junto con los cuatro tradicionales que se estipulaban en las enseñanzas mínimas. El siguiente párrafo, tomado del currículo actual de matemáticas en la Comunidad de Madrid (2002), muestra claramente la contradicción a la que conduce la pretensión de que la resolución de problemas cumpla un papel integrador en la enseñanza de las matemáticas cuando no se permite que dicho criterio modifique los niveles inferiores de determinación:

> *"La resolución de problemas debe contemplarse como una práctica habitual, que no puede tratarse de forma aislada, sino integrada en todas y cada una de las facetas que conforman el proceso de enseñanza y aprendizaje. También debe considerarse como un recurso metodológico, transversal a todos los contenidos, consistente en ejemplificar mediante una actividad concreta algún contenido específico."*

Éste es el objetivo general, que parece debiera incorporar la resolución de problemas en todas las cuestiones, temas, sectores y áreas de la disciplina matemática. Pero, y ahí surge la contradicción, ésta es la manera concreta como el currículum sugiere llevarla a cabo:

> *"Por ello, parece aconsejable la inclusión en cada curso de un bloque específico de resolución de problemas como contenido de enseñanza, donde el profesor deberá iniciar a los alumnos en técnicas de resolución de problemas, así como estrategias de pensamiento asociadas a esta resolución."*

Lo que debiera constituir un cambio disciplinar, se ve así confinado al papel de un área más de la matemática a enseñar. Se pueden vislumbrar entonces dos posibles evoluciones: o bien dicha área se "rellena" de los ingredientes necesarios para poder aparecer en igualdad de condiciones respecto a los demás bloques de contenidos (aritmética, álgebra, geometría, funciones, probabilidad), o bien acaba siendo tratada, en lo que se refiere a dedicación temporal e importancia evaluativa, al mismo nivel que los demás temas matemáticos del curso. En ambos casos, la consideración de un bloque específico para la resolución de problemas no hace más que agravar la dificultad objetiva (pero que se acabará seguramente atribuyendo a los alumnos, cuando no al profesor) de la problematización de las cuestiones matemáticas o extramatemáticas que se van a estudiar, es decir la contextualización de una cuestión inicial dentro de un tipo posible de problemas relativo a un tema matemático, en un sector y área particular. Separar la resolución de problemas de los "contenidos" (áreas, sectores o temas) que se deben estudiar equivale prácticamente a asumir la imposibilidad de integrar en la enseñanza el trabajo de problematización como motor, razón de ser y motivación de la construcción del conocimiento matemático.

5.3.2. La resolución de problemas en los estándares americanos

La situación que acabamos de describir respecto al tratamiento de la actividad de resolución de problemas en los actuales currículos de la enseñanza secundaria no es más que el reflejo en nuestro país de un movimiento más amplio cuyo máximo estandarte se sitúa en los Estados Unidos de América. En sus *Principles and Standards for School Mathematics* de 2000 se plantean diez aspectos en los que la escuela debe capacitar a los alumnos, estando agrupados cinco de ellos como "contenidos" y los otros cinco como "procesos". Los contenidos planteados son: *números y operaciones, álgebra, geometría, medida y análisis de datos y probabilidad*. La *resolución de problemas* es uno de los estándares de procesos, junto con *razonamiento y prueba, comunicación, conexiones* y *representaciones*.

Mientras que para los estándares de contenidos se explicitan objetivos concretos para cada etapa educativa, en los estándares de procesos se persiguen unos objetivos generales a lo largo de todos los cursos. El papel asignado a la resolución de problemas es fundamental:

> *"Solving problems is not only a goal of learning mathematics but also a major means of doing so (…). Problem solving is an integral part of all mathematics learning, and so it should not be an isolated part of the mathematics program. Problem solving in mathematics should involve all the five content areas described in these Standards." (NCTM, 2000, p. 51)*

Este planteamiento de la resolución de problemas como eje integrador del currículo de matemáticas se concreta, como se deduce de los objetivos en torno a la resolución de problemas, en la capacitación de los estudiantes para:

- construir conocimiento matemático nuevo a través de la resolución de problemas,
- resolver problemas que surgen en matemáticas y en otros contextos,
- aplicar y adaptar una variedad de estrategias apropiadas para resolver problemas,
- guiar y reflexionar sobre el proceso de resolución de problemas matemáticos.

Estos objetivos están interrelacionados de una forma muy específica, donde la reflexión sobre los procesos de resolución de los problemas cobra un papel fundamental.

> *"In order to find a solution, students must draw on their knowledge, and through this process, they will often develop new mathematical understanding (…).*

> *Students should have frequent opportunities to formulate, grapple with, and solve complex problems that require a significant amount of effort and should then be encouraged to reflect on their thinking" (NCTM, 2000, p. 51).*
>
> *"Through guided reflection, students can focus on the mathematics involved in solving a problem, thus solidifying their understanding of the concepts involved. They can learn how to generalize and extent problems, leading to an understanding of some of the structure underlying mathematics" (Op. Cit., p. 260).*

Y donde los hábitos positivos para el afrontamiento de problemas novedosos es una consecuencia del modo de trabajo habitual:

> *"By learning problem solving in mathematics, students should acquire ways of thinking, habits of persistence and curiosity and confidence in unfamiliar situations that will serve then well outside the mathematics classroom." (Op. Cit., p. 51).*
>
> *"These experiences should engender in students important problem-solving disposition and orientation towards problem finding and problem posing; and interest in, and capacity for, explaining and generalizing; and a propensity for reflecting on their work and monitoring their solutions" (Op. Cit., p. 258)*

El primer objetivo mencionado –construir conocimiento matemático nuevo a través de la resolución de problemas– se refiere a la necesidad de partir de situaciones de la vida cotidiana como motor de los aprendizajes y como contexto para la práctica de habilidades.

> *"Problem solving is central to inquiry and application and should be interwoven throughout the mathematics curriculum to provide a context for learning and applying mathematical ideas." (Op. Cit., p. 256)*

En este tipo de problemas deben aparecer datos implícitos que deben deducir de su vida cotidiana, información innecesaria o insuficiente, y se plantea como objetivo genérico el desarrollo de habilidades de orden superior.

> *"Teachers can help build student's problem analysis skills by including tasks that have extraneous information or insufficient information. And they can challenge students with problems that have more than one answer." (Ibíd., p. 258)*

Para explicar este hecho, se toman dos ejemplos que deberían ilustrar la concreción de este objetivo general a las distintas áreas o "contenidos" considerados, cuya concreción en "temas" o "cuestiones" se designa en este apartado en términos de "ideas" matemáticas que deben surgir en el aula. Uno de los ejemplos es el siguiente:

> *"I have pennies, dimes and nickels in my pocket. If I take three coins out of my pocket, how much money I have taken?" (NCTM 1989, p. 24 y NCMT 2000, p. 51).*

Y se explica que:

> *"Working of this problem offers good practice in additional skills. But the important mathematical goal of this problem- helping students to think systematically about possibilities and to organize and record their thinking- need not wait until students can add fluency." (NCTM 2000, p. 52).*

El otro ejemplo propuesto es:

> *"On centimetre graph paper outline all the shapes that have an area of 14 square cm and a perimeter of 24 cm. For each shape you draw, at least one side of each square must share a side with another square" (Op. Cit., p. 260).*

Con él se pretende que los alumnos asuman inicialmente que las figuras a las que se refiere son rectángulos y entonces pueden descubrir que el problema no tiene solución. Una vez que comprenden que son posibles otras formas que no son rectángulos, podrán enfocar el problema experimentando con unas cuantas formas, utilizando papel gráfico o 14 cuadrados recortables.

> *"In this problem, students draw on their knowledge of various geometric ideas, such as area, perimeter and congruence and transformations that preserve area and perimeter. Moreover, they engage in a process that is applicable to a wide variety of problems: gradually understanding a problem more deeply and then working systematically to determine all possible solutions" (Op. Cit., p. 260).*

El papel fundamental del profesor está provocado por el hecho de que muchos problemas pueden ser interesantes y divertidos pero no llevar al desarrollo de las ideas matemáticas importantes para el aula en un momento concreto:

> *"The teacher's role in choosing worthwhile problems and mathematical task is crucial. By analysing and adapting a problem, anticipating the mathematical ideas that can be brought out by working on the problem, and anticipating student's questions, teachers can decide if particular problems will help to further their mathematical goals for the class" (Op. Cit., p. 51).*

El segundo objetivo –resolver problemas que surgen en matemáticas y en otros contextos– se centra en la importancia de fomentar hábitos positivos de exploración sistemática y cuidadosa, persistencia, asunción de riesgos y fracasos y trabajo colaborativo.

El fomento de la aplicación y adaptación de una variedad de estrategias apropiadas para resolver problemas se refiere a los heurísticos, basados en Pólya (1945), destacando entre ellas el uso de diagramas, buscar patrones, enumerar todas las posibilidades, probar con valores o casos especiales, trabajar hacia atrás, ensayo y error, crear un problema equivalente, y crear un problema más simple.

> *"As with any other component of the mathematical tool kit, strategies must receive instructional attention if students are expected to learn them." (Op. Cit., p. 53).*

> *"Learning about problem-solving help students become familiar with a number of problem-solving heuristics, such as looking for patterns, solving a simpler problem, making a table, and working backward. These general strategies are useful when no know approach to a problem readily apparent." (Op. Cit., p. 260).*

Lo interesante de este caso es que se plantea una secuencia temporal que implica una progresión en el dominio de estas estrategias y que proporciona a la resolución de problemas mayor entidad como conocimiento a enseñar:

> *"In the lower grades, teachers can help children express, categorise, and compare their strategies (…) By the time students reach the middle grades, should be skilled at recognising when various strategies are appropriate to use and should be capable of deciding when and how to use them. By high school, students should have access to a wide range of strategies, be able to decide which one to use, and be able to adapt and invent strategies" (Op. Cit., p. 53).*

La forma en que se propone lograr este dominio es la reflexión, concretándose en que el profesor sintetice, después de que los alumnos hayan compartido cómo han resuelto un problema, qué estrategias han utilizado.

> *"Such discussion also suggest that no strategy is learned once and for all; strategies are learned over time, are applied in particular contexts, and become more refined, and flexible as they are used in increasingly complex problem situations." (Op. Cit., p. 53).*

> *"Teachers should also give students frequent opportunities to explain their problem-solving strategies and solutions and to seek general methods that apply to problem settings." (Op. Cit., p. 258)*

> *"Teachers can help students become reflective problems solvers frequently and openly discussing with them the critical aspects of the problem-*

> *solving process, such as understanding the problem and "looking back" to reflect on the solution and the process." (Op. Cit., p. 259)*

El objetivo de guiar y reflexionar sobre el propio proceso de resolución de problemas matemáticos es implantado a partir de los estudios de caracterización de los buenos resolutores de problemas, donde se ha detectado que estos se aseguran de comprender el problema, planifican frecuentemente, periódicamente hacen balance de su progreso, si deciden que no están progresando paran y consideran alternativas y no vacilan en tomar un enfoque completamente diferente, llegan a ser conscientes de lo que están haciendo y frecuentemente monitorizan su progreso, ajustando sus estrategias a medida que encuentran y resuelven problemas (Bransford, Brown y Rodney, 1999).

Se parte, en este planteamiento, de que, como afirman Garofalo y Lester (1985) y Schöenfeld (1987a), los fracasos de los estudiantes son debidos a menudo no a la carencia de conocimiento matemático, sino a lo inefectivo de lo que saben. Se concreta también este propósito en el desarrollo de "hábitos de reflexión" adecuados en los alumnos.

> *"Teachers play an important role in helping to enable the development of these reflective habits of mind by asking questions such as "Before we go on, are we sure we understanding this?", "What are out options?", "Do we have a plan?", "Are we making progress or should we reconsider what we are doing?", "Why do we think this is true?" (...) As teachers maintain an environment in which the development of understanding is consistently monitored through reflection, students are more likely to learn to take responsibility for reflecting on their work and make the adjustments necessary when solving problems." (NCTM 2000, pp. 53-54).*

Pretendiendo, como objetivo final de la resolución de problemas, que los alumnos transfieran lo que aprenden:

> *"To meet challenges in work, school, and life, students will have to adapt and extend whatever mathematics they know. Doing so effectively lies at the heart of problem solving." (Ibíd., p. 334).*

Tenemos aquí el desarrollo explicativo detallado de la posición que se asigna a la resolución de problemas en la enseñanza general de las matemáticas. Un objetivo que se formula a nivel disciplinar, cuyos aspectos deberían impregnar las distintas áreas de conocimiento consideradas (aunque no aparezca de manera detallada la articulación entre ambos tipos de "contenidos") y que sólo se ilustra a un nivel muy puntual mediante la consideración de resolución de cuestiones o problemas aislados. La única referencia a los niveles intermedios de la matemática a enseñar es la preocupación mencionada por que no se desvincule la resolución de problemas de las "ideas" matemáticas consideradas como importantes en el proceso de enseñanza.

La aparente incompatibilidad, que ya aparecía en el currículum español, entre los bloques de contenido y la resolución de problemas surge nuevamente aquí. En efecto, se ve necesario completar la dinámica de la actividad de resolución de problemas con otro tipo de "proceso" designado mediante el término "conexiones" que devolverá a los conceptos o "ideas" matemáticas su papel protagonista en la organización curricular y, por consiguiente, en la construcción del conocimiento matemático en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Este estándar de "Conexiones" se plantea, concretamente, capacitar a los alumnos para:

• reconocer y utilizar conexiones entre ideas matemáticas,

• comprender cómo están interconectadas las ideas matemáticas y relacionar unas con otras para producir un todo coherente,

• reconocer y aplicar matemáticas en contextos fuera de las matemáticas

Se pretende que los alumnos alcancen una comprensión más profunda y duradera que favorezca la utilidad de las matemáticas.

> *"When students can connect mathematical ideas, their understanding is deeper and more lasting. […] Through instruction that emphasizes the interrelatedness of mathematical ideas, students not only learn mathematics, they also learn about the utility of mathematics" (NCTM 2000, p. 63).*

Esta pretensión hace necesaria una mayor conexión entre las matemáticas, tanto dentro de un mismo curso como entre los diferentes cursos.

> *"Seeing mathematics as a whole highlights the need for studying and thinking about the connections within the discipline as reflected both within the curriculum of a particular grade and between grade levels." (Ibíd.)*

Destacándose la responsabilidad del alumno en el desarrollo de estas conexiones:

> *"This approach requires students to be responsible for what they have learned and for using that knowledge to understand and make sense of new ideas" (Ibíd.)*

Y en el profesor la del fomento de una disposición de búsqueda de conexiones en los alumnos:

> *"This disposition [disposition to use connections in solving mathematical problems] can be fostered through the guiding questions that teachers ask, for instance, "How is our work today with similar triangles related to the discussion we had last week about scale drawings? (...).*
>
> *By emphasizing mathematical connections, teachers can help students build a disposition to use connections in solving mathematical problems, rather as a set of disconnected, isolated concepts and skills." (Ibíd.)*

> *"By prompting from their teacher, students routinely ask themselves, `How is this problem like what I have done before? How is it different?'."* *(Op. Cit., p. 275).*

Se considera que hay "ideas" especialmente buenas para hacer conexiones matemáticas y pone como ejemplo la tarea de medir el diámetro y la longitud de la circunferencia, que puede ser estudiada tomando una gran variedad de objetos circulares y midiendo sus circunferencias y diámetros, trabajo que involucra varios contenidos curriculares, como son la medida, el análisis de datos, la geometría, el álgebra y el número. Curiosamente, esta actividad no se plantea aquí en términos de resolución de problemas, sino de consideración de "ideas" con gran poder de conexión.

Siguiendo el mismo principio, se defiende que el currículo debe ser coherente y estar bien articulado entre diferentes cursos, centrándose en torno a "ideas fundamentales" formando un todo integrado:

> *"The interconnections [between standards, such as algebra and geometry] should be displayed prominently in the curriculum and in instructional material and lessons. A coherent curriculum effectively organises and integrates important mathematical ideas so that students can see how the ideas build on, or connect with, other ideas, thus enabling them to develop new understandings and skills (…)*
>
> *Curricular coherence is also important at the classroom level (…) In planning individual lessons, teachers should strive to organize the mathematics so that fundamental ideas form an integrated whole." (Op. Cit., p. 14).*
>
> *"Learning mathematics involves accumulating ideas and building successively deeper and more refined understanding. A school mathematics curriculum should provide a road map that helps teachers guide students to increasing levels of sophistication and depths of knowledge" (Op. Cit., p. 15).*

Todo este desarrollo está dirigido a "aprender matemáticas con comprensión", que se refiere a lograr una comprensión conceptual (además de conocimiento factual y facilidad procedimental) y que implica adquirir un conocimiento que pueda adaptarse a las diferentes condiciones en que puede aplicarse; frente a la memorización sin comprensión:

> *"Being proficient in a complex domain such as mathematics entails the ability to use knowledge flexibly, applying what is learned in one setting appropriately in another (…). The alliance of factual knowledge, procedural proficiency, and conceptual understanding makes all three components usable in powerful ways. Students who memorise facts of procedures without understanding often are not sure when or how to use what they know, and such learning is often quite fragile (…)*
>
> *Well-connected, conceptually grounded ideas are more readily accessed for use in new situations (Skemp 1976)." (NCTM, 2000, p. 19).*

La razón fundamental para este objetivo es la exigencia social de una flexibilidad en el razonamiento:

> *"The requirements for the workplace and for civic participation in the contemporary world include flexibility in reasoning about and using quantitative information. Conceptual understanding is an essential component of the knowledge needed to deal with novel problems and settings. Moreover, as judgments change about the facts or procedures that are essential in an increasingly technological world, conceptual understanding becomes even more important (…). Change is a ubiquitous feature of contemporary life, so learning with understanding is essential to enable students to use what they learn to solve the new kinds of problems they will inevitably face in the future." (NCTM, 2000, pp. 19-20).*

En conclusión, lo primero que, a nuestro parecer, ilustran los estándares americanos es el salto que se produce entre los propósitos curriculares a nivel de la disciplina hacia los niveles puntuales de contenido. Los problemas aparecen siempre como cuestiones aisladas por resolver, pero no como el hilo conductor y constructor del conocimiento matemático. Entre este nivel puntual y el nivel de las áreas o "contenidos", sólo quedan las "ideas" a las que se atribuye un poder articulador. Para acabar de abundar en esta separación, se introduce un nuevo estándar, denominado conexiones como un complemento indispensable a la solución de problemas –como ilustra esta última cita:

> *"With the experience proposed here in making connections and solving problems from a wide range of contexts, students will learn to adapt flexibly to the changing need of the workplace." (NCTM, 2000, p. 288).*

La segunda gran característica de la propuesta curricular que acabamos de examinar es, sin duda, que se fundamenta en un modelo epistemológico-didáctico de la actividad matemático poco desarrollado, con unas directrices "fuertes" que se concretan en principios generales incuestionables (papel central de la resolución de problemas, importancia de la conexión entre contenidos, de la "racionalización" y justificación de la actividad, etc.) pero que no acaban de materializarse en propuestas constructivas que permitan ir más allá de la presentación de casos ejemplares y relativamente aislados.

Hemos visto, con el ejemplo de la reforma de las matemáticas modernas, que un modelo epistemológico más elaborado –aunque de origen externo a la problemática didáctica– no es garantía de eficacia, sobre todo cuando se ignoran las restricciones matemáticas y didácticas que impone el sistema de enseñanza en todos los niveles de determinación. Pero su sustitución por principios demasiados generales y con poco poder organizador puede acabar provocando un efecto perverso en el sistema, al encomendar a los profesores y alumnos unos objetivos tan imposibles de cuestionar como difíciles de concretar en los niveles intermedios de determinación. Y no creemos que este problema se resuelva mediante la opción de convertir estos principios generales en bloques de contenidos, dando lugar a "temas" o "sectores" enteros dedicados a la "resolución de problemas" (como hemos visto en el caso de la Comunidad de Madrid) o, siguiendo la misma lógica, a la "conexión de contenidos" o a la "demostración".

5.4. CONCLUSIONES

Hemos analizado en este estudio cómo se considera la resolución de problemas en el actual sistema de enseñanza de las matemáticas, qué papel se le otorga en cuanto a objetivo educativo y en qué niveles de especificación aparece formulado.

Los resultados apoyan las hipótesis de partida. Paradójicamente, la atribución asignada a la resolución de problemas como actividad estructuradora del currículum se convierte, debido a la ausencia de un cuestionamiento de los niveles superiores al tema, en un tema más, por la imposibilidad de transponerlo, sin salir del nivel temático, en el contenido común y dinamizador de todo el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Los mismos saltos que se detectan en los documentos curriculares se observan también en la investigación relativa a la resolución de problemas. Encontramos, por un lado, investigaciones preocupadas por enseñar a resolver problemas en cuanto a proceso básico e independiente del contenido y, por otro, planteamientos situados en el puntual o a lo sumo temático dentro del área disciplinar.

Del mismo modo que la restricción del ámbito de actuación de los profesores de matemáticas al nivel temático impide el desarrollo en el aula de las necesarias conexiones para incorporar los aspectos metacognitivos –necesarios para lograr una transferencia del aprendizaje, esto es, resolver problemas- en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; la restricción del ámbito de investigación al nivel también de los temas hace difícil plantear una propuesta adecuada.

La formulación de la resolución de problemas como objetivo general (a nivel de la sociedad, la escuela o las matemáticas), como promueven las propuestas curriculares, no puede concretarse en los niveles inferiores de determinación (áreas, sectores o temas concretos) sin pasar por tratarse de problemas más específicos en detrimento de su carácter más genérico. La ausencia de transposición de la resolución de problemas de matemáticas a los niveles intermedios lleva a que su "transposición" directa al nivel puntual sea deficiente.

Encontramos que la ausencia de un modelo de la actividad matemática que incorpore la resolución de problemas y con ello los aspectos metacognitivos, de manera integrada en el proceso de enseñanza-aprendizaje, hace difícil el desarrollo transpositivo necesario para llevar a la práctica este objetivo educativo. De este modo, la imposibilidad de incorporar la resolución de problemas en los niveles superiores de la disciplina hace que tampoco se logre en los niveles más concretos y ello deriva en el aislamiento de la resolución de problemas como un aspecto separado de los demás.

Esto explicaría el hecho de que el mandato curricular de "enseñar a resolver problemas" como objetivo fundamental y eje integrador de las matemáticas, se concrete, en último extremo, en la aparición de un "bloque alternativo", ya sea al lado de las demás áreas (ejemplo de la Comunidad de Madrid), ya sea como un nuevo tipo de bloque, "bloque de proceso" en oposición a "bloque de contenido" (ejemplo de los estándares estadounidenses). En este último caso, la necesidad de incorporar una dinámica perdida debido a la ausencia de un desarrollo explícito de la completitud creciente de las praxeologías a desarrollar requiere la incorporación de un nuevo proceso, las "conexiones", como instrumento de articulación curricular.

En estas circunstancias, no es extraño que las propuestas de instrucción se concreten básicamente en el entrenamiento en la aplicación genérica de las fases y heurísticos planteados por Pólya, que, en la práctica del aula de matemáticas no pueden dejar de concretarse en las características del problema con que se trabaja y, por la imposibilidad de desarrollar la resolución de problemas a niveles disciplinares superiores, el papel real de la resolución de problemas se ve reducido a dedicar en el aula un espacio cada cierto tiempo a "resolver problemas", puntuales y aislados, reproduciéndose así el fenómeno observado en el currículum.

Parece por tanto que la ausencia de las necesarias transposiciones "descendentes" de los saberes para incorporar la resolución de problemas como objetivo curricular está provocando restricciones para su puesta en práctica en el aula.

En el siguiente capítulo presentaremos una experiencia de aplicación de una propuesta de instrucción que pretende huir de estas restricciones curriculares. Veremos, además, que la verdadera actividad de resolución de problemas que se plantea promueve una razón de ser a los aspectos metacognitivos que se convierten así en un aspecto inseparable del proceso de enseñanza-aprendizaje.

CAPÍTULO VI. LOS RECORRIDOS DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN COMO PROPUESTA DE INSTRUCCIÓN

La transposición de la resolución de problemas, y con ello la metacognición, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas implica, como ya hemos adelantado, un modelo de la actividad matemática que lo integre de manera coherente en todos los niveles. La TAD, como hemos expuesto en el Capítulo IV, permite llevar a cabo esta integración con la construcción en el aula de procesos de enseñanza-aprendizaje que implican la construcción de praxeologías más allá de puntuales. Pero ¿cómo podemos lograr desarrollar este tipo de procesos de enseñanza-aprendizaje?

La propuesta se concreta en los denominados Recorridos de Estudio e Investigación (REI), que caracterizaremos en breve, pero de los que ahora destacaremos que parten de una concepción de la actividad matemática como actividad humana y con ello permiten que afloren en la actividad del aula aspectos metacognitivos que en las prácticas instruccionales habituales quedan ocultos a los ojos de los alumnos y por tanto excluidos del proceso de enseñanza-aprendizaje que éstos vivencian.

En este capítulo mostraremos la puesta en práctica de un REI y analizaremos los dispositivos implicados en su funcionamiento como proceso de enseñanza-aprendizaje, así como los resultados que se han obtenido respecto a su eficacia.

6.1. CARACTERIZACIÓN DE UN RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN

Los REI surgen a partir del estudio de cuestiones problemáticas cuya resolución requiere la construcción de una sucesión de praxeologías –conjunto de conocimientos teóricos y prácticos asociados- articuladas entre sí. De este modo, en los REI, la cuestión generatriz aparecerá como una posible manera de hacer vivir la actividad de resolución de problemas en el aula y con ello lograr la integración del conocimiento metacognitivo en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

La referencia a las razones de ser, que ya hemos citado anteriormente en este trabajo, tiene lugar en un intento por luchar contra una visión "monumentalista" de las obras, de los conocimientos, que son "mostrados" al alumno, como si se tratara de una exposición de cosas "que están ahí". Se defiende, por el contrario, la necesidad de mostrar a los alumnos en el proceso de enseñanza-aprendizaje las causas que llevan a que sea importante estudiar algo, aprenderlo, dominarlo. De lo contrario, como ya explicamos anteriormente, esos aprendizajes están condenados a "morir".

> *"Las cuestiones Q deben ser tomadas "en serio", no como meras oportunidades, pronto olvidadas, para hacer que aparezca el estudio de algunos monumentos matemáticos predeterminados, como un ilusionista hace aparecer un conejo de una chistera" (Chevallard, 2005, p. 7).*

Precisamente, a pesar de que "estudio" es utilizado como un término comprensivo, incluyendo investigación, se utiliza la denominación "de estudio e investigación" para diferenciarlo de la práctica escolar habitual, donde estudio consiste en "*hallar cosas* (...) que se convierten en monumentos que uno visitará sin intentar siquiera *descubrir* por qué están ahí" (*Ibíd.*).

> *"Hablamos de los REI para transmitir la idea de que tal recorrido es diseñado para permitir a los estudiantes investigar, esto es, descubrir cosas"* (*Ibíd.*)

Los REI surgen a partir del concepto de Actividades de Estudio e Investigación (AEI), que se caracterizan porque parten de una cuestión generatriz que permite hacer emergen un tipo de problemas y una técnica de resolución de dichos problemas, así como una tecnología apropiada para justificar y comprender mejor la actividad matemática que se ha llevado a cabo (Chevallard, 1999). Así, esta cuestión generatriz se convierte en la razón de ser de las praxeologías que son construidas en su proceso de estudio.

Pero los REI van más allá, superando el nivel local de las AEI y llegando incluso a niveles superiores al disciplinar. Podemos observar las últimas descripciones de los REI en Chevallard (2004 y 2005).

Un REI está determinado esencialmente por la voluntad de dar respuesta a alguna cuestión generatriz, y también por las limitaciones de las personas que se enfrenan a su resolución y los medios con que lo hacen. Encontramos que un REI no está predeterminado, siendo más bien un plan guiado por el contexto en la necesidad de responder a la cuestión, de modo que:

> *"La carencia relativa de determinación inherente a la noción de REI hace girar el proceso de estudio e investigación que la cuestión Q genera –y no sólo su puesta en marcha- hacia lo que el proceso de estudio e investigación debería ser: una aventura intelectual, humana e institucional que puede ser desarrollada a lo largo de diferentes rutas" (Chevallard, 2005, p. 7)*

Para continuar explicando la caracterización de los REI debemos pararnos un momento para explicar algo que Chevallard define como "la dialéctica de los media y de los medios" y que se refiere a la necesidad, en un régimen epistemológico democrático –frente a un antiguo régimen donde el "maestro" era considerado una fuente autoritaria por imposición- de que los alumnos no tengan que asumir las afirmaciones del profesor sin ningún cuestionamiento. Con "media" se refiere a cualquier sistema social que pretende comunicar algo a algún segmento de la población o a un grupo de gente sobre el mundo natural o social (tales como un libro, una conferencia, un texto...). Por ejemplo, la lección del profesor es el principal media para los alumnos. El "medio" no es concebido en su acepción sociológica, sino con el sentido de "medio-adidáctico" dado por la Teoría de Situaciones Didáctica de Guy Brousseau[31], es decir, cualquier sistema que carece de intenciones hacia la cuestión que se plantea –es decir, desprovisto de intención de enseñanza- y, por tanto, se comporta como un fragmento de la naturaleza –un sistema que no complace ni frustra tus esperanzas. Esta dialéctica deriva en otra, que está relacionada con la necesidad de lograr evitar, por parte de la escuela, una copia sin fin de una respuesta inscrita en un texto (que recibimos o que otros reciben) debido a las lecturas superficiales; para ello, a través de la "dialéctica de la inscripción y extracción" se defiende la reconstrucción de la respuesta inscrita, volviendo a dar vida a esa respuesta que el texto habrá más o menos desvirtualizado. Esta formación en la lectura "extractora" de los media es fundamental si la Escuela no quiere condenarse a fabricar bandadas de pequeños copistas.

En este contexto, Chevallard afirma:

> "Para que un REI sea efectivo como un medio para conseguir que las nuevas generaciones aborden una serie de cuestiones para ellos y para la sociedad, una cuestión generatriz debe ser no sólo "crucial" (y por tanto legítima), debe tener también suficiente "poder generador" para engendrar muchas cuestiones abiertas para el estudio y la investigación". (*Ibíd.*)

Elegir las cuestiones generatrices y los principales recorridos de estudio, explica este autor, es por lo tanto un paso crucial donde la política entra en

[31] Ver Brousseau (1986, 1997, 1998).

juego porque es una cuestión política a la vez que curricular que no pertenece sólo a investigadores y educadores, sino a también al resto de ciudadanos.

No es por tanto en este trabajo nuestro objetivo pretender responder a esta cuestión, sino simplemente mostrar las posibilidades de aplicación de esta propuesta de instrucción y su eficacia en relación con la incoporación de la resolución de problemas y la metacognición en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

6.2. OBJETIVOS DEL ESTUDIO

Los objetivos se pueden concretar en:

(a) Diseñar y llevar a cabo un Recorrido de Estudio e Investigación en el que:

- Se propone al grupo de alumnos una cuestión problemática inicial "viva" para ellos y pertinente en algunos de sus ámbitos de actuación (familiar, social, escolar, disciplinar, etc.).

- No se fijan de antemano las cuestiones y etapas intermedias que permitirán dar una respuesta satisfactoria a la cuestión inicial. También habrá que ir precisando, durante el estudio, en qué consiste esta respuesta y qué significa que sea satisfactoria.

- Los alumnos tienen suficientes recursos para comenzar el estudio y apropiarse de la cuestión inicial.

- Las posibles respuestas a la cuestión inicial requieren la movilización de conocimientos que, en el currículum de secundaria, aparecen poco articulados o conectados entre sí.

- La situación debe permitir que los alumnos "se puedan proporcionar" "buenos medios", es decir, elementos que permitan una autoevaluación de las soluciones o respuestas intermedias propuestas y que proporcionen materiales apropiados para su desarrollo.

- Se intenta dirigir el estudio del grupo de alumnos de tal modo que la mayoría de decisiones del proceso recaigan sobre los alumnos y el resto se pueda consensuar con ellos.
- El profesor o director del proceso vela por la aparición de los diferentes momentos del estudio y procura que se les atribuya (especialmente en duración y atención) la importancia apropiada.

(b) Observar y evaluar el proceso realizado con especial atención en:

(b.1) Incorporación de la resolución de problemas como eje generador de la actividad matemática

- Estudiar las posibilidades de aplicación de un REI, con especial atención a las restricciones de las que pretende huir, y las dificultades que se detectan en dicho intento.
- La capacidad del REI propuesto para generar todo un proceso de enseñanza-aprendizaje dirigido al estudio de su respuesta que exija la combinación de conocimientos que en Educación Secundaria son puntuales y que muestre la razón de ser de un conocimiento cuya funcionalidad en los sistemas habituales es muy reducida, esto es, la representación gráfica de funciones.

(b.2) Aspectos metacognitivos

(b.2.1) En relación con la construcción de praxeologías más allá del nivel puntual: conocimiento metacognitivo

- Explorar la explicitación de los diferentes niveles de *conocimiento metacognitivo* en el ámbito de la resolución de problemas de matemáticas, cuya razón de ser vendrá provocada por la necesidad de:

- desarrollar técnicas matemáticas para estudiar problemas cercanos y relacionar y combinar técnicas conocidas para elaborar técnicas más complejas y potentes;
- delimitar distintos tipos de problemas como paso previo para su conexión, distinción o articulación, mediante la puesta en evidencia de elementos tecnológicos o técnicos comunes;
- reorganizar ingredientes tecnológicos antiguos y elaborar discursos nuevos para adaptarlos a los nuevos tipos de problemas estudiados y a los nuevos desarrollos técnicos.

(b.2.2) En relación con el nuevo reparto de responsabilidades: regulación metacognitiva

- En este caso nos centraremos en las restricciones provocadas por el contrato didáctico (Brousseau, 1984, 1990, 1998, 2000) que regula el proceso de enseñanza-aprendizaje, que se materializarán en el análisis de qué aspectos de los procesos de estudio que habitualmente se sitúan bajo la responsabilidad del profesor pasan a ser asumidos como responsabilidad también de los alumnos en los REI. Será necesario considerar dos tipos de restricciones:
    - Las que dificultan al profesor compartir esa responsabilidad con el alumno.
    - Las que dificultan al alumno asumir la responsabilidad que le viene asignada en la resolución de la cuestión.

La superación de algunas de estas las restricciones se prevé que permita que afloren aspectos relativos a la *regulación metacognitiva* tales como la planificación, regulación y evaluación del aprendizaje, que pasarán a formar parte del proceso de estudio de la cuestión que llevan a cabo profesor y alumnos.

(b.3) Transferencia de los aprendizajes para resolver nuevos problemas

Analizar la eficacia de la propuesta de instrucción en la capacidad de resolución de problemas por parte de los alumnos participantes.

Dadas las limitaciones de la prueba final escrita se intentó además estudiar qué aprendizajes consideraban que habían desarrollado a través del REI, además de los evaluados en la prueba escrita, que era difícil aprender en el aula habitual de matemáticas, así como su opinión sobre las causas que provocan la dificultad.

(b.4) Creencias y actitudes

Evaluaremos la influencia provocada por el tipo de enseñanza-aprendizaje seguido en las actitudes de creencias de los alumnos en relación con las matemáticas y la resolución de problemas.

6.3. PROCEDIMIENTO

6.3.1. Diseño del REI: elección de la cuestión generatriz y directrices para la guía en el estudio por parte del profesor

Si siguiéramos la terminología propia de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986, 1998 y 2000), diríamos que la cuestión generatriz de un REI debe poder formularse inicialmente sin recurrir al "conocimiento" (o a la praxeología) que se quiere construir. En el caso de los REI, no hay ninguna praxeología dada de antemano hacia la que se debe dirigir el estudio, es decir, que un REI se proponga construir. El objetivo de un REI es estudiar una cuestión problemática, no utilizar la cuestión como excusa para construir un conocimiento previamente determinado. Obviamente, la respuesta a una cuestión problemática será una respuesta en forma de una praxeología, pero ésta, sus componentes, "tamaño", ecología, etc., se irán precisando a lo largo del proceso de estudio, sin antecederle. De ahí que hablemos de la "apertura" del proceso de estudio en contraste con los procesos didácticos habituales, más cercanos a la aproximación "monumentalista" de las obras.

Volviendo otra vez a la terminología de la TSD, también es necesario que cuestión inicial sea suficientemente productiva en el sentido de que proporcione un gran número de "variables didácticas"[32] que contribuyan a la generación del proceso. Pero, en este caso, a diferencia de en la Teoría de Situaciones Didácticas, no es necesariamente el profesor, sino la clase como "comunidad de estudio" la que debe llevar a cabo la manipulación (previa detección) de estas variables didácticas. Profundizaremos en este aspecto más adelante, ya que está estrechamente relacionado con el objetivo (b), esto es, el nuevo reparto de responsabilidades que promueven los REI en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

La cuestión elegida ha sido la comparación de tarifas de teléfonos móviles. El origen de esta cuestión se sitúa en el curso de matemáticas de 1º de Ciencias Empresariales de la Facultad de Economía IQS impartido por Eduard Barrabés y Marianna Bosch. Desde el curso 98/99 se viene trabajando la cuestión de la comparación de tarifas, aunque desde un punto de vista más tradicional: presentación de un enunciado, datos realistas pero no reales, secuenciación predeterminada del proceso de resolución, etc.

Se decidió utilizar esta cuestión pero dándole un carácter más real y cercano a los alumnos, enfocándola al caso de las tarifas de móviles y dejando a los alumnos responsabilizarse durante todo el proceso de la respuesta a la

[32] En la Teoría de las Situaciones Didácticas "Una variable didáctica es un elemento de la situación que puede ser modificado por el maestro y que afecta a la jerarquía de las estrategias de solución (por su coste, su validez, su complejidad)" (Briand, y Chevallierd, 1995, p. 68).

cuestión, siendo necesario ir precisando durante el estudio incluso en qué consiste dar una respuesta y qué significa que sea satisfactoria.

Los conocimientos necesarios para comenzar el estudio y apropiarse de la cuestión inicial son dominados por todos los alumnos que participan en las experiencias.

La investigadora, que será la que llevará a cabo las experiencias como director del estudio se plantea como objetivos específicos hacer que la responsabilidad en la toma de decisiones durante todo el proceso sea asumida en la mayor medida posible por todo el grupo clase como comunidad de estudio. También velará por la aparición de los diferentes momentos del estudio, procurando que se les dedique la duración y atención apropiadas.

Analizaremos el cumplimiento de estos objetivos, así como la capacidad de la situación para permitir que los alumnos "se puedan proporcionar" los medios adecuados para permitir la auto-evaluación del proceso y las respuestas intermedias y posibiliten la continuación de su desarrollo.

6.3.2. Sobre la capacidad de los REI para incorporar la resolución de problemas como eje de la actividad matemática

6.3.2.1. Posibilidades de aplicación de un REI

La aplicación de un REI exige la ruptura con algunas de las "normas" que son impuestas por niveles superiores al disciplinar y que precisamente por esa razón se convierten en restricciones para su puesta en práctica.

Una restricción fundamental, que ha sido mostrada en el Capítulo V, se refiere a la *organización de los aprendizajes* escolares en disciplinas. A su vez, las matemáticas, están organizadas en áreas, sectores y temas.

Los REI, que no se muestran centrados en un tema, sector, área, ni siquiera disciplina, encuentran dificultades para ser desarrollados dentro de un aula normal de matemáticas.

Otra restricción importante deriva de que en esta propuesta de instrucción los saberes sólo son objeto de estudio en la medida en que responden a la cuestión a la que se pretende dar respuesta. Se considera así que:

> *"(...) un saber debe sacrificarse, incluyendo sus posibles usos posteriores, a partir del momento en que ya no aparece como algo que permite responder a ciertas cuestiones, a resolver ciertos problemas" (Chevallard, 2004, p. 7).*

Las posibles implicaciones de este sistema de instrucción a lo largo de un curso, una etapa o toda la escolaridad no son objeto de nuestro análisis en este trabajo, pero citaremos algunas ideas que proporciona Chevallard a este respecto:

> *"Un REI viene generado por una cuestión con fuerte poder generador, susceptible de imponer numerosas cuestiones derivdas y de conducir así al encuentro con gran número de saberes a enseñar- y algunos otros, que marcarán el límite provisional del terreno.*
>
> *El conjunto de REI de un curso escolar debería permitir idealmente `cubrir' el programa sin lagunas, pero no sin cierto número de redundancias útiles a los aprendizajes*". (Chevallard, 2004, pp. 7-8).

> *"Debido a su carácter abierto, el cuestionamiento que genera un REI "disciplinar" (en matemáticas, física, biología, historia, etc.) sobrepasa en general el marco estricto de la disciplina que se considera.*
>
> *(...) Un REI en "matemáticas" es así necesariamente, por su ausencia de normalización epistemológica a priori, un asunto de matemáticas mixtas, donde objetos mayoritariamente matemáticos se mezclan con objetos que provienen de otros universos de la actividad humana" (Chevallard, 2004, pp. 7-8).*

La propuesta que hace este autor va más allá incluso del área disciplinar, defendiendo la co-disciplinariedad natural en el abordaje de las cuestiones frente a lo que considera, al hablar de los REI limitados a un área de conocimiento concreta, un "monumentalismo enmascarado".

Sin embargo, consciente de la situación escolar actual, admite que los REI en el marco de los estudios escolares debe situarse en relación a cierto "programa" que sólo debería desbordar excepcionalmente

En nuestro caso particular, donde sólo nos preocupamos por un REI y no por el conjunto de ellos que podrían permitir organizar un curso escolar, una etapa o toda la escolaridad, nos limitaremos a afirmar que en el sistema de enseñanza-aprendizaje actual, debido a las restricciones curriculares, no tiene cabida dirigir un proceso de estudio de este tipo en un aula de matemáticas en su discurrir habitual sin encontrar fuertes restricciones. Por estas razones, debido a que la evaluación de la posible eficacia de un REI implica que se cumplan sus requisitos básicos y en el sistema escolar habitual hemos mostrado que existen restricciones que lo dificultan, las experiencias se llevaron a cabo con carácter extraescolar.

Una última restricción que pudimos prever, y por tanto evitar con anticipación, la constituyen la brevedad de las "clases" en Educación Secundaria, teniendo una duración de 50-55 minutos. Por ejemplo García (2005), en su intento por implantar un REI pero en la dinámica normal de un aula de matemáticas, encontró que este aspecto constituía fuertes limitaciones a su correcto desarrollo. Por esta razón, la duración prevista inicialmente de las sesiones fue de dos horas.

6.3.2.2. Capacidad del REI para provocar la conexión entre conocimientos

Las posibles respuestas a la cuestión inicial requieren la movilización de conocimientos que, en el currículum de secundaria, aparecen poco articulados o conectados entre sí. Se prevé que un REI provoque, a través de la incorporación de la resolución de problemas como eje generador de la actividad matemática, la necesidad de relacionar conocimientos aislados inicialmente unos de otros en la búsqueda de una respuesta a la cuestión.

En el caso del REI planteado en este trabajo –la comparación de tarifas de telefonía móvil- analizaremos su capacidad para hacer vivir en el aula el papel instrumental, el carácter funcional, de las representaciones gráficas que, como mostramos en el estudio empírico del Capítulo II, es un conocimiento "muerto" en los alumnos de Bachillerato. Esto será derivado de la necesidad de, para dar respuesta a la cuestión planteada, movilizar los siguientes conocimientos matemáticos:

(a) "Construcción" de la expresión algebraica de cada función-tarifa (funciones lineales y lineales a trozos).

(b) Utilización de las gráficas para realizar la comparación de tarifas dado que el "coste" de la comparación algebraica (sistema de inecuaciones) es muy alto cuando hay más de dos funciones o más de dos casos ("trozos") a considerar.

(c) Uso de las gráficas como "medio" para comprobar la validez de las soluciones y presentar los resultados de forma sintética.

(d) Posibilidad de ampliar la cuestión inicial con la introducción de la función parte entera para el caso de tarifas "por pasos".

Para este objetivo el análisis consistirá en mostrar si realmente el REI provoca en los alumnos la vivencia de la utilidad funcional de las representaciones gráficas y la necesidad de su aprendizaje.

Se podrá mostrar también cómo la necesidad de responder a la cuestión generatriz implicará la conexión no sólo entre conocimientos de diferentes ténicas, temas o áreas de la matemática, sino también la conexión de las matemáticas con otras disciplinas, como, por ejemplo, la informática.

6.3.3. Sobre la explicitación del conocimiento metacognitivo en el REI

Estudiaremos cómo, en los REI, la necesidad de conectar conocimientos para la resolución de la cuestión, exige la explicitación del conocimiento metacognitivo.

Analizaremos someramente qué tipo de conocimiento metacognitivo aparece por la necesidad de elegir las técnicas más adecuadas, desarrollar técnicas elaborando otras más complejas, delimitar distintos tipos de problemas, y reelaborar los ingredientes tecnológicos antiguos para adaptarlos a los nuevos tipos de problemas.

6.3.4. La incidencia del REI sobre la regulación metacognitiva

Estudiaremos cuál es el nuevo reparto de responsabilidades en el proceso de estudio que promueven los REI y qué restricciones se encuentran en relación con el contrato didáctico habitual.

Nos interesa observar qué decisiones hay que tomar cuando se libera el proceso de estudio de un gran número de restricciones que impone la institución escolar y que, por naturalización, son transparentes para los sujetos de la institución -incluyendo al investigador, víctima también de la "ilusión de transparencia" descrita por Bourdieu (Bourdieau y Passeron, 2003).

Queremos analizar hasta qué punto estas decisiones, a pesar de ser decisiones "didácticas" (en el sentido clásico de que afectan a la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje) forman parte integrante del trabajo matemático de estudio de cuestiones problemáticas en los REI y se corresponden con aspectos metacognitivos relacionados con la planificación, regulación y evaluación del aprendizaje.

Nos centraremos entonces en que decisiones sí deben tomarse en los REI que en los procesos de enseñanza-aprendizaje habituales no corresponden al proceso de estudio, tales como planificar el estudio, decidir su cronología y su topología (reparto de tareas), evaluar los resultados, elegir cuestiones más sencillas o casos particulares para lanzar el estudio, buscar información, analizarla y desarrollarla, etc.

También analizaremos cuáles son las restricciones que se encuentran en la ruptura de ese contrato didáctico y la sustitución por las nuevas normas relativas al reparto de responsabilidades. Están serán analizadas tanto desde el punto de vista del profesor –en la necesidad de compartir las responsabilidades de gestión del proceso de estudio con los alumnos, asumiendo en consecuencia nuevas responsabilidades a la vez que comparte otras-, como desde el punto de vista de los alumnos –que deberán asumir responsabilidades que no forma parte de sus "obligaciones" en los procesos de enseñanza-aprendizaje habituales-.

6.3.5. Sobre la transferencia del aprendizaje

Se prevé que durante el desarrollo del REI los alumnos lleven a cabo procesos de transferencia en relación con lo que van aprendiendo debido a que la variedad de situaciones que van apareciendo les obligarán a decidir qué técnica aplicar, si las técnicas son adecuadas o es necesario modificarlas y de qué modo. Se llevará a cabo de este modo una evaluación procesual que será validada por la propia cuestión que se está estudiando.

Pero, además, fue llevada a cabo una evaluación final, que incluía dos tipos de pruebas:

a) Una *prueba final escrita individual* consistente en un "problema". Este problema es relativo también a la comparación de tarifas pero en este caso de telefonía fija, mientras que el REI fue en torno a la comparación de tarifas de telefonía móvil. Se ofrece además a los alumnos la información sobre las tarifas directamente impresa de Internet, sin organizar ni unificar (por ejemplo, una compañía muestra el precio en euros, la otra en céntimos de euro; cada compañía describe la información relativa a precios en diferentes franjas horarias de modo diferente...; dificultades semejantes a las que habían encontrado con las tarifas de telefonía móvil). Una nueva variable que aparece es la posibilidad de "bonos" de llamadas, así como que en la telefonía fija, a diferencia de en la telefonía móvil, el primer minuto se cobra por segundos. La prueba final se muestra en el *Anexo B.2* (*Material 6*).

En el segundo REI se añadió una quinta cuestión a esta prueba individual escrita:

> *5) Cita otros "problemas" donde se podría aplicar un proceso semejante al seguido con la comparación de tarifas de telefonía móvil en este taller.*

Con esta cuestión se pretende complementar la información relativa a la transferencia percibida por los alumnos en relación con lo aprendido en el taller.

b) Dos preguntas que fueron planteada a los alumnos para que las respondieran individualmente y posteriormente fueron objeto de una puesta en común:

- ¿Qué cosas hemos aprendido en este taller?
- ¿Qué cosas aprendidas en este taller es difícil aprender en clase y por qué?

Con la primera pregunta se pretende estudiar el grado de generalización que han desarrollado de sus aprendizajes en cuanto a las posibilidades de aplicación. La segunda pretende profundizar en las opiniones de los alumnos respecto a las diferencias en el proceso de instrucción seguido en la clase habitual de matemáticas y en los REI y si perciben que esas diferencias son causa del tipo de aprendizaje que es posible lograr con ellos.

6.3.6. Sobre el efecto del REI en las creencias y actitudes

Para analizar el efecto de la propuesta de instrucción desarrollada sobre las creencias y actitudes de los alumnos en relación con las matemáticas y la resolución de problemas se utilizará el "CAETI- Trait Thinking Questionnaire", desarrollado por O'Neil y Schacter (1997), que se puede consultar en el *Anexo B.2* (*Material 7*).

Diversos estudios (p. e., Herl, O`Neil, Chung y Dennis, 1997; Martínez, 1993; Schacter, Herl, Chung, O´Neil, Dennis y Lee, 1997) han mostrado una alta fiabilidad y validez del cuestionario, que está centrado específicamente en la evaluación de las creencias y actitudes relacionadas con la resolución de problemas.

En la *Tabla VI.1* se muestran las escalas que evalúa y los ítems que constituyen cada uno de ellas.

Las escalas de "planificación" y la "auto-evaluación" se corresponden con aspectos de la regulación metacognitiva, incluyendo la última tanto la evaluación del progreso como del resultado final.

ESCALAS	*ÍTEMS*	
	Nº	*Contenido*
Planificación	1	Determino cómo voy a resolver la tarea antes de empezar a resolverla.
	8	Planifico cuidadosamente qué pasos voy a dar.
	11	Intento comprender las tareas antes de intentar resolverlas.
	19	Intento comprender el objetivo de una tarea antes de intentar responderla.
	25	Me planteo mis objetivos y lo que necesito hacer para llevar a cabo una tarea.
	28	Me imagino las partes de la tarea que tengo que analizar.
	33	Estoy seguro de que comprendo lo que ha sido hecho y cómo hacerlo.
	36	Intento determinar lo que la tarea requiere.
Estrategias cognitivas	2	Para comprender una tarea, dibujo un gráfico si es posible.
	7	Mientras resuelvo una tarea, voy siguiendo en mi mente los pasos de un plan.
	12	Mientras resuelvo una tarea, intento hacerlo de más de una manera.
	17	Pienso cuidadosamente en qué quiere decir la tarea antes de empezar a responderla.
	21	Selecciono y organizo la información relevante para resolver una tarea.
	29	Empleo más tiempo tratando de comprender tareas difíciles.
	34	Intento descubrir la idea principal en una tarea.
	38	Me pregunto a mí mismo cómo se relaciona la tarea con lo que ya sé.
Auto-evaluación	3	Mientras resuelvo una tarea, compruebo cómo lo estoy haciendo.
	6	Me hago preguntas para saber cómo estoy haciendo la tarea.
	13	Compruebo mi trabajo mientras lo estoy haciendo.
	16	Cuando doy por finalizada la tarea, sé cuánto de ella he completado.
	22	Analizo el grado en que es correcta la resolución que he planteado de la tarea.
	30	Corrijo mis errores.
	35	Compruebo mi precisión a medida que progreso en la tarea.
	39	Me pregunto si lo estoy haciendo bien a medida que progreso en la tarea.
Esfuerzo	4	Trabajo duro para hacerlo bien incluso si no me gusta la tarea.
	9	Pongo el máximo esfuerzo en hacer las tareas.
	14	Trabajo tan duro como me es posible en las tareas que se proponen.
	18	Deseo hacer trabajo extra sobre las tareas para mejorar mi conocimiento.
	23	Me concentro tanto como puedo cuando estoy haciendo una tarea.
	26	Trabajo duro sobre la tarea incluso si no puntúa en la nota.
	31	Una tarea es útil para comprobar mi conocimiento.
	40	La práctica lleva a la perfección.

Autoeficacia[33]	5	Creo que tendré muy buenas calificaciones este curso.
	10	Realmente puedo comprender las cosas más difíciles presentadas en este curso.
	15	Estoy seguro de que puedo comprender los conceptos básicos enseñados en este curso.
	20	Confío en que puedo comprender los contenidos más complejos presentados por el profesor en este curso.
	24	Confío en que puedo hacer un excelente trabajo en las tareas y exámenes de este curso.
	27	Espero hacerlo bien este curso.
	32	Sé que puedo dominar las habilidades que están siendo enseñadas en este curso.
	37	Considerando la dificultad de este curso, el profesor, y mis capacidades, pienso que lo haré bien este curso.

Tabla VI.1 Escalas que constituyen el CAETI- Trait Thinking Questionnaire e ítems que corresponden a cada escala

Autoeficacia POST-TEST	5	Creo que tendré muy buenas calificaciones este curso.
	10	Realmente he comprendido las cosas más difíciles presentadas en este curso.
	15	Estoy seguro de que he comprendido los conceptos básicos enseñados en este curso.
	20	Confío en que he comprendido los contenidos más complejos presentados por el profesor en este curso.
	24	Confío en que he hecho un excelente trabajo en las tareas y exámenes de este curso.
	27	Espero hacerlo hecho bien este curso.
	32	Sé que puedo domino las habilidades que nos han enseñado en este curso.
	37	Considerando la dificultad de este curso, el profesor, y mis capacidades, pienso que lo he hecho bien este curso.

Tabla VI.2 Escala de autoeficacia transformada en el post-test.

La escala de "estrategias cognitivas" está estrechamente relacionada con las fases implicadas en la resolución de un problema, por ejemplo, comprender bien la tarea antes de comenzar a resolverla (ítem 17) o seleccionar y organizar la información previamente (ítem 21); así como con el uso de los clásicos heurísticos, por ejemplo, hacer un gráfico (ítem 2).

[33] Los ítems de esta escala en el post-test son transformados a tiempo pasado, para que los alumnos valoren en relación con el curso que han seguido. Y se muestran en la *Tabla VI.2.*

La escala de "esfuerzo" se centra en el interés que muestran los alumnos por realizar bien las tareas, así como, en estrecha relación con este aspecto, el valor que dan a las tareas que se les proponen para perfeccionar su conocimiento.

Finalmente, la "eficacia" tiene dos interpretaciones diferentes en el pre-test y en el post-test. Los ítems de la versión original (la utilizada en el pre-test) evalúan el grado en que los alumnos confían en estar haciéndolo bien, en ser capaces de comprender los aprendizajes...; mientras que en el post-test los alumnos deben valorar, al final del proceso, si lo han hecho bien o no, y han sido capaces o no de comprender los aprendizajes. En ambos casos se trata de creencias de autoeficacia, pero mientras que en el primero todavía están a tiempo de modificar sus actuaciones en el segundo se hace referencia a lo que ya ha ocurrido en el pasado.

Se utilizó un procedimiento de evaluación pre-test/ post-test, utilizando un grupo control formado por alumnos del mismo curso y centro que habían decidido no participar en la experiencia. Es decir, se evalúo a todos los alumnos del centro de 1º de Bachillerato con anterioridad al desarrollo de la experiencia. Posteriormente, tras finalizar la experiencia, fueron evaluados de nuevo todos los alumnos -tanto los que habían participado en ella (grupo experimental) como los que no lo habían hecho (grupo control)-. Esta evaluación posterior se llevó a cabo tras finalizar la propuesta de instrucción pero antes de realizar los exámenes.

Como explicaremos posteriormente, al describir las condiciones de realización de los REI, en las dos experiencias llevadas a cabo los alumnos del grupo experimental no fueron elegidos por los investigadores, sino que decidieron voluntariamente participar en la experiencia.

6.4. ACLARACIONES PREVIAS A LA DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LOS REI

Se llevaron a cabo dos experiencias de implementación del REI en torno a la cuestión generatriz elegida (la comparación de tarifas de telefonía móvil) en dos años sucesivos con dos grupos de alumnos distintos de diferentes centros y zonas de la Comunidad de Madrid.

Se procederá aquí a la descripción y análisis del primer REI y posteriormente se realizará el mismo proceso con el segundo -explicando además cuáles fueron las razones que provocarón a la necesidad de llevar a cabo una segunda experiencia el torno a la misma cuestión generatriz-, pero queremos destacar antes de continuar dos aspectos de suma importancia en relación con ambos.

6.4.1. La importancia de los diarios

En primer lugar, es importante tener en cuenta que ambos REI fueron implementados por la propia investigadora[34], llevando a cabo al mismo tiempo el trabajo de diseño, experimentación, observación y análisis del proceso. Las sesiones fueron grabadas en video y en audio. Además, se llevó a cabo un diario escrito para tomar nota del proceso seguido que fue complementado con las grabaciones.

Todo el desarrollo de los diarios fue plasmado, complementándolo con información de las grabaciones en vídeo y audio, con especial atención a todos aquellos aspectos que estaban o podrían estar relacionados con los objetivos propuestos. Por ejemplo, el anotar en el diario si la cuestión la

[34] Durante este capítulo, en la descripción y análisis de los REI se utilizará como denominación "el profesor", a pesar que lo implementó en ambos casos la investigadora, para facilitar la lectura.

plantea el profesor o los alumnos pretende ofrecer información sobre la repartación de responsabilidades. El diferenciar quién plantea cada cuestión, por ejemplo si es el profesor quien plantea analizar la situación antes de probar con una técnica al azar o son los alumnos los que llaman la atención sobre la conveniencia de este análisis previo, se incluye en la descripción porque es puede representar un aprendizaje por parte de los alumnos en el segundo caso, mientras que una imposición o sugerencia del profesor en el primero. El incluir información detallada de lo acaecido, permite a un lector conocer a través de la lectura del diario, no sólo las tareas que fueron abordadas, sino también, por ejemplo, cuáles fueron descartadas, quién las había planteado, quién justifico la conveniencia de no realizara. De este modo se puede observar cuándo aparecen incluso cuestiones que, a pesar de ser planteda su realización por el profesor, los alumnos justifican, como veremos más adelante, no llevarlas a cabo, lo que informa sobre la ruptura con el sistema de enseñanza-aprendizaje que podemos denominar clásico pasando a cobrar importancia la resolución de la cuestión más allá del contenido que el profesor plantee si no está justificado por el estudio.

Estos *diarios*, que son incorporados como Anexos -así como los materiales que se han considerado fundamentales para comprender el proceso seguido- no constituyen por tanto una información secundaria. Su situación como anexos se debe, sencillamente, a razones organizativas para facilitar la lectura del trabajo, pero tienen una importancia fundamental.

De hecho, en el análisis de los REI en función de los objetivos propuestos, dado el carácter parcial que obligan a dar a la información para poder organizarla, unido al hecho de que describir todos los aspectos en profundidad llevaría prácticamente a reproducir el diario, se desvirtúa un proceso complejo que es transmitido de modo más completo a través de la lectura de los diarios.

6.4.2. Estructura de los diarios

Para facilitar la consulta de los diarios, vamos a explicar cuál es la estructura que se ha seguido en su exposición.

El *Anexo B.1* contiene el diario del primer REI y los materiales adjuntos a dicho diario están expuestos en el *Anexo B.2.*

El diario del segundo REI se encuentra en el *Anexo B.3* y sus materiales adjuntos en el *Anexo B.4*.

Al comienzo de cada diario se proporciona un índice paginado de las cuestiones tratadas en dicho REI, así como de los materiales que se han incluido como anexo. Este índice permite una visión general del proceso seguido, si bien su desarrollo es de gran interés.

Cada diario está organizado por sesiones y, en cada sesión se van describiendo las cuestiones que fueron abordadas y el modo como se llevó a cabo. Las cuestiones se enumeran según el orden de aparición a lo largo del proceso. En ocasiones, por ejemplo, una cuestión puede ser planteada en una sesión y que se postergue su realización por alguna razón (que será explicada en el diario) a una sesión posterior, en cuyo acaso aparecen explicitados ambos hechos.

Los materiales que son comunes a ambos REI (la "Prueba de evaluación final" y el "CAETI-Trait Thinking Questionnaire") son adjuntados en el primer diario y sólo referenciados en el segundo.

Cada cuestión se presenta, en ambos diarios, con el formato descriptivo que se muestra en la Figura VI.1 (y se sitúan encuadradas, tal y como se muestran en dicha figura, a lo largo de su desarrollo):

CNº (quién ha planteado la cuestión)[35]: ***Descripción de la cuestión a realizar***. *Indicación exacta que se hace a los alumnos o que hacen los alumnos cuando no coincide con la descripción de la cuestión a realizar.* ***(quién debe llevar a cabo la resolución de la cuestión)***[36]

Figura VI.1 Formato descriptivo de cada cuestión en los diarios.

Cuando a lo largo del diario se transcriben conversaciones, los interlocutores se simbolizan del siguiente modo: P (profesor), A (alumno), A1, A2... (cuando intervienen varios alumnos en la conversación), G1, G2 (cuando son los alumnos de un grupo), AA (cuando son varios alumnos de la clase no del mismo grupo).

6.4.3. Condiciones generales comunes en ambos REI

En ambos casos se propone a todos los alumnos de 1º de Bachillerato de un centro, diferente en cada REI, la posibilidad de participar a un "taller de matemáticas"[37] totalmente voluntario que se realizaría por la tarde en sesiones de dos horas dos días a la semana en horario extraescolar.

El taller se presenta como una "experimentación" que no debía confundirse con una clase de "resolución de dudas" sobre el contenido específico de la asignatura de matemáticas.

[35] La cuestión puede haber sido planteada por la profesora, en cuyo caso no se indicará nada, o por los alumnos. En caso de que la planteen los alumnos se indicará: "alumno" si ha sido uno sólo o "alumnos" si han sido varios.

[36] La cuestión puede tener que llevarla a cabo la profesora, en cuyo caso se indicará "profesor" o los alumnos. En este segundo caso, las opciones pueden ser cuatro: "gran grupo" (si se llevará a cabo su resolución en gran grupo); "en grupos" (si se trabajará en pequeños grupos y luego se pondrá en común), "alumno" (si lo debe llevar a cabo un solo alumno); "alumnos" (si lo tiene que abordar sólo un grupo de alumnos); o "individual". También puede aparecer la palabra "pendiente", utilizada cuando se plantea una cuestión pero se retrasa la decisión de quién debe llevarla a cabo.

[37] Se utilizó la denominación "Taller de matemáticas" para presentárselo a profesores y alumnos.

La cronología de los REI inicialmente prevista es de dos dos horas dos días a la semana y de ello se informa a los alumnos con anterioridad a que decidan participar.

También comparten ambos REI las pruebas de evaluación finales –con la salvedad descrita en relación con la pregunta que se añadió a la prueba individual escrita en el segundo REI-.

Finalmente, en ambos casos se administró del mismo modo, descrito anteriormente, la prueba *CAETI- Trait Thinking Questionnaire*, con la única diferencia de que en el segundo REI el post-test del cuestionario se realizó durante el "taller", en vez de posteriormente en una de las clases de matemáticas. Esta sutil diferencia, como veremos, conllevó importantes consecuencias.

6.5. PRIMER REI EN TORNO A LA COMPARACIÓN DE TARIFAS DE TELEFONÍA MÓVIL

La experiencia en la aplicación de esta propuesta de instrucción se llevó a cabo durante el curso 2003/04 en un colegio privado-concertado de una zona de nivel social medio-alto del centro de Madrid.

Participaron en la experiencia un grupo de 14 alumnos, 12 de la opción Científico-Tecnológico y 2 de la opción Humanidades y Ciencias Sociales. Según nos comentó su profesorera de matemáticas, todos ellos estaban entre los mejores alumnos de sus clases.

El REI fue desarrollado en sesiones de dos horas o dos horas y media, uno o dos días a la semana, de principios de marzo hasta mediados de junio. Teniendo en cuenta los períodos de exámenes, días de fiesta, etc., el recorrido duró un total de 18 sesiones. Además, los alumnos, como se va describiendo en el diario, realizan también bastante trabajo fuera de las sesiones.

El cuestionario *CAETI-Trait Thinking Questionnaire* fue administrado a los alumnos antes y después del desarrollo del REI, durante sus clases habituales de matemáticas.

En el *Anexo B.1* se muestra el diario de la experiencia y los materiales que se han considerado fundamentales para comprender el proceso seguido se pueden consultar en el *Anexo B.2.*

Sería conveniente la lectura completa del diario, o al menos una revisión del índice que se muestra al comienzo del mismo, pero se facilita a continuación una rápida síntesis de las fases que conllevó el estudio, que se irá detallando a medida que se van analizando los resultados relacionados con los objetivos que nos hemos planteado inicialmente.

Una cuestión importante es que se pueden considerar dos fases en esta primera experiencia con el REI: una centrada en las comparaciones de tarifas ficticias, más dirigida por la profesora, y otra ligada a los datos reales, donde los alumnos fueron asumiendo cada vez en mayor medida la responsabilidad en la construcción de la respuesta a la cuestión.

La primera parte la englobó desde la primera sesión hasta la cuarta, donde se determinaron los datos necesarios para comparar dos tarifas y ejecutando tareas de ese tipo donde se iban incluyendo variaciones que iban aumentando la complejidad el modo de resolución de modo que las técnicas tuvieran que ir evolucionando y relacionándose (comparación de dos tarifas en función de la duración de la llamada, comparación tres tarifas, inclusión del cobro por pasos y comparación con el cobro por segundos...).

Si bien en la primera parte los alumnos participaron activamente e incluso plantearon y respondieron cuestiones, en la segunda parte realmente se apropiaron de la cuestión, llegando a dirigirla en las direcciones que consideraban conveniente, justificaban y aceptábamos entre todos. Esta segunda parte se desarrollo desde la quinta hasta la última sesión, pero está a su vez compuesta por dos sub-partes.

De las sesiones quinta a octava se desarrollo una tarea propuesta por los alumnos. Y es que a partir del planteamiento global del REI propuso un alumno la posibilidad de desarollar una comparativa entre las tarifas de las diferentes compañías, un informe, para posteriormente "vendérselo a las compañías que salieran más favorecidas". Se planteó a los alumnos en este contexto incluir en los informes indicaciones sobre el modo de hacer más competitiva la compañía en relación con los resultados de la comparativa.

Las sesiones novena a décimo-octava se centraron explícitamente en elaborar un material dirigido a que una persona pudiera saber qué compañía le interesa más. Se debe concretar por tanto qué tipo de información se pedirá a esa persona, qué tipo de respuesta se le quiere o se le puede dar. Se utilizó el programa Excel para elaborarlo y resultando finalmente tres versiones: la normal, una "para vagos" y otra "para muy vagos"[38].

6.5.1. Posibilidad y dificultades de aplicación del REI

Recordamos que la experiencia tuvo un carácter extracurricular con la intención explícita de evitar algunas de las restricciones provocadas por el nivel curricular, que han sido descritas anteriormente. A pesar de ello, no sabíamos si estas normas provocarían reticencias en los alumnos. Resultó que realmente los alumnos se adaptaron bien a las condiciones, especialmente al

[38] De estas tres hojas de cálculo que resultaron, además de mostrarse una versión impresa como material adjunto en el diario, se incluye una versión "para usuario" en el CD adjunto.

hecho de que no estábamos dentro de un “tema”, sino abordando una cuestión con las “herramientas” que se mostraran oportunas.

A medida que se íban apropiando los alumnos de la cuestión se iba observando con mayor claridad la adecuidad del tiempo planificado (dos horas), llegando incluso a superar las dos horas y media en ocasiones.

6.5.2. Capacidad del REI para provocar la conexión entre conocimientos

La funcionalidad de la representación gráfica fue desarrollada a través de su conexión con otros conocimientos puntuales de los que disponen los alumnos, como la representación algebraica, debido a la necesidad de combinarlos para el estudio de la cuestión.

Se mostró, como se había previsto, que la cuestión permitió dar una razón de ser a un conocimiento –la representación gráfica de funciones- que pudimos observar que estaba “muerto” para de los alumnos que participaron en el trabajo empírico que presentamos en el Capítulo II.

La primera herramienta utilizada en la comparación de tarifas consistió, como se preveía, en la construcción de la expresión algebraica.

Posteriormente, la necesidad de comparar tarifas cuya resolución algebraica implica inecuaciones así como de comparar más de dos funciones o más de dos casos a considerar provocó en los alumnos la construcción de esta praxeología que permite conectar realmente una función y su representación gráfica, así como valorar las utilidades de dicha representación.

También vivenciaron los alumnos la utilidad de las representaciones gráficas como medio para poder comprobar la validez de las respuestas dadas inicialmente de modo algebraico y/o para sintetizar la información.

Se mostró además cómo los alumnos llegaron a plantear un tipo de herramienta no prevista y que consiste en la utilización de los *precios medios y sus gráficas*, especialmente útiles para sintetizar información. Esto surgió en el marco de una propuesta planteada por los alumnos y que consistía en "realizar un informe comparativo de las tarifas de las diferentes compañías para posteriormente poder vendérsela a las compañías que salieran mejor paradas en dicha comparación". Esta cuestión fue planteada por el alumno en la sesión quinta y su trabajó se desarrolló hasta la octava sesión, en que se finalizó.

Otro tipo de *conocimientos* que aparecieron fueron *estadísticos*. La necesidad de reducir la cantidad de información que se solicita al posible usuario de modo que al final no consista la comparativa en analizar una a una cada factura para determinar cuál es la tarifa más conveniente, provocó la necesidad de realizar un estudio estadístico sobre el porcentaje de segundos que se cobran "de más" en las tarifas que utilizan pasos de 30 segundos en vez contabilizar la duración de la llamada por segundos.

Fue necesario el tratamiento evidentemente globalizado de todos estos conocimientos y construcciones en la respuesta a la cuestión.

6.5.3. Explicitación del conocimiento metacognitivo

Sin la pretensión de desarrollar un estudio profundo de este aspecto, nos limitaremos a ejemplificar los diferentes niveles de conocimiento metacognitivo cuya necesidad de aprendizaje ha surgido a lo largo del desarrollo del REI. Estos vienen provocados tanto por la elección de conocimientos, que implica la comparación entre varios para determinar cuál es el más adecuado, como por su adaptación a las nuevas tareas, aspectos ambos muy relacionados.

Aparecen conocimientos metacognitivos de nivel inter-puntual, por ejemplo, cuando los alumnos deben decidir qué técnica utilizar para determinar el precio de una tarifa. Básicamente las posibilidades son utilizar la expresión algebraica o la representación gráfica. Todos los alumnos inicialmente utilizan la expresión algebraica, incluso en las ocasiones en que sería claramente más "eficaz", por coste y eficiencia, utilizar la representación gráfica (sólo los casos que hemos ejemplicado anteriormente y que muestran la razón de ser del dicho conocimiento). Ocurre que los alumnos no disponían del conocimiento que permite decidir en qué ocasiones es más conveniente utilizar una u otra técnica, conocimiento que han desarrollado a lo largo de la respuesta a la cuestión.

Se desarrolla también un conocimiento interpuntual durante el desarrollo de las técnicas. Por ejemplo, cuando los alumnos necesitan hacer evolucionar la técnica de la comparación gráfica desde un primer momento, donde se comparan sólo dos gráficas hasta aquellas donde se lleva a cabo la comparación de varias gráficas teniendo además diferente modo de cobro cada una (por ejemplo, una cobra por pasos y otras por segundos).

Sólo con un conocimiento matemático profundo se podrían determinar las referencias a los niveles interlocales e interregionales con precisión. Sí destacaremos que en el REI se produjo la necesidad de combinar conocimientos relativos a diferentes áreas (por ejemplo, estadística, como se ha descrito en el apartado anterior), si bien es verdad que esta necesidad para el investigador clara fue planteada por el profesor. En esta cuestión pudieron haber influido las restricciones curriculares de organización del estudio en áreas de conocimiento que, en último término, estuvieran provocando restricciones en el alumno.

El desarrollo del REI implicó numerosos conocimientos incluso más allá de la disciplina matemática. Por ejemplo, buscar información, valorar su veracidad, sintetizarla y organizarla.

6.5.4. La regulación metacognitiva y el nuevo reparto de responsabilidades

El REI se proponía explícitamente intentar que los alumnos se responsabilizaran de una serie de compenentes del estudio que normalmente están fuera de su responsabilidad y que precisamente son los aspectos relacionados con la planificación, regulación y evaluación del aprendizaje.

Las restricciones encontradas en los alumnos para asumir dichas responsabilidades se mostraron fuertemente relacionadas con la *regulación* y la *evaluación* del aprendizaje.

Los alumnos se mostraron muy reticentes a llevar a cabo procesos de regulación y evaluación, mostrando una actitud pasiva consistente en la búsqueda continua de la valoración de la calidad de sus propuestas en el profesor. Ante las negativas del profesor a responder, explicándoles que disponían de medios para poder determinarlo por sí mismos, la primera reacción fue la comparación con los trabajos realizados por otros grupos, en la búsqueda de una coincidencia que utilizarían para apoyar sus propuestas. Cuando el profesor solicitaba una justificación más allá de la coincidencia o cuando la falta de coincidencia obligaba a buscar explicaciones en otro lugar, la fuerte ruptura hacía incluso que se paralizara el trabajo. Además, debido a su seguridad, como parte del contrato didáctico, de que el profesor sabe la respuesta a todas las tareas que plantea, los alumnos se lo tomaban como un juego del profesor al que suponían que cedería si tardaban en proporcionar la respuesta esperada. El profesor tuvo así que luchar contra sus deseos de dar la respuesta a los alumnos -bajo la ilusoria idea que de este modo lo aprenderían-.

Una restricción importante que se encontró es la *economía temporal* del profesor, que conduce a que, ya no promovido por una ausencia de respuesta en el alumno, sino por la necesidad de continuar "rápido", aporte a los alumnos las respuestas o les ofrezca los medios necesarios para que los apliquen, en vez de proporcionar la espera y los medios adecuados para que lo construyan los alumnos. Esta restricción afectó también al desarrollo de este REI que, si bien no tenía un tiempo de duración prefijado inamovible, si estaba sujeto a unas condiciones de apertura que hacían difícil determinar exactamente en qué aspectos podía derivar su resolución. Así el profesor, a pesar de su intención explícita de dejar que los alumnos regularan y evaluaran su aprendizaje y de disponer de un medio adecuado para que lo hicieran, en ocasiones imponía a los alumnos la respuesta en vez de dejar que el proceso de resolución de la cuestión les llevara hacia ella. Esto se muestra, por ejemplo, cuando el profesor plantea a los alumnos que utilicen la gráfica para comprobar los resultados dados por procedimientos algebraicos en vez de esperar a que surgiera la necesidad de la representación gráfica en los alumnos por el tipo de cuestión a resolver. Por razones de esta economía el profesor llega incluso a desistir de un intento por implantar un posible dispositivo de evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje consistente en la realización de una síntesis de lo aprendido por parte de los alumnos y que, dadas las dificultades que presentaba su realización a los alumnos se decidió eliminar.

Estas consideraciones no pretenden defender que el profesor se deba mantener al margen de la actuación de los alumnos y no les aporte la guía necesaria, lo que sí quiere mostrar es la dificultad de la puesta en práctica del "constructivismo dialéctico" de Vigotsky (1978) en la determinación de qué ayudas son las necesarias para ayudar al alumno a que construya sus aprendizajes.

Una situación diferente se puede considerar, por ejemplo, cuando el profesor, ante los intentos frustrados de los alumnos en la búsqueda de un modo de intentar considerar las diferencias de precio entre tarifas que cobran por segundos o por pasos de 30 segundos pero sin tener que pedir al usuario las duraciones de cada una de las llamadas que suele realizar, les planteó la posibilidad de hacer un estudio de la proporción de llamadas de cada tipo que es estadísticamente más probable. En este caso, si bien se podría haber dejado a los alumnos un descubrimiendo de la bondad de la técnica estadística para resolver la cuestión, dada la necesidad previa existente y la búsqueda intencional por parte de los alumnos de un modo de resolverlo, se considera más adecuada la aportación del profesor. Pero, como se puede observar, no mostramos criterios completos ni definitivos.

La responsabilidad del alumno en la construcción de la respuesta a la cuestión fue creciendo a medida que se avanzaba en el proceso. De hecho en lo que hemos descrito como la tercera fase, donde se trataba de elaborar un material que permitiera a un usuario determinar qué compañía era más conveniente para él por que tuviera un coste más reducido, los alumnos llevaron a cabo un importante trabajo de determinación del tipo de respuesta que se quería ofrecer, los costes y beneficios de cada tipo de respuesta, tanto para el usuario (en cuanto a cantidad de datos que se le solicita) como para nosotros en la construcción de los cálculos necesarios para responder al usuario. Tras decidir finalmente qué precisión en la respuesta sacrificar a cambio de que reducción en el coste y elaborarar una primera propuesta de comparación de tarifas en modo de hoja de Excel, se decide, para dar respuesta a la variedad de posibles usuarios de la página, elaborar dos nuevas versiones, una “para vagos” y otras “para muy vagos”, cada una de las cuales solicita menos datos a cambio de una respuesta menos precisa.

Si bien, como hemos descrito, en el intento por rehacer el reparto de responsabilidades, en relación con la regulación y evaluación se mostraron fuertes restricciones por parte de los alumnos, en el caso de la planificación no pueden citarse dificultades para su incorporación por parte de los alumnos debido a que este aspecto fue objeto de una fuerte ilusión de transparencia por parte del investigador. En efecto, se ha observado que la planificación, debido a su carácter más propiamente didáctico –esto es, de gestión del estudio- es asumido de modo tan transparente por el profesor –y a su vez investigador- que fue necesario un análisis a posteriori del proceso del REI para determinar la ausencia del intento por hacer responsable al alumno de esta labor, que forma parte también del proceso de construcción de respuesta a la cuestión.

En este primer REI la planificación de la que se intenta hacer corresponsables a los alumnos es muy limitada y está muy relacionada con la previsión de utilidad de las técnicas o la previsión de resultados, pero está muy lejos de intentar responsabilizar a los alumnos realmente del verdadero proceso de planificación en la respuesta a la cuestión. Este intento será uno de los objetivos fundamentales de la segunda aplicación del REI un año después.

En cuanto a la *gestión de los momentos del proceso de estudio* por parte del profesor, resultó que la búsqueda de la respuesta a la cuestión generatriz fue posibilitando y ofreciendo, de manera natural, la aparición de cada momento y en la medida adecuada. Resultaba que precisamente era la intervención del profesor la que coartaba en ocasiones este proceso dado naturalmente por la necesidad de responder a la cuestión. Esto se observa muy claramente, por ejemplo, cuando, en el momento en que los alumnos están elaborando los gráficos de todas las tarifas de todas las compañías, dado que la profesora considera que ya dominan la técnica, por la "prisa de pasar a lo siguiente", les plantea dejarlo para continuar con otra cuestión y los alumnos, sorprendidos, responden que "cómo van a dejarlo si no han terminado". Es decir, ese momento de difícil instaraución en las aulas en su justa medida, consistente en el trabajo de la técnica, había surgido de modo natural, como necesidad de respuesta a la cuestión y era la profesora la que pretendía, por el hecho de que consideraba que ya dominaban el conocimiento que estaban utilizando lo suficiente, dejar a un lado la cuestión para pasar al siguiente conocimiento. Los alumnos, que en este momento se habían apropiado ya realmente de la cuestión, se mostraron, claro, sorprendidos por este resquicio monumentalista del profesor que pretendía retirarles ya de la vista ese monumento como si se tratara de una visita a un museo.

Además de estos fenómenos, queremos destacar un dispositivo que resultó de gran interés durante este REI. Este dispositivo, que no fue propuesto por el profesor sino por los alumnos, consiste en la *construcción de* la respuesta en forma de *una página Web* donde los usuarios pudieran consultar información relativa a la comparación de tarifas de telefonía móvil. Para la construcción de la página Web, la determinación de qué materiales debían ser incorporados en ella y de qué modo debían ser expuestos fue un importante dispositivo de *institucionalización*.

6.5.5. La transferencia del aprendizaje

La prueba final escrita –que, recordamos, se puede consultar en el *Anexo B.2* (*Material 6*), cuyo grado de relación con las tareas realizadas en clase ha sido ya analizado, no conllevó prácticamente dificultades para los alumnos. En una valoración de la prueba sobre 10, la media del grupo fue de 8.5, encontrándose errores de cálculo fundamentalmente y también algún error en la determinación de la información por ejemplo en cuanto al precio por minuto de una tarifa en un horario, que fue confundido con el precio de otro horario, pero no detectándose problemas en la transferencia del aprendizaje a las nuevas condiciones de la telefonía, en este caso fija, propuestas en la prueba.

Las dos preguntas planteadas individualmente y luego comentadas en gran grupo resultaron muy interesantes.

En relación con la primera pregunta -"*¿Qué cosas hemos aprendido en este taller?*"-, que pretendía profundizar en el grado de generalización de sus aprendizajes en cuanto a las posibilidades de aplicación, resultó abarcar diversos tipos de aspectos. Algunas estaban centradas en el conocimiento propiamente matemático (p.e., cómo comparar funciones por sus gráficas; cómo igualar el precio medio de diferentes tarifas de teléfono; o para qué sirve el precio medio y el precio medio ponderado), otras relacionadas con la aplicación de lo matemático a la vida diaria (p.e., cómo usar funciones para solucionar problemas reales; cómo elegir la tarifa más barata para hablar por teléfono móvil; cómo comparar tarifas de teléfono; que las compañías de teléfono móvil no dan los datos de la forma más fácil para entenderlos, que serían funciones), con el uso de Excel (p.e., cómo usar excel para solucionar funciones,) o de carácter más general en relación con la vida diaria (p.e., que siempre puedes hablar un minuto entero por teléfono, porque te cobrarán siempre como mínimo un minuto aunque hables menos). Se puede consultar una síntesis de las respuestas dadas en el diario del primer REI (*Anexo B.2*).

Ahora vamos a centrarnos en aquellos aspectos generales de la resolución de problemas que fueron planteados por los alumnos en respuesta a esta pregunta.

Se encontraron respuetas relacionadas con: la capacidad evaluadora del alumno (p.e., que podemos nosotros comprobar si algo está bien o no); la falsedad de la estructura superficial de los problemas (p.e., que a veces las apariencias engañan y problemas que parecen sencillos pueden resultar muy complejos mientras que problemas que parecen inicialmente más complejos luego, cuando te pones a hacerlo, resultan más sencillos); las posibilidades de respuesta (p.e., que no siempre hay una única forma de solucionar los problemas, a veces hay varias, a veces son mejores unas u otras dependiendo de las necesidades; que a mayor cantidad de datos, mayor exactitud, a menor cantidad de datos, más fácil, pero menos exactitud).

La respuesta a la segunda pregunta planteada –"*¿Qué cosas aprendidas en este taller es difícil aprender en clase y por qué?*"- pretendía profundizar en la percepción de los alumnos respecto a las características del trabajo del aula habitual de matemáticas, si las perciben, que hacen difícil desarrollar algunos de los aprendizajes desarrollados durante el REI.

Las respuestas realmente nos sorprendieron. Algunos alumnos no contestaron nada, pero uniendo las cosas que algunos de ellos plantearon podemo sintetizarlo del siguiente modo: los alumnos opinan que en el "taller" hemos podido "aplicar lo que ven en clase a la vida real porque en clase no da tiempo", "trabajar en equipo, porque en clase trabajan siempre individualmente", "decidir ellos mismos si está bien o mal porque en clase lo dice el profesor", "la complejidad de la realidad, que en clase se simplifica mucho". Otros aprendizajes que plantearon pero sin jusitificar la razón por la que creen que en el aula habitual no se llevan a cabo son: "llegar ellos mismos a las cosas, en vez de que se las digan", "descubrir cosas matemáticas ellos mismos".
He retrasado hasta el final de esta descripción la afirmación que más me sorprendió sobre el aprendizaje que se lleva a cabo en el "taller" y es difícil desarrollar en el aula: "*Aprender por nosotros mismos, porque en clase no da tiempo*".
El grado de conciencia que mostraron algunos de los alumnos de la distancia entre lo trabajado en el aula y el aprendizaje útil, para la vida, nos resultó realmente sorprendente y provocó un reforzamiento de la necesidad de cambio en los sistemas actuales de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

6.5.6. Efecto en las creencias y las actitudes

Recordamos que se utiliza para la evaluación de las creencias y las actitudes el *CAETI-Trait Thinking Questionnaire* (O`Neil y Schacter, 1997).

Las tablas de análisis de datos que aportan información secundaria se adjuntan en el *Anexo C*.

A) Diferencias en función del tipo de matemáticas que se cursan

Como análisis previo se estudió si existían diferencias en las escalas medidas por el cuestionario utizado sobre resolución de problemas entre los alumnos en función del tipo de matemáticas que cursaban: *Matemáticas I* (31 alumnos, grupo A) o *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I* (41 alumnos, grupos B y C).

Como se puede observar en la *Tabla VI.3*, resultó que no se encontraron diferencias significativas entre estos grupos en ninguna de las escalas consideradas.

ANOVA

		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
PLANIFICACIÓN (PRE-TEST)	Inter-grupos	,042	2	,021	,088	,916
	Intra-grupos	16,662	69	,241		
	Total	16,705	71			
ESTRATEGIAS COGNITIVAS (PRE-TEST)	Inter-grupos	,754	2	,377	1,376	,259
	Intra-grupos	18,892	69	,274		
	Total	19,646	71			
AUTOEVALUACIÓN (PRE-TEST)	Inter-grupos	,628	2	,314	1,422	,248
	Intra-grupos	15,252	69	,221		
	Total	15,880	71			
ESFUERZO (PRE-TEST)	Inter-grupos	,614	2	,307	,873	,422
	Intra-grupos	24,266	69	,352		
	Total	24,880	71			
AUTOEFICACIA (PRE-TEST)	Inter-grupos	1,667	2	,833	2,106	,130
	Intra-grupos	27,310	69	,396		
	Total	28,977	71			

Tabla VI.3 Diferencias en escalas de CAETI-Trait Thinking Questionnaire entre alumnos según el tipo de matemáticas que cursan.

B) Diferencias entre grupo control y grupo experimental en pretest

En el grupo experimental participaron 12 alumnos que cursaban Matemáticas I y 2 que estaban cursando Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I. Los 54 alumnos del grupo control son compañeros de dichos alumnos del mismo centro y curso pero que no participaron en el REI.

Se consideró necesario determinar si existencian diferencias iniciales en las variables objeto de estudio entre los grupos control y experimental. En la *Tabla VI.4* se puede observar que sólo existían diferencias significativas en una de las escalas, resultando (ver *Tabla VI.5*) que los alumnos del grupo control tienen un mayor sentimiento de *autoeficacia* que los del grupo control antes de participar en la propuesta de instrucción.

En la explicación a este hecho se debe destacar la circunstancia de que, según nos informó la profesora, los alumnos que participaron en la experiencia se situaban entre los mejores de sus clases en matemáticas. El carácter voluntario también apoya la idea de que los alumnos del grupo experimental deben tener al menos un cierto gusto por las matemáticas.

ANOVA

		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
PLANIFICACIÓN (PRE-TEST)	Inter-grupos	,069	1	,069	,290	,592
	Intra-grupos	16,636	70	,238		
	Total	16,705	71			
ESTRATEGIAS COGNITIVAS (PRE-TEST)	Inter-grupos	,256	1	,256	,926	,339
	Intra-grupos	19,389	70	,277		
	Total	19,646	71			
AUTOEVALUACIÓN (PRE-TEST)	Inter-grupos	,361	1	,361	1,629	,206
	Intra-grupos	15,519	70	,222		
	Total	15,880	71			
ESFUERZO (PRE-TEST)	Inter-grupos	,030	1	,030	,084	,773
	Intra-grupos	24,850	70	,355		
	Total	24,880	71			
AUTOEFICACIA (PRE-TEST)	Inter-grupos	1,796	1	1,796	4,624	,035
	Intra-grupos	27,181	70	,388		
	Total	28,977	71			

Tabla VI.4 Diferencias en escalas de CAETI-Trait Thinking Questionnaire entre grupo control y experimental en pre-test.

Descriptivos

		N	Media	Desviación típica	Error típico	Intervalo de confianza para la media al 95% Límite inferior	Límite superior	Mínimo	Máximo
PLANIFICACIÓN (PRE-TEST)	Grupo experimental	14	2,7679	,56725	,15160	2,4403	3,0954	2,00	4,00
	Grupo control	58	2,6897	,46741	,06137	2,5668	2,8126	1,75	3,88
	Total	72	2,7049	,48506	,05716	2,5909	2,8188	1,75	4,00
ESTRATEGIAS COGNITIVAS (PRE-TEST)	Grupo experimental	14	2,6875	,56277	,15041	2,3626	3,0124	1,88	4,00
	Grupo control	58	2,5367	,51762	,06797	2,4006	2,6728	1,63	4,00
	Total	72	2,5660	,52602	,06199	2,4424	2,6897	1,63	4,00
AUTOEVALUACIÓN (PRE-TEST)	Grupo experimental	14	2,4375	,37899	,10129	2,2187	2,6563	1,88	2,88
	Grupo control	58	2,6165	,48940	,06426	2,4878	2,7451	1,63	4,00
	Total	72	2,5817	,47294	,05574	2,4705	2,6928	1,63	4,00
ESFUERZO (PRE-TEST)	Grupo experimental	14	2,6786	,67886	,18143	2,2866	3,0705	1,88	4,00
	Grupo control	58	2,6272	,57521	,07553	2,4759	2,7784	1,13	4,00
	Total	72	2,6372	,59196	,06976	2,4980	2,7763	1,13	4,00
AUTOEFICACIA (PRE-TEST)	Grupo experimental	14	3,1339	,58725	,15695	2,7949	3,4730	2,25	4,00
	Grupo control	58	2,7349	,63104	,08286	2,5690	2,9008	1,50	4,00
	Total	72	2,8125	,63884	,07529	2,6624	2,9626	1,50	4,00

Tabla VI.5 Estadísticos descriptivos de comparación entre grupo control y experimental en pretest para cada escala de CAETI- Trait Thinking Questionnaire.

C) Diferencias entre pre-test y post-test en grupo experimental

Sorprendentemente, a pesar de los buenos resultados obtenidos por otros medios sobre la eficacia de la propuesta de instrucción, no se detectaron diferencias significativas en la evolución de los alumnos que participaron en ella (ver *Tabla VI.6*).

Como veremos en los resultados obtenidos en el segundo REI, una variable fundamental resultó ser el lugar donde se realiza el post-test y, en consecuencia, que el cuestionario se responda según las creencias y actitudes relacionadas con la clase habitual de matemáticas o con el trabajo realizado en la nueva propuesta de instrucción. Se deduce entonces que la razón de estos resultados puede buscarse en que los alumnos respondieron al cuestionario en relación con la clase habitual de matemáticas, en la cual se les administró.

Prueba de muestras relacionadas

		Diferencias relacionadas					t	gl	Sig. (bilateral)
					95% Intervalo de confianza para la diferencia				
		Media	Desviación típ.	Error típ. de la media	Inferior	Superior			
Par 1	PLANIFICACIÓN (PRE-TEST) - PLANIFICACIÓN (POST-TEST)	,03494	,68889	,18411	-,36282	,43269	,190	13	,852
Par 2	ESTRATEGIAS COGNITIVAS (PRE-TEST - ESTRATEGIAS COGNITIVAS (POST-TEST)	-,05978	,59942	,16020	-,40588	,28631	-,373	13	,715
Par 3	AUTOEVALUACIÓN (PRE-TEST) - AUTOEVALUACIÓN (POST-TEST)	-,16731	,57600	,15394	-,49988	,16526	-1,087	13	,297
Par 4	ESFUERZO (PRE-TEST) ESFUERZO (POST-TEST	,14984	,63101	,16865	-,21449	,51418	,889	13	,390
Par 5	AUTOEFICACIA (PRE-TEST) - AUTOEFICACIA (POST-TEST)	,31269	,71221	,19035	-,09852	,72391	1,643	13	,124

Tabla VI.6 Diferencias en CAETI-Trait Thinking Questionnaire entre pre-test y post-test de grupo experimental.

D) Diferencias entre grupo control y experimental en post-test

Para profundizar en esta ausencia de diferencias entre pre-test y post-test del grupo experimental se analizaron las diferencias entre los alumnos de los grupos control y experimental en el post-test. Se encontró que tampoco los alumnos del grupo control habían cambiando signitivamente en las escalas evaluadas por el cuestionario utilizado y en consecuencia en el post-test se mantiene la única diferencia significativa que había detectado en el post-test y que es en la *autoeficacia* (ver *Tabla VI.7*).

Antes de apresurarnos a obtener conclusiones relativas a estos resultados esperaremos a mostrar los que se encontraron en el segundo REI, donde tuvo lugar una variable no intencionada, consistente en que los alumnos realizaron el post-test del cuestionario en el aula y con el profesor con que habían desarrollado el REI, en vez de en, como en este primer REI, hacerlo durante una de sus clases habituales de matemáticas. Esta circunstancia casual aportó, como veremos, información de sumo interés para el análisis de los resultados.

ANOVA

		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
PLANIFICACIÓN (POST-TEST)	Inter-grupos	,039	1	,039	,270	,605
	Intra-grupos	10,035	70	,143		
	Total	10,074	71			
ESTRATEGIAS COGNITIVAS (POST-TEST)	Inter-grupos	,004	1	,004	,010	,922
	Intra-grupos	30,290	70	,433		
	Total	30,294	71			
AUTOEVALUACIÓN (POST-TEST)	Inter-grupos	,072	1	,072	,503	,480
	Intra-grupos	10,034	70	,143		
	Total	10,106	71			
ESFUERZO (POST-TEST)	Inter-grupos	,002	1	,002	,018	,895
	Intra-grupos	8,793	70	,126		
	Total	8,795	71			
AUTOEFICACIA (POST-TEST)	Inter-grupos	2,799	1	2,799	13,172	,001
	Intra-grupos	14,873	70	,212		
	Total	17,672	71			

Tabla VI.7 Diferencias entre control y experimental en el post-test de CAETI-Trait Thinking Questionnaire

6.6. SEGUNDO REI EN TORNO A LA COMPARACIÓN DE TARIFAS DE TELEFONÍA MÓVIL

La propuesta de instrucción fue implementa por segunda ocasión durante el curso 2003/04. En esta ocasión se trataba de un colegio de nivel medio de la periferia de Madrid. Participaron en su desarrollo 12 alumnos, 8 de la opción Científico-Tecnológico y 4 de la opción Humanidades y Ciencias Sociales. En este caso los alumnos también, según sus profesores, eran "buenos alumnos" en general, aunque había diversidad.

En este caso las sesiones, con una duración prevista inicial de dos horas, llegaron a tener duraciones de hasta 3 horas. También en este caso los alumnos desarrollan tareas o parte de ellas fueran del horario de las sesiones.

En este caso, como ya hemos mencionado, el post-test del *CAETI-Trait Thinking Questionnaire* fue administrado a los alumnos en el aula y con el profesor con que habían desarrollado el REI, en vez hacerlo dentro de sus horas habituales de clase de matemáticas.

Se muestra en el *Anexo B.3* el diario de la experiencia y en el *Anexo B.4* los materiales complementarios. Al igual que en caso del primer REI, se aconseja la lectura completa del diario por razones que ya han sido explicadas y, en consecuencia, no vamos a repetir.

Es importante tener en cuenta que esta segunda experiencia se planteaba como objetivo fundamental profundizar en las posibilidades de modificación del reparto de responsabilidades en el proceso de enseñanza-aprendizaje, y especialmente en intentar evitar las restricciones que el propio investigador, como profesor, durante el primer REI, sufrió. Estas restricciones estaban ligadas a la ilusión de transparencia a la que hicimos referencia anteriormente, que impidieron hacer ver al profesor que estaba privando a los alumnos de todo el proceso de gestión, especialmente de planificación, del proceso de estudio, debido a asumirlo como responsabilidad del que enseña en vez de llegar a comprender que forma parte del estudio de la cuestión del mismo modo que la elección de las técnicas o la búsqueda de información, por ejemplo.

Dada la semejanza entre el primer y el segundo REI en relación con los tres primeros aspectos analizados, tan sólo diremos que aparecen, con carácter general, el mismo tipo de conocimientos puntuales y conexiones en la resolución de la tarea. Incluso surge la misma necesidad de llevar a cabo un estudio estadístico sobre los "picos de las llamadas" y también plantean los alumnos la elaboración de una página Web. Sin embargo también ser observan algunas diferencias: mientras que en el primer caso los alumnos plantearon la utilización del precio medio y se utilizó como herramienta durante todo el proceso; en esta segunda experiencia no se planteó la utilización del precio medio pero sin embargo se plantearon otras herramientas, como la generalización de fórmulas para la comparación de diferentes tipos de tarifas.

Nos centraremos por tanto, en primer lugar, en analizar la gestión del reparto de responsabilidades en el proceso de enseñanza-aprendizaje que se desarrolló en esta segunda experiencia. Posteriormente pasaremos a analizar la eficacia del REI en cuanto a la transferencia de algunos de los aprendizajes construidos para determinar si se observan resultados del mismo tipo que en la primera experiencia. Y finalmente mostraremos los resultados obtenidos en cuanto a la influencia de la propuesta de instrucción en las actitudes y creencias de los alumnos con relación a la resolución de problemas y las matemáticas.

6.6.1. La regulación metacognitiva y el nuevo reparto de responsabilidades

En esta segunda experiencia se intentó incidir en aquellos aspectos del reparto de responsabilidades que en la primera habían sido restringidos por el profesor.

La responsabilidad de gestión de todo el proceso de enseñanza-aprendizaje se compartió desde el momento mismo de presentación de la cuestión a los alumnos, a partir del cual se combinaron continuamente las respuestas a dos cuestiones: qué quiero conseguir y cómo puedo hacerlo.

Esto tuvo una importancia fundamental. Favoreció que realmente la cuestión fuera tomada en serio por los alumnos y que todo el proceso de estudio girara en torno a ella. De este modo, los alumnos desde el comienzo fueron más activos, planteando no sólo respuestas sino también nuevas cuestiones con más naturalidad que en el primer REI.

Fijémonos que esta segunda experiencia con la propuesta de instrucción se observan también, podríamos decir, diferentes fases en el proceso, pero en este caso, a diferencia de lo sucedido durante la primera puesta en práctica del REI, las fases están delimitadas por el tipo de respuesta que se propone. Una primera fase está dirigida a las comparaciones entre pares de tarifas. En una segunda fase, por la decisión de ofrecer una respuesta más global, se elaboraró el documento de Excel de comparación de tarifas[39].

La primera propuesta de respuesta fue realmente llevada hasta sus últimas consecuencias, intentando continuamente buscar modos de generalizar los tipos de respuesta para favorecer su utilidad como herramienta para comparar tarifas.

La asunción de la respuesta a la cuestión como eje del proceso se observa claramente, por ejemplo, en la justificación de los alumnos, ante la propuesta del profesor de considerar entre los tipos de tarifas uno no existente en las compañías de telefonía móvil, de no considerar ese tipo de tarifa. Como indicábamos en la introducción a los REI su puesta en práctica "en serio" implica la resignación de algunos conocimientos que, aunque puedan ser inicialmente consultados en la búsqueda respuesta a la cuestión, si no se muestran útiles para la resolución de la tarea, no tendrá cabida que sean incorporados en dicho proceso de enseñanza-aprendizaje.

Un dispositivo didáctico que fue incorporado durante experiencia, no habiendo sido utilizada en la otra consiste en las "*Respuestas a la cuestión generatriz*". Fue el profesor quien propuso su realización, pero las circunstancias del proceso hicieron que rápidamente los alumnos le dieran un papel fundamental en el estudio. En él se iban reflejando, al final de cada sesión o de cada dos sesiones, cómo se completaba hasta el momento la respuesta que estábamos elaborando para la cuestión planteda. También en ese se dejaba constancia de los replanteamientos de la cuestión inicial, que se

[39] Las hojas de cálculo resultantes se muestran en versión impresa como material adjunto del diario y también se incluye una versión "para usuario" en el CD adjunto.

iba reformulando a medida que se iba avanzando en el estudio. Se mostraba así una relación directa y continua entre el tipo de reformulación de la pregunta y el tipo de construcción planteado como respuesta.

En este segundo REI además, la incorporación de los alumnos a la gestión del proceso de estudio llevó a que tareas no llevadas a cabo en el primer REI fueron desarrolladas y resultaran de sumo interés. Por ejemplo, en el primer caso fue buscada información en Internet sobre telefonía móvil, pero su tratamiento fue superficial y poco organizado. En esta segunda experiencia

También los alumnos participaron en esta segunda experiencia en mucha mayor medida en la asignación de tareas y responsabilidades. Por ejemplo, reorganizar los grupos para ser más eficientes en la realización de una tarea específica o justificar la conveniencia de que una determinada tarea sea llevada a cabo por el profesor.

Otro fenómeno de sumo interés que aparició está relacionado con la dificultad de diferenciar entre lo matemático y lo didáctico-en el sentido de lo relativo de gestión del conocimiento-. Se ha mostrado, en ambos estudios, aunque con más fuerza en este segundo, cómo el estudio "en serio" de la cuestión implica delimitar, planificar, gestionar y evaluar la construcción de la respuesta y, por tanto, los alumnos deberán asumir dicha responsabilidad en esta nueva propuesta de instrucción –esta responsabilidad será compartida con el profesor, pero deja de ser con ello responsabilidad exclusiva de este último-.

En esta segunda experiencia se localiza un fenómeno relacionado con el anteriormente descrito pero que complejiza más las relaciones. Este fenómeno se refiere a necesidad percibida por los alumnos de reelaborar las "Respuestas a la cuestión generatriz”[40] para darles un carácter didáctico, en el sentido de que puedan obtener información útil de él otras personas. Y son los alumnos los que, a pesar de lo costoso del trabajo, plantean la necesidad rescribir el documento, analizando previamente cada respuesta e incluyendo las referencias a los gráficos que representan las diferentes relaciones. Finalmente los alumnos vuelven a ser protagonistas del ejercicio didáctico cuando deciden llevar a cabo una reorganización para adaptarlo, en las mejores condiciones posibles a las características y opciones que ofrece una página Web. Se puede observar por tanto una variante de lo que Chevallard (2004) denomina la “dialéctica de la extracción y la inscripción”, que describimos anteriormente, junto con la “dialéctica de los medios y de los media”, en la caracterización de los REI, en la que los alumnos llevan a cabo procesos de inscripción y de excripción de sus propias respuestas.

Finalmente, podemos percibir una muestra de otra de las dialécticas que propone Chevallard (2004) –la de “el paracaidista y el buscador de trufas”- en las búsquedas de información que realizan los alumnos, especialmente en Internet, a sabiendas, tras varios intentos, de que no lograrán gran cosa pero con la suposición de que puede aparecer alguna idea interesante que les ayude a decidir el mejor modo de comparar tarifas. Esta dialéctica se extiende más allá cuando, tras realizar las búsquedas seleccionan algunos de los documentos, a pesar de no confiar en que vaya aportar demasiado pero de nuevo con la ilusión de que puedan encontrar algo de interés.

Podemos concluir que en esta segunda experiencia la cuestión se sitúo en mayor medida en el lugar central que necesita ocupar para que la construcción de su respuesta –que implica, como hemos dicho, desde reformular la cuestión hasta valorar la respuesta dada pasando por gestionar

[40] Ambas “Respuestas a la cuestión generatriz” se incluyen como materiales adjuntos en el diario de este segundo REI (*Material 8 y Material 9*).

todo el proceso de su estudio- se convierta en eje del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Una segunda conclusión es la dificultad del profesor para superar su intención de enseñanza y lograr así pasar a ser realmente una guía y apoyo en la construcción por parte del alumno de sus aprendizajes, dirigida por la construcción de las respuestas y no por el seguimiento de las indiciones que le propone el profesor.

La última conclusión se refiere a la facilidad de los alumnos para asumir gran parte de la responsabilidad que exigen los REI en las circunstancias especiales en que ha sido desarrollado.

6.6.2. La transferencia del aprendizaje

En la realización de la prueba final escrita individual –que, recordamos, puede consultarse en el Anexo *B.2 (Material 6)*, los alumnos obtuvieron resultados muy semejantes a los encontrados en la primera experiencia (8,25 sobre 10) y los errores que cometieron fueron del mismo tipo (fundamentalmente errores de cálculo). La quinta pregunta que se incluyó en esta segunda experiencia con el REI y que solicitaba a los alumnos que indiquen otros problemas donde se podría aplicar un proceso semejante al seguido con la comparación de tarifas de telefonía móvil todos los alumnos citaron la comparación de tarifas de telefonía fija y también algunos otros tipos de tarifas (de gas, de luz,...), otros indicaron "cualquier problema de comparación de tarifas" y tres alumnos señalaron que "cualquier problema". Nos dimos cuenta a posteriori de que habría sido necesario "exigir" una explicación sobre en qué sentido es transferible lo trabajado en el REI a los problemas que plantearan si queríamos obtener información sobre el grado de transferencia del aprendizaje.

Un fenómeno que sí se observó en los alumnos en esta ocasión, mientras que no se había percibido en la anterior, es la reticencia inicial a realizar una prueba final. Habían asumido de modo tan profundo que el objetivo del "taller" era la resolución de la cuestión planteada que decían no entender porque debían hacer una evaluación individual escrita cuando habían quedado tan satisfechos con la respuesta que habíamos elaborado a la cuestión planteada. El profesor les explicó que era fundamentalmente para que ellos mismo pudieran valorar hasta qué punto lo que habíamos trabajado les había preparado para resolver una cuestión semejante. Tras esa explicación los alumnos accedieron a realizarla.

Las dos preguntas fueron, como en la experiencia anterior, planteadas individualmente y luego comentadas.

Respecto al a primera pregunta -"*¿Qué cosas hemos aprendido en este taller?*"-, las respuestas, que se puede consultar en la sesión de "Evaluación" del diario del segundo REI (*Anexo B.3*) fueron muy semejantes a las obtenidas en el primero. Si se quiere destacar que un alumno añadió "cosas que querría haber aprendido en este taller y no ha aprendido", en las que le apoyaron el resto de compañeros, y que son las siguientes:

- Cómo se elaboraría la página web que queremos hacer con lo del taller. "Además, creo que si supiéramos podríamos haber planificado mejor cómo hacerla".

- Cómo se puede hacer para que el documento de Excel sólo deje escribir en las celdas que deben introducir datos y no en las demás. Y para que no se vean las celdas que son de cálculos internos.

El profesor asume el compromiso de que cuando él sepa hacerlo se lo explicará.

Lo que consideramos más llamativo de este hecho es la queja de los alumnos por no haber desarrollado el tratamiento interdisplinar necesario para haber finalizado la propuesta de respuesta planteada. Se confirma con ello de nuevo el papel central de la respuesta a la cuestión, convirtiéndose en el eje del proceso.

El hecho de que el planteamiento de cuestiones importantes exige la no parcelación de las cuestiones ni siquiera en una determinada disciplina ha sido plantea por Chevallard (2005).

En relación con la segunda pregunta planteada **–"***¿Qué cosas aprendidas en este taller es difícil aprender en clase y por qué?***"** las respuestas no se pueden enumerar, como sí hicimos con las obtenidas en la primera experiencia, debido a se desarrollo en modo de discusión en torno a una idea que los alumnos defendían: prácticamente todo lo que hemos aprendido en el taller no se puede trabajar en las clases de matemáticas porque "en matemáticas aprendemos sólo de matemáticas".

Esta consideramos que es una cuestión importante, porque muestra que los alumnos perciben como cosas diferentes y separadas estudiar matemáticas y estudiar cuestiones reales cuya resolución implica el uso y aprendizaje de las matemáticas, esto es, hacer matemáticas.

6.6.3. Efecto en las creencias y las actitudes

Recordamos que se utiliza para la evaluación de las creencias y las actitudes el *CAETI-Trait Thinking Questionnaire* (O`Neil y Schacter, 1997) y que las tablas de análisis de datos que aportan información secundaria se adjuntan en el *Anexo C.*

A) Diferencias en función del tipo de matemáticas que se cursan

De nuevo se analizó si existían diferencias en las escalas evaluadas por el cuestionario utizado sobre resolución de problemas entre los alumnos en función del tipo de matemáticas que cursaban: *Matemáticas I* (22 alumnos, grupo C) o *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I* (43 alumnos, grupos A y B).

Se encontró de nuevo que no existen diferencias signifiativas entre los grupos en ninguno de los aspectos evaluados (ver *Tabla VI.9*).

ANOVA

		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
PLANIFICACIÓN (PRE-TEST)	Inter-grupos	,558	2	,279	1,424	,249
	Intra-grupos	12,144	62	,196		
	Total	12,702	64			
ESTRATEGIAS COGNITIVAS (PRE-TEST)	Inter-grupos	1,382	2	,691	2,444	,095
	Intra-grupos	17,530	62	,283		
	Total	18,912	64			
AUTOEVALUACIÓN (PRE-TEST)	Inter-grupos	,899	2	,450	2,017	,142
	Intra-grupos	13,823	62	,223		
	Total	14,723	64			
ESFUERZO (PRE-TEST)	Inter-grupos	,524	2	,262	,784	,461
	Intra-grupos	20,735	62	,334		
	Total	21,260	64			
AUTOEFICACIA (PRE-TEST)	Inter-grupos	,666	2	,333	,869	,425
	Intra-grupos	23,758	62	,383		
	Total	24,424	64			

Tabla VI.8 Diferencias en escalas de CAETI-Trait Thinking Questionnaire entre alumnos según el tipo de matemáticas que cursan.

B) Diferencias entre grupo control y grupo experimental en pretest

En el grupo experimental participaron 8 alumnos que cursaban Matemáticas I y 4 que estaban cursando Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I.

Los restantes 43 alumnos del mismo curso formaban parte del grupo control.

Para poder obtener conclusiones sobre los efectos de la propuesta de instrucción se estudiaron las diferencias entre grupos (control y experimental) en el pre-test.

De nuevo, como en la anterior experiencia, fueron detectadas diferencias significativas entre los grupos exclusivamente en la escala de "Autoeficacia" (ver *Tabla VI.9*) a favor del grupo experimental (ver *Tabla VI.10*). El carácter voluntario, al igual en la primera experiencia, puede explicar este hecho, unido a que la mayoría de los alumnos que participaron fueron catalogados también como buenos alumnos en matemáticas.

ANOVA

		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
PLANIFICACIÓN (PRE-TEST)	Inter-grupos	,018	1	,018	,092	,763
	Intra-grupos	12,683	63	,201		
	Total	12,702	64			
ESTRATEGIAS COGNITIVAS (PRE-TES	Inter-grupos	,327	1	,327	1,109	,296
	Intra-grupos	18,585	63	,295		
	Total	18,912	64			
AUTOEVALUACIÓN (PRE-TEST)	Inter-grupos	,275	1	,275	1,201	,277
	Intra-grupos	14,447	63	,229		
	Total	14,723	64			
ESFUERZO (PRE-TEST)	Inter-grupos	,002	1	,002	,005	,941
	Intra-grupos	21,258	63	,337		
	Total	21,260	64			
AUTOEFICACIA (PRE-TEST)	Inter-grupos	2,315	1	2,315	6,782	,011
	Intra-grupos	21,507	63	,341		
	Total	23,822	64			

Tabla VI.9 Diferencias en escalas de CAETI-Trait Thinking Questionnaire entre grupo control y experimental en pre-test.

Descriptivos

		N	Media	Desviación típica	Error típico	tervalo de confianza pa la media al 95% Límite inferior	Límite superior	Mínimo	Máximo
PLANIFICACIÓN (PRE-TEST)	Grupo experimer	12	2,7604	,40752	,11764	2,5015	3,0193	2,00	3,25
	Grupo control	53	2,7170	,45692	,06276	2,5910	2,8429	1,88	4,00
	Total	65	2,7250	,44549	,05526	2,6146	2,8354	1,88	4,00
ESTRATEGIAS COGNITIVAS (PRE-T	Grupo experimer	12	2,7396	,58741	,16957	2,3664	3,1128	2,00	4,00
	Grupo control	53	2,5567	,53330	,07325	2,4097	2,7037	1,63	4,00
	Total	65	2,5905	,54360	,06743	2,4558	2,7252	1,63	4,00
AUTOEVALUACIÓN (PRE-TEST)	Grupo experimer	12	2,4479	,37861	,10930	2,2074	2,6885	1,88	2,88
	Grupo control	53	2,6157	,49750	,06834	2,4785	2,7528	1,63	4,00
	Total	65	2,5847	,47962	,05949	2,4658	2,7035	1,63	4,00
ESFUERZO (PRE-TE	Grupo experimer	12	2,6042	,52449	,15141	2,2709	2,9374	1,88	3,50
	Grupo control	53	2,6179	,59212	,08133	2,4547	2,7811	1,13	4,00
	Total	65	2,6154	,57635	,07149	2,4726	2,7582	1,13	4,00
AUTOEFICACIA (PRE-TEST)	Grupo experimer	12	3,2188	,48302	,13944	2,9119	3,5256	2,50	4,00
	Grupo control	53	2,7323	,60352	,08290	2,5660	2,8987	1,50	4,00
	Total	65	2,8221	,61010	,07567	2,6709	2,9733	1,50	4,00

Tabla VI.10 Estadísticos descriptivos de comparación entre grupo control y experimental en pretest para cada escala de CAETI- Trait Thinking Questionnaire.

C) Diferencias entre pre-test y post-test en grupo experimental

Es importante destacar, como ya hemos anunciado con anterioridad, que en esta experiencia, debido a razones casuales –y no planificadas con antelación- los alumnos del grupo experimental realizaron el post-test con el profesor con que habían desarrollado los REI y en el mismo aula. Esta casualidad provocó que algunos alumnos preguntaran si lo tenían que responder en relación con la clase de matemáticas (en la que había realizado anteriormente el pre-test) o con lo que habíamos hecho en el "taller". La solución que se tomó es que lo respondieran dos veces, una en relación con la clase de matemáticas y otra en relación con el "taller". Los resultados obtenidos permitieron la elaboración de interesantes conclusiones.

Se presenta los resultados obtenidos en cada caso, denominando post-test 2 al que contestaron los alumnos en relación en relación con el "taller" y manteniendo la nomenclatura original (post-test) para el cuestionario contestado en relación con las clases de matemáticas.

Prueba de muestras relacionadas

	Diferencias relacionadas					t	gl	Sig. (bilateral)
				95% Intervalo de confianza para la diferencia				
	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media	Inferior	Superior			
Par 1 PLANIFICACIÓN (PRE-TEST) - PLANIFICACIÓN (POST-TEST)	,04203	,57800	,16685	-,32521	,40927	,252	11	,806
Par 2 ESTRATEGIAS COGNITIVAS (PRE-T - ESTRATEGIAS COGNITIVAS (POST-TEST)	,05235	,64210	,18536	-,35562	,46031	,282	11	,783
Par 3 AUTOEVALUACIÓN (PRE-TEST) - AUTOEVALUACIÓN (POST-TEST)	-,11841	,59397	,17146	-,49579	,25898	-,691	11	,504
Par 4 ESFUERZO (PRE-TE ESFUERZO (POST-T	,06978	,60565	,17483	-,31503	,45459	,399	11	,697
Par 5 AUTOEFICACIA (PRE-TEST) - AUTOEFICACIA (POST-TEST)	,28533	,48081	,13880	-,02017	,59082	2,056	11	,064

Tabla VI.11 Diferencias en CAETI-Trait Thinking Questionnaire entre pre-test y post-test de grupo experimental.

En cuanto a las diferencias entre pre-test y post-test en grupo experimental, de nuevo, como en la experimentación anterior, no se encuentran diferencias significativas (ver *Tabla VI.11*).

D) Diferencias entre grupo control y grupo experimental en post-test

Para profundizar en esta ausencia de diferencias entre pre-test y post-test del grupo experimental se analizaron, como en la experimentación anterior, las diferencias entre los alumnos de los grupos control y experimental en el post-test. Se encontró que tampoco los alumnos del grupo control habían cambiando signitivamente en las escalas evaluadas por el cuestionario utilizado y en consecuencia en el post-test se mantiene la única diferencia significativa que había detectado en el post-test y que es en la *autoeficacia* (ver *Tabla VI.12*).

ANOVA

		Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
PLANIFICACIÓN (POST-TEST)	Inter-grupos	,043	1	,043	,259	,613
	Intra-grupos	10,426	63	,165		
	Total	10,468	64			
ESTRATEGIAS COGNITIVAS (POST-TEST)	Inter-grupos	,003	1	,003	,021	,884
	Intra-grupos	9,768	63	,155		
	Total	9,771	64			
AUTOEVALUACIÓN (POST-TEST)	Inter-grupos	,084	1	,084	,650	,423
	Intra-grupos	8,156	63	,129		
	Total	8,240	64			
ESFUERZO (POST-TEST)	Inter-grupos	,001	1	,001	,010	,919
	Intra-grupos	8,354	63	,133		
	Total	8,355	64			
AUTOEFICACIA (POST-TEST)	Inter-grupos	3,590	1	3,590	17,526	,000
	Intra-grupos	12,907	63	,205		
	Total	16,497	64			

Tabla VI.12 Diferencias entre control y experimental en el post-test de CAETI-Trait Thinking Questionnaire

E) Diferencias entre pre-test y "post-test 2" en grupo experimental

Se detectan diferencias significativas entre el pre-test y el post-test (contestado en relación con el trabajo realizado en el REI) en *todas* las las escalas evaluadas (ver *Tabla VI.13*).

Estas diferencias, como se muestra en la *Tabla VI.14* son en todos los casos a favor del "post-test 2", es decir de la contestación al cuestionario en relación con el REI.

Esto explicaría la falta de detección en la primera experiencia. Los alumnos han desarrollado unas creencias y actitudes hacia la resolución de problemas en un contexto determinado y que difiere, a pesar de ser también relativo a las matemáticas, del contexto en que sitúan sus creencias y actitudes hacia las matemáticas desarrolladas en sus clases.

Prueba de muestras relacionadas

	Diferencias relacionadas					t	gl	Sig. (bilateral)
	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media	95% Intervalo de confianza para la diferencia Inferior	95% Intervalo de confianza para la diferencia Superior			
Par 1 PLANIFICACIÓN (PRE-TEST) - PLANIFICACIÓN (POST-TEST) 2	-,82208	,59598	,17204	-1,20075	-,44342	-4,778	11	,001
Par 2 ESTRATEGIAS COGNITIVAS (PRE-T - ESTRATEGIAS COGNITIVAS (POST-TEST) 2	-,36458	,38971	,11250	-,61219	-,11698	-3,241	11	,008
Par 3 AUTOEVALUACIÓN (PRE-TEST) - AUTOEVALUACIÓN (POST-TEST) 2	-,30208	,47809	,13801	-,60585	,00168	-2,189	11	,045
Par 4 ESFUERZO (PRE-TE ESFUERZO (POST-T 2	-,54167	,39288	,11342	-,79129	-,29204	-4,776	11	,001
Par 5 AUTOEFICACIA (PRE-TEST) - AUTOEFICACIA (POST-TEST) 2	-,54125	,56000	,16166	-,89706	-,18544	-3,348	11	,006

Tabla VI.13 Diferencias entre pre-test y "post-test 2" en el CAETI-Trait Thinking Questionnaire

Estadísticos de muestras relacionadas

		Media	N	Desviación típ.	Error típ. de la media
Par 1	PLANIFICACIÓN (PRE-TEST)	2,7604	12	,40752	,11764
	PLANIFICACIÓN (POST-TEST) 2	3,5825	12	,51120	,14757
Par 2	ESTRATEGIAS COGNITIVAS (PRE-TEST)	2,7396	12	,58741	,16957
	ESTRATEGIAS COGNITIVAS (POST-TEST) 2	3,1042	12	,50799	,14664
Par 3	AUTOEVALUACIÓN (PRE-TEST)	2,4479	12	,37861	,10930
	AUTOEVALUACIÓN (POST-TEST) 2	2,7500	12	,53300	,15386
Par 4	ESFUERZO (PRE-TEST)	2,6042	12	,52449	,15141
	ESFUERZO (POST-TEST) 2	3,1458	12	,31003	,08950
Par 5	AUTOEFICACIA (PRE-TEST)	3,2188	12	,48302	,13944
	AUTOEFICACIA (POST-TEST) 2	3,7600	12	,47751	,13785

Tabla VI.14 Estadísticos descriptivos de comparación entre pre-test y "post-test 2" en el grupo experimental para cada escala de CAETI- Trait Thinking Questionnaire.

E) Diferencias entre pre-test y "post-test 2" en grupo experimental

Finalmente se realizó un análisis de las diferencias entre los dos post-test realizados por el grupo experimental (uno contestado en relación con las clases de matemáticas y otro en relación con el REI desarrado). Con ello se pretendía detectar si en algunas de las escalas evaluadas con relación a las clases de matemáticas la participación en el REI había provocado efectos destacables, aunque no significativos.

Se confirman las diferencias significativas en todas las escalas menos "Auto-evaluación" (ver *Tabla VI.15*) y, como era de esperar, en todos los casos a favor del grupo experimental (ver *Tabla 16*). Se puede deducir que los efectos del REI en la auto-evaluación se han transferido en mayor medida que los aspectos evaluados por las demás escalas al modo de percibir las matemáticas y la resolución de problemas en la clase de matemáticas, si bien no ha producido un efecto significativo.

Prueba de muestras relacionadas

		Diferencias relacionadas					t	gl	Sig. (bilateral)
		Media	Desviación típ.	Error típ. de la media	95% Intervalo de confianza para la diferencia: Inferior	Superior			
Par 1	PLANIFICACIÓN (POST-TEST) - PLANIFICACIÓN (POST-TEST) 2	-,86411	,62576	,18064	-1,26170	-,46653	-4,784	11	,001
Par 2	ESTRATEGIAS COGNITIVAS (PRE-TE - ESTRATEGIAS COGNITIVAS (POST-TEST) 2	-,36458	,38971	,11250	-,61219	-,11698	-3,241	11	,008
Par 3	AUTOEVALUACIÓN (POST-TEST) - AUTOEVALUACIÓN (POST-TEST) 2	-,18368	,57402	,16570	-,54839	,18104	-1,108	11	,291
Par 4	ESFUERZO (POST-TE - ESFUERZO (POST-TEST) 2	-,61145	,45191	,13045	-,89858	-,32432	-4,687	11	,001
Par 5	AUTOEFICACIA (POST-TEST) - AUTOEFICACIA (POST-TEST) 2	-,82658	,65389	,18876	-1,24204	-,41111	-4,379	11	,001

Tabla VI.15 Diferencias entre pre-test y "post-test 2" en el CAETI-Trait Thinking Questionnaire

Estadísticos de muestras relacionadas

		Media	N	Desviación típ.	Error típ. de la media
Par 1	PLANIFICACIÓN (POST-TEST)	2,7184	12	,29838	,08614
	PLANIFICACIÓN (POST-TEST) 2	3,5825	12	,51120	,14757
Par 2	ESTRATEGIAS COGNITIVAS (PRE-TEST)	2,6872	12	,58741	,16957
	ESTRATEGIAS COGNITIVAS (POST-TEST) 2	3,1042	12	,50799	,14664
Par 3	AUTOEVALUACIÓN (POST-TEST)	2,5663	12	,36705	,10596
	AUTOEVALUACIÓN (POST-TEST) 2	2,7500	12	,53300	,15386
Par 4	ESFUERZO (POST-TEST)	2,5344	12	,47317	,13659
	ESFUERZO (POST-TEST) 2	3,1458	12	,31003	,08950
Par 5	AUTOEFICACIA (POST-TEST)	2,9334	12	,36875	,10645
	AUTOEFICACIA (POST-TEST) 2	3,7600	12	,47751	,13785

Tabla VI.16 Estadísticos descriptivos de comparación entre post-test y "post-test 2" en el grupo experimental para cada escala de CAETI- Trait Thinking Questionnaire.

6.7. CONCLUSIONES Y PROBLEMAS ABIERTOS

Se ha mostrado la eficacia de la propuesta de instrucción planteada –los Recorridos de Estudio e Investigación- para situar la resolución de problemas como eje integrador del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

También se ha podido mostrar cómo la incorporación de una verdadera actividad de resolución de problemas en el aula a través de los REI implica un afloramiento de los aspectos metacognitivos. Por una lado, la asunción de responsabilidad por parte de los alumnos -como protagonistas en la construcción de la respuesta a la cuestión- sobre aspectos del proceso de estudio que normalmente quedan bajo la responsabilidad única del profesor está relacionada con la aparición de la regulación metacognitiva. Por otro lado, la necesidad de conectar praxeologías para construir la respuesta a la cuestión hacen necesarios niveles de conocimiento metacognitivo que pueden superar en los REI incluso el nivel disciplinar.

Pero se han revelado restricciones que hacen difícil su instauración en las condiciones de los sistemas educativos actuales y que provienen de diferentes niveles.

Es importante considerar que los REI que han sido implementados en esta investigación poseían un carácter extracurricular con el objetivo explícito de intentar huir, en la medida de lo posible, de las restricciones que ejercen los niveles curriculares –fundamentalmente la organización en temas (en el Capítulo IV se desarrolla ampliamente esta cuestión)- contra la incorporación de la resolución de problemas como motor y nexo de la actividad matemática. Y decimos "en la medida de lo posible" porque, dado el carácter co-determinante de los niveles era previsible que las restricciones provenientes del nivel curricular mostraran su reflejo en unos alumnos inmersos en dicho marco curricular.

Otra característica del nivel curricular que fue determinada previamente en la implementación de los REI con carácter diferencial se refiere a las duraciones de las sesiones. Se considera que el tipo de trabajo matemático propuesto en los REI hace necesario una mayor duración de las sesiones[41].

En las condiciones particulares descritas, ha sido objeto de análisis la posible eficacia y efectos de esta propuesta de instrucción. La cuestión implica gran complejidad porque es necesario analizar al mismo tiempo, si la propuesta se desarrolla en las condiciones adecuadas y, en caso contrario, qué restricciones se detectan.

[41] García (2005), en su trabajo de tesis doctoral encontró que la duración de las clases en Educación Secundaria, de 55 minutos, es una restricción importante para la incorporación de un trabajo matemático como el planteado en los Recorridos de Estudio e investigación.

En relación con la capacidad de los REI para provocar en los alumnos la necesidad de conectar praxeologías y la consecuente explicitación del conocimiento metacognitivo, si bien no se ha hecho un análisis matemático profundo de los tipos de técnicas, tareas, tecnologías y teorías implicadas sí se ha mostrado cómo la respuesta "en serio" a una cuestión problemática "importante" difícilmente es resoluble desde el marco de un área, cuanto menos de un tema. Incluso la propuesta de los REI se dirige hacia una co-disciplinariedad que no sitúe, ni siquiera como punto de partida, las cuestiones en el marco en una disciplina de conocimiento específica. A medida que se amplía el ámbito de conocimiento implicado en la construcción de la respuesta a la cuestión, se incrementarán los niveles del conocimiento metacognitivo que serán necesarios para establecer las necesarias conexiones entre ámbitos cada vez más amplios.

Un fenómeno de gran interés que ha sido detectado se relaciona con la forzada separación que en el sistema educativo actual se hace entre lo matemático y lo didáctico y que provoca una restricción fuerte a la puesta en práctica los REI en relación con la asunción de responsabilidad de los alumnos en aspectos relacionados con la regulación metacognitiva. En efecto, se ha detectado que dicha regulación se enmarca dentro de ámbitos tradicionalmente considerados como didácticos y eso produce una fuerte reticencia del profesor a compartir dicha responsabilidad. De hecho, en el primer REI el investigador se vio influido por este fenómeno, que le llevó a asumir con carácter exclusivo responsabilidades que formaban parte del estudio de la cuestión y, por ello, constituían un trabajo de fundamental importancia para el trabajo matemático de los alumnos. En el segundo REI, sin embargo, el profesor logró retener sus impulsos de enseñar para permitir que los alumnos aprendieran.

Numerosas cuestiones permanen abiertas. Citaremos tres relacionadas con la posibilidad de incorporar en la dinámica cotidiana de nuestras escuelas sistemas instruccionales similares al presentado aquí, donde la construcción de respuestas a cuestiones importantes constituyera el eje generador del proceso de enseñanza-aprendizaje y en los que se permitiera a los alumnos, a través del estudio de la cuestión, descubir cosas:

- A pesar de la riqueza de este tipo de sistemas de instrucción, ¿están condenados a no poder sustituir a los actuales?

- ¿Cuáles serían las modificaciones necesarias en cada uno de los niveles de codeterminación para que una propuesta de instrucción de este tipo pudiera ser instaurada en las aulas?

- En caso de que fuera posible realizar dichas modificaciones y desarrollar un currículo estructurado en torno a grandes cuestiones a estudiar en vez de la organización tradicional en temas, áreas y disciplinas, ¿cuáles deberían ser las características de esas cuestiones?, ¿bastaría con que fueran "cuestiones importantes" o deberían cumplir algún otro requisito?

Madrid, junio de 2005

BIBLIOGRAFÍA

Adibnia, A. y Putt, I.J. (1998). Teaching problem solving to year 6 students: a new approach. *Mathematics Education Research Journal*, *10* (3), 42-58.

Alexander, P.A. y Judy, J.E. (1988). The interaction of domain-specific and strategic knowledge in academic performance. *Review of Educational Research, 58*, 375-404.

Alsina, Y. (1990). La resolución de problemas matemáticos por estudiantes mexicano - norteamericanas. *Educación matemática*, *2* (3), 47-54.

Anderson, R.C. (1984). Some reflections on the acquisition of knowledge. *Educational Researcher, 13* (9), 5-10.

Antibi, A. y Brousseau, G. (2002). Vers l'ingénierie de la dé-transposition. *Revue des Sciences de l'éducation du LEMME,* 8, 45-57.

Archambeault, B. (1993). Holistic mathematics instruction: Interactive problem solving and real life situations help learners understand math concepts. *Adult Learning*, *5* (1), 21-23.

Arrieta, J.J. (1989). La resolución de problemas y la educación matemática: hacia una mayor integración entre investigación y desarrollo curricular. *Enseñanza de las Ciencias, 7* (1), 63-71.

Artzt, A.F. (1996). Developing problem-solving behaviours by assessing communication in cooperative learning group. En P.C. Elliott y M.J. Kenney (Eds.), *Communication in mathematics, K-12 and beyond* (pp. 116-125). Reston, VA: NCTM.

Baroody, A.J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. En A.J. Baroody y A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (pp. 1-33). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Bebout, H.C. (1990). Children's symbolic representation of addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *2* (2), 123-131.

Beltrán, J.A. (1993). *Procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje*. Madrid: Síntesis.

Beltrán, J.A. (2003). Estrategias de aprendizaje. *Revista de Educación*, *332*, 55-73.

Beltrán, J.A. y Genovard, C. (1996). *Psicología de la Instrucción I: Variables y procesos básicos*. Madrid: Síntesis.

Beltrán, J.A., Prieto, M.D., Bermejo, V. y Vence, D. (1993). *Intervención psicopedagógica*. Madrid: Pirámide.

Bishop, A.J. (1999). *Enculturación matemática, la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

Blais, D.M. (1988). Constructivism: A theoretical revolution for algebra. Mathematics Teacher, 81, 624-631.

Bloom, B. y Broader, B. (1950). *Problem solving process of college students*. Chicago: University of Chicago.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications and links to other subjects –State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics 22*, 37-68.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics*, *17*, 125-141.

Borkowski, J.G. y Muthukrishna, N. (1992). Moving metacogntion into the classroom: "working models" and effective strategy teaching. En M. Pressley, K.R. Harris y J.T. Guthrie (Eds.), *Promoting academic competence and literacy in school*. San Diego, CA: Academic Press.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva de la actividad matemática.* Tesis Doctoral. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

Bosch, M. y Gascón, J. (2002). Organiser l'étude. 2. Théories & empiries. *Actes de la XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, 23-40, Corps, Août de 2001. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bosch, M., Bolea, P. y Gascón, J. (2001). ¿Cómo se construyen los problemas en didáctica de las matemáticas?: Parte II: El álgebra escolar en el Programa Epistemológico. *Educación Matemática*, 13, 3.

Bosch, M. y Gascón, J. (2004). La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. En C. Castro y M. Gómez (Eds.), *Análisis del currículo actual de matemáticas y posibles alternativa* (pp. 135-159). Barcelona: Edebé.

Bosch, M., Gascón, J. y Rodríguez, E. (2004). ¿Qué papel se asigna a la resolución de problemas en el actual currículum de matemáticas? En C. Castro y M. Gómez (Eds.), *Análisis del currículo actual de matemáticas y posibles alternativa* (pp. 95-118). Barcelona: Edebé.

Bosch, M., Espinoza, L. y Gascón, J. (2003): El profesor como director de procesos de estudio: análisis de organizaciones didácticas espontáneas, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 23* (1), 79-136.

Bosch, M., Fonseca, C. y Gascón, J. (en prensa): Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las Instituciones Escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*.

Bottge, B.A., Heinrichs, M., Chan, S.Y. y Serlin, R.C. (2001). Anchoring adolescents' understanding of math concepts in rich problem-solving environments. *Remedial and SpecialEducation*, *22* (5), 299-314.

Bourdieau, P. y Passeron, J.C. (2003). *El oficio del sociólogo: presupuestos epistemológicos*. Madrid: Anagrama.

Bracewell, R.J. (1983). Investigating the control of writing skills. En P. Mosenthal, L. Tamor, y S. Walmsley (Eds.), *Research on writing* (pp. 177-203). New York: Longman.

Bransford, J.D. y Stein, B.S. (1983). *The IDEAL problem solver: A guide for improving thinking, learning, and creativity*. New York: W. H. Freeman.

Bransford, J.D. y Stein, B.S. (1986). *Solución IDEAL de problemas*. Madrid: Labor.

Bransford, J. y Vye, N. (1989). Cognitive research and its implications for instruction. En L. Resnick y l. Klopfer (Eds.), *Toward the thinking curriculum: Current cognitive research* (pp. 171-205). Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Bransford, J.D., Brown, A. y Rodney, R.C. (Eds.) (1999). *How people learn:brain, mind, experience and school*. Washington DC: National Academic Press.

Bransford, J., Sherwood, R., Hasselbring, T., Kinzer, C. y Williams, S. (1990). Anchored instruction: Why we need it and how technology can help. En Nix, D. y Spiro, R. (Eds.). *Cognition, education, & multimedia: Exploring ideas in high technology*, 163-205. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Bransford, J.D. y Stein, B.S. (1993). *The Ideal Problem Solver* (2ª ed). New York: Freeman.

Briand, J. y Chevallierd, M.C. (1995). *Les anjeux didactiques dans l'enseignement des matématiques*. París: Hatier.

Brousseau, G. (1984). The crucial role of the didactical contract in the análisis and construction of situations in teaching and learning mathematics. En H.G. Steiner (ed.), *Theory of mathematics education* (pp. 110-119). Bielefeld: IDM.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7 (2), 33-115.

Brousseau, G. (1989). Utilidad e interés de la didáctica para un profesor. *Suma*, *4*, 5-12.

Brousseau, G. (1990a). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la Didáctica de las Matemáticas? (Primera parte). *Enseñanza de las Ciencias*, *8* (3), 259-267.

Brousseau, G. (1990b). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *9* (3), 309-336.

Brousseau, G. (1991). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Segunda parte). *Enseñanza de las ciencias*, *9* (1), 10-21.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (1998): *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970-1990.*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación matemática, 12* (1), 5-38.

Brown, A. (1978). Knowing when, where, and how to remember: A problem of metacognition. En R. Glaser (Ed.), *Advances in Instructional Psychology, 1.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Brown, A. (1987). Metacognition, executive control, self-regulation and other more mysterious mechanisms. En F.E. Weinert y R.H. Kluwe (Eds), *Metacognition, motivation and understanding* (pp. 65-116). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Brown, A.L. (1990). Domain-specific principles affect learning and transfer in children. *Cognitive Science*, *14*, 107-133.

Brown, A.L. y Campione, J.C. (1987). On the importance of knowing what you are doing: Metacognition and mathematics. En R. Charles y E. Silver

(Eds.), *Teaching and evaluating mathematical problem solving.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Brown, A.L. y A.S. Palincsar (1989). Guided cooperative learning and individual knowledge acquisition. En L.B. Resnick (Ed.), *Knowing, Learning, and Instruction: Essays in Honor of Robert Glaser* (pp. 393-451).

Brown, A.L. y Campione, J.C. (1990). Communities of learning and thinking, or a context by any other name. En D. Kuhn (Ed.), *Developmental Perspectives on Teaching and Learning Thinking Skill* (pp. 108-126). Basel: Karger.

Brown, A.L., Bransford, J.D., Ferrara, R.A. y Campione, J.C. (1983). Learning, remembering, and understanding. En J.H. Flavell y E.M. Markman (Eds.), *Handbook of Child Psychology*. *(*Vol. 3., pp. 77-166). New York: Wiley.

Brown, J.S., Collis, A. y Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, *18* (1), 32-42.

Brown, T., Eade, F. y Wilson, D. (1999). Semantic innovation: Arithmetical and algebraic metaphors within narratives of learning. *Educational Studies in Mathematics*, *40*, 53-70.

Burgess, R.G. (Ed.) (1985). *Issues in Educational Research: Qualitative methods*. London; Philadelphia: The Falmer Press.

Burón, J. (1993). *Enseñar a aprender: Introducción a la metacognición*. Bilbao: Mensajero.

Caj, J. (1994). A protocol-analytic study of metacognition in mathematical problem-solving. *Mathematics Educational Research Journal*, *6* (2), 166–183.

Callaghan. L.G. (1987). Research report: Metacognition and school mathematics. *Arithmetic Teacher*, *34* (9), 22–23.

Callejo de la Vega, M.L. (1991). *Les presentations graphiques dans la resolution de problemes de type olimpiades: Une experience de club mathematique.* Tesis Doctoral. Paris: University Paris VII.

Campanario, J.M. (2000). El desarrollo de la metacognición en el aprendizaje de las ciencias: estrategias para el profesor y actividades orientadas al alumno. *Enseñanza de las Ciencias*, *18*, 3, 369-380.

Campione, J. (1987). Metacognitive Components of Instructional Research with Problem Learners. En F. Weinert y R. Klume (Eds.), *Metacognition, Motivation and Understanding* (pp. 117-140). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Campione, J.C., Brown, A.L. y Connell, M.L. (1988). Metacognition: On the importance of understanding what are you doing?. En R.I. Charles y E. A. Silver (Eds.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carl, I.M. (1989): Essential mathematics for the twenty-first century: the position of the National Council of Supervisors of Mathematics. *Mathematics Teacher, 82* (6), 470-474.

Carlson, M.P. (1999). The mathematical behavior of six successful mathematics graduate students: influences leading to mathematical success. *Educational Studies in Mathematics*, *40*, 237-258.

Carpenter, T.P. y Moser, J.M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts grades one through three. *Journal of Research in Mathematics Education, 15* (3), 179-202.

Carpenter, T.P., Fennema, E., Fuson, K., Hiebert, J., Human, P., Murray, H., Oliver, A. y Wearne, D. (1999). Learning basic number concepts and skills as problem solving. En E. Fennema y T.A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T.P., Hiebert, J. y Moser, J.M. (1981). Problem Structure and First–Grade Children Initial Solution Processes for Simple Addition and Subtraction Problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*, 27-39.

Carr, M. y Biddlecomb, B. (1998). Metacognition in mathematics from a constructivist perspective. En D.J. Hacker, J. Dunlosky y A.C. Graesser (Ed.), *Metacognition in educational theory and practice* (pp. 69-91). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carr, M., Alexander, J., y Folds-Bennett, T. (1994). Metacognition and mathematics strategy use. *Applied Cognitive Psychology, 8*, 583-595.

Carr, W. (Ed.) (1989). *Quality in Teaching*. Brighton: Falmer Press.

Castro, C. Y Gómez, M. (2004). *Análisis del currículo actual de matemáticas y posibles alternativas*. Barcelona: Edebé.

Carrillo Yánez, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva: Universidad de Huelva.

Clarke, D.J., Stephens, W.M. y Waywood, A. (1992). Communication and the learning of mathematics. En T.A. Romberg (Ed.), *Mathematics assessment and evaluation: Imperatives for mathematics educators.* New York: The State University of New York Press.

Cobb, P. y Yackel, E. (1998). A constructivist perspective on the culture of the mathematics classroom. En F. Seeger, J. Voigt, y U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 158-190). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Cockcroft, W.H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan: Informe de la Comisión de Investigación sobre la enseñanza de las matemáticas en las escuelas*. Madrid: MEC, Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado.

Cognition and Technology Group at Vanderbilt (1990). Anchored instruction and its relationship to situated cognition. *Educational Researcher*, *19* (6), 2-10.

Cognition and Technology Group at Vanderbilt (1993). Anchored instruction and situated cognition revisited. *Educational Technology*, *33* (3), 52-70.

Cognition and Technology Group at Vanderbilt (1997). The Jasper Project: Lessons in curriculum, instruction, assessment, and professional development. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Cognition and Technology Group at Vanderbilt. (1992). The Jasper Series as an example of anchored instruction: Theory, progam, description, and assessment data. *Educational Psychologist*, *27* (3), 291-315.

Cognition and Technology Group of Vanderbilt (1989). Cognitive technology: Some procedures for facilitating learning and problem solving in mathematics and science. *Journal of Educational Psychology*, *81,* 457-466.

Comunidad Autónoma de Madrid (2002): *Currículo: ESO: áreas de conocimiento y materias obligatorias y opcionales.* Decreto 34/2002.

Contreras, L.C. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas*. Huelva: Universidad de Huelva.

Cooney, T.J. (1985). A beginning teacher's view of problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education, 16 (*5), 324-336.

Costa, A.L. (1991) The school as a home for the mind. En A.L. Costa (Ed.), *Developing minds: A resource book for teaching thinking* (Vol 1, pp. 47– 54). Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Crespo, R., González, S., Guerrero, S., De León, M., Recio, T., Socas, M. y Zuazua, E. (2002). Borrador: sobre la situación de la enseñanza de las matemáticas. *Congreso de la Real Sociedad Matemática Española, Tenerife.*

Recuperable en http://www.rsme.es/comis/educ/comision.pdf.

Crews, T., Biswas, G., Goldman, S. y Bransford, J. (1997). Anchored Instruction. En *International Journal of Artifical Intelligence in Education, 8,* 142-178.

Chamorro, M.C. (2003). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Prentice may.

Chamorro, M.C. y Vecino, F. (2003). El tratamiento y la resolución de problemas. En M.C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 273-299). Madrid: Prentice Hall.

Chappel, S. (2001). Instructional procedures for success in math. *Training/Technical Assistance Centers*, *5* (3), 3-4.

Charles, R.I. y Lester, F.K. (1982). *Teaching problem solving- What, why and how*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.

Charles, R.I. y Lester, F.K. (1984). An evaluation of a process oriented instructional program in mathematical problem solving in grades 5 and 7. *Journal of Research in Mathematics Education. 15 (*1), 15-34.

Charles, R.I. y Silver, E.A. (Eds.) (1988). *The teaching and assessing of mathematical problem solving*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Charles, R.I. y Silver, E.A. (Eds.) (1988). *The teaching and assessing of mathematical problem solving*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1992a). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12* (1), 73-111.

Chevallard, Y. (1992b). La transposition didactique et l'avenir de l'École. *Fenêtre sur cours*, *114*, 88-89.

Chevallard, Y. (1998a). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathematiques en collège: deuxième partie (perspectives curriculaires: la notion de modelisation). *Petit x, 19*, 43–72. Grenoble: IREM.

Chevallard, Y . (1998b). *La trasposición didáctica. Del Saber Sabio al Saber Enseñado*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*, 2, 221-266.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente, *Actas de las XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas,* Huesca. Recuperable en

http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/welcome.htm

Chevallard, Y. (2002a), Organiser l'étude 1. Structures et fonctions. En J.L. Dorier, *et al.* (Eds.), *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques* (pp. 3-22). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2002b): Organiser l'étude. 3. Ecologie & regulation. En J.L. Dorier, *et al.* (Eds.), *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. *Journées de didactique comparée.* Lyon.

Chevallard Y. (2005). Hacia una nueva epistemología en educación matemática. *IV Congreso de la European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4),* Conferencia plenaria de apertura. Sant Feliu de Guíxols.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona: ICE/ Horsori.

Chi, M.T.H., Feltovich, P. y Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science, 5*, 121-152.

Chi, M.T.H., Glaser, R. y Rees, E. (1982). Expertise in problem solving. En R. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence* (Vol. 1). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Chinnappan, M. (2003). The effect of scaffolding on knowledge production during mathematical problem solving. *International Journal of Curriculum and Instruction*, *5* (1), 3-18.

Chinnappan, M., y Lawson, M. (1996). The effects of training in use of executive strategies in geometry problem solving. *Learning and Instruction, 6* (1), 1-17.

Hickey, D., Heath, A., Rewey, K., Vye, N. y the Cognition and Technology Group at Vanderbilt (1991). Assessing the outcomes from an innovative instructional program: The 1990-91 implementation of the "Adventures of Jasper Woodbury". *Technical Report 91-1*. Nashville, TN: Learning Technology Center, Vanderbilt University.

Da Veiga, C. (1985). Ideas y tendencias en la resolución de problemas. En MEC, *La enseñanza de la matemática a debate* (pp. 7-10). Madrid: Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.

Davidson, J.E. y Sternberg, R.J. (1998). Smart problem solving: how metacognition helps. En D.J. Hacker, J. Dunlosky y A.C. Graesser (Ed.), *Metacognition in educational theory and practice* (pp. 47-68). Hillsale, NJ: Erlbaum.

Davidson, J.R. Deuser y R. Sternberg. (1994). The Role of Metacognition in Problem Solving. En J. Metcalfe y A. Shimamura (Eds.), *Metacognition: Knowing about knowing* (pp. 207-225). Cambridge, MA: Bradford.

De Abreu, G. (2000). El papel del contexto en la resolución de problemas matemáticos. En N. Gorgorió, J. Deulofeu, y A. Bishop (Coords.), *Matemática y educación: retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 137-150). Barcelona: Grado.

De Corte, E. (1993). La mejora de las habilidades de resolución de problemas matemáticos: hacia un modelo de intervención basado en la investigación. En J.A. Beltrán, M.D. Prieto, V. Bermejo, y D. Vence, *Intervención psicopedagógica* (pp. 145-168). Madrid: Pirámide.

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1985). Working with simple word problems in early mathematics instruction. En L. Streefland (Ed.), *Proceeding of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1,* 304-309. Netherlands : State University of Utrecht.

De Corte, E., Verschaffel, L., y Greer, B. (1996). Mathematics, learning, and instruction. En E. De Corte y F.E. Weinert (Eds.), *International encyclopedia of developmental and instructional psychology* (pp. 535-538). Oxford, UJ: Elsevier Science.

De Corte, E., Verschaffel, L. y Op't Eynde, P. (2000). Self-regulation: a characteristic and a goal of mathematics education. En M. Boekaerts, P. R. Pintrich, y M. Zeidner (Eds.), *Handbook of self-regulation* (pp. 687-726). San Diego, CA: Academic Press.

DeFranco, T.C. (1996). A perspective on mathematical problem-solving expertise based on the performance of male Ph. D. mathematicians. En J. Kaput, A.H. Schöenfeld y E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, II* (pp. 195-213). Conference Board of

Mathematical Sciencies, Issues in Mathematics Education (Vol. 6). Providence, RI: American Mathematical Society.

DeFranco, T.C. y Hilton, P. (1999). Distinguishing features of mechanical and human problem-solving. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*, 1, 79-84.

Descartes, R. (1701/2003): *Reglas para la dirección del espíritu*. Madrid: Alianza.

Desoete, A., Roeyers, H. y Buysse, A. (2001). Metacognition in mathematical problem solving in grade 3. *Journal of Learning Disabilities*, *34*, 5, 435-449.

Dewey, J. (1903). *Studies in logical theory*. Chicago : University of Chicago Press.

Dewey, J. (1910): *How we think: restatement of the relation of reflective thinking to the educative process.* Boston: Heath.

Dewey, J. (1929). *The quest for certainly*. New York: Minton, Balch and Co.

Dewey, J. (1933). *How we think, a restatement of the relation of reflective thinking to the educative process.* Boston : D.C. Heath and Co.

Dillenbourg, P. y Self, J.A. (1992). A computational approach to socially distributed cognition. *European Journal of Psychology of Education, 7 (4),* 353-372.

Dochy, F., Segers, M., Van den Bossche, P. y Gijbels, D. (2003). Effects of problem-based learning: a meta-analysis. *Learning and Instruction*, *13*, 533-568.

Dodson, C.S. y Schacter, D.L. (2002). When false recognition meets metacognition: the distinctiveness heuristic. *Journal of Memory and Language*, *46*, 782-803.

Dominowski, R.L. (1998). Verbalization and problem solving. En D.J. Hacker, J. Dunlosky, y A.C. Graesser (Eds.), *Metacognition in educational theory and practice* (pp. 25-46). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7* (2), 5-31.

Dunlosky, J. (1998). Epilogue: Linking metacognitive theory to education. En D.J. Hacker, J. Dunlosky y A.C. Graesser (Eds.), *Metacognition in Educational Theory and Practice* (pp. 367-381). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Espinoza, L. (1998). *Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "límite de función"*. Tesis Doctoral. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

Evans, J. (1999). Building bridges: reflections on the problem of transfer of learning in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *39*, 23-44.

Everson, H.T. y Tobias, S. (1998). The ability to estimate knowledge and performance in college: a metacognitive analysis. *Instructional Science*, *26*, 65-79.

Flavell, J.H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. En L.B. Resnick (Ed.). *The nature of intelligence* (pp. 231-236). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Flavell, J.H. (1979). Metacognition and Cognitive Monitoring. *American Psychologist*, *34* (10), 906-911.

Flavell, J.H. (1987). Speculations about the nature and development of metacognition. En F.E. Weinert y R.H. Kluwe (Eds.), *Metacognition, motivation and understanding* (pp. 21-29). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Flavell, J.H. (1992). Metacognition and cognitive monitoring: a new area of cognitive-developmental inquiry. En T.O. Nelson (Ed.), *Metacognition: core readings* (pp. 3-8). Boston: Allyn and Bacon.

Flavell, J.H. (1999). Cognitive development: children's knowledge about the mind. *Annual Review of Psychology*, *50*, 21-45.

Flavell, J.H. (2000). Cognitive development: Past, present and future. En L. Kang (Ed.), *Chilhood cognitive development: The essential readings* (pp. 7-30,). Malden, Massachusetts; Oxford: Blackwell Publishers.

Fogarty, R. (1992). If Minds Truly Matter: The Integrated Curriculum. En A. Costa, J. Bellanca, y R. Fogarty (Eds.), *If Minds Matter: A Foreword to the Future*. (pp. 267-286). Australia: Hawker Brownlow Education.

Fogarty, R. (1994). *How to teach for metacognitive reflection*. Palatine, IL: IRVSkylight.

Fogarty, R., Perkins, D. y Barell, J. (1992). *How to Teach for Transfer*. Palatine, IL.: Skylight Publishing.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. Tesis Doctoral. Vigo: Universidad de Vigo.

Foster, C . (2004). Anchored Instruction. En B. Hoffman (Ed.), *Encyclopedia of Educational Technology.* San Diego: San Diego State University.

Recuperable en
http://coe.sdsu.edu/eet/articles/anchoredinstruc/start.html

Fuson, K. (1982). An Analysis of the Counting-on Procedure in Addition. En T.P. Carpenter, J.M. Moser y T.A. Romberg, (Eds.) *Addition and Subtraction: a Cognitive Perspective*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Fuson, K.C. y Burghardt, B.H. (2003). Multidigit addition and subtraction methods invented in small groups and teacher support of problem solving and reflection. En A.J. Baroody y A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (pp. 1-33). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

García, J. (2005). La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las herramientas funcionales. Tesis doctoral. Jaén: Universidad de Jaén.

García, J. y Ruiz, L. (2005). Mathematical Praxeologies of Increasing Complexity: Variation systems modelling in Secondary Education. *IV Congreso de la European Society for Research in Mathematical Education.* Sant Feliu de Guíxols. Recuperable en

http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/13/GarciaRuiz.pdf

García, T. y Pintrich, P.R. (1994). Regulating motivation and cognition in the classroom: the role of self-schemes and self-regulatory strategies. En D.H. Shunk y B.J. Zimmerman (Eds.), *Self-regulation of learning and performance: Issues and educational applications* (pp. 127-153). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Gardner, H. (1991). *The Unschooled Mind: How Children Think and How Schools Should Teach.*. New York: Basic Books.

Garofalo, J. y Lester, F.K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education, 16* (3), 163–176.

Gascón, J. (1989): *El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de matemáticas*. Tesis doctoral. Barcelona: Universitat Autónoma de Barcelona.

Gascón, J. (1994). El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas. *Educación Matemática*, *6* (3), 37-51.

Gascón, J. (1999): Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas. En T. Ortega (Ed.): *Actas del III Simposio de la SEIEM*, 129-150. Valladolid.

Gascón, J. (2001a): Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (*RELIME*), *4* (2), 129-159.

Gascón, J. (2001b): Evolución de la controversia entre geometría *sintética* y geometría analítica. Un punto de vista didáctico-matemático. S*eminario de Matemáticas Fundamentales* (28). Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Gascón, J. (2002): La dinámica de la actividad matemática: Reconstrucción institucional de una OM, *XVIII Jornadas del SI-IDM*, Organizadas por el grupo DMDC de la SEIEM. Castellón. Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm

Gascón, J. (2003): Efectos del "autismo temático" sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. I: Desaparición escolar de la razón de ser de la Geometría. *Suma*, *44*, 25-34.

Gascón, J., Bosch, M., y Bolea, P. (2001). ¿Cómo se construyen los problemas en didáctica de las matemáticas?: Parte I: El álgebra escolar en el Programa Cognitivo. *Educación Matemática*, *13*, 3.

Gaulin, C. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *SIGMA*, *19*, 51-63.

Georghiades, P. (2000). Beyond conceptual change learning in science education: focusing on transfer, durability and metacognition. *Educational Research*, *4* (2), 119-139.

Gobierno Canario (1994). *Currículo: ESO: Área de matemáticas*. Decreto 310/1993.

Gobierno Canario (1995). *Currículo: Bachillerato: Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales I y II (BHCS).* Decreto 101/1995.

Gobierno Catalán (1996). *Curriculo: Bachillerato: Matemáticas aplicadas a las* *ciencias Sociales I y II (BHCS)*. Decreto 82/1996.

Gobierno de Castilla y León (1929). *Curriculo: Bachillerato: Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales I y II (BHCS)*. Decreto 70/2002.

Gobierno Navarro (1997). *Curriculo: Bachillerato: Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales I y II (BHCS)*. Decreto Foral 169/1997.

Gobierno Valenciano (1994). *Curriculo: Bachillerato: Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales I y II (BHCS)*. Decreto 50/2002, modifica el Decreto 174/1994.

Gobierno Valenciano (1994). *Curriculo: Bachillerato: Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales I y II (BHCS)*. Decreto 174/1994.

Gobierno Valenciano (2002). *Curriculo: Bachillerato: Matemáticas.* Decreto 50/2002.

Godino, J.D. (2001). Confrontación de herramientas teóricas para el análisis cognitivo en Didáctica de las Matemáticas. *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas.* Huesca.

Godino, J.D. y Batanero, C. (1996). The dialectic relationships between research and practice: A meta-analysis of three research works. En N. Malara (Ed.), *An international view of Didactics of Mathematics as a scientific discipline* (pp. 13-22). Módena: Universidad de Módena.

Goldin, G.A. (1992). Meta-analysis of problem-solving studies: a critical response. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23* (3), 274-283.

Goldman, S.R., Zech, L.K., Biswas, G., Noser, T. y The Cognition and Technology Group at Vanderbilt (1999). Computer technology and complex problem solving: issues in the study of complex cognitive activity. *Instructional Science*, *27*, 235-268.

Gómez-Chacón, I.M. (2000). Affective influences in the knowledge of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 43, 149-168.

González Ramírez, T. (2000a). *Metodología para la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas*. Barcelona: Cedecs.

González Ramírez, T. (2000b). Metodología para la enseñanza de las matemáticas a través de la solución de problemas: un estudio evaluativo. *Revista de Investigación Educativa*, *18*, 1, 175-199.

Goos, M. (1994). Metacognitive decision making and social interactions during paired problem solving. *Mathematics Education Research Journal*, *6 (2)*, 144–165.

Goos, M. y Galbraith, P. (1996). Do it this way! Metacognitive strategies in collaborative mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *30*, 229–260.

Goos, M. y P. Galbraith (1996). Do it This Way! Metacognitive Stratgies in Collaborative Mathematical Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics, 30,* 229-260.

Goos, M., Galbraith, P. y Renshaw, P. (1999). Establishing a community of practice in a secondary mathematics classroom. En L. Burton (Ed.), *Learning Mathematics: From Hierarchies to Networks* (pp. 36-61). London: Falmer Press.

Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. En T. Nunes y P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 315-345). Hove, UK: Psychology Press.

Gravemeijer, K. y Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 111-129.

Greeno, J. (1987). Instructional representations based on research about understanding. En A.H. Schöenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 61-88). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Guzmán, M. (1991). *Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*. Barcelona: Labor.

Guzmán, M. (1996). *El rincón de la pizarra*. Madrid: Pirámide.

Hacker, D.J. (1998). Definitions and empirical foundations. En D. J. Hacker, J. Dunlosky, y A.C. Graesser (Ed.), *Metacognition in educational theory and practice* (pp. 1-23). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hacker, D.J., Dunlosky, J. y Graesser, A.C. (Ed.) (1998). *Metacognition in educational theory and practice*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hegarty, M., Mayer, R. y Monk, C. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: a comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology, 87*, 18-32.

Hegedus, S. (1998a) A Study of the metacognitive behaviour of mathematics undergraduates in solving problems in the integral calculus. Tesis Doctoral. Recuperable en http://www.soton.ac.uk/~heg/thesis

Hegedus, S. J. (1998b). Advanced Mathematical Thinking, Metacognition y The Calculus. *Presentado en la British Society for Research in Learning Mathematics. Draft Version. Submitted to For the Learning of Mathematics.* Recuperable en http://www.soton.ac.uk/~amt/amtpaper.htm

Hembree, R. (1992a). Experiments and relational studies in problem solving: a meta-analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 23* (3), 242-273.

Herbst, P. (2000). Articulación y estructuración de las concepciones en la clase de matemáticas: Argumentos y conocimiento público. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.* Recuperable en

http://www.didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/000304Theme/000304ThemeES.html.

Herl, H.E., O´Neil, H.F., Chung, G.K.W.K. y Dennis, R.A. (1997). Feasibility of an on-line concept mapping construction and scoring system. In H.F. O`Neil, Jr. (Dir.), An integrated simulation approach to assessment. *Annual meeting of the American Educational Research Association,* Chicago.

Hersh, R. (1986). Some proposals for revising the philosophy of mathematics. En T. Tymoczko (Ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics.* Boston: Birkhauser.

Hickey, D.T., Moore, A.L., y Pellegrino, J.W. (2001). The motivational and academic consequences of elementary mathematics environments: Do constructivist innovations and reforms make a difference? *American Educational Research Journal, 38* (3), 611-652.

Hoffman, B. (Ed.) (2004) *Encyclopedia of Educational Technology.* San Diego: San Diego State University. Recuperable en http://coe.sdsu.edu/eet/

Holton, D. y Thomas, G. (2001). Mathematical interactions and their influence on learning. En D. Clarke (Ed.), *Perspectives on practice and meaning in mathematics and science classrooms* (pp. 75-104). Dordrecht: Kluwer.

Hudson, T. (1983). Correspondences and numerical differences between disjoint sets. *Child Development*, *54* (1), 84-90.

Hung, D. Tan, S.C., Cheung, W.S. y Hu, C. (2004). Supporting Problem Solving with Case-Stories Learning Scenario and Video-based Collaborative Learning Technology. *Educational Technology & Society, 7* (2), 120-128.

Jiménez, M. y Areizaga, A. (2001). Reflexiones acerca de los obstáculos que aparecen, en la enseñanza de las matemáticas, al pasar del Bachillerato a la Universidad. *IX Jornadas para de la Asociación Española de profesores universitarios de matemáticas para la economía y la empresa. Las Palmas de Gran Canaria.* Recuperable en

http://193.145.158.7/asepuma01/doco12.pdf

Jitendra, A.K. y Xin, Y.P. (1997). Mathematical word-problem-solving instruction for students with mild disabilities and students at risk for math failure: a research synthesis. *The Journal of Special Education, 30* (4), 412-438.

Jonassen, D.H. (1999). Designing constructivist learning environments. In C. Reigeluth (Ed.), *Instructional design theories and models: A new paradigm of instructional theory* (Vol. 2, pp. 215-239). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Jonassen, D. H. (2003). Designing research-based instruction for story problems. *Educational Psychology Review, 15* (3), 267-296.

Jonassen, D.H., Mayes, J.T. y McAleese, R. (1993). A manifesto for a constructivist approach to technology in higher education. En T. Duffy, D. Jonassen y J. Lowyck (Eds.), *Designing constructivist learning environments*. Heidelberg, FRG: Springer-Verlag.

Jonassen, D.H., Peck, K.L. y Wilson, B.G. (1999). *Learning with technology: A constructivist perspective*. Upper Saddle River, NJ: Merrill/Prentice Hall.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. En E. Silver (Ed.), *Teaching and learnming mathematical problem solving: multiple research perspectives* (pp. 1-15). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Klein, M. (2002). Teaching mathematics in/for new times: a poststructuralist analysis of the productive quality of the pedagogic process. *Educational Studies in Mathematics*, *50*, 63-80

Kline, M. (1973): *Why Johnny can't add: the failure of the New Math*. New York: St. Martin's Press.

Köhler, W. (1917). *The mentality of apes.* New York: Harcourt Brace (traducción de 1926).

Kouba, V.L. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 20* (2), 147-158.

Krulik, S. y Rudnick, J.A. (1989). *Problem solving: a handbook for senior high school teachers*. Boston: Allyn and Bacon.

Krulik, S. y Rudnik, R.J. (1988). *Problem Solving, AHandbook for Elementary School Teachers.* Needhem Heights, MA: Ally and Bacon.

Krulik. S y Rudnik, J. (1980). *Problem Solving, a handbook for senior high school teachers*. Boston: Allyn and Bacon.

Kulm, G. y Days, H. (1979). Information transfer in solving problems *Journal for Research in Mathematics Education, 10,* 94-102.

Lago, M.O. y Rodríguez, P. (1996). Procesos psicológicos implicados en el aprendizaje de las matemáticas. En J.A. Beltrán y C. Genovard, *Psicología de la Instrucción 1: Variables y procesos básicos* (pp. 75-95). Madrid: Síntesis.

Lange, J. (1996). Using and Applying Mathematics in Education. En A.J. Bishop, *et al*. (Eds.), *International handbook of mathematics education, Part one* (pp. 49-97). Dordrecht: Kluwer academic publisher.

Larkin, J.H., McDermott, J., Simon, D.P. y Simon, H.A. (1980). Expert and novice performance in solving physics problem. *Science*, 208, 1335-1342.

Laughbaum, E.D. (1999). On teaching intermediate algebra from a function approach. *Virginia mathematics teacher*, *25* (2), 36-39.

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated Learning. Legitimate peripheral participation.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Lawson, M.J. (1990). The case for instruction in the use of general problem-solving strategies in mathematical teaching: a comment on Owen and Sweller. *Journal for Research in Mathematics Education, 21* (5), 403-410.

Lawson, M.J. y Chinnappan, M. (1994). Generative activity during geometry problem solving: Comparison of the performance high-achieving and low-achieving students. *Cognition and Instruction*, *12* (1), 61-93.

Lester, F. (1994). Musing about Mathematical Problem Solving: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education, 25,* 660-675.

Lester, F.K. y Garofalo,J. (1982). *Mathematical problem solving: Issues in research.* Philadelphia, PA: Franklin Institute Press.

Lester, F.K. (1985). Methodological considerations in research on mathematical problem-solving instruction. En E.A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives,* (pp. 41-69). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Lester, Jr., F.K. y Kehle, P.E. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. En R. Lesh y H.M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning,and teaching* (pp. 501-517). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Lindvall, C.M. y Ibarra, C.G. (1980). Incorrect procedures used by primary grade pupils in solving open addition and subtraction sentences. *Journal for Research in Mathematics Education*, *11*(1), 50-62.

Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in task solving. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 165-190.

Lucangeli, D. y Cornoldi, C. (1997). Mathematics and metacognition: What is the nature of the relationship? *Mathematical cognition*, 3, 121-139.

Llinares, S. (2003). Matemáticas escolares y competencia matemática. En M.C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las matemáticas* (pp. 3-29). Madrid: Prentice Hall.

Ma, L. (1999): *Knowing and teaching elementary mathematics: teacher's understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Maloney, D.P. (1994). Research on Problem Solving: Physics. En D.L. Gabel (Ed.), *Handbook of Research in Science Teaching and Learning.* New York: Mc Millan.

Martín Izard, J.F. (2003). Enseñanza de procesos de pensamiento: metodología, metacognición y transferencias. *Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa*, *7* (2), 17.

Martínez, M.E. (1993). Problem-solving correlates of new assessment forms in architecture. *Applied Measurement in Education, 6,* 167-180.

Masui, C. y De Corte, E. (1999). Enhancing learning and problem solving skills: orienting and self-judging, two powerful and trainable learning tools. *Learning and Instruction*, *9*, 517-542.

Mayer, R. (1983). Pensamiento, Resolución de Problemas y Cognición. Barcelona: Paidós. (traducción de 1986).

Mayer, R.E. y Wittrock, M.C. (1996). Problem solving transfer. En D.C. Berliner y R.C. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 47-62). New York: Macmillan.

McAfee, 0. y Leong, D.J. (1994). *Assessing and Guiding Young Children's Development and Learning.* Boston: Allyn & Bacon.

MEC (1970): *Orientaciones Pedagógicas*. MEC: Madrid.

MEC (1990): *Ley Orgánica 1/1990 de Ordenación General del Sistema Educativo*. BOE de 4 de octubre de 1990.

MEC (1991): Enseñanzas mínimas para la ESO. Real Decreto 1007/1991. En *BOE de 26 de junio de 1991.*

MEC (1991): Currículo: ESO. *Real Decreto 1345/1991*. En *BOE de 13 de septiembre de 2001.*

MEC (2000). *La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos: Un nuevo marco de evaluación*. España: Secretaría General Técnica, Subdirección General de Información y Publicaciones. Recuperable en http://www.ince.mec.es/pub/pisacomp.pdf

MEC (2001a): Enseñanzas mínimas para la ESO. Real Decreto 3473/2000. En *BOE de 16 de enero de 2001.*

MEC (2001b): Desarrollo del currículo para la ESO. Real Decreto 937/2001. En *BOE de 7 septiembre de 2001.*

MEC (2002): *Ley Orgánica 10/2002 de Calidad de la Educación*. BOE de 24 de diciembre de 2002.

MEC (2004): Desarrollo del currículo para la ESO. Real Decreto 116/2004. En *BOE de 10 de febrero de 2004.*

National council of teachers of mathematics (1980): An agenda for action. Reston, VA: NCTM.

National council of teachers of mathematics (1983): *Topics for mathematics clubs*. Reston, VA: NCTM.

National council of teachers of mathematics (1989): Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

National council of teachers of mathematics (2000): *Principles and standards for school mathematics*. Recuperable en http://standards.nctm.org

NCREL y Metiri Group (2000). Resultados del estudio revisados y presentados por la Universidad de Berkeley. Recuperable en http://www.metiri.com/Solutions/Jasper.htm

Newell, A. y Simon, H. (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Nietfeld, J.L. y Schraw, G. (2002). The effect of knowledge and strategy training on monitoring accuracy. *Journal of Educational Research, 95* (3), 131-142.

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *40* (1), 1-24.

Novick, L.R. (1988). Analogical transfer, problem similarity and expertise. *Journal of Experimental Psychology: Learning, memory and cognition, 14,* 510-520.

Nunokawa, K. (1991). Some issues about strategy instruction in school mathematics. *Bulletin of Institute of Education (University of Tsukuba), 16* (1), 83-95.

Nunokawa, K. (2000). Heuristic strategies and problem situations. En J. Carrillo Yánez y L.C. Contreras (Ed.), *Problem solving in the begining of the 21st century: an international overview from multiple perspectives and educational levels* (pp. 81-118). Huelva: Hergué.

Nunokawa, K. (2001). Interactions between subgoals and understanding of problem situations in mathematical problem solving. *Journal of Mathematical Behavior*, *20*, 187-205.

Nunokawa, K. (2004). Problem solving and learning (2004). Documento presentado en el ICME-10 (XX International Congress on Mathematical Education). Copenhagen, Denmark. Recuperable en http://www.juen.ac.jp/g_katei/nunokawa/kaita/TSG18Nuno.pdf

Nunokawa, K. y Fukuzawa, T. (2002). Questions during problem solving with dynamic geometric software and understanding problem situations. *Proceedings of the National Science Council, Republic of China, Part D: Mathematics, Science, and Technology Education*, *12* (1), 31-43.

OECD (2003a), *Literacy Skills for the World of Tomorrow – Further Results from PISA 2003*. París: OECD.

OECD (2003b), *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills.* París: OECD.

OECD (2004a). *Learning for tomorrow's world: first results from PISA 2003*. Recuperable en http://www.pisa.oecd.org.

OECD (2004b). Problem Solving for Tomorrow's World – First Measures of Cross Curricular Competencies from PISA 2003. Recuperable en http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/25/12/34009000.pdf

Oliver, K. (1999b). Anchored Instruction. En *Teaching Models*. Recuperable en http://www.edtech.vt.edu/edtech/id/models/anchored.html

Oliveras, M. L., Flores, P. y Cardeñoso, J.M. (1998). La formación didáctico matemática del orientador como problema de investigación. *Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa*, *3*, 2-3. Recuperable en http://www.uca.es/RELIEVE/V3N2_3.HTM

O`Neil, H.F. y Schacter, J. (1997). *Test specifications for problem-solving assessment. CSE Technical Report 463*. Center for the Study of Evaluation. Los Ángeles, CA: National Center for Research on Evaluation, Standards, and Student Testing Graduate School of Education and Information Studies.

Osawa, H. (1996). Problem-solving exercises based on actual cases: through multi-course classes which use graph calculators. *Journal of Japan Society of Mathematical Education*, *78* (9), 248-252.

Osborne, J. W. (1999). The ACME: a reliable, valid, and teacher-friendly measure of metacognition. *Paper presented at the annual meeting of the American Education Research Association. Montreal, Quebec, Canadá*. Recuperable en http://faculty-staff.ou.edu/O/Jason.W.Osborne-1/otherfiles/MiyResearch/AERA1999-Acme.pdf

Osborne, J. (2002). *Measuring metacognition in the classroom: a review of currently-available measures*. Recuperable en la página personal del autor. http://faculty-staff.ou.edu/O/Jason.W.Osborne-1/Metahome.html.

Osborne, A. y Kasten, M.B. (1980). Opinions about problem solving in the curriculum for the 1980's: A report. En S. Krulik y R. Reys (Eds). *Problem Solving in School Mathematics.* (pp. 51-60) Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Owen, E. y Sweller, J. (1985). What do students learn while solving mathematics problems?*Journal of Educational Psychology*, *77* (3), 272-284.

Owen, E. y Swéller, J. (1989). Should problem solving be used as a learning device in mathematics?. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 322-328.

Pape, S. J., Bell, C. V. y Yetkin, I. E. (2003). Developing mathematical thinking and self-regulated learning: a teaching experiment in a seventh-grade mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *53*, 179-202

Paris, S.G. y Winograd, P. (1990). How metacognition can promote academic learning and instruction. En B.F. Jones y L.Idol (Eds.), *Dimensions of thinking and cognitive instruction* (pp. 15-51). Hilldale, NJ: Erlbaum.

Perkins, D. (1992) *Smart schools: From training memories to educating minds.* New York: Free Press.

Perkins, D. (1995) *La Escuela Inteligente*. Barcelona: Gedisa.

Perkins, D. y Salomon, G. (1988). Teaching for Transfer. *Educational Leadership,* 46, 22-32.

Perkins, D.N., Simmons, R. y Tishman, S. (1990). Teaching cognitive and metacognitive strategies. Jou*rnal of Structural Learning*, *10*, 285-303.

Pifarré, M. y Sanuy, J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas en ESO: un ejemplo concreto. *Investigación Didáctica, 19 (2)*, 297-308.

Pirfarré, M. y Sanuy, J. (2001). La enseñanza de resolución de problemas matemáticos en ESO: un ejemplo concreto. *Investigación didáctica*, *19* (2), 297-308.

Pogglioli, L. (1998). *Estrategias metacognoscitivas*. Venezuela: Fundación Polar. Recuperable en http://www.fpolar.org.ve/poggioli/poggio04.htm

Pólya, G. (1934): Cómo buscar la solución de problemas matemáticos. *Matemática elemental*, (Vol. 3, números 1, 2, 3). Madrid-Buenos Aires: Sociedad matemática argentina y Sociedad matemática española.

Pólya, G. (1945): *How to solve it*. Princeton: Doubleday (2ª ed., 1957).

Pólya, G. (1945/1973). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning* (Vol. 1. Induction and Analogy in Mathematics; Vol. 2. Patterns of Plausible Inference). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pólya, G. (1962, 1965/1981). *Mathematical Discovery*. (Vol. 1, 1962; Volume 2, 1965). Princeton, NJ: Princeton University Press. (ed., 1981. New York, NY: Wiley).

Pólya, G. (1962-65): *Mathematical discovery*. New York: John Wiley and Sons.

Puig, L. (2004). La resolución de problemas en la historia de las matemáticas. *XVI Simposio Iberoamericano de Educación Matemática* (Conferencia de clausura), Castellón. Recuperable en http://www.campus-oei.org/oeivirt/matematica.htm

Recio, T. (2002). Situación de la enseñanza de las matemáticas en la Educación Secundaria Española. *Ponencia en el Senado*.

Recuperable en http://rsme.es/comis/educ/senado/m3.pdf

Reed, S.K. (1987). A structure-mapping model for word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory & Cognition, 13,* 124–139.

Reed, S.K., Dempster A. y Ettinger, M. (1985). Usefulness of analogous solutions for solving algebra word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory & Cognition, 11,* 106–125.

Rico, L. (1997): Reflexión sobre los fines de la educación matemática. *Suma, 24*, 5- 19.

Rico, L. (Dir.) (1988). *Didáctica activa para la resolución de problemas*. Granada: Universidad de Granada.

Rodríguez, E. (2002). Intervención sobre estrategias cognitivas y metacognitivas para la resolución de problemas matemáticos de texto en niños con dificultades de aprendizaje: un análisis. En V. Santiuste, A. Tomás y A.I. Peña (Coord.), *Actas del II Congreso de Educación Especial y atención a la diversidad en la Comunidad de Madrid* (pp. 233-246). Madrid: Comunidad de Madrid, Dirección General de Promoción Educativa.

Rosnick P. y Clement J. 1980: *Learning Without Understanding: The Effect of Tutorial Strategies on Algebra Misconceptions*, *Journal of Mathematical Behaviour, 3* (1), 3-27.

Ross, K.A. (1998). Doing and proving: the place of algorihms and proof in school mathematics. *American Mathematical Monthly,* 252-255.

Rubinstein, M. (1980). A Decade of Experience in Teaching an Interdisciplinary Problem Solving Course. En D. Tuma y F. Reif (Eds.), *Proceeding of a Conference Problem Solving and Education, held at Carnegie-Mellon University*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Ruiz Higueras, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico.* Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Schacter, J., Herl, H.E., Chung, G.K.W.K., O`Neil, H.F., Dennis, R.A. y Lee, J.L. (1997). Feasibility of a Web-based assessment of problem solving. In H.F. O`Neil, Jr. (Dir.), *An integrated simulation approach to assessment. Annual meeting of the American Educational Research Association,* Chicago.

Schöenfeld, A.H. (1978). Can heuristics by taught? En J. Lochhead y J.J. Clement (Eds.), *Cognitive process instruction* (pp. 315-338). Philadelphia: Franklin Institute Press.

Schöenfeld, A.H. (1983). *Problem solving in the mathematics curriculum: a report, recommendations, and a annotated bibliography*. Washington, DC: Mathematics Association of America.

Schöenfeld, A.H. (1985a). *Mathematical problem solving,* San Diego, CA: Academic Press.

Schöenfeld, A.H. (1985b). Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding. En E. Silver (Ed.) *Teaching and learning mathematical problem-solving: Multiple research perspectives* (pp. 361-380). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schöenfeld, A.H. (1985c). Making sense of "out loud" problem-solving protocols. *Journal of Mathematical Behaviour*, *4*, 171–191.

Schöenfeld, A.H. (1985d): *Ideas y tendencias en la resolución de problemas*. En Ministerio de Educación y Ciencia, *La enseñanza de la Matemática a Debate* (pp. 25-30). Madrid: MEC.

Schöenfeld, A.H. (1987a). *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schöenfeld, A.H. (1987b): A brief and biased history of problem solving. En F.R. Curcio (Ed.), *Teaching and Learning: a problem-solving focus*. Reston: NCTM.

Schöenfeld, A.H. (1989). Teaching mathematical thinking and problem solving. En L.B. Resnick y L.E. Klopfer (Eds.), *Toward the thinking curriculum: current cognitive research* (pp. 83-103). Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Schöenfeld, A.H. (1992a). Radical constructivism and the pragmatics of instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*, 3, 290-295.

Schöenfeld, A.H. (1992b): Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition and sense making in mathematics. En D. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Schöenfeld, A. H. (1992c). On paradigms and methods: what do you do when the ones you know don't do what you want them to? Issues in the analysis of data in the form of videotapes. *Journal of the Learning Sciences, 2 (2)*, 179-214.

Schöenfeld, A.H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. En A.H. Schöenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 53-70). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schöenfeld, A.H. (1999). Looking toward the 21st century: Challenges of educational theory and practice. *Educational Researcher*, *28* (7), 4-14.

Schöenfeld, A.H. (2000). Purposes and methods of research in mathematics education. *Notices of the American Mathematical Society*. Recuperable en http://www-gse.berkeley.edu/Faculty/aSchöenfeld/.

Schraw, G. y Dennison, R.S. (1994). Assessing Metacognitive Awareness. *Contemporary Educational Psychology,* 19, 460-475.

Schraw, G. (1994). The effect of metacognitive knowledge on local and global monitoring. *Contemporary Educational Psychology*, *19* (2), 143-154.

Schraw, G. y Moshman, D. (1995). Metacognitive theories. *Educational Psychology Review*, *7* (4), 351-371.

Schroeder, T.L. y Lester, F.K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. En P.R. Trafton y A.P. Shulte (Eds.), *New directions for elementary school mathematics: 1989 Yearbook* (pp. 31-42). Reston, VA: NCTM.

Selden, A. y Selden, J. (1997). What does it take to be an expert problem solver?. *Actas del XXI PME, 2*, (pp. 209-216). Recuperable en http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_4.html

Siegler, R. S. (2003). Implications of cognitive science research for mathematics education. In J. Kilpatrich, W.B. Martin y D.E. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 219-233). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Silver, E.A. y Shapiro, L.J. (1992). Examination of situation-based reasoning and sense-making in students' interpretations of solutions to a mathematics story problem. En J.P. Ponte, J.F. Matos, J.M. Matos y D. Fernances (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies* (pp. 113-123). Berlin: Springer Verlag.

Silver, E.A. y Marshall, S.P. (1990). Mathematical and scientific problem solving: findings, issues, and instructional implications. Dins: B.F. Jones y L. Idol (Eds.). *Dimensions of thinking and cognitive instruction* (pàg. 265-290). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Silver, E.A. (Ed.). (1985). *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research pers*pectives. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Stacey, K. y Scott, N. (2000). Orientation to deep structure when trying examples: a key to successful problem solving. En J. Carrillo Yánez y L.C. Contreras (Ed.), *Problem solving in the begining of the 21st century: an international overview from multiple perspectives and educational levels* (pp. 119-146). Huelva: Hergué.

Stanic y Kilpatrick (1988). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. En R.I. Charles y E.A. Silver (Eds.), The teaching and assessing of mathematical problem solving (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM.

Sternberg, R.J. (1985). *Beyond IQ: A Triarchic Theory of Intelligence.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Sternberg, R.J. (1998). Metacognition, abilities, and developing expertise: What makes an expert student?. *Instructional Science*, *26*, 127-140.

Sternberg, R. J., & Kaufman J. C. (1998). Human abilities. Annual Review of Psychology, *49*, 479-502.

Stylianou, D.A. (2002). On the interaction of visualization and analysis: the negotiation of a visual representation in expert problem solving. *Journal of Mathematical Behavior, 21,* 303-317.

Sweller, J. (1990). On the limited evidence for the effectiveness of teaching general problem solving strategies. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, 411-415.

Thompson, A.G. (1989). *Learning to teach mathematical problem solving: changes in teachers' conceptions and beliefs.* En R.I. Charles y E.A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (Vol. 3, pp. 232-243). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tishman S., Perkins D.N. y Jay E. (1995). *The Thinking Classroom*. Boston: Allyn and Bacon.

Van Haneghan, J., Barron, L., Young, M., Williams, S., Vye, N. y Bransford, J. (1992). The Jasper Series: An Experiment with new ways to enhance mathematical thinking. En D.F. Halpern (Ed.), *Enhancing thinking skills in the sciences and mathematics* (pp. 15-38). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Vermunt, J.D. (1996). Metacognitive, cognitive and affective aspects of learning strategies: A phenomenographic analysis. *Higher Education*, *31*, 25-50. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Verschaffel, L. y De Corte, E. (1997). Word problems: A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school?. En T. Nunes y P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 69-97). Hove, England: Psychology Press.

Vigotsky, L.S. (1993). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona : Crítica.

Villanova, S., Rocerau, M., Valdez, G., Oliver, M., Vecino, S., Medina, P., Astiz, M. y Alvarez, E. (2003). La educación matemática: el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. *OEI- Revista Iberoamericana de Educación*. Recuperable en

http://www.campus-oei.org/revista/deloslectores/203Vilanova.PDF

Villanova, S., Rocereau, M., Valdez, G., Oliver, M., Vecino, S., Medina, P., Astiz, M. y Álvarez, E. (2003). La educación matemática: el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. *OEI- Revista Iberoamericana de Educación*. Recuperable en

http://www.campus-oei.org/oeivirt/matematica.htm.

Vinner, S. (1997). The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought processes in mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, *34*, 97-129.

Vye, N., Schwartz, D., Bransford, J., Barron, B., Zech, L., y CTGV (1998). En D. Hacker, J. Dunlosky, y A. Graesser (Eds.), *Metacognition in educational theory and practice* (pp. 305-346). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Wallas, G. (1926). *The art of thought*. New York: Harcout Brace Jovanovich.

Weinert, F. (1987). Metacognition and Motivation as Determinants of Effective Learning and Understanding. En F. Weinert y R. Kluwe (Eds.), Metacognition, Motivation and Understanding. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Weinert, F.E. y R.H. Kluwe (Eds.) (1987). *Metacognition, Motivation, and Understanding*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Wertheimer, M. (1945). *Productive thinking*. New York: Harper & Brothers.

Wilson, J. (1999). Defining metacognition: A step towards recognising metacognition as a worthwhile part of the curriculum. *Paper presented at the AARE Conference.* Merbourne.

Woods, D. (1985) *El programa de resolución de problemas de la Universidad de McMaster.* Caracas: CENAMEC.

Woolnough, J. (2000). How do students learn to apply their mathematical knowledge to interpret graphs in physics? *Research in Science Education*, *30* (3), 259-267.

Xin, Y.P. y Jitendra, A.K. (1999). The effects of instruction in solving mathematical word problems for students with learning disabilities: a meta-analysis. *The Journal of Special Education*, *32* (4), 207-225.

Young, M., Nastasi, B. y Braunhardt, L. (1996). Implementing Jasper immersion: A case of conceptual change. En B. Wilson (Ed.), *Constructivist learning environments: Case studies in instructional design* (pp.121-133). New Jersey: Educational Technology Publications.

DIRECCIONES DE INTERNET CONSULTADAS

Adkins, J. *Metacognition: Designing for Transfer.*
http://www.usask.ca/education/coursework/802papers/Adkins/ADKINS.PDF

Advanced Mathematical Literature.
http://www.soton.ac.uk/~amt/meta.htm

Balacheff, N. *¿Es la argumentación un obstáculo? Invitación a un debate.*
http://athena.mat.ufrgs.br/˜portosil/resut2.html

Balas, A. K. (1997) The mathematical and reading connection. *ERIC Clearinghouse for Science Mathematics and Environmental Education Columbus OH*.
http://www.ed.gov/databases/ERIC Digest/ed432439.html

Baumert, J., Klieme, E., Neubrand, M., Prenzel, M., Schiefele, U., Schneider, W., Tillmann, K.J. y Weib, M. *Self-regulated learning as a cross-curricular competence*.
http://www.mpib-berlin.mpg.de/pisa/pdfs/CCCengl.pdf

Bell, A. y Burkhardt, H. *Domain frameworks in mathematics and problem solving.*
http://www.nottingham.ac.uk/education/MARS/papers/domains.pdf

Beltrán Llera, J.A. *Aprendizaje cognitivo.*
http://www.cipae.edu.mx/Aprendizaje.doc

Blanco, L. J. *Concepciones y creencias sobre la "resolución de problemas" de estudiantes para profesores y nuevas propuestas curriculares.*
http://teleline.terra.es/personal/ljblanco/pag3e.html

ICMI. *Boletín Informativo del International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI).
http://elib.zib-berlin.de/imu.icmi.bull

Carretero, M. Constructivismo y educación: Cohorte 2001.
http://168.83.61.132/posgrados/diplomas/cye/index.jsp

Coombs, K. (1994). John Flavell: The development of children's knowledge about the mind. *The Bing Times*.
http://www.standford.edu/dept/bingschool/rsrchart/falvell1.htm

Critical Metacognition.
http://www.austhink.org/services/critmet.html

Hacker, D.J. *Metacognition: Definitions and empirical foundations.*
http://www.psyc.memphis.edu/trg/meta.htm

Hettinger, H.R. y Carr, M. *The effects of conceptual and fluency instruction on children's development of mathematics strategies.*
http://tigersyotem.net/aera2002/viewproposaltest.asp?prepID=

Improving student's problem solving skills.
http://www.ccny.cuny.edu/ctl/handbook/hartman.html

Kendall, J.S., y Marzano, R. J. (1997). *Content knowledge: A compendium of standards and benchmarks for K-12 education.*
http://www.mcrel.org/standards-benchmarks/

Kerlin, B.A. (2000) *Cognitive engagement style, self-regulated learning and cooperative learning.*
http://www.lhbe.edu.on.ca/teach2000/onramps/slr/self-reg-learn.html

Leat, D. y Lin, M. (2001). *Developing a pedagogy of metacognition and transfer: some signposts for the generation and use of knowledge and the creation of research partnerships.*
http://www.lu.hiof.no/tt-nor/David-paper2.doc

Livingston, J.A. *Metacognition: An overview.*
http://www.gse.buffalo.edu/fas/shuell/cep564/Metacog.htm

MacLeod, W.B., Butler, D.L. y Syer, K.D. *Beyond achievement data: Assessing changes in metacogntion and strategic learning.* http://www.ecps.educ.ubc.ca/Butler/Confer/AERA%201996%20metacognition.pdf

Metacognition and mathematical problem solving. http://www.stmarys.nsw.edu.au/PAGES/metacog.htm

Metacognition. http://www.alleydog.com/cognotes/metacog.html

Metacognition. http://www.ballarat.edu.au/~werebbin/TB880

Metacognition. http://www.geocities.com/Athens/Parthenon/5102/DESCOGNITIVO/MARZDIM2.HTM

Metacognition. http://www.ncrel.org/sdrs/areas/issues/students/learning/lmetn.htm

Metacognition: thinking about your own thought processes. http://gwis.com/~bob/Metacogn.html

Metacognitive behaviors. http://www.ncrel.org/sdrs/areas/issues/students/learning/lmetp.htm

Monereo Font, C. *Enseñar a conciencia: ¿hacia una didáctica metacognitiva?* http://www.educadormarista.com/Descognitivo/DIDACMET.HTM

Nardi, E. y Jaworski, B. *Developing a pedagogic discourse in the teaching of undergraduate mathematics: on tutors' uses of generic examples and other techniques.* http://www.math.voc.gr/~ictm2/proceedings/pap208.pdf

Psychology of AMT. http://www.soton.ac.uk/˜amt/psy.htm.

ANEXOS

ANEXO A (del Capítulo II)

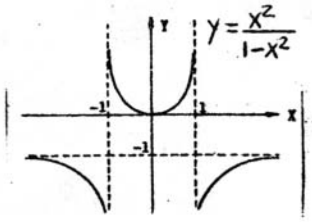
A.1. EXÁMENES

EXAMEN PARCIAL DE 1º D

1. Indica las siguientes características de la siguiente función representada de forma gráfica o analítica, según se pida:

$\boxed{2}$

a) Dominio (Gráfico y analítico)
b) Recorrido (Gráfico)
c) Simetría (Gráfico y analítico)
d) Signo (Gráfico y analítico)
e) Máximos y mínimos (Gráfico)
f) Intervalos de crecimiento y decrecimiento (Gráfico)
g) Puntos de inflexión (Gráfico)
h) Curvatura (Gráfico)
i) Asíntotas (Gráfico)



2. Al lanzar una pelota al aire desde el suelo la altura (h), en metros, que alcanza en el instante t (en segundos) sigue la fórmula:

$$h(t) = -t^2 + 30t$$

$\boxed{2}$

a) Haz la gráfica que representa la altura en función del tiempo.
b) Calcula la altura máxima que alcanza la pelota. ¿En qué instante de tiempo se alcanza esa altura?
c) ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que la pelota vuelve a tocar el suelo?

3. a) Dando valores representa la función $f(x) = 2^{\frac{\ }{2}}$ $\boxed{2}$

b) Calcula su función inversa.
c) En la misma gráfica, con otro color, haz un esbozo de la gráfica de la función inversa.

4) Calcula los siguientes límites

$\boxed{2}$

$$a)\ \lim_{x\to -1} \frac{2x^2 - 2x - 4}{x^2 + 2x + 1} \qquad b)\ \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{(x-1)^2}$$

Elige una de las preguntas 5 y 6

5) Representa gráficamente la siguiente función definida a trozos:

$\boxed{2}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < -2 \\ 2 - x & si \quad -2 \le x < 3 \\ x^2 - 10x + 24 & si \quad 3 \le x \end{cases}$$

6) Dadas las funciones:

$f(x)=ax+3$ $\qquad$ $g(x)=x+2$

$\boxed{2}$

a) Calcula el valor de a para que la composición entre ellas sea conmutativa, es decir $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$
b) Calcula las funciones $f^{-1}(x)$ y $g^{-1}(x)$.

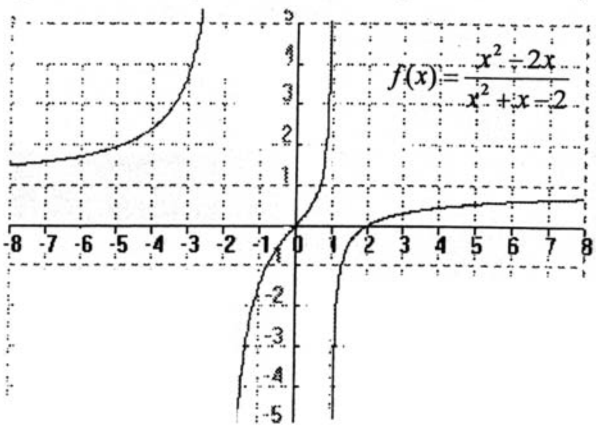
EXAMEN FINAL DE 1º D

1.

Indica las siguientes características de la siguiente función representada de forma gráfica o analítica, según se pida:

2,5

a) Dominio (Gráfico y analítico)
b) Corte con los ejes. (Gráfico y Analítico)
c) Recorrido (Gráfico)
d) Simetría (Gráfico y analítico)
e) Signo (Gráfico y analítico)
f) Máximos y mínimos (Gráfico)
g) Intervalos de crecimiento y decrecimiento (Gráfico)
h) Puntos de inflexión (Gráfico)
i) Curvatura (Gráfico)
j) Asíntotas (Gráfico)



2. Dada la función:

$$f(x)=\frac{3x^2-9}{x^2-4}$$

Calcula las siguiente características:

a) Dominio. Puntos de discontinuidad.
b) Corte con los ejes.
c) Signo.
d) Asíntotas.
e) Simetrías.
f) Haz una gráfica aproximada.

2,5

3. Indica el tipo de indeterminación que presentan los siguientes límites y calcúlalos:

2,5

$a)\ \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x-8}{x^2+x-20}$ $\quad b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}$ $\quad c)\ \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x}-x)$

4. a) Estudia la continuidad de la siguiente función y en caso de presentar discontinuidades clasifícalas en inevitables o evitables.

2,5

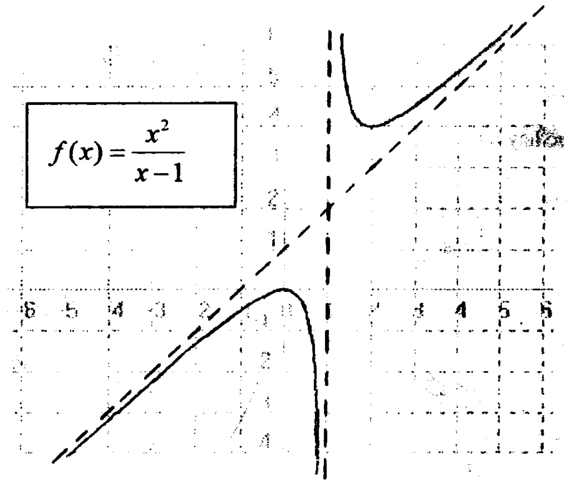
$$f(x)=\begin{cases} e^x+1 & si\ \ x<0 \\ x+2 & si\ 0<x\leq 2 \\ x^2 & si\ 2<x \end{cases}$$

b) Representa gráficamente la función anterior

EXAMEN PARCIAL 1º E

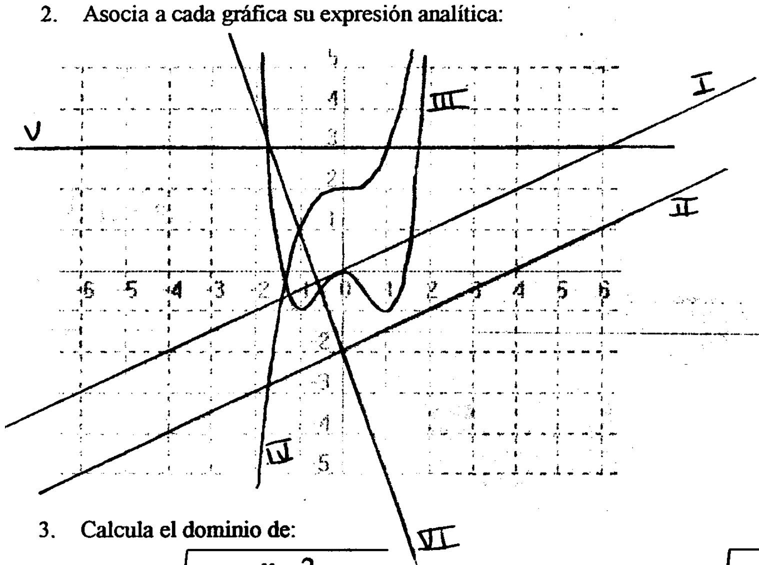
APELLIDOS Y NOMBRE: ·

1. Estudio completo de la siguiente función:



a) Dominio (1'5)
b) Recorrido (1'5)
c) Corte con los ejes (1)
d) Simetrias (0'5)
e) Periódicidad (0'5)
f) Cotinuidad (0'5)
g) Asíntotas(1'5)
h) Extremos (1)
i) Monotonía (1)
j) Curvatura (1)

2. Asocia a cada gráfica su expresión analítica:



a) $f(x)=-3x-2$
b) $f(x)=x^3+2$
c) $f(x)=\dfrac{1}{2}x$
d) $y=3$ ✓
e) $f(x)=\dfrac{1}{2}x-2$
f) $f(x)=x^4-2x^2$

3. Calcula el dominio de:

a) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{3x^3-15x^2-42x}}$

b) $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x-2}{3x^3-15x^2-42x}}$

4. Desde el momento de la compra el precio de un coche se va devaluando. Si un coche cuesta)00 de pesetas y se deprecia un 30 % anual, su valor será de un 70 % del valor inicial para cad:

¿Cuál es el precio al cabo de un año? ¿Y de dos años? ¿Y de tres?
¿Cuál es la relación que nos proporciona el precio y, del coche transcurridos x años?
Si se decide vender el coche y ofrecen 164.709 pesetas. ¿Cuántos años han pasado desde la compra?

ta gráficamente la siguiente función:

$$(x)=\begin{cases} -2 & si \quad x\le 0 \\ |x-2| & si \quad 0<x<4 \\ x^2-12x+32 & si \quad x\ge 4 \end{cases}$$

6. En la entrada de un Parking público hay un cartel como este:

Primera hora o fracción . . . . 100 pesetas
Cada hora más o fracción . . . 75 pesetas.
A partir de 7 horas . . . . 625 pesetas.

Construye la gráfica que se ajuste a esta situación.
¿Cuánto se ha de pagar si se ha estado estacionado 2 horas y 45 minutos?

PUNTUACIÓN:
Ejercicios **1** y **5:** : **2 puntos**
Ejercicios **2** y **4: 1'5 puntos**
Ejercicio **3: 1'75** puntos (*apartado a) 075 puntos. Apartado b) 1 puntos)*
Ejercicio **6: 1'25** puntos.*(apartado b) 0'25)*

EXAMEN FINAL DE 1º E

Nota:

APELLIDOS Y NOMBRE: -

Una empresa A de alquiler de coches cobra 30 euros por el contrato y 0,09 euros por kilometro recorrido. Otra empresa B no cobra por formalizar el contrato pero su precio es de 0,15 euros por kilómetro recorrido

1,5

a) Escribe las expresiones que representan las tarifas de las empresas A y B en función de los kilómetros.

b) Si una persona desea alquilar un coche para recorrer 150 kilómetros, ¿qué empresa le resulta más rentable?

c) ¿A partir de qué número de kilómetros es más rentable alquilar el coche en la empresa A?

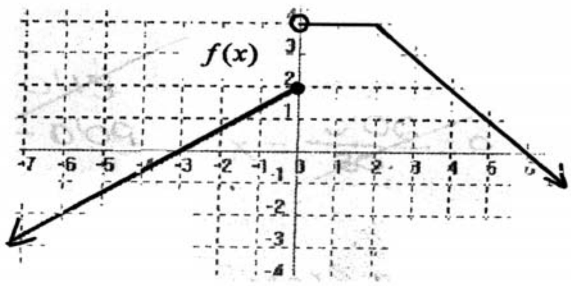
2. Representa la función:

1,5

$$f(x) = \left| x^2 - 6x + 1 \right|$$

3. Escribe la expresión algebraica de la función definida a trozos, representada por la siguiente gráfica:

2



Calcula $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

4. Calcula los siguientes límites:

2,5

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 - 2x - 4}{x^2 + 2x + 1}$$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 - 8x + 3} \right) =$

$$\lim_{x \to -\infty} -3x^{27} - x^5 + x^2 - 3$$

5. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$, calcula:

2,5

a) Dominio:
b) Puntos de corte con los ejes.
c) Asíntotas verticales y horizontales
d) Posición de la gráfica respecto a las asíntotas
e) "Bosquejo" de la gráfica.

A.2. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

ANÁLISIS (EXAMEN PARCIAL DE 1º D)

	EJERCICIOS PLANTEADOS																							
	1															*2*					*3*			
Punt.	**2 puntos**															**2 puntos**					**2 puntos**			
	***a1*[1]**	***a2***	***b***	***c1***	***c2***	***d1***	***d2***	***e1***	***e2***	***f1***	***f2***	***g***	***h***	***i***	**T[2]**	***a***	***b1***	***b2***	***c***	***T***	***a***	***b***	***c***	***T***
***Punt.*[3]**	**1**		**1**	**1**		**1**		**1**		**1**		**1**	**1**	**1**	**2**					**2**				**2**
***1D*[4]**	1		1	0'5	-	0		0		1		1	1	1	**1'45**	0	-	-	-	**0**	**-**	-	**-**	**0**
2D	1		0	0		0		0'25		0		0	0	0'25	**0'35**	-	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**
3D	1		1	1		1		1		1		1	1	1	**2**	0'25	-	-	-	**0'25**	B	R	R	**1'6**
4D	1		1	0'25	-	0		0'25		1		0	1	1	**1'2**	0	0	0	0	**0**	0'25	0	0	**0'25**
5D	1		1	-	0'5	-		1		0'75		1	0	0'5	**1'5**	-	-	-	-	**-**	0'5	0	-	**0'5**
6D	0		1	0		-		0		0		1	0'25	0	**0'5**	-	-	-	-	**-**	0	0	0	**0**
7D	1		1	-	0'5	1		0		0		1	1	1	**1'5**	0	0	0	-	**0**	0	0	0	**0**
8D	1		1	1		1		0		1		0	1	1	**1'5**	0	0	-	0	**0**	0	-	0	**0**
9D	0'5	-	1	-		-		0		0	0'5	0	-	0'75	**0'6**	0	-	-	-	**0**	-	-	-	**-**
10D	1		1	-	0'5	1	-	***M***	1	0'9		1	1	1	**1'65**	0	-	-	-	**0**	0'7	0	0	**0'75**
11D	1	-	0	1		-	0	0	0'25	0		-	-	-	**0'5**	0	-	-	-	**0**	0	0	0'5	**0'5**
12D	0		1	-	0'5	0'5	-	-		1		1	1	0'5	**1'2**	-	-	-	-	**-**	0	0	0	**0**
13D	1		1	-	0'4	-		0'5	-	0	0	1	0'5	0	**1**	-	-	-	-	**-**	***M***	***M***	***M***	**0**
14D	1		-	-	0	1		0		1		0	-	0	**0'65**	-	-	-	-	**-**	0'4	0	-	**0'4**
15D	1		1	1		1		1		1		1	1	1	**2**	B	B	B	B	**2**	***B***	-	***B***	**1'5**
16D	-		-	-		0		-		-		-	-	-	**0**	**-**	-	-	-	**-**	***B***	0	0	**0'65**
17D	0		0	-		-		-		-		-	-	0	**0**	-	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**
18D	1		1	1		1		1		1		1	1	1	**2**	-	-	-	-	**-**	B	B	B	**2**

[1] En los apartados de este ejercicio diferenciamos realizarlo de forma gráfica (1) y analítica (2).
2 Es la puntuación total del ejercicio.
3 Es la puntuación máxima que se asigna a cada ejercicio.
4 El orden de los alumnos es el que se sigue en la tabla de las calificaciones generales. En cada clase hay 18 alumnos; la letra que sigue al número es la del grupo al que pertenece el alumno.

	EJERCICIOS PLANTEADOS								PUNTUACIÓN TOTAL DE CADA EJERCICIO Y TOTAL DEL EXAMEN						
	4			5[5]	6										
Punt.	**2**			**2**	**2**										
	a	b	*T*	*T*	a	b1	b2	*T*	1	2	3	4	5	6	TOTAL
Punt.					**1**	**0'5**	**0'5**								
1D	0	***0'75***	**0'75**	**Elige el 6**	***R***	***R***	***R***	**0'5**	1'5	0	0	0'75	Elige 6	0'5	**2,75**
2D	0'8	0'45	**1'25**	**Elige el 6**	0	-	-	**0**	0'35	-	-	1'25	Elige 6	0	**1,6**
3D	1	1	**2**	**2**	0	-	-	**0**	2	0'25	1'6	2	2	0	**7,85**
4D	0	0	**0**	**0**	**Elige el 5**				1'2	0	0'25	0'25	0	Elige 5	**1,7**
5D	1	0'75	**1'75**	**0'2**	**Elige el 5**				1'5	-	0'5	1'75	0'2	Elige 5	**4**
6D	0	-	**0**	**Elige el 6**	0	0	0	**0**	0'5	-	0	0	Elige 6	0	**0,5**
7D	0'5	1	**1'5**	**1 /2[6]**	**Elige el 5**				1'5	0	0	1'5	1 / 2	Elige 5	**4 / 5**
8D	0	0	**0**	**0'75**	**Elige el 5**				1'5	0	0	0	0'75	Elige 5	**2,25**
9D	0'25	0	**0'25**	**1'5**					0'6	0	-	0'25	Elige 6	1'5	**2,35**
10D	1	0	**1**	**1'25 / 2**	**Elige el 5**				1'65	0	0'7	1	1,25/ 2	Elige 5	**4,6 / 5'25**
11D	0	1	**1**	**Elige el 6**	0	-	-	**0**	0'5	0	0'5	1	Elige 6	0'75	**2,75**
12D	1	0'9	**1'9**	**0'2**	**Elige el 5**				1'25	-	0	1'9	0'2	Elige 5	**3,35**
13D	0'5	1 0'75	**1'5** **1'25**	**Elige el 6**	0	-	-	**0**	1	-	0	1'25 1'5	Elige 6	0	**2,25** **2'5**
14D	0'75	1	**1'75**	**-**	-	-	-	**-**	0'65	-	0'4	1'75	-	-	**2,8**
15D	***R***	***B***	**1'5**	**1'75**	**Elige el 5**				2	2	1`3	1'5	1'75	Elige 5	**8,55**
16D	0	0	**0**	**0'1**	**Elige el 5**				0	-	0'65	0	0'1	Elige 5	**0,75**
17D	0'5	0'25	**0'75**	**0**	**Elige el 5**				0	0	0	0'75	0	Elige 5	**0,8**
18D	0'5	1	**1'5**	**2**	**Elige el 5**				2	-	2	1'5	2	Elige 5	**7,5**

[5] Se puede elegir entre el ejercicio 5 ó el 6.
[6] En los apartados donde aparece doble calificación, separada por la barra (/) es porque consideramos conveniente modificar la calificación porque detectábamos un error de corrección.

ANÁLISIS (EXAMEN FINAL DE 1º D)

	EJERCICIOS PLANTEADOS																											
	1														2									3			
Punt [7]	**2’5**														**2’5**									**2,5**			
	a1[8]	a2	b1	b2	c	d1	d2	e1	e2	f	g	h	i	j	**Total**	a1[9]	a2	b1	b2	c	d	e	f	**Total**	a	b	c	**Tota**
1D	0’25	-	0’5	0	1	0	0’25	-	0	1	0	-	0	0’25	**0’6**	1	-	0	0’5	0	0	1	0	**1**	-	-	-	**-**
2D	¿	1	-		1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**0’5**	-	-	-	-	-	-	-	-	**-**	0	0	-	**0**
3D	¿	1	¿	1	1	1		1		1	1	1	1	1	**2’5**	1		1		1	1	1	1	**2’5**	1	1	1	**2’5**
4D	¿	1	¿	1	1	1		1		1	1	0’5	0’5	1	**2’25**	1		1		-	0’5	1	0	**1’5**	-	-	-	**-**
5D	¿	1	0’5		1	-	0’9	-		1	0	1	0’5	0 /0’5	**1’63/1’8**	0’5	-	0’5		-	-	1	-	**0’83**	0’25	0	0	**0’25**
6D	0	-	-	-	1	0	-	0	-	-	0	-	-	-	**0 / 0’11**	0	-	-	-	-	-	-	-	**0**	-	-	-	**-**
7D	¿	1	0’5	-	0’5	-	0’9	0	-	1	0	1	0’75	1	**1’7/ 1’85**	1		0’5		0	0	1	0’25	**1’15**	0	0	0	**0**
8D	1		0’4	-	1	0’9		0’9	-	1	0	0	0	0’9	**1’5**	1	-	-	-	1	1	1	0’5	**1’9**	0	-	-	**0**
9D	¿	1	0’5	-	1	-	0	-		0	0	0’25	0	0’5	**0’9**	-	-	-	-	-	-	-	-	**-**	0	0’25	0’6	**0’85**
10D	¿	1	0,5	-	0	-	0’5	0’5	-	0	1	1	1	1	**1’6**	1		0’2		0	0’7	0’9	0	**1,15**	R	R	R	**1’7**
11D	1		0’5	0	0’5	-	0’25	-	-	0	0	-	0	0	**0’6**	0	-	-	0’25	-	-	1	0	**0’3**	0’25	-	-	**0’25**
12D	¿	1	¿	0’75/1	1	-	0’25	0	-	-	1	0	1	1	**1’7/ 1’74**	0’8	-	0’5		-	-	1	-	**0’9**	0’75	0’75	0	**1’5**
13D	¿	1	0	-	0	0’5	-	-	-	-	0	-	-	-	**0’4**	1		-	-	-	-	-	-	**0’4**	0	-	-	**0**
14D	¿	1	-	0	0	1		-	-	0	0	0	0	-	**0’5**	1	-	0’5	0	0	-	0’5	-	**0’85**	-	-	-	**-**
15D	1		1		1	1		1		1	1	1	1	1	**2’5**	1		1		1	1	1	1	**2’5**	1	1	1	**2’5**
16D	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**-**	-	-	-	-	-	-	-	-	**-**	0	0	-	**0**
17D	0	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**0**	1	-	-	-	-	-	-	-	**0’4**	B	0	0	**0’8**
18D	¿	1	¿	1	1	-	0’5	1		1	1	1	1	1	**2’4**	1		0’5	0	0	1	1	1	**1’85**	1	1	0’9	**2’4**

[7] En todos los ejercicios (menos en el 4) puntúa como en el primer ejercicio del primer examen: puntúa sobre 1 cada apartado y luego lo multiplica por el valor total de la pregunta (2’5 en todos) y lo divide por el número de apartados del ejercicio.
[8] En todos los apartados de este ejercicio: x1=gráficamente; x2= analíticamente.
[9] En este ejercicio: a1=dominio; a2=puntos de discontinuidad; b1=corte con el eje x; b2=corte con el eje y.

	EJER. PLANTEADOS			PUNTUACIÓN TOTAL DE CADA EJERCICIO Y TOTAL DEL EXAMEN				
	4							
Punt.	**2′5**							
	a	b	**Total**					
Punt.	**1`25**	**1′25**		**1**	**2**	**3**	**4**	**TOTAL**
1D	-	-	**-**	0′6	1	-	-	**1,6**
2D	-	0	**0**	0′5	-	0	0	**0,5**
3D	B	R	**2**	2′5	2′5	2′5	2	**9,5**
4D	-	-	**-**	2′25	1′5	-	-	**3,75**
5D	-	0	**0**	1′6/ 1′83	0′83	0′25	0	**2,68/ 2′91**
6D	-	-	**-**	0/ 0′11	0	-	-	**0 / 0′11**
7D	-	R	**0′75**	1′7 /1′85	1′15	0	0′75	**3,6/ 3′75**
8D	-	0	**0**	1′5	1′9	0	0	**3,4**
9D	-	-	**-**	0′9	-	0′85	-	**1,8**
10D	0	0′5	**0′5**	1′6	1′15	1′7	0′5	**5**
11D	-	-	**-**	0′6	0′3	0′25	-	**1,15**
12D	-	1	**1**	1′7	0′9	1′5	1	**4′9/ 5′2**
13D	-	-	**-**	0′4	0′4	-	0	**0,8**
14D	0′95	-	**0′95**	0′5	0′85	-	0′95	**2,3**
15D	1	1	**2′5**	2′5	2′5	2′5	2′5	**10**
16D	-	-	**-**	-	-	0	-	**0**
17D	-	0	**0**	0	0′4	0′8	0	**1,2**
18D	1`25	0	**1′25**	2′4	1′85	2′4	1′25	**7,9**

ANÁLISIS (EXAMEN PARCIAL DE 1º E)

	EJERCICIOS PLANTEADOS																				
	1											2							3		
Punt.	**2**											**1’5**							**1’75**		
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	**Total**	a	b	c	d	e	f	**Total**	a	b	**Total**
Punt.	**1`5**	**1`5**	**1**	**0’5**	**0’5**	**0’5**	**1’5**	**1**	**1**	**1**		**0’25**	**0’25**	**0’25**	**0’25**	**0’25**	**0’25**		**0’75**	**1**	
1E	B[10]	B	B	B	B	B	B	B	B	B	**1’75**	B[11]	B	B	B	B	B	**1’5**	B	B	**1’75**
2E	B	B	B	B	B	B	B	B	0	0’75	**1’75**	B	B	B	B	B	B	**1’5**	0	0	**0**
3E	B	B	B	0	B	B	B	B	B	B	**1’9**	M	B	B	B	M	B	**1**	M	M	**0’25**
4E	1	0	0	B	B	B	0	0	0	0	**0’5**	B	B	B	B	B	B	**1’5**	0	0	**0**
5E	B	0	B	B	B	B	B	B	B	B	**1’7**	M	B	B	B	M	B	**1**	0	0’65	**0’65**
6E	B	B	0	B	B	B	B	B	0	B	**1’6**	B	B	B	B	B	B	**1’5**	0	0	**0**
7E	B	B	B	B	B	B	0’5	B	0’5	B	**1’8**	B	B	B	B	B	B	**1’5**	0	0	**0**
8E	B	0’75	B	B	B	B	0’5	B	B	B	**1’65**	B	B	B	B	B	B	**1’5**	0’5	0	**0’5**
9E	0	0	0’25	0	0	B	M	M	M	M	**0’15**	M	M	M	B	B	M	**0’5**	0	-	**0**
10E	B	B	B	B	B	B	0	0’25	B	B	**1’55**	B	B	B	B	B	B	**1’5**	0’6	-	**0’6**
11E	B	1’25	0’75	B	B	B	0’5	B	B	B	**1’7**	B	B	B	B	B	B	**1’5**	0’5	0’25	**0’75**
12E	B	B	0’75	0	B	0	0’5	0’25	0	B	**1’2**	M	B	B	B	M	B	**1**	0	-	**0**
13E	B	B	B	B	B	B	0	B	B	B	**1’7**	B	B	B	B	B	B	**1’5**	-	0	**0**
14E	0	B	0’75	B	B	B	0’5	B	0	0	**1’05**	B	B	B	B	B	B	**1’5**	0	0’5	**0’5**
15E	0	0	B	B	B	B	0	0	0	-	**0’5**	B	B	B	B	B	B	**1’5**	0	-	**0**
16E	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	**2**	B	B	B	B	B	B	**1’5**	B	B	**1’75**
17E	B	B	B	B	B	B	0’5	B	B	B	**1’8**	B	B	B	B	B	B	**1’5**	0’7	0’95	**1’65**
18E	B	0	B	B	B	B	0	B	B	B	**1’4**	B	B	B	B	B	B	**1’5**	-	-	**-**

[10] B, en cualquier apartado del examen, indica que se da la puntuación máxima. M cuando lo ha intentado pero está mal. R cuando lo ha desarrollado regular (en el análisis de los resultados de los alumnos se pueden observar las características de las realizaciones).

[11] Cuando tiene mal dos sabemos que ha confundido una con otra. Cuando tiene mal más de dos lo que se hace es utilizar el mismo color las parejas de funciones que ha confundido. Por ejemplo, el Alumno nueve ha confundido “a” con “b” (ambas están en rojo) y “c” con “f” (están en negro).

EJERCICIOS PLANTEADOS									PUNTUACIÓN TOTAL DE CADA EJERCICIO Y TOTAL DEL EXAMEN						
	4				5	6									
Punt.	**1’5**				**2**	**1’25**									
	a	b	c	**Total**		a	b	**Total**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**TOTAL**
Punt.	**0’5**[1]	**0’5**	**0’5**			**1**	**0’25**								
1E	M	B	B	**1**	1’75	0’75	B	**1**	2	1’5	1’75	1	1’75	1	**9**
2E	B	B	B	**1’5**	2	B	B	**1’25**	1’75	1’5	0	1’5	2	1’25	**8**
3E	B	B	B	**1’5**	1’85	B	M	**1**	1’9	1	0’25	1’5	1’85	1	**7,5**
4E	-	-	-	**-**	0	0	B	**0’25**	0’5	1’5	0	-	0	0’25	**2,25**
5E	-	-	-	**-**	2	0	0	**0**	1’7	1	0’65	-	2	0	**5,35**
6E	-	0	0	**0**	0	0	0	**0**	1’6	1’5	0	0	0	0	**3,1**
7E	B	B	B	**1’5**	0’25	0	B	**0’25**	1’8	1’5	0	1’5	0’25	0’25	**5,3**
8E	-	-	-	**0**	1	B	B	**1’25**	1’65	1’5	0’5	0	1	1’25	**5,9**
9E	-	-	-	**-**	-	0	0	**0**	0’15	0’5	0	-	0	0	**0,65**
10E	0’1	0	0	**0’1**	1’25	B	B	**1’25**	1’55	1’5	0’6	0’1	1’25	1’25	**6,25**
11E	0 / 0’1	0	0	**0** **0’1**	0	0	0	**0**	1’7	1’5	0’75	0 0’1	0	0	**3’95 / 4’05**
12E	0’1	-	-	**0’1**	0’5	0	-	**0**	1’2	1	0	0’1	0’5	0	**2,8**
13E	0’1	0	0	**0’1**	0	0’75	B	**1**	1’7	1’5	0	0’1	0	1	**4,3**
14E	0’1	0	0	**0**	0	0’75	0	**0’75**	1’05	1’5	0’5	0’1	0	0’75	**3,9**
15E	-	-	-	**-**	-	-	B	**0’25**	0’5	1’5	0	-	-	0’25	**2,25**
16E	0’1	0’65	0’75	**0’75**	1’5	0	0	**0**	2	1’5	1’75	0’75	1’5	0	**7,5**
17E	0	0	0	**-**	2	B	B	**1’25**	1’8	1’5	1’65	-	2	1’25	**8,2**
18E	0’1	-	-	**0’1**	0	-	-	**-**	1’4	1’5	-	0’1	0	-	**3**

ANÁLISIS (EXAMEN FINAL DE 1º E)

	EJERCICIOS PLANTEADOS																				PUNTUACIÓN TOTAL DE CADA EJERCICIO Y TOTAL DEL EXAMEN					
	1					2	3				4				5											
Punt.	**1’5**					**1’5**	**2**				**2’5**				**2’5**											
	a1	a2	b	c	**T**		a	b1	b2	**T**	a	b	c	**T**	a	b	c	d	e	**T**						
Punt	**0`5**		**0`5**	**0`5**			**1’5**	**0’5**			**1**	**0’5**	**1**		**0’25**	**0’5**	**1**	**0’5**	**0’25**		1	2	3	4	5	TOTAL
1E	0		B	0	**0’5**	1’25	1’25	B		**1’75**	0’9	B	B	**2’4**	B	B	B	B	B	**2’5**	0’5	1’25	1’75	2’4	2’5	**8,4**
2E	B		B	B	**1’5**	1	0’75	B		**1’25**	0	B	0’5	**1**	B	-	B	0’25	0	**1’25/1’5**	1’5	1	1’25	1	1’25/1’5	**6/ 6’25**
3E	B		B	B	**1’5**	1’5	1’25	B		**1’75**	0’5	B	B	**2**	B	B	0’5	0’25	0	**1’5**	1’5	1’5	1’75	2	1’5	**8,25**
4E	-		-	-	**-**	0	-	-		**-**	0	0	0	**0**	0	-	0	0’25	0	**0’25**	-	0	-	0	0’25	**0,25**
5E	-		-	-	**-**	0	1’25	B		**1’75**	0	-	-	**0**	-	-	-	-	-	**-**	-	0	1’75	0	-	**1,75**
6E	-		0	0’5	**0’5**	0’25	-	0	0	**0**	0	-	0’5	**0’5**	B	-	0’5	0’25	0	**1**	0’5	0’25	0	0’5	1	**2,25**
7E	B		B	B	**1’5**	-	-	-		**-**	0’25	B	0’25	**1**	0’2	B	-	-	-	**0’7**	1’5	-	-	1	0’7	**3,2**
8E	B		B	0’25	**1’25**	1’5	1’5	0	0’25	**1’75**	0’9	B	0’25	**1’65**	B	B	B	0’3	B	**2’3**	1’25	1’5	1’75	1’65	2’3	**8,45**
9E	B		0’25	0	**0’75**	0’25	-	-		**-**	0	0	-	**0**	-	-	-	-	-	**-**	0’75	0’25	-	0	-	**1**
10E	-		-	-	**-**	1’5	1	-		**1**	0	B	0’25	**0’75**	B	0	B	B	-	**1’75**	-	1’5	1	0’75	1’75	**5**
11E	-		-	-	**-**	1’25	-	0		**0**	0’9	B	0’5	**1’9**	0	0	0’5	B	0	**1**	-	1’25	0	1’9	1	**4,15**
12E	0		0	0’25	**0’25**	0	-	-	-	**-**	0	B	0’25	**0’75**	B	-	0’5	0	0’25	**1**	0’25	0	0	0’75	1	**2**
13E	B		B	B	**1’5**	0	-	-	-	**-**	0	B	1	**1’5**	0	-	0’25 / 0’6		-	**0’25/0’6**	1’5	0	-	1’5	0’25/0’6	**3,25/ 3’6**
14E	B		B	B	**1’5**	1’5	-	-	-	**-**	0	B	0’25	**0’75**	0	-	0’25		0	**0’25**	1’5	1’5	-	0’75	0’25	**4**
15E	-		-	-	**-**	-	-	-	-	**-**	0	0	0’25	**0’25**	B	0	0’25			**0’75**	-	-	-	0’25	0’75	**1**
16E	B		B	B	**1’5**	1’5	B	B		**2**	B	B	0’5	**2**	B	B	B	B	B	**2’5**	1’5	1’5	2	2	2’5	**9,5**
17E	B		B	B	**1’5**	1’25	B	B	B	**2**	0	B	0’25	**0’75**	B	B	0’5	0’25	-	**1’5**	1’5	1’25	2	0’75	1’5	**7**
18E	B		B	B	**1’5**	0	-	-	-	**-**	-	-	-	**-**	-	-	-	-	-	**-**	1’5	0	-	-	-	**1,5**

COMENTARIOS AL ANÁLISIS (EXAMEN PARCIAL DE 1º D)

General:

- Les da la puntuación máxima aunque no escriban nada con palabras. Los alumnos sólo calculan; no explican nada.
- Cuando llegan a que el límite es infinito y tienen que calcular los límites laterales, sólo uno indica la conclusión sobre cuál es el límite (y en uno de los casos lo hace erróneamente), los demás dejan los límites laterales y la profesora lo da como correcto.
- Ninguno, en el límite a, deduce que el resultado es +-1 (sólo dan como valor 1). Pero se lo da como bien.
- No les pide ni exige justificar nada.

Alumno número 1:

1a) Lo plantea mal: "y=...>0" en vez de =0. Se lo corrige la profesora, pero le puntúa 1.

1b) Bien, pero pone todo entre paréntesis, en vez de poner corchete precediendo al 0. Puntúa 1 (sobre 1) a pesar de ello.

1c) Dice que le puntúa la mitad (0'5 sobre 1) porque le falta hallarlo gráficamente, pero a otros les ha dado como bueno decir simplemente que "es par", sin más explicaciones respecto a la deducción gráfica, que es lo mismo que hace éste alumno.

1d) Sólo lo halla de forma gráfica. Además la confusión que tiene es que considera positivo a la derecha y negativo a la derecha del eje de las X, en vez de considerarlo por encima y por debajo del eje de las Y. Puntúa 0.

1e) Dice como máximo (0, 0) y como mínimo (0,-1). Son el punto máximo y mínimo que no abarca la (donde no hay) gráfica. Puntúa 0, claro.

2a) Sólo intenta representar la gráfica y lo hace dando valores. Opera mal (suponemos, porque no aparecen los cálculos en la hoja, sólo la tabla de x y sus correspondientes y) y por tanto representa mal la gráfica. Puntúa 0.

4) En el **a** llega a la primera indeterminación. Pero sólo halla x para el denominador y luego no continúa (lo puntúa 0).

En **b**, al hallar los límites laterales, deduce que $(x-1)^2$ cuando $x \rightarrow 1^-$ es negativo, de modo que deduce que el límite por la izquierda es negativo (siendo que es positivo) (pero eso siempre lo ha dado como puntuación máxima).

Le señala que no ha utilizado el cálculo mental, y en vez de eso ha sustituido las x por un valor un poco inferior o un poco superior (según el caso). Le puntúa 0'75 por el apartado b.

6a) Le escribe "Así lo escribo en clase, pero no pongo x en el cuadrado (*lo que está encuadrado*), sino f ó g (*según corresponda*)".

Alumno número 2: 1'6

1b) Contesta "de menos infinito a infinito con llaves. Puntúa 0'25 (sobre 1)

1e) Dice el mínimo pero no el máximo. Puntúa 0'25 (sobre 1).

2) No calcula límites laterales (ni en a ni en b). Se lo indica y la puntúa 1'25 (sobre 2).
6a) Realiza el cálculo: ax+3(x+2). Puntúa 0.

<u>**Alumno número 3**</u>: 4'6 (5'25)
1b) Pone paréntesis delante del 0. Le corrige, poniendo paréntesis, pero le puntúa 1 (sobre 1).
1f) Entre los intervalos (de crecimiento y decrecimiento), en vez de U pone "coma". Todos los demás habían puesto U y se daba también como bien. Puntúa 1 (sobre 1).
2a) Se confunde al operar, de modo que halla valores incorrectos de la altura respecto al tiempo, pero no se lo corrige. Hace lo mismo que el Alumno 10, al que le puntúa con 0, pero a este le puntúa con 0'25 (sobre 2).
3) Hace lo siguiente:

- apartado a: lo hace bien (si bien no numera los ejes de coordenadas).
- b: En vez de hacer el logaritmo en base 2, hace el logaritmo neperiano. Le indica el error, pero se lo da como bien.
- c: La inversa la hace mal, ni siquiera es simétrica respecto a nada.

* No entiendo porqué le puntúa tan alto (1'6 sobre 2).
4a) Llega hasta hallar que el límite por la derecha es más infinito y por la izquierda menos infinito. Pero, como conclusión de esto, deduce que el límite es +-infinito (en vez de que no existe porque los límites por la derecha y por la izquierda son diferentes). Se lo corrige, pero le puntúa 1 (sobre 1).
* Este es el único que, además de hallar los límites por la derecha y por la izquierda, deduce el límite. Los demás se quedan en los límites laterales (y se lo da la profesora como bien).
6) Halla (gof) (x) y (fog) (x), pero no concluye el valor de a.
* De todas formas, esta no le cuenta, porque hizo también la 5 y, como la hizo bien, no le contó ésta. Pero dejo constancia porque lo intenta pero no sabe seguir.

<u>**Alumno número 4**</u>: 1'7
1d) Dice bien uno de los intervalos negativos, pero mal el otro y también mal los intervalos positivos. Puntúa 0 (sobre 1), mientras que a otros por indicar los dos intervalos negativos les ha puntuado la mitad (0'5).
1e) Dice bien que no hay máximos, pero el mínimo dice que es 0 (en vez del punto (0,0)). Puntúa 0 (sobre 1)
* El Alumno 11 puntúa 0'25 (igual que este) diciendo lo mismo respecto al mínimo y que el máximo es +infinito.
3) Para representar f(x) gráficamente, sólo toma valores positivos de x. Finalmente sólo representa la gráfica en el eje positivo de la x. Lo demás lo hace mal. Puntúa 0'25 (sobre 2).
4a) Llega hasta la primera indeterminación y no sigue. Puntúa 0.

4b) Llega a la primera indeterminación e intenta hallar los límites laterales. Pero halla los límites cuando x tiende a + y – infinito en vez a 1+ y 1-. Puntúa 0.

<u>**Alumno número 5**</u>: 4 ↓
1b) Contesta "R= (-infinito, -1]U [0, + inifinito)" (pone corchete en vez de paréntesis tras –1). Lo corrige la profesora, pero lo puntúa con 1 (sobre 1).
1f) Unos de los intervalos de crecimiento los señala como de decrecimiento (el que va de –1 a +infinito). Parece que por ello le quita la cuarta parte de la puntuación: puntúa 0'75 (sobre 1). Señala los intervalos como "sueltos", sin símbolos de unión entre ellos sino uno debajo de otro, pero eso no lo corrige ni lo considera al puntar.
1h) Dice "convexa". Puntúa 0.
1i) Dice las dos asíntotas verticales, pero no la horizontal. Puntúa 0'5 (sobre 1).
3a) No indica la numeración de la escala. La profesora le dice que debe hacerlo. Puntúa 0'5 siendo un apartado de 3 de un ejercicio de 2 puntos (en los otros dos apartados tiene 0).
3b) Dice "$y=2^{x/2}$; $x=2^{y/2}$". Puntúa 0.
4a) Halla el límite de forma diferente (con límites laterales). Puntúa 1 (sobre 1).
4b) Llega a la indeterminación, pero, al hallar los límites laterales, confunde el siglo: deduce que a ambos lados es menos infinito (en vez de más infinito). El planteamiento es correcto. Le puntúa 0'75 (sobre 1).
5) Hace el eje de coordenadas y dibuja la gráfica si "x<-2". Puntúa 0'2 (sobre 2).

<u>**Alumno número 6**</u>: 0'5
1f) Da como cóncavos los intervalos convexos y viceversa. Puntúa 0'25 (sobre 1).

<u>**Alumno número 7**</u>: 4
1b) Dice que "Recorrido: R- (0, -1)". Le indica que "Está incluyendo y=-1 y no está en el recorrido", pero le puntúa 1 (sobre 1).
1e) Dice que "Máx= x=1" y "Mín=x=0". Puntúa 0, claro.
1h) Al escribir dónde la función es cóncava, pone que "(1, infinito) U (-1, -infinito)". Le corrige el segundo intervalo por "(-infinito, -1)", pero le puntúa 1 (sobre 1).
2) Al hallar valores para representar la gráfica, se confunde al operar, de modo que le salen valores incorrectos. Además, también da valores negativos al tiempo (hallando valores negativos del tiempo), si bien luego no los utiliza para representar la gráfica. La gráfica que dibuja no tienen ningún sentido. Además, dice que la altura máxima se alcanza en el punto (2, 64), y supongo que lo dice porque, de los valores que ha dado, con t=2 es el valor más alto;

pero si hubiera dado valores mayores al tiempo hubiera visto que sigue aumentando la altura. Puntúa 0.
3) Opera erróneamente al hallar f(x) para los distintos valores de x. Así, representa erróneamente la función. Halla erróneamente la función inversa (f(-x)). Dibuja la función simétrica a la original respecto al eje x. Puntúa 0.
4) Llega hasta la primera indeterminación; luego iguala a 0 numerador y denominador, pero opera erróneamente; llega finalmente a otra indeterminación y ahí intenta seguir pero finalmente lo deja. Puntúa 0'5 (sobre 1).
5) Dando valores, representa adecuadamente cada parte de la función. Pero puntúa 1 (sobre 2), y no sé porqué.

<u>Alumno número 8</u>: 2'25
1b) Contesta "x Σ (-infinito, -1) U (0, + inifinito)" (pone paréntesis en vez de corchete antes de 0). Lo corrige la profesora, pero lo puntúa con 1 (sobre 1).
1d) Dice que es negativa de –infinito a 1 (en vez de a –1). Pero ni siquiera se lo corrige la profesora, parece que no se dio cuenta. Lo demás lo hace bien. Puntúa 1 (sobre 1).
1e) Contesta como máximo lo mismo que en signo positivo y como mínimo lo mismo que en signo negativo. Puntúa 0.
1g) Contesta, como puntos de inflexión, x=-1, x= 1, y=-1. Ni siquiera contesta puntos, sino valores de x y de y sueltos; además, no hay puntos de inflexión. Puntúa 0.
2) Da valores para representarla; sólo da 3 y deduce que es simétrica respecto del eje x sin ni siquiera dar valores de x negativos. Le sale la gráfica como al Alumno 11, pero la dibuja en forma de parábola en vez de con líneas rectas. En función de la gráfica que le sale, contesta que la altura máxima es infinito (apartado b) y que la pelota no vuelve a tocar el suelo (apartado c). Puntúa 0.
3) Representa mal la función en la gráfica porque se confunde en hallar un valor de f(x). No numera los ejes. Dibuja, como inversa, la simétrica respecto del eje x. Puntúa 0.
4a) Llega a la primera indeterminación, pero no sabe seguir. Puntúa 0.
4b) No le sale indeterminación. Eso es porque opera que $(x-1)^2= x^2+1$.
5) Dibuja dos intervalos bien (lo hace dando valores). El tercero lo hace saliéndose incluso del eje de coordenadas, pero con una "forma adecuada". No numera el eje de las x y sólo alguno de los valores del de la y. Puntúa 0'75 (sobre 2).

<u>Alumno número 9</u>: 2'35
1b) Pone "(+infinito, 0] U [-1, -infinito)". Corrige el corchete de delante de –1, poniendo paréntesis. Puntúa 1.
* Además pone dos opciones como segunda parte de la unión ("(-1, -infinito)" y "(-infinito, -1)") y la profesora toma la que está bien, sin puntuar negativamente que ponga dos.
1e) Dice que el máximo es + infinito y el mínimo –infinito (tiene su lógica).

1f1) Crecimiento: pone "[0,1] U [-1, -infinito]" y, debajo de la segunda parte de la unión pone lo que parece otra opción: "(1, +infinito)". Esta segunda es la correcta, pero le da todo como mal (si bien antes había tomando la que estaba bien y le había puntuado con 1).
1f2) Pone: (-infinito, -1] U [-1, 0]". Pero lo pone bien.
1g) Dice que el punto de inflexión es (0,0), cuando no hay. Puntúa 0, claro.
1i) Dice que son asíntotas verticales –1 y 1 y horizontales –1. No dice x=... ni y=... La profesora pone un interrogante y le puntúa 0'75 (sobre 1).
2) Lo único que hace es hallar h para t=2 (aparentemente para, dando valores, representar la función); pero no halla más valores ni intenta representar la función). Además, opera de forma incorrecta al hallar h(2), ya que al sustituir pone que "$-t^2= (-2)^2=4$".
4a) Tras llegar a la primera indeterminación, halla los valores de x: para el denominador lo hace bien, pero para el denominador yerra partiendo todo por 2 en vez de 2a (que son 4). Y sólo le puntúa 0'25.
4b) Llega a la primera indeterminación, pero intenta hallar x en numerador y denominador en vez de hallar los límites laterales (aplica una forma que no es la adecuada para el tipo de indeterminación que está en juego).
5) Lo hace todo bien, excepto lo más simple, que es dibujar el intervalo de gráfica donde x es menor que –2, ya que lo que hace es una recta de (-2, 0) a (0,3), no entiendo por qué. Puntúa 1'5 (sobre 2).

<u>**Alumno número 10**</u>: 4'6
1b) Describe el dominio de derecha a izquierda: "R= (infinito, 0] U (-1, -infinito)". La profesora sólo la marca con un círculo la segunda parte de la unión, y le escribe: "se escribe (-infinito, -1)". Esta corrección creo que no es correcta; tendría que corregir todo, porque si está mal estará mal todo. Puntúa 1 (sobre 1).
1c) Sustituye incorrectamente x por –x, pero el resultado que da es correcto. Le corrige uno error de sustitución (el del numerador), pero el del denominador no. Puntúa 0'5 (sobre 0'5).
1d) Sólo lo hace de forma gráfica, no de forma analítica, pero, en vez de puntuarle la mitad (como hace habitualmente) le puntúa el total (1 sobre 1). Supongo que se trata de un error.
1e) Halla el mínimo, pero dice que hay un máximo en x=-1. Se lo tacha, pero le puntúa el total, en vez de la mitad, como hace habitualmente (supongo que es otro error).
1f) Pone:"Crecimiento→ [0,1] U (1, +infinito);Decrecimiento→ (-infinito, -1) U [-1, 0). Le corrige los corchetes, sustituyéndolos por paréntesis. Le puntúa 0'9 (sobre 1), siendo que otras veces no ha restado por ello.
2a) Sólo intenta dibujar la gráfica, para ello da valores. Varias cuestiones: 1) se confunde al operar, de modo halla valores incorrectos para la altura en función del tiempo; 2) Da valores negativos (cuando dibuja la gráfica, también lo hace para los valores negativos de la altura; si bien lo raya y

escribe al lado que "el lado izquierdo de la gráfica no tiene sentido porque no puede haber tiempo negativo"). Le puntúa 0.

3) Hace lo siguiente:

- En el apartado a: Representa correctamente la función dando valores.
- En b: Indica que la función inversa de $2^{x/2}$ es la raíz cuadrada de 2x. Se lo tacha.
- En c: al "hacer un esbozo de la gráfica de la función inversa", hace la simétrica respecto del eje x. La profesora hace la gráfica de la función simétrica respecto de la bisectriz y le escribe que es "simétrica respecto de la bisectriz".

5) Representa adecuadamente la gráfica. No sé por qué le puntúa sólo 1'25 (sobre 2).

<u>**Alumno número 11**</u>: 2'75

- Le escribe: "No sabes operar. Debes practicar operaciones básicas".
- Dice que la gráfica es un "parábola convexa".

1) En vez de utilizar el "=" utiliza flechas. No se lo señala como mal.

1a) Sólo halla el dominio gráficamente, no analíticamente. Pero puntúa 1 (sobre 1).

1b) Contesta entre llaves y además que de –1 hasta +infinito. Puntúa 0.

1e) Dice que el máximo es + infinito (siendo que no hay máximo) y que el mínimo es 0 (en vez de la coordenada: (0,0)) y le puntúa 0'25 (sobre 1).

2) Sólo intenta representar la gráfica (apartado a) y sólo dando valores, y lo hace mal porque, suponemos (ya que los cálculos no están en la hoja de examen) que no operó adecuadamente al dar los valores.

* No le llama para nada la atención que le sale una gráfica imposible para la situación que se plantea: donde se lanza la pelota desde una altura infinita hacia abajo en el momento menos infinito...

3) De nuevo, al dar valores para representar la gráfica, opera inadecuadamente, de forma que dibuja mal la gráfica. No sé porqué le da 0'5 (sobre), quizá porque, aunque mal la función original, respecto a esta, hace bien la función inversa.

4a) Opera incorrectamente, de forma que no le sale una indeterminación.

6a) Lo plantea bien, pero no llega a resolver el valor de a. Le puntúa 0.

<u>**Alumno número 12**</u>: 3'35

1a) Al hallar el recorrido de forma analítica, opera incorrectamente, de forma que le sale que no hay puntos de discontinuidad (porque al igualar el denominador a 0, se confunde y le sale como resultado la raíz de 1, que no existe). No le ha planteado duda lo que observa gráficamente. Puntúa 0.

1b) Pone paréntesis delante del 0. Le corrige, poniéndole corchete, pero le puntúa 1 (sobre 1).

1i) Responde como asíntotas verticales las horizontales y viceversa. La profesora se lo indica, así como que "asíntotas horizontales sólo puede haber 1". Le puntúa 0'5.

3a) Hace lo siguiente:
- en el apartado a: Sólo halla 4 puntos (para valores de x positivos: 1, 2, 3, 4), y a partir de ahí dibujar una recta, en vez de una parábola sólo para x positivo y con origen en x=0 (y no se sabe el valor, porque sólo lo dibuja y no se diferencia).
- b: Indica que $f(-x)=2^{-x/2}$.
- c: Hace la simétrica respecto del eje y.

* Puntúa 0.

4a) Llega hasta hallar que el límite por la derecha es negativo y por la izquierda positivo, pero lo deja ahí. Como siempre, aunque no se concluye nada sobre el límite (en este caso que no existe) se lo puntúa como bien (1 sobre 1).
4b) Halla correctamente el límite por la derecha, pero, al hallar el de por la izquierda, deduce incorrectamente que es menos infinito. Tampoco concluye nada sobre el límite a partir del límite por la derecha y por la izquierda (en este caso que es más infinito). Pero le puntúa 0'9 (sobre 1).
5) Sólo representa adecuadamente la parte de la gráfica donde f(x)=0. La parte donde f(x)=2-x la representa con pendiente invertida (no entiendo porqué, porque además ni siquiera aparece si ha dado valores o qué valores ha dado, simplemente la representa directamente) y la última parte ni la representa. Puntúa 0'2 (sobre 2).

Alumno número 13: 2`25
1b) Pone "$(-\infty, -1] \cup [0, \infty)$" en vez de "$(-\infty, -1) \cup [0, \infty)$". Lo corrige, pero lo puntúa como perfecto.
1c2) Dice que es par porque "$y=x^2= x^2$". Puntúa 0'4.
1h) Sólo pone "Curvatura $\cup$= convexa"; en vez de "Convexa: (-1, 1); Cóncava: $(-\infty, -1)$ $(1, +\infty)$". Pero le puntúa 0'5 sobre 1.
3) Sólo halla los valores (2,2) (4,4) (6,6) y (8,8), y a partir de ahí dibuja la gráfica: una recta (en vez de una parábola). La función inversa dice analíticamente que es la misma que la original ("$f(x)=2^{x/2}$") y gráficamente lo que hace es otra recta, perpendicular a la original. Después, toma la función original y realiza un "intercambio de *x* por *y*", con lo que concluye que y=2 y x=2. No continúa. No explica qué ha hallado. Puntúa 0.
4a) Llega a la primera indeterminación (0/0)
4b) Lo hace bien, pero le puntúa con 0'75 (sobre 1). No sabemos por qué.

Alumno número 14: 2'8
1c) Analíticamente opera incorrectamente, de forma que concluye que es asimétrica. No dice nada gráficamente.
1e) Responde como máximo los intervalos en que es negativa la función y como mínimo el intervalo en que es positiva. Puntúa 0, claro.
1f) El intervalo de decrecimiento lo da de izquierda a derecha. Puntúa 1 (sobre 1).

1g) Responde que el punto (0,0). Puntúa 0.
1i) Responde como asíntotas verticales los puntos (-1, 0) y (1, 0) y como asíntotas horizontales el punto (0, -1). Le puntúa 0.
3) Para representar la gráfica sólo da tres valores a x, y todos positivos (2, 4 y 6). Representa la gráfica con origen en el punto (0,0) y sólo para x positivas. Puntúa 0'4 sobre 2.
4) En ambos límites, llega hasta hallar los límites laterales. Después sigue operando (no sé lo que hace). El caso es que en el segundo caso se lo da como bien, y en el primero le quita 0'25 (puntúa 1'75 sobre 2).

Alumno número 15: 8'55
2a) La indica que es una "parábola con ramas hacia abajo", porque no lo había puesto. Pero le da la puntuación máxima.
3) Dibuja la gráfica dando valores y dibuja también la simétrica, pero sin calcularla. Además, dice que es "inversa/simétrica" respecto del eje x=y" (la corrige que es respecto a la bisectriz). La puntúa 1'5 (sobre 2).
4a) A partir de $2x^2-2x-2=0$ concluye que x=-1 en vez de la raíz doble: $(x+1)^2$. No concluye cuál es el límite, Le puntúa 0'5 (sobre 1).
4b) Llega hasta concluir cuál es el límite por la derecha y cuál por la izquierda, pero no dice cuál es el límite cuando x tiende a –1. Pero esto sólo lo hace uno (el Alumno número 3) y a todos se lo da como bien.
5) No tiene correcciones, pero puntúa 1'75 (sobre 2). Parece que es porque para dibujar la parte de la gráfica que es una parábola sólo ha hallado los puntos de corte con el eje x.

Alumno número 16: 1'75
3)Dibuja bien la gráfica (dando valores).Al hallar la inversa escribe:"inversa $f(x)=-2^{x/2}$". Y al dibujar la inversa lo que hace es la simétrica respecto del eje y. Puntúa 0'65 (sobre 2)
4a) Llega a la primera indeterminación y halla los valores de x para el numerador. Al hallar los valores de x para el denominador, se equivoca en el cálculo (en vez de b al cuadrado pone b), de forma que no le sale un número entero; por esa razón, deja simplemente indicado que sería el límite de x cuando x tiende a –1 de lo que le ha resultado. Por tanto, no llega a la segunda indeterminación. Le puntúa 0 a pesar de ello.
4b) Llega a la indeterminación. Pero, en vez de hallar los límites laterales, intenta hallar los valores de x en el numerador y el denominador. Halla solamente *y*. Puntúa 0.
5) Da valores, de forma que hace la gráfica pero no completa: el primer intervalo no lo representa; el segundo sólo lo representa para valores positivos de *x*; y para el tercero le ha faltado hallar el segundo punto de corte con el eje x y el mínimo para dibujarla adecuadamente. Puntúa 0'1 (sobre 2).

<u>**Alumno número 17**</u>: 0’8
1i) Dice “Asíntota: nunca llega a tocarla” y dibuja una asíntota. Pero no responde a la pregunta.
2) Sólo halla f(3). Puntúa 0.
3) Sólo halla f(1) y lo halla bien. Pero no da más valores ni dibuja la función. Puntúa 0.
4a) Halla la primera indeterminación, pero yerra al hallar los valores de x del numerador. No continúa. Puntúa 0’5 (sobre 1), mientras que otros que han hecho más puntúan 0.
4b) Halla la primera indeterminación, pero no los límites laterales. Puntúa 0’25 (sobre 1) mientras que otros que han hecho más puntúan 0.

<u>**Alumno número 18**</u>: 7’5
1a) Al plantearlo, lo hace diciendo que el denominador sea mayor que 0, en vez de igual a 0, pero al final lo pone bien. Puntúa 1 (sobre 1).
4a) Sólo halla los límites laterales, pero, como siempre, lo da como bien. Por lo que le resta es porque, aunque el resultado le da bien, al igualar el denominador a 0 yerra diciendo que el resultado es –1 cuando es doble: +-1. Pero a los demás no les ha restado por esto (puntúa 0’5 sobre 1).

COMENTARIOS AL ANÁLISIS (EXAMEN PARCIAL DE 1º E)

General:
1) La mayoría lo hacen de manera gráfica, sin comprobaciones analíticas y sin explicar cómo lo hacen. Les puntúa bien si el resultado es correcto.
5) No resta por no poner valores en los ejes.
6) Creo que un círculo alrededor del punto (gráficamente) simboliza que es abierto y si el punto es negro (relleno) simboliza que es cerrado.

* Curiosidades de diferencia de cómo lo pide esta profesora a la otra:
1f) En vez de máximos y mínimos pide "extremos".
1i) En vez de crecimiento-decrecimiento pide "monotonía".
Esta profesora puntúa 0 si se pone el intervalo en orden opuesto (por ejemplo, ver Alumno número 9) y por unir los intervalos por comas en vez de por unión (ver tb Alumno número 9). La otra profesora no restaba por esto.
1j) En vez de cóncava-convexa pide "curvatura".
* Esta profesora, cuando pide puntos (puntos de corte...) tienen que responder dando puntos (con dos valores) y, si no, aunque los valores obtenidos sean correctos, les puntúa 0 (mientras que la otra les puntuaba como bien haciendo lo mismo).
* Al pedir intervalos, esta profesora, si se ponen intervalos abiertos cuando son cerrados o viceversa (siendo los valores correctos) puntúa 0 (mientras que la otra, como mucho, restaba algo simplemente).
3) Plantear cómo se halla el dominio dependiendo de si la función es par o impar no puntúa nada.

Alumno número 1: 9
1i) Calcula crecimiento-decrecimiento. Lo hace bien, pero lo que le pedía era la monotonía. Puntúa 0.
4a) Halla correctamente el precio del coche al cabo de un año. Pero para calcular el precio al cabo de 2 años, en vez de restar al precio que tiene al cabo de un año el 30% del mismo, resta al precio que tiene al cabo de un año lo mismo que restó para calcular el precio al cabo de un año (es decir, resta la misma cantidad que restó al precio inicial para calcular el del primer año; esto es, resta el 30% del precio inicial en vez del 30% del precio que tenía al cabo de un año).
Para calcular el precio al cabo de tres años toma el precio que obtuvo tras dos años (que ya de por sí era erróneo, como se explica en el párrafo anterior) y le resta de nuevo el 30% del precio inicial (en vez del 30% del precio del coche el año anterior). Le marca los dos resultados erróneos que da pero no tacha ni corrige nada de los cálculos realizados. Le puntúa 0.
3b) Al concluir el dominio, pone paréntesis, en vez de corchete, tras el –2, pero le puntúa 1 (sobre 1).

5) Para representar la función sólo da valores. Además, no marca los valores de los ejes (ninguno).
No halla explícitamente el vértice de la parábola, pero, lo representa bien (lo deduce al ir dando valores).
Pero por lo que le resta es porque hay una parte en la representación de la función que no corresponde (que va del punto (2,0) al (0,-2)). El alumno lo marca en otro color, pero lo marca (no se da cuenta, al dar valores, de que "y" es en valor absoluto). Puntúa 1'75 (sobre 2).
6a) Errores: no marca el valor de los puntos en el eje de las y (marca de 100 en 100, pero no específica el punto 175, ni el 250...); en los ejes indica: "Precio" (debería especificar que en pesetas) y "Horas" (debería decir "Tiempo (en horas)". El más importante, que es el único que corrige la profesora: según la gráfica el precio es de 625 pesetas a partir de 6 horas. Puntúa 0'75 (sobre 1).
* Otro error que comete, pero que la profesora no le ha corregido, es que pone los puntos abiertos y cerrados invertidos. Es decir, según la gráfica: dejando el coche 0 minutos ya debe pagar 100 pesetas; a la hora debe pagar ya 175 pesetas, en vez de al pasar de 1 hora; a las 2 horas justas debe pagar 250 pesetas, en vez de al pasar de las 2 horas...

<u>Alumno número 2</u>: 8
1i) Los valores de los intervalos son correctos, pero pone corchetes en algunos intervalos (en vez de todo paréntesis): "Crece (-infinito] U [2, infinito)" y "Decrece [0,1) U (1,2]". Se lo corrige y le puntúa 0.
1j) Especifica que no hay puntos de inflexión. Es correcto el intervalo convexo, pero en el cóncavo pone (-infinito, 0), le corrige, sustituyendo 0 por 1. Le puntúa 0'75 (sobre 1).
5) Representa bien la gráfica, pero no marca en los ejes ningún valor ni los nombra. Calcula específicamente el vértice de la parábola. Puntúa 2 (sobre 2).
6a) Comete un error, pero que la profesora no le ha corregido: pone los puntos abiertos y cerrados invertidos. Es decir, según la gráfica: dejando el coche 0 minutos ya debe pagar 100 pesetas; a la hora debe pagar ya 175 pesetas, en vez de al pasar de 1 hora; a las 2 horas justas debe pagar 250 pesetas, en vez de al pasar de las 2 horas... Puntúa 1 (sobre 1).

<u>Alumno número 3</u>: 7'5
3) En los dos apartados, dice correctamente si es par o impar la función, pero luego aplica las reglas para hallar el dominio al revés (aplica la regla de cuando es par a la impar y viceversa). Le pone "Horror, es al revés" en ambos apartados. Puntúa 0'25 (sobre 1'75).
5) No marca los valores de los ejes (ninguno).
Halla explícitamente el vértice de la parábola.
Pero por lo que le resta es porque hay una parte en la representación de la función que no corresponde (que va del punto (2,0) al (0,-2)). No se da cuenta, al dar valores, de que "y" es en valor absoluto. Puntúa 1'85 (sobre 2). Quizá puntúa 1'85, en vez de 1'75, porque ha calculado el vértice explícitamente (lo

digo porque el Alumno 1 hace lo mismo, excepto en que no halla explícitamente el valor del vértice, y puntúa 0'75).
6a) Comete un error, pero que la profesora no le ha corregido: pone los puntos abiertos y cerrados invertidos. Es decir, según la gráfica: dejando el coche 0 minutos ya debe pagar 100 pesetas; a la hora debe pagar ya 175 pesetas, en vez de al pasar de 1 hora; a las 2 horas justas debe pagar 250 pesetas, en vez de al pasar de las 2 horas... Puntúa 1 (sobre 1).
6b) En vez de verlo en la gráfica, hace cálculos, y los hace mal, porque dice que "2h + 45m = 2'75h". Después suma 2'75 por 75 más cien y le sale 306'25 (y no se da cuenta de que es incompatible con lo representado por la función).

<u>**Alumno número 4**</u>: 2'25
1a) Pone: "Dominio= $\Re$ - $\{x \in \Re / \ x\text{-}1=0\}$". La profesora escribe "¿Cuáles son estos valores? Le puntúa 1 (sobre 1'5).
1h) Son correctos los puntos que pone, pero no dice si son máximos o mínimos y además lo simboliza así: "Extremos= (2, 4) U (0, 0)". Puntúa 0.
3) En ambos apartados las clasifica correctamente como par-impar y aplica las reglas adecuadas para hallar el dominio en función de esa característica, pero en ambos casos lo deja planteado, sin operar. Puntúa 0.
5) Comete tres tipos de errores: errores al operar, debido a ello representa mal la parábola; representa la función entre 0 y 4 también para valores de "y" negativos (no tiene en cuenta que es el valor absoluto); y no tiene en cuenta los intervalos que son dominio de cada parte de la función (da valores arbitrariamente). Puntúa 0.

<u>**Alumno número 5**</u>: 5'35
1b) Destaco qué error ha cometido porque hace todo lo demás del ejercicio bien. Creo que se debe a que lo hace gráficamente (como todos, en vez de analíticamente, o al menos la comprobación) y confunde el recorrido como los valores para los que x, en vez de y, está definida: "(-infinito, 1) U (1, infinito)". Puntúa 0.
3a) Lo hace todo bien, hasta obtener los tres valores que no forman parte del dominio (0, 7 y –2), pero en vez de responder directamente ya el dominio, analiza los valores de la función en los laterales de estos valores y confluye que "D(f)=(-2,0) U (7, infinito)". Puntúa 0.
3b) En vez de plantear que el D(f) son los valores para los que lo del interior de la raíz es mayor o igual que 0, lo planea como aquellos valores en que es igual a 0 (numerador y denominador). Obtiene como valores 7, -2 y 0 y finalmente analiza en los laterales de los valores obtenidos (incluyendo el 2). Concluye el dominio bien excepto en que el intervalo (0, 2] lo finaliza con paréntesis en vez de corchete. Puntúa 0'65.
* En ambos apartados, no considera si la función es par o impar (siempre lo analiza mezclando ambas formas: iguala a 0 (que es cuando es impar) y luego analiza el siglo de la función en los laterales (que es cuando es par).

6a) Hace un primer intento de representación, va bien, pero lo deja (pone sobre ello "NO") y empieza otra vez. Esta segunda vez, en vez de representar la gráfica un precio constante durante cada ahora, lo que representa es que el precio aumenta durante cada hora proporcionalmente desde el precio de la hora anterior hasta el precio de la hora siguiente (hace una recta uniendo los puntos que corresponden a los valores de x enteros). Le puntúa 0.
Creo que tras empezar a representar bien gráficamente la situación, el problema se le plantea cuando contesta a la pregunta (apartado b), a lo cual responde "231'25 pta" (que aunque sólo pone el resultado, no loa cálculos para hallarlo, deduzco que es el resultado de sumar 100 pts [de la primera hora] más (75+105)/60 [de los 105 minutos que pasan de la hora]). Yo creo que esto le plantea un conflicto con lo que se deducía por la gráfica, pero en vez de cambiar el cálculo (que es lo que estaba mal), lo que cambia es la gráfica.

__Alumno número 6__: 3'1
1c) Dice "Corte con el eje x, y=0", "Puntos de corte con el eje y, x=0". Como vemos son correctos los valores que obtiene, pero no concluye puntos (con dos valores). Le puntúa 0.
* Esto la otra profesora lo puntuaba como bien.
1i) Son correctos los valores de los intervalos, pero pone algunos corchetes, en vez de todo paréntesis. Le corrige y le puntúa 0 (sobre 1).
* Esto la otra profesora lo puntuaba como bien o al menos restaba muy poco.
3) En ambos apartados, plantea bien cuál es el dominio de la función (en función de si es par o impar), pero no desarrolla los cálculos para hallar los puntos en que la función es discontinua.
En el a) quita el 0 del dominio, pero no los valores que hacen cero el denominador. En b) concluye que el dominio son todos los números reales. Puntúa 0.
* Con la otra profesora, el hecho de plantearlo adecuadamente ya puntuaba en la mayoría de los casos.
4a) Deja planteado el precio al cabo de un año: "f(1)=2000000-30%" pero no dice el 30% de qué.
4b) La función que da como solución es "f(x)=2000000-30x%". Aparte de poner "30x%" en vez de "30%x" es que esta función sólo es válida para el primer año (si bien es coherente con sus respuestas al apartado a).
4c) La función que aplica para hallarlo es diferente a la que concluyó en b): "f(x)=20000000-30x" (quita el %). Además, lo que hace es "20000000-30x=0 → x=2000000/30= 7 años". Parece que le "chivaron" que eran 7 años y lo concluyó a partir de algo sin sentido.
* Puntúa 0 en todo el 4.
6a) En vez de representar la gráfica un precio constante durante cada ahora, lo que representa es que el precio aumenta durante cada hora proporcionalmente desde el precio de la hora anterior hasta el precio de la

hora siguiente (hace una recta uniendo los puntos que corresponden a los valores de x enteros). Puntúa 0.

Alumno número 7: 5'3
1g) Sólo halla la AV (puntúa 0'5 sobre 0'5).
1i) Son correctos los valores de los intervalos, pero en vez de indicarlos todos con paréntesis en algunos utiliza corchetes. Se lo corrige y le puntúa 0'5 (sobre 1).
* El Alumno número 6 lo hizo igual y le puntúa 0.
3) Plantea bien cómo hallar el dominio en ambos apartados. El problema que hay es que, al buscar los valores de x para los que el denominador se hace 0, toma mal los valores: en vez de "x $(3x^2$-15x-42)" toma "x $(x^2$-15x-42)", de forma que concluye que no tiene solución y por tanto concluye que el único punto de discontinuidad es 0 (valor de x para el que numerador se hace 0). Puntúa 0.
5) La primera y la segunda parte de la función las representa bien, pero la tercera parte no: sigue una buena técnica: halla los puntos de corte con el eje x y el vértice, pero hace dos cosas mal: la tercera no la finaliza en el 4, sino que la continúa y, además, debido a que al calcular el valor de y para el vértice hace la suma final mal y obtiene 4 (en vez de –4), dibuja la parábola hacia abajo, en vez de hacia arriba. Puntúa 0'25 (sobre 2).
Alumno número 8: 5'9
1b) Pone "(-infinito, 0) U (4, infinito)". Le corrige poniendo corchete tras el 0 y ante el 4, en vez de paréntesis. Puntúa 0'75 (sobre 1'5).
* Ver Alumno 3: puso corchete tras el 0 y le puntuó 1'4 (sólo le restó 0'1).
1g) Halla correctamente la AV, pero al hallar la AO, lo plantea bien pero, al sumar se confunde, opera mal, de modo que obtiene un resultado incorrecto. Puntúa 0'5 (sobre 1'5).
* Lo vuelve a intentar hacer (debe ser que el resultado no le convenció mucho), pero esta vez el error que comete es que uno los puntos que toma no son correctos.
3a) El resultado que da es correcto, pero le resta porque no explica inicialmente que D(f) = D (g). Se lo pone ella ("Explica D(f) = D(g)") y le puntúa 0'5 (sobre 0'75).
3b) Aunque no explica por qué, correctamente hace la función mayor o igual que 0. Halla correctamente algunos de los valores de x (-2, 0 y 7) pero no –2. Además, al analizar el signo de la función en los laterales de los valores que halló, se confunde lo que hace que concluya que el D(f) es solamente el intervalo (7, infinito).
5) Los errores que comete son: no considerar que el valor de y en la segunda parte de la función es absoluto; no marcar que el punto (0,-2) es cerrado; y la tercera parte de la función la inicia para x=4, en vez de para x=4. Puntúa 1 (sobre 2).
6a) Intenta describir "analíticamente" la función, lo hace mal, se lo tacha, pero no le resta, porque no lo pedía. Pero lo indico para que se vea que pueden

saber representar una situación gráficamente pero no "analíticamente". Puntúa 1 (sobre 1).
* Un error que comete, pero que la profesora no le corrige, es que el punto (0, 100) lo marca como cerrado en vez de abierto, de modo que, según la gráfica, cuando no has dejado el coche aún (tiempo 0) ya debes pagar 100 pesetas.

<u>Alumno número 9</u>: 0'65
1c) Indica bien los puntos de corte, pero al lado del punto de corte con el eje x (0,0) pone "No tiene". Le puntúa 0'25 (sobre 1). Es como si creyera que no puede repetir el mismo número de corte con el eje x y con el y.
1i) El intervalo de decrecimiento lo pone mal, pero en el decrecimiento pone: "(2, infinito), (-infinito, 0)". Lo tacha la profesora y pone "(-infinito, 0) U (2, infinito)". Puntúa 0 (sobre 1).
* La otra profesora no resta por poner los intervalos en orden opuesto y tampoco por poner coma en vez de U.
6a) Marca en la gráfica los puntos (0, 1) y (2, 175) que son correctos, pero luego marca para todos los valores de x de 2 a 7 como valor de y 175 y el punto (8, 625). No une los puntos de ninguna forma. Puntúa 0.

<u>Alumno número 10</u>: 6`25
1f) Responde "Es continua *sólo en los valores de su dominio*". Puntúa 0'5 (sobre 0'5) y no le corrige nada.
1h) Responde "Máximo: x=0" y "Mínimo: x=2", pero no pone las coordenadas del punto. Le pone "Coordenadas" y le puntúa 0'25 (sobre 1).
* Tenía puestas las coordenadas, pero lo tacha y lo deja indicando el valor de x, no entiendo por qué.
3a) Describe correctamente el Recorrido (tras obtener los valores que hacen 0 numerador y denominador), pero no explica porqué lo ha hallado de esa forma. La profesora le pone "Explica" y le puntúa 0'6 (sobre 0'75).
4a) Halla correctamente el precio al cabo de un año, pero para hallar el precio en los siguientes años va restando cada año el treinta por ciento de 2000000, en vez del 30% del valor que va quedando el año anterior. Puntúa 0'1 (sobre 0'5).
5) La primera parte la representa correctamente.
La segunda parte la representa correctamente, pero es extraño, porque sólo halla dos puntos, y uno de ellos es erróneo (halla (0, -2), en vez (0, 2) por tratarse del valor absoluto), pero en la gráfica la representa bien (si bien no se sabe de dónde ha sacado los valores que utiliza).
Para la tercera parte sólo halla tres puntos, dos de ellos correctos (el (4, 0) y el (5, -3)) y uno erróneo (6, -5) (en vez de (6,-4)). Además x=6 se corresponde con el valor de x para el vértice de la parábola. Además, intenta hallar el vértice y halla mal tanto el valor de x (halla –6 y es 6) como el valor de y (halla –22 en vez de –4). Encima la parábola que representa no tiene vértice y ni siquiera es una parábola (ver examen). A pesar de todo puntúa 1'25 (sobre 2).

6a) Comete un error, pero que la profesora no le ha corregido: pone los puntos abiertos y cerrados invertidos. Es decir, según la gráfica: dejando el coche 0 minutos ya debe pagar 100 pesetas; a la hora debe pagar ya 175 pesetas, en vez de al pasar de 1 hora; a las 2 horas justas debe pagar 250 pesetas, en vez de al pasar de las 2 horas... Puntúa 1 (sobre 1).

Alumno número 11: 3′95
1b) Los valores del intervalo son correctos, pero se confunde al poner al principio del segundo intervalo paréntesis, en vez de corchete. La profesora le corrige y le puntúa 1′25 (sobre 1′5).
1c) Dice que el corte con el eje x es en el punto (0, 0), pero que con el eje y no tiene. Puntúa 0′75 (sobre 1).
1g) Es correcta la AV, pero la AO dice que es x= ½ (suponemos que la deducción es gráfica, ya que no explicita ningún cálculo). Puntúa 0′5 (sobre 1′5).
3a) Halla los puntos de discontinuidad correctamente, pero no explica porqué los calcula de esa manera. La profesora le pone "Explica". Además, a pesar de hallar como valor de x 7, al describir el recorrido excluye el –7, en vez del 7. La profesora se lo señala y pone "¡¡Cuidado¡¡". Puntúa 0′5 (sobre 0′75).
3b) Halla los valores de x que hacen 0 el denominador, pero no el del numerador. Así, al estudiar el siglo de la gráfica en los laterales, no incluye como punto "conflictivo" el "2". Además, se confunde en el signo de la función en algunos intervalos. Concluye que "x ε (- infinito, -2) U (-2, 0] U (7, infinito)". La profesora le corrige: "(-infinito, -2) U (0, 2) U (7, infinito)". Le puntúa 0′25 (sobre 1).
4a) Halla correctamente el precio al cabo de un año y no hace más. Le puntúa 0. No me parece justo porque al Alumno número 10 le puntúo 0′1 por hacer lo mismo, así que lo corrijo (para que se vea mejor gráficamente que hicieron lo mismo).
5) La primera parte de la función la representa como si tuviera valor para todo x. En la segunda parte no tiene en cuenta que el valor de y es absoluto. La tercera parte se la inventa (ni siquiera da valores para saber algún punto). Puntúa 0.

Alumno número 12: 2′8
1c) Dice que el corte con el eje x es en el punto (0, 0), pero que con el eje no corta. Puntúa 0′75 (sobre 1).
1g) Es correcta la AV, pero no halla la AO. Puntúa 0′5 (sobre 1′5).
1h) Responde "Máximo: x=0" y "Mínimo: x=4", pero no pone las coordenadas del punto. Le pone "Coordenadas" y le puntúa 0′25 (sobre 1).
* Pero creo que la profesora no se da cuenta de que el mínimo no está en el punto en que x=4 (sino en x=2) y le resta simplemente como si no hubiera puesto las coordenadas. Lo sé porque le puntúa igual que al Alumno 10.

1i) Responde "Creciente → (-infinito, 0) U (4, infinito)", "Decreciente → (0, 1) U (infinito, 4)". Le tacha el 4 de creciente y pone 2 y le tacha el segundo intervalo de decreciente (que es (1, 2)). Le puntúa 0.
4a) Halla correctamente el precio al cabo de un año, pero para hallar el precio en los siguientes años va restando cada año el treinta por ciento de 2000000, en vez del 30% del valor que va quedando el año anterior. Puntúa 0'1 (sobre 0'5).
5) La primera parte de la gráfica la hace como x=2, en vez de x=-2.
En la segunda parte no tiene en cuenta el valor de y es absoluto.
La representación de la tercera parte es correcta (no halla explícitamente los puntos de corte con el eje x ni el vértice, pero los halla dando valores).
No indica si los intervalos son abiertos o cerrados en ninguna. Y no numera los ejes.
Puntúa 0'5 (sobre 2).
6a) En vez de representar la gráfica un precio constante durante cada hora, lo que representa es que el precio aumenta durante cada hora proporcionalmente desde el precio de la hora anterior hasta el precio de la hora siguiente (hace una recta uniendo los puntos que corresponden a los valores de x enteros). Lo único que queda representado adecuadamente de la función es el precio a partir de 7 horas. No indica puntos abiertos. Puntúa 0.
<u>Alumno número 13</u>: 4`3
1g) Como AV pone "y=1", en vez de "x=1". Para hallar la AO, elige dos puntos adecuados, pero, aunque plantea bien la fórmula "y=ax+b" no sustituye adecuadamente en ella los valores de los puntos que ha elegido (se olvida de poner = al valor de y). Puntúa 0.
3b) Halla los valores de x que hacen 0 el denominador, pero no el del numerador. Así, al estudiar el siglo de la gráfica en los laterales, no incluye como punto "conflictivo" el "2" y además no halla el siglo para "(x-2)" ni para "(x)". Concluye que "D(f) = (- infinito, -2) U (7, infinito)" (le falta añadir el intervalo (0, 2)). La profesora subraya esta conclusión y pone "NO". Le puntúa 0 (sobre 1).
* Yo creo que la profesora le puntúa demasiado bajo (por comparación con cómo puntúa a otros, ver por ejemplo, al Alumno número 11). Creo que es porque el alumno hace primero el apartado b) y la profesora cree que está respondiendo al a (además esto está avalado porque en la conclusión sólo le falta un intervalo, y a otros que les ha faltado se lo ha añadido (en vez de poner "NO") y les ha puntuado algo).
* Pero en la tabla no le puntúo con nada (le dejo 0) porque no sé cuánto sería justo.
4a) Halla correctamente el precio al cabo de un año, pero para hallar el precio en los siguientes años va restando cada año el treinta por ciento de 2000000, en vez del 30% del valor que va quedando el año anterior. Puntúa 0'1 (sobre 0'5).
4b) La función que da como solución es "2000000-30x". Esta función no es válida ni siquiera para el primer año porque le falta dividir entre 100.

5) La primera parte de la función la representa bien.
La segunda parte mal (utiliza para representarla un punto adecuado: (2, 0), pero dos incorrectos: (0, -2) y (1, -1), debido a que no tienen en cuenta que es en valor absoluto.
La tercera parte la representa mal porque sólo utiliza tres puntos para representarla y los valores que ha dado a x para hallar sus correspondientes valores de y estaban fuera del dominio (utilizó 1, 2 y 3). No halla puntos de corte con los ejes ni el vértice.
Marca que el punto (0, 2) es abierto.
No señala los valores de los ejes.
6a) Lo representa adecuadamente. Le resta porque en el eje donde sitúa el precio, no ha situado los valores a escala. Los valores que marca son los del precio de las diferentes horas (0, 100, 175,....625) y los ha puesto todos a la misma distancia (en vez de marcar a la misma distancia por ejemplo los cientos). Le puntúa 0’75 (sobre 1).
* Otro error que comete, pero que la profesora no le ha corregido, es que pone los puntos abiertos y cerrados invertidos. Es decir, según la gráfica: dejando el coche 0 minutos ya debe pagar 100 pesetas; a la hora debe pagar ya 175 pesetas, en vez de al pasar de 1 hora; a las 2 horas justas debe pagar 250 pesetas, en vez de al pasar de las 2 horas...

<u>Alumno número 14</u>: 3’9
1a) Responde “(-infinito, 1] U [1, infinito]”. Pone corchetes siendo que tendrían que ser paréntesis. Se lo corrige y le puntúa 0 (sobre 1’5).
1c) Contesta: “Eje x= (0, 0)”, “Eje y= (0, 0)”. Pero luego tacha el punto de corte con el eje “y” y pone “No”. Puntúa 0’75 (sobre 1).
1g) Es correcta la AV. Pero, al hallar la vertical, si bien utiliza la fórmula correcta y opera correctamente, la conclusión es incorrecta debido a que toma un punto incorrecto: el (-2, 0). Puntúa 0’5 (sobre 1’5), igual que si no hubiera hecho nada respecto a la AH (según ha puntuado a otros).
1i) Describe la parte creciente de la función correctamente, pero mal la decreciente. Puntúa 0.
3b) Lo hace todo correctamente, pero al concluir pone “D= (-infinito, -2) U [0, 2] U [7, infinito)”. Le corrige los corchetes que ha puesto (dejando todo paréntesis) y le puntúa 0’5 (sobre 1).
4a) Halla correctamente el precio al cabo de un año, pero para hallar el precio en los siguientes años va restando cada año el treinta por ciento de 2000000, en vez del 30% del valor que va quedando el año anterior. Puntúa 0’1 (sobre 0’5).
6a) Representa adecuadamente la función. Le resta 0’25 porque el punto (1, 100) lo indica como cerrado, en vez de abierto.
* El error que comete es que pone los puntos abiertos y cerrados invertidos. Es decir, según la gráfica: dejando el coche 0 minutos ya debe pagar 100 pesetas; a la hora debe pagar ya 175 pesetas, en vez de al pasar de 1 hora; a las 2 horas justas debe pagar 250 pesetas, en vez de al pasar de las 2 horas...

6b) Dice que pagará 175 pesetas (el precio durante la segunda hora). A pesar de haber hecho bien la gráfica, contesta erróneamente.

__**Alumno número 15**__: 2'25
1g) Responde "Si, x=1", pero lo tacha y deja "Sí, x= (0, 1)". Puntúa 0.
1h) Responde mal el máximo, pero bien el punto del mínimo, si bien escribe "x= el punto". Por ello puntúa 0.
1i) Describe mal la parte decreciente de la función, pero la creciente la escribe con los valores correctos de los intervalos, aunque pone corchetes en todo en vez de paréntesis. Se lo corrige (poniendo todo paréntesis) y le puntúa 0.

__**Alumno número 16**__: 7'5
4a) Sólo halla correctamente el precio del coche pasado un año. Lo puntua con 0'1 (sobre 0'5). Lo que hace para hallar los otros precios es: para el precio a los dos años resta a 2000000 el 60% de dos millones; para los tres años resta a 2000000 el 90% de 2000000.
4b) Parte de "$P= P_0.a^t$" (planteamiento correcto), pero la función que propone es "$P=2000000.0'3^t$" (en vez 0'7 pone 0'3; no explica cómo lo ha hallado).
4c) Lo hace todo correcto pero, como utiliza la fórmula de b) (donde pone 0'3 en vez de 0'7) el resultado le sale mal. La profesora pone "Planteamiento bueno".
* Puntúa por b) y c) 0'65 (sobre 1).
5) La primera y la segunda parte las representa bien. Los valores que halla para la segunda parte son erróneos (en la tabla que hace), ya que no tiene en cuenta que los valores de y son absolutos, pero en la gráfica lo hace bien (considera los valores absolutos).
Para la tercera parte no halla específicamente los puntos de corte con los ejes, pero uno de los puntos de corte lo obtiene al ir dando valores (el otro no lo marca exactamente en la gráfica (si bien está cerca del (8, 0)). Pero lo que hace mal es que halla incorrectamente el vértice: lo plantea bien, pero opera mal y eso provoca que le salga como vértice el punto (6, -28) (en vez de el (6, -4)) y es porque dice que $6^2=12$, en vez de 36.
6a) Plantea la función por partes incorrectamente para el intervalo (1, 7] (indica que en este intervalo la función toma el valor "75x+100"). Así, representa correctamente la función en los intervalos (0, 1] y para el (7, infinito), pero mal en el (1, 7]. Lo que hace en este último intervalo es que la función representa, en vez de un precio constante durante cada ahora, que el precio aumenta durante cada hora proporcionalmente desde el precio de la hora anterior hasta el precio de la hora siguiente (hace una recta uniendo los puntos que corresponden a los valores de x enteros). Puntúa 0.

__**Alumno número 17**__: 8'2
1g) Sólo halla la AH (lo hace correctamente). La AO ni lo intenta.
1i) Responde correctamente cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento, pero añade que "Puntos de inflexión: (0, 0),(2, 4) →Pertenece a

la curvatura, apartado j". La profesora lo circula y pone "En estos puntos no hay cambio de curvatura por lo que no son de inflexión". Pero no le resta nada.
3) He supuesto que le resta 0'5 en cada apartado porque ambos están bien desarrollados y bien el resultado, pero en ambos le pone "Explica" debido a que no han explicado porqué lo han calculado así. Puntúa en ambos en conjunto 1'65 (sobre 1'75).
4) Indicamos en las tablas "0" en todos los apartados, aunque podríamos haber puesto "-", ya que hace cosas pero lo tacha todo.
5) Representa adecuadamente toda la función, pero quería destacar varias cosas: al hallar en tablas valores de y para diferentes x, pone valores de y negativos, si bien en para representar la función toma los valores absolutos; no halla los puntos de corte ni el vértice explícitamente, sino que da como valores de x de los que halla y 4, 5, 6, 7 y 8 y ahí están tantos los puntos de corte con el eje x como el vértice. Además, no señala los valores en los ejes. Puntúa 2 (sobre 2).

<u>Alumno número 18</u>: 3
1b) Pone "(-infinito, 0) U (4, infinito)", le corrige sustituyendo los paréntesis de después del 0 y de antes del 4 por corchetes. Puntúa 0.
1g) Pone "AV: y=1" en vez de "x=1". No halla AO. Puntúa 0.
4a) Halla correctamente el precio al cabo de un año, pero para hallar el precio en los siguientes años va restando cada año el treinta por ciento de 2000000, en vez del 30% del valor que va quedando el año anterior. Puntúa 0'1 (sobre 0'5).
* Bueno, supongo que ha hecho eso para calcularlo, porque coinciden los resultados, pero no aparece en el examen cómo lo ha calculado.

A.3. TAREA PROBLEMÁTICA

PROBLEMA DE MATEMÁTICAS

APELLIDOS: ______________________________________ **NOMBRE:**_______________

CURSO: ____ **GRUPO:**

Sea $f(x)$ una función que tiene las siguientes características:

- Dominio: $\mathbb{R} - \{1\}$
- Recorrido: $\mathbb{R}$
- Conocemos dos valores: $f(0) = 0$ $f(3) = 3$
- Límites: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

  $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

  La función es decreciente en todo su dominio

  Signo: $f(x) \geq 0$ cuando $x \leq 0$ y cuando $x \geq 1$, $f(x) \leq 0$ para el resto de valores

(a) Realiza una representación gráfica de la función lo más aproximada posible (en función de las características que conoces).

(b) Realiza una representación gráfica, lo más aproximada posible, de la función inversa a la anterior. Hazlo en el mismo sistema de coordenadas pero con otro color.

(c) Indica, para la función inversa:

- Dominio
- Recorrido

  Signo
- Máximos y mínimos

  Intervalos de crecimiento y decrecimiento

  Asíntotas

(d) Indica a partir de las gráficas para qué valores x se tiene que $f(x) \geq f(x)^{-1}$.

- REALIZA LAS REPRESENTACIONES GRÁFICAS EN LA HOJA CUADRICULADA QUE SE TE HA DADO.
- NO BORRES. SI TE HAS CONFUNDIDO, TÁCHALO CON UNA X Y PONLO ENTRE PARÉNTESIS, ESCRIBIENDO AL LADO "NO VALE". ENTREGA TODAS LAS HOJAS QUE UTILICES (TAMBIÉN LAS DE SUCIO)

ANEXO B (del Capítulo VI)

B.1. DIARIO DEL PRIMER REI

DIARIO DEL PRIMER RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN EN TORNO A LA COMPARACIÓN DE TARIFAS DE TELEFONÍA MÓVIL (curso 2003-2004)

PRIMERA SESIÓN: primer encuentro y exploración de la cuestión inicial

Presentación por parte de la profesora

- Explicación del método de trabajo a seguir: trabajo en pequeños grupos, discusión en gran grupo y síntesis individual.
- Exposición de la cuestión a estudiar:

"Vamos a trabajar en torno a la comparación de tarifas de teléfonos móviles. ¿Vosotros tenéis móvil? ¿De qué compañía". Todos ellos tienen teléfono móvil. Casi todos de la compañía Movistar, uno de Vodafone y uno de amena. Se muestran muy interesados en el tema.

C1. *Análisis de las variables a considerar. ¿Qué variables debemos tener en cuenta para comparar tarifas de teléfono y determinar cuál es más cara/barata?* ***(gran grupo)***

Lluvia de ideas y discusión posterior

Los alumnos contestan que para saberlo deberemos comparar el precio de las llamadas y que las variables que nos permiten calcularlo son:

- Precio de establecimiento de llamada.
- Tiempo de duración de la llamada.
- Hora a la que llames.
- A quién llames (si es fijo o móvil, si es de la misma compañía que tu móvil, si es provincial o al extranjero).
- Compañía desde la que llames.
- IVA.
- Ofertas.

Sobre el precio por minuto de llamada, la profesora (que es simbolizada por P en las conversaciones que se presentan trascritas) les pregunta cuánto paga cada uno (de diferentes compañías) y dudan entre 0'10, 0'12, 0'15 €. Respecto al precio por establecimiento de llamada, indican, en general, que depende del tipo de llamada, otros dicen que no saben exactamente,…

C2. Calcular el precio de algunas llamadas variando la duración de la llamada.

C2.1. Caso particular 1. *Vamos a considerar algunos datos particulares de una llamada.* ***(en grupos)***

Precio de establecimiento de llamada: 0,12 €
Tiempo de duración de la llamada: 1 minuto
Hora a la que se llama: 12:03:43
A quién llames: fijo nacional
Compañía desde la que llames: Compañía A
Ofertas: No hay ofertas que influyan.
Precio por minuto: 0,15 euros/minuto.
IVA: es una variable que introduciremos más adelante.

PUESTA EN COMÚN

Después del trabajo en grupo, se pide a uno de los grupos que salga a la pizarra y que explique lo que ha hecho (el proceso) y el resultado. Los demás pueden comentar, preguntar...

La solución propuesta es: 0,15 + 0,12 = 0,27

Se concluye que sólo son necesarios el tiempo de duración de la llamada, el precio por establecimiento de llamada y el precio por minuto; y que estas últimas vendrán determinadas por las otras variables consideradas (la compañía desde la que llames, la compañía receptora, la hora de la llamada...).

* Más adelante veremos que el precio por establecimiento de llamada sólo depende de si la llamada es nacional o internacional.

C2.2. Caso particular 2 *¿Y si la llamada dura 2 minutos?* **(gran grupo)**

Una alumna (alumna A) dijo rápidamente 0’54. La profesora lo apunta en la pizarra sin confirmar ni negar la exactitud de la respuesta.

Otro alumno (alumno B) indicó: “No, porque estás incluyendo dos veces el precio de establecimiento de llamada”, y describió: “la fórmula es 0’27 + 0’15x”.

P (profesor): “Pero ¿qué es x?”.

Alumno B: “El número de minutos menos 1”.

Alumno C: ¿Pero es que se cobra el primer minuto completo?

P: “No, si no indicamos otra cosa, es que se cobra por segundos desde el primer segundo”.

Alumno B: “Pero en los móviles ¿no se cobra siempre el primer minuto completo?”.

P: “Sé que hay casos en que no”.

Alumno C: “Entonces la fórmula es 0,12 + 0,15x”.

P: ¿Y qué es x?

Alumno C: El número total de minutos hablados.

La solución propuesta es 0,12 + 0,15x = 0,44.

C2.3. Más casos particulares. *Calcular el precio si la llamada dura 3, 4, 5, 10 y 15 minutos.* ***(en grupos)***

PUESTA EN COMÚN

En este caso todos lo hacen correctamente y utilizan la fórmula que se había hallado previamente.
La información la expusieron en una tabla de dos columnas con el valor de *t* (tiempo) y el de *p* (precio). Algunos utilizaban *x* e *y* en vez de *t* y *p*.

La profesora introduce una nueva cuestión a raíz del trabajo realizado previamente por los alumnos:

C3. Comparación del precio de llamadas con la misma duración global

C3.1. Comparación 1 *¿Habrá diferencia de precio entre una llamada de 3 minutos y tres de un minuto?* ***(en grupos)***

PUESTA EN COMÚN
Acuerdo en que sí, porque si haces 3 llamadas de un minuto pagarás 3 veces el establecimiento de llamada.

C3.2. Más comparaciones. Calcular la diferencia de precio entre: una llamada de 2 minutos o dos de un minuto; una llamada de 10 minutos o 5 de dos minutos; una llamada de 1 minuto o dos de 30 segundos.

PUESTA EN COMÚN
Un grupo indicó que parecía que a medida que aumentaba el tiempo de duración de la llamada disminuía el precio medio por minuto.

C4. (alumnos) Relación entre la duración de la llamada y el precio medio por minuto.

C4.1. Casos particulares. *Cálculo del precio medio por minuto para llamadas de 1, 2, 3, 4, 5, 10 minutos.* ***(en grupos)***

DURANTE EL TRABAJO EN GRUPOS

Todos los grupos hallaron correctamente la fórmula $y = (0{,}12 + 0{,}15x)/x = 0{,}12/x + 0{,}15$ y la utilizaron.

PUESTA EN COMÚN

El grupo que expone dibuja en la pizarra una hipérbole en el primer cuadrante.

Interpretación: La gráfica representa el precio medio por minuto en función del tiempo de duración de la llamada. El precio medio por minuto nunca llega a ser 0'15, aunque tiende a ese precio cuando el tiempo de duración de la llamada tiende a infinito; por eso en $y = 0'15$ hay una asíntota. También hay una asíntota en $x = 0$, porque el tiempo tiende a 0 pero siempre se habla algo.

C4.2. Estudio del precio medio por minuto *¿Cuánto será el mínimo y el máximo precio medio por minuto que se podrá pagar?* ***(en grupos)***

DURANTE EL TRABAJO EN GRUPO

El precio medio mínimo por minuto se alcanza cuando se habla infinito. En esto no hubo dudas.

El precio medio máximo si creó algunos problemas.

PUESTA EN COMÚN

Algunos alumnos dijeron que cuando se hablaba la cantidad mínima posible de tiempo, la más cercana a 0. Otros alumnos dijeron que lo mínimo que se contabiliza es 1 segundo, porque la factura no contabiliza tiempos más pequeños, pero que entonces ¿era una asíntota lo que habíamos visto en la gráfica?

Transmití la pregunta al grupo y un alumno dijo que "No, porque lo que ocurría es que el dominio comenzaba en 1".

C2.4. Vuelta a C2 para t < 1. *Calcular el precio de llamadas de duración inferior a un minuto.*

C2.4.1. *¿La fórmula que hemos utilizado para hallar el precio de la llamada en función del tiempo hablado valdrá también para llamadas de duración inferior a un minuto?* ***(gran grupo)***

Alumno A: No, porque el precio es por minuto hablado.

Alumno C: Pero eso no importa.

Profesor: ¿Qué podemos hacer para comprobarlo?

Alumno B: Probar con unos cuantos valores.

C2.4.2. (alumno) Casos particulares fáciles. *Probamos con 30 segundos, 20 segundos y 40 segundos.* ***(en grupos)***

PUESTA EN COMÚN

Para 30 segundos multiplicaron por ½; para 20 segundos por ¼; para 40 segundos por 2/3.

Profesor: ¿cómo sabéis por cuánto hay que multiplicar? ¿Utilizáis alguna fórmula?

Los alumnos dijeron que no.

La profesora preguntó cómo lo hacían. Un alumno contestó "Es muy fácil: 30 es la mitad de 60; 20 es la tercera parte y cuarenta son 2/3 de sesenta".

C2.4.3. Caso particular más difícil ¿Y 41 segundos? ***(en grupos)***

Alumnos:... Entonces ya no vale lo que hacíamos...

Profesor: Intentarlo en grupos.

PUESTA EN COMÚN

Dedujeron que valía la fórmula anterior pero multiplicando por el número de segundos partido por 60.

C4.3. Estudio del precio total (C2) y precio medio (C3) para el caso t < 1. *¿La tendencia en el precio por llamada en función del tiempo y en el precio medio por minuto serán las mismas para llamadas de duración inferior a un minuto?* ***(en grupos)***

DURANTE EL TRABAJO EN GRUPO

Hallar el precio medio por minuto de llamadas de duración inferior a un minuto conllevó dificultad.

PUESTA EN COMÚN

Calcularon el precio medio por minuto de las llamadas que habíamos calculado previamente de duración inferior a un minuto y concluyeron que sí se producían las mismas tendencias (cuanto más tiempo hablas, más pagas y cuanto más tiempo hablas en cada llamada menor es el precio por minuto).

El grupo que expone explica que para hallar el precio medio por minuto lo que hicieron es hallar el precio por segundo y luego multiplicar por 60, según sus explicaciones.

Un grupo dijo que lo hallaba de un modo más rápido: dividir por la fracción por la que se había multiplicado (igual que anteriormente dividíamos por el número de minutos) y se hallaba así el precio por minuto.

C5. Comparación de sistemas de tarifas variando el precio por minuto. *Consideramos una nueva compañía B que cuesta 0'2 euros/minuto y 0'12 euros el establecimiento de llamada.* ***(en grupos)***

C5.1. Cálculo del precio de las llamadas de una nueva compañía. *Determina el precio para llamadas de las siguientes duraciones: 1 minuto, 2 minutos, 3 minutos, 4 minutos, 5 minutos, 10 minutos, 15 minutos, 30 segundos, 20 segundos, 40 segundos y 41 segundos.* ***(en grupos)***

No conllevó dificultades. Todos hallaron los precios de cada duración correctamente.

C5.2. Comparación de dos sistemas de tarifas. *Determinar qué compañía, A ó B, es más cara y para qué valores.*

No conllevó dificultades.

PUESTA EN COMÚN

Concluyeron todos que la compañía B es más cara.

Todos lo determinaron rápidamente y lo fundamentaron en que basta con ver que el precio por establecimiento de llamada coincidía y el precio por minuto era más caro para concluir que la compañía B es más cara.

C5.3. Hacer la gráfica de A y B para ver gráficamente cuál es más cara. (en grupos)

DURANTE EL TRABAJO EN GRUPO

Es necesario disponer de papel cuadriculado para favorecer la realización de las gráficas.

Los alumnos dijeron que nunca habían utilizado las gráficas para cuestiones de este tipo.

Los alumnos marcan en los ejes el tiempo de duración de las llamadas y el precio de la llamada. Hallaron dos puntos de cada recta y las dibujaron.

PUESTA EN COMÚN

El grupo que expone, al salir a pizarra y dibujarlo, explica que la recta de la compañía B siempre estaba por encima; partían de posiciones muy cercanas en un segundo de duración de la llamada y se distanciaban más a medida que aumenta el tiempo de duración de la llamada. Habría un punto en el que coincidirían los precios (duración de la llamada = 0), pero esto no es real porque no existen llamadas de 0 segundos.

C5.3.1. Estudio del modelo gráfico. *¿Podéis decir algo más de la distancia que hay entre las rectas que representan el precio por duración de la llamada de cada una de las compañías?* ***(gran grupo)***

Un grupo explicó que inicialmente habían pensado que las rectas serían paralelas porque el precio por establecimiento de llamada es el mismo en las dos compañías, pero luego se dieron cuenta de que también influía el precio por minuto.

Dijeron que se habían dado cuenta de que habían confundido el precio de la llamada en función de la duración con el precio por minuto en función de la duración. El precio por minuto incluye una cantidad del precio por establecimiento de llamada que disminuye a medida que aumenta el número de minutos, pero ahora estamos hablando del precio de la llamada en función de los minutos hablados.

En la discusión se concluyó que la relación (aumento de la distancia) no era debida al precio por establecimiento de llamada, sino a que en un minuto la distancia entre ellos era de 0,05 euros, mientras que en dos minutos la diferencia era de 0’10, etc.

C5.4. (alumnos) Comparación gráfica de los precios medios. *Un grupo que había terminado antes planteó que sería interesante hallar la gráfica del precio medio por minuto de la compañía B y compararla con la de la compañía A.*
C5.4.1. Previsión de resultados. *¿Qué creéis que obtendréis?* **(gran grupo)**

Alumnos: Así podemos confirmar qué compañía es más cara y para qué minutos. Podemos ver lo mismo que la gráfica que acabamos de hacer... la que representaba el precio de la llamada en función del tiempo que dure.

5.4.1.1. Previsión de relaciones gráficas. *¿Pero la gráfica de A quedará por encima o por debajo de la B, o se cruzarán...?* **(gran grupo)**

Alumnos: La gráfica de B quedará por encima siempre porque el precio por minuto será mayor siempre.

Se plantea hacerlo al resto del grupo.

El grupo que expone los resultados explica que la fórmula es: $(0{,}2t + 0{,}12)/t$.

Otro grupo dice que es más sencillo utilizar: $0'2 + 0{,}12/t$ y así se ve claramente que a medida que aumenta el tiempo de duración disminuye el precio de la llamada, porque 0,12 se divide entre una cantidad mayor.

Dibujan una hipérbole en el segundo cuadrante y explican que el precio medio por minuto para la segunda compañía tiene una asíntota en $y = 0{,}2$; es decir, que el precio medio por minuto tiende a 0,2 cuando el tiempo de duración de la llamada es infinito; y otra asíntota en $x = 0$.

* Pero en la realidad lo mínimo que contabilizan las compañías es segundos, de modo que el precio medio por minuto máximo se alcanza en llamadas de 1 segundo de duración.

La gráfica del precio medio por minuto de la compañía A es semejante pero con la asíntota en y = 0,15 y siempre queda por debajo de la gráfica de la compañía A, lo que se traduce en que el precio por minuto es siempre menor.

C6. Hacer una síntesis de lo aprendido durante el día de hoy. (individual)

DURANTE EL TRABAJO INDIVIDUAL

Se ve una falta de práctica. Indican que no saben bien qué tienen que responder.

AL ANALIZAR LA PROFESORA LAS REPUESTAS TRAS LA SESIÓN

Muchas de las contestaciones se refieren a la forma de desarrollar el trabajo, como "Hemos aprendido que se puede aprender en clase en grupo", o "Hemos visto cómo se puede utilizar en la vida real lo que aprendemos en clase". Otras hacen referencia al contenido: "Hemos aprendido que las funciones sirven para estudiar las tarifas de los teléfonos móviles" o "Hemos aprendido cómo utilizar las funciones para investigar un hecho real". Y otras son más concretas: "Hemos visto que las gráficas de las tarifas de los teléfonos móviles tienen una asíntota en el y = el precio por minuto y otra en x = 0", "Hemos sabido lo que significa una asíntota en un caso real".

C7. Buscar los datos reales sobre los precios de las llamadas desde teléfonos móviles de las diferentes compañías en España. *A partir de la semana que viene vamos a trabajar con datos reales. Cada grupo debe buscar información sobre una de las compañías de telefonía móvil existente.* ***(en grupos)***

En clase todos los alumnos tenían tarifa de MoviStar excepto uno de Amena y otro de Vodafone. El grupo donde estaba el de Amena se decidió que buscara información sobre esta compañía y el grupo en el que estaba el de Vodafone sobre Vodafone.

SEGUNDA SESIÓN: Comparación de 3 tarifas con cobro por segundo

C6 (retoma). Hacer una síntesis de lo aprendido el día anterior. (gran grupo)

Se hace una síntesis de los pasos realizados el día anterior y La profesora comenta las respuestas de los alumnos sobre lo que había sido novedoso para ellos.

Respecto al contenido, un alumno dijo: "Pero, según la fórmula, si hablamos 0 segundos nos cobran establecimiento de llamada". Concluimos que es necesario especificar que la fórmula es para valores de $t > 0$. Y, por tanto, el precio mínimo que se puede pagar es "precio por establecimiento de llamada + precio de un 1 segundo de habla por teléfono".
Otras conclusiones:

- La información necesaria para calcular el precio de una llamada de teléfono son:
  - El precio por minuto.
  - El precio por establecimiento de llamada.
  - La duración de la llamada.
- Entre dos compañías con el mismo coste por establecimiento de llamada y diferente precio por minuto, es más cara:
  - Aquella cuyo precio por minuto es mayor.
- ¿Para qué hemos utilizado la gráfica?
  - Para confirmar gráficamente lo que habíamos estudiado a través de cálculos.
- En una gráfica de precio por duración de la llamada la gráfica de la compañía más cara quedará en todo su recorrido por encima de la más barata.

- En la gráfica de precio medio por minuto, la gráfica de la compañía más cara quedará en todo su recorrido por encima de la más barata.

C8. Comparación de sistemas de tarifas variando el precio del primer minuto completo. *Considerar una tercera compañía, que llamaremos C, que cobra lo mismo que A en cuanto al precio por establecimiento de llamada (0,12 euros) y al precio por minuto (0,15 euros), pero cobra el primer minuto completo. Vamos a realizar los mismos pasos para estudiarla que con las otras dos compañías.*

* El estudio de la tarifa C constituye una variación de C2. Aquí lo consideramos como parte del trabajo de comparación.

C8.1. Cálculo del precio de algunas llamadas. *Calcular el precio de llamadas de duración de: 1 minuto, 2 minutos, 3 minutos, 4 minutos, 5 minutos, 10 minutos, 15 minutos, 30 segundos, 15 segundos, 40 segundos, 41 segundos.* ***(en grupos)***

No plantea dificultades.

C8.2.Comparación de llamadas con la misma duración global. *Calcular la diferencia de precio entre: una llamada de 2 minutos o dos de un minuto; una llamada de 10 minutos o 5 de dos minutos; una llamada de 1 minuto o dos de 30 segundos.*

No plantea dificultades.

C8.3. Relación entre duración de la llamada y precio medio por minuto.

La profesora plantea en gran grupo: “En la información que habéis buscado sobre vuestras compañías, ¿sabéis si cobran el primer minuto completo o no?” Dos de los grupos dijeron que sí y un tercer grupo dijo que no lo sabía.

Entonces la profesora indica: "Vamos a ver qué ocurre si el primer minuto se cobra completo", y entonces se planteó la actividad:

C8.4. Comparación gráfica de las tarifas A y C. *Comparar las gráficas de precio de la llamada en función de la duración de la misma y del precio medio por minuto en función de la duración de las compañías A y C.*

C8.4.1. Previsión de resultados. *Antes de hacer la comparación, ¿qué compañía creéis que es más cara? ¿A o C?* ***(gran grupo)***

Algunos dijeron que las dos igual, otros que más cara la que cobra el primer minuto completo. Las explicaciones que dieron fueron (respectivamente): porque cobran lo mismo por minuto y el mismo precio por establecimiento de llamada; porque te cobran siempre como mínimo un minuto.
Al final todos estuvieron de acuerdo en que la que cobra el primero minuto completo. Surge la siguiente pregunta:

C8.5. Justificación del resultado de la comparación. *¿Para cualquier duración de la llamada será más cara?* ***(gran grupo)***

La mayoría estuvo de acuerdo en que a partir del primer minuto costarían igual.

Lo nuevo que aparece (debido a que la compañía nueva cobra el primer minuto completo) es:

- El precio de la llamada en función de la duración de la misma en la compañía C es constante hasta 1 minuto. Luego es igual que para la compañía A.
- El precio medio por minuto en función de la duración de la llamada en la compañía C decrece hasta 1 minuto, a partir del cual vuelve a crecer. El

crecimiento anterior a un minuto es debido a que cobran el minuto completo, mientras que el posterior es debido, como ocurría en la gráfica de la compañía A, a la división del precio por establecimiento de la llamada entre más número de minutos. El precio medio del minuto de llamada en función de la duración es superior en la compañía C hasta un minuto e igual que en las dos compañías a partir del minuto.

* Conllevó dificultad la gráfica del precio medio por minuto. El grupo que salió a la pizarra dibujó una hipérbola. Los otros dos grupos dijeron que no estaban de acuerdo porque el precio del primer minuto era constante. Entonces el grupo de la pizarra dibujó una recta de 0 a 1 minutos y luego la hipérbola. Un grupo dijo que no era una recta. El grupo dijo que calcularan el precio para llamadas de un segundo de duración y así verían que era mucho mayor que el precio por minuto en llamadas de un minuto. Finalmente dibujaron la gráfica correctamente.

C9. Comparación de sistemas de tarifas con distinto precio por minuto y distinto modo de cobro del primer minuto. *Comparar la compañía B con la compañía C.*

* No se indica a los alumnos los pasos a seguir.

C9.1. Previsión de resultados. *¿Qué creéis que concluiréis al comparar las Compañías B y C?* ***(gran grupo)***

Inicialmente la afirmación general es que B es más cara porque el precio por minuto es mayor y el precio por establecimiento de llamada es el mismo. Luego surgen algunas dudas debido a que se cobra el primer minuto completo.

* Lo nuevo que aparece es:

- Determinar que hay un punto de corte entre las funciones.
- Hallar el punto de corte entre dos funciones (una de ellas es función por partes).

C9.1. Comparación explícita de las dos tarifas. *Comparar la compañía B con la compañía C.* ***(en grupos)***

DURANTE EL TRABAJO EN GRUPO

Surgió una dificultad al intentar hallar el punto de corte entre las gráficas de las dos compañías del precio de la llamada en función de la duración. Lo que hicieron todos para dibujar la gráfica de la compañía C es hacer una línea recta en el precio de un minuto y luego utilizar la función para dibujar la recta de a partir de un minuto. Vieron en las gráficas que se cortaban en un punto, pero al intentar hallar el punto de corte utilizaban la función de A y la función de C, sin tener en cuenta la parte de la función de C en que el precio es constante (hasta un minuto) y entonces les salía que el punto de corte era (0, 0). Ellos decían que en la gráfica veían que era otro punto, cercano a un minuto, pero no lo sabían obtener.

Preguntaron al profesor si se tenía que resolver por inecuaciones. Les dijo que miraran la gráfica y lo pensaran. Finalmente se dieron cuenta de que era una función por partes, aunque realmente no habían visto todavía este tipo de funciones y por eso algunos alumnos no la denominaban así pero entendían que la fórmula era diferente para hallar el precio según la duración hasta 1 minuto que para el resto de duraciones.

Una vez sabido esto, dedujeron que era necesario para hallar el punto de corte calcular para qué duración de llamada la compañía B cobraba el precio de un minuto en la compañía C.

* Realmente la gráfica aquí ya no sólo confirmaba, sino que aportaba información fundamental.

PUESTA EN COMÚN

El grupo que expone explica que hay un punto de corte, antes del cual es más cara

SESIONES TERCERA Y CUARTA: Comparación entre tarifas por pasos y por segundos

TERCERA SESIÓN

C10. Trabajo con datos reales de las diferentes compañías.

Cada grupo hoy presenta la información sobre su compañía que se les encargó en la primera sesión. Algunos traen la información en revistas, otros de Internet. La forma en que se presenta la información es diferente en cada caso.

C10.1. Buscar una tabla única en que se pueda reflejar la información de cada compañía de modo unificado, para facilitar el trabajo posterior. (en grupos)

PUESTA EN COMÚN

Concluimos una tabla con columnas para:

- Primer minuto (modo de cobro): completo/ por segundos/...
- Resto de minutos (modo de cobro): completo/ por segundos/...
- Precio por establecimiento de llamada: en euros
- Precio para las diferentes franjas horarias que se diferencien en el precio.
- Consumo mínimo mensual.
- Otros.

C10.2. Adaptar los datos de que se dispone a las tablas. (en grupos)

La profesora ya tenía las tablas en blanco con los datos que iban a surgir como fundamentales. Esta tabla puede modificarse y de hecho se modificó porque una alumna incluyó una opción de tarjeta de MoviStar que había salido hacía muy poco tiempo y o había sido considerada en la tabla que estaba hecha.

Los alumnos deben interpretar la información que tienen y adaptarla al formato que hemos elegido. Por ejemplo, hay compañías que dan el precio en céntimos, otras en euros... Hay información que no tienen algunos alumnos, como el tipo de pasos considerados en algunas compañías (si cobran el primer minuto completo o no y cómo cobran a partir del primer minuto); en estos casos llaman por teléfono a la compañía y lo preguntan.

PUESTA EN COMÚN

Finalmente, cada grupo da la información sobre su compañía al resto de grupos, de modo que todos disponen de la información de todas las compañías.

* En el *Material 1* se muestran las *Tablas con los datos de las diferentes compañías* que resultaron.

C11. Comparación de tarifas considerando el cobro por pasos (en lugar de segundos)

C11.1. Previsión de relación entre una tarifa por pasos y las tarifas anteriores (de cobro por segundos). *Hemos visto que hay compañías que cobran, a partir del primer minuto, en vez de por segundos, por cada 30 segundos. ¿Cómo creéis que influye esto en el precio de la llamada?* ***(gran grupo)***

Contestaron que es más rentable para el usuario la que cobran por segundos, porque la que cobra por pasos de 30 segundos en seguida que hablas 1 segundo de los 30 ya te cobran los 30.

C11.1.1. Matización de la previsión. *¿Pero será más rentable en todos los casos?* ***(gran grupo)***

Es más rentable si compararamos dos tarifas que cobran el mismo precio por minuto y el mismo precio por establecimiento de llamada y todo igual excepto que una cobra por segundos y la otra por pasos de 30 segundos.

C11.1.2. Previsión de influencia del cobro por segundos con igualdad en el resto de variables. *Y en caso de igualdad en el resto de variables, ¿será más rentable para el usuario la que cobra por segundos para cualquier duración de llamada?* ***(gran grupo)***

Algunos afirmaron que sí menos durante el primer minuto, que si le cobran las dos completo el primer minuto cuestan lo mismo.
* Realmente el precio será el mismo también en las dos compañías para las llamadas cuyo tiempo de duración sea, a partir de un minuto, múltiplo de 30 segundos, esto es, 1'5 minutos, 2 minutos, 2'5 minutos... Pero no lo dijeron.

C11.2. Comparación explícita de dos tarifas: una por pasos de 30 segundos y la otra por minutos. *Vamos a comprobarlo comparando dos tarifas. Tenemos una compañía (compañía D) que cobra 0'12 euros por establecimiento de llamada, 0'15 euros/minuto hablado, cobra el primer minuto completo y cobra por pasos de 30 segundos a partir del primer minuto. Es como la compañía C con la única diferencia de que cobra por pasos de 30 segundos en vez de por segundos a partir del primer minuto. Debemos comparar las compañías C y D.* ***(en grupos)***

Novedoso:

- Entender la gráfica de una función por pasos (no tienen que determinar la función algebraicamente, ya que no lo han dado, sólo la gráfica, para ello se sirven de la gráfica anterior y "horizontalizan" los fragmentos de recta de cada 30 segundos en el valor más alto).

- Comparar dos tarifas con las mismas condiciones excepto en que, a partir del primer minuto, una cobra por pasos de 30 segundos y la otra por segundos.

DURANTE EL TRABAJO EN GRUPO

El trabajo realizado aquí por los alumnos es bastante autónomo y completo.

PUESTA EN COMÚN

Conclusiones fundamentales:

En dos compañías que sólo se diferencian en que una cobra por segundos y la otra por pasos de 30 segundos a partir del primer minuto:

- Las dos compañías cuestan lo mismo durante el primer minuto. A partir de ahí, la compañía que cobra cada 30 segundos es más cara excepto en los múltiplos de 0,5 minutos, donde los precios coinciden.
- Respecto al precio medio del minuto. En la compañía que cobra por segundos (compañía C) el precio medio por minuto decrece rápidamente desde el precio por un segundo hasta un minuto y a partir de ahí decrece más lentamente (a razón de precio de un minuto + precio de establecimiento de la llamada dividido por el número de minutos hablados). En la compañía que cobra por pasos de 30 segundos (compañía D), el precio medio del minuto aumenta a saltos (cada vez que nos pasamos un segundo de los siguientes 30 se cobran los 30). El precio medio en esta compañía es máximo cuando se habla un segundo y decrece hasta 1 minuto de duración de la llamada; a partir de ahí aumenta en el segundo siguiente y va decreciendo hasta llegar al minuto 1´5. Sigue este proceso de modo continuo, dando un salto en el comienzo de la fracción 0′5 siguiente para disminuir hasta el final de la fracción.

CUARTA SESIÓN

C11.3. Nueva comparación entre una tarifa por pasos y una por minutos.

C11.3.1. Previsión de la relación entre una tarifa que cobra por pasos de 30 segundos y otra que cobra por segundos siendo que la que cobra por pasos de 30 segundos cobra más por minuto hablado. *El día anterior comparábamos tarifas de las mismas características excepto en que, a partir de un minuto de duración de la llamada, una cobra por pasos de 30 segundos y la otra por segundos. Vimos es más cara la que cobra por pasos de 30 segundos excepto para el primer minuto y los tiempos múltiplos de 0'5 minutos, y por tanto es más cara aquella que cobra por pasos de 30 segundos, pero ¿qué ocurre si la compañía que cobra por pasos de 30 segundos cobra un mayor precio por minuto hablado?* **(gran grupo)**

Dijeron que depende de lo que cobre cada una.

C11.3.2. Comparación explícita de dos tarifas, una que cobra por pasos de 30 segundos y otra por segundos, siendo que la que cobra por pasos de 30 segundos cobra mayor precio por minuto. *Pues, por ejemplo, vamos a comparar la Compañía D, que cobra 0'12 euros por establecimiento de llamada y 0'15 euros por minuto, que cobra el primer minuto completo y el resto por pasos de 30 segundos, con una compañía E, que es como B (0'12 euros por establecimiento de llamada y 0'2 euros por minuto y cobra por segundos), excepto en que cobra el primer minuto completo.* **(en grupos)**

* Tienen que reelaborar B (que ya hicieron) modificando sólo que el primer minuto se cobra completo.
* Para saber cuál es más cara o más barata en este caso es fundamental la gráfica.

* Dificultad:

- Comparar una gráfica que es una recta con una gráfica parte entera (cuál es más cara y cuál más barata para qué valores).
- Determinar cómo hallar los puntos de corte.

* La gráfica del precio de la llamada en función del tiempo permite comprobar que hay que igualar 0’12 + 0,15*t* a 0,345 y 0,42 (que es el precio de la compañía D para llamadas de 1,5 y 2 minutos de duración). Con estos valores y la gráfica podemos afirmar que para llamadas de duración inferior a 1 minuto es más barata D, para llamadas de 1 a 1,125 minutos de duración es más barata E, para llamadas de 1,125 a 1,5 minutos de duración es más barata E, para 1’5 minutos el precio coincide en ambas compañías y a partir de 1’5 minutos es más barata la compañía D.

* La gráfica del precio medio del minuto en función del tiempo es más compleja. Lo que hacen es ayudarse de los datos que ya tenemos (cuál es más cara y más barata, en el estudio de precio en función de la duración de la llamada) para ir comprobando y haciendo la gráfica del precio medio. Es decir, en los tiempos en que una es más cara, también debe ser mayor el precio por minuto; en los tiempos en que coinciden en precio de la llamada también coincidirán en precio por minuto.

SESIÓNES QUINTA a OCTAVA: Estudio del problema real de comparación de tarifas de móviles I: Informe comparativo para empresas de telefonía móvil.

QUINTA Y SEXTA SESIÓN

Un alumno propone que podríamos realizar una comparativa entre las diferentes compañías, y luego intentar vendérselo a las compañías que salgan como mejores opciones. Otro alumno dice que también podríamos estudiar formas de mejora de las tarifas de cada compañía y así sería vendible también a las compañías que no salen como mejores. Todos están de acuerdo.

C12. (alumno) Realizar una comparativa entre las diferentes compañías y luego vendérselo a las compañías que salgan como mejores opciones para que puedan hacerse publicidad con ello. Realizar informes comparativos de las diferentes tarifas. Vamos a ponernos en el papel de un empresario de cada una de las compañías de teléfonos móviles.

* Preguntan al profesor si será factible intentar venderlo y éste les contesta que no sabe cómo funciona pero que una vez que lo hayamos elaborado podemos intentarlo.

C12.1. Planificación de cómo realizar la comparación entre tarifas para determinar la relación entre sus precios. *¿Cómo podemos realizar la comparación?* ***(en grupos)***

PUESTA EN COMÚN

Se concluye que compararemos aquellas tarifas comparables; es decir, de características semejantes que aparecen en todas las compañías. Esto es:

- Tarifas 24 horas.
- Tarifas mañana.
- Tarifas tarde.

Se eligen estas porque son las que pueden provocar competencia entre compañías. Por ejemplo, tarifas como la Provincial (que cobra más barata para fijos que la misma provincia que para fijos del resto de España) “No tiene sentido compararla con otras tarifas de otras compañías porque van dirigidas a diferentes necesidades y tienen características muy diferentes” (explica un alumno).

Otra cuestión importante es que en Amena no tiene contrato “Mañana” y “Tarde”, mientras que las otras compañías sí. Pero Amena tiene tarifas que se asemejan a “Mañana” y “Tarde” que son tomar la tarifa “Mis horas” eligiendo como horario las 4 horas de mañana en el primer caso y de tarde en el segundo.

C12.2. Planificación del resultado a lograr. *Pero será fundamental concretar qué queremos conseguir finalmente para determinar el mejor modo de lograrlo. ¿Cuál creéis que debe ser el resultado que debemos lograr en ese informe para las empresas?* ***(gran grupo)***

Se concreta como resultado fundamental “Determinar propuestas de mejora de sus tarifas para ser más competitivas”. Se determina como fundamental también “Concretar las diferencias de sus tarifas con las tarifas de otras compañías de características similares”.

Por tanto:

C12.2.1. Concreción del resultado a conseguir. *Cada grupo debe entregar como resultado un informe para el jefe de su compañía indicando las características de su compañía en comparación con las otras dos y cómo mejorar sus características para ser más competitiva en los casos en que sea necesario.* ***(en grupos)***

* Se indica que todos trabajaremos primero con tarjeta, lo pondremos en común y luego haremos contrato (se trata en segundo lugar contrato porque va a conllevar la dificultad de comparar dos tarifas que cobran por segundos con una que cobra cada 30 segundos).

Dificultades:

- No se indica cómo llevar a cabo la tarea (pasos a seguir).
- Decidir la forma en qué exponer la información.
- Comparar 3 gráficas de tarifas que cobran cada 30 segundos en Tarjeta.
- Comparar 2 gráficas que cobran cada segundo con una que cobra cada 30 segundos en Contrato.

* No conocen la función parte entera, de modo que para las tarifas que cobran cada 30 segundos lo que hacen es hallar la función como si fuera por segundos, hacen la gráfica y luego horizontalizan cada 30 segundos.

* Comienza en esta sesión pero continúa en la siguiente, es decir, en la Sesión 6.

DURANTE EL TRABAJO EN GRUPO (SOBRE TARJETAS)

Dos grupos hallan las funciones de cada tarifa y hacen un gráfico para cada franja horaria en que varía el precio por minuto. Para cada tipo de tarifa (contrato mañana/contrato tarde/ tarjeta mañana/ tarjeta tarde) hacen una línea con 24 partes donde marcan las 24 horas del día y van anotando las franjas en que varían de precio las diferentes tarifas; finalmente toman las partes en que se pueden dividir para su comparación. En el fin de semana no es necesario (será suficiente un único gráfico para todo el fin de semana) porque todas tienen un precio constante. Por ejemplo, para *contrato de mañana*, quedan las siguientes franjas para cada una de las cuales presentarán dos gráficos (uno para llamadas a móviles del mismo operador y fijos nacionales y otro para móviles de otros operadores; ya que según el tipo de operador las franjas horarias son las mismas pero el precio varía): 0-8; 8-11; 11-13; 13-16; 16-21; 21-22; 22-24.

Presentan así finalmente para contratos de mañana 14 gráficos, 7 para cada tipo de receptor, cada uno de los 7 para cada franja horaria, y concluyen en cada uno qué compañía es la más barata y cuál la más cara, así como las posibilidades de mejora.

PUESTA EN COMÚN

Las propuestas de mejora en las Tarjetas son:

- Las propuestas del grupo de *MoviStar* van dirigidas a bajar un poco los precios, pero dicen que también deben tener en cuenta que son los que más cobertura tienen y también que hay muchas personas que tienen Amena y por tanto es más fácil que la persona a la que llames sea del mismo operador, llamadas que son más baratas.
- El grupo de *Amena* propone lanzar una campaña de verano para jóvenes, que son el foco de venta más voluminoso (porque explican que los niños cada vez más jóvenes tienen móvil y se gastan bastante dinero). Plantean que se cambien a su compañía durante el verano, por lo llamativo de sus precios y luego rentabilizar en invierno con precios más normales.
- El otro grupo (*Vodafone*) lo que hizo para contratos de mañana y tarde es, en un eje de ordenadas, marcar en las x las 24 horas del día y en las y el precio. Marcaron en cada franja horaria el precio y concluyeron cuál era más cara en qué horario y posibilidades de mejora. Así, sólo necesitaron, para contratos de mañana, por ejemplo, 4 gráficos, uno para diario y otro para fin de semana, dos para cada tipo de receptor

(móviles del mismo operador y fijos nacionales por un lado y móviles de otros operadores por el otro). Precisamente este grupo, al "bajar rectas" para ser más competitivos (su compañía), se plantean que no tienen claro cuánto bajar para que no llegue a ser demasiado poco rentable. Entonces deciden utilizar el precio medio de la hora (multiplicando el precio de cada franja horaria por el número de horas del día que incluye y dividiendo el total por 24 horas) para determinar cómo conseguirán la competitividad de su compañía. Explican que el precio medio les ayuda a comparar.

DURANTE EL TRABAJO EN GRUPOS (SOBRE CONTRATOS)

En contrato aparece la dificultad de comparar las tarifas de MoviStar y Amena, que cobran por segundos a partir del primer minuto, con Vodafone, que lo hace por pasos de 30 segundos. Esto no causa dificultad al comparar MoviStar y Vodafone, porque resulta que MoviStar cobra menos por minuto y encima cobra por segundos, de modo que claramente es más barata para cualquier duración de llamada. La dificultad es para comparar Vodafone y Amena, ya que Vodafone, que mide en pasos de 30 segundos, cobra 0'19 euros/minuto y Amena, que mide por segundos, cobra 0'21. Para determinar cuál es más cara se pueden hacer las gráficas y determinar para qué duraciones de llamada es más cara una u otra, pero la dificultad está en decidir si en general es más cara o más barata y qué variaciones serían necesarias para asemejar las condiciones a las que sean mejores.

Los alumnos llaman la atención sobre esta dificultad y se trata en gran grupo. Entonces se les plantea:

C12.3. Comparar una tarifa de 30 segundos con otra que cobra por segundos para determinar la relación entre precios.

C12.3. Planificar cómo compararlas. ¿Cómo podremos comparar estas dos tarifas para determinar cuál es más cara y poder incluir esta comparación en el informe? **(en grupos)**

Se concluye que se comparará a través del precio medio por minuto. Será más barata la que tenga un precio medio menor.

C12.3.1. Comparación explícita de una tarifa por pasos de 30 segundos y otra que cobra por segundos a través de sus precios medios por minuto. *¿Qué precio por minuto debería tener la tarifa plana de contrato de Vodafone (que cobra por pasos de 30 segundos a partir del primer minuto) para tener el mismo precio medio por minuto que MoviStar (que cobra por segundos a partir del primer minuto)? Se hará a través de sus precios medios por minuto.*

C12.3.2. Previsión de resultados. *¿Qué compañía creéis que será más cara?*

Responden que no lo saben, pero que lo que sí pueden decir es que aquella con mayor precio medio por minuto.

Conllevó gran dificultad.

No sabían cómo describir analíticamente la función de una tarifa parte entera, de modo que tendrían que trabajar con las gráficas.
Algunos me preguntaron que no podían hacerlo si no sabían cómo es la función parte entera. Con la función parte entera afirmaban que podrían igualar las funciones de los precios medios de las dos tarifas y dejar el precio

por minuto de la tarifa que no conocen como incógnita. Les expliqué que comenzaran por hacer la gráfica de MoviStar e intentaran dibujar la gráfica de la tarifa que tendría un precio medio igual.

Algunos realizaban la gráfica del precio medio en vez de la del precio en función del tiempo y entonces paraban porque sólo deducían que la gráfica de la otra función debería ser igual si tuviera el mismo precio medio, y pensaban que no podría ser porque al cobrar cada 30 segundos la gráfica del precio medio no podría ser la misma.

Tuve que explicar que hicieran la gráfica del precio en función del tiempo de MoviStar y luego dibujaran la gráfica de la tarifa que tendrían un precio medio igual entendido como precio medio del minuto general, y no como precio medio del minuto en función del tiempo. Les expliqué que el concepto de precio medio al que me refiero es como el de precio medio que utilizó uno de los grupos para comparar las tarifas de las diferentes compañías, que sumó el precio de cada hora del día y dividió entre 24 y así halló el precio del minuto.

Aun entendido el concepto con la explicación anterior, les costó interpretar qué significaba un precio medio igual en la gráfica de precio en función del tiempo de duración de la llamada y diferenciarlo del precio medio del minuto, con el que habíamos trabajado anteriormente.

Finalmente se dieron cuenta de que gráficamente sería la recta que pasa por los puntos medios de las rectas horizontales que forman la gráfica de la que cobra por pasos de 30 segundos.

El paso siguiente era determinar cuál era esa función. Lo que hicieron fue determinar dos puntos por los que pasa la recta y hallarla. Como puntos valen cualquiera de los formados por el punto medio de los segmentos (a partir de 1 minuto) que forman la gráfica de la función que se conoce (por ejemplo, 1,25; 1,750; 2,25...) y el precio del minuto en ese segmento que conocemos, porque sabemos que en esos puntos medios los precios coinciden.

Algunos intentaron utilizar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos. Por ejemplo, con los puntos (1'25, 0'405) y (1'75, 0'5), pero no obtenían el precio por minuto que se debe cobrar.
Otros lo que hicieron es tomar un punto y utilizar que saben que pasa por el origen de coordenadas. Por ejemplo, tomando el punto (1'75, 0'5). Como pasa por el origen la forma es y= mx. La pendiente es: m = 0'5/1'75 = 0'285714285. Se dieron cuenta de que no podía funcionar porque la gráfica de la función no pasa por (0,0) porque 0'12 no se anula. Esto es porque el dominio es a partir de 0, porque si hablas 0 (no hablas) no es válida la función.

Deberán realizar el mismo proceso en mañana y tarde. Al grupo que representa MoviStar, que no debería hacerlo, les indico que deben hacerlo para poder comparar sus resultados con los de sus compañeros.

C13.(alumnos) Valoración de la información encontrada en Internet. *Un grupo dice que no ha encontrado nada publicado en Internet en relación con lo que estamos trabajando y pregunta si los demás tampoco.*

Los demás dicen que no, que todavía no han encontrado nada.

C14. (alumnos) Crear una página Web nosotros sobre comparación de tarifas de telefonía móvil. *Plantea un grupo que, dado que no parece haber información en Internet, ninguna página, que ayude a elegir tarifa de telefonía móvil, podríamos elaborar nosotros una.* ***(gran grupo)***

Todos se muestran muy ilusionados con la propuesta y decidimos intentar hacerlo.

C14.1. Determinar qué debería incluirse en la página Web. *¿Qué creéis que podría incluir esa página Web donde diéramos información para comparar tarifas de telefonía móvil?* ***(gran grupo)***

PUESTA EN COMÚN

Propuestas:

- Crear una macro que dijera a las personas cuánto les costaría lo que hablan con las diferentes compañías.
- Colgar las funciones para cada compañía, tipo de tarifa... porque eso tampoco está en ningún sitio.
- Describir cómo lo hemos hecho.

* Las dos primeras cuestiones son interesantes, pero sobre todo la tercera, porque nos facilitará el proceso de institucionalización.

SÉPTIMA SESIÓN

* Se continúa con la C12.

C12.4. Traer para el próximo día fotocopias del informe que entregaría cada grupo al jefe de su compañía para el resto de grupos. (en grupos)

OCTAVA SESIÓN I: Finalización del "Informe comparativo para empresas de telefonía móvil"[1]

C12.5. Explicar cada grupo a los demás lo que han hecho una vez que tienen todos las fotocopias de cada uno del resto de grupos.

PUESTA EN COMÚN

Cada grupo debe explicar el tipo de gráficos que ha hecho, cómo, cómo se interpretan, las propuestas de mejora...

* Cuando expone un grupo al resto el uso del precio medio los demás dicen que está muy bien, pero que ese precio medio sólo tiene en cuenta que el día tiene 24 horas pero no que hay horas en que se llama mucho más que en otras. Entre todos deciden que sí sería una buena técnica de venta utilizar el precio medio de modo comparativo con el resto de compañías (nuestro precio medio de la llamada es de ..., mientras que en Amena es... y el MoviStar...), pero con el truco de que son muy baratas las llamadas en las horas en que menos se llama (por ejemplo, bajarlas mucho de 2 a 8 de la mañana los días de diario).

Un grupo dice que creen que debemos seguir trabajando sobre la página Web. En concreto, creen que debería concretar más qué debe incluir esa página.

[1] El principio de la octava sesión se dedica a finalizar el "Informe comparativo para empresas". El resto de la sesión ya corresponde a un nuevo tipo de tareas, que abarcará de la octava a la undécima sesión. Dado que la sesión aborda dos tipos de cuestiones, se describe dentro del bloque del primer tipo de tareas, aunque parte de su contenido corresponde al segundo tipo de tareas.

SESIONES OCTAVA a DECIMOSÉPTIMA: Estudio del problema real de comparación de tarifas de móviles II: Comparativa para consumidores de telefonía móvil.

SESIONES OCTAVA A DECIMOCUARTA: Determinación de información a incluir en la página Web, tipo de respuesta a los consumidores, datos que se deben solicitar y elaboración de los documentos de Excel.

OCTAVA SESIÓN II[2]

C14.2. (alumnos) Determinar qué debería incluirse en la página Web. *Analizar de nuevo qué información debe incluirse en la página Web.* ***(en grupos)***

PUESTA EN COMÚN

Tendrá una página de introducción donde se explique de dónde ha surgido la página y luego dos links internas, una para ver las gráficas y otra para ver cuánto costaría una llamada de unas características concretas (una duración, una hora del día...) en cada una de las tarifas de las diferentes compañías. Hay alumnos que dicen que decir el precio de una llamada ya está en internet, y que lo bueno sería que nos den las características de su factura (mensual, por ejemplo) y decirles cuánto le costaría con cada tarifa. Pero otros dicen que sería muy complicado, porque sería necesario un estudio individual de cada factura. Pero defienden los unos que se pueden pedir los datos importantes, y ya está. Pero los otros dicen que serían muchísimos datos. La profesora les dice que "Podemos seguir profundizando en el estudio e ir viendo cómo podemos hacerlo". Todos están de acuerdo.

[2] El principio de la octava sesión se dedica a finalizar el "Informe comparativo para empresas". El resto de la sesión ya corresponde a un nuevo tipo de tareas, que abarcará de la octava a la undécima sesión. Dado que la sesión aborda dos tipos de cuestiones, se describe dentro del bloque del primer tipo de tareas, aunque parte de su contenido corresponde al segundo tipo de tareas.

Al exponer la información a los otros grupos se detectan errores como: poner mal los minutos (poner 30 minutos en vez de 30 segundos...), no dar valores a los ejes (lo que hace que el resto de grupos no entienda la gráfica).

- Para la página web: dicen que habrá que hacer una introducción dentro de cada link explicando porqué aparecen las gráficas, para qué sirven, cómo se interpretan...

Una persona dice que se podrían agrupar los datos por "mañana", "tarde" y "tarifa plana" y luego dentro de cada opción las opciones de contrato y tarjeta emparejadas. Otros dicen que no, que mejor que la primera selección sea contrato o tarjeta porque la persona sabe si quiere contrato o tarjeta desde el principio, porque lo que les hace decidirse es que los que quieren tarjeta es para controlar lo que se gastan mejor. Pero otros dicen que si contrato es más barato a lo mejor lo prefieren aunque no lo controlen. Deciden que quizá podemos diferenciar inicialmente contrato y tarjeta con sus características generales para que la persona pueda decidir sabiendo cómo son, pero que mejor ya lo veremos también según vayamos profundizando.

También plantean conclusiones, durante la exposición, respecto a las gráficas que será mejor poner en la página web. Concluyen que se pueden poner inicialmente las gráficas que indican el precio a las diferentes horas del día (excepto para las de tarifa plana), que dan una información rápida global sobre las diferentes compañías (en 20 gráficas toda la información de *mañana* y *tarde*; 12 para contrato y 12 para tarjeta; 1 para cada tipo de operador, de diario y fin de semana, para los 2 tipos de tarifas [mañana, tarde]), y luego que se pueda pinchar para ver la función y la gráfica del precio en función del tiempo de duración de la llamada para cada franja horaria. Podrían ponerse agrupadas (en un mismo eje de coordenadas) las gráficas de cada compañía para cada tipo de operador en diario y también en fin de semana.

Se deberían además poder pinchar sobre las gráficas de las diferente tarifas y que apareciera información sobre mínimos exigidos en ella (o que apareciera como una nota en la gráfica).
Indican que las gráficas de los precios medios por minuto también debemos incluirlas explicando que también dan información sobre cuál es más cara pero en este caso respecto a la duración de las llamadas más rentable en cada compañía. Pero hemos trabajado dos tipos de precios medios. Por un lado está el precio medio por minuto en función del tiempo de duración de la llamada, que creen que es interesante, porque así, por ejemplo, se verá, que si se cobra el primer minuto completo, la llamada más cara (en precio medio por minuto) es la que dura 1 segundo; pero creen que sería complicar demasiado la página si ponemos una gráfica del precio medio por minuto para cada franja horaria. Concluyen que sería mejor poner simplemente un ejemplo para comparar el precio medio de una compañía ficticia que cobre el primer minuto completo y otra de las mismas características que no cobre el primer minuto completo para que vean cómo influye, porque en ese gráfica se ve muy claro. El otro tipo de precio medio que hemos visto es el precio medio de cada tarifa, que es simplemente un valor concreto. Esto último creen que debemos incluirlo en cada tarifa pero explicando que no es un dato muy definitorio de lo cara o barata que es una tarifa porque depende de qué horarios sean más caros y más baratos.

C12.6. ¿Qué diferencia según lo que sabemos las opciones de contrato y de tarjeta de modo general?

TRABAJO EN GRUPO

Se obtienen las siguientes conclusiones:

- En tarjeta no hay mínimos mensuales, pero hay excepciones.
- En contrato siempre exigen un consumo mínimo mensual.

- En contrato el precio por minuto es menor que en tarjeta, aunque en algunas compañías depende de a qué horas se llame, a qué receptor... con más frecuencia.
- En tarjeta no cobran cuota de conexión; en contrato tampoco, pero hay excepciones.
- En contrato cobran a partir del primer minuto por segundos y en tarjeta por cada 30 segundos, pero hay excepciones.

Concluyen que lo mejor será dejar la diferenciación habitual entre tarjeta y contrato y luego matizar las características de cada tarifa.

C15. Determinar qué datos serán necesarios para poder incluir en la página una opción que permita a los visitantes saber, con los datos de los tipos de llamadas que realiza, qué compañía sería más rentable respecto a la factura mensual a pagar.

Algunos alumnos plantean revisar lo que hay en Internet para ver si ayuda a determinar qué tipo de resultado podemos ofrecer al visitante a la página Web y qué datos necesitamos para darles esos resultados.

C16. (alumnos) Buscar en profundidad información en Internet que nos ayude a determinar qué tipo de información podríamos dar a los visitantes a la página sobre comparación de las tarifas y qué datos necesitamos para hacerlo. (en grupos)

NOVENA SESIÓN

C15 y C16. (Continuación)

PUESTA EN COMÚN

Algunos alumnos dicen que han estado mirando en Internet y que lo único que han encontrado es:

- En la página de algunas compañías de telefonía móvil: te dicen el precio de una llamada si tu determinas el tiempo de duración, el tipo de receptor, el tipo de tarifa, la hora en que se realiza.
- En algunas páginas que dicen que te aconsejan sobre la compañía que más te interesa sólo te preguntan si llamas más de mañana, de tarde o de noche o todo el día igual y luego te ponen todas las tarifas de ese tipo (mañana, tarde o noche) con sus características (precio por minuto...).
- Hay compañías en Internet que ofertan, para empresas, hacer un estudio del tipo de llamadas que realizan (con las facturas de los meses anteriores) y determinar con qué compañía y tarifa sería más económico. Pero no explican nada sobre cómo lo harían.

Por tanto no han encontrado mucha ayuda en Internet.

Luego han encontrado información interesante, por ejemplo, en relación con a qué compañías pertenecen los diferentes prefijos de telefonía móvil, para saber si llamas a un número de tu compañía o de otra, ya que si es de tu compañía te cuesta más barato. Dicen que esta información debemos colgarla de nuestra página.

Ya centrados en los datos que debíamos pedir, se planteó:

- el número de minutos que se habían hablado al mes (lo da la factura)
- el número de llamadas realizadas (lo da la factura)

Pero con esta información sólo podemos comparar entre las tarifas planas. Para mañana y tarde se complicaría mucho, porque tendríamos que saber a qué horas llama, a qué tipo de receptores... Trabajaran en pequeño grupo.
Utilizaron lo que habían hecho anteriormente de determinar las franjas horarias en que son comparables las tarifas y determinaron que debíamos saber los datos sobre el numero de minutos que habla en cada franja.
* Esto conllevó más dificultad para los que no habían trabajado con franjas horarias anteriormente, sino con la gráfica de las 24 horas.
* Dicen que es importante considerar también el número de mensajes para poder comparar las facturas, pero que es sencillo porque sólo hay que saber el número de mensajes, que es un dato que viene en la factura, y multiplicarlo por el precio del mensaje.

Como hacen referencia continua a lo que saben sobre su factura, porque creen que es lo mejor para que la persona pueda obtener la información que necesita, la profesora les dice que ha traído 10 facturas. Algunos alumnos dicen que ellos también pueden traer algunas facturas.

C17. Traer al menos cada alumno una factura de telefonía móvil (alumnos)

Las personas con tarjeta tienen más problema porque no les envían factura. Algunos dicen que lo pueden consultar en Internet, y otros que traerán facturas de otra persona.

En pequeño grupo algunos plantean pedir como dato, además del número de llamadas y el tiempo hablado en minutos (al mes, claro), también el número de llamadas cuyos segundos no son ni 00 ni 30 exactamente. Afirman que bastará entonces, para calcular el precio en tarjeta, que cobran cada 30 segundos, con sumar a la multiplicación anterior el precio de medio minuto multiplicado por el número de llamadas cuyos segundos han sido distintos de 00 ó 30, pero al exponerlo le dicen el resto que entonces está sumando segundos de más, porque la suma total de segundos ya incluye los picos y luego lo tienen en cuenta otra vez. Pero defienden que, si no, es más complicado todavía lo que hay que pedir, ya que la persona debería sumar en su factura los tiempos sin considerar las fracciones de minuto (mientras que el número total de minutos viene en la factura).

Parece muy complicado pedir datos como para poder diferenciar precios entre las que cobran por pasos de 1 segundos y de 30 segundos, pero tampoco se puede no tener en cuenta porque entonces no diferenciaría entre estos dos tipos de tarifas.

Les platea la profesora que quizá podrían considerar una proporción de llamadas en que se cobra la siguiente fracción. Están de acuerdo pero no saben qué proporción tener en cuenta. La profesora les plantea hacer un estudio con un número de facturas. Se acepta.

C18. Hacer un estudio estadístico de la proporción de llamadas para las cuales se cobrará (en las compañías que cobran por fracciones de 30 segundos), el medio minuto siguiente sin haberlo completado, y las que no. Es decir, la proporción de llamadas cuya duración es diferente a un múltiplo de 0'5 a partir de un minuto, es decir, a partir de 1'5 minutos. (en grupos)

La profesora plantea que para probar con gran cantidad de datos (de facturas) sería aconsejable utilizar un programa informático, Excel, dado que permite, tras introducir los datos, calcular rápidamente y eso posibilitará considerar muchos datos.

Los alumnos aceptan.

Pero la profesora plantea que quizá lo pueden calcular del siguiente modo: calculando el cada factura el porcentaje de llamadas de cada tipo (es decir, que tienen diferentes picos de llamada desde el punto de vista de si se le añadirá a la factura el precio hasta redondear al medio minuto siguiente o no). Después podemos incluir en Excel el porcentaje de llamadas que hay de cada tipo en cada factura, y así podremos determinar cuál es el porcentaje de llamadas que estadísticamente es más probable que en la factura mensual sufran un redondeo en el precio hasta el medio minuto más cercano.

Esta explicación no es fácilmente comprensible e implica que la profesora lo tenga que explicar varias veces.

C18.1. Introducir en una hoja de Excel los datos de porcentajes de llamadas de cada tipo, después de calcularlo, y realizar los cálculos. (en grupos)

Los alumnos dicen que necesitan ayuda porque han utilizado muy poco el programa Excel.

La profesora explica, con el apoyo de algunos alumnos que conocen el programa más que los demás, cómo introducir los datos en Excel y cómo hacer que calcule los datos con las fórmulas que hemos determinado.

C18.1.1. Explicar cómo introducir datos en el programa Excel y cómo calcular el porcentaje de llamadas de cada tipo una vez introducidos los datos. Además, muestra la profesora cómo hacerlo con los datos de una tarifa. (profesor)

La profesora explica que cada celdilla es un dato, que en cada columna introduciremos la cantidad de cada tipo de “picos de llamada”. Pero plantea la pregunta de cuántos tipos de “picos de llamada” debemos considerar.

C18.1.2. Determinar cuántos tipos de llamada debemos considerar. (gran grupo)

Los alumnos plantean 3 tipos de columnas:

- Llamadas con picos de duración de 1 a 30 segundos
- Llamadas con picos de duración de 31 a 59 segundos
- Llamadas con picos de duración de 00 segundos.

La profesora pregunta por qué consideran el pico 00 separado del pico de 30 segundos. Los alumnos entonces corrigen que el pico de 30 segundos debe estar junto con el pico de 30 segundos porque en ambos no se añadirá nada en la factura final.

La profesora introduce entonces el título de las 3 columnas en Excel:

- Cantidad de llamadas con pico de duración de 1 a 29 segundos.
- Cantidad de llamadas con pico de duración de 31 a 59 segundos.
- Cantidad de llamadas con pico de duración de 0 o 30 segundos.

Entonces plantea la profesora que "Ahora introduciremos una nueva columna donde se el programa calculará el resultado que nos interese. ¿Qué es lo que nos interesa averiguar a partir de estos datos?".

C18.1.3. Determinar qué resultado queremos averiguar a partir de los datos que introduciremos. *¿Qué es lo que nos interesa averiguar a partir de estos datos?* ***(gran grupo)***

Los alumnos dicen que queremos saber qué porcentaje de llamadas de cada tipo es el estadísticamente más probable.
Pero la profesora indica que para ello es necesario un paso intermedio que es...

C18.1.4. Determinar qué paso intermedio es necesario para averiguar qué porcentaje de llamadas de cada tipo es estadísticamente más probable. *Pero para ello es necesario un paso intermedio que es...* ***(gran grupo)***

Los alumnos deducen que será necesario saber primero el porcentaje de llamadas de cada tipo en cada factura y luego ver cuál es el porcentaje medio.

Entonces la profesora introduce tres nuevas columnas denominadas:

- porcentaje de llamadas de pico de duración de 1 a 29 segundos
- porcentaje de llamadas de pico de duración 31 a 59 segundos
- porcentaje de llamadas de pico de duración de 00 o 30 segundos

Explica la profesora cómo se introduce una fórmula en una celdilla de Excel (precedido de un "=") y cómo se pueden seleccionar las celdillas implicadas en la fórmula, pero pregunta qué fórmula habrá que introducir.

C18.1.5. Determinar la fórmula necesaria para calcular el porcentaje de llamadas de cada tipo. *¿Qué fórmula tenemos que introducir?* ***(gran grupo)***

Varios alumnos dicen que es necesario saber el número total de llamadas realizadas. Introduce la profesora entonces una nueva columna denominada "número total de llamadas". No plantea problema la determinación de la fórmula.

Y ahora cada grupo pasará a introducir los datos necesarios de cada una de las facturas que tiene.

Mientras que se está explicando cómo realizar los cálculos, un alumno dice que, en relación con los datos que necesitamos para calcular el precio mensual de la factura con diferentes tarifas, sobre el número de llamadas sólo es necesario introducir el total (mensual), ya que en la fórmula se sumará el número de llamadas multiplicado por el precio de establecimiento de llamada, que es el mismo para todas las opciones de receptores de llamadas y franjas horarias. El resto de alumnos están de acuerdo.

* Esto veremos que posteriormente tienen que modificarlo, porque, si bien el número de llamadas de cada tipo (receptor, hora del día...) no es importante para determinar el precio por establecimiento de llamada de la factura, si lo

será para calcular la cantidad a añadir en las tarifas que cobran por pasos de 30 segundos, ya que se añadirá el precio del minuto (de cada tipo) por la mitad del número de llamadas (de cada tipo).

C18.1.6. Introducir los datos cada grupo de cada una de las facturas que tiene. (en grupos)

Los alumnos comienzan a introducir los datos con 9 de las 10 facturas que ha traído la profesora (da 3 facturas a cada grupo).

DÉCIMA SESION

C18. (Continuación)

DURANTE EL TRABAJO EN GRUPOS

Cada grupo termina de anotar en su ordenador (en Excel) los datos sobre un tercio de las facturas de que disponemos (en total hay 48 facturas). Posteriormente se pasa la información a disquete y trabajan con los datos totales para averiguar el porcentaje estadísticamente más probable.

PUESTA EN COMÚN

Encuentran que en torno al 25 por ciento de las llamadas tienen una fracción en su duración entre 01 y 29 segundos; el 25 por ciento entre 31 y 59 segundos y el 50 por ciento tiene como fracción 00 o 30 segundos.

Les llama la atención que no hay llamadas de duración inferior a un minuto. Parece que la factura marca directamente 1 minuto como mínimo (que es lo mínimo que cobra) aunque la llamada dure menos. Pero los alumnos dicen que entonces, siguiendo la misma regla, las tarifas que cobran por pasos de 30 segundos deberían indicar en la factura el tiempo cobrado en vez del hablado, y si esto fuera así no sería necesario el trabajo de estudio de porcentajes que estamos realizando.

Plantean los alumnos que el dato sobre llamadas de 01 a 29 segundos de fracción y de 31 a 59 deben agruparse, ya que en ambas cobran el medio minuto siguiente, y no sería justo en las últimas cobran un minuto completo, porque el medio minuto primero ya está contabilizado. Por tanto tenemos:

- En el 50% de las llamadas se cobra la fracción completa sin haberla completado.

- En el 50% se cobra justo lo hablado.

Pero hay alumnos que planten que si sumamos el 50% por el precio de medio minuto en las llamadas que cobran por fracción de 30 segundos, habrá que añadir también algo a las que cobran por segundos para que sea justa la comparación, ya que en las primeras estaremos cobrando los segundos en el precio total y luego añadimos el 50% por el precio de medio minuto, mientras que en las segundas el precio que se deduce es exacto.

Algunos alumnos recuerdan entonces que uno de los objetivos es la exactitud en el precio que se pagaría cada tarifa, y eso sabemos que es exacto en tarifas que cobran por segundos si sabemos el precio del minuto y el tiempo hablado; y por tanto sería mejor modificar lo que se añade a las que cobra por 30 segundos para así no alejarnos de uno de ese objetivo.

Uno plantea que en vez de sumar el precio de medio minuto por el 50% de las llamadas se podría multiplicar por el 25%. Explica que podemos pensar que las fracciones de minuto más pequeñas se contrarrestarán con las de más valor. Es decir, que habrá llamadas de 29 segundos de pico en las que estemos sumando 29 segundos en las que sólo falta un segundo para completar la fracción, pero también habrá llamadas de 1 segundo de pico en que faltarán 29 segundos. Si consideramos que una mitad se contrarresta con la otra mitad, pues añadir el 25% parece lo más adecuado.

* En el *Material 2* se muestra la *Hoja de cálculo de Excel de datos de "picos de llamadas"* y los cálculos.

Probamos un con un ejemplo:

C19. Analizar si es más adecuado añadir el 50% o el 25% del precio por medio minuto al precio de tarifas que cobran por segundos para determinar el precio de tarifas que cobran por pasos de 30 segundos. *Podemos probar con un ejemplo para determinar qué opción es más correcta.*

C19.1. Planificación de cómo determinar qué opción es más adecuada. *Cómo creéis que podemos determinar qué opción es más adecuada* **(gran grupo)**.

Se concluye que podemos probar con una tarifa que cobre por pasos de 30 segundos de las que tenemos la factura. Podemos entonces hallar el precio considerando que cobrara por segundos y luego añadir el 50% y el 25% para ver qué opción se acerca más al precio real.

C19.2. Determinar qué opción es más adecuada probando con una factura calculando primero el precio que costaría si cobrara por segundos y luego añadiendo el 50 y el 25% del precio por medio minuto para ver qué resultado se aproxima más al precio real de la factura. *Tomad entonces los datos de una factura de una tarifa que cobre por pasos de 30 segundos y probad que opción es más adecuada* **(pequeño grupo)**.

DURANTE EL TRABAJO EN GRUPOS

Resulta que sólo uno de los grupos tiene una factura de una tarifa que cobre por pasos de 30 segundos. Además, los alumnos plantean que si cada uno lo hace con una factura luego no podremos comparar los resultados para ver si lo han bien. Finalmente un grupo plantea que se puede complicar mucho porque hay que tener en cuenta, si queremos comparar con el precio final de la factura, los tipos de receptores de llamadas, porque no es tarifa plana y la cantidad de mensajes...

Entonces la profesora plantea que podríamos considerar una factura ficticia, donde no haya diferentes tipos de receptores y sin considerar los mensajes, y seguir el mismo proceso.

C19.3. Calcular lo mismo pero considerando una factura ficticia donde no hay diferentes tipos de receptores y sin considerar el precio por mensajes, ni el IVA. *Os voy entonces a dar una serie de datos de una factura ficticia –cuántas llamadas realizadas y la duración de cada una- y también un precio por minuto. Y con esos datos realizaremos los cálculos para determinar qué opción parece más adecuada.* ***(en grupos)***

Los datos de la duración de las llamadas son:

1. 1:00
2. 1:00
3. 1:00
4. 1:58
5. 1:00
6. 1:00
7. 1:00
8. 1:00
9. 2:23
10. 2:29
11. 1:00
12. 1:00
13. 1:00
14. 1:48
15. 1:00
16. 1:00
17. 3:01
18. 1:00
19. 2:54
20. 3:38
21. 2:22

Tiempo total hablado: 31’73

Precio por minuto: 0’4

Precio de la factura (sin tener en cuenta el precio por establecimiento de llamada):

(1+1+1+2+1+1+1+1+2’5+2’5+1+1+1+2+1+1+3’5+1+3+4+2’5) ·0’4= 35x0’4=14 €

DURANTE EL TRABAJO EN GRUPOS

Calculan primer el precio de la tarifa si cobrara por pasos de 30 segundos. Para hacerlo, todos los grupos redondean la duración de la llamada hasta el múltiplo de 0′5 siguiente y esa duración la que consideran para multiplicarla por el precio por minuto. No conlleva dificultad.

Después calculan el precio de la llamada si cobrara por segundos y suman el 50% de las llamadas por el precio de medio minuto:

$$p = 31'73 \cdot 0'4 + 21/2 \cdot 0'2 = 12'692 + 2'1 = 14'792$$

Y sumando el 25% de las llamadas por el precio de medio minuto:

$$p = 31'73 \cdot 0'4 + 21/4 \cdot 0'2 = 12'692 + 1'05 = 13'742$$

PUESTA EN COMÚN

El grupo que expone llama la atención de que el precio real se queda en medio. Plantea que quizá lo más correcto es sumar 1/3 de las llamadas por el precio de medio minuto.

Los demás aceptan realizar ese cálculo.

C20. (alumnos) Determinar si la opción que parece adecuarse más el sumar 1/3 del número de llamadas por el precio de medio minuto. (en grupos)

El resultado que obtienen todos, sin problemas, es:

$$p = 31'73 \cdot 0'4 + 21/3 \cdot 0'2 = 12'692 + 1'4 = 14'092$$

Se concluye que sumar el precio de medio minuto multiplicado por 1/3 del número de llamadas es lo más adecuado para determinar la diferencia entre una tarifa que cobra por segundos y otra que cobra por pasos de 30 segundos.

Pero la profesora plantea si habiendo probado sólo con un ejemplo se puede considerar que la opción de sumar 1/3 del número de llamadas por el precio de medio minuto es la opción más adecuada.

Los alumnos dicen que parece que no. Entonces la profesora plantea probar con otros ejemplos.

C20.1. Probar con otros ejemplos para ver si se confirma que sumar 1/3 del número de llamadas por el precio de medio minuto sigue pareciendo la opción más adecuada. *La profesora plantea otras condiciones (distinto número de llamadas de distintas duraciones.* ***(en grupos)***

DURANTE EL TRABAJO EN GRUPOS

No se plantean problemas en los cálculos. Pero los alumnos se muestran asombrados de que no se alcance el precio real si cobrara por pasos de 30 segundos ni sumando el 50% del número de llamadas por el precio de medio minuto al precio de la tarifa si cobra por segundos.

PUESTA EN COMÚN

El grupo que expone dice que incluso sumando el 50% el precio que obteníamos era inferior al real.

De todos modos, insisten en que necesitaríamos hacer más comprobaciones con otros datos para ver qué ocurre.

Pero la profesora plantea que eso conllevaría mucho tiempo porque sería necesario realizar el cálculo con gran cantidad de facturas.

Entonces un alumno plantea que nosotros hemos considerado todos los picos de llamadas pero que las personas que entren en la página es posible que redondeen el tiempo hablado y no sumen cada segundo y por tanto el 50% será más adecuado, ya que no sumarán cada segundo.

Se concluye que, lo más adecuado es sumar el 50% del número de llamadas por el precio de medio minuto, aunque a veces quedará por encima y a veces por debajo del precio real.

UNDÉCIMA SESIÓN

C15. (Continuación). *Hoy determinaremos las franjas horarias y tipos de receptores para los que es necesario pedir información independiente. También determinaremos las fórmulas para calcular el precio de cada tipo de llamada.* ***(en grupos)***

Hoy seguimos trabajando sobre los **datos necesarios** para determinar qué compañía es más barata. Se complica cuando tenemos que hacerlo con contrato de mañana y de tarde, ya que es necesario considerar que hay diferentes franjas horarias (mientras que con la tarifa plana no existían).

Algunos comenzaban por tomar una factura y ver qué podría ser necesario, otros comienzan por intentar hacer las fórmulas en vez de determinar inicialmente qué datos serían necesarios...

En general, lo primero que hacen es determinar para qué franjas horarias es necesario pedir datos diferenciados. Comienzan a trabajar con las tarjetas. Para ello hacen lo mismo que hicieron anteriormente para hacer las gráficas, es decir, hacer una recta marcando las 24 horas del día e ir señalando las franjas horarias que consideran diferentes compañías, pero la cosa se complica porque ya no sólo es necesario considerar tarifas de cada tipo (mañana y tarde) en cada compañía sino todas (mañana y tarde, de las 3 compañías) a la vez.

Inicialmente intentan pedir datos conjuntos para tarjeta y contrato, pero concluyen que se obtendrán demasiadas franjas horarias y que, como además, en general las personas suelen predeterminar si quieren contrato o tarjeta en función de si quieren controlar en mayor medida lo que gastan, pues tiene sentido que sean dos tablas diferenciadas.

Deciden hacer una tabla con los datos que son necesarios. La tabla contiene 6 filas, para las cinco franjas horarias, y cinco columnas, para los 4 tipos de receptores de llamadas que es necesario considerar (Movistar, Vodafone, Amena y fijo nacional). Además, cada una de las 4 columnas para cada receptor la dividen en 3 columnas porque es necesario pedir datos diferentes para "de lunes a viernes", "sábados" y "domingos".

Hubo una discusión porque al principio consideraron solo "llamadas a móvil de la misma compañía" y "llamadas a móviles de otras compañías", pero se dieron cuenta de que era necesario preguntar para cada compañía. En cada celdilla, es decir, para llamadas a cada tipo de receptor, en cada franja horaria, es necesario saber –y por tanto hay que pedir a la persona que quiera saber lo que le costarían sus llamadas con cada compañía y tarifa- el tiempo hablado.

Deciden no considerar la variable de Vodafone que diferencia entre si se llama a un Vodafone de contrato o de tarjeta. Creen que es difícil que la persona lo sepa.

Para las ofertas, se pueden incluir en la página web enlaces a las diferentes compañías para que las consulten.

Comienzan a elaborar las fórmulas en las diferentes casillas.

C21. Elaborar un documento de Excel que calcule los precios con las diferentes tarifas conocidos diferentes datos (duración de la llamada, precio por minuto...)*. Algunos ya estáis comenzando a elaborar el documento de Excel a la vez que determináis que datos son necesarios, iremos poniendo en común también los resultados en relación con este documento****. (en grupos)***

DUODÉCIMA Y DECIMOSEGUNDA SESIÓN

C15 y C21 (Continuación).

El trabajo de elaboración de los documentos de Excel se hace paralelamente al perfeccionamiento de las fórmulas, dado que el planteamiento de las fórmulas en Excel implica la inclusión de celdillas, además Excel plantea limitaciones que implican modificar las fórmulas...

Se elaborará finalmente tanto una versión "normal" como una versión "para vagos" y otra para "muy vagos".

El trabajo en grupos y las puestas en común se intercalan continuamente. Describimos aquí los aspectos más importantes del proceso durante estas sesiones.

DUODÉCIMA SESIÓN

Plantean que es necesario incluir en la página web una explicación sobre *cómo transformar las horas y segundos en minutos*, ya que trabajaremos con minutos. Será fundamentalmente para aquellos que indiquen los datos a partir de alguna factura anterior, donde los datos se dan en horas, minutos y segundos. Se indicará que, para transformar en minutos, las horas deben multiplicarse por 60 y los segundos por 1/60, es decir, dividir entre 60.

Continuamente hay debates sobre si se pide más o menos datos (mayor complejidad para la persona que debe rellenarlos) y sobre la relación entre la cantidad de datos que se piden y la exactitud de los resultados que se les devuelve. Esto ocurre para determinar qué datos se pedirán, pero también hace que finalmente se decida hacer una segunda versión ("para vagos") e incluso una tercera ("para muy vagos").

También observan que hay llamadas que sí se contabilizan en el total pero no tienen coste como, por ejemplo, las llamadas a números de atención al cliente. Pero se decide finalmente no tener en cuenta porque es algo muy poco habitual y que implicaría excesivo trabajo tenerlo en cuenta para el beneficio que obtendríamos en la aproximación del cálculo de la tarifa.

Comenzamos a trabajar con las tablas de Excel para las tarifas de Contrato. Los alumnos deciden trabajar sobre lo mismo porque dicen que así pueden ir comprobando un grupo con el otro si las fórmulas coinciden. Deciden introducir algunos datos en las tablas para que también les vaya sirviendo de orientación sobre cómo van, ya que si no introducen datos no aparecerá ningún resultado aunque esté la fórmula.

Se decide incluir los precios por minuto en celdillas (en vez de ponerlos en las fórmulas directamente) para que baste con modificar la celdilla para que se corrija todo en caso de que se modifique el precio por minuto.

Recordamos que excluimos, en contrato, la tarifa Plus Familia XL de MoviStar, la Provincial de Vodafone y la Libre Familia de Amena.

También destacamos que en el "Contrato Mis Horas" de Amena hemos concretado las horas para que se asemejen a "mañana" y "tarde", la primera de 8 a 13 y la segunda de 16 a 21, si bien será necesario destacar en la página que pueden elegir otras porque no es impuesto, sino que lo elige la persona.

También destacan que hay que indicar los mínimos que se exigen, ya que deberán aparecer junto con el precio en cada tarifa si lo hay.

Comenzamos con la tabla que ya teníamos hecha que tenía una línea para cada franja horaria exigible (que son 10 a diario y una única los fines de semana y festivos). Y una columna para cada tipo de receptor (fijos nacionales, móviles Movistar, móviles amena y móviles Vodafone); cada una de las cuales está dividida en dos columnas, una para tiempo hablado y otra para número de llamadas.

Comenzamos por las tarifas planas. Es necesario introducir la suma de cada una de las celdillas de tiempo y la suma de cada una de las celdillas de número de llamadas.

Les encanta el trabajo con Excel.

Indican que en la página web no deben aparecer las fórmulas, ya que "cuesta mucho hacerlas y no las vamos a dejar para que alguien las copie y ya está".

* Deciden que la segunda versión de precisión menor pero de menor exigencia de pormenorización de datos puede consistir en dividir las franjas horarias en mañana, tarde, noche y madrugada (cuatro franjas) poniendo los precios medios ponderados, pero manteniendo los cuatro tipo de receptores. Luego deciden poner la versión menos precisa pero que exige menos datos todavía y que es pidiendo número de llamadas y tiempo hablado para móvil de la misma compañía (sin especificar cuál), o fijos y para móviles de otras compañías (lo cual limita los receptores a dos tipos) sin especificar franja horaria (sería una única tarifa).

En los Contratos Libres 18, 30 y 50 no tenemos en cuenta el precio especial para llamadas a móviles Amena de contrato, ya que creen que ese dato es demasiado puntual y nos haría incluir más columnas que sólo servirán para este caso. Lo calculamos pero sin tener en cuenta llamadas a este tipo de receptores.

Surge el problema de que sale #VALOR#. No detectan por qué les ocurre y la profesora les explica que es simplemente por que han puesto, en uno de los dígitos que forma parte de la fórmula, la coma superior y tienen que poner la inferior.

Haciendo uso de las tablas que tenemos con precios y horarios de las diferentes tarifas, determinan las fórmulas que definen el precio de cada tarifa en Excel.

Es muy costoso, pero ellos disfrutan bastante haciéndolo y además, si se les plantea que ya es lo mismo y pueden pasar al siguiente, indican que no tiene sentido, que deben terminar.

* Aunque inicialmente estaba previsto que el taller durara un mes y acabó durando casi 3. Mi idea era que no daría tiempo a abordar diferentes aspectos y por eso en ocasiones decía que, ya visto cómo se hacía, podíamos pasar al siguiente tipo, pero ellos no veían sentido a parar si era necesario, para resolver el problema, realizar la misma técnica repetidas veces. Incluso, al observar las limitaciones de tiempo, acaban trabajando bastante por su cuenta en casa.

DECIMOTERCERA SESIÓN

En la tabla de Excel para contratos, primero hacen los cálculos para tarifas MoviStar. Después hacen los cálculos para los Amena de tarifa plana, aunque está situada la tercera en orden en el programa. Dejan para la última a Vodafone y vuelven al final a Amena para hacer los de tarifa mañana y tarde.

Al comenzar con Vodafone, resulta que en el contrato de mañana, debido a que, además de haber franjas horarias (no ser una tarifa plana), se cobra por pasos de 30 segundos y por tanto hay que añadir a la tarifa de cada horario lo que se añade por ser por pasos de 30 segundos, la fórmula se complica hasta el punto de que Excel no deja seguir porque dice que la fórmula es demasiado larga, de modo que tiene que plantearse como continuar, es decir, cómo reducir la expresión de la fórmula de modo que quede del tamaño adecuado para que Excel la acepte.

Lo que deciden es simplificar la fórmula para ver si así ya la acepta. Parten de:

$p = \in/min \,.\, t + \in/min \,/\, 2 \,.\, n \,/\, 4 + \in/est.llam \,.\, n + \in/sms \,.\, sms$

y queda finalmente:

$\in/min.(t + ½.n/4) + \in/est.llam.n + \in/sms.\ Sms = \in/min.(t + n/8) + \in/est.llam \,.\, n + \in/sms \,.\, sms$

* Hacen comprobaciones utilizando sustituyendo las variables por valores concretos en ambos casos y comprueban así que es correcta la reducción. No modifican los anteriores cálculos realizados con Excel, sino que lo utilizarán a partir de ahora. Afirman que, aunque están "prácticamente seguros" de que está bien, quieren asegurarse porque si se dan cuenta de que está mal cuando ya hallan elaborado las fórmulas será un montón de trabajo perdido.

Pero no es suficiente, ya que el programa sigue afirmando que “es demasiado larga”.

Lo que deciden entonces es que, dado que el precio por establecimiento de llamada en todas las tarifas viene dado por la misma fórmula (con las mismas casillas), pues harán una casilla con ello, sumando además en esta casilla el precio por los mensajes, y sumarán directamente la celdilla para el cálculo de cada precio en vez de toda la fórmula.

De nuevo acuerdan no utilizarlo en las anteriores porque sería un trabajo innecesario.

DECIMOCUARTA SESIÓN

Comienzan explicando que han visto que no es necesario pedir tantos datos a los usuarios, ya que el fin de semana no hay que diferenciar por horarios, porque no hay franjas de precios en ninguna tarifa. Que tomaron las franjas horarias generales y las aplicaron a diario y fin de semana, pero en fin de semana no hace falta.

Dicen que directamente han combinado celdas, sin modificar las fórmulas y que funciona bien.

Explican que en tarjeta, las diferencias fundamentales en las tablas necesarias, con las de contrato son:

- Es necesario diferenciar entre "sábado" y "domingos y festivos", porque MoviStar diferencia precios en una de sus tarifas para estos dos tipos (en lugar de unir sábado y domingo).
- Es necesario diferenciar franjas para sábado y domingo también.

Surge una duda con la Tarjeta Amena Libre, ya que la indicación del precio mínimo es diferente. Mientras que en el resto de las tarifas que exigen mínimo, simplemente si no alcanzas el mínimo te lo cobran de todos modos, en este caso lo que hacen es que si no alcanzas el mínimo te cobran un precio diferente por minuto. Por tanto, no vale simplemente con poner una nota en el resultado que indique: "El gasto mínimo que cobran es X". Lo ideal sería que el ordenador detectara si el gasto el superior a 10 euros o no y en caso negativo aplicar la tarifa correspondiente, pero se acuerda solucionarlo indicando en el resultado de "Amena Libre" que el gasto mínimo es de 10 euros y añadiendo: "Si el gasto no alcanza los 10 euros, la tarifa con que se cobrará es 'Amena Libre sin gasto mínimo de 10 euros`". Y en "Amena Libre sin gasto mínimo de 10 euros" se indicará: "Esta tarifa se aplicará si el gasto mensual en Amena Libre es inferior a 10 euros".

En Tarjeta Libre y Tarjeta Ocio de Amena se indicará que es posible “aduarse” y que el precio será con la persona “aduada”... En Tarjeta Joven de Amena se indicará que no es posible “aduarse”. Nosotros no tendremos en cuenta los dúos para calcular los precios mensuales.

* En el *Material 3: Hoja de cálculo de Excel para la comparación de tarifas de telefonía móvil* se puede observar la hoja de cálculo que resultó.

DECIMOQUINTA y DECIMOSEXTA SESIÓN: Elaboración de versión "para vagos"

DECIMOQUINTA SESIÓN

C.22. Elaboración de una versión "para vagos".

Dicen que han estado trabajando también sobre posibles opciones para hacer la "Versión para vagos", es decir, pedir menos datos, aunque a cambio la previsión de gastos con cada tarifa sea menos exacta. Hay diferentes propuestas:

- Respecto a las franjas horarias: Unir franjas horarias (será de modo diferente en tarjeta y contrato, ya que tarjeta diferencia menos franjas inicialmente) para de lunes a viernes; y fin de semana a cualquier hora.
- Respecto a los tipos de receptor: "A fijos nacionales y móviles del mismo operador" y "A móviles de otros operadores".

  * En tarjeta sólo dos tarifas de las consideradas diferencian entre tipo de receptor, pero consideran que no debemos unirlo porque precisamente la diferencia es grande entre los precios.

CONTRATO

Deciden diferenciar entre: madrugada, mañana, medio día, tarde y noche, reduciendo a 5 las franjas en las que se solicita información y siendo además franjas lógicas para prever llamadas por corresponder con franjas del día habitualmente utilizadas.

Los precios de cada franja serán precios medios.

Tras determinar las franjas horarias: 0-8, 8-14, 14-16, 16-22, 22-24, hallan los precios medios de cada una de las franjas. Se concluye además que los precios medios deben ser ponderados.

Para facilitar la modificación del trabajo de Excel cuando se modifiquen los precios de las llamadas, deciden que en vez de hacer los cálculos externos y poner directamente una tabla con los precios en cada franja de las limitadas en este caso, lo que se hace es que se pone en cada celda de precios una fórmula que indica:

- En los casos en que el precio es el mismo toda la franja: directamente el precio, pero...
- En los que son precios medios ponderados se utilizan fórmulas del siguiente tipo:

  (euros/min . nº horas + euros/min. . nº de horas + ...) / nº horas totales

de modo que si se modifica el precio en alguna franja, en aquellas fórmulas en las que influya basta con sustituir en la fórmula, y no hace falta calcular otra vez.

DECIMOSEXTA SESIÓN

Seguimos con la versión para vagos. Estamos en las tarifas de tarjeta.

Las franjas horarias que se han tomado son más amplias que en el caso de contratos porque ya partíamos de franjas más amplias. Las franjas que tomamos son, tanto para diario como para fin de semana: 0-8, 8-16, 16-24. Por tanto, sólo se unen las tres franjas en que estaba dividido el horario de 0 a 8 (que eran tres de lunes a sábado y dos domingos y festivos).

Surge una discusión sobre si el sábado queda unido a de lunes a viernes o a domingos y festivos. Se concluye que como sólo es una la tarifa que diferencia de lunes a sábado y domingos y festivos en vez de lunes a viernes y fin de semana (es la tarifa Activa 4 de MoviStar), pues se toma de lunes a viernes y fin de semana.

Los destinatarios en este caso son 3 en vez de los dos considerados en contrato. Se considera necesario diferenciar entre: móviles del mismo operador, fijos nacionales y móviles de otros operadores. Es porque la Activa 4 de MoviStar tiene un precio para móviles MoviStar y otro para fijos nacionales y móviles de otros operadores. Hay alumnos que dicen que para considerar tres destinatarios podríamos considerar ya los 4, pero otros dicen que reducir un destinatario ya es y además así se asemeja más la información que solicitamos a la versión para vagos de contrato.
Entonces un alumno plantea que los destinatarios deberían reducirse a dos; ya que, al ser sólo una tarifa la que hace esta diferenciación distinta podría obviarse, quedando como destinatarios los mismos que en “contrato” (móviles del mismo operador y fijos nacionales por un lado y móviles de otros operadores por otro) y algunos alumnos le apoyan. Pero los demás dicen que entonces la previsión para esta compañía se alejaría más de la

realidad que de la demás. Los unos dicen que esta diferenciación de cercanía en la previsión también ocurría en la versión que hicimos para vagos de las tarifa de contrato. Los otros dicen que en esta ocasión la diferencia sería muy grande porque hay mucha diferencia en el precio de llamada a móviles del mismo operador (0,12 euros) y llamadas a fijos (0,48).
Es muy difícil llegar a un acuerdo. Piden a la profesora que decida y ésta indico que, una vez expuestos los "pros" y "contras" de cada opción sólo queda sopesarlas. Resumen lo que han dicho poniéndolo en la pizarra:

a) dos destinatarios ("móviles del mismo operador y fijos nacionales" y "móviles de otros operadores"):

- Negativo: La previsión para Activa 4 de MoviStar sería bastante más lejana a la realidad que para las demás tarifas de tarjeta.
- Positivo: Se pide menos datos a los usuarios para obtener información muy semejante como resultado.
- Positivo: La información que se pide se asemeja más a la de tarifas de contrato en la versión para vagos.

Un alumno dice como negativo que en que la tarifa de Activa 4 puede ser muy interesante para aquellos que sólo llaman a móviles del mismo operador y no a fijos nacionales, ya que, si donde más llamas es a móviles de tu operador el precio por minuto es muy bueno (0,12). Si no diferenciamos esta tarifa estamos quitando la información sobre una tarifa que es la mejor para gente que llama a cualquier hora del día cualquier día de la semana a móviles del mismo operador solamente. Esta idea convence a todos y se decide diferenciar entre los 3 destinatarios.

Hay alumnos que dan cuenta de que en tarjeta estamos perdiendo menos exactitud en la previsión en la versión para vagos que en la versión para vagos de contrato. Dicen que podríamos reducir los datos que se piden porque queda si no muy semejante a la versión normal. Plantean, por ejemplo, que se combine el fin de semana (horario medio para fin de semana). Analizamos y vemos que sólo una tarifa diferencia franjas horarias los domingos y festivos (tarjeta Joven de Amena) y dos tarifas incluyen los sábados (tarjeta Joven de Amena y Activa 4 de MoviStar). Esto es bueno porque sólo se pierde información para una tarifa pero es malo porque significa que es la tarifa más conveniente para aquellos que llamen en el horario más barato del fin de semana (de 24 a 8), que es muy barato (0,06 euros) y si no se pide estar información se pierde información muy importante. Se concluye que, dado que sí se pedirán los datos por horarios en el fin de semana porque la información que se pide es lógica y fácil de contestar (porque los horarios son muy lógicos: madrugada, mañana-mediodía y tarde-noche) y a cambio no perdemos la peculiaridad de esta tarjeta. En este acuerdo está prevaleciendo el criterio de la lógica y facilidad para dar los datos que se piden, ganando exactitud, frente al nivel de exactitud aproximado entre la versión para vagos de contrato y la de tarjeta, como ocurría con considerar los sábados independientemente.

Un alumno se da cuenta de que en domingos y festivos de tarjeta, también en la versión normal, podríamos no haber diferenciado nada más que dos horarios en el fin de semana, ya que, aunque la información viene dividida en tres franjas, dos de ellas tienen el mismo precio por minuto. Se acuerda modificar la versión normal. Acordamos que se me encargará la profesora de hacerlo.

* Al hacer las fórmulas para los precios de las diferentes franjas horarias en la Activa 4 de MoviStar un grupo comete el error de no considerar el precio del sábado al hallar el precio del fin de semana. La profesora indica a todos que “Luego pondremos en común cómo hemos hallado el precio del fin de semana en Activa 4”. Entonces se dan cuenta de que han cometido ese error.

Al ponerlo en común (cómo calcular el precio medio de fin de semana en Activa 4), un grupo ha multiplicado 0’15 por 12, 0’55 por 12 y 0,15 por 24 y lo ha dividido todo entre 48 (ha considerado las 48 horas del fin de semana); otro grupo ha multiplicado 0’15 por ¼, 0’55 por ¼, y 0’15 por ½ y lo ha sumado. El tercer grupo dice que no es justo porque el precio de los domingos incluye también festivos y por tanto no es sólo la mitad del tiempo total, pero acordamos que, aunque podríamos calcular el número total de festivos anuales y contabilizarlo, parece que no vale la pena por la diferencia que va a producirse.

Dicen los alumnos que sería importante explicar esto en la página web (las discusiones sobre cómo reducir la información que se pide considerando lo que se pierde con ella y las decisiones que hemos tomado con las razones que nos han llevado a tomarlas). Incluso los que siempre dicen que no demos mucha información sobre cómo hemos hecho las cosas porque nos ha costado mucho trabajo, en este caso dicen que sí debemos explicarlo.

Finalizamos la versión para vagos (que se adjunta en el *Material 4*) y los alumnos dicen que siguen pensando, como ya habían planteado, que hagamos una segunda versión para “muy vagos”, menos exacta aún pero en la que se pida menos información.

Los alumnos pensarán en posibles planteamientos en casa y el próximo día lo haremos.

DECIMOSÉPTIMA SESIÓN: Elaboración de versión para “muy vagos”

C23. Elaborar una versión para “muy vagos” (en grupos)

Se discuten inicialmente las características de este modelo, cuya propuesta de realización fue hecha el día anterior:

a) Respecto al tipo de receptores, todos coinciden en que el tipo de operador sea uno único porque a veces uno no sabe si el móvil al que uno llama es del mismo operador que el suyo o de otro. Aunque un alumno trae un listado de los comienzos de números de teléfono que corresponden a diferentes operadores. De todos modos, decidimos que esta versión, la más simple, no diferencie, pero que colgaremos el listado que ha traído para que puedan saberlo para introducir los datos en las otras dos versiones.
b) Respecto a horarios. Hay coincidencia también en que no se diferencien horarios, aunque sí entre fin de semana y festivo.
c) Se mantiene también que se pedirá el número de llamadas además del tiempo. Quien quiera puede no introducir este dato, pero entonces el precio previsto será menos exacto aún. Se puede explicar que se pide porque hay que incluir el precio por establecimiento de llamada y que si no se indica no se incluirá en el precio que se dé, de modo que se obtendrá un precio menor.

Conclusión:

a) Receptor de la llamada: único (sin diferenciación).
b) Horario: sin horarios, sólo: “de lunes a viernes” y “sábados, domingos y festivos”.
c) Información: se sigue pidiendo tanto el tiempo total hablado como el número de llamadas realizadas. El número de llamadas pueden si

quieren no completarlo, pero entonces se puede avisar que la previsión será aún menos exacta porque no se incluirá el precio por establecimiento de llamada.

Esto será igual para tarjeta que para contrato.
Se utilizan los precios medios ponderados en función del número de horas a que corresponde cada precio (ver hoja de Excel).
Utilizan la tabla de "para vagos" (que pegan en la nueva hoja y la dejan para utilizarla en las fórmulas para hallar los precios medios) porque ya tienen la misma división horaria todas las opciones de cada compañía y facilita por tanto hallar los precios medios ponderados. Además, cuando se modifiquen los precios, bastará con modificar la tabla de "para vagos" y pegarla en el lugar conveniente en "para muy vagos" para que ya también se modifique automáticamente (a no ser que no sólo cambien los precios sino también las franjas y receptores).

* Sé que se puede enlazar con otra hoja de Excel sin necesidad de pegar la tabla, pero como ya lo tenía hecho un grupo y es cuestión de manejo del programa, se lo expliqué pero no les pedí que lo rehicieran.

Al comparar la versión para "muy vagos" de tarjeta los resultados de uno de los grupos no coincide. Descubren comparando que es porque ese grupo ha considerado, al determinar la ponderación, los tres tipos de receptor; mientras que los otros han considerado en la ponderación dos tipos: "móviles del mismo operador y fijos nacionales" y "móviles de otros operadores". Por ejemplo, en la tarjeta MoviStar Activa Total, donde hay un precio para cualquier día (diario y fin de semana y festivo) para "móviles del mismo operador y fijos" y otro precio para móviles de otros operadores, y lo que ha hecho el grupo que lo ha hecho diferente a los otros dos es multiplicar por 2 el primer precio y por 1 el segundo y dividir entre 3 para obtener el precio medio; mientras que los otros habían sumado los dos precios y dividido entre dos. El resto de los alumnos les dan la razón en su deducción, pero uno dice que quizá debería hacerse un estudio estadístico, similar al que hicimos con la duración de las llamadas para analizar la proporción de llamadas realizadas a cada tipo de receptor. Como queda poco tiempo decidimos calcular el precio medio considerando que 1/3 de las llamadas son a cada tipo de receptor, pero que queda pendiente realizar ese estudio. Dicen que podemos indicar en la página web que se ha considerado, para hallar los precios medios, que se realizan 1/3 de las llamadas a cada tipo de receptor.

Una cuestión que destacan al poner en común las opciones de Contrato es que hemos reducido el número de tarifas a comparar, en el sentido de que las compañías MoviStar y Vodafone tienen cada una dos tarifas (Plus elección mañana y tarde y mañana y tarde respectivamente) cuyos precios medios deducidos coinciden (tanto en opción diario como fin de semana), de modo que hay personas a las que en vez de darles una opción como la mejor les dará dos, y tendrán que ir a la versión más completa para saber cuál es mejor.

En Tarjeta también coinciden los precios medios obtenidos de dos tarifas (de lunes a viernes y en fin de semana y festivos): Activa Total y Activa 24 horas de MoviStar.

* Cuanto más avanzamos en el proceso, más trabajan los alumnos en autonomía. Por ejemplo, al pasar el profesor por las mesas, muy a menudo le indican que espere a que lo elaboren. También se observa esta creciente autonomía en la validación de las respuestas, donde los alumnos van utilizando cada vez sus medio en lugar de considerar como único y definitivo medio la respuesta del profesor.

* La hoja de cálculo resultante se presenta en el *Material 5*.

DECIMOOCTAVA SESIÓN: Evaluación

En esta última sesión se propuso a los alumnos dos tipos de tareas:

- Una valoración global de lo aprendido en el taller.
- Una evaluación individual en forma de "examen" o prueba estándar de matemáticas.

Prueba de evaluación individual

Se distribuyó a cada alumno una documentación, obtenida de Internet (impresa directamente de Internet), relativa a tarifas de telefonía fija.

Se les entregó también una hoja con una serie siguientes preguntas relativas a la comparativa entre tarifas (ver documento *Material 6: Evaluación final individual*).

Valoración de lo aprendido en el taller

La valoración de lo aprendido en el taller incluía dos cuestiones:

- "¿Qué cosas hemos aprendido en este taller?", y
- "¿qué cosas aprendidas en este taller es difícil aprenderlas en clase y por qué?"

Se pregunta a los alumnos qué cosas importantes han aprendido en el taller. Se deja un tiempo para pensarlo individualmente y tomar notas y luego se hace en modo de lluvia de ideas.

Se muestra una síntesis de las respuestas dadas:

¿QUÉ COSAS HEMOS APRENDIDO EN EL TALLER?

- Para comprobar si lo que hemos hecho es válido podemos probar con un ejemplo. Bueno, mejor con varios, porque a veces puede ser casualidad que valga para ese ejemplo. No hace falta que lo diga el profesor.
- Cómo usar las funciones para solucionar problemas reales.
- Cómo deducir funciones a partir de datos.
- Cómo comparar funciones por sus gráficas.
- Cómo hacer gráficas a partir de funciones.
- Cómo elegir la tarifa más barata para hablar por teléfono móvil.
- Cómo saber si nos están cobrando bien en la factura y si podríamos pagar menos con otra compañía.
- Cómo usar Excel para solucionar funciones.
- Cómo comparar tarifas de teléfono.
- Cómo igualar el precio medio de diferentes tarifas de teléfono.
- Para qué sirve el precio medio y el precio medio ponderado (comparación).
- Que las compañías de teléfono móvil no dan los datos de la forma más fácil para entenderlos, que sería con funciones.
- Que las compañías de teléfonos móviles, unas cobran por segundos y otras por fracciones de 30 segundos, y eso es importante porque las que cobran por 30 segundos son más caras, si el precio por minuto es el mismo, son más caras.
- Que las tarifas más baratas exigen un gasto mensual y a mayor gasto mensual exigido menor es el precio por minuto.
- Que podemos nosotros comprobar si algo está bien o no.

- Que no siempre hay una única forma de solucionar los problemas. A veces hay varias. A veces son mejores unas u otras dependiendo de las necesidades.
- Que no siempre se puede concluir la forma que es mejor, sino que puede ser que una forma sea mejor para algunas cosas y otra forma sea mejor para otras cosas.
- Cómo usar la estadística para solucionar problemas. En este caso, para reducir la cantidad de datos que se piden para calcular el precio de la factura.
- Que en la realidad no siempre es lo más adecuado lo más exacto, sino que hay que comparar la exactitud que nos da con la complejidad que conlleva y valorar qué nos conviene.
- Que a veces las apariencias engañan y problemas que parecen sencillos pueden resultar muy complejos mientras que problemas que parecen inicialmente más complejos luego, cuando te pones a hacerlo, resultan más sencillos.
- Que a mayor cantidad de datos, mayor exactitud. A menor cantidad de datos, más fácil, pero menos exactitud.
- Que siempre puedes hablar un minuto entero por teléfono, porque te cobrarán siempre como mínimo un minuto aunque hables menos.

Valoración de qué cosas aprendidas en este taller es difícil aprenderlas en clase y por qué

También se pregunta a los alumnos qué cosas aprendidas en este taller es difícil aprender en clase y por qué. Se deja un tiempo para que lo piensen individualmente y tomen las notas oportunas y luego se realiza una puesta en común.

La síntesis de las respuestas se muestra a continuación:

¿QUÉ COSAS APRENDIDAS EN ESTE TALLER ES DIFÍCIL APRENDER EN CLASE Y POR QUÉ?

- Aprender a aplicar lo que vemos en clase a la vida real, porque en clase no da tiempo.
- Trabajar en equipo, porque en clase trabajamos siempre individualmente.
- Decidir nosotros mismos si está bien o mal porque en clase lo dice el profesor (o el libro).
- La complejidad de la realidad, que en clase se simplifica mucho.
- Llegar nosotros mismos a las cosas, en vez de que nos lo digan.
- Solucionar problemas reales con lo que hemos visto en clase.
- Descubrir cosas matemáticas nosotros solos investigando un problema.
- Investigar problemas reales.
- Aprender por nosotros mismos, porque en clase no hay tiempo.

B.2. MATERIAL ADJUNTO AL DIARIO DEL PRIMER REI

MATERIAL 1. Tablas con los datos de las diferentes compañías

CONTRATOS VODAFONE (impuestos indirectos no incluidos)

<table>
<tr><th rowspan="3"></th><th rowspan="3">Cuota de conexión (euros)</th><th rowspan="3">Primer minuto</th><th rowspan="3">Resto de minutos</th><th rowspan="3">Establecimiento de llamadas</th><th colspan="4">DESTINO NACIONAL</th><th rowspan="3">Consumo mínimo mensual</th></tr>
<tr><th colspan="2">A móviles movistar y fijos nacionales</th><th colspan="2">A móviles de otros operadores</th></tr>
<tr><th>LABORABLES</th><th>FIN DE SEMANA</th><th>LABORABLES</th><th>FIN DE SEMANA</th></tr>
<tr><td>CONTRATO MAÑANA</td><td rowspan="4">Primera línea: 21,04

Segunda línea y sucesivas: gratuitas</td><td rowspan="4">Completo</td><td rowspan="4">En fracciones de 30 segundos</td><td rowspan="4">Nacional: 0,12</td><td>0-13h y 22-24h: 0,06
13-22h: 0,25</td><td>0,06</td><td>0-13h y 22-24h: 0,10
13-22: 0,45</td><td>0,10</td><td>9 euros</td></tr>
<tr><td>CONTRATO TARDE</td><td>0-8h y 17-24h: 0,06
8-17h: 0,25</td><td>0’06</td><td>0-8h y 17-24h: 0,10
8-17h: 0,45</td><td>0’10</td><td>9 euros</td></tr>
<tr><td>CONTRATO UNIVERSAL 20</td><td colspan="4">0,19</td><td>20 euros</td></tr>
<tr><td>CONTRATO PROVINCIAL</td><td colspan="2">FIJOS PROVINCIALES Y VODAFONE → 0’17</td><td colspan="2">FIJOS NACIONALES Y MÓVILES DE OTRAS COMPAÑÍAS → 0,45</td><td>9 euros</td></tr>
</table>

CONTRATOS MOVISTAR (impuestos indirectos no incluidos)

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3"></td><td rowspan="3">Cuota de conexión (euros)</td><td rowspan="3">Primer minuto</td><td rowspan="3">Resto de minutos</td><td rowspan="3">Establecimiento de llamadas</td><td colspan="4">DESTINO NACIONAL</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">A móviles movistar y fijos nacionales</td><td colspan="2">A móviles de otros operadores</td><td rowspan="2">Consumo mínimo mensual</td></tr>
<tr><td>LABORABLES</td><td>FIN DE SEMANA</td><td>LABORABLES</td><td>FIN DE SEMANA</td></tr>
<tr><td colspan="2">CONTRATO PLUS 24 HORAS</td><td rowspan="4">Primera línea: 21,03
Segunda línea y sucesivas: gratuitas</td><td rowspan="4">Completo</td><td rowspan="4">Cómputo por segundo</td><td rowspan="4">Nacional: 0,12</td><td colspan="4">0,18</td><td>9 euros</td></tr>
<tr><td rowspan="2">CONTRATO PLUS ELECCIÓN</td><td>MAÑANA</td><td>0-8, 11-16 y 22-00: 0,07
8-11 y 16-22: 0,23</td><td>0,07</td><td>0-8, 11-16 y 22-00: 0,12
8-11 y 16-22: 0,45</td><td>0,12</td><td rowspan="2">9 euros</td></tr>
<tr><td>TARDE</td><td>0-8, 14-16 y 19-00: 0,07
0-14 y 16-19: 0,23</td><td>0,07</td><td>0-8, 14-16 y 19-00: 0,12
0-14 y 16-19: 0,45</td><td>0,12</td></tr>
<tr><td colspan="2">CONTRATO PLUS FAMILIA XL</td><td colspan="4">0,16</td><td>3 euros</td></tr>
</table>

NOTA: En el Contrato Plus Familia XL, respecto al consumo mínimo mensual, si la media de todas las líneas no supera los 12 euros, se le facturará a cada línea como mínimo un importe de 12 euros y, en caso contrario se le facturará como mínimo 3 euros.

CONTRATOS AMENA (impuestos indirectos no incluidos)

<table>
<tr><th rowspan="3"></th><th rowspan="3">Cuota de conexión (euros)</th><th rowspan="3">Primer minuto</th><th rowspan="3">Resto de minutos</th><th rowspan="3">Establecimiento de llamadas</th><th colspan="5">DESTINO NACIONAL</th><th rowspan="3">Consumo mínimo mensual (euros)</th></tr>
<tr><th colspan="2">A móviles amena de contrato</th><th colspan="2">A móviles amena y fijos nacionales</th><th rowspan="2">A móviles de otras compañías</th></tr>
<tr><th>LABORABLES</th><th>FIN DE SEMANA</th><th>LABORABLES</th><th>FIN DE SEMANA</th></tr>
<tr><td>CONTRATO LIBRE</td><td rowspan="5">Primera línea: 21 euros
Segunda línea y sucesivas: gratuitas</td><td rowspan="5">Completo</td><td rowspan="5">Por sg.</td><td rowspan="5">Nacional: 0,12</td><td colspan="5">0’21</td><td>6’01</td></tr>
<tr><td>CONTRATO LIBRE 18</td><td colspan="2">0’03</td><td colspan="3">0’18</td><td>18 euros</td></tr>
<tr><td>CONTRATO LIBRE 30</td><td colspan="2">0’03</td><td colspan="3">0’15</td><td>30 euros</td></tr>
<tr><td>CONTRATO LIBRE 50</td><td colspan="2">0’03</td><td colspan="3">0’13</td><td>50 euros</td></tr>
<tr><td>CONTRATO LIBRE FAMILIA</td><td colspan="2">A líneas de familia y al fijo elegido
0’03</td><td colspan="3">A fijos y móviles nacionales
0’21</td><td>6 euros</td></tr>
<tr><td>CONTRATO MIS HORAS</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="4">Laborables
21-8: 0’06
5 horas entre 8 y 21: 0’21
8-21: 0’45
Fines de semana: 0’06</td><td>Laborables
21-8: 0’06
5 horas entre 8 y 21: 0’21
8-21: 0’45
Fines de semana: 0’06</td><td>6 euros</td></tr>
</table>

* Tiene en cuenta 6 decimales.

MATERIAL 2. Hoja de cálculo de Excel de datos de "picos de llamadas"

Total llamadas	Llamadas de 01 a 30 segundos de pico (tipo A)	Llamadas de 31a 59 segundos de pico (tipo B)	Llamadas de pico 00 (tipo C)	Proporción llamadas tipo A	Proporción llamadas tipo B	Proporción llamadas tipo C
15	1	1	13	6,666666667	6,666666667	86,66666667
11	0	0	11	0	0	100
81	29	21	31	35,80246914	25,92592593	38,27160494
43	9	7	28	20,93023256	16,27906977	65,11627907
84	24	21	39	28,57142857	25	46,42857143
89	18	8	63	20,2247191	8,988764045	70,78651685
78	24	22	32	30,76923077	28,20512821	41,02564103
52	13	8	31	25	15,38461538	59,61538462
107	27	18	62	25,23364486	16,82242991	57,94392523
77	13	14	40	16,88311688	18,18181818	51,94805195
83	17	21	45	20,48192771	25,30120482	54,21686747
88	24	11	53	27,27272727	12,5	60,22727273
46	16	10	20	34,7826087	21,73913043	43,47826087
73	20	12	41	27,39726027	16,43835616	56,16438356
79	32	19	28	40,50632911	24,05063291	35,44303797
151	31	38	82	20,52980132	25,16556291	54,30463576
61	29	11	21	47,54098361	18,03278689	34,42622951
57	14	11	32	24,56140351	19,29824561	56,14035088
58	18	14	26	31,03448276	24,13793103	44,82758621
48	18	5	35	37,5	10,41666667	72,91666667
92	22	23	47	23,91304348	25	51,08695652
87	16	12	59	18,3908046	13,79310345	67,81609195
59	18	14	27	30,50847458	23,72881356	45,76271186
8	2	5	1	25	62,5	12,5
71	27	18	26	38,02816901	25,35211268	36,61971831
68	20	11	37	29,41176471	16,17647059	54,41176471
84	19	23	42	22,61904762	27,38095238	50
77	23	17	37	29,87012987	22,07792208	48,05194805
106	28	16	62	26,41509434	15,09433962	58,49056604
57	20	8	29	35,0877193	14,03508772	50,87719298
52	12	6	34	23,07692308	11,53846154	65,38461538
65	20	11	34	30,76923077	16,92307692	52,30769231
33	11	7	15	33,33333333	21,21212121	45,45454545
56	18	8	30	32,14285714	14,28571429	53,57142857
6	1	3	2	16,66666667	50	33,33333333
60	22	14	24	36,66666667	23,33333333	40
74	25	11	38	33,78378378	14,86486486	51,35135135
97	24	29	44	24,74226804	29,89690722	45,36082474
66	13	17	36	19,6969697	25,75757576	54,54545455
82	16	26	40	19,51219512	31,70731707	48,7804878
42	9	10	23	21,42857143	23,80952381	54,76190476
Sumatorio	**Sumatorio**	**Sumatorio**	**Sumatorio**	**Proporción media tipo A**	**Proporción media tipo B**	**Proporción media tipo C**
2723	743	561	1420			
	Proporción llamadas tipo A	**Proporción llamadas tipo B**	**Proporción llamadas tipo C**	26,652506	21,1464057	52,44918347
	27,28608153	20,6022769	52,14836577			

MATERIAL 3. Hoja de cálculo de Excel para la comparación de tarifas de telefonía móvil

COMPARACIÓN DE TARIFAS CONTRATO

TARIFAS CONTRATO (1)
Entrada de datos:

	Movistar				Vodafone			
	Laborables		FSyFest		Laborables		FSyFest	
	t	N	t	n	t	n	t	n
0h-8h	25,2	19						
8h-11h								
11h-13								
13h-14								
14h-16								
16h-17								
17h-19								
19h-21								
21-22								
22-24								
Nº sms	60							

	Amena				Fijos nacionales			
	Laborables		FSyFest		Laborables		FSyFest	
	t	n	t	n	t	n	t	n
0h-8h								
8h-11h								
11h-13								
13h-14								
14h-16								
16h-17								
17h-19								
19h-21								
21-22								
22-24								

TARIFAS CONTRATO (2)

Precio según compañía y modalidad:

Compañías	TOTAL Est llamada y mensajes	11,28					
	Est de llamada	0,12					
	Precio por sms	0,15	16%IVA				
Movistar:		**Precio sin IVA**	**TOTAL**	**Euros/min**			
	Plus24h	15,81	18,34	0,18			
	Plus elección mañana	13,04	15,13	0,07	0,23	0,12	0,45
	Plus elección tarde	13,04	15,13	0,07	0,23	0,12	0,45
	Plus familia XL	-					
Vodafone							
	Universal 20	16,52	19,16	0,19			
	Mañana	14,04	16,28	0,06	0,25	0,1	0,45
	Tarde	14,04	16,28	0,06	0,25	0,1	0,45
	Provincial	-		No incluida			
AMENA							
	Libre	16,57	19,22	0,21			
	Libre 18	15,81	18,34	0,18			
	Libre 30	15,06	17,47	0,15			
	Libre 50	14,55	16,88	0,13			
	Mis horas mañana	12,79	14,84	0,06	0,21	0,45	
	Mis horas tarde	12,79	14,84	0,06	0,21	0,45	
	Libre familia	-					

TARIFAS CONTRATO (3)

Condiciones y comentarios:

		Mínimos	Comentarios
Movistar:			
	Plus24h	9euros	Primera línea: 21,03 euros
	Plus mañana	9euros	Primera línea: 21,03 euros
	Plus tarde	9euros	Primera línea: 21,03 euros
	Plus familia XL		No incluida

Vodafone			
	Universal 20	20euros	
	Mañana		
	Tarde		
	Provincial		

AMENA		
	Libre	
	Libre 18	No incluye llamadas a móviles amena contrato (0'03 €/m)
	Libre 30	
	Libre 50	
	Mis horas mañana	Horas fijadas de 8h a 13h
	Mis horas tarde	Horas fijadas de 16h a 21h
	Libre familia	No incluida

COMPARACIÓN DE TARIFAS TARJETA

TARIFAS TARJETA (1)
Entrada de datos:

	Movistar						Vodafone					
	Laborables		S		DyFest		Laborables		S		DyFest	
	t	n	t	n	t	n	t	n	t	n	t	n
0h-4h	25,2	19										
4h-6h												
6h-8h												
8h-16h												
16h-24h												

Nº sms	60

	Amena						Fijos nacionales					
	Laborables		S		DyFest		Laborables		S		FSyFest	
	t	n	t	n	t	n	t	n	t	n	t	n
0h-4h												
4h-6h												
6h-8h												
8h-16h												
16h-24h												

TARIFAS TARJETA (2)

Precio según compañía y modalidad:

Compañías	TOTAL Est llamada y mensajes	11,28
	Est de llamada	0,12
	Precio por sms	0,15

16%IVA

		Precio sin IVA	**TOTAL**	**Euros/min**			
Movistar:							
	Activa Total	17,07	19,80	0,21	0,48		
	Activa 24 horas	19,55	22,67	0,3			
	Activa 4	15,41	17,88	0,15	0,55		
	Activa Club	14,59	16,92	0,12	0,48		
	Activa Más	16,52	19,16	0,19			
Vodafone							
	VF	24,78	28,75	0,19	0,49		
	Autorecargable	19,00	22,04	0,28			
	Tiempo Libre	14,59	16,92	0,59	0,12		
AMENA							
	Libre (10€ mínimo)	17,07	19,80	0,21			
	Libre (sin 10€ mínimo)	19,55	22,67	0,3			
	Joven	12,93	15,00	0,06	0,12	0,8	
	Ocio	14,59	16,92	0,72	0,12	0,21	

TARIFAS TARJETA (3)
Condiciones y comentarios:

		Mínimos	Comentarios
Movistar:			
	Activa Total	0	
	Activa 24 horas	0	
	Activa 4	0	
	Activa Club	0	
	Activa Más	10	
Vodafone			
	VF	0	
	Autorecargable	20	
	Tiempo Libre	0	
AMENA			
	Libre (10€ mínimo)	10	
	Libre (sin 10€ mínimo)	0	
	Joven	0	No permite aduarse.
	Ocio	0	Sí permite aduarse.

MATERIAL 4. Hoja de cálculo de Excel para la comparación de tarifas de telefonía móvil (versión "para vagos")

COMPARACIÓN DE TARIFAS CONTRATO (versión "para vagos")

VERSIÓN PARA VAGOS CONTRATO (1)

	Móviles de mismo operador y fijos nacionales				Móviles de otros operadores			
	Laborables		FSyFest		Laborables		FSyFest	
	t	n	t	n	t	n	t	n
0h-8h	25,183	19						
8h-14h								
14h-16h								
16h-22								
22h-24h								

Nº sms	60

VERSIÓN PARA VAGOS CONTRATO (2)

Compañías TOTAL Est llamada y mensajes 11,28

	Est de llamada	0,12	
	Precio por sms	0,15	16%IVA
Movistar:		**Precio sin IVA**	**TOTAL**
	Plus24h	15,81294	18,343
	Plus elección mañana	13,04281	15,1297
	Plus elección tarde	13,04281	15,1297
	Plus familia XL	-	-
Vodafone			
	Universal 20	16,06477	18,6351
	Mañana	12,93348	15,0028
	Tarde	12,93348	15,0028
	Provincial	-	-
AMENA			
	Libre	16,56843	19,2194
	Libre 18	15,81294	18,343
	Libre 30	15,05745	17,4666
	Libre 50	14,55379	16,8824
	Mis horas mañana	12,79098	14,8375
	Mis horas tarde	12,79098	14,8375
	Libre familia	-	-

VERSIÓN PARA VAGOS CONTRATO (3)

	Euros/min					
	0h-8h	**8h-14h**	**14h-16h**	**16h-22h**	**22h-24h**	**fin de semana**
A f y mmo	0,18					
A moo	0,18					
A f y mmo	0,07	0,15	0,07	0,23	0,07	0,07
A moo	0,12	0,285	0,12	0,45	0,12	0,12
A f y mmo	0,07	0,23	0,07	0,15	0,07	0,07
A moo	0,12	0,45	0,12	0,285	0,12	0,12
	No incluida					
A f y mmo	0,19					
A moo	0,19					
A f y mmo	0,06	0,09166667	0,25	0,25	0,06	0,06
A moo	0,1	0,15833333	0,45	0,45	0,1	0,1
A f y mmo	0,06	0,25	0,25	0,09166667	0,06	0,06
A moo	0,1	0,45	0,45	0,15833333	0,1	0,1
	No incluida					
A f y mmo	0,21					
A moo	0,21					
A f y mmo	0,18					
A moo	0,18					
A f y mmo	0,15					
A moo	0,15					
A f y mmo	0,13					
A moo	0,13					
A f y mmo	0,06	0,25	0,45	0,385	0,06	0,06
A moo	0,06	0,25	0,45	0,385	0,06	0,06
A f y mmo	0,06	0,45	0,45	0,25	0,06	0,06
A moo	0,06	0,45	0,45	0,25	0,06	0,06
	No incluida					

* "A f y mmo": A fijos y móviles del mismo operador.
* "A moo": A móviles de otro operador.

VERSIÓN PARA VAGOS CONTRATO (4)

Mínimos	Comentarios
9euros	Primera línea: 21,03 euros
9euros	Primera línea: 21,03 euros
9euros	Primera línea: 21,03 euros
	No incluida
20euros	
	No se consideran llamadas a móviles amena de contrato, que cuesta 0'03 e/m
	Horas fijadas de 8 a 13 (pero permite elegir las 4 horas que se quieran)
	Horas fijadas de 16 a 21 (pero permite elegir las 4 horas que se quieran)
	No incluida

COMPARACIÓN DE TARIFAS TARJETA (versión "para vagos")

VERSIÓN PARA VAGOS TARJETA (1)

	Móviles del mismo operador				Fijos nacionales				Móviles de otros operadores			
	Laborables		FSyFest		Laborables		FSyFest		Laborables		FSyFest	
	t	n	t	n	t	n	t	n	t	n	t	n
0h-8h	34	5										
8h-16h												
16h-24h												

Nº sms	60

VERSIÓN PARA VAGOS TARJETA (2)

Compañías	TOTAL Est llamada y mensajes	9,6

	Est de llamada	0,12	
	Precio por sms	0,15	16%IVA
Movistar:		**Precio sin IVA**	**TOTAL**
	Activa Total	16,87	19,57
	Activa 24 horas	19,99	23,19
	Activa 4	21,72	25,19
	Activa Club	13,76	15,96
	Activa Más	16,18	18,77
Vodafone			
	VF	16,18	18,77
	Autorecargable	19,30	22,38
	Tiempo Libre	17,82	20,68
AMENA			
	Libre	16,87	19,57
	Libre sin 10 euros gasto mínimo	19,99	23,19
	Joven	11,68	13,55
	Ocio	13,76	15,96

VERSIÓN PARA VAGOS TARJETA (3)

	Euros/min					Mínimos
	L-V			FS y FESTIVOS		
	0h-8h	8h-16h	16h-24	0h-8h	8h-24h	
A mmo	0,21					
A fijos						
A moo	0,48					
A mmo	0,3					
A fijos						
A moo						
A mmo	0,35	0,55	0,15	0,25		
A fijos						
A moo						
A mmo	0,12					
A fijos	0,48					
A moo						
A mmo	0,19					
A fijos						
A moo						10
A mmo	0,19					
A fijos						
A moo	0,49					
A mmo	0,28					20
A fijos						
A moo						
A mmo	0,2375	0,59	0,12	0,12		
A fijos						
A moo						
A mmo	0,21					10
A fijos						
A moo						
A mmo	0,3					0
A fijos						
A moo						
A mmo	0,06	0,8	0,12	0,06	0,12	
A fijos						
A moo						
A mmo	0,12	0,72	0,12	0,21		
A fijos						
A moo						

MATERIAL 5. Hoja de cálculo de Excel para la comparación de tarifas de telefonía móvil (versión "para muy vagos")

COMPARACIÓN DE TARIFAS CONTRATO (versión "para muy vagos")

VERSIÓN PARA MUY VAGOS CONTRATO (1)

Llamadas a fijos y móviles (de cualquier operador)			
Laborables		FSyFest	
t	n	t	n
25,183	19		

Nº sms	60

VERSIÓN PARA MUY VAGOS CONTRATO (2)

Compañías	TOTAL Est llamada y mensajes	11,28			
	Est de llamada	0,12			
	Precio por sms	0,15	16%IVA	**Euros/min**	
		Precio sin IVA	**TOTAL**	**L-V**	**FS**
Movistar:	**Plus24h**	15,81	18,34	0,18	0,18
	Plus elección mañana	15,51	17,99	0,17	0,09
	Plus elección tarde	15,51	17,99	0,17	0,09
	Plus familia XL	-	-		
Vodafone	**Universal 20**	16,06	18,64	0,19	0,19
	Mañana	15,42	17,89	0,16	0,07
	Tarde	15,42	17,89	0,16	0,07
	Provincial	-	-		
AMENA	**Libre**	16,57	19,22	0,21	0,21
	Libre 18	15,81	18,34	0,18	0,18
	Libre 30	15,06	17,47	0,15	0,15
	Libre 50	14,55	16,88	0,13	0,13
	Mis horas mañana	16,85	19,55	0,22	0,06
	Mis horas tarde	17,26	20,02	0,24	0,06
	Libre familia	-	-		

VERSIÓN PARA MUY VAGOS CONTRATO (3)

Tomado de "versión para vagos" (para hallar promedios)

	0h-8h	8h-14h	14h-16h	16h-22h	22h-24h	fin de semana		Mínimos
A f y mmo	0,18							
A moo	0,18							9euros
A f y mmo	0,07	0,15	0,07	0,23	0,07	0,07		
A moo	0,12	0,285	0,12	0,45	0,12	0,12		9euros
A f y mmo	0,07	0,23	0,07	0,15	0,07	0,07		
A moo	0,12	0,45	0,12	0,285	0,12	0,12		9euros
	No incluida							
A f y mmo	0,19							
A moo	0,19							20euros
A f y mmo	0,06	0,092	0,25	0,25	0,06	0,06		
A moo	0,1	0,158	0,45	0,45	0,1	0,1		
A f y mmo	0,06	0,25	0,25	0,092	0,06	0,06		
A moo	0,1	0,45	0,45	0,158	0,1	0,1		
	No incluida							
A f y mmo	0,21							
A moo	0,21							
A f y mmo	0,18							
A moo	0,18							
A f y mmo	0,15							
A moo	0,15							
A f y mmo	0,13							
A moo	0,13							
A f y mmo	0,06	0,25	0,45	0,385	0,06	0,06		
A moo	0,06	0,25	0,45	0,385	0,06	0,06		
A f y mmo	0,06	0,45	0,45	0,25	0,06	0,06		
A moo	0,06	0,45	0,45	0,25	0,06	0,06		
	No incluida							

VERSIÓN PARA MUY VAGOS CONTRATO (4)

Comentarios
Primera línea: 21,03 euros
Primera línea: 21,03 euros
Primera línea: 21,03 euros
No incluida
No se consideran llamadas a móviles amena de contrato, que cuesta 0'03 e/m
Horas fijadas de 8 a 13 (pero permite elegir las 4 horas que se quieran)
Horas fijadas de 16 a 21 (pero permite elegir las 4 horas que se quieran)
No incluida

COMPARACIÓN DE TARIFAS TARJETA (versión "para muy vagos")

VERSIÓN PARA MUY VAGOS TARJETA (1)

Llamadas a fijos y móviles (de cualquier operador)			
Laborables		FSyFest	
t	n	t	n
34	5		

Nº sms	60

VERSIÓN PARA MUY VAGOS TARJETA (2)

Compañías	TOTAL Est llamada y mensajes	9,6

	Est de llamada	0,12	
	Precio por sms	0,15	16%IVA
Movistar:		**Precio sin IVA**	**TOTAL**
	Activa Total	19,99	23,19
	Activa 24 horas	19,99	23,19
	Activa 4	21,72	25,19
	Activa Club	22,07	25,60
	Activa Más	16,18	18,77
Vodafone			
	VF	19,64	22,78
	Autorecargable	19,30	22,38
	Tiempo Libre	20,54	23,82
AMENA			
	Libre	16,87	19,57
	Libre sin 10 euros gasto mínimo	19,99	23,19
	Joven	20,91	24,26
	Ocio	20,68	23,99

VERSIÓN PARA MUY VAGOS TARJETA (3)

Euros/min			Euros/min				
			L-V			FS y FESTIVOS	
L-V	FS		0h-8h	8h-16h	16h-24	0h-8h	8h-24h
0,3	0,3	A mmo	0,21				
		A fijos					
		A moo	0,48				
0,3	0,3	A mmo					
		A fijos	0,3				
		A moo					
0,35	0,25	A mmo					
		A fijos	0,35	0,55	0,15	0,25	
		A moo					
0,36	0,36	A mmo	0,12				
		A fijos	0,48				
		A moo					
0,19	0,19	A mmo					
		A fijos	0,19				
		A moo					
0,29	0,29	A mmo					
		A fijos	0,19				
		A moo	0,49				
0,28	0,28	A mmo					
		A fijos	0,28				
		A moo					
0,316	0,12	A mmo					
		A fijos	0,2375	0,59	0,12	0,12	
		A moo					
0,21	0,21	A mmo					
		A fijos	0,21				
		A moo					
0,3	0,3	A mmo					
		A fijos	0,3				
		A moo					
0,327	0,1	A mmo					
		A fijos	0,06	0,8	0,12	0,06	0,12
		A moo					
0,32	0,21	A mmo					
		A fijos	0,12	0,72	0,12	0,21	
		A moo					

VERSIÓN PARA MUY VAGOS TARJETA (4)

Mínimos	Comentarios
10	
20	
10	Si el gasto no alcanza los 10 euros, la tarifa con que se cobrará es ‘Amena Libre sin gasto mínimo de 10 euros. Permite aduarse. Precio con la persona aduada: 0,03 euros/minuto llamada; 0,09 euros/minuto sms.
	Esta tarifa se aplicará si el gasto mensual en Amena Libre es inferior a 10 euros.
	No permite aduarse.
	Sí permite aduarse. Precio con la persona aduada: 0,03 euros/minuto llamada; 0,09 euros/minuto sms.

MATERIAL 6. Prueba de evaluación final

A partir de la información de telefonía fija de Telefónica y Jazztel que se os facilitado, contestar:

1) Determinar con qué compañía te conviene más como usuario realizar las siguientes llamadas y por qué razón, explicitando el precio en cada compañía (sin tener en cuenta bonos):

a) Una llamada provincial, un lunes no festivo, a las 7:00 de la tarde, con una duración de 12 minutos.

b) Una llamada metropolitana, un miércoles no festivo, a las 12:00:00 con 2 minutos de duración.

c) Una llamada metropolitana realizada un miércoles no festivo, con 2,7 minutos de duración.

d) Una llamada a Vodafone, un miércoles no festivo a las 10:00:03 con una duración de 3 minutos y 3 segundos.

e) Una llamada realizada dentro de tu provincia, un martes no festivo, a las 19:00:02 con una duración de 30 segundos.

2) Determinar la fórmula que permita calcular el precio de una llamada interprovincial en fin de semana o festivos para las dos compañías. ¿Qué compañía es más barata? ¿Qué ocurre si Telefónica aumenta el precio por establecimiento de llamada a 9 céntimos?

3) Determinar la fórmula para calcular el precio de una llamada de fijo a Vodafone en fin de semana y festivos desde cada compañía. ¿Qué compañía es más barata? Y si la compañía más barata pasa a cobrar por pasos de 30 segundos en vez de por segundos a partir del primero minuto, ¿qué compañía es más barata?

4) ¿Cuánto ahorras con el bono Jazz Interprovincial 30 si hablas 30 minutos al día respecto al precio normal de Jazztel?

MATERIAL 7. CAETI- Trait Thinking Questionnaire

CAETI SCORING KEY- TRAIT THINKING QUESTIONNAIRE

(O'Neil y Schacter, 1997).

Se presentan a continuación una serie de afirmaciones que la gente ha utilizado para describirse a sí mismos. Lee cada afirmación e indica cómo normalmente tú crees o piensas en relación con las matemáticas marcando con una x lo que corresponda.

		Casi nunca	Algunas veces	A menudo	Siempre
1	Determino cómo voy a resolver una tarea antes de empezar a resolverla.	1	2	3	4
2	Para comprender una tarea, dibujo un gráfico si es posible.	1	2	3	4
3	Mientras resuelvo una tarea, compruebo cómo lo estoy haciendo.	1	2	3	4
4	Trabajo duro para hacerlo bien incluso si no me gusta la tarea.	1	2	3	4
5	Creo que tendré muy buenas calificaciones este curso.	1	2	3	4
6	Me hago preguntas para saber cómo estoy haciendo la tarea.	1	2	3	4
7	Mientras resuelvo una tarea, voy siguiendo en mi mente los pasos de un plan.	1	2	3	4
8	Planifico cuidadosamente qué pasos voy a dar.	1	2	3	4
9	Pongo el máximo esfuerzo en hacer las tareas.	1	2	3	4
10	Realmente puedo comprender las cosas más difíciles presentadas en este curso.	1	2	3	4

11	Intento comprender las tareas antes de intentar resolverlas.	1	2	3	4
12	Mientras resuelvo una tarea, intento hacerlo de más de una manera.	1	2	3	4
13	Compruebo mi trabajo mientras lo estoy haciendo.	1	2	3	4
14	Trabajo tan duro como me es posible en las tareas que se proponen.	1	2	3	4
15	Estoy seguro de que puedo comprender los conceptos básicos enseñados en este curso.	1	2	3	4
16	Cuando doy por finalizada la tarea, sé cuánto de ella he completado.	1	2	3	4
17	Pienso cuidadosamente en qué quiere decir la tarea antes de empezar a responderla.	1	2	3	4
18	Deseo hacer trabajo extra sobre las tareas para mejorar mi conocimiento.	1	2	3	4
19	Intento comprender el objetivo de una tarea antes de intentar responderla.	1	2	3	4
20	Confío en que puedo comprender los contenidos más complejos presentados por el profesor en este curso.	1	2	3	4
21	Selecciono y organizo la información relevante para resolver una tarea.	1	2	3	4
22	Analizo el grado en que es correcta la resolución que he planteado de la tarea.	1	2	3	4
23	Me concentro tanto como puedo cuando estoy haciendo una tarea.	1	2	3	4
24	Confío en que puedo hacer un excelente trabajo en las tareas y exámenes de este curso.	1	2	3	4
25	Me planteo mis objetivos y lo que necesito hacer para llevar a cabo una tarea.	1	2	3	4

26	Trabajo duro sobre la tarea incluso si no puntúa en la nota.	1	2	3	4
27	Espero hacerlo bien este curso.	1	2	3	4
28	Me imagino las partes de la tarea que tengo que analizar.	1	2	3	4
29	Empleo más tiempo tratando de comprender tareas difíciles.	1	2	3	4
30	Corrijo mis errores.	1	2	3	4
31	Una tarea es útil para comprobar mi conocimiento.	1	2	3	4
32	Sé que puedo dominar las habilidades que están siendo enseñadas en este curso.	1	2	3	4
33	Estoy seguro de que comprendo lo que ha sido hecho y cómo hacerlo.	1	2	3	4
34	Intento descubrir la idea principal en una tarea.	1	2	3	4
35	Compruebo mi precisión a medida que progreso en la tarea.	1	2	3	4
36	Intento determinar lo que la tarea requiere.	1	2	3	4
37	Considerando la dificultad de este curso, el profesor, y mis capacidades, pienso que lo haré bien este curso.	1	2	3	4
38	Me pregunto a mí mismo cómo se relaciona la tarea con lo que ya sé.	1	2	3	4
39	Me pregunto si lo estoy haciendo bien a medida que progreso en la tarea.	1	2	3	4
40	La práctica lleva a la perfección.	1	2	3	4

B.3. DIARIO DEL SEGUNDO REI

DIARIO DEL SEGUNDO RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN EN TORNO A LA COMPARACIÓN DE TARIFAS DE TELEFONÍA MÓVIL (curso 2004-2005)

PRIMERA SESIÓN: primer encuentro y exploración de la cuestión inicial I.
Variables a considerar, calculo del precio de una llamada, comparación de tarifas con igual precio por establecimiento de llamada y diferente precio por minuto y de tarifas con igual precio por establecimiento de llamada y diferente precio por minuto.

PRESENTACIÓN

La profesora se presenta, aunque ya la conocen porque han realizado las pruebas pre-test.

Aunque también saben que se trata de un taller de matemáticas, ya que se les ha explicado con anterioridad a que decidieran asistir a él, la profesora les vuelve a explicar que se trata de un taller donde se va a tratar en profundidad un problema.

INTRODUCCIÓN A LA CUESTIÓN A TRABAJAR

P: "¿Quién de vosotros tiene móvil?". Todos tienen.

P: "¿Y qué compañías de teléfono móvil tenéis?". Hay de MoviStar y de Amena. No hay de Vodafone.

P: ¿Y por qué habéis elegido esa compañía? Ninguno lo sabe. Algunos dicen que porque otro amigo tenía la misma compañía y hablar entre móviles de la misma compañía es más barato.

P: "¿Y cuál creéis que es la razón más importante para elegir una compañía u otra?".

AA: El que te cueste menos. El que te salga más barato.

P: "¿Y cuál es el más barato?". No saben. Dicen "Bueno, depende... de para qué lo uses".

P: “Y para el uso que cada uno hacéis, ¿tenéis la compañía que os sale más barato?”. No saben.

P: Pues en este taller vamos a tratar de responder a la siguiente pregunta (escribe la profesora en la pizarra). **¿Cómo elegir tarifa de telefonía móvil?**

C1: Planificar los pasos que deberemos realizar para contestar a esta pregunta. (en grupos)

La profesora les dice que trabajarán en grupos. Los alumnos dicen que lo más conveniente es hacer dos grupos, porque así se pueden ayudar pero un sólo grupo es poco porque no podrían comparar los resultados con nadie.

La profesora dice que si no sería mejor quizá 3 grupos, y le dicen que no lo creen, porque con dos para comparar ya es suficiente y así si alguien falta pues no pasa nada porque el grupo es suficientemente amplio.

Fue necesario discutir en gran grupo, porque surgían muchas dudas. “¿Cómo que planificar?”, “¿qué técnicas matemáticas vamos a necesitar?”, “¿pero hay que enumerarlas o también ordenarlas?”.

GRAN GRUPO:

P: “¿Qué será lo primero que tengamos que hacer para contestar a esta cuestión?”

A: Lo primero recoger información sobre el tipo de tarifa que nos interesa.

P: Explica un poco más.

A: Tenemos que saber cuál es la tarifa que nos interesa más y entonces ir a las tiendas y pedir información sobre ellas.

P: ¿Cómo que saber qué tarifa nos interesa más?

A: Sí. Por ejemplo, si a mí me interesa hablar mucho con móviles de la misma compañía que el mío, pues voy a cada tienda y les digo que me digan cuál es la mejor tarifa para hablar con los móviles de MoviStar. Entonces tomo los datos que me dé la compañía de la mejor y luego los comparamos.

P: Pero, dos preguntas, ¿creéis que debemos fiarnos de lo que nos diga la persona de la compañía o será mejor poder comprobar nosotros cuál es la que más nos conviene?, porque, además, ¿cuántos datos tendremos que dar a la persona de la compañía para que sepa cuál es la que más nos conviene?

A2: Pues muchos.

A: Depende, si a mí me interesa un dúo, pues si sólo tomo las compañías que tengan dúo y así reduzco la cantidad de comparaciones que tengo que hacer.

P: ¿Pero cómo sabes que te interesa un dúo?

A: Pues porque hable mucho con una persona.

P: ¿Pero y si debido a que te cobra más que otra por lo que hablas con personas diferentes a la aduada resulta que te sale más barato otra?

A: Bueno... no lo sé.

A3: ¿Pero cada uno analiza la que crea que más le interesa?

P: ¿Qué creéis vosotros que es mejor?

A3: Que comparemos todos juntos todo, porque no sabemos cuál es la que más nos interesa y además puede ser que cambiemos o que luego queramos aconsejar a otra persona que hace otros usos diferentes del móvil.

* Los demás están de acuerdo.

A4: Pues debemos entonces planificar juntos todos, porque nos podemos dividir el trabajo de buscar los datos.

Se dedican un tiempo a discutir quién puede ir a qué tiendas y surgen otras cuestiones.

A: Pero ¿cuántas compañías hay? MoviStar, Amena... también Vodafone, pero no sé si hay más.

Preguntan a la profesora cuántas hay. La profesora contesta que no sabe.

Una alumna explica que se lo va a preguntar a su primo, porque trabaja en una tienda de teléfonos móviles.

A: Pero te puede interesar una compañía porque a lo mejor te regala el móvil, por ejemplo, o te da puntos. Eso también hay que tenerlo en cuenta.

P: ¿Pero cómo sabes que te conviene?

A: Pues porque no pagas el móvil.

A4: Pero a lo mejor te sale más cara la factura.

P: Cuando tengamos los datos reales podemos ir determinando qué información es importante y cómo debemos considerarla.

Los alumnos están de acuerdo.

Les plantea la profesora que trabajen a partir de aquí en dos grupos qué pasos seguirían y que luego lo pondremos en común.

P: Podéis hacer una tabla, porque deberíamos planificar qué haremos cada día.

AA: Pero cuántos días tenemos.

P: 13 sesiones de dos horas a dos horas y media cada una.

PUESTA EN COMÚN:

Ambos grupos se dedican fundamentalmente a planificar quién puede ir a qué tiendas y también se centran mucho en el tipo de información que deben obtener (de todas las tarifas, precio para fijo y para móvil, a nacionales y extranjeros, de tarjeta o de contrato...).

Como segundo paso dicen "comparar las tarifas", un grupo matiza separa las tarifas "iguales" en las diferentes compañías y compararlas.

P: ¿Qué significa "separar las tarifas iguales" y por qué lo decís?

A1: Pues porque no todas las tarifas son comparables. Si a ti te interesa una tarifa de hablar más barato por la mañana, pues no vas a compararla con una de hablar más barato por la tarde.

A2: Pero hemos quedado en que compararíamos todos lo de todos.

A1: Sí, pero yo creo que tendremos que comparar todos los tipos pero cada tipo con su tipo.

* Hay una pequeña discusión. Un alumno dice: "Bueno, cuando tengamos los datos reales podremos decidirlo, ¿no?". Los demás están de acuerdo.

Ninguno ha avanzado más.

P: ¿No podéis detallar en mayor medida qué pasos tendremos que dar para comparar?

AA: No, hasta que no tengamos los datos no.

Transición: Bueno, pues para ir introduciéndonos en el tema, vamos a analizar algunas cuestiones.

C2: Tenemos una compañía A. ¿Qué datos necesitaremos para saber el precio de una tarifa? (gran grupo)

AA: Es lo que hemos descrito antes en las preguntas que haremos a las compañías: Necesitaremos saber el precio por minuto, el precio del mensaje...

C3: Y para qué pudiéramos calcular el precio de una llamada, ¿qué datos necesitaríamos? (gran grupo)

- El precio por minuto (les dice 0'15) "¿Euros por minuto?" "Sí".
- La duración de la llamada (les dice 1 minuto).
- Si es a fijo o a móvil. (les dice que a fijo)

* Pensé que iban a decir "si hay ofertas, a qué hora llames..." pero no dijeron más.

P: ¿algo más?

AA: No.

- ¿En los teléfonos cobran lo que se denomina "precio por establecimiento de llamada, que también debemos saber? A: "Ah... es verdad. ¿Y cuánto es?". (les dice 0'12 euros).

P: ¿algo más?

AA: No, bueno... Creo que no.

C4: Calcular el precio de una llamada de 1 minuto de duración, siendo el precio por minuto 0'15 euros y el precio por establecimiento de llamada 0'12. (gran grupo)

Lo calculan rápidamente y bien.

C4.1: ¿Y si la llamada dura 2 minutos? (gran grupo)

Todos lo dicen bien también.

* No hay error, como ocurrió la otra vez, de sumar dos veces el precio por establecimiento de la llamada.

C4.2: ¿Y si las llamadas duran 3, 4, 5, 10 y 15 minutos? (en grupos)

En la puesta en común ponen directamente dos columnas, una con el número de minutos y otra con el precio.

Les pido que expliquen cómo lo han hecho. Y explican, pero sin poner la fórmula.

P: ¿Estás utilizando alguna fórmula?

A: No...

A: Podéis decir la fórmula general para saber el precio de cualquier número de minutos. La escriben bien.

* Pero pone x e y y un compañero le dice que debe poner t y p, porque son precio y tiempo.

P: ¿Pero es diferente?

A: No, pero está mal, porque en clase siempre usamos t y p.

P: Da igual cómo lo denominemos, lo importante es lo que representa. El símbolo puede ser uno u otro. Lo importante es saber lo que representa.

* Están de acuerdo.

C5: ¿Y si las llamadas duran 30, 20 y 40 segundos? (en grupos)

A: "Bueno, primero habrá que saber si lo aceptan, porque muchos cobran directamente el primer minuto completo".

B: “En esta compañía sí lo aceptan”.

PUESTA EN COMÚN:

El grupo que expone: Para 30 segundos dividen 0’15 entre dos y suman al resultado 0’12 (precio por minuto). Para 20 segundos dividen 0’15 entre 1/3 y suman al resultado 0’12. Para 40 segundos explican que han multiplicado 0’15 por 2/3 (porque 40 son 2/3 de 60) y suman al resultado 0’12.

El otro grupo tarda bastante más y al ver la exposición en común dicen que no están de acuerdo. Lo ha hecho de otro modo, hallando el precio por segundo. Pero ocurre que les ha provocado varias confusiones. Les pido que expliquen el proceso que han seguido con los errores, porque es muy útil también conocer los errores para aprender. Explican que hallaron el precio por segundo incluyendo en el precio por minuto el precio por establecimiento de llamada, de modo que luego lo sumaron de nuevo, pero se dieron cuenta y lo corrigieron. Pero luego lo habían hecho ya bien y que les había salido otro precio para la llamada de 40 segundos. Cuando dijeron el precio que ellos habían obtenido, que era 0’13, dijeron inmediatamente ellos mismos que no podía ser, porque salía más barato hablar 40 segundos que 20. Y revisando vieron que es que habían introducido en el precio por segundo un cero de más (0,00025 en vez de 0,0025).

P: “¿Qué modo creéis que es más útil para hallar el precio de llamadas de duración menor a un segundo?”

G1: La nuestra, porque hemos tardado menos y encima es fácil confundirse introduciendo tantos decimales.

* Los otros alumnos están de acuerdo.

C6: ¿Y si las llamada duran 7 segundos? (en grupos)

A2: Entonces es más útil la nuestra, porque en la de ellos tienes que saber qué proporción es 7 de 60.

P: Bueno, trabajar en grupos y luego lo ponemos en común.

PUESTA EN COMÚN

Un grupo expone su modo (usando el precio por segundo), pero el otro grupo explica que basta con poner el número de segundos partido por 60 en la fórmula que habíamos hallado para llamadas de duración superior aun minuto y ya está. Es decir, la fórmula es la misma, pero simplificada.

C7: Comparación de sistemas de tarifas cobrando el mismo precio por establecimiento de llamada pero diferente precio por minuto. *Ahora vamos a analizar otra tarifa, de la compañía B. Los datos que necesitamos son... (les pregunto)* ***(en grupos) Gráfico 1***

- El precio por minuto (dice la profesora: 0'20)
- El precio por establecimiento de llamada (dice la profesora 0'12)
- Si es a fijo o a móvil. Les dice la profesora que a fijo.

Les pregunta la profesora porqué le piden otra vez el dato de si es a fijo o a móvil, y añade "¿Es que lo utilizasteis la vez anterior?".

AA: Es para saber si son comparables.

* Les dice la profesora: Bueno, pues es a móvil.

AA: ¿Qué tenemos que calcular?

P: Tenéis que comparar las dos tarifas.

AA: ¿Hallamos los mismos datos?

P: ¿Qué podemos hacer para comparar las dos compañías?

AA: Ya sabemos que es más cara la que cobra más por minuto, porque cuesta cobra lo mismo por establecimiento de llamada. A no ser que haya ofertas o cosas que no sabemos.

P: No hay más datos que los que tenéis.

AA: Tendremos que hallar la relación entre los precios.

C7.1 (alumnos): Hallar la relación entre precios. *(en grupos)*

* Observo en uno de los grupos que los alumnos repiten varias veces el cálculo para las llamadas de 40 segundos de duración y luego el de 20 segundos de duración. Lo repetían porque les daba un resultado "raro" y por eso creían que estaba mal, porque les salían muchos decimales en el resultado y eso hacía sospechar que estaba mal calculado. (contrato didáctico) Al final dicen: "Nos salen números muy raros, pero lo hemos comprobado y está bien. Eso creemos".

También les causa más problema encontrar la relación entre los números decimales (llamadas de duración inferior a un minuto). Algunos conjeturan al ver los datos que no habrá relación como habían en llamadas de duración superior a un minuto y se sorprenden al ver que sí, que la diferencia siempre es de 0'00833333333333333. Pero de nuevo dudan, porque la cifra es "rara". Dicen que esperarán a la puesta en común a ver si el otro grupo a obtenido lo mismo.

PUESTA EN COMÚN:

Pido al grupo que había visto más dudar sobre los resultados que exponga. Al exponer los cálculos del precio de llamada en función de la duración repiten que les salen números muy raros y preguntan al otro grupo. El otro grupo responde que ellos también creían que habían hecho algo mal porque les salían números tan raros, pero que lo han repasado y creían que estaba bien, y que si ahora además han obtenido lo mismo los dos grupos, pues les da más confianza.

P: "¿Tienen que estar mal porque salgan números no exactos?".

G: No... Bueno... Es que normalmente siempre salen números exactos.

A: En clase sí.

P: Pero este es un problema real.

A: Bueno, todavía no, porque todavía no son los datos reales.

P: Pero los datos que os doy están basados en datos reales. Y la gran mayoría de los cálculos en la vida real no son exactos.

A: ¿Sí?

P: Sí, ya lo iréis viendo con este problema o podremos ver otros ejemplos.

Plantean que no saben exactamente cuántos treses hay después del 8. Pregunta a la profesora si sería más adecuado dejarlo indicado en vez de con el resultado al no saber exactamente cuántos treses tiene:

P: ¿Qué creéis vosotros?

A: Pues creo que es mejor dejarlo indicado, pero entonces no podríamos hallar la diferencia... Entonces es mejor calcularlo ¿no?, aunque no sepamos exactamente cuántos treses tiene, porque además esa diferencia sería muy pequeña ¿no?

* Concluimos que sí, que es mejor no dejarlo indicado.

Respecto a la relación entre el precio de las dos compañías concluyen que, cada minuto que dura más la llamada, la compañía B cuesta 0'05 céntimos más y para llamadas de duración menor a un minuto 0'008333333333333 segundos. Pero les causa problema el que el precio de un segundo es periódico en la compañía B.

* El otro grupo está de acuerdo.

Les pido que expliquen un poco más esa relación: en las llamadas de un minuto la compañía B cuesta 0’05 euros más. En las de 2 minutos, 0’10 euros más.

¿Y en las llamadas de duración inferior a un minuto? Pues cada 10 segundos más que hablas te cuesta 0’00833333333333333 euros más.

* El precio de la llamada de duración 21 segundos lo han hallado pero no lo han utilizado para la comparación.

(Profesor) ¿Y cada segundo?

Algunos dudan. Uno dice: “Pues 0’008333333333333/10... Osea 0’000833333333333333”.

Algunos dudan, aunque parecen mostrarse de acuerdo.

(Profesor) ¿Podemos asegurarlo?

(Alumno) Podemos coger el precio de un segundo y de dos y ver si es esa la diferencia.

(Alumno) Podemos también 20 y 21 segundos, que ya los tenemos hallados.

(Profesor) Pues hacedlo, porque es fundamental comprobar y preferiblemente con más de un caso, claro.

Lo comprueban y ven que sí, que la diferencia de precio por cada segundo más de duración de la llamada es de 0’000833333333333333333.

C8 (alumnos): Podemos determinar una fórmula que nos permita determinar la diferencia de precio entre A y B en función del tiempo de duración de la llamada. (en grupos)

PUESTA EN COMÚN

Precio de B= Precio de A x 0'05t para llamadas de duración de un minuto o más.

Precio de B= Precio de A x 0'00083333333333333333t para llamadas de duración inferior a un minuto.

El otro grupo dice que no hacen falta dos fórmulas, porque si t es inferior a un minuto sale también transformando los segundos a minutos.

(alumno) Espera, voy a comprobarlo con algún ejemplo.

P: Di que ejemplo vas a utilizar y lo hacemos todos.

(alumno) Uno raro, como 43 segundos.

Cuando empieza a hacerlo se da cuenta de que tiene que hallar el precio para 43 segundos primero en la compañía A y decide coger 21 segundos, que "también es raro y ya lo tenemos hallado".

(alumno) Mejor 21 segundos, que ya está hallado.

Vemos que sí.

(alumno) Pero ¿valdrá para otros datos? (se lo preguntó a un compañero, no en gran grupo, pero le pedí que lo dijera en gran grupo**)**

* Dijo el alumno que es que no sabía que era importante. Contesté que nosotros decidíamos lo que era importante.

P: ¿Qué quieres decir con "otros datos"?

A: Pues que como lo único que utilizamos es la diferencia del precio por minuto... ¿podremos hallar por ejemplo el precio de una tarifa de 0'23 euros por minuto, por ejemplo?

P: ¿A partir de saber el precio de las llamadas de una de estas compañías?

A: Sí.

P: Podemos probarlo con algún ejemplo.

A: Sí.

P: ¿Cuánto cuesta el establecimiento de llamada en esa compañía que dices?

A: Pues lo mismo, 0'12 euros.

P: Pues probémoslo.

A: Que cada grupo lo haga utilizando una compañía y luego comparamos.

P: De acuerdo. ¿Quieres concretar algo más?

A: No.

P: Pues comprobadlo.

C9 (alumno): Probar si la fórmula sirve para calcular el precio de una compañía a partir de otra. *Averiguar si se puede determinar el precio de las llamadas de una compañía C (0'12 euros por establecimiento de llamada, 0'23 euros por minuto) a partir de saber los precios de otra compañía con el mismo precio por establecimiento de llamada pero diferente precio por minuto* ***(compañías A y B). (en grupos) Gráfico 2***

* Un grupo lo comprobó utilizando llamadas de duración de 1 minuto y de 21 segundos y el otro de 1 minuto y de 20 segundos.

Concluimos que la fórmula funcionaba.

* No dicen nada en relación al precio por establecimiento de llamada, como varía.

C10: Comparación de sistemas de tarifas con igual precio por minuto pero diferente precio por establecimiento de llamada. *Analizar una compañía D, cuyo precio por minuto es 0'15 y el precio por establecimiento de llamada es 0'10 (y es también a fijos). ¿Será más cara o más barata que la compañía A?* ***(en gran grupo).*** *Compararla con la compañía A* ***(en grupos)****.* ***Gráfico 3***

GRAN GRUPO

Dicen que la compañía C será más barata, porque cobra lo mismo por minuto pero menos por establecimiento de llamada. **Gráfico 4**

PUESTA EN COMÚN

La diferencia entre los precios de las dos compañías es 0'02 en todos los casos, es decir, para cualquier duración de llamada, la diferencia entre los precios de la compañía A y de la compañía D es la misma, tanto para llamadas de duración mayor de un minuto como menor.

Explican que es porque lo que diferencia las tarifas es el precio por establecimiento de llamada y ese dato no se divide ni se multiplica, es el mismo para cualquier duración de llamada.

Un grupo explica que la fórmula no funciona, que la fórmula en este caso es más sencilla (para determinar los precios de una compañía conocidos los de otra), porque sólo hay que restar 0'02 al precio de cada duración de llamada de la compañía A para determinar el precio de las llamadas de la compañía D.

P: ¿Podemos generalizar eso con una fórmula?

Sí:

C11: Generalizar la fórmula para determinar el precio de las llamadas en función de la duración de una compañía en función de los precios por minuto de otra compañía teniendo ambas el mismo precio por minuto pero diferente precio por establecimiento de llamada. (en grupos)

$P_A = P_D - 0'02$

P: ¿Y podemos generalizar aún más, para cualesquiera dos compañías?

A: Sí, siempre que las dos compañías tengan igual precio por minuto pero diferente precio por establecimiento de llamada.

Otro alumno le corta y dice que mejor no ponemos letras, porque parece que nos referimos al nombre de la compañía y que podemos usar x e y cuando es general.

El alumno duda y pregunta que si sigue utilizando más letras. Lo discutimos. Un alumno propone utilizar P_A y P_B para simbolizar los precios de las compañías *y* p_A y p_B para el precio por establecimiento de llamada:

$$P_A = P_B + (p_A - p_B)$$

P_A: Precio de la llamada en la compañía cuyo precio por establecimiento de llamada es mayor.

P_B: Precio de la llamada en la compañía cuyo precio por establecimiento de llamada es menor.

p_A: Precio por establecimiento de llamada de la compañía A.

p_B: Precio por establecimiento de llamada de la compañía B.

Se acepta.

(alumno) ¿Y cómo sería la fórmula en el caso anterior, con igual precio por establecimiento de llamada y diferente precio por minuto?

C12 (alumno): Determinar la fórmula general para calcular el precio de una llamada de una compañía conocido el precio de la llamada en otra compañía que tienen igual precio por establecimiento de llamada pero diferente precio por minuto (en grupos).

PUESTA EN COMÚN

$$P_A = P_B + (p_A - p_B)t$$

P_A: Precio de la llamada en la compañía cuyo precio por minuto es mayor.
P_B: Precio de la llamada en la compañía cuyo precio por minuto es menor.
p_A: Precio por minuto de la compañía A.
p_B: Precio por minuto de la compañía B.

Responder a la cuestión generatriz a partir de lo hecho en la primera sesión (en gran grupo). *Ahora vamos a ver cómo nos ayuda el trabajo que hemos realizado hoy a responder al problema que estamos analizando, es decir, cómo comparar las tarifas de telefonía móvil. Estas respuestas las iremos ampliando tras cada sesión, de modo que concluyamos lo que aporta el trabajo que vayamos realizando a la respuesta al problema. Lo llamaremos "Respuestas al problema" y yo iré completando incluyendo las nuevas aportaciones que vayamos haciendo tras cada sesión. Estará cada día disponible impreso para que lo podamos consultar.* ***(profesor)***

* Las respuestas a la cuestión generatriz, que son denominadas aquí "Respuestas al problema" están disponibles en el *Material 8 y el 9. Existen dos versiones debido a que la inicial (Material 8) se modificó completamente, como mostraremos más adelante, durante la décima sesión, resultando así la versión definitiva (Material 9).*

- El precio de una llamada se puede calcular con la fórmula:

$$P_A = e + pt$$

P_t = Precio de la llamada (de una duración t); e = Precio por establecimiento de llamada.
p = Precio por minuto; t = Duración de la llamada.

* Primero pusieron P_A, pero finalmente decidieron llamarlo P_t.

- Si dos compañías tienen el mismo precio por establecimiento de llamada y diferente precio por minuto es más cara aquella cuyo precio por minuto es mayor.
- Si dos compañías tienen el mismo precio por minuto pero diferente precio por establecimiento de llamada es más cara aquella cuyo precio por establecimiento de llamada es mayor.
- Podemos calcular el precio de las llamadas de una compañía conocido el precio de esas llamadas de otra compañía con diferente precio por minuto o diferente precio por establecimiento de llamada. Las fórmulas son:

Para diferente precio por establecimiento de llamada pero igual precio por minuto:

$$P_A = P_B + (p_A - p_B)$$

P_A: Precio de la llamada en la compañía cuyo precio por establecimiento de llamada es mayor.
P_B: Precio de la llamada en la compañía cuyo precio por establecimiento de llamada es menor.
p_A: Precio por establecimiento de llamada de la compañía A.
p_B: Precio por establecimiento de llamada de la compañía B.

Para diferente precio por minuto pero igual precio por establecimiento de llamada:

$$P_A = P_B + (p_A - p_B)t$$

P_A: Precio de la llamada en la compañía cuyo precio por minuto es mayor.
P_B: Precio de la llamada en la compañía cuyo precio por minuto es menor.
p_A: Precio por minuto de la compañía A.
p_B: Precio por minuto de la compañía B.

Elaborar un documento con las conclusiones que vayamos obteniendo de respuesta al problema a medida que avancemos (profesor). *Las conclusiones que obtengamos tras cada sesión sobre cómo responder al problema estarán en un documento que quedará en clase para que podamos consultarlo. Es decir, el próximo día traeré un documento con estas conclusiones y las iremos completando a medida que avancemos.*

SEGUNDA SESIÓN: primer encuentro y exploración de la cuestión inicial II.

Comparación de tarifas con igual precio por establecimiento de llamada y precio por minuto pero cobrando una de ellas el primer minuto completo; y tarifas con igual precio por establecimiento de llamada pero diferente precio por minuto y cobrando la más barata el primer minuto completo. Valoración, unificación y organización de la información real recogida sobre las diferentes tarifas de teléfono.

C13: Valorar la información sobre tarifas que hemos encontrado (gran grupo).

La profesora les pregunta si se lo han contado a sus padres (lo que estamos haciendo), y dicen la gran parte de ellos que sí. Respecto a lo que han opinado, algunos dicen que no les han dicho nada, pero otros dicen que les han dicho que les parece muy útil. Algunos padres se han mostrado incrédulos ante el hecho de que vayamos a tratar los datos reales. Ellos explican que "como en clase de matemáticas no tratamos así... los datos reales", pero "claro, esto es un taller". Un alumno dice que han dicho que "ya está bien que tratemos en la escuela problemas reales", pero otro dice que su madre ha dicho que "si no les va a quitar tiempo de estudiar lo de clase". Les dice la profesora que "Vamos a utilizar cosas vistas en clase, y las vamos a repasar al hacerlo, pero que también saldrán cosas nuevas".

Los alumnos han traído la información que tenían que buscar sobre las tarifas.

P: ¿Qué datos habéis traído?

A: Todos los que tenían.

P: ¿Habéis encontrado dificultades?

En general no. Algunos han ido a Internet porque les han dicho los dependientes que ahí está toda la información o porque han buscado por buscar y la han encontrado y les ha parecido más cómodo que ir a la tienda.

Sí han encontrado dificultades en MoviStar, porque en el "Resumen de tarifas" no deja copiar la información y en la opción de "Imprimir" sale defectuosa la impresión, cortándose a medias. Han tenido que copiarla manualmente en un documento de Word.

* Pero la información que no se imprime son los "Módulos", cuya información no está por franjas horarias ni ningún tipo de gráfico, sino que es texto, de modo que no han tenido que "tranformar la información".

P: ¿Creéis que la información de Internet es fiable?

Contestan que sí porque la han obtenido de las páginas oficiales de las compañías.

- Al buscar en las páginas de Internet han encontrado también otro tipo de información. Un grupo de alumnos ha traído un documento de Internet que se titula: "**A no ser que tengas un doctorado en física nuclear, comprender los planes de tarifas de los distintos proveedores del servicio puede resultar todo un reto"** (http://europe.justlanded.com/espanol/spain/tools/just_landed_guide/telephone/mobile_rates).

Se preocupan por qué vamos a hacer exactamente, porque parece que comparar las tarifas no va a ser posible, porque se necesita un "doctorado en física nuclear".

La profesora les dice que "Vamos a comenzar y vamos a ir valorando la dificultad y viendo hasta dónde podemos llegar".

Lo que concluimos es que como ciudadanos tenemos que elegir compañías de teléfono y tarifas, y que por tanto vamos a analizar hasta qué punto podemos dar respuesta a esta pregunta.

Se muestran preocupados por que al profesora les esté planteando algo que sabe que no tiene solución. La profesora les dice que sí que se puede hacer (que sí lo pueden hacer) aunque evidentemente es complejo.

- En Internet han encontrado también que algunas compañías aconsejan sobre el tipo de tarifa que te conviene:

MoviStar presenta por un lado las tarifas y por otro un "Asesor de tarifas" que te hace una serie de preguntas en función de las cuales determina finalmente cuál es la tarifa que más te interesa. Explican los alumnos que han intentado tomar nota de las preguntas pero es muy pesado, porque las preguntas varían en función de la opción de respuesta que elijas y cada vez que eliges una respuesta no puedes volver un paso atrás, sino que tienes que volver a empezar el cuestionario. Han traído el ejemplo de las tarifas de tarjeta, que pregunta:

1. ¿A quién realizas llamadas con más frecuencia? A móviles/ A fijos/ Igual a móviles que a fijos
2. ¿Envías frecuentemente mensajes de texto? A móviles MoviStar/ A móviles de otros operadores/ Indistintamente.
3. ¿A qué hora realizas más llamadas? Antes de las 4 de la tarde/ Después de las 4 de la tarde/ A cualquier hora.

En contrato se complica, tanto el número de preguntas como el número de opciones de respuesta (nos muestra sólo un ejemplo):

1. ¿A qué hora realizas más llamadas? **Por la mañana**/ Por la tarde/ A cualquier hora.

2. ¿A quién realizas llamadas con más frecuencia? **A móviles MoviStar**/ A móviles MoviStar de mis amigos/ A móviles MoviStar de mi familia/ A móviles de cualquier operador/ A operadores fijos.
3. ¿Envías frecuentemente mensajes de texto? Sí envío mensajes de texto/ No envío mensajes de texto
4. ¿Cuál suele ser tu consumo mensual? Menos de 20 euros/ Entre 20 y 30 euros/ Entre 30 y 40 euros/ Entre 40 y 60 euros/ Entre 60 y 90 euros/ Mayor de 90 euros

Elección: Plus Elección Mañana con Módulo números frecuentes y/o Módulo Mensajes.

Vodafone te presenta directamente las tarifas organizadas en función de lo que más te puede interesar. Es una tabla con dos columnas (¿A dónde llamas?: A diferentes destinos/ A cualquier destino) y dos filas (¿Cuándo vas a llamar?: A cualquier hora/ A horas determinadas) en cuyas celdas centrales se van situando los diferentes tipos de tarifas.

Discutimos sobre la utilidad de estos consejos. Hay alumnos que el problema fundamental que ven es que los consejos son demasiado generales y además no saben si te puedes fiar de lo que te aconsejan.

Un alumno plantea "¿qué vamos a hacer nosotros para ayudar a la gente a elegir tarifa?". ¿Vamos a hacerlo como estos ejemplos que hemos visto?, porque eso ya está hecho. ¿O es que vamos a ver si es correcto o si nos están engañando?".

C14 (alumno): Realmente qué vamos a hacer nosotros para ayudar a la gente a elegir tarifa (en gran grupo).

Un alumno dice que podemos comparar las tarifas que son iguales en las diferentes compañías, por ejemplo, la tarifa que todas tienen que es con un mismo precio para todas las horas y a todos los receptores y ver en qué compañía es más barata.

Los demás se muestran de acuerdo.
P: Podemos empezar por ahí y ver si es necesario hacer algo más.

- Los alumnos que han traído el documento sobre la dificultad de elegir tarifa dicen que si pones en "google", "elegir tarifa" y "telefonía móvil" hay 0 resultados. Si introduces "elegir tarifa" y "teléfono móvil" lo que aparece son dos páginas, una sobre comparativa de precios de terminales de teléfono móvil y otra es de un foro donde se está discutiendo sobre qué tarifa de conexión a Internet elegir. Les ha llamado la atención. Quedamos en seguir buscando información sobre comparativa de tarifas para ver qué hay en Internet. Aceptan. Hablamos sobre los tipos de descriptores que se pueden utilizar: "comparativa" y "teléfono móvil" o "telefonía móvil", y "tarifas", por ejemplo.

C15 (alumno): Buscar información Internet sobre cómo elegir la tarifa más barata (en grupos) (traerlo el próximo día).

Al ver las tarifas, ¿habéis encontrado algún dato que creáis que influye en el precio de la llamada y que no hemos tenido en cuenta hasta ahora?

C16: Determinar qué datos que no hemos tenido en cuenta hasta ahora influyen en el precio de la llamada. (gran grupo)

Contestan fundamentalmente variables influyentes en la tarifa mensual más que en el precio de la llamada, tales como: planes especiales y precio por conexión de la línea.

P: Hay otros tipos de variables. Por ejemplo, en al menos algunas de las tarifas se cobra el primer minuto completo. ¿Cómo influye esto en el precio de la llamada?

C17: ¿Cómo influye en el precio de una llamada el hecho de que cobren el primer minuto completo? (gran grupo)

Dice un alumno: "Que es más fácil de calcular, porque no necesitamos calcular el precio para menos de un minuto, ya que sabiendo el precio del primer minuto ya es el mismo para cuando hablas menos de un minuto".

P: ¿Pero si comparamos el precio de la llamada con una tarifa que no cobre el primer minuto completo? Vamos a ver un ejemplo.

C18: Comparación de sistemas de tarifas variando el precio del primer minuto completo. *Considerar una compañía E, que cobra lo mismo que A en cuanto al precio por establecimiento de llamada (0,12 euros) y al precio por minuto (0,15 euros/minuto), pero cobra el primer minuto completo. Comparar esta compañía con la compañía A.* ***(en grupos)***

C18.1: Previsión de resultados*. ¿Qué creéis que ocurrirá?, es decir, ¿cuál creéis que será más cara?* ***(gran grupo) Gráfico 5***

La compañía E costará lo mismo que la compañía A para llamadas de más de un minuto pero menos para llamadas de menos de un minuto.

Hacer un listado con las diferentes tarifas que vamos analizando. *Como vamos a considerar diferentes tipos de tarifas, deberíais ir creando, por cada grupo, una lista con cada compañía nueva que vamos considerando. Ahora debéis incluir las compañías A, B, C y D en la lista y también E, que es semejante a A pero cobra el primer minuto completo. En ese mismo documento iréis incluyendo las demás y nos ayudará a saber cuáles hemos analizado y en qué se diferencia cada una que vayamos introduciendo de las anteriores.* ***(en grupos).***

P: Y volviendo a la cuestión que estamos analizando, ¿qué ocurre con las llamadas de un minuto de duración?

AA: Pues que costarán igual también.

P: Entonces la respuesta es...

A: La compañía E costará lo mismo que la compañía A para llamadas de duración de un minuto o más y menos para llamadas de duración inferior a un minuto.

P: Pues ahora tenéis que demostrarlo.

Muestran dudas sobre qué es demostrarlo. Les parece evidente.

P: Podemos, por ejemplo, utilizar una gráfica que muestre las dos tarifas y ver gráficamente la diferencia de precios.

C18.3: Comparación gráfica de sistemas de tarifas variando el precio del primer minuto completo*. Considerar una compañía E, que cobra lo mismo que A en cuanto al precio por establecimiento de llamada (0,12 euros) y al precio por minuto (0,15 euros/minuto), pero cobra el primer minuto completo. Comparar gráficamente esta compañía con la compañía A.* ***(en grupos)***

* La profesora les indica que va a dejar papel cuadriculado sobre la mesa, junto con las calculadoras, y que lo pueden utilizar cuando crean conveniente. Como el ordenador también está en la mesa, preguntan a la profesora por qué lo trae siempre, y que si lo pueden utilizar también. La profesora les dice que sí y que también traerá algunos libros de matemáticas por si los quieren utilizar en algún momento.

PUESTA EN COMÚN

Todos han hecho bien las gráficas, partiendo de los datos calculados en la compañía A.

Para determinar la recta del precio para menos de un minuto en la compañía A un grupo simplemente ha hecho una recta desde el punto (0,0) hasta el punto (1, 0’7), mientras que los otros dos han utilizado los datos de precios para llamadas de un minuto que habían calculado anteriormente en A.

Discutimos sobre si el modo de actuar es adecuado y vemos que sí, porque es suficiente conocer dos puntos de una recta para hacer su gráfica.

Explican que la compañía A es más barata hasta 1 minuto (queda por debajo de la gráfica de E) y que a partir de un minuto cuestan lo mismo (la gráfica coincide). También gráficamente se observa que ambas gráficas son crecientes y lo serán hasta infinito.

C18.3.1: Determinar precio mínimo y precio máximo y a qué duración de llamada corresponde. *Determinar, para la compañía A y para la compañía E cuál es el precio mínimo y máximo que se puede pagar y a qué duración de llamada corresponde* ***(en grupos)***

PUESTA EN COMÚN

En la compañía A:

- Un grupo indica que el precio mínimo corresponde a hablar 0 segundos. Los otros dos dicen que no se puede hablar 0 segundos, así que el precio mínimo será en llamadas de un segundo de duración (cuyo precio ya lo habíamos calculado anteriormente: 0’1225 euros).
- El precio máximo se alcanza cuando hablamos infinito. Explican que tampoco tienen sentido hablar infinito, pero que esto lo respondemos porque no sabemos cuál es el máximo que se puede hablar. Sin embargo, el mínimo sí, porque lo mínimo que marca el teléfono al hablar son segundos.

En la compañía E:

- El precio mínimo son 0’27 euros y se corresponde a llamadas de cualquier duración hasta un minuto como máximo.
- El precio máximo es el mismo que en la compañía A.

C19: *Comparación de sistemas de tarifas con distinto precio por minuto y distinto cobro del primer minuto (completo o por segundos). Comparar la compañía E con la compañía B.* ***(en grupos)*** ***Gráfico 6***
C19.1: Previsión de resultados. *¿Qué creéis que ocurrirá?, es decir, ¿cuál creéis que será más cara?* ***(gran grupo)***

Un alumno dice: “Si fuera la que cobra más por minuto además la que cobra el primer minuto completo, pues claramente sería más cara siempre, pero si es la más barata la que cobra el primer minuto completo...”. (***Gráfico 24***, añadido en la Décima sesión).

Creen que B será más cara, porque el precio por minuto es mayor y el precio por establecimiento de llamada es el mismo. Algunos dudan y dicen que no saben cómo influirá que el primer minuto la compañía E lo cobre completo.

C19.2: Planificación. *Cómo vais a realizar la comparación.* ***(gran grupo)***

Dicen que podemos calcular precios en puntos que parezcan críticos.

Dicen que los puntos críticos son antes de un minuto, porque está claro que después de un minuto es más cara siempre la compañía B.

Un alumno dice que podemos hacer la gráfica porque es más fácil.

P: ¿Cómo podemos hacer la gráfica?

A: Hallando el precio de un minuto para las dos y a partir de hay con A hacemos una recta del punto (0,0) al punto que salga y con E hacemos una recta en el punto que salga.

P: Pues hacedlo, cada uno como crea más conveniente y luego comparamos.

* No se les pide explícitamente la comparación gráfica, pero lo plantean ellos.

Pregunta los alumnos a la profesora si pueden utilizar el papel cuadriculado y les dice que ya les había dicho que podían utilizar lo que necesiten cuando quisieran.

Un grupo dijo que había terminado muy rápido. Vi que sólo había comparado gráficamente pero sin hallar el punto de corte. De todos modos, les dije que expusieran.

PUESTA EN COMÚN

- El grupo que termina antes lo ha hecho gráficamente y ha utilizado las gráficas que teníamos previamente y los datos de la compañía B que habíamos hallado el día anterior. Es el que expone en la pizarra.

  -> Indican que la compañía E es más cara hasta "este" punto (señalando la gráfica), quedando la gráfica por encima de la de B y a partir de ahí la compañía E es más cara, quedando por encima de la de B.
- Uno de los otros dos grupos, que ha hecho de nuevo las gráficas, y ha tardado más, dice que "claro, es que ha utilizado las gráficas de antes, y eso no valía. Por eso hemos tardado más".

  P: ¿No valía por qué?

  A: Porque es otro ejercicio.

  P: No, todo es el mismo ejercicio. Se trata de resolver el problema, no de completar cada ejercicio que vamos planteando de manera independiente.

  P: Es adecuado no repetir trabajo que ya está hecho. Si podemos utilizar algo que ya tenemos pues no tenemos que repetirlo.

  P: El modo vuestro no es que esté mal, sino que es menos eficaz porque implica invertir más tiempo para el mismo resultado.

- El tercer grupo es el que más ha tardado. Es porque ha intentado hallar el punto de corte. Como encontraban dificultades dicen que lo exponga el grupo que ha terminado para explicarles cómo lo ha hecho (la profesora sabe que no han hallado el punto de corte los que van a exponer).

Al ver la exposición este tercer grupo dicen que no han hallado el punto de corte. Y entonces decidimos continuar todos para hallar el punto de corte.

Saben qué gráficamente hay un punto de corte pero lo intentan hallar:

- Un grupo igualando las fórmulas de las dos tarifas: 0'12+0'2t = 0'12+0,15t. Les sale que el punto en que coinciden en el precio B y E es (0,0) pero no tienen sentido porque gráficamente ven que no.
- Dos grupos igualan directamente la fórmula de B a 0'27, que es el precio de E en que coinciden. Obtienen t=0'75.

Expone uno de los grupos que lo ha hecho bien. Explican cómo lo han hecho y dicen que el resultado es 0'75.

P: ¿0'75 qué?

A: ... Minutos.

¿Y cuántos minutos segundos son 0'75 minutos?

AA:...

A: 0'75 son ¾ partes de un minuto, así que son 45 segundos.

P: ¿Y si son 0'31 minutos? ¿Cuántos segundos son?

A: Son ... Mira hacia atrás en sus papeles... Habrá que dividir por 60.

P: Hacedlo.

A: Pues no, claro, hay que multiplicar por 60.

P: El punto de corte entonces es...

A: (0'75, 0'27).

Un alumno dice (45, 0’27), pero los demás le corrigen.

Entonces la respuesta a la pregunta inicial es... (en grupos)

En vez de puesta en común les pido que se envíen los mensajes unos a otros (es decir, cada grupo da por escrito su respuesta a los otros dos) y que elaboren la respuesta que crean más adecuada comparando las 3.

- Un grupo contesta: “La compañía B es más barata hasta el punto (0’75, 0,27) y más cara a partir de ese punto”.
- Otro grupo: “La gráfica de B es más barata hasta 40 segundos y más cara a partir de esa duración”.
- Otro grupo: “La compañía B es más barata que la compañía E para llamadas de duración igual o inferior a un 45 segundos y más cara para llamadas de duración superior a 45 segundos”.

Todos coinciden en afirmar que la respuesta más adecuada es la del tercer grupo, explicar por qué les cuesta un poco pero detallamos finalmente:

  - Porque indica qué dos compañías se están comparando.
  - Porque hablar de tiempo de duración de la llamada es más “fácilmente comprensible”. Por ejemplo A, al hablar de un punto, alguien puede no saber a qué se refiere 0’75, si minutos o segundos o...
  - B es incorrecta porque las gráficas no son más baratas ni más caras.
  - Además, la última es la única que detalla qué ocurre en el punto crítico.

Transición: Si os parece, vamos a pasar a trabajar con los datos reales y según veamos que van apareciendo otras variables vamos viendo cómo tratarlas.

C20: Sintetizar y organizar la información de las tarifas.
C20.1: Planificar cómo comparar las tarifas de teléfonos móviles. (en grupos). Disponen de una plantilla: qué hacer, cómo y cuánto tardaremos.

PUESTA EN COMÚN (planificación inicial)

	QUÉ HACER	CÓMO	CUÁNTO TARDAREMOS
1º	Ver qué tarifas son comparables	Cada grupo va diciendo los datos de las suyas y los demás dicen si tienen alguna de ese tipo.	1 hora
2º	Hacer listado de cosas importantes para comparar	Cada grupo hace el listado de las cosas importantes en su compañía y luego unificamos.	1 hora

La idea inicial era empezar por que cada grupo fuera diciendo los datos de las tarifas de su compañía, que es lo que habían indicado los alumnos que harían primero, pero surgen varias cuestiones:

A: ¿Quién empieza? Todos quieren empezar porque es lo que cuesta menos trabajo, porque los demás tienen que buscar.

Deciden que cada grupo haga el listado primero de los tipos de tarifas que tiene.

A: ¿Cuáles son comparables?

Una alumna contesta que las que tengan el mismo horario y para los mismos tipos de receptores... Deducimos que mejor lo veremos cuando sepamos todos los datos de cada tarifa de cada compañía.

A: ¿Por qué sólo las comparables?

Un grupo dice que si lo que queremos es saber qué tarifa nos interesa más no entiende por qué cogemos sólo las comparables, porque a lo mejor la que más me interesa es una que no tienen comparativa en las demás compañías.

Concluimos que entonces cogeremos todas.

A: Cada grupo entonces tomará datos de las tarifas de una compañía. Para ello entonces nos dividiremos en 3 grupos (lo dijeron los alumnos, no la profesora).

A: ¿Cómo organizar los grupos? Cada uno se irá al grupo de la compañía de la que haya buscado información. Como los grupos en general se han repartido la búsqueda de información, pues los grupos quedan: 4, 5, 4.

A: ¿Qué datos son importantes para comparar? No lo sabemos todavía. Dicen que mejor tomar todos los datos y luego ya veremos si alguno no es útil.

Encontraron mucha dificultad con planificar tiempos. Los tiempos dicen que son bastante al azar. La profesora les explico que es normal no saberlo exactamente porque no se ha hecho antes, pero que es necesario planificar también los tiempos para poder organizar.

Entonces hemos modificado la planificación. Habrá que rehacerla.

C20.2: Rehacer la planificación para comparar las tarifas de teléfonos móviles. (en grupos)

PUESTA EN COMÚN

Explican que ya no es necesario anotar los datos sólo de las compañías comparables, porque vamos a considerar todas.

Algunos dicen que entonces podemos pasar directamente a compararlas.

Otros alumnos dicen que no, porque hay que ver qué datos son importantes, porque, por ejemplo, ellos han visto que algunos cobran precio por conexión y otros no, y hay que comparar primero las tarifas para ver qué datos serán importantes.

Un grupo dice que además ellos han visto que los datos vienen dados de modo diferente en diferentes compañías, y que lo que podemos hacer para que luego sea más fácil usarlas es unificar el modo de dar la información.

	QUÉ HACER	CÓMO	CUÁNTO TARDAREMOS
1º	Hacer grupos nuevos en función de la compañía sobre la que se ha buscado información.		1 minuto.
2º	Hacer un vistazo inicial de las compañías para ver qué datos son importantes y cómo está dada la información.		15 minutos.
3º	Decidir qué datos son importantes entre todos y cómo organizar la información.		15 minutos.
4º	Hacer una síntesis de la información sobre las tarifas.		30 minutos.
5º	Poner en común la información sobre tarifas.		30 minutos.
6º	Decidir cuáles son comparables (porque habrá que ponerles una especial atención)		15 minutos

Tras hacer los grupos, comienzan a echar el vistazo inicial. Tras 5 minutos aproximadamente, estaban un poco perdidos sobre qué tenían que hacer exactamente. Como la profesora insistido en intentar seguir lo planificado y, si se modifica, explicitarlo, algunos alumnos dicen que creen que directamente se debería hacer una síntesis de la información, porque "Echar un vistazo para ver qué datos son importantes" si no toma nota de ellos no tiene sentido.

Se plantea en gran grupo y algunos alumnos explican que se puede tomar nota, por ejemplo, de que existe un "precio por conexión", pero por ahora sin necesidad de decir cuánto cuesta en cada tarifa. Después cada grupo explica los datos que cree aparecen importantes en su compañía y así decidimos una forma común de tomar nota de los datos.

Frente al posicionamiento de hacer una síntesis directamente (paso 4º), los otros defienden que los dos pasos anteriores son importantes para que al final la síntesis sea común y sea más fácil comparar.

Siguen trabajando 15 minutos más.

PUESTA EN COMÚN (en gran grupo, no sale ninguno a exponer):

Datos a anotar en la síntesis:

1. Precio por establecimiento de llamada.
2. Precio por minuto.
3. Modo de cobrar el primer minuto (completo o por pasos más pequeños)
4. Modo de cobrar el resto de minutos (por segundos o por pasos de 30 segundos...)
5. Precio por mensaje.
6. Consumo mínimo mensual.

7. Si están incluidos los impuestos indirectos.
8. Cuota mensual.
9. Cuántos decimales se aplican
10. Cuota de alta/ Cuota de conexión/ Cuota de activación (parece el mismo dato, porque es lo que cuesta dar de alta la línea de contrato)
11. Precio por escuchar mensajes de voz.
12. Si te regala dinero cada mes, cuánto y a partir de cuánto gastado.

Les dije "Por ejemplo, podemos pensar en una tabla para cada compañía donde cada fila sea una tarifa y donde cada columna es un dato". Por ejemplo en la primera columna, podría estar el "precio por establecimiento de llamada", en la segunda ¿qué podría estar? Contestaron que el precio por minuto.

P: Pero hay otras cuestiones importantes, por ejemplo, el sistema que vamos a utilizar para determinar los precios, ¿céntimos o euros? Para facilitar después la comparación.

Aunque los de Amena defienden que sea en céntimos (porque en su compañía el precio por minuto está indicado en céntimos) se acuerda que sea en euros porque las otras dos compañías lo dan en euros y porque el resto de datos (cuota mensual,...) los presentan todas las compañías en euros.

Hay variables que dicen unos y otros dicen que no lo saben de su compañía, por ejemplo:

- Los de Amena dicen "Cuántos decimales se aplican", pero esto los demás no lo saben porque no lo pone.

Acordamos que los datos que no se conozcan se intentarán averiguar.

- Hay una tarifa en Vodafone que te regala 10 euros a partir de una factura de 20 euros mensuales. Por eso dicen "si te regala dinero cada mes, cuánto y a partir de cuánto gasto".

Otras cuestiones:

- Dijeron "precio por minuto de videollamada, pero lo excluimos porque sólo tiene videollamada una tarifa de Vodafone, de modo que no vamos a considerar la variable.
- Les llamó la atención que viene el precio por conexión en llamadas internacionales pero no el precio por minuto. De todos modos, concluimos que seguro que es más barato desde fijo y que por tanto la gente no suele llamar al extranjero desde móvil, de modo que no consideremos llamadas internacionales en la comparativa.

Un grupo dice que habría que incluir también los "módulos especiales", como números frecuentes... En principio dicen que tomando los mismos datos que para tarifas pero incluyendo una columna que digan a qué tarifas son aplicables y qué módulos son incompatibles entre ellos. Finalmente decidimos que los módulos, como son de muy diferentes tipos, cada uno tomará nota de ellos como considere oportuno, intentando que la información quede lo más clara posible.

No ha surgido el problema de dividir las columnas de precio por minuto para especificar distintos receptores, distintos días de la semana..., pero lo dejé para que se planteen el problema cuando intenten hacerlo, para ver cómo lo solucionan y para que así valoren la importancia de planificar, porque es posible que cada uno haga las tablas de un modo y halla que rehacerlas.

Un grupo pide a la profesora el ordenador para hacerlo en Word. El resto de grupos dicen que también lo quieren hacer en ordenador. Al final se queda el ordenador el grupo que lo había pedido. Los demás lo harán en ordenador en casa.

Cuando comenzaron a rellenar las tablas, surgieron cuestiones en los pequeños grupos que trasladamos al gran grupo para acordar el modo de solucionarlo. Por ejemplo, cómo dividir los datos de precios por minuto en diferentes columnas para que sea más cómodo. Así la tabla es más grande, de modo que queda menos espacio para cada columna y se decide quitar la columna "Si te regala dinero cada mes, cuánto y a partir de cuánto gastado" y ponerlo como una nota dentro del precio por minuto. También se decide quitar "Cuántos decimales se aplican" porque es un dato que es el mismo en todas las tarifas de Amena, que es el único que lo indica; y las otras compañías, que no indican nada, es lógico pensar que aplican los mismos decimales a todas las tarifas de su compañía y por tanto lo pondremos como una nota general. También se decide poner notas a pie con la información que se considere importante y que no está en las columnas. Un grupo además plantea poner los precios especiales (números frecuentes...) como otros precios dentro del precio por minuto especificando para qué receptores o lo que sea necesario. Así, los ponemos directamente dentro de las tarifas donde sea compatible.

También decidimos que pondremos en el nombre de la columna la unidad en que están descritos los precios (ejemplo: euros) para no tener que repetirlo cada vez que pongamos el dato en la fila correspondiente.

El grupo de Vodafone dice que hay una tarifa "rara" porque da precios para videollamada, trío de voz, trío de videollamada y Navegación Vodafone Life. Preguntan si los demás grupos tienen alguna tarifa de ese tipo y resulta que no, así que decidimos excluirla. Podemos indicar que existe, pero no tiene sentido comparar porque los demás no ofrecen esos servicios. Además, los precios son sólo hasta el 31 de marzo de 2005.

Al final del tiempo siguen trabajando. Quedamos en que el próximo día cada grupo traerá la información sobre su compañía en tablas y traerá 3 fotocopias, una para cada grupo y otra para mí.

Les explico que deben ir pensando si se deben tener en cuenta qué variables y en cómo podrían tenerse en cuenta. También añado que vayan tomando nota de las dificultades que les vayan surgiendo y cómo las han resulto para explicárnoslas a los demás.

C20.3: Traer tablas con la información de las diferentes tarifas (en grupos) (para el próximo día).

TERCERA SESIÓN:

C20.3: Hacer tablas con la información de las diferentes tarifas (en grupos) (para el próximo día).

C20.3.1: Analizar las dificultades que han surgido en la elaboración de las tablas (en grupos).

PUESTA EN COMÚN

AMENA

- El dúo aparece como una tarifa (Tarjeta Dúo), pero luego dice, por ejemplo, en "tarifa 3x2" que no es posible aduarse, lo que hace suponer que es un módulo, combinable con otras tarifas. Luego dedujimos que pone en la "tarifa 3x2" que no es posible aduarse porque tienen el mismo precio por minuto que la "Tarifa Duo", pero resulta que no, que lo pone en todas las tarifas de Tarjeta (que no es posible aduarse). Conclusión: no es un módulo pero en cada una de las tarifas de tarjeta pone que no es posible aduarse, lo que podría hacer pensar que es posible aduarse en los contratos, pero tampoco. Es decir, es una tarifa y ya está.
- Dice "tarificación cada 30 segundos a partir del primer minuto", sin explicitar cómo se cobra el primer minuto, aunque suponemos que es completo.
- El "Contrato Libre Familia", aunque lo denominen contrato y lo traten como tal, podemos considerarlo un módulo, que permite combinar varias líneas con diferentes características cada una con un precio especial entre ellas (0'03), pero el precio para el resto depende del Contrato Libre (Libre, Libre 18, Libre 30 o Libre 50) que tenga cada línea y por tanto no es fijo.

- ¿El contrato 3x2 de Tarjeta también considera la fracción de segundos o sólo si se llega a completar el múltiplo de 3? Es que en el 3x2 de Contrato especifica que también se considera la fracción del tercer minuto y en la tarjeta no se dice nada al respecto.
- Dicen que para simplificar las tablas, los datos que son comunes: establecimiento de llamada: 0'12 euros; modo de cobrar el primer minuto: completo; ¿impuestos indirectos incluidos? No; Precio por escuchar mensajes de voz: 0 euros. El precio del mensaje aunque es común no lo han quitado porque han puesto los precios con los módulos que son compatibles.
- También han quitado la columna de "cuota mensual" porque dicen que sólo cobran cuota mensual los módulos, pero ninguna tarifa.
- Dicen que los módulos son un lío porque algunos tienen precios temporales.

A) MOVISTAR

- Dificultad en cómo poner los precios, porque hay muchos precios diferentes según los receptores, los días de la semana y las horas. Hicimos divisiones de la tabla.
- En Tarjeta faltan datos.
- En el contrato "Plus Familia XL" dice: "Si la media de todas las líneas del cliente no supera los 12 €, se le facturará a cada línea como mínimo un importe de 12 € y, en caso contrario se le facturará como mínimo 3 €". No lo entendían y tuvieron que solicitar una explicación. El resto de la clase tampoco lo entendía. Ellos explicaron: Primero hay que ver si la media de gasto de las líneas del contrato "Plus Familia XL" llega a 12 euros. Si sí llega se cobra a cada línea un mínimo de 3 euros si no los ha alcanzado; si no llega se cobra a cada línea un mínimo de 3 euros. Los demás pidieron que lo explicaran un poco más y lo explicaron con algunos ejemplos.

Algunos ejemplos los ponían ellos y otros eran resultado de planteamientos de los demás: a) un contrato con 3 líneas, una gasta 18 euros, otra 19 y otra 0, una media de 12’33, entonces se cobrará 18+19+3 (porque por cada línea que no llega a 3 se cobra 3); b) un contrato con 3 líneas, que gastan un mes 12, 13 y 12, pues como la media supera doce y todas ellas superan los 3 euros, pues cobrará 12+13+12; c) un contrato con 3 líneas, que gastan un mes 11, 9 y 6, no llegan a una media de 12 euros, así que cobrará 12+12+12; d) un contrato con 3 líneas, que gastan un mes 20, 15 y 0 euros, no llegan a la media de 12 euros y por tanto pagarán: 20+15+12

- También han quitado las columnas de precio por establecimiento de llamada (porque es siempre 0’12), cuota mensual (por lo mismo que los de Amena), modo de cobrar el primer minuto (porque también lo cobran todas completo), y precio por escuchar mensajes de voz (0 euros) pero ellos también han quitado la columna de precio por mensaje porque han considerado mejor poner el precio especial (el de números frecuentes) fuera, como nota, indicando que es compatible con todos los contratos.
- También dicen que es un lío lo de los módulos porque algunos tienen precios temporales.

VODAFONE

- Han dejado todas las columnas. Pero están de acuerdo en quitarlas porque en su caso también coinciden los datos en esas columnas para todas las tarifas.
- Han puesto los módulos aparte.
- Hay un plan de grupo, “Qtal” que no pone en qué consiste. Dice que se paga menos en llamadas entre miembros de un grupo (de máximo 10 personas), que es tanto para tarjetas como para

contratos, pero no explica en qué consiste esa rebaja en el precio. Lo hemos preguntado y nos han dicho que tiene un coste de alta de 3 euros cada componente del grupo. Las llamadas entre ellos cuestan 0'06 euros. No tienen cuota de mantenimiento pero en el caso de los teléfonos prepago es necesario que realicen recargas por importe de 30 euros cada 5 meses (si no se hiciera se anularía automáticamente ese componente).

- No saben si el módulo "a2" es sólo para contratos o también para tarjetas porque no lo pone explícitamente. Como en algún otro, como "Números habituales" pone que "es exclusivamente para contrato" suponemos que es para ambos, pero también en "Qtal" pone que es para "tarjeta y contrato", de modo que aquí debería decir con qué tarifas es compatible, porque en los demás lo pone. Dedujeron que es para ambos también por el orden, porque parece que ponen primero los módulos que son para ambos y luego los que son solamente para contrato. Lo preguntaron y sí, es para contrato y para tarjeta. El coste de alta es de 6 euros.
- Qtal cuesta 6 euros de alta y ya está. No cuesta nada mensual. No pone cuanto cuesta cambiar de número. Lo preguntaron y les dijeron que cuesta 6 euros cambiar de número de teléfono
- La Tarjeta Tiempo Libre, la Tarjeta Decreciente y la Tarjeta Autorecargable, no ponía si tienen consumo mínimo mensual. Lo preguntamos y nos dijeron que no.
- En el Contrato Provincial, el Contrato Tarde, el Contrato Mañana y el Contrato Decreciente, ¿se cobra por segundos después del primer minuto o por pasos de 30 segundos? Suponíamos que por segundos porque, al no decir nada y dado que todos los contratos de las demás compañías y también los demás contratos de esta compañía cobran por segundos, pues era lógico pensar que era también por

segundos. Y resulta que no. Lo hemos preguntado por mail y cobra por pasos de 30 segundos.

- ¿Cuántos decimales aplican en el cobro de cada llamada? Lo preguntamos y nos dijeron que 2.
- ¿Cuál es el precio por mensaje en cada tarifa? No lo ponía. Lo hemos preguntado y son 0'15 euros/mensaje.
- También algunos precios son temporales en los módulos.
- No dice nada sobre precio por escuchar mensajes de voz, ni para contratos ni para tarjetas.

ACUERDOS:

- Quitamos las columnas que han quitado todos y también quitamos la de "precio por mensaje" porque se puede poner como nota del módulo que corresponda indicando con qué tarifas es compatible. Pero la columna de precio por mensaje plantea un problema, porque en Amena dos tarifas, no módulos, ("Tarjeta Dúo" y "Contrato Joven") que cobra 0'15 euros por mensaje pero pone un precio diferente para mensajes (0'09 euros) al dúo la primera y a los móviles Amena la segunda. Decidimos que se quite la columna pero se ponga una nota en la tarifa indicando que el precio es diferente en este caso para mensajes a Amena. También se indicará en la nota general que hay una excepción en esta tarifa.
- Parece que los módulos, que son temporales y que además incluyen cuotas de conexión, algunos cuotas mensuales... por ahora los dejaremos a un lado y nos centraremos en comparar las tarifas.
- El grupo de MoviStar, tras escuchar los datos de Amena, plantea quitar la columna del modo de cobrar el primer minuto e indicar que en las tarjetas se cobra por pasos de 30 segundos y en los contratos por segundos, pero Vodafone dijo que no, porque en esta compañía, aunque todas las tarjetas se cobra por pasos de 30

segundos no en todos los contratos se cobra por segundos. Decidimos dejar la columna para evitar confusiones.

CONCLUSIONES:

- Lo que más llama la atención es que algunos contratos de Vodafone cobren por pasos de 30 segundos, en vez de por segundos, y encima no lo pone. Ellos han tenido que escribir un mail desde la página web para preguntarlo.
- También es muy llamativo la gran cantidad de información que falta en Internet (que han tenido que ir averiguando por otros medios). En ocasiones parece que lo hacen las compañías como para engañar (como el caso anterior), pero también omiten información que sería positivo para ellos indicarla, como cosas que son gratuitas, tales como las llamadas al buzón de voz, o cuotas de alta...
- También les sorprende negativamente lo mal organizada que está la información. Creen que habría formas mucho más claras de exponer la información. Por ejemplo, tablas de compatibilidades de módulos con tarifas (contratos/ tarjetas) y entre módulos; tablas como las que hemos elaborado de tarifas o tablas sobre módulos, donde se incluyeran columnas sobre en qué consiste el servicio, el precio de la cuota de alta, la cuota mensual. Indicando todos los datos y poniendo que es gratis cuando lo sea para no llevar a error.
- Parece que las diferentes compañías ofrecen, sobre todo respecto a módulos, tarifas muy diferentes quizá para que sea más difícil comparar.

C20.3.2: Definir otras características de las tablas (en grupos).

PUESTA EN COMÚN

SOBRE CÓMO EXPONER LA INFORMACIÓN EN LAS TABLAS (DIFERENCIAS):

* Para ello cada grupo analiza las fotocopias que tiene de las tablas de las otras dos compañías, es decir, de los otros dos grupos.

- Dos grupos utilizan cuatro dígitos para indicar las horas (ejemplo: 20:00-24:00), mientras que el otro ha utilizado dos (ejemplo: 20-24). Se acuerda utilizar dos dígitos porque ocupa menos espacio.
- Un grupo unifica las horas que tienen el mismo precio dentro de una tarifa, mientas que los otros dos lo hacen por horario repitiendo varias veces los precios cuando es necesario. Decidimos unificar porque así la información es también clara y ocupa menos espacio.
- Un grupo pone "De ... a ...", mientras que otro pone "... a ..." y el tercero pone "...-...". Decidimos utilizar "...-..." por ser el más sencillo.
- Un grupo indica "FS" para "fin de semana", otro "S,D" (sábado y domingo) y un tercero lo escribe todo "fin de semana". Acordamos utilizar "S,D", porquelos de MoviStar advierten que hay una tarifa ("Tarjeta Activa Cuatro") que diferencia de lunes a sábado y por otro lado domingos y festivos. Se decide entonces utilizar mejor "S,D", indicado "S: sábados", "D: domingos". Los de Vodafone se dan cuenta en ese momento de que las tarifas suyas que diferencian entre fin de semana y de lunes a viernes no indican nada sobre festivos.

C20.3.3: Rehacer las tablas de datos definitivas (profesora).

Los alumnos plantean que podría hacerlo al profesora para confirmar la homogeneidad de las tablas. Los alumnos lo han traído en papel y una posibilidad es que cada grupo rehaga sus tablas, pero si se las dan todos a al profesora podría unificarlas con los criterios que hemos dicho. La profesora acepta y dice que traeré el próximo día.

Responder a la cuestión generatriz a partir de lo hecho en la segunda sesión (gran grupo).

El día anterior, con el trabajo que hicimos, fuimos completando la respuesta al problema que nos planteamos, que es comparar tarifas de teléfonos móviles. Vamos a ver qué conclusiones podemos obtener de lo que hicimos sobre esta cuestión:

- Roberto trajo un documento de Internet que exponía la dificultad que implica comparar tarifas de teléfonos móviles. Dijimos que íbamos a buscar más información, pero dicen que no han podido porque los datos de las compañías y hacer las tablas les ha quitado mucho tiempo. De hecho, han estado en contacto unos con otros para plantearse y resolver dudas.
- Dificultad en concretar el problema. Derivado de que vimos que, en Internet, dos de las compañía ofrecen un asesor de tarifas, pero es dudosa la confianza que se puede depositar, primero porque no sabemos cómo lo concluyen, segundo porque siempre tras el consejo ponen una nota diciendo que el dato es para un consumidor tipo estándar, que no es algo que puedan confirmar... Eso derivó en pensar sobre el tipo de respuesta que podíamos dar nosotros. Todos estábamos de acuerdo en que este modo de aconsejar primero, ya existe, y segundo no nos parece el más adecuado. Concluimos que vamos a comenzar por comparar tarifas semejantes en las diferentes compañías y luego iremos viendo qué pasos podemos-debemos ir dando.
- Influencia de cobrar o no el primer minuto completo.

- En caso de igualdad en el resto de variables, es más barata, hasta la duración de un minuto, la tarifa que cobra el primer minuto por segundos. La gráfica nos ayudó a ver esta relación, confirmándonos lo que habíamos deducido sin necesidad de realizar cálculos.
- En caso de dos compañías con igual precio por establecimiento de llamada pero diferente precio por minuto y una cobra el primer minuto completo y la otra no:
  - Si la que cobra el primer minuto completo es además la más cara, es más cara para cualquier duración de llamada. Gráficamente (precio por duración de llamada) vimos que se observa que la más cara siempre queda por encima de la más barata.
  - Si la que cobra el primer minuto completo es la más barata, entonces la comparación se complica. A partir del primer minuto podemos deducir que la que cobra más por minuto es más cara, pero ¿qué ocurre con las llamadas de duración inferior a un minuto? Entonces es necesaria la gráfica, ya que nos permite observar si hay un cruce entre las gráficas de las tarifas. También podría hacerse con cálculos numéricos, pero es más complicado y además es más fácil que lleve a error (como vimos: porque si no te das cuenta de que una es una función por partes crees que no se cruzan). La gráfica te da pistas de si se cruzan o no y de en qué punto más o menos.

- El precio mínimo de una llamada con una tarifa que cobra por segundos es el precio de un segundo más el establecimiento de llamada.

- El precio mínimo de una llamada que cobra el primer minuto completo es el precio de un minuto más el establecimiento de llamada.
- El precio máximo de una llamada es infinito.
- Vimos la importancia de considerar las unidades que estamos utilizando. En concreto, cuando concluimos que el punto de corte estaba en 0’75, y eran minutos, no segundos.
- Repasamos cómo se transforman los minutos a segundos.
- Vimos la importancia de responder del modo más concreto y real a la pregunta que hayamos planteado. En concreto, cuando dedujimos el punto de corte de las dos tarifas de cobro de primer minuto completo o no y diferente precio por minuto, siendo la más cara la que cobra el primer minuto completo, vimos qué características tenía la respuesta más adecuada a la pregunta: que habla en segundos, en vez de en 0’xx minutos, porque es más fácilmente comprensible, que indica qué dos compañías está comparando (sus características), que habla de “tiempo de duración de la llamada”, porque es la variable determinante, que no dice que “las gráficas son más baratas” ni “más caras”, sino las compañías, que especifica qué ocurre tanto antes como después y exactamente en el punto o puntos críticos.
- Finalmente comenzamos a organizar la planificación de las tablas de datos y fuimos modificando dicha planificación. Esto ocurrió porque iban surgiendo cuestiones, dificultades... que no habíamos tenido en cuenta o que ni siquiera podríamos haber tenido en cuenta porque surgieron tras comenzar a trabajar. La planificación inicial es importante, pero no es definitiva, sino que se debe ir adaptando a medida que se avanza en el proceso. Además, se deben analizar las causas de las modificaciones de las planificaciones previas para aprender para las siguientes.

- Surgieron gran cantidad de variables.
- Hoy hemos visto que encontrar todos los datos reales sobre tarifas es complicado.
- Organizar bien los datos es importante y también difícil. Hay que decidir cómo organizarlo (decidimos en tablas), qué filas poner (cada tarifa), qué columnas (qué datos). La información debe estar organizada, si es posible, igual, sobre las diferentes compañías para facilitarlas compararlas después. La organización inicial la fuimos modificando en función de lo que íbamos obteniendo. Las conclusiones se pueden observar viendo las tablas definitivas.
- Ahora que tenemos todos los datos, iremos analizando las diferentes variables que influyen y comparando las diferentes tarifas.

P: Ahora vamos a considerar una cuestión: todas las tarifas cobran 0'12 euros por minuto pero, ¿qué ocurre si una tarifa cobra diferente precio por establecimiento de llamada?
Un alumno dice que no es posible.
P: ¿Estás seguro?
No están seguros. Quizá es casualidad o quizá, con más seguridad, podría ser un acuerdo al que han llegados todas las compañías.
Preguntan a la profesora si lo sabe y les dice que lo pueden confirmar para el próximo día, "Pero ahora analizaremos qué ocurriría".

C20.3.4: Averiguar si el precio por establecimiento de llamada es algo fijado por el Gobierno o podría ser diferente en diferentes tarifas (para el próximo día).

C21: Comparación de sistemas de tarifas variando el precio por establecimiento de llamada y el precio por minuto (los datos invertidos). *Considerar una compañía F que cobra 0'15 por establecimiento de llamada y 0'12 euros por minuto. Cobra el primer minuto completo. Compararla con la compañía E.* ***(en grupos) Gráfico 7***
C21.1: Previsión de resultados. ¿Qué creéis que ocurrirá?, es decir, ¿cuál creéis que será más cara? (gran grupo)

Dudan un poco, un alumno dice que costarán lo mismo durante el primer minuto. Y a partir del primer minuto... Dudan.

* Esta cuestión no la planteamos el año pasado, ni ninguna en la que el precio por establecimiento de llamada fuera diferente a 0'12.

C21.2: Planificar cómo hacer la comparación. Cómo vais a hacer la comparación (gran grupo)

Calculando los precios para otros minutos (para 2, para 3, para 10, para 50...).

C21.2: Planificar si será necesaria la gráfica. ¿Necesitaréis hacer la gráfica? (gran grupo)

Dudan, seguramente debido a que si la profesora lo dice debe ser necesario. Algunos dicen que sí, otros que creen que no. Lo que dicen que sí explican que si vemos la tendencia esa ya se cumplirá para todos los valores superiores. Los que dicen que sí explican que así podemos ver si se cortan. Algunos dicen que ya sabemos que no se cortan.

Comienzan a trabajar.

PUESTA EN COMÚN

Un grupo ha hallado el precio para llamadas de duración de 1, 2, 5, 10 y 50 minutos y concluye que es más cara la tarifa de la compañía E para cualquier llamada de duración superior a un minuto y que para llamadas de duración de un minuto o menos cuestan lo mismo.

Los otros dos grupos han hecho las gráficas y las interpretan, pero los que no las han hecho explican que no era necesaria, aunque sí completa información.

C22: Comparación de sistemas de tarifas variando el precio por establecimiento de llamada. *Considerar una compañía G que cobra 0'15 por establecimiento de llamada y 0'15 euros por minuto. Cobra el primer minuto completo. Compararla con la compañía E.* ***(en grupos)*** ***Gráfico 8***
C22.1: Previsión de resultados*. ¿Qué creéis que ocurrirá?, es decir, ¿cuál creéis que será más cara?* ***(gran grupo)***

Dicen que durante el primer minuto será más cara esta (G), porque hay que sumar precio por establecimiento de llamada más precio por minuto (0'30 frente a 0'27). A partir del primer minuto suponen que G será más cara siempre porque coinciden en el precio por minuto pero es más cara en el precio por establecimiento de llamada.

C22.2: Planificar cómo hacer la comparación. *¿Cómo vais a hacer la comparación?* ***(gran grupo)***

Calculando los precios para otros minutos (para 2, para 3, para 10, para 50...), y no cree que será necesaria la gráfica en general, aunque algunos dicen que siempre ayuda hacerla y concluimos que la haremos todos porque ayuda.

* Ya responden ellos solos a si es necesaria la gráfica sin que se lo pregunte explícitamente.

Comienzan a trabajar.

PUESTA EN COMÚN

Al hallar los precios para diferentes minutos ven que G es más cara para cualquier duración de llamada, pero gráficamente observan que las gráficas son "paralelas", es decir, las separa una diferencia constante. Viendo los precios obtenidos para diferentes duraciones de llamadas se dan cuenta de que, para cualquier duración de llamada, la diferencia de precio es de 3 céntimos. Se dan cuenta de que es porque el precio por minuto es lo que difiere y el precio por minuto se añade siempre completo y esa es la razón de que la diferencia de precio sea constante.

La gráfica ayudó a darse cuenta de esta relación entre precios.

C23: Comparación de sistemas de tarifas variando el precio por establecimiento de llamada y el precio por minuto II (sin intercambiar). *Considerar una compañía H que cobra 0'15 por establecimiento de llamada y 0'14 euros por minuto. Cobra el primer minuto completo. Compararla con la compañía E.* ***(en grupos) Gráfico 9***
C23.1: Previsión de resultados. *¿Qué creéis que ocurrirá?, es decir, ¿cuál creéis que será más cara?* ***(gran grupo)***

Dudan mucho. Afirman que durante el primer minuto es más cara H (0'29 frente a 0'27). Algunos afirman tras un ratito que a partir de un minuto también es más cara H. Cuando se les pregunta por qué lo afirman indican que porque han calculado el precio para 2 minutos (0'43 frente a 0'42).

* Es muy interesante, porque hasta ahora calcular el precio en el segundo minuto servía para deducir la tendencia de las gráficas, ya que coincidía esta tendencia hasta infinito.

C23.2: Planificar cómo hacer la comparación. Cómo vais a hacer la comparación (gran grupo)

Calculando los precios para otros minutos (para 2, para 3, para 10, para 50...).

* No destacan la necesidad de hacer las gráficas. La profesora no dice nada, esperando a que se den cuenta.

De hecho se forman revuelo a medida que van obteniendo datos, porque el precio es superior en H para un minuto y para dos pero coinciden para 3 minutos y en 10 minutos es superior A.

PUESTA EN COMÚN

Destacan que en este caso la gráfica es fundamental. Explican que hallaron primero los datos para llamadas de diferentes duraciones y que vieron que en algunas era superior H (para llamadas de menos de 3 minutos de duración), que coincidían en el precio para llamadas de 3 minutos, que para 10 minutos y 50 minutos era superior el precio en E.

Entonces hicieron la gráfica y vieron que, como sospechaban, se cruzaban en punto (en llamadas de 3 minutos de duración), donde los precios coincidían.

Dudaban sobre si los precios volverían a cruzarse, pero dedujeron que al ser dos rectas la tendencia ya era constante y no podría volver a cruzarse.

Conclusión: la compañía H es más cara para llamadas de menos de 3 minutos de duración (primero dijeron de "hasta 3 minutos de duración", pero lo corrigieron), coinciden en su precio para llamadas de minutos de duración y para llamadas de duración superior a 3 minutos es más cara la tarifa de la compañía E.

Algunos buscaron la relación algebraicamente: la diferencia debida al establecimiento de llamada es constante (0'03 euros es más cara H), pero también hay diferencia debida al precio por minuto, que al principio se nota más (el precio de un minuto, sin contar establecimiento de llamada, es 0'01 euros más caro en E), por eso la diferencia es de 0'02 euros. En dos minutos, el precio (sin contar establecimiento de llamada) de E es 0'02 euros más caro, por eso la diferencia de 0’01. La diferencia desaparece para 3 minutos, donde se equilibra la diferencia por precio por minuto con la diferencia por establecimiento de llamada y a partir de ese momento, cada minuto que pasa, E es un céntimo más cara.

P: ¿estáis seguros?

A: Podemos comprobarlo. Si esto es verdad, es llamadas de 900 minutos la diferencia de precio será de 900-3= 897 céntimos.

P: ¿Probamos con más casos?

Los alumnos dicen que general que no, porque ya sería casualidad. Otros dicen que podemos probar a ver qué ocurre. Cada un probará con las duraciones que quiera, cada uno con 3 duraciones.

C23.3 (alumnos): *Confirmar que la diferencia de precio entre la compañía H y la compañía E, a partir de 3 minutos, donde los precios coinciden, se incrementa a razón de un céntimo por minuto. Probar con una llamada de 900 minutos de duración, a ver si la diferencia en precio es de 900-3=897 céntimos, y con dos duraciones de llamada más a elegir* ***(en grupos)***

PUESTA EN COMÚN

Lo prueban y realmente se cumple en todos los casos.

Al pasar la profesora por las mesas un grupo le pregunta que pasaría si cobraran las dos por segundos durante el primer minuto. La profesora les dice que lo plantearán en gran grupo.

C24: Comparación de sistemas de tarifas variando el precio por establecimiento de llamada y el precio por minuto II (sin intercambiar) y cobran por segundos el primer minuto. *Considerar una compañía I, igual que H, pero que cobra el primer minuto por segundos y compararla con la compañía A, que es como la compañía E pero cobra por segundos el primer minuto.* **(en grupos)** ***Gráfico 10***
C24.1: Previsión de resultados. *¿Qué creéis que ocurrirá?, es decir, ¿cuál creéis que será más cara?* **(gran grupo)**

Como la profesora planteó la pregunta más compleja (porque cito diferentes compañías...) el grupo que planteó la pregunta explica al resto que sólo es comparar las dos compañías de antes pero para el primer minuto si, en vez de cobrarlo completo, lo cobraran por segundos.

La profesora les explica que es importante saber que es la compañía A porque así pueden tomar los datos que ya habíamos calculado y no tener que volver a calcularlo.

Dicen que calcularán el precio para 1 segundo, para 1, 20, 30 y 40 segundos y que harán la gráfica.
* En este caso ya plantean ellos solos hacer la gráfica.

Volviendo a qué creen que ocurrirá, dice al profesor, el grupo que planteó la relación entre precios, que creen la Compañía I (que es como la Compañía H pero cobrando el primer minuto completo) será más cara también para llamadas de duración inferior a un minuto, siguiendo la tendencia que llevaba desde llamadas de duración inferior a 3 minutos.

Se ponen a trabajar.

Al pasar por las mesas veo que el hecho de que coincida el precio de llamadas de 30 segundos en I con el precio de 40 segundos en A (0'22 euros) hace que sospechen que de nuevo va a haber un cruce de rectas, pero luego se dan cuenta de que no, ayudados además por la gráfica.

PUESTA EN COMÚN

Se muestra, tanto numérica como gráficamente, que, para llamadas de duración inferior a un minuto, la compañía A es más barata. Para llamadas de duración superior a un minuto es aplicable la conclusión obtenida anteriormente, ya que a partir de un minuto las compañías I y A son igual que H y E.

CUARTA SESIÓN

Responder a la cuestión generatriz a partir de lo hecho en la tercera sesión (gran grupo).

- En la descripción de las características de las diferentes tarifas, es útil, para reducir el espacio que ocupan los datos, "sacar fuera" los datos que son iguales en todas las tarifas de un determinado tipo.
- No tendremos en cuenta los módulos en la comparativa, por el momento, porque suelen ser temporales y además de características muy diferentes que hacen la comparación muy difícil e incluso prácticamente imposible. Parece que se reparten el pastel para no caer en competencia. Esto no ocurre tanto en las tarifas generales seguramente porque no tienen tantas variables libres para manipular, pero sí parece curioso que, en vez de para competir bajar los precios por minuto, por ejemplo, lo que hagan sea ofrecer tarifas de nuevos tipos (como 3x2, decreciente...) o de nuevas características. Un alumno explica que quizá no bajan los precios de las tarifas ya existentes porque lo que intentan es "captar" nuevos consumidores y bajar el precio de una tarifa que ya tienen muchos seguramente obliga a la compañía a bajárselo a todos (también a los que la tenían antes de la rebaja).
- Algunas compañías omiten (o al menos no explicitan claramente) algunos datos, y entre ellos algunos, como el cobrar Vodafone por pasos de 30 segundos en algunos contratos, que llevan al consumidor a un error (creen que cobran por segundos) que favorece a la empresa. Pero también se omite información que sí favorece a las ventas de la empresa, como el indicar que no se cobra por escuchar los mensajes de voz.

- Existirían formas mucho más claras de exponer la información (como tablas semejantes a las que hemos elaborado) que no se sabe por qué no las utilizan, aunque parece lógico pensar que es para confundir y sacar provecho de ello. En esta tabla, además, sería conveniente especificar también cuando algo es gratuito, en vez de omitir la información, para no llevar a error. Es decir, el hecho de que, en general, cuando se omite un dato pensemos que es gratuito (porque si no tendrían que ponerlo), que es lo que ocurre normalmente, lleva a que luego, si algún dato se omite, pensemos que es el más beneficioso para el consumidor también, y luego ocurre en ocasiones que no.
- Para facilitar la comparativa de tarifas también es muy útil unificar las unidades en que se definen los datos, así como el modo en que se organizan los precios para diferentes receptores y horarios.
- También parece conveniente unificar criterios sobre exposición de los diferentes datos de modo que ocupen menos espacio (por ejemplo, utilizar dos dígitos para marcar horarios, o utilizar guión para indicar hasta qué horario, o las siglas del dato, como S,D para sábado y domingo), o para que sepamos que nos referimos a los mismos datos (por ejemplo, utilizar "S,D" para sábados y domingos en vez de "FS" o fin de semana).
- El precio por minuto, dentro de cada compañía, depende del receptor y del horario.
- Si una compañía cobra un precio X por minuto y un precio Y por establecimiento de llamada y otra el precio Y por minuto y el precio X por establecimiento de llamada (cobrando ambas el primer minuto completo), ambas costarán lo mismo para llamadas de duración igual inferior o igual a un minuto, mientras que para llamadas de duración superior a un minuto será más cara la

compañía en la que el precio por minuto es mayor que el precio por establecimiento de llamada.

* Un alumno preguntar qué ocurriría si cobraran ambas el primer minuto por segundos. La profesora les dice que lo harán tras finalizar la síntesis de respuestas a la cuestión tras el trabajo del día anterior.

- Si dos compañías cobran el mismo precio por minuto pero diferente precio por establecimiento de llamada (ambas el primer minuto completo) es más cara, para cualquier duración de llamada, aquella compañía en la que el precio por establecimiento de llamada es mayor. Además, gráficamente vimos que la diferencia entre las gráficas era constante (las líneas de sus gráficas son paralelas) y llegamos a la conclusión de que el valor de esa diferencia constante es igual a la diferencia entre las dos compañías en el precio por establecimiento de llamada, y esto es porque el precio por minuto es lo que difiere y este se añade siempre completo, para cualquier duración de llamada.

* El mismo alumno plantea que también podríamos averiguar qué ocurriría en este caso si ambas cobraran el primer minuto por segundos. También lo haremos.

- Si dos compañías cobran diferente precio por establecimiento de llamada y diferente precio por minuto (cobrando ambas el primer minuto completo), utilizar sus gráficas es fundamental para saber si sus gráficas se cruzan, dándonos además una idea de en qué punto se cruzan (como son rectas, sólo pueden cruzarse una vez). Resulta que la diferencia de precios se debe en parte a la diferencia en el precio por minuto y en parte a la diferencia en el precio por establecimiento de llamada: la diferencia por establecimiento de llamada es constante, mientras que la diferencia debida al precio por minuto varía.

* Varios alumnos plantean que podríamos hallar también en este caso que ocurriría si ambas cobraran por segundos, pero algunos les recordaron que ese caso ya lo habíamos visto el día anterior y que de hecho hoy teníamos que sacar conclusiones sobre lo que hicimos.

- Si dos compañías cobran diferente precio por establecimiento de llamada y diferente precio por minuto (cobrando ambas el primer minuto por segundos), resulta que para llamadas de duración inferior a un minuto se sigue cumpliendo la tendencia que viniera de antes. Esto es lógico porque se trata de rectas y no pueden volver a cruzarse.

Comenzamos por las cuestiones que han planteado los alumnos:

C21.3 (alumno): Comparación de sistemas de tarifas variando el precio por establecimiento de llamada y el precio por minuto (los datos invertidos). *Considerar una compañía J, como F (en que cobra 0'15 por establecimiento de llamada y 0'12 euros por minuto), pero que cobra el primer minuto por segundos. Compararla con la compañía A , que es como E pero cobra el primer minuto por segundos.* ***(en grupos) Gráfico 11***

C21.3.1: Que el alumno que ha planteado el problema lo enuncie.

El alumno dice:

"**Pues... Decir que pasaría si las compañías F y E pero cobraran el primer minuto por segundos**".

P: ¿Algo más?

A: No.

P: ¿Habéis entendido lo que tenéis que hacer?

Los alumnos contestan que sí. Realmente la cuestión ha sido enunciada muy "chapuceramente" pero parece que es eficaz porque todos los alumnos afirman haberla entendido.

* El alumno no pide que planifiquen ni que prevean lo que ocurrirá, cosas que sí les pide la profesora habitualmente.

Algunos alumnos terminan bastante antes que otros. Es porque algunos se han dado cuenta de que los precios para diferentes llamadas de duración inferior a un minuto (cobrando por segundos) ya los calculamos en la compañía A, porque es como E pero cobrando el primer minuto por pasos de 30 segundos, y por tanto sólo han tenido que hallar el precio para la compañía F. Además, han utilizado la gráfica de la compañía A, que la hicimos en otro ejercicio.

C21.3.2: Que el alumno que ha planteado el problema coordine la puesta en común de los resultados.

Aviso al alumno de que coordinará la puesta en común. Al principio es reticente, pero acepta. Esto hace, como es lógico, que analice en mayor profundidad el problema, con más interés. Le advierto de que debe interesarse no sólo por el resultado sino también por el producto, para ver qué modos pueden ser más adecuados para resolverlo o más rápidos...

PUESTA EN COMÚN

El alumno elige a un grupo.

P: ¿Por qué ese grupo?

A: Lo he elegido al azar.

El alumno pide al grupo que diga el resultado.

El grupo indica que la compañía F es más cara.

Curiosamente, el alumno pregunta: ¿siempre?

Los alumnos contestan: "Bueno... para llamadas de duración inferior a un minuto.
El alumno pregunta: ¿Cómo lo habéis averiguado?
Porque hemos hallado el precio para llamadas de duración de 1, 2, 5, 10 y 50 minutos y en todos los casos es más cara. Y que luego lo han hallado también para 59 segundos y también es más cara.

El alumno contesta que muy bien.

P: ¿Todos habéis obtenido lo mismo?
Todos contestan que sí.

P: ¿Algunos habéis utilizado algún otro medio para hacerlo?
Un grupo dice que ha utilizado las gráficas, donde se veía que era más cara E, pero que luego lo han confirmado hallando el precio de diferentes llamadas.

P: El grupo ... ha tardado menos en terminar, explicad los pasos que habéis seguido para intentar saber por qué lo habéis hecho más rápido.
El grupo explica que han hallado los precios para de F llamadas de duración de 1, 2, 3, 10, 59 segundos y han comparado con los que ya habíamos hallado de la compañía A, que es igual que E pero cobrando el primer minuto por segundos, y sólo que tuvieron que hallar para E el precio de 59 segundos, que no lo habíamos hallado anteriormente. Luego, como les sobraba tiempo, también utilizaron la gráfica de A que ya habíamos hecho para comparar gráficamente e hicieron la de F y compararon.

P: Una cuestión importante es que utilizaron datos que ya teníamos y no tuvieron que volver a hallarlos, con el tiempo que implica.

P: Fijaos en que F y E tenían el mismo precio para llamadas de duración inferior a un minuto pero E era más cara para llamadas de duración superior a un minuto. Al comparar ahora considerando que cobren el primer minuto completo, durante ese primer minuto la que es más cara es F.

* Otra cosa que les indica la profesora es que a esta compañía, que es como F pero se diferencia en que cobra el primer minuto completo, la llamaremos J. Entonces hemos comparado J y A.

C22.3 (alumno): Comparación de sistemas de tarifas variando el precio por establecimiento de llamada**. Considerar una compañía K, que es como G en que cobra 0'15 por establecimiento de llamada y 0'15 euros por minuto, pero se diferencia en que cobra el primer minuto por segundos. Compararla con la compañía A.**(en grupos)** **Gráfico 12

C22.3.1: Que el alumno que ha planteado el problema lo enuncie.

El alumno dice:

"Comparar una compañía como G pero que cobra por segundos el primer minuto con la compañía una compañía como E pero que cobra el primer minuto por segundos. Pero a la compañía que es como G la llamamos H y a la que es como E la llamamos F..."

Se confunde al denominar a las nuevas compañías, ya que las denomina igual que otras compañías que ya hemos tratado.

P: ¿No teníamos ya compañías denominadas H y F?

A: Es verdad... ¿por qué letra vamos?

P: ¿Cómo hemos denominado a la última?

A:... J. Entonces, en vez de H es K y en vez de F será L ¿no?

P: ¿A no ser que alguna de las dos ya la hayamos trabajado?

Un grupo advierte que la compañía como F pero que cobra por segundos el primer minuto es A.

Así que el alumno reelabora la cuestión:

"Comparar una compañía como G pero que cobra por segundos el primer minuto y que denominamos H, con la compañía A".

P: Algo más.

Alumno: No.

P: ¿Qué lo comparen todo?.

A: No... solo para llamadas de duración inferior aun minuto, porque lo demás ya lo hemos hecho.

P: ¿Alguna pregunta?

Los alumnos contestan que no, que lo han entendido.

C22.3.2: Que el alumno que ha planteado el problema coordine la puesta en común de los resultados.

PUESTA EN COMÚN

El alumno elige a un grupo y dice al profesor que lo ha elegido otra vez al azar.

Esta vez el alumno pide que expliquen lo que han hecho en vez de directamente el resultado.

El grupo explica que han hallado los precios de llamadas de duración inferior a un minuto para G y lo han comparado con los que ya tenían de A (de la cual no han tenido que hallar ningún precio nuevo) y que vieron que siempre es más cara G.

El alumno pregunta si los demás están de acuerdo.
Contestan que sí, pero un grupo añade que bastó con hallar sólo dos precios (el de 1 segundo y el de 59 segundos) y, como era más caro en ambos, no hacía falta hallar más.

El alumno que coordina explica que quizá por eso ese grupo ha tardado menos (imitando la búsqueda de razones de eficacia que utilizó la profesora anteriormente), pero el tercer grupo (que es el que más ha tardado) interviene diciendo que ellos han tardado porque han encontrado algo interesante: Explican que se dieron cuenta de que la diferencia de precio entre las dos compañías para llamadas de duración inferior a un minuto también era constante y el valor de la diferencia era el mismo que para llamadas de duración superior o igual a un minuto.

P: ¿Por qué vosotros os habréis dado cuenta y los demás no?
Contestan que lo que les hizo darse cuenta fue dibujar la gráfica. Salieron a la pizarra y la hicieron.

Un alumno dijo que también lo podríamos haber averiguado comparando los precios que habíamos hallado (viendo la diferencia). El grupo que había utilizado la gráfica explicó que, por un lado, tendrías que hallar el precio para muchísimas duraciones de llamada para estar seguro de que es siempre la misma y que, además, la cuestión es que tú no te planteas que la diferencia sea constante hasta que lo ves gráficamente. Añaden que incluso en este caso podrían no haber hallado los precios para llamadas de duración inferior a un minuto porque gráficamente se ve que la diferencia es constante y es la misma que para llamadas de duración superior a un minuto, y como la diferencia para llamadas de duración superior ya la habíamos hallado, pues es la misma.

Los alumnos recuerdan al profesor que había tareas pendientes para casa: la profesora tenía que traer las tablas ya rehechas como dijimos el día anterior; ellos tenían que buscar información en Internet sobre cómo elegir la tarifa más barata y tenían que averiguar si el precio por establecimiento de llamada es fijo o variable.
Decidimos comenzar por tratar la cuestión relativa a la búsqueda de información en Internet.

C15 (alumno): Buscar información Internet sobre cómo elegir la tarifa más barata (en grupos) (traerlo el próximo día).

* Esta cuestión surgió durante la segunda sesión y hoy lo han traído.

C15.1: Hacer una valoración del proceso de búsqueda. *¿Cómo habéis buscado la información (con qué palabras clave)?, ¿ha resultado difícil?, ¿habéis encontrado mucha información?...*

Destacan que hay muy poquito y que es difícil encontrarlo. Las palabras clave han tenido que irlas variando. No recuerdan exactamente todas las opciones que probaron, pero sí que muchas daban como resultado 0, cosa que les llamó mucho la atención porque en Internet suele encontrarse mucha información de casi todo.
Han traído dos direcciones de correo electrónico y dos documentos a texto completo (uno de los cuales ya lo había traído en la segunda sesión).

* Es difícil analizarlos o discutir sobre ellos porque los que los han traído no los han analizado en profundidad y además no hay copias (sólo hay una copia a texto completo, una de cada uno de dos documentos y sobre las páginas sólo tenemos las descripciones de los alumnos). Es por tanto muy complejo hacerlo ahora de modo adecuado, por un lado, porque el análisis profundo podría ser muy interesante, y ahora es bastante superficial, y, además, porque al tener sólo una copia de los textos y no tener ningún material de las páginas web, al resto de compañeros les cuesta mucho entender. Como además no queda mucho tiempo, deciden dedicar un tiempo a organizar cómo hacer los análisis y que los trabajen en casa para el próximo día.

C15.2: Organizar el análisis de los documentos. *Resultará muy difícil analizar los documentos ahora porque los que los habéis encontrado no los habéis analizado en profundidad y no hay copias para todos, además, las direcciones de Internet no podemos verlas aquí. ¿Cómo podemos organizarnos para analizarlos?* ***(en grupos).***

PUESTA EN COMÚN

Hay acuerdo en que lo mejor es que ahora cada uno diga a los demás las direcciones de Internet en las que ha encontrado algún documento (todos han traído las direcciones, de modo que basta con que cada de a los demás la dirección del documento que ha traído).

Se discute sobre si cada grupo analiza todos los documentos o se reparten por grupos. Por un lado si todos los grupos lo trabajan, el análisis será más rico, pero, por otro, si analiza cada grupo más podrá hacerlo con menor profundidad. Lo determinante es que ahorraremos esfuerzos, dado que tampoco tienen mucho tiempo para trabajar fuera del taller, y cada grupo analizará uno, aunque todos tendrán los datos (las direcciones de Internet) de los demás documentos por si quieren y pueden "echarles un vistazo".

Plantean que, como son tres grupos y hay cuatro documentos, un grupo tendrá que analizar dos. Se decide que se unifiquen como tarea las dos direcciones de Internet y los documentos a texto completo se quede uno cada grupo.

Ninguno ha pensado sobre **en qué consistirá el análisis**, pero, en gran grupo, concluimos que consistirá en: explicar qué tipo información da el documento, si es correcta la información y qué cosas destacan. La profesora añade que se debe intentar saber el origen de la información, porque puede orientar sobre la objetividad de los datos.

C15.3: Analizar los documentos que hemos encontrado en Internet sobre comparativa de tarifas de teléfonos móviles. *Cada grupo debe, en relación con el documento/s que tienen que analizar: explicar qué tipo de información da el documento, si ésta es correcta/fiable, qué cosas destacan y el origen de la información.* ***(en grupos) (traerlo hecho el próximo día)***

C20.3.4: Averiguar si el precio por establecimiento de llamada es algo fijado por el Gobierno o podría ser diferente en diferentes tarifas (para el próximo día).

* Esta tarea se planteó el día anterior.

Las compañías les han dicho que lo fija cada una. Es decir, podrían no coincidir.

Un alumno plantea ¿por qué coinciden si podrían no coincidir? Uno responde que porque con ese dato, al coincidir en todas las compañía y

tarifas, no es una buena técnica modificarlo. Explica que, como hemos visto, las compañías juegan con diferentes tipos de precios a diferentes destinatarios, diferentes horarios... intentando no coincidir con las demás para no ser directamente comparables y poder así "engañar" mejor. Así, el precio por minuto no varía porque no se puede "jugar" con él: si se baja de precio, la compañía pierde; si se sube, los compradores lo van a notar demasiado fácilmente. Las compañías intentar jugar con tarifas en las que ganen lo máximo posible pero se note lo menos posible.
Les plantea la profesora que "Quizá podríamos analizar, en algún momento más adelante, de qué modos podrían las compañías modificar sus tarifas para intentar ser más competitivas" (en relación con el resto de compañías).

C20.3.3: Rehacer las tablas de datos definitivas (para el próximo día, lo traerá la profesora).

* Esta tarea se planteó el día anterior.

* Ver el *Material 1*: *Tablas con los datos de las diferentes compañías*, donde se presentan las tablas que resultaron.

La profesora da a los alumnos las tablas que ha reelaborado con las conclusiones que se obtuvieron el día anterior. Las analizan un poco y ven que se adaptan a las características que dijeron que debían tener.

Como quedaba poco tiempo, la profesora decide hacer hoy la respuesta a la cuestión generatriz a partir de lo trabajado hoy, porque dejándolo para el día siguiente cuesta más.

* No hemos hecho tablas diferentes, dentro de cada compañía, una para tarifas y otras para contratos, sino que hay una tabla para cada compañía, que incluye tanto tarifas de contrato como de tarjeta.

Responder a la cuestión generatriz a partir de lo hecho en la cuarta sesión (gran grupo).

- Si una compañía cobra un precio X por minuto y un precio Y por establecimiento de llamada y otra el precio Y por minuto y el precio X por establecimiento de llamada (cobrando ambas el primer minuto por segundos), para llamadas de duración superior a un minuto será más cara la compañía en la que el precio por minuto es mayor que el precio por establecimiento de llamada, mientras que para llamadas de duración inferior a un minuto será más cara la compañía en la que el precio por establecimiento de llamada es mayor.
- Si dos compañías cobran el mismo precio por minuto pero diferente precio por establecimiento de llamada (ambas cobran el primer minuto por segundos) es más cara, para cualquier duración de llamada, aquella compañía en la que el precio por establecimiento de llamada es mayor. Además, <u>gráficamente vimos que la diferencia entre las gráficas era constante</u> y llegamos a la conclusión de que el valor de esa diferencia constante es igual a la diferencia entre las dos compañías en el precio por establecimiento de llamada, y esto es porque el precio por minuto es lo que difiere y este se añade siempre completo, para cualquier duración de llamada. Podemos concluir por tanto que la diferencia de precios es la misma y constante cobren las compañías el primer minuto completo o no, en lo único que difere es que cuando cobran el primer minuto por segundos ambas son más baratas.

La clase acaba ya, pero les adelanta la profesora que "El próximo día trataremos una variable importante que vosotros habéis destacado, y que es si se cobra la llamada por pasos de 30 segundos o por segundos".

QUINTA SESIÓN

C15.3: Analizar los documentos que hemos encontrado en Internet sobre comparativa de tarifas de teléfonos móviles. *Cada grupo debe, en relación con el documento/s que tienen que analizar: explicar qué tipo de información da el documento, si ésta es correcta/fiable, qué cosas destacan y el origen de la información.* ***(en grupos) (se dejó como tarea el día anterior)***

* Cada grupo expone el análisis del documento que se le asignó el día anterior.

* La profesora ayuda en los análisis. Es importante haberlos analizado bien previamente para dirigir su análisis. QUIZÁ ES EVIDENTE Y NO HABRÍA QUE DECIRLO.

* Ver *Material 2: Información de Internet sobre comparación de tarifas de telefonía móvil*, donde se incluyen los artículos a texto completo (documentos 1, 2 y 3[1]) e información sobre las páginas (documentos 4 y 5[2]).

Se dedica hoy aún un tiempo al análisis de los documentos, durante la cual la profesora va revisando las conclusiones y el modo en que las han organizado para la puesta en común.

Además, todos los grupos, durante 10 minutos, echan un vistazo a los documentos que han analizado los demás, porque la profesora ha traído fotocopias para todos los grupos de los documentos y también fotocopias de la impresión de algunos aspectos de las páginas web que permitan

[1] Este tercer documento no había sido considerado el día anterior, pero un grupo lo encontró y lo incluyó.

[2] En esta página web la profesora detectó, además del espacio dedicado a datos de las diferentes tarifas que los alumnos presentaron el día anterior, una guía para elegir tarifa, que trajo hoy para analizarla (C15.3.2). Esta guía también está incluida en el ANEXO 2, así como un ejemplo del tipo de respuesta que emite.

entenderlas mejor (excepto el documento 3, que como no lo habían traído el día anterior no había fotocopias de él). Las fotocopias que la profesora dio a los alumnos son las que están en el *Material 2*, excepto, como hemos dicho, las del Documento 3 (que no lo trajo la profesora porque no era un documento previsto).

1) Documento 1, titulado "*Tarifas de telefonía móvil: qué debes considerar al elegir el plan*" tomado de http://europe.justlanded.com/espanol/spain/tools/just_landed_guide/telephone/mobile_phones, (*se puede ver el artículo a texto completo en el Material 2).*

Recuerdan a los compañeros que es el documento que dice "*A no ser que tengas un doctorado en física nuclear, comprender los planes de tarifas de los distintos proveedores del servicio puede resultar todo un reto*" y está dirigido a extranjeros que viajen a España.
También se dice en este documento que "*la mayoría de los planes de llamadas son complejos y están diseñados para confundir*" y da "*claves*" para elegir tarifa. Estas claves son preguntarse:

- A qué hora sueles llamar (mañana, tarde o noche) y simplemente explica que hay "tarifas por horas" y "tarifas universales" (costo fijo a cualquier hora).
- A dónde llamas (líneas fijas o móviles y móviles de tu compañía o de otras) y explica que es importante saber qué operador utilizan tus amigos.

Otros datos que señala el documento son: se aplica un cargo de 0'12 euros por establecer la llamada; hay diferentes cargos por SMS (nacionales o internacionales), a diferencia de otros países donde los internacionales cuestan lo mismo; y se aplica un cargo del 16% de IVA (excepto los SIMs prepagados de Vodafone).

También explica que hay 3 compañías (también Euskatel, pero sólo para el noroeste de España); que es necesario liberalizar el móvil para hablar con él desde fuera de España; que los precios de los terminales varían mucho de una tienda a otra, incluso de la misma compañía; que existen tarifas prepago y contrato; que el beneficio de la tarjeta es que es más fácil controlar el gasto porque compras tarjetas de dinero a medida que las necesitas; mientras que las ventajas del contrato son que pagas a fin de mes, las tarifas son más bajas y venden los terminales más baratos. Como desventaja, el contrato exige estar un año como mínimo o te penalizan.
Para el contrato no piden pruebas de ingresos, sino sólo el DNI o tarjeta de residencia y un estado de cuenta reciente del banco, y muchos exigen que el pago se asocie con una cuenta bancaria.
Sobre qué compañía es la mejor indica:

- Por cobertura: MoviStar y luego Vodafone.
- Por precios: Amena, Vodafone y luego MoviStar.

Y luego da las direcciones de Internet de cada compañía para ver las listas de tarifas. Y también da la dirección de la cadena "Phone House", que hace una compilación de operadores y su revista es gratuita en las tiendas "Phone House".

Destacan:

- Que habíamos considerado en las tablas que había que incluir el IVA, pero no sabíamos cuánto era. Este documento dice que es del 16%. Pero dicen que tendremos que comprobar si este dato es real, si es actual y si es el mismo para todas las compañías. Algunos alumnos dicen que el IVA es algo fijo y que uno no puede elegir cuánto es, de modo que con preguntárselo a una compañía pues ya está. Piden al profesor que se lo confirme y lo hago. Un alumno dice que ha traído una tarifa suya y que pone que el IVA es del 16%.

- Que no sabemos qué son los SIMs prepagados de Vodafone, los cuales, según este artículo, ya tienen incluido el IVA. Han llamado a Vodafone y les han dicho que ningún precio tiene incluido el IVA.
- Que no sabemos cómo deducen qué compañía es más cara/barata. Y que además lo dicen en general, no por tarifas.

CONCLUSIONES TRAS DISCUSIÓN COMÚN

- Hay que indicar en las tablas que el IVA es del 16%.
- No nos da idea de cómo llevar a cabo el proceso de comparación, ya que decir en general qué compañía es más cara/barata no ayuda porque depende mucho de la tarifa. Además, no podríamos fiarnos de lo que dice, que no sabemos ni cómo lo ha hecho.

2) Documento 2: Artículo de la revista CONSUMER titulado "*Conocer los hábitos de uso, clave para elegir el plan más adecuado*". Tomado de http://revista.consumer.es/web/es/20020401/pdf/temaportada.pdf.
Hay una cuestión importante que es un artículo del año 2002 y por tanto respecto a datos concretos de tarifas no podemos fiarnos porque han cambiado desde entonces.
Se trata de un informe que comparar 22 tarifas (los llama "planes") de las 4 compañías que operan en España (considera Euskatel, que sólo opera en el noroeste de España). Es de abril de 2002.

Ellos han destacado información importante:

- La cantidad de clientes de cada empresa: MoviStar duplica y más a Vodafone y Amena tiene aún menos que Vodafone. Dicen que esto es importante porque normalmente las llamadas a tu operador son más baratas y tienes más probabilidad de estar llamando a MoviStar. Pero otros dicen que realmente lo que importa en si tus amigos, a los que más llamas, tienen o no la misma empresa que tú. En eso hay acuerdo.

- Lo que determina la tarifa que mejor se adapta a las necesidades de cada tipo de usuario es: la hora y los días a las que se realizan las llamadas. Dicen que no tienen en cuenta como variable importante "a quién llamas" (fijo, móvil...), ni la duración de la llamada, que también es importante.
- Principal conclusión: "*la enorme dificultad que supone para el consumidor comparar tarifas*" ya que "*se presentan de manera confusa y siguiendo criterios muy dispares*" incluso entre tarifas de la misma compañía.
- Los contratos no siempre ofrecen mejores condiciones económicas aunque se diga para "*captar clientes*".
- Los planes muy baratos en una franja son muy caros en otras.
- En las tablas de precios de las diferentes compañías han encontrado que:

    - Como nosotros, han sacado fuera de la tabla la información común.
    - También saca fuera información sobre cuotas mensuales.
    - No informa sobre mínimos mensuales, ni sobre cuotas de alta (no sabemos si lo había en 2002), ni sobre precios por escuchar mensajes de voz.
    - Los precios (que se indican por minuto) tienen incluido el IVA, pero aparece un valor extraño como precio por establecimiento de llamada: 0'14 euros. No sabían si es que el precio por establecimiento de llamada ha variado desde 2002, porque pensaban en un principio que a lo mejor era 0'12 más el 16% de IVA, pero calcularon el 16% de 0'12 y obtuvieron que es 0'0192 y por tanto el total es 0'1392, y no

llega a 0’14. Pero luego vieron que el documento indica en otro lugar del artículo que MoviStar y Vodafone redondean a 2 decimales, de modo que pensaron que quizá es porque han puesto el precio ya redondeado; pero entonces, dicen, debería haber puesto un precio diferente por establecimiento de llamada para Amena, ya que esta compañía redondea a 6 decimales (como Euskatel).

* Como la profesora había analizado el documento antes, había detectado este problema, y había preguntado en las compañías. Les explica que realmente el redondeo es en la factura final, y no en cada parte. “Imaginaos que redondean en el precio de cada minuto tras añadirle el IVA... El proceso es: calculan el precio de cada llamada, los suman (junto con el precio de los mensaje, la cuota mensual si la hay...), suman al total el 16% de IVA y luego, en la factura final, es donde redondean a 2 o a 6 decimales dependiendo de la compañía”.

* Preguntan **cómo se hace exactamente el redondeo**. Les explico que, en principio, lo que se hace es que se redondea al siguiente superior cuando el siguiente dígito es superior a 5 y se redondea al inferior si es inferior a 5. Si dijeran que se hace “redondeo al alza” significaría que siempre que supere el valor de 0 el siguiente dígito se redondea al valor inmediatamente superior.

- El modo de facturación lo indica fuera de las tablas, en otra parte del artículo. Les llama la atención que indica que Vodafone cobra en todas sus tarifas por pasos de 30 segundos a partir del primero minuto, cosa que ahora no es así. Lo contrario ocurre con Amena, de la cual dice que factura en todas sus tarifas por segundos a partir del primer minuto y en las tarjetas cobra por pasos de 30 segundos. Creen que quizá es porque ha cambiado.

- Para presentar la información sobre precios de cada franja horaria utilizan las divisiones horarias necesarias como columnas y luego dentro de cada celda el precio. Esto les pareció que era cómodo pero se dieron cuenta de que es menos útil si consideras diferentes receptores, porque sería un lío de tabla. Y es que resulta que los precios por minuto que indican en este artículo son los precios medios del precio a cada tipo receptor.

- Para comparar han utilizado cuatro supuestos: llamadas principalmente a) por las mañanas, b) por las tardes, c) a cualquier hora, d) los fines de semana. Han considerado 42 llamadas de 2 minutos de duración repartidas de diferentes modos en función del supuesto. Creen que no es adecuado porque puede variar mucho también de unas personas a otras.
- Responden a qué tarifa es más conveniente fundamentalmente centrándose en la conveniencia de un plan que cobra barato pero exige más gasto mínimo mensual cuanto más barato es el minuto y qué tarifa podría interesar si no se llega a esos gastos mínimos mensuales.
- Destaca algo interesante que es que <u>a veces sale más rentable enviar varios mensajes</u> (hasta 3) <u>que una llamada de un minuto de duración</u>, sobre todo para tarifas que cobran muy caro en un horario.

Cuando ponen un ejemplo un alumno destaca que han dicho que el precio por mensaje es de 0'15, y eso es el precio sin IVA, al menos ahora.

Los alumnos miran el documento y dicen que no indica nada sobre si el precio incluye IVA o no, aunque lo lógico sería que lo incluyera si se compara con el precio de una llamada y en ella sí se incluye.

Creo que es un error pero les explico que podemos preguntar cuál era el precio de un mensaje en 2003 (y en 2002, porque quizá los datos que se utilizaron son de 2002). El documento no indica, como debería, de qué fecha son los datos que ha tomado.

- Sobre "cómo se hizo el estudio":

    - Los supuestos los han dicho expertos como principales hábitos de usuarios de teléfonos móviles.
    - El número, duración y repartición en horarios y días de las llamadas lo han decidido ellos.
    - Se ha considerado que se llama con la misma proporción a los diferentes tipos de receptores (que ya lo hemos dicho antes).
    - No se ha tenido en cuenta el lugar de origen ni de destino de la llamada.

      Esto creen que se refiere, para diferenciarlo de lo anterior, a que no han tenido en cuenta si la llamada es al mismo operador o a otro, pero no están seguros de si esto ya se incluye en lo anterior.

      * Les dice la profesora que realmente sí cree que es redundante y añade que "Además, no creo que no se haya tenido en cuenta, sino que se ha considerado como fijo en vez de variable".

CONCLUSIONES TRAS DISCUSIÓN COMÚN

- No nos podemos fiar de los datos sobre tarifas que encontremos en Internet, sobre todo si no son actuales, aunque sea un artículo que parece serio.
- Las tablas son peores que las nuestras y por tanto no nos aporta nada para mejorar.
- El número de decimales a los que se redondea no lo tendremos en cuenta porque si sólo se redondea en el total de la factura, la diferencia es excesivamente pequeña.
- Es importante tener en cuenta el tipo de receptor, ya que puede variar mucho de una persona a otra. No parece adecuado utilizar un precio medio. La razón que dan además es que se habla, en general, más a móviles (a fijos llamas más desde casa o desde una cabina). Entonces les explico que también puede utilizarse un precio medio ponderado que diera más peso al precio a móviles. Dicen que sería mejor que lo que hace la revista, pero que creen que, si podemos, deberíamos considerar cada tipo de receptor por separado.
- Un alumno añade que la explicación a que no se considere como variable el tipo de receptor (y considere sólo la hora y los días a los que se realiza la llamada) es que luego no tiene en cuenta este dato. Es decir, que han querido simplificar los cálculos considerando un precio medio y para justificarlo han dicho que no es una variable importante.
- Lo mismo ocurre con la duración de la llamada. Como, para simplificar, no van a tener en cuenta diferentes duraciones de llamada, pues dicen que no es importante, pero sí lo es, porque cuanto más larga sea la llamada menos cuesta. Aquí surge un

debate porque algunos alumnos dicen que la duración de la llamada es importante para calcular el precio de una llamada, pero no para comparar, porque todas van reduciendo el precio del mismo modo a medida que se aumenta la duración de la llamada. Concluimos que como información general se podría decir que es más barato hacer una llamada de un tiempo X que dos llamadas de duración x/2 y x/2. Pero surge la duda de si la comparación entre dos tarifas puede ser diferente (ser mejor una u otra) en función de cuántas llamadas se hagan de cuánta duración. Decidimos que en principio sí <u>tendremos en cuenta el dato sobre número y duración de las llamadas</u>. Además, dicen que <u>también sería interesante poder decir a las personas cuánto les costaría exactamente lo que habla con otras compañías</u>, para lo cual necesitaríamos saber cuántas llamadas realiza y de cuánta duración. Entienden que todo se simplifica a medida que generalicemos más aspectos, pero al final resulta que, si se simplifica demasiado, no sirve para elegir a no ser que lo que tú llames se corresponda con el supuesto. Sirve para decir así algo general, pero no creen que para elegir tarifa. Pero realmente se preocupan sobre si es posible utilizar otro modo para responder a la elección de la tarifa, porque nadie lo hace.

* La profesora les explica que "Realmente debemos ir valorando la dificultad del proceso en función del resultado a obtener. Vamos a valorar inicialmente todo lo que querríamos hacer y que veamos inicialmente posible y a medida que vayamos avanzando quizá debemos ir tomando decisiones de simplificación de datos a cambio de reducir la calidad de nuestro trabajo". Además, les recuerda que es como al tomar los datos de las diferentes compañías y tarifas, "Que al principio parecían muchísimos, no sabíamos cuáles eran importantes, cómo organizarlos..., y hemos ido tomando decisiones

que nos han permitido seleccionar y organizar la información. Además, ahora estamos comparando con otros modos de organizarla y, si lo creemos conveniente, la modificaremos".

3) Documento 3: Síntesis de un artículo de la revista CONSUMERISMO, dedicado a comparar tarifas de telefonía móvil http://www.facua.org/facuainforma/2003/7noviembre2003.htm, de 2003. (*se puede ver la síntesis en el Material 2).*

* Este documento no lo habían traído el día anterior, pero el grupo que analizó el documento *2)* encontró este y también lo analizó.

* No saben si es el artículo completo o una síntesis. Han buscado el artículo de la revista, para confirmar si está completo o no pero no lo han encontrado.

Se comparan 32 planes (10 más que el de 2002) e indica que la fecha del estudio es el 30 de septiembre de 2003.

La información importante que han encontrado es:

- El documento <u>indica que compañía tiene la tarifa más cara de diferentes tipos</u>: Tarjeta con precio fijo (MoviStar) y con precio variable (Amena) y cuál en Contrato con precio fijo (Vodafone) y con precio variable (Amena también). Esto <u>sirve de poco para decir a alguien qué tarifa le conviene más</u>. Sólo dice cuáles son las peores.
- <u>Hace una síntesis</u> de lo que ofrece cada compañía, <u>pero sólo describe, no compara realmente</u>.
- La <u>publicidad engañosa</u>. Pone el ejemplo de "Tarjeta Joven" de Vodafone, que sólo cita en su publicidad el precio en horario

reducido (0’06 euros /minuto) y no hace referencia al precio en horario normal (que es 0’80 euros/ minuto).

- Las que son muy baratas para un tipo de receptor suelen ser muy caras para otros tipos de receptor.
- Explica también que el tiempo que duran las recargas es diferente en cada compañía, así como el tiempo tras el cual se anula el teléfono si no se ha utilizado.

  Explican los alumnos que no tenemos información sobre esto, pero se pueden hacer recargas pequeñas y, por ejemplo, enviar algún mensaje justo antes de que se pase la fecha de caducidad. No parece por tanto un gran problema.
- Dice que, tras el primer minuto, las tarjetas cobran por pasos de 30 segundos, los contratos se cobran por segundos. Esto es erróneo porque Vodafone cobra en algunos contratos por pasos de 30 segundos.
- Importante que ofrezca un plan para llamar a números frecuentes más barato.

- Sobre las tablas que presenta:
  - Las tablas indican, para cada tarifa de cada compañía: el consumo o recarga mínima mensual; el precio por establecimiento de llamada, y el coste por minuto lo describen para diferentes tipos de contratos y diferenciando el precio de horario reducido y horario normal.

    En forma de notas indica: si la facturación es por segundos o por pasos de 30 segundos a partir del primer minuto; el horario reducido y normal de cada tarifa; y matices de algunas tarifas, como cobrar diferente precio si se consume más o menos, o los módulos con los que son compatibles, o en qué consisten esos módulos.

Ven más útil nuestro tipo de tablas, sobre todo porque los horarios están indicados en la misma tabla.

- o No incluyen información sobre el precio de los mensajes.
- o Sí les parece muy bien que ponga explícitamente 0 euros cuando algo es gratis, en vez de dejarlo en blanco y provocar la duda.

CONCLUSIONES TRAS LA DISCUSIÓN COMÚN

- Sólo indica qué tarifa es más cara y no explica cómo se ha calculado. En tarifas fijas es fácil: la que cobre más por minuto es más cara, pero en variable, que es lo que más nos interesaría, no sabemos cómo lo han hecho.
- No debemos fiarnos de la publicidad y tenemos que conocer todas las características de la tarifa antes de elegirla. Ni tampoco debemos fiarnos de la información que den algunos artículos como este, que indica que Vodafone cobra en todos sus contratos por segundo.
- Es verdad que es importante que tengan un plan para números frecuentes pero, dada la dificultad de compararlas y el hecho de que todas tienen este tipo de plan, no lo tendremos en cuenta.
- Se reafirman en que es importante, en las tablas de datos, no dejar espacios en blanco, que provocan la duda sobre si es gratuito o es que no pone cuanto cuesta.

4) Documento 4: Datos en la página personal de "CHENTE" sobre las "tarjetas prepago" y "contratos" y "prefijos de teléfonos móviles de cada compañía". En http://www.fut.es/~chente/moviles.html.

* Los documentos 4 y 5 (que son dos direcciones de Internet, no artículos) los analiza el mismo grupo.

En esta dirección de Internet no se comparan tarifas, sólo se expone información. Hay cuatro bloques de información:

a) Prefijos. En principio es interesante porque indica de qué compañía es un teléfono móvil a partir de conocer los 3 primeros dígitos del número. Pero realmente no parece un dato muy importante dado el hecho de que puedes trasladarte a otra compañía manteniendo tu número original.
b) Tarifas Prepago. Ofrece diferentes tablas según la tarifa reducida sea:
    - Desde las 16 horas.
    - Dentro de la provincia.
    - A la misma compañía.

    Organiza la información, pero ofrece 3 tablas y cada una responde a un criterio diferente y además están organizadas de modo diferente. En cada tabla elige las tarifas que correspondan (al menos una de cada compañía). (*se pueden ver estas tablas en el Material* 2).

    Sobre cómo son las tablas, en general:

    - Todas coinciden en presentar una rectángulo central donde están marcadas exteriormente las franjas horarias del día y en el interior están los precios que corresponden a cada franja
    - No indica en qué unidad se dan los precios. Se suponen que son céntimos porque si no serían precios desorbitados, pero no dice nada al respecto.

- No dice si está incluido el IVA o no.
- Parece poco fiable porque a la izquierda de cada tarifa indica el precio por establecimiento de llamada y en todos los casos pone que son "20" (suponemos que céntimos, porque no pueden ser 20 euros, pero es que además serían 12 (sin IVA) o, como mucho, 0'1392 (con IVA).

b.1) Barato a partir de las 4 de la tarde: una sola tabla.
b.2) Barato en una misma provincia: ofrece tres tablas: a fijos de la misma provincia, a fijos de otra provincia, a móviles de la misma operadora, a móviles de otra operadora y desde fuera de la provincia.
b.3) Baratos entre móviles de la misma operadora. Tres tablas: a móviles de la misma operadora, a fijos y a móviles de otras operadoras.

c) Tarifas de Contrato: explican que está en construcción, así que no han podido analizarla.

CONCLUSIONES TRAS LA DISCUSIÓN COMÚN

- Los datos que da no parecen muy fiables.
- Tampoco parece muy útil la forma como da la información en las tablas, ya que lo subdivide demasiado, en vez de presentarlo a la vez para que se pueda comparar y el utilizar una tabla diferente para cada receptor nos parece menos adecuado que el modo que hemos usado nosotros.
- Los prefijos tampoco parecen importantes, porque hoy día puedes pasarte de una tarifa a otra sin modificar el número.

5) Documento 5: Datos de diferentes compañías de telefonía móvil en TELTARIFAS

http://www.teltarifas.com/particulares/perfil.php3?telid=205&head=movil.

* *Se puede ver en Material 2 un ejemplo de cómo se expone la información de una tarif*a.

- Ofrece información sobre particulares y empresas, pero nos hemos centrado en "particulares".
- Teltarifas ofrece información sobre telefonía fija, telefonía móvil e Internet.
- No compara, sólo ofrece información de las diferentes tarifas, pero la información es muy completa y parece fiable.
- Un problema es que no ofrece la información de las diferentes tarifas, al menos de la misma compañía, a la vez, sino que la información de cada tarifa está en una página distinta.

  * Les pregunto qué quieren decir con que "es un problema" y explican que es un problema porque dificulta comparar las tarifas.
- El modo de dar los precios por minuto es como la de 4), pero al dedicar una página a cada tarifa queda más claro que con la otra, donde encima se mostraban varias tarifas a la vez. Es decir, muestra, para cada tarifa, por separado, los precios para cada tipo de receptor y también por separado (dos rectángulos pegados) diferencia si es para diario o fin de semana. (*se puede ver en el Material 2 un ejemplo de cómo organiza la información*)
- Ofrece una descripción general de cada tarifa (precio de la cuota de alta si tiene, gasto mínimo mensual, módulos con que es compatible...). Esto, si está actualizado, puede ser útil.

- Da los precios en euros (como nosotros), pero lleva a confusión el hecho de que siempre indique cuatro decimales, a pesar de que siempre, para todos los precios, los dos últimos dígitos son ceros. No entienden por qué.
- No indica si el precio es con o sin IVA. Suponemos que sin IVA porque el precio por establecimiento de llamada que indica es 0'12 y por tanto suponemos que en el precio por minuto tampoco está incluido el IVA. Pero debería indicarlo.
- Hay algo que creen que es difícil de interpretar y es que en la facturación pone, por ejemplo, "60/1", "1/1". Explican que han deducido, después de mirar los datos de varias tarifas, que "60/1" es que se cobran el primer minuto (60 segundos) completo y luego por segundos (1 segundo); "1/1" siempre aparecía en los mensajes y debe interpretarse, creen, como que los cobran de uno en uno (pero es un modo muy raro de ponerlo). Lo que les ayudó a darse cuenta es que miraron las tarjetas y en ellas ponía "60/30", y entonces vieron que podía ser que cobran el primer minuto completo y luego por pasos de 30 segundos.

  Pero creen que, en cualquier caso, la página debería incluir una explicación para interpretar los datos, porque ellos antes de este curso no habrían sabido interpretarlo porque no sabían que unas cobraban por segundos y otros por pasos de 30 segundos después del primer minuto.

CONCLUSIONES TRAS LA DISCUSIÓN COMÚN

- Parece interesante para consultar quizá algún dato, aunque siempre será mejor confirmarlo con la empresa.
- Respecto al modo de dar la información nos parece también mejor el nuestro con el objetivo de comparar tarifas, aunque podemos decir a la persona que le aconsejemos que posteriormente vaya a

esta página a profundizar en las características de su tarifa (módulos compatibles...), ya que está mejor organizado que en las páginas de las propias operadoras, aunque deberá finalmente confirmar las condiciones con la operadora.

* En "Teltarifas" se presenta una "guía para elegir tarifa". No es estraño que no la hayan encontrado los alumnos porque la profesora la encontró como acceso directo durante una búsqueda en Google, pero no ha detectado tampoco él cómo se puede acceder a esta página desde la página principal.

Les explica la profesora que es interesante que en TELTARIFAS se presenta una guía para elegir tarifa (en http://www.teltarifas.com/particulares/pasoapaso_movil.php3?) (*se puede ver en Material 2 la estructura de esa guía y un ejemplo de tipo de respuesta*). La profesora da a los alumnos fotocopias de la información que se presenta en esta guía (tomada directamente de Internet sin modificar nada, tal como se presenta en el *Material* 2), así como fotocopias de un ejemplo del tipo de respuesta que dan.

C15.3.2: Analizar la guía para elegir tarifa de TELTARIFAS. Analizar qué datos piden, qué opciones de elección plantean y qué tipo de respuesta dan (en grupos). (para el próximo día)

La profesora les comenta que pueden entrar en la dirección de Internet si lo creen conveniente para investigar un poco la página y tener más información que la dada en las fotocopias.

SEXTA SESIÓN

C15.3.2: (continuación) Analizar la guía para elegir tarifa de TELTARIFAS. Analizar qué datos piden, qué opciones de elección plantean y qué tipo de respuesta dan (en grupos).
(alumnos) Comparar los datos sobre las tarifas con los de nuestras tablas.

Dedican en clase un tiempo a finalizar el trabajo en grupos.

PUESTA EN COMÚN

Los datos que piden son: el tipo de usuario, el destinatario de la llamada, el día y la hora en que se realizaría, si se desea el precio con o sin IVA, y el tipo de tarifa que se desea (contrato, tarjeta, bono).

Las opciones de elección son:

- Tipo de usuario: creen que, como no hay opciones a "pinchar", habrá que escribirlo manualmente.

  * Les explica la profesora que no hay que elegirlo porque ya estamos situados en la guía correspondiente a "particulares". No está bien explicado, pero debe ser que debes ir a otra página (aunque la profesora no la ha encontrado), que está dirigida a "empresas".
- Tipo de llamada, que es elegir destinatario de la llamada. Destacan que:
  - Creen que aquí se denomina interprovinciales a lo que en nuestras tablas denominamos nacionales. Preguntan a la profesora si es exactamente lo mismo y les dice que sí.

  - Importante que consideran el tipo de móvil al que se llama y también da la opción de elegir móvil sin definir cuál por si no lo sabes (te cobran la tarifa más cara que halla).
  - Países no nos interesa porque no lo tendremos en cuenta.
- Día en que se efectúa la llamada. Te dicen además qué días son festivos para que puedas elegir mejor entre lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo o festivo.

  Un grupo dice que no entiende por qué diferencian entre cada día de la semana de los de diario, ya que todas las tarifas unifican tarifas de lunes a viernes (ninguna diferencia precios entre diferentes días de diario).
- Hora de la llamada. Cada opción abarca una hora (0-1, 1-2,..., 23-0).
- Permite elegir entre el precio con IVA o sin IVA.
- Finalmente permite elegir el tipo de acceso a la red telefónica, esto es, si es desde contrato, tarjeta o algún bono.

Respecto a la información que se obtiene como respuesta, lo que indica es, para las tarifas más baratas que ha encontrado, y para la más cara:

- cuál es el precio por minuto,
- a qué operadora corresponde,
- cuál es el nombre del plan (lo que nosotros denominamos tarifa),
- el modo de acceso (que no saben lo que es pero no parece importante no influye en el precio, que es lo que nos importa). La profesora les explica que ha estado intentado averiguarlo, pero no lo ha encontrado.
- el precio por establecimiento de llamada.
- en "Alta" tampoco saben a qué información se refiere. Cuota de conexión no es porque, si no, debería ponerlo en el ejemplo, ya que son contratos y tienen un precio por conexión. Tampoco parece que sea el "alta" a módulos porque "a2" es un módulo y también tiene

el espacio vacío. Dicen que quizá es para bonos, pero les explica la profesora que también ha estado probando y que no ha encontrado ningún caso en que aparezcan datos relativos a esa columna.

- Fact. se refiere al modo de facturación: en la primera parte indican cuántos segundos se cobran completos y en la segunda parte cómo son los pasos (cuántos segundos) a partir del tiempo que se cobra completo.

Valoración del tipo de respuesta:

- Indicar como más cara o barata una tarifa considerando solamente el precio por minuto no parece adecuado, ya que, por ejemplo, el hecho de cobrar por pasos de 30 segundos o por segundos es importante en el precio final. Entonces, para determinar qué compañía es más barata, habrá que tener en cuenta la duración de llamada, para que se pueda considerar el tipo de facturación.

Algunas cuestiones que les han llamado la atención sobre el tipo de respuesta que emiten son:

- Al final del documento de respuesta hay un error, porque dice que el precio está en pesetas, a pesar de que está en euros.
- Hay, tras presentar las tarifas más baratas, y antes de la más cara, un espacio en blanco donde pone "Hay 7 tarifas en la base de datos". Esto no lo entendían porque veían que había más de 7 tarifas, pero dedujeron que lo que significa es que, además de las más tarifas más baratas y la más cara, aún quedan 7 tarifas en la base de datos de la página, que no han sido consideradas en el análisis porque sus precios no son ni los más baratos ni el más caro. Los demás estamos de acuerdo con la explicación.

Otras cosas que detectan, fruto de la comparación con los datos que conocemos (que tenemos en las tablas) de las diferentes tarifas:

- El que incluyan en el listado tanto tarifas como módulos y sin especificar sus características es engañoso. Lo dicen porque se incluye en módulo "a2" de Vodafone sin especificar ni que cuesta 6 euros darse de alta ni que sólo se puede llamar a ese precio a un número y ese número tienen que ser además de Vodafone.
- Un grupo dice que, además, el módulo "a2" es para cualquier tarifa, y te facturarán por tanto por segundos o por cada 30 segundos (después del primer minuto) dependiendo de la tarifa que tengas. Sin embargo, pone que el modo de facturar es por pasos de 30 segundos solamente. Pero otro grupo señala que realmente eso no es un error si tenemos en cuenta que hemos elegido "contrato" como tipo de tarifa y que según sus datos todas las tarifas de contrato de Vodafone cobra por pasos de 30 segundos.
- Precisamente han puesto que todas las tarifas de Vodafone cobran por pasos de 30 segundos, a pesar de que sus Contratos Universales cobran por segundos.

Las conclusiones a las que llegamos son:

- El modo que aquí se utilizar para comparar tarifas es bastante pobre. Podrían pedir solo un dato más, la duración de la llamada, y ya podría decir el <u>precio de la llamada (en función de la duración)</u>. No sólo porque sea un dato más interesante, sino también porque el precio por minuto es engañoso si no <u>se tiene en cuenta el tipo de facturación</u> (por segundos o por pasos de 30 segundos).

- Nosotros no tenemos que diferenciar tipos de usuario porque sólo lo haremos con las tarifas para particulares.

- No es suficiente con saber si la llamada es a móviles, sino que es importante saber a qué compañía pertenece ese móvil porque si es de la tuya te cuesta menos que si es de otra.
- Hay que tener en cuenta también el día y la hora a la que se realiza la llamada, ya que los precios por minuto varían.
- Que no indique el precio de alta tampoco parece muy importante, ya que se paga solo una vez al principio. Bastará con indicar cuál es el precio de alta en algún lugar pero no será necesario tenerlo en cuenta en el precio de la llamada.
- Un alumno pregunta si podríamos crear una página de este tipo pero donde tuviéramos en cuenta la duración del minuto, dado que no hay ninguna en Internet que lo haga. Esto causa un gran revuelo. La profesora les explica que podemos intentar colgar el resultado de nuestro trabajo en la red pero lo importante es elaborarlo. Se preocupan por el sitio desde el cual se colgaría, sobre quién cobraría (si se cobra) por cada persona que acceda a la página..., sobre quién elaboraría la página. La profesora les dice que estudiará la posibilidad de colgarlo, pero que primero hay que saber el tipo de información que colgaremos para ver qué tipo de programas y soporte necesitamos para colgarlo. Los alumnos se muestran muy contentos.

P: Pero ¿qué creéis más adecuado para indicar qué tarifa es la más barata? ¿Indicar el precio de una llamada (considerando todos los datos que hemos dicho, incluida, claro, la duración de la llamada) o indicar el precio total de una factura mensual (semejante a lo que se hacía el Documento 2)?

La mayoría se inclinan por el precio de una llamada, ya que es una respuesta clara. Además, explican que en el documento 2 vimos que tener en cuenta “clientes tipo” es poco útil, porque o eres exactamente un cliente tipo o no te sirve la comparativa.

P: ¿Pero tendría ventajas trabajar con el precio mensual de la factura en vez de con el precio de una llamada?
Todos consideran que sí sería mejor tener en cuenta la factura mensual en vez de el precio de una llamada, pero insisten en que los clientes tipo no “funcionan”.

P: ¿Qué ventajas tendría trabajar con el precio mensual en vez del precio de una llamada?
Coinciden en que la ventaja es que puede ser que con cada tarifa un tipo de llamadas de las que realizas te salga más barato pero otro tipo de llamadas mucho más caro. Así que nosotros podríamos decir a la persona cuánto le cuesta una llamada y luego ella tendría que considerar cuántas llamadas realizan de cada tipo y multiplicar para saber al mes cuál le sale mejor.

P: ¿Y eso no podríamos tenerlo en cuenta nosotros?
Responden que no porque no lo sabemos. Cada persona es diferente. La opción es utilizar clientes tipo pero ya hemos visto que eso no es útil.

P: ¿Y no creéis que igual hemos pensado en pedirles datos sobre la duración de una llamada podríamos hacer otras preguntas a las personas, como cuántas llamadas realizan de cada tipo, como acabáis de decir?
Dudan un poco porque les parece muy complicado. Dicen que tendría que decir la persona, para cada tipo de llamada (a un tipo de receptor, de una duración...) cuántas realiza al mes, y eso es muy complicado. Añaden que las personas, además, no saben exactamente la duración, por ejemplo, de todas las llamadas que realizan al mes.

* Han tomado como base el cálculo del precio de una llamada y, curiosamente, han deducido que para calcular la factura mensual habrá que multiplicar el precio de cada tipo de llamada por el número de llamadas de ese tipo. Eso implicaría considerar el número de llamadas de cada tipo. El tipo de llamadas posibles, considerando también la diferencia en la duración, serían una cantidad casi infinita.

La profesora les dice que lo vayan pensado. Que a medida que avancemos deberemos ir concluyendo si podemos informar sobre factura mensual, ya que hemos visto que es lo que parece más conveniente, aunque también lo más complejo; y también sobre qué datos deberíamos pedir para poder informar a la persona de cuánto le costaría su factura mensual con cada compañía.

C25: Ir pensando si es posible considerar la factura mensual como medio de comparación de tarifas. Es decir, qué datos necesitaríamos pedir a cada persona para poder responderle, considerando la factura mensual, qué tarifa de qué compañía le interesa más. (ir pensándolo a medida que avancemos).

Responder a la cuestión generatriz a partir de lo hecho en la quinta sesión (y parte de la sexta, hasta la C.13.3.2) (gran grupo).

Los modos de repuesta que hemos encontrado en Internet o en las mismas compañías de telefonía móvil a la cuestión de elegir la tarifa más barata no nos satisfacen. Las propuestas de respuesta que planteamos son:

1) Los precios de la llamada con cada tarifa, considerando también la duración y no sólo dando por separado los diferentes datos de cada tarifa sino dando un precio final.

- <u>Considerar la duración de la llamada</u> es importante para que se vea la influencia del modo de facturación (pasos de 30 segundos o por segundos).
- <u>Dar un precio final</u> es importante porque si no la persona tendría que calcularlo y entonces no tendría éxito.
- <u>Que el precio final incluya el precio por establecimiento de llamada</u>, es importante porque, aunque es un dato igual en todas las tarifas, incluirlo cuesta poco trabajo y a cambio la persona recibe un dato real de lo que le costaría esa llamada.

* Hubo un poco de dificultad de acuerdo a este respecto porque algunos alumnos decían que nuestro objetivo es comparar tarifas, y por tanto los datos iguales en todas ellas, dado que no van a diferenciar entre tarifas, no es necesario tenerlos en cuenta. Pero finalmente les convencen otros alumnos que defienden que ya que estamos haciendo este trabajo, por poco más podemos de paso dar para cada tarifa un precio lo más realista posible y seguro que así lo ven más interesante las personas que entren en la página web. La profesora resume entonces que nos interesa tanto la comparación como la exactitud (realidad) de los datos a comparar.

- <u>Dar el dato (el precio por duración de la llamada) de todas las tarifas</u> (y no sólo de la más barata y la más cara o de algunas de ellas). Es importante para que la persona pueda elegir la tarifa considerando, si quiere, otras variables. Puede decidir, por ejemplo, si hay poca diferencia entre dos tarifas, coger una porque tenga más amigos que la tienen o porque tienen más cobertura, o porque no le valga la pena por la diferencia cambiar de compañía...

- El precio mensual con cada tarifa. Esta propuesta se considera más adecuada pero también parece muy complejo abarcarla o poco útil según cómo se concrete:
    - A) Que las personas nos digan primero el tipo de llamadas que realizan (calcular el precio de una llamada como en la opción anterior, teniendo en cuenta todos los datos, incluidas la duración de cada llamada) y luego multiplicar cada tipo de llamada que realiza por el número de veces que las realiza al mes.

      Esta opción parece excesivamente trabajosa o incluso inabarcable (sobre todo para la persona que tiene que decir qué diferentes tipos de llamada realiza y cuántas de cada una) porque realizamos muy diferentes tipos de llamadas.

      * Hay que notar que esta propuesta implica que la persona primero indique todos los tipos de llamada que realiza (diferenciando además por duraciones de las mismas), lo que puede implicar calcular el precio para un montón de llamadas de diferentes características y luego debe decir además cuántas realiza de cada tipo.
    - B) Considerar clientes tipo. Pero esta opción parece realmente poco útil, porque, afirman, o eres un cliente tipo o no es válido para ti.
    - C) Estamos buscando qué datos necesitaríamos pedir a una persona para poder averiguar su factura mensual sin que

fuera de ninguno de los dos modos planteados anteriormente.

- Queremos publicar la propuesta final en una página web. Esto implica que no bastará con que una persona nos dé datos a nosotros y nosotros calculemos qué tarifa le conviene más, sino que deberíamos colgar un dispositivo en Internet que responda automáticamente a las personas sobre qué tarifa les conviene más.

C15.3.1 (alumno-profesor): Averiguar cuál era el precio de un mensaje de móvil a móvil nacional en 2002 y 2003.

Un alumno recuerda que habíamos planteado esta pregunta el día anterior. Dice que ha llamado a MoviStar y le han dicho que no tienen constancia de los datos anteriores a los actuales, pero que creen que el precio por mensaje no varía desde el año 2000.
De todos modos concluimos que no es un dato fundamental (era sólo para saber si el dato que el documento daba era con IVA incluido o sin él). Sabemos el precio actual, que es el que más nos interesa.
De todos modos, si alguien lo averigua, nos lo dirá a los demás.

* La profesora les recuerda la importancia que hemos dado al hecho de que las diferentes tarifas cobren por pasos de 30 segundos o por segundos. Que es importante lo dedujimos por comparación con el hecho de que las tarifas cobren el primer minuto completo (que es como un gran paso de 60 segundos al comienzo), pero ahora vamos a estudiar la influencia real de esta variable en el precio de una llamada.

C26: La facturación por pasos de 30 segundos. Comparación de tarifas que facturan por pasos de 30 segundos y por segundos.

C26.1: Previsión *¿Cómo creéis que influye el que una tarifa utilice pasos de 30 segundos en vez de por segundos?* ***(gran grupo).***

Acuerdo en que es más cara la tarifa que cobra por pasos de 30 segundos, ya que en cuanto hablas un segundo de los siguientes 30 ya te cobran los 30.

C26.1.2: Pero ¿será más rentable en todos los casos? (gran grupo).

Al principio entendieron la pregunta como "para todos los precios por minuto" y respondieron que sí, que es más rentable sea cual sea el precio por minuto, siempre que comparemos compañías que cobran el mismo precio por minuto, claro, solo que una cobre por pasos de 30 segundos y la otra por segundos.

Entonces la profesora añadió:

C26.1.3: ¿Y para todas las duraciones de llamada? (gran grupo).

La respuesta inicial es que sí, pero luego añaden que puede ser que, si la llamada es de una duración "exacta", cuesten lo mismo. Explican que, como ocurría con las tarifas que cobran el primer minuto completo frente a las que cobran el primer minuto por segundos (aunque realmente no existen en telefonía móvil, pero podrían existir), en el precio de un minuto justo coinciden los precios.

C26.2: ¿Cómo podemos comprobar si es así? (gran grupo).

Varios alumnos dicen que comparando dos tarifas, que sean iguales menos en que una cobra por pasos de 30 segundos y la otra por segundos.

C26.2.1: ¿Por ejemplo? (gran grupo).

Inicialmente se quedan callados. Preguntan "¿Qué planteemos nosotros un problema?".

Les contesta la profesora que deben buscar un modo de analizar el efecto de cobrar por pasos de 30 segundos en el precio de las llamadas.

C26.2.2: ¿Qué necesitamos? (gran grupo)

Dicen que los datos de dos compañías, que coincidan en todos los datos excepto en que una factura por pasos de 30 segundos y la otra por segundos.

Dicen que podríamos utilizar una de las compañías que ya hemos utilizado anteriormente y compararla con otra igual pero que cobre por pasos de 30 segundos.

C26.2.3: ¿Cuál podríamos coger y por qué? (gran grupo).

Revisan un poco las compañías que hemos analizado hasta ahora.

Un grupo dice que podría ser la primera (compañía A) porque en principio sirve cualquiera y esta por lo menos considera el precio por establecimiento real de las compañías ahora mismo.

P: ¿Entonces el criterio ha sido la semejanza con los datos reales en el establecimiento de llamada?

Contestan que sí.

Pero otro grupo dice que mejor, para que se asemeje más a los datos reales y ver así mejor el efecto, podríamos coger la Compañía E, que es como la Compañía A pero cobra el primer minuto completo.

C26.2.4: Enunciar la tarea (cuestión) por escrito (en grupos).

PUESTA EN COMÚN

Cada grupo enuncia la cuestión tal y como lo ha planteado y se apuntan las propuestas en la pizarra. Las propuestas son:

a) Hay que comparar la Compañía E, que analizamos anteriormente, con una compañía igual pero que cobra por pasos de 30 segundos en vez de por segundos.
b) Tenemos una Compañía E que cobra 0’12 euros por establecimiento de llamada y 0’15 euros por minuto, y además cobra por segundos a partir del primer minuto, que lo cobra completo. Y tenemos otra compañía, la Compañía L, que es igual que la compañía E pero se diferencia en que cobra por pasos de 30 segundos a partir del primer minuto. Comparar los precios de las dos compañías.
c) Considerar una Compañía L que es igual que la Compañía E excepto en que cobra por pasos de 30 segundos a partir del primer minuto y comparar las dos compañías en función del precio según la duración de las llamadas.

Se deduce que todas serían válidas para plantear la cuestión, pero que vamos a analizar cuál podría ser la opción más correcta. Concluimos que la opción más correcta podría ser tomar el principio de la b), que describe claramente las características de las dos compañías, pero tomar también el final de la c) porque es más claro respecto a lo que hay que comparar (los precios de las llamadas según la duración en las dos compañías). Por tanto, la tarea finalmente queda enunciada:

Tenemos una Compañía E que cobra 0’12 euros por establecimiento de llamada y 0’15 euros por minuto, y además cobra por segundos a partir del primer minuto, que lo cobra completo. Y tenemos otra compañía, la Compañía L, que es igual que la compañía E pero se diferencia en que cobra por pasos de 30 segundos a partir del primer minuto. Comparar las dos compañías en función del precio según la duración de las llamadas.

Hay alumnos que dicen que es evidente que para comparar las compañías hay que utilizar el precio de la llamada en función de la duración. De hecho, explican los que han planteado la opción c), han imitado el formato de tarea que se ha planteado en el resto de clases para comparar tarifas. Pero al final convencen los que dicen que han creído importante decirlo por que hemos visto en Internet que hablan de comparación de tarifas y no dan el precio por llamada en función de la duración.

C26.3: Comparación de dos tarifas (una cobra por segundos y la otra por pasos de 30 segundos) siendo las tarifas coincidentes en el precio por minuto y en el precio por establecimiento de llamada. (alumnos) *Tenemos una compañía E que cobra 0'12 euros por establecimiento de llamada y 0'15 euros por minuto, y además cobra por segundos a partir del primer minuto, que lo cobra completo. Y tenemos otra compañía, la Compañía L, que es igual que la Compañía E pero se diferencia en que cobra por pasos de 30 segundos a partir del primer minuto. Comparar las dos tarifas en función del precio según la duración de las llamadas* ***(en grupos). Gráfico 13***

C26.3.1: Cómo realizaréis la comparación (gran grupo).

Algunos alumnos dicen que "Como las veces anteriores. Podemos calcular el precio en diferentes duraciones de llamada (de 1 minuto, 2, 3, 5, 10, 15 y 30)... Bueno... y también para duraciones de llamada que no sean de duraciones exactas, por ejemplo, 1 minuto y 20 segundos,... Y nos saldrá que cuestan igual excepto cuando la duración es de 30 segundos, 1 minuto, 2 minutos, 3 minutos, 1'5 minutos,..."
Hay alumnos que le corrigen en que 30 segundos cuesta igual no porque sea múltiplo de 30 segundos, sino porque el primer minuto cuesta lo mismo todo él en las dos compañías.

Otro alumno dice que si lo hacemos así "¿con cuántos datos habrá que probar?".

Los alumnos anteriores dicen que si ves que se cumple para unos cuantos pues ya sabes que se cumple siempre. Hay una discusión en la que la profesora indica que mostrar que es verdad en unos cuantos casos no es suficiente para afirmar que ocurre siempre.

Entonces <u>un grupo dice que con la gráfica si se muestra si se cumple siempre</u>.

Pero otros alumnos dicen que aún no han visto ese tipo de función (la de por pasos de 30 segundos).

La profesora les dice que vamos a intentar hacerlo gráficamente aunque no hayan dado esa función.

Ellos dicen que siempre han visto primero la función escrita y luego gráficamente, pero acceden a intentarlo.

DURANTE EL TRABAJO EN GRUPOS

En todos los grupos deducen que hay que horizontalizar los segmentos correspondientes a cada 30 segundos, pero surgen dudas respecto a en qué valor (en qué precio) se horizontaliza. Algunos creen, curiosamente, durante un momento, que en el precio intermedio (por ejemplo, que en el segmento de 1'5 minutos a 2 dos minutos la línea horizontal se sitúa en el precio de 1'75 minutos), pero al final todos los grupos realizan las gráficas correctamente.

Un grupo propone al profesor calcular también la diferencia de precios entre una compañía y otra en las diferentes duraciones de llamada. Dicen que han visto gráficamente que hay una diferencia que querrían averiguar de cuánto es. Pero preguntan si lo pueden hacer, si es posible. Les dice la profesora que lo plantearemos tras poner en común la solución a la cuestión que estamos analizando ahora, y que vayan pensando como enunciar la cuestión.

PUESTA EN COMÚN

El grupo que expone explica que lo ha deducido por semejanza con el precio del minuto completo frente al precio del primer minuto por segundos, donde lo que hacíamos era "hacer una línea recta en el precio de un minuto para todas las duraciones de llamada entre 0 y un minuto". Ahora han hecho lo mismo pero con fragmentos de 30 segundos. Explican además que no han tenido que calcular numéricamente el precio de ninguna llamada para hacer la gráfica.

Explican que así (a partir de la gráfica) si podemos afirmar que la compañía L será más cara que la compañía E para cualquier duración de llamada excepto para los múltiplos de 30 segundos, donde coinciden los precios de ambas.

Otro grupo corrige su conclusión diciendo que también serán iguales los precios para llamadas de duración de 1 segundo hasta un minuto.

Los alumnos que habían planteado averiguar la diferencia de precios entre las dos tarifas enuncian la cuestión:

C26.3.2: (alumnos) Cuál es la diferencia de precio entre las llamadas de las diferentes duraciones. ¿Siguen una regla? Como el precio por establecimiento de llamada es el mismo, la diferencia tienen que deberse al precio por minuto solamente.

* Añaden una "pista".

Lo abordaremos el próximo día.

SÉPTIMA SESIÓN:

C26.3.2: (alumnos) (continuación) Cuál es la diferencia de precio entre las llamadas de las diferentes duraciones. ¿Siguen una regla? Como el precio por establecimiento de llamada es el mismo, la diferencia tienen que deberse al precio por minuto solamente.

Implica bastante dificultad para algunos alumnos.
Implica bastante dificultad para algunos alumnos.
Dos grupos explican al profesor que han analizado la gráfica y han deducido que la diferencia es máxima cuando pasamos un segundo de los siguientes 30 a partir de un múltiplo de 30 segundos (a partir de un minuto, claro), pero les cuesta averiguar cómo calcular esa diferencia.
Un alumno de otro grupo, que ya lo han traído hecho de casa, lo oye y contesta, como dando una pista "A ver..., si la llamada dura 1 minuto y un segundo, la compañía L está cobrando 29 segundos de más que la compañía E. Si dura 1 minuto y dos segundos, 28 segundos de más... Pues entonces...". Para el otro grupo parece que resultó muy esclarecedora la "pista" y dijeron que ya podían seguir ellos.

PUESTA EN COMÚN

El grupo que expone indica que la diferencia es de:

- 0'0025 euros para las llamadas cuya duración sea de 29 segundos sobre los múltiplos de 30 segundos (por ejemplo, para las llamadas de 1 minuto y 29 segundos, de 1 minuto y 59 segundos, de 2 minutos y 29 segundos).
- 0'0050 (0'0025 x 2) euros para las llamadas cuya duración sea de 28 segundos sobre los múltiplos de 30 segundos (por ejemplo, para 1 minuto y 28 segundos, 1 minuto y 58 segundos).

- Así hasta 0'0725 (0'0025 x 29) euros para llamadas cuya duración sea de 1 segundo sobre los múltiplos de 30 segundos (por ejemplo, llamadas de 1 minuto y 1 segundo, 1 minuto y 31 segundos).

Respecto a cómo lo han hecho, les costó un poco, en cuanto a terminología, explicarlo, pero lo que hicieron fue: primero vieron en la gráfica que la diferencia más pequeña, dentro de cada segmento de 30 segundos, es cuando te acercas a la mayor duración de llamada; después, como sabían que la diferencia se debía al precio por minuto porque el precio por establecimiento de llamada era el mismo en las dos compañías, calcularon cuánto costaba un segundo (sin tener en cuenta el precio por establecimiento de llamada, dividiendo 0'15 entre 60), vieron que era 0'0025; luego multiplicaron 0'0025 por 30, lo sumaron al precio de un minuto y vieron que el resultado coincidía, claro, con el precio de 2 minutos; finalmente confirmaron que también se cumplía con la diferencia con otro ejemplo, esta vez con el fragmento de 3'5 y 4 minutos y ya lo dedujeron en general.

Un segundo grupo dice su proceso ha sido diferente. Primero calcularon el precio de las llamadas en L de duración de 1, 1'5, 2, 2'5, 3, 3'5, 4, 4'5 y 5 minutos (sólo tuvieron que calcular 1'5, 2'5, 3'5 y 4'5, porque los otros ya estaban calculados anteriormente). Vieron que la diferencia siempre era de 0'075 euros. Después calcularon el precio en la Compañía E para 61, 62, 63, 64 y 65 segundos. Vieron que la diferencia siempre era de 0'0025 euros. Restaron entonces el precio de 61 segundos en E al precio de 61 segundos en L (que es el precio de 1'5 minutos). Luego hicieron lo mismo con 62 segundos, 63, 64 y 65. Vieron que la diferencia era de:

- 0'0025 para las llamadas cuyo "pico" es de 29 o 59 segundos.
- 0'0025 x 2 = 0'0050 euros para las llamadas cuyo "pico" es de 28 o 58 segundos.
- ...

- 0’0025 x 29 = 0’0725 euros para las llamadas cuyo “pico” es de 1 o 31 segundos.

El tercer grupo dice que ha dado la respuesta de modo más general y escribe en la pizarra:

> Diferencia = 0’0025 x (el resto de dividir la duración de la llamada entre 30)

P: ¿Habéis probado que funciona?
Dicen que sí.
P: ¿Con qué duraciones de llamada?
Con 73 segundos.
P: ¿Podéis repetirlo ahora para que lo veamos?
Entonces hacen la división pero sin considerar decimales en el cociente. La profesora entonces explica que es importante especificar que es “el resto de dividir la duración de la llamada entre 30 sin decimales en el cociente”. También les indica que es importante explicitar que la duración de la llamada debe estar en segundos y que el resultado se obtendrán en euros.
Entonces queda:

> Diferencia (euros) = 0’0025 x (el resto de dividir la duración de la llamada entre 30 sin decimales en el cociente)

P: Pues vamos a probar con otros valores, cada grupo con la duración de la llamada que quiera.

C26.3.3: Probar si funciona la fórmula planteada para saber la diferencia de precio entre la Compañía E y la Compañía L para diferentes duraciones de llamada.

PUESTA EN COMÚN

A todos los grupos les ha funcionado. Uno de los grupos dice que además se puede generalizar más la fórmula:

Diferencia (euros) = precio por segundo (sin considerar el establecimiento de llamada) x (el resto de dividir la duración de la llamada entre 30 sin decimales en el cociente).

Además, este grupo matiza que sólo será válido para llamadas de duración superior a un minuto, ya que durante el primer minuto cuestan lo mismo.

Responder a la cuestión generatriz a partir de lo hecho en la sexta sesión y parte de la séptima (hasta C26.3.3.) (gran grupo).

- Para mostrar la relación entre los precios de dos tarifas no es suficiente con probar con algunos casos. La gráfica si que nos muestra la relación. Hemos comprobado la necesidad de hacer las gráficas al comparar una tarifa que cobra por segundos con otra que cobra por pasos de 30 segundos.
- La gráfica de una tarifa que cobra por pasos de 30 segundos (relación precio de la llamada/ duración) se puede hacer a partir de la gráfica de la tarifa de las mismas características pero que cobra por segundos, y se hace horizontalizando los segmentos de 30 segundos en el precio más alto (el que corresponde a la llamada de más duración dentro de ese fragmento de 30 segundos).

- En ocasiones, no hace falta conocer “la fórmula de una función” para poder hacer la gráfica.
- Si comparamos dos tarifas, a través del precio de la llamada según su duración (que es lo que hemos utilizado para comparar tarifas hasta ahora), que coinciden en todas sus características excepto en que una cobra por pasos de 30 segundos y la otra por segundos, resulta que, a partir del primer minuto, los precios coinciden en las llamadas cuya duración es múltiplo de 30 segundos y el resto es más cara la que cobra por pasos de 30 segundos. Respecto al primer minuto, si ambas lo cobran completo, el precio coincide en todas las duraciones de 1 a 60 segundos; si cada una lo cobra del mismo modo que cobra el resto de duraciones, entonces ocurrirá que coincidirán en el precio de 30 segundos y de 1 minuto, pero en las demás duraciones inferiores a un minuto será más cara la que cobra por pasos de 30 segundos.

* Comienzan a matizar también en la respuesta a la cuestión generatriz que utilizamos como comparación el precio según la duración de la llamada. Además, solicitan que aprovechemos para indicar que es el modo de comparación que hemos utilizado todo el tiempo.

- La diferencia de precio entre dos tarifas con igualdad en todas sus características excepto en que una cobra por pasos de 30 segundos y la otra por segundos se puede obtener con la siguiente fórmula (se modifica un poco la deducida durante la clase):

  Dp-s (euros)= (euros/minuto)/60 x (resto de dividir t (s) entre 30 sin decimales en el cociente).

Dp-s= Diferencia entre el precio de la tarifa por pasos y la tarifa por segundos, es decir, lo que cuesta más la llamada con la tarifa de pasos que con la de por segundos. En euros.
(euros/minuto)/60= euros por segundo sin tener en cuenta el precio por establecimiento de llamada. Si pusiéramos "precio por minuto"/2 podría pensarse que se incluye en el precio por minuto el precio por establecimiento de llamada.
t (s)= Duración de la llamada en segundos.

Si las dos compañías cobran el primer minuto igual que el resto (por pasos de 30 segundos una y por segundos la otra), la fórmula será válida para cualquier duración de llamada, mientras que si cobran el primer minuto completo las dos, la fórmula sólo será válida para llamadas de duración de un minuto o superior.

C26.4: Comparación de tarifas por segundos y por pasos de 30 segundos. Siendo que no coinciden en alguna del resto de características. *El día anterior analizamos que ocurría al comparar dos tarifas, una que cobra por pasos de 30 segundos y la otra por segundos, pero coincidían en el resto de características. ¿Existe algún otro caso que nos interese de comparación de una tarifa y otra por segundos?* ***(gran grupo)***

Los alumnos dicen que lo que estudiamos el día anterior nos sirve para cualquier precio por establecimiento de llamada y para cualquier precio por minuto...
Un alumno dice "Pero no sabemos si sirve si las tarifas cobran diferente precio por minuto o diferente precio por establecimiento de llamada".
P: Vamos a analizar qué ocurre si cobran diferente precio por minuto.

C26.4.1: Comparación de tarifas por pasos de 30 segundos y por minutos. Siendo que cobran diferente precio por minuto pero coinciden en el precio por establecimiento de llamada.

C26.4.1.1: Caso en que cobra más por minuto la tarifa que cobra por pasos de 30 segundos.

C26.4.1.1.1: Y ambas cobran el primer minuto completo.

C26.4.1.1.1.1: Previsión. *¿Qué creéis que ocurrirá si comparamos dos tarifas, uno por pasos de 30 segundos y la otra por segundos, que cobran diferente precio por minuto?* **(gran grupo).**

Un alumno dice "Si es más cara la que cobra por pasos de 30 segundos, pues será más cara siempre".

P: ¿Por qué lo sabes?

El alumno dice que ha estado mirando el ejercicio del día anterior y que "Es como si pusiéramos otra recta por encima de la de por segundos (porque es más cara) y luego encima la horizontalizáramos". Pero algunos alumnos dudan un poco de la explicación.

P: Vamos a probar con un ejemplo para estudiarlo.

C26.4.1.1.1.2: ¿Qué tarifas podemos coger para la comparación? (gran grupo).

Dicen que como "tarifa por segundos" podemos coger la que utilizamos el día anterior (Compañía E). Dicen que la de por pasos podría ser alguna de las que tenemos hechas por segundos ya, y así podemos hacer la gráfica fácilmente a partir de la gráfica que ya teníamos. Pero buscando en las compañías que ya hemos estudiado resulta que ninguna cumple las características necesarias.

Algunos alumnos dicen que habrá que plantear una compañía nueva. Al final un alumno plantea que sea la Compañía B pero modificándola en el sentido de considerar que el primer minuto lo cobre completo. Habrá que darle un nombre nuevo pero no habrá que calcular todos los datos ni hacer la gráfica inicial (la de por segundos), porque ya la tenemos.

C26.4.1.1.1.3: Enunciar la cuestión. (un alumno, pero en gran grupo).

El alumno se fija en la cuestión que planteamos el día anterior y dice:

Tenemos una compañía E que cobra 0'12 euros por establecimiento de llamada y 0'15 euros por minuto, y además cobra por segundos a partir del primer minuto, que lo cobra completo. Y tenemos otra compañía, la Compañía LL (bueno, mejor M), que es igual que la Compañía B pero se diferencia en que cobra por pasos de 30 segundos a partir del primer minuto y también en que cobra el primer minuto completo. Comparar las dos tarifas en función del precio según la duración de las llamadas.

A todo el mundo le parece muy adecuada la exposición de la tarea. Sólo indican que podríamos repetir los datos de la Compañía B, para no tener que estar mirando hacia atrás todo el tiempo.
La profesora corrige que en vez de "es igual que la Compañía B pero se diferencia...", dado que es bastante diferente, podríamos decir "es igual que la Compañía B excepto en que...".

C26.4.1.1.1.4: Comparación de dos tarifas, una cobra por segundos y la otra por pasos de 30 segundos, siendo las tarifas coincidentes en el precio por establecimiento de llamada, pero siendo más alto el precio por minuto de la que cobra por pasos de 30 segundos (ambas cobran el primer minuto completo). (alumnos) *Tenemos una compañía E que cobra 0'12 euros por establecimiento de llamada y 0'15 euros por minuto, y además cobra por segundos a partir del primer minuto, que lo cobra completo. Y tenemos otra compañía, la Compañía M, que es igual que la Compañía B (es decir, 0'12 euros por establecimiento de llamada y 0'20 euros por minuto) excepto en que cobra por pasos de 30 segundos a partir del primer minuto y cobra el primer minuto completo. Comparar las dos tarifas en función del precio según la duración de las llamadas* ***(en grupos). Gráfico 14***

PUESTA EN COMÚN

No causa dificultad.

Concluyen que la compañía M es más cara que E para cualquier duración de la llamada. Y que siempre que comparemos dos tarifas, una por pasos de 30 segundos y otra por segundos, y la tarifa por pasos de 30 segundos cueste más por minuto, la que cobra por pasos de 30 segundos será más cara para cualquier duración de llamada.

P: ¿Siempre?

Contestan que sí, aunque realmente no es así si la que cobra por pasos de 30 segundos cobra el primer minuto completo. Tampoco será así si cobran diferente precio por establecimiento de llamada.

La profesora indica que, como se trata de una conclusión general, vamos a escribirla en la pizarra.

Así que plantea la profesora la siguiente cuestión:

C26.4.1.1.2: Comparación de dos tarifas, una cobra por segundos y la otra por pasos de 30 segundos, siendo las tarifas coincidentes en el precio por establecimiento de llamada, pero siendo más alto el precio por minuto de la que cobra por pasos de 30 segundos (la que cobra por pasos de 30 segundos cobra el primer minuto por segundos, pero la que cobra por segundos cobra el primer minuto completo). *Analizar que ocurriría si, en la tarea anterior, la Compañía M cobrara el primer minuto por segundos (podemos llamarla entonces Compañía N) mientras que la Compañía E siguiera cobrando el primer minuto completo.* ***(en grupos)*** ***Gráfico 15***

Los alumnos miran las gráficas y dicen que se van a cruzar.´

C26.4.1.1.2.1: Interpretación del significado de un punto de corte entre las gráficas de las tarifas (precio según la duración de la llamada). *¿Y eso que significa?* ***(gran grupo).***

Responden que significa que no es una más cara durante todo el primer minuto, sino que hasta una duración de llamada es más cara una y luego la otra.

P: Pues sabiendo eso trabajad en grupos para responder a la cuestión.

Les causa dificultad el hecho de nos disponer de la expresión algebraica de la Compañía N para las duraciones de llamada superiores a un minuto (que es por pasos y no lo han visto), aunque realmente no la necesitan.
Tienen que darse cuenta de que para llamadas de duración de un minuto o menos la Compañía N cobra por segundos y por tanto si saben averiguar la expresión algebraica.
También necesitan darse cuenta de que la compañía E durante el primer minuto tiene un precio fijo, pero esto no causa prácticamente dificultad.

Finalmente, tienen que deducir que, como sabemos que coinciden en un punto en que el precio con la Compañía E es 0'27, habrá que igualar la fórmula de N a un precio de 0'27.

PUESTA EN COMÚN

El grupo que expone explica que lo ha intentado averiguar gráficamente, pero sólo les ha servido para darles una idea, pero no para deducir el punto exacto de cruce.

Explica la profesora que si la gráfica estuviera perfectamente hecha y a gran escala (por segundos), sí se podría averiguar.

El grupo que expone explica que hay que igualar la fórmula de N para el primer minuto (que es por segundos) a 0'27, porque sabemos que es ése el punto donde se cortan. Conclusión: se cortan en el punto 0'75.

P: ¿El punto 0'75?

Corrigen: No, el punto (0'75, 0'27).

P: Y la conclusión entonces es, respecto a la comparación de las tarifas...

AA: Que la compañía N es más barata para llamadas de duración de 45 segundos o menos y más cara para llamadas de duración de más de 45 segundos hasta un minuto.

P: Pero no teníamos que hacer la comparación solamente para el primer minuto, ¿no?

AA: Es verdad (revisan la gráfica): la compañía N es más barata para llamadas de duración de 45 segundos o menos y más cara para llamadas de duración de más de 45 segundos hasta infinito.

Lo perfeccionamos grupalmente hasta concluir: La Compañía N es más barata para llamadas de duración inferior a 45 segundos y más cara para llamadas de duración superior a 45 segundos. Para las llamadas de 45 segundos el precio de ambas coincide.

P: Entonces, ¿qué ocurre con la afirmación general que escribimos en la pizarra?:
Siempre que comparemos dos tarifas, una por pasos de 30 segundos y otra por segundos, y la tarifa por pasos de 30 segundos cueste más por minuto, la que cobra por pasos de 30 segundos será más cara para cualquier duración de llamada..

Responden que no es así si la que cobra por pasos de 30 segundos cobra el primer minuto por segundos y la que cobra por segundos lo cobra completo. En este caso... siempre la que cobra por pasos de 30 segundos costará menos hasta una duración de llamada y luego ya será más cara siempre.

P: ¿Siempre costará menos hasta una duración de llamada?
Dicen que sí porque gráficamente vemos que la que cobra el primer minuto por segundos tiene que llegar a 0 y la otra tendrá un precio constante durante el primer minuto que será una línea horizontal, de modo que tienen que cortarse en algún punto.

P: Vamos a recordar, si os parece, qué posibilidades hemos analizado de comparación de tarifas por pasos de 30 segundos con tarifas por segundos, para organizar las comparaciones que nos faltan:

C26.4.2: Sintetizar las posibilidades de comparación de tarifas que cobran por pasos de 30 segundos con tarifas que cobran por segundos.

C26.4.2.1: *Primero vamos a sintetizar las posibilidades que ya hemos analizado y las que nos faltarían* ***(gran grupo).***

Primero analizamos que coincidieran en todas las variables excepto en que una cobra por pasos de 30 segundos y la otra por segundos. Vimos qué

ocurría si las dos cobraban el primer minuto completo o si las dos seguían durante el primer minuto el mismo modo de cobro que para el resto de duraciones.
La profesora escribe en la pizarra (e irá escribiendo todas las opciones que van saliendo):

a) Sólo se diferencian en que una cobra por pasos de 30 segundos y la otra por segundos.
   a.1) Ambas cobran el primer minuto completo
   a.2) Ambas cobran el primer minuto del mismo modo que cobran el resto de duraciones de llamada.

Después comenzamos a considerar que se diferenciaran en algún aspecto más. Comenzamos por considerar que cobraran diferente precio por minuto, pero igual precio por establecimiento de llamada. Entonces tenemos:

b) Se diferencian el precio por minuto (= precio por establecimiento de llamada).

P: La tercera posibilidad sería...

c) Se diferencia en el precio por establecimiento de llamada (= precio por minuto).

Los alumnos indican que habrá una tercera posibilidad, que es que no se diferencien tanto en el precio por establecimiento de llamada como en el precio por minuto.

d) Se diferencian tanto en el precio por establecimiento de llamada como en el precio por minuto.

P: Y dentro de que se diferencien en el precio por minuto (= precio por establecimiento de llamada), ¿qué hemos analizado hasta ahora? En el primer caso que analizamos, si recordáis, concluíamos que la que cobra por pasos de 30 segundos es más cara para cualquier duración de llamada...
Los alumnos contestan que era un caso en que la que cobra por pasos es la que cobra más por minuto.
P: Pero luego vimos otro caso en que las gráficas se cortaban...
Los alumnos dicen que era cuando la que cobra por pasos de 30 segundos cobra el primer minuto completo.
P: Pero era, concretamente, el caso en que la que cobra por pasos de 30 segundos es más cara y cobra el primer minuto completo. Entonces tenemos:

b.1) La que cobra por pasos de 30 segundos cobra más por minuto.

b.1.1) La que cobra por pasos de 30 segundos cobra más por minuto y ambas cobran el primer minuto completo.

b.1.2) La que cobra por pasos de 30 segundos cobra más por minuto y factura el primer minuto por segundos, mientras que la que factura por segundos cobra el primer minuto completo.

P: Quedará entonces todavía una opción, dentro de que la que cobre por pasos de 30 segundos cobre más por minuto y será que ...
Responde un grupo de alumnos que quedarían dos: falta que la que cobra por segundos cobre el primer minuto por segundos y la otra no; y también que cada cual cobre el primer minuto del mismo modo que cobra el resto.

b.1.3) La que cobra por pasos de 30 segundos cobra más por minuto y factura el primer minuto completo, mientras que la que factura por segundos factura por segundos también el primer minuto.

b.1.4) Que cada una cobre el primer minuto igual que cobra el resto (una por pasos de 30 segundos y la otra por segundos).

Añaden además que no hemos considerado, dentro de la opción a), que una cobre el primer minuto por segundos y la otra completo, y luego al revés. Sería:

a.3) Que la que cobra por pasos de 30 segundos cobre el primer minuto completo y la que cobra por segundos cobre el primer minuto por segundos.

a.4) Que la que cobra por segundos cobre el primer minuto completo y la que cobra por pasos de 30 segundos cobre el primer minuto por segundos.

Los alumnos dicen que la cosa se complica mucho, porque también estarían todas las opciones de cobro diferente el primer minuto para la opción en que es más cara la tarifa que cobra por segundos. Escribimos:

b.2) La que cobra por segundos cobra más por minuto.

b.2.1) La que cobra por segundos cobra más por minuto y ambas cobran el primer minuto completo.

b.2.2) La que cobra por segundos cobra más por minuto y factura el primer minuto por segundos, mientras que la que factura por pasos de 30 segundos cobra el primer minuto completo.

b.2.3) La que cobra por segundos cobra más por minuto y factura el primer minuto completo, mientras que la que factura por segundos factura por segundos también el primer minuto.
b.2.4) Que cada una cobre el primer minuto igual que cobra el resto (una por pasos de 30 segundos y la otra por segundos).

Un alumno dice que si analizar todas las posibilidades no será mucho para el tiempo que tenemos, considerando que todavía nos quedarían todas las posibilidades dentro de que cobren diferente precio por establecimiento de llamada y luego las de diferente precio por minuto y además diferente precio por establecimiento de llamada.

P: Por eso vamos a seleccionar qué opciones pueden ser más importantes.

C26.4.2.2: *Ahora vais a analizar qué opciones creéis que son más interesante de tratar, debido a que, como a dicho Juan Luis, las posibilidades son muchas y el tiempo es limitado. Debéis explicar cuáles habéis elegido y los criterios que habéis considerado para hacerlo* ***(en grupos).***

PUESTA EN COMÚN
El criterio fundamental que han utilizado es que los casos se den en la realidad. Esto excluye las opciones c) y d) porque consideran que cobran diferente precio por establecimiento de llamada y esto no ocurre en la realidad.

P: Pero sí podrían cobrar diferente precio por minuto.
Los alumnos defienden que nunca lo han hecho y que por tanto sería complicarnos mucho suponer que lo podrían hacer. Que si tuviéramos más

tiempo podría estar bien estudiarlo, pero podemos dejarlo para el final si nos sobra tiempo.
La profesora lo acepta.

Siguiendo el mismo criterio, ya dentro de que sólo vamos a considerar la opción b) (diferente precio por minuto pero igual precio por establecimiento de llamada) consideran que se podrían excluir las opciones en que cobran de diferente modo el precio del primer minuto, ya que siempre se cobra el primer minuto completo.

P: Pero si quisiéramos aplicar lo que aprendemos aquí a otro problema, por ejemplo, la comparación de tarifas de telefonía fija, resulta que en ellas se cobra el primer minuto por segundos.
Los alumnos preguntan "¿pero en telefonía fija todas cobran por segundos el primer minuto?".
La profesora contesta que muchas sí, pero que no sabe si todas.
Los alumnos preguntan, "¿pero en telefonía fija algunas cobran por pasos de 30 segundos?".
La profesora contesta que no lo sabe.
Un alumno dice que cree que todas cobran el primer minuto por segundos pero que de todos modos es difícil saber todas las opciones que pueden aparecer en telefonía fija; que habría que analizarlas antes.
Concluimos entonces que nos centraremos en telefonía móvil y por tanto sólo tendremos en cuenta las opciones donde el primer minuto lo cobran ambas completo.

Entonces tenemos, como opciones que analizaremos (las marcamos en la pizarra):

b) Se diferencian en el precio por minuto (= precio por establecimiento de llamada).

b.1) La que cobra por pasos de 30 segundos cobra más por minuto.

b.1.1) La que cobra por pasos de 30 segundos cobra más por minuto y ambas cobran el primer minuto completo.

b.2) La que cobra por segundos cobra más por minuto.

b.2.1) La que cobra por segundos cobra más por minuto y ambas cobran el primer minuto completo.

P: Pero ya hemos analizado b.1.2) (La que cobra por pasos de 30 segundos cobra más por minuto y factura el primer minuto por segundos, mientras que la que factura por segundos cobra el primer minuto completo), así que si os parece vamos a pensar sobre qué ocurriría en los caso b.1.3) y luego ya pasamos a b.2.1).
Los alumnos aceptan.

C26.4.1.1.3: Comparación de dos tarifas, una cobra por segundos y la otra por pasos de 30 segundos, siendo las tarifas coincidentes en el precio por establecimiento de llamada, pero siendo más alto el precio por minuto de la que cobra por pasos de 30 segundos (la que cobra por pasos de 30 segundos cobra el primer completo, pero la que cobra por segundos cobra el primer minuto por segundos). *Analizar que ocurriría si comparamos la Compañía M con la compañía como A (que es como E pero cobra el primer minuto por segundos).* ***(en grupos) Gráfico 16***

Aunque se plantea para hacerlo en grupos, al plantearla un alumno dice que si la que cobra por segundos es más barata y encima cobra el primer minuto por segundos, pues gráficamente se ve rápidamente que costará menos para cualquier duración de llamada.
Les pido que lo comprueben cada uno, gráficamente, para ver si están de acuerdo.
PUESTA EN COMÚN

Todos están de acuerdo.

P: El próximo día abordaremos el caso b.2.1). Después veremos cómo se completa con que hemos visto hasta ese momento la respuesta a la cuestión de comparación de tarifas de teléfonos móviles y entonces pasaremos a analizar los datos reales de cada tarifa para hacer la comparación real. No olvidéis por tanto traer las tablas de datos de las diferentes compañías ni las calculadoras.

OCTAVA SESIÓN

C26.4.1.2: Caso en que cobra más por minuto la tarifa que cobra por segundos.

C26.4.1.2.1: Y ambas cobran el primer minuto completo.

C26.4.1.2.1.1: Previsión. *Hoy vamos a abordar el último de los casos de comparación de tarifas por pasos de 30 segundos y por segundos que hemos considerado importantes, que es aquél en el que la tarifa que cobra por segundos cobra más por minuto, ambas facturan el primer minuto completo y el precio por establecimiento de llamada también es el mismo. ¿Qué creéis que ocurrirá?* ***(gran grupo).***

Responden varios alumnos que durante el primer minuto seguro que cuesta más cara la que cobra más por minuto, que en este caso es la que cobra por segundos. Todos lo confirman.

P: ¿Y para el resto de duraciones?
Los alumnos miran las gráficas de las cuestiones anteriores.
Un alumno contesta que "Depende de lo que cueste por minuto cada una... Por ejemplo, si comparamos la Compañía C con la Compañía L, se ve gráficamente que siempre cuesta más la que cobra por segundos".

Algunos alumnos dicen que C cobra el primer minuto por segundos y ahora estamos considerando que las dos cobren el primer minuto completo, de modo que creamos una nueva compañía, que denominados O, que es como C pero cobra el primer minuto completo. **Gráfico 17**

Los alumnos revisan las gráficas de esas dos compañías y están de acuerdo.

P: ¿Pero la que cobra por segundos será más cara para cualquier precio por minuto superior al de la tarifa que cobra por pasos de 30 segundos?
Mirando las gráficas, dicen que no, que puede ser, por ejemplo, que coincidan en el precio en los múltiplos de 30 segundos.
Uno de los alumnos sale a la pizarra a explicarlo. Dibuja la gráfica de una tarifa por pasos de 30 segundos (con la recta de la que parte, y horizontalizando después los fragmentos de 30 segundos) y dibuja una recta, correspondiente a la gráfica de la otra tarifa (la que cobra por segundos) que es paralela a la anterior y coincide justo en los puntos extremos izquierdos de los fragmentos de la que cobra por pasos de 30 segundos.

Dicen que otra posibilidad es que la gráfica de la tarifa por segundos sea más cercana a la "base" de la que cobra por pasos de 30 segundos y entonces se cortarán muchas veces, una vez en cada fragmento de 30 segundos. El alumno que está en la pizarra dibuja una gráfica de este tipo, que corta más o menos en el centro a cada fragmento de 30 segundos.
Otro alumno dice que también puede no ser paralela, porque O no es paralela a L.
La profesora matiza que no es que sean o no paralelas O y L, dado que la gráfica de una de ellas no es una recta, sino que son paralelas O y la "línea base" de L.

Un alumno se levanta y toma las "Respuestas al problema", que es un documento con las "respuestas a la cuestión generatriz" que hemos ido dando y del que se dejan siempre tres ejemplares en clase para que podamos consultarlo.

El alumno que está consultando estas conclusiones dice "Claro... son paralelas cuando cuestan el mismo precio por minuto pero diferente precio por establecimiento de llamada".

P: ¿Por ejemplo?
Dice que por ejemplo las que utilizamos cuando nos dimos cuenta de que eran paralelas, "que eran (revisan sus materiales...)...". Finalmente un alumno dice "que cobraran las dos 0'15 euros/minuto, pero una 0'12 por establecimiento de llamada y la otra 0'15. Eran las Compañía E y G". **Gráfico 8**

Un alumno dice que podríamos haber indicado en el documento de "respuestas al problema", qué compañías se habían considerado para obtener la conclusión, y así sería más fácil encontrarlo. El resto de alumnos están de acuerdo. Otro alumno dice que, si lo hacemos, luego podríamos colgar en Internet, además del dispositivo para indicarles la comparación de las diferentes tarifas reales, un documento con las conclusiones que hemos ido obteniendo y las tarifas que hemos ido cogiendo para trabajar. Dicen que además del listado de características de las tarifas deberíamos colgar las gráficas de cada una de ellas, porque son muy importantes.
Dicen que sería mejor que lo hiciera la profesora porque ya lo tienen en el ordenador y lo puede modificar (el documento) y además sería muy difícil repartir ese trabajo entre grupos. La profesora acepta.
También habrá que hacer las gráficas en ordenador para colgarlas de Internet. Los alumnos dicen que ellos no saben cómo hacerlas y que, además quizá necesitaría mucho tiempo y no nos queda mucho tiempo. Por tanto, lo hará también la profesora.

(alumnos) Rehacer el documento de "Respuestas al problema" incluyendo la referencia a qué compañías se han utilizado para obtener esa conclusión (el nombre y las cracterísticas). (profesor)

(alumnos) Hacer las gráficas en el ordenador para poder colgarlas de Internet (profesor).

Tras esta reflexión, la profesora pide al alumno que había hecho referencia a las compañías E y G que salga a la pizarra y lo explique.
El alumno hace una recta paralela a la línea "base" de L, tomando dos puntos, y horizontaliza por pasos de 30 segundos la más barata. La ha situado a una pequeña distancia y al horizontalizarla se cortan en todos los segmentos.
* No se llega a nombrar esta nueva gráfica porque no tenemos datos numéricos de ella, sólo gráficos. Serviría cualquier tarifa que cobre un menor precio por establecimiento de llamada pero no tan bajo como para no cortar a L.

P: ¿Se seguirán cortando las dos gráficas en todos los segmentos?
Los alumnos contestan que sí. Un alumno explica que, como son paralelas la relación se mantendrán en cada segmento.

El alumno que había hecho antes referencia a la posibilidad de que sólo coincidieran en los extremos izquierdos de los segmentos 30 segundos dice: "¿Y para que coincidieran sólo en los múltiplos de 30 segundos, ¿cuánto tendría que ser el precio por minuto de la que cobra por segundos?
La profesora dice que lo analicen por grupos.

* Ahora no correspondería comparar gráficas que coinciden en el precio por establecimiento de llamada pero no en el precio por minuto, pero la profesora decide continuar hasta ver si ellos se dan cuenta.

La profesora pide al alumno que ha planteado el problema que lo enuncie y el alumno dice: "¿Y para que coincidieran sólo en los múltiplos de 30 segundos, ¿cuánto tendría que ser el precio por minuto de la que cobra por segundos?".
* La pregunta está mal planteada, pero la profesora pregunta a todo el mundo si lo ha entendido y si está bien planteada y dicen que sí.

C26.4.1.2.1.2 (alumno): Determinar cuánto tendría que ser el precio por minuto de una compañía para que coincidieran con la Compañía L sólo en los precios de las llamadas en los extremos izquierdos de cada fragmento de 30 segundos (a partir del primer minuto). *¿Y para que coincidieran sólo en los múltiplos de 30 segundos, ¿cuánto tendría que ser el precio por minuto de la que cobra por segundos?* **(en grupos).**

PUESTA EN COMÚN

El grupo que expone dice que sabía que en un minuto tenía que costar también con la compañía que cobra por segundos 0'27 euros, en dos minutos 0'42 euros... y entonces, si el precio por minuto es fijo y es 0'15 euros por minuto, pues el precio por establecimiento de llamada, para que coincidan en el precio en los múltiplos de 30 segundos, tiene que ser 0'12. Así, un minuto cuesta 0'27, dos minutos: 0'42, tres minutos, 0'57... En la pizarra dibuja las gráficas y pone la tabla con los precios para 1, 2, 3 y 10 minutos.

* Curiosamente, dibuja la gráfica correcta, pero la que define algebraicamente es la misma que la "base" de la que cobra por pasos de 30 segundos, que es la gráfica de la Compañía E. **Gráfico 13**

Los otros dos grupos dicen que ellos han llegado a otro resultado. Además, dicen que la compañía que ha propuesto el grupo es la misma que la de base de que cobra por pasos de 30 segundos y por tanto no es más cara que la de por segundos para el resto de duraciones de llamada, sino más cara. Uno de ellos sale a la pizarra y sobre las gráficas que están en ella marca las dos gráficas (una recta que coincide en los múltiplos de 30 por la derecha y otra que coincide por la izquierda). De hecho, explican, la compañía que han propuesto cobra 0'15 euros por minuto y 0'12 euros por establecimiento de llamada, que son los mismos precios que la que cobra por segundos, aunque hayan dibujado la que coincide por la izquierda.

Entonces el grupo se da cuenta. La profesora les pide que marquen en qué puntos tendrán que coincidir ambas gráficas, y marcan, correctamente, los puntos situados más a la izquierda de los fragmentos de 30 segundos.
P: ¿Y cómo se hallaría entonces el precio por establecimiento de llamada que debe cobrar la compañía que cobra por segundos para que coincida en esos puntos?
Los alumnos que están exponiendo contestan que los puntos en los que deben coincidir son, por ejemplo, (1'5, 0'42), (2'5, 0'57). Y entonces, dicen, "si el precio por minuto es fijo, que es 0'15, el precio por establecimiento debe costar... Necesitamos la calculadora...

Entonces la profesora pide a otro grupo, que dice que lo ha hecho así y ya tiene calculados los precios, que salga y lo explique en la pizarra.

El grupo explica que si 1´5 minutos cuestan, sólo teniendo en cuenta el precio por minuto, 0´225 euros, tendrá que costar el precio por establecimiento de llamada, para que finalmente cueste 0´42 euros, pues 0´195. Podemos probar con el precio de 2´5 minutos: 0´15 x 2´5 = 0´375, más 0´195 por establecimiento de llamada, pues 0´57. Entonces, la compañía G debe cobrar por establecimiento de llamada 0´195 euros en vez de 0´15 para que coincidan en el precio para las llamadas de duración múltiplo de 30 segundos y el resto de llamadas cueste más la que cobra por segundos.

Los alumnos dicen que hemos introducido una nueva compañía, que podemos denominar ...P, que cobra 0´195 euros por establecimiento de llamada y 0´15 euros por minuto, el primer minuto lo cobra completo y el resto en segundos. **Gráfico 18**

El tercer grupo dice que lo ha hecho diferente. Explica que L no cuesta 0´42 euros en 1´5 minutos, ya que con 1´5 minutos la Compañía L cobra el precio de 1´5 minutos y todavía no el precio de 2 minutos, que es 0´42. La gráfica, dice, no puede coincidir con la de por pasos de 30 segundos sin ser la línea base. Para coincidir en los puntos extremos izquierdos de los segmentos tendrá que coincidir en los precios de 1 minuto 31 segundos, 2 minutos y 1 segundos, 2 minutos y 31 segundos... Afirman que la tarifa que han propuesto es muy cercana a los puntos extremos de los segmentos de L, pero no coincide en ellos. En la gráfica de la pizarra uno de los alumnos del grupo marca los múltiplos de 0´5 en L mostrando cuáles son los precios.

Lo han calculado del siguiente modo: El primer extremo es el de 1 minuto y un segundo. Un minuto y un segundo (61 segundos), con la compañía L cuesta 0´345 euros (han calculado el precio en 1´5 minutos y saben que es el mismo). Si el precio por minuto es 0´15, pues 61 segundos tienen cuestan (0´15/60x61=) 0´1525. Entonces, el precio por establecimiento de llamada de esta compañía tiene que ser 0'345-0'1525= 0'1925. Es pequeña la diferencia, pero es importante para que coincidan exactamente en esos puntos.

* A esta tarifa la denominamos Compañía Q. **Gráfico 19**

Una alumno pregunta: ¿Y podríamos hallar del mismo modo cuánto debería cobrar por establecimiento de llamada una compañía que cobrara por segundos para que cortara a los segmentos de 30 segundos, por ejemplo, en el centro de cada segmento?
La profesora dice al alumno que formule la cuestión y dice: ¿Podríamos hallar del mismo modo cuánto debería cobrar por establecimiento de llamada la compañía que cobrara por segundos para que cortara a los segmentos de la que cobra por pasos de 30 segundos en el centro de cada segmento?

C26.4.1.2.1.2 (alumno): Determinar cuánto tendría que ser el precio por minuto de una compañía para que coincidieran con la Compañía L sólo en los precios de las llamadas cuya duración es múltiplo de 15 segundos. *¿Podríamos hallar del mismo modo cuánto debería cobrar por establecimiento de llamada la compañía que cobrara por segundos para que cortara a los segmentos de la que cobra por pasos de 30 segundos en el centro de cada segmento?* ***(en grupos). Gráfico 20***

Los alumnos se ayudan marcando la gráfica que resultaría sobre las gráficas anteriores.
Interpretar los múltiplos de 15 segundos en términos de minutos no les causa mucha dificultad pero sí alguna.

PUESTA EN COMÚN

El grupo que expone dibuja la gráfica de las dos tarifas en la pizarra (la de 30 segundos con su línea “base”) en la pizarra y explica que pasar por el centro de cada segmento implica que coincidan en el precio de las llamadas de 1’25 minutos, 1’75 minutos, 2’25 minutos, 2’75 minutos...
La Compañía L cuesta en 1’75 minutos 0’42 euros. Si la otra compañía cobra también 0’15 euros por minuto, 1’75 minutos cuestan (1’75x0’15=) 0’2625. Por tanto, el precio por establecimiento de llamada tiene que costar (0’42-0’2625=) 0’1575.

Esta sería una nueva Compañía, que denominamos R. Cobra 0’15 euros por minuto y 0’1575 euros por establecimiento de llamada.

Un alumno, mirando a la pizarra, donde están escritas las características del tipo de tarifa que estamos trabajando (igual precio por establecimiento de llamada, diferente precio por minuto, tarifa por segundos mayor precio por minuto, primer minuto completo) dice “Pero ¿valen estas gráficas dentro del tipo que estamos viendo?... Pero si el precio por establecimiento de llamada tiene que ser fijo y lo que debe variar es el precio por minuto...

Los demás alumnos se dan cuenta también en ese momento.

P: ¿De qué tipo son entonces las tarifas que estamos viendo?
Contestan que “Ambas cobran el mismo precio por minuto y diferente precio por establecimiento de llamada”.
P: Pero además todas las comparaciones cumplían una tercera condición...
Los alumnos miran las gráficas y uno dice “Que siempre es más cara la que cobra por segundos”. Los demás están de acuerdo.

P: ¿Y por qué nos ha llevado a confusión y hemos tomado gráficas de este tipo cuando queríamos comparar gráficas con el mismo precio por establecimiento de llamada y diferente precio por minuto?
Un alumno dice que "Porque pensamos en que fuera más cara simplemente y no nos dimos cuenta de que podía ser más cara por variar en el precio por establecimiento de llamada también y no sólo por variar en el precio por minuto".

P: Entonces ¿qué situaciones pueden ocurrir en el tipo en el que estamos?
Contestan que las que hemos visto hasta ahora no, porque en todas se variaba el precio por establecimiento de llamada.
Un alumno dice que en las del principio, C y L, sí valía, porque tenían el mismo precio por establecimiento de llamada y diferente precio por minuto.
La profesora le recuerda que C cobra el primer minuto por segundos y que hemos llamado O a la compañía que es igual que C pero cobra el primer minuto completo. Es decir, que se refiere a la comparación entre O y L. **Gráfico 17**
La profesora le pide que salga a la pizarra y dibuje las gráficas. Lo hace (dibujando también la línea "base" de la que cobra por pasos de 30 segundos).

P: Entonces ¿qué otras posibilidades hay siendo que cobren el mismo precio por establecimiento y de llamada y diferente precio por minuto?
El alumno que ha salido a la pizarra dice que las que son paralelas no, porque si son paralelas es porque sólo varían en el precio por establecimiento de llamada.

P: ¿Por qué lo sabes?

Contesta que lo sabe “Porque si sólo varía el precio por establecimiento de llamada la diferencia entre las llamadas es fija, siempre la misma, mientras que si varían en el precio por minuto, la diferencia varía”.

P: ¿Por qué varía la diferencia si lo que varía es el precio por minuto?
El alumno contesta: “Pues ya lo vimos, porque la diferencia en un minuto se multiplica por dos en dos minutos, por 3 en 3 minutos... y entonces la diferencia es cada vez mayor”.

P: ¿Y en 2’3 minutos, por ejemplo?
Al alumno dice “En 2’3 minutos la diferencia se multiplica por 2’3”.
P: Eso vimos que ocurría al comparar dos tarifas que cobran por segundos pero, ¿ocurre lo mismo al comparar una tarifa por pasos y otra por segundos?
El alumno dice: “No lo sé...”. Empieza a marcar en la pizarra, sobre la gráfica, la diferencia de precios y dice “Desde un minuto, la diferencia va creciendo... ¡Pero luego la diferencia se hace más pequeña¡” (marca la diferencia antes y después de 1’5) “...y vuelve a crecer... Y luego se vuelve a hacer más pequeña” (marca la diferencia antes y después de 2). “Osea, que crece en cada fragmento de 30 segundos pero al pasar al siguiente fragmento de 30 segundos se hace más pequeña la diferencia... Pero cada vez la diferencia inicial, en cada fragmento, es más pequeña”.
Un alumno de otro grupo dice: “Y, sin embargo, si la comparamos con la que cobraría por segundos (la línea “base” de la que cobra por pasos de 30 segundos), pues la diferencia crece todo el tiempo”.
Otro alumno añade: “¿Y qué pasa si cruzan?... Si no puede ser paralela cortará sólo en alguno de los fragmentos”.
Y otro alumno dice: “Y no será en el mismo punto en todos los fragmentos”.
P: Explícalo un poco más.

El alumno explica "Antes vimos una tarifa que cortaba en todos los puntos medios de los segmentos, pero como ahora no puede ser paralelas pues ... (sale a la pizarra y dibuja una gráfica que sólo corta a los dos primeros segmentos), no puede cortar a todos los segmentos... Sólo cortará a algunos".

P: ¿Y de qué depende en qué segmentos corte?

El alumno dice que "Depende del precio por minuto que cobre cada una".

P: ¿Y qué significa que corte en algunos segmentos? Por ejemplo, en el caso que has dibujado en la pizarra.

El alumno dice que la de por segundos será más cara en unas duraciones de llamada y en otra será más barata.

C26.4.1.2.1.3: Marcar, en las gráficas de dos tarifas, una que cobra por pasos de 30 segundos y otra por segundos y que se cortan en alguno de los segmentos de 30 segundos, cuál es la compañía más barata para cada duración. *Vais a tomar dos gráfica semejantes a las que ha dibujado Elena, es decir, que la gráfica de la compañía por segundos corte a la gráfica de la tarifa por pasos de 30 segundos en alguno de los segmentos y vais a marcar en otro color qué compañía es más barata para cada duración de llamada?* ***(en grupos).***

A algunos alumnos les cuesta un poco, pero todos lo hacen bien.

PUESTA EN COMÚN

El grupo que sale a la pizarra lo marca correctamente y explica que siempre es más barata la que queda más abajo en la gráfica. A partir de una determinada duración ya cuesta más cara siempre la que cobra por segundos.

Un alumno pregunta: "¿Y cuánto tendría que cobrar por minuto la que cobra por segundos para cortar a la otra en dos segmentos, por ejemplo? ¿Lo podemos hallar?".

La profesora pide al alumno que enuncie la pregunta y les dice que lo intenten averiguar por grupos.

El alumno dice: ¿Cuánto tendría que cobrar por minuto la que cobra por segundos para cortar a la otra en dos segmentos, por ejemplo? ¿Lo podemos hallar?

C26.4.1.2.1.4: (alumno) Averiguar cuánto tendría que cobrar una tarifa por segundos para cortar a la gráfica de L en dos segmentos de 30 segundos. *¿Cuánto tendría que cobrar por minuto la que cobra por segundos para cortar a la otra en dos segmentos, por ejemplo? ¿Lo podemos hallar?* ***(en grupos). Gráfico 21***

Dos grupos terminan antes y el otro más tarde. Uno de los grupos que ha terminado antes expone.

PUESTA EN COMÚN

Saben que tiene que costar menos de 0'23 euros por minuto, porque C lo cobraba y quedaba por encima. Y pensaron que precios muy bajos, como 0'16 quizá haría que la gráfica cortara en más de dos segmentos, así que probaron con 0'19.

Hallaron en precio con la compañía L en el segmento de a partir de 1 hasta 1'5 minutos, para lo cual hallaron el precio de 1'5 minutos. Escriben en la pizarra: 0'345.

Entonces hallaron en qué punto la compañía Q costaba 0'345. Escribieron en la pizarra:

0'12 + 0'19t = 0'345; t = 1'1842

Lo marcan en la gráfica y explican que les parecía que iban bien porque corta muy en el final y eso significa que no cortarán muchos fragmentos, pero tenían que comprobar si cortaba al segundo segmento. Así que siguieron el mismo procedimiento pero con el segundo segmento.

Explicaron que el segundo segmento es el que va a partir de 1'5, sin incluirlo, hasta 2. En ese fragmento las llamadas en L cuestan 0'42 euros. Pues (escriben en la pizarra):

$0'12 + 0'19t = 0'42; t = 1'5789$

Luego también corta al segundo segmento. Lo marcan en la pizarra.

Probaron con el tercero: hallaron el precio de L en 2'5 minutos (0'495 euros) y entonces calcularon:

$0'12 + 0'19t = 0'495; t = 1'9736$

Y no le corta, de modo que ya está resuelto. Esta compañía la llamamos S.

El otro grupo que también terminó antes dice que lo hizo igual.

El tercer grupo explica que lo han hecho diferente y han encontrado otra función que también sirve. Probaron primero con 0'18 y vieron que cortaba también al tercer fragmento, en la duración 2'08, y entonces tuvieron que probar con otro. Eligieron 0'185. Y también cortaba al tercer fragmento, en el punto 2'02. Y ya probaron con 0'19 y vieron que no cortaba en el tercer fragmento, pero entonces tuvieron comprobar si cortaba al segundo.

Un alumno dice, ¿pero cuántos precios por minuto servirán también, además de 0'19?

P: ¿Cómo podríamos saberlo?

La profesora le pide que enuncie el problema y dice: ¿Cuántos precios por minuto servirán para que una tarifa por segundos corte a la gráfica de L en sus dos primeros segmentos solamente?

C26.4.1.2.1.5: (alumno) Averiguar cuánto podría (todas las posibilidades) cobrar una tarifa por segundos para cortar a la gráfica de L en dos segmentos de 30 segundos. *¿ Cuántos precios por minuto servirán para que una tarifa por segundos corte a la gráfica de L en sus dos primeros segmentos solamente?* ***(en grupos).***

El mismo alumno dice: "Podríamos hallar con qué precio por minuto la llamada cuesta lo que cueste el tercer fragmento... osea... 0'495 en 2`1 minutos". Le dice la profesora que salga a la pizarra y lo explique. El alumno marca un punto en la gráfica (situado en el extremo más izquierdo del segmento) y escribe:

0'12 + x2'1 = 0'495

P: ¿2'1 es el punto más extremo del tercer fragmento en que puede cortar el segmento?

El alumno contesta que sí.

P: ¿Cuántos segundos son 2'1 minutos?

Entonces el alumno se da cuenta del error y dice "No, claro, tengo que calcular cuántos minutos son 2 minutos y 1 segundo?". Pide ayuda a los que están en sus mesas con la calculadora.

Algunos alumnos dudan sobre cómo se hace. Algunos lo transforman primero en segundos (121 segundos) y luego no saben qué hacer. Otros lo hacen bien y le contestan que son: 2'0166666666666666666667. Los demás les preguntan cómo lo han hecho y explican que sólo hay que transformar en minutos los segundos (1/60) y luego sumarlo a los 2 minutos.

Un alumno dice que la compañía tendría que cobrar 0'1859 y sería la Compañía T**.** **Gráfico 22**

El alumno de la pizarra dice: "Entonces, las compañías cuyo precio por minuto sea superior a 0'1859 servirán, porque no cortarán al tercer segmento. Bueno... también habrá un precio máximo... que será (marca en la pizarra un punto en el punto más extremo de la izquierda del segundo segmento) cuando la gráfica pase por aquí".

P: ¿Y cómo lo podemos hallar?

Los alumnos contestan que igual.

La profesora les dice que lo hallen por grupos.

PUESTA EN COMÚN

El punto en que debe cortar es (1 y 51 segundos, 0'42), que será el primer punto donde puede cortar al segundo segmento, porque 1'5 corresponde al primer segmento. 1 y 51 segundos son 1'5166666666666666667 minutos. Entonces:

0'12 + x1'516666666666666666666667 = 0'42 → x = 0'1978

Por tanto, el precio por minuto tiene que ser superior a 0'1859 e inferior o igual a 0'1978. Es decir, sirve cualquier precio por minuto mayor que 0'1859 euros pero hasta un máximo de 0'1978 euros.

Llamamos U a la nueva compañía que cobra 0'12 euros por establecimiento de llamada y 0'1978 euros por minuto. **Gráfico 23**

P: ¿Hay alguna otra posibilidad de relación entre dos compañías, una por pasos de 30 segundos y otra por segundos, en que la de por segundos cueste más por minuto y cobren lo mismo por establecimiento de llamada?

Un alumno dice: "¿Nunca la gráfica por segundos puede quedar por debajo de la de por pasos de 30 segundos?".

Otro alumno contesta que no, porque, si cobran lo mismo por establecimiento de llamada, para quedar por debajo tendría que costar menos por minuto, y estamos en el caso de que cueste más por minuto la que cobra por pasos de 30 segundos.

P: Entonces damos por finalizada la comparación de tarifas por pasos de 30 segundos y por segundos y el próximo día comenzaremos con el análisis de los datos reales.

NOVENA SESIÓN

Un alumno recuerda que no hemos completado la respuesta con lo hecho en la última sesión (y además falta también parte de la anterior sesión).

(alumno) Responder a la cuestión generatriz a partir de lo hecho en parte de la séptima (desde C26.3.4) y en la octava sesión (gran grupo).

- Si tenemos dos tarifas, una que cobra por pasos de 30 segundos y otra por segundos, siendo que la que cobra por pasos de 30 segundos cobra más por minuto y ambas cobran el primer minuto completo (cobrando ambas el mismo precio por establecimiento de llamada), resulta que será más cara, para cualquier duración de llamada, la tarifa que cobra por pasos de 30 segundos. (Ejemplo: compañías E y M).

Un alumno plantea hacer una tabla con los datos para que sea más fácil comprenderlo, ya que damos muchos datos de cada compañía y cree que es difícil combinar toda la información.
P: ¿Pues haced esa tabla en relación con las gráficas E y M y luego continuaremos con las siguientes?

C27: Hacer una tabla con los datos de las compañías para facilitar su comparación (en grupos).

PUESTA EN COMÚN

El grupo que expone hace la siguiente propuesta:

Compañía	1er minuto	Resto de tiempo	Euros/minuto	Euros est. llam.
E	Completo	30 sg.	Más	=
M	Completo	Sg.	Menos	=

Un segundo grupo plantea que se utilice “Más que E” y “Menos que M” porque si no no se sabe más o menos que qué. Se acepta. Este grupo además dice que podríamos indicar en primer lugar lo más diferenciador. Es decir, la primera columna dedicada al modo de cobrar a partir del primer minuto, la segunda al precio por minuto, la tercera al modo de cobrar el primer minuto y la cuarta al precio por establecimiento de llamada. Este grupo además dice que deberíamos especificar “Modo de facturar” y que incluyera dos columnas: “Primer minuto” y “Resto de minutos”. También se acepta.

El tercer grupo plantea indicar sólo lo que es diferente, pero el resto de grupos dicen que ya dijimos que es mejor indicar todos los datos porque si no se dice nada lleva a duda y parece que da igual el valor. El otro grupo defiende que se puede indicar a parte, como una nota, que en el resto cobran igual, pero se concluye que es mejor indicar todos los datos porque es más claro.

El tercer grupo también dice que mejor no ponemos el nombre de la compañía sino al final decimos que un ejemplo está en la comparación entre M y E, porque realmente las conclusiones no son sólo válidas para el ejemplo. Los demás están de acuerdo.

El primer grupo plantea que hagamos una tabla conjunta de todas las compañías, pero al final se decide que no porque un grupo destaca que entonces los iguales no se sabría entre quién y quién son. El primer grupo dice que se podrían utilizar letras para simbolizar precios iguales. Por ejemplo, entre E y M llamar X al precio por establecimiento de llamada. Pero los otros grupos dicen que entonces, en el siguiente precio por establecimiento de llamada, si lo llamamos X parecerá que es el mismo y si lo simbolizamos con otra letra parecerá que es que es diferente, siendo que no tiene por qué serlo. Se concluye por tanto que se describirán en tablas por parejas. También se acuerda que, al hacer sólo por parejas, será más claro indicar "más cara" y "más barata" para representar que el precio por minuto es mayor en una que en la otra.

Finalmente la tabla queda:

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	Más cara	=	M
Sg.	Completo	Más barata	=	E

De todos modos, se concluye que también se dejará el texto desarrollado para evitar confusiones.

* A partir de este momento los alumnos elaborarán por grupos las tablas de cada pareja de compañías sobre las que vayamos a obtener una conclusión. El grupo al que le corresponda exponer las conclusiones sobre un par de compañías, a la vez que expone las conclusiones, mostrará también la tabla.

También dicen que deberíamos hacer referencia a los gráficos que corresponden a cada comparación. Este trabajo aún no podemos hacerlo porque aún no están preparadas las gráficas, pero la profesora les indica que lo haremos.

C28: (alumnos) Hacer referencia en las respuestas que vamos dando al problema, en los casos de comparación de tarifas, a los gráficos que se corresponden con las comparaciones (queda pendiente hasta tener los gráficos).

- Si tenemos dos tarifas, una que cobra por pasos de 30 segundos y otra por segundos, siendo que la que cobra por pasos de 30 segundos es más cara pero cobra el primer minuto por segundos frente a que la que cobra por segundos el resto, que cobra el primer minuto completo (cobrando ambas el mismo precio por establecimiento de llamada); entonces resulta que siempre la compañía que cobra por pasos de 30 segundos, al cobrar el primer minuto por segundos, costará menos que la otra hasta una duración de llamada, a partir de la cual será ya siempre más cara. (Ejemplo: compañías N y E).

  Para hallar el punto en que se cortan las gráficas debemos igualar la "fórmula" de la tarifa que cobra por segundos al precio durante el primer minuto de la que cobra el primer minuto completo y despejar t. Así hallamos una duración de llamada donde los precios coinciden en ambas tarifas y sabemos que para llamadas de duración inferior es más barata la de por pasos mientras que para el resto es más cara.

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Por segundos	Más cara	=	N
Sg.	Completo	Más barata	=	E

- Antes de continuar la comparación entre diferentes variantes de tarifas cobrando una por pasos de 30 segundos y la otra por segundos, nos paramos a pensar en todas las posibilidades de variación que había. Nos dimos cuenta de que pueden diferir en el modo de cobrar el primer minuto (completo o por segundos) y/o en el precio por minuto y/o en el precio por establecimiento de llamada. Dado que todas las opciones posibles serían muchas, tras organizarlas, hemos descartado aquellas en que varía el precio por establecimiento de llamada y por tanto también aquellas en varía simultáneamente el precio por establecimiento de llamada y el precio por minuto. También descartamos aquellas en las que se cobra el primer minuto de modo diferente a completo. Ambas las hemos descartado porque en la realidad no se dan esos casos y decidimos centrarnos en las que son más útiles para resolver el problema.

  Pero decidimos, por consejo dla profesora, sí analizar, dentro de las opciones en que la tarifa que cobra por 30 segundos cobra más por minuto y cobran el mismo precio por establecimiento de llamada el caso en que la tarifa por pasos de 30 segundos cobra el primer minuto completo mientras que la que cobra por segundos cobra el primer minuto también por segundos, que es el que se describe a continuación.

- Si tenemos dos tarifas, una que cobra por pasos de 30 segundos y la otra por segundos, y la que cobra por pasos cobra más por minuto y además cobra el primer minuto completo, mientras que la que cobra por segundos, además de cobrar menos por minuto, cobra el primer minuto por segundos (cobrando ambas el mismo precio por establecimiento de llamada), pues tenemos que <u>la compañía que</u>

cobra por pasos de 30 segundos será más cara para cualquier duración de llamada. (Ejemplo: compañías M y A).

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	Más cara	=	M
Sg.	Sg.	Más barata	=	A

- Ya habíamos tratado los casos que habíamos planificado en que la tarifa por pasos de 30 segundos cobra mayor precio por minuto que la de por segundos.
  Aunque habíamos planificado que ya sólo íbamos a analizar el caso de comparación (entre una tarifa por pasos de 30 segundos y otra por segundos) en que lo único que varía es el precio por minuto, que es mayor en la tarifa por segundos (pero coinciden en el precio por establecimiento de llamada y en el modo de cobrar el primer minuto), planteamos, gráficamente, casos en que la tarifa por segundos era más cara pero eran paralelas, sin darnos cuenta de que si son paralelas es porque cobran diferente precio por establecimiento de llamada. Por esos obtuvimos otras conclusiones aunque no eran objeto en principio.

- Si tenemos dos tarifas que cobran el mismo precio por minuto pero diferente precio por establecimiento de llamada siempre son paralelas. Serán paralelas también durante el primer minuto siempre que las dos cobren del mismo modo (ambas completo o ambas por segundos). En el caso de que una de ellas cobre por pasos de 30 segundos, serán paralelas la gráfica de la tarifa que cobra por segundos y la línea "base" de la tarifa que cobra por pasos de 30 segundos. (Ejemplo: compañías L y O).

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	Más cara	Más barata	L
Sg.	Completo	Más barata	Más cara	O

- Si tenemos los datos de las dos tarifas (una por pasos de 30 segundos y otra por segundos), podemos modificar el precio por establecimiento de llamada de la que cobra por segundos para que se transforme en una recta que corta a todos los segmentos de 30 segundos en los puntos que queramos, por ejemplo:

    - A todos los segmentos en el punto más a la izquierda –es decir, en los múltiplos de 30 segundos- (Ejemplo: compañías L y P).

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	=	Más barata	L
Sg.	Completo	=	Más cara	P

    - Y debemos tener cuidado de tomar puntos erróneos, como nos ocurrió, de modo que la gráfica de la tarifa por segundos quede cercana a los puntos que queremos pero no llegue a cortar a los segmentos. (Ejemplo: compañías L y Q).

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	=	Más barata	L
Sg.	Completo	=	Más cara	Q

- O a todos los segmentos en el punto medio –en el precio de 1'25, 1'75, 2'25, 2'75...; o en los puntos que queramos, que siempre estarán a una distancia de 0'5 minutos –por ejemplo, 1'03, 1'53, 2'03... o 1'27, 1'77, 2'27... (Ejemplo: compañías L y R).

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	=	Más barata	L
Sg.	Completo	=	Más cara	R

- En los casos en que la tarifa por pasos de 30 segundos y la de por segundos cobran el mismo precio por establecimiento de llamada, podemos averiguar:
  - El precio que puede cobrar la tarifa por segundos para cortar a la gráfica de la tarifa por pasos de 30 segundos en varios de sus segmentos, por ejemplo dos. (Ejemplo: compañías L y S).

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	Más barata	=	L
Sg.	Completo	Más cara	=	S

- El ámbito de posibilidades de precio por minuto que debe costar la tarifa por segundos para cortar a la gráfica de la otra tarifa (que cobra por pasos de 30 segundos) en varios de sus segmentos, por ejemplo dos. Para ello hallaremos un precio mínimo por minuto. (Ejemplo: compañías L y T).

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	Más barata	=	L
Sg.	Completo	Más cara	=	T

y un precio máximo. (Ejemplo: compañías L y U).

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	Más barata	=	L
Sg.	Completo	Más cara	=	U

Tras haber hecho el trabajo de las gráficas dice un grupo que no son muy representativas y que es mejor quizá quitarlas y simplemente hacer referencia a los gráficos (el número de gráfico) y las compañías que se han considerado y poner en las tablas mejor las características reales de cada compañía. Explican que, por ejemplo, las tablas de las tres últimas comparaciones son exactamente iguales excepto en las compañías que lo ejemplifican y que por tanto, o incluimos más información en las tablas o quizá mejor quitarlas y situar en su lugar una tabla con los datos de cada compañía utilizada para ejemplificar. Así, las personas que lo lean tienen la explicación escrita desarrollada y la referencia a las características concretas de las gráficas que se han utilizado como ejemplo. Los alumnos insisten que si además hacemos les permitimos ver los gráficos, "pues ya es perfecto".

Otros alumnos dicen que estas tablas podríamos dejarlas ya que las hemos hecho, pero la mayoría defiende finalmente que entonces habrá demasiado información y va a "marear" un poco a quien lo intente entender. Conclusión: no incluiremos las tablas que hemos hecho.

- En Internet, además del dispositivo para responder a las personas los precios en las diferentes tarifas, colgaremos el documento de respuestas a la pregunta donde se indiquen con qué comparaciones se ha obtenido cada una (qué compañías se han considerado), con sus características. Además incluiremos las gráficas de cada tarifa.

C29: Análisis de los datos de las tarifas existentes en la realidad.

La profesora platea que comencemos a analizar los datos de las tarifas reales. Les dice simplemente, a propósito, que comiencen a analizarlas. Los alumnos dicen que habrá que planificar cómo vamos a hacerlo.

C29.1: Planificar el análisis (gran grupo).

La profesora pregunta "¿Qué debemos planificar?".
Los alumnos plantean:

- Qué tarifas vamos a comparar. Explica que podemos comparar las que son semejantes (por ejemplo, las que son "tarifa plana") de cada compañía, pero que hay otras muy difícilmente comparables.
- Cómo las vamos a comparar. ¿Hay que hacer todas las gráficas? Por ejemplo, dicen, de las que son de "tarifa plana" no hace falta hacer

gráficas. La que cuesta más por minuto es más cara para cualquier duración de llamada.

- ¿Pero hay que hacer las gráficas? Quizá sería más conveniente centrarnos en cómo calcular el precio de las llamadas para comparar las tarifas.
- Hay tarifas que no hemos analizado, como el contrato decreciente, por ejemplo, que cobra los dos primeros minutos de cada llamada a 0'20 euros y los siguientes a 0'10 euros.
- Podríamos comparar cada grupo unas cuantas. Por ejemplo, un grupo podría comparar las de tarjeta y los otros dos grupos las de contrato, que son más.

P: ¿Compararemos por un lado las de tarjeta y por otro las de contrato?

Los alumnos defienden todos que sí, porque dicen que el que quiere tarjeta lo quiere porque quiere poder controlar lo que se gasta, y otros dicen que también puede ser que la elijan porque no se gastan un mínimo mensual, que en los contratos siempre lo hay, o no quieren gastarse 21 euros de gastos de activación.

Entonces aquí tenemos una decisión: que un grupo compare las de tarjeta y los otros dos las de contrato.

P: ¿Pero cómo decidimos qué contratos compara cada grupo?

Dividir por dos los contratos de cada compañía, que es la idea inicial, parece muy difícil, porque habría que analizar entonces previamente cuáles son comparables.

Un grupo propone que, mientras que el grupo que compara las tarjetas, que son menos, haga la comparación entre las 3 compañías, los otros dos grupos comparen todas las tarifas de contrato de una compañía con otra. Se acepta y entonces el grupo que lo había propuesto dice que elige comparar las tarjetas, porque tiene dos cosas novedosas: la "tarjeta decreciente" y las "Tarifa 3x2". Otro grupo dice entonces que elige Vodafone, porque tiene algo novedoso, que es el "Contrato decreciente". El otro grupo se queja entonces. Dice que preferiría comparar las tarjetas porque tiene dos novedades. La profesora les dice entonces que Amena tiene también el "Contrato 3x2". Finalmente aceptan y se decide que ambos compararán sus tarifas con las de contrato de "MoviStar".

Pero los alumnos dicen que no hemos visto cómo comparar esas tarifas nuevas y preguntan que si tienen que decidirlo ellos. Algunos dicen que será sencillo, porque son muy semejantes a las básicas, que hemos analizado ya. La profesora les dice que sí, que han estudiado las posibilidades más importantes de variación de tarifas, pero que no podemos analizar todas las opciones posibles, porque son infinitas. Ahora vais a poner en práctica lo que hemos visto y además vais a planteaaros cómo resolver la comparación de esas tarifas especiales.

Los grupos deben analizar sus tarifas y buscar el modo más claro de compararlas.

C29.2: Analizar las tarifas que le han correspondido a cada grupo y decidir el modo más adecuado de comparar sus tarifas. *Ahora vamos a analizar las tarifas reales. Primero cada grupo va a estudiar qué tarifas comparará y por qué y también expondréis qué dificultades de comparación prevéis o si confiáis en disponer del modo de comparación adecuado. Después tendréis tiempo de hacer las comparaciones, ahora vamos a hacer un análisis de posibles dificultades y una planificación de cómo realizaremos la comparación.* ***(en grupos)***

PUESTA EN COMÚN

1) TARJETAS

Plantean comparar:

a) De “tarifa plana”:
    - MoviStar: T. Activa 24 horas (0’30 €/m).
    - Vodafone: T. Autorecargable (0’28 €/m). Regala 10 € para el mes siguiente a partir de consumo de 20 € al mes.
    - Amena: T. Dúo (0’30 €/m; 0’03 €/m al dúo)
      Tarifa 3x2 (0’30, cada 3 minutos, el tercero o fracción gratis)

La “Activa 24 horas de MoviStar es la más cara. La Dúo cobra lo mismo por minuto pero al menos puedes elegir un número al que llamar por 0’03 €/m. La “Autorecargable” de Vodafone parece que es la más barata, aunque habrá que compararla con la Tarifa 3x2 de Amena. Creen que será necesario considerar consumos mensuales para hacer esta comparación, en vez de por una única llamada, porque en una de ellas hay que considerar que regalan 10 euros a partir de un consumo de 20 euros.

Destacan que creen que no debemos considerar ofertas como elegir un número al que llamar más barato porque esas ofertas varían bastante y además todas ofrecen cosas de ese tipo. Dicen que lo han destacado en la Tarifa Dúo porque coinciden en precio con la Activa 24 horas.

b) Mismo precio para cualquier receptor pero diferente por franjas horarias:
    - MoviStar: T. Activa tu Tiempo y T. Activa cuatro
    - Vodafone: T. Tiempo Libre
    - Amena: T. Tarifa joven y T. Ocio.

Las franjas horarias son diferentes, también incluso la Tarjeta Activa cuatro de MoviStar, en vez de diferenciar precios entre diario y fin de semana y festivos, la separación la hace entre de lunes a sábado y domingos y festivos.

Aquí también creen que la comparación no puede hacerse solamente por llamada, porque "No tendría mucho sentido analizar cada precio para cada tipo de llamada para cada franja horaria cuando luego no son comparables porque no coinciden las franjas". Un alumno planteó en el grupo que se hiciera una comparación entre los precios medios de cada compañía, pero el resto dicen que eso es poco informativo porque, a no ser las mismas franjas horarias, es engañoso. Todavía están pensando cómo hacerlo, pero parece que habría que considerar cuántos minutos habla con cada tipo de receptor en los diferentes horarios con distintos precios, y que esta comparación debería ser, creen, mensual, porque da información más general, ya que puede que de un día a otro varíe el tipo de llamadas que haces.

c) Un solo precio a cualquier hora pero diferente para diferente para "la misma compañía" y para "nacionales u otros operadores móviles".
    - MoviStar: T. Activa Club

Creen que no es comparable con ninguna otra porque la oferta es diferente. Parece que si llamas bastante a teléfonos provinciales con el teléfono móvil esta sería la tarifa más conveniente, pero no estamos seguros.
Explican que han estado reflexionando sobre que no es comparable con ninguna pero a la vez con todas, porque no podemos decir que

sea la mejor para unas características concretas. Dependerá de lo que llames a cada tipo de teléfono. Será por tanto necesario considerar lo que hablas al mes.

d) Un solo precio a cualquier hora pero diferente para "la misma compañía y fijos nacionales" y para "otros operadores móviles".
   - MoviStar: T. Activa Total
   - Vodafone: T. Decreciente (aunque el precio varía durante la primera llamada del día y las restantes).

De nuevo será necesario consideran más de una llamada, al menos número de llamadas diarias, porque la T. Decreciente cobra diferente precio por minuto en la primera llamada del día que en las restantes. A "móviles de la misma compañía y fijos nacionales" es claramente más barata la Decreciente, porque el precio por minuto de la primera llamada, que es más caro que el precio por minuto de las siguientes llamadas, es ya más barato que el precio por minuto en la Activa Total, pero el problema es con las llamadas a "otros operadores móviles", donde la T. Decreciente es más cara para la primera llamada del día que en la T. Activa Total pero más barata para las siguientes llamadas del día. En conclusión, creen que es necesario considerar el número de llamadas al menos diarias a cada tipo de receptor, pero mejor mensuales que es más global, porque a lo mejor varían de un día a otro.

2) CONTRATOS VODAFONE/ MOVISTAR

a) Contratos con un solo precio para cualquier receptor y cualquier hora:
   - Vodafone: Universal 25, Universal 40 y Universal 60.

Decreciente

- MoviStar: Plus 24 horas, Plan 30, Plan 40, Plan 60, Plan 90, Plus Familia XL.

Todos los contratos tienen un consumo mínimo mensual. También todos exigen un gasto de activación, que en principio no consideraremos, porque sólo se paga una vez. Además, se paga en todos los casos y la diferencia entre compañías es mínima (21 euros de Vodafone y 21’03 euros de MoviStar).

En ambas compañías hay diferentes precios por minuto con diferentes consumos mínimos al mes (a mayor consumo mínimo mensual, menor precio por minuto).
Es decir, es evidente la que cobra menos por minuto, pero sólo será rentable aquella cuyo consumo mínimo mensual lleguemos a gastar a ese precio por minuto ya que aunque no lo gastemos nos lo cobrarán de todos modos.
Al comparar Vodafone y MoviStar, las dos cuestan lo mismo excepto en el caso en que el precio por minuto es 0’15, que Vodafone sólo exige un consumo mínimo mensual de 25 euros mientras que MoviStar exige uno de 30 euros, y es por tanto mejor Vodafone.
El Plus Familia es a 0’16 euros minuto por 12 euros de consumo mínimo mensual, pero tienen que ser al menos 3 líneas en una misma factura. Lo bueno es que los gastos pueden compensarse. Esta es más rentable en la relación precio por minuto/ gasto mínimo mensual pero exige 3 líneas en un mismo contrato.

Respecto a la Tarifa Decreciente, es la opción de Vodafone que, con un precio único para todos los tipos de receptores y cualquier horario, tiene un menor consumo mínimo mensual (9 euros). Han creído interesante compararla con la tarifa "Plus 24 horas" de MoviStar porque es la que se asemeja en que cobra el mismo consumo mínimo mensual. Dicen que sería interesante averiguar a partir de qué duración de llamada es más rentable una tarifa o la otra. También habría que tener en cuenta que el Contrato Decreciente cobra por pasos de 30 segundos mientras que el contrato Plus 24 horas cobra por segundos. Aconsejan una comparación mensual donde se tenga en cuenta cuántas llamadas se realizan al día, ya que la Decreciente cobra más barato el minuto en la primera llamada.

b) Contratos con diferentes precios para "la misma compañía y operadores fijos nacionales" y para "otros operados móviles nacionales"
   - Vodafone: Contrato Tarde y Contrato Mañana.
   - MoviStar: Plus Elección.

Explican que han ido marcando en un papel los horarios en que cada compañía tenía diferentes precios para ver si eran más o menos comparables.

Lo hacen tomando una línea recta y marcando las 24 horas. Luego señalan los diferentes horarios en cada con diferentes precios para ver si coincidían. No coinciden en las franjas horarias, pero sí son semejantes. Para comparar, al ser los horarios semejantes, aunque no iguales, primero observaron que era más barato en precio por minuto en Vodafone tanto en las franjas caras como en las baratas (un céntimo más barato el minuto en cada una). Después se dieron cuenta de que también era importante el número de horas que cada una dedicaba a precio barata o caro. Comprobaron que ambas tienen el mismo número de horas de precio barata y caro, de modo que inicialmente parece <u>más barata en este caso la tarifa de Vodafone</u>, pero luego hay que tener en cuenta que tanto el Contrato Mañana como el Contrato Tarde cobran por pasos de 30 segundos, mientras que el de MoviStar (Plus Elección) cobra por segundos. Por tanto, dependerá del tipo de llamadas que se realicen (de la duración).

c) Cobra diferente precio para "Vodafone y llamadas provinciales" y "llamadas nacionales y a móviles de otras compañías".
   - Vodafone: Contrato Provincial.

Esta tarifa parece en principio más rentable para personas que llamen bastante con el móvil, además de a otros móviles de la misma compañía, a fijos de la provincia. Pero creen que habrá que compararla con las demás para confirmar para qué características concretas es la más barata, ya que dependerá del número concreto que llames a cada tipo de receptor.

C) CONTRATOS AMENA/ MOVISTAR

a) Que cobran un mismo precio para cualquier receptor y cualquier hora del día:
   - Amena: Contrato Libre, Contra Libre 18, Contrato Libre 30, Contrato Libre 50.
   - MoviStar: Plus 24 horas, Plan 30, Plan 40, Plan 60, Plan 90, Plan Familia XL.

A mayor precio por establecimiento de llamada, menor precio por minuto. Respecto a la comparativa entre las dos compañías:

- con 30 euros de consumo mínimo mensual, ambas cobran el mismo precio por minuto y por tanto son iguales;
- para 0'18 euros por minuto, Amena cobra 18 euros de consumo mínimo, mientras que MoviStar 9 y por tanto es mejor MoviStar.
- para 0'13 euros por minuto, Amena cobra 50 euros de consumo mínimo mensual mientras que MoviStar 60, por tanto es mejor Amena.
- Amena plantea una opción de sólo 6 euros de consumo mínimo mensual cobrando 0'18 euros por minuto.
- MoviStar plantea la opción de 0'11 euros por minuto con un consumo mínimo mensual de 90 euros.
- El Plus Familia XL ofrece 0'16 euros por minuto con un consumo mínimo mensual de 12 euros, pero implica que halla un mínimo de 3 líneas en un mismo contrato, aunque los 12 euros son compensables entre las líneas. Pero éste es un caso especial porque exige 3 líneas en un mismo contrato.

Sí que <u>sería interesante saber a partir de qué minutos hablados al mes es más rentable pasar al contrato que cobra más de consumo mínimo mensual pero menos por minuto</u>.

b) Que cobran diferente precio "Amena y fijos nacionales" y "otros operadores móviles nacionales" y diferentes precios, además, en distintos horarios.
   - Amena: Contrato Mis horas, Contrato 3x2.
   - MoviStar: Plus Elección.

Entre Plus Elección y Contrato Mis horas, no está claro cuál es más rentable. Contrato Mis horas cobra más barato el minuto en horario barato para llamadas a Amena y fijos nacionales, aunque sólo 0'01 euros, pero para llamadas a otros operadores es más barata Movistar (0'12 frente a 0'15). El horario caro para el mismo operador y fijos nacionales es más caro en Amena (0'45) que en MoviStar (0'23). Además, las horas baratas son 16 en Contrato Mis horas frente a las 15 de Plus Elección. Cuál es más barata dependerá por tanto de la cantidad de minutos que hables con unos tipos de operadores y otros y en unos horarios u otros.

El Contrato 3x2 cobra por minuto lo mismo que en Contrato Mis Horas. Las diferencias son que el Contrato Mis horas ofrece una hora más en horario barato (de 21 a 22 horas), pero son gratis en cada llamada los minutos 3º y los múltiplos de 3 o fracciones de esos minutos. Por tanto cuál es más barata depende de lo que hables en esa hora y de lo largas que sean las llamadas que realizas.

Por tanto aconsejan una comparación mensual, pero donde se tenga en cuenta la duración de las llamadas que se realizan para poder considerar las ventajas de la 3x2.

c) Que cobran el mismo precio para todos los tipos de receptores pero diferente en diferentes horarios:
    - Amena: Contrato Joven.

No es directamente comparable con ninguna otra pero es necesario compararla con todas. Dado que cobra bastante barato el minuto en un horario pero bastante caro en otro horario, dependerá de la cantidad de minutos que hables en uno u otro horario.

P: A partir de este análisis inicial, ¿cuáles creéis que deben ser los pasos siguientes que demos?

C29.3: Planificar los pasos a partir del análisis inicial. *A partir de este análisis inicial, ¿cuáles creéis que deben ser los pasos siguientes que demos?* ***(gran grupo)***

Lo primero que plantean es que debemos decidir qué colgaremos en la página web.
Ya acordamos que colgaríamos las "respuestas al problema" que hemos ido dando a medida que avanzábamos, con mención a las tarifas que se han utilizado como ejemplo en cada caso y las gráficas. Pero, en relación con las tarifas reales, aún no lo hemos decidido.

Creen que habría que hacer una diferenciación inicial entre Tarjetas y Contratos, aclarando las diferencias: que las tarjetas no exigen consumo mínimo mensual mientras que los contratos sí; y que los contratos implican además un gasto de activación de en torno a 21 euros.

Después consideran que habrá que pedir unos datos mensuales, como el número de llamadas que realizan a qué tipo de receptores, en qué horarios...

Algunos plantean que se puede considerar la clasificación que han planteado ahora y mostrarla así, de modo que la persona que entre en la página decida si quiere una tarifa plana, o diferente precio para diferentes horarios, o para diferentes receptores... y que entre en la comparación correspondiente. Así, sólo se utilizarán las comparaciones mensuales cuando sean necesarias, pero otros alumnos dicen que, aunque colguemos en Internet este análisis inicial, sería conveniente utilizar el precio mensual en todos los casos, ya que lo vamos a hacer con algunos, para así tener en cuenta también otros datos (como el precio por establecimiento de llamada) y darles el precio aproximado que tendría su factura, según las llamadas que realiza, con cada compañía, porque puede creer que lo que le conviene es una tarifa plana, por ejemplo, y que luego resulte que no. Acordamos que intentaremos dar el precio mensual en todos los casos.

La profesora recuerda que, además de las comparaciones mensuales, los grupos habían planteado dos tareas interesantes:

- Comparar la tarifa del contrato "Plus 24 horas" de MoviStar con la del Contrato Decreciente de Vodafone, para averiguar a partir de qué duración de llamada es más rentable una tarifa o la otra.
- En las tarifas "planas", calcular a partir de qué cantidad de minutos hablados es más rentable tomar una tarifa que cobre un mayor consumo mínimo mensual pero menor precio por minuto.

Los alumnos creen que, dado que no nos queda mucho tiempo, es mejor pasar a estudiar los datos que necesitaríamos para calcular los precios mensuales y averiguar cómo calcularlo, porque al hacerlo estaremos también contestando a estas dos cuestiones.

P: ¿Y cómo lo haremos? ¿Cada grupo determinará los datos necesarios en las compañías y tarifas que ha analizado o será algo que hagan todos los grupos a la vez para todas las tarifas?

Un alumno dice que los que han analizado tarifas de tarjeta pueden determinar qué variables necesitarían para la comparación entre tarjetas, pero que los de contrato deben determinar variables comunes, ya que la comparación se hará entre todos los contratos y no sólo de dos en dos compañías. De todos modos, se concluye que los dos que tienen contrato lo trabajarán por separado y luego se pondrá en común. El grupo que trabaja con Tarjetas se queja de que no podrán comparan con otro grupo sus conclusiones pero aceptan.

C29.4 (alumnos): Determinar qué datos pedir para calcular los precios mensuales con cada tarifa y así comparar cuál es más barata. *Que cada grupo determine los datos que serán necesarios para calcular el precio mensual con cada tarifa y cómo calcularlo.* ***(en grupos)***

DÉCIMA SESIÓN

C28: (alumnos) Hacer referencia en las respuestas que vamos dando al problema, en los casos de comparación de tarifas, a los gráficos que se corresponden con las comparaciones.

C28.1: Planificación de la correspondencia entre gráficos. *He hecho los gráficos de cada comparación entre compañías en Excel. Los he traído. El problema es que no he indicado en cada gráfico a qué compañía corresponde, de modo que no lo sabemos. Tenemos que decidir qué gráficos corresponden a cada comparación. ¿Cómo podemos hacerlo?* ***(gran grupo)***

Los alumnos preguntan al profesor cuántas copias tiene de los gráficos. La profesora les dice que tiene 3 copias. Se las reparte.
Plantean dos opciones: que cada grupo tome un tercio de los gráficos y decida a qué comparación corresponden o, como tenemos varias copias, puede cada grupo tener todos los gráficos y hacer la correspondencia de todos. Algunos defienden la opción de repartir los gráficos alegando rapidez en la realización al ser menos gráficos, pero otros dicen que tener todos los gráficos ayudará a decidir porque quizá pueden dudar en si una gráfica corresponde a varias comparaciones y tener todas ayudará a ver mejor las diferencias. Se acuerda por tanto que todos realizarán todas las comparaciones.

Las gráficas que se les reparte son en blanco y negro, de modo que no saben por el color cuándo se está repitiendo la gráfica de dos tarifas porque no pueden ver que son del mismo color. En el *Material 3* se muestras las gráficas que se les entregaron y el *Material 5* las tablas de los datos (precio, modo de cobro...) de cada una de las tarifas consideradas en el estudio preliminar.

Se les entregaron en cuartillas (una cuartilla en cada gráfico). Las gráficas han sido transformadas en cuanto al fondo y el color de los gráficos en relación con el documento de Excel para facilitar su visión impresa.

C28.2: Realizar la correspondencia entre las conclusiones hechas y los gráficos de las tarifas con las que se ha ejemplificado. *Cada grupo tomará un ejemplar de las "respuestas a al problema" y deberá indicar para cada en qué gráfico puede ejemplificarse. Cada grupo deberá explicar porqué se corresponde cada conclusión con cada gráfico* ***(en grupos).***

DURANTE EL TRABAJO EN GRUPOS I

Cada grupo toma un ejemplar de las "respuestas al problema" y van analizando las conclusiones y viendo con qué gráfico pueden ejemplificarse.

Un alumno dice que necesitan numerar de algún modo los gráficos para ir anotando en su hoja de "respuestas al problema" qué gráfico se corresponde con cada conclusión y que quizá deberíamos numerarlos todos del mismo modo. La profesora le dice que si quiere lo plantee en gran grupo.

C28.2.1: (alumno) Decidir si utilizar una numeración común de los gráficos. *He pensado que quizá deberíamos numerar los gráficos para utilizar la numeración poniendo al lado de cada conclusión el número de gráfico que corresponde, ¿estáis de acuerdo?* ***(gran grupo).***

Uno de los grupos dice que ellos ya están numerándolos pero en función de los que van necesitando. Es decir, "Nosotros hemos decidido qué gráfico corresponde a la primera conclusión... bueno... a la segunda,

porque con la primera no hay gráfico. Y hemos llamado a ese gráfico "Gráfico 1". Ahora le íbamos a preguntar a Esther si podemos escribir en los gráficos que nos ha dado porque íbamos a poner "Gráfico 1"".
Esta propuesta convence a todos y se acepta.
La profesora les dice que sí pueden escribir en los gráficos lo que quieran, porque son de cada grupo.

Un grupo indica, precisamente en relación con esa segunda conclusión, que comenzamos considerando que cobraran todo por segundos (el primer minuto también), pero en la conclusión no lo pone. Dicen que deberíamos modificar la conclusión poniendo "cobrando por segundos desde el primer segundo". Otro grupo plantea que también podemos no cambiar la conclusión y poner todas las tarifas en las que cobra en que cobran el mismo precio por minuto pero diferente precio por establecimiento de llamada, pero rápidamente se autocorrigen y dicen que no valdrían porque entonces la conclusión no se cumple, ya que si una cobra, por ejemplo, el primer minuto completo, o el resto por pasos de 30 segundos, no se cumple. En conclusión, hay que modificar la conclusión. La profesora pide que lo haga el grupo que lo ha planteado.

C28.2.2: (alumnos) Corregir la segunda conclusión matizando que cobran ambas desde el primer segundo por segundos*. Pues corregid la conclusión, ¿cómo quedaría?* **(el grupo que lo ha planteado).**

> "Si dos compañías tienen el mismo precio por establecimiento de llamada y diferente precio por minuto, cobrando ambas por segundo desde el primer segundo, es más cara aquella cuyo precio por minuto es mayor."

Todos los grupos preguntan si es posible que una misma conclusión se corresponda con varios gráficos. La profesora les contesta que las gráficas que se les ha dado son todas las que hemos ido utilizando durante el proceso de estudio.

DURANTE EL TRABAJO EN GRUPOS II

Todos los grupos primero echan un vistazo a todas las gráficas. Dejan para el final las que incluyen gráficas por pasos, porque saben que las vimos al final y por tanto se corresponderán con las últimas conclusiones. También agrupan las que tienen alguna que cobra el primer minuto completo, porque saben que primero vimos que cobraran por segundos. Unos alumnos explican a otros cosas como "estas son paralelas, así que cobran diferente precio por establecimiento de llamada pero el mismo precio por minuto", "aquí una cobra el primer minuto completo y la otra no pero son iguales en lo demás"...
Todos los grupos empiezan por las primeras conclusiones y siguen analizando la correspondencia hasta el final. Ninguno comienza por el final.

Un grupo plantea que hagamos la puesta en común tras mirar la correspondencia con gráficos de cada sesión, en vez de esperar a haber hecho todas. Explica "Porque así si tenemos un error no lo vamos arrastrando". Se acepta.

C28.2.3: (alumnos) Realizar la puesta en común tras analizar la correspondencia de gráficos en cada sesión en vez de al final.

C28.2.3.1: (alumnos) Analizar la correspondencia de Gráficos con las conclusiones tras la Sesión 1. *Pondremos entonces en común los resultados tras las conclusiones de cada sesión en vez de al final.* ***(en grupos)***

* En el diario utilizamos la numeración inicial de los Gráficos, que es siguiendo el orden en que surgieron en el estudio- es el orden en que se presentan en el *Material 4*- aunque en ocasiones las conclusiones no siguieron ese orden.

DURANTE EL TRABAJO EN GRUPO

* En relación con las conclusiones de la primera sesión, ya que se decidió hacer la puesta en común tras el análisis de cada sesión.

Respecto a:

> CONCLUSIÓN: Si dos compañías tienen el mismo precio por establecimiento de llamada y diferente precio por minuto, **cobrando ambas por segundo desde el primer segundo**, es más cara aquella cuyo precio por minuto es mayor. (conclusión modificada anteriormente incluyendo lo escrito en negrita)

En esta conclusión (la descrita más arriba, que es la primera que se corresponden con un gráfico), un grupo toma inicialmente las gráficas 1, 4, 10 y 11. Los otros solamente toman la 1 y la 4.

Algunos alumnos del grupo que ha tomado también la 10 y la 11 dudan sobre qué ocurre cuando las gráficas son rectas y se cruzan. Realmente no muestran duda con que se corresponda con esta conclusión, porque dice "es más cara cuyo precio por minuto es mayor", pero les provoca la duda de por qué se cortan. Un alumno finalmente deduce que deben diferente precio por minuto y también diferente precio por establecimiento de llamada (cada uno mayor precio en una de las cosas) para que en una duración de llamada cobren lo mismo (donde se cruzan).

Un grupo descarta el Gráfico 1 porque considera que es común el punto de inicio y por tanto cree que no se corresponde con una comparación de tarifas de teléfono, ya que tendrían diferente precio por minuto por cómo se distancia sus gráficos a medida que aumenta la duración de llamada pero no puede costar los mismo en ninguna duración de llamada, como interpretan que ocurre al principio. Preguntan al profesor si los gráficos coinciden en ese primer punto y la profesora les dice que sí.

Algunos alumnos dudan con el Gráfico 2, pero lo descartan porque compara 3 compañías.

Otro grupo pregunta al profesor si el Gráfico incluye los precios en 0 segundos, aunque no existan llamadas de 0 segundos porque entonces no existe duración. La profesora les dice que no; que empieza en 0’016666666666666667 minutos, que se corresponde aproximadamente con 1 segundo. Entonces se muestran dudosos. Explican al profesor que dudan con el Gráfico 4; que habían pensado en descartarlo porque creían que aparecía para la duración 0 el precio por establecimiento de llamada y entonces el Gráfico 4 no podía ser un ejemplo de la conclusión que estábamos trabajando, porque no cobrarían el mismo precio por minuto; pero ahora dudaban.

Respecto a:

> CONCLUSIÓN: Si dos compañías tienen el mismo precio por minuto pero diferente precio por establecimiento de llamada, es más cara aquella cuyo precio por establecimiento de llamada es mayor.

Los alumnos dicen que también en la siguiente conclusión hay que indicar que cobran ambas por segundos desde el primer segundo. La profesora les dice que corrijan sobre el papel las conclusiones en todos los casos que lo consideren necesario y que al final lo pondremos en común junto con la asignación de gráficos.

C28.2.3.1.1: (alumnos) Corregir las conclusiones. *Cada grupo corregirá las conclusiones como crea oportuno y posteriormente, en la puesta en común, acordaremos qué modificaciones son necesarias.* ***(en grupos)***

La conversación en uno de los grupos es representativa del proceso que siguieron todos respecto a la selección de los gráficos ejemplificantes:

A1: Si tienen diferente precio por establecimiento de llamada, entonces son paralelas...

A2: Bueno... Sólo si cobran lo mismo por minuto, pero como aquí cobran lo mismo, pues serán paralelas.

A3 (tomando los Gráficos y enseñándoselas a los demás): Esta (el Gráfico 3) tiene que ser... porque también estas (las gráficas del Gráfico 8) son paralelas pero el primer minuto lo cobran completo...

A4: Pero esta (Gráfico 12) también puede ser, porque son paralelas.

A1 (tomando los Gráficos 3 y 12): Parece que son la misma gráfica... Bueno, parece que la gráfica más barata es la misma en las dos compañías. La más cara yo creo que es diferente. Pero... valen las dos como ejemplo.

A2: En conclusión son ésta (Gráfico 3) y ésta (Gráfico 12), porque la 8 no vale.

Acuerdan que sí, las dos ejemplifican la conclusión.

Un grupo plantea que ahora que estamos indicando los gráficos que ejemplifican las conclusiones, se han dado cuenta de que si en la página web colgamos solo las conclusiones y los gráficos no han ejemplificaciones del resto de conclusiones. Por ejemplo, de las otras dos conclusiones de esta primera sesión, que son

> El precio de una llamada se puede calcular con la fórmula:
>
> $P_A = e + pt$
>
> P_t = Precio de la llamada (de una duración t); e = Precio por establecimiento de llamada.
>
> p = Precio por minuto; t = Duración de la llamada.
>
> * Primero pusieron P_A, pero finalmente decidieron llamarlo P_t.

y

> Podemos calcular el precio de las llamadas de una compañía conocido el precio de esas llamadas de otra compañía con diferente precio por minuto o diferente precio por establecimiento de llamada. Las fórmulas son:
>
> Para diferente precio por establecimiento de llamada pero igual precio por minuto: $P_A = P_B + (p_A - p_B)$
>
> P_A: Precio de la llamada en la compañía cuyo precio por establecimiento de llamada es mayor.
> P_B: Precio de la llamada en la compañía cuyo precio por establecimiento de llamada es menor.
> p_A: Precio por establecimiento de llamada de la compañía A.
> p_B: Precio por establecimiento de llamada de la compañía B.

Para diferente precio por minuto pero igual precio por establecimiento de llamada: $P_A = P_B + (p_A - p_B)t$

> P_A: Precio de la llamada en la compañía cuyo precio por minuto es mayor.
> P_B: Precio de la llamada en la compañía cuyo precio por minuto es menor.
> p_A: Precio por minuto de la compañía A.
> p_B: Precio por minuto de la compañía B.

Ese grupo pregunta al profesor si ha tiene nota de cada paso que hemos ido dando, porque entonces se podría colgar en la página web todo el proceso que hemos seguido, dividido por sesiones, de modo que pudiéramos remitir al que visitara las conclusiones, además de a los gráficos en Excel, a todo el proceso que seguimos. Así tendrían las conclusiones por un lado pero, si quisieran, podrían saber cuál ha sido todo el proceso para así entenderlo todo mejor. La profesora les dice que sí. Los alumnos profundizan con preguntas como:

- ¿Pero tienes todas las cuestiones que hemos ido trabajando?
- ¿Y también todo el proceso de lo que íbamos contestando a las cuestiones?
- ¿Pero está por sesiones? Porque así es más fácil indicarles dónde tienen que mirar para saber sobre cada conclusión.
- ¿Y cómo lo has organizado?
- ¿Y nos lo vas a enseñar?

La profesora les dice que sí a las dos primeras preguntas. Añade que se lo enseñará más adelante, cuanto esté más completo, y que les explicará cómo lo ha organizado.

Los alumnos se alegran y dicen que si se lo pueden decir al resto del grupo. La profesora les dice que sí.

C28.2.3.1.2: (alumnos) Incluir en la página web el proceso seguido durante el taller. *Como la profesora ha ido tomando nota de todo lo que hemos ido haciendo hemos pensado que también se puede colgar de la página web y así, además de ponerles los ejemplos de las conclusiones que se ven con gráficos, podemos dejarles que vean el proceso para obtener cada conclusión, para que así lo entiendan mejor. Además, así también pueden ver ejemplos de conclusiones como las otras dos de esta sesión, que no se ven con gráficos.* ***(pendiente de hacer)***

PUESTA EN COMÚN

> CONCLUSIÓN: "Si dos compañías tienen el mismo precio por establecimiento de llamada y diferente precio por minuto, cobrando ambas por segundo desde el primer segundo, es más cara aquella cuyo precio por minuto es mayor."

El grupo que expone considera que se corresponde con los Gráficos 1 y 4.

Otro grupo defiende que sólo se ejemplifica en el Gráfico 4 porque en el Gráfico 1 parten de un mismo precio y eso es imposible si cobran diferente precio por minuto no pueden costar lo mismo para ninguna duración de llamada. Creen que era un "gráfico trampa" porque no se corresponde con la comparación de dos tarifas de teléfono.

El grupo que está exponiendo duda. Cree que puede ocurrir que la diferencia sea muy pequeña y por eso no la veamos, pero ven posible también la idea de un "gráfico trampa".

El tercer grupo afirma que lo que creen es que el Gráfico 4 no es un ejemplo, porque creen que no tienen el mismo precio por establecimiento de llamada. Explica que "Si el precio por establecimiento de llamada es el mismo y el precio por minuto no es muy diferente, puede ocurrir que en un segundo..." (que, explican al grupo, "es el primer punto de la gráfica, el precio en 0'16666666666667 minutos, que es más o menos un segundo”)...”los precios sean muy parecidos, porque sólo hay que sumar al precio por establecimiento de llamada, el precio por minuto dividido entre 60 y, por ejemplo, 0’12 entre 60 son 0’002, que es muy poquito y casi no se notaría”. Además, dicen, ellos han medido en el Gráfico 1 la distancia entre las rectas en un minuto, en dos y en tres en la gráfica 1 y han visto que la distancia es en dos minutos el doble que en un minuto y en tres minutos el triple que en un minuto. Esto sólo puede ocurrir, explican, “si el precio por establecimiento de llamada es el mismo pero es diferente el precio por minuto”. Sin embargo, añaden, en el Gráfico 4 hemos medido las mismas distancias y resulta que “la distancia es cada vez más pequeña”.

Los alumnos de los demás grupos comienzan a medir las distancias y confirman el dato. Los alumnos se muestran interesados por este método, que les llama la atención.

La profesora les pide que expliquen qué quiere decir que quieren decir con que es “cada vez más pequeña” la distancia. Explican que en dos minutos en vez de ser el doble la distancia que en un minuto, es un poquito menos; en tres minutos, lo que se añade es aún menos...

Entonces un alumno de otro grupo dice que esto deberíamos incluirlo como conclusión, porque es muy útil. La profesora pide entonces al grupo que lo ha planteado que lo formule a modo de conclusión.

C28.2.3.1.3: (alumno) Incluir como conclusión el modo de detectar a través de sus gráficas compañías con el mismo precio por establecimiento de llamada y diferente precio por minuto; diferenciándola de compañías con distinto precio por establecimiento de llamada y también diferente precio por minuto. (alumnos)

Lo formulan del siguiente modo:

"Si dos compañías tienen el mismo precio por establecimiento de llamada y diferente precio por minuto, cobrando ambas el primer minuto completo, la distancia entre sus precios en 2 minutos será el doble que en 1 minuto, y en tres minutos el triple... y en mil minutos será mil veces mayor".

Al resto les parece bien.

La profesora explica que en "la distancia entre sus precios" están mezclando distancias con precios y que sería más adecuado decir "la distancia entre sus gráficas de precio por minuto en 2 minutos...". Los alumnos lo aceptan.

La profesora plantea que se podría elaborar ya la conclusión en relación a las distancias entre gráficas cuando es diferente tanto el precio por minuto como el precio por establecimiento de llamada. Los alumnos dicen que podrían elaborarla, pero que no la podrán añadir en la lista de conclusiones "hasta que lleguemos a la comparación entre esos dos tipos de compañías, porque si no sería un lío". Además, añade un alumno, "hay también gráficos donde se cruzan los gráficos" (los muestra) "y en estos creo que también era diferente precio por minuto y diferente precio por establecimiento de llamada". Se decide por tanto que "mejor lo dejamos para cuando lleguemos". Los demás están de acuerdo.

Entonces, dicen los alumnos, el gráfico que lo ejemplifica es éste (el Gráfico 1) y lo que ocurre es que parece que coinciden en el precio al principio pero no es así.

La profesora les dice que sí; que lo que ocurre en el Gráfico 1 es que la diferencia es muy pequeña; que el gráfico se corresponde con la comparación de dos tarifas que cobran 0'12 euros por establecimiento de llamada ambas, pero una 0'15 euros por minuto mientras que la otra 0'2 euros, y que son las compañías A y B, las primeras que comparamos. Pero matiza la profesora que la distancia entre las rectas no es el precio de un segundo, sino la diferencia entre sus precios de un segundo. Es decir, 0'12 entre 60 es 0'002, y 0'2 entre 60 es 0'0033333333; entonces, la diferencia entre sus precios es 0'00333333333-0'002 = 0'001333333333.

Algunos alumnos dicen que "¡Claro, nos puede ayudar la tabla de datos de cada compañía que hemos ido haciendo¡". Un grupo dice que no lo tiene completo y lo completa con los datos de otro grupo (se puede observar esta tabla de datos en el *Material* 4). Les plantea la profesora que, que ya que tienen esa información, indiquen en los gráficos el nombre de la gráfica de cada compañía.

La profesora les pregunta si terminan con la siguiente conclusión y luego indican a qué Compañías corresponde cada Gráfico o mejor paran ahora y ya lo contestan indicando las Compañías. Los alumnos deciden que es mejor parar y ya contestar a la vez qué Gráfico son y a qué compañías corresponden.

* Junto con los datos de cada compañía (precio por minuto, precio por establecimiento de llamada, modo de cobrar el primer minuto, y modo de cobrar el resto del tiempo), como podemos observar en el *Material 4*, se indica el nombre de la compañía (A, B, C...). Los nombres de las compañías son los que les dimos durante el proceso de estudio.

C28.2.3.1.4: Indicar a qué compañía corresponde cada gráfica una vez que se deduce cuál es el Gráfico de cada conclusión. (en grupos)

* Se paraliza la puesta en común para que lo hagan.

DURANTE EL TRABAJO EN GRUPOS

No presentan ningún problema en comprender la tabla. Tampoco les causa gran problema determinar las compañías-tarifas a las que corresponde cada gráfica.

Un grupo pregunta si lo que estamos haciendo ahora también estará incluido en la descripción de las cosas que hemos ido haciendo. La profesora les dice que sí. Dicen que entonces podríamos numerar las conclusiones (que en este momento están precedidas de guiones y no de números) para que así fuera más fácil la descripción de lo que vamos haciendo.

Se le transmite al gran grupo y está de acuerdo.

Explica el grupo que lo tendrá que hacer la profesora, que es el que tiene a ordenador las "Respuestas al problema", que es como llamábamos en clase a las "Respuestas a la cuestión generatriz", como ya hemos indicado anteriormente.

C28.2.4 (alumnos): En la página web, indicar la referencia al número que corresponde a cada conclusión que vamos trabajando, para que no haya que repetirlas otra vez. Para ello, primero es necesario numerarlas. (profesor)

* La profesora deberá numerar las conclusiones (sustituyendo los guiones) en el documento en el que está plasmando todas las conclusiones.

* A partir de ahora, dado que las conclusiones han decidido numerarse, nos referiremos, en este diario, a cada conclusión de las "Respuestas a la cuestión generatriz", según su numeración, en vez de copiarlas a texto completo. En las "Respuestas a la cuestión generatriz" se presentan las conclusiones originales con las modificaciones producidas durante esta sesión en negrita y tachado, según si se añade o se quita. (*Ver Material 9*).

* La conclusión primera a la que asignamos gráfico ejemplo es la número 2. La conclusión que añadimos durante esta sesión en relación con la detección de gráficas de tarifas que cobran el mismo precio por establecimiento de llamada y diferente precio por minuto midiendo la distancia entre los precios en diferentes minutos es la número 3.

PUESTA EN COMÚN

Conclusión 4

Queda modificada incluyendo que se refiere a tarifa que "cobran por segundos desde el primer segundo".

Los gráficos que se corresponden, dice el grupo que expone, son el 3 y el 12. Que el Gráfico 3 se corresponde con las compañías D y A, porque si pones un Gráfico sobre otro ves que la más cara (la que queda más arriba) es A y la otra sabes que es D porque es la única en que el precio por minuto, siendo diferente a A, es menor. Además, se ve que se acerca mucho a 0'1, que es el precio por establecimiento de llamada en la compañía D.

Siguen explicando: "En el Gráfico 12 sabes también que A es la de abajo, porque si pones un gráfico encima de otro se ve que coinciden, pero la otra tiene que cobrar más, parece que se acerca mucho a 0'15, y como la otra posibilidad más cercana es 0'12, sabemos que es 0'15. Como tiene que cobrar el mismo precio por minuto, pues es K". Pero se muestran dudosos de que si es un ejemplo de esta conclusión, que es de la primera sesión, tenga la letra K, que significa que la planteamos bastante más adelante.

El resto de grupos coinciden en sus resultados.

La profesora explica que realmente, como bien dicen, surgió esta Compañía (K) más adelante, no en la primera sesión, pero si el Gráfico también lo ejemplifica, ¿qué creen que debemos hacer?

C28.2.3.1.5: (alumnos) Decidir si situar como ejemplo de una conclusión un gráfico que sirve como ejemplo pero que no fue utilizado en el proceso para obtener dicha conclusión. *Tienen razón en que surgió la Compañía K después de obtener esta conclusión pero también es verdad que ejemplifica la conclusión. ¿Qué creéis que debemos hacer?* ***(alumnos)***

Deciden que por ahora la dejan como ejemplo y que si más adelante creen que deben quitarla, pues lo harán. Además, dicen, como van a tener el proceso que se ha seguido, pues pueden ver que surgió más adelante pero que también sirve como ejemplo.

Un grupo dice que se podría añadir también como conclusión que, gráficamente, son paralelas. La profesora les dice que lo enuncien.

C28.2.3.1.6: (alumnos) Incluir como conclusión el modo de detectar compañías a través de sus gráficas con el mismo precio por establecimiento de llamada y diferente precio por minuto; diferenciándola de compañías con distinto precio por establecimiento de llamada y también diferente precio por minuto. (alumnos)

Lo enuncian del siguiente modo:

"Si dos compañías tienen el mismo precio por establecimiento de llamada y diferente precio por minuto, cobrando ambas el primer minuto completo, sus gráficas son paralelas".

La profesora dice que eso significa, en relación con la distancia entre sus gráficas que es...

Los alumnos contestan que "Es siempre la misma".

* Esta se convierte por tanto en la conclusión 5.

Un grupo dice que, en todas las conclusiones de esta primera sesión tendríamos que decir que es para comparar gráficas que cobran por segundo desde el primer segundo, porque las conclusiones primera y última (1 y 6) sólo valen para ese tipo de compañías y no lo pone.

Entonces las modifica ese mismo grupo.

C28.2.3.1.7: (alumnos) Modificar las Conclusiones 1 y 6 indicando que sólo son válidas cuando ambas compañías cobran por segundos desde el primer segundo. (alumnos)

* Las modificaciones pueden observarse en *Material 9*.

C28.2.3.2: Analizar las conclusiones planteadas tras la Sesión 2, concluyendo los Gráficos que ejemplifican cada conclusión y las Compañías-tarifas a las que corresponden sus gráficas. Además, en los casos en que corresponda, corregir las conclusiones. *Ahora continuamos con las conclusiones de la Sesión 2.* ***(en grupos)***

DURANTE EL TRABAJO EN GRUPOS

Pasan todos a la Cuestión 9.

Todos eligen primero de entre los Gráficos aquellos en que se cobra el primer minuto completo.

Algunos intentan primero deducir de qué Compañías se trata por si les facilita luego buscar los gráficos, pero ninguno lo hace así porque ven que es muy costoso en tiempo y pasan todos a comenzar por buscar los Gráficos.

Algunos se quejan de que los datos de las Compañías les está complicando, porque ahora, además de elegir el gráfico tienen que averiguar a qué compañías corresponden las gráficas del mismo. Plantea un grupo al profesor que, por ejemplo en este caso, donde han averiguado rápidamente qué gráfico es, les cuesta mucho trabajo saber a qué compañías corresponde, porque no tienen los valores en los puntos de las gráficas. Dicen que, además, si la profesora tiene anotado lo que hemos ido haciendo, será fácil que, mirando el ejercicio, definamos a qué letra corresponde cada compañía. Y por eso plantean que podrían utilizar los datos de las Compañías cuando los necesitasen pero no tener que estar decidiendo a qué Gráficas corresponde cada gráfico. Además, dicen, si no vamos a tardar mucho tiempo y todavía nos queda mucho trabajo por hacer.

La profesora pregunta en gran grupo si han averiguado qué gráfico es. Todos los grupos dicen que sí. Luego les pregunta si les está costando averiguar a qué Compañía corresponde cada gráfico y dicen dos grupos que sí, explicando que al no tener el valor exacto en ningún punto de la gráfica se dificulta determinar a cuáles corresponden. Pero un grupo dice que ellos sí han averiguado a qué compañías corresponden, porque una es la Compañía A (se ve porque se puede comparar con la Gráfica A, que está en el Gráfico 1, y ver que es la misma) y por tanto la otra tiene que ser la Compañía E, porque es igual que A excepto en que cobra el primer minuto completo.

Entonces se acuerda que se intentará ir determinando, como habíamos acordado, las Compañías a las que corresponde cada gráfica, ya que hasta ahora se ha logrado hacer siempre. Si aparecen dificultades nuevas, las analizaremos.

En relación con la conclusión 9, los alumnos tomando nota resumida de las características de las dos compañías incluidas en la 9. Por ejemplo:

= €/establecimiento llamada

≠ €/m.: i: C + cara (queda siempre por encima)

ii: C + barata (más barata primer minuto)

La mayoría pasan, tras un análisis inicial de las características, a buscar Gráficos donde una cobre el primer minuto completo y la otra por segundos, cobrando ambas por segundos el resto, y sólo encuentran un gráfico que se corresponde con esas condiciones, que es el Gráfico 6.

Lo que ocurre es que esta conclusión fue dada por evidente durante el proceso de estudio y no se ejemplificó, por esa razón no existe gráfico de ejemplo.

Todos los grupos van diciendo al profesor que creen que falta un Gráfico, que sería el que correspondería con la conclusión *9bi*.

Entonces la profesora explica que puede ser que lo que ocurre es que no lo ejemplificáramos y por eso no esté hecho el Gráfico, porque los gráficos que ha traído son todos los que se han ido utilizando durante el taller. En cualquier caso, continúa la profesora, podéis ver si encontráis un ejemplo que sería válido para ejemplificar esto comparando dos de las gráficas que tenemos.

C28.2.3.2.1: Buscar qué dos Compañías podrían compararse para ejemplificar la conclusión 9bi. *Dado que no existe entre los gráficos que tenéis uno que ejemplifique la conclusión 9bii, buscad qué dos compañías podrían compararse para ejemplificar esta conclusión* ***(en grupos)***

Por comparación con las gráficas anteriores todos deducen que una de las compañías, la que cobra por segundos desde el primer segundo, es B. La determinación de cuál es la otra implica más dificultad.

PUESTA EN COMÚN

<u>Conclusión 9a</u>

Ya se había determinado durante el trabajo en grupos. El grupo que había averiguado a qué Compañías corresponden las gráficas expone. Dicen "Tienen que coincidir en toda su gráfica menos en el primer minuto, así que tiene que ser éste (mostrando el Gráfico 5)". Y añaden que, como ya dijimos, las compañías son A y E.

<u>Conclusión 9bi</u>

El grupo que expone pone como ejemplo el Gráfico 4 (explica que no valen las que son paralelas porque eso implicaría que cobran el mismo precio por minuto y diferente precio por establecimiento de llamada, y en este ejemplo tienen que tener el mismo precio por establecimiento de llamada y diferente precio por minuto), pero cobrando, la que queda por encima (la más cara), además, el primer minuto completo.

Pero los otros dos grupos dicen que eso implicaría considerar una nueva compañía y que habíamos quedado en buscar qué dos compañías de las que tenemos podrían compararse para no incluir compañías nuevas. Este grupo explica que han buscando en las tablas cuál era la más cara de las que cobraban el primer minuto completo y el resto por segundos. Era S. Luego han buscado una que cobrara por segundos desde el primer segundo, que cobraran lo mismo por establecimiento de llamada (0'12) pero menos por minuto. Eligieron, por ejemplo A, aunque habría otras posibilidades.

El resto de grupos aceptan tomar este caso como ejemplo: S y A. Lo denomino Gráfico 24.

<u>Conclusión 9bii</u>

En el caso 9bii todos coinciden que decir que corresponde al Gráfico 6.
El grupo que expone dice una de ellas es B, la que cobra por segundos también el primer minuto, pero que la otra pueden ser cualquiera de las que, cobrando el primer minuto completo, cobran el mismo precio por establecimiento de llamada (0'12) y menos de 0'15 por minuto. Por tanto pueden ser tanto F como H.
Otro grupo dice que creen que debe ser F porque está primera en el orden y por tanto debió aparecer antes durante el trabajo.
Concluimos que deberemos comprobarlo con la documentación sobre lo que hemos ido haciendo. Se acuerda que este trabajo lo realizará la profesora.

C28.2.3.2.2: Determinar a qué Compañías corresponden aquellas gráficas que no hayamos podido deducir con el material que ahora tenemos. (profesor)

Pero la profesora explica que sí podemos deducir, sin necesidad de consultar esa documentación, que es F, porque H cobra 0'15 por establecimiento de llamada y 0'14 por minuto y entonces el primer minuto costaría 0'29 euros. "Si miramos la gráfica y nos fijamos en las subdivisiones, vemos que esas subdivisiones son de 0'02 euros y que la recta del primer minuto se sitúan entre 0'26 y 0'28, y no entre 0'28 y 3, como debería ser si se tratara de H".
Los alumnos están de acuerdo.

C28.2.3.3: Analizar las conclusiones planteadas tras la Sesión 3, concluyendo los Gráficos que ejemplifican cada conclusión y las Compañías-tarifas a las que corresponden sus gráficas. Además, en los casos en que corresponda, corregir las conclusiones. *Ahora continuamos con las conclusiones de la Sesión 3.* ***(en grupos)***

DURANTE EL TRABAJO EN GRUPOS

Todos, tras leer las anteriores, comienzan por la Conclusión 28. La mayoría de los grupos en esta ocasión primero determinan qué compañías son en la tabla muy rápidamente. "Tienen que ser E y F porque son las únicas que tienen los precios al revés y cobran las dos el primer minuto completo", le explica, por ejemplo, un compañero a otro. Tampoco cuesta trabajo encontrar las gráficas porque están descritas sus características en la Conclusión. Y también todos detectan rápidamente cuáles son las Compañías que corresponden a las gráficas.

En la conclusión 29, también les resulta sencillo determinar el Gráfico que lo ejemplifica y las compañías a las que corresponden las gráficas.

La Conclusión 30 tampoco conllevó problemas.

En la Conclusión 31 muchos buscaron un Gráfico como el de la Conclusión 30 pero en el que ambas cobraran el primer minuto por segundos, en vez de completo, pero no lo encontraron. Después encontraron dos que podían ser y todos decidieron que las dos eran ejemplos. Al buscar a qué compañías correspondían las gráficas estaban invirtiendo mucho tiempo y la profesora dijo que dejaran de buscarlas y que ya las añadiríamos mirando el desarrollo del taller.

PUESTA EN COMÚN

Conclusión 28

Es el Gráfico 7 el que lo ejemplifica.

El grupo que expone dice que "La que queda por encima es la que cobra más por minuto, que es E, porque el precio por establecimiento de llamada no se multiplica, pero el precio por minuto sí".

Conclusión 29

El Gráfico es el 8. El grupo que expone explica que tienen que ser paralelas y cobrar ambas el primer minuto completo, y este es el único Gráfico que lo cumple. Dicen que una compañía, la más cara, vieron que era G porque parte de 0'3 euros aproximadamente y eso implica que la suma del precio por establecimiento de llamada más el precio de un minuto deben sumar 0'3. La compañía G es la única en que suman 0'3 (0'15 por minuto más 0'15 por establecimiento de llamada) y cobra el primer minuto completo. La otra Compañía tiene que cobrar el mismo precio por minuto pero menos por establecimiento de llamada y cobrar el primer minuto completo, así que tiene que ser E.

Conclusión 30

El grupo que expone dice que han decidido que es el Gráfico 9 porque era el único que quedaba donde ambas cobraban el primer minuto completo. Para decidir qué gráficas eran, dicen que miraron que la más cara cobraba durante el primer minuto lo que parecían 0'29 aproximadamente euros. Entonces dedujeron que tendría que ser H, porque ninguna otra compañía suma 0'29 el establecimiento de llamada más un minuto. La otra tiene que cobrar distinto precio por minuto y distinto precio por establecimiento de llamada y entre las dos cosas sumar menos de 0'29, así que la única que podía ser es E, que suma 0'17.

Uno de los grupos no había sabido concluir cuál era la gráfica que no era H, pero les convence la explicación. El otro grupo lo había hallado igual.

Conclusión 31

Afirman el grupo que expone que puede ser el Gráfico 10 ó el 11.

* Las gráficas a las que corresponden las gráficas no se analiza porque la profesora dijo que no lo hicieran.

Un grupo dice creen que el Gráfico 11 es un caso especial, porque coinciden en el precio de un minuto y no se cumple que se siga la tendencia, sino que justamente se invierte la tendencia. Plantea por tanto incluir una nueva conclusión específica para este caso.

Los demás grupos están de acuerdo.

La profesora pregunta por qué creen que coinciden en el precio de un minuto. Contestan que tiene que ser porque están invertidos el precio por minuto y el precio por establecimiento de llamada.

Los alumnos explican que esta Conclusión es la 32. Los demás lo confirman.

C28.2.3.4: Analizar las conclusiones planteadas tras la Sesión 4, concluyendo los Gráficos que ejemplifican cada conclusión y corrigiendo las conclusiones que se crea necesario. A partir de ahora no determinaremos a qué gráficas corresponden por la premura del tiempo. *Vamos entonces a analizar las conclusiones de la Sesión 4, pero sin buscar a qué compañías corresponden las gráficas porque nos queda poco tiempo* **(en grupos)**

DURANTE EL TRABAJO EN GRUPOS

La conclusión 32 ya se analizó anteriormente.
Respecto a la conclusión 33, dudan sobre si hay que ejemplificar, porque es un matiz a una conclusión anterior. Preguntan al profesor dos grupos. La profesora dice que ellos decidan y luego nos pondremos de acuerdo en la puesta en común.

PUESTA EN COMÚN

Conclusión 32, ya dijimos anteriormente que se ejemplificaba en el Gráfico 11.

Conclusión 33
Expone el grupo que no había preguntado al profesor. Dicen que son los Gráficos 3 y 12. Los otros dos grupos dicen que no sería necesario ponerlo porque es una ampliación de una conclusión anterior. Pero al final convence el grupo que expone diciendo que mejor que haya información de más que de menos.

C28.2.3.5: Analizar las conclusiones planteadas tras la Sesión 5, concluyendo los Gráficos que ejemplifican cada conclusión y corrigiendo las conclusiones que se crea necesario. *Continuamos entonces con las conclusiones de la Sesión 5* ***(en grupos)***

Todos los alumnos dicen que no hay que indicar los Gráficos en ninguna de las conclusiones.
Algunos matizan que esta información si será útil cuando, al terminar este trabajo, pasemos a determinar el modo más adecuado de comparar las tarifas reales para la página web.

C28.2.3.6: Analizar las conclusiones planteadas tras la Sesión 6 y parte de la 7 (hasta C.26.3.3), concluyendo los Gráficos que ejemplifican cada conclusión y corrigiendo las conclusiones que se crea necesario. *Pues pasamos a analizar las conclusiones de las sesiones 6 y 7, que las hicimos conjuntas* ***(en grupos)***

DURANTE EL TRABAJO EN GRUPOS

En la Conclusión 38 algunos alumnos consideran que pueden ser el Gráfico 13 o el 14. Otros eligen el 13.

La Conclusión 40 si conlleva algunas dificultades. El problema es que en la misma conclusión aparecen dos tipos de relaciones y encima, el ejemplo para el primer caso es el Gráfico de la conclusión anterior (se repite) y el siguiente Gráfico no existe. Todos los grupos dicen al profesor que no tienen ese Gráfico.

PUESTA EN COMÚN

<u>Conclusión 38</u>

El grupo que expone dice que el Gráfico que lo ejemplifica es el 13.

Los otros dos grupos dicen que el Gráfico 14 también lo ejemplifica.

El que expone explica que en el Gráfico 14 aparecen más gráficas (3 en vez de 2) y por eso creen que es mejor dejarlo por ahora. Además, creen, el hecho de que haya 3 gráficas puede confundir. Se decide elegir sólo el 13.

<u>Conclusión 40</u>

El grupo que expone dice que se hace referencia dos tipos de Gráficos. Que uno de ellos, lo sitúa leyendo la Conclusión, es el 13, el anterior. Dicen que el siguiente Gráfico no lo han encontrado y están seguros de que no

está porque no hay ninguna gráfica donde se cobre por pasos de 30 segundos el primer minuto.
Los alumnos concluyen que, como es tan evidente, no hace falta incluir un gráfico.

C28.2.3.7: Analizar las conclusiones planteadas tras parte de la Sesión 7 (desde C.26.4) y la 8, concluyendo los Gráficos que ejemplifican cada conclusión y corrigiendo las conclusiones que se crea necesario. *Vamos a analizar ahora las siguientes conclusiones* ***(en grupos)***

DURANTE EL TRABAJO EN GRUPOS

En la Conclusión 42 algunos dudan con que pueda ser el Gráfico 16, hasta que se dan cuenta de que una de ellas no cobra el primer minuto completo.
La Conclusión 43 plantea dudas algunos con relación a que también sea un ejemplo el Gráfico 14, aunque finalmente todos deducen que en el Gráfico 14 la que cobra por pasos de 30 segundos cobra el primer minuto completo.
La Conclusión 45 no causa problemas.
En la Conclusión 47 todos los grupos plantean al profesor si no está repetido un Gráfico (Gráficos 18 y 19). La profesora les dice que no son exactamente iguales y que tienen medios para averiguar qué ocurre. Por esa misma razón, en las Conclusión 48a y 48b, algunos alumnos no saben si es el Gráfico 18 ó 19 en cada caso.
La Conclusión 48c no causa problemas.
Deciden rápidamente todos los grupos que el Gráfico que ejemplifica la Conclusión 49a es el 23 y no consideran el 21 ni el 22 porque gráficamente parece que coinciden en el extremo del tercer segmento y por tanto parece que coinciden en 3 segmentos.

Como gráficamente parece que en el Gráfico 22 también corta la gráfica de la compañía que cobra por segundos a la otra en el extremo del tercer segmento, afirman todos los grupos que no tienen el Gráfico para la Conclusión 49b.

Les dice la profesora que vamos a iniciar la puesta en común e iremos aclarando algunos aspectos que les ayudarán a ir decidiendo qué gráficos son los que ejemplifican cada conclusión.

PUESTA EN COMÚN

Conclusión 42

El grupo que expone dice que es el Gráfico 14, aunque haya 3 gráficas, porque no hay otro gráfico en que, cobrando ambas el primer minuto completo, la que cobra por pasos de 30 segundos sea más cara para cualquier duración.

Añaden que si aquí la incluimos, también podemos incluirla en las Conclusiones 38 y 40 donde, aunque servía como ejemplo, lo excluimos porque incluía 3 gráficas.

Pero otro grupo dice que aquí tiene más sentido porque hay dos gráficas implicadas y luego la tercera es la "línea base" de la que cobra por pasos de 30 segundos.

Se decide finalmente que sólo se indicará como ejemplo en esta conclusión pero se matizará que también aparece la "línea base" de la gráfica que cobra por pasos de 30.

Conclusión 43

El grupo que expone dice que es el Gráfico 15.

Otro grupo añade que habría que corregir en la esta conclusión "es más cara", sustituyéndolo por "cobra más por minuto", porque "Ser más cara sería si fuera más cara en total, considerando precio por establecimiento y precio por minuto”. Los demás están de acuerdo.

Conclusión 45

Es el Gráfico 16.

Conclusión 47

El grupo que expone dice que han elegido como ejemplos el Gráfico 18 y 19. Explican que creen que son iguales. Que la profesora les ha dicho que tenían medios para averiguarlo pero no lo han hecho porque lo han dejado para el final y no les ha dato tiempo.

Uno de los grupos dice que ellos ya han averiguado qué ocurre. Explica que vieron que tenían que ser dos compañías en las que el precio por establecimiento más el precio por minuto sumara un valor cercano a 0’35 cobrando las dos el mismo precio por minuto. Además, tenían que cobrar las dos el primer minuto completo y el resto por segundos. Revisando las tablas con los datos y teniendo en cuenta las tablas que teníamos en la conclusión se dieron cuenta de que una tendría que ser Q y la otra R.

La profesora pregunta si entonces valen las dos como ejemplos de la Conclusión 47 o no. Todos afirman que sí, porque son paralelas.

La profesora les recuerda que utilizamos los dos Gráficos durante el estudio porque primero creamos la compañía Q creyendo que cortaba su gráfica a la gráfica de L es los puntos extremos izquierdos y luego tuvimos que rehacerlo y hallar R.

Un alumno dice que si son las dos debemos añadir la tabla de datos de Q y L también (además de la de L y P, que ya está).

Conclusión 48a y 48 b

El grupo que expone, y los demás también, dudan sobre si el Gráfico es el 18 o el 19. La profesora les dice que gráficamente no se ven muy bien en blanco y negro. En color se ve mejor que en el Gráfico 19 los puntos coinciden exactamente, mientras que en el 18 no.
Deducen entonces que en la Conclusión 48a el Gráfico de ejemplo es el 19 y en la 48b el 18.

Conclusión 48c

El Gráfico que lo ejemplifica es el 20.

Conclusión 49a

Todos los grupos coinciden con el que expone en el que Gráfico que lo ejemplifica es el 23.
La profesora explica que en el Gráfico 21, aunque pueda parecer que coinciden en el extremo del tercer segmento de las gráfica por pasos de 30 segundos, sólo se cortan en los dos primeros y que lo que ocurre es en la impresión, al haber marcado tan grandes los puntos, parece que coinciden.
Aprovecha para añadir que en el Gráfico 22 ocurre lo mismo. La gráfica de la compañía que cobra por segundos no corta al tercer segmento pero están aún más cercanos que en el Gráfico 21.
Se concluye entonces que son los Gráficos 21, 22 y 23 los que ejemplifican esta conclusión.
Entonces dicen que habrá que añadir las tablas de comparación de las dos compañías de dos de Gráficos (una ya está incluida) que ejemplifican esta conclusión. Lo hará la profesora cuando mire a qué compañías corresponden los Gráficos.

Conclusión 49b

Por la explicación dada por la profesora anteriormente sobre la relación entre los Gráficos 21 y 22 (que en el Gráfico 22 son más cercanos los puntos en el extremo del tercer segmento), deducen que tienen que ser el Gráfico 22.

Conclusión 49c

Todos deducen rápidamente que es el Gráfico 23 el que lo ejemplifica.

Ahora las conclusiones se han terminado pero los alumnos dicen que les han sobrado 3 Gráficos (el 2, el 4 y el 17).

C28.2.3.8: Analizar qué ocurre con los Gráficos que no han sido utilizados para ejemplificar las Conclusiones de la "Respuesta a la cuestión generatriz". *¿Qué creéis que ha ocurrido con esos Gráficos?* **(gran grupo)**

Los alumnos dicen varias opciones:

- Que los haya metido la profesora para confundir o sin querer.
- Que sean ejemplos de los que hay otros ejemplos y no nos hayamos dado cuenta.
- Que sean ejemplos que hemos utilizado durante el taller pero de los que no hayamos sacado conclusiones.

La profesora dice que no los ha metido para confundir, pero si puede quizá haberse confundido.

C28.2.3.8.1: Determinar qué ocurre con cada Gráfico de entre las opciones que hemos planteado u otras y decidir qué se hace con ellos. *Pues analizad qué ocurre con cada Gráfico para decidir si lo incluimos o no en las Conclusiones* ***(en grupos)***

Pregunta si en el Gráfico 17 cuestan lo mismo las dos tarifas en las llamadas de 1 minuto y 1 segundo de duración. La profesora dice que no.

PUESTA EN COMÚN

Gráfico 2

Rápidamente deducen que el Gráfico 2 es un ejemplo como en del Gráfico 1 pero con 3 compañías. Creen que lo podemos incluir como otro ejemplo en la Conclusión 2.

Gráfico 4

Respecto al Gráfico 4, dicen que son gráficas de dos compañías que cobran diferente precio por minuto y diferente precio por establecimiento de llamada. Además, cobran por segundos desde el primer segundo.
El grupo que expone dice que ha revisado las conclusiones y ha visto que no hay conclusiones sobre esta relación entre tarifas. Dicen que no creen que debamos incluirlas porque no hay una relación interesante gráficamente. Los otros dos grupos, sin embargo, consideran que podemos sí debemos incluirla. Uno de los grupos ha pensado en cómo podría enunciarse:

"Si dos compañías cobran diferente precio por minuto y diferente precio por establecimiento de llamada, cobrando ambas por segundo desde el primer segundo las gráficas no son paralelas".

Pero el otro grupo que también quería incluirla dice que cree que sería mejor:

"Si dos compañías cobran diferente precio por minuto y diferente precio por establecimiento de llamada, cobrando ambas por segundo desde el primer segundo y siendo que la que cobra más por segundo cobra también más por establecimiento de llamada, las gráficas nunca se cortan".

Explican que para diferenciarlo de cuando la que cobra más por minuto cobra menos por establecimiento de llamada, que pueden cortarse.

Los demás lo aceptan, aunque decidimos incluir también en la conclusión que no son paralelas.

La profesora pregunta dónde creen que deberíamos incluir la conclusión (en qué sesión). Todos están de acuerdo en que en las conclusiones de la primera sesión, porque luego ya pasamos a considerar la diferencia entre si cobran el primer minuto completo o no.

<u>Gráfico 17</u>
Afirman que creían que coincidían en el extremo del primer fragmento de la que cobra por pasos de 30 segundos. Si no corta, dicen, es un ejemplo como el 16 y por tanto debemos añadirlo en la Conclusión 17, y entonces hay que añadir también la tabla de comparación de estas dos compañías.

UNDÉCIMA SESIÓN

C29.4 (alumnos): Determinar qué datos pedir para calcular los precios mensuales con cada tarifa y así comparar cuál es más barata. *Que cada grupo determine los datos que serán necesarios para calcular el precio mensual con cada tarifa y cómo calcularlo.* ***(en grupos)***

EN GRUPO

Un grupo explica que lo más simple es pedir el número de minutos hablados al mes y el número de llamadas realizadas, ya que se indica en la factura, pero que esto sólo vale para comparar entre tarifas planas, a no ser que consideráramos clientes "piloto", que, explican, "ya dijimos que no queríamos porque cada uno llama de modos muy diferentes". Continúan diciendo que entonces habrá que diferenciar franjas horarias y tipos de receptor. El resto de grupos están de acuerdo y comienzan a trabajar en pequeños grupos.

DURANTE EL TRABAJO EN GRUPOS

Los grupos se comunican directamente sin pasar por el paso previo de preguntar al profesor si pueden hacerlo, cosa que antes sí hacían.

Los alumnos incluso en ocasiones dicen al profesor, cuando pasa por las mesas y les pregunta cómo van, que espere porque se lo explicarán cuando terminen, porque todavía están trabajando sobre cómo hacerlo, pero sin pedirle ayuda.

Los grupos van determinado las franjas horarias para las que habría que pedir datos.

Los dos grupos que trabajan con Contrato ponen en común sus franjas horarias para determinar las franjas horarias finales de Contrato.

PUESTA EN COMÚN

Los grupos han marcado líneas divididas en 24 partes y marcan las 24 horas del día. Han ido anotando las franjas horarias de cada compañía para finalmente deducir qué franjas horarias se deben tener en cuenta para pedir datos.

Deciden que el gasto mínimo mensual se pondrá como nota de las tarifas para que el usuario vea si, con lo que llama, aunque le salga más barata con una determinada compañía según el cálculo, quizá no le convienen porque le van a cobrar el mínimo que es más de lo que le ha salido con el cálculo.

Se decide también que se excluirá de la comparativa el Contrato Provincial porque hace pedir un nuevo dato, complicando mucho los datos que hay que pedir para ser sólo una tarifa la que lo tiene en cuenta.

Un grupo dice que, van a ser mucho datos, porque para cada franja horaria, para cada receptor, deberá la persona indicar el número de llamadas y el número de llamadas.

Otro grupo dice que, peor todavía, para cada llamada tendrá que decir la duración, y además exacta, para saber si el pico de llamada, en las tarifas que cobran por pasos de 30 segundos, le cobran la fracción siguiente o no y poder compararlo con la cantidad de segundos que le cobran las que cobran por segundos.

Entonces se produce un "revuelo" y un grupo plantea que al final vamos a tener que pedir todo el listado de llamadas para poder calcularlo. A un segundo grupo no le parece una mala idea y afirman que "La persona puede tomar la factura de un mes e introducir todas las llamadas que ha realizado indicando, además de la duración de la llamada, la hora y el tipo de receptor". Pero en el tercer grupo una alumna dice que no puede hacerse así, porque ella tiene una tarifa que cobra por pasos de 30 segundos y en la factura no indica el tiempo real de duración de la llamada, sino que marca ya la duración que cobra. Lo sabe porque en su factura no hay ninguna llamada de duración diferente a múltiplos de 30 segundos, mientras que en las que cobra por segundos, como es lógico, aparecen muchas duraciones con "picos diferentes" a múltiplos de 30 segundos. Por tanto, las personas que tienen tarifa por pasos de 30 segundos no pueden hacerlo.

Se paraliza la situación. Los alumnos no saben cómo seguir.

En este punto la profesora les explica que existe un modo de tener en cuenta el número de llamadas con duración diferente a múltiplos de 30 segundos y es haciendo un estudio estadístico a partir de un conjunto de facturas.

Los alumnos aceptan la propuesta.

C29.5: Hacer un estudio estadístico del número de llamadas con duración diferente a múltiplos de 30 segundos (a partir de un minuto). *Cada uno de vosotros debe traer para el próximo día al menos una factura, que no cobre por pasos de 30 segundos, y haremos el estudio estadístico para saber la proporción de llamadas que tienen "pico" de duración por el que le van a cobran, las tarifas que cobran por pasos de 30 segundos, la fracción siguiente.* ***(en grupos)***

Los alumnos preguntan que van a hacer exactamente. La profesora explica que cada grupo deberá determinar los datos sobre las llamadas que hay de cada tipo en cada factura. Finalmente uniremos todos los datos y hallaremos cuál es el porcentaje medio de llamadas de cada uno de los dos tipos que hay para así poderlo considerar en la fórmula sin necesidad de preguntárselo a la persona en cuestión.

La profesora dice que van a utilizar Excel para hacerlo porque son muchos datos y Excel facilita los cálculos. Les dice que sería útil que, si alguno tiene ordenador portátil, lo trajera. Un alumno dice que puede traerlo. La profesora traerá dos, en vez de uno, el próximo día, para que cada grupo pueda trabajar con un ordenador.

DUODÉCIMA SESIÓN

Se dedica a resolver la cuestión **C.29.5**.

Hay alumnos que dicen que han utiliza muy poco el programa Excel. La profesora les explica que es un sistema de celdas y que luego el programa permite realizar numerosos cálculos con los datos introducidos en las celdas.

Los alumnos tienen todos abierto el programa y explica cómo introducir dos columnas de datos y luego realizar sumas con ellos utilizando el programa y les muestra otras posibles funciones dentro del paquete de funciones que trae. Algunos alumnos lo conocen más y otros menos. Pero, entre las explicaciones de la profesora y las explicaciones de compañeros de grupo que lo conocen más que otros todos se quedan satisfechos con lo que conocen para empezar a trabajar.

C29.5.1: Determinar datos a introducir y formato. *¿Qué datos deberemos introducir y con qué formato?* ***(gran grupo)***

Un grupo dice que habrá dos columnas, una para poner el número de llamadas que tienen como pico “00” o “30” y otra para el resto.

Otro grupo plantea sí tendríamos que tener en cuenta también el pico exacto de las llamadas que no son múltiplo de 30 segundos para saber cuánto añadir a las que cobran por segundos, porque consideran que también habrá que añadir algo.

Se desarrolla una discusión sobre si incluirlo o no. Los otros dos grupos (los que no lo han planteado) dicen que cuando la persona da la duración total está considerando también los segundos. Pero el grupo que defiende la idea contraria dice que entonces estamos cobrándole los segundos sueltos primero y luego las fracciones de 30 segundos, que incluyen también esos segundos.

Un alumno plantea que quizá podríamos añadir la mitad del porcentaje que salga. Porque parece lógico que se compensen unos picos pequeños con unos picos grandes. Así, explica "en los picos de cada dos llamadas diferentes de 00 o 30 le añadiríamos una fracción de 30 segundos, mientras que la otra fracción entendemos que está cobrada entre los dos picos". Esta opción convence a todos y se acepta.

En relación con las tablas, concluyen que hay que añadir esas dos columnas (número de llamadas con pico 00 o 30 y número de llamadas con pico diferente) y comienzan a trabajar.

La profesora les da 30 facturas (10 a cada grupo) que ha traído él para que también las tengan en cuenta, porque el dato estadístico será más fiable que si sólo tenemos en cuenta las facturas que han traído los alumnos.

Les explica que cada grupo introducirá los datos de sus facturas (las del grupo más las 10 que les ha dado la profesora) y luego calculará el porcentaje de cada tipo. Un alumno plantea que, aunque cada alumno halle los datos de una serie de facturas, los cálculos se hagan con todos los datos juntos para que sea más fiable. Se acepta.

C29.5.2: Elaborar las tablas de Excel y calcular los datos. (gran grupo)

Cuando llevan ya un rato trabajando un grupo dice que, si queremos saber el porcentaje de llamadas de cada tipo, necesitaremos saber el número total de llamadas, de modo que habrá que hacer una columna con el número total de llamadas y dice que lo podemos hacer con la función suma de Excel, sumando las columnas de cada tipo de llamada.

Cuando terminan de pasar los datos, se unifican todos los datos en un disquete. Después cada grupo copia el documento con todos los datos en su ordenador y realizan los cálculos. Todos los grupos logran hacerlo solos.

La profesora ayuda en la utilización del programa.

PUESTA EN COMÚN

Dos grupos obtienen los mismo porcentajes y un tercero porcentajes, aunque muy semejantes, no iguales. Dos han calculado el porcentaje en cada fila y luego han obtenido la media y el tercero ha hecho el sumatorio de llamadas de cada tipo y ha calculado el porcentaje del total.

Cada grupo explica cómo lo ha hecho y también explican cuestiones relativas a la utilización del programa para calcularlo para ver qué modos son mejores. Por ejemplo: elegir bloque de celdas o introducirlas una a una (mejor como bloque, es más rápido), calcular el porcentaje restante, una vez calculado uno, restando a 100 el mismo o volviendo a realizar los cálculos (más rápido restar de 100 el otro porcentaje).

Los porcentajes son claramente con una tendencia a 50% de llamadas con picos 00 o 30 y 50% de llamadas con picos diferentes (Ver *Material 6*).

Se concluye que se añadirá, en las tarifas que cobran por pasos de 30 segundos, el 25% del total de llamadas por el precio de 30 segundos.

Los alumnos plantean que el próximo día traigamos también los ordenadores, porque el estudio de los precios de las tarifas lo podemos hacer también con Excel.

DECIMOTERCERA-DÉCIMOSEXTA SESIÓN

Continuamos con **C.29.4**, ya que se dejó momentáneamente para hacer el estudio estadístico de "picos de duraciones de llamadas".

C29.4 (alumnos): Determinar qué datos pedir para calcular los precios mensuales con cada tarifa y así comparar cuál es más barata. *Que cada grupo determine los datos que serán necesarios para calcular el precio mensual con cada tarifa y cómo calcularlo.* ***(en grupos) (continuación)***

Hasta ahora habíamos determinado las franjas horarias en que será necesario pedir datos, pero, respecto a qué datos es necesario pedir en cada franja no habíamos concluido.

C29.4.1: Determinar qué datos pedir en cada franja horaria. *Que cada grupo determine los datos que serán necesarios para calcular el precio mensual con cada tarifa y cómo calcularlo.* ***(en grupos) (continuación)***

PUESTA EN COMÚN

Otro grupo dice que ha estado pensado en eso y que no si es una tabla común para todas las tarifas de contrato y otra para todas las tarifas de tarjeta será necesario considerar no sólo "a teléfonos de mi compañía" y a "teléfonos de otras compañías" -además de a "fijos nacionales" y "provinciales"- porque cuando tengamos que calcular el precio final, a no ser que pongamos una tabla diferente de cálculo para cada compañía, o que la persona nos diga de qué compañía es, no podremos saber, para el cálculo con cada tarifa, qué cantidad de llamadas se refieren a cada compañía.

Otro grupo dice que en ese caso hay que pedir muchos datos, y que entonces mejor podríamos preguntar a la persona de qué compañía es y ya está. Pero el grupo que lo había planteado explica que esa posibilidad no vale porque "Si, por ejemplo, la persona es de MoviStar y lo indica, y pone la cantidad de llamadas que realiza a "su compañía" (MoviStar en este caso) y, en otro lugar, las que realiza a "otras compañías", podremos calcular el precio para las tarifas de MoviStar, pero, cuando tengamos que calcular las tarifas de las demás, ¿cómo sabemos cuántas llamadas realiza concretamente a teléfonos de esa compañía?".

El otro grupo admite que no es buena la idea.

Plantean que habrá que pedir, por un lado, el tiempo que hablan y, por otro, el número de llamadas, en cada franja horaria para cada tipo de receptor.

El proceso de decisión de qué datos pedir se lleva a cabo paralelamente a la elaboración del documento de Excel.

Cuestiones a destacar:

- Se plantea como datos a pedir:
    - El *número de llamadas al día* para poder calcular el precio con la Tarjeta Decreciente de Vodafone. Sólo en pide en el apartado de tarifas de Tarjeta.
    - La *duración aproximada de las llamadas* porque el Contrato Decreciente de Vodafone cobra los dos minutos a un precio y los siguientes más baratos; y también por las tarifas 3x2 de Amena (Contrato y Tarjeta), que regalan los minutos múltiplos de 3 de cada llamada. Se pide tanto en el apartado de tarifas de Tarjeta como en el Contrato.

* Ambas se piden como dato independiente (no para cada franja horaria ni para cada receptor, porque es igual para todos).

- Se lleva a cabo un trabajo donde se suceden las puestas en común debido a dudas que van surgiendo sobre cómo utilizar de modo más eficaz el programa Excel y, a la vez, porque se ve necesario ir comparando para unificar formatos, sobre todo entre los dos grupos que elaboran a la vez, cada uno un documento de Excel para tarifas de Contrato.

- Si se observa el documento de Excel que surgió como conclusión (*Material 7*), se detectarán detalles como que las tarifas de cada compañía se marcan de un color representativo. También se puede observar qué datos en qué horarios se piden así como las fórmulas que se utilizan en cada caso.

- Respecto a la relación con el documento de Excel elaborado el año pasado, el elaborado este año, aunque semejante en algunos aspectos, tanto del proceso como del producto, es diferente, para empezar, en el tipo de tarifas, ya que algunos han desaparecido yo tras se incluyen. Algunas tarifas que se mantienen en cuanto a nombre han cambiado sus precios, pero ninguna sus franjas horarias.

- Debido a que las tarifas que se han añadido son de "tarifa plana" las franjas horarias necesarias en la experimentación del año pasado y éste son las mismas.

- El Contrato Joven de Amena, se divide -como el Contrato Plus Elección de MoviStar, o el Contrato Mis Horas de Amena- en mañana tarde (en el primer caso tomando las 5 horas de nuestra elección a partir de las 8 de la mañana, hasta las 12; y en el segundo caso desde las 5 de la tarde). También parece que será necesario considerar "Mañana" y "Tarde" en el Contrato 3x2 de Amena, pero en un principio deciden dejarlo para no complicar la búsqueda de la fórmula. Finalmente sí lo hacen, coincidiendo en horarios ambas versiones con las versiones paralelas del "Contrato Joven".

- Deciden incluir columnas que no se incluyeron en el documento elaborado en la primera experimentación: *Consumo mínimo mensual*, *Gastos de activación* y *Modo de cobrar (tanto el primer minuto como los restantes)*, tanto en Tarjeta como en Contrato, aunque en Tarjeta algunas celdillas sean "0" (fieles a que se debe indicar también cuando sea 0 para que quede claro que es 0 y no pueda quedar la duda, como puede ocurrir si no se pone explícitamente). No incluyen la columna de comentarios; sin embargo, utilizan la función "Insertar comentario" de Excel.

- Deciden marcar con fondo diferente:

  - Las casillas que deben rellenar los "usuarios": azul.

  - Las casillas que no deberían poder modificar los usuarios, pero sí poder verlo: sin fondo.

  - Las casillas que los usuarios no deberían poder ver ni modificar: rojo.

- Deciden que, en la página web, "pinchando en el nombre de compañía" desde esta página que da los precios, creen que se debería poder acceder a las tablas de datos de las tarifas de cada compañía que hemos elaborado.

- Para ir evaluando su trabajo, traían facturas e introducían los datos para ver si eran semejantes los resultados. Además, realizaban pruebas donde calculaban manualmente los resultados y luego comprobaban si coincidían con el obtenido a través del documento de Excel.

- El grupo que trabajaba con Tarjeta pidió al profesor si podía elaborar él también el documento de Excel para tarjeta, para poder comparar con lo que ellos hacían. Pero finalmente no se hizo debido a que se decidió que era necesaria la profesora para resolver dudas informáticas y para dirigir las continuas puestas en común que había, de modo que no podía hacerlo a la vez. Lo que decidieron finalmente fue dividir el grupo en 2 para poder comparar entre ellos el trabajo que iban haciendo. En consecuencia, necesitaron un cuarto ordenador, que trajo la profesora.

- Deciden incluir instrucciones en la hoja de cálculo, que se pueden observar en el documento de Excel.

- Algunos aspectos que surgieron comunes a la primera experimentación, además de otros que ya hemos comentado, fueron:

    - Discusiones sobre la eficacia de la respuesta, es decir, la relación entre la dificultad en elaborarla y la calidad del resultado; de igual modo que la relación entre la cantidad y complejidad de datos que se piden y el valor de los resultados (a mayor cantidad de datos, mayor exactitud, pero también mayor esfuerzo).

    - Necesidad de simplificar las fórmulas por problemas de funcionamiento de Excel, que daba error con tal cantidad de datos, llegando a las mismas reducciones que en la primera experimentación.

- Insistencia en que describir en la página web el proceso, y especialmente las "Respuestas al problema" que se han ido elaborando serán muy importantes para que las personas puedan obtener conclusiones generales sin necesidad de calcular el precio mensual. Por ejemplo, que son "mejores" las tarifas que cobran por segundos que las que cobra por pasos de 30 segundos.

Respecto a las tarifas que aparecen en esta experimentación que no aparecieron en la anterior, merecen destacarse, por la complejidad que conllevan[3]: describiremos cómo se concluyeron las "fórmulas" relativas al cálculo de la factura mensual, que además se hicieron entre todos los grupos, trabajando tanto en pequeño grupo como en gran grupo (trabajaron sobre ello todos los alumnos, a petición suya) de las tarifas siguientes: Contrato Decreciente y Tarjeta Decreciente de Vodafone; Contrato 3x2 y Tarjeta 3x2 de Amena. Describir aquí todo el proceso, con todo lo que ocurrió, todas las opciones que se tomaron para luego, antes o después, abandonarlas o modificarlas... sería extremadamente extenso. Se cita una pequeña síntesis, por ejemplo, en relación con el *Contrato Decreciente de Vodafone* (primeros dos minutos de cada llamada: 0'2; minutos sucesivos: 0'1) y el *Contrato 3x2 de Amena* (gratis, en cada llamada, los minutos múltiplos de 3 y las fracciones múltiplos de estos múltiplos de 3)[4].

1º Inclusión de una nueva casilla que calcule "duración de las llamadas – 2", para el Contrato Decreciente de Vodafone, pero el

[3] Se elaboraran las fórmulas grupalmente, combinándolos con tiempos de trabajo en pequeño grupo, dada la complejidad de las mismas y el hecho añadido de que todos los alumnos solicitaron hacerlo porque les parecía interesante, retador. En ocasiones, dada la complejidad, algunos alumnos continuaban con el trabajo de elaborar las fórmulas, exponiendo las dudas y los resultados en gran grupo, mientras otros se dedicaban a continuar elaborando las tablas.

problema era si no se rellenaba la casilla o la duración es menor de 2 minutos, ya que entonces esa celda asume un valor negativo.

2º Se indicará en "Duración aproximada de las llamadas" que sólo se debe rellenar ese dato si la duración es superior a 2 minutos.

Pero entonces se ve el problema de que si no se rellena la casilla el dato es "-2". La profesora les explica que pueden utilizar una función de Excel que es "SUMAR.SI" y que permite indicar al programa que lo calcule sólo en los casos en que la casilla o conjunto de casillas cumplan un criterio. La profesora dice que lo explicará cuando determinen la fórmula, pero ellos dicen que quisieran ver cómo funciona y prueban con una fórmula al azar para ver cómo funciona. Se indica en la fórmula "SUMAR.SI" y como criterio ">0".

3º Para el Contrato 3x2 de Amena era necesaria una casilla que dividiera el dato de la "Duración aproximada de las llamadas" entre 3 y así se obtiene el número de minutos que salen gratis en cada llamada. En este caso, si no se pone nada es "0", de modo que no es problema.

4º Añadir una celda ("Minutos caros en Decreciente") que se obtiene calculando: *"=SUMAR.SI(J6;">2")-2"* (fueron necesarias varias pruebas para concluirlo).

5º Añadir una celda ("Minutos baratos en Decreciente"): *"=J6-SUMAR.SI(I2;">0")"*.

Pero aparecía "0" en estas casillas si no se rellenaba el dato sobre "Duración aproximada de las llamadas", así que se decidió

[4] Se consideró necesario considerar las dos tarifas a la vez para intentar pedir el

desarrollar una fórmula, para el contrato Decreciente para aquellos que suelen realizar llamadas de duración superior a dos minutos y otra para los que no.

6º Al comenzar los cálculos para la tarifa Decreciente se decidió cambiar el nombre de las celdas “Minutos caros/baratos en Decreciente” por “Min. caros/baratos en cada llamada en Decreciente”, porque luego habrá que calcular los minutos caros/baratos en total.

7º Es largo el proceso, porque hay intentos fallidos, propuestas diferentes, cosas que se tienen que rehacer una vez que se avanza porque no es coherente con lo siguiente... Pero se decide que se utilizará el porcentaje que representa la cantidad de llamadas baratas y caras. Por ejemplo, si una persona dice que la duración aproximada de las llamadas que realiza es 4, 2 minutos se cobrarán “caros” y dos “baratos”, es decir, el 50% caro y el 50% barato. Primero se calculó en porcentaje y luego se dividió por 100 para obtener el dato sobre el que hay que multiplicar directamente el total de las llamadas e insertarlo en la fórmula como celda.

Es importante además que primer lo calcularon sin tener en cuenta que cobraba por pasos de 30 segundos y luego lo adaptaron, utilizando la fórmula reducida que hayaron para calcular el precio de las tarifas que cobran por pasos de 30 segundos -que no se ha explicado cómo surgió porque siguió el mismo proceso que en la primera experimentación-, que recordamos:

€/min. (t + n/8) + “€ por est. llamada”. n + “€ por sms” . “nº de sms”

mínimo de información.

Este paso conllevó bastante dificultad, porque había que determinar además en qué lugar se debía utilizar el dato relativo al porcentaje.

8º Sobre la *Tarifa 3x2* se decidió hallar el porcentaje que representa la cantidad de minutos gratis sobre la duración total de la llamada y restarlos minutos gratis al precio total calculado igual que en cualquier tarifa plana.

Las franjas horarias son las mismas que en el "Contrato Joven", y además en ambos elaboraron dos versiones (mañana y tarde) debido a que se pueden elegir 5 horas seguidas cuando quieras para horario barato, así que un grupo intentó utilizar esas fórmulas, que ya habían elaborado, restando luego el porcentaje de llamadas que eran gratis, pero no habían tenido en cuenta que el Contrato Joven no diferencia entre tipos de receptores y el 3x2 sí, de modo que no servía su propuesta.

El otro grupo lo hizo partiendo del contrato "Mis horas", porque diferencia entre "A móviles del mismo operador y fijos nacionales" y "otros operadores móviles", como el 3x2, modificando el precio de 21:00 a 22:00 en cada versión, de los diferentes precios que tenían al precio más caro (0,45 euros) para hallar la fórmula.

* Les llamó la atención que se no se modificaba el porcentaje de "minutos gratis en cada llamada" aunque variaran la duración aproximada de cada llamada. Primero se dedicaron a revisar la fórmula, pensando que podría ser errónea, y finalmente se dieron cuenta, probando a calcular el porcentaje por diferentes duraciones de llamada, que siempre se estaba no cobrando un tercio de la llamada una vez que las llamadas duraban más de 2 minutos.

- La *Tarjeta Decreciente* fue la que conllevó mayor dificultad, debido a que hay que considerar el número de llamadas diarias, dado que la primera llamada diaria es más cara que las demás, y, además, se complica la elaboración de la fórmula porque es por pasos de 30 segundos, con 4 precios diferentes, uno diferente para el primer minuto según el tipo de receptor y otro diferente para el resto de minutos según el tipo de receptor.Practicando también llamaron la atención sobre el hecho de que la tabla que hemos elaborado sirve tanto para saber gastos mensuales como para cualquier combinación de tipos de llamadas que queramos. Por ejemplo, si sólo introducimos 1 minuto y 1 llamada en un horario y para un receptor, el programa nos indica el precio por minuto para ese horario y receptor en todas las tarifas. Lo añaden dentro de las instrucciones.

Los alumnos, asumiendo la responsabilidad del trabajo, motivados por él e intentando aprovechar al máximo el tiempo, se organizaron muy bien repartiendo trabajos por grupos de alumnos, más allá de los formados a lo largo del curso, por ejemplo, en función de aquello que se les daba mejor a cada uno, o de lo que conocía mejor cada uno.

Además de aprovechar mucho las sesiones, los alumnos además trabajaban mucho en casa.

Finalmente recordar que la hoja de cálculo resultante puede analizarse en el *Material 7*.

DECIMOSÉPTIMA SESIÓN: Evaluación

Se propuso a los alumnos dos tipos de tareas: una valoración global de lo aprendido en el taller y una evaluación individual en forma de "examen" o prueba estándar de matemáticas

Prueba de evaluación individual

La prueba de evaluación final fue la misma que en la Intervención realizada en curso anterior. Se puede consultar por tanto esta prueba en el *Material 6* del diario de la primera intervención, titulado *Prueba de evaluación final*.

Sólo destacar que se añadió una quinta cuestión, centrada en la transferencia percibida de lo desarrollado en el taller:

5) Cita otros "problemas" donde se podría aplicar un proceso semejante al seguido con la comparación de tarifas de telefonía móvil en este taller.

Valoración de lo aprendido en el taller

Se pregunta a los alumnos qué cosas importantes han aprendido en el taller. Se deja un tiempo para pensarlo individualmente y tomar notas y luego se hace en modo de lluvia de ideas. La profesora les explica que pueden decir "cualquier cosa" que hayan aprendido, sobre cómo trabajar, sobre la vida, sobre las relaciones humanas...

¿QUÉ COSAS HEMOS APRENDIDO EN EL TALLER? Hemos aprendido (se dice textual, aunque no se ponga entre comillas):

- Sobre tarifas de telefonía móvil.
- Muchas matemáticas.
- También mucho sobre Excel.

- Cómo enfrentarnos a problemas reales.
- Cómo resolver problemas reales donde se necesitan matemáticas.
- Que es muy importante planificar, porque si no nos puede salir caro, en el sentido de que no valga el trabajo que hayamos hecho[5].
- Cómo organizarnos para aprovechar el tiempo[6]. Por ejemplo, hacer grupos con los que se da mejor cada cosa, aunque luego expliquen cómo lo han hecho; o repartir un trabajo muy largo en varios grupos y luego unirlo.
- Decidir qué respuesta dar a un problema, porque a veces es mejor quedarse con una respuesta más simple pero la respuesta más compleja no vale la pena porque implica demasiado esfuerzo para lo que es. Añade: "Por ejemplo, cuando decidimos excluir la "provincial" porque no valía la pena pedir tantos datos".
- Cómo elegir la tarifa más barata de telefonía móvil.
- Lógica, cuando utilizamos en Excel la función de "si...".
- Sobre cómo simplificar fórmulas... Bueno, sobre esto sabíamos, pero hemos practicado mucho.
- Que cuando son problemas reales el profesor ya no lo sabe todo, sino que hay información que tenemos que buscar.
- Que es difícil buscar, al menos con los precios de telefonía móvil, porque son muy poco claros.
- Cómo organizar información. Porque la información sobre las tarifas estaba muy mal organizada y la rehicimos nosotros y quedó mucho mejor.
- Sobre cómo trabajar en grupo, porque hay que organizarse y a veces aguantar a otros más lentos, o decir que vayan más despacio

[5] El alumno sólo dijo que "puede salir caro". La profesora preguntó al alumno "¿En qué sentido dices "te puede salir caro?" y entonces completó la respuesta.
6 La profesora en ocasiones pregunta a los alumnos que plantean determinadas cosas que han aprendido, que lo ejemplifiquen.

porque te has perdido, o no estamos de acuerdo, o alguno se quiere escaquear...

- Que cosas que parecen muy sencillas a simple vista luego son muy complicadas y cosas que parecen muy complicadas luego son más sencillas.
- Que, en los problemas reales, donde no hay libros para consultar los resultados ni el profesor te los dice, es muy útil comparar con otros que estén haciendo lo mismo. Por ejemplo, con las tarifas 3x2 y las decrecientes... Vaya lío que ha sido.
- También para comprobar es muy útil utilizar un ejemplo sencillo. Por ejemplo, cuando calculábamos las fórmulas de las tarifas, poner 1 llamada de 1 minuto te ayudaba a comprobar si estaba bien.
- Que es muy difícil, cuando son problemas reales, dan respuestas completas, porque todo se complica mucho si se quiere ser exacto. Por ejemplo, con la tarifa que cobra la primera llamada de cada día diferente al resto. Al final hemos dado una respuesta aproximada, pero si quisiéramos darla exacta, que he estado pensado en ello, es tan complicado... Pero en algún momento tenemos que darlo por válido, ¿no?.

Un alumno dice que el también ha anotado cosas sobre las que querría haber aprendido y no ha aprendido. La profesora le dice que lo diga y enumera:

- Cómo se elaboraría la página web que queremos hacer con lo del taller. "Además, creo que si supiéramos podríamos haber planificado mejor cómo hacerla".
- Cómo se puede hacer para que el documento de Excel sólo deje escribir en las celdas que deben introducir datos y no en las demás. Y para que no se vean las celdas que son de cálculos internos.
- Otros alumnos le apoyan.

- El alumno que ha expuesto estas cuestiones que "no ha aprendido" plantea al profesor que, si el llega a saber cómo se elabora la página web, se lo explique. La profesora dice que lo hará encantada.

Valoración de qué cosas aprendidas en este taller es difícil aprenderlas en clase y por qué

También se les pregunta qué cosas aprendidas en este taller es difícil aprender en clase y por qué. Se deja un tiempo para pensarlo y tomar notas individualmente y luego se pone en común.

¿QUÉ COSAS APRENDIDAS EN ESTE TALLER ES DIFÍCIL APRENDER EN CLASE Y POR QUÉ?

Aquí no es fácil enumerar porque no se desarrolló en modo de enumeración sino de discusión. Se resume diciendo que, en general, todos dijeron que es que es muy diferente, porque "en matemáticas aprendemos sólo de matemáticas", y aquí hemos tratado un problema en todos los sentidos. Esto conllevó una larga discusión con los alumnos sobre lo que eran las matemáticas.

B.4. MATERIAL ADJUNTO AL DIARIO DEL SEGUNDO REI

MATERIAL 1. Tablas con los datos de las diferentes compañías

TABLA DE DATOS DE AMENA						
	Precio por minuto (euros/minuto)			Modo de cobrar primer minuto	Consumo mínimo mensual (euros)	Gastos de activación (euros)/alta/ conexión
	A Amena	A operadores fijos nacionales	A otros operadores móviles nacionales			
T. Dùo[7]	0’30 * Al dúo: 0’03			Pasos de 30 sg	0	0
T. Tarifa 3x2[8]	0’30 (por cada 3 minutos, te regalan el 3º) (no se aplica a los números frecuentes)			Pasos de 30 sg	0	0
T. Tarifa Joven[3]	24-8: 0’06 16-24: 0’12 8-16: 0’80 (L-V) 0’12 (S,D y F[9])			Pasos de 30 sg	0	0
T. Tarjeta Ocio[2]	16-8: 0’12 8-16: 0’72 (L-V) 0’12 (FS y F)			Pasos de 30 sg	0	0
Contrato Libre	0’21			Por sg.	6	1º: 21’04; ss: gratis
Contrato Libre 18	0’18 Entre líneas de un mismo contrato con Contrato Libre 18, 30 ó 50: 0’03			Por sg.	18	1º: 21’04 ss: gratis
Contrato Libre 30	0’15 Entre líneas de un mismo contrato con Contrato Libre 18, 30 ó 50: 0’03			Por sg.	30	1º: 21’04 ss: gratis
Contrato Libre 50	0’13 Entre líneas de un mismo contrato con Contrato Libre 18, 30 ó 50: 0’03			Por sg.	50	1º: 21’04 ss: gratis

[7] El cambio de dúo cuesta 6’01 euros. Impuestos indirectos no incluidos.
[8] No es posible aduarse.
[9] S: sábados; D: domingos; F: festivos.

Contrato 3x2[10]	L-V: 22-8, 5 horas de 8-22 y FS y F: 0’06 el resto: 0’45	L-V: 22-8 y 5 horas entre 8-22: 0’15 el resto: 0’45	Por sg.	9	1º: 21’04 ss: gratis
	* Gratis los min. múltiplos de 3 y las fracciones de estos múltiplos de 3.				
Contrato Mis Horas[11]	L-V: 21-8, 5 horas consecutivas de 8-21 y FS y F: 0’06 el resto: 0’45	L-V: 21-8, 5 horas de 8-21 y FS y F: 0’15 el resto: 0’45	Por sg.	6	1º: 21’04 ss: gratis
Contrato Joven	L-V: 22-8, 5 horas consecutivas de 8-22 y FS y F: 0’08 el resto: 0’38		Por sg.	9	1º: 21’04 ss: gratis

- Siempre se aplican 6 decimales.
- Precio por mensaje: 0’15 (excepto en Contrato Joven, que diferencia los mensajes a Amena cobrando menos: 0’09 euros/ minuto y la Tarjeta Dúo, en la que al dúo te cuesta también cada mensaje 0’09 euros).
- Impuestos indirectos no incluidos (IVA: 16%).
- Precio por establecimiento de llamada 0’12.
- El primer minuto se cobra completo.
- Precio por escuchar mensajes de voz: 0 euros.

1) TARJETA

1.1) MI PREFERIDO: Es un módulo para Tarjetas y consiste en cobrar 0’03 por llamadas a esa persona elegida, que no tiene por qué elegirte a ti.

1.2) PROMOCIÓN FIN DE SEMANA. Si lo tienes son gratuitas las llamadas a Mi preferido en fin de semana.

---

[10] Compatible con 5 de Amena y Números Frecuentes, si bien 3x2 no se aplica a números que ya disfrutan de un precio especial.

[11] Un cambio de franja horaria al mes es gratuito. El resto tiene un coste de 6’01. Impuestos indirectos no incluidos.

1.3) NÚMEROS FRECUENTES. Con 5 números nacionales (fijos o móviles de cualquier operador). Tendrás un descuento del 50% en las llamadas que realices a estos números (el descuento no se aplica al establecimiento de llamada). Cuesta 1 euro al mes por cada número Amena o fijo elegido y 2 euros por cada número MoviStar o Vodafone elegido.

* Primer cambio de tarifa gratuito, siguientes cuestan 6'01 (impuestos indirectos no incluidos)

1.4) DÚO: 0'03 euros por minuto, 0'09 euros/ mensaje de texto, 0'30 euros/mensaje multimedia. Los dos deben elegirse mutuamente.

2) CONTRATO

2.1) CONTRATO LIBRE FAMILIA: varias líneas con un solo titular. Permite combinar líneas de Tarjeta y Contrato con distintos consumos mínimos o recargas mensuales. Se exige una recarga mensual en las de Tarjeta (no dice de cuánto) y también se pueden recargar del modo habitual. Para las tarjetas no es compatible con dúo. Aunque viene como un Contrato más, es un módulo.

2.2) 5 DE AMENA (para Contrato Mis Horas y Contrato Joven): a 5 números Amena. Cuota mensual 6 euros. Cada solicitud de cambio de números cuesta 6 euros. Si el consumo es superior a 24 euros esta cuota sale gratis.

2.3) NÚMEROS FRECUENTES: Con 5 números nacionales (fijos o móviles de cualquier operador). Tendrás un descuento del 50% en las llamadas que realices a estos números (el descuento no se aplica al establecimiento de llamada). Cuesta 1 euro al mes por cada número Amena o fijo elegido y 2 euros por cada número MoviStar o Vodafone elegido. El cambio de número cuesta 1 euro.

3) PARA CONTRATO Y TARJETA

3.1) MI PREFERIDO. Puedes hablar con un móvil de Amena toda la vida por 0'03 euros minuto y a 0'09 euros el mensaje. Puedes elegir a alguien sin que ese alguien te elija a ti. Cuesta 6 euros activarlo. El cambio de número también cuesta 6 euros.

TABLA DE DATOS DE MOVISTAR

	Precio por minuto (euros/minuto)			Modo de cobrar resto de minutos	Consumo mínimo mensual (euros)	Gastos de activación (euros)/alta/ conexión
	A MoviStar	A operadores fijos nacionales	A otros operadores móviles nacionales			
T. Activa Total	0’21		0’48	Cada 30 sg	0	0
T. Activa Club	0’12	0’48		Cada 30 sg	0	0
T. Activa Tu Tiempo	L-V: - 0-4: 0’12 - 4-16: 0’48 -16-24: 0’12 S,D y F: 0’12			Cada 30 sg	0	0
T. Activa 24 horas	0’30			Cada 30 sg	0	0
T. Activa Cuatro	L-S: 0-4, 16-24 y D y F: 0’15 L-S: 4-16: 0’55			Cada 30 sg	0	0
Plus Elección	L-V: 8-14 y 16-22: 0’23 0-8,14-16, 22-24 y S,D y F: 0’07 Mañana: 11-14: 0’07 Tarde: 19-22: 0’07		L-V: 8-14 y 16-22: 0’45 0-8, 14-16, 22-24 y S,D y F: 0’12 Mañana: 11-14: 0’12 Tarde: 19-22: 0’12	Por sg	9	1ª línea: 21’03 2ª y ss: 0
Plus 24 horas	0’18			Por sg.	9	1ª línea: 21’03 2ª y ss: 0
Plan 30	0’15			Por sg	30	1ª línea: 21’03 2ª y ss: 0

Plan 40	0’14	Por sg	40	1ª línea: 21’03 2ª y ss: 0
Plan 60	0’13	Por sg	60	1ª línea: 21’03 2ª y ss: 0
Plan 90	0’11	Por sg	90	1ª línea: 21’03 2ª y ss: 0
Plus Familia XL	0’16	Por sg.	- 12 de media por línea: mínimo 3 euros por línea. - Menos de 12 de media: 12 por línea	1ª línea: 21’03 2ª y ss: 0

- Precio por establecimiento de llamada: 0’12 euros.
- El primer minuto se cobra completo.
- Precio por mensaje: 0’15 euros (0-3k), 0’30 (3-30k), 0’60 (30-100k).
- No están incluidos impuestos indirectos (IVA: 16%).
- Precio por escuchar mensajes de voz: 0 euros.

MÓDULOS

1) Para PLUS PLANES

1.1) MÓDULO PLANES (para Plus Planes): Agrupar gratuitamente 2-5 líneas con único titular y única tarifa (se pueden compensar los módulos de cada línea). No tiene cuota de conexión pero tiene una cuota mensual de 3 euros a partir de las sexta línea (las 5 primeras no tienen cuota mensual). El precio entre las líneas del mismo contrato es 0’06 euros/minuto.

1.2) MÓDULO PLANES 10 (para Plus Planes): agrupar 10 líneas de contrato Plus Planes y prepago, con al menos una línea de contrato. Cuota mensual de las 5 primeras líneas: gratuita; a partir de la sexta, coste mensual: 3 euros. Las líneas prepago se deben comprometer a una recarga automática mínima mensual de 10 a 90 euros (en fracciones de 5 euros), con una bonificación del 10% de saldo adicional sobre el valor de dicha recarga; además el importe de la recarga automática permite acumular puntos del Programa de Puntos MoviStar Plus.

2) Para todos los contratos y tarjetas

2.1) MÓDULO EN FAMILIA: 2-5 líneas con al menos una de contrato. Entre ellas: 0'06. Las líneas prepago o cumplen con las características de Recarga Automática descritos en "Módulo Planes" o incorporarse al Módulo de familia cuesta 3 euros.

2.2) MÓDULO NÚMEROS FRECUENTES: elegir 4 números MoviStar o 4 MS y un fijo para llamadas y 5 números MS para mensajes. Cuota de conexión: 6 euros. Coste por modificación de números: 1 euro. Precio por mensaje: 0'09 euros. Precio por minuto: 0'09.

2.3) MÓDULO MENSAJES (mensajes a MoviStar):

- MÓDULO 50 MENSAJES: 6 euros (0'12 euros/mensaje)
- MÓDULO 100 MENSAJES: 10 euros (0'10 euros/mensaje).

2.4) Sub-26. Para menores de 26 años. Cuesta 2 euros activarla. No tiene cuota mensual. El precio entre clientes Sub-26 es de 0'09 euros/minuto.

CONTRATO: Control de consumo gratis en 666. Primer cambio de tipo de contrato es gratuito; los siguientes cambios dentro del mismo periodo de facturación tendrán un coste de 6 euros. Si hay coincidencia de tarifas en una llamada se aplicará siempre la más económica para el cliente.

3) **PARA PLUS FAMILIA**: MÓDULO INTERNO. Cuesta 3 euros por línea al mes y cuesta el minuto a 0'06 entre las líneas del contrato.

TABLA DE DATOS DE VODAFONE						
	Precio por minuto (euros/minuto)			Modo de cobrar resto de minutos	Consumo mínimo mensual (euros)	Gastos de activación (euros)/alta/ conexión
	A Vodafone	A operadores fijos nacionales	A otros operadores móviles nacionales			
Tarjeta Tiempo Libre	L-V: 16-6 y S y D: 0’12 L-V: 6-16: 0’59			Cada 30 sg	0	0
Tarjeta decreciente[12]	1ª llamada del día: 0’20 Resto de llamadas del día: 0’10		1ª: 0’50 Resto: 0’25	Cada 30 sg	0	0
Tarjeta Autorecargable	0’28 * Regala 10 euros cada mes a partir de un consumo de 20 euros.			Cada 30 sg	0	0
Contrato Provincial	Vodafone y provinciales: 0’17	Nacionales y otros móviles: 0’45		Cada 30 sg	9	1ª línea: 21 2ª y ss: 0
Contrato Tarde	L-V 0-8, 17-24 y S,D: 0’06 L-V 8-17: 0’25		L-V 0-8, 17-24 y S,D: 0’10 L-V 8-17: 0’45	Cada 30 sg	9	1ª línea: 21 2ª y ss: 0
Contrato Mañana	L-V 0-13, 22-24 y S,D: 0’06 L-V 13-22: 0’25		L-V 0-13, 22-24 y S,D: 0’10 L-V 13-22: 0’45	Cada 30 sg	9	1ª línea: 21 2ª y ss: 0
Contrato decreciente[13]	Primeros dos minutos de cada llamada: 0’20 Minutos sucesivos: 0’10			Cada 30 sg	9	1ª línea: 21 2ª y ss: 0
Contrato Universal 25	0’15 Entre móviles con Plan Universal 25, 40 y 60: 0’05			Por sg.	25	1ª línea: 21 2ª y ss: 0

[12] No aplicable a llamadas a2, Qtal, desvíos, Roaming e Internacionales, que mantienen sus tarifas.

[13] No se incluyen llamadas entre a2 y Qtal, ni las llamadas de Cuenta Familiar que mantienen sus tarifas y descuentos. Se incluyen las llamadas a Números Habituales.

Contrato Universal 40	0’14 Entre móviles con Plan Universal 25, 40 y 60: 0’05	Por sg.	40	1ª línea: 21 2ª y ss: 0
Contrato Universal 60	0’13 Entre móviles con Plan Universal 25, 40 y 60: 0’05	Por sg.	60	1ª línea: 21 2ª y ss: 0

- Precio por establecimiento de llamada: 0’12 euros.// Mensaje: 0’15
- El primero minuto se cobra completo.
- No están incluidos impuestos indirectos (IVA: 16%)
- Precio por escuchar mensajes de voz: 0 euros.
- El cambio de tarjeta es gratuito 6 veces al año. Los siguientes tienen un coste de 6 euros (impuestos indirectos no incluidos).

MÓDULOS

1) CONTRATO Y TARJETA

1.1) QTAL: descuento entre los miembros de un grupo, tanto de Tarjeta como de Contrato, con un máximo de 10 amigos por grupo.

1.2) A2. Precio por minuto: 0’03. Precio por mensaje: 0-1k: 0’09, 1-30k: 0’45, 30-100k:0’8. 6 euros el alta. Tiene que ser un móvil Vodafone.

2) SÓLO CONTRATO

2.1) NÚMEROS HABITUALES: 4 números (dos Vodafone y dos nacionales o móviles de otra compañía) con descuento del 20% (sobre el total de la llamada, incluyendo el establecimiento de llamada). Cuesta 1’20 euros al mes. Impuestos indirectos no incluidos. El cambio de un número habitual te costará 3 euros.

* Te interesa si vas a hacer al menos 8 llamadas a estos números al mes (2 a cada número al mes). Sólo te costará 1’20 euros al mes.

2.2) NÚMEROS FAMILIARES: para contratos, hasta 5 líneas. A partir de la segunda línea, la cuota de alta en Vodafone es gratuita. Sin cuotas mensuales. Compatible con otros planes de grupo.

MATERIAL 2. Información de Internet sobre comparación de tarifas de telefonía móvil

Se presetan aquí, a texto completo, 4 de los cinco documentos encontrados. El documento 2 no se ha incluido porque incluía gran número de fotos y gráficos que al transformar de *.pdf* a *.doc* perdían mucha calidad, pero se puede consultar en la página que se indica.

1. Documento sobre la dificultad de comparar tarifas de telefonía móvil. Tomado de http://europe.justlanded.com/espanol/spain/tools/just_landed_guide/telephone/mobile_rates y titulado: "*Tarifas de telefonía móvil: qué debes considerar al elegir el plan*". (a texto completo a continuación).
2. Un estudio de la revista CONSUMER titulado "*Conocer los hábitos de uso, clave para elegir el plan más adecuado*", de 2002. Tomado de http://revista.consumer.es/web/es/20020401/pdf/temaportada.pdf.
3. Artículo de la revista CONSUMERISMO, de http://www.facua.org/facuainforma/2003/7noviembre2003.htm, de 2003 (a texto completo a continuación).
4. Datos sobre las "tarjetas prepago" y "contratos" y "prefijos de teléfonos móviles de cada compañía". En http://www.fut.es/~chente/moviles.html. (ver estructura y tablas de información de tarjetas a continuación).
5. Datos de diferentes compañías de telefonía móvil http://www.teltarifas.com/particulares/perfil.php3?telid=205&head=movil. (ver ejemplo de datos sobre una tarifa a continuación)
   Y, además, presenta una guía para elegir tarifa en http://www.teltarifas.com/particulares/pasoapaso_movil.php3? (ver qué datos solicitan y qué tipo de información).

DOCUMENTO 1:

TARIFAS DE TELEFONÍA MÓVIL:
QUÉ DEBES CONSIDERAR AL ELEGIR UN PLAN
(http://europe.justlanded.com/espanol/spain/tools/just_landed_guide/telephone/mobile_rates)

A no ser que tengas un doctorado en física nuclear, comprender los planes de tarifas de los distintos proveedores del servicio puede resultar todo un reto.

La mayoría de los planes de llamadas son complejos y diseñados para confundir. Las claves que te damos a continuación te pueden ayudar:

Pregúntate a que horas sueles llamar (mañana, tarde o noche). Los planes de prepago y contrato tienen dos grupos: tarifas por hora y tarifas universales.

- Las **tarifas por hora** dividen el día en varios segmentos, cada uno de los cuales lleva un precio por minuto asociado. Por ejemplo, para sus clientes de prepago Vodafone divide el día en tres segmentos: 12:00 a.m. a 6:00 a.m, 6:00 a.m. a 4:00 p.m. y 4:00 a 12:00 a.m. Las tarifas son más bajas a primeras horas de la mañana y tarde en el día, y están en su tope durante las horas laborables.
- Las **tarifas universales** son más simples ya que ofrecen una costo fijo por minuto independientemente de la hora del día pero en promedio son un poco más elevadas.

Pregúntate a donde llamas (líneas fijas o teléfonos móviles). Hay diferentes tarifas dependiendo de si llamas a teléfonos fijos, a móviles de tu misma compañía y a móviles de otras compañías. Las llamadas a Móviles con el mismo operador son las mas baratas mientras que las llamadas a móviles de otras redes son las mas costosas por lo que vale la pena que te informes de que operador utilizan tus amigos.

Unos cuantos puntos importantes relacionados con las tarifas de las llamadas que aplican en general para todos los operadores con excepción de las promociones especiales:

- Aplica un cargo de €0,12 por establecer la llamada.
- Hay cargos diferentes por SMS (mensajes de texto) nacionales e internacionales a diferencia de otros países en los que los SMS internacionales cuestan lo mismo.
- Aplica un cargo de 16% de IVA (Impuesto al Valor Agregado) sobre las tarifas publicitadas (con excepción de los SIMs prepagados de Vodafone).

¿Dónde empezar? Proveedores de servicios de telefonía móvil
(http://europe.justlanded.com/espanol/spain/tools/just_landed_guide/telephone/mobile_phones)

Los españoles aman hablar y los celulares, a los cuales denominan "móviles", son hoy por hoy parte del día a día como en casi todas partes. Casi 35 millones de personas tienen un móvil ahora.

Hay 3 proveedores principales:

- **Movistar** (operador dominante con un 65% del mercado)
- **Vodafone** (compró Airtel en el 2002 esta intentando expandir su cuta de mercado energicamente)
- **Amena** (Una subsidiaria del Grupo Auna, está creciendo rápidamente y ofrece buenas tarifas pero su cobertura es menos eficiente que la de sus competidores en algunas áreas)
- Para quienes viven en el noreste hay otro proveedor llamado **Euskaltel**. Sin embargo, por su baja base de clientes (menos del 2% de los usuarios) no los trataremos en esta guía.

España opera mediante una red de GSM. Para los Europeos y usuarios de ciertas redes con este sistema en muchos otros países esto significa que su teléfono celular actual podrá funcionar en España. Si tu teléfono es de una red del sistema CDMA como es el caso de todas las redes en Norte América y partes de Asia y algunas en Centro y Sur América, tu teléfono no funcionará.

Para los teléfonos de GSM debes cerciorarte de que tu aparato está desbloqueado (liberado), algunos teléfonos son específicos para la red en la que están como en el caso de las unidades de Orange. Si tu teléfono esta desbloqueado solo necesitas obtener una tarjeta SIM.

Los precios de los teléfonos nuevos varían mucho dependiendo del vendedor y del operador móvil que desees utilizar. A pesar de que todos los operadores tienen sus propias tiendas, los precios tienden a ser mejores en otras partes. Grandes vendedores como Carrefour tienen ofertas relativamente buenas. Para los teléfonos de Amena y Vodafone particularmente, las tiendas The Phone House son muy competitivas.

¿Qué trato hacer? Prepago o contrato:
(http://europe.justlanded.com/espanol/spain/tools/just_landed_guide/telephone/which_deal)

Al igual que en otros países europeos puedes pagar por tus llamadas de dos maneras diferentes: prepago y por contrato.

Prepago: Con los teléfonos de prepago tienes máxima flexibilidad dado que pagas a medida que lo requieres. Si requieres más crédito simplemente compras una *tarjeta de recarga* que puedes obtener en una gran variedad de sitios, desde el Corte Ingles hasta el quiosco de la esquina e incluso por Internet (Just Landed pondrá este servicio a tu disposición próximamente). El mínimo de crédito que puedes adquirir está usualmente entre 5 y 10 euros.

Contrato: La otra opción disponible es la de firmar un contrato. Además de retrasar el pago hasta el final del mes te beneficias con las tarifas más bajas de los contratos (en muchos casos la diferencia es significativa) y mejores ofertas para adquirir nuevos teléfonos.
Cuando evalúes que plan te conviene más, asegúrate de leer todas las demás condiciones como la cuota mensual, el coste de conexión y el consumo mínimo. La duración típica del contrato es de un año, si lo cancelas antes de este plazo normalmente te cobraran una penalización. Si no estás seguro de cuanto tiempo te quedaras en España puede que firmar un contrato no sea la mejor opción para ti.
Los contratos son relativamente fáciles de obtener de manera individual. No te piden antecedentes de crédito o prueba de ingresos. Los operadores móviles usualmente solo requieren un documento de identidad como el DNI o la *tarjeta de residencia* y un estado de cuenta reciente del banco.
Todas las compañías de móviles requieren una autorización para debitar los cargos por el servicio directamente a tu cuenta corriente. A esto se llama "*domiciliación*" de pagos y es muy común con los servicios en España. Muchos de los recién llegados a España comienzan con un teléfono prepagado y luego cambian a contrato cuando tienen listo el papeleo.
Elegir proveedor: Cómo elegir a tu operador de telefonía móvil **(http://europe.justlanded.com/espanol/spain/tools/just_landed_guide/telephone/provider_choice)**

Ahora que ya conoces lo más básico sobre los teléfonos móviles en España la pregunta obvia es ¿Cuál es la mejor compañía?
En lo que respecta a cobertura, Movistar es claramente la mejor con Vodafone no muy por detrás. La cobertura de Amena es menos confiable en ciertas áreas, particularmente fuera de las grandes ciudades, pero esta situación está cambiando. En lo referente a las tarifas, a situación es exactamente al revés, siendo Amena la que por lo general ofrece los mejores tratos , seguida de Vodafone y luego Movistar.
Para ver una lista de tarifas y servicios revisa las páginas Web de cada compañía: Movistar: **www.movistar.com**/ Vodafone**: www.vodafone.es**/ Amena: **www.amena.com**

Comparación de tarifas
La cadena The Phone House ha hecho una compilación muy conveniente de las tarifas de los operadores en un solo sitio. Puedes tomar una copia de sus revistas gratuitas de promoción en cualquiera de sus tiendas, las tarifas están en la parte final, o ve a su página Web:
www.phonehouse.es/commerce/servlet/eses-companyinfo-Networks

DOCUMENTO 3:

ARTÍCULO DE CONSUMERISMO

(http://www.facua.org/facuainforma/2003/7noviembre2003.htm**)**

Las tarifas de las compañías de telefonía móvil, comparadas en la revista 'Consumerismo'

Movistar tiene la tarifa fija más cara con tarjeta y Vodafone ofrece la peor oferta en tarifa fija en la modalidad de contrato. En las tarifas con horarios o costes distintos según destino de la llamada, la peor oferta es la de Amena tanto para tarjeta como para contrato.

La Federación de Consumidores en Acción (FACUA) ha realizado un estudio comparativo sobre los treinta y dos planes tarifarios para particulares de las tres compañías de telefonía móvil que operan en España, publicado en el último número de la revista **CONSUMERISMO**. FACUA demanda una bajada sustancial en las tarifas, mucho más caras incluso que las llamadas a EE.UU. o el resto de la UE desde fijo.

El estudio concluye que Movistar es el operador con la tarifa fija (mismo coste independientemente del horario y destino de la llamada) más cara con tarjeta y Vodafone ofrece la peor oferta de tarifa fija en la modalidad de contrato. En las tarifas con horarios o costes distintos según destino de la llamada, la peor oferta es la de Amena tanto para tarjeta como para contrato.

Una llamada nacional a un fijo o un móvil desde Amena, Movistar y Vodafone cuesta una media de nada menos que 0,32 euros por minuto más IVA en horario normal y 0,20 euros por minuto en horario reducido.

Amena tiene nueve planes tarifarios para los clientes con contrato, Movistar seis y Vodafone cinco. En el caso de las tarjetas de prepago, Amena ofrece cuatro modalidades de tarifas, Movistar cinco y Vodafone tres.

Las más económicas pueden salir muy caras

Pero FACUA advierte que buena parte de los planes no tienen un precio fijo para cualquier horario y destino, y los costes por minuto más bajos tienen como contrapartida precios desproporcionados en otras horas o destinos.

El ejemplo más llamativo es el de la Tarjeta Joven de Amena, cuya engañosa publicidad sólo habla de una tarifa de 0,06 euros por minuto que en realidad se reduce a la franja entre las 0:00 y las 8:00 horas, y alcanza los 0,80 euros por minuto de lunes a viernes de 8:00 a 16:00 horas.

También hay que valorar los planes con contrato o tarjeta que ofrecen un coste por minuto muy bajo para llamadas a móviles de la misma compañía pero que se dispara en el resto de destinos.

Tarifa fija para todos los destinos

En las modalidades de contrato, de los diecinueve planes tarifarios con el mismo coste independientemente del horario y destino, destaca el contrato Plus 24 Horas de Movistar, 0,18 euros por minuto, que exige un consumo mínimo mensual de 9,00 euros; seguido por el contrato Libre 18 de Amena, con el mismo coste por minuto pero un gasto mínimo obligatorio de 18,00 euros mensuales. Vodafone ofrece una tarifa fija de 0,19 euros por minuto en su contrato Universal 20, pero está condicionada a un consumo mínimo muy elevado, 20 euros mensuales.

Conforme aumenta el consumo mínimo exigido, las tarifas fijas para todos los destinos pueden bajar hasta los 0,13 euros por minuto con los planes Libre 50 de Amena, Plus Plan 60 de Movistar y Universal 60 de Vodafone, que están condicionados a un gasto mensual de al menos 50 euros en el primer caso y 60 euros en los otros dos.

Tarjetas de prepago

En las tarjetas de prepago, destaca la Libre de Amena, con un coste por minuto de 0,21 euros para cualquier horario y destino, aunque exige una recarga mínima de 10,00 euros al mes. Le sigue la Autorrecargable de Vodafone, cuyo coste por minuto es de 0,28 euros. Movistar es la compañía que tiene la tarjeta con tarifa fija para cualquier destino con un coste más elevado, la Activa 24 Horas, 0,30 euros.

FACUA advierte que las recargas de Movistar caducan a los seis meses y la compañía anula los números de teléfono si permanecen cuarenta y seis días sin saldo. Un periodo muy inferior a los que ofrecen las otras dos compañías. En el caso de Amena, las recargas tienen una validez de doce meses sin obligación de realizar una nueva y pasado ese plazo, el cliente tiene otro mes para realizar otra recarga o pierde su número y el saldo. Las recargas de Vodafone tienen un plazo de nueve meses y tras ese periodo, hay tres meses para hacer una recarga o se pierde el saldo y el número.

Además, hay que tener en cuenta que mientras que en los contratos las llamadas se facturan por segundos tras el primer minuto de conversación, que se cobra siempre completo, en las tarjetas de las tres compañías la facturación se realiza por fracciones de 30 segundos tras del primer minuto.

Llamadas frecuentes

Un aspecto de gran importancia a la hora de elegir una modalidad de contrato o tarjeta es que ofrezca una tarifa reducida para llamar a determinados números de la misma compañía de uso frecuente y que ello no implique el pago de una cuota mensual. Así, los operadores ofrecen en determinados planes tarifas de entre 0,03 y 0,10 euros por minuto para las llamadas a varios números de la misma compañía o al resto de líneas del operador contratadas por el titular.

Tarifas móviles (sin IVA)

Modalidad	Plan	Consumo/ recarga mínimo mensual	Establecimiento	Coste por minuto Destino	Horario normal	Horario reducido
Amena Contrato (a)	Mis Horas (1) (2)	6 €	0,12 €	Amena y fijos	0,45 €	0,06 €
				Movistar y Vodafone	0,45 €	0,15 €
	Joven (1) (3)	0 € (cuota mens.: 6 €)	0,12 €	Móviles y fijos	0,38 €	0,08 €
	Libre	6,01 €	0,12 €	Móviles y fijos	0,21 €	0,21 €
	Libre 18	18 €	0,12 €	Móviles y fijos	0,18 €	0,18 €
				Líneas del contrato	0,03 €	0,03 €
	Libre 30	30 €	0,12 €	Móviles y fijos	0,15 €	0,15 €
				Líneas del contrato	0,03 €	0,03 €
	Libre 50	50 €	0,12 €	Móviles y fijos	0,13 €	0,13 €
				Líneas del contrato	0,03 €	0,03 €
	Libre Familia	6 €	0,12 €	Móviles y fijos	0,21 €	0,21 €
				Líneas del contrato	0,03 €	0,03 €
	Libre Familia 18	18 €	0,12 €	Móviles y fijos	0,18 €	0,18 €
				Líneas del contrato	0,03 €	0,03 €
	Libre Familia 30	30 €	0,12 €	Móviles y fijos	0,15 €	0,15 €
				Líneas del contrato	0,03 €	0,03 €
Amena Tarjeta (b)	Dúo	0 €	0,12 €	Móviles y fijos	0,30 €	0,30 €
				Línea de Amena duada	0,03 €	0,03 €
	Libre	10 €	0,12 €	Móviles y fijos	0,21 €	0,21 €
	Joven (4)	0 €	0,12 €	Móviles y fijos	0,80 €	0,12 / 0,06 €
	Ocio (5)	0 €	0,12 €	Móviles y fijos	0,72 €	0,12 €
Movistar Contrato (a)	Plus Elección Mañana (6) / Tarde (7) (8)(9)	9 € (alta: 21,03 €)	0,12 €	Amena y Vodafone	0,45 €	0,12 €
				Movistar y fijos	0,23 €	0,07 €
	Plus 24 Horas (9) (10)	9 € (alta: 21,03 €)	0,12 €	Móviles y fijos	0,18 €	0,18 €
	Plus Plan 30	30 € (alta: 21,03 €)	0,12 €	Móviles y fijos	0,15 €	0,15 €
				Líneas del contrato	0,06 €	0,06 €
	Plus Plan 40	40 € (alta: 21,03 €)	0,12 €	Móviles y fijos	0,14 €	0,14 €
				Líneas del contrato	0,06 €	0,06 €
	Plus Plan 60	60 € (alta: 21,03 €)	0,12 €	Móviles y fijos	0,13 €	0,13 €
				Líneas del contrato	0,06 €	0,06 €
	Plus Familia XL (10) (11)	12 €/línea (cuota mens.: 3 €)	0,12 €	Móviles y fijos	0,16 €	0,16 €
Movistar Tarjeta (b)	Activa Total (12)	0 € (*)	0,12 €	Amena y Vodafone	0,48 €	0,48 €
				Movistar y fijos	0,21 €	0,21 €
	Activa Club (12)	0 €	0,12 €	Amena, Vodafone y fijos	0,48 €	0,48 €
				Movistar	0,12 €	0,12 €
	Activa Cuatro (12)	0 €	0,12 €	Móviles y fijos	0,55 €	0,15 €

	Activa 24 Horas (12)	0 €	0,12 €	Móviles y fijos	0,30 €	0,30 €
	Activa Clásica (12) (13)	0 €	0,12 €	Amena y Vodafone	0,60 €	0,36 €
				Movistar	0,30 €	0,15 €
				Fijos	0,60 €	0,30 €
Vodafone Contrato (a)	Provincial (17) (18)	9 €	0,12 €	Amena, Movistar y fijos otra provincia	0,45 €	0,45 €
				Vodafone y fijos misma provincia	0,17 €	0,17 €
				Líneas del mismo titular	0,06 €	0,06 €
	Universal 20 (17) (18)	20 €	0,12 €	Móviles y fijos	0,19 €	0,19 €
				Líneas del mismo titular	0,06 €	0,06 €
	Universal 40 (17) (18)	40 € (alta: 21 €)	0,12 €	Móviles y fijos	0,14 €	0,14 €
				Entre móviles con Plan Universal 40 y 60	0,05 €	0,05 €
				Líneas del mismo titular con otro plan	0,06 €	0,06 €
	Universal 60 (17) (18)	60 € (alta: 21 €)	0,12 €	Móviles y fijos	0,13 €	0,13 €
				Entre móviles con Plan Universal 40 y 60	0,05 €	0,05 €
				Líneas del mismo titular con otro plan	0,06 €	0,06 €
	Mañana (14)/Tarde (15) (17) (18)	9 €	0,12 €	Amena y Movistar	0,45 €	0,10 €
				Vodafone y fijos	0,25 €	0,06 €
				Líneas del mismo titular	0,06 €	0,06 €
Vodafone Tarjeta (b)	Tiempo Libre (16) (17)	0 €	0,12 €	Móviles y fijos	0,59 €	0,12 €
	VF (17)	0 €	0,12 €	Amena y Movistar	0,49 €	0,49 €
				Vodafone y fijos	0,19 €	0,19 €
	Autorecargable (17)	0 €	0,12 €	Móviles y fijos	0,28 €	0,28 €

Fecha del estudio: 30 de septiembre de 2003.

(a) Facturación por segundos a partir del primer minuto, que se factura completo. (b) Facturación por fracciones de 30 segundos a partir del primer minuto, que se factura completo. (1) Por una cuota de 6 euros más IVA mensuales o 0 euros si su consumo mensual es igual o superior a 24 euros, los clientes con contrato Mis Horas o Joven de Amena pueden elegir cinco números de Amena para llamar por 0,03 euros/minuto. (2) El contrato Mis Horas de Amena tiene el horario reducido de lunes a viernes de 21:00 a 8:00 horas, sábados, domingos y festivos nacionales más 5 horas diarias en el horario elegido por el cliente. (3) El contrato Joven de Amena tiene el horario reducido de lunes a viernes de 22:00 a 8:00 horas, sábados, domingos y festivos nacionales más 5 horas diarias en el horario elegido por el cliente. (4) La tarjeta Joven de Amena tiene el horario reducido, 0,06 euros más IVA el minuto, de lunes a domingo de 0:00 a 8:00 horas; las llamadas cuestan 0,12 euros/minuto de lunes a domingo de 16:00 a 0:00 horas y los sábados, domingos y festivos de 8:00 a 16:00 horas; el coste es de 0,80 euros/minuto de lunes a viernes de 8:00 a 16:00 horas. (5) La tarjeta Ocio de Amena tiene el horario reducido de lunes a viernes de 16:00 a 8:00 horas, sábados, domingos y festivos. (6) El horario reducido comprende de lunes a viernes de 0:00 a 08:00 horas, de 11:00 a 16:00 horas y de 22:00 a 0:00 horas, sábados, domingos y festivos de ámbito nacional durante todo el día. (7) El horario reducido comprende de lunes a viernes de 0:00 a 08:00 horas, de 14:00 a 16:00 horas y de 19:00 a 0:00 horas, sábados, domingos y festivos de ámbito nacional durante todo el día. (8) Por una cuota de alta de 6,01 euros más IVA, los clientes con contratos Plus Elección Mañana o Tarde de Movistar pueden elegir cinco números de Movistar para llamar por 0,10 euros/minuto en horario normal y 0,06 euros/minuto en horario reducido. (9) Los clientes con contratos Plus Elección Mañana o Tarde o Plus 24 Horas de Movistar con dos, tres o cuatro líneas pueden activar el Módulo Familiar, con el que todas las llamadas entre sus líneas les costarán 0,06 euros más IVA por minuto, siempre que el gasto de sus líneas sume un mínimo de 13 euros mensuales si tienen dos líneas, 18 euros si tienen tres y 22 euros si tienen cuatro líneas. (10) Por una cuota de alta de 6 euros más IVA, los clientes con contratos Plus 24 Horas o Plus Familia XL de Movistar pueden elegir cinco números de Movistar para llamar por 0,09 euros/minuto. (11) Los clientes con contrato Plus Familia XL de Movistar pueden activar el Módulo Interno, con el que, por una cuota mensual de 3 euros más IVA mensuales por línea, pueden realizar sus llamadas entre las líneas del Módulo Interno por 0,06 euros/minuto. (12) Por una cuota de alta de 6 euros más IVA, los clientes de cualquier modalidad de tarjeta de Movistar pueden elegir cinco números de Movistar para llamar por 0,09 euros/minuto. (13) La tarjeta Activa Clásica de Movistar tiene el horario reducido de lunes a viernes de 20:00 a 8:00 horas, sábados, domingos y festivos nacionales. (14) El horario reducido comprende de lunes a viernes de 0:00 a 13:00 horas y de 22:00 a 0:00 horas y los sábados, domingos y festivos de ámbito nacional las 24 horas. (15) El horario reducido comprende de lunes a viernes de 0:00 a 08:00 horas y de 17:00 a 0:00 horas y los sábados, domingos y festivos de ámbito nacional las 24 horas. (16) El horario reducido comprende de lunes a viernes de 0:00 a 06:00 horas y de 16:00 a 0:00 horas y los sábados, domingos y festivos de ámbito nacional las 24 horas. (17) Vodafone permite en cualquier modalidad de contrato o tarjeta la creación de un grupo de hasta diez líneas (Qtal!) de la compañía entre las que pueden llamarse por 0,06 euros/minuto. Además, dos clientes pueden contratar el módulo a2, con el que pueden llamarse entre sí por 0,03 euros/minuto, por una cuota de alta de 6,00 euros cada uno. (18) Los clientes con contrato de Vodafone que tengan entre dos y cuatro líneas pagan 0,06 euros/minuto por las llamadas entre las mismas (cuenta familiar). Además, cada una de estas líneas puede elegir gratis cuatro números de teléfono (al menos dos de ellos móviles Vodafone y ninguno de la cuenta familiar) a los que podrá llamar con un descuento del 20%.

DOCUMENTO 4

CHENTE (http://www.fut.es/~chente/moviles.html)
Datos sobre las "tarjetas prepago" y "contratos" y "prefijos de teléfonos móviles de cada compañía".
Se muestran los datos que da para tarifas de prepago, que era lo único que estaba en funcionamiento, ya que la de contrato estaba "en construcción".

Barato a partir de las 16 h.

	Lunes-Viernes	Sabado	Dom./Fest.	
MOVISTAR Activa Cuatro.	25 125 25	25 125 25	25	20
	0 4 16 24	0 4 16 24	0 24	Establecim.

	Lunes-Viernes	Sabado	Dom./Fest.	
AIRTEL Tiempo Libre.	28 120 28	28	28	20
	0 6 16 24	0 24	0 24	Establecim.

	Lunes-Viernes	Sabado	Dom./Fest.	
AMENA Ocio.	10 120 20	10 20	10 20	20
	0 8 16 24	0 8 24	0 8 24	Establecim.

Barato en una misma provincia.

A fijos de la misma provincia.

MOVISTAR Activa Próxima.		Lunes-Viernes	Sabado	Dom./Fest.	
		35	35	35	20
	0	24	0 24	0 24	Establecim.
AIRTEL Fórm. Provincial.		Lunes-Viernes	Sabado	Dom./Fest.	
		30	30	30	20
	0	24	0 24	0 24	Establecim.
AIRTEL Fórmula Viva.		Lunes-Viernes	Sabado	Dom./Fest.	
	16	140 16	16	16	20
	0 6	16 24	0 24	0 24	Establecim.
AMENA Mi Ciudad.		Lunes-Viernes	Sabado	Dom./Fest.	
		35	35	35	20
	0	24	0 24	0 24	Establecim.

A fijos de otra provincia.

MOVISTAR Activa Próxima.		Lunes-Viernes	Sabado	Dom./Fest.	
		95	95	95	20
	0	24	0 24	0 24	Establecim.
AIRTEL Fórm. Provincial.		Lunes-Viernes	Sabado	Dom./Fest.	
		120	120	120	20
	0	24	0 24	0 24	Establecim.
AIRTEL Fórmula Viva.		Lunes-Viernes	Sabado	Dom./Fest.	
		140	140	140	20
	0	24	0 24	0 24	Establecim.
AIRTEL Mi Ciudad.		Lunes-Viernes	Sabado	Dom./Fest.	
		35	35	35	20
	0	24	0 24	0 24	Establecim.

A móviles de la misma operadora.

MOVISTAR Activa Próxima.		Lunes-Viernes	Sabado	Dom./Fest.	
		35	35	35	20
	0	24	0 24	0 24	Establecim.

AIRTEL Fórm. Provincial.

Lunes-Viernes Sabado Dom./Fest.
30 30 30 20
0 24 0 24 0 24 Establecim.

AIRTEL Fórmula Viva.

Lunes-Viernes Sabado Dom./Fest.
16 140 16 16 16 20
0 6 16 24 0 24 0 24 Establecim.

AMENA Mi Ciudad.

Lunes-Viernes Sabado Dom./Fest.
35 35 35 20
0 24 0 24 0 24 Establecim.

A móviles de otra operadora.

MOVISTAR Activa Próxima.

Lunes-Viernes Sabado Dom./Fest.
95 95 95 20
0 24 0 24 0 24 Establecim.

AIRTEL Fórm. Provincial.

Lunes-Viernes Sabado Dom./Fest.
120 120 120 20
0 24 0 24 0 24 Establecim.

AIRTEL Fórmula Viva.

Lunes-Viernes Sabado Dom./Fest.
140 140 140 20
0 24 0 24 0 24 Establecim.

AMENA Mi Ciudad.

Lunes-Viernes Sabado Dom./Fest.
80 80 80 20
0 24 0 24 0 24 Establecim.

Llamadas desde fuera de la provincia.

AMENA Mi Ciudad.

Lunes-Viernes Sabado Dom./Fest.
80 80 80 20
0 24 0 24 0 24 Establecim.

En el caso de Amena hay que elegir la provincia por anticipado y en caso de que la llamada se realice desde fuera de la provincia elegida se aplica la tarifa cara. Se puede hacer un cambio de provincia cada mes. En el caso de ciudades grandes el área 'barata' sólo cubre la ciudad y no la provincia entera.

En Movistar y Airtel no es necesario fijar la provincia.

Barato entre móviles de la misma operadora.

A móviles de la misma operadora.

MOVISTAR Activa Club.
Lunes-Viernes Sabado Dom./Fest.
20 20 20 20
0 24 0 24 0 24 Establecim.

MOVISTAR Activa Clásica.*
Lunes-Viernes Sabado Dom./Fest.
25 50 25 25 50 25 25 20
0 8 20 24 0 8 20 24 0 24 Establecim.

MOVISTAR Activa Joven.*
Lunes-Viernes Sabado Dom./Fest.
25 80 25 25 80 25 25 20
0 8 20 24 0 8 20 24 0 24 Establecim.

(*) También incluye las llamadas a MoviLine.

AIRTEL Fórmula 20.
Lunes-Viernes Sabado Dom./Fest.
20 20 20 20
0 24 0 24 0 24 Establecim.

AIRTEL Universo.
Lunes-Viernes Sabado Dom./Fest.
35 35 35 20
0 24 0 24 0 24 Establecim.

A fijos.

MOVISTAR Activa Club.
Lunes-Viernes Sabado Dom./Fest.
80 40 40 20
0 24 0 24 0 24 Establecim.

MOVISTAR Activa Clásica.
Lunes-Viernes Sabado Dom./Fest.
60 120 60 60 120 60 60 20
0 8 20 24 0 8 20 24 0 24 Establecim.

MOVISTAR Activa Joven.
Lunes-Viernes Sabado Dom./Fest.
25 150 25 25 150 25 25 20
0 8 20 24 0 8 20 24 0 24 Establecim.

AIRTEL Fórmula 20.
Lunes-Viernes Sabado Dom./Fest.
80 40 40 20
0 24 0 24 0 24 Establecim.

Lunes-Viernes Sabado Dom./Fest.

Universo.	35	35	35	20
	0 24	0 24	0 24	Establecim.

A móviles de otra operadora.

	Lunes-Viernes	Sabado	Dom./Fest.	
MOVISTAR Activa Club.	80	40	40	20
	0 24	0 24	0 24	Establecim.
	Lunes-Viernes	Sabado	Dom./Fest.	
MOVISTAR Activa Clásica.	60 120 60	60 120 60	60	20
	0 8 20 24	0 8 20 24	0 24	Establecim.
	Lunes-Viernes	Sabado	Dom./Fest.	
MOVISTAR Activa Joven.	25 150 25	25 150 25	25	20
	0 8 20 24	0 8 20 24	0 24	Establecim.
	Lunes-Viernes	Sabado	Dom./Fest.	
AIRTEL Fórmula 20.	80	40	40	20
	0 24	0 24	0 24	Establecim.
	Lunes-Viernes	Sabado	Dom./Fest.	
AMENA Universo.	80	80	80	20
	0 24	0 24	0 24	Establecim.

DOCUMENTO 5

TELTARIFAS (http://www.teltarifas.com/particulares/)

Ejemplo de cómo muestran los datos de una tarifa (es el Plan Provincial de Vodafone, que está en la dirección http://www.teltarifas.com/particulares/perfil.php3?telid=236&head=movil.

Plan Provincial

DATOS GENERALES

Descripción	El plan provincial está orientado para los usuarios que realizan la mayor parte de sus llamadas a fijos de su provincia. Además, podrás hablar en cualquier momento, de día o de noche, disfrutando de una tarifa única de 0,17€/min. Las tarifas internacionales de Vodafone son las mismas para todos los contratos ofrecidos.

INFORMACION GENERAL

Servicio para	particulares
Acceso	Acceso directo
Llamadas desde	movil
Disponible	En toda España

FACTURACION

Cuota de alta	21,04€
Cuota minima	9

CONSULTA TARIFAS

Mostrar tarifa de un pais en concreto -------------------------

Afganistán

TARIFAS NACIONALES

Pincha aquí para conocer las tarifas nacionales

TARIFAS INTERNACIONALES

Pincha aquí para conocer las tarifas internacionales

SMS nacional
Establecimiento: 0.0000 - Facturación: 1/1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
toda la semana	0,1500 €																							

Llamadas provinciales y móviles Vodafone
Establecimiento: 0.1200 - Facturación: 60/30

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
toda la semana	0,1700 €																							

Llamadas interprovinciales y móviles no Vodafone
Establecimiento: 0.1200 - Facturación: 60/30

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
toda la semana	0,4500 €																							

SMS internacional
Establecimiento: 0.0000 - Facturación: 1/1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
toda la semana	0,6000 €																							

Números Habituales interprovincial
Establecimiento: 0.1200 - Facturación: 60/30

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
toda la semana	0,3600 €																							

Números Habituales Vodafone y provincia
Establecimiento: 0.1200 - Facturación: 60/30

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
toda la semana	0,1360 €																							

Números Habituales Movistar o Amena
Establecimiento: 0.1200 - Facturación: 60/30

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
toda la semana	0,3600 €																							

TELTARIFAS: CONSULTA PASO A PASO DE TELEFONIA MOVIL

(http://www.teltarifas.com/particulares/pasoapaso_movil.php3?)

Mediante esta sencilla consulta, puedes averiguar en un momento qué operador es el que te ofrece la tarifa más barata para la llamada que deseas hacer desde tu teléfono móvil. Sigue las instrucciones para rellenar correctamente los campos y obtener un resultado acorde con tus necesidades.

Paso 1 **¿Eres un particular o una empresa?**

Lo primero es delimitar el **tipo de usuario** que eres: particular o empresa. Esta diferenciación es importante, ya que los operadores disponen de planes diferentes y tarifas diferenciadas según la naturaleza jurídica de su cliente.

Tipo de usuario

Paso 2 **Debes elegir el tipo de llamada que vas a hacer desde tu móvil:**

- **Metropolitana**: esta es la llamada que haces a un teléfono fijo que se encuentra en tu misma ciudad.
- **Provincial**: si el teléfono fijo al que vas a llamar, está dentro de tu misma provincia.
- **Interprovincial**: si el teléfono fijo al que vas a llamar se encuentra en una provincia distinta a la tuya.
- **Móvil**: esta opción es para aquéllos casos en los que llamas a otro móvil y no sabes exactamente qué operador tiene contratado esa persona. Con esta opción, te saldrá la tarifa más cara por defecto, para que sea cual sea el móvil al que llames, no te lleves sorpresas y te hagas una idea de lo que, como mucho, te va a costar la llamada.
- **Airtel**: si llamas a un móvil Airtel
- **Amena**: si llamas a un móvil Amena
- **MoviStar**: si llamas a un móvil MoviStar
- **Internet**: si llamas a una conexión a Internet para navegar a través de tecnología WAP.
- **Países**: si la llamada que vas a hacer es a un país en concreto, debes seleccionarlo de la lista. Encontrarás que además, una serie de países tienen la posibilidad ser seleccionados junto con la opción "móvil". Por ejemplo: "Irlanda" y a continuación "Irlanda móvil". De esta forma puedes conocer el coste exacto de la llamada que hagas a un móvil que se encuentra en un país determinado.

Tipo de llamada

Destino

Paso 3 **Día en el que vas a efectuar tu llamada**

Día de la llamada

Hoy

Paso 4 **En este paso, se trata de escoger la franja horaria**

En este paso, se trata de escoger la **franja horaria** en la que se va a realizar la comunicación telefónica, para determinar la tarifa que se te va a aplicar y el horario en el que se va a tarificar tu llamada.

Hora

Ahora

Paso 5 **Una vez hecho esto, llegamos a la opción ¿Pesetas o Euros?¿Con IVA o sin IVA?.**

Elige la forma en que quieres que la tabla te muestre las tarifas por minuto, que te facturarán las diferentes compañías de telecomunicación. En principio todas las tarifas que presentan los operadores, nunca llevan incluído el IVA. Tenlo en cuenta, cuando consultes las tarifas en los folletos o en la publicidad. Puedes escoger entre una facturación:

- **Sin IVA**
- **Con IVA**
- **Euro con IVA**
- **Euro sin IVA**

Moneda

Euro sin IVA

FORMATO DE LA CONSULTA
Gracias a una serie de opciones que te mostramos a continuación, podrás personalizar al máximo tu consulta, de manera que obtengas exactamente la información que buscas.

Paso 6 **Tipo de acceso a la red telefónica:**

A continuación debes escoger el tipo de acceso a la red telefónica que deseas para establecer tu comunicación a través del teléfono móvil. De esta forma, podrás personalizar al máximo tu consulta, para obtener exactamente la información que buscas.

- Tarjeta Prepago: Tanto Amena como MoviStar y Airtel disponen de tarjetas prepagadas que te permitirán renovar el saldo de tu móvil de manera automática. Esta modalidad te ofrece libertad para recargar tu móvil cuando tú quieras y no tiene más gasto que el de la tarjeta. Las comercializan con importes de 1.000 hasta 10.000 ptas. La puedes adquirir en los distribuidores autorizados de los diferentes operadores.
- Contrato: De esta forma los operadores te pueden enviar una factura detallada de tus llamadas, cosa que es imposible con la tarjeta prepago. Pero con el contrato tienes un coste mensual de 1.000 o 2.000 ptas.
- Bono: Es una modalidad alternativa que consiste en abonar al operador una cantidad por adelantado, por ejemplo 7.000 ptas., que se irán consumiendo en llamadas. Cada mes el operador te renueva este bono de forma que tienes las ventajas de un contrato, pero no pagas cuotas de mantenimiento de contrato.

Moneda

Tipo de tarjeta

TIPO DE RESPUESTA QUE EMITE:

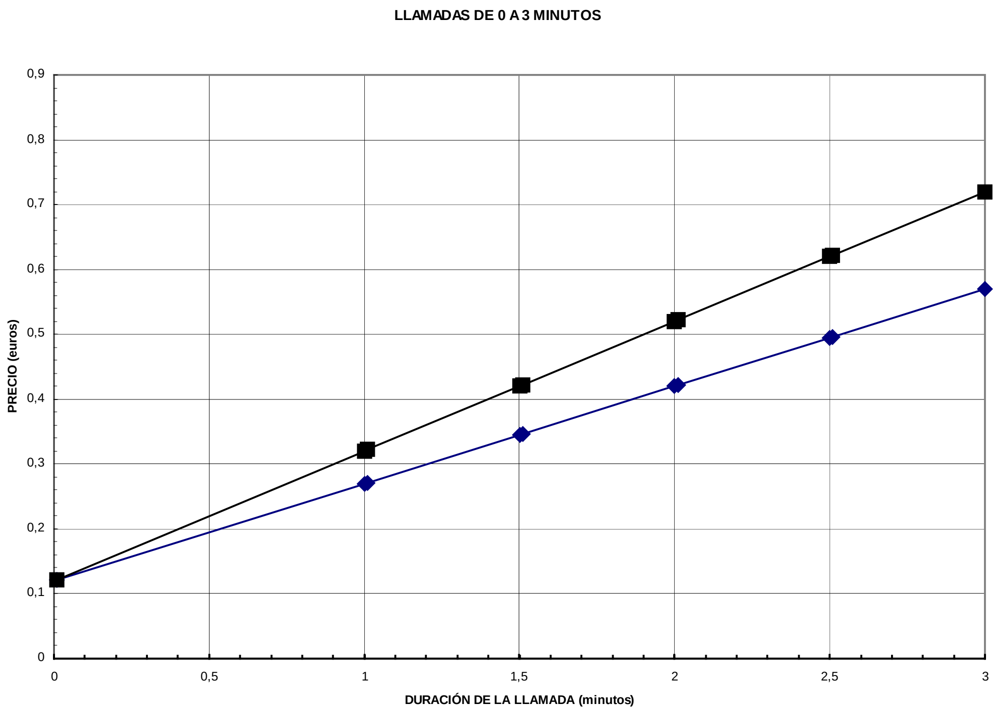
Si elegimos llamar a "Móvil (todos)", un lunes, entre las 4 y las 5 de la mañana (4-5 horas), en "Euro con IVA" desde "Contrato", la respuesta que emite es:

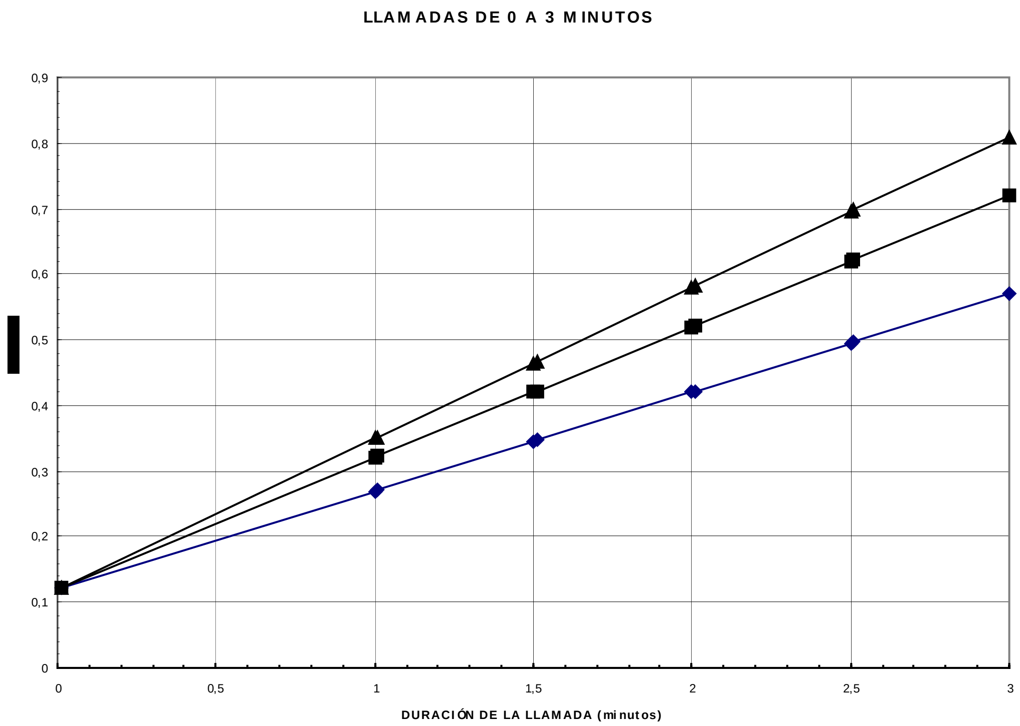
Tarifas más baratas para llamadas desde movil a Móvil un lunes a las 4 horas

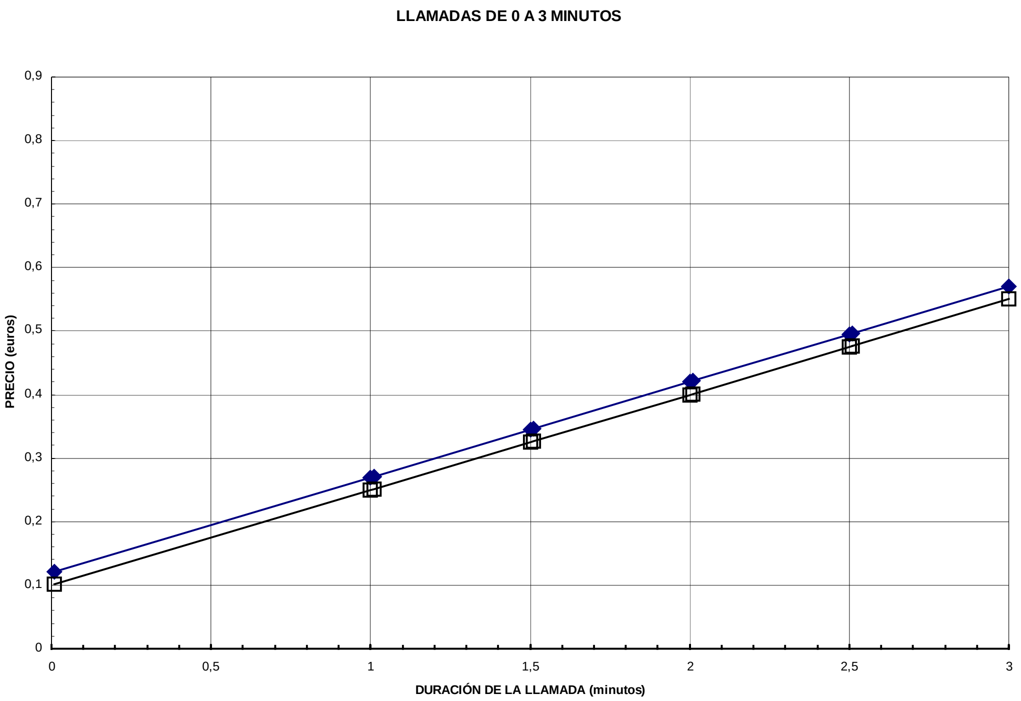
Coste/min.	Operador	Acceso	Plan	Establ.	Fact.	Alta
0,0348 €	Vodafone		a2	0,1392 €	60/30	
0,0557 €	Vodafone	Acceso directo	Plan Mañana	0,1392 €	60/30	
0,0557 €	Vodafone	Acceso directo	Plan Tarde	0,1392 €	60/30	
0,0696 €	Vodafone	Acceso directo	Plan Mañana	0,1392 €	60/30	
0,0696 €	Vodafone	Acceso directo	Plan Tarde	0,1392 €	60/30	
0,0696 €	Vodafone	directo	Q´tal	0,1392 €	60/30	
0,0696 €	Vodafone	directo	Cuenta Familiar	0,1392 €	60/30	
0,0928 €	Amena		Contrato Jóven	0,1392 €	60/1	
0,0928 €	Vodafone	Acceso directo	Plan Mañana	0,1392 €	60/30	
0,0928 €	Vodafone	Acceso directo	Plan Tarde	0,1392 €	60/30	
0,1206 €	Vodafone	Acceso directo	Plan Universal 60	0,1392 €	60/30	
0,1276 €	MoviStar		Plan 90	0,1392 €	60/1	
0,1485 €	Vodafone	Acceso directo	Plan Universal 40	0,1392 €	60/30	
0,1508 €	Amena		Contrato Libre 50	0,1392 €	60/1	
0,1508 €	MoviStar	Acceso directo	Plan 60	0,1392 €	60/1	
0,1578 €	Vodafone	Acceso directo	Plan Provincial	0,1392 €	60/30	
0,1624 €	MoviStar	Acceso directo	Plan 40	0,1392 €	60/1	
0,1740 €	Amena	Acceso directo	Contrato Libre 30	0,1392 €	60/1	
0,1740 €	Amena	Acceso directo	Contrato Mis Horas	0,1392 €	60/1	
	-	Hay 7 tarifas en la base de datos		-	-	
	-	La más cara es		-	-	
0,4176 €	Vodafone	gen_acceso	Plan Provincial	0,1392 €	60/30	

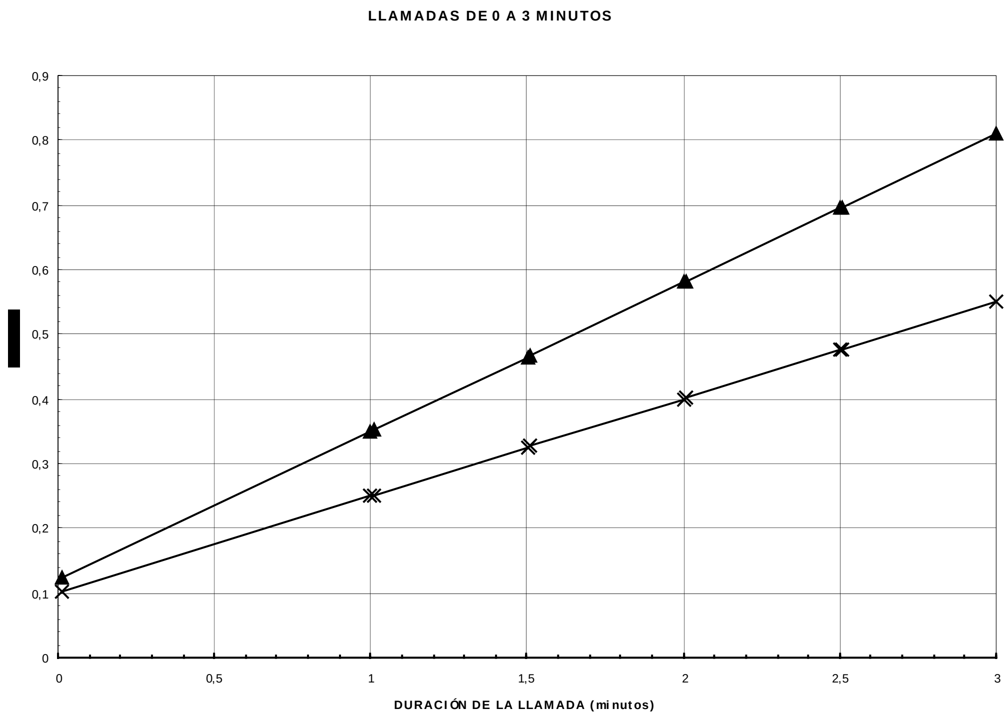
Tarifas para particulares
Todos los precios en Ptas con IVA incluido.

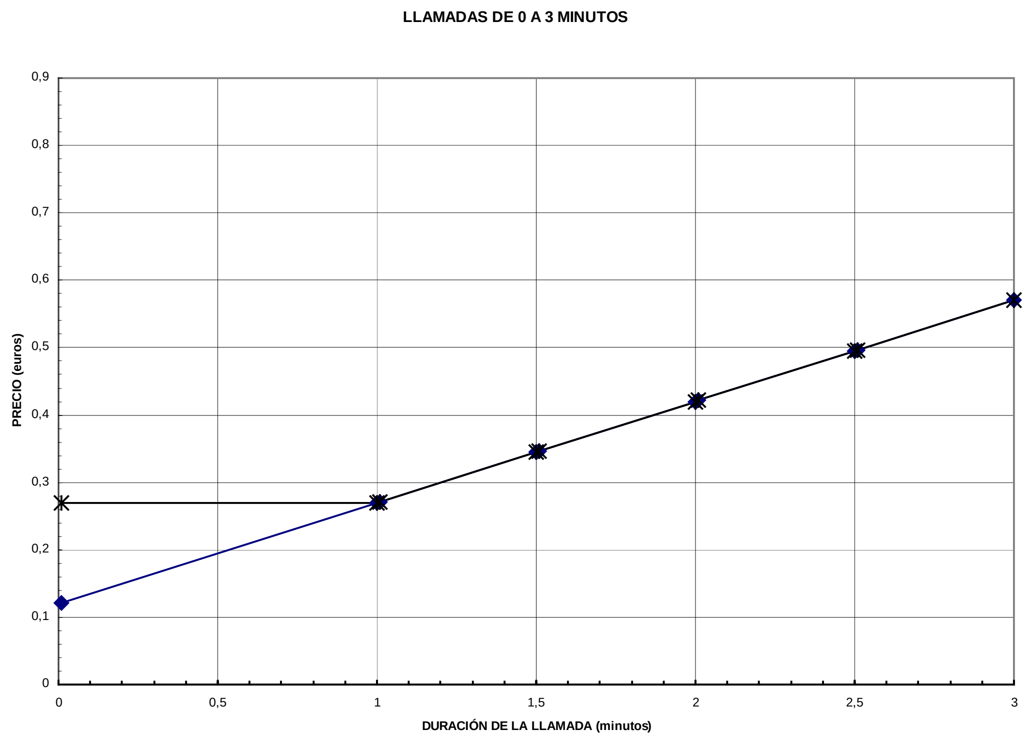
MATERIAL 3. Gráficos de compañías-tarifas de estudio preliminar

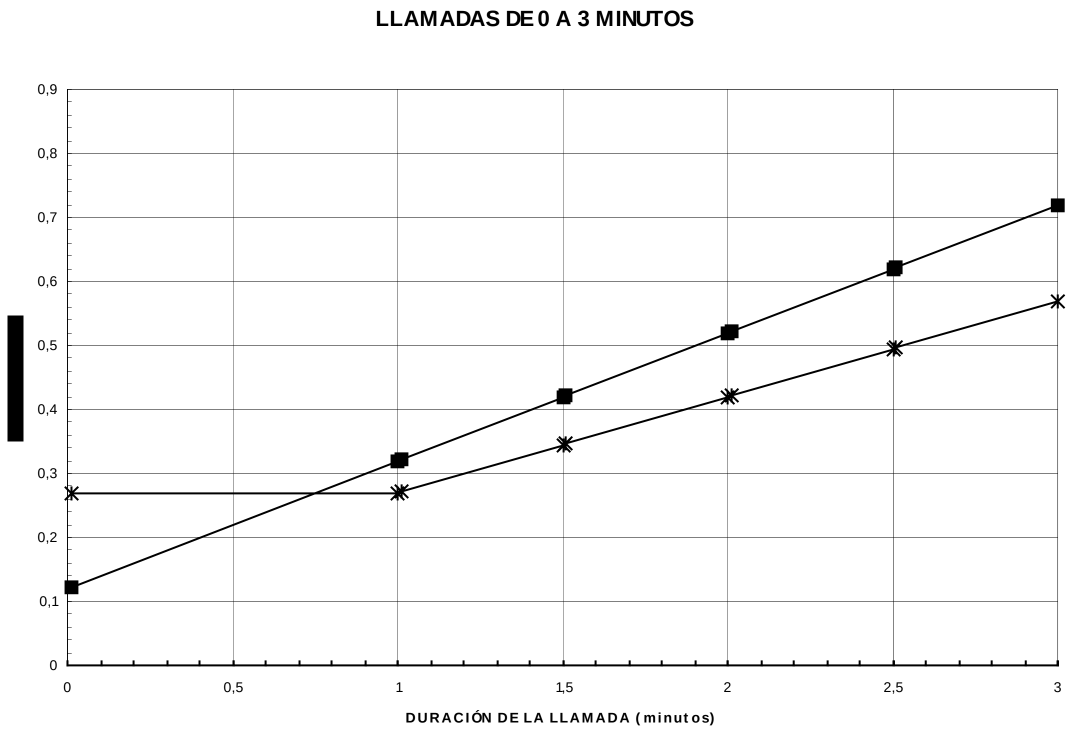

LLAMADAS DE 0 A 3 MINUTOS
PRECIO (euros)
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
DURACIÓN DE LA LLAMADA (minutos)


LLAMADAS DE 0 A 3 MINUTOS
[redacted]
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
DURACIÓN DE LA LLAMADA (minutos)

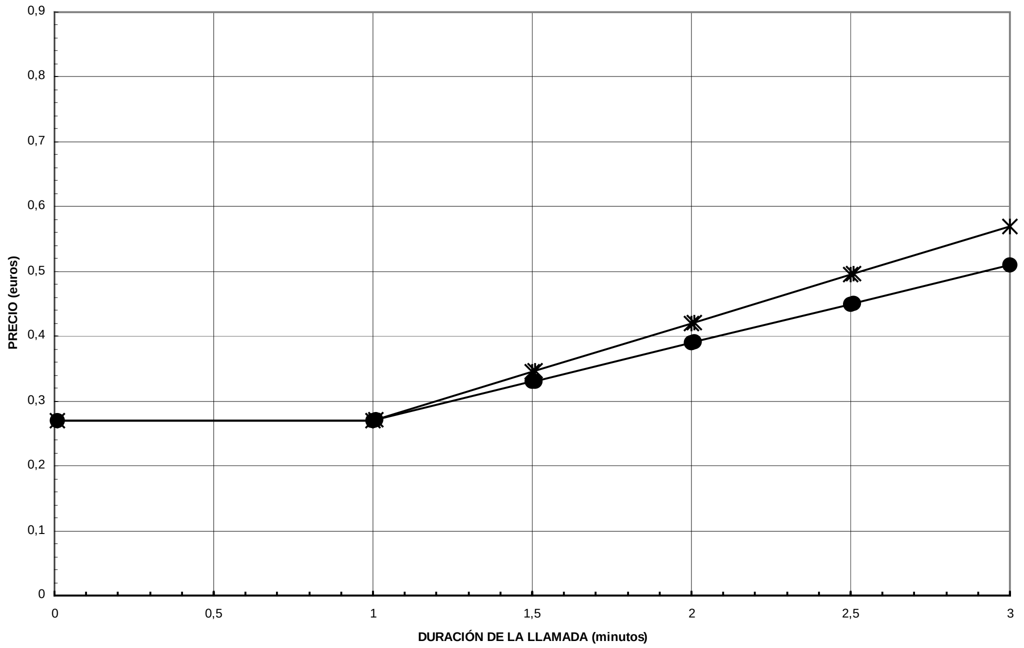

LLAMADAS DE 0 A 3 MINUTOS
PRECIO (euros)
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
DURACIÓN DE LA LLAMADA (minutos)


LLAMADAS DE 0 A 3 MINUTOS
[redacted]
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
DURACIÓN DE LA LLAMADA (minutos)

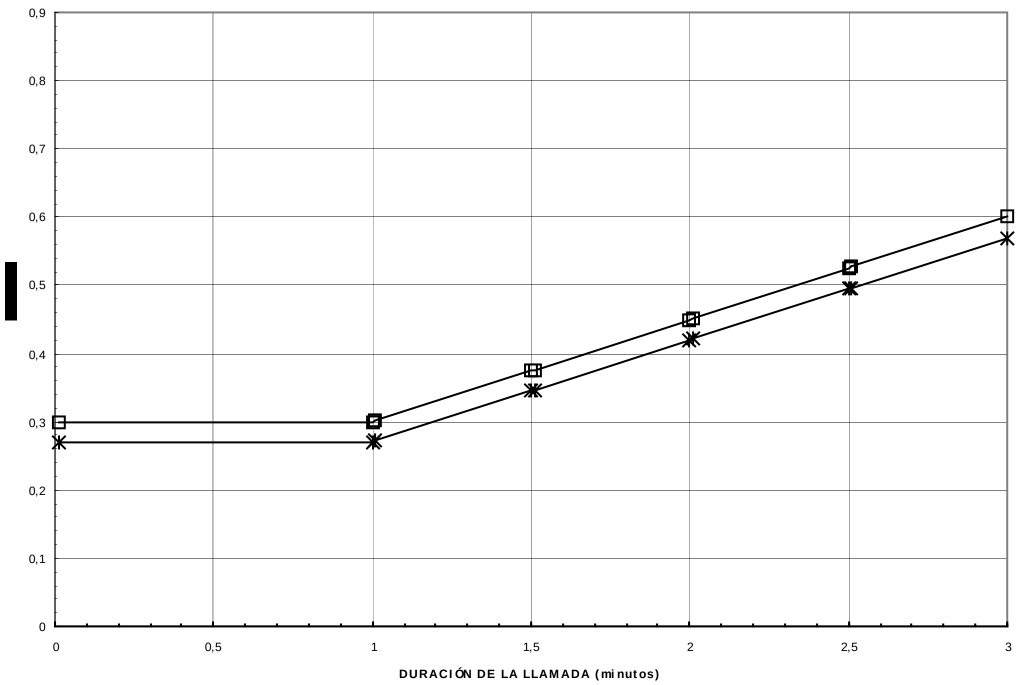

LLAMADAS DE 0 A 3 MINUTOS
PRECIO (euros)
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
DURACIÓN DE LA LLAMADA (minutos)

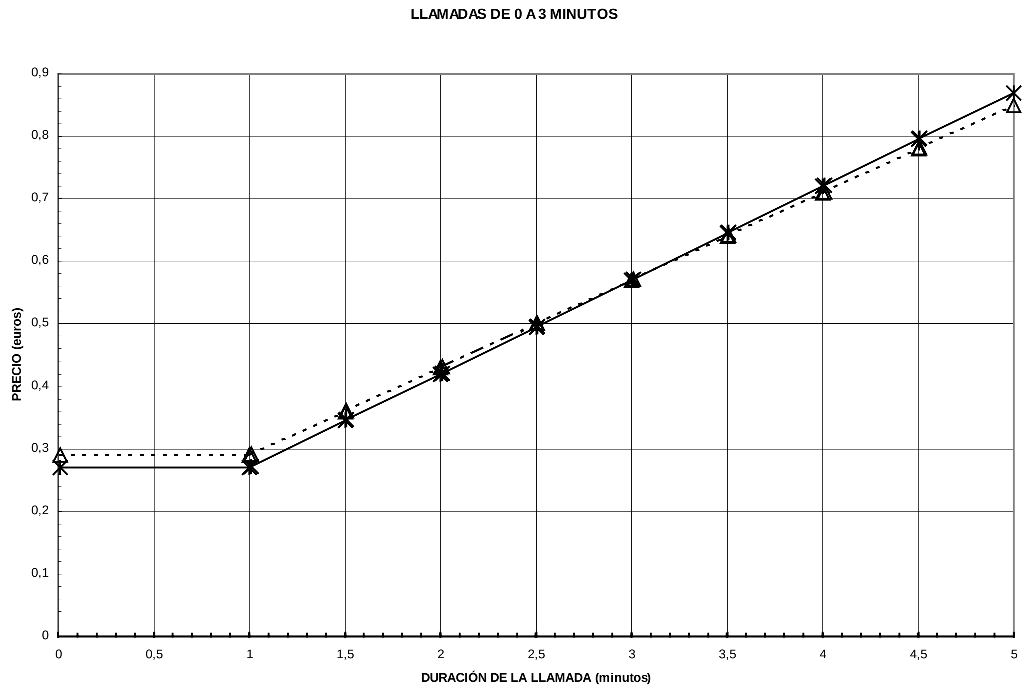

LLAMADAS DE 0 A 3 MINUTOS
[redacted]
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
DURACIÓN DE LA LLAMADA (minutos)

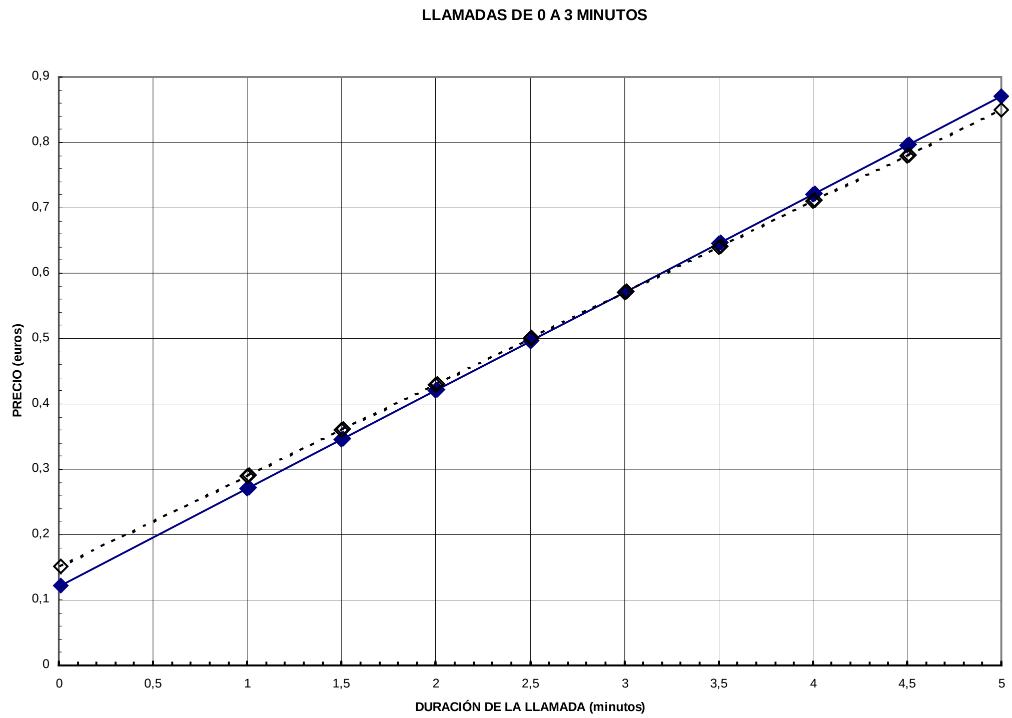
LLAMADAS DE 0 A 3 MINUTOS

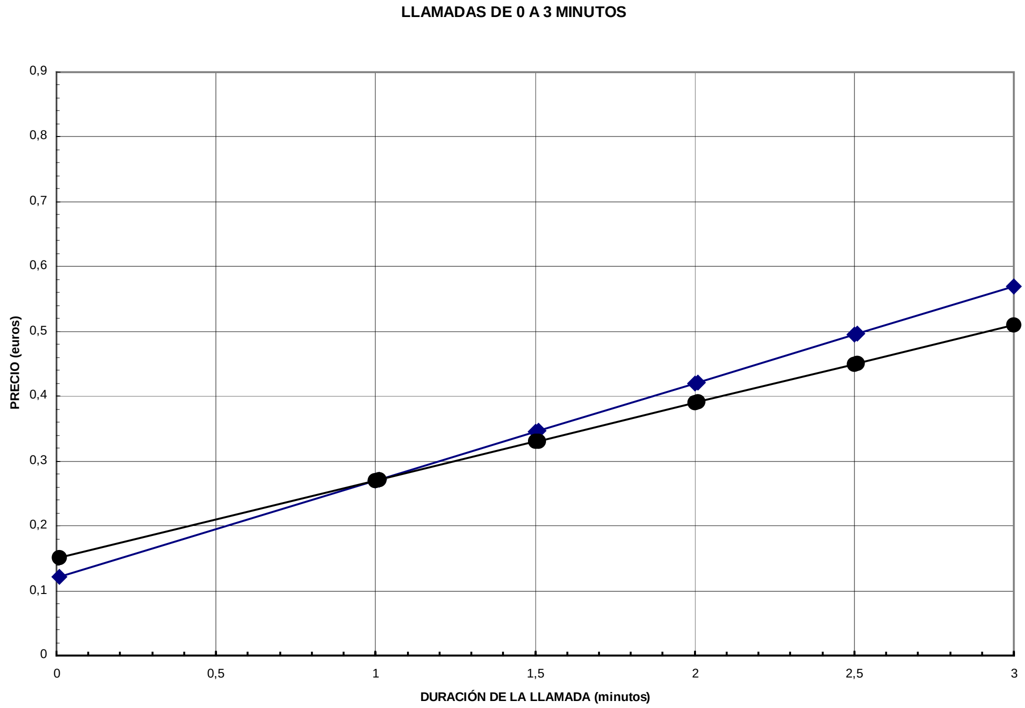


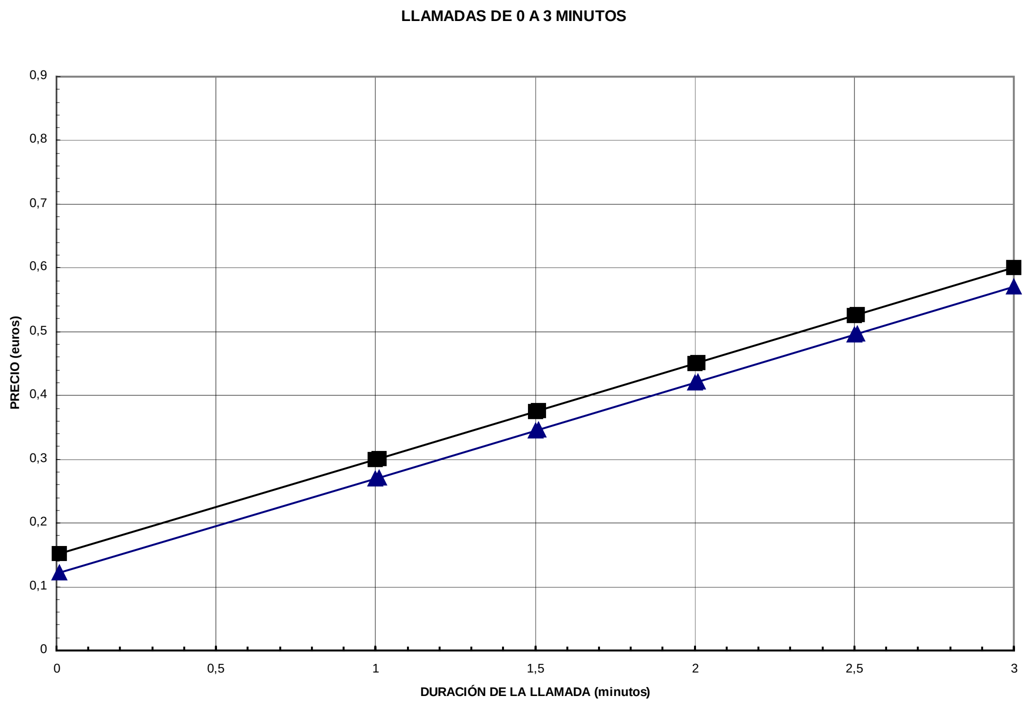
LLAMADAS DE 0 A 3 MINUTOS

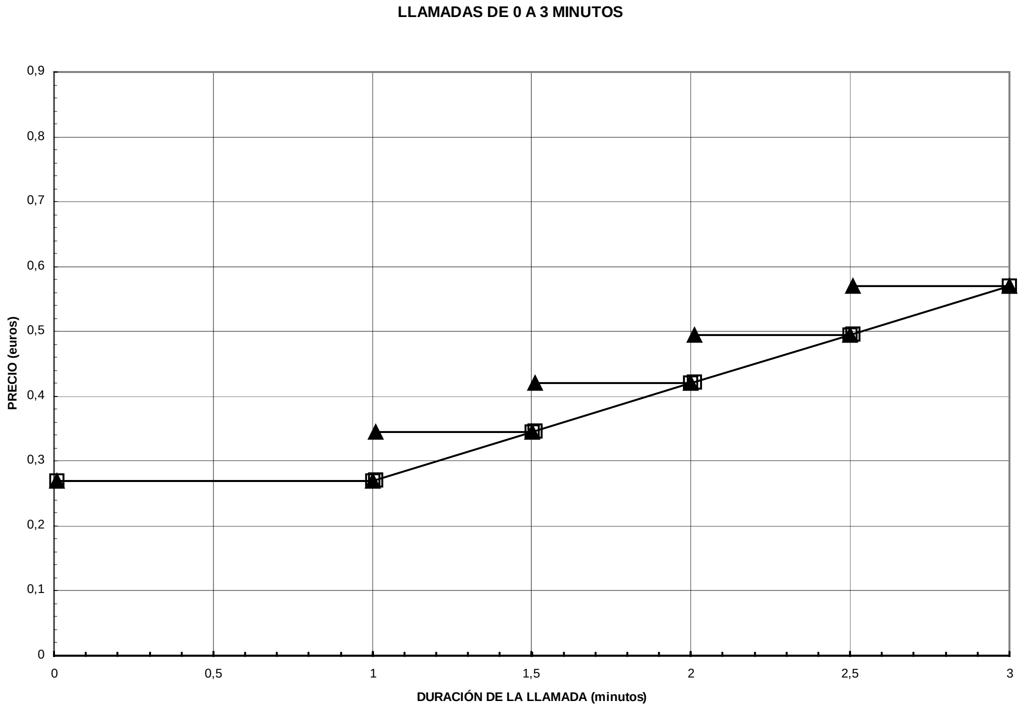


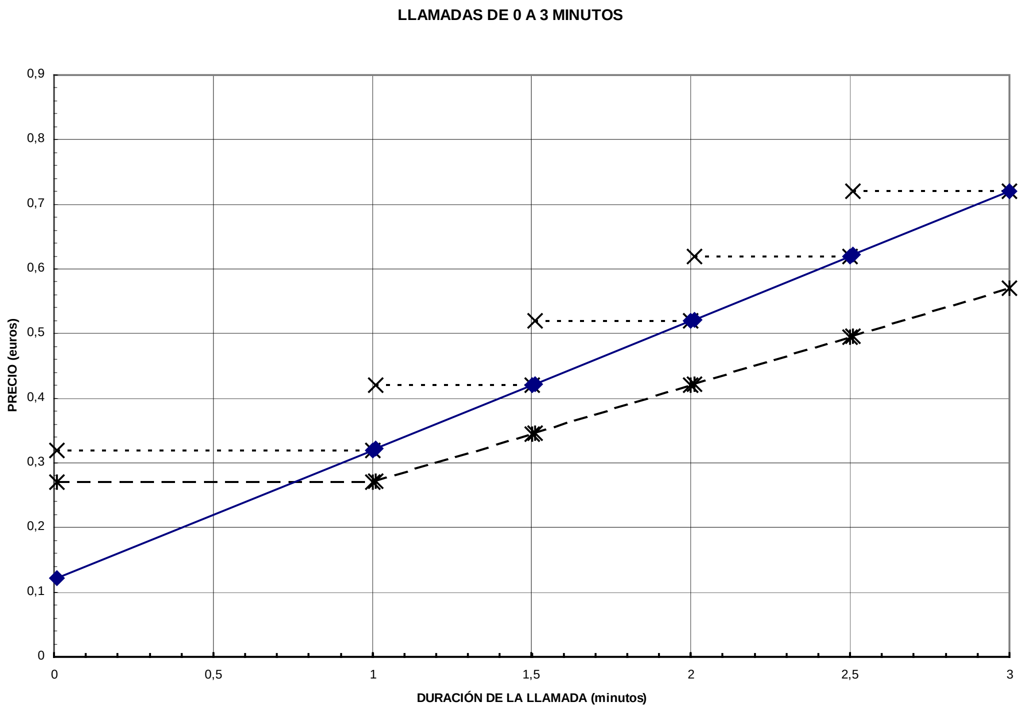

LLAMADAS DE 0 A 3 MINUTOS
PRECIO (euros)
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
4,5
5
DURACIÓN DE LA LLAMADA (minutos)

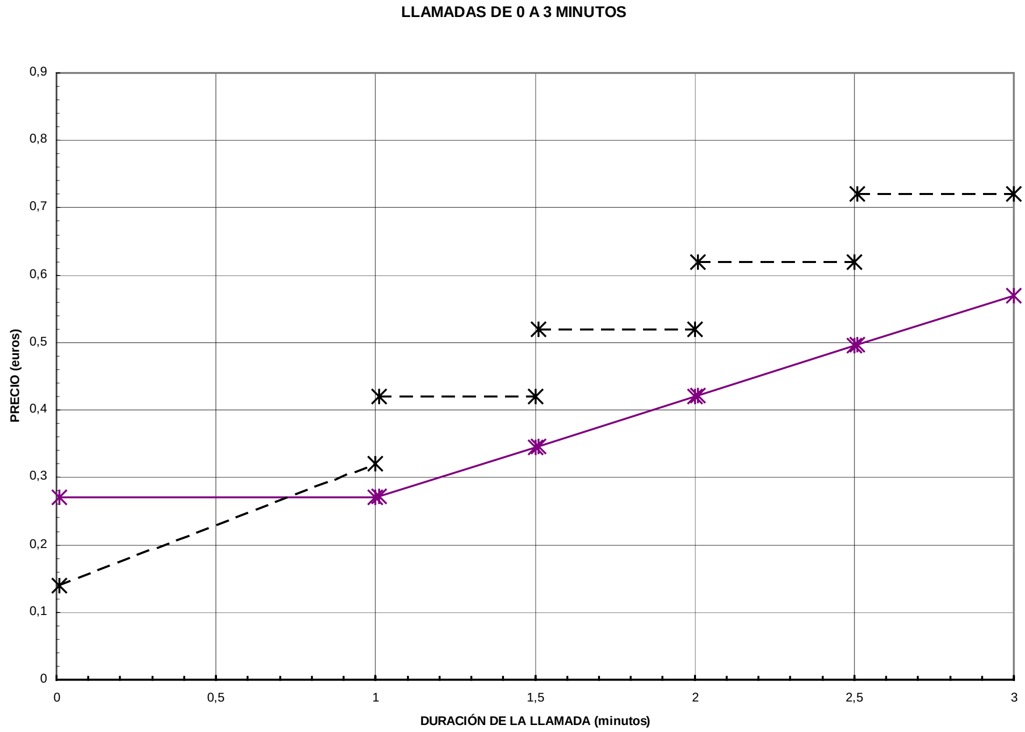

LLAMADAS DE 0 A 3 MINUTOS
PRECIO (euros)
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
4,5
5
DURACIÓN DE LA LLAMADA (minutos)

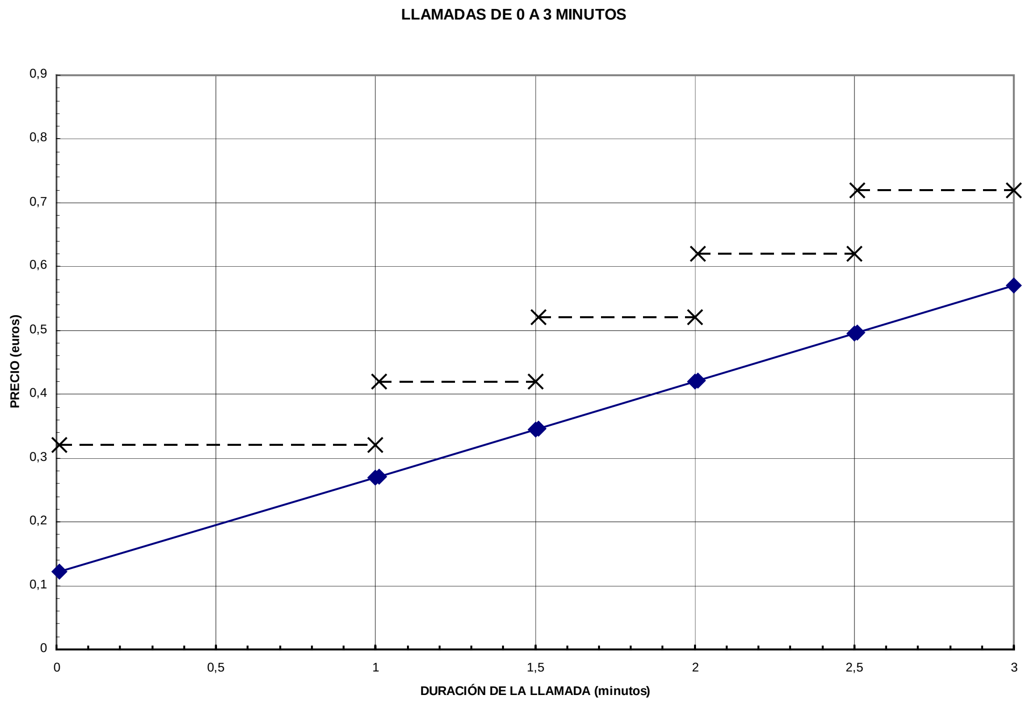

LLAMADAS DE 0 A 3 MINUTOS
PRECIO (euros)
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
DURACIÓN DE LA LLAMADA (minutos)

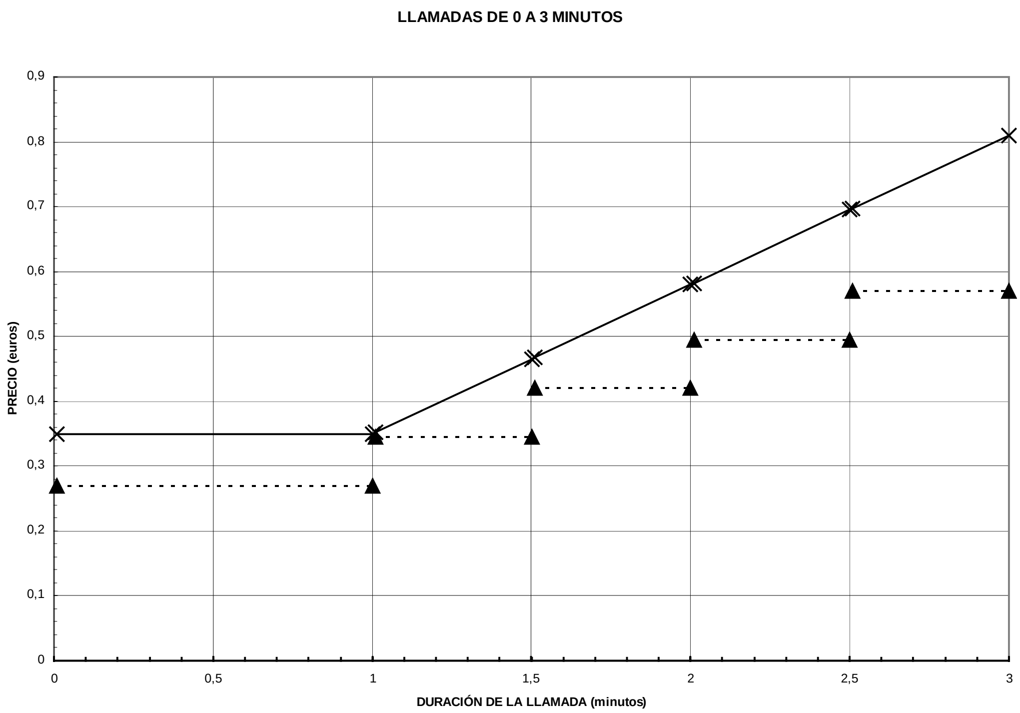

LLAMADAS DE 0 A 3 MINUTOS
PRECIO (euros)
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
DURACIÓN DE LA LLAMADA (minutos)

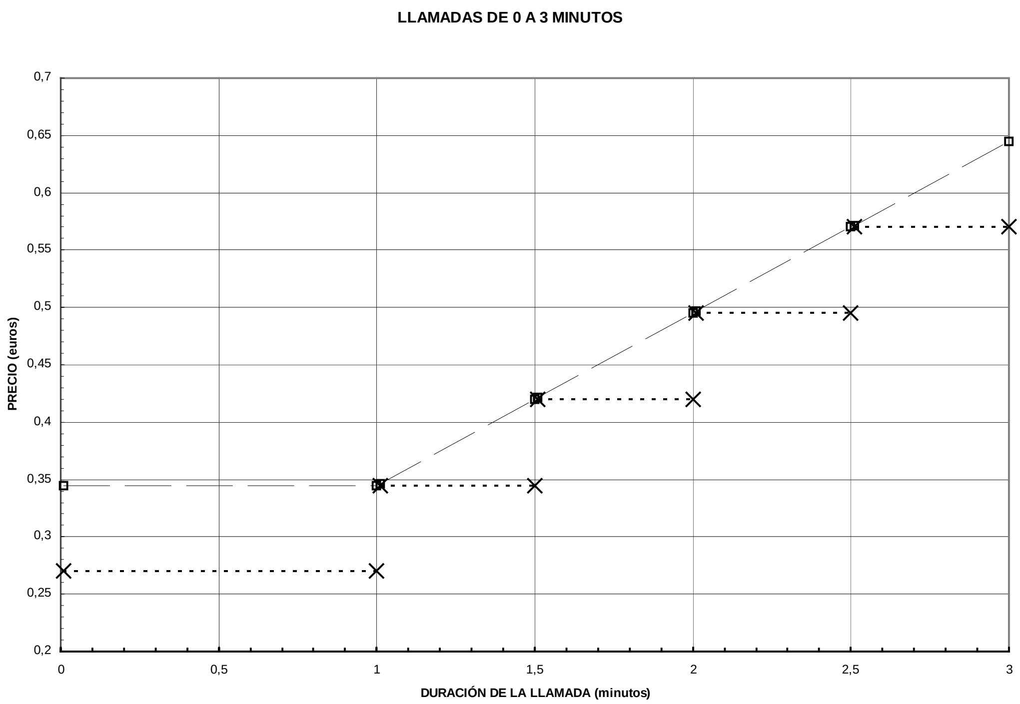

LLAMADAS DE 0 A 3 MINUTOS
PRECIO (euros)
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
DURACIÓN DE LA LLAMADA (minutos)


LLAMADAS DE 0 A 3 MINUTOS
PRECIO (euros)
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
DURACIÓN DE LA LLAMADA (minutos)

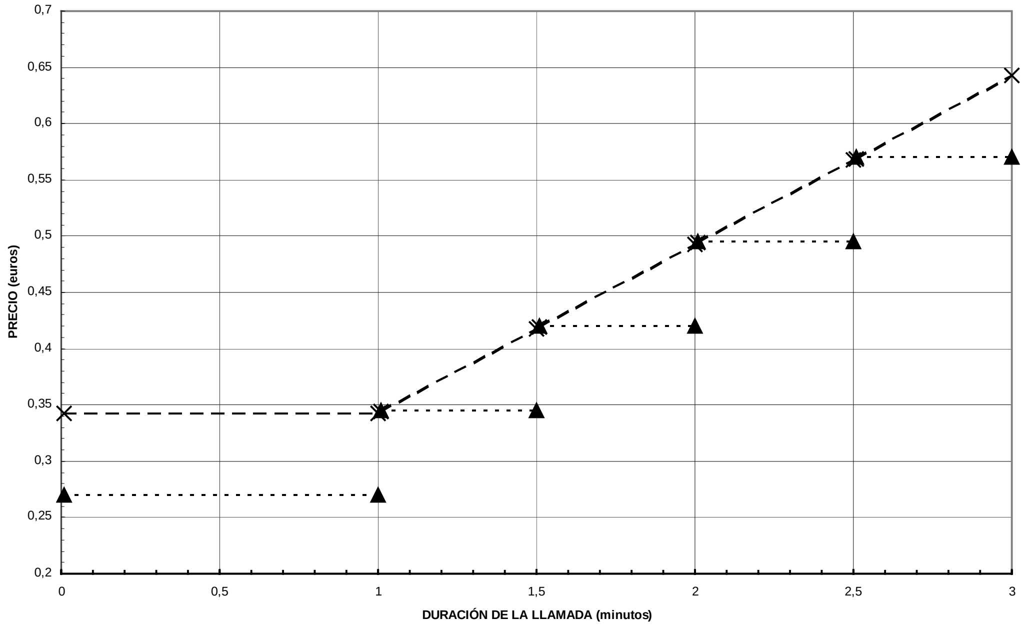

LLAMADAS DE 0 A 3 MINUTOS
PRECIO (euros)
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
DURACIÓN DE LA LLAMADA (minutos)


LLAMADAS DE 0 A 3 MINUTOS
PRECIO (euros)
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
DURACIÓN DE LA LLAMADA (minutos)

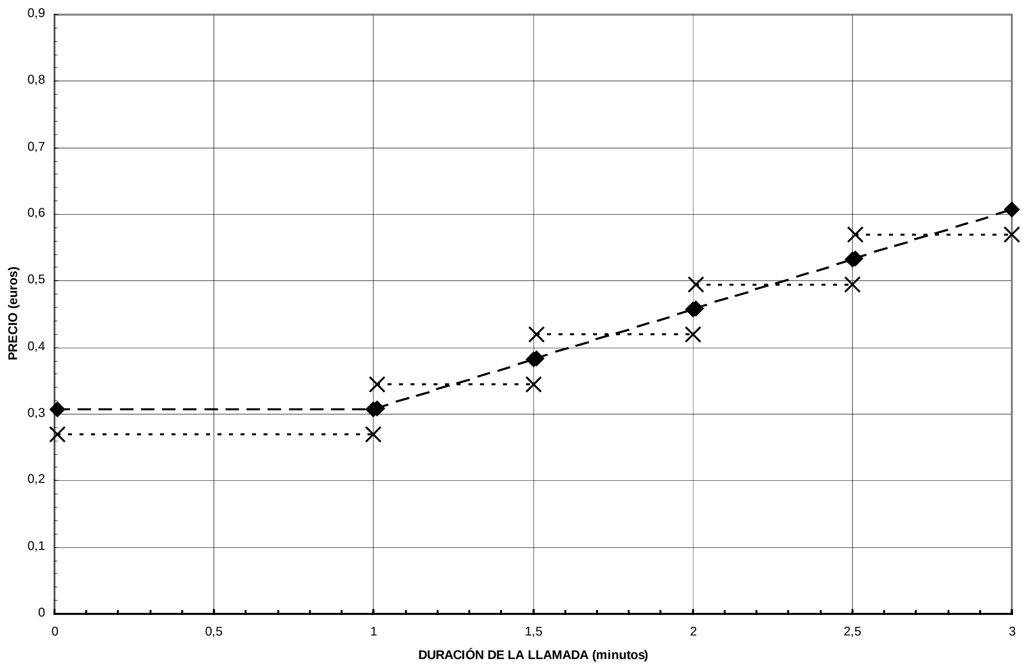

LLAMADAS DE 0 A 3 MINUTOS
PRECIO (euros)
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
DURACIÓN DE LA LLAMADA (minutos)

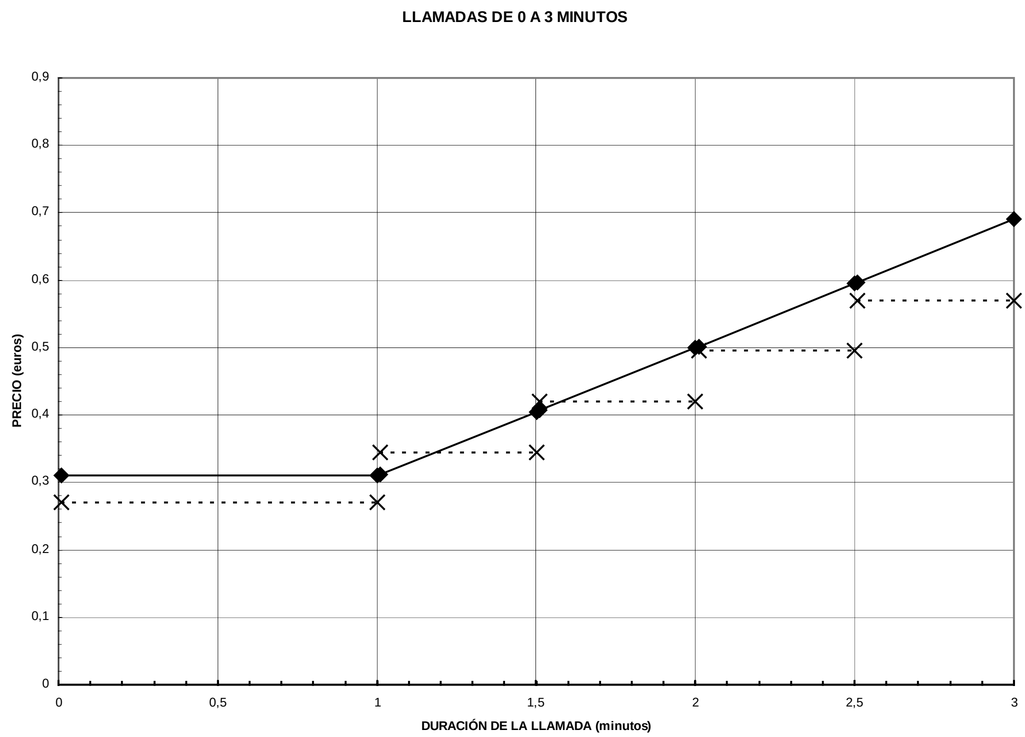

LLAMADAS DE 0 A 3 MINUTOS
PRECIO (euros)
0,7
0,65
0,6
0,55
0,5
0,45
0,4
0,35
0,3
0,25
0,2
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
DURACIÓN DE LA LLAMADA (minutos)

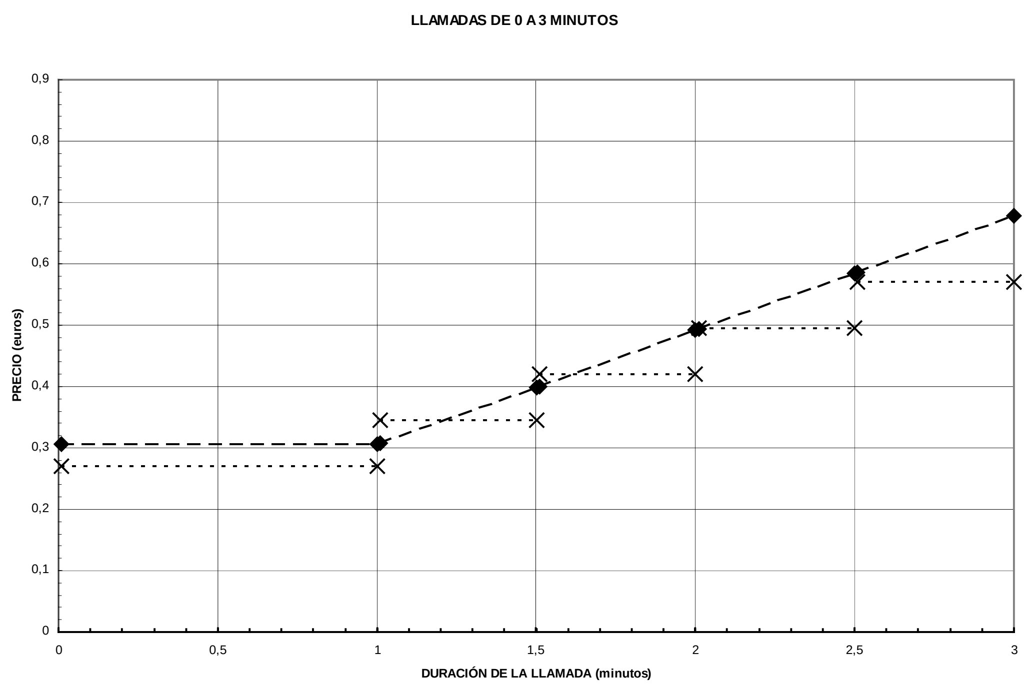
LLAMADAS DE 0 A 3 MINUTOS

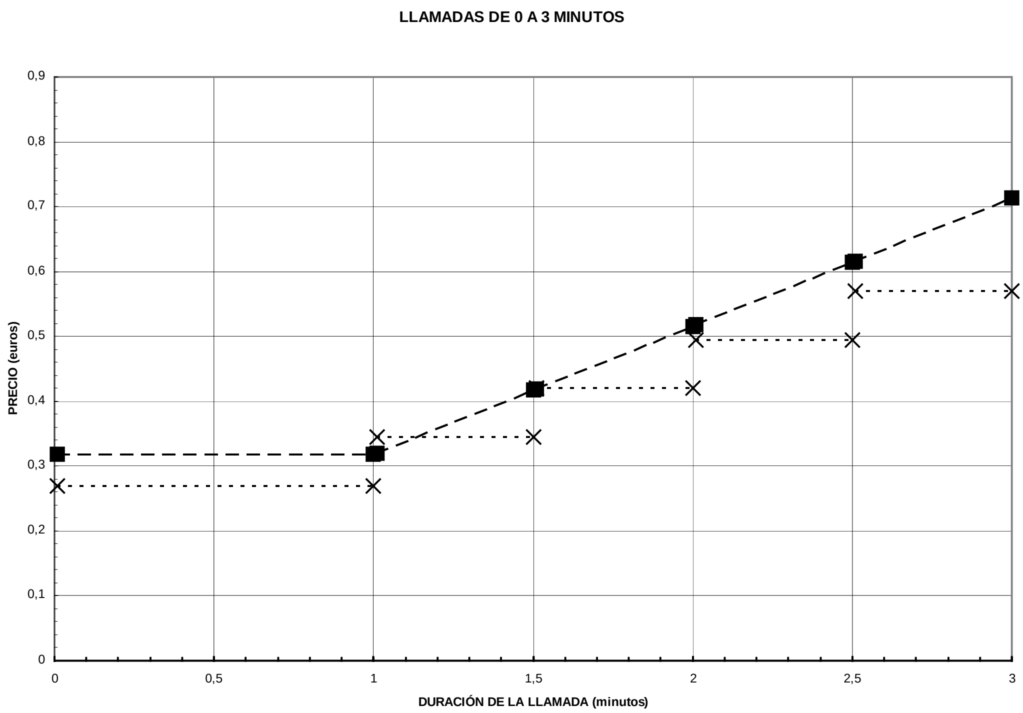


LLAMADAS DE 0 A 3 MINUTOS




LLAMADAS DE 0 A 3 MINUTOS
PRECIO (euros)
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
DURACIÓN DE LA LLAMADA (minutos)


LLAMADAS DE 0 A 3 MINUTOS
PRECIO (euros)
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
DURACIÓN DE LA LLAMADA (minutos)


LLAMADAS DE 0 A 3 MINUTOS
PRECIO (euros)
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
DURACIÓN DE LA LLAMADA (minutos)

MATERIAL 4. Tabla de datos de compañías-tarifas de estudio preliminar

Establecimiento de llamada (euros)	Euros/minuto	Primer minuto	Resto	Compañía
0,12	0,15	Sg.	Sg.	**A**
0,12	0,2	Sg.	Sg.	**B**
0,12	0,23	Sg.	Sg.	**C**
0,1	0,15	Sg.	Sg.	**D**
0,12	0,15	Completo	Sg.	**E**
0,15	0,12	Completo	Sg.	**F**
0,15	0,15	Completo	Sg.	**G**
0,15	0,14	Completo	Sg.	**H**
0,15	0,14	Sg.	Sg.	**I**
0,15	0,12	Sg.	Sg.	**J**
0,15	0,15	Sg.	Sg.	**K**
0,12	0,15	Completo	30 Sg.	**L**
0,12	0,2	Completo	30 Sg.	**M**
0,12	0,2	Sg.	30 Sg.	**N**
0,12	0,23	Completo	Sg.	**O**
0,195	0,15	Completo	Sg.	**P**
0,1925	0,15	Completo	Sg.	**Q**
0,2325	0,15	Completo	Sg.	**R**
0,12	0,19	Completo	Sg.	**S**
0,12	0,1859	Completo	Sg.	**T**
0,12	0,1875	Completo	Sg.	**U**

MATERIAL 5. Gráficos con leyenda indicando a qué compañía corresponde cada gráfica[14]

[14] Aquí se incluye el Gráfico 24, que no estaba incluido en el ANEXO 3 porque fue creada con posterioridad, durante la Décima sesión.

GRÁFICO 1

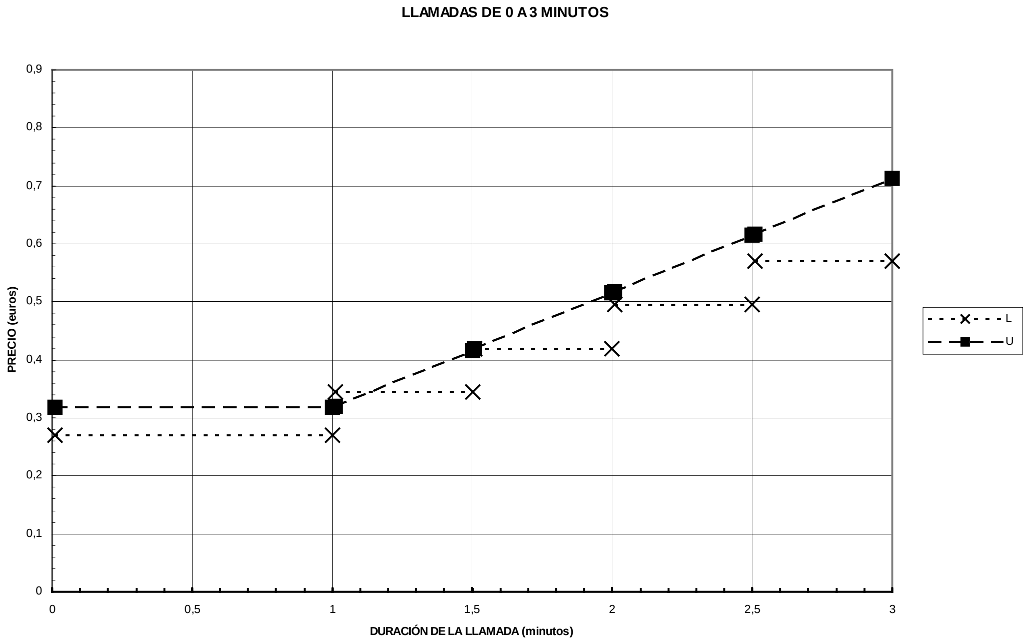


GRÁFICO 2

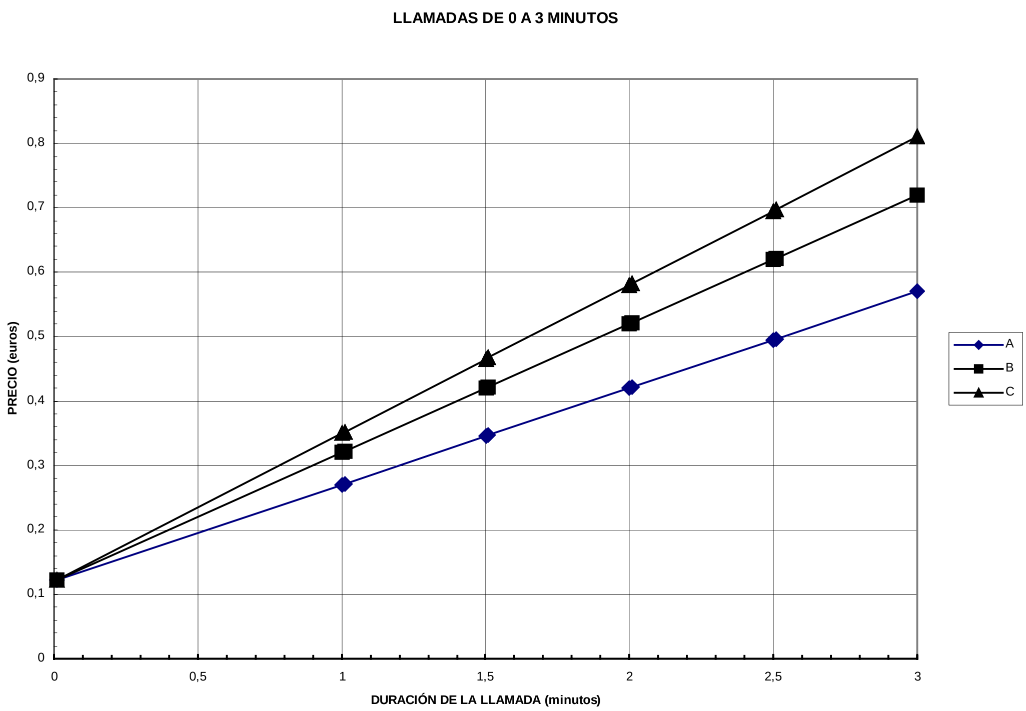


GRÁFICO 3

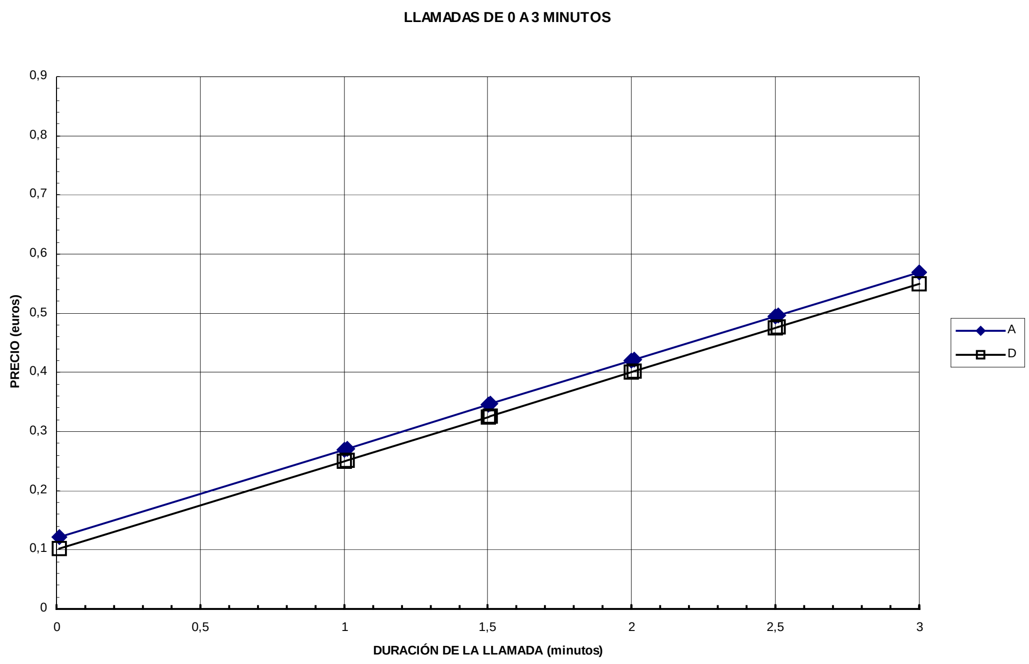


GRÁFICO 4

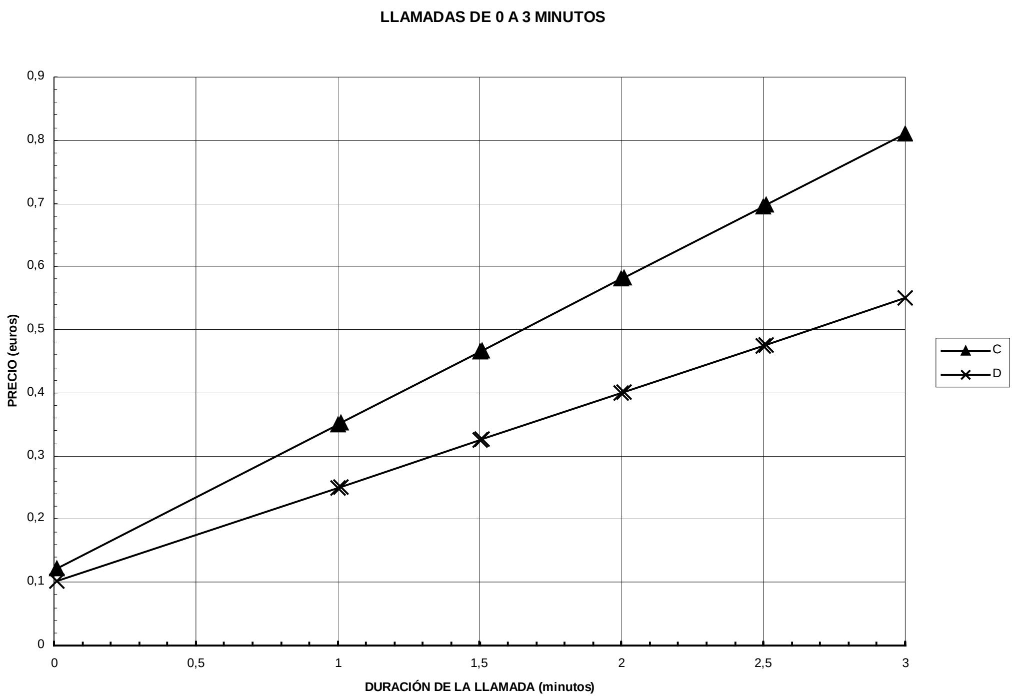


GRÁFICO 5

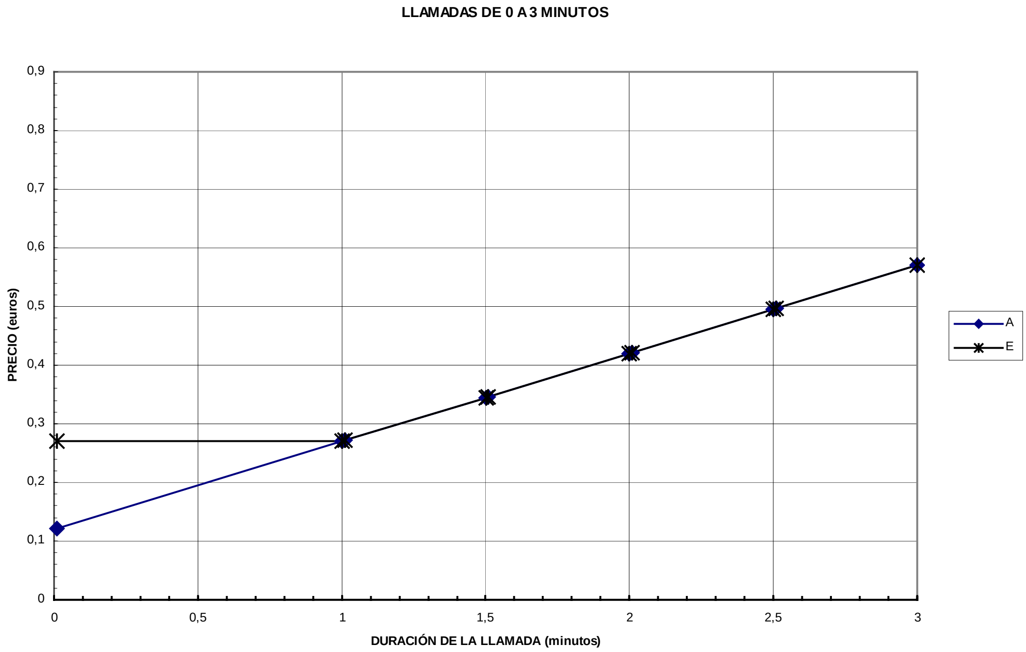


GRÁFICO 6

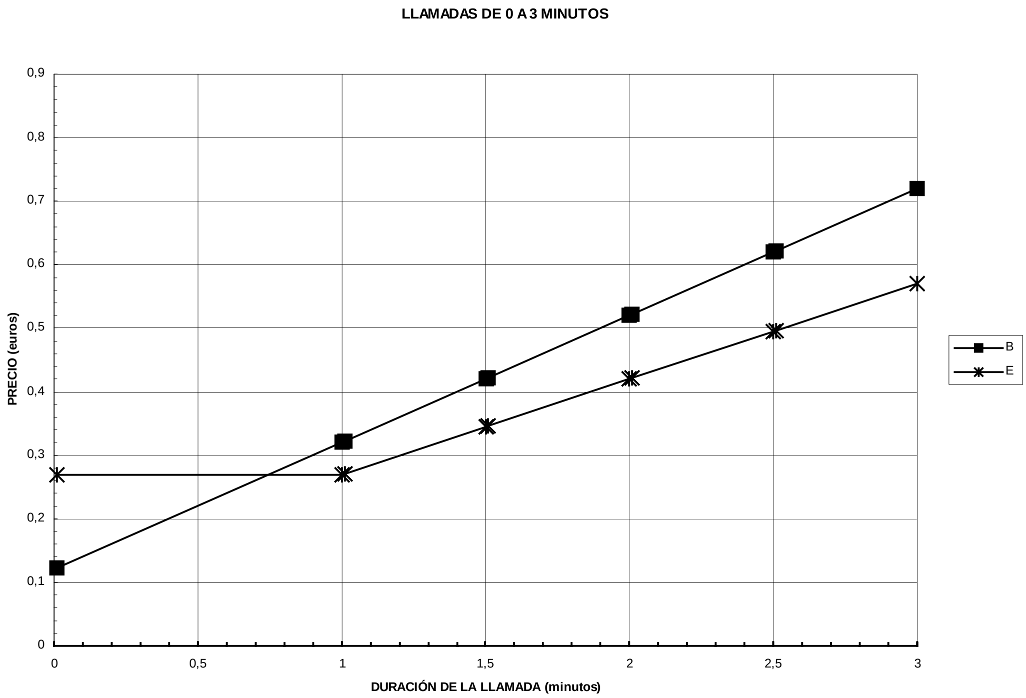


GRÁFICO 7

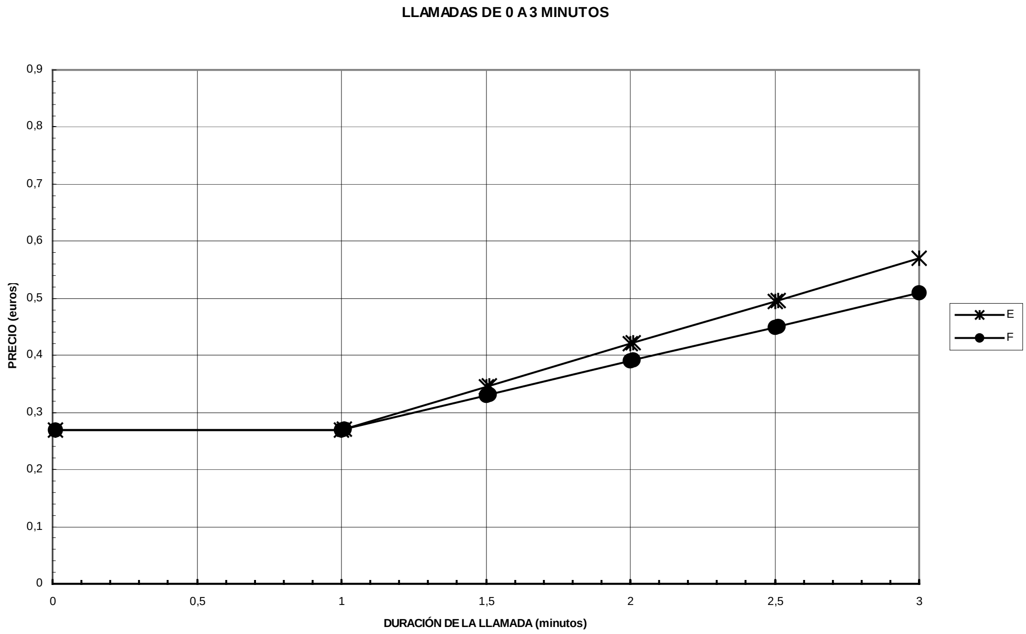


GRÁFICO 8

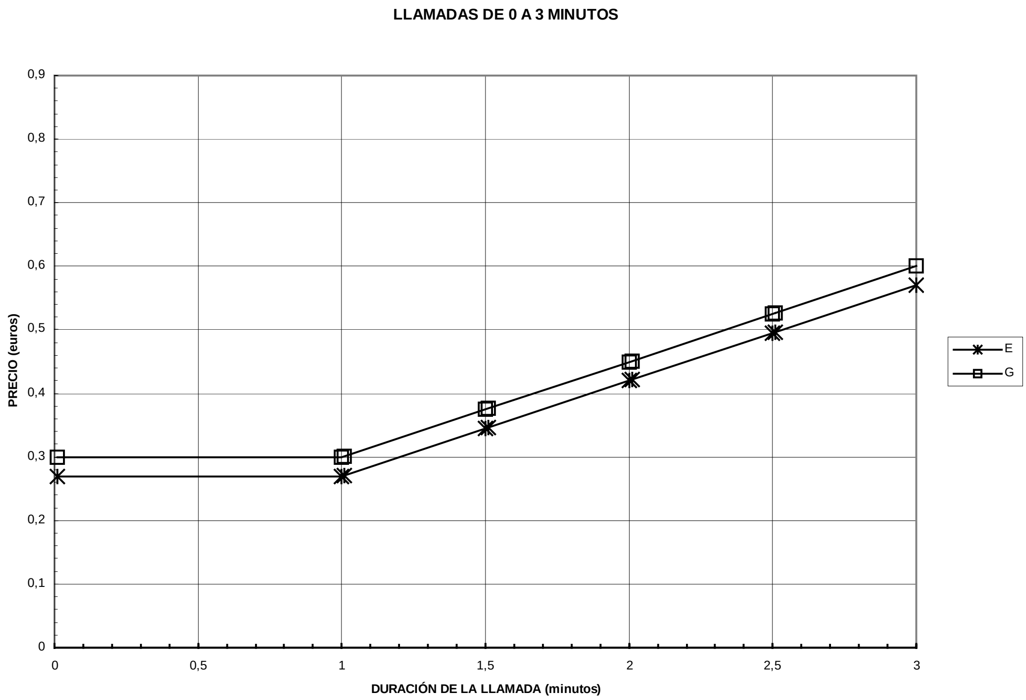


GRÁFICO 9

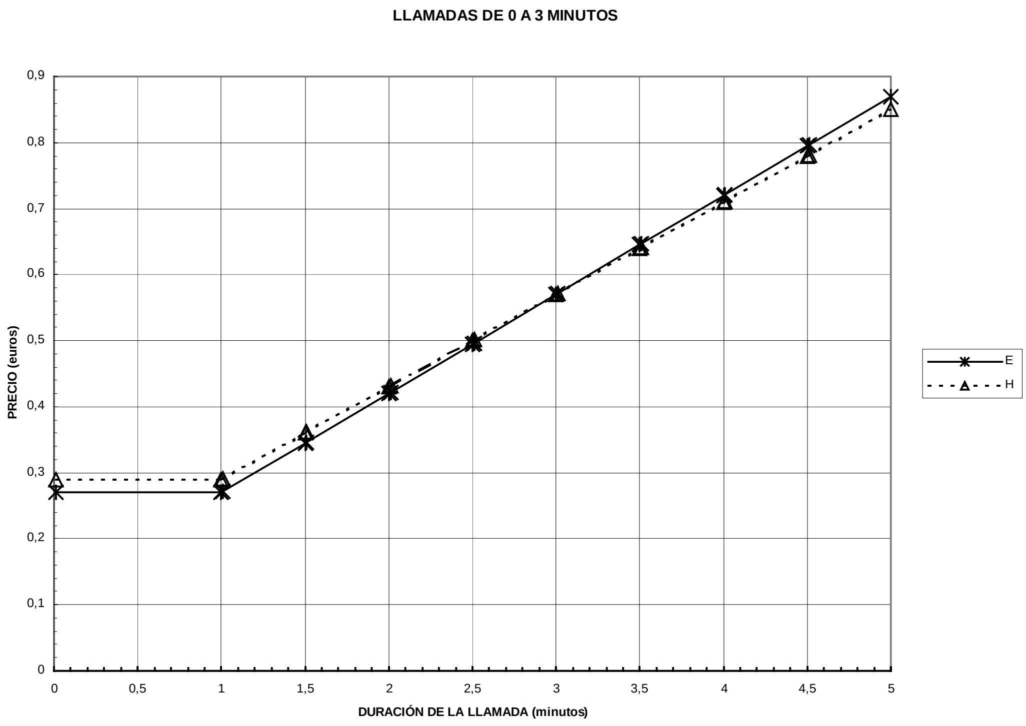


GRÁFICO 10

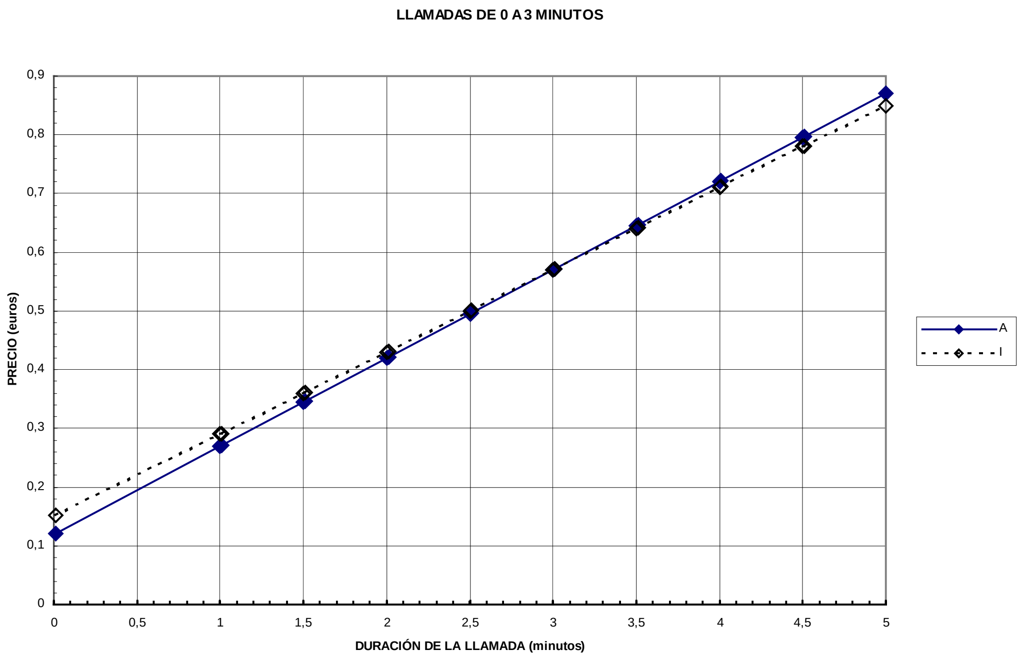


GRÁFICO 11

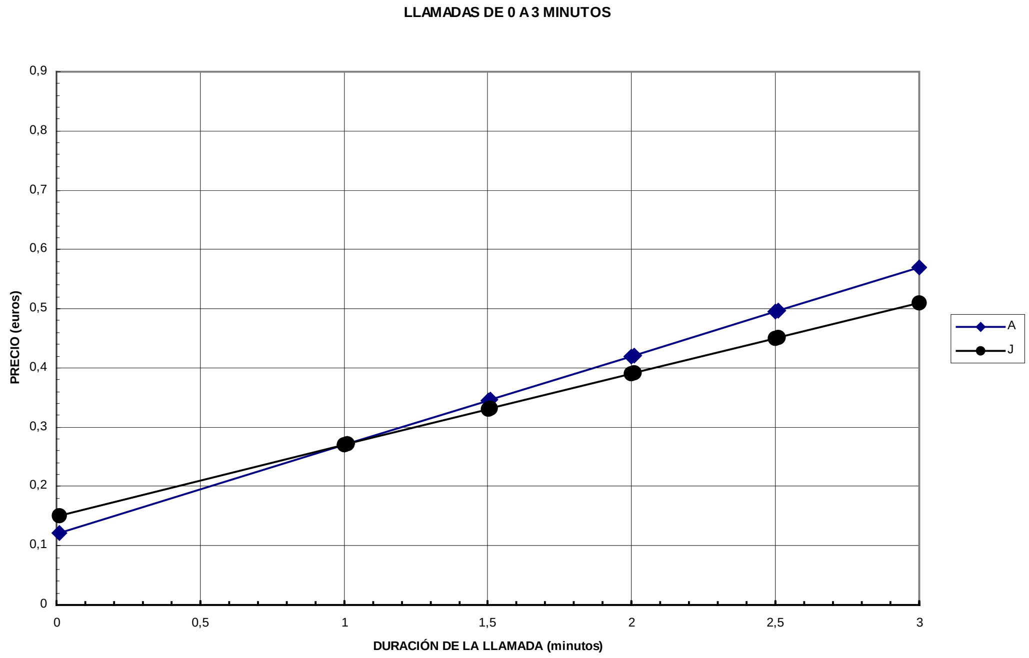


GRÁFICO 12

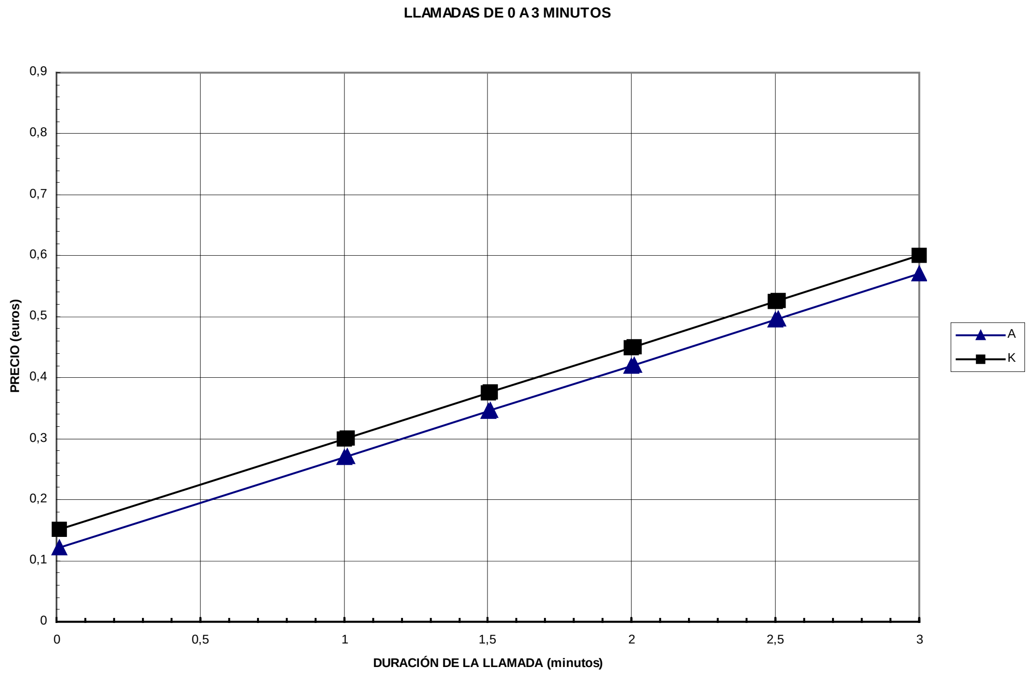


GRÁFICO 13

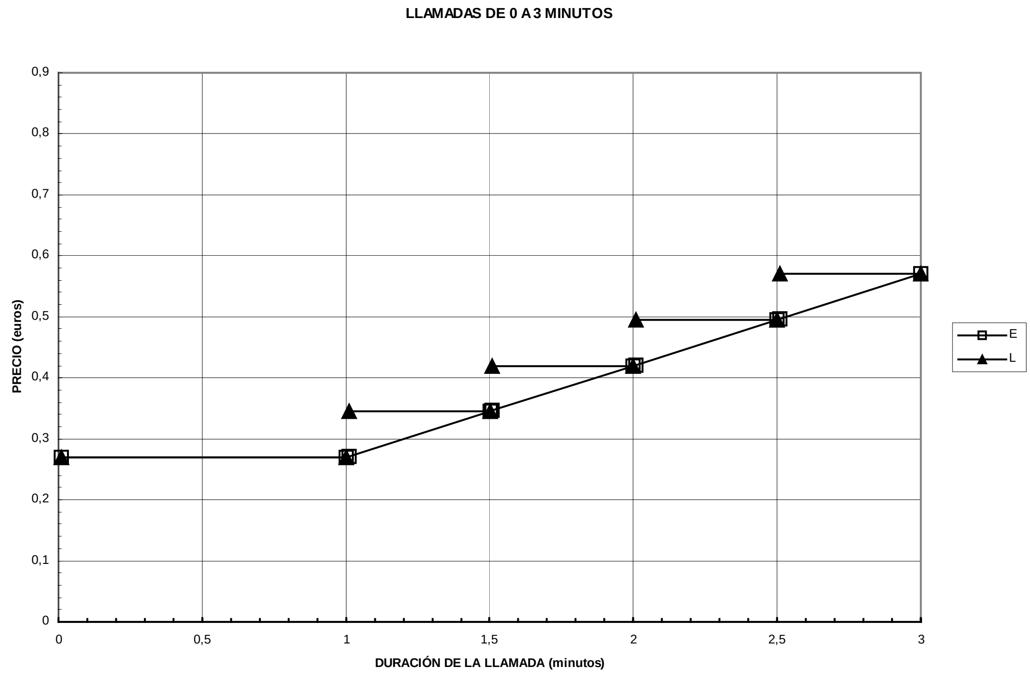


GRÁFICO 14

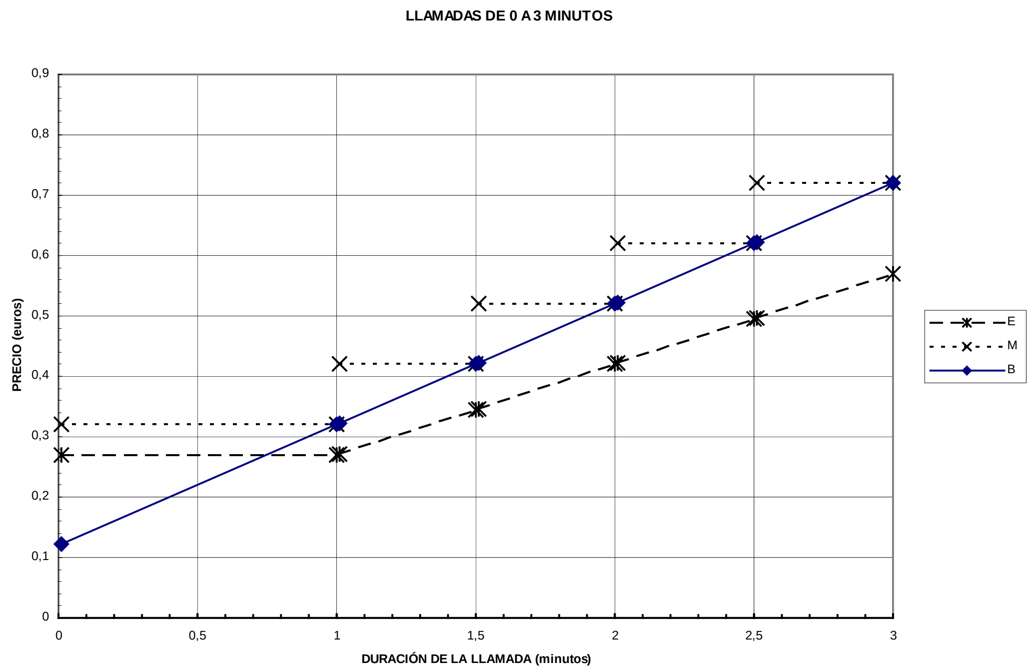


GRÁFICO 15

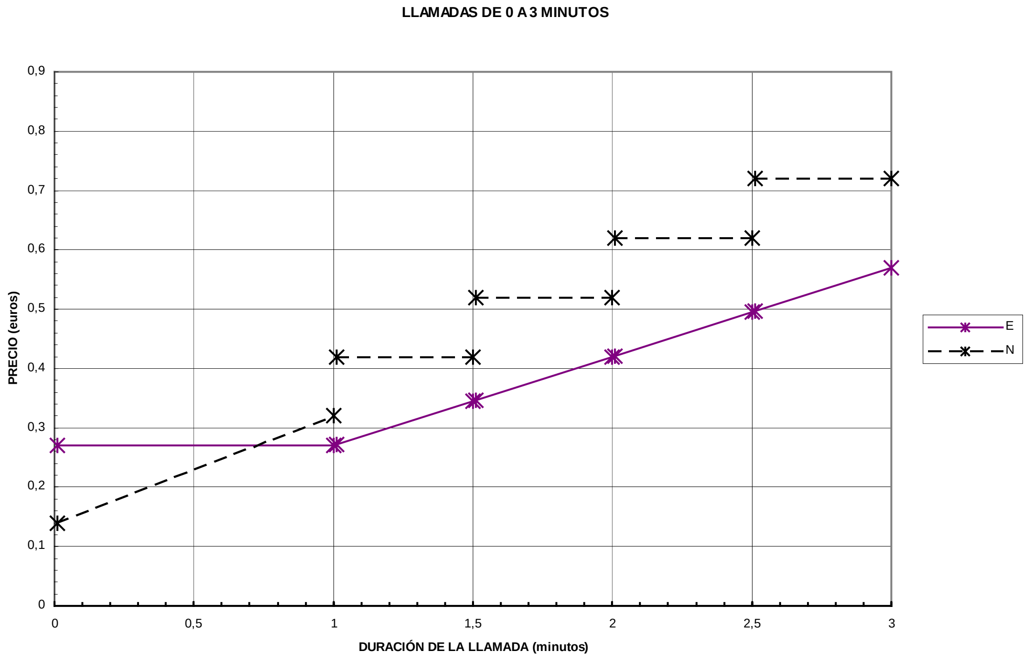


GRÁFICO 16

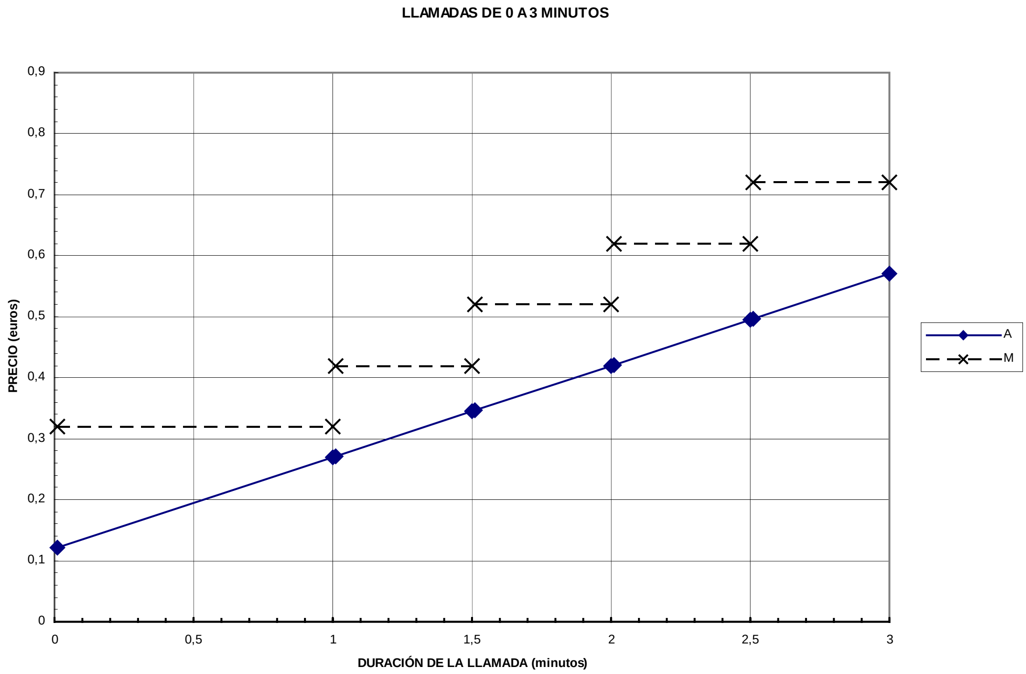


GRÁFICO 17

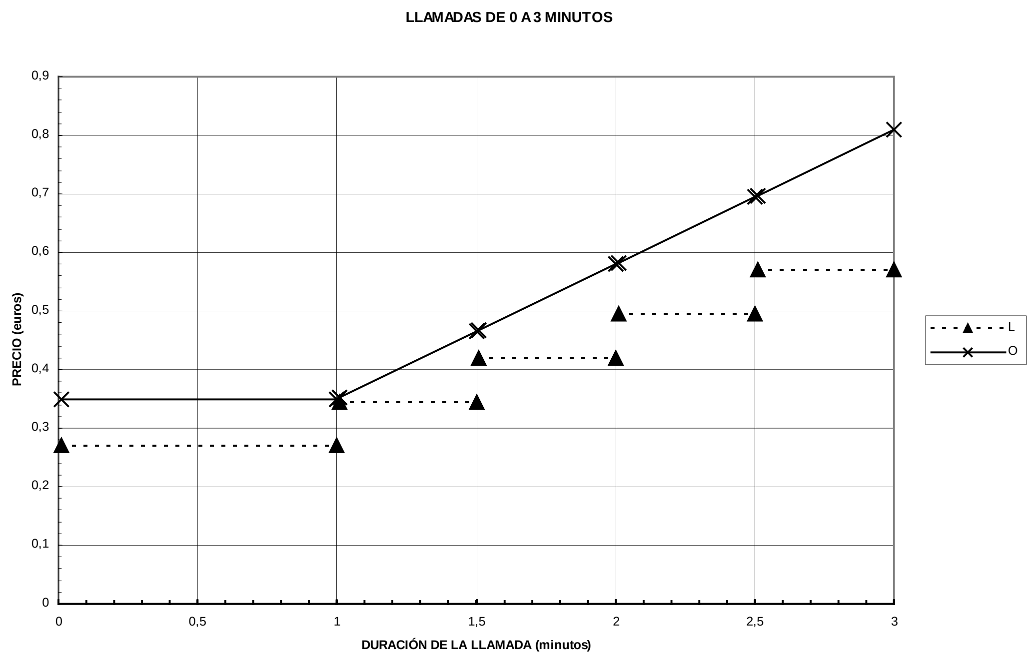


GRÁFICO 18

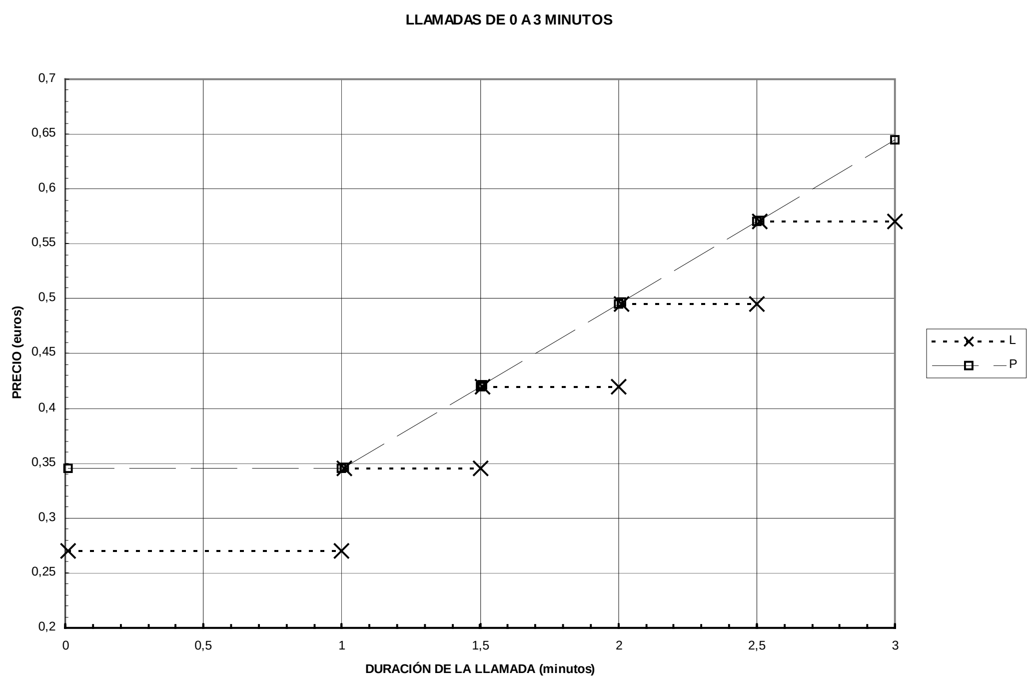


GRÁFICO 19

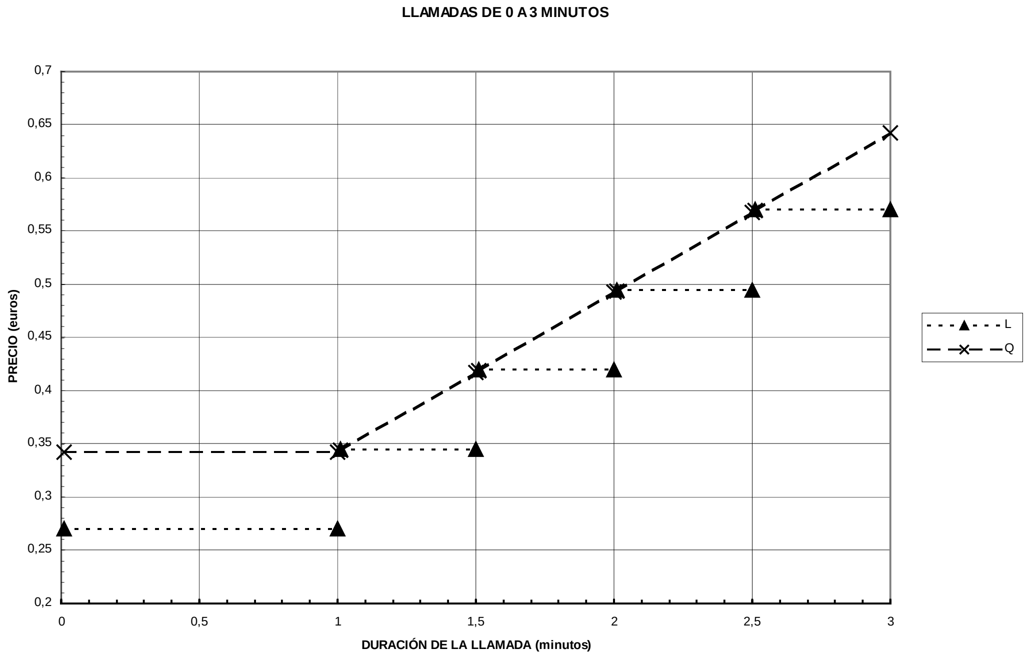


GRÁFICO 20

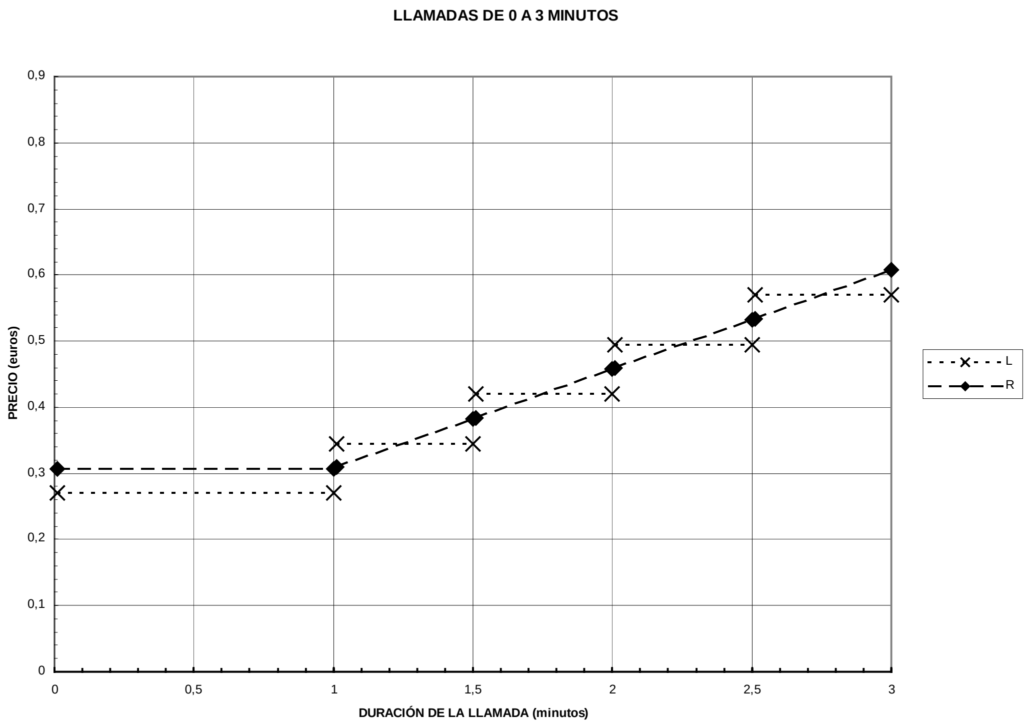


GRÁFICO 21

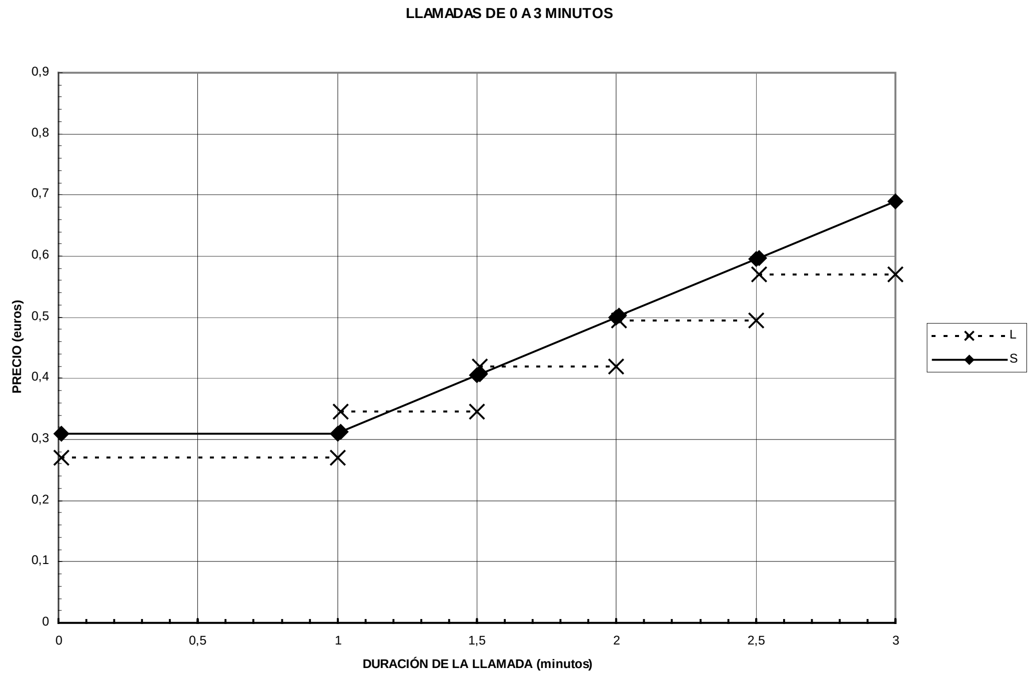


GRÁFICO 22

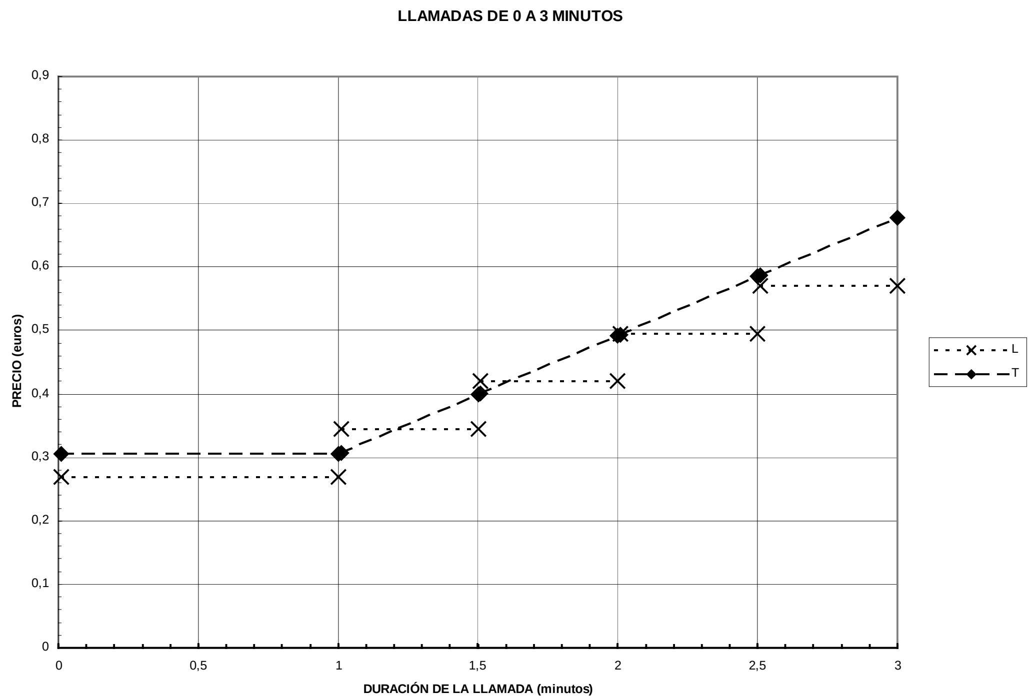


GRÁFICO 23

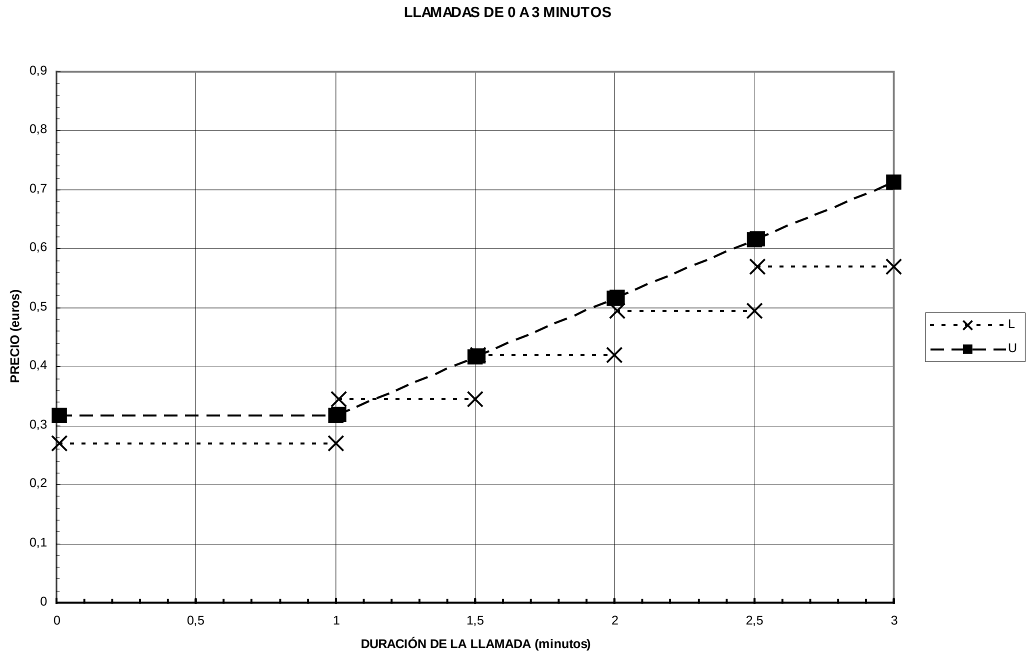
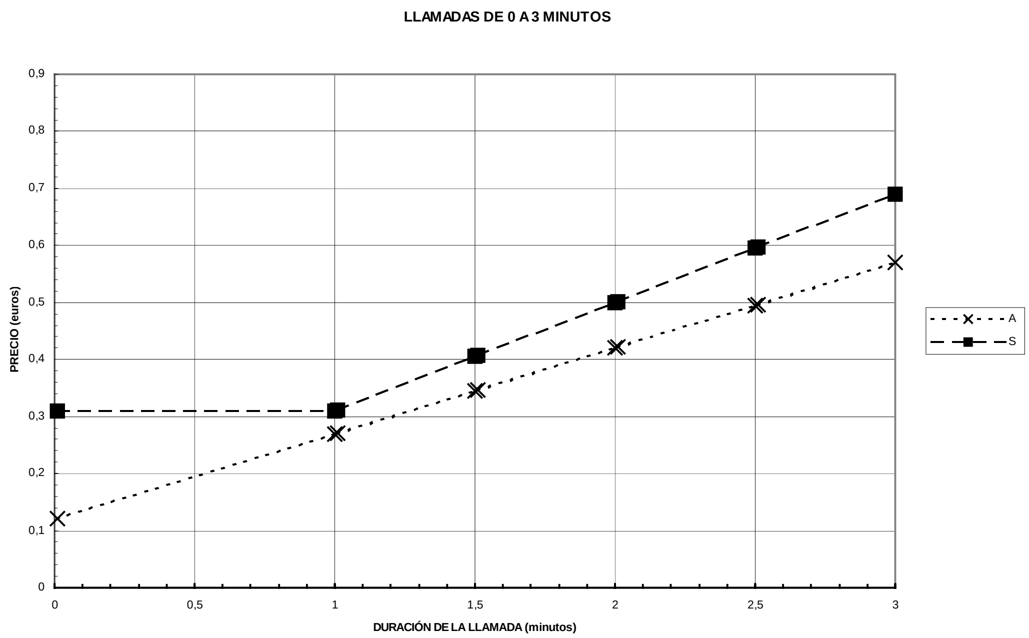


GRÁFICO 24 (añadido durante la Décima sesión porque no había ejemplos de la conclusión 9b)



MATERIAL 6. Hoja de cálculo de Excel de datos de “picos de llamadas”

Total llamadas	Llamadas de pico distinto de 00 y 30	Llamadas de pico 00 o 30	Porcentaje de llamadas distinto 00 o 30	Porcentaje de llamadas 00 o 30
13	3	10	23,07692308	76,92307692
82	39	43	47,56097561	52,43902439
89	26	63	29,21348315	70,78651685
52	21	31	40,38461538	59,61538462
59	30	39	50,84745763	49,15254237
38	18	20	47,36842105	52,63157895
83	38	45	45,78313253	54,21686747
88	35	53	39,77272727	60,22727273
81	50	31	61,72839506	38,27160494
84	45	39	53,57142857	46,42857143
46	26	20	56,52173913	43,47826087
73	32	41	43,83561644	56,16438356
79	51	28	64,55696203	35,44303797
42	22	20	52,38095238	47,61904762
61	40	21	65,57377049	34,42622951
58	30	28	51,72413793	48,27586207
44	23	21	52,27272727	47,72727273
48	23	35	47,91666667	52,08333333
56	26	30	46,42857143	53,57142857
57	25	32	43,85964912	56,14035088
54	28	26	51,85185185	48,14814815
59	32	27	54,23728814	45,76271186
67	33	34	49,25373134	50,74626866
71	45	26	63,38028169	36,61971831
66	31	35	46,96969697	53,03030303
37	20	17	54,05405405	45,94594595
23	13	10	56,52173913	43,47826087
57	28	29	49,12280702	50,87719298
52	18	34	34,61538462	65,38461538
65	31	34	47,69230769	52,30769231
33	18	15	54,54545455	45,45454545
42	19	23	45,23809524	54,76190476
6	4	2	66,66666667	33,33333333
77	40	37	51,94805195	48,05194805
60	36	24	60	40
74	36	38	48,64864865	51,35135135
81	44	37	54,32098765	45,67901235
66	30	36	45,45454545	54,54545455
33	17	16	51,51515152	48,48484848
total	total distinto 00 o 30	total de 00 o 30	porcentaje medio llamadas distinto 00 o 30	porcentaje medio llamadas 00 o 30
2256	1126	1150	**50,0106435**	**49,9893565**

Total llamadas	2256
total distinto 00 o 30	1126
total de 00 o 30	1150
% llamadas distinto 00 o 30	**49,911**
% llamadas 00 o 30	**50,975**

MATERIAL 7. Hoja de cálculo de Excel para la comparación de tarifas de telefonía móvil

INSTRUCCIONES COMUNES PARA COMPARACIÓN DE TARIFAS CONTRATO Y DE TARIFAS TARJETA

INSTRUCCIONES

Este trabajado ha sido elaborado con los datos de las tarifas del año 2005. Os aconsejamos que consultéis con las compañías para conocer datos adicionales, como módulos especiales, tales como números frecuentes, dado que aquí se consideran los precios generales y no la combinación con módulos especiales. Por ejemplo, si una persona tiene una serie de números a los que puede llamar más barato (posibilidad que ofrecen todas las compañías), ese dato no se tiene en cuenta en este cálculo.

El programa ha sido elaborado para permitir que una persona pueda saber a cuánto ascendería el gasto mensual que tendría, en función del uso que hace del teléfono, con las diferentes tarifas existentes en cada una de las compañías (MoviStar, Vodafone y Amena), pero también se puede saber, por ejemplo, cuál es el precio por minuto para un tipo de receptor en un horario determinado, con cada una de las tarifas.

Para conocer cuánto se pagaría mensualmente con cada tarifa, se debe indicar, para cada franja horaria y cada tipo de receptor, la duración total de las llamadas (t) y el número de llamadas (n) que se realizan mensualmente.

Se pueden introducir sólo los datos relativos a una franja horaria y a un tipo de receptor si es ése el precio que interesa conocer. Lo que no se debe olvidar es que siempre se deben introducir los datos t y n emparejados; es decir, en todos aquellos casos donde se introduzca la cantidad de tiempo hablado (t) se debe indicar también el número de llamadas en que se completa ese tiempo hablado (n). Por ejemplo, si se quiere saber cuál es el precio de una llamada de dos minutos realizada a las 19:00h a un teléfono fijo nacional, se deberá introducir t = 2, n = 1 en los espacios correspondientes, y se sabrá cuál es el precio que costaría con cada tarifa de cada compañía. Y si se quisiera saber el precio de un minuto, sería igual pero con t = 1.

También se debe indicar la duración aproximada de las llamadas que se realizan, en caso de que sea ésta superior a 2 minutos, ya que hay tarifas que tienen precios especiales para llamadas con duración superior a 3 minutos.

COMPARACIÓN DE TARIFAS CONTRATO

TARIFAS CONTRATO (1)

	Movistar				Vodafone			
	Laborables		S, D y Festivos		Laborables		S, D y Fest	
	t	n	t	n	t	n	t	n
0h-8h								
8h-11h								
11h-13								
13h-14								
14h-16								
16h-17								
17h-19								
19h-21								
21h-22								
22h-24								

Número de mensajes enviados al mes:	4

	Amena				Fijos nacionales			
	Laborables		S, D y Festivos		Laborables		S, D y Fest	
	t	n	t	n	t	n	t	n
0h-8h								
8h-11h	36	12						
11h-13								
13h-14								
14h-16								
16h-17	33	6						
17h-19								
19h-21								
21h-22								
22h-24								

Duración aproximada de las llamadas (en minutos): SOLO RELLENAR si la duración aproximada es superior a 2 minutos	3

	Minutos que supera a dos minutos la llamada:		1
	Minutos que son gratis en cada llamada con 3x2:		1
		%:	0,3333
TOTAL Est llamada y mensajes:	2,76		
			%
Min. caros en cada llamada en Decreciente:		1	0,3333333
Min. baratos en cada llamada Decreciente:		2	0,6666667

TARIFAS CONTRATO (2)

Precios a pagar según compañía y tipo de contrato:

€ por establecimiento llamada	0,12
€ por mensaje	0,15

		TOTAL PRECIO (en €)					
Movistar		**Sin IVA**	**Con IVA**	**Euros/min**			
	Plus24h	15,18	**17,61**	0,18			
	Plus elección mañana	33,81	**39,22**	0,07	0,2	0,12	0,45
	Plus elección tarde	7,59	**8,80**	0,07	0,2	0,12	0,45
	Plus familia XL	13,8	**16,01**	0,16			
	Plan 30	13,11	**15,21**	0,15			
	Plan 40	12,42	**14,41**	0,14			
	Plan 60	11,73	**13,61**	0,13			
	Plan 90	10,35	**12,01**	0,11			
Vodafone							
	Universal 25	16,2975	**18,91**	0,19			
	Universal 40	12,735	**14,77**	0,14			
	Universal 60	12,0225	**13,95**	0,13			
	Mañana	21,8475	**25,34**	0,06	0,3	0,1	0,45
	Tarde	34,8225	**40,39**	0,06	0,3	0,1	0,45
	Contrato Decreciente (sin llamadas de duración superior a 2 min)	16,56	**19,21**	0,2	0,1		
	Contrato Decreciente (con llamadas de duración superior a 2 min)	12,685	**14,71**	0,2	0,1		
	Provincial	-	**-**	No analizada			
Amena							
	Libre	17,25	**20,01**	0,21			
	Libre 18	15,18	**17,61**	0,18			
	Libre 30	13,11	**15,21**	0,15			
	Libre 50	11,73	**13,61**	0,13			
	Mis horas mañana	23,01	**26,69**	0,06	0,2	0,45	
	Mis horas tarde	33,81	**39,22**	0,06	0,2	0,45	
	Contrato Joven mañana	28,98	**33,62**	0,08	0,1	0,38	
	Contrato Joven tarde	28,98	**33,62**	0,08	0,1	0,38	
	Contrato 3x2 mañana	16,26	**18,86**	0,06	0,2	0,45	
	Contrato 3x2 tarde	23,46	**27,21**	0,06	0,2	0,45	

TARIFAS CONTRATO (3)

Modalidad de cobro:

			MODO DE COBRAR		
Movistar		**CMM**	**1er minuto**	**Resto**	**GASTOS DE ACTIVACIÓN**
	Plus24h	9	Completo	Por sg.	1ª línea: 21'03 €; 2ª y ss: gratis
	Plus mañana	9	Completo	Por sg.	1ª línea: 21'03 €; 2ª y ss: gratis
	Plus tarde	9	Completo	Por sg.	1ª línea: 21'03 €; 2ª y ss: gratis
	Plus familia XL	12	Completo	Por sg.	1ª línea: 21'03 €; 2ª y ss: gratis
	Plan 30	30	Completo	Por sg.	1ª línea: 21'03 €; 2ª y ss: gratis
	Plan 40	40	Completo	Por sg.	1ª línea: 21'03 €; 2ª y ss: gratis
	Plan 60	60	Completo	Por sg.	1ª línea: 21'03 €; 2ª y ss: gratis
	Plan 90	90	Completo	Por sg.	1ª línea: 21'03 €; 2ª y ss: gratis
Vodafone					
	Universal 25	25	Completo	Por sg.	1ª línea: 21 €; 2ª y ss: gratis
	Universal 40	40	Completo	Por sg.	1ª línea: 21 €; 2ª y ss: gratis
	Universal 60	60	Completo	Por sg.	1ª línea: 21 €; 2ª y ss: gratis
	Mañana	9	Completo	Por pasos de 30 sg.	1ª línea: 21 €; 2ª y ss: gratis
	Tarde	9	Completo	Por pasos de 30 sg.	1ª línea: 21 €; 2ª y ss: gratis
	Decreciente (< 2min)	9	Completo	Por pasos de 30 sg.	1ª línea: 21 €; 2ª y ss: gratis
	Decreciente (> 2 min)	9	Completo	Por pasos de 30 sg.	1ª línea: 21 €; 2ª y ss: gratis
	Provincial	9	Completo	Por pasos de 30 sg.	1ª línea: 21 €; 2ª y ss: gratis
Amena					
	Libre	6	Completo	Por sg.	1ª línea: 21'04 €; 2ª ss: gratis
	Libre 18	18	Completo	Por sg.	1ª línea: 21'04 €; 2ª y ss: gratis
	Libre 30	30	Completo	Por sg.	1ª línea: 21'04 €; 2ª y ss: gratis
	Libre 50	50	Completo	Por sg.	1ª línea: 21'04 €; 2ª y ss: gratis
	Mis horas mañana	6	Completo	Por sg.	1ª línea: 21'04 €; 2ª y ss: gratis
	Mis horas tarde	6	Completo	Por sg.	1ª línea: 21'04 €; 2ª y ss: gratis
	Contrato Joven mañana	3	Completo	Por sg.	1ª línea: 21'04 €; 2ª y ss: gratis
	Contrato Joven tarde	9	Completo	Por sg.	1ª línea: 21'04 €; 2ª y ss: gratis
	Contrato 3x2 mañana	9	Completo	Por sg.	1ª línea: 21'04 €; 2ª y ss: gratis
	Contrato 3x2 tarde	9	Completo	Por sg.	1ª línea: 21'04 €; 2ª y ss: gratis

COMPARACIÓN TARIFAS TARJETA

TARIFAS TARJETA (1)

Entrada de datos:

	Movistar						Vodafone					
	Laborables		Sábados		Domingos y Festivos		Laborables		Sábados		Domingos y Festivos	
	t	n	t	n	t	n	t	n	t	n	t	n
0h-4h												
4h-6h												
6h-8h							30	30				
8h-16h												
16h-24h												

Número de mensajes enviados al mes	5

	Amena						Fijos nacionales					
	Laborables		Sábados		Domingos y Festivos		Laborables		Sábados		Domingos y Festivos	
	t	n	t	n	t	n	t	n	t	n	t	n
0h-4h												
4h-6h												
6h-8h												
8h-16h												
16h-24h												

Duración aprox de la llamada (minutos): SOLO RELLENAR si es superior a 2 min.	3	TOTAL suma cargo por establecimiento de llamadas y mensajes	4,35

Al mes:

Número de llamadas realizadas al día a Vodafone y fijos nacionales:	1	30	30	0
Número de llamadas realizadas al día a operadores distintos de Vodafone:	0	0	0	0

Suma de llamadas que has indicado realizar en la tabla a Vodafone y fijos nacionales:	30
Suma de llamadas que has indicado realizar en la tabla a Vodafone y fijos nacionales:	0

Minutos que supera a dos minutos la llamada:	1
Minutos que son gratis en cada llamada con 3x2:	1
%:	0,333

TARIFAS TARJETA (2)

Precios a pagar según compañía y tipo de contrato:

€ por establecimiento llamada	0,12
€ por mensaje	0,15

		PRECIO		Euros/min			
		Sin IVA	Con IVA				
Movistar:	**Activa Total**	20,55	**23,84**	0,21	0,48		
	Activa Club	20,55	**23,84**	0,12	0,48		
	Activa Tu Tiempo	8,40	**9,74**	0,12	0,48	0,12	
	Activa 24 horas	14,48	**16,79**	0,3			
	Activa Cuatro	22,91	**26,58**	0,15	0,55		
Vodafone	**Tiempo Libre**	24,26	**28,14**	0,59	0,12		
	Autorecargable	13,80	**16,01**	0,28			
	Decreciente	14,10	**16,36**	0,2	0,1	0,5	0,25
Amena	**Dúo**	14,48	**16,79**	0,3			
	3x2	11,48	**13,31**	0,3			
	Joven	6,38	**7,40**	0,06	0,12	0,8	
	Ocio	8,40	**9,74**	0,72	0,12		

TARIFAS TARJETA (3)

Modalidad de cobro:

			MODO DE COBRAR		
Movistar:		**CMM**	**1er minuto**	**Resto**	**Gastos activación**
	Activa Total	0	Completo	30 sg.	0
	Activa Club	0	Completo	30 sg.	0
	Activa Tu Tiempo	0	Completo	30 sg.	0
	Activa 24 horas	0	Completo	30 sg.	0
	Activa Cuatro	0	Completo	30 sg.	0
Vodafone					
	Tiempo Libre	0	Completo	30 sg.	0
	Autorecargable	0	Completo	30 sg.	0
	Decreciente	0	Completo	30 sg.	0
Amena					
	Dúo	0	Completo	30 sg.	0
	3x2	0	Completo	30 sg.	0
	Joven	0	Completo	30 sg.	0
	Ocio	0	Completo	30 sg.	0

MATERIAL 8. Respuestas a la "cuestión generatriz" hasta la décima sesión

RESPUESTA A LA CUESTIÓN GENERATRIZ

1ª SESIÓN

1) El precio de una llamada se puede calcular con la fórmula: $\boldsymbol{P_A = e + pt}$

   P_t = Precio de la llamada (de una duración t)
   e = Precio por establecimiento de llamada.
   p = Precio por minuto; t = Duración de la llamada.
   * Primero pusieron P_A, pero finalmente decidieron llamarlo P_t.

2) Si dos compañías tienen el mismo precio por establecimiento de llamada y diferente precio por minuto, es más cara aquella cuyo precio por minuto es mayor.

3) Si dos compañías tienen el mismo precio por minuto pero diferente precio por establecimiento de llamada, es más cara aquella cuyo precio por establecimiento de llamada es mayor.

4) Podemos calcular el precio de las llamadas de una compañía conocido el precio de esas llamadas de otra compañía con diferente precio por minuto o diferente precio por establecimiento de llamada. Las fórmulas son:

   Para diferente precio por establecimiento de llamada pero igual precio por minuto: $\boldsymbol{P_A = P_B + (p_A - p_B)}$

   P_A: Precio de la llamada en la compañía cuyo precio por establecimiento de llamada es mayor.
   P_B: Precio de la llamada en la compañía cuyo precio por establecimiento de llamada es menor.
   p_A: Precio por establecimiento de llamada de la compañía A.
   p_B: Precio por establecimiento de llamada de la compañía B.

   Para diferente precio por minuto pero igual precio por establecimiento de llamada: $\boldsymbol{P_A = P_B + (p_A - p_B)t}$

   P_A: Precio de la llamada en la compañía cuyo precio por minuto es mayor.
   P_B: Precio de la llamada en la compañía cuyo precio por minuto es menor.
   p_A: Precio por minuto de la compañía A.
   p_B: Precio por minuto de la compañía B.

2ª SESIÓN

5) Roberto trajo un documento de Internet que exponía la dificultad que implica comparar tarifas de teléfonos móviles. Dijimos que íbamos a buscar más información, pero dicen que no han podido porque los datos de las compañías y hacer las tablas les ha quitado mucho tiempo. De hecho, han estado en contacto unos con otros para plantearse y resolver dudas.

6) Dificultad en concretar el problema. Derivado de que vimos que, en Internet, dos de las compañías ofrecen un asesor de tarifas, pero es dudosa la confianza que se puede depositar, primero porque no sabemos cómo lo concluyen, segundo porque siempre tras el consejo ponen una nota diciendo que el dato es para un consumidor tipo estándar, que no es algo que puedan confirmar... Eso derivó en pensar sobre el tipo de respuesta que podíamos dar nosotros. Todos estábamos de acuerdo en que este modo de aconsejar primero, ya existe, y segundo no nos parece el más adecuado. Concluimos que vamos a comenzar por comparar tarifas semejantes en las diferentes compañías y luego iremos viendo qué pasos podemos-debemos ir dando.

7) Influencia de cobrar o no el primer minuto completo.

    a. En caso de igualdad en el resto de variables, es más barata, hasta la duración de un minuto, la tarifa que cobra el primer minuto por segundos. La gráfica nos ayudó a ver esta relación, confirmándonos lo que habíamos deducido sin necesidad de la gráfica.

b. En caso de dos compañías con igual precio por establecimiento de llamada pero diferente precio por minuto y una cobra el primer minuto completo y la otra no:

    i. Si la que cobra el primer minuto completo es además la más cara, es más cara para cualquier duración de llamada. Gráficamente (precio por duración de llamada) vimos que se observa que la más cara siempre queda por encima de la más barata.

    ii. Si la que cobra el primer minuto completo es la más barata, entonces la comparación se complica. A partir del primer minuto podemos deducir que la que cobra más por minuto es más cara, pero ¿qué ocurre con las llamadas de duración inferior a un minuto? Entonces es necesaria la gráfica, ya que nos permite observar si hay un cruce entre las gráficas de las tarifas. También podría hacerse con cálculos numéricos, pero es más complicado y además es más fácil que lleve a error (como vimos: porque si no te das cuenta de que una es una función por partes crees que no se cruzan). La gráfica te da pistas de si se cruzan o no y de en qué punto más o menos.

8) El precio mínimo de una llamada con una tarifa que cobra por segundos es el precio de un segundo más el establecimiento de llamada.

9) El precio mínimo de una llamada que cobra el primer minuto completo es el precio de un minuto más el establecimiento de llamada.

10) El precio máximo de una llamada es infinito.

11) Vimos la importancia de considerar las unidades que estamos utilizando. En concreto, cuando concluimos que el punto de corte estaba en 0'75, y eran minutos, no segundos.

12) Repasamos cómo se transforman los minutos a segundos.

13) Vimos la importancia de responder del modo más concreto y real a la pregunta que hayamos planteado. En concreto, cuando dedujimos el punto de corte de las dos tarifas de cobro de primer minuto completo o no y diferente precio por minuto, siendo la más cara la que cobra el primer minuto completo, vimos qué características tenía la respuesta más adecuada a la pregunta: que habla en segundos, en vez de en 0'xx minutos, porque es más fácilmente comprensible, que indica qué dos compañías está comparando (sus características), que habla de "tiempo de duración de la llamada", porque es la variable determinante, que no dice que "las gráficas son más baratas" ni "más caras", sino las compañías, que especifica qué ocurre tanto antes como después y exactamente en el punto o puntos críticos.

14) Finalmente comenzamos a organizar la planificación de las tablas de datos y fuimos modificando dicha planificación. Esto ocurrió porque iban surgiendo cuestiones, dificultades... que no habíamos tenido en cuenta o que ni siquiera podríamos haber tenido en cuenta porque surgieron tras comenzar a trabajar. La planificación inicial es importante, pero no es definitiva, sino que se debe ir adaptando a medida que se avanza en el proceso. Además, se deben analizar las causas de las modificaciones de las planificaciones previas para aprender para las siguientes.

15) Surgieron gran cantidad de variables.

16) Hoy hemos visto que encontrar todos los datos reales sobre tarifas es complicado.

17) Organizar bien los datos es importante y también difícil. Hay que decidir cómo organizarlo (decidimos en tablas), qué filas poner (cada tarifa), qué columnas (qué datos). La información debe estar organizada, si es posible, igual, sobre las diferentes compañías para facilitarlas compararlas después. La organización inicial la fuimos modificando en función de lo que íbamos obteniendo. Las conclusiones se pueden observar viendo las tablas definitivas.

18) Ahora que tenemos todos los datos, iremos analizando las diferentes variables que influyen y comparando las diferentes tarifas.

3ª SESIÓN

19) En la descripción de las características de las diferentes tarifas, es útil, para reducir el espacio que ocupan los datos, "sacar fuera" los datos que son iguales en todas las tarifas de un determinado tipo.

20) No tendremos en cuenta los módulos en la comparativa, por el momento, porque suelen ser temporales y además de características muy diferentes que hacen la comparación muy difícil e incluso prácticamente imposible. Parece que se reparten el pastel para no caer en competencia. Esto no ocurre tanto en las tarifas generales seguramente porque no tienen tantas variables libres para manipular, pero sí parece curioso que, en vez de para competir bajar los precios por minuto, por ejemplo, lo que hagan sea ofrecer tarifas de nuevos tipos (como 3x2, decreciente...) o de nuevas características. Un alumno explica que quizá no bajan los precios de las tarifas ya existentes porque lo que intentan es "captar" nuevos consumidores y bajar el precio de una tarifa que ya tienen muchos seguramente obliga a la compañía a bajárselo a todos (también a los que la tenían antes de la rebaja).

21) Algunas compañías omiten (o al menos no explicitan claramente) algunos datos, y entre ellos algunos, como el cobrar Vodafone por pasos de 30 segundos en algunos contratos, que llevan al consumidor a un error (creen que cobran por segundos) que favorece a la empresa. Pero también se omite información que sí favorece a las ventas de la empresa, como el indicar que no se cobra por escuchar los mensajes de voz.

22) Existirían formas mucho más claras de exponer la información (como tablas semejantes a las que hemos elaborado) que no se sabe por qué

no las utilizan, aunque parece lógico pensar que es para confundir y sacar provecho de ello. En esta tabla, además, sería conveniente especificar también cuando algo es gratuito, en vez de omitir la información, para no llevar a error. Es decir, el hecho de que, en general, cuando se omite un dato pensemos que es gratuito (porque si no tendrían que ponerlo), que es lo que ocurre normalmente, lleva a que luego, si algún dato se omite, pensemos que es el más beneficioso para el consumidor también, y luego ocurre en ocasiones que no.

23) Para facilitar la comparativa de tarifas también es muy útil unificar las unidades en que se definen los datos, así como el modo en que se organizan los precios para diferentes receptores y horarios.

24) También parece conveniente unificar criterios sobre exposición de los diferentes datos de modo que ocupen menos espacio (por ejemplo, utilizar dos dígitos para marcar horarios, o utilizar guión para indicar hasta qué horario, o las siglas del dato, como S,D para sábado y domingo), o para que sepamos que nos referimos a los mismos datos (por ejemplo, utilizar "S,D" para sábados y domingos en vez de "FS" o fin de semana).

25) El precio por minuto, dentro de cada compañía, depende del receptor y del horario.

26) Si una compañía cobra un precio X por minuto y un precio Y por establecimiento de llamada y otra el precio Y por minuto y el precio X por establecimiento de llamada (cobrando ambas el primer minuto completo), ambas costarán lo mismo para llamadas de duración igual inferior o igual a un minuto, mientras que para llamadas de duración superior a un minuto será más cara la compañía en la que el precio por minuto es mayor que el precio por establecimiento de llamada.

* Un alumno preguntar qué ocurriría si cobraran ambas el primer minuto por segundos. Les dice el profesor que lo harán tras finalizar la síntesis de respuestas a la cuestión tras el trabajo del día anterior.

27) Si dos compañías cobran el mismo precio por minuto pero diferente precio por establecimiento de llamada (ambas el primer minuto completo) es más cara, para cualquier duración de llamada, aquella compañía en la que el precio por establecimiento de llamada es mayor. Además, gráficamente vimos que la diferencia entre las gráficas era constante (las líneas de sus gráficas son paralelas) y llegamos a la conclusión de que el valor de esa diferencia constante es igual a la diferencia entre las dos compañías en el precio por establecimiento de llamada, y esto es porque el precio por minuto es lo que difiere y este se añade siempre completo, para cualquier duración de llamada.

* El mismo alumno plantea que también podríamos averiguar qué ocurriría en este caso si ambas cobraran el primer minuto por segundos. También lo haremos.

28) Si dos compañías cobran diferente precio por establecimiento de llamada y diferente precio por minuto (cobrando ambas el primer minuto completo), utilizar sus gráficas es fundamental para saber si sus gráficas se cruzan, dándonos además una idea de en qué punto se cruzan (como son rectas, sólo pueden cruzarse una vez). Resulta que la diferencia de precios se debe en parte a la diferencia en el precio por minuto y en parte a la diferencia en el precio por establecimiento de llamada: la diferencia por establecimiento de llamada es constante, mientras que la diferencia debida al precio por minuto varía.

* Varios alumnos plantean que podríamos hallar también en este caso que ocurriría si ambas cobraran por segundos, pero algunos les recordaron

que ese caso ya lo habíamos visto el día anterior y que de hecho hoy teníamos que sacar conclusiones sobre lo que hicimos.

29) Si dos compañías cobran diferente precio por establecimiento de llamada y diferente precio por minuto (cobrando ambas el primer minuto por segundos), resulta que para llamadas de duración inferior a un minuto se sigue cumpliendo la tendencia que viniera de antes. Esto es lógico porque se trata de rectas y no pueden volver a cruzarse.

4º SESIÓN

30) Si una compañía cobra un precio X por minuto y un precio Y por establecimiento de llamada y otra el precio Y por minuto y el precio X por establecimiento de llamada (cobrando ambas el primer minuto por segundos), para llamadas de duración superior a un minuto será más cara la compañía en la que el precio por minuto es mayor que el precio por establecimiento de llamada, mientras que para llamadas de duración inferior a un minuto será más cara la compañía en la que el precio por establecimiento de llamada es mayor.

31) Si dos compañías cobran el mismo precio por minuto pero diferente precio por establecimiento de llamada (ambas cobran el primer minuto por segundos) es más cara, para cualquier duración de llamada, aquella compañía en la que el precio por establecimiento de llamada es mayor. Además, gráficamente vimos que la diferencia entre las gráficas era constante y llegamos a la conclusión de que el valor de esa diferencia constante es igual a la diferencia entre las dos compañías en el precio por establecimiento de llamada, y esto es porque el precio por minuto es lo que difiere y este se añade siempre completo, para cualquier duración de llamada. Podemos concluir por tanto que la diferencia de precios es la misma y constante cobren las compañías el primer minuto completo o no, en lo único que difiere es en que cuando cobran el primer minuto por segundos ambas son más baratas.

5ª SESIÓN (y parte de la sexta): ANÁLISIS DE DOCUMENTOS Y RESPUESTAS A LA CUESTIÓN EN INTERNET

Los modos de repuesta que hemos encontrado en Internet o en las mismas compañías de telefonía móvil a la cuestión de elegir la tarifa más barata no nos satisfacen. Las propuestas de respuesta que planteamos son:

32) Los precios de la llamada con cada tarifa, considerando también la duración y no sólo dando por separado los diferentes datos de cada tarifa sino dando un precio final.

   i. Considerar la duración de la llamada es importante para que se vea la influencia del modo de facturación (pasos de 30 segundos o por segundos).

   ii. Dar un precio final es importante porque si no la persona tendría que calcularlo y entonces no tendría éxito.

   iii. Que el precio final incluya el precio por establecimiento de llamada, es importante porque, aunque es un dato igual en todas las tarifas, incluirlo cuesta poco trabajo y a cambio la persona recibe un dato real de lo que le costaría esa llamada.

   * Hubo un poco de dificultad de acuerdo a este respecto porque algunos alumnos decían que nuestro objetivo es comparar tarifas, y por tanto los datos iguales en todas ellas, dado que no van a diferenciar entre tarifas, no es necesario tenerlos en cuenta. Pero finalmente les convencen otros alumnos que defienden que ya que estamos haciendo este trabajo, por poco más podemos de paso dar para cada tarifa un precio lo más realista posible y seguro que así lo ven más interesante las personas que entren en la página web.

El profesor resume entonces que nos interesa tanto la comparación como la exactitud (realidad) de los datos a comparar.

iv. Dar el dato (el precio por duración de la llamada) de todas las tarifas (y no sólo de la más barata y la más cara o de algunas de ellas). Es importante para que la persona pueda elegir la tarifa considerando, si quiere, otras variables. Puede decidir, por ejemplo, si hay poca diferencia entre dos tarifas, coger una porque tenga más amigos que la tienen o porque tienen más cobertura, o porque no le valga la pena por la diferencia cambiar de compañía...

33) El precio mensual con cada tarifa. Esta propuesta se considera más adecuada pero también parece muy complejo abarcarla o poco útil según cómo se concrete:

A) Que las personas nos digan primero el tipo de llamadas que realizan (calcular el precio de una llamada como en la opción anterior, teniendo en cuenta todos los datos, incluidas la duración de cada llamada) y luego multiplicar cada tipo de llamada que realiza por el número de veces que las realiza al mes.

Esta opción parece poco útil porque realizamos muy diferentes tipos de llamadas y es muy complejo que la persona sepa e indique cuántas llamadas realiza de cada tipo.

* Hay que notar que esta propuesta implica que la persona primero indique todos los tipos de llamada que realiza (diferenciando además por duraciones de las mismas), lo que puede implicar calcular el precio para un montón de llamadas de diferentes características y luego debe decir además cuántas realiza de cada tipo.

B) Considerar clientes tipo. Pero esta opción parece menos útil aún, porque creen que realmente o eres un cliente tipo o no es válido para ti.

C) Estamos buscando qué datos necesitaríamos pedir a una persona para poder averiguar su factura mensual sin que fuera de ninguno de los dos modos planteados anteriormente.

34) Queremos colgar la propuesta final en una página web. Esto implica que no bastará con que una persona nos dé datos a nosotros y nosotros calculemos qué tarifa le conviene más, sino que deberíamos colgar un dispositivo en Internet que responda automáticamente a las personas sobre qué tarifa les conviene más.

6ª SESIÓN y 7ª hasta *C.26.3.3*: COMPARACIÓN DE TARIFAS POR PASOS DE 30 SEGUNDOS Y POR SEGUNDOS I (QUE COINCIDEN EN EL RESTO DE VARIABLES)

35) Para mostrar la relación entre los precios de dos tarifas no es suficiente con probar con algunos casos. La gráfica si que nos muestra la relación. Hemos comprobado la necesidad de hacer las gráficas al comparar una tarifa que cobra por segundos con otra que cobra por pasos de 30 segundos.

36) La gráfica de una tarifa que cobra por pasos de 30 segundos (relación precio de la llamada/ duración) se puede hacer a partir de la gráfica de la tarifa de las mismas características pero que cobra por segundos, y se hace horizontalizando los segmentos de 30 segundos en el precio más alto (el que corresponde a la llamada de más duración dentro de ese fragmento de 30 segundos).

37) En ocasiones, no hace falta conocer "la fórmula de una función" para poder hacer la gráfica.

38) Si comparamos dos tarifas, a través del precio de la llamada según su duración (que es lo que hemos utilizado para comparar tarifas hasta ahora), que coinciden en todas sus características excepto en que una cobra por pasos de 30 segundos y la otra por segundos, resulta que, a partir del primer minuto, los precios coinciden en las llamadas cuya duración es múltiplo de 30 segundos y el resto es más cara la que cobra por pasos de 30 segundos. Respecto al primer minuto, si ambas lo cobran completo, el precio coincide en todas las duraciones de 1 a 60 segundos; si cada una lo cobra del mismo modo que cobra el resto de duraciones, entonces ocurrirá que coincidirán en el precio de 30

segundos y de 1 minuto, pero en las demás duraciones inferiores a un minuto será más cara la que cobra por pasos de 30 segundos.

* Comienzan a matizar también en la respuesta a la cuestión generatriz que utilizamos como comparación el precio según la duración de la llamada. Además, solicitan que aprovechemos para indicar que es el modo de comparación que hemos utilizado todo el tiempo.

39) La diferencia de precio entre dos tarifas con igualdad en todas sus características excepto en que una cobra por pasos de 30 segundos y la otra por segundos se puede obtener con la siguiente fórmula (se modifica un poco la deducida durante la clase):

Dp-s (euros)= (euros/minuto)/60 x (resto de dividir t (s) entre 30 sin decimales en el cociente).

Dp-s= Diferencia entre el precio de la tarifa por pasos y la tarifa por segundos, es decir, lo que cuesta más la llamada con la tarifa de pasos que con la de por segundos. En euros.

(euros/minuto)/60= euros por segundo sin tener en cuenta el precio por establecimiento de llamada. Si pusiéramos "precio por minuto"/2 podría pensarse que se incluye en el precio por minuto el precio por establecimiento de llamada.

t (s)= Duración de la llamada en segundos.

Si las dos compañías cobran el primer minuto igual que el resto (por pasos de 30 segundos una y por segundos la otra), la fórmula será válida para cualquier duración de llamada, mientras que si cobran el primer minuto completo las dos, la fórmula sólo será válida para llamadas de duración de un minuto o superior.

7ª (desde *C.26.4*) y 8ª SESIÓN: COMPARACIÓN DE TARIFAS POR PASOS DE 30 SEGUNDOS Y POR SEGUNDOS II (QUE NO COINCIDEN EN EL PRECIO POR MINUTO)

40) Si tenemos dos tarifas, una que cobra por pasos de 30 segundos y otra por segundos, siendo que la que cobra por pasos de 30 segundos cobra más por minuto y ambas cobran el primer minuto completo (cobrando ambas el mismo precio por establecimiento de llamada), resulta que será más cara, para cualquier duración de llamada, la tarifa que cobra por pasos de 30 segundos. (Compañías E y M, Gráfico 14).

Un alumno plantea hacer una tabla con los datos para que sea más fácil comprenderlo, ya que damos muchos datos de cada compañía y cree que es difícil combinar toda la información.

P: ¿Pues haced esa tabla en relación con las gráficas E y M y luego continuaremos con las siguientes?

C27: Hacer una tabla con los datos de las compañías para facilitar su comparación (en grupos).

PUESTA EN COMÚN

El grupo que expone hace la siguiente propuesta:

Compañía	1er minuto	Resto de tiempo	Euros/minuto	Euros est. llamada
E	Completo	30 sg.	Más	=
M	Completo	Sg.	Menos	=

Un segundo grupo plantea que se utilice "Más que E" y "Menos que M" porque si no no se sabe más o menos que qué. Se acepta. Este grupo además dice que podríamos indicar en primer lugar lo más diferenciador. Es decir, la primera columna dedicada al modo de cobrar a partir del primer minuto, la segunda al precio por minuto, la tercera al modo de cobrar el primer minuto y la cuarta al precio por establecimiento de llamada. Este grupo además dice que ellos deberíamos especificar “Modo de facturar” y que incluyera dos columnas: “Primer minuto” y “Resto de minutos”. También se acepta.

El tercer grupo plantea indicar sólo lo que es diferente, pero el resto de grupos dicen que ya dijimos que es mejor indicar todos los datos porque si no se dice nada lleva a duda y parece que da igual el valor. El otro grupo defiende que se puede indicar a parte, como una nota, que en el resto cobran igual, pero se concluye que es mejor indicar todos los datos porque es más claro.

El tercer grupo también dice que mejor no ponemos el nombre de la compañía sino al final decimos que un ejemplo está en la comparación entre M y E, porque realmente las conclusiones no son sólo válidas para el ejemplo. Los demás están de acuerdo.

El primer grupo plantea que hagamos una tabla conjunta de todas las compañías, pero al final se decide que no porque un grupo destaca que entonces los iguales no se sabría entre quién y quién son. El primer grupo dice que se podrían utilizar letras para simbolizar precios iguales. Por ejemplo, entre E y M llamar X al precio por establecimiento de llamada. Pero los otros grupos dicen que entonces, en el siguiente precio por establecimiento de llamada, si lo llamamos X parecerá que es el mismo y si lo simbolizamos con otra letra parecerá que es que es diferente, siendo que no tiene por qué serlo. Se concluye por tanto que se describirán en tablas por parejas. También se acuerda que, al hacer sólo por parejas, será más claro indicar “más cara” y “más barata” para representar que el precio por minuto es mayor en una que en la otra.

Finalmente la tabla queda:

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	Más cara	=	M
Sg.	Completo	Más barata	=	E

De todos modos, se concluye que también se dejará el texto desarrollado para evitar confusiones.

* A partir de este momento los alumnos elaborarán por grupos las tablas de cada pareja de compañías sobre las que vayamos a obtener una conclusión. El grupo al que le corresponda exponer las conclusiones sobre un par de compañías, a la vez que expone las conclusiones, mostrará también la tabla.

También dicen que deberíamos hacer referencia a los gráficos que corresponden a cada comparación. Este trabajo aún no podemos hacerlo porque aún no están preparadas las gráficas, pero el profesor les indica que lo haremos.

C28: Hacer referencia en las respuestas que vamos dando al problema, en los casos de comparación de tarifas, a los gráficos que se corresponden con las comparaciones (queda pendiente hasta tener los gráficos).

41) Si tenemos dos tarifas, una que cobra por pasos de 30 segundos y otra por segundos, siendo que la que cobra por pasos de 30 segundos es más cara pero cobra el primer minuto por segundos frente a que la que cobra por segundos el resto, que cobra el primer minuto completo (cobrando ambas el mismo precio por establecimiento de llamada); entonces resulta que siempre la compañía que cobra por pasos de 30 segundos, al cobrar el primer minuto por segundos, costará menos que la otra hasta una duración de llamada, a partir de la cual será ya siempre más cara. Gráfico 15.

Para hallar el punto en que se cortan las gráficas debemos igualar la “fórmula” de la tarifa que cobra por segundos al precio durante el primer minuto de la que cobra el primer minuto completo y despejar t. Así hallamos una duración de llamada donde los precios coinciden en ambas tarifas y sabemos que para llamadas de duración inferior es más barata la de por pasos mientras que para el resto es más cara.

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Por segundos	Más cara	=	N
Sg.	Completo	Más barata	=	E

42) Antes de continuar la comparación entre diferentes variantes de tarifas cobrando una por pasos de 30 segundos y la otra por segundos, nos paramos a pensar en todas las posibilidades de variación que había. Nos dimos cuenta de que pueden diferir en el modo de cobrar el primer minuto (completo o por segundos) y/o en el precio por minuto y/o en el precio por establecimiento de llamada. Dado que todas las opciones posibles serían muchas, tras organizarlas, hemos descartado aquellas en que varía el precio por establecimiento de llamada y por tanto también aquellas en varía simultáneamente el precio por establecimiento de llamada y el precio por minuto. También descartamos aquellas en las que se cobra el primer minuto de modo diferente a completo. Ambas las hemos descartado porque en la realidad no se dan esos casos y decidimos centrarnos en las que son más útiles para resolver el problema.

Pero decidimos, por consejo del profesor, sí analizar, dentro de las opciones en que la tarifa que cobra por 30 segundos cobra más por minuto y cobran el mismo precio por establecimiento de llamada el caso en que la tarifa por pasos de 30 segundos cobra el primer minuto completo mientras que la que cobra por segundos cobra el primer minuto también por segundos, que es el que se describe a continuación.

43) Si tenemos dos tarifas, una que cobra por pasos de 30 segundos y la otra por segundos, y la que cobra por pasos cobra más por minuto y además cobra el primer minuto completo, mientras que la que cobra por segundos, además de cobrar menos por minuto, cobra el primer minuto por segundos (cobrando ambas el mismo precio por establecimiento de llamada), pues tenemos que la compañía que cobra por pasos de 30 segundos será más cara para cualquier duración de llamada. Gráfico 16.

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	Más cara	=	M
Sg.	Sg.	Más barata	=	A

44) Ya habíamos tratado los casos que habíamos planificado en que la tarifa por pasos de 30 segundos cobra mayor precio por minuto que la de por segundos.

Aunque habíamos planificado que ya sólo íbamos a analizar el caso de comparación (entre una tarifa por pasos de 30 segundos y otra por segundos) en que lo único que varía es el precio por minuto, que es mayor en la tarifa por segundos (pero coinciden en el precio por establecimiento de llamada y en el modo de cobrar el primer minuto), planteamos, gráficamente, casos en que la tarifa por segundos era más cara pero eran paralelas, sin darnos cuenta de que si son paralelas es porque cobran diferente precio por establecimiento de llamada. Por esos obtuvimos otras conclusiones aunque no eran objeto en principio.

45) Si tenemos dos tarifas que cobran el mismo precio por minuto pero diferente precio por establecimiento de llamada siempre son paralelas. Serán paralelas también durante el primer minuto siempre que las dos cobren del mismo modo (ambas completo o ambas por segundos). En el caso de que una de ellas cobre por pasos de 30 segundos, serán paralelas la gráfica de la tarifa que cobra por segundos y la línea "base" de la tarifa que cobra por pasos de 30 segundos. Gráfico 17.

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	Más cara	Más barata	L
Sg.	Completo	Más barata	Más cara	O

46) Si tenemos los datos de las dos tarifas (una por pasos de 30 segundos y otra por segundos), podemos modificar el precio por establecimiento de llamada de la que cobra por segundos para que se transforme en una recta que corta a todos los segmentos de 30 segundos en los puntos que queramos, por ejemplo:

- A todos los segmentos en el punto más a la izquierda –es decir, en los múltiplos de 30 segundos- (Gráfico 19).

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	=	Más barata	L
Sg.	Completo	=	Más cara	P

Y debemos tener cuidado de tomar puntos erróneos, como nos ocurrió (Gráfico 18).

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	=	Más barata	L
Sg.	Completo	=	Más cara	Q

b. O a todos los segmentos en el punto medio –en el precio de 1’25, 1’75, 2’25, 2’75... (Gráfico 20); o en los puntos que queramos, que siempre estarán a una distancia de 0’5 minutos –por ejemplo, 1’03, 1’53, 2’03... o 1’27, 1’77, 2’27...

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	=	Más barata	L
Sg.	Completo	=	Más cara	R

47) En los casos en que la tarifa por pasos de 30 segundos y la de por segundos cobran el mismo precio por establecimiento de llamada, podemos averiguar:

a. El precio que puede cobrar la tarifa por segundos para cortar a la gráfica de la tarifa por pasos de 30 segundos en varios de sus segmentos, por ejemplo dos (Gráfico 21).

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	Más barata	=	L
Sg.	Completo	Más cara	=	S

b. El ámbito de posibilidades de precio por minuto que debe costar la tarifa por segundos para cortar a la gráfica de la otra tarifa (que cobra por pasos de 30 segundos) en varios de sus segmentos, por ejemplo dos. Para ello hallaremos un precio mínimo por minuto (Gráfico 22)

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	Más barata	=	L
Sg.	Completo	Más cara	=	T

y un precio máximo (Gráfico 23).

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	Más barata	=	L
Sg.	Completo	Más cara	=	U

Tras haber hecho el trabajo de las gráficas dice un grupo que no son muy representativas y que es mejor quizá quitarlas y simplemente hacer referencia a los gráficos (el número de gráfico) y las compañías que se han considerado y poner en las tablas mejor las características reales de cada compañía. Explican que, por ejemplo, las tablas de las tres últimas comparaciones son exactamente iguales excepto en las compañías que lo ejemplifican y que por tanto, o incluimos más información en las tablas o quizá mejor quitarlas y situar en su lugar una tabla con los datos de cada compañía utilizada para ejemplificar. Así, las personas que lo lean tienen la explicación escrita desarrollada y la referencia a las características concretas de las gráficas que se han utilizado como ejemplo. Los alumnos insisten que si además hacemos les permitimos ver los gráficos, "pues ya es perfecto".

Otros alumnos dicen que estas tablas podríamos dejarlas ya que las hemos hecho, pero la mayoría defiende finalmente que entonces habrá demasiado información y va a "marear" un poco a quien lo intente entender. Conclusión: no incluiremos las tablas que hemos hecho.

48) En Internet, además del dispositivo para responder a las personas los precios en las diferentes tarifas, colgaremos el documento de respuestas a la pregunta donde se indiquen con qué comparaciones se ha obtenido cada una (qué compañías se han considerado), con sus características. Además incluiremos las gráficas de cada tarifa.

MATERIAL 9. Respuestas a la "cuestión generatriz" modificada tras la décima sesión y hasta el final

RESPUESTA A LA CUESTIÓN GENERATRIZ TRAS DÉCIMA SESIÓN[15][16]

1º SESIÓN

49) El precio de una llamada **que cobra por segundos desde el primer segundo** se puede calcular con la fórmula:

$$P_A = e + pt$$

P_t = Precio de la llamada (de una duración t); e = Precio por establecimiento de llamada.
p = Precio por minuto; t = Duración de la llamada.
* Primero pusieron P_A, pero finalmente decidieron llamarlo P_t.

50) Si dos compañías tienen el mismo precio por establecimiento de llamada y diferente precio por minuto**, cobrando por segundo desde el primer segundo,** es más cara aquella cuyo precio por minuto es mayor. (*Ver Gráfico 1 y 2*)

51) Si dos compañías tienen el mismo precio por establecimiento de llamada y diferente precio por minuto, cobrando ambas el primer minuto completo, la distancia entre sus gráficas del precio por minuto en 2 minutos será el doble que en 1 minuto, y en tres minutos el triple... y en mil minutos será mil veces mayor. (*Ver Gráfico 1*)

52) Si dos compañías tienen el mismo precio por minuto pero diferente precio por establecimiento de llamada**, cobrando ambas por segundo desde el primer segundo,** es más cara aquella cuyo precio por establecimiento de llamada es mayor. (*Ver Gráficos 3 y 12*)

---

[15] En **negrita** aparecen las modificaciones que fueron realizadas durante la Décima sesión. También se incluye en cursiva los gráficos que ejemplifican cada conclusión, indicando Ver Gráfico... entre paréntesis al final de la conclusión correspondiente.
[16] Los párrafos precedidos de asterisco corresponden a información personal del profesor y no estaban incluidos en los ejemplares de "Respuestas al problema" que se facilitaba a los alumnos.

53) **Si dos compañías tienen el mismo precio por establecimiento de llamada y diferente precio por minuto, cobrando ambas el primer minuto completo, sus gráficas son paralelas.** (*Ver Gráficos 3 y 12*)

54) Podemos calcular el precio de las llamadas de una compañía **que cobra por segundos desde el primer segundo** conocido el precio de esas llamadas de otra compañía **que también cobra por segundos desde el primer segundo pero** con diferente precio por minuto o diferente precio por establecimiento de llamada. Las fórmulas son:

Para diferente precio por establecimiento de llamada pero igual precio por minuto: $P_A = P_B + (p_A - p_B)$

P_A: Precio de la llamada en la compañía cuyo precio por establecimiento de llamada es mayor.
P_B: Precio de la llamada en la compañía cuyo precio por establecimiento de llamada es menor.
p_A: Precio por establecimiento de llamada de la compañía A.
p_B: Precio por establecimiento de llamada de la compañía B.

Para diferente precio por minuto pero igual precio por establecimiento de llamada: $P_A = P_B + (p_A - p_B)t$

$\mathrm{P_A}$: Precio de la llamada en la compañía cuyo precio por minuto es mayor.
$\mathrm{P_B}$: Precio de la llamada en la compañía cuyo precio por minuto es menor.
p_A: Precio por minuto de la compañía A.
p_B: Precio por minuto de la compañía B.

50) Si dos compañías cobran diferente precio por minuto y diferente precio por establecimiento de llamada, cobrando ambas por segundo desde el primer segundo y siendo que la que cobra más por segundo cobra también más por establecimiento de llamada, las gráficas nunca se cortan y no son paralelas. (*Ver Gráfico 4*)[17]

[17] Esta conclusión fue añadida durante la Sesión 10.

2ª SESIÓN

55) Roberto trajo un documento de Internet que exponía la dificultad que implica comparar tarifas de teléfonos móviles. Dijimos que íbamos a buscar más información, pero dicen que no han podido porque los datos de las compañías y hacer las tablas les ha quitado mucho tiempo. De hecho, han estado en contacto unos con otros para plantearse y resolver dudas.

56) Dificultad en concretar el problema. Derivado de que vimos que, en Internet, dos de las compañías ofrecen un asesor de tarifas, pero es dudosa la confianza que se puede depositar, primero porque no sabemos cómo lo concluyen, segundo porque siempre tras el consejo ponen una nota diciendo que el dato es para un consumidor tipo estándar, que no es algo que puedan confirmar... Eso derivó en pensar sobre el tipo de respuesta que podíamos dar nosotros. Todos estábamos de acuerdo en que este modo de aconsejar primero, ya existe, y segundo no nos parece el más adecuado. Concluimos que vamos a comenzar por comparar tarifas semejantes en las diferentes compañías y luego iremos viendo qué pasos podemos-debemos ir dando.

57) Influencia de cobrar o no el primer minuto completo.

   a. En caso de igualdad en el resto de variables, es más barata, hasta la duración de un minuto, la tarifa que cobra el primer minuto por segundos. La gráfica nos ayudó a ver esta relación, confirmándonos lo que habíamos deducido sin necesidad de realizar cálculos. (*Ver Gráfico 5*)

b. En caso de dos compañías con igual precio por establecimiento de llamada pero diferente precio por minuto y una cobra el primer minuto completo y la otra no:

   i. Si la que cobra el primer minuto completo es además la más cara, es más cara para cualquier duración de llamada. Gráficamente (precio por duración de llamada) vimos que se observa que la más cara siempre queda por encima de la más barata. (*Ver Gráfico 24*)

   ii. Si la que cobra el primer minuto completo es la más barata, entonces la comparación se complica. A partir del primer minuto podemos deducir que la que cobra más por minuto es más cara, pero ¿qué ocurre con las llamadas de duración inferior a un minuto? Entonces es necesaria la gráfica, ya que nos permite observar si hay un cruce entre las gráficas de las tarifas. También podría hacerse con cálculos numéricos, pero es más complicado y además es más fácil que lleve a error (como vimos: porque si no te das cuenta de que una es una función por partes crees que no se cruzan). La gráfica te da pistas de si se cruzan o no y de en qué punto más o menos. (*Ver Gráfico 6*)

58) El precio mínimo de una llamada con una tarifa que cobra por segundos es el precio de un segundo más el establecimiento de llamada.

59) El precio mínimo de una llamada que cobra el primer minuto completo es el precio de un minuto más el establecimiento de llamada.

60) El precio máximo de una llamada es infinito.

61) Vimos la importancia de considerar las unidades que estamos utilizando. En concreto, cuando concluimos que el punto de corte estaba en 0'75, y eran minutos, no segundos.

62) Repasamos cómo se transforman los minutos a segundos.

63) Vimos la importancia de responder del modo más concreto y real a la pregunta que hayamos planteado. En concreto, cuando dedujimos el punto de corte de las dos tarifas de cobro de primer minuto completo o no y diferente precio por minuto, siendo la más cara la que cobra el primer minuto completo, vimos qué características tenía la respuesta más adecuada a la pregunta: que habla en segundos, en vez de en 0'xx minutos, porque es más fácilmente comprensible, que indica qué dos compañías está comparando (sus características), que habla de "tiempo de duración de la llamada", porque es la variable determinante, que no dice que "las gráficas son más baratas" ni "más caras", sino las compañías, que especifica qué ocurre tanto antes como después y exactamente en el punto o puntos críticos.

64) Finalmente comenzamos a organizar la planificación de las tablas de datos y fuimos modificando dicha planificación. Esto ocurrió porque iban surgiendo cuestiones, dificultades... que no habíamos tenido en cuenta o que ni siquiera podríamos haber tenido en cuenta porque surgieron tras comenzar a trabajar. La planificación inicial es importante, pero no es definitiva, sino que se debe ir adaptando a medida que se avanza en el proceso. Además, se deben analizar las causas de las modificaciones de las planificaciones previas para aprender para las siguientes.

65) Surgieron gran cantidad de variables.

66) Hoy hemos visto que encontrar todos los datos reales sobre tarifas es complicado.

67) Organizar bien los datos es importante y también difícil. Hay que decidir cómo organizarlo (decidimos en tablas), qué filas poner (cada tarifa), qué columnas (qué datos). La información debe estar organizada, si es posible, igual, sobre las diferentes compañías para facilitarlas compararlas después. La organización inicial la fuimos modificando en función de lo que íbamos obteniendo. Las conclusiones se pueden observar viendo las tablas definitivas.

68) Ahora que tenemos todos los datos, iremos analizando las diferentes variables que influyen y comparando las diferentes tarifas.

3ª SESIÓN

69) En la descripción de las características de las diferentes tarifas, es útil, para reducir el espacio que ocupan los datos, "sacar fuera" los datos que son iguales en todas las tarifas de un determinado tipo.

70) No tendremos en cuenta los módulos en la comparativa, por el momento, porque suelen ser temporales y además de características muy diferentes que hacen la comparación muy difícil e incluso prácticamente imposible. Parece que se reparten el pastel para no caer en competencia. Esto no ocurre tanto en las tarifas generales seguramente porque no tienen tantas variables libres para manipular, pero sí parece curioso que, en vez de para competir bajar los precios por minuto, por ejemplo, lo que hagan sea ofrecer tarifas de nuevos tipos (como 3x2, decreciente...) o de nuevas características. Un alumno explica que quizá no bajan los precios de las tarifas ya existentes porque lo que intentan es "captar" nuevos consumidores y bajar el precio de una tarifa que ya tienen muchos seguramente obliga a la compañía a bajárselo a todos (también a los que la tenían antes de la rebaja).

71) Algunas compañías omiten (o al menos no explicitan claramente) algunos datos, y entre ellos algunos, como el cobrar Vodafone por pasos de 30 segundos en algunos contratos, que llevan al consumidor a un error (creen que cobran por segundos) que favorece a la empresa. Pero también se omite información que sí favorece a las ventas de la empresa, como el indicar que no se cobra por escuchar los mensajes de voz.

72) Existirían formas mucho más claras de exponer la información (como tablas semejantes a las que hemos elaborado) que no se sabe por qué

no las utilizan, aunque parece lógico pensar que es para confundir y sacar provecho de ello. En esta tabla, además, sería conveniente especificar también cuando algo es gratuito, en vez de omitir la información, para no llevar a error. Es decir, el hecho de que, en general, cuando se omite un dato pensemos que es gratuito (porque si no tendrían que ponerlo), que es lo que ocurre normalmente, lleva a que luego, si algún dato se omite, pensemos que es el más beneficioso para el consumidor también, y luego ocurre en ocasiones que no.

73) Para facilitar la comparativa de tarifas también es muy útil unificar las unidades en que se definen los datos, así como el modo en que se organizan los precios para diferentes receptores y horarios.

74) También parece conveniente unificar criterios sobre exposición de los diferentes datos de modo que ocupen menos espacio (por ejemplo, utilizar dos dígitos para marcar horarios, o utilizar guión para indicar hasta qué horario, o las siglas del dato, como S,D para sábado y domingo), o para que sepamos que nos referimos a los mismos datos (por ejemplo, utilizar "S,D" para sábados y domingos en vez de "FS" o fin de semana).

75) El precio por minuto, dentro de cada compañía, depende del receptor y del horario.

76) Si una compañía cobra un precio X por minuto y un precio Y por establecimiento de llamada y otra el precio Y por minuto y el precio X por establecimiento de llamada (cobrando ambas el primer minuto completo), ambas costarán lo mismo para llamadas de duración igual inferior o igual a un minuto, mientras que para llamadas de duración superior a un minuto será más cara la compañía en la que el precio por minuto es mayor que el precio por establecimiento de llamada. (*Ver Gráfico 7*)

* Un alumno preguntar qué ocurriría si cobraran ambas el primer minuto por segundos. Les dice el profesor que lo harán tras finalizar la síntesis de respuestas a la cuestión tras el trabajo del día anterior.

77) Si dos compañías cobran el mismo precio por minuto pero diferente precio por establecimiento de llamada (ambas el primer minuto completo) es más cara, para cualquier duración de llamada, aquella compañía en la que el precio por establecimiento de llamada es mayor. Además, gráficamente vimos que la diferencia entre las gráficas era constante (las líneas de sus gráficas son paralelas) y llegamos a la conclusión de que el valor de esa diferencia constante es igual a la diferencia entre las dos compañías en el precio por establecimiento de llamada, y esto es porque el precio por minuto es lo que difiere y este se añade siempre completo, para cualquier duración de llamada. (*Ver Gráfico 8*)

* El mismo alumno plantea que también podríamos averiguar qué ocurriría en este caso si ambas cobraran el primer minuto por segundos. También lo haremos.

78) Si dos compañías cobran diferente precio por establecimiento de llamada y diferente precio por minuto (cobrando ambas el primer minuto completo), utilizar sus gráficas es fundamental para saber si sus gráficas se cruzan, dándonos además una idea de en qué punto se cruzan (como son rectas, sólo pueden cruzarse una vez). Resulta que la diferencia de precios se debe en parte a la diferencia en el precio por minuto y en parte a la diferencia en el precio por establecimiento de llamada: la diferencia por establecimiento de llamada es constante, mientras que la diferencia debida al precio por minuto varía. (*Ver Gráfico 9*)

* Varios alumnos plantean que podríamos hallar también en este caso que ocurriría si ambas cobraran por segundos, pero algunos les recordaron que ese caso ya lo habíamos visto el día anterior y que de hecho hoy teníamos que sacar conclusiones sobre lo que hicimos.

79) Si dos compañías cobran diferente precio por establecimiento de llamada y diferente precio por minuto (cobrando ambas el primer minuto por segundos), resulta que para llamadas de duración inferior a un minuto se sigue cumpliendo la tendencia que viniera de antes. Esto es lógico porque se trata de rectas y no pueden volver a cruzarse. (*Ver Gráfico 10*)

4º SESIÓN

80) Si una compañía cobra un precio X por minuto y un precio Y por establecimiento de llamada y otra el precio Y por minuto y el precio X por establecimiento de llamada (cobrando ambas el primer minuto por segundos), para llamadas de duración superior a un minuto será más cara la compañía en la que el precio por minuto es mayor que el precio por establecimiento de llamada, mientras que para llamadas de duración inferior a un minuto será más cara la compañía en la que el precio por establecimiento de llamada es mayor. (*Ver Gráfico 11*)

81) Si dos compañías cobran el mismo precio por minuto pero diferente precio por establecimiento de llamada (ambas cobran el primer minuto por segundos) es más cara, para cualquier duración de llamada, aquella compañía en la que el precio por establecimiento de llamada es mayor. Además, gráficamente vimos que la diferencia entre las gráficas era constante y llegamos a la conclusión de que el valor de esa diferencia constante es igual a la diferencia entre las dos compañías en el precio por establecimiento de llamada, y esto es porque el precio por minuto es lo que difiere y este se añade siempre completo, para cualquier duración de llamada. Podemos concluir por tanto que la diferencia de precios es la misma y constante cobren las compañías el primer minuto completo o no, en lo único que difiere es en que cuando cobran el primer minuto por segundos ambas son más baratas. (*Ver Gráficos 3 y 12*)

5ª SESIÓN (y parte de la sexta): ANÁLISIS DE DOCUMENTOS Y RESPUESTAS A LA CUESTIÓN EN INTERNET

Los modos de repuesta que hemos encontrado en Internet o en las mismas compañías de telefonía móvil a la cuestión de elegir la tarifa más barata no nos satisfacen. Las propuestas de respuesta que planteamos son:

82) Los precios de la llamada con cada tarifa, considerando también la duración y no sólo dando por separado los diferentes datos de cada tarifa sino dando un precio final.

   i. Considerar la duración de la llamada es importante para que se vea la influencia del modo de facturación (pasos de 30 segundos o por segundos).

   ii. Dar un precio final es importante porque si no la persona tendría que calcularlo y entonces no tendría éxito.

   iii. Que el precio final incluya el precio por establecimiento de llamada, es importante porque, aunque es un dato igual en todas las tarifas, incluirlo cuesta poco trabajo y a cambio la persona recibe un dato real de lo que le costaría esa llamada.

   * Hubo un poco de dificultad de acuerdo a este respecto porque algunos alumnos decían que nuestro objetivo es comparar tarifas, y por tanto los datos iguales en todas ellas, dado que no van a diferenciar entre tarifas, no es necesario tenerlos en cuenta. Pero finalmente les convencen otros alumnos que defienden que ya que estamos haciendo este trabajo, por poco más podemos de paso dar para cada tarifa un precio lo más realista posible y seguro que así lo ven más interesante las personas que entren en la página web. El

profesor resume entonces que nos interesa tanto la comparación como la exactitud (realidad) de los datos a comparar.

iv. Dar el dato (el precio por duración de la llamada) de todas las tarifas (y no sólo de la más barata y la más cara o de algunas de ellas). Es importante para que la persona pueda elegir la tarifa considerando, si quiere, otras variables. Puede decidir, por ejemplo, si hay poca diferencia entre dos tarifas, coger una porque tenga más amigos que la tienen o porque tienen más cobertura, o porque no le valga la pena por la diferencia cambiar de compañía...

83) El precio mensual con cada tarifa. Esta propuesta se considera más adecuada pero también parece muy complejo abarcarla o poco útil según cómo se concrete:

a. Que las personas nos digan primero el tipo de llamadas que realizan (calcular el precio de una llamada como en la opción anterior, teniendo en cuenta todos los datos, incluidas la duración de cada llamada) y luego multiplicar cada tipo de llamada que realiza por el número de veces que las realiza al mes.

   Esta opción parece poco útil porque realizamos muy diferentes tipos de llamadas y es muy complejo que la persona sepa e indique cuántas llamadas realiza de cada tipo.

   * Hay que notar que esta propuesta implica que la persona primero indique todos los tipos de llamada que realiza (diferenciando además por duraciones de las mismas), lo que puede implicar calcular el precio para un montón de llamadas de diferentes características y luego debe decir además cuántas realiza de cada tipo.

b. Considerar clientes tipo. Pero esta opción parece menos útil aún, porque creen que realmente o eres un cliente tipo o no es válido para ti.

c. Estamos buscando qué datos necesitaríamos pedir a una persona para poder averiguar su factura mensual sin que fuera de ninguno de los dos modos planteados anteriormente.

84) Queremos colgar la propuesta final en una página web. Esto implica que no bastará con que una persona nos dé datos a nosotros y nosotros calculemos qué tarifa le conviene más, sino que deberíamos colgar un dispositivo en Internet que responda automáticamente a las personas sobre qué tarifa les conviene más.

6ª SESIÓN y 7ª hasta *C.26.3.3*: COMPARACIÓN DE TARIFAS POR PASOS DE 30 SEGUNDOS Y POR SEGUNDOS I (QUE COINCIDEN EN EL RESTO DE VARIABLES)

85) Para mostrar la relación entre los precios de dos tarifas no es suficiente con probar con algunos casos. La gráfica si que nos muestra la relación. Hemos comprobado la necesidad de hacer las gráficas al comparar una tarifa que cobra por segundos con otra que cobra por pasos de 30 segundos.

86) La gráfica de una tarifa que cobra por pasos de 30 segundos (relación precio de la llamada/ duración) se puede hacer a partir de la gráfica de la tarifa de las mismas características pero que cobra por segundos, y se hace horizontalizando los segmentos de 30 segundos en el precio más alto (el que corresponde a la llamada de más duración dentro de ese fragmento de 30 segundos). (*Ver Gráfico 13*)

87) En ocasiones, no hace falta conocer "la fórmula de una función" para poder hacer la gráfica.

88) Si comparamos dos tarifas, a través del precio de la llamada según su duración (que es lo que hemos utilizado para comparar tarifas hasta ahora), que coinciden en todas sus características excepto en que una cobra por pasos de 30 segundos y la otra por segundos, resulta que, a partir del primer minuto, los precios coinciden en las llamadas cuya duración es múltiplo de 30 segundos y el resto es más cara la que cobra por pasos de 30 segundos. Respecto al primer minuto, si ambas lo cobran completo, el precio coincide en todas las duraciones de 1 a 60 segundos (*Ver Gráfico 13*); si cada una lo cobra del mismo modo que cobra el resto de duraciones, entonces ocurrirá que coincidirán en el precio de 30 segundos y de 1 minuto, pero en las demás duraciones

inferiores a un minuto será más cara la que cobra por pasos de 30 segundos.

* Comienzan a matizar también en la respuesta a la cuestión generatriz que utilizamos como comparación el precio según la duración de la llamada. Además, solicitan que aprovechemos para indicar que es el modo de comparación que hemos utilizado todo el tiempo.

89) La diferencia de precio entre dos tarifas con igualdad en todas sus características excepto en que una cobra por pasos de 30 segundos y la otra por segundos se puede obtener con la siguiente fórmula (se modifica un poco la deducida durante la clase):

Dp-s (euros)= (euros/minuto)/60 x (resto de dividir t(s) entre 30 sin decimales en el cociente).

Dp-s= Diferencia entre el precio de la tarifa por pasos y la tarifa por segundos, es decir, lo que cuesta más la llamada con la tarifa de pasos que con la de por segundos. En euros.

(euros/minuto)/60= euros por segundo sin tener en cuenta el precio por establecimiento de llamada. Si pusiéramos "precio por minuto"/2 podría pensarse que se incluye en el precio por minuto el precio por establecimiento de llamada.

t (s)= Duración de la llamada en segundos.

Si las dos compañías cobran el primer minuto igual que el resto (por pasos de 30 segundos una y por segundos la otra), la fórmula será válida para cualquier duración de llamada, mientras que si cobran el primer minuto completo las dos, la fórmula sólo será válida para llamadas de duración de un minuto o superior.

7ª (desde *C.26.4*) y 8ª SESIÓN: COMPARACIÓN DE TARIFAS POR PASOS DE 30 SEGUNDOS Y POR SEGUNDOS II (QUE NO COINCIDEN EN EL PRECIO POR MINUTO)

90) Si tenemos dos tarifas, una que cobra por pasos de 30 segundos y otra por segundos, siendo que la que cobra por pasos de 30 segundos cobra más por minuto y ambas cobran el primer minuto completo (cobrando ambas el mismo precio por establecimiento de llamada), resulta que será más cara, para cualquier duración de llamada, la tarifa que cobra por pasos de 30 segundos. (*Ver Gráfico 14, donde además se incluye la gráfica "línea base"*).

* A partir de esta conclusión surgieron la C27 y C28. (Ver diario, durante Sesión 9).

91) Si tenemos dos tarifas, una que cobra por pasos de 30 segundos y otra por segundos, siendo que la que cobra por pasos de 30 segundos ~~es más cara~~ **cobra más por minuto** pero cobra el primer minuto por segundos frente a que la que cobra por segundos el resto, que cobra el primer minuto completo (cobrando ambas el mismo precio por establecimiento de llamada); entonces resulta que siempre la compañía que cobra por pasos de 30 segundos, al cobrar el primer minuto por segundos, costará menos que la otra hasta una duración de llamada, a partir de la cual será ya siempre más cara. (*Ver Gráfico 15*)

Para hallar el punto en que se cortan las gráficas debemos igualar la "fórmula" de la tarifa que cobra por segundos al precio durante el primer minuto de la que cobra el primer minuto completo y despejar t. Así hallamos una duración de llamada donde los precios coinciden en ambas tarifas y sabemos que para llamadas de duración inferior es más barata la de por pasos mientras que para el resto es más cara.

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Por segundos	Más cara	=	N
Sg.	Completo	Más barata	=	E

92) Antes de continuar la comparación entre diferentes variantes de tarifas cobrando una por pasos de 30 segundos y la otra por segundos, nos paramos a pensar en todas las posibilidades de variación que había. Nos dimos cuenta de que pueden diferir en el modo de cobrar el primer minuto (completo o por segundos) y/o en el precio por minuto y/o en el precio por establecimiento de llamada. Dado que todas las opciones posibles serían muchas, tras organizarlas, hemos descartado aquellas en que varía el precio por establecimiento de llamada y por tanto también aquellas en varía simultáneamente el precio por establecimiento de llamada y el precio por minuto. También descartamos aquellas en las que se cobra el primer minuto de modo diferente a completo. Ambas las hemos descartado porque en la realidad no se dan esos casos y decidimos centrarnos en las que son más útiles para resolver el problema.

Pero decidimos, por consejo del profesor, sí analizar, dentro de las opciones en que la tarifa que cobra por 30 segundos cobra más por minuto y cobran el mismo precio por establecimiento de llamada el caso en que la tarifa por pasos de 30 segundos cobra el primer minuto completo mientras que la que cobra por segundos cobra el primer minuto también por segundos, que es el que se describe a continuación.

93) Si tenemos dos tarifas, una que cobra por pasos de 30 segundos y la otra por segundos, y la que cobra por pasos cobra más por minuto y además cobra el primer minuto completo, mientras que la que cobra por segundos, además de cobrar menos por minuto, cobra el primer minuto por segundos (cobrando ambas el mismo precio por establecimiento de llamada), pues tenemos que <u>la compañía que cobra por pasos de 30 segundos será más cara para cualquier duración de llamada</u>. (*Ver Gráficos 16 y 17*)

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	Más cara	=	M
Sg.	Sg.	Más barata	=	A
Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	Más cara	=	L
Sg.	Completo	Más barata	=	O

94) Ya habíamos tratado los casos que habíamos planificado en que la tarifa por pasos de 30 segundos cobra mayor precio por minuto que la de por segundos.

Aunque habíamos planificado que ya sólo íbamos a analizar el caso de comparación (entre una tarifa por pasos de 30 segundos y otra por segundos) en que lo único que varía es el precio por minuto, que es mayor en la tarifa por segundos (pero coinciden en el precio por establecimiento de llamada y en el modo de cobrar el primer minuto), planteamos, gráficamente, casos en que la tarifa por segundos era más cara pero eran paralelas, sin darnos cuenta de que si son paralelas es porque cobran diferente precio por establecimiento de llamada. Por esos obtuvimos otras conclusiones aunque no eran objeto en principio.

95) Si tenemos dos tarifas que cobran el mismo precio por minuto pero diferente precio por establecimiento de llamada siempre son paralelas. Serán paralelas también durante el primer minuto siempre que las dos cobren del mismo modo (ambas completo o ambas por segundos). En el caso de que una de ellas cobre por pasos de 30 segundos, serán paralelas la gráfica de la tarifa que cobra por segundos y la línea "base" de la tarifa que cobra por pasos de 30 segundos. (*Ver Gráfico 18 y 19*)

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	=	Más barata	L
Sg.	Completo	=	Más cara	P

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	=	Más barata	L
Sg.	Completo	=	Más cara	Q

96) Si tenemos los datos de las dos tarifas (una por pasos de 30 segundos y otra por segundos), podemos modificar el precio por establecimiento de llamada de la que cobra por segundos para que se transforme en una recta que corta a todos los segmentos de 30 segundos en los puntos que queramos, por ejemplo:

   a. A todos los segmentos en el punto más a la izquierda –es decir, en los múltiplos de 30 segundos- (*Ver Gráfico 19*).

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	=	Más barata	L
Sg.	Completo	=	Más cara	P

b. Y debemos tener cuidado de tomar puntos erróneos, como nos ocurrió (*Ver Gráfico 18*).

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	=	Más barata	L
Sg.	Completo	=	Más cara	Q

c. O a todos los segmentos en el punto medio –en el precio de 1’25, 1’75, 2’25, 2’75... (*Ver Gráfico 20*); o en los puntos que queramos, que siempre estarán a una distancia de 0’5 minutos –por ejemplo, 1’03, 1’53, 2’03... o 1’27, 1’77, 2’27...

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	=	Más barata	L
Sg.	Completo	=	Más cara	R

97) En los casos en que la tarifa por pasos de 30 segundos y la de por segundos cobran el mismo precio por establecimiento de llamada, podemos averiguar:

a. El precio que puede cobrar la tarifa por segundos para cortar a la gráfica de la tarifa por pasos de 30 segundos en varios de sus segmentos, por ejemplo dos (*Ver Gráficos 21 y 23*).

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	Más barata	=	L
Sg.	Completo	Más cara	=	S

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	Más barata	=	L
Sg.	Completo	Más cara	=	U

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	Más barata	=	L
Sg.	Completo	Más cara	=	U

b. El ámbito de posibilidades de precio por minuto que debe costar la tarifa por segundos para cortar a la gráfica de la otra tarifa (que cobra por pasos de 30 segundos) en varios de sus segmentos, por ejemplo dos. Para ello hallaremos un precio mínimo por minuto (*Ver Gráfico 22*)

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	Más barata	=	L
Sg.	Completo	Más cara	=	T

y un precio máximo (*Ver Gráfico 23*).

Modo de facturar				
A partir de 1er minuto	Primer minuto	Euros/minuto	Euros est. llamada	Ejemplo
30 sg.	Completo	Más barata	=	L
Sg.	Completo	Más cara	=	U

Tras haber hecho el trabajo de las gráficas dice un grupo que no son muy representativas y que es mejor quizá quitarlas y simplemente hacer referencia a los gráficos (el número de gráfico) y las compañías que se han considerado y poner en las tablas mejor las características reales de cada compañía. Explican que, por ejemplo, las tablas de las tres últimas comparaciones son exactamente iguales excepto en las compañías que lo ejemplifican y que por tanto, o incluimos más información en las tablas o quizá mejor quitarlas y situar en su lugar una tabla con los datos de cada compañía utilizada para ejemplificar. Así, las personas que lo lean tienen la explicación escrita desarrollada y la referencia a las características concretas de las gráficas que se han utilizado como ejemplo. Los alumnos insisten que si además hacemos les permitimos ver los gráficos, "pues ya es perfecto".

Otros alumnos dicen que estas tablas podríamos dejarlas ya que las hemos hecho, pero la mayoría defiende finalmente que entonces habrá demasiado información y va a "marear" un poco a quien lo intente entender. Conclusión: no incluiremos las tablas que hemos hecho.

98) En Internet, además del dispositivo para responder a las personas los precios en las diferentes tarifas, colgaremos el documento de respuestas a la pregunta donde se indiquen con qué comparaciones se ha obtenido cada una (qué compañías se han considerado), con sus características. Además incluiremos las gráficas de cada tarifa.

RESPUESTA FINAL

La determinación de qué datos y de qué modo deberían ser incluidos en la página web fue de gran importancia, ya que iba obligando a decidir, como se ha ido mostrando en el diario, qué información era la fundamental y debía por tanto ser incluida, así como el modo más adecuado de presentarla que generalmente obligaba a reorganizarla.

Esto llevó, por un lado, a decidir que era conveniente mostrar información relativa a todo el proceso (aunque seleccionada y organizada), donde destacó, como se describe en el diario, la conveniencia de incluir las "respuestas a la cuestión generatriz" reelaboradas tras la décima sesión junto con las gráficas correspondientes y los datos sobre las funciones que representan; y, por otro, a darse cuenta de que, si se querían mostrar aspectos del proceso que se había seguido para responder a la cuestión, éste necesitaba ser reorganizado, si se pretendía que otras personas pudieran comprenderlo, como muestra el hecho de que, por esta razón, se decidiera reelaborar las conclusiones realizadas hasta el momento durante la décima sesión.

En el trabajo con datos reales, dado que la página web pasó a ser un objetivo fundamental que se tenía siempre en mente, se iba elaborando la respuesta en vistas a su construcción y eso hizo que cada vez tuvieran menos razón de ser las sesiones específicamente dirigidas a la respuesta a la cuestión generatriz, ya que ésta se iba reelaborando necesariamente todo el tiempo. Como respuesta final relativa a los datos reales se dio la "versión usuarios" de las hojas de Excel de comparación de tarifas.

ANEXO C. TABLAS COMPLEMENTARIAS DE ANÁLISIS DE DATOS

DEL PRIMER REI

A) Diferencias según tipo de Matemáticas que se cursan (Matemáticas I: grupo A; Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I: grupos B y C)

Descriptivos

		N	Media	Desviación típica	Error típico	ervalo de confianza pa la media al 95% Límite inferior	Límite superior	Mínimo	Máximo
PLANIFICACIÓN (PRE-TEST)	A	31	2,7218	,50822	,09128	2,5354	2,9082	1,75	3,88
	B	15	2,6583	,47591	,12288	2,3948	2,9219	1,88	3,50
	C	26	2,7115	,47928	,09399	2,5180	2,9051	2,00	4,00
	Total	72	2,7049	,48506	,05716	2,5909	2,8188	1,75	4,00
ESTRATEGIAS COGNITIVAS (PRE-	A	31	2,6250	,54772	,09837	2,4241	2,8259	1,63	4,00
	B	15	2,3670	,42316	,10926	2,1327	2,6013	1,75	3,13
	C	26	2,6106	,54352	,10659	2,3910	2,8301	1,88	4,00
	Total	72	2,5660	,52602	,06199	2,4424	2,6897	1,63	4,00
AUTOEVALUACIÓN (PRE-TEST)	A	31	2,6815	,49354	,08864	2,5004	2,8625	2,00	4,00
	B	15	2,5667	,58605	,15132	2,2421	2,8912	1,63	3,63
	C	26	2,4713	,35419	,06946	2,3283	2,6144	1,88	3,13
	Total	72	2,5817	,47294	,05574	2,4705	2,6928	1,63	4,00
ESFUERZO (PRE-T	A	31	2,6734	,55965	,10052	2,4681	2,8787	1,63	4,00
	B	15	2,4583	,72066	,18607	2,0592	2,8574	1,13	3,63
	C	26	2,6971	,55133	,10812	2,4744	2,9198	1,88	4,00
	Total	72	2,6372	,59196	,06976	2,4980	2,7763	1,13	4,00
AUTOEFICACIA (PRE-TEST)	A	31	2,6895	,71379	,12820	2,4277	2,9513	1,63	4,00
	B	15	2,7167	,62226	,16067	2,3721	3,0613	1,50	3,63
	C	26	3,0144	,51396	,10080	2,8068	3,2220	2,25	4,00
	Total	72	2,8125	,63884	,07529	2,6624	2,9626	1,50	4,00

Prueba de homogeneidad de varianzas

	Estadístico de Levene	gl1	gl2	Sig.
PLANIFICACIÓN (PRE-TEST)	,012	2	69	,988
ESTRATEGIAS COGNITIVAS (PRE-TEST)	,527	2	69	,593
AUTOEVALUACIÓN (PRE-TEST)	2,119	2	69	,128
ESFUERZO (PRE-TEST)	,713	2	69	,494
AUTOEFICACIA (PRE-TEST)	1,735	2	69	,184

B) Diferencias entre grupo control y experimental en pre-test

Descriptivos

		N	Media	Desviación típica	Error típico	Intervalo de confianza para la media al 95% Límite inferior	Límite superior	Mínimo	Máximo
PLANIFICACIÓN (PRE-TEST)	Grupo experim	14	2,7679	,56725	,15160	2,4403	3,0954	2,00	4,00
	Grupo control	58	2,6897	,46741	,06137	2,5668	2,8126	1,75	3,88
	Total	72	2,7049	,48506	,05716	2,5909	2,8188	1,75	4,00
ESTRATEGIAS COGNITIVAS (PRE	Grupo experim	14	2,6875	,56277	,15041	2,3626	3,0124	1,88	4,00
	Grupo control	58	2,5367	,51762	,06797	2,4006	2,6728	1,63	4,00
	Total	72	2,5660	,52602	,06199	2,4424	2,6897	1,63	4,00
AUTOEVALUACIÓ (PRE-TEST)	Grupo experim	14	2,4375	,37899	,10129	2,2187	2,6563	1,88	2,88
	Grupo control	58	2,6165	,48940	,06426	2,4878	2,7451	1,63	4,00
	Total	72	2,5817	,47294	,05574	2,4705	2,6928	1,63	4,00
ESFUERZO (PRE-	Grupo experim	14	2,6786	,67886	,18143	2,2866	3,0705	1,88	4,00
	Grupo control	58	2,6272	,57521	,07553	2,4759	2,7784	1,13	4,00
	Total	72	2,6372	,59196	,06976	2,4980	2,7763	1,13	4,00
AUTOEFICACIA (PRE-TEST)	Grupo experim	14	3,1339	,58725	,15695	2,7949	3,4730	2,25	4,00
	Grupo control	58	2,7349	,63104	,08286	2,5690	2,9008	1,50	4,00
	Total	72	2,8125	,63884	,07529	2,6624	2,9626	1,50	4,00

Prueba de homogeneidad de varianzas

	Estadístico de Levene	gl1	gl2	Sig.
PLANIFICACIÓN (PRE-TEST)	,395	1	70	,532
ESTRATEGIAS COGNITIVAS (PRE-TEST)	,006	1	70	,938
AUTOEVALUACIÓN (PRE-TEST)	,440	1	70	,509
ESFUERZO (PRE-TEST)	1,358	1	70	,248
AUTOEFICACIA (PRE-TEST)	,024	1	70	,877

C) Diferencias pre-test post-test de experimental

Estadísticos de muestras relacionadas

		Media	N	Desviación típ.	Error típ. de la media
Par 1	PLANIFICACIÓN (PRE-TEST)	2,7679	14	,56725	,15160
	PLANIFICACIÓN (POST-TEST)	2,7329	14	,27796	,07429
Par 2	ESTRATEGIAS COGNITIVAS (PRE-TEST)	2,6875	14	,56277	,15041
	ESTRATEGIAS COGNITIVAS (POST-TEST)	2,7473	14	,36434	,09738
Par 3	AUTOEVALUACIÓN (PRE-TEST)	2,4375	14	,37899	,10129
	AUTOEVALUACIÓN (POST-TEST)	2,6048	14	,34926	,09334
Par 4	ESFUERZO (PRE-TEST)	2,6786	14	,67886	,18143
	ESFUERZO (POST-TEST)	2,5287	14	,39629	,10591
Par 5	AUTOEFICACIA (PRE-TEST)	3,1339	14	,58725	,15695
	AUTOEFICACIA (POST-TEST)	2,8212	14	,33016	,08824

Correlaciones de muestras relacionadas

		N	Correlación	Sig.
Par 1	PLANIFICACIÓN (PRE-TEST) y PLANIFICACIÓN (POST-TEST)	14	-,240	,409
Par 2	ESTRATEGIAS COGNITIVAS (PRE-TEST) y ESTRATEGIAS COGNITIVAS (POST-TEST)	14	,220	,450
Par 3	AUTOEVALUACIÓN (PRE-TEST) y AUTOEVALUACIÓN (POST-TEST)	14	-,250	,389
Par 4	ESFUERZO (PRE-TEST) y ESFUERZO (POST-TEST)	14	,408	,147
Par 5	AUTOEFICACIA (PRE-TEST) y AUTOEFICACIA (POST-TEST)	14	-,138	,639

D) Diferencias control-experimental en post-test

Descriptivos

		N	Media	Desviación típica	Error típico	Intervalo de confianza para la media al 95% Límite inferior	Límite superior	Mínimo	Máximo
PLANIFICACIÓN (POST-TEST)	Grupo experimenta	14	2,7329	,27796	,07429	2,5724	2,8934	2,13	3,38
	Grupo control	58	2,6743	,39804	,05227	2,5696	2,7789	2,00	3,63
	Total	72	2,6857	,37668	,04439	2,5972	2,7742	2,00	3,63
ESTRATEGIAS COGNITIVAS (POST-TEST)	Grupo experimenta	14	2,7473	,36434	,09738	2,5369	2,9576	1,88	3,25
	Grupo control	58	2,7666	,70790	,09295	2,5805	2,9527	2,00	7,25
	Total	72	2,7628	,65320	,07698	2,6093	2,9163	1,88	7,25
AUTOEVALUACIÓN (POST-TEST)	Grupo experimenta	14	2,6048	,34926	,09334	2,4032	2,8065	1,88	3,00
	Grupo control	58	2,6848	,38498	,05055	2,5836	2,7860	2,00	4,00
	Total	72	2,6692	,37728	,04446	2,5806	2,7579	1,88	4,00
ESFUERZO (POST-TES	Grupo experimenta	14	2,5287	,39629	,10591	2,2999	2,7575	1,63	3,38
	Grupo control	58	2,5147	,34416	,04519	2,4242	2,6052	1,88	3,63
	Total	72	2,5174	,35196	,04148	2,4347	2,6001	1,63	3,63
AUTOEFICACIA (POST-TEST)	Grupo experimenta	14	2,8212	,33016	,08824	2,6306	3,0119	2,13	3,38
	Grupo control	58	2,3231	,48588	,06380	2,1953	2,4508	1,00	3,38
	Total	72	2,4199	,49890	,05880	2,3027	2,5372	1,00	3,38

Prueba de homogeneidad de varianzas

	Estadístico de Levene	gl1	gl2	Sig.
PLANIFICACIÓN (POST-TEST)	4,782	1	70	,113
ESTRATEGIAS COGNITIVAS (POST-TEST)	,176	1	70	,676
AUTOEVALUACIÓN (POST-TEST)	,001	1	70	,981
ESFUERZO (POST-TEST)	,044	1	70	,835
AUTOEFICACIA (POST-TEST)	7,952	1	70	,006

DEL SEGUNDO REI

A) Diferencias en función del tipo de matemáticas que se cursan

Descriptivos

		N	Media	Desviación típica	Error típico	Intervalo de confianza para la media al 95% Límite inferior	Límite superior	Mínimo	Máximo
PLANIFICACIÓN (PRE-TEST)	A	29	2,8233	,49413	,09176	2,6353	3,0112	2,00	4,00
	B	14	2,5982	,43073	,11512	2,3495	2,8469	1,88	3,25
	C	22	2,6761	,37133	,07917	2,5115	2,8408	2,00	3,25
	Total	65	2,7250	,44549	,05526	2,6146	2,8354	1,88	4,00
ESTRATEGIAS COGNITIVAS (PRE-TEST)	A	29	2,6767	,54845	,10185	2,4681	2,8853	1,63	4,00
	B	14	2,3129	,38142	,10194	2,0926	2,5331	1,75	3,00
	C	22	2,6534	,58622	,12498	2,3935	2,9133	2,00	4,00
	Total	65	2,5905	,54360	,06743	2,4558	2,7252	1,63	4,00
AUTOEVALUACIÓN (PRE-TEST)	A	29	2,7155	,51419	,09548	2,5199	2,9111	2,00	4,00
	B	14	2,4911	,52684	,14080	2,1869	2,7953	1,63	3,38
	C	22	2,4718	,36593	,07802	2,3096	2,6341	1,88	3,13
	Total	65	2,5847	,47962	,05949	2,4658	2,7035	1,63	4,00
ESFUERZO (PRE-TEST)	A	29	2,6767	,57914	,10754	2,4564	2,8970	1,63	4,00
	B	14	2,4464	,74633	,19946	2,0155	2,8773	1,13	3,63
	C	22	2,6420	,44202	,09424	2,4461	2,8380	1,88	3,50
	Total	65	2,6154	,57635	,07149	2,4726	2,7582	1,13	4,00
AUTOEFICACIA (PRE-TEST)	A	29	2,6961	,68582	,12735	2,4352	2,9570	1,63	4,00
	B	14	2,7768	,61272	,16376	2,4230	3,1306	1,50	3,63
	C	22	2,9261	,52136	,11115	2,6950	3,1573	2,00	4,00
	Total	65	2,7913	,61776	,07662	2,6383	2,9444	1,50	4,00

Prueba de homogeneidad de varianzas

	Estadístico de Levene	gl1	gl2	Sig.
PLANIFICACIÓN (PRE-TEST)	,329	2	62	,721
ESTRATEGIAS COGNITIVAS (PRE-TEST)	1,308	2	62	,278
AUTOEVALUACIÓN (PRE-TEST)	1,347	2	62	,267
ESFUERZO (PRE-TEST)	1,823	2	62	,170
AUTOEFICACIA (PRE-TEST)	1,332	2	62	,271

B) Diferencias entre alumnos de grupo control y experimental en pretest

Prueba de homogeneidad de varianzas

	Estadístico de Levene	gl1	gl2	Sig.
PLANIFICACIÓN (PRE-TEST)	,366	1	63	,547
ESTRATEGIAS COGNITIVAS (PRE-TEST)	,023	1	63	,880
AUTOEVALUACIÓN (PRE-TEST)	,932	1	63	,338
ESFUERZO (PRE-TEST)	,041	1	63	,840
AUTOEFICACIA (PRE-TEST)	,493	1	63	,485

C) Diferencias entre pre-test y post-test en grupo experimental

Estadísticos de muestras relacionadas

		Media	N	Desviación típ.	Error típ. de la media
Par 1	PLANIFICACIÓN (PRE-TEST)	2,7604	12	,40752	,11764
	PLANIFICACIÓN (POST-TEST)	2,7184	12	,29838	,08614
Par 2	ESTRATEGIAS COGNITIVAS (PRE-TEST)	2,7396	12	,58741	,16957
	ESTRATEGIAS COGNITIVAS (POST-TEST)	2,6872	12	,39509	,11405
Par 3	AUTOEVALUACIÓN (PRE-TEST)	2,4479	12	,37861	,10930
	AUTOEVALUACIÓN (POST-TEST)	2,5663	12	,36705	,10596
Par 4	ESFUERZO (PRE-TEST)	2,6042	12	,52449	,15141
	ESFUERZO (POST-TEST)	2,5344	12	,47317	,13659
Par 5	AUTOEFICACIA (PRE-TEST)	3,2188	12	,48302	,13944
	AUTOEFICACIA (POST-TEST)	2,9334	12	,36875	,10645

Correlaciones de muestras relacionadas

		N	Correlación	Sig.
Par 1	PLANIFICACIÓN (PRE-TEST) y PLANIFICACIÓN (POST-TEST)	12	-,325	,303
Par 2	ESTRATEGIAS COGNITIVAS (PRE-TEST) y ESTRATEGIAS COGNITIVAS (POST-TEST)	12	,191	,551
Par 3	AUTOEVALUACIÓN (PRE-TEST) y AUTOEVALUACIÓN (POST-TEST)	12	-,269	,398
Par 4	ESFUERZO (PRE-TEST) y ESFUERZO (POST-TEST)	12	,266	,403
Par 5	AUTOEFICACIA (PRE-TEST) y AUTOEFICACIA (POST-TEST)	12	,388	,213

D) Diferencias control-experimental en post-test

Descriptivos

		N	Media	Desviación típica	Error típico	Intervalo de confianza para la media al 95% Límite inferior	Límite superior	Mínimo	Máximo
PLANIFICACIÓN (POST-TEST)	Grupo experiment	12	2,7184	,29838	,08614	2,5288	2,9080	2,13	3,38
	Grupo control	53	2,6522	,42621	,05854	2,5347	2,7697	2,00	3,63
	Total	65	2,6644	,40444	,05016	2,5642	2,7647	2,00	3,63
ESTRATEGIAS COGNITIVAS (POST-TEST)	Grupo experiment	12	2,6872	,39509	,11405	2,4362	2,9383	1,88	3,25
	Grupo control	53	2,6688	,39348	,05405	2,5604	2,7773	2,00	3,63
	Total	65	2,6722	,39074	,04847	2,5754	2,7691	1,88	3,63
AUTOEVALUACIÓN (POST-TEST)	Grupo experiment	12	2,5663	,36705	,10596	2,3331	2,7995	1,88	3,00
	Grupo control	53	2,6590	,35825	,04921	2,5603	2,7578	2,00	3,25
	Total	65	2,6419	,35881	,04451	2,5530	2,7308	1,88	3,25
ESFUERZO (POST-TE	Grupo experiment	12	2,5344	,47317	,13659	2,2337	2,8350	1,63	3,38
	Grupo control	53	2,5226	,33659	,04623	2,4298	2,6153	1,88	3,63
	Total	65	2,5247	,36132	,04482	2,4352	2,6143	1,63	3,63
AUTOEFICACIA (POST-TEST)	Grupo experiment	12	2,9334	,36875	,10645	2,6991	3,1677	2,00	3,38
	Grupo control	53	2,3277	,46844	,06435	2,1985	2,4568	1,00	3,13
	Total	65	2,4395	,50771	,06297	2,3137	2,5653	1,00	3,38

Prueba de homogeneidad de varianzas

	Estadístico de Levene	gl1	gl2	Sig.
PLANIFICACIÓN (POST-TEST)	6,244	1	63	,085
ESTRATEGIAS COGNITIVAS (POST-TEST)	,003	1	63	,956
AUTOEVALUACIÓN (POST-TEST)	,049	1	63	,825
ESFUERZO (POST-TEST)	1,930	1	63	,170
AUTOEFICACIA (POST-TEST)	4,027	1	63	,049

E) Diferencias entre pre-test y "post-test 2" en grupo experimental

Correlaciones de muestras relacionadas

		N	Correlación	Sig.
Par 1	PLANIFICACIÓN (PRE-TEST) y PLANIFICACIÓN (POST-TEST) 2	12	,173	,590
Par 2	ESTRATEGIAS COGNITIVAS (PRE-TEST) y ESTRATEGIAS COGNITIVAS (POST-TEST) 2	12	,756	,004
Par 3	AUTOEVALUACIÓN (PRE-TEST) y AUTOEVALUACIÓN (POST-TEST) 2	12	,493	,104
Par 4	ESFUERZO (PRE-TEST) y ESFUERZO (POST-TEST) 2	12	,667	,018
Par 5	AUTOEFICACIA (PRE-TEST) y AUTOEFICACIA (POST-TEST) 2	12	,320	,310

F) Diferencias entre post-test y "post-test 2" en grupo experimental

Correlaciones de muestras relacionadas

		N	Correlación	Sig.
Par 1	PLANIFICACIÓN (POST-TEST) y PLANIFICACIÓN (POST-TEST) 2	12	-,135	,676
Par 2	ESTRATEGIAS COGNITIVAS (PRE-TEST) y ESTRATEGIAS COGNITIVAS (POST-TEST) 2	12	,756	,004
Par 3	AUTOEVALUACIÓN (POST-TEST) y AUTOEVALUACIÓN (POST-TEST) 2	12	,228	,475
Par 4	ESFUERZO (POST-TEST) y ESFUERZO (POST-TEST) 2	12	,395	,204
Par 5	AUTOEFICACIA (POST-TEST) y AUTOEFICACIA (POST-TEST) 2	12	-,181	,574