

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Matemática Aplicada



**PROPAGACIÓN DE ONDAS EN MULTI-ESTRUCTURAS
FLEXIBLES**

**MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR**

René Dáger Salomón

Bajo la dirección del Doctor:

Enrique Zuazua Iriondo

Madrid, 2002

ISBN: 84-669-1793-4

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA

Propagación de ondas en multi-estructuras flexibles

Tesis en opción al Título de Doctor en Ciencias Matemáticas

Presentada por: **RENÉ DÁGER SALOMÓN**

Dirigida por: **ENRIQUE ZUAZUA IRIONDO**

Madrid, 2001

A mis padres y hermana

Agradecimientos

Quiero expresar mi sincero agradecimiento a aquellas personas que han tenido una incidencia positiva en el desarrollo y culminación de este trabajo. En especial,

a Sergio de Mesa, Leopoldo Oruna y Antonio Doniz, sin cuyo apoyo no se habrían dado las condiciones que me han permitido realizar esta tarea;

a Enrique Zuazua, director de esta tesis, no sólo por su orientación y ayuda. Su optimismo y entusiasmo han sido decisivos;

a Mihaela Negreanu, Lerdys Heredia y José Luis Martínez por su amistad y apoyo;

a todos mis amigos.

Propagación de ondas en multi-estructuras flexibles

Resumen

Este trabajo está dedicado al estudio de propiedades de redes de cuerdas elásticas que experimentan vibraciones transversales a un plano. El movimiento de las redes se describe por la ecuación de ondas $1 - d$ sobre un grafo.

Los resultados principales se refieren al control y la observación de las vibraciones de una red desde uno de sus nodos exteriores. Utilizando técnicas de Análisis de Fourier no armónico se dan condiciones espectrales que garantizan la controlabilidad espectral de la red en cualquier tiempo mayor que el doble de su longitud. Cuando el grafo que soporta la red es un árbol, probamos con ayuda de la fórmula de representación de D'Alembert, una desigualdad de observabilidad con pesos que dependen de los autovalores del problema elíptico correspondiente. Esta desigualdad permite identificar subespacios de estados iniciales de la red controlables y en particular, cuando la red es estrellada, indicar espacios de tipo Sóbolev de estados iniciales controlables.

Las técnicas desarrolladas para tratar el problema mencionado y los resultados obtenidos, nos permiten a su vez resolver otros problemas similares. En particular, se estudian el problema de la controlabilidad simultánea de cuerdas o membranas elásticas desde una región interior y las ecuaciones de tipo Schrödinger, del calor o de vigas sobre redes controladas desde un nodo exterior.

Wave propagation in flexible multi-structures

Abstract

This work is devoted to the study of properties of networks of elastic strings that undergo transversal vibrations with respect to a plane. The motion of the networks is described by the $1 - d$ wave equation on a graph.

The main results are related to the control and observation of the vibrations of a network from one of its exterior nodes. Using techniques of Nonharmonic Fourier Analysis, we give spectral conditions that guarantee the spectral controllability of the network in any time larger than twice its total length. When the network graph is a tree, we prove with the aid of the D'Alembert representation formula, an observability inequality with weights depending on the eigenvalues of the corresponding elliptic problem. This inequality allows to identify subspaces of controllable initial states and, in particular, when the network is star-shaped, to indicate Sobolev-type spaces of controllable initial states.

The techniques developed to handle this problem and the results we have obtained, allow us to solve also other similar problems. In particular, the simultaneous controllability problem for strings or membranes from an interior region and the equations of Schrödinger, heat or beam type on networks controlled from one exterior node are studied.

Índice

Resumen	III
Abstract	V
Introducción	1
Capítulo I. Preliminares	5
1. Redes de cuerdas	5
2. El problema de control	11
3. Un teorema de controlabilidad y sus limitaciones	13
Capítulo II. Herramientas para el estudio del problema de control	15
1. El Método Unicidad-Hilbert (HUM): reducción a un problema de observabilidad.	15
2. La fórmula de D'Alembert y observabilidad desde la frontera de la ecuación de ondas 1-d.	23
3. El método de los momentos	25
4. Bases de Riesz y desigualdades de tipo Ingham	32
Capítulo III. La red de tres cuerdas	41
1. La red de tres cuerdas con dos nodos controlados	41
2. Un problema más simple: control simultáneo de dos cuerdas	44
3. La red de tres cuerdas con un nodo controlado	52
4. Una desigualdad de observabilidad	54
5. Propiedades de la sucesión de autovalores	59
6. Observabilidad de los coeficientes de Fourier de los datos iniciales	63
7. Estudio de los pesos c_n	64
8. Relación entre el problema de control simultáneo de dos cuerdas y el control desde un nodo exterior de la red de tres cuerdas	68
9. Ausencia de controlabilidad para tiempos pequeños	72
10. Aplicación del método de los momentos al control de la red	76
Capítulo IV. Árboles generales	81
1. Notaciones y enunciado del problema	81
2. Los operadores \mathcal{P} y \mathcal{Q}	85
3. El teorema fundamental de observabilidad	96
4. Relación entre \mathcal{Q} y los autovalores	100
5. Resultados de observabilidad	107
6. Consecuencias relativas a la controlabilidad	112

7. Observabilidad y controlabilidad simultánea de redes	113
8. Ejemplos	116
Capítulo V. Algunos resultados de controlabilidad de redes generales	123
1. Controlabilidad espectral de redes generales	123
2. Redes coloreadas	130
3. Exactitud del Teorema de Schmidt	134
Capítulo VI. Control simultáneo desde el interior	139
1. Control interior simultáneo de dos cuerdas	139
2. Control simultáneo sobre todo el dominio	147
Capítulo VII. Otras ecuaciones sobre redes	151
1. Ecuación del calor	152
2. Ecuación de Schrödinger	155
3. Un modelo de red de vigas	159
Conclusiones	163
1. Resumen de los resultados principales	163
2. Líneas futuras	165
Apéndice A. Algunas consecuencias de teoremas de aproximación diofántica	167
Bibliografía	173

Introducción

En los últimos años se ha dedicado un importante número de trabajos al estudio de sistemas mecánicos formados por múltiples elementos acoplados, que pueden ser vigas, cuerdas, placas o membranas vibrantes. Estos se conocen como multi-estructuras; su relevancia práctica es enorme. Sin embargo, la complejidad de los modelos matemáticos que describen el comportamiento de estas estructuras, constituidos generalmente por ecuaciones en derivadas parciales, es muy elevada. En los trabajos [Leu] y [LLS2] y en la bibliografía en ellos indicada puede encontrarse amplia información sobre este tema.

Esta dificultad impone la necesidad de estudiar las variantes más sencillas de dichos modelos para conocer qué resultados pueden esperarse en condiciones de mayor grado de complejidad o de adaptación del modelo a las exigencias prácticas.

Este es precisamente el objetivo de este trabajo. Consideramos ecuaciones en derivadas parciales lineales y con coeficientes constantes, definidas sobre un grafo plano finito. El mayor énfasis se hace en la ecuación de ondas definida sobre un grafo. Esta ecuación sirve de modelo a una red de cuerdas elásticas homogéneas que experimentan vibraciones transversales a un plano y consiste en un número finito de ecuaciones de onda $1-d$ acopladas a través de las condiciones de contorno. Estas condiciones están determinadas por el grafo plano que corresponde al estado de reposo de la red. Consideramos además, las ecuaciones de Schrödinger, del calor y de vigas definidas sobre un grafo. Centramos nuestra atención en el problema de control de las ecuaciones mencionadas desde un vértice exterior del grafo: encontrar qué estados iniciales de los correspondientes sistemas pueden ser llevados al reposo actuando sobre la solución durante un tiempo finito en uno de los extremos del grafo.

En el Capítulo I se introducen los elementos fundamentales relativos al problema considerado: ecuaciones del movimiento de la red, notaciones, formulación, problemas de control. A continuación, se enuncia un teorema debido a J. Schmidt [Sch] que garantiza la controlabilidad exacta de redes de cuerdas en forma de árbol desde sus nodos exteriores. Este teorema exige controlar todos los nodos, excepto uno. A pesar del aparentemente excesivo número de controles necesarios, este resulta ser el único caso en que la red de cuerdas es exactamente controlable y además, independientemente de los valores de las longitudes de las cuerdas.

Si el número de controles es menor, existirán valores de las longitudes de las cuerdas para los cuales existen vibraciones propias localizadas de la red, que no afectan los nodos controlados. En tal caso, el sistema no es siquiera aproximadamente controlable. La respuesta al problema de control pierde su carácter topológico. En general, el espacio de estados iniciales controlables depende de las longitudes de las cuerdas de la red.

Pero además, aún cuando la controlabilidad aproximada tiene lugar, no es posible estimar la energía natural de las soluciones del sistema homogéneo por medio de la norma L^2 de sus trazas en los nodos controlados. Es por ello, que adquiere importancia la noción de controlabilidad espectral:

que sean controlables todos los estados iniciales de la red que son combinaciones lineales finitas de las autofunciones del problema elíptico asociado al sistema hiperbólico del movimiento de la red. Este tipo de controlabilidad es más fuerte que la controlabilidad aproximada, sin embargo, en la mayoría de los problemas considerados, ambas propiedades tienen lugar simultáneamente.

En el Capítulo II se describen las herramientas básicas utilizadas en la obtención de resultados de controlabilidad: el método HUM de J.-L. Lions, el método de los momentos y la técnica de las bases de Riesz. El HUM permite reducir el problema de control al estudio de propiedades de observabilidad de un sistema homogéneo. Esto es, a investigar qué información sobre la energía de las soluciones puede ser obtenida a partir de mediciones de éstas realizadas en los puntos de control. Esta técnica es la que utilizamos fundamentalmente para la demostración de los resultados principales de este trabajo.

El Capítulo III está dedicado a la red de tres cuerdas controlada desde sus nodos exteriores, la más simple de las redes controladas que contienen más de una cuerda. Cuando la red se controla desde dos de los nodos exteriores, el teorema de Schmidt asegura que la red es exactamente controlable. Por ello, ponemos especial atención en el control de la red desde *uno* de sus nodos exteriores.

Los resultados que se obtienen en este capítulo pueden ser fácilmente generalizados al caso de redes estrelladas de n cuerdas. Sin embargo, se han presentado para $n = 3$ con el objetivo de hacer, si es posible, más transparente la exposición.

La red de tres cuerdas es espectralmente controlable en algún tiempo T si, y sólo si, el cociente de las longitudes de las cuerdas no controladas es un número irracional. En tal caso, será espectralmente controlable en tiempo igual a dos veces la suma de las longitudes de todas las cuerdas. Este tiempo de control resulta ser óptimo: en cualquier tiempo menor la red no es siquiera aproximadamente controlable.

La técnica fundamental utilizada en este capítulo para la demostración de desigualdades de observabilidad se basa en la fórmula de D'Alembert para la representación de las soluciones de la ecuación de ondas $1 - d$. Con su ayuda, es posible construir a partir de una solución del sistema homogéneo, una nueva solución cuya energía sí puede estimarse en función de la norma L^2 de las trazas en el nodo controlado de la solución original. Esto conduce a desigualdades de observabilidad de los coeficientes de Fourier del estado inicial con pesos. Estos pesos se calculan de forma explícita en función de los autovalores. Esto permite encontrar condiciones, que al ser impuestas a las longitudes, permiten asegurar la controlabilidad de subespacios de datos iniciales que se describen de manera explícita.

En este capítulo se estudia también el problema de control de la red de tres cuerdas por el método de los momentos. Esto tiene como objetivo mostrar que este método puede ser útil para el estudio de redes.

En el Capítulo IV se estudia la controlabilidad desde un nodo exterior de redes de cuerdas soportadas sobre árboles arbitrarios con un número finito de aristas. Una vez más, utilizando la fórmula de D'Alembert, es posible demostrar desigualdades de observabilidad en tiempo igual a dos veces la suma de las longitudes de todas las cuerdas, con pesos que dependen de los autovalores. Estos pesos resultan ser todos distintos de cero si, y sólo si, la red es espectralmente controlable. Por otra parte, que todos ellos sean no nulos equivale a que dos subárboles cualesquiera con raíz común tengan espectros disjuntos. Esta condición coincide, obviamente, con la condición de irracionalidad obtenida en el Capítulo III para la red de tres cuerdas.

Se considera además el problema de control simultáneo desde un nodo exterior de un número finito de redes soportadas sobre árboles. Esto significa, que se utiliza la misma función de control para controlar todas las redes.

En el Capítulo V se reúnen algunos resultados que no exigen que la red de cuerdas tenga una estructura topológica específica.

En primer lugar, se demuestra que la red es espectralmente controlable desde un nodo exterior en algún tiempo $T > 0$ si, y sólo si, se verifica la propiedad de *continuación espectral única*: ninguna autofunción no nula se anula idénticamente sobre la cuerda que contiene al nodo controlado.

Se estudia además, el problema de control de una red de cuerdas desde todos sus nodos. Resulta, en base al célebre Teorema de los Cuatro Colores, que cuatro funciones distintas, aplicadas simultáneamente en varios nodos, serán suficientes para garantizar la controlabilidad espectral de la red.

Por último, se muestra que el teorema de J. Schmidt formulado en el Capítulo I, no se verifica si el número de nodos no controlados es mayor que uno.

En el Capítulo VI se estudia el problema de control simultáneo de dos cuerdas de densidades en general distintas desde una región interior. Cuando las densidades son diferentes, este tipo de control es más factible que el control simultáneo desde un extremo: las cuerdas son simultáneamente exactamente controlables en cualquier tiempo mayor que los tiempos característicos de ambas cuerdas. Sin embargo, si las densidades de las cuerdas coinciden, el problema es similar al del control desde un extremo y la identificación de subespacios de estados iniciales controlables depende de las propiedades de aproximación racional del cociente de las longitudes de las cuerdas.

El Capítulo VII está dedicado al estudio de otras ecuaciones definidas sobre grafos: las ecuaciones de Schrödinger, del calor y de vigas. Para estas ecuaciones se dan condiciones necesarias y suficientes de controlabilidad espectral en cualquier tiempo $T > 0$ desde un vértice exterior del grafo. Estas condiciones coinciden con la propiedad de *continuación espectral única*. Además, se prueba que es posible identificar subespacios de datos iniciales controlables para estas ecuaciones a partir de subespacios de estados iniciales controlables de la red de cuerdas.

Finalmente, en el Apéndice A se reúnen algunos resultados que se prueban con ayuda de teoremas sobre aproximación diofántica. Estos resultados se utilizan en el trabajo para garantizar la controlabilidad de subespacios que se describen de manera explícita como dominio de alguna potencia del operador elíptico asociado a la red.

Debemos señalar dos cuestiones relacionadas con las notaciones utilizadas. La primera es relativa a la numeración de objetos: ésta se realiza de manera local en cada capítulo. Los teoremas, lemas, proposiciones, etc., incorporan un primer número que indica el capítulo del texto en que aparecen. Así, por ejemplo, la Proposición III.4 sería la proposición número 4 del Capítulo III. En el caso de las secciones, subsecciones y fórmulas, la referencia explícita al capítulo se omite. Por esto, cuando nos referimos a uno de ellos en un capítulo distinto de aquel en que aparecen, utilizaremos un número adicional, que indica el capítulo donde fueron definidos. Por ejemplo, la fórmula (5) del Capítulo IV es citada en este capítulo por (5), pero en los otros por (IV.5).

Indiquemos además, que las constantes positivas que aparecen en el texto se han denotado de manera genérica por C , de modo C puede representar a números que son distintos de línea en línea del

texto. Sólo cuando queremos indicar la dependencia explícita de las constantes de algún parámetro, o para evitar confusiones, se han añadido subíndices a la letra C .

Capítulo I

Preliminares

1. Redes de cuerdas

1.1. Elementos sobre grafos

Un grafo G es un par $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, donde \mathcal{V} es un conjunto, cuyos elementos son llamados *vértices* de G y \mathcal{E} es una familia de pares no ordenados \mathbf{v}, \mathbf{w} de vértices, que denotaremos por $\widehat{\mathbf{vw}}$. Los elementos de \mathcal{E} se llaman *aristas* de G con vértices \mathbf{v}, \mathbf{w} . Cuando el grafo G no tiene aristas de la forma $\widehat{\mathbf{vv}}$ se dice que el grafo es *simple*¹.

Un *camino* entre los vértices \mathbf{v} y \mathbf{w} de un grafo G es un conjunto de aristas

$$\widehat{\mathbf{vv}_1}, \widehat{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2}, \dots, \widehat{\mathbf{v}_{m-1}\mathbf{v}_m}, \widehat{\mathbf{v}_m\mathbf{w}}.$$

Si todas estas aristas son distintas entre si, se dice que el camino es *simple*; si todos los vértices $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ son distintos, el camino se llama *elemental*.

Un *camino cerrado* es un camino entre un vértice y él mismo. Cuando un camino cerrado es elemental se llama *ciclo*. Cuando el grafo G no contiene ciclos se dice que G es un *árbol*.

Los grafos con un número finito de vértices son llamados *finitos*. Supongamos que G es un grafo finito con N vértices y M aristas:

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N\}, \quad \mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_M\}.$$

Llamaremos multiplicidad $m(\mathbf{v})$ del vértice \mathbf{v} , al número de aristas que confluyen en \mathbf{v} :

$$m(\mathbf{v}) := \text{card} \{\mathbf{e} \in \mathcal{E} : \mathbf{v} \in \mathbf{e}\}.$$

Definimos además

$$\mathcal{V}_S := \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} : m(\mathbf{v}) = 1\}, \quad \mathcal{V}_M := \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_S.$$

Observemos que \mathcal{V}_S es el conjunto de los vértices que pertenecen a una sola arista. Estos vértices serán llamados *exteriores*. El conjunto \mathcal{V}_M contiene los restantes vértices, aquellos que pertenecen a más de una arista; éstos serán llamados *interiores*.

¹En ocasiones se utiliza el término grafo solamente para los grafos simples, es decir, para aquellos que no tienen aristas cuyos vértices coinciden. Los grafos no simples son llamados entonces *pseudografos*.

Para un vértice \mathbf{v} , denotamos

$$I_{\mathbf{v}} := \{i : \mathbf{v} \in \mathbf{e}_i\},$$

que es el conjunto de los índices de todas las aristas de G que son incidentes a \mathbf{v} . Si el vértice \mathbf{v}_j es exterior, $I_{\mathbf{v}_j}$ contiene un sólo índice; éste será denotado por $i(j)$ y, si esto no conduce a ambigüedades, simplemente por i .

En este trabajo consideraremos solamente grafos simples finitos cuyos vértices son puntos de un plano. Las aristas del grafo serán interpretadas como los segmentos rectilíneos que unen a algunos de esos puntos. La longitud del segmento que corresponde a la arista \mathbf{e}_i será llamada longitud de \mathbf{e}_i y se denotará por ℓ_i .

Asumiremos además, que las aristas del grafo no se intersectan en puntos que no sean vértices de G . Tales grafos reciben el nombre de *grafos planos*.

En cada arista de G escogemos una orientación (esto es, uno de sus vértices se ha escogido como vértice inicial). Entonces, \mathbf{e}_i puede ser parametrizada en función de su longitud de arco por medio de las funciones $x_i : [0, \ell_i] \rightarrow \mathbf{e}_i$.

Definimos la matriz de incidencia de G

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i(0) = \mathbf{v}_j, \\ -1 & \text{si } x_i(\ell_i) = \mathbf{v}_j. \end{cases}$$

Denotaremos por L la suma de las longitudes de todas las aristas del grafo. Llamaremos a L *longitud del grafo*. Para indicar a qué grafo corresponde, escribiremos, si fuese necesario, L_G .

Dadas las funciones $u^i : [0, \ell_i] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, M$, denotaremos por $\bar{u} : G \rightarrow \mathbb{R}$ la función que al punto $\mathbf{x} \in \mathbf{e}_i$ le hace corresponder $u^i(x_i^{-1}(\mathbf{x}))$. Diremos que \bar{u} es una función definida sobre el grafo G con componentes u^i . Frecuentemente indicaremos este hecho escribiendo simplemente $\bar{u} = (u^1, \dots, u^M)$. En particular, designaremos por $\bar{0}$ el vector cuyas componentes son todas iguales a cero.

1.2. Ecuaciones del movimiento de la red

Consideramos ahora una red de cuerdas elásticas que experimentan pequeñas vibraciones transversales a un plano. En reposo, la red coincide con un grafo G contenido en ese plano.

Supongamos que la función $u^i = u^i(t, x) : \mathbb{R} \times [0, \ell_i] \rightarrow \mathbb{R}$, describe el desplazamiento transversal en el instante t de la cuerda que coincide en reposo con la arista \mathbf{e}_i . Entonces, para cada $t \in \mathbb{R}$, las funciones u^i , $i = 1, \dots, M$, determinan una función $\bar{u}(t)$ sobre G con componentes $u^i : \mathbb{R} \times [0, \ell_i] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $u^i(t, x) = u^i(t, x_i(x))$. Esta función permite identificar la red con su grafo de reposo; en este sentido los vértices de G serán llamados nodos y las aristas, cuerdas.

Como modelo del movimiento de la red asumimos que los desplazamientos u^i satisfacen el siguiente sistema no homogéneo

$$u_{xx}^i - u_{tt}^i = 0 \quad \text{en } \mathbb{R} \times [0, \ell_i], \quad i = 1, \dots, M, \quad (1)$$

$$u^{i(j)}(t, \mathbf{v}_j) = h_j(t) \quad t \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, r, \quad (2)$$

$$u^{i(j)}(t, \mathbf{v}_j) = 0 \quad t \in \mathbb{R}, \quad j = r + 1, \dots, N, \quad (3)$$

$$u^i(t, \mathbf{v}) = u^j(t, \mathbf{v}) \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathcal{M}}, \quad i, j \in I_{\mathbf{v}}, \quad (4)$$

$$\sum_{i \in I_{\mathbf{v}}} \partial_n u^i(t, \mathbf{v}) = 0 \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathcal{M}}, \quad (5)$$

$$u^i(0, x) = u_0^i(x), \quad u_t^i(0, x) = u_1^i(x) \quad x \in [0, \ell_i], \quad i = 1, \dots, M, \quad (6)$$

donde \mathcal{C} es un subconjunto no vacío de \mathcal{V}_S (el conjunto de los nodos controlados) y $\partial_n u^i(t, \mathbf{v}) := \varepsilon_{ij} u_x^i(t, x_i^{-1}(\mathbf{v}))$ es la derivada normal exterior de u_i en el nodo \mathbf{v} . Hemos supuesto que la numeración de los nodos se ha escogido de modo que

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}.$$

Así, (1)-(6) corresponde a una red con r nodos exteriores controlados.

La ecuación (1) es la ecuación de ondas 1-d clásica, que verifican las deformaciones de las cuerdas de la red. Las igualdades (2), (3) reflejan la condición de que sobre algunos de los nodos exteriores, precisamente sobre aquellos que corresponden a los vértices contenidos en \mathcal{C} , actúan controles h_j que regulan sus desplazamientos, mientras que los restantes nodos están fijos. Las relaciones (4) y (5) expresan respectivamente la continuidad de la red y el balance de fuerzas en sus nodos interiores. Por último, (6) indica que la deformación de las cuerdas y su velocidad se suponen conocidas en el instante $t = 0$; el par (\bar{u}_0, \bar{u}_1) será llamado *estado inicial* de la red.

En general, supondremos que el grafo G no contiene vértices de multiplicidad dos, pues estos serían irrelevantes en nuestro modelo, pues pueden ser considerados como puntos interiores de una arista cuya longitud coincide con la suma de las longitudes de las aristas que se unen en ese vértice.

Para el estudio del sistema (1)-(6) necesitaremos un marco funcional apropiado. Definimos los espacios de Hilbert

$$V = \{\bar{u} \in \prod_{i=1}^M H^1(0, \ell_i) : u^i(\mathbf{v}) = u^j(\mathbf{v}) \text{ si } \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathcal{M}} \text{ y } u^i(\mathbf{v}) = 0 \text{ si } \mathbf{v} \in \mathcal{V}_S\},$$

$$H = \prod_{i=1}^M L^2(0, \ell_i),$$

provistos de las estructuras hilbertianas

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle_V &= \sum_{i=1}^M \langle u^i, w^i \rangle_{H^1[0, \ell_i]} = \sum_{i=1}^M \int_0^{\ell_i} u_x^i w_x^i dx, \\ \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle_H &= \sum_{i=1}^M \langle u^i, w^i \rangle_{L^2[0, \ell_i]} = \sum_{i=1}^M \int_0^{\ell_i} u^i w^i dx, \end{aligned}$$

respectivamente. Denotaremos además

$$U = (L^2(0, T))^r.$$

El estudio de la solubilidad del sistema (1)-(6) se realiza de la manera estándar para sistema no homogéneos por el *método clásico de transposición* (véase [LM]): primero se estudia el problema homogéneo ($h_j \equiv 0$ para todo $j = 1, \dots, r$)

$$\phi_{xx}^i - \phi_{tt}^i = 0 \quad \text{en } \mathbb{R} \times [0, \ell_i], \quad i = 1, \dots, M, \quad (7)$$

$$\phi^{i(j)}(t, \mathbf{v}_j) = 0 \quad t \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (8)$$

$$\phi^i(t, \mathbf{v}) = \phi^j(t, \mathbf{v}) \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}_M, \quad i, j \in I_{\mathbf{v}}, \quad (9)$$

$$\sum_{i \in I_{\mathbf{v}}} \partial_n \phi^i(t, \mathbf{v}) = 0 \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}_M, \quad (10)$$

$$\phi^i(0, x) = \phi_0^i(x), \quad \phi_t^i(0, x) = \phi_1^i(x) \quad x \in [0, \ell_i], \quad i = 1, \dots, M; \quad (11)$$

luego, por transposición se define la solución de (1)-(6) para el caso general no homogéneo. Describimos los pasos fundamentales, pues algunos de sus elementos serán usados posteriormente. Los detalles pueden encontrarse en [LM] o [K]. La aplicación de esta técnica al problema concreto de redes de cuerdas puede consultarse en [LLS2].

Como la inyección $V \subset H$ es densa y compacta, al identificar H con su dual H' a través del isomorfismo de Riesz-Fréchet, podemos definir el operador $-\Delta_G : V \rightarrow V'$ por

$$\langle -\Delta_G \bar{u}, \bar{v} \rangle_{V' \times V} = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle_H.$$

El operador $-\Delta_G$ es una isometría de V en V' . La notación $-\Delta_G$ se justifica por el hecho de que, para funciones $\bar{u} \in V$ regulares, el operador $-\Delta_G$ coincide con el operador de Laplace.

Puede demostrarse, que el espectro del operador $-\Delta_G$ está formado por una sucesión creciente y positiva $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Las autofunciones correspondientes $(\bar{\theta}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pueden escogerse de modo que formen una base ortonormal de H .

Para los espacios V y H tienen lugar las caracterizaciones

$$V = \left\{ \bar{u} = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \bar{\theta}_n : \|\bar{u}\|_V^2 := \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n u_n^2 < \infty \right\},$$

$$H = \left\{ \bar{u} = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \bar{\theta}_n : \|\bar{u}\|_H^2 := \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^2 < \infty \right\},$$

y las normas de V y H son equivalentes a $\|\cdot\|_V$ y $\|\cdot\|_H$, respectivamente. Los espacios V y H son espacios de Hilbert con el producto escalar que genera las normas correspondientes.

La solución del sistema homogéneo (7)-(11) con datos iniciales

$$\bar{\phi}_0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi_{0,n} \bar{\theta}_n, \quad \bar{\phi}_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi_{1,n} \bar{\theta}_n, \quad (12)$$

se define entonces por la fórmula

$$\bar{\phi}(t, x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\phi_{0,n} \cos \lambda_n t + \frac{\phi_{1,n}}{\lambda_n} \operatorname{sen} \lambda_n t \right) \bar{\theta}_n(x). \quad (13)$$

Una vez más esta definición se justifica por el hecho de que, para datos iniciales $\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1$ suficientemente regulares, la función determinada por (13) es la única solución de (7)-(11).

Para una solución \bar{u} de (1)-(6) en el sentido clásico, la energía se define como la suma de las energías de sus componentes, esto es,

$$\mathbf{E}_{\bar{u}}(t) := \sum_{i=1}^M \mathbf{E}_{u_i}(t) \quad \text{con} \quad \mathbf{E}_{u_i}(t) := \frac{1}{2} \int_0^{\ell_i} \left(|u_t^i(t, x)|^2 + |u_x^i(t, x)|^2 \right) dx.$$

A partir de las ecuaciones (1)-(5), se demuestra fácilmente que

$$\frac{d}{dt} \mathbf{E}_{\bar{u}}(t) = \sum_{i=1}^r u_t^i(t, \mathbf{v}_j) \partial_n u^i(t, \mathbf{v}_j). \quad (14)$$

En particular, en el caso homogéneo la energía se conserva: $\mathbf{E}_{\bar{\phi}}(t) = \mathbf{E}_{\bar{\phi}}(0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. De hecho, si los datos iniciales se expresan por (12) entonces,

$$\mathbf{E}_{\bar{\phi}} = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} (\mu_n \phi_{0,n}^2 + \phi_{1,n}^2) = \frac{1}{2} (\|\bar{\phi}_0\|_V^2 + \|\bar{\phi}_1\|_H^2). \quad (15)$$

Como la suma en (15) es convergente para todo $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in V \times H$, puede tomarse esta fórmula como definición de la energía de la solución con estado inicial en $V \times H$.

De la definición (13) resulta que, para todos los $T \in \mathbb{R}$ y $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in V \times H$, la solución $\bar{\phi}$ satisface

$$\bar{\phi} \in C([0, T] : V) \cap C^1([0, T] : H). \quad (16)$$

Además, $\bar{\phi}$ es la única solución de (7)-(11) en el sentido de las distribuciones, que posee la propiedad (16).

Para cada $r \in \mathbb{R}$ consideramos los espacios de Hilbert

$$V^r := \left\{ \bar{u} = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \bar{\theta}_n : \|\bar{u}\|_r^2 := \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n^r u_n^2 < \infty \right\}, \quad (17)$$

$$h^r := \left\{ (u_n) : \|(u_n)\|_r^2 := \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n^r |u_n|^2 < \infty \right\},$$

provistos de las normas $\|\cdot\|_r$, donde por (u_n) se denota una sucesión con componentes reales u_n . El isomorfismo canónico $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \bar{\theta}_n \rightarrow (u_n)$ es una isometría entre V^r y h^r .

Observemos que V^r es el dominio de $(-\Delta_G)^{\frac{r}{2}}$ considerado como un operador de H en H . Además, $V = V^1$ y $H = V^0$.

Introducimos además los espacios de Hilbert

$$\mathcal{W}^r := V^r \times V^{r-1},$$

dotados de la estructura producto natural. Tendremos que

$$\mathcal{W}^1 = V \times H, \quad \mathcal{W}^0 = H \times V'.$$

Entonces, es posible definir para el estado inicial $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in \mathcal{W}^r$ la solución del problema homogéneo (7)-(11) por (16). En este caso,

$$\bar{\phi} \in C([0, T] : V^r) \cap C^1([0, T] : V^{r-1}).$$

El siguiente paso en el estudio de la solubilidad del sistema (1)-(6) consiste en demostrar que para cada $T > 0$ existe una constante $C > 0$ tal que, en todo nodo exterior $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_S$, las soluciones regulares del sistema (7)-(11) satisfacen la desigualdad

$$\int_0^T |\partial_n \phi^i(t, \mathbf{v})|^2 dt \leq \mathbf{E}_{\bar{\phi}}. \quad (18)$$

Esta propiedad se conoce como regularidad oculta (*hidden regularity* en la literatura), pues no resulta de (16); es una propiedad específica de las soluciones de (7)-(11) y en general, de soluciones de problemas de Dirichlet para ecuaciones de ondas. La desigualdad (18) puede demostrarse utilizando la fórmula de D'Alembert para la representación de las soluciones de (7). En [LLS2], se prueba por medio de la técnica de multiplicadores de Rellich, una técnica que es también útil en el contexto más amplio de ecuaciones en varias dimensiones y con coeficientes variables.

A partir de ahora, con el objetivo de simplificar las notaciones, supondremos en lo que resta de subsección que $r = 1$, es decir, que sólo hay un nodo controlado. Asumimos además, que a la cuerda que contiene el nodo controlado le corresponde el índice $i = 1$.

Fijamos $T > 0$ y definimos para cada $t \in (0, T]$ el operador $\mathbf{A}_t : H \times V \rightarrow L^2(0, T)$ que asocia a cada par $(\bar{\phi}_1, -\bar{\phi}_0) \in H \times V$ la derivada normal $\partial_n \phi^1(\cdot, \mathbf{v}_1)$ en el nodo controlado de la solución (13) del sistema (7)-(11).

En vista de (18) y (15), \mathbf{A}_t es continuo. Entonces, el operador $\mathbf{A}_t^* : L^2(0, T) \rightarrow V' \times H$, adjunto de \mathbf{A}_t , será también continuo (se han identificado $L^2(0, T)$ y H con sus duales).

Luego, para cada $h \in L^2[0, T]$ se define la solución del sistema (1)-(6) con estado inicial $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in H \times V'$ como

$$\bar{u} = \mathbf{A}_t^* h + \mathbf{S}_t(\bar{u}_0, \bar{u}_1), \quad (19)$$

donde $\mathbf{S}_t(\bar{u}_0, \bar{u}_1)$ es la solución de (7)-(11) dada por (13) en el instante t .

Para aclarar qué significa esta fórmula calculemos el operador \mathbf{A}_t^* . Consideramos el operador \mathbf{B} definido para $h \in C^1([0, t])$ por

$$\mathbf{B}h = \langle \bar{u}(t), \bar{u}_t(t) \rangle_H,$$

donde \bar{u} es la solución en sentido clásico del problema (1)-(6) con datos iniciales $\bar{u}_0 = \bar{u}_1 = 0$.

Si multiplicamos la ecuación (1) por u_i e integramos en $[0, t] \times [0, \ell_i]$ resulta, luego de integrar por partes,

$$\int_0^t \int_0^{\ell_i} (u_{tt}^i - u_{xx}^i) \phi^i dt dx = \int_0^{\ell_i} (u^i \phi_t^i - u_t^i \phi^i)|_0^t dx + \int_0^t (u_x^i \phi^i - u^i \phi_x^i)|_0^{\ell_i} d\tau.$$

Sumando estas igualdades obtenemos, teniendo en cuenta las condiciones de contorno (2)-(5),

$$\int_0^t h \partial_n \phi^1(\tau, \mathbf{v}_1) d\tau = \sum_{i=1}^M \int_0^{\ell_i} (u^i(t, x) \phi_t^i(t, x) - u_t^i(t, x) \phi^i(t, x)) dx,$$

y esta igualdad significa

$$\langle \partial_n \phi^1(t, \mathbf{v}_1), h \rangle_{L^2(0, t)} = \langle \bar{u}(t), \bar{\phi}_t(t) \rangle_{H \times H} - \langle \bar{u}_t(t), \bar{\phi}(t) \rangle_{V' \times V}.$$

Se tiene entonces

$$\langle \mathbf{A} \bar{\phi}, h \rangle_{L^2(0, t)} = \langle \mathbf{B}h, \bar{\phi} \rangle_{(H \times V') \times (H \times V)}.$$

es decir, para $h \in C^1([0, t])$ se cumple $\mathbf{B}h = \mathbf{A}_t^* h$. Teniendo en cuenta que el operador \mathbf{A}_t^* es continuo, y que $C^1([0, t])$ es denso en $L^2(0, t)$, podemos asegurar que \mathbf{A}_t^* coincide con la extensión a $L^2(0, t)$ de \mathbf{B} .

Este hecho le confiere sentido a la igualdad (19). En el caso clásico $h \in C^1([0, t])$, $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in (H \times V')$, $u_0^i, u_1^i \in C^1([0, \ell_i])$, la fórmula (19) expresa simplemente el hecho de que la solución del problema no homogéneo con estado inicial (\bar{u}_0, \bar{u}_1) puede expresarse como la suma de la solución del problema homogéneo con estado inicial (\bar{u}_0, \bar{u}_1) y la solución del problema no homogéneo con estado inicial $(\bar{0}, \bar{0})$, lo cual es consecuencia inmediata de la linealidad del sistema (1)-(6).

Finalmente, para cada $h \in L^2[0, T]$ la solución \bar{u} de (1)-(6) definida por (19) tiene la propiedad

$$\bar{u} \in C([0, T] : H) \cap C^1([0, T] : V').$$

2. El problema de control

El problema de control en tiempo T consiste en averiguar para qué estados iniciales de la red, es posible seleccionar los controles $h_j \in L^2(0, T)$, $j = 1, \dots, r$, de modo que el sistema alcance la posición de equilibrio al cabo de un tiempo T . De manera más precisa,

Definición I.1. — Sea $T > 0$. Diremos que el estado inicial $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in H \times V'$, es **controlable en tiempo T** , si existen funciones $h_j \in L^2(0, T)$, $j = 1, \dots, r$, tales que la solución de (1)-(6) con estado inicial (\bar{u}_0, \bar{u}_1) satisface

$$\bar{u}|_{t=T} = \bar{u}_t|_{t=T} = \bar{0}.$$

Observación I.1. — En ocasiones, en las condiciones de la Definición I.1 se dice también que (\bar{u}_0, \bar{u}_1) es exactamente controlable. Cuando para cada $\varepsilon > 0$ existen controles h_i^ε tales que las correspondientes soluciones \bar{u}^ε verifican $\|(\bar{u}^\varepsilon|_T, \bar{u}_t^\varepsilon|_T)\|_{H \times V'} < \varepsilon$, se dice que (\bar{u}_0, \bar{u}_1) es **aproximadamente controlable en tiempo T** .

El problema de control en tiempo T consiste entonces en caracterizar el conjunto de estados iniciales controlables en tiempo T . La siguiente definición clasifica el sistema (1)-(6) en función de la respuesta al problema de control.

Definición I.2. — Sea $T > 0$. Diremos que el conjunto $K \subset H \times V'$ es controlable en tiempo T , si todos los estados iniciales $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in K$ son controlables en tiempo T . Entonces, diremos que el sistema (1)-(6) es

- 1) **aproximadamente controlable en tiempo T** si existe un conjunto K controlable en tiempo T , que sea denso¹ en $H \times V'$;

¹En otras palabras, el sistema (1)-(6) es aproximadamente controlable si todos los estados iniciales $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in H \times V'$ también lo son.

- 2) **espectralmente controlable en tiempo T** si el subespacio $Z \times Z$ es controlable en tiempo T , donde Z es el conjunto de las combinaciones lineales finitas de las autofunciones del operador $-\Delta_G$;
- 3) **exactamente controlable en tiempo T** si todo el espacio $H \times V'$ es controlable en tiempo T .

Notemos que, debido a la linealidad del sistema (1)-(6), si el conjunto K es controlable, también lo será el subespacio $\text{span } K$ de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de K . Es por ello que resulta natural hablar de subespacios controlables en lugar de conjuntos controlables.

2.1. Formulación equivalente del problema de control

Observemos ante todo, que el problema de control admite una formulación equivalente en términos de operadores. Sea $\mathbf{P}_T : U \rightarrow H \times V'$ el operador definido por

$$\mathbf{P}_T \bar{h} := (\bar{u}(T), \bar{u}_t(T)),$$

donde \bar{u} es la solución del sistema (1)-(6) con estado inicial $(\bar{0}, \bar{0})$.

Denotemos por \mathcal{W}_T la imagen de \mathbf{P}_T ; es decir, \mathcal{W}_T es el conjunto de los estados que pueden alcanzarse al cabo de un tiempo T partiendo del estado de reposo.

Notemos que el estado inicial $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in H \times V'$ es controlable en tiempo T si, y sólo si, $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in \mathcal{W}_T$. Este hecho se debe a la invarianza del sistema (1)-(6) por el cambio de variable $t \rightarrow T - t$: si \bar{u} es una solución de (1)-(6) entonces, $\bar{w}(t) = \bar{u}(T - t)$ también lo es. Así, dado $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in \mathcal{W}_T$, si \bar{u} es una solución que satisface

$$(\bar{u}(0), \bar{u}_t(0)) = (\bar{0}, \bar{0}), \quad (\bar{u}(T), \bar{u}_t(T)) = (\bar{u}_0, \bar{u}_1)$$

con control \hat{h} entonces, $\bar{w}(t) = \bar{u}(T - t)$ satisface

$$(\bar{w}(0), \bar{w}_t(0)) = (\bar{u}_0, \bar{u}_1), \quad (\bar{w}(T), \bar{w}_t(T)) = (\bar{0}, \bar{0});$$

de modo que para llevar (\bar{u}_0, \bar{u}_1) a $(\bar{0}, \bar{0})$ basta elegir el control $\hat{h}(T - t)$.

Como consecuencia, si los estados iniciales (\bar{u}_0, \bar{u}_1) y (\bar{v}_0, \bar{v}_1) son controlables en tiempo T entonces, es posible encontrar un control $\hat{h} \in U$ que lleva (\bar{u}_0, \bar{u}_1) a (\bar{v}_0, \bar{v}_1) . En efecto, bastaría tomar $\hat{h} = \hat{h}_1 + \hat{h}_2$, donde \hat{h}_1, \hat{h}_2 son, respectivamente, los controles que llevan (\bar{u}_0, \bar{u}_1) a $(\bar{0}, \bar{0})$ y $(\bar{0}, \bar{0})$ a (\bar{v}_0, \bar{v}_1) .

Por tanto, el problema de control en tiempo T se reduce a estudiar la imagen \mathcal{W}_T del operador \mathbf{P}_T . Por otra parte, gracias a resultados generales del Análisis Funcional (ver Teorema II.1), el espacio \mathcal{W}_T puede describirse en términos del operador adjunto de \mathbf{P}_T . En esto consiste esencialmente el HUM.

Observemos ahora que, de acuerdo a la definición (19) de la solución de (1)-(6), el adjunto del operador \mathbf{P}_T coincide con \mathbf{A}_T , es decir, el adjunto de \mathbf{P}_T es aquel operador que asocia a $(\bar{\phi}_1, -\bar{\phi}_0) \in H \times V$ el vector $\partial_n \bar{u}|_C \in U$, cuyas componentes son las derivadas normales $\partial_n u^i(., \mathbf{v}_j), j = 1, \dots, r$, de la solución del sistema homogéneo (7)-(11) con estado inicial $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1)$. Es por ello, que el problema de control se reduce a estudiar propiedades de las soluciones del sistema homogéneo (7)-(11).

Por otra parte, $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in \mathcal{W}_T$, es decir, $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) = \mathbf{P}_T \bar{h}$ para algún $\bar{h} \in U$, si, y sólo si, para cada $(\bar{\phi}_1, -\bar{\phi}_0) \in Z \times Z$ se satisface la igualdad

$$\langle (\bar{u}_0, \bar{u}_1), (\bar{\phi}_1, -\bar{\phi}_0) \rangle_{(H \times V') \times (H \times V)} = \langle \mathbf{P}_T \bar{h}, (\bar{\phi}_1, -\bar{\phi}_0) \rangle_{(H \times V') \times (H \times V)}.$$

Entonces, $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in \mathcal{W}_T$ si, y sólo si

$$\langle (\bar{u}_0, \bar{u}_1), (\bar{\phi}_1, -\bar{\phi}_0) \rangle_{(H \times V') \times (H \times V)} = \langle \bar{h}, \mathbf{P}_T^* (\bar{\phi}_1, -\bar{\phi}_0) \rangle_U = \langle \bar{h}, \partial_n \bar{\phi}|_{\mathcal{C}} \rangle_U.$$

Escribamos este resultado en términos convencionales:

Proposición I.1. – *El estado inicial $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in H \times V'$ es controlable en tiempo T con control $\bar{h} = (h_1, \dots, h_r) \in U$ si, y sólo si, para todo $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in Z \times Z$ se verifica la igualdad*

$$\langle \bar{u}_0, \bar{\phi}_1 \rangle_H - \langle \bar{u}_1, \bar{\phi}_0 \rangle_{V' \times V} = \sum_{j=1}^r \int_0^T h_j(t) \partial_n \phi^j(t, \mathbf{v}_j) dt, \quad (20)$$

donde $\bar{\phi}$ es la solución del sistema (7)-(11) con estado inicial $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1)$.

Observación I.2. – *La relación (20) sugiere un algoritmo para la construcción del control \bar{h} . Si buscamos el control de la forma $\bar{h} = -\partial_n \bar{\psi}|_{\mathcal{C}}$, donde $\bar{\psi}$ es una solución del sistema homogéneo (7)-(11), entonces la igualdad (20) es la ecuación de Euler $I'(\bar{\psi}_0, \bar{\psi}_1) = 0$ correspondiente al funcional cuadrático $I : V \times H \rightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$I(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) = \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{j=1}^r |\partial_n \phi^j(t, \mathbf{v}_j)|^2 dt + \langle \bar{u}_0, \bar{\phi}_1 \rangle - \langle \bar{u}_1, \bar{\phi}_0 \rangle.$$

Por tanto, si $(\bar{\psi}_0, \bar{\psi}_1)$ es un minimizador de I se verificará (20). El funcional I es continuo y convexo. Para garantizar la controlabilidad de un estado inicial $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in H \times V'$ es suficiente entonces asegurar que I sea coercitivo. Esta es la idea central del método HUM debido a Lions [Li1]. En el Capítulo II describiremos detalladamente esta técnica.

3. Un teorema de controlabilidad y sus limitaciones

Un punto de partida natural para el estudio del problema de control para la red de cuerdas lo constituye el siguiente teorema debido a J. Schmidt.

Teorema I.1 (Schmidt, [Sch]). – *Si G es un árbol (no contiene caminos cerrados) y el conjunto \mathcal{C} contiene a todos los nodos exteriores, excepto, a lo sumo uno, entonces el sistema (1)-(6) es exactamente controlable en cualquier tiempo $T \geq T^*$, donde T^* es igual al doble de la longitud del más largo de los caminos simples que unen el nodo no controlado con los controlados.*

La demostración de este teorema es relativamente sencilla. El ingrediente fundamental es la posibilidad de representar las soluciones de la ecuación de ondas 1-d en cada cuerda mediante la fórmula de D'Alembert. En la Sección III.1 del Capítulo III hemos descrito la demostración para el caso de

una red de tres cuerdas controlada desde dos de sus nodos exteriores. Allí se explica además, como puede procederse en el caso de árboles arbitrarios. Ambos hechos, la estructura de árbol y que todos los nodos salvo uno estén controlados, juegan un papel esencial en la prueba.

Las condiciones del Teorema I.1 parecen, sin embargo, ser muy exigentes: un elevado número de controles y una configuración topológica simple del grafo G . Surge de modo natural la interrogante de si estas condiciones pueden ser debilitadas. ¿Podrá ser el sistema (1)-(6) exactamente controlable cuando hay dos nodos sin controlar o cuando G contiene caminos cerrados, al menos para algunos valores de las longitudes de las cuerdas? Resulta que en ambos casos la respuesta es negativa. En el Capítulo V (Sección V.3) probaremos

Teorema I.2. — *Si G es un árbol y en (1)-(6) hay al menos dos nodos sin controlar entonces, existen estados iniciales $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in H \times V^l$ que no son controlables en ningún tiempo finito T .*

Esto añade un interés particular al Teorema I.1, que lo convierte en un criterio de cuándo el sistema (1)-(6) es exactamente controlable.

En este trabajo estudiaremos fundamentalmente redes de cuerdas controladas desde sus nodos exteriores para las que no se verifican las condiciones del Teorema I.1. Es por ello, que podremos esperar sólo la controlabilidad de subespacios de $H \times V^l$ estrictamente menores.

Capítulo II

Herramientas para el estudio del problema de control

1. El Método Unicidad-Hilbert (HUM): reducción a un problema de observabilidad.

1.1. Descripción del método

En esta sección describiremos la herramienta fundamental utilizada en este trabajo para el estudio del problema de control: el HUM¹, que permite reducir el problema al estudio de propiedades de observabilidad de las soluciones un sistema homogéneo.

Ilustraremos la aplicación del HUM en el sistema (1)-(6), pero utilizaremos un planteamiento abstracto que evita dificultades añadidas a causa de las notaciones y que además, permite su uso en otras circunstancias en las que también estudiaremos el problema de control con la ayuda de este método: cuando la ecuación (1) es sustituida por la ecuación de Schrödinger o del calor, o cuando las condiciones de contorno o la elección de los controles son diferentes.

El punto de partida de la técnica HUM consiste en reducir el problema de control a la identificación de la imagen de un operador continuo como se ha descrito en la Sección I.2. La descripción posterior de los estados iniciales controlables está basada en el siguiente hecho general del Análisis Funcional: si E y F son espacios de Hilbert y $\mathbf{A} : F \rightarrow E$ un operador continuo cuyo adjunto es $\mathbf{A}^* : E' \rightarrow F$ (hemos identificado F y F' por medio de la isometría de Riesz-Fréchet) entonces

Teorema II.1. – *Si \mathbf{A}^* es inyectivo la imagen de \mathbf{A} coincide con el conjunto*

$$M = \{u \in E : \exists C_u > 0 \text{ tal que } |\langle \phi, u \rangle_{E' \times E}| \leq C_u \|\mathbf{A}^* \phi\|_F \ \forall \phi \in E'\}.$$

¹Este método se conoce por las siglas HUM de su nombre en inglés *Hilbert Uniqueness Method*. El nombre es debido a su autor J.-L. Lions (véase [Li1],[Li2]).

Demostración. Demostraremos inicialmente que $\text{Im } \mathbf{A} \subset M$. Si $u \in \text{Im } \mathbf{A}$, es decir, $u = \mathbf{A}p$ para $p \in F$ entonces, para todo $\phi \in E'$

$$|\langle \phi, u \rangle_{E' \times E}| = |\langle \phi, \mathbf{A}p \rangle_{E' \times E}| = |\langle \mathbf{A}^* \phi, p \rangle_F| \leq \|\mathbf{A}^* \phi\|_F \|p\|_F,$$

por lo que $u \in M$ con $C_u = \|p\|_F$.

La inclusión $M \subset \text{Im } \mathbf{A}$ es más delicada. Como \mathbf{A}^* es inyectivo, $\mathbf{A}^* \phi = 0$ si y sólo si $\phi = 0$. Por esto, la función $\|\phi\|_{\mathbf{A}} = \|\mathbf{A}^* \phi\|_F$ es una norma en E' . Sea $H_{\mathbf{A}}$ el completado de E' con respecto a esta norma. Esto significa que existe una isometría $\kappa : (E', \|\cdot\|_{\mathbf{A}}) \rightarrow H_{\mathbf{A}}$ tal que $\kappa(E')$ es denso en $H_{\mathbf{A}}$. Si identificamos E' y $\kappa(E')$ por medio de κ , resulta $E' \subset H_{\mathbf{A}}$ con inyección densa y además, continua, ya que como \mathbf{A}^* es acotado,

$$\|\phi\|_{\mathbf{A}} = \|\mathbf{A}^* \phi\|_F \leq C \|\phi\|_{E'}.$$

Para $u \in M$ y $\phi \in E'$ denotaremos por $\langle \phi, u \rangle$ la imagen por ϕ del funcional lineal y continuo que resulta de extender ϕ a M por continuidad: si la sucesión $(\phi_n) \subset E'$ converge a ϕ en $H_{\mathbf{A}}$ entonces

$$|\langle \phi_n, u \rangle_{E' \times E} - \langle \phi_m, u \rangle_{E' \times E}| = |\langle \phi_n - \phi_m, u \rangle_{E' \times E}| \leq C_u \|\mathbf{A}^*(\phi_n - \phi_m)\|_F = C_u \|\phi_n - \phi_m\|_{\mathbf{A}},$$

por lo que $\langle \phi_n, u \rangle$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} ((ϕ_n) lo es por ser convergente) y por tanto es convergente. Definimos entonces $\langle \phi, u \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \phi_n, u \rangle$. La aplicación $\langle \cdot, u \rangle : H_{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbb{R}$ así definida es lineal y además es continua ya que, al pasar al límite en las relaciones $|\langle \phi_n, u \rangle| \leq C_u \|\phi_n\|_{\mathbf{A}}$ resulta

$$|\langle \phi, u \rangle| \leq C_u \|\phi\|_{\mathbf{A}}. \quad (1)$$

Consideremos ahora el funcional $I : H_{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I(\phi) = \frac{1}{2} \|\phi\|_{\mathbf{A}}^2 - \langle \phi, u \rangle,$$

que es evidentemente continuo y convexo. Aún más, en vista de (1),

$$|I(\phi)| \geq \frac{1}{2} \|\phi\|_{\mathbf{A}}^2 - |\langle \phi, u \rangle| \geq \frac{1}{2} \|\phi\|_{\mathbf{A}}^2 - C_u \|\phi\|_{\mathbf{A}} \rightarrow \infty$$

cuando $\|\phi\|_{\mathbf{A}} \rightarrow \infty$. Entonces, existe un minimizador $\hat{\phi} \in H_{\mathbf{A}}$ que, teniendo en cuenta que I es diferenciable, satisface la ecuación de Euler $I' \hat{\phi} = 0$ y esto es

$$\langle \phi, \hat{\phi} \rangle_{\mathbf{A}} = \langle \mathbf{A}^* \phi, \mathbf{A}^* \hat{\phi} \rangle_F = \langle \phi, u \rangle \quad \text{para todo } \phi \in H_{\mathbf{A}}.$$

En particular, para $\phi \in E'$,

$$\langle \phi, \mathbf{A} \mathbf{A}^* \hat{\phi} \rangle_{E' \times E} = \langle \mathbf{A}^* \phi, \mathbf{A}^* \hat{\phi} \rangle_F = \langle \phi, u \rangle_{E' \times E}.$$

Esto significa que

$$u = \mathbf{A} \mathbf{A}^* \hat{\phi} \in \text{Im } \mathbf{A}. \quad (2)$$

□

Observación II.1. – De manera similar a como se ha hecho en la prueba, puede demostrarse que es posible identificar “por continuidad” $H'_{\mathbf{A}}$ con un subespacio de E . En este caso,

$$H'_{\mathbf{A}} = \{u \in E : \exists C_u > 0 \text{ tal que } |\langle \phi, u \rangle_{E' \times E}| \leq C_u \|\mathbf{A}^* \phi\|_F \text{ para todo } \phi \in E'\}.$$

Del teorema resulta entonces $\text{Im } \mathbf{A} = H'_{\mathbf{A}}$.

Observación II.2. – En general tiene lugar la igualdad $\overline{\text{Im } \mathbf{A}} = (\ker \mathbf{A}^*)^\perp$. De ella resulta que $\text{Im } \mathbf{A}$ es denso en E si y sólo si \mathbf{A}^* es inyectivo, por lo que el Teorema II.1 da la descripción de $\text{Im } \mathbf{A}$ siempre que ésta sea densa en E . Por otro lado, la inyectividad de \mathbf{A}^* equivale a que la ecuación $\mathbf{A}^* \phi = v$ tiene a lo sumo una solución. A esta propiedad de unicidad en que se basa el Teorema II.1 debe su nombre el HUM.

Supongamos ahora que W es un espacio de Hilbert tal que $W \subset E$ con inyección continua y densa. Esto permite extender por continuidad los funcionales lineales y continuos en W a E , de manera que puede considerarse $E' \subset W'$.

El siguiente resultado es de gran utilidad para caracterizar subespacios de $\text{Im } \mathbf{A}$.

Corolario II.1. – El subespacio W está contenido en la imagen del operador \mathbf{A} si, y sólo si, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|\phi\|_{W'} \leq C \|\mathbf{A}^* \phi\|_F, \quad (3)$$

para todo $\phi \in E'$. En tal caso, para todo $u \in W$ existe $p \in F$ tal que

$$\|p\|_F \leq 2C \|u\|_W. \quad (4)$$

Demostración. Consideremos el conjunto

$$\Gamma = \{\phi \in E' : \|\mathbf{A}^* \phi\|_F = 1\} \subset E'.$$

Observemos que el hecho de que exista una constante $C > 0$ tal que

$$\|\phi\|_{W'} \leq C \|\mathbf{A}^* \phi\|_F, \quad (5)$$

para todo $\phi \in E'$, coincide con que Γ sea acotado en W' .

Por otra parte, que $W \subset \text{Im } \mathbf{A}$ equivale a que Γ sea débilmente acotado en W' . En efecto, de acuerdo al Teorema II.1, $W \subset \text{Im } \mathbf{A}$ si y sólo si, para todo $u \in W$ existe una constante C_u tal que

$$|\langle \phi, u \rangle_{W' \times W}| = |\langle \phi, u \rangle_{E' \times E}| \leq C_u \|\mathbf{A}^* \phi\|_F, \quad (6)$$

para cada $\phi \in E'$. Por consiguiente, si $W \subset \text{Im } \mathbf{A}$ entonces, para todos $\phi \in \Gamma$, $u \in W'$,

$$|\langle \phi, u \rangle_{W' \times W}| \leq C_u, \quad (7)$$

es decir, Γ es débilmente acotado. Inversamente, si se verifica la desigualdad (7) y $\psi \in E'$ entonces, tomando $\phi = \frac{\psi}{\|\mathbf{A}^* \psi\|_F} \in \Gamma$ ($\|\mathbf{A}^* \psi\|_F \neq 0$ por ser \mathbf{A}^* inyectivo) resulta

$$|\langle \psi, u \rangle_{W' \times W}| = \|\mathbf{A}^* \psi\|_F |\langle \phi, u \rangle_{W' \times W}| \leq C_u \|\mathbf{A}^* \psi\|_F, \quad (8)$$

por lo que $u \in \text{Im } \mathbf{A}^*$.

Finalmente, basta recordar que las propiedades de ser débilmente acotado y acotado coinciden en los espacios de Hilbert ¹.

¹Esto es consecuencia inmediata del Teorema de acotación uniforme de Banach-Steinhaus y de la reflexividad de los espacios de Hilbert

Para demostrar (4) basta escoger, para $u \in W$, el elemento $p \in F$ obtenido en la demostración del Teorema II.1, es decir $p = \mathbf{A}^* \hat{\phi}$, donde $\hat{\phi}$ es un minimizador del funcional

$$I(\phi) = \frac{1}{2} \|\phi\|_{\mathbf{A}}^2 - \langle \phi, u \rangle.$$

Tendremos entonces,

$$0 = I(0) \geq I(\hat{\phi}) = \frac{1}{2} \|\hat{\phi}\|_{\mathbf{A}}^2 - \langle \hat{\phi}, u \rangle.$$

Por ello,

$$\|\hat{\phi}\|_{\mathbf{A}}^2 \leq 2\langle \hat{\phi}, u \rangle \leq 2\|\phi\|_{W'} \|u\|_W \leq 2C \|\hat{\phi}\|_{\mathbf{A}} \|u\|_W.$$

Entonces, como $\|p\|_F = \|\hat{\phi}\|_{\mathbf{A}}$, resulta

$$\|p\|_F \leq 2C \|u\|_W.$$

□

Observación II.3. – En particular, $\text{Im } \mathbf{A} = E$, esto es, el operador \mathbf{A} es sobreyectivo si, y sólo si, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|\phi\|_{E'} \leq C \|\mathbf{A}^* \phi\|_F, \quad (9)$$

para todo $\phi \in E'$. Esta condición equivale a que $(\mathbf{A}^*)^{-1}$ sea continuo.

Observación II.4. – Debido a la continuidad de \mathbf{A}^* , es suficiente probar la desigualdad (3) para un subespacio denso de E' .

Observación II.5. – La desigualdad (9) se conoce con el nombre de **desigualdad de observabilidad**. En todo este trabajo llamaremos de manera genérica desigualdad de observabilidad a cualquier desigualdad de la forma (3).

Veamos otra posible construcción de subespacios de $\text{Im } \mathbf{A}$, que será utilizada de manera frecuente en este trabajo. Supongamos que $\mathbf{B} : E' \rightarrow E'$ es un operador continuo, con imagen densa en E' que verifica las propiedades

- 1) Existe una constante $C > 0$ tal que para todo $\phi \in E'$,

$$\|\mathbf{B}\phi\|_{E'} \leq C \|\mathbf{A}^* \phi\|_F,$$

para todo $\phi \in E'$.

- 2) Si \mathbf{B} no es inyectivo entonces, tampoco lo es \mathbf{A}^* ; esto es, si existe $\phi \in E' \setminus \{0\}$ tal que $\mathbf{B}\phi = 0$ entonces, existe $\psi \in E' \setminus \{0\}$ tal que $\mathbf{A}^* \psi = 0$.

Notemos que un operador \mathbf{B} con estas propiedades es inyectivo si y sólo si lo es \mathbf{A}^* . Resulta por tanto, que el subespacio $\text{Im } \mathbf{A}$ es denso en E si y sólo si, \mathbf{B} es inyectivo.

En caso de serlo, la propiedad 1 correspondería entonces al hecho de que $\mathbf{B} \circ (\mathbf{A}^*)^{-1}$ sea continuo. Más aún, si \mathbf{B} fuese además sobreyectivo, entonces, de acuerdo al Teorema de Banach sobre la aplicación abierta, su inverso \mathbf{B}^{-1} sería continuo y por ello lo sería \mathbf{A}^* ; se verificaría entonces $\text{Im } \mathbf{A} = E$.

Esto no puede afirmarse si \mathbf{B} no es sobreyectivo. Sin embargo, sí puede asegurarse para un espacio menor.

Proposición II.1. – Si \mathbf{B} es un operador continuo con imagen densa y posee la propiedad 1 entonces $\text{Im } \mathbf{B}^* \subset \text{Im } \mathbf{A}$, donde \mathbf{B}^* es el adjunto de \mathbf{A} .

Demostración. Si $u \in \text{Im } \mathbf{B}^*$, esto es, $u = \mathbf{B}^*v$ entonces

$$\langle u, \phi \rangle_{E \times E'} = \langle \mathbf{B}^*v, \phi \rangle_{E \times E'} = \langle v, \mathbf{B}\phi \rangle_{E \times E'} \leq \|v\|_E \|\mathbf{B}\phi\|_{E'} \leq C \|v\|_E \|\mathbf{A}^*\phi\|_F,$$

por lo que la afirmación resulta del Teorema II.1. \square

La propiedad 2 garantiza que el resultado anterior sea exacto en el sentido de que proporciona un subespacio denso en $\text{Im } \mathbf{A}$ siempre que exista algún subespacio con esta característica. Lamentablemente, este subespacio no coincide necesariamente con la imagen de \mathbf{A} , puede ser menor.

En todo este trabajo utilizaremos los resultados descritos anteriormente en la siguiente situación concreta. Sea H un espacio de Hilbert separable y $\{\theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal de H . Denotemos por Φ el conjunto de todas las combinaciones lineales formales $\bar{X} = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \theta_n$, $x_n \in \mathbb{R}$, y por Z el de las combinaciones lineales finitas.

Sean $(\alpha_n), (\beta_n)$ sucesiones de números reales distintos de cero y definamos el espacio de Hilbert

$$E := \left\{ (\bar{X}, \bar{Y}) \in \Phi \times \Phi : \|(\bar{X}, \bar{Y})\|_E^2 := \sum_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_n^2 x_n^2 + \beta_n^2 y_n^2) < \infty \right\}$$

provisto de la norma $\|\cdot\|_E$. Entonces, el dual de E puede identificarse con el espacio

$$E' = \left\{ (\bar{X}, \bar{Y}) \in \Phi \times \Phi : \|(\bar{X}, \bar{Y})\|_{E'}^2 := \sum_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_n^{-2} x_n^2 + \beta_n^{-2} y_n^2) < \infty \right\}$$

dotado de la norma $\|\cdot\|_{E'}$.

Consideramos como antes el operador lineal y continuo $\mathbf{A} : F \rightarrow E$, cuyo adjunto \mathbf{A}^* es inyectivo. Sea ahora (c_n) otra sucesión que verifica $c_n \geq c\alpha_n$, $c_n \geq d\beta_n$ para ciertos $c, d > 0$ y definimos el espacio

$$W := \left\{ (\bar{X}, \bar{Y}) \in \Phi \times \Phi : \|(\bar{X}, \bar{Y})\|_W^2 := \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n^2 (\alpha_n^2 x_n^2 + \beta_n^2 y_n^2) < \infty \right\} \subset E.$$

Entonces, los resultados del Corolario II.1 nos permiten asegurar que

Proposición II.2. – $W \subset \text{Im } \mathbf{A}$ si y sólo si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|(\bar{X}, \bar{Y})\|_{W'}^2 := \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n^{-2} (\alpha_n^{-2} x_n^2 + \beta_n^{-2} y_n^2) \leq C \|\mathbf{A}^*(\bar{X}, \bar{Y})\|_F^2, \quad (10)$$

para todos $\bar{X}, \bar{Y} \in Z$, es decir, para todas las sucesiones finitas $(x_n), (y_n)$.

Evidentemente, si la desigualdad (10) tiene lugar, entonces $\text{Im } \mathbf{A}$ contiene al subespacio $Z \times Z$ de todas las combinaciones lineales finitas, pero esta condición no es necesaria en general. Para aclarar cuándo esto ocurre notemos que, debido a la linealidad de \mathbf{A} , $Z \times Z \subset \text{Im } \mathbf{A}$ si y sólo si $(\bar{\theta}_n, \bar{0})$ y $(\bar{0}, \bar{\theta}_n)$ pertenecen a $\text{Im } \mathbf{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De acuerdo al Teorema II.1, esto último equivale a que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen constantes $C_n^1, C_n^2 > 0$ tales que

$$| \langle (\bar{X}, \bar{Y}), (\bar{\theta}_n, \bar{0}) \rangle_{E' \times E} | \leq C_n^1 \| \mathbf{A}^*(\bar{X}, \bar{Y}) \|_F,$$

$$| \langle (\bar{X}, \bar{Y}), (\bar{0}, \bar{\theta}_n) \rangle_{E' \times E} | \leq C_n^2 \| \mathbf{A}^*(\bar{X}, \bar{Y}) \|_F.$$

Basta ahora notar que

$$\langle (\bar{X}, \bar{Y}), (\bar{\theta}_n, \bar{0}) \rangle_{E' \times E} = x_n, \quad \langle (\bar{X}, \bar{Y}), (\bar{0}, \bar{\theta}_n) \rangle_{E' \times E} = y_n$$

para concluir:

Proposición II.3. – $Z \times Z \subset \text{Im } \mathbf{A}$ si, y sólo si, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una constante $C_n > 0$ tal que

$$|x_n| + |y_n| \leq C_n \| \mathbf{A}^*(\bar{X}, \bar{Y}) \|_F,$$

para todos $\bar{X}, \bar{Y} \in Z$.

1.2. Aplicación al control de la red

Apliquemos ahora los resultados anteriores al problema de control de la red. Del Teorema II.1 se obtiene inmediatamente

Corolario II.2. – El estado inicial $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in V' \times H$ es controlable en tiempo T si, y sólo si, existe una constante $C > 0$ tal que

$$C \int_0^T \sum_{j=1}^r |\partial_n \phi^i(t, \mathbf{v}_j)|^2 dt \geq | \langle \bar{u}_0, \bar{\phi}_1 \rangle_H - \langle \bar{u}_1, \bar{\phi}_0 \rangle_{V' \times V} |^2$$

para toda solución $\bar{\phi}$ del sistema (I.7)-(I.11) con estado inicial $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in Z \times Z$.

Es interesante señalar cómo la fórmula (2), obtenida en la demostración del Teorema II.1, proporciona un algoritmo para la construcción del control \bar{h} que lleva el estado controlable $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in H \times V'$ a $(\bar{0}, \bar{0})$ en tiempo T : debemos resolver el problema extremal

$$I(\Psi^*) = \min_W I(\Psi) \tag{11}$$

para el funcional

$$I(\Psi) = \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{j=1}^r |\partial_n \phi^i(t, \mathbf{v}_j)|^2 dt + \langle \bar{u}_0, \bar{\phi}_1 \rangle - \langle \bar{u}_1, \bar{\phi}_0 \rangle$$

sobre el espacio W , que es el completado de $Z \times Z$ con la norma

$$\|(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1)\|_W = \left[\int_0^T \sum_{j=1}^r |\partial_n \phi^i(t, \mathbf{v}_j)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

y ϕ es la solución de (I.7)-(I.11) con estado inicial $\Psi = (\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1)$.

Sea $\Psi^* = (\bar{\varphi}_0^*, \bar{\varphi}_1^*)$ la solución del problema (11). A continuación resolvemos el sistema homogéneo (I.7)-(I.11) con datos iniciales $(\bar{\varphi}_1^*, -\bar{\varphi}_0^*)$. Sea $\bar{\phi}$ la solución correspondiente. El control buscado será la traza $\partial_n \bar{\phi}|_c$ de esta solución.

Además de las Observaciones II.2 y II.3 resulta

Corolario II.3. – *El sistema (I.1)-(I.6) es aproximadamente controlable en tiempo T si, y sólo si, se verifica la propiedad de unicidad*

$$\partial_n \phi^i(t, \mathbf{v}_j) = 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad \text{para casi todo } t \in [0, T] \quad \text{implica} \quad (\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) = (\bar{0}, \bar{0}).$$

Más aún, todos los estados iniciales $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in V' \times H$ son exactamente controlables en tiempo T si, y sólo si, existe una constante $C > 0$ tal que

$$C \int_0^T \sum_{j=1}^r |\partial_n \phi^i(t, \mathbf{v}_j)|^2 dt \geq \|(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1)\|_{V \times H}^2 \quad (12)$$

para todo $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in V \times H$.

La desigualdad (12) puede expresarse en términos de los coeficientes de Fourier $(\phi_{0,n}), (\phi_{1,n})$ de los datos iniciales $\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1$ como

$$C \int_0^T \sum_{j=1}^r |\partial_n \phi^i(t, \mathbf{v}_j)|^2 dt \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} (\mu_n \phi_{0,n}^2 + \phi_{1,n}^2). \quad (13)$$

Desafortunadamente, esta desigualdad no es válida para el sistema (I.1)-(I.6) salvo en las condiciones restrictivas sobre el grafo G y la localización de los nodos controlados indicadas en el Teorema I.1. En todo este trabajo trataremos con situaciones donde la desigualdad (12) no es cierta, es decir, cuando existen estados iniciales $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in V' \times H$ que no son controlables en tiempo T . Podremos probar, sin embargo, desigualdades más débiles del tipo

$$\int_0^T \sum_{j=1}^r |\partial_n \phi^i(t, \mathbf{v}_j)|^2 dt \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n^2 (\mu_n u_{0,n}^2 + u_{1,n}^2), \quad (14)$$

con coeficientes c_n no nulos. Esto permitiría asegurar, de acuerdo a la Proposición II.2, que el espacio de estados iniciales $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in V' \times H$ definido por

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{c_n^2} u_{0,n}^2 < \infty, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{c_n^2 \mu_n} u_{1,n}^2 < \infty, \quad (15)$$

es controlable en tiempo T .

De este hecho se resultaría en particular, que el sistema es espectralmente controlable (y por ello aproximadamente controlable) en tiempo T .

Señalemos, que si fuésemos capaces de probar además, que los coeficientes c_n en (14) verifican una desigualdad uniforme del tipo

$$c_n \mu_n^\varepsilon \geq C > 0,$$

para algún $\varepsilon \in \mathbb{R}$, entonces, las sucesiones $(u_{0,n}), (u_{1,n})$ tales que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n^\varepsilon u_{0,n}^2 < \infty, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n^{\varepsilon-1} u_{1,n}^2 < \infty,$$

satisfarían las desigualdades (15). Esto implicaría, que el espacio \mathcal{W}^ε es controlable en tiempo T .

Observación II.6. – *Asumamos que $r = 1$ y que se verifica la desigualdad (14). Si sustituimos $\bar{\phi}$ por su expresión explícita (I.13), obtendremos*

$$\int_0^T \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} \varkappa_k \left(\phi_{0,k} \cos \lambda_k t + \frac{\phi_{1,k}}{\lambda_k} \operatorname{sen} \lambda_k t \right) \right|^2 dt \geq \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k^2 (\mu_k \phi_{0,k}^2 + \phi_{1,k}^2), \quad (16)$$

donde $\varkappa_k = \partial_n \theta_k^1(\mathbf{v}_1)$.

Si definimos para $k < 0$, $\lambda_k := -\lambda_{|k|}$ y denotamos $a_k = \frac{1}{2} \left(u_{0,|k|} - i \frac{u_{1,|k|}}{\lambda_k} \right)$ para $k \in \mathbb{Z}_*$, la desigualdad (16) se escribe

$$\int_0^T \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}_*} \varkappa_{|k|} a_k e^{i\lambda_k t} \right|^2 dt \geq \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k^2 \mu_k |a_k|^2.$$

Por consiguiente, podemos afirmar que esta última desigualdad se verificará para toda sucesión finita (a_k) , en general compleja, que satisfaga $a_{-k} = \overline{a_k}$.

Notemos, sin embargo, que

$$\frac{1}{2} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}_*} \varkappa_{|k|} a_k e^{i\lambda_k t} \right|^2 \leq \left| \sum_{k > 0} \varkappa_{|k|} a_k e^{i\lambda_k t} \right|^2 + \left| \sum_{k < 0} \varkappa_{|k|} a_k e^{i\lambda_k t} \right|^2$$

y como

$$\sum_{k < 0} \varkappa_{|k|} a_k e^{i\lambda_k t} = \sum_{k > 0} \varkappa_k \overline{a_k} e^{-i\lambda_k t} = \overline{\sum_{k > 0} \varkappa_k a_k e^{i\lambda_k t}},$$

obtenemos que tienen lugar las desigualdades

$$\int_0^T \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} \varkappa_k a_k e^{i\lambda_k t} \right|^2 dt \geq C \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k^2 \mu_k |a_k|^2,$$

$$\int_0^T \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} \varkappa_k a_k e^{-i\lambda_k t} \right|^2 dt \geq C \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k^2 \mu_k |a_k|^2,$$

para toda sucesión finita compleja (a_k) .

2. La fórmula de D'Alembert y observabilidad desde la frontera de la ecuación de ondas 1-d.

En esta sección escribimos la fórmula de D'Alembert para las soluciones de la ecuación de ondas $1 - d$ en un modo que permite utilizar cierto formalismo de cálculo para el estudio de la propagación de las soluciones. Esto permite además demostrar propiedades de observabilidad desde los extremos de una cuerda.

2.1. La fórmula de D'Alembert

Supongamos que la función $u(t, x)$ satisface la ecuación de ondas $1 - d$ en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Entonces, para todo $t_* \in \mathbb{R}$ la función u puede expresarse por medio de la fórmula de D'Alembert

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (u(t_*, x + t - t_*) + u(t_*, x - t + t_*)) + \frac{1}{2} \int_{x-t+t_*}^{x+t-t_*} u_t(t_*, \xi) d\xi. \quad (17)$$

Debido a la simetría de la ecuación de ondas respecto a las variables x, t , la fórmula (17) es también válida si se intercambia el papel estas variables. Así, si $u(t, x)$ satisface la ecuación de ondas $1 - d$ en $\mathbb{R} \times [0, \ell]$ entonces, para cualquier $a \in [0, \ell]$, $u(t, x)$ puede representarse a través de la fórmula

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (u(t + x - a, a) + u(t - x + a, a)) + \frac{1}{2} \int_{t-x+a}^{t+x-a} u_x(\tau, a) d\tau. \quad (18)$$

A partir de (18), luego de derivar, obtenemos las igualdades

$$u_x(t, x) = \frac{1}{2} (u_t(t + x - a, a) - u_t(t - x + a, a)) + \quad (19)$$

$$+ \frac{1}{2} (u_x(t + x - a, a) + u_x(t - x + a, a)), \quad (20)$$

$$u_t(t, x) = \frac{1}{2} (u_t(t + x - a, a) + u_t(t - x + a, a)) + \frac{1}{2} (u_x(t + x - a, a) - u_x(t - x + a, a)).$$

Si denotamos

$$G(t) := u_t(t, 0), \quad F(t) := u_x(t, 0), \quad \widehat{G}(t) := u_t(t, \ell), \quad \widehat{F} := u_x(t, \ell),$$

entonces las fórmulas (19)-(20) para $x = \ell, a = 0$ pueden escribirse como

$$\widehat{F} = \ell^+ F + \ell^- G, \quad \widehat{G} = \ell^- F + \ell^+ G, \quad (21)$$

y para $x = 0, a = \ell$

$$F = \ell^+ \widehat{F} - \ell^- \widehat{G}, \quad G = -\ell^- \widehat{F} + \ell^+ \widehat{G}, \quad (22)$$

donde ℓ^+, ℓ^- son los operadores lineales que actúan sobre una función f dependiente del tiempo t de acuerdo a

$$\ell^\pm f(t) := \frac{f(t + \ell) \pm f(t - \ell)}{2}. \quad (23)$$

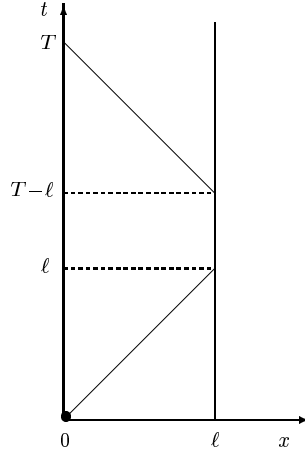


FIGURA 1. Región de aplicación de la fórmula de D'Alembert

Obsérvese que las fórmulas (21) y (22) expresan la relación que existe entre las trazas de u_t y u_x en los extremos del intervalo $[0, \ell]$. Obviamente (22) es la relación inversa de (21).

2.2. Observabilidad desde la frontera de la ecuación de ondas 1 - d

La siguiente proposición es un resultado muy útil sobre observabilidad de ondas 1-d desde la frontera. Será usado frecuentemente en este trabajo.

Proposición II.4. – Si $u(t, x)$ satisface la ecuación de ondas $u_{tt} = u_{xx}$ en $\mathbb{R} \times [0, \ell]$ entonces

$$\mathbf{E}_u(t) \leq \frac{1}{4} \int_{t-\ell}^{t+\ell} (|u_x(\tau, 0)|^2 + |u_t(\tau, 0)|^2) d\tau.$$

Demostración. En vista de (19)-(20), resulta que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_u(t) &= \frac{1}{8} \int_0^\ell \{ |u_t(t+x, 0) - u_t(t-x, 0) + u_x(t+x, 0) + u_x(t-x, 0)|^2 + \\ &+ |u_t(t+x, 0) + u_t(t-x, 0) + u_x(t+x, 0) - u_x(t-x, 0)|^2 \} dx \\ &\leq \frac{1}{4} \int_0^\ell \{ |u_t(t+x, 0)|^2 + |u_t(t-x, 0)|^2 + |u_x(t+x, 0)|^2 + |u_x(t-x, 0)|^2 \} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{t-\ell}^t \{ |u_t(\tau, 0)|^2 + |u_x(\tau, 0)|^2 \} dx + \frac{1}{4} \int_t^{t+\ell} \{ |u_t(\tau, 0)|^2 + |u_x(\tau, 0)|^2 \} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{t-\ell}^{t+\ell} (|u_x(\tau, 0)|^2 + |u_t(\tau, 0)|^2) dt. \end{aligned}$$

□

Proposición II.5. – Para todos $\ell > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ los operadores ℓ^+ , ℓ^- son continuos de $L^2[a - \ell, b + \ell]$ a $L^2[a, b]$.

Demstración. Veremos que además la norma de los operadores ℓ^\pm , considerados como elementos de $\mathcal{L}(L^2[a - \ell, b + \ell], L^2[a, b])$, no es mayor que uno. En efecto

$$\begin{aligned} \int_a^b |\ell^\pm f(t)|^2 dt &= \frac{1}{4} \int_a^b |f(t + \ell) \pm f(t - \ell)|^2 dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_a^b |f(t + \ell)|^2 dt + \frac{1}{2} \int_a^b |f(t - \ell)|^2 dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{a+\ell}^{b+\ell} |f(t)|^2 dt + \frac{1}{2} \int_{a-\ell}^{b-\ell} |f(t)|^2 dt \leq \int_{a-\ell}^{b+\ell} |f(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

□

3. El método de los momentos

En esta sección consideramos un método alternativo para el estudio del problema de control: el método de los momentos. Este método resulta útil no sólo en el caso de redes de cuerdas, sino también en el estudio de los sistemas que se obtienen al sustituir en (I.1)-(I.6) la ecuación de ondas por la del calor y, en general, por ecuaciones cuyas soluciones pueden calcularse por método de separación de variables.

3.1. Descripción del método

Sea H un espacio de Hilbert y (\mathbf{a}_n) una sucesión de elementos de H . Dada una sucesión $(m_n) \in \ell^2$, se conoce por *problema de momentos* al siguiente: encontrar un elemento $v \in H$ tal que

$$\langle v, \mathbf{a}_n \rangle_H = m_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (24)$$

Un problema de momentos aparece de manera natural en el estudio de problemas de control cuando se intenta buscar el control v que lleva un estado inicial al reposo en tiempo T directamente a partir de la Proposición I.1. En este caso, el espacio H es $L^2(0, T)$ y la sucesión (\mathbf{a}_n) está constituida por exponenciales complejos $\mathbf{a}_n = e^{i\lambda_n t}$. Esto conduce al problema de momentos

$$\int_0^T v(t) e^{i\lambda_n t} dt = m_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (25)$$

donde la sucesión (m_n) depende de los coeficientes de Fourier del estado inicial a controlar.

Históricamente, este enfoque fue el primero en producir resultados importantes sobre la controlabilidad de sistemas descritos por ecuaciones en derivadas parciales. Véanse los trabajos [F], [Ru1], [FR], [Ru2], [F1].

Un modo natural de buscar una solución de (24) es resolver inicialmente el problema para las sucesiones de la base canónica $\bar{\mathbf{e}}^k = (\delta_n^k)$ de ℓ^2 . Aquí, el símbolo δ_n^k es la δ de Kronecker (δ_n^k es uno

si $n = k$ y es cero en caso contrario). Si denotamos por v_k las soluciones correspondientes (en caso de existir), se tendrá

$$\langle v_k, \mathbf{a}_n \rangle = \delta_n^k \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Una sucesión con esta propiedad recibe el nombre de *sucesión biortogonal* a la sucesión (\mathbf{a}_n) en H . La utilidad de una sucesión biortogonal es inmediata: si escogemos

$$v = \sum_{k \in \mathbb{N}} m_k v_k, \quad (26)$$

tendremos, al menos de manera formal, que para todo n , se verifica

$$\langle v, \mathbf{a}_n \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} m_k \langle v_k, \mathbf{a}_n \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} m_k \delta_n^k = m_n.$$

Bajo condiciones adicionales de sumabilidad sobre la sucesión (m_n) , la fórmula (26) proporciona realmente una solución de (24):

Proposición II.6. – Si $(v_n) \subset H$ es una sucesión biortogonal a (\mathbf{a}_n) en H entonces, para toda sucesión (m_n) tal que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |m_n| \|v_n\|_H < \infty, \quad (27)$$

existe una solución $v \in H$ de (24). Esta solución está dada por (26).

Demostración. Basta notar que v definida por (26) pertenece a H :

$$\|v\|_H \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |m_n| \|v_n\|_H < \infty.$$

□

Así, resolver el problema de momentos con esta técnica involucra dos elementos fundamentales: determinar una sucesión biortogonal y estimar la norma de sus elementos. De acuerdo a la Proposición II.6, si existe una sucesión biortogonal, podremos indicar un subespacio de sucesiones denso en l^2 , definido por (27), para las cuales el problema de momentos tiene solución. En particular, *la existencia de una sucesión biortogonal garantiza la solubilidad del problema de momentos para toda sucesión finita (m_n)* .

Como se ha indicado antes, en el estudio de problemas de control tienen relevancia los problemas de momentos (25), donde (λ_n) es una sucesión de números complejos tales que $(\Re \lambda_n)$ es creciente¹. En este caso, una sucesión biortogonal puede construirse de manera relativamente simple gracias a los desarrollos de Paley y Wiener [PW].

Al realizar el cambio de variables $t \rightarrow t + A$ con $A = \frac{T}{2}$, el problema (25) puede escribirse en la forma simétrica

$$\int_{-A}^A \tilde{v}(t) e^{i\lambda_n t} dt = \tilde{m}_n, \quad (28)$$

que es un problema de momentos en $L^2(-A, A)$.

Supongamos que F es una función entera que satisface:

¹ $\Re z$ denota la parte real del número complejo z .

- 1) $F \in L^\infty(\mathbb{R})$;
- 2) F es de tipo exponencial no mayor que A : existen constantes $M, A > 0$ tales que $|F(z)| \leq M e^{A|z|}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
- 3) todos los números λ_n son ceros simples de F :

$$F(\lambda_n) = 0, \quad F'(\lambda_n) \neq 0.$$

Entonces, es fácil ver que las funciones

$$F_k(z) := \frac{F(z)}{(z - \lambda_k)F'(\lambda_k)} \quad (29)$$

satisfacen la propiedad 2. Además, puede demostrarse, usando el teorema de Phragmén-Lindelöf (véase, por ejemplo, el Teorema 11, pág. 82 en [Y]), que existe una constante $C > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\|F_k\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{|F'(\lambda_k)|} \|F\|_{L^\infty(\mathbb{R})}; \quad (30)$$

en particular, las funciones F_k pertenecen a $L^2(\mathbb{R})$.

Por último, observemos que $F_k(\lambda_n) = \delta_k^n$.

Ahora podemos aplicar la herramienta fundamental de esta técnica:

Teorema II.2 (Paley y Wiener, [PW]). — *La función F es la transformada de Fourier de una función $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ con soporte contenido en el intervalo $[-A, A]$, es decir,*

$$F(z) = \int_{-A}^A e^{izt} \varphi(t) dt,$$

si y sólo si, F es una función entera de tipo exponencial a lo sumo A y $F \in L^2(\mathbb{R})$.

Al aplicar el Teorema II.2 a las funciones F_k definidas por (29) resultará que existen funciones $v_k \in L^2(-A, A)$ tales que

$$F_k(z) = \int_{-A}^A e^{izt} v_k(t) dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

De estas igualdades se obtiene

$$\int_{-A}^A e^{i\lambda_n t} v_k(t) dt = F_k(\lambda_n) = \delta_k^n,$$

por lo que la sucesión (v_k) será biortogonal a $(e^{i\lambda_n t})$ en $L^2(-A, A)$. Por esta razón la función F es llamada *función generatriz* para la sucesión $(e^{i\lambda_n t})$.

Por otra parte, de acuerdo a la identidad de Plancherel,

$$\|v_k\|_{L^2(-A, A)} = \|F_k\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Como consecuencia, en virtud de (30) existe una constante $C > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\|v_k\|_{L^2(-A, A)} \leq \frac{C}{|F'(\lambda_k)|}. \quad (31)$$

Entonces, si conseguimos construir una función generatriz F de la sucesión (λ_n) , el problema de identificar subespacios de sucesiones (m_n) para las cuales el problema de momentos (28) tiene solución, se reduce entonces a estimar la sucesión $|F'(\lambda_k)|$.

Observación II.7. – *Si fuese posible establecer estimaciones uniformes del tipo*

$$|F'(\lambda_k)| \geq C |\lambda_k|^{-\alpha},$$

entonces, se obtendría

$$\|v_k\|_{L^2(-A,A)} \leq C |\lambda_k|^\alpha$$

y de acuerdo a la Proposición II.6 el problema de momentos (28) tendría solución para cualquier sucesión (m_n) que satisficiera

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |m_n| |\lambda_n|^\alpha < \infty.$$

Resulta útil poder caracterizar subespacios de sucesiones del tipo h^r para las que el problema de momentos tiene solución. Observemos, que si existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n|^\gamma < \infty,$$

entonces, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz resulta

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |m_n| |\lambda_n|^\alpha < \sum_{n \in \mathbb{N}} |m_n|^2 |\lambda_n|^{2(\alpha - \frac{\gamma}{2})} \sum_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n|^\gamma.$$

Por tanto, el problema (28) tendría solución para toda $(m_n) \in h^{\alpha - \frac{\gamma}{2}}$.

Observación II.8. – *Construir una función entera F que se anule en los elementos de la sucesión (λ_n) es relativamente fácil si disponemos de información adicional sobre los números λ_n . Si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|\lambda_n|^p} < \infty,$$

podría tomarse, por ejemplo,

$$F(z) = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\operatorname{sen}(\pi z / \lambda_n)}{\pi z / \lambda_n} \right)^p,$$

que es además una función acotada para $z \in \mathbb{R}$. Algo más complicado resulta conseguir que los ceros de F sean simples. Sin embargo, el problema verdaderamente difícil consiste en estimar $F'(\lambda_n)$. En [Re] y [Lev] puede encontrarse amplia información sobre este tema. Un buen ejemplo de las dificultades que involucra lo constituyen los trabajos [F1], [F], [FR].

El siguiente resultado debido a Russell es de gran utilidad, pues permite obtener una sucesión biortogonal a la familia de exponenciales que aparece relacionada con la ecuación del calor a partir de una biortogonal de la familia de exponenciales de la ecuación de ondas. Esencialmente está contenido en [Ru1], aunque lo enunciamos en un modo más cercano al de [AI, Teorema II.5.20].

Sean $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}_*}$ una sucesión de números reales tales que $\lambda_{-n} = -\lambda_n$ y $(\varkappa_n)_{n \in \mathbb{Z}_*}$ una sucesión compleja simétrica: $\varkappa_{-n} = \varkappa_n$.

Teorema II.3 (Russell, [Ru1]). – Si existe una sucesión (v_n) biortogonal a $(\varkappa_n e^{i\lambda_n t})_{n \in \mathbb{Z}_*}$ en $L^2(-A, A)$ entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existirá una sucesión (w_n) biortogonal a $(\varkappa_n e^{-\lambda_n^2 t})_{n \in \mathbb{N}}$ en $L^2(-\varepsilon, \varepsilon)$. Además, existen constantes positivas C_ε y γ tales que

$$\|w_n\|_{L^2(-\varepsilon, \varepsilon)} \leq C_\varepsilon \|v_n\|_{L^2(-A, A)} e^{\gamma|\lambda_n|},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.2. Aplicación del método de los momentos al control de la red

Veremos ahora como un problema de momentos aparece de manera natural asociado al problema de control para el sistema (I.1)-(I.6). Esto proporcionará una vía alternativa para el estudio de la controlabilidad. En lo que sigue consideraremos que $r = 1$, es decir, la red se controla desde un nodo exterior.

Según la Proposición I.1, el estado inicial $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in H \times V'$ es controlable en tiempo T si y sólo si, existe $h \in L^2(0, T)$ tal que para todo $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in Z \times Z$ se cumple la igualdad

$$\int_0^T h(t) \partial_n \phi^1(t, \mathbf{v}_1) dt = \langle \bar{u}_1, \bar{\phi}_0 \rangle_{V' \times V} - \langle \bar{u}_0, \bar{\phi}_1 \rangle_{H \times H}, \quad (32)$$

donde $\bar{\phi}$ es la solución del sistema homogéneo (I.7)-(I.11) con estado inicial $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1)$.

Observemos que, si

$$\bar{\phi}_0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi_{0,n} \bar{\theta}_n, \quad \bar{\phi}_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi_{1,n} \bar{\theta}_n$$

entonces, a partir de la fórmula (I.13) se tiene que

$$\partial_n \phi^1(t, \mathbf{v}_1) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_*} \varkappa_k \left(\phi_{0,k} \cos \lambda_k t + \frac{\phi_{1,k}}{\lambda_k} \operatorname{sen} \lambda_k t \right),$$

donde $\varkappa_k = \partial_n \theta_k^1(\mathbf{v}_1)$ es el valor en el nodo controlado de la derivada normal de la autofunción $\bar{\theta}_k$. Con esto, la condición (32) se convierte en que, el estado inicial $\bar{u}_0 = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_{0,k} \bar{\theta}_k$, $\bar{u}_1 = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_{1,k} \bar{\theta}_k$ es controlable en tiempo T con control h si, y sólo si, para todas las sucesiones finitas $(\phi_{0,k}), (\phi_{1,k})$ se satisface la relación

$$\int_0^T \varkappa_k \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\phi_{0,k} \cos \lambda_k t + \frac{\phi_{1,k}}{\lambda_k} \operatorname{sen} \lambda_k t \right) h(t) dt = \sum_{k \in \mathbb{N}} (u_{1,k} \phi_{0,k} - u_{0,k} \phi_{1,k}). \quad (33)$$

Escogiendo en (33) $\phi_{0,k} = 1$, $\phi_{0,k} = 0$ para $k \neq k$ y $\phi_{1,k} = 0$ para todo k , lo que corresponde a los datos iniciales $\bar{\phi}_0 = \bar{\theta}_k$, $\bar{\phi}_1 = \bar{0}$, obtenemos

$$\int_0^T \varkappa_k \cos \lambda_k t h(t) dt = u_{1,k}. \quad (34)$$

Análogamente, con $\phi_{1,k} = \lambda_k$, $\phi_{1,k} = 0$ para $k \neq k$ y $\phi_{0,k} = 0$ para todo k ,

$$\int_0^T \varkappa_k \operatorname{sen} \lambda_k t h(t) dt = -\lambda_k u_{0,k}. \quad (35)$$

Naturalmente, las relaciones (34), (35) son necesarias para que se satisfaga (33). Además, son suficientes. En efecto, bastaría multiplicar (34) por $\phi_{0,k}$, (35) por $\phi_{1,k}$ y sumar sobre un conjunto finito $I \subset \mathbb{N}$ para obtener

$$\int_0^T \varkappa_k \sum_{k \in I} \left(\phi_{0,k} \cos \lambda_k t + \frac{\phi_{1,k}}{\lambda_k} \operatorname{sen} \lambda_k t \right) h(t) dt = \sum_{k \in I} (u_{1,k} \phi_{0,k} - u_{0,k} \phi_{1,k}),$$

que es la igualdad (33).

Combinando ahora las igualdades (34), (35) se obtienen

$$\int_0^T \varkappa_k e^{i\lambda_k t} h(t) dt = u_{1,k} - i\lambda_k u_{0,k}, \quad (36)$$

$$\int_0^T \varkappa_k e^{-i\lambda_k t} h(t) dt = u_{1,k} + i\lambda_k u_{0,k} \quad k \in \mathbb{N}. \quad (37)$$

Si definimos para $k < 0$, $\lambda_k = -\lambda_{-k}$ entonces, los resultados anteriores y (36)-(37) pueden unificarse en

Proposición II.7. — *El estado inicial (\bar{u}_0, \bar{u}_1) es controlable en tiempo T con control h si, y sólo si, se verifican las igualdades*

$$\int_0^T \varkappa_{|k|} e^{i\lambda_k t} h(t) dt = u_{1,|k|} - i\lambda_k u_{0,|k|} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}_*, \quad (38)$$

Las igualdades (38) constituyen un problema de momentos para la sucesión $(\varkappa_{|k|} e^{i\lambda_k t})_{k \in \mathbb{Z}_*}$.

Observemos que si h es una función real, lo cual es natural para el sistema (I.1)-(I.6), cualquiera de las relaciones (36)-(37) implica (34) y (35). La razón de escribir las dos igualdades consiste en que el método que usaremos para resolver el problema de momentos no garantiza a priori que la función h sea real. Sin embargo, si somos capaces de construir una función compleja v que satisfaga (38) entonces, la parte real de v satisfaría (34), (35). En efecto, basta notar que la igualdad (37) puede escribirse como

$$\int_0^T \varkappa_k e^{i\lambda_k t} \overline{h(t)} dt = u_{1,k} - i\lambda_k u_{0,k} \quad \text{para } k > 0,$$

por lo que obtenemos, luego de sumarla a la primera de las igualdades,

$$\int_0^T \varkappa_k e^{i\lambda_k t} \frac{h(t) + \overline{h(t)}}{2} dt = u_{1,k} - i\lambda_k u_{0,k} \quad \text{para } k > 0.$$

Obtenemos así, que la función real

$$\hat{h}(t) = \frac{h(t) + \overline{h(t)}}{2}$$

satisface (34) y (35).

Como consecuencia de la Proposición II.7 se obtiene la siguiente caracterización de la controlabilidad espectral del sistema (I.1)-(I.6):

Proposición II.8. — *El sistema (I.1)-(I.6) es espectralmente controlable en tiempo T si, y sólo si, existe una sucesión $(v_k)_{k \in \mathbb{Z}_*}$ biortogonal a $(\varkappa_{|k|} e^{i\lambda_k t})_{k \in \mathbb{Z}_*}$ en $L^2(0, T)$.*

Demostración. Que la existencia de una sucesión biortogonal a $(\varkappa_{|k|} e^{i\lambda_k t})_{k \in \mathbb{Z}_*}$ en $L^2(0, T)$ implica la controlabilidad espectral es inmediato: el problema de momentos (38) tendrá solución para cualesquiera sucesiones finitas $(u_{0,n})$, $(u_{1,n})$ y por ello, de acuerdo a la Proposición II.7, todos los estados iniciales de $Z \times Z$ serán controlables en tiempo T .

Para ver que esta sucesión es necesaria, asumimos que el sistema (I.1)-(I.6) es espectralmente controlable y construimos una sucesión biortogonal a $(\varkappa_{|k|} e^{i\lambda_k t})_{k \in \mathbb{Z}_*}$ en $L^2(0, T)$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, sean $g_m, h_m \in L^2(0, T)$ controles que corresponden a los estados iniciales $(\bar{\theta}_m, \bar{0})$ y $(\bar{0}, \bar{\theta}_m)$, respectivamente. En tal caso, de acuerdo a la Proposición II.7, se cumplirán las igualdades

$$\int_0^T \varkappa_k e^{i\lambda_k t} h_m(t) dt = \delta_{|k|}^m, \quad \int_0^T \varkappa_k e^{i\lambda_k t} g_m(t) dt = -i\lambda_k \delta_{|k|}^m,$$

para $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_*$.

Definimos las funciones

$$v_m = \frac{1}{2} \left(h_{|m|} + \frac{i}{\lambda_{|m|}} g_{|m|} \right), \quad m \in \mathbb{Z}_*. \quad (39)$$

Tendremos entonces

$$\begin{aligned} \int_0^T \varkappa_k e^{i\lambda_k t} v_m(t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^T \varkappa_k e^{i\lambda_k t} h_{|m|}(t) dt + \frac{i}{2\lambda_m} \int_0^T \varkappa_k e^{i\lambda_k t} g_{|m|}(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \delta_{|k|}^m + \frac{\lambda_k}{2\lambda_{|m|}} \delta_{|k|}^m = \delta_k^m. \end{aligned}$$

Esto significa que la sucesión $(v_m)_{m \in \mathbb{Z}_*}$ es biortogonal a $(\varkappa_{|k|} e^{i\lambda_k t})_{k \in \mathbb{Z}_*}$. \square

Si conocemos subespacios de datos iniciales controlables del sistema (I.1)-(I.6), entonces podemos dar información más precisa sobre la sucesión biortogonal construida en la Proposición II.8:

Proposición II.9. — Si el subespacio \mathcal{W}^r de estados iniciales del sistema (I.1)-(I.6) es controlable en tiempo T entonces, existe una sucesión $(v_k)_{k \in \mathbb{Z}_*}$ biortogonal a $(\varkappa_{|k|} e^{i\lambda_k t})_{k \in \mathbb{Z}_*}$ en $L^2(0, T)$ que verifica

$$\|v_k\|_{L^2(0, T)} \leq C \lambda_k^{r-1}, \quad k \in \mathbb{Z}_*,$$

donde C es una constante positiva independiente de k .

Demostración. Si el subespacio \mathcal{W}^r es controlable en tiempo T , existe una constante $C > 0$ tal que

$$\int_0^T |\partial_n \phi^1(t, \mathbf{v}_1)|^2 dt \geq C \|(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1)\|_{V^{1-r} \times V^{-r}}.$$

Entonces, de acuerdo a la Corolario II.1, para cada (\bar{u}_0, \bar{u}_1) existe $h \in L^2(0, T)$ tal que

$$\|h\|_{L^2(0, T)} \leq C \|(\bar{u}_0, \bar{u}_1)\|_{\mathcal{W}^r}.$$

Así, las funciones g_m, h_m construidas en la Proposición II.8 satisfacen

$$\|g_m\|_{L^2(0, T)} \leq C \lambda_m^r, \quad \|h_m\|_{L^2(0, T)} \leq C \lambda_m^{r-1}.$$

Entonces, de (39) resulta

$$\|v_m\|_{L^2(0, T)} \leq C \lambda_m^{r-1}.$$

Basta ahora recordar que la sucesión $(v_m)_{m \in \mathbb{Z}_*}$ es biortogonal a $(\varkappa_{|k|} e^{i\lambda_k t})_{k \in \mathbb{Z}_*}$. \square

Observación II.9. – Al realizar el cambio de variable $t \rightarrow t - \frac{T}{2}$ se obtiene, que las afirmaciones de las Proposiciones II.8 y II.9 continúan siendo válidas si se sustituye el espacio $L^2(0, T)$ por $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$.

Observación II.10. – Los números $\varkappa_k = \partial_n \theta_k^1(\mathbf{v}_1)$ tienen incidencia directa en la controlabilidad espectral del sistema (I.1)-(I.6). Si $\varkappa_k = 0$ para algún k entonces, de (34), (35) resulta, que el estado inicial (\bar{u}_0, \bar{u}_1) podría ser controlable sólo si $u_{0,k} = u_{1,k} = 0$, esto es, si \bar{u}_0 y \bar{u}_1 son ortogonales a $\bar{\theta}_k$. En este caso, el espacio de datos iniciales controlables no sería denso $H \times V'$. Por tanto, la condición $\varkappa_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ es necesaria para la controlabilidad aproximada (y por tanto, espectral) del sistema (I.1)-(I.6).

Para sucesión $(|\varkappa_k|)$ se obtiene fácilmente una estimación superior. Si consideramos las soluciones

$$\bar{\phi}(t, x) = \cos \lambda_k t \bar{\theta}_k(x), \quad k \in \mathbb{N},$$

del sistema homogéneo (I.7)-(I.11) y aplicamos la desigualdad (I.18) resultará

$$|\varkappa_k|^2 \int_0^T |\cos \lambda_k t|^2 dt = \int_0^T |\phi_{k,x}^1(t, \mathbf{v}_1)|^2 dt \leq C \mathbf{E}_{\bar{\phi}} = C \lambda_k^2.$$

De manera análoga, tomando $\bar{\phi}(t, x) = \sin \lambda_k t \bar{\theta}_k(x)$ tendremos además

$$|\varkappa_k|^2 \int_0^T |\sin \lambda_k t|^2 dt = \int_0^T |\phi_{k,x}^1(t, \mathbf{v}_1)|^2 dt \leq C \mathbf{E}_{\bar{\phi}} = C \lambda_k^2.$$

De estas dos desigualdades obtenemos que la sucesión \varkappa_k satisface

$$|\varkappa_k| \leq C \lambda_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (40)$$

4. Bases de Riesz y desigualdades de tipo Ingham

En esta sección describimos la técnica para la demostración de desigualdades de observabilidad basada en un teorema demostrado recientemente por Baiocchi, Komornik y Loreti en [BKL1] y Avdonin y Moran en [AM1], que proporciona una base de Riesz en $L^2(0, T)$ formada por combinaciones lineales finitas de exponenciales complejos $(e^{i\lambda_n t})$. A partir de este resultado, obtenemos en el Teorema II.7 una útil consecuencia: si conseguimos una desigualdad de tipo Ingham para la sucesión (λ_n) , entonces se obtiene una desigualdad similar para las sucesiones (λ_n^s) , $s > 1$.

4.1. Bases de Riesz

En general, si \mathbf{H} es un espacio de Hilbert separable, la sucesión $(\mathbf{a}_n) \subset \mathbf{H}$ se llama *base de Riesz de la adherencia de su envoltura lineal* si existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que se verifica la desigualdad

$$c_1 \|\bar{\gamma}\|_{l^2} \leq \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n \mathbf{a}_n \right\|_{\mathbf{H}} \leq c_2 \|\bar{\gamma}\|_{l^2},$$

para toda sucesión finita de números complejos $\bar{\gamma} = (\gamma_n)$. En particular, si la sucesión (\mathbf{a}_n) es completa en \mathbf{H} se llama *base de Riesz¹ de \mathbf{H}* .

Así, para demostrar desigualdades de observabilidad (13) resulta muy útil disponer de la información que la sucesión $(e^{i\lambda_n t})$ forma una base de Riesz en $L^2(0, T)$.

Observemos que, esencialmente, la técnica derivada del uso de bases de Riesz coincide con la del método de los momentos, pues un teorema debido a Bari [Ba] asegura que la desigualdad

$$c_1 \|\bar{\gamma}\|_{l^2} \leq \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n \mathbf{a}_n \right\|_{\mathbf{H}}$$

es equivalente a que el problema de momentos (24) tenga solución para cualquier sucesión $(m_n) \in l^2$.

4.2. Teoremas generalizados de Ingham

Un importante teorema debido a Ingham [In] asegura que la sucesión $(e^{i\lambda_n t})$ forma una base de Riesz en adherencia de su envoltura lineal en $L^2(0, T)$ si la sucesión (λ_n) satisface la condición de separación

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \gamma > 0, \quad (41)$$

con $\gamma > \frac{2\pi}{T}$.

Una variante más fuerte de este resultado fue dada por Beurling en [B]: si la sucesión (λ_n) satisface la condición (41), entonces $(e^{i\lambda_n t})$ forma una base de Riesz en la clausura de su envoltura lineal en $L^2(0, T)$ para todo T que satisfice

$$T > 2\pi D^+(\lambda_n),$$

donde $D^+(\lambda_n)$ es la densidad superior de la sucesión (λ_n) :

$$D^+(\lambda_n) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^+(r, (\lambda_n))}{r},$$

siendo $n^+(r, (\lambda_n))$ el número máximo de elementos de (λ_n) contenidos en un intervalo de longitud r .

La desigualdad correspondiente a esta afirmación

$$C_1 \|\bar{c}\|_{l^2}^2 \leq \int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \leq C_2 \|\bar{c}\|_{l^2}^2, \quad (\text{I})$$

se conoce con el nombre de *desigualdad de Ingham*. Esta ha sido una herramienta extremadamente útil para el estudio de problemas de control.

¹Una definición equivalente es que (\mathbf{a}_n) sea la imagen de una base ortonormal de \mathbf{H} por una biyección continua. En [Y] puede encontrarse más información.

En muchos problemas concretos, sin embargo, la condición de separación (41) no se verifica. Este es, por ejemplo, el caso de las redes de cuerdas (véase la Proposición III.7). Es por ello que se han dedicado numerosos trabajos a intentar obtener desigualdades similares a (I) concretamente del tipo

$$\int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \geq C \|\mathbf{B}\bar{c}\|_{l^2}^2, \quad (\text{I}_B)$$

donde $\mathbf{B} : l^2 \rightarrow l^2$ es un operador continuo, usualmente con una estructura sencilla, cuando los elementos de la sucesión (λ_n) pueden acercarse. Véanse los trabajos [Ca], [CZ], [JTZ2], [JTZ1], [AM1], [BKL2], [BKL3], [BKL1].

Observemos que una desigualdad del tipo (I_B) garantizaría que el problema de momentos tiene solución para toda \bar{c} que pertenece a la imagen del adjunto de \mathbf{B} . Este subespacio es necesariamente menor que l^2 si la sucesión (λ_n) no satisface la condición de separación (41), pues en caso contrario \mathbf{B} tendría inverso acotado, lo que conduciría a la desigualdad de Ingham, que en no es cierta en ausencia de separación.

El resultado más completo en este sentido fue obtenido de manera simultánea por Baiocchi, Kormornik y Loreti en [BKL2], [BKL3], [BKL1] y Avdonin y Moran en [AM1]. En sus trabajos se prueba una desigualdad (I_B) para sucesiones crecientes de números reales (λ_n) que tienen la siguiente propiedad de separación generalizada:

Existen $\delta > 0$ y un número natural M tales que

$$\lambda_{n+M} - \lambda_n \geq M\delta \quad (42)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Esto significa que puede haber a lo sumo M elementos consecutivos de la sucesión (λ_n) que estén cerca; una cantidad mayor están separados.

Observación II.11. – *La propiedad de separación (42) puede ser descrita de manera equivalente en términos de la densidad superior de la sucesión (λ_n) . Resulta que, si $T > 2\pi D^+(\lambda_n)$ entonces existen $\delta > \frac{2\pi}{T}$ y $M \in \mathbb{N}$ tales que (λ_n) satisface la condición de separación (42). Los detalles pueden encontrarse en [BKL1].*

Para enunciar el resultado principal de los trabajos mencionados y describir como se construye el operador \mathbf{B} que corresponde a este resultado, necesitaremos ciertos elementos previos.

Fijemos una sucesión (λ_n) que satisface la condición de separación (42). Diremos que dos números enteros n, m son equivalentes si $|\lambda_n - \lambda_m| < |n - m| \delta$. Ésta es una relación de equivalencia en \mathbb{Z} . Denotemos por Λ_k , $k \in \mathbb{Z}$, las clases de equivalencia de \mathbb{Z} con respecto a esta relación. Obviamente, cada Λ_k está formada por números consecutivos y contiene $d(k) \leq M$ elementos. Denotamos por $n(k)$ al más pequeño de los elementos de Λ_k . Además, asumimos que la numeración se de las clases se escogido de modo que $n(k+1) - 1 \in \Lambda_k$, es decir, $n(k+1) = n(k) + d(k)$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$ escogemos k de modo que $m \in \Lambda_k$ y definimos la función

$$f_m(t) = \sum_{j=n(k)}^m \frac{e^{i\lambda_j t}}{\pi_{j,m}},$$

donde $\pi_{j,m}$ es el producto de todas las diferencias $\lambda_m - \lambda_j$ con $n(k) \leq j < m$ si $n(k) < m$ y $\pi_{n(k),n(k)} = 1$. Estas funciones reciben el nombre de diferencias divididas de la familia $(e^{i\lambda_n t})$, ver [IK], pág. 246 o [U].

Teorema II.4 (Baiocchi et al. [BKL1], Avdonin-Moran [AM1]). — *Para todos los valores de $\delta > 0$, $M \in \mathbb{N}$ y $T > \frac{2\pi}{\delta}$ si (λ_n) satisface la condición de separación (42), la sucesión (f_n) forma una base de Riesz en la adherencia de su envoltura lineal en $L^2(0, T)$.*

El siguiente resultado se prueba también en [AM1]. Permite saber qué ocurre cuando el valor de T no es suficientemente grande.

Teorema II.5. — *Si la sucesión (λ_n) satisface la condición de separación (42) y $T < 2\pi D^+$ entonces existe una subsucesión propia $(\hat{n}) \subset \mathbb{Z}$ tal que $(f_{\hat{n}})$ forma una base de Riesz en $L^2(0, T)$.*

Como consecuencia, al aplicar el Teorema III.3.10(e) de [AI], resulta

Corolario II.4. — *Si la sucesión (λ_n) satisface la condición $D^+(\lambda_n) < \infty$ entonces, para todo $T < 2\pi D^+(\lambda_n)$, existen números complejos c_n , no todos nulos, tales que*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\lambda_n t} = 0 \quad \text{en } L^2(0, T).$$

En lo que sigue escribimos el resultado del Teorema II.4 en forma de una desigualdad equivalente del tipo (I_B).

Sea \bar{e}^n , $n \in \mathbb{Z}$, la base canónica de l^2 y consideramos los subespacios

$$\mathbf{L}_k = \text{span}_{n \in \Lambda_k} (\bar{e}^n).$$

Cada subespacio \mathbf{L}_k tiene dimensión finita $d(k) \leq M$. Entonces, l^2 se descompone como

$$l^2 = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{L}_k.$$

Sea $m \in \mathbb{N}$. Para cada $\bar{h} = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$, definimos los operadores $\mathbf{A}_m(\bar{h}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ por $\mathbf{A}_m(\bar{h})\bar{x} = A_m(\bar{h})\bar{x}$, donde $A_m(\bar{h})$ es la matriz con componentes

$$\mathbf{A}_{m,ij}(\bar{h}) = \begin{cases} \prod_{k=1}^{i,j} (h_i - h_k)^{-1} & \text{si } i \leq j, \\ 1 & \text{si } i = j = 1, \\ 0 & \text{si } i > j. \end{cases} \quad (43)$$

donde el símbolo $'$ en el producto indica que se ha excluido el factor correspondiente a $k = i$.

Estas matrices serán invertibles si todos los números h_j son distintos entre sí. Tomamos ahora

$$\mathbf{B}_k = \left(\mathbf{A}_{d(k)}(\lambda_{n(k)}, \dots, \lambda_{n(k)+d(k)-1}) \right)^{-1}.$$

Finalmente, el operador \mathbf{B} se define, para $\bar{v} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{v}_k$ como

$$\mathbf{B}\bar{v} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{B}_k \bar{v}_k,$$

donde $\bar{\mathbf{v}}_k$ es la proyección de $\bar{\mathbf{v}}$ sobre \mathbf{L}_k . Este es el operador que aparece en la desigualdad (I_B) asociada a la afirmación del Teorema II.4.

Teorema II.6. – *Para todos los $\delta > 0$, $M \in \mathbb{N}$ y $T > \frac{2\pi}{\delta}$, existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que, si la sucesión (λ_n) satisface la condición de separación (42) entonces,*

$$C_1 \|\mathbf{B}\bar{\mathbf{c}}\|_{l^2}^2 \geq \int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \geq C_2 \|\mathbf{B}\bar{\mathbf{c}}\|_{l^2}^2, \quad (\text{I}_B)$$

para toda sucesión finita $\bar{\mathbf{c}}$.

Debemos señalar que el operador \mathbf{B} tiene una estructura que facilita obtener información a partir de la desigualdad (I_B). De acuerdo a su definición tendremos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}\bar{\mathbf{c}}\|_{l^2}^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{B}_k \bar{\mathbf{c}}_k\|_{l^2}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\| \left(\mathbf{A}_{d(k)}(\lambda_{n(k)}, \dots, \lambda_{n(k)+d(k)-1}) \right)^{-1} \bar{\mathbf{c}}_k \right\|_{l^2}^2 \\ &\geq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k^2 \|\bar{\mathbf{c}}_k\|_{l^2}^2, \end{aligned}$$

donde

$$\gamma_k = \left\| \left(\mathbf{A}_{d(k)}(\lambda_{n(k)}, \dots, \lambda_{n(k)+d(k)-1}) \right) \right\|^{-1}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\|\bar{\mathbf{c}}_k\|_{l^2}^2 = \sum_{n=n(k)}^{n(k)+d(k)-1} |c_n|^2,$$

de la desigualdad (42) resultará

$$\int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \geq C_2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k^2 \sum_{n=n(k)}^{n(k)+d(k)-1} |c_n|^2.$$

Esto dice simplemente que es suficiente tomar pesos γ_k^2 en los coeficientes que corresponden a $n \in \Lambda_k$. Hemos obtenido

Corolario II.5. – *Si la sucesión estrictamente creciente (λ_n) satisface la condición de separación (42) o, lo que es lo mismo, $D^+(\lambda_n) < \infty$ entonces, para todo $T > 2\pi D^+(\lambda_n)$ existen números positivos γ_n , tales que*

$$\int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \geq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n^2 |c_n|^2,$$

para toda sucesión finita (c_n) .

Pueden hacerse estimaciones más precisas de $\left\| \mathbf{A}_{d(k)}^{-1} \bar{\mathbf{c}}_k \right\|_{l^2}^2$ que conduzcan a desigualdades más exactas con pesos que varían dentro de cada grupo Λ_k . Esto depende de la estructura particular del operador \mathbf{A}_m .

4.3. Una nueva desigualdad

El siguiente resultado es de gran utilidad para la identificación de subespacios de datos iniciales controlables para las ecuaciones de Schrödinger y de vigas a partir de subespacios de estados iniciales controlables para el sistema (I.1)-(I.6). Será utilizado en el Capítulo VII.

Teorema II.7. – Sea (λ_n) una sucesión creciente de números positivos con densidad superior $D^+(\lambda_n) < \infty$. Supongamos que existen una constante $C > 0$ y $\alpha < 0$ tales que se verifica la desigualdad

$$\int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \geq C \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n^{2\alpha} c_n^2, \quad (44)$$

para toda sucesión finita \bar{c} . Entonces, para todos $\tau > 0$ y $s > 1$, existe una constante $C_1 > 0$ tal que

$$\int_0^\tau \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\lambda_n^s t} \right|^2 dt \geq C_1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n^{2\alpha} c_n^2,$$

para toda sucesión finita \bar{c} .

La demostración de esta afirmación está basada en el Teorema II.6. Necesitaremos los siguientes resultados técnicos.

Proposición II.10. – Sea $K : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un operador lineal definido por la matriz $A = (a_{ij})$. Si $\|A\|$ es la norma de A considerado como un operador lineal de $l^2(\mathbb{R}^m)$ en $l^2(\mathbb{R}^m)$ entonces,

$$\max_{i,j=1,\dots,m} |a_{ij}| \leq \|A\| \leq \sqrt{m} \max_{i,j=1,\dots,m} |a_{ij}|.$$

Este hecho se prueba fácilmente con la ayuda del lema de Schur o directamente a partir las desigualdad de Cauchy-Schwarz (véase, por ejemplo, [HP], Teorema 3.4.7).

Proposición II.11. – Sea $\mathbf{A}_m(\bar{h}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ definido por (43) y supongamos que $1 < h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_m$. Si $\bar{h}^s = (h_1^s, \dots, h_m^s)$ (\bar{h}^s está formado por las potencias s de las componentes de \bar{h}). Entonces, para todo $s > 1$,

$$\|\mathbf{A}_m(\bar{h}^s)\| \leq \sqrt{m} \|\mathbf{A}_m(\bar{h})\|. \quad (45)$$

Demostración. Observemos que

$$|h_i^s - h_j^s| \geq s |h_i - h_j| h_1^{s-1}$$

por lo que, de la definición de $\mathbf{A}_{m,ij}(\bar{h}^s)$ se obtiene

$$|\mathbf{A}_{m,ij}(\bar{h}^s)| \leq |\mathbf{A}_{m,ij}(\bar{h})| h_1^{(s-1)(j-1)} s^{(j-1)}.$$

Entonces, usando la Proposición II.10,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_m(\bar{h}^s)\| &\leq \sqrt{m} \max_{i,j=1,\dots,m} |\mathbf{A}_{m,ij}(\bar{h}^s)| \leq \sqrt{m} \max_{i,j=1,\dots,m} |\mathbf{A}_{m,ij}(\bar{h})| h_1^{(s-1)(j-1)} s^{(j-1)} \\ &\leq \sqrt{m} \max_{i,j=1,\dots,m} |\mathbf{A}_{m,ij}(\bar{h})| \max_{j=1,\dots,m} h_1^{(s-1)(1-j)} s^{(1-j)}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $h_1 > 1$ resulta

$$\max_{j=1,\dots,m} h_1^{(s-1)(1-j)} s^{(1-j)} = 1$$

y entonces

$$\|\mathbf{A}_m(\bar{h}^s)\| \leq \sqrt{m} \max_{i,j=1,\dots,m} |\mathbf{A}_{m,ij}(\bar{h})|.$$

Aplicando una vez más la Proposición II.10, resulta la desigualdad (45). \square

Demostración del Teorema II.7. Escojamos $\delta < \frac{1}{D^\mp}$ y $T > \frac{2\pi}{\delta}$. De acuerdo al Teorema II.6, existe una constante $C_1 > 0$ tal que

$$C_1 \|\mathbf{B}\bar{c}\|_{l^2}^2 \geq \int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\lambda_n t} \right|^2.$$

Teniendo en cuenta la hipótesis (44) del lema y que

$$\|\mathbf{B}\bar{c}\|_{l^2}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\| \left(\mathbf{A}_{d(k)}(\lambda_{n(k)}, \dots, \lambda_{n(k)+d(k)-1}) \right)^{-1} \bar{c}_k \right\|_{l^2}^2,$$

se obtiene

$$\left\| \left(\mathbf{A}_{d(k)}(\lambda_{n(k)}, \dots, \lambda_{n(k)+d(k)-1}) \right)^{-1} \bar{c}_k \right\|_{l^2}^2 \geq C \sum_{n \in \Lambda_k} \lambda_n^{2\alpha} c_n^2,$$

para todo $\bar{c}_k \in \mathbb{R}^{d(k)}$. Como la sucesión (λ_n) es creciente, esta desigualdad implica que

$$\left\| \left(\mathbf{A}_{d(k)}(\lambda_{n(k)}, \dots, \lambda_{n(k)+d(k)-1}) \right)^{-1} \bar{c}_k \right\|_{l^2}^2 \geq C \lambda_{n(k)+d(k)-1}^{2\alpha} \sum_{n \in \Lambda_k} c_n^2.$$

Podemos así concluir que

$$\left\| \mathbf{A}_{d(k)}(\lambda_{n(k)}, \dots, \lambda_{n(k)+d(k)-1}) \right\| \leq C \lambda_{n(k)+d(k)-1}^{-\alpha}.$$

La Proposición II.11 nos permite entonces asegurar que

$$\left\| \mathbf{A}_{d(k)}(\lambda_{n(k)}^s, \dots, \lambda_{n(k)+d(k)-1}^s) \right\| \leq C \lambda_{n(k)+d(k)-1}^{-\alpha}. \quad (46)$$

Sea ahora $\tau > 0$ y escojamos n_0 tal que $\delta' := \delta s \lambda_{n_0}^{s-1} > \frac{2\pi}{\tau}$. Entonces, para todo $n \geq n_0$ se cumplirá

$$\lambda_{n+M}^s - \lambda_n^s > s (\lambda_{n+M} - \lambda_n) \lambda_n^{s-1} \geq M \delta s \lambda_n^{s-1} = M \delta'.$$

En particular, todo conjunto de la partición (Λ_k^s) de \mathbb{Z} , definida para la sucesión (λ_n^s) para el valor δ' , que contenga un elemento $n \geq n_0$, estará contenido en uno de los conjuntos Λ_k .

Nuevamente a partir del Teorema II.6, obtenemos que, para toda sucesión finita \bar{c} ,

$$\int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\lambda_n^s t} \right|^2 dt \geq C_2 \|\mathbf{B}^s \bar{c}\|_{l^2}^2. \quad (47)$$

Aquí, el operador \mathbf{B}^s corresponde a la sucesión (λ_n^s) y a δ' , es decir, a la partición (Λ_k^s) .

Es posible probar (ver Lema 3.1 en [BKL1]), que si \mathbf{B}_δ y $\mathbf{B}_{\delta'}$ son los operadores definidos por (43) para las particiones generadas por δ y δ' , respectivamente, entonces existen constantes $d_1, d_2 > 0$, que dependen sólo de δ y δ' , tales que

$$d_1 \|\mathbf{B}_\delta \bar{c}\|_{l^2}^2 \leq \|\mathbf{B}_{\delta'} \bar{c}\|_{l^2}^2 \leq d_2 \|\mathbf{B}_\delta \bar{c}\|_{l^2}^2,$$

para toda sucesión finita \bar{c} .

Podemos entonces asumir que el operador \mathbf{B}^s se ha construido para la partición (Λ_k) .

Basta ahora notar que

$$\|\mathbf{B}^s \bar{c}\|_{l^2}^2 \geq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left\| \mathbf{A}_{d(k)}(\lambda_{n(k)}, \dots, \lambda_{n(k)+d(k)-1}) \right\|_{l^2}^{-1} \right)^2 \|\bar{c}_k\|_{l^2}^2$$

y usar la desigualdad (46) para concluir que

$$\int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\lambda_n^s t} \right|^2 dt \geq C_2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_{n(k)+d(k)-1}^{2\alpha} \|\bar{c}_k\|_{l^2}^2.$$

Por último, observemos que existe una constante $C > 0$ tal que para todo n que satisface $n(k) \leq n \leq n(k) + d(k) - 1$, se verifica

$$\lambda_{n(k)+d(k)-1} \leq C \lambda_n.$$

Esto concluye la demostración. □

Capítulo III

La red de tres cuerdas

Este capítulo está dedicado al estudio del problema de control para la más simple de las redes no triviales¹: la red de tres cuerdas. Esto tiene ante todo una intención didáctica. La mayoría de los resultados que aquí se presentan serán generalizados posteriormente en el Capítulo IV al caso general de redes soportadas sobre árboles. Sin embargo, la generalidad del problema involucra engorrosas notaciones, inevitables si se tiene en cuenta la necesidad de referirse de modo preciso a cada uno de los muchos elementos que componen una red. Esto provoca que los métodos usados, esencialmente sencillos, aparezcan enmascarados. Por ello, hemos tratado de describir las ideas fundamentales en un contexto simple, haciendo énfasis en aquellos aspectos que permitirán extender la técnica al marco general.

1. La red de tres cuerdas con dos nodos controlados

1.1. Ecuaciones del movimiento de la red

Sean $T, \ell_0, \ell_1, \ell_2$ números positivos. Consideramos el siguiente sistema no homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt}^i - u_{xx}^i = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times [0, \ell_i] \quad i = 0, 1, 2, \\ u^0(t, 0) = u^1(t, 0) = u^2(t, 0) & t \in \mathbb{R} \\ u_x^0(t, 0) + u_x^1(t, 0) + u_x^2(t, 0) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ u^i(t, \ell_0) = v^i(t), \quad u^2(t, \ell_i) = 0 & t \in \mathbb{R} \quad i = 0, 1, \\ u^i(0, x) = u_0^i(x), \quad u_t^i(0, x) = u_1^i(x) & x \in [0, \ell_i] \quad i = 0, 1, 2. \end{array} \right. \quad (1)$$

que modeliza las vibraciones de una red de tres cuerdas elásticas $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ de longitudes ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 unidas en uno de sus extremos. Las funciones $u^i = u^i(t, x) : [0, \ell_i] \rightarrow \mathbb{R}, i = 0, 1, 2$, representan el desplazamiento transversal de las cuerdas. Sobre los nodos libres de las cuerdas \mathbf{e}_0 y \mathbf{e}_1 actúan controles externos v^0 y v^1 que regulan el movimiento de esos puntos. Observemos que en (1), la parametrización de las cuerdas se ha escogido de modo que los puntos $x = 0$ corresponden al nodo común, mientras que $x = \ell_i$, al nodo exterior de la cuerda \mathbf{e}_i .

¹Queremos indicar con esto que es la más simple de las redes que no se reduce a una sola cuerda.

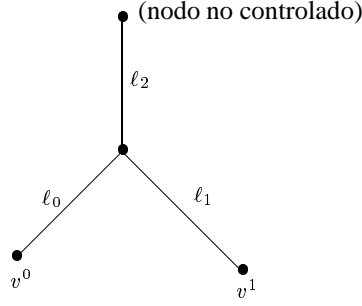


FIGURA 1. La red de tres cuerdas con dos nodos controlados

Sea $T > 0$. De acuerdo a los resultados generales descritos en el Capítulo I, el sistema homogéneo (1) ($v^0 = v^1 = 0$)

$$\begin{cases} \phi_{tt}^i - \phi_{xx}^i = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times [0, \ell_i] \quad i = 0, 1, 2, \\ \phi^0(t, 0) = \phi^1(t, 0) = \phi^2(t, 0) & t \in \mathbb{R} \\ \phi_x^0(t, 0) + \phi_x^1(t, 0) + \phi_x^2(t, 0) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ \phi^i(t, \ell_0) = 0 & t \in \mathbb{R} \quad i = 0, 1, 2, \\ \phi^i(0, x) = \phi_0^i(x), \quad \phi_1^i(0, x) = \phi_1^i(x) & x \in [0, \ell_i] \quad i = 0, 1, 2, \end{cases} \quad (2)$$

tiene una única solución $\bar{\phi}$ con estado inicial $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in V \times H$ que satisface

$$\bar{\phi} \in C([0, T] : V) \cap C^1([0, T] : H). \quad (3)$$

Esta solución se expresa en función de los coeficientes de Fourier $(\phi_{0,n})$, $(\phi_{1,n})$ de los datos iniciales en la base ortonormal $(\bar{\theta}_n)$ formada por las autofunciones del operador elíptico $-\Delta_G$ asociado a (1) mediante la fórmula

$$\bar{\phi}(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\phi_{0,n} \cos \lambda_n t + \frac{\phi_{1,n}}{\lambda_n} \text{sen } \lambda_n t) \bar{\theta}_n(x). \quad (4)$$

La energía de $\bar{\phi}$ es constante en el tiempo; se calcula por la relación

$$\mathbf{E}_{\bar{\phi}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\mu_n \phi_{0,n}^2 + \phi_{1,n}^2). \quad (5)$$

En el caso no homogéneo, para cada $v^0, v^1 \in L^2(0, T)$, existe una solución de (31), definida por transposición, que satisface

$$\bar{u} \in C([0, T] : H) \cap C^1([0, T] : V'),$$

que será además, la única solución de (1) que posee esta última propiedad.

1.2. El problema de control de la red de tres cuerdas

El problema de control en tiempo T para la red de tres cuerdas definida por el sistema (1) consiste en caracterizar los estados iniciales $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in H \times V'$ de la red, para los cuales existen controles

$v^0, v^1 \in L^2(0, T)$ tales que la correspondiente solución de (1) satisface

$$\bar{u}(T) = \bar{u}_t(T) = \bar{0}.$$

El control de la red de tres cuerdas desde dos nodos exteriores satisface las hipótesis del Teorema I.1. En este caso tiene lugar

Teorema III.1. – *El sistema (1) es exactamente controlable en tiempo $T^* = 2(\ell_2 + \max\{\ell_0, \ell_1\})$.*

Demostración. Asumimos que $\ell_0 > \ell_1$, de modo que $T^* = 2(\ell_0 + \ell_2)$. En vista de la Proposición I.1, el estado inicial $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in H \times V'$ es controlable en tiempo T con controles $v^0, v^1 \in L^2(0, T)$ si, y sólo si,

$$\int_0^{T^*} \phi_x^0(t, \ell_0) v^0(t) dt + \int_0^{T^*} \phi_x^1(t, \ell_1) v^1(t) dt = \langle \bar{u}_0, \bar{\phi}_1 \rangle_H - \langle \bar{u}_1, \bar{\phi}_0 \rangle_{V' \times V},$$

para cada solución $\bar{\phi}$ del sistema (2) con estado inicial $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in Z \times Z$. El Corolario II.3 del Teorema II.1 nos permite asegurar que el sistema (1) es exactamente controlable en tiempo T si, y sólo si, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\int_0^{T^*} |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt + \int_0^{T^*} |\phi_x^1(t, \ell_1)|^2 dt \geq C \mathbf{E}_{\bar{\phi}}, \quad (6)$$

para toda solución $\bar{\phi}$ de (2) homogéneo con estado inicial en $Z \times Z$.

Para demostrar la desigualdad (6), basta encontrar $\hat{t} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^{2(\ell_0 + \ell_2)} \left(|\phi_x^0(t, \ell_1)|^2 + |\phi_x^1(t, \ell_2)|^2 \right) dt \geq C \mathbf{E}_{\phi^i(\hat{t})}, \quad i = 0, 1, 2. \quad (7)$$

Gracias a la Proposición II.4 esto es inmediato para $i = 0, 1$ (es decir, para las componentes de la solución sobre las cuerdas controladas) si $\hat{t} \in [\ell_0, 2\ell_2 + \ell_0]$. Para $i = 2$ la idea es simple: la fórmula de D'Alembert permite expresar

$$\phi_x^0(t, 0) = \ell_0^+ \phi_x^0(t, \ell_0), \quad \phi_t^0(t, 0) = \ell_0^- \phi_x^0(t, \ell_0), \quad (8)$$

$$\phi_x^1(t, 0) = \ell_1^+ \phi_x^1(t, \ell_1), \quad \phi_t^1(t, 0) = \ell_1^- \phi_x^1(t, \ell_1). \quad (9)$$

Teniendo en cuenta las condiciones en el nodo común resulta

$$\begin{aligned} \phi_t^2(t, 0) &= \phi_t^1(t, 0) = \ell_1^- \phi_x^1(t, \ell_1), \\ \phi_x^2(t, 0) &= -(\phi_x^0(t, 0) + \phi_x^1(t, 0)) = (\ell_0^+ \phi_x^0(t, \ell_0) + \ell_1^+ \phi_x^1(t, \ell_1)). \end{aligned}$$

Entonces, de acuerdo a la Proposición II.4,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\phi^2(\hat{t})} &\leq \int_{\hat{t}-\ell_2}^{\hat{t}+\ell_2} \left(|\phi_t^2(t, 0)|^2 + |\phi_x^2(t, 0)|^2 \right) dt \\ &= \int_{\hat{t}-\ell_2}^{\hat{t}+\ell_2} \left(|\ell_1^- \phi_x^1(t, \ell_1)|^2 + |\ell_0^+ \phi_x^0(t, \ell_0) + \ell_1^+ \phi_x^1(t, \ell_1)|^2 \right) dt. \end{aligned}$$

De esta desigualdad, aplicando la Proposición II.5 obtenemos

$$C \mathbf{E}_{\phi^2(\hat{t})} \leq \int_{\hat{t}-\ell_2-\ell_1}^{\hat{t}+\ell_2+\ell_1} |\phi_x^1(t, \ell_1)|^2 dt + \int_{\hat{t}-\ell_0-\ell_2}^{\hat{t}+\ell_0+\ell_2} |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt,$$

por lo que, escogiendo $\hat{t} = \ell_0 + \ell_2$, se verificarán las desigualdades (7). \square

Observación III.1. — *Resulta claro que el mismo procedimiento funcionará en el caso de un árbol arbitrario controlado desde todos sus nodos exteriores, excepto uno: bastará aplicar un argumento de inducción. La aplicación de la fórmula de D'Alembert y la Proposición II.4 permite estimar las normas*

$$\int_{-\alpha-\ell}^{\alpha+\ell} |\phi_x(t, \ell)|^2 dt, \quad \int_{-\alpha-\ell}^{\alpha+\ell} |\phi_t(t, \ell)|^2 dt$$

de las trazas ϕ_x y ϕ_t en el extremo $x = \ell$ a partir de las normas

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} |\phi_x(t, 0)|^2 dt, \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} |\phi_t(t, 0)|^2 dt$$

de las trazas ϕ_x y ϕ_t en el extremo $x = 0$. Así, si comenzamos desde los nodos controlados, al llegar a un nodo interior dispondremos de estimaciones de las trazas ϕ_x y ϕ_t de todas las componentes de la solución sobre las cuerdas que se unen en ese nodo, excepto de una de ellas. Las condiciones de acoplamiento permiten entonces obtener estimaciones también para las trazas de esas componentes, lo que hace posible continuar hasta llegar a la cuerda no controlada.

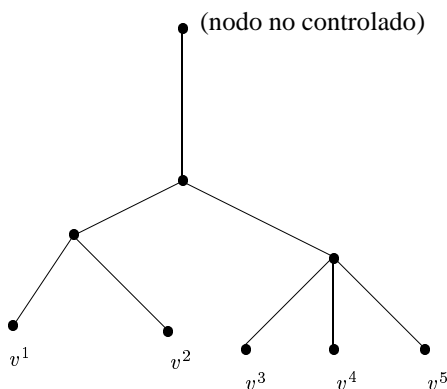


FIGURA 2. Árbol con un nodo no controlado

2. Un problema más simple: control simultáneo de dos cuerdas

Un problema similar al de las tres cuerdas es el de dos cuerdas e_1 y e_2 de longitudes ℓ_1 y ℓ_2 que se controlan simultáneamente desde uno de sus extremos. Este problema fue estudiado de manera implícita en [JTZ2]. Posteriormente, en [TW] y [AT] se consigue una solución esencialmente completa. Los resultados de [TW] se basan en una generalización de la desigualdad de Ingham demostrada en

[JTZ2]. Esta técnica, sin embargo, permite sólo garantizar la controlabilidad en un tiempo mayor del que realmente es necesario. En [AT] se utiliza el método de los momentos que sí proporciona el tiempo mínimo de control. La solución que describimos aquí está basada en argumentos completamente elementales y además proporciona más información que las otras técnicas mencionadas.

El sistema correspondiente al control simultáneo de dos cuerdas es

$$\begin{cases} u_{tt}^i - u_{xx}^i = 0 & (t, x) \in \mathbb{R} \times [0, \ell_i], \\ u^i(t, \ell_i) = 0, \quad u^i(t, 0) = v(t) & t \in \mathbb{R}, \\ u^i(0, x) = u_0^i(x), \quad u_t^i(0, x) = u_1^i(x) & x \in [0, \ell_i], \end{cases} \quad (10)$$

para $i = 1, 2$. En este caso *simultáneamente* hace referencia al hecho de que el control v aplicado en las dos cuerdas es el mismo. A este tipo de problemas, considerado por primera vez por Russell en [Ru3], está dedicado el Capítulo 5 de [Li2].

Para todo $T > 0$ el sistema (10) está bien puesto para estados iniciales de $(u_0^i, u_1^i) \in L^2(0, \ell_i) \times H^{-1}(0, \ell_i)$, $i = 1, 2$ y $v \in L^2(0, T)$: existe una única solución que satisface

$$u^i \in C([0, T] : L^2(0, \ell_i)) \cap C^1([0, T] : H^{-1}(0, \ell_i)), \quad i = 1, 2.$$

Cuando $v \equiv 0$ el sistema (10) se convierte en

$$\begin{cases} \phi_{tt}^i - \phi_{xx}^i = 0 & (t, x) \in \mathbb{R} \times [0, \ell_i], \\ \phi^i(t, \ell_i) = \phi^i(t, 0) = 0 & t \in \mathbb{R}, \\ \phi^i(0, x) = \phi_0^i(x), \quad \phi_t^i(0, x) = \phi_1^i(x) & x \in [0, \ell_i], \end{cases} \quad (11)$$

con $i = 1, 2$. Observemos, que el sistema (11) está formado por dos ecuaciones de ondas con condiciones de Dirichlet homogéneas *desacopladas*. Ambas ecuaciones están también bien puestas para $(\phi_0^i, \phi_1^i) \in H_0^1(0, \ell_i) \times L^2(0, \ell_i)$ y las soluciones correspondientes se expresan por la fórmula

$$\phi^i(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\phi_{0,n}^i \cos \sigma_n^i t + \frac{\phi_{1,n}^i}{\sigma_n^i} \sin \sigma_n^i t) \sin \sigma_n^i x, \quad i = 1, 2, \quad (12)$$

donde (σ_n^i) es la sucesión formada por las raíces cuadradas de los autovalores de la cuerda e_i :

$$\sigma_n^i = \frac{n\pi}{\ell_i}, \quad n \in \mathbb{N},$$

y $(\phi_{0,n}^i), (\phi_{1,n}^i)$ son las sucesiones de coeficientes de Fourier de ϕ_0^i, ϕ_1^i , respectivamente, en la base ortogonal $(\sin \sigma_n^i x)$ de $L^2(0, \ell_i)$:

$$\phi_0^i(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi_{0,n}^i \sin \sigma_n^i x, \quad \phi_1^i(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi_{1,n}^i \sin \sigma_n^i x, \quad i = 1, 2.$$

El problema de control en tiempo T consiste en *caracterizar los estados iniciales* (u_0^i, u_1^i) , $i = 1, 2$, del sistema (10) tales que existe $v \in L^2(0, T)$ de modo que las soluciones u^1, u^2 de (10) satisfagan

$$u^i(T, x) = u_t^i(T, x) = 0, \quad i = 1, 2,$$

para $x \in [0, \ell_i]$.

Observemos que, aunque el sistema (11) está formado por dos ecuaciones *desacopladas*, el hecho de utilizar el mismo control genera condiciones de acoplamiento similares a las del problema de las

tres cuerdas. En efecto, al aplicar el HUM resulta que la desigualdad de observabilidad asociada a (10) es

$$\int_0^T |\phi_x^1(t, 0) + \phi_x^2(t, 0)|^2 dt \geq \sum_{i=1,2} \sum_{n \in \mathbb{N}} (c_n^i)^2 ((\sigma_n^i \phi_{0,n}^i)^2 + (\phi_{1,n}^i)^2). \quad (13)$$

Si existen sucesiones de números positivos (c_n^i) , $i = 1, 2$ tales que (13) se verifica para todas las soluciones ϕ^1, ϕ^2 de (11) con estados iniciales $(\phi_0^1, \phi_1^1) \in Z^1 \times Z^1$, $(\phi_0^2, \phi_1^2) \in Z^2 \times Z^2$, respectivamente, entonces, todos los estados iniciales (u_0^i, u_1^i) , $i = 1, 2$, que satisfacen

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(c_n^i)^2} (u_{0,n}^i)^2 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(\sigma_n^i c_n^i)^2} (u_{1,n}^i)^2 < \infty$$

son controlables en tiempo T .

Nuestro resultado fundamental de observabilidad de las soluciones de (11) es

Teorema III.2. – *Sea $T^* = 2(\ell_1 + \ell_2)$. Tienen lugar las desigualdades*

$$\begin{aligned} \int_0^{T^*} |\phi_x^1(t, 0) + \phi_x^2(t, 0)|^2 dt &\geq \ell_1 \sum_{n \in \mathbb{N}} (\text{sen } \sigma_n^1 \ell_2)^2 ((\sigma_n^1 \phi_{0,n}^1)^2 + (\phi_{1,n}^1)^2), \\ \int_0^{T^*} |\phi_x^1(t, 0) + \phi_x^2(t, 0)|^2 dt &\geq \ell_2 \sum_{n \in \mathbb{N}} (\text{sen } \sigma_n^2 \ell_1)^2 ((\sigma_n^2 \phi_{0,n}^2)^2 + (\phi_{1,n}^2)^2), \end{aligned}$$

para cualquier solución de (11) con estados iniciales $(\phi_0^i, \phi_1^i) \in Z^i \times Z^i$.

Demostración. Probaremos la segunda de las desigualdades; la primera se obtiene de manera similar.

Observemos que debido a la $2\ell_1$ -periodicidad en tiempo de las soluciones de (11) resulta $\ell_1^- \phi_x^1(t, 0) = 0$, donde ℓ_1^- es el operador definido por (II.23) correspondiente al número ℓ_1 . Entonces, al aplicar la Proposición II.5 se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^{T^*} |\phi_x^1(t, 0) + \phi_x^2(t, 0)|^2 dt &\geq \int_{\ell_1}^{T^* - \ell_1} |\ell_1^- \phi_x^1(t, 0) + \ell_1^- \phi_x^2(t, 0)|^2 dt \\ &= \int_{\ell_1}^{T^* - \ell_1} |\ell_1^- \phi_x^2(t, 0)|^2 dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Por otra parte, $\psi = \ell_1^- \phi^2$ es una solución de la ecuación

$$\psi_{tt} - \psi_{xx} = 0$$

en $\mathbb{R} \times [0, \ell_1]$ y por ello, de la Proposición II.4 resulta

$$\int_{\ell_1}^{T^* - \ell_1} |\psi_x(t, 0)|^2 dt \geq 4\mathbf{E}_\psi. \quad (15)$$

Teniendo en cuenta que $\psi_x(t, 0) = \ell_1^- \phi_x^2(t, 0)$, a partir de (14) y (15) se obtiene

$$\int_0^{T^*} |\phi_x^1(t, 0) + \phi_x^2(t, 0)|^2 dt \geq 4\mathbf{E}_{\ell_1^- \phi^2}. \quad (16)$$

Falta sólo calcular la energía $\mathbf{E}_{\ell_1^- \phi^2}$. De la fórmula (12) se obtiene que

$$\ell_1^- \phi^2(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\phi_{0,n}^2 \ell_1^- \cos \sigma_n^2 t + \frac{\phi_{1,n}^2}{\sigma_n^2} \ell_1^- \sin \sigma_n^2 t) \sin \sigma_n^2 x. \quad (17)$$

Teniendo en cuenta las relaciones

$$\begin{aligned} \ell_1^- \cos \sigma_n^2 t &= \frac{1}{2} (\cos \sigma_n^2 (t + \ell_1) - \cos \sigma_n^2 (t - \ell_1)) = -\sin \sigma_n^2 \ell_1 \sin \sigma_n^2 t, \\ \ell_1^- \sin \sigma_n^2 t &= \frac{1}{2} (\sin \sigma_n^2 (t + \ell_1) - \sin \sigma_n^2 (t - \ell_1)) = \sin \sigma_n^2 \ell_1 \cos \sigma_n^2 t, \end{aligned}$$

la igualdad (17) se convierte en

$$\ell_1^- \phi^2(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sin \sigma_n^2 \ell_1 \left(\frac{\phi_{1,n}^2}{\sigma_n^2} \ell_1^- \cos \sigma_n^2 t - \phi_{0,n}^2 \ell_1^- \sin \sigma_n^2 t \right) \sin \sigma_n^2 x.$$

Al aplicar la fórmula (I.15) para el cálculo de la energía resulta

$$\mathbf{E}_{\ell_1^- \phi^2} = \frac{\ell_2}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}} (\sin \sigma_n^2 \ell_1)^2 ((\sigma_n^2 \phi_{0,n}^1)^2 + (\phi_{1,n}^2)^2).$$

Así, basta sustituir esta expresión en (16) para obtener la desigualdad del teorema. \square

2.1. Identificación de subespacios controlables

El objetivo de esta subsección es identificar subespacios de datos iniciales controlables del sistema (10) en tiempo $T \geq 2(\ell_1 + \ell_2)$ a partir del Teorema III.2.

Un subespacio fácilmente identificable es el de las combinaciones lineales finitas de las autofunciones. Tiene lugar

Proposición III.1. – *El sistema (10) es espectralmente controlable en algún tiempo $T \geq 2(\ell_1 + \ell_2)$ si, y sólo si, el cociente $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ es un número irracional.*

Demostración. Si $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ es irracional, los coeficientes $\sin \sigma_n^1 \ell_2$, $\sin \sigma_n^2 \ell_1$, $n \in \mathbb{N}$, que aparecen en las desigualdades de la Proposición III.2 son distintos de cero. En efecto, si $\sin \sigma_n^1 \ell_2 = 0$ para algún n , entonces existirá $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{n\pi}{\ell_1} \ell_2 = k\pi,$$

es decir, $\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{n}{k} \in \mathbb{Q}$. Entonces, los estados iniciales (u_0^i, u_1^i) , $i = 1, 2$, que satisfacen

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(\sin \sigma_n^1 \ell_2)^2} (u_{0,n}^1)^2 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(\sigma_n^1 \sin \sigma_n^1 \ell_2)^2} (u_{1,n}^1)^2 < \infty, \quad (18)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(\sin \sigma_n^2 \ell_1)^2} (u_{0,n}^2)^2 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(\sigma_n^2 \sin \sigma_n^2 \ell_1)^2} (u_{1,n}^2)^2 < \infty, \quad (19)$$

son controlables en tiempo $T \geq 2(\ell_1 + \ell_2)$.

En particular, serán controlables los estados iniciales $(\phi_0^1, \phi_1^1) \in Z^1 \times Z^1$, $(\phi_0^2, \phi_1^2) \in Z^2 \times Z^2$.

Veamos que la condición $\frac{\ell_1}{\ell_2} \notin \mathbb{Q}$ es también necesaria para la controlabilidad aproximada. Si $\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{n}{k}$ con $n, k \in \mathbb{N}$ entonces, para todo $p \in \mathbb{N}$ las funciones

$$\phi^1(t, x) = \text{sen} \frac{pn\pi t}{\ell_1} \text{sen} \frac{pk\pi x}{\ell_1}, \quad \phi^2(t, x) = -\text{sen} \frac{pk\pi t}{\ell_2} \text{sen} \frac{pk\pi x}{\ell_2},$$

son soluciones de (11) y satisfacen

$$\phi_x^1(t, 0) + \phi_x^2(t, 0) \equiv 0.$$

Por tanto, el sistema (10) no es aproximadamente controlable y, en particular, no será tampoco espectralmente controlable. \square

Para la identificación posterior de estados iniciales controlables del sistema (10) a partir del Teorema III.2 necesitaremos algunas definiciones de la Teoría de Números. Para $\eta \in \mathbb{R}$ denotamos por $|||\eta|||$ la distancia desde η al conjunto \mathbb{Z} :

$$|||\eta||| = |\min\{x \in \mathbb{R} : \eta - x \in \mathbb{Z}\}|.$$

Proposición III.2. – Si $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ es irracional, todos los estados iniciales (u_0^1, u_1^1) , (u_0^2, u_1^2) que satisfacen

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{|||n \frac{\ell_2}{\ell_1}|||^2} (u_{0,n}^1)^2 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2 |||n \frac{\ell_2}{\ell_1}|||^2} (u_{1,n}^1)^2 < \infty, \quad (20)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{|||n \frac{\ell_1}{\ell_2}|||^2} (u_{0,n}^2)^2 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2 |||n \frac{\ell_1}{\ell_2}|||^2} (u_{1,n}^2)^2 < \infty, \quad (21)$$

son controlables en cualquier tiempo $T \geq 2(\ell_1 + \ell_2)$.

Demostración. Observemos que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$2|||\frac{x}{\pi}||| \leq |\text{sen } x| \leq \pi |||\frac{x}{\pi}||| \quad (22)$$

(la demostración de este hecho puede encontrarse en la Proposición A.1 en el Apéndice A).

Entonces,

$$2|||n \frac{\ell_2}{\ell_1}||| \leq |\text{sen } \sigma_n^1 \ell_2| \leq \pi |||n \frac{\ell_2}{\ell_1}|||, \quad 2|||n \frac{\ell_1}{\ell_2}||| \leq |\text{sen } \sigma_n^2 \ell_1| \leq \pi |||n \frac{\ell_1}{\ell_2}|||.$$

Por tanto, las relaciones (20)-(21) son equivalentes a (18)-(19). \square

Para caracterizar subespacios de datos iniciales controlables del sistema (10) bastará estimar las sucesiones $|||n \frac{\ell_2}{\ell_1}|||$, $|||n \frac{\ell_1}{\ell_2}|||$, $n \in \mathbb{N}$.

Una manera natural de intentar conseguir información adicional es la siguiente: sea $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función creciente y definimos

$$\Psi_\rho = \left\{ x \in \mathbb{R}_+ : \liminf_{n \rightarrow \infty} |||nx||| \rho(n) > 0 \right\}.$$

Entonces, si $\frac{\ell_1}{\ell_2}, \frac{\ell_2}{\ell_1} \in \Psi_\rho$ las desigualdades

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \rho(n)(u_{0,n}^1)^2 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\rho(n)}{n^2}(u_{1,n}^1)^2 < \infty, \quad (23)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \rho(n)(u_{0,n}^2)^2 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \rho(n)(u_{1,n}^2)^2 < \infty, \quad (24)$$

garantizarían la controlabilidad de los estados iniciales $(u_0^1, u_1^1), (u_0^2, u_1^2)$.

Sin embargo, en tal planteamiento general, el problema resulta extremadamente difícil. Es por ello que nos restringimos al caso $\rho(x) = x^\alpha$ con $\alpha > 0$. Esta elección está motivada por dos razones. La primera de ellas es que esta elección de ρ conduce a la identificación de espacios de estados iniciales controlables de la forma

$$(u_0^i, u_1^i) \in \hat{H}^\alpha(0, \ell_i) \times \hat{H}^{\alpha-1}(0, \ell_i),$$

donde

$$\hat{H}^\varepsilon(0, \ell_i) = \left\{ u(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \operatorname{sen} \sigma_n^i x : \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{2\varepsilon} (u_n)^2 < \infty \right\}.$$

Notemos que $\hat{H}^\varepsilon(0, \ell_i)$ es el espacio de Sóbolev $H^\varepsilon(0, \ell_i)$ con ciertas condiciones de contorno adicionales. En particular, $\hat{H}^1(0, \ell_i) = H_0^1(0, \ell_i)$ y $\hat{H}^0(0, \ell_i) = L^2(0, \ell_i)$.

La segunda razón para esta elección de ρ es que el problema de describir los conjuntos

$$\Psi_\alpha := \Psi_{x^\alpha} = \left\{ x \in \mathbb{R}_+ : \liminf_{n \rightarrow \infty} \|nx\| n^\alpha > 0 \right\},$$

es un problema clásico (y difícil) en la Teoría de los Números. En [La] y [C] puede encontrarse amplia información sobre este tema. Véase también el Apéndice A donde se han descrito los hechos más relevantes que utilizaremos a continuación.

Resultados positivos

Los siguientes resultados son conocidos

- 1) Para todo $\alpha > 0$ los conjuntos Ψ_α tienen la propiedad: si $\xi \in \Psi_\alpha$ entonces $\frac{1}{\xi} \in \Psi_\alpha$
- 2) Ψ_1 coincide con el conjunto de los números irracionales $\eta \in \mathbb{R}$ tales que en su desarrollo en fracción continua $[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$ (véase, por ejemplo, [La], pág. 6) la sucesión (a_n) es acotada. El conjunto Ψ_1 es no numerable y tiene medida de Lebesgue igual a cero.
- 3) Para todo $\varepsilon > 0$ el complemento del conjunto $\Psi_{1+\varepsilon}$ es de medida cero (véase Proposición A.2 en el Apéndice A). Este conjunto se denota en la literatura por $\mathbf{B}_\varepsilon \subset \mathbb{R}$. Como consecuencia del Teorema de Roth (Teorema A.2), el conjunto \mathbf{B}_ε contiene a todos los números algebraicos irracionales, es decir, aquellos que son raíces de polinomios con coeficientes enteros de grado mayor que uno.

Como consecuencia obtenemos

Corolario III.1. – a) Si $\frac{\ell_1}{\ell_2} \in \mathbf{B}_\varepsilon$ entonces, el subespacio de datos iniciales

$$(u_0^i, u_1^i) \in \hat{H}^{1+\varepsilon}(0, \ell_i) \times \hat{H}^\varepsilon(0, \ell_i),$$

es controlable en cualquier tiempo $T \geq 2(\ell_1 + \ell_2)$. En particular, si $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ es un número algebraico irracional, este subespacio es controlable para cualquier $\varepsilon > 0$.

b) Si $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ admite un desarrollo acotado en fracción continua entonces, el subespacio de datos iniciales

$$(u_0^i, u_1^i) \in H_0^1(0, \ell_i) \times L^2(0, \ell_i),$$

es controlable en cualquier tiempo $T \geq 2(\ell_1 + \ell_2)$.

Resultados negativos

Describamos ahora resultados que pueden obtenerse como contrapartida a los proporcionados por la Proposición III.2.

Proposición III.3. – Si existe una sucesión $(n_k) \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \left\| n_k \frac{\ell_1}{\ell_2} \right\| \right\| \rho(n_k) \rightarrow 0 \quad \text{ó} \quad \left\| \left\| n_k \frac{\ell_2}{\ell_1} \right\| \right\| \rho(n_k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Entonces, existen datos iniciales (u_0^1, u_1^1) , (u_0^2, u_1^2) que satisfacen (23)-(24) que no son controlables en ningún tiempo finito T .

Demostración. Recordemos que el hecho de que todos los estados iniciales que satisfacen (23)-(24) sean controlables en tiempo T equivale a que se verifiquen las desigualdades

$$\int_0^T |\phi_x^1(t, 0) + \phi_x^2(t, 0)|^2 dt \geq C_1 \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\rho^2(n)} \left(\left(\frac{n\pi}{\ell_1} \phi_{0,n}^1 \right)^2 + (\phi_{1,n}^1)^2 \right), \quad (25)$$

$$\int_0^T |\phi_x^1(t, 0) + \phi_x^2(t, 0)|^2 dt \geq C_2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\rho^2(n)} \left(\left(\frac{n\pi}{\ell_2} \phi_{0,n}^2 \right)^2 + (\phi_{1,n}^2)^2 \right), \quad (26)$$

para cualquier solución de (11) con estados iniciales $(\phi_0^i, \phi_1^i) \in Z^i \times Z^i$, $i = 1, 2$.

Supondremos que

$$\left\| \left\| n_k \frac{\ell_1}{\ell_2} \right\| \right\| \rho(n_k) \rightarrow 0 \quad (27)$$

y demostraremos que en este caso desigualdad (26) es imposible.

En efecto, de (27) resulta que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $m_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| n_k \frac{\ell_1}{\ell_2} - m_k \right| \rho(n_k) \rightarrow 0.$$

Entonces,

$$\left| \sigma_{n_k}^2 - \sigma_{m_k}^1 \right| \rho(n_k) = \left| \frac{\pi n_k}{\ell_2} - \frac{\pi m_k}{\ell_1} \right| \rho(n_k) \rightarrow 0. \quad (28)$$

Por otra parte, al sustituir en (26) las soluciones

$$\phi_k^1(t, x) = \cos \sigma_{m_k}^1 t \operatorname{sen} \sigma_{m_k}^1 x, \quad \phi_k^2(t, x) = -\cos \sigma_{n_k}^2 t \operatorname{sen} \sigma_{n_k}^2 x,$$

resulta

$$\int_0^T |\sigma_{m_k}^1 \cos \sigma_{m_k}^1 t - \sigma_{n_k}^2 \cos \sigma_{n_k}^2 t|^2 dt \geq C_2 \rho^{-2}(n_k) (\sigma_{n_k}^2)^2$$

y entonces

$$|\sigma_{n_k}^2 - \sigma_{m_k}^1|^2 \geq C \rho^{-2}(n_k) \quad (29)$$

(hemos utilizado la desigualdad

$$\int_0^T |x \cos xt - y \cos yt|^2 dt \leq 4|x - y|^2 x^2 T,$$

para $y \geq x \geq 1$, que se obtiene fácilmente aplicando, por ejemplo, el teorema del valor medio).

Así, a partir de (29) resulta

$$|\sigma_{n_k}^2 - \sigma_{m_k}^1| \rho(n_k) \geq C,$$

lo que contradice la propiedad (28) de las sucesiones (n_k) y (m_k) . \square

La primera consecuencia importante de la Proposición III.3 está basada en el teorema de Dirichlet: para todos los $\alpha < 1$, $\xi \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ existen infinitos valores de n tales que $|||n\xi|||n^\alpha < \varepsilon$ (véase [C], Sección I.5).

Corolario III.2. – Para todos los valores ℓ_1, ℓ_2 de las longitudes de las cuerdas y todo $\alpha < 1$ existen estados iniciales

$$(u_0^i, u_1^i) \in \hat{H}^\alpha(0, \ell_i) \times \hat{H}^{\alpha-1}(0, \ell_i), \quad i = 1, 2,$$

que no son controlables en ningún tiempo finito T . En particular, existen estados iniciales no controlables en $L^2(0, \ell_i) \times H^{-1}(0, \ell_i)$, es decir, el sistema (10) no es exactamente controlable en ningún tiempo finito.

El siguiente resultado de carácter negativo está basado en una construcción debida a Liouville. Consideremos la serie

$$\xi = \sum_{k \in \mathbb{N}} 10^{-a_k}, \quad (30)$$

donde (a_k) es una sucesión creciente de números naturales. Entonces, para todo $p \in \mathbb{N}$,

$$|\xi 10^{ap} - m| = 10^{ap} \sum_{k > p} 10^{-a_k} < 10^{ap-a_{p+1}}.$$

Supongamos que $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función creciente. Fijemos $\varepsilon > 0$ y escojamos una sucesión (a_k) que verifique

$$10^{a_k - a_{k+1}} < \frac{\varepsilon}{\rho(10^{a_k})},$$

lo que es equivalente a

$$a_{k+1} > a_k + \lg \frac{\rho(10^{a_k})}{\varepsilon}.$$

Entonces, para los números naturales $n_p = 10^{a_p}$, $p \in \mathbb{N}$, se cumplirá

$$|||n_p \xi||| \rho(n_p) < \varepsilon.$$

En resumen, será posible construir números reales que se aproximan por racionales más rápido que cualquier orden prefijado ρ .

A partir de la Proposición III.3 resulta entonces

Corolario III.3. — *Para cualquier función creciente $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, pueden encontrarse valores de las longitudes ℓ_1, ℓ_2 de las cuerdas tales que existen datos iniciales del subespacio definido por (23)-(24) que no son controlables en ningún tiempo T . En otras palabras, el espacio de datos iniciales controlables del sistema puede ser arbitrariamente pequeño.*

Observación III.2. — *Los números de la forma (30) reciben el nombre de números de Liouville. El descubrimiento de este tipo de números tuvo una importancia trascendental: Liouville había conseguido demostrar que si ξ es un número algebraico irracional de orden p (es decir, ξ es raíz de un polinomio de grado p con coeficientes racionales y no existen polinomios de grado menor con esta propiedad) entonces, la inecuación*

$$|\xi^n - m| < \frac{1}{n^{p-1}}$$

no tiene soluciones $m, n \in \mathbb{N}$. Por tanto, los números definidos por (30) no son algebraicos. Esto permitió probar por primera vez la existencia de números no algebraicos.

3. La red de tres cuerdas con un nodo controlado

En lo que resta de este capítulo nos dedicaremos a estudiar el problema de control para la red de tres cuerdas con un único nodo exterior controlado. El esquema que seguimos nos permitirá tratar en el Capítulo IV el caso de árboles generales. Esta es fundamentalmente la razón del estudio detallado que presentamos, a pesar de que es posible reducir el problema de identificar subespacios de estados iniciales controlables, al problema análogo para el sistema de dos cuerdas controladas simultáneamente, ya resuelto en la Sección 2 (véase la Sección 8).

El movimiento de la red se describe por el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt}^i - u_{xx}^i = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times [0, \ell_i] \quad i = 0, 1, 2, \\ u^0(t, 0) = u^1(t, 0) = u^2(t, 0) & t \in \mathbb{R} \\ u_x^0(t, 0) + u_x^1(t, 0) + u_x^2(t, 0) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ u^0(t, \ell_0) = v(t), \quad u^i(t, \ell_i) = 0 & t \in \mathbb{R} \quad i = 1, 2, \\ u^i(0, x) = u_0^i(x), \quad u_1^i(0, x) = u_1^i(x) & x \in [0, \ell_i] \quad i = 0, 1, 2, \end{array} \right. \quad (31)$$

que coincide con (1), sólo que ahora $v^1 = 0$.

Observemos que el sistema (31) homogéneo, es decir cuando $v = 0$, coincide con (2).

A partir de los resultados generales del Capítulo I sabemos que, existe una sucesión (c_n) de números positivos tales que

$$\int_0^T |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n^2 (\mu_n \phi_{0,n}^2 + \phi_{1,n}^2), \quad (32)$$

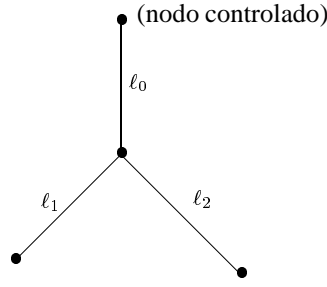


FIGURA 3. La red de tres cuerdas

para toda solución $\bar{\phi}$ de (2) con estado inicial en $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in Z \times Z$, si, y sólo si, el espacio de los estados iniciales (\bar{u}_0, \bar{u}_1) de que verifican

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n^2}{c_n^2} < \infty, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_{1,n}^2}{c_n^2 \mu_n} < \infty, \quad (33)$$

es controlable en tiempo T .

Observemos que la controlabilidad exacta del sistema (31) es entonces equivalente a que exista una sucesión (c_n) con la propiedad (32) que tenga una cota inferior positiva:

$$c_n \geq c > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (34)$$

Desafortunadamente, esto es imposible para el sistema (2), independientemente de las longitudes ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 de las cuerdas. En la Proposición III.7 demostraremos que, para cualesquiera ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 , existe una subsucesión $(n_k) \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}) = 0.$$

Entonces, si se verifica la desigualdad (32), al sustituir en ella las soluciones de (2)

$$\bar{\phi}^k(t, x) = \frac{1}{\varkappa_{n_{k+1}}} \cos \lambda_{n_{k+1}} t \bar{\theta}_{n_{k+1}}(x) - \frac{1}{\varkappa_{n_k}} \cos \lambda_{n_k} t \bar{\theta}_{n_k}(x),$$

donde

$$\varkappa_n = \theta_{n,x}^0(\ell_0),$$

se obtendría

$$C \left(\frac{\lambda_{n_{k+1}}^2}{\varkappa_{n_{k+1}}^2} + \frac{\lambda_{n_k}^2}{\varkappa_{n_k}^2} \right) \leq \int_0^T |\cos \lambda_{n_{k+1}} t - \cos \lambda_{n_k} t|^2 dt \leq \frac{T^3}{3} |\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}|^2.$$

Pero $|\varkappa_n| \leq C \lambda_n$ (véase la fórmula (70) en la Observación III.4). Por tanto, si

$$c_n \geq c > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

existiría una constante $C > 0$ tal que

$$C \leq |\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}|^2,$$

para todo k , lo que contradice la elección de la subsucesión (λ_{n_k}) .

Como consecuencia, si una sucesión (c_n) tiene la propiedad (32) entonces, necesariamente,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} c_n = 0.$$

Así, el sistema (31) no es exactamente controlable para ninguna elección de ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 y T . Es por ello, que nos concentramos en probar desigualdades del tipo (32) con coeficientes c_n (que llamaremos pesos) que no satisfacen la condición (34).

4. Una desigualdad de observabilidad

En esta sección demostraremos la siguiente propiedad de observabilidad de las soluciones de (2)

Teorema III.3. – *Existe una constante positiva C tal que toda solución $\bar{\phi}$ de (2) con datos iniciales $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in V \times H$ satisface las desigualdades*

$$\int_0^{T^*} |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt \geq C \mathbf{E}_{\ell_j^- \bar{\phi}}, \quad j = 1, 2,$$

donde $T^* = 2(\ell_0 + \ell_1 + \ell_2)$.

En el Teorema III.3, $\ell_j^- \bar{\phi}$ es la función que resulta de aplicar el operador ℓ^- definido por (II.23) para $\ell = \ell_j$ a la solución $\bar{\phi}$ de (2). Debido a la linealidad de ℓ_j^- , la función $\ell_j^- \bar{\phi}$ también es solución de (2). En particular, su energía $\mathbf{E}_{\ell_j^- \bar{\phi}}(t)$ es conserva en el tiempo.

Si pretendemos probar una desigualdad del tipo

$$\int_0^T |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt \geq C \mathbf{E}_{\bar{\phi}}, \quad (35)$$

para las soluciones de (2), lo que equivaldría a probar que para algún $\hat{t} \in \mathbb{R}$ y $i = 0, 1, 2$,

$$\int_0^T |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt \geq C \mathbf{E}_{\phi_i}(\hat{t}),$$

es natural intentar proceder como en la Sección 1, es decir, aplicar la Proposición II.4 para estimar la energía de cada cuerda. Gracias a la Proposición II.4, tendremos para todo $\hat{t} \in \mathbb{R}$ y $i = 1, 2$,

$$\mathbf{E}_{\phi_i}(\hat{t}) \leq C \left(\int |\phi_x^i(t, 0)|^2 dt + \int |\phi_t^i(t, 0)|^2 dt \right),$$

$$\mathbf{E}_{\phi_0}(\hat{t}) \leq C \left(\int |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt + \int |\phi_t^0(t, \ell_0)|^2 dt \right) = \int |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt$$

(no hemos escrito los límites en las integrales, pues de ellos nos ocuparemos luego en detalle).

Así, si lográsemos probar que existe $C > 0$ tal que, para $i = 1, 2$,

$$\int |\phi_x^i(t, 0)|^2 dt \leq C \int_0^T |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt, \quad (36)$$

$$\int |\phi_t^i(t, 0)|^2 dt \leq C \int_0^T |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt, \quad (37)$$

habríamos obtenido la desigualdad (35).

La desigualdad (37) se prueba sin dificultad para $i = 1, 2$: gracias a las condiciones de acoplamiento y a las fórmulas (8) resulta

$$\phi_t^1(t, 0) = \phi_t^2(t, 0) = \phi_t^0(t, 0) = \ell_0^- \phi_x^0(t, \ell_0) \quad (38)$$

por lo que

$$\int |\phi_t^i(t, 0)|^2 dt = \int |\ell_0^- \phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt \leq \int |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt, \quad i = 1, 2.$$

Sin embargo, las desigualdades (36) son más delicadas; de hecho, no son ciertas¹. A diferencia de lo que ocurre con $\phi_t^1(\cdot, 0)$, $\phi_t^2(\cdot, 0)$, las trazas $\phi_x^1(\cdot, 0)$, $\phi_x^2(\cdot, 0)$ no pueden expresarse de manera inmediata en función de $\phi_x^0(\cdot, \ell_0)$; para ellas la condición en este nodo sólo asegura que

$$\phi_x^1(t, 0) + \phi_x^2(t, 0) = -\ell_0^+ \phi_x^0(t, \ell_0).$$

No obstante, las condiciones de contorno $\phi_x^1(t, \ell_1) = \phi_x^2(t, \ell_2) = 0$ proporcionan información adicional:

$$0 = \phi_x^i(t, \ell_i) = \ell_i^+ \phi_t^i(t, 0) + \ell_i^- \phi_x^i(t, 0), \quad i = 1, 2,$$

de donde resulta

$$\ell_i^- \phi_x^i(t, 0) = -\ell_i^+ \phi_t^i(t, 0) = \ell_i^+ \ell_0^- \phi_x^0(t, \ell_0), \quad i = 1, 2. \quad (39)$$

De esta manera llegamos al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \phi_x^1(t, 0) + \phi_x^2(t, 0) = f(t), \\ \ell_1^- \phi_x^1(t, 0) = g_1(t), \quad \ell_2^- \phi_x^2(t, 0) = g_2(t), \end{cases} \quad (40)$$

que satisfacen las trazas $\phi_x^1(\cdot, 0)$, $\phi_x^2(\cdot, 0)$, donde

$$f(t) = -\ell_0^+ \phi_x^0(t, \ell_0), \quad g_i(t) = \ell_i^+ \ell_0^- \phi_x^0(t, \ell_0), \quad i = 1, 2.$$

Observemos que f , g_1 , g_2 son funciones tales que su norma en L^2 puede ser estimada en función de la norma L^2 de $\phi_x^0(\cdot, \ell_0)$ a partir de la Proposición II.5.

Surge entonces la cuestión: ¿será suficiente la información (40) para probar la desigualdad (35), al menos con una energía más débil? Resulta que sí; la idea es la siguiente: al aplicar, por ejemplo, el operador ℓ_1^- a la primera de las ecuaciones (40) resultarán condiciones desacopladas

$$\ell_1^- \phi_x^1(\cdot, 0) = g_1, \quad \ell_1^- \phi_x^2(\cdot, 0) = \ell_1^- f - g_1. \quad (41)$$

A causa de la linealidad del sistema (2) y de los operadores ℓ_1^- y ℓ_2^- , si $\bar{\phi}$ es una solución de (2) entonces, las funciones $\ell_1^- \bar{\phi}$ y $\ell_2^- \bar{\phi}$ (los operadores actúan en este caso sobre la variable t de \bar{u}) también son soluciones de (2). Además, tienen lugar las igualdades

$$(\ell_j^- \phi^i)_x = \ell_j^- \phi_x^i, \quad (\ell_j^- \phi^i)_t = \ell_1^- \phi_t^i, \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \text{ y } j = 1, 2.$$

Si tomamos entonces la solución $\bar{w} = \ell_1^- \bar{u}$ de (2) tendremos que

$$(w^i)_x = \ell_1^- \phi_x^i, \quad (w^i)_t = \ell_1^- \phi_t^i, \quad \text{para } i = 0, 1, 2,$$

¹Si estas desigualdades fuesen ciertas, resultaría que todo el espacio de energía $H \times V'$ es controlable. Esto, como veremos posteriormente, no ocurre nunca, independientemente de las longitudes ℓ_0 , ℓ_1 , ℓ_2 de las cuerdas.

y las relaciones (41) se convierten en

$$w_x^1(\cdot, 0) = g_1, \quad w_x^2(\cdot, 0) = \ell_1^- f - g_1,$$

lo que implica que $w_x^1(\cdot, 0)$, $w_x^2(\cdot, 0)$, podrán estimarse por medio de la norma L^2 de $\phi_x^0(\cdot, \ell_0)$. Lo mismo, por supuesto, ocurre con las trazas $w_t^1(\cdot, 0)$, $w_t^2(\cdot, 0)$ y $w_x^0(\cdot, \ell_0)$ debido a la continuidad de ℓ_1^- (Proposición II.5). Con esto puede demostrarse que

$$\int |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt \geq C \mathbf{E}_{\bar{w}}.$$

Siguiendo este sencillo argumento demostraremos que

Proposición III.4. – *Existe una constante positiva C tal que toda solución $\bar{\phi}$ de (2) con datos iniciales $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in V \times H$ satisface las desigualdades*

$$\int_0^{T_j} |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt \geq C \mathbf{E}_{\ell_j^- \bar{\phi}}, \quad j = 1, 2,$$

donde¹ $T_j = 2(\ell_0 + \ell_j + \max\{\ell_1, \ell_2\})$.

Demostración. Prácticamente hemos demostrado ya el resultado; sólo debemos seguir cuidadosamente los intervalos de integración para obtener el tiempo de observación indicado. Demostraremos la afirmación para $i = 1$; para $i = 2$ la prueba es, obviamente, similar.

Observemos inicialmente que, como $w_t^0(t, \ell_0) = 0$, $w_x^0(t, \ell_0) = \ell_1^- \phi_x^0(t, \ell_0)$, entonces, en virtud de la Proposición II.4, para cualquier $\hat{t} \in \mathbb{R}$, la energía \mathbf{E}_{w^0} de la solución \bar{w} en la cuerda \mathbf{e}_0 satisface

$$\mathbf{E}_{w^0}(\hat{t}) \leq C \int_{\hat{t}-\ell_0}^{\hat{t}+\ell_0} |w_x^0(t, \ell_0)|^2 dt = C \int_{\hat{t}-\ell_0}^{\hat{t}+\ell_0} |\ell_1^- \phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt,$$

y de la Proposición II.5 resulta que, para $\hat{t} \in [\ell_0 + \ell_1, T_1 - \ell_0 - \ell_1]$,

$$\mathbf{E}_{w^0}(\hat{t}) \leq C \int_{\hat{t}-\ell_0-\ell_1}^{\hat{t}+\ell_0+\ell_1} |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt \leq C \int_0^{T_1} |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt. \quad (42)$$

Si conseguimos probar que existen $C > 0$ y $\hat{t} \in \mathbb{R}$ tales que

$$\int_{\hat{t}-\ell_i}^{\hat{t}-\ell_i} |w_x^i(t, 0)|^2 dt \leq C \int_0^{T_1} |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt, \quad (43)$$

$$\int_{\hat{t}-\ell_i}^{\hat{t}-\ell_i} |w_t^i(t, 0)|^2 dt \leq C \int_0^{T_1} |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt, \quad (44)$$

$i = 1, 2$, para toda solución de (31) con $v \equiv 0$, entonces, en base a la Proposición II.4 se obtendría

$$\mathbf{E}_{w^i}(\hat{t}) \leq C \int_0^{T_1} |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt, \quad i = 0, 1, 2$$

y por ello, teniendo en cuenta (42),

$$\mathbf{E}_{\bar{w}}(\hat{t}) = \mathbf{E}_{w^0}(\hat{t}) + \mathbf{E}_{w^1}(\hat{t}) + \mathbf{E}_{w^2}(\hat{t}) \leq C \int_0^{T_1} |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt.$$

¹Esto es casi el enunciado del teorema III.3 pero en un tiempo de observación mayor. De hecho, si $\ell_1 < \ell_2$ la desigualdad del teorema se obtiene para $j = 1$, pues $T_1 = T^*$.

Así que nos concentraremos en probar las desigualdades (43). Como se ha indicado antes (fórmulas (38)-(39)) tenemos las igualdades

$$w_t^i(t, 0) = \ell_i^- \phi_t^i(t, 0) = \ell_i^- \ell_0^- \phi_x^0(t, \ell_0), \quad i = 1, 2, \quad (45)$$

$$w_x^1(t, 0) = \ell_1^- \phi_x^1(t, 0) = -\ell_1^+ \phi_t^1(t, 0), \quad w_t^2(t, 0) = w_t^1(t, 0) = \ell_1^- \ell_0^- \phi_x^0(t, \ell_0). \quad (46)$$

Entonces, combinando (45) con la Proposición II.5, podemos asegurar que, para cualquier $\hat{t} \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\hat{t}-\ell_1}^{\hat{t}+\ell_1} |w_t^1(t, 0)|^2 dt = \int_{\hat{t}-\ell_1}^{\hat{t}+\ell_1} |\ell_1^- \ell_0^- \phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt \leq C \int_{\hat{t}-\ell_0-2\ell_1}^{\hat{t}+\ell_0+2\ell_1} |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt.$$

De manera similar se prueban las desigualdades

$$\begin{aligned} \int_{\hat{t}-\ell_1}^{\hat{t}+\ell_1} |w_x^1(t, 0)|^2 dt &\leq C \int_{\hat{t}-\ell_0-2\ell_1}^{\hat{t}+\ell_0+2\ell_1} |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt, \\ \int_{\hat{t}-\ell_2}^{\hat{t}+\ell_2} |w_t^2(t, 0)|^2 dt &\leq C \int_{\hat{t}-\ell_0-\ell_1-\ell_2}^{\hat{t}+\ell_0+\ell_1+\ell_2} |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt, \\ \int_{\hat{t}-\ell_2}^{\hat{t}+\ell_2} |w_x^2(t, 0)|^2 dt &\leq C \int_{\hat{t}-\ell_0-\ell_1-\ell_2}^{\hat{t}+\ell_0+\ell_1+\ell_2} |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt. \end{aligned} \quad (47)$$

Ahora es fácil ver que, si escogemos $\hat{t} = \ell_0 + \ell_1 + \max\{\ell_1, \ell_2\}$ en (47) se obtienen¹ las desigualdades (42), (43). Con esto se ha demostrado la proposición. \square

Asumamos que $\ell_1 \leq \ell_2$. Entonces $T_1 = 2(\ell_0 + \ell_1 + \ell_2)$ y $T_2 = 2(\ell_0 + \ell_1 + \ell_2) \geq T_1$. En realidad, el valor del tiempo de observación T_2 puede reducirse.

La posibilidad de reducir el tiempo de observación T_2 (T_1 ya coincide con T^*), que permite obtener la afirmación del teorema a partir de la Proposición III.4, está basada en una propiedad de *periodicidad generalizada* en tiempo de las soluciones del sistema homogéneo (2) (véase la Proposición III.5), que provoca que toda la información esencial sobre la traza $\phi_x^0(t, \ell_0)$ de estas soluciones pueda obtenerse en un intervalo de tiempo de longitud T^* . Esto hace superflua la observación en un tiempo mayor.

Definimos el operador

$$\mathcal{Q} := \ell_0^+ \ell_1^- \ell_2^- + \ell_0^- \ell_1^+ \ell_2^- + \ell_0^- \ell_1^- \ell_2^+.$$

Entonces,

Proposición III.5. — *Para toda solución $\bar{\phi}$ de (2) con datos iniciales $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in V \times H$ se cumple*

$$\mathcal{Q}\phi_x^0(t, \ell_0) = 0.$$

Demostración. A partir de las relaciones $\phi_t^0(t, 0) = -\ell_0^- \phi_x^0(t, \ell_0)$, $\phi_x^0(t, 0) = \ell_0^+ \phi_x^0(t, \ell_0)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}\phi_x^0(t, \ell_0) &= \ell_1^- \ell_2^- (\ell_0^+ \phi_x^0(t, \ell_0)) + (\ell_1^+ \ell_2^- + \ell_1^- \ell_2^+) \ell_0^- \phi_x^0(t, \ell_0) \\ &= \ell_1^- \ell_2^- \phi_x^0(t, 0) - (\ell_1^+ \ell_2^- + \ell_1^- \ell_2^+) \phi_t^0(t, 0). \end{aligned}$$

¹Se tiene que $\hat{t} \in [\ell_0 + \ell_1, T_1 - \ell_0 - \ell_1]$, lo cual es necesario para la desigualdad (42). Este valor de \hat{t} se ha escogido de manera que los números $\hat{t} - \ell_0 - 2\ell_1$, $\hat{t} + \ell_0 + 2\ell_1$, $\hat{t} - \ell_0 - \ell_1 - \ell_2$, $\hat{t} + \ell_0 + \ell_1 + \ell_2$ estén todos en el intervalo $[0, T_1]$.

Recordando ahora que $\phi_t^0(t, 0) = \phi_t^1(t, 0) = \phi_t^2(t, 0)$

$$\mathcal{Q}\phi_x^0(t, \ell_0) = \ell_1^- \ell_2^- \phi_x^0(t, 0) + \ell_2^- (-\ell_1^+ \phi_t^1(t, 0)) + \ell_1^- (-\ell_2^+ \phi_t^2(t, 0)), \quad (48)$$

y de las igualdades $\ell_1^+ \phi_t^1(t, 0) + \ell_1^- \phi_x^1(t, 0) = 0$, $\ell_2^+ \phi_t^2(t, 0) + \ell_2^- \phi_x^2(t, 0) = 0$ (obtenidas como en la demostración de la Proposición III.4 a partir de las condiciones de contorno) de (48) resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}\phi_x^0(t, \ell_0) &= \ell_1^- \ell_2^- \phi_x^0(t, 0) + \ell_2^- \ell_1^- \phi_t^1(t, 0) + \ell_1^- \ell_2^- \phi_t^2(t, 0) \\ &= \ell_1^- \ell_2^- (\phi_x^0(t, 0) + \phi_t^1(t, 0) + \phi_t^2(t, 0)) = 0. \end{aligned}$$

□

La utilidad de la Proposición III.5 radica en la siguiente propiedad:

Para cada $T > 0$ existe una constante $C_T > 0$ tal que toda función continua ψ , que es solución de $\mathcal{Q}\psi \equiv 0$, satisface la desigualdad

$$\int_0^T |\psi(t)|^2 dt \leq C_T \int_0^{T^*} |\psi(t)|^2 dt, \quad (49)$$

donde, como antes $T^* = 2(\ell_0 + \ell_1 + \ell_2)$.

Este hecho, al ser aplicado a $u_x^0(t, \ell_0)$, daría finalmente la afirmación del Teorema III.3 a partir de la Proposición III.4.

La demostración de esta propiedad se hará en el Capítulo III en condiciones más generales. Ahora nos restringiremos a la versión particular correspondiente al operador \mathcal{Q} , que permite ilustrar con claridad la idea de su demostración.

Supongamos que $\ell_* = \min\{\ell_0, \ell_1, \ell_2\}$. Si conseguimos probar que, cualesquiera sean $T > 0$ y ψ que satisface $\mathcal{Q}\psi \equiv 0$,

$$\int_0^T |\psi(t)|^2 dt \leq C \int_0^{T-2\ell_*} |\psi(t)|^2 dt, \quad (50)$$

entonces, iterando esta desigualdad tantas veces como sea necesario para lograr que $T - 2n\ell_* \leq T^*$, habremos probado (49).

Observemos ahora que, de acuerdo a la definición de \mathcal{Q} , la igualdad $\mathcal{Q}\psi \equiv 0$ puede escribirse como

$$(\ell_0^+ \ell_1^- \ell_2^- + \ell_0^- \ell_1^+ \ell_2^- + \ell_0^- \ell_1^- \ell_2^+) \psi \equiv 0$$

y desarrollando esto según la definición de los operadores ℓ_i^\pm resulta¹

$$\begin{aligned} &3\psi(t + \ell_0 + \ell_1 + \ell_2) - \psi(t + \ell_0 + \ell_1 - \ell_2) - \psi(t + \ell_0 - \ell_1 + \ell_2) - \\ &-\psi(t - \ell_0 - \ell_1 - \ell_2) - \psi(t - \ell_0 + \ell_1 + \ell_2) - \\ &-\psi(t - \ell_0 + \ell_1 - \ell_2) - \psi(t - \ell_0 - \ell_1 + \ell_2) + 3\psi(t + \ell_0 + \ell_1 + \ell_2) = 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo la variable t por $t - (\ell_0 + \ell_1 + \ell_2)$ la igualdad precedente puede escribirse como

$$\psi(t) = \sum_{\tau \in \Gamma} c_\tau \psi(t - \tau),$$

donde

$$\Gamma := \{2\ell_0, 2\ell_1, 2\ell_2, 2(\ell_0 + \ell_1), 2(\ell_0 + \ell_2), 2(\ell_1 + \ell_2), 2(\ell_0 + \ell_1 + \ell_2)\}$$

¹Es un cálculo largo, pero completamente elemental.

y los coeficientes c_τ son iguales a 1 ó $-\frac{1}{3}$. A partir de esto, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\int_{T^*}^T |\psi(t)|^2 dt \leq C \sum_{\tau \in \Gamma} \int_{T^*}^T |\psi(t - \tau)|^2 dt = C \sum_{\tau \in \Gamma} \int_{T^* - \tau}^{T - \tau} |\psi(t)|^2 dt, \quad (51)$$

para cierta constante C independiente de ψ (de hecho, puede tomarse $C = \frac{55}{9}$).

Pero todo $\tau \in \Gamma$ cumple $2\ell^* \leq \tau \leq T^*$, por lo que se obtiene $T^* - \tau \geq 0$ y $T - \tau \leq T - 2\ell_*$; por ello resulta la desigualdad

$$\int_{T^* - \tau}^{T - \tau} |\psi(t)|^2 dt \leq \int_0^{T - 2\ell_*} |\psi(t)|^2 dt,$$

que al ser sustituida en (51) da

$$\int_{T^*}^T |\psi(t)|^2 dt \leq C \sum_{\tau \in \Gamma} \int_0^{T - 2\ell_*} |\psi(t)|^2 dt = 7C \int_0^{T - 2\ell_*} |\psi(t)|^2 dt.$$

Luego

$$\int_0^T |\psi(t)|^2 dt = \int_0^{T^*} |\psi(t)|^2 dt + \int_{T^*}^T |\psi(t)|^2 dt \leq C \int_0^{T - 2\ell_*} |\psi(t)|^2 dt,$$

que es la desigualdad (50).

Así, hemos demostrado la propiedad (49) y con ello, el Teorema III.3.

5. Propiedades de la sucesión de autovalores

La aparición del operador \mathcal{Q} en relación con el sistema (2) no es un elemento puramente técnico. En realidad este operador está intrínsecamente ligado a las condiciones de contorno en (2), como indica la Proposición III.5. Además, el operador \mathcal{Q} está relacionado de manera directa con los autovalores de $-\Delta_G$. En efecto, si aplicamos \mathcal{Q} a la función $e^{i\lambda t}$, donde λ es un número real arbitrario, como $\ell^+ e^{i\lambda t} = \cos \lambda \ell e^{i\lambda t}$ y $\ell^- e^{i\lambda t} = i \operatorname{sen} \lambda \ell e^{i\lambda t}$, obtendremos

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}e^{i\lambda t} &= (\ell_0^+ \ell_1^- \ell_2^- + \ell_0^- \ell_1^+ \ell_2^- + \ell_0^- \ell_1^- \ell_2^+) e^{i\lambda t} \\ &= -(\cos \lambda \ell_0 \operatorname{sen} \lambda \ell_1 \operatorname{sen} \lambda \ell_2 + \operatorname{sen} \lambda \ell_0 \cos \lambda \ell_1 \operatorname{sen} \lambda \ell_2 + \\ &\quad + \operatorname{sen} \lambda \ell_0 \operatorname{sen} \lambda \ell_1 \cos \lambda \ell_2) e^{i\lambda t}. \end{aligned}$$

Así, si definimos la función

$$q(\lambda) := -(\cos \lambda \ell_0 \operatorname{sen} \lambda \ell_1 \operatorname{sen} \lambda \ell_2 + \operatorname{sen} \lambda \ell_0 \cos \lambda \ell_1 \operatorname{sen} \lambda \ell_2 + \operatorname{sen} \lambda \ell_0 \operatorname{sen} \lambda \ell_1 \cos \lambda \ell_2), \quad (52)$$

se cumplirá la relación

$$\mathcal{Q}e^{i\lambda t} = q(\lambda)e^{i\lambda t}.$$

Tiene lugar

Proposición III.6. — Sea $\lambda \neq 0$. Entonces, λ^2 es un autovalor de $-\Delta_G$ si, y sólo si, $q(\lambda) = 0$.

Demostración. La necesidad de la condición es inmediata: si λ^2 es un autovalor cuya autofunción asociada es $\bar{\theta}$ entonces, la función $\bar{\phi}(t, x) = e^{i\lambda t}\bar{\theta}(x)$ es una solución de (2). De acuerdo a la Proposición III.5 tendremos

$$0 = \mathcal{Q}\phi_x^0(t, \ell_0) = \mathcal{Q}e^{i\lambda t}\theta_x^0(\ell_0) = q(\lambda)e^{i\lambda t}\theta_x^0(\ell_0).$$

De esta igualdad resulta $q(\lambda) = 0$ si $\theta_x^0(\ell_0) \neq 0$. Por otra parte, si $\theta_x^0(\ell_0) = 0$ entonces, la función θ^0 , que es solución de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden cumpliría $\theta^0(\ell_0) = \theta_x^0(\ell_0) = 0$, lo que implica $\theta^0 \equiv 0$; en particular, $\theta^0(0) = 0$. De las condiciones de contorno tendremos que $\theta^1(0) = \theta^2(0) = 0$. Esto significa que λ^2 es también un autovalor de las cuerdas e_1 y e_2 y por ello,

$$\text{sen } \lambda\ell_1 = \text{sen } \lambda\ell_2 = 0.$$

Al sustituir estas igualdades en (52), se obtiene $q(\lambda) = 0$.

Veremos ahora que la condición $q(\lambda) = 0$ es suficiente para que λ^2 sea un autovalor. Para ello basta construir una autofunción $\bar{\theta}$ no nula asociada a λ^2 . Buscamos las componentes de $\bar{\theta}$ de la forma:

$$\theta^i(x) = a_i \text{sen } \lambda(x - \ell_i), \quad i = 0, 1, 2, \quad (53)$$

lo que garantiza que se satisfagan las condiciones de contorno $\theta^i(\ell_i) = 0$. Las restantes condiciones de contorno conducen al sistema lineal

$$\begin{aligned} a_0 \text{sen } \lambda\ell_0 &= a_1 \text{sen } \lambda\ell_1 = a_2 \text{sen } \lambda\ell_2, \\ a_0\lambda \cos \lambda\ell_0 + a_1\lambda \cos \lambda\ell_1 + a_2\lambda \cos \lambda\ell_2 &= 0, \end{aligned}$$

cuyo determinante coincide con $\lambda q(\lambda)$. Por tanto, si $q(\lambda) = 0$ podremos encontrar números a_0, a_1, a_2 , no todos nulos, tales que $\bar{\theta}$ definida por (53) sea una autofunción. \square

Observación III.3. – *La demostración de la necesidad en la Proposición III.6 puede hacerse de un modo más simple sin involucrar al operador \mathcal{Q} , pues las condiciones de contorno implican que una autofunción necesariamente debe estar dada por (53). Si esta autofunción no es idénticamente nula, necesariamente el determinante del sistema lineal es cero. Por tanto, $q(\lambda) = 0$. Sin embargo, hemos utilizado las propiedades de \mathcal{Q} por que esa será la técnica natural que usaremos en el Capítulo IV para demostrar propiedades similares relativas a redes más generales.*

Una consecuencia importante de la Proposición III.6 es que, si denotamos por (σ_n) la sucesión creciente formada por los elementos del conjunto

$$\Sigma = \frac{\pi}{\ell_0}\mathbb{N} \cup \frac{\pi}{\ell_1}\mathbb{N} \cup \frac{\pi}{\ell_2}\mathbb{N},$$

que son las raíces cuadradas positivas de los autovalores de las cuerdas con condiciones de Dirichlet homogéneas y por (λ_n) la sucesión creciente formada por las raíces cuadradas positivas de los autovalores de la red, entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_n < \sigma_n < \lambda_{n+1} < \sigma_{n+1}. \quad (54)$$

En efecto, en cada intervalo (σ_n, σ_{n+1}) la función $q(\lambda)$ puede expresarse como

$$q(\lambda) = h_1(\lambda)h_2(\lambda),$$

donde

$$h_1(\lambda) = \operatorname{sen} \lambda \ell_0 \operatorname{sen} \lambda \ell_1 \operatorname{sen} \lambda \ell_2, \quad h_2(\lambda) = \cot \lambda \ell_0 + \cot \lambda \ell_1 + \cot \lambda \ell_2.$$

Observemos que, bajo la hipótesis de que los cocientes $\frac{\ell_i}{\ell_j}$ ($i \neq j$) son irracionales, los números λ_n son los ceros positivos de $h_2(\lambda)$, mientras que los números σ_n son los puntos en los que $h_2(\lambda) \rightarrow \pm\infty$. Bastará ahora notar que en cada intervalo (σ_n, σ_{n+1}) la función $h_2(\lambda)$ es estrictamente decreciente para concluir que necesariamente los números σ_n y λ_n están intercalados, es decir, que se verifica (54).

Las desigualdades (54) permiten obtener información sobre los números λ_n a partir de las propiedades de la sucesión (σ_n) .

Observemos que a partir de (54) se obtiene, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_{n+4} - \lambda_n > \sigma_{n+3} - \sigma_n.$$

Pero, para todo $n \in \mathbb{N}$, entre los cuatro números $\sigma_n, \sigma_{n+1}, \sigma_{n+2}, \sigma_{n+3}$ hay al menos dos que corresponden a la misma cuerda. Esto implica que, para cada n , existe $i = 0, 1, 2$ tal que

$$\sigma_{n+3} - \sigma_n > \frac{\pi}{\ell_i}.$$

Por tanto, resulta la condición generalizada de separación

$$\lambda_{n+4} - \lambda_n > \pi \min \left(\frac{1}{\ell_0}, \frac{1}{\ell_1}, \frac{1}{\ell_2} \right),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta separación generalizada permitiría aplicar la técnica derivada del Teorema II.4 para la demostración de desigualdades de observabilidad del tipo (32).

Por otra parte, si n_λ y n_σ denotan, respectivamente, las funciones de conteo¹ de las sucesiones (λ_n) y (σ_n) entonces,

$$n_\sigma(r) \leq n_\lambda(r) \leq n_\sigma(r) + 1.$$

La función $n_\sigma(r)$ puede calcularse explícitamente como la suma de las funciones de conteo de las sucesiones $\left(\frac{n\pi}{\ell_0}\right)$, $\left(\frac{n\pi}{\ell_1}\right)$ y $\left(\frac{n\pi}{\ell_2}\right)$. Resulta

$$n_\sigma(r) = \left[\frac{r\ell_0}{\pi} \right] + \left[\frac{r\ell_1}{\pi} \right] + \left[\frac{r\ell_2}{\pi} \right],$$

donde $[\eta]$ denota la parte entera del número η . Por consiguiente, tendremos

$$r \frac{\ell_0 + \ell_1 + \ell_2}{\pi} - 1 \leq n_\lambda(r) \leq 1 + r \frac{\ell_0 + \ell_1 + \ell_2}{\pi} + 1. \quad (55)$$

Entonces, la sucesión (λ_n) tiene densidad

$$D(\lambda_n) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_\lambda(r)}{r} = \frac{\ell_0 + \ell_1 + \ell_2}{\pi},$$

que es la misma que la de la sucesión (σ_n) . Ésta es esencialmente la razón por la cual aparece la longitud $T^* = 2(\ell_0 + \ell_1 + \ell_2) = 2\pi D(\lambda_n)$ del intervalo de observación en el Teorema III.3, y sobre todo, de que esa longitud sea óptima.

¹Se llama función de conteo $n(r)$ de la sucesión positiva (λ_n) al número de elementos de esta sucesión contenidos en el intervalo $(0, r]$.

La desigualdad (55) implica además, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} = \frac{\pi}{\ell_0 + \ell_1 + \ell_2}; \quad (56)$$

esto indica que los autovalores se comportan asintóticamente como los autovalores de una cuerda de longitud $\ell_0 + \ell_1 + \ell_2$.

Otra importante consecuencia de las desigualdades (54) es la siguiente.

Proposición III.7. – *Cualesquiera sean los valores ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 de las longitudes de las cuerdas, existe una subsucesión $(n_k) \subset \mathbb{N}$ tal que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}) = 0.$$

Demostración. De acuerdo al teorema de Dirichlet sobre aproximación simultánea de números reales por racionales (ver [C], Sección I.5), para cada $\varepsilon > 0$ existen infinitos valores de $k \in \mathbb{N}$ para los cuales existen números naturales p_k, q_k tales que

$$\left| k \frac{\ell_1}{\ell_0} - p_k \right| < \varepsilon, \quad \left| k \frac{\ell_2}{\ell_0} - q_k \right| < \varepsilon.$$

Entonces,

$$\left| \frac{\pi k}{\ell_0} - \frac{\pi p_k}{\ell_1} \right| < \varepsilon', \quad \left| \frac{\pi k}{\ell_0} - \frac{\pi q_k}{\ell_2} \right| < \varepsilon', \quad (57)$$

donde

$$\varepsilon' = \min \left\{ \frac{\pi \varepsilon}{\ell_1}, \frac{\pi \varepsilon}{\ell_2} \right\}.$$

Sea $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sigma_{n_k} = \min \left\{ \frac{\pi k}{\ell_0}, \frac{\pi p_k}{\ell_1}, \frac{\pi q_k}{\ell_2} \right\}.$$

Entonces, de (57) resulta que se verificarán las desigualdades

$$\sigma_{n_{k+2}} - \sigma_{n_k} < 2\varepsilon'.$$

Pero, en vista de (54), la última desigualdad implica

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} < 2\varepsilon',$$

para infinitos valores de $k \in \mathbb{N}$.

Teniendo en cuenta que ε' puede escogerse arbitrariamente pequeño, se obtiene la afirmación de la proposición. \square

6. Observabilidad de los coeficientes de Fourier de los datos iniciales

Pretendemos ahora escribir las desigualdades del Teorema III.3 en términos de los coeficientes de Fourier de los datos iniciales de la solución $\bar{\phi}$ of (2). Para ello debemos expresar $\mathbf{E}_{\ell_j^- \bar{\phi}}$, $j = 1, 2$, en función de estos coeficientes.

Si $\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1 \in Z$, es decir, si las sucesiones $(\phi_{0,n})$ y $(\phi_{1,n})$ son finitas, entonces, de la fórmula (4) resulta

$$\ell_j^- \bar{\phi}(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\phi_{0,n} \ell_j^- \cos \lambda_n t + \frac{\phi_{1,n}}{\lambda_n} \ell_j^- \sin \lambda_n t) \bar{\theta}_n(x). \quad (58)$$

Pero tenemos las relaciones

$$\begin{aligned} \ell_j^- \cos \lambda_n t &= \frac{1}{2} (\cos \lambda_n (t + \ell_j) - \cos \lambda_n (t - \ell_j)) = -\sin \lambda_n \ell_j \sin \lambda_n t, \\ \ell_j^- \sin \lambda_n t &= \frac{1}{2} (\sin \lambda_n (t + \ell_j) - \sin \lambda_n (t - \ell_j)) = \sin \lambda_n \ell_j \cos \lambda_n t, \end{aligned}$$

que al ser substituidas en (58) dan

$$\ell_j^- \bar{\phi}(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sin \lambda_n \ell_j \left(\frac{\phi_{1,n}}{\lambda_n} \cos \lambda_n t - \phi_{0,n} \sin \lambda_n t \right) \bar{\theta}_n(x). \quad (59)$$

Usando la fórmula (5) para el cálculo de la energía de $\ell_j^- \bar{\phi}$ obtenemos

$$\mathbf{E}_{\ell_j^- \bar{\phi}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sin^2 \lambda_n \ell_j (\mu_n \phi_{0,n}^2 + \phi_{1,n}^2) \quad (60)$$

y en consecuencia, el Teorema III.3 nos permite asegurar que existe una constante $C > 0$ tal que se verifican las desigualdades

$$\int_0^{T^*} |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt \geq C \sum_{n \in \mathbb{N}} \sin^2 \lambda_n \ell_j (\mu_n \phi_{0,n}^2 + \phi_{1,n}^2), \quad j = 1, 2,$$

para todos $\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1 \in Z$. Como $Z \times Z$ es denso en $V \times H$, esta desigualdad es válida para todos los $\bar{\phi}_0 \in V$, $\bar{\phi}_1 \in H$.

Si denotamos

$$c_n := \max\{|\sin \lambda_n \ell_1|, |\sin \lambda_n \ell_2|\} \quad (61)$$

tendremos

Teorema III.4. — *Existe una constante positiva C tal que toda solución $\bar{\phi}$ de (2) con estado inicial $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in V \times H$ satisface*

$$\int_0^{T^*} |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt \geq C \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n^2 (\mu_n \phi_{0,n}^2 + \phi_{1,n}^2).$$

7. Estudio de los pesos c_n

El Teorema III.4 proporciona un resultado satisfactorio, pues permite asegurar la controlabilidad de cierto espacio de estados iniciales. Sin embargo, esto depende de los coeficientes c_n , en particular, de si son o no nulos.

Observemos inicialmente que no podremos obtener una desigualdad como la del Teorema III.4, con coeficientes c_n no nulos, no necesariamente definidos por (61), cuando el cociente ℓ_1/ℓ_2 es un número racional. En efecto, si $\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ entonces, para cada $k \in \mathbb{Z}$ la función $\bar{\phi} = (\phi^0, \phi^1, \phi^2)$ definida por

$$\phi^0 \equiv 0, \quad \phi^1 = \text{sen} \frac{kp\pi t}{\ell_1} \text{sen} \frac{kp\pi x}{\ell_1}, \quad \phi^2 = -\text{sen} \frac{kq\pi t}{\ell_2} \text{sen} \frac{kq\pi x}{\ell_2},$$

es una solución de (2) y satisface

$$\phi_x^0(t, \ell_0) \equiv 0.$$

Esto implica que el sistema no es aproximadamente controlable¹, lo que sí ocurriría, sin embargo, si $c_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

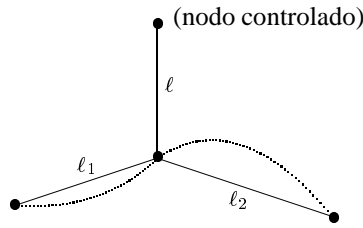


FIGURA 4. Una vibración localizada no observable cuando $\frac{\ell_2}{\ell_1} \in \mathbb{Q}$.

En realidad esta condición es también suficiente.

Proposición III.8. – Si el cociente ℓ_1/ℓ_2 es un número irracional entonces, todos los números c_n , $n \in \mathbb{N}$, definidos por (61), son diferentes de cero.

Demostración. Basta notar que $c_n = 0$ implicaría $|\text{sen} \lambda_n \ell_1| = |\text{sen} \lambda_n \ell_2| = 0$, por lo que

$$\lambda_n \ell_1 = p\pi, \quad \lambda_n \ell_2 = q\pi$$

y de esto resultaría $\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. □

Así hemos obtenido la siguiente caracterización de las longitudes de las cuerdas para las cuales el sistema es aproximada o espectralmente controlable.

¹Más aún, la propiedad de continuación única falla sobre un subespacio de dimensión infinita

Corolario III.4. – *Las siguientes propiedades relativas al problema de las tres cuerdas son equivalentes:*

- 1) *El sistema es espectralmente controlable en tiempo $T \geq T^*$;*
- 2) *El sistema es aproximadamente controlable en tiempo $T \geq T^*$;*
- 3) *El cociente ℓ_1/ℓ_2 es un número irracional.*

En lo que sigue trataremos de encontrar condiciones sobre los valores de ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 que nos permitan asegurar que para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ todos los estados iniciales $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in \mathcal{W}^\alpha$ son controlables en tiempo $T^* = 2(\ell_0 + \ell_1 + \ell_2)$. De manera más precisa, si definimos

$$\Phi_\alpha = \{(\ell_0, \ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}_+^3 : \mathcal{W}^\alpha \subset \mathcal{W}_{T^*}\},$$

nuestro objetivo es indicar condiciones explícitas que garanticen que $(\ell_0, \ell_1, \ell_2) \in \Phi_\alpha$.

Si conseguimos demostrar que los valores ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 de las longitudes de las cuerdas existe una constante $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n \geq C\lambda_n^{-\alpha}, \quad (62)$$

entonces, como se ha indicado en la Sección 2.1, tendremos $(\ell_0, \ell_1, \ell_2) \in \Phi_\alpha$.

Consideramos la función

$$\mathbf{a}^\alpha(\ell_1, \ell_2, \lambda) := (|\operatorname{sen} \lambda \ell_1| + |\operatorname{sen} \lambda \ell_2|)\lambda^\alpha.$$

Está claro, que si para ciertos valores ℓ_1, ℓ_2 la función $\mathbf{a}^\alpha(\ell_1, \ell_2, \lambda)$ tiene una cota inferior positiva:

$$\mathbf{a}^\alpha(\ell_1, \ell_2, \lambda) \geq a > 0 \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}_+,$$

entonces, para todo $\ell_0 \in \mathbb{R}_+$, se obtendría la desigualdad (62). De modo que nos dedicaremos a estudiar la función \mathbf{a} .

Tiene lugar

Proposición III.9. – *Si existe una constante $C > 0$ tal que $|||n\frac{\ell_1}{\ell_2}||| \geq Cn^{-\alpha}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\mathbf{a}^\alpha(\ell_1, \ell_2, \lambda) \geq a > 0 \text{ para todo } \lambda \geq 1. \quad (63)$$

Demostración. Supongamos que la desigualdad (63) es falsa. Entonces existirá una sucesión (λ_k) tal que

$$\mathbf{a}^\alpha(\ell_1, \ell_2, \lambda_k) = |\operatorname{sen} \lambda_k \ell_1| \lambda_k^\alpha + |\operatorname{sen} \lambda_k \ell_2| \lambda_k^\alpha \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \quad (64)$$

Observemos que en estas condiciones $\lambda_k \rightarrow \infty$. En efecto, si (λ_k) tiene un punto de acumulación finito $\lambda_* \geq 1$ entonces, de la continuidad de \mathbf{a}^α resulta

$$\mathbf{a}^\alpha(\ell_1, \ell_2, \lambda_*) = 0.$$

En consecuencia

$$\operatorname{sen} \lambda_* \ell_1 = \operatorname{sen} \lambda_* \ell_2 = 0,$$

lo que sólo podría ocurrir si $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ fuese un número racional. Pero en tal caso existirían valores de $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\left| \left| n \frac{\ell_1}{\ell_2} \right| \right| = 0,$$

lo que contradice la hipótesis de la proposición.

De (64) resulta

$$|\operatorname{sen} \lambda_k \ell_1| \lambda_k^\alpha \rightarrow 0, \quad |\operatorname{sen} \lambda_k \ell_2| \lambda_k^\alpha \rightarrow 0. \quad (65)$$

Denotemos para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &:= \left| \left| \frac{\ell_1 \lambda_k}{\pi} \right| \right|, & m_k &:= \frac{\ell_1 \lambda_k}{\pi} - \varepsilon_k \in \mathbb{N}, \\ \delta_k &:= \left| \left| \frac{\ell_2 \lambda_k}{\pi} \right| \right|, & n_k &:= \frac{\ell_2 \lambda_k}{\pi} - \delta_k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como $0 \leq \varepsilon_k, \delta_k \leq \frac{1}{2}$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_k}{\lambda_k} = \frac{1}{\pi}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k}{\lambda_k} = \frac{1}{\pi}.$$

En particular, como $\lambda_k \rightarrow \infty$, lo mismo ocurrirá con las sucesiones m_k y n_k . Además,

$$\pi \varepsilon_k \leq 2 |\operatorname{sen} \varepsilon_k \pi| = |\operatorname{sen}(m_k + \varepsilon_k) \pi| = \operatorname{sen} \lambda_k \ell_1,$$

por lo que de (65) se obtiene $\varepsilon_k \lambda_k^\alpha \rightarrow 0$. Análogamente, $\delta_k \lambda_k^\alpha \rightarrow 0$.

Tendremos entonces que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(n_k \frac{\ell_1}{\ell_2} - m_k \right) n_k^\alpha = \frac{\pi}{\ell_2} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\varepsilon_k \frac{n_k}{\lambda_k} - \delta_k \frac{m_k}{\lambda_k} \right) n_k^\alpha = \frac{1}{\ell_2} \lim_{k \rightarrow \infty} (\varepsilon_k n_k^\alpha - \delta_k n_k^\alpha) = 0.$$

De donde

$$\left| \left| n_k \frac{\ell_1}{\ell_2} \right| \right| n_k^\alpha \leq \left(n_k \frac{\ell_1}{\ell_2} - m_k \right) n_k^\alpha \rightarrow 0,$$

que contradice el hecho $\left| \left| n \frac{\ell_1}{\ell_2} \right| \right| \geq C n^{-\alpha}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

La condición proporcionada por la Proposición III.9, que implica la desigualdad (62), es suficiente para que $\mathcal{W}^\alpha \subset \mathcal{W}_T$. Veremos ahora que esta condición es también necesaria en el siguiente sentido

Proposición III.10. — *Si existe una sucesión de números naturales $n_k, n_k \rightarrow \infty$, para la cual*

$$\left| \left| n_k \frac{\ell_1}{\ell_2} \right| \right| n_k^\alpha \rightarrow 0, \text{ cuando } k \rightarrow \infty,$$

entonces, existen valores de $\ell_0 \in \mathbb{R}$ tales que para todo $T > 0$, el espacio \mathcal{W}^α no está contenido en \mathcal{W}_T . Es decir, existen estados iniciales en \mathcal{W}^α que no son controlables.

Demostración. Basta escoger ℓ_0 de modo que

$$\left| \left| n_k \frac{\ell_0}{\ell_2} \right| \right| n_k^\alpha \rightarrow 0, \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

En efecto, sean m y \tilde{m} los números enteros más cercanos a $n_k \frac{\ell_1}{\ell_2}$ y $n_k \frac{\ell_0}{\ell_2}$, respectivamente. Sea (σ_p) la sucesión definida en la pág. (54) y denotemos por p_k el índice para el cual

$$\sigma_{p_k} = \min \left(n_k \frac{\pi}{\ell_2}, m \frac{\pi}{\ell_1}, \tilde{m} \frac{\pi}{\ell_0} \right).$$

Tendremos entonces

$$|\sigma_{p_k+2} - \sigma_{p_k}| \sigma_{p_k}^\alpha \rightarrow 0,$$

lo que implica, a partir de las desigualdades (54),

$$|\lambda_{p_k+1} - \lambda_{p_k}| \lambda_{p_k}^\alpha \rightarrow 0. \quad (66)$$

Por otra parte, que todos los estados iniciales $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in \mathcal{W}^\alpha$ sean controlables en tiempo T equivale a que se cumpla la desigualdad

$$\int_0^T |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt \geq C \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{2\alpha} (\mu_n \phi_{0,n}^2 + \phi_{1,n}^2),$$

para toda solución de (2) con $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in Z \times Z$. Sin embargo, procediendo como en la pág. 34, se demuestra fácilmente que debido a (66) esta última desigualdad es imposible. \square

Como en el caso de dos cuerdas controladas simultáneamente, la Proposición III.9 reduce el problema de identificar subespacios de estados iniciales controlables al problema de aproximación diofántica: dado $\alpha < 0$, determinar para qué valores de ξ existe una constante $C > 0$ tal que se verifica la desigualdad

$$|||n\xi||| \geq Cn^\alpha, \quad (67)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

En base a los resultados descritos en la Subsección 2.1 obtenemos:

Corolario III.5. – a) Si $\frac{\ell_1}{\ell_2} \in B_\varepsilon$ entonces, el subespacio $\mathcal{W}^{1+\varepsilon}$ es controlable en cualquier tiempo $T \geq T^*$. En particular, si $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ es un número algebraico irracional, $\mathcal{W}^{1+\varepsilon}$ es controlable para cualquier $\varepsilon > 0$.

b) Si $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ admite un desarrollo infinito en fracción continua entonces, el subespacio \mathcal{W}^1 es controlable en cualquier tiempo $T \geq T^*$.

c) Existen valores de las longitudes ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 tales que ningún subespacio \mathcal{W}^α es controlable en algún tiempo finito T .

Observación III.4. – Como veremos posteriormente, los números $\varkappa_n = \theta_{n,x}^0(\ell_0)$, donde $\bar{\theta}_n$ son las autofunciones del problema elíptico asociado a (2), tienen relevancia en el estudio del problema de control cuando se intenta probar las desigualdades de observabilidad de manera directa.

Las autofunciones $\bar{\theta}_n$ pueden construirse explícitamente en función de los autovalores

$$\bar{\theta}_n = \begin{pmatrix} \theta_n^0 \\ \theta_n^1 \\ \theta_n^2 \end{pmatrix} = \gamma_n \begin{pmatrix} \frac{\text{sen } \lambda_n (\ell_0 - x)}{\text{sen } \lambda_n \ell_0} \\ \frac{\text{sen } \lambda_n (\ell_1 - x)}{\text{sen } \lambda_n \ell_1} \\ \frac{\text{sen } \lambda_n (\ell_2 - x)}{\text{sen } \lambda_n \ell_2} \end{pmatrix},$$

donde

$$\gamma_n = \sqrt{2} \left\{ \frac{\ell_0}{\text{sen}^2 \lambda_n \ell_0} + \frac{\ell_1}{\text{sen}^2 \lambda_n \ell_1} + \frac{\ell_2}{\text{sen}^2 \lambda_n \ell_2} \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Entonces,

$$\varkappa_n = -\lambda_n \sqrt{2} \left\{ \ell_0 + \ell_1 \frac{\operatorname{sen}^2 \lambda_n \ell_0}{\operatorname{sen}^2 \lambda_n \ell_1} + \ell_2 \frac{\operatorname{sen}^2 \lambda_n \ell_0}{\operatorname{sen}^2 \lambda_n \ell_2} \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Una estimación relativamente poco precisa sería

$$|\varkappa_n| \geq \lambda_n \sqrt{\frac{2}{\ell_0 + \ell_1 + \ell_2}} |\operatorname{sen} \lambda_n \ell_1 \operatorname{sen} \lambda_n \ell_2|. \quad (68)$$

Si las longitudes ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 satisfacen la condición (S)¹ entonces, de acuerdo a la Proposición A.4 del Apéndice A, para cada $\varepsilon > 0$ existe una constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|\operatorname{sen} \lambda_n \ell_1| \geq \frac{C_\varepsilon}{\lambda_n^{1+\varepsilon}}, \quad |\operatorname{sen} \lambda_n \ell_2| \geq \frac{C_\varepsilon}{\lambda_n^{1+\varepsilon}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

y con esto, de (68) se obtiene

$$|\varkappa_n| \geq \frac{C_\varepsilon}{\lambda_n^{1+\varepsilon}}. \quad (69)$$

Sin embargo, pueden establecerse estimaciones más precisas, en condiciones más débiles sobre las longitudes, a partir del Teorema III.4. En efecto, basta aplicar la desigualdad del teorema a las soluciones $\operatorname{sen} \lambda_n t \bar{\theta}_n$ y $\operatorname{cos} \lambda_n t \bar{\theta}_n$ para obtener

$$|\varkappa_n|^2 \int_0^T |\operatorname{cos} \lambda_n t|^2 dt \geq C c_n^2 \lambda_n^2, \quad |\varkappa_n|^2 \int_0^T |\operatorname{sen} \lambda_n t|^2 dt \geq C c_n^2 \lambda_n^2.$$

De esto resulta

$$|\varkappa_n| \geq C \lambda_n \max\{|\operatorname{sen} \lambda_n \ell_1|, |\operatorname{sen} \lambda_n \ell_2|\}.$$

Esta desigualdad es obviamente más exacta que (68). De ella puede obtenerse: Si el cociente $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ pertenece a \mathbf{B}_ε entonces,

$$|\varkappa_n| \geq \frac{C}{\lambda_n^\varepsilon}.$$

A diferencia de la estimación (68), esta no impone ninguna condición a ℓ_0 .

Procediendo de manera similar, a partir de la desigualdad (I.18) se obtiene

$$C \lambda_n \geq |\varkappa_n|, \quad (70)$$

independientemente de los valores de las longitudes.

8. Relación entre el problema de control simultáneo de dos cuerdas y el control desde un nodo exterior de la red de tres cuerdas

Como habrá notado el lector, las condiciones sobre las longitudes de las cuerdas que permiten identificar subespacios de estados iniciales controlables son las mismas para el control simultáneo de

¹Los números ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 satisfacen la condición (S) si son linealmente independientes sobre \mathbb{Q} y los cocientes $\frac{\ell_i}{\ell_j}$ son números algebraicos. Para más detalles véase el Apéndice A.

dos cuerdas y el control desde un nodo exterior de la red de tres cuerdas. Además, cuando estas condiciones se satisfacen, los subespacios de estados iniciales controlables correspondientes coinciden sobre las cuerdas no controladas, salvo por las condiciones de contorno en el nodo común. Este hecho no es casual. La razón la da el siguiente

Teorema III.5. – *Si \mathcal{V} es un subespacio de estados iniciales controlables en tiempo T para el sistema de las dos cuerdas controladas simultáneamente (10) entonces, el subespacio $(L^2(0, \ell_0) \times H^{-1}(0, \ell_0)) \times \mathcal{V}$ de estados iniciales del sistema de las tres cuerdas (31) es controlable en tiempo $T + 2\ell_0$.*

Para la demostración de este teorema necesitamos algunos elementos previos. Consideremos los espacios

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_0 &= \{(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in V \times H : \phi_0^0(0) = \phi_0^1(0) = \phi_0^2(0) = 0\}, \\ \mathcal{V}_0 &= (H_0^1(0, \ell_1) \times L^2(0, \ell_1)) \times (H_0^1(0, \ell_2) \times L^2(0, \ell_2)).\end{aligned}$$

Para $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in \mathcal{W}_0$ denotamos por $\bar{\phi}$ la solución del sistema de las tres cuerdas homogéneo (2) con estado inicial $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1)$, y por $\bar{\psi} = (0, \psi^1, \psi^2)$, donde ψ^1, ψ^2 son las soluciones del sistema homogéneo (11) con estados iniciales (ϕ_0^1, ϕ_1^1) y (ϕ_0^2, ϕ_1^2) , respectivamente.

Escogemos $T \geq 2(\ell_0 + \ell_1 + \ell_2)$ y definimos

$$\begin{aligned}\|(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1)\|_E^2 &:= \int_0^T |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt, \\ \|(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1)\|_S^2 &:= \int_{\ell_0}^{T-\ell_0} |\psi_x^1(t, 0) + \psi_x^2(t, 0)|^2 dt.\end{aligned}$$

De acuerdo a los resultados de la Proposición III.1 y el Corolario III.4, las funciones $\|\cdot\|_E$ y $\|\cdot\|_S$ definen normas en \mathcal{W}_0 y \mathcal{V}_0 respectivamente, si, y sólo si, $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ es un número irracional.

Proposición III.11. – *Existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in \mathcal{W}_0$,*

$$C\|(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1)\|_E \geq \|(\phi_0^0, \phi_1^0)\|_{H_0^1 \times L^2} + \|(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1)\|_S.$$

Demostración. Observemos que, al aplicar las fórmulas de D'Alembert (II.21) a la componente ϕ^0 tendremos, teniendo en cuenta que $\phi_t^0(t, \ell_0) \equiv 0$,

$$\phi_x^0(t, 0) = \ell_0^- \phi_x^0(t, \ell_0), \quad \phi_t^0(t, 0) = -\ell_0^+ \phi_x^0(t, \ell_0).$$

Entonces, a partir de la Proposición II.5 se obtienen las desigualdades

$$\int_0^T |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt \geq \int_{\ell_0}^{T-\ell_0} |\phi_x^0(t, 0)|^2 dt, \quad \int_0^T |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt \geq \int_{\ell_0}^{T-\ell_0} |\phi_t^0(t, 0)|^2 dt. \quad (71)$$

Por otra parte, si \mathbf{E}_{ϕ^0} es la energía de la componente ϕ^0 tendremos, de acuerdo a la Proposición II.4,

$$\mathbf{E}_{\phi^0}(0) \leq \int_{-\ell_0}^{\ell_0} |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt.$$

Entonces, a partir de la propiedad (49) (véase la Proposición III.5)

$$\|(\phi_0^0, \phi_1^0)\|_{H_0^1 \times L^2}^2 = 2\mathbf{E}_{\phi^0}(0) \leq C \int_0^T |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt. \quad (72)$$

Observemos ahora que la solución $\bar{\phi}$ puede descomponerse como

$$\bar{\phi} = \bar{\psi} + \bar{\omega}, \quad (73)$$

donde $\bar{\omega} = (\omega^0, \omega^1, \omega^2)$ es la única solución del problema

$$\begin{cases} \omega_{tt}^i - \omega_{xx}^i = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times [0, \ell_i], & i = 0, 1, 2, \\ \omega^i(t, \ell_i) = 0, \quad \omega^i(t, 0) = \phi^i(t, 0) & \text{en } \mathbb{R}, & i = 0, 1, 2, \\ \omega^0(0, x) = \phi_0^0(x), \quad \omega_t^0(0, x) = \phi_1^0(x) & \text{en } [0, \ell_0], \\ \omega^i(0, x) = \omega_t^i(0, x) = 0, & \text{en } [0, \ell_i], & i = 1, 2. \end{cases} \quad (74)$$

En efecto, para cada $i = 0, 1, 2$, la función

$$\bar{\eta} = \bar{\phi} - \bar{\psi} - \bar{\omega}$$

satisface

$$\begin{cases} \eta_{tt}^i - \eta_{xx}^i = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times [0, \ell_i], \\ \eta^i(t, 0) = \eta^i(t, \ell_i) = 0 & \text{en } \mathbb{R}, \\ \eta^i(0, x) = \eta_t^i(0, x) = 0 & \text{en } [0, \ell_i]. \end{cases}$$

Por ello $\bar{\eta} \equiv \bar{0}$, es decir, se verifica (73). En particular,

$$\phi_x^i(t, 0) = \psi_x^i(t, 0) + \omega_x^i(t, 0), \quad i = 0, 1, 2. \quad (75)$$

En vista de la condición de acoplamiento

$$\phi_x^0(t, 0) + \phi_x^1(t, 0) + \phi_x^2(t, 0) = 0,$$

de (75) resulta

$$-\phi_x^0(t, 0) = \psi_x^1(t, 0) + \psi_x^2(t, 0) + \omega_x^1(t, 0) + \omega_x^2(t, 0). \quad (76)$$

Entonces tendremos

$$\begin{aligned} \int_{\ell_0}^{T-\ell_0} |\psi_x^1(t, 0) + \psi_x^2(t, 0)|^2 dt &\leq \int_{\ell_0}^{T-\ell_0} |\psi_x^1(t, 0) + \psi_x^2(t, 0) + \omega_x^1(t, 0) + \omega_x^2(t, 0)|^2 dt \\ &\quad + \int_{\ell_0}^{T-\ell_0} |\omega_x^1(t, 0) + \omega_x^2(t, 0)|^2 dt \\ &\leq \int_{\ell_0}^{T-\ell_0} |\phi_x^0(t, 0)|^2 dt + \int_{\ell_0}^{T-\ell_0} |\omega_x^1(t, 0) + \omega_x^2(t, 0)|^2 dt. \end{aligned}$$

Por otra parte, al aplicar el Lema 4.2 de [Ho] al sistema (74), resulta que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\int_{\ell_0}^{T-\ell_0} |\omega_x^1(t, 0) + \omega_x^2(t, 0)|^2 dt \leq C \int_{\ell_0}^{T-\ell_0} |\omega_t^0(t, 0)|^2 dt = C \int_{\ell_0}^{T-\ell_0} |\phi_t^0(t, 0)|^2 dt.$$

Así, obtenemos la desigualdad

$$\int_{\ell_0}^{T-\ell_0} |\psi_x^1(t, 0) + \psi_x^2(t, 0)|^2 dt \leq \int_{\ell_0}^{T-\ell_0} |\phi_x^0(t, 0)|^2 dt + C \int_{\ell_0}^{T-\ell_0} |\phi_t^0(t, 0)|^2 dt,$$

y, en virtud de (71),

$$\int_{\ell_0}^{T-\ell_0} |\psi_x^1(t, 0) + \psi_x^2(t, 0)|^2 dt \leq C \int_0^T |\phi_x^0(t, \ell_0)|^2 dt. \quad (77)$$

Finalmente, combinando las desigualdades (72) y (77) resulta la afirmación de la proposición. \square

Proposición III.12. – *Sea $\bar{g} \in H$ una función continua tal que $g^0(0) \neq 0$. Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in \mathcal{W}_0$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$C \|(\bar{\phi}_0 + \lambda \bar{g}, \bar{\phi}_1)\|_E \geq \|(\phi_0^0, \phi_1^0)\|_{H_0^1 \times L^2} + \|(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1)\|_S.$$

Demostración. Denotemos por $\bar{\varphi}_\lambda$ la solución del sistema (31) con estado inicial $(\bar{\phi}_0 + \lambda \bar{g}, \bar{\phi}_1)$. Observemos que

$$|\lambda|^2 = |\phi_0^0(0) + \lambda g^0(0)|^2 \leq C \|(\phi_0^0 + \lambda g^0)\|_{H^1}^2 \leq C \mathbf{E}_{\varphi_\lambda^0}(0). \quad (78)$$

De forma análoga a como se hizo en la demostración de la Proposición III.11 se prueba que

$$\mathbf{E}_{\varphi_\lambda^0}(0) \leq C \|(\bar{\phi}_0 + \lambda \bar{g}, \bar{\phi}_1)\|_E^2. \quad (79)$$

Entonces, de las relaciones (78), (79) resulta

$$\|(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1)\|_E \leq \|(\bar{\phi}_0 + \lambda \bar{g}, \bar{\phi}_1)\|_E + |\lambda| \|(\bar{g}, \bar{0})\|_E \leq C \|(\bar{\phi}_0 + \lambda \bar{g}, \bar{\phi}_1)\|_E$$

y la afirmación se obtiene a partir de la Proposición III.11 \square

Demostración del Teorema III.5. Denotemos por \mathcal{F}_S y \mathcal{F}_E los completados de H y \mathcal{V}_0 con las normas $\|\cdot\|_E$ y $\|\cdot\|_S$, respectivamente. Teniendo en cuenta que

$$H = \mathbb{R}\bar{g} + \mathcal{W}_0,$$

la Proposición III.11 nos permite asegurar que

$$(H_0^1(0, \ell_0) \times L^2(0, \ell_0)) \times \mathcal{F}_S \supset \mathcal{F}_E.$$

Entonces, los espacios de datos iniciales controlables $\mathcal{C}_E = \mathcal{F}'_E$, $\mathcal{C}_S = \mathcal{F}'_S$ de los sistemas (31) y (10) dados por el HUM satisfacen la relación

$$\mathcal{C}_E \subset (L^2(0, \ell_0) \times H^{-1}(0, \ell_0)) \times \mathcal{C}_S.$$

En particular, si $\mathcal{V} \subset \mathcal{C}_S$ entonces,

$$\mathcal{V} \subset (L^2(0, \ell_0) \times H^{-1}(0, \ell_0)) \times \mathcal{V},$$

que es la afirmación del teorema. \square

Observación III.5. – *Este enfoque tiene la ventaja de proporcionar subespacios de estados iniciales controlables del sistema (31) en los cuales no se imponen restricciones de regularidad a las componentes ϕ_0^0, ϕ_1^0 , a diferencia de los resultados del Corolario III.5.*

9. Ausencia de controlabilidad para tiempos pequeños

A causa de la velocidad finita de propagación de las ondas a lo largo de las cuerdas, igual a uno en nuestro caso, es de esperar que cuando el tiempo de control T sea pequeño el sistema no sea controlable y por esta razón, que una desigualdad de observabilidad del tipo (32) sea imposible. Esto implicaría que el sistema (31) no sea espectralmente controlable. Resulta que esta ausencia de controlabilidad, incluso aproximada, ocurrirá siempre que $T < T^* = 2(\ell_0 + \ell_1 + \ell_2)$.

Para redes arbitrarias, la ausencia de controlabilidad espectral de la red en tiempos menores que el doble de su longitud, puede demostrarse a partir de resultados de la Teoría de Series de Fourier no Armónicas (concretamente el teorema de Beurling-Malliavin) y las propiedades asintóticas de la sucesión de los autovalores del problema (ver Capítulo IV). Sin embargo, para el caso de las tres cuerdas es posible dar una prueba completamente elemental de este hecho, basada en la construcción de una solución $\bar{\phi}$ de (2), cuya traza $\phi_x^0(\cdot, \ell_0)$ en el punto de observación se anula durante un tiempo $T < T^*$. Esto permite asegurar que el sistema (31) no será siquiera aproximadamente controlable. Tiene lugar,

Teorema III.6. – *Sea $T < T^*$. Entonces, existen estados iniciales no nulos*

$$(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in \bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathcal{W}^\alpha,$$

para las cuales la solución $\bar{\phi}$ de (2) satisface

$$\phi_x^0(t, \ell_0) = 0 \quad \text{en } [0, T]. \quad (80)$$

Para la demostración de este teorema usaremos algunos resultados técnicos. Sean $T > 0$ y $0 < \sigma < T$. Definimos el operador $I_\sigma : L^2(0, T) \rightarrow L^2(0, T - \sigma)$ mediante la fórmula

$$(I_\sigma f)(t) := \int_t^{t+\sigma} f(\tau) d\tau.$$

Para valores arbitrarios de $\sigma_1, \sigma_2 \in (0, T)$ el sistema de ecuaciones funcionales

$$\begin{cases} I_{\sigma_i} f_i = 0 & \text{en } L^2(0, T - \sigma_i) & i = 1, 2, \\ f_1 + f_2 = 0 & \text{en } L^2(0, T), \end{cases} \quad (81)$$

admite la solución trivial $f_1 = f_2 = 0$. Nuestro objetivo es estudiar para qué valores de T ésta es la única solución de (81). La respuesta la da el siguiente

Lema III.1. – *Sea $T_0 = \sigma_1 + \sigma_2$. Entonces, si $T < T_0$, el sistema (81) admite soluciones no triviales $f_i \in C^\infty([0, T])$, $i = 1, 2$.*

Antes de demostrar este lema, veamos como el Teorema III.6 puede obtenerse a partir de él. Está claro que es suficiente probar el Teorema III.6 para valores grandes de T de modo que asumimos que $T \geq 2(\ell_0 + \hat{\ell})$, donde $\hat{\ell}$ es el mayor de los números ℓ_1, ℓ_2 .

Sean f_1, f_2 soluciones no nulas de (81) para $\sigma_1 = 2\ell_1$, $\sigma_2 = 2\ell_2$ y $\tilde{T} = T - 2\ell_0$. Definimos las funciones

$$\phi^i(t, x) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} f_i(\tau - \ell_0) d\tau, \quad i = 1, 2,$$

para $x \in [0, \ell_i]$, $t \in [x + \ell_0, T - \ell_0 - x]$. Estas funciones satisfacen

$$(S_i) \quad \begin{cases} \phi_{xx}^i(t, x) = \phi_{tt}^i(t, x) \\ \phi^i(t, 0) = \phi^i(t, \ell_i) = 0, \quad \phi_x^i(t, 0) = 0, \end{cases}$$

siempre que $x \in [0, \ell_i]$ y $t \in [x + \ell_0, T - \ell_0 - x]$.

Cada una de las funciones ϕ^i puede ser extendida a una solución de (S_i) , que denotaremos nuevamente por ϕ^i , definida en la región $[\ell_0, T - \ell_0] \times [0, \ell_0]$. Nótese estas funciones han sido escogidas de modo que $\phi_x^i(t, 0) = f_i(t)$ para $t \in [\ell_0, T - \ell_0]$. Además,

$$\phi_x^1(t, 0) + \phi_x^2(t, 0) = f_1(t) + f_2(t) \quad \text{y} \quad \phi^1(t, 0) = \phi^2(t, 0) = 0,$$

de modo que $\bar{\phi} = (\phi^0 = 0, \phi^1, \phi^2)$ es una solución de (2) definida en el intervalo de tiempo $[\ell_0, T - \ell_0]$. Entonces, la única solución de (2) definida en $[0, T]$ que coincide con \bar{u} en $[\ell_0, T - \ell_0]$ satisface la igualdad (80).

Queda entonces sólo probar que los datos iniciales de $\bar{\phi}$ pertenecen a \mathcal{W}^α para todo α real.

Como $\phi^0 \equiv 0$ y $f_1, f_2 \in C^\infty([0, T])$ esto equivale a probar que para algún $T^* \in [\ell_0, T - \ell_0]$ y todo $k \in \mathbb{N}$ tienen lugar las igualdades

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} \phi^i(T^*, 0) = \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} \phi^i(T^*, \ell_i) = \frac{\partial^{2k+1}}{\partial x^{2k+1}} \phi^1(T^*, 0) + \frac{\partial^{2k+1}}{\partial x^{2k+1}} \phi^2(T^*, 0) = 0, \quad (82)$$

y

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} \phi_t^i(T^*, 0) = \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} \phi_t^i(T^*, \ell_i) = \frac{\partial^{2k+1}}{\partial x^{2k+1}} \phi_t^1(T^*, 0) + \frac{\partial^{2k+1}}{\partial x^{2k+1}} \phi_t^2(T^*, 0) = 0. \quad (83)$$

Observamos ahora que si f es una función regular entonces

$$(I_\sigma f)^{(k)}(t) = (I_\sigma f^{(k)})(t).$$

Esto implica, que si f_1 y f_2 son soluciones regulares de (81) entonces, las funciones $f_1^{(k)}, f_2^{(k)}$ también lo son. Por ello, las funciones $f_1^{(m)}$ y $f_2^{(m)}$ también son soluciones del problema (81) que define a f_1 y f_2 . Entonces, escogiendo, por ejemplo, $T^* = \ell_0 + \hat{\ell}$ obtenemos las igualdades (82) y (83).

La demostración del Lema III.1 está basada en los siguientes hechos:

Proposición III.13. – Si $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \in \mathbb{Q}$ entonces, para todo $T > 0$ existen funciones no nulas $\varphi \in C^\infty([0, T])$ tales que

$$\begin{aligned} I_{\sigma_1} \varphi &= 0 \quad \text{en} \quad [0, T - \sigma_1], \\ I_{\sigma_2} \varphi &= 0 \quad \text{en} \quad [0, T - \sigma_2]. \end{aligned}$$

Demostración. Si $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \in \mathbb{Q}$ existen números $p, q \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{\sigma_1}{p} = \frac{\sigma_2}{q} = \gamma.$$

Sea $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ no nula, γ -periódica y tal que

$$\int_0^\gamma \varphi(\tau) d\tau = 0.$$

Entonces,

$$I_{\sigma_1} \varphi = \int_t^{t+\sigma_1} \varphi(\tau) d\tau = \int_t^{t+\gamma p} \varphi(\tau) d\tau = p \int_t^{t+\gamma} \varphi(\tau) d\tau = 0.$$

De manera similar se prueba que $I_{\sigma_2} \varphi = 0$. \square

Proposición III.14. – Sean $\varepsilon > 0$, $T = \sigma_1 + \sigma_2 - \varepsilon$ y $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \notin \mathbb{Q}$. Entonces, existe una función no nula $\varphi \in C^\infty([0, T])$, tal que

$$\begin{aligned} I_{\sigma_1} \varphi &= 0 & \text{en } [0, T - \sigma_1], \\ I_{\sigma_2} \varphi &= 0 & \text{en } [0, T - \sigma_2]. \end{aligned} \quad (84)$$

Demostración. El número σ_2 puede expresarse como $\sigma_2 = n\sigma_1 + \omega$, $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in (0, \sigma_1)$. Al ser $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ irracional, también lo es $\frac{\omega}{\sigma_2}$. Consideremos la sucesión $\{\omega_k\}$ definida por

$$\omega_k \in (0, \sigma_1), \quad k - \omega_k \in \sigma_1 \mathbb{Z}$$

(los restos de $k\omega$ módulo σ_1). Como consecuencia de la irracionalidad de ω , tendremos que $\omega_k \neq \omega_l$ si $k \neq l$ y que $\{\omega_k\}$ es densa en el intervalo $[0, \sigma_1]$. Entonces existirán $k_1 < 0$, $k_2 > 0$ tales que $\omega_{k_1}, \omega_{k_2} \in [\sigma_1 - \varepsilon, \sigma_1)$ y $\omega_k \in [0, \sigma_1 - \varepsilon)$ para cada k que satisface $k_1 < k < k_2$ ¹.

Definimos ahora los subconjuntos de $[0, \sigma_1)$:

$$\Omega_k = (\omega_k, \omega_k + \gamma)$$

para $k_1 < k \leq k_2$, donde $\gamma > 0$ es lo suficientemente pequeño de modo que se verifique

$$\overline{\Omega_k} \cap \overline{\Omega_l} = \emptyset \quad \text{si } k \neq l \quad \text{y } \Omega_k \subset (0, \sigma_1) \quad \text{para } k_1 < k, l \leq k_2.$$

No resulta difícil demostrar que los conjuntos Ω_k poseen las propiedades siguientes:

(i) si $t \in \Omega_k$ con $k_1 < k < k_2$ y $t = \omega_k + \tau$ para cierto $\tau \in (0, \gamma)$ entonces,

$$\begin{aligned} t + \omega &= \omega_{k+1} + \tau & \text{si } \omega_k < \omega_{k+1}, \\ t + \omega &= \omega_{k+1} + \tau - \sigma_1 & \text{si } \omega_{k+1} < \omega_k. \end{aligned}$$

(ii) si $t \in [0, \sigma_1 - \varepsilon) \setminus \cup \Omega_k$, entonces

$$\begin{aligned} t + \omega &\notin \cup \Omega_k & \text{si } t < \sigma_1 - \omega, \\ t + \omega - \sigma_1 &\notin \cup \Omega_k & \text{si } t \geq \sigma_1 - \omega. \end{aligned}$$

Escojamos ahora una función $\psi \in C^\infty([0, \sigma_1])$ con soporte contenido en el intervalo $(0, \gamma)$ que satisfaga $\int_0^\gamma \psi(\tau) d\tau = 0$ y definamos la función φ en $[0, \sigma_1]$ mediante

$$\varphi(t) = \begin{cases} \psi(t - \omega_k) & \text{if } t \in \Omega_k, \\ 0 & \text{if } t \in [0, \sigma_1] \setminus \cup \Omega_k. \end{cases}$$

¹Esto no es más que decir que $k_1 < 0$ y $k_2 > 0$ son los valores de k con menor valor absoluto no nulo tales que ω_k está en el intervalo $[\ell_1 - \varepsilon, \ell_1)$.

Resultará $\varphi \in C^\infty([0, \sigma_1])$ y $\text{supp } \varphi \subset \cup \Omega_k \subset (0, \sigma_1)$. En particular, la extensión σ_1 -periódica de φ a todo \mathbb{R} , que denotaremos nuevamente por φ , verifica $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Comprobaremos ahora que φ es además una de las funciones cuya existencia se afirma en el lema.

Sean $t_1, t_2 \in [0, \sigma_1] \setminus \cup \Omega_k$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \varphi(\tau) d\tau &= \sum_{m: \Omega_m \subset (t_1, t_2)} \int_{\Omega_m} \varphi(\tau) d\tau = \sum_m \int_{\omega_m}^{\omega_m + \gamma} \varphi(\tau - \omega_m) d\tau \\ &= \sum_m \int_0^\gamma \varphi(\tau) d\tau = 0. \end{aligned}$$

En particular, si seleccionamos $t_1 = 0, t_2 = \sigma_1$ obtenemos $\int_0^{\sigma_1} \varphi(\tau) d\tau = 0$, y por consiguiente, como φ es σ_1 -periódica, $I_{\sigma_1} \varphi = 0$ en \mathbb{R} .

Restaría calcular $I_{\sigma_2} \varphi$ para los valores de t en el intervalo $[0, \sigma_1 - \varepsilon)$. Son posibles dos casos:

Caso 1. $t \in \Omega_k$ para algún k . Entonces, $t = \omega_k + \tau$ con $\tau \in (0, \gamma)$. Supondremos que $\omega_k < \omega_{k+1}$, ya que cuando $\omega_{k+1} < \omega_k$ el resultado se obtiene de modo semejante.

Tomando en consideración la propiedad (i) de los conjuntos Ω_k mencionada antes, se obtiene

$$\begin{aligned} I_{\sigma_2} \varphi(t) &= \int_t^{t+\omega} \varphi(s) ds = \int_{\omega_k + \tau}^{\omega_{k+1} + \tau} \varphi(s) ds \\ &= \int_{\omega_k + \tau}^{\omega_k + \gamma} \varphi(s) ds + \int_{\omega_{k+1}}^{\omega_{k+1} + \tau} \varphi(s) ds + \int_{\omega_k + \gamma}^{\omega_{k+1}} \varphi(s) ds. \end{aligned}$$

Pero $\omega_k + \gamma$ y ω_{k+1} no están contenidos en $\cup \Omega_k$, $\int_{\omega_k + \gamma}^{\omega_{k+1}} \varphi(s) ds = 0$, por esta razón

$$\begin{aligned} I_{\sigma_2} \varphi(t) &= \int_{\omega_k + \tau}^{\omega_k + \gamma} \varphi(s - \omega_k) ds + \int_{\omega_{k+1}}^{\omega_{k+1} + \tau} \varphi(s - \omega_{k+1}) ds \\ &= \int_\tau^\gamma \psi(s) ds + \int_0^\tau \psi(s) ds = 0. \end{aligned}$$

Caso 2. $t \notin \cup \Omega_k$. Partiendo de la propiedad (ii), si $t < \sigma_1 - \omega$, entonces $t + \omega$ tampoco pertenece a $\cup \Omega_k$ y se tiene

$$I_{\sigma_2} \varphi(t) = \int_t^{t+\omega} \varphi(s) ds = 0.$$

Si fuese $t \geq \sigma_1 - \omega$, entonces $t - \sigma_1 + \omega \notin \cup \Omega_k$ y resultaría

$$I_{\sigma_2} \varphi(t) = \int_t^{t+\omega-\sigma_1} \varphi(s) ds = 0.$$

Esto demuestra la proposición. □

Demostración del Lema III.1. Resulta de manera inmediata de las proposiciones anteriores. Bastará tomar $f_1 = \varphi$ y $f_2 = -\varphi$ de acuerdo a las Proposiciones III.13 ó III.14, según sea $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ racional o irracional. □

10. Aplicación del método de los momentos al control de la red

En esta sección estudiamos el problema de momentos (II.38)

$$\int_0^T \varkappa_{|k|} e^{i\lambda_k t} h(t) dt = u_{1,|k|} - i\lambda_k u_{0,|k|} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}_*, \quad (85)$$

para la red de tres cuerdas. Recordemos que, de acuerdo a los resultados de la Sección II.3, que el problema de momentos (85) tenga solución $h \in L^2(0, T)$ equivale a que el estado inicial (\bar{u}_0, \bar{u}_1) con

$$\bar{u}_0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_{0,n} \bar{\theta}_n, \quad \bar{u}_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_{1,n} \bar{\theta}_n,$$

sea controlable en tiempo T . Con esto pretendemos mostrar una vía alternativa para el estudio del problema de control para el sistema (31).

Si efectuamos en (85) el cambio de variable $t \rightarrow t - \frac{T}{2}$, obtendremos

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i\lambda_n t} h(t - \frac{T}{2}) dt = \frac{1}{\varkappa_n} (u_{1,n} - i\lambda_n u_{0,n}) e^{i\lambda_n \frac{T}{2}}.$$

Al denotar $m_n := \frac{1}{\varkappa_n} (u_{1,n} - i\lambda_n u_{0,n}) e^{i\lambda_n \frac{T}{2}}$, $A := \frac{T}{2}$, el problema (85) resultará escrito en la forma (II.28). Esto implica de acuerdo a la Proposición II.6, que si podemos construir una sucesión (v_n) biortogonal a $(e^{i\lambda_n t})$ en $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ entonces, los estados iniciales que satisfacen

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_*} \left| \frac{1}{\varkappa_n} (u_{1,n} - i\lambda_n u_{0,n}) e^{i\lambda_n \frac{T}{2}} \right| \|v_n\|_{L^2} < \infty \quad (86)$$

son controlables en tiempo T con control

$$v = \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} \frac{1}{\varkappa_n} (u_{1,n} - i\lambda_n u_{0,n}) e^{i\lambda_n \frac{T}{2}} v_n.$$

La desigualdad (86) es equivalente a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_*} \frac{1}{|\varkappa_n|} (|u_{1,n}| + \lambda_n |u_{0,n}|) \|v_n\|_{L^2} < \infty.$$

En particular, si la biortogonal (v_n) se ha construido a partir de una función generatriz F entonces, serán controlables los estados iniciales que cumplan

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_*} \frac{1}{|\varkappa_n| |F'(\lambda_n)|} (|u_{1,n}| + \lambda_n |u_{0,n}|) < \infty. \quad (87)$$

Notemos ahora que para el problema de las tres cuerdas es muy fácil construir una función generatriz, pues ya disponemos de una función que se anula en los números λ_n : recordemos que, según se ha demostrado en la Proposición III.6, $q(\lambda_n) = 0$, donde

$$\begin{aligned} q(z) &= \cos z l_0 \sin z l_1 \sin z l_2 + \sin z l_0 \cos z l_1 \sin z l_2 \\ &\quad + \sin z l_0 \cos z l_1 \sin z l_1 \cos z l_2, \end{aligned} \quad (88)$$

que es una función entera, que además está acotada en el eje real: $|q(z)| \leq 3$.

Por otra parte, si se sustituyen en (88) $\cos z\ell_k$ y $\sin z\ell_k$ por sus correspondientes expresiones en términos de $e^{iz\ell_k}$ y $e^{-iz\ell_k}$:

$$\cos z\ell_k = \frac{1}{2} \left(e^{iz\ell_k} + e^{-iz\ell_k} \right), \quad \sin z\ell_k = -\frac{i}{2} \left(e^{iz\ell_k} - e^{-iz\ell_k} \right),$$

veremos que q puede escribirse como la suma de ocho términos de la forma $c_h e^{izh}$, donde c_h son constantes y

$$|h| \leq \ell_0 + \ell_1 + \ell_2.$$

Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que para todo $z \in \mathbb{C}$

$$|q(z)| \leq C e^{|z|(\ell_0 + \ell_1 + \ell_2)},$$

es decir, la función q es de tipo exponencial a lo sumo $\ell_0 + \ell_1 + \ell_2$.

Entonces, teniendo en cuenta los resultados de la Subsección II.3.1, existirá una sucesión (v_n) biortogonal a $(e^{i\lambda_n t})$ en cualquier intervalo $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ con $T \geq 2(\ell_0 + \ell_1 + \ell_2)$ que satisfice

$$\|v_n\|_{L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})} \leq \frac{C}{|q'(\lambda_n)|}, \quad n \in \mathbb{N},$$

donde $C > 0$ es independiente de n .

Esto garantiza inmediatamente que el espacio de las sucesiones, para las cuales el problema de momentos (85) tiene solución, es denso en l^2 . Por tanto, el espacio de los estados iniciales controlables en tiempo $T \geq 2(\ell_0 + \ell_1 + \ell_2)$, es denso en $H \times V'$. Más aún, todos los estados iniciales de $Z \times Z$ son controlables.

Estimaremos ahora los valores de $|q'(\lambda_n)|$ para intentar identificar subespacios mayores de estados controlables. Tenemos que la función q puede escribirse en la forma

$$q(z) = \sin z\ell_0 \sin z\ell_1 \sin z\ell_2 (\cot z\ell_0 + \cot z\ell_1 + \cot z\ell_2). \quad (89)$$

Entonces, resulta

$$|q'(\lambda_n)| = |\sin \lambda_n \ell_0 \sin \lambda_n \ell_1 \sin \lambda_n \ell_2| \mathbf{A}_n, \quad (90)$$

donde hemos denotado

$$\mathbf{A}_n = \left(\frac{\ell_0}{\sin^2 \lambda_n \ell_0} + \frac{\ell_1}{\sin^2 \lambda_n \ell_1} + \frac{\ell_2}{\sin^2 \lambda_n \ell_2} \right).$$

Teniendo en cuenta ahora (87), podemos asegurar que serán controlables aquellos estados iniciales que cumplan

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{|\varkappa_n| |q'(\lambda_n)|} (|u_{1,n}| + \lambda_n |u_{0,n}|) < \infty. \quad (91)$$

Para hacer más clara esta información debemos estimar el producto $|\varkappa_n| |q'(\lambda_n)|$. Recordemos que (ver Observación III.4)

$$|\varkappa_n| = \frac{\sqrt{2}\lambda_n}{|\sin \lambda_n \ell_0|} \mathbf{A}_n^{-\frac{1}{2}},$$

por lo que tendremos

$$|\varkappa_n| |q'(\lambda_n)| = \sqrt{2}\lambda_n |\sin \lambda_n \ell_1 \sin \lambda_n \ell_2| \mathbf{A}_n^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |\varkappa_n|^2 |q'(\lambda_n)|^2 &= 2\lambda_n^2 |\operatorname{sen} \lambda_n \ell_1 \operatorname{sen} \lambda_n \ell_2|^2 \left(\frac{\ell_0}{\operatorname{sen}^2 \lambda_n \ell_0} + \frac{\ell_1}{\operatorname{sen}^2 \lambda_n \ell_1} + \frac{\ell_2}{\operatorname{sen}^2 \lambda_n \ell_2} \right) \\ &\geq 2\lambda_n^2 (\ell_1 \operatorname{sen}^2 \lambda_n \ell_2 + \ell_2 \operatorname{sen}^2 \lambda_n \ell_1) \geq C\lambda_n^2 c_n^2. \end{aligned}$$

Aquí $c_n = \max(|\operatorname{sen} \lambda_n \ell_1|, |\operatorname{sen} \lambda_n \ell_2|)$ son los coeficientes definidos por (61) en la Sección 6.

Con esto, podemos concluir que una condición suficiente para que el estado inicial (\bar{u}_0, \bar{u}_1) sea controlable es

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_*} \frac{1}{c_n} (|u_{1,n}| + \lambda_n |u_{0,n}|) < \infty. \quad (92)$$

Notemos que este resultado es más débil que el obtenido en la Sección 6, pues si el estado inicial (\bar{u}_0, \bar{u}_1) satisface (92) entonces, también satisface

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_*} \frac{1}{c_n^2} (u_{1,n}^2 + \lambda_n u_{0,n}^2) < \infty.$$

Escojamos $\delta > 0$. La serie

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_*} \frac{1}{\lambda_n^{1+\delta}}$$

converge para todo $\delta > 0$, ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} = \frac{\pi}{\ell_0 + \ell_1 + \ell_2}$. Entonces, con ayuda de la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} \frac{1}{c_n \lambda_n} (|u_{1,n}| + \lambda_n |u_{0,n}|) &< \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} \frac{\lambda_n^{\delta-1}}{c_n^2} (u_{1,n}^2 + \lambda_n^2 u_{0,n}^2) \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} \frac{1}{\lambda_n^{1+\delta}} \\ &\leq C \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} \frac{\lambda_n^{\delta-1}}{c_n^2} (u_{1,n}^2 + \lambda_n^2 u_{0,n}^2). \end{aligned}$$

De modo que para que se verifique (92), y como consecuencia que el estado inicial (\bar{u}_0, \bar{u}_1) sea controlable en tiempo T , es suficiente que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_*} \frac{\lambda_n^{\delta-1}}{c_n^2} (u_{1,n}^2 + \lambda_n^2 u_{0,n}^2) < \infty.$$

En particular, si $\frac{\ell_1}{\ell_2} \in \mathbf{B}_\varepsilon$, la condición de controlabilidad (92) obtenida a partir del método de los momentos, garantiza que serán controlables los estados iniciales de

$$(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in \mathcal{W}^{\frac{3}{2}+\varepsilon+\delta} = V^{\frac{3}{2}+\varepsilon+\delta} \times V^{\frac{1}{2}+\varepsilon+\delta},$$

con $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño.

Esta diferencia entre los resultados es debida a la técnica utilizada, fundamentalmente a la posible falta de precisión en la estimación de la sucesión $|\varkappa_n| |q'(\lambda_n)|$.

Observación III.6. – De acuerdo a la Proposición II.9, una vez identificados espacios controlables en tiempo T de la forma \mathcal{W}^r puede construirse a posteriori una sucesión (\tilde{v}_n) biortogonal $(e^{i\lambda_n t})$ en $L^2(0, T)$ que satisface

$$\|\tilde{v}_n\|_{L^2(0, T)} \leq C\lambda_n^{r-1}.$$

Así, teniendo en cuenta el Corolario III.5, si $\frac{\ell_1}{\ell_2} \in \mathbf{B}_\varepsilon$ entonces, para el sistema de las tres cuerdas puede construirse una sucesión (\tilde{v}_n) biortogonal $(e^{i\lambda_n t})$ en $L^2(0, T)$ que verifica

$$\|\tilde{v}_n\|_{L^2(0, T)} \leq C\lambda_n^\varepsilon. \quad (93)$$

Señalemos, que la sucesión biortogonal (v_n) utilizada en esta sección no necesariamente coincide con (\tilde{v}_n) . Recordemos además, que no recurrimos a esta sucesión biortogonal, pues intentamos obtener información sobre subespacios controlables sin hacer uso de la información proporcionada por el Corolario III.5. Las normas de los elementos de la sucesión (v_n) podrían estimarse del siguiente modo. Como

$$\|v_n\|_{L^2(-A, A)} \leq \frac{C}{|q'(\lambda_n)|},$$

bastará estimar $|q'(\lambda_n)|$. De la igualdad (89) se obtiene

$$\begin{aligned} |q'(\lambda_n)| &\geq \ell_0 |\operatorname{sen} \lambda_n \ell_1 \operatorname{sen} \lambda_n \ell_2| + \ell_1 |\operatorname{sen} \lambda_n \ell_0 \operatorname{sen} \lambda_n \ell_2| + \ell_2 |\operatorname{sen} \lambda_n \ell_0 \operatorname{sen} \lambda_n \ell_1| \\ &\geq Cs(\lambda, \ell_0, \ell_1, \ell_2), \end{aligned}$$

donde hemos denotado

$$s(\lambda, \ell_0, \ell_1, \ell_2) := |\operatorname{sen} \lambda_n \ell_0| |\operatorname{sen} \lambda_n \ell_1| + |\operatorname{sen} \lambda_n \ell_0| |\operatorname{sen} \lambda_n \ell_2| + |\operatorname{sen} \lambda_n \ell_1| |\operatorname{sen} \lambda_n \ell_2|.$$

Para obtener estimaciones inferiores de la función s necesitamos imponer condiciones adicionales a las longitudes ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 . Supondremos que éstas satisfacen las condiciones, que llamaremos simplemente condiciones (S) (véase Apéndice A, Definición A.1):

- ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 son linealmente independientes sobre el cuerpo \mathbb{Q} de los números racionales;
- todos los cocientes $\frac{\ell_i}{\ell_j}$ son números algebraicos, es decir, raíces de polinomios con coeficientes racionales.

Con estas hipótesis se demuestra en la Proposición A.4 que para todo $\varepsilon > 0$ existe una constante $C_\varepsilon > 0$ tal que para todo $n = 1, 2, \dots$, tiene lugar la desigualdad

$$s(\lambda_n, \ell_0, \ell_1, \ell_2) \geq C_\varepsilon (\lambda_n)^{-1-\varepsilon}.$$

Esto garantizará que

$$\|v_n\|_{L^2(-A, A)} \leq C\lambda_n^{1+\varepsilon}.$$

Lamentablemente, hemos impuesto condiciones restrictivas a ℓ_0 , para sólo conseguir una estimación más débil que (93). Esto podría estar motivado por dos razones: que realmente las normas de los elementos de la sucesión (v_n) sean más grandes que las de los elementos de (\tilde{v}_n) o bien, que la técnica para la estimación de $|q'(\lambda_n)|$ no sea suficientemente precisa.

Capítulo IV

Árboles generales

En este capítulo estudiamos el problema de control desde un nodo exterior para redes de cuerdas que están soportadas sobre un grafo en forma de árbol. Seguiremos la técnica descrita en el Capítulo III para la red de tres cuerdas, que es el ejemplo más simple de red soportada sobre un árbol formada por más de una cuerda.

Recordemos brevemente en qué consiste esta técnica. El elemento fundamental es la construcción de un operador $\mathbf{B} : V \times H \rightarrow V \times H$, que garantiza la existencia de una constante $C > 0$ tal que todas las soluciones del sistema homogéneo (I.1)-(I.6) con estados iniciales $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in Z \times Z$ satisfacen la desigualdad de observabilidad

$$C \int_0^T |\partial_n \phi^1(t, \mathbf{v}_1)|^2 dt \geq \|\mathbf{B}(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1)\|_{V \times H}^2,$$

donde T es dos veces la longitud total de la red (usamos las notaciones introducidas en el Capítulo I para redes generales).

El operador \mathbf{B} tiene la propiedad de ser esencialmente un operador diagonal: existen números reales b_n tales que

$$\|\mathbf{B}(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1)\|_{V \times H}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n^2 (\mu_n \phi_{0,n}^2 + \phi_{1,n}^2).$$

Esto conduce a la desigualdad

$$C \int_0^T |\partial_n \phi^1(t, \mathbf{v}_1)|^2 dt \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n^2 (\mu_n \phi_{0,n}^2 + \phi_{1,n}^2),$$

que permite indicar subespacios de $H \times V'$ de estados iniciales controlables en tiempo T .

1. Notaciones y enunciado del problema

1.1. Notaciones para los elementos del árbol

En esta sección introducimos notaciones precisas para los elementos del grafo que corresponde a la configuración en reposo de la red. Esto se hace necesario para poder escribir las ecuaciones del movimiento de la red de modo que se tenga en cuenta la estructura topológica de su grafo.

Lo primero que necesitamos es definir un procedimiento para asociar índices a las aristas y vértices de \mathcal{A} . En la Figura 1 se muestra un ejemplo de un árbol cuyos elementos se han numerado según el criterio que definiremos. Inicialmente escogemos un vértice exterior que llamaremos raíz del árbol; lo denotamos por \mathcal{R} . Observemos que la elección de la raíz de un árbol puede hacerse de manera arbitraria.

Las restantes aristas y vértices de \mathcal{A} se denotarán por $e_{\bar{\alpha}}$ y $\mathcal{O}_{\bar{\alpha}}$, respectivamente, donde $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ es un multi-índice de longitud variable k (que puede ser incluso cero, lo que correspondería al multi-índice *vacío*) definido por recurrencia a partir de la raíz de la siguiente manera.

A la arista que contiene la raíz \mathcal{R} le asignamos el índice vacío (esto significa que no tendrá índice). Así, esa arista se denota por e y su vértice diferente de \mathcal{R} por \mathcal{O} .

Supongamos ahora que el vértice interior $\mathcal{O}_{\bar{\alpha}}$, contenido en la arista $e_{\bar{\alpha}}$, es de multiplicidad $m_{\bar{\alpha}} + 1$. Esto significa que hay $m_{\bar{\alpha}}$ aristas, distintas de $e_{\bar{\alpha}}$, que emanan de $\mathcal{O}_{\bar{\alpha}}$. Denotaremos esas aristas por $e_{\bar{\alpha}\circ\beta}$, $\beta = 1, \dots, m_{\bar{\alpha}}$ y el otro vértice de la arista $e_{\bar{\alpha}\circ\beta}$ por $\mathcal{O}_{\bar{\alpha}\circ\beta}$. Aquí, $\bar{\alpha} \circ \beta$ representa el índice $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta)$, obtenido al añadir una nueva componente β al índice $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$. En general, si $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ y $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$, entonces $\bar{\alpha} \circ \bar{\beta}$ denotará el multi-índice de longitud $k + m$ definido a través de $\bar{\alpha} \circ \bar{\beta} := (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m)$.

Llamaremos \mathcal{M} al conjunto de los vértices interiores de \mathcal{A} y \mathcal{S} el de los exteriores, excepto la raíz \mathcal{R} , y definamos

$$\mathcal{J}_{\mathcal{M}} = \{\bar{\alpha}; \quad \mathcal{O}_{\bar{\alpha}} \in \mathcal{M}\}, \quad \mathcal{J}_{\mathcal{S}} = \{\bar{\alpha}; \quad \mathcal{O}_{\bar{\alpha}} \in \mathcal{S}\},$$

que son los conjuntos de los índices de los vértices interiores y exteriores, excepto la raíz \mathcal{R} , respectivamente. Notemos que en estas notaciones admitimos el multi-índice vacío, que corresponde al vértice \mathcal{O} y pertenecerá a uno de los conjuntos $\mathcal{J}_{\mathcal{M}}$ ó $\mathcal{J}_{\mathcal{S}}$. Finalmente, $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\mathcal{S}} \cup \mathcal{J}_{\mathcal{M}}$ es el conjunto de los índices de todos los vértices, exceptuando el de la raíz \mathcal{R} .

A continuación, para $\bar{\alpha} \in \mathcal{J}_{\mathcal{M}}$, los conjuntos

$$\mathcal{A}_{\bar{\alpha}} = \{e_{\bar{\alpha}\circ\beta}; \quad \bar{\alpha} \circ \beta \in \mathcal{J}\}$$

serán llamados subárboles de \mathcal{A} . Nótese que $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}}$ está formado por aquellas aristas que tienen índices con una parte inicial común igual a $\bar{\alpha}$. Esto significa que $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}}$ es también un árbol que se extiende a partir del vértice de $e_{\bar{\alpha}}$ diferente de $\mathcal{O}_{\bar{\alpha}}$. Entonces, si se escoge ese vértice como la raíz $\mathcal{R}_{\bar{\alpha}}$ de $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}}$ y se denota por $e_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}}$ la arista con índice $\bar{\beta}$ en $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}}$ de acuerdo a la regla de numeración definida antes para los árboles, resultará que

$$e_{\bar{\alpha}\circ\beta} = e_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} \quad \mathcal{O}_{\bar{\alpha}\circ\beta} = \mathcal{O}_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}}.$$

Para probar propiedades relativas a los árboles, procederemos frecuentemente por inducción con respecto a la longitud máxima de los multi-índices $\bar{\alpha}$ usados para numerar las aristas de acuerdo a la regla que hemos definido. Para hacer esto deberemos probar que

- 1) La propiedad es válida para el caso más simple de un árbol con sólo una arista.
- 2) Si la propiedad es cierta para todos los subárboles $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$ que emanan de \mathcal{O} , entonces también lo será para todo el árbol \mathcal{A} .

En lo sucesivo a este proceso le llamaremos simplemente inducción.

Además, denotaremos por $\ell_{\bar{\alpha}}$ la longitud de la arista $e_{\bar{\alpha}}$. Entonces, $e_{\bar{\alpha}}$ puede ser parametrizada a través de su longitud de arco por medio de las funciones $\pi_{\bar{\alpha}}$, definidas en $[0, \ell_{\bar{\alpha}}]$ y tales que $\pi_{\bar{\alpha}}(\ell_{\bar{\alpha}}) = \mathcal{O}_{\bar{\alpha}}$ y $\pi_{\bar{\alpha}}(0)$ es el otro de los extremos de esta arista.

Finalmente, denotaremos por $L_{\mathcal{A}}$ y $L_{\bar{\alpha}}$, $\bar{\alpha} \in \mathcal{J}$, la suma de las longitudes de todas las aristas del árbol \mathcal{A} (la longitud total de \mathcal{A}) y de sus subárboles $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}}$, respectivamente.

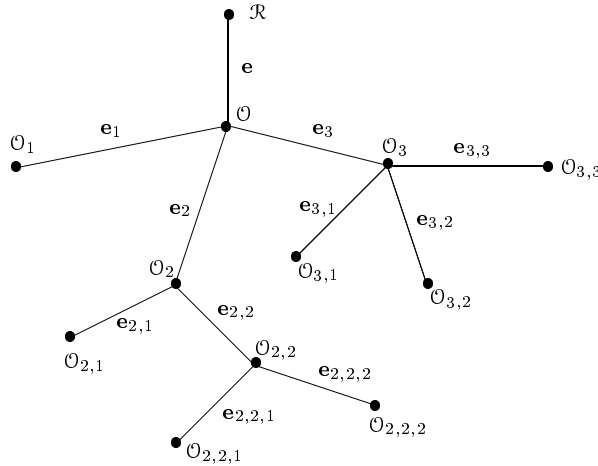


FIGURA 1. Un árbol con índices para sus vértices y nodos

1.2. Ecuaciones del movimiento de la red

Escribimos ahora las ecuaciones (I.1)-(I.6) del movimiento de la red con un nodo controlado con las notaciones específicas para árboles introducidas en esta sección. El vértice del grafo \mathcal{A} que corresponde al nodo controlado de la red se ha escogido como raíz.

$$u_{tt}^{\bar{\alpha}}(t, x) = u_{xx}^{\bar{\alpha}}(t, x) \quad \text{en } \mathbb{R} \times [0, \ell_{\bar{\alpha}}], \quad \bar{\alpha} \in \mathcal{J}, \quad (1)$$

$$u(t, 0) = v(t), \quad \text{en } \mathbb{R}, \quad (2)$$

$$u^{\bar{\alpha}}(t, \ell_{\bar{\alpha}}) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}, \quad \bar{\alpha} \in \mathcal{J}_S, \quad (3)$$

$$u^{\bar{\alpha} \circ \beta}(t, 0) = u^{\bar{\alpha}}(t, \ell_{\bar{\alpha}}) \quad \text{en } \mathbb{R}, \quad \beta = 1, \dots, m_{\bar{\alpha}}, \quad \bar{\alpha} \in \mathcal{J}_M, \quad (4)$$

$$\sum_{\beta=1}^{m_{\bar{\alpha}}} u_x^{\bar{\alpha} \circ \beta}(t, 0) = u_x^{\bar{\alpha}}(t, \ell_{\bar{\alpha}}) \quad \text{en } \mathbb{R}, \quad \bar{\alpha} \in \mathcal{J}_M, \quad (5)$$

$$u^{\bar{\alpha}}(0, x) = u_0^{\bar{\alpha}}(x), \quad u_t^{\bar{\alpha}}(0, x) = u_1^{\bar{\alpha}}(x), \quad \text{en } [0, \ell_{\bar{\alpha}}], \quad \bar{\alpha} \in \mathcal{J}. \quad (6)$$

Para cada $\bar{\alpha} \in \mathcal{J}$, la función $u^{\bar{\alpha}}(t, x) : \mathbb{R} \times [0, \ell_{\bar{\alpha}}] \rightarrow \mathbb{R}$ denota el desplazamiento transversal de la cuerda con índice $\bar{\alpha}$. Denotaremos por \bar{u} el conjunto cuyos elementos son $u^{\bar{\alpha}}$, $\bar{\alpha} \in \mathcal{J}$. En particular, los conjuntos de los datos iniciales $(u_0^{\bar{\alpha}})_{\bar{\alpha} \in \mathcal{J}}$, $(u_1^{\bar{\alpha}})_{\bar{\alpha} \in \mathcal{J}}$ de las cuerdas se denotarán por \bar{u}^0 y \bar{u}^1 . Con esta notación los restantes elementos relativos al sistema (1)-(6) se definen exactamente como en la Subsección 1.2 del Capítulo I.

Consideramos además la versión homogénea del sistema (1)-(6)

$$\phi_{tt}^{\bar{\alpha}}(t, x) = \phi_{xx}^{\bar{\alpha}}(t, x) \quad \text{en } \mathbb{R} \times [0, \ell_{\bar{\alpha}}], \quad \bar{\alpha} \in \mathcal{J}, \quad (7)$$

$$\phi(t, 0) = 0, \quad \text{en } \mathbb{R}, \quad (8)$$

$$\phi^{\bar{\alpha}}(t, \ell_{\bar{\alpha}}) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}, \quad \bar{\alpha} \in \mathcal{J}_S, \quad (9)$$

$$\phi^{\bar{\alpha} \circ \beta}(t, 0) = \phi^{\bar{\alpha}}(t, \ell_{\bar{\alpha}}) \quad \text{en } \mathbb{R}, \quad \beta = 1, \dots, m_{\bar{\alpha}}, \quad \bar{\alpha} \in \mathcal{J}_M, \quad (10)$$

$$\sum_{\beta=1}^{m_{\bar{\alpha}}} \phi_x^{\bar{\alpha} \circ \beta}(t, 0) = \phi_x^{\bar{\alpha}}(t, \ell_{\bar{\alpha}}) \quad \text{en } \mathbb{R}, \quad \bar{\alpha} \in \mathcal{J}_M, \quad (11)$$

$$\phi^{\bar{\alpha}}(0, x) = \phi_0^{\bar{\alpha}}(x), \quad \phi_t^{\bar{\alpha}}(0, x) = \phi_1^{\bar{\alpha}}(x), \quad \text{en } [0, \ell_{\bar{\alpha}}], \quad \bar{\alpha} \in \mathcal{J}. \quad (12)$$

La solución del problema (7)-(12) está dada por

$$\bar{\phi}(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\phi_{0,k} \cos \lambda_k t + \frac{\phi_{1,k}}{\lambda_k} \text{sen } \lambda_k t \right) \bar{\theta}_k, \quad (13)$$

donde $(\phi_{0,k})_{k \in \mathbb{N}}, (\phi_{1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ son las sucesiones de coeficientes de Fourier del estado inicial $(\bar{\phi}^0, \bar{\phi}^1)$ en la base ortonormal $(\bar{\theta}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ formada por las funciones del operador elíptico $-\Delta_{\mathcal{A}}$ correspondiente a (1)-(5). Recordemos que $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es la sucesión creciente de autovalores y $\lambda_k := \sqrt{\mu_k}$.

Por razones de carácter técnico, consideraremos también soluciones $\bar{\phi}$ de (7) tales que $\phi^{\bar{\alpha}} \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \ell_{\bar{\alpha}}])$, que satisfacen (9), (10) y (11), pero no necesariamente (8). Es decir, $\bar{\phi}$ es una solución regular que satisface las condiciones de contorno de (7)-(11) en todos los nodos, excepto, en la raíz \mathcal{R} . Nos referiremos brevemente a tales soluciones como *soluciones de (N)*. De la misma manera se define una *solución de (N) sobre el subárbol $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}}$* .

Para una solución $\bar{\phi}$ de (N) definimos las funciones

$$G_{\bar{\alpha}}(t) := \phi_t^{\bar{\alpha}}(t, 0), \quad F_{\bar{\alpha}}(t) := \phi_x^{\bar{\alpha}}(t, 0), \quad (14)$$

$$\widehat{G}_{\bar{\alpha}}(t) := \phi_t^{\bar{\alpha}}(t, \ell_{\bar{\alpha}}), \quad \widehat{F}_{\bar{\alpha}}(t) := \phi_x^{\bar{\alpha}}(t, \ell_{\bar{\alpha}}), \quad (15)$$

para cada $\bar{\alpha} \in \mathcal{J}$. Estas funciones representan la velocidad y la tensión en los extremos de la cuerda $\mathbf{e}_{\bar{\alpha}}$.

De acuerdo a las condiciones de acoplamiento (10)-(11), tendremos las fórmulas

$$G_{\bar{\alpha} \circ \beta}(t) = \widehat{G}_{\bar{\alpha}}(t), \quad \sum_{\beta=1}^{m_{\bar{\alpha}}} F_{\bar{\alpha} \circ \beta}(t) = \widehat{F}_{\bar{\alpha}}(t), \quad (16)$$

para todos los $t \in \mathbb{R}$, $\bar{\alpha} \in \mathcal{J}_M$, $\beta = 1, \dots, m_{\bar{\alpha}}$.

Por otro lado, de las fórmulas de D'Alembert (21) se obtienen las igualdades

$$\widehat{F}_{\bar{\alpha}} = \ell_{\bar{\alpha}}^+ F_{\bar{\alpha}} + \ell_{\bar{\alpha}}^- G_{\bar{\alpha}}, \quad \widehat{G}_{\bar{\alpha}} = \ell_{\bar{\alpha}}^- F_{\bar{\alpha}} + \ell_{\bar{\alpha}}^+ G_{\bar{\alpha}},$$

para todo $\bar{\alpha} \in \mathcal{J}$. A partir de ellas, las relaciones de acoplamiento (16) en los nodos interiores pueden expresarse como

$$G_{\bar{\alpha} \circ \beta}(t) = \ell_{\bar{\alpha}}^- F_{\bar{\alpha}} + \ell_{\bar{\alpha}}^+ G_{\bar{\alpha}}, \quad (17)$$

$$\sum_{\beta=1}^{m_{\bar{\alpha}}} F_{\bar{\alpha} \circ \beta}(t) = \ell_{\bar{\alpha}}^+ F_{\bar{\alpha}} + \ell_{\bar{\alpha}}^- G_{\bar{\alpha}}. \quad (18)$$

Para una función $\bar{w}(t)$ definida en el árbol \mathcal{A} se define la energía de \bar{w} en la cuerda $e_{\bar{\alpha}}$ por

$$E_{\bar{w}}^{\bar{\alpha}}(t) := \frac{1}{2} \int_0^{\ell_{\bar{\alpha}}} (|w_t^{\bar{\alpha}}(t, x)|^2 + |w_x^{\bar{\alpha}}(t, x)|^2) dx.$$

Para un subárbol $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}}$, denotaremos por $\mathbf{E}_{\bar{w}}^{\bar{\alpha}}$ energía total de \bar{w} en el subárbol:

$$\mathbf{E}_{\bar{w}}^{\bar{\alpha}}(t) := \sum_{\bar{\beta}: \bar{\alpha} \circ \bar{\beta} \in \mathcal{J}} E_{\bar{w}}^{\bar{\alpha} \circ \bar{\beta}}(t).$$

En particular, la energía total de \bar{w} en la red se denotará

$$\mathbf{E}_{\bar{w}}(t) := \sum_{\bar{\alpha} \in \mathcal{J}} E_{\bar{w}}^{\bar{\alpha}}(t).$$

2. Los operadores \mathcal{P} y \mathcal{Q}

En esta sección definiremos dos operadores lineales \mathcal{P} y \mathcal{Q} que permiten expresar la relación

$$\mathcal{P}G + \mathcal{Q}F = 0 \tag{19}$$

entre la velocidad y la tensión (es decir, entre las trazas Dirichlet y Neumann) de las soluciones de (N) en la raíz del árbol. Estos operadores jugarán un papel esencial en la demostración de los resultados fundamentales de este capítulo; por ese motivo los estudiamos en detalle. En particular, necesitaremos información sobre cómo estos operadores actúan sobre las trazas $F_{\bar{\alpha}}$ y $G_{\bar{\alpha}}$ de las restantes componentes de una solución en los nodos interiores.

Inicialmente \mathcal{P} y \mathcal{Q} se construyen para una cuerda. A continuación, usando un argumento recursivo, se definen para árboles generales.

2.1. El caso de un árbol formado por una sola cuerda

Supongamos que $\phi \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \ell])$ satisface la ecuación de ondas $\phi_{tt} - \phi_{xx} = 0$ en $\mathbb{R} \times [0, \ell]$ y que $\phi(t, \ell) \equiv 0$. Esta sería una solución de (N) para la red formada por una sola cuerda de longitud ℓ . Notemos que en este caso, con las notaciones (14)-(15), se tiene $\widehat{G}(t) := \phi_t(t, \ell) = 0$.

De la fórmula de D'Alembert (II.21) se obtiene

$$0 = \ell^+ G + \ell^- F, \tag{20}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Esta es una relación del tipo (19) con $\mathcal{P} = \ell^+$, $\mathcal{Q} = \ell^-$.

2.2. Operadores de tipo \mathcal{S}

Como se ha indicado antes, estamos interesados no sólo en la existencia de operadores \mathcal{P} y \mathcal{Q} que satisfacen (19), es importante además conocer su estructura. Es por esa razón que consideramos una

clase de operadores lineales que son combinaciones lineales de ciertos operadores de traslación definidos a partir de las longitudes de las cuerdas de la red. Esto permitirá describir algunas propiedades de \mathcal{P} y \mathcal{Q} que usaremos en la demostración de los resultados fundamentales.

Para un número real h denotamos por τ_h el operador de traslación definido por

$$\tau_h f(t) := f(t + h).$$

En general, estaremos interesados sólomente en propiedades de carácter algebraico de estos operadores; por ello podemos asumir que τ_h actúa sobre el espacio vectorial de aplicaciones $f = f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{W}$, donde \mathbf{W} es un espacio vectorial.

Sea $\Lambda = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$ un conjunto de números positivos, no necesariamente distintos. En lo sucesivo, siempre que un conjunto se denote por Λ , asumiremos tácitamente el hecho de que éste puede contener elementos repetidos. Si $\tilde{\Lambda} = \{\tilde{\ell}_1, \dots, \tilde{\ell}_{n'}\}$ es otro conjunto con esta propiedad, utilizaremos la notación $\Lambda \sqcup \tilde{\Lambda}$ para el conjunto $\{\ell_1, \dots, \ell_n, \tilde{\ell}_1, \dots, \tilde{\ell}_{n'}\}$, que una vez más puede contener elementos repetidos. Obsérvese que esta operación difiere de la unión usual de conjuntos en que la multiplicidad de los elementos es tenida en cuenta.

Definimos

$$S(\Lambda) := \text{span} \{ \tau_h : h \in \mathcal{H}_\Lambda \},$$

(el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de los operadores τ_h con $h \in \mathcal{H}_\Lambda$) donde

$$\mathcal{H}_\Lambda = \left\{ h = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \ell_i, \varepsilon_i = \pm 1 \right\}.$$

Notemos que \mathcal{H}_Λ contiene a lo sumo 2^n elementos, por lo que $S(\Lambda)$ es de dimensión finita.

Para un operador $\mathcal{B} \in S(\Lambda)$ escribiremos $s(\mathcal{B}) := s(\Lambda) := \sum_{i=1}^n \ell_i$. Diremos que \mathcal{B} es de tipo S si $\mathcal{B} \in S(\Lambda)$ para algún conjunto Λ .

Los operadores ℓ^+ y ℓ^- , definidos en el Capítulo III por (III.23) para una cuerda, son operadores de tipo S . Ellos pertenecen a $S(\{\ell\})$, pues pueden expresarse en la forma

$$\ell^\pm = \frac{\tau_\ell \pm \tau_{-\ell}}{2}.$$

Estas fórmulas las escribiremos de manera unificada como

$$\ell^\varepsilon = \frac{\tau_\ell + \varepsilon \tau_{-\ell}}{2}, \quad (21)$$

donde $\varepsilon = \pm 1$.

La siguiente proposición recoge dos propiedades inmediatas de los operadores de tipo S . Los operadores \mathcal{P} y \mathcal{Q} que construiremos para la red con la propiedad (19), serán precisamente sumas de productos de los operadores ℓ_i^\pm construidos para las longitudes de las cuerdas. La proposición muestra por qué es natural considerar la clase de operadores $S(\Lambda)$ para describir a \mathcal{P} y \mathcal{Q} .

Proposición IV.1. – (i) $\mathcal{B} \in S(\Lambda)$ si, y sólo si, puede escribirse como combinación lineal de operadores de la forma $\ell_1^{\varepsilon_1} \ell_2^{\varepsilon_2} \cdots \ell_n^{\varepsilon_n}$, donde cada ε_i es -1 ó 1 .

(ii) Si $\mathcal{B}_1 \in S(\Lambda_1)$ y $\mathcal{B}_2 \in S(\Lambda_2)$ entonces,

$$\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1 \in S(\Lambda_1 \sqcup \Lambda_2), \quad s(\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2) = s(\mathcal{B}_1) + s(\mathcal{B}_2).$$

Demostración. Estas propiedades están basadas en el hecho de que, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces,

$$\tau_\alpha \tau_\beta = \tau_{\alpha+\beta} = \tau_\beta \tau_\alpha.$$

Esto implica en particular que los operadores $\ell_i^{\varepsilon_i}$ y $\ell_j^{\varepsilon_j}$ conmutan.

Teniendo en cuenta (21), un producto de la forma $\ell_1^{\varepsilon_1} \ell_2^{\varepsilon_2} \cdots \ell_n^{\varepsilon_n}$ puede expresarse como

$$\ell_1^{\varepsilon_1} \ell_2^{\varepsilon_2} \cdots \ell_n^{\varepsilon_n} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\tau_{\ell_i} + \varepsilon_i \tau_{-\ell_i}}{2} \right);$$

se obtiene entonces

$$\ell_1^{\varepsilon_1} \ell_2^{\varepsilon_2} \cdots \ell_n^{\varepsilon_n} = \sum_{h \in \mathcal{H}_\Lambda} c_h \tau_h \in S(\Lambda).$$

Así, cualquier combinación lineal de operadores $\ell_1^{\varepsilon_1} \ell_2^{\varepsilon_2} \cdots \ell_n^{\varepsilon_n}$ será un operador de tipo $S(\Lambda)$.

Inversamente, si $h \in \mathcal{H}_\Lambda$, entonces

$$h = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \ell_i, \quad \varepsilon_i = \pm 1,$$

y teniendo en cuenta que, según resulta de (21), para cualquier ℓ , $\tau_{\varepsilon \ell} = \varepsilon \ell^\varepsilon + \ell^{-\varepsilon}$,

$$\tau_h = \prod_{i=1}^n \tau_{\varepsilon_i \ell_i} = \prod_{i=1}^n [\varepsilon_i \ell_i^{\varepsilon_i} + \ell_i^{-\varepsilon_i}].$$

De aquí, τ_h puede expresarse como una suma de productos de la forma $\ell_1^{\varepsilon_1} \ell_2^{\varepsilon_2} \cdots \ell_n^{\varepsilon_n}$ y lo mismo ocurrirá para cualquier $\mathcal{B} = \sum_{h \in \mathcal{H}_\Lambda} c_h \tau_h$.

La afirmación (ii) resulta de manera inmediata. Si $\Lambda_1 = \{\ell_1, \dots, \ell_n\}$ y $\Lambda_2 = \{\ell_{n+1}, \dots, \ell_N\}$ entonces,

$$\Lambda_1 \sqcup \Lambda_2 = \{\ell_1, \dots, \ell_N\}.$$

Si $\mathcal{B}_1 = \ell_1^{\varepsilon_1} \cdots \ell_n^{\varepsilon_n} \in S(\Lambda_1)$, $\mathcal{B}_2 = \ell_{n+1}^{\varepsilon_{n+1}} \cdots \ell_N^{\varepsilon_N} \in S(\Lambda_2)$,

$$\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1 = \ell_1^{\varepsilon_1} \cdots \ell_n^{\varepsilon_n} \ell_{n+1}^{\varepsilon_{n+1}} \cdots \ell_N^{\varepsilon_N} \in S(\Lambda_1 \sqcup \Lambda_2).$$

Teniendo en cuenta ahora que cualesquiera $\mathcal{B}_1 \in S(\Lambda_1)$ y $\mathcal{B}_2 \in S(\Lambda_2)$ pueden expresarse, respectivamente, por medio de combinaciones lineales de operadores $\ell_1^{\varepsilon_1} \cdots \ell_n^{\varepsilon_n}$ y $\ell_{n+1}^{\varepsilon_{n+1}} \cdots \ell_N^{\varepsilon_N}$, se obtiene (ii) en el caso general. \square

En lo que resta de este capítulo, cuando un operador \mathcal{B} de tipo S se aplica a una función w que depende de la variable real t (y posiblemente, de otras variables), asumiremos que \mathcal{B} actúa sobre esa variable. En particular, si $w(t, x)$ es una función definida en $\mathbb{R} \times [a, b]$ entonces

$$\ell^\pm w(t, x) = \frac{1}{2}(w(t + \ell, x) \pm w(t - \ell, x)).$$

Los siguientes hechos serán usados ampliamente en la demostración de los resultados fundamentales.

Proposición IV.2. — Sea $w(t, x)$ una función definida en $\mathbb{R} \times [0, \ell]$. Entonces,

$$\mathbf{E}_{\ell^\pm w}(t) \leq \ell^+ \mathbf{E}_w(t).$$

Demostración. Para cada $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\ell^\pm w}(t) &= \frac{1}{8} \int_0^\ell \{ |w_x(t + \ell, x) \pm w_x(t - \ell, x)|^2 + |w_t(t + \ell, x) \pm w_t(t - \ell, x)|^2 \} dx \\
&\leq \frac{1}{4} \int_0^\ell \{ |w_x(t + \ell, x)|^2 + |w_x(t - \ell, x)|^2 + |w_t(t + \ell, x)|^2 + |w_t(t - \ell, x)|^2 \} dx \\
&= \frac{1}{2} (\mathbf{E}_w(t + \ell) + \mathbf{E}_w(t - \ell)) = \ell^+ \mathbf{E}_w(t).
\end{aligned}$$

□

Proposición IV.3. – Si \mathcal{B} es un operador de tipo S con $s(\mathcal{B}) = s$ entonces, existen constantes positivas C_1, C_2 , que dependen sólo de los coeficientes de \mathcal{B} , tales que

$$(i) \quad \int_a^b |\mathcal{B}f(t)|^2 dt \leq C_1 \int_{a-s}^{b+s} |f(t)|^2 dt,$$

para todas las funciones f para las cuales ambas integrales están definidas¹.

(ii) Si la función $w(t, x)$ está definida en $\mathbb{R} \times [0, \ell]$ y existe una constante $M > 0$ tal que $\mathbf{E}_w(t) \leq M$ para todo $t \in [a, b]$ entonces, $\mathbf{E}_{\mathcal{B}w}(t) \leq C_2 M$ para $t \in [a + s, b - s]$.

Demostración. (i) Cuando el conjunto Λ está formado por un sólo elemento: $\Lambda = \{\ell\}$, tendremos $\mathcal{B} = c_1 \ell^+ + c_2 \ell^-$ y $s(\mathcal{B}) = \ell$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_a^b |\mathcal{B}f(t)|^2 dt &= \int_a^b |c_1 \ell^+ f(t) + c_2 \ell^- f(t)|^2 dt \\
&= \int_a^b \left| \frac{c_1 + c_2}{2} f(t + \ell) + \frac{c_1 - c_2}{2} f(t - \ell) \right|^2 dt \\
&\leq \left(\frac{c_1 + c_2}{2} \right)^2 \int_a^b |f(t + \ell)|^2 dt + \left(\frac{c_1 - c_2}{2} \right)^2 \int_a^b |f(t - \ell)|^2 dt \\
&\leq \left(\frac{c_1 + c_2}{2} \right)^2 \int_{a+\ell}^{b+\ell} |f(t)|^2 dt + \left(\frac{c_1 - c_2}{2} \right)^2 \int_{a-\ell}^{b-\ell} |f(t)|^2 dt \\
&\leq (c_1^2 + c_2^2) \int_{a-\ell}^{b+\ell} |f(t)|^2 dt.
\end{aligned}$$

Cuando $n \geq 2$, basta iterar esta desigualdad tomando en consideración la Proposición IV.1(i). Notemos que C_1 puede escogerse como el máximo de los cuadrados de los coeficientes de \mathcal{B} en la representación de este operador dada por la Proposición IV.1(i) y por ello, C_1 depende sólo de \mathcal{B} .

(ii) Es una consecuencia inmediata de la Proposición IV.2. □

¹En otras palabras, \mathcal{B} es continuo de $L^2[a - s, b + s]$ en $L^2[a, b]$.

A continuación veremos un resultado que desempeña un papel crucial en la obtención del tiempo óptimo en las desigualdades de observabilidad que probaremos para las soluciones del sistema (1)-(6) homogéneo. Notemos que este hecho fue demostrado en la sección III.4 del Capítulo III para el operador \mathcal{Q} correspondiente a la red de tres cuerdas.

Proposición IV.4. – Sea $\Lambda = \{\ell_1, \dots, \ell_m\}$ con $\ell_1 \leq \dots \leq \ell_m$ y denotemos $T_\Lambda = 2s(\Lambda) = 2 \sum_{i=1}^m \ell_i$. Supongamos que $\mathcal{B} = \sum_{h \in \mathcal{H}_\Lambda} c_h \tau_h \in S(\Lambda)$ y que el coeficiente $c_{\ell_1 + \dots + \ell_m}$ es distinto de cero. Entonces, para cualquier $T > 0$ existe una constante $C_T > 0$ tal que

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \leq C_T \int_0^{T_\Lambda} |u(t)|^2 dt,$$

para cualquier función continua u que satisfaga $\mathcal{B}u \equiv 0$.

Demostración. Probaremos que para cualquier número natural n y cualquier función u que satisfaga $\mathcal{B}u \equiv 0$ se cumple que

$$\int_0^{T_\Lambda + 2n\ell_1} |u(t)|^2 dt \leq \gamma^n \int_0^{T_\Lambda} |u(t)|^2 dt, \quad (22)$$

donde γ es una constante positiva que depende sólo de \mathcal{B} . Claramente, la afirmación de la proposición resulta de manera inmediata de la desigualdad (22).

Si $\mathcal{B}u \equiv 0$, es decir, $0 = \sum_{h \in \mathcal{H}_\Lambda} c_h \tau_h u(t) = \sum_{h \in \mathcal{H}_\Lambda} c_h u(t+h)$, entonces, reemplazando la variable t por $t - (\ell_1 + \dots + \ell_m)$ y teniendo en cuenta que $c_{\ell_1 + \dots + \ell_m} \neq 0$ obtenemos

$$u(t) = \sum_{h' \in \mathcal{H}_\Lambda^*} \delta_{h'} u(t - h'), \quad (23)$$

donde

$$\mathcal{H}_\Lambda^* = \mathcal{H}_\Lambda - (\ell_1 + \dots + \ell_m) = \{h' = h - (\ell_1 + \dots + \ell_m) : h \in \mathcal{H}_\Lambda, h \neq (\ell_1 + \dots + \ell_m)\}$$

y

$$\delta_{h'} = -\frac{c_{h' + (\ell_1 + \dots + \ell_m)}}{c_{\ell_1 + \dots + \ell_m}}.$$

De (23) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz resulta

$$|u(t)|^2 \leq \delta \sum_{h' \in \mathcal{H}_\Lambda^*} |u(t - h')|^2, \quad (24)$$

donde $\delta = \sum_{h' \in \mathcal{H}_\Lambda^*} \delta_{h'}^2$.

Observemos que para cada $h' \in \mathcal{H}_\Lambda^*$ se tiene

$$2\ell_1 \leq h' \leq 2(\ell_2 + \dots + \ell_m),$$

y por consiguiente,

$$T_\Lambda + 2(n+1)\ell_1 - h' \leq T_\Lambda + 2n\ell_1, \quad T_\Lambda + 2n\ell_1 - h' \geq 2(n+1)\ell_1 \geq 0.$$

Esto implica que

$$\int_{T_\Lambda + 2n\ell_1 - h'}^{T_\Lambda + 2(n+1)\ell_1 - h'} |u(t)|^2 dt \leq \int_0^{T_\Lambda + 2n\ell_1} |u(t)|^2 dt. \quad (25)$$

Por otra parte, de (24) resulta

$$\begin{aligned} \int_{T_\Lambda+2n\ell_1}^{T_\Lambda+2(n+1)\ell_1} |u(t)|^2 dt &\leq \delta \sum_{h' \in \mathcal{J}C_\Lambda^*} \int_{T_\Lambda+2n\ell_1}^{T_\Lambda+2(n+1)\ell_1} |u(t-h')|^2 dt \\ &= \delta \sum_{h' \in \mathcal{J}C_\Lambda^*} \int_{T_\Lambda+2n\ell_1-h'}^{T_\Lambda+2(n+1)\ell_1-h'} |u(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta (25), la última desigualdad se convierte en

$$\int_{T_\Lambda+2n\ell_1}^{T_\Lambda+2(n+1)\ell_1} |u(t)|^2 dt \leq (2^m - 1)\delta \int_0^{T_\Lambda+2n\ell_1} |u(t)|^2 dt.$$

A partir de este hecho obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{T_\Lambda+2(n+1)\ell_1} |u(t)|^2 dt &= \int_0^{T_\Lambda+2n\ell_1} |u(t)|^2 dt + \int_{T_\Lambda+2n\ell_1}^{T_\Lambda+2(n+1)\ell_1} |u(t)|^2 dt \\ &\leq \int_0^{T_\Lambda+2n\ell_1} |u(t)|^2 dt + (2^m - 1)\delta \int_0^{T_\Lambda+2n\ell_1} |u(t)|^2 dt \\ &\leq (1 + (2^m - 1)\delta) \int_0^{T_\Lambda+2n\ell_1} |u(t)|^2 dt, \end{aligned}$$

lo que demuestra la desigualdad (22) con $\gamma = 1 + (2^m - 1)\delta$. □

Observación IV.1. – Si \mathcal{B} es un operador de tipo S existe una única función $b(\lambda)$ tal que $\mathcal{B}e^{i\lambda t} = b(\lambda)e^{i\lambda t}$. En efecto, basta expresar \mathcal{B} en la forma

$$\mathcal{B} = \sum_{m \in \{0,1\}^n} d_m \ell_1^{\varepsilon_1} \cdots \ell_n^{\varepsilon_n}, \quad (26)$$

dada por la Proposición IV.1(i), para ver que

$$\mathcal{B}e^{i\lambda t} = \sum d_m \ell_1^{\varepsilon_1} \cdots \ell_n^{\varepsilon_n} e^{i\lambda t}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\ell^+ e^{i\lambda t} = \cos \ell \lambda e^{i\lambda t}, \quad \ell^- e^{i\lambda t} = i \sin \ell \lambda e^{i\lambda t},$$

resulta

$$\mathcal{B}e^{i\lambda t} = \sum d_m L_1^{\varepsilon_1}(\lambda) \cdots L_n^{\varepsilon_n}(\lambda) e^{i\lambda t},$$

donde $L_i^{\varepsilon_i}(\lambda) = \cos \ell_i \lambda$ si $\varepsilon_i = 1$ y $L_i^{\varepsilon_i}(\lambda) = i \sin \ell_i \lambda$ si $\varepsilon_i = -1$. Esto significa que la función $b(\lambda)$ puede construirse sustituyendo los operadores ℓ_i^+ y ℓ_i^- en la descomposición (26) de \mathcal{B} por $\cos \ell \lambda$ y $i \sin \ell \lambda$, respectivamente.

El hecho de que $b(\lambda)$ es única es inmediato: si $\mathcal{B}e^{i\lambda t} = b(\lambda)e^{i\lambda t} = c(\lambda)e^{i\lambda t}$, entonces $b(\lambda) = c(\lambda)$.

2.3. Construcción de \mathcal{P} y \mathcal{Q} en el caso general

La construcción de los operadores \mathcal{P} y \mathcal{Q} se hará por inducción. Recordemos que estos operadores han sido ya construidos para la red formada por una sola cuerda.

Denotaremos por Λ_i el conjunto de todas las longitudes de las cuerdas del subárbol \mathcal{A}_i y por $\Lambda_{\mathcal{A}}$ el de todas las longitudes del árbol \mathcal{A} . Supongamos que para los subárboles \mathcal{A}_i , $i = 1, \dots, m$, hemos construido los operadores $\mathcal{P}_i, \mathcal{Q}_i$ que pertenecen a $S(\Lambda_i)$ y verifican

$$\mathcal{P}_i G_i + \mathcal{Q}_i F_i = 0, \quad (27)$$

donde G_i y F_i son la velocidad y la tensión, respectivamente, en la raíz del subárbol \mathcal{A}_i , es decir, en el vértice \mathcal{O} de \mathcal{A} , de una solución de (N) en el subárbol \mathcal{A}_i .

Definimos los operadores

$$\mathcal{P} := \ell^+ \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i \prod_{j \neq i} \mathcal{Q}_j + \ell^- \prod_{j=1}^m \mathcal{Q}_j, \quad (28)$$

$$\mathcal{Q} := \ell^- \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i \prod_{j \neq i} \mathcal{Q}_j + \ell^+ \prod_{j=1}^m \mathcal{Q}_j \quad (29)$$

(aquí, como antes, el producto denota la composición de operadores).

Estos son precisamente los operadores que deseamos construir:

Proposición IV.5. — *Los operadores \mathcal{P} y \mathcal{Q} definidos por (28)-(29) pertenecen a $S(\Lambda_{\mathcal{A}})$. Si \bar{u} es una solución de (N) en el árbol \mathcal{A} entonces,*

$$\mathcal{P}G + \mathcal{Q}F = 0.$$

Demostración. Para probar que $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in S(\Lambda_{\mathcal{A}})$, es suficiente observar que, de acuerdo a la Proposición IV.1, todos los términos de las sumas en (28) y (29) pertenecen a $S(\{\ell\} \sqcup \Lambda_1 \sqcup \dots \sqcup \Lambda_m) = S(\Lambda_{\mathcal{A}})$.

Notemos que en virtud de (17)-(18), las condiciones de acoplamiento (16) entre las cuerdas pueden expresarse como

$$\sum_{i=1}^m F_i = \ell^- G + \ell^+ F, \quad G_i = \ell^+ G + \ell^- F, \quad i = 1, \dots, m. \quad (30)$$

Tomando en consideración (28)-(29) tendremos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}G + \mathcal{Q}F &= \sum_{i=1}^m (\mathcal{P}_i \prod_{j \neq i} \mathcal{Q}_j) \ell^+ G + \prod_{j=1}^m \mathcal{Q}_j \ell^- G + \sum_{i=1}^m (\mathcal{P}_i \prod_{j \neq i} \mathcal{Q}_j) \ell^- F + \prod_{j=1}^m \mathcal{Q}_j \ell^+ F \\ &= \sum_{i=1}^m (\mathcal{P}_i \prod_{j \neq i} \mathcal{Q}_j) (\ell^+ G + \ell^- F) + \prod_{j=1}^m \mathcal{Q}_j (\ell^- G + \ell^+ F). \end{aligned}$$

Entonces, usando las fórmulas (30),

$$\mathcal{P}G + \mathcal{Q}F = \sum_{i=1}^m (\mathcal{P}_i \prod_{j \neq i} \mathcal{Q}_j) G_i + \sum_{i=1}^m (\prod_{j=1}^m \mathcal{Q}_j) F_i = \sum_{i=1}^m (\prod_{j \neq i} \mathcal{Q}_j) (\mathcal{P}_i G_i + \mathcal{Q}_i F_i) = 0,$$

donde la última igualdad es consecuencia de las hipótesis (27). Así, \mathcal{P} y \mathcal{Q} , definidos por (28)-(29), satisfacen la relación (19). \square

Observación IV.2. – Según la definición, un $S(\Lambda)$ -operador \mathcal{B} puede escribirse en la forma

$$\mathcal{B} = \sum_{h \in \mathcal{H}_\Lambda} c_h \tau_h. \quad (31)$$

En general, esta representación no es única, pues algunos de los elementos de \mathcal{H}_Λ podrían coincidir. Sin embargo, el coeficiente $c_{s(\mathcal{B})} = c_{\ell_1 + \dots + \ell_m}$, correspondiente al mayor valor de h , se determina de manera única, ya que $\ell_1 + \dots + \ell_m$ no puede ser igual a ningún otro elemento de \mathcal{H}_Λ . Además, es fácil ver que $c_{s(\mathcal{B})}$ es una función multiplicativa, es decir, si \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 son S -operadores con $s(\mathcal{B}_1) = s_1$ y $s(\mathcal{B}_2) = s_2$ entonces,

$$c_{s_1+s_2}(\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2) = c_{s_1}(\mathcal{B}_1)c_{s_2}(\mathcal{B}_2).$$

En la siguiente proposición estudiaremos el valor que toma este coeficiente para los operadores \mathcal{P} y \mathcal{Q} .

Proposición IV.6. – Denotemos por $c_{L_{\mathcal{A}}}(\mathcal{B})$ el coeficiente que corresponde a $h = s(\Lambda_{\mathcal{A}}) = L_{\mathcal{A}} \in \mathcal{H}_{\Lambda_{\mathcal{A}}}$ en el desarrollo (31) de un $S(\Lambda_{\mathcal{A}})$ -operador \mathcal{B} . Entonces,

$$c_{L_{\mathcal{A}}}(\mathcal{P}) = c_{L_{\mathcal{A}}}(\mathcal{Q}) > 0.$$

Demostración. Procedemos por inducción. Para una cuerda,

$$\mathcal{P} = \ell^+ = \frac{\tau_h + \tau_{-h}}{2}, \quad \mathcal{Q} = \ell^- = \frac{\tau_h - \tau_{-h}}{2}.$$

Esto implica que $c_\ell(\mathcal{P}) = c_\ell(\mathcal{Q}) = \frac{1}{2}$.

Supongamos ahora que la afirmación ha sido demostrada para los subárboles $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$. Esto significa que

$$c_{L_i}(\mathcal{P}) = c_{L_i}(\mathcal{Q}) > 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (32)$$

donde, como antes, L_i es la suma de las longitudes de todas las cuerdas del subárbol \mathcal{A}_i .

Entonces, de la fórmula (28) y la hipótesis (32) tenemos

$$\begin{aligned} c_{L_{\mathcal{A}}}(\mathcal{P}) &= c_{L_{\mathcal{A}}}(\ell^+ \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i \prod_{j \neq i} \mathcal{Q}_j + \ell^- \prod_{j=1}^m \mathcal{Q}_j) \\ &= c_{L_{\mathcal{A}}}(\ell^+ \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i \prod_{j \neq i} \mathcal{Q}_j) + c_{L_{\mathcal{A}}}(\ell^- \prod_{j=1}^m \mathcal{Q}_j) \\ &= c_\ell(\ell^+) \sum_{i=1}^m c_{L_i}(\mathcal{P}_i) \prod_{j \neq i} c_{L_j}(\mathcal{Q}_j) + c_\ell(\ell^-) \prod_{j=1}^m c_{L_j}(\mathcal{Q}_j) \\ &= \frac{1}{2}(m+1) \prod_{j=1}^m c_{L_j}(\mathcal{Q}_j) > 0. \end{aligned}$$

De la misma manera puede probarse que

$$c_{L_{\mathcal{A}}}(\mathcal{Q}) = \frac{1}{2}(m+1) \prod_{j=1}^m c_{L_j}(\mathcal{Q}_j),$$

lo que completa la demostración. \square

2.4. Acción de \mathcal{P} y \mathcal{Q} sobre las tensiones y velocidades en los nodos interiores

Para el índice $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{J}$ denotaremos

$$\tilde{\Lambda}_{\bar{\alpha}} := \{\ell, \ell_{\alpha_1}, \ell_{\alpha_1, \alpha_2}, \dots, \ell_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}}\}.$$

Observemos que $\tilde{\Lambda}_{\bar{\alpha}}$ es el conjunto de las longitudes de las cuerdas que forman el único camino simple (esto es, que recorre las cuerdas a lo sumo una vez) que conecta la raíz \mathcal{R} con la raíz del subárbol $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}}$. Para el índice vacío tomaremos $\tilde{\Lambda} = \emptyset$.

La siguiente proposición proporciona información sobre como actúan los operadores \mathcal{P} y \mathcal{Q} sobre las trazas de las componentes de una solución en los nodos interiores de la red.

Proposición IV.7. – *Para todo $\bar{\alpha} \in \mathcal{J}$ existen operadores $\mathcal{L}_{\bar{\alpha}} \in S(\Lambda_{\mathcal{A}} \sqcup \tilde{\Lambda}_{\bar{\alpha}})$ tales que, para cualquier solución de (N)*

$$\mathcal{Q}F_{\bar{\alpha}} = \mathcal{L}_{\bar{\alpha}}G, \quad \mathcal{P}F_{\bar{\alpha}} = -\mathcal{L}_{\bar{\alpha}}F.$$

Demostración. Procedemos por inducción. Notemos que de la relación $\mathcal{P}G + \mathcal{Q}F = 0$, resulta que cuando $\bar{\alpha}$ es el multi-índice vacío, la propiedad es cierta con $\mathcal{L} = -\mathcal{P} \in S(\Lambda_{\mathcal{A}}) = S(\Lambda_{\mathcal{A}} \sqcup \tilde{\Lambda})$. En particular, para una sola cuerda la afirmación de la proposición es cierta.

Supongamos ahora que se han construido los operadores $\mathcal{L}_{\bar{\alpha}}$ para los subárboles $\mathcal{A}_i, i = 1, \dots, m$, de \mathcal{A} . Esto significa que tenemos, para cada $i = 1, \dots, m$, los operadores $\mathcal{L}_{\bar{\alpha}}^i \in S(\Lambda_i \sqcup \tilde{\Lambda}_{\bar{\alpha}}^i)$ que satisfacen

$$\mathcal{P}_i F_{i\circ\bar{\alpha}} = -\mathcal{L}_{\bar{\alpha}}^i F_i, \quad \mathcal{Q}_i F_{i\circ\bar{\alpha}} = \mathcal{L}_{\bar{\alpha}}^i G_i,$$

donde $\tilde{\Lambda}_{\bar{\alpha}}^i$ es el conjunto definido como $\tilde{\Lambda}_{\bar{\alpha}}$ pero para el subárbol \mathcal{A}_i , y $\mathcal{P}_i, \mathcal{Q}_i$ son los operadores \mathcal{P}, \mathcal{Q} correspondientes a ese subárbol.

Entonces, usando la relación (29),

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}F_{i\circ\bar{\alpha}} &= \ell^- \left(\sum_{j=1}^m \mathcal{P}_j \prod_{k \neq j} \mathcal{Q}_k \right) F_{i\circ\bar{\alpha}} + \ell^+ \left(\prod_{k=1}^m \mathcal{Q}_k \right) F_{i\circ\bar{\alpha}} \\ &= \ell^- \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \mathcal{P}_j \prod_{\substack{k \neq j \\ k \neq i}} \mathcal{Q}_k \right) \mathcal{Q}_i F_{i\circ\bar{\alpha}} + \ell^- \left(\mathcal{P}_i \prod_{k \neq i} \mathcal{Q}_k \right) F_{i\circ\bar{\alpha}} + \ell^+ \left(\prod_{k=1}^m \mathcal{Q}_k \right) F_{i\circ\bar{\alpha}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{L}_{\bar{\alpha}}^i \left(\ell^- \left(\sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^m \mathcal{P}_j \prod_{\substack{k \neq j \\ k \neq i}} \mathcal{Q}_k \right) G_i - \ell^- \left(\prod_{k \neq i} \mathcal{Q}_k \right) F_i + \ell^+ \left(\prod_{k=1}^m \mathcal{Q}_k \right) G_i \right) \\
&= \mathcal{L}_{\bar{\alpha}}^i \left(\ell^- \sum_{\substack{j \neq i \\ k \neq j \\ k \neq i}} \left(\prod_{k \neq i} \mathcal{Q}_k \right) (\mathcal{P}_j G_i + \mathcal{Q}_j \widehat{F}) - \ell^- \left(\prod_{k \neq i} \mathcal{Q}_k \right) \widehat{F} + \ell^+ \left(\prod_{k \neq i} \mathcal{Q}_k \right) G_i \right) \\
&= \mathcal{L}_{\bar{\alpha}}^i \left(\prod_{k \neq i} \mathcal{Q}_k \right) (\ell^+ \widehat{G} - \ell^- \widehat{F}) \\
&= \mathcal{L}_{\bar{\alpha}}^i \left(\prod_{k \neq i} \mathcal{Q}_k \right) (\ell^+ (\ell^- F + \ell^+ G) - \ell^- (\ell^+ F + \ell^- G)) \\
&= \mathcal{L}_{\bar{\alpha}}^i \left(\prod_{k \neq i} \mathcal{Q}_k \right) ((\ell^+)^2 - (\ell^-)^2) G.
\end{aligned}$$

De manera similar, puede obtenerse que

$$\mathcal{P}F_{i\circ\bar{\alpha}} = -\mathcal{L}_{\bar{\alpha}}^i \prod_{k \neq i} \mathcal{Q}_k ((\ell^+)^2 - (\ell^-)^2) F.$$

Así, llegamos a la fórmula recursiva

$$\mathcal{L}_{i\circ\bar{\alpha}} = \mathcal{L}_{\bar{\alpha}}^i \prod_{k \neq i} \mathcal{Q}_k ((\ell^+)^2 - (\ell^-)^2),$$

a partir de la cual resulta en particular, de acuerdo a la Proposición IV.1, que los operadores $\mathcal{L}_{i\circ\bar{\alpha}}$ pertenecen a

$$S(\Lambda_i \sqcup \tilde{\Lambda}_{\bar{\alpha}}^i \sqcup \{\ell, \ell\}) = S(\Lambda_i \sqcup \{\ell\} \sqcup \tilde{\Lambda}_{\bar{\alpha}}^i \sqcup \{\ell\}) = S(\Lambda_{\mathcal{A}} \sqcup \tilde{\Lambda}_{i\circ\bar{\alpha}}).$$

Esto demuestra la proposición. \square

La acción de \mathcal{P} y \mathcal{Q} sobre las velocidades $G_{\bar{\alpha}}$ puede describirse de modo similar:

Proposición IV.8. – Para cada $\bar{\alpha} \in \mathcal{J}$ existen operadores $\mathcal{K}_{\bar{\alpha}}, \widehat{\mathcal{K}}_{\bar{\alpha}} \in S(\Lambda_{\mathcal{A}} \sqcup \tilde{\Lambda}_{\bar{\alpha}})$ tales que, para toda solución de (N),

$$\mathcal{Q}G_{\bar{\alpha}} = \mathcal{K}_{\bar{\alpha}}G, \quad \mathcal{P}G_{\bar{\alpha}} = \widehat{\mathcal{K}}_{\bar{\alpha}}F.$$

Demostración. De la relación $\mathcal{P}G + \mathcal{Q}F = 0$ resulta que para el multi-índice vacío $\mathcal{K} = \mathcal{Q}$ y $\widehat{\mathcal{K}} = -\mathcal{Q}$. Para los restantes índices los operadores $\mathcal{K}_{\bar{\alpha}}$ y $\widehat{\mathcal{K}}_{\bar{\alpha}}$ se construyen por recurrencia.

Supongamos que para el índice $\bar{\alpha}$ se han construido los operadores $\mathcal{K}_{\bar{\alpha}}$ y $\widehat{\mathcal{K}}_{\bar{\alpha}}$, que verifican las condiciones de la proposición.

Entonces, para los índices $\bar{\alpha} \circ i$ con $i = 1, \dots, m_{\bar{\alpha}}$, tendremos

$$\mathcal{Q}G_{\bar{\alpha}\circ i} = \mathcal{Q}\widehat{G}_{\bar{\alpha}} = \ell_{\bar{\alpha}}^+ \mathcal{Q}G_{\bar{\alpha}} + \ell_{\bar{\alpha}}^- \mathcal{Q}F_{\bar{\alpha}} = (\ell_{\bar{\alpha}}^+ \mathcal{K}_{\bar{\alpha}} + \ell_{\bar{\alpha}}^- \mathcal{L}_{\bar{\alpha}}) G,$$

donde $\mathcal{L}_{\bar{\alpha}}$ es el operador construido en la Proposición IV.7.

De manera análoga puede obtenerse que

$$\mathcal{P}G_{\bar{\alpha}\circ i} = (\ell_{\bar{\alpha}}^+ \widehat{\mathcal{K}}_{\bar{\alpha}} - \ell_{\bar{\alpha}}^- \mathcal{L}_{\bar{\alpha}}) F.$$

Entonces, los operadores buscados se construyen por las reglas

$$\mathcal{K}_{\bar{\alpha}oi} = \ell_{\bar{\alpha}}^+ \mathcal{K}_{\bar{\alpha}} + \ell_{\bar{\alpha}}^- \mathcal{L}_{\bar{\alpha}}. \quad (33)$$

$$\widehat{\mathcal{K}}_{\bar{\alpha}oi} = \ell_{\bar{\alpha}}^+ \widehat{\mathcal{K}}_{\bar{\alpha}} - \ell_{\bar{\alpha}}^- \mathcal{L}_{\bar{\alpha}}. \quad (34)$$

Como en la demostración de la Proposición IV.7, de las relaciones (33)-(34) resulta, en particular, que los operadores $\mathcal{K}_{\bar{\alpha}oi}$ y $\widehat{\mathcal{K}}_{\bar{\alpha}oi}$ pertenecen a $S(\Lambda_A \sqcup \tilde{\Lambda}_{\bar{\alpha}oi})$. \square

2.5. Acción de \mathcal{P} y \mathcal{Q} sobre la solución

Si $\bar{\phi}$ es una solución de (N) y \mathcal{B} es un operador de tipo S entonces, debido a la linealidad de \mathcal{B} y de (N), $\mathcal{B}\bar{\phi}$ es también una solución de (N). Además, si $G_{\bar{\alpha}}^{\mathcal{B}\bar{\phi}}$ y $F_{\bar{\alpha}}^{\mathcal{B}\bar{\phi}}$, $\bar{\alpha} \in \mathcal{J}$, denotan las trazas de velocidad y tensión de las cuerdas en los nodos de la red para la solución $\mathcal{B}\bar{u}$ entonces,

$$G_{\bar{\alpha}}^{\mathcal{B}\bar{\phi}} = \mathcal{B}G_{\bar{\alpha}}, \quad F_{\bar{\alpha}}^{\mathcal{B}\bar{\phi}} = \mathcal{B}F_{\bar{\alpha}}.$$

Esto es cierto, en particular, cuando \mathcal{B} es uno de los operadores \mathcal{P} ó \mathcal{Q} . El siguiente lema constituye un paso técnico fundamental en nuestra construcción.

Lema IV.1. – *Existe una constante positiva C tal que para toda solución \bar{u} de (N) se verifican las desigualdades*

$$\mathbf{E}_{\mathcal{P}\bar{\phi}}(t) \leq C \int_{T^*-2L_A}^{T^*+2L_A} |F(t)|^2 dt, \quad \mathbf{E}_{\mathcal{Q}\bar{\phi}}(t) \leq C \int_{T^*-2L_A}^{T^*+2L_A} |G(t)|^2 dt, \quad (35)$$

para todo $T^* \in \mathbb{R}$ y $t \in [T^* - L_A, T^* + L_A]$.

Demostración. (i) Fijemos $T^* \in \mathbb{R}$. Probaremos inicialmente que se verifican las desigualdades (35) para $t = T^*$, esto es

$$\mathbf{E}_{\mathcal{P}\bar{\phi}}(T^*) \leq C \int_{T^*-2L_A}^{T^*+2L_A} |F(t)|^2 dt, \quad \mathbf{E}_{\mathcal{Q}\bar{\phi}}(T^*) \leq C \int_{T^*-2L_A}^{T^*+2L_A} |G(t)|^2 dt. \quad (36)$$

Como consecuencia de las Proposiciones IV.7 y IV.8 tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}F_{\bar{\alpha}} &= \mathcal{L}_{\bar{\alpha}}G, & \mathcal{Q}G_{\bar{\alpha}} &= \mathcal{K}_{\bar{\alpha}}G, \\ \mathcal{P}F_{\bar{\alpha}} &= -\mathcal{L}_{\bar{\alpha}}F, & \mathcal{P}G_{\bar{\alpha}} &= \widehat{\mathcal{K}}_{\bar{\alpha}}F \end{aligned}$$

para todo $\bar{\alpha} \in \mathcal{J}$.

Entonces, a partir de las Proposiciones II.4 y IV.3(i) resulta

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{Q}\bar{\phi}}^{\bar{\alpha}}(T^*) &\leq C \int_{T^*-\ell_{\bar{\alpha}}}^{T^*+\ell_{\bar{\alpha}}} (|\mathcal{L}_{\bar{\alpha}}G(t)|^2 + |\mathcal{K}_{\bar{\alpha}}G(t)|^2) dt \leq C \int_{T^*-2L_A}^{T^*+2L_A} |G(t)|^2 dt, \\ E_{\mathcal{P}\bar{\phi}}^{\bar{\alpha}}(T^*) &\leq C \int_{T^*-\ell_{\bar{\alpha}}}^{T^*+\ell_{\bar{\alpha}}} (|\mathcal{L}_{\bar{\alpha}}F(t)|^2 + |\widehat{\mathcal{K}}_{\bar{\alpha}}F(t)|^2) dt \leq C \int_{T^*-2L_A}^{T^*+2L_A} |F(t)|^2 dt, \end{aligned}$$

donde, como antes, $E^{\bar{\alpha}}$ es la energía de la solución en la cuerda $e_{\bar{\alpha}}$.

Basta ahora notar que $\mathbf{E} = \sum_{\bar{\alpha} \in \mathcal{J}} E^{\bar{\alpha}}$ para obtener las desigualdades (36).

(ii) Probaremos ahora que estas desigualdades permanecen válidas para todo $t \in [T^* - L_{\mathcal{A}}, L^* + T_{\mathcal{A}}]$. Realmente, si $t \in [T^* - L_{\mathcal{A}}, T^* + L_{\mathcal{A}}]$, de la fórmula (I.14) para el cálculo de la energía tendremos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathcal{P}\bar{\phi}}(t) &= \mathbf{E}_{\mathcal{P}\bar{\phi}}(T^*) - \int_{T^*}^t F^{\mathcal{P}\bar{\phi}}(\tau) G^{\mathcal{P}\bar{\phi}}(\tau) d\tau \leq \mathbf{E}_{\mathcal{P}\bar{\phi}}(T^*) + \\ &\quad + \left| \int_{T^*}^t (|F^{\mathcal{P}\bar{\phi}}(\tau)|^2 + |G^{\mathcal{P}\bar{\phi}}(\tau)|^2) d\tau \right| \\ &\leq \mathbf{E}_{\mathcal{P}\bar{\phi}}(T^*) + \int_{T^* - L_{\mathcal{A}}}^{T^* + L_{\mathcal{A}}} (|\mathcal{P}F(\tau)|^2 + |\mathcal{P}G(\tau)|^2) d\tau \\ &\leq \mathbf{E}_{\mathcal{P}\bar{\phi}}(T^*) + \int_{T^* - L_{\mathcal{A}}}^{T^* + L_{\mathcal{A}}} (|\mathcal{P}F(\tau)|^2 + |\mathcal{Q}F(\tau)|^2) d\tau \leq C \int_{T^* - 2L_{\mathcal{A}}}^{T^* + 2L_{\mathcal{A}}} |F(\tau)|^2 d\tau \end{aligned}$$

(en el último paso hemos usado la Proposición IV.3(i) y el resultado de (i)).

Para el operador \mathcal{Q} la demostración es similar. \square

Observación IV.3. – Cuando $\bar{\phi}$ es una solución de (7)-(11) (es decir, $G \equiv 0$), el Lema IV.1 nos permite asegurar que $\mathbf{E}_{\mathcal{Q}\bar{\phi}}(t) = 0$. Esto implica que $\mathcal{Q}\bar{\phi}(t) \equiv 0$. Esta relación puede verse como una generalización de la propiedad de periodicidad en tiempo de las soluciones de la ecuación de ondas 1-d con condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas, que, con nuestras notaciones, puede escribirse como $\ell^- \phi(t) = 0$. Como hemos mostrado en la Proposición IV.4, esta periodicidad generalizada implica que toda la información esencial de tipo L^2 sobre $\bar{\phi}$ está contenida en un intervalo temporal de longitud $2L_{\mathcal{A}}$.

3. El teorema fundamental de observabilidad

En esta sección probamos el resultado fundamental de observabilidad de las soluciones del sistema (1)-(6) homogéneo.

Para cada multi-índice no vacío $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{J}$ definimos el operador $\mathcal{D}_{\bar{\alpha}}$ por

$$\mathcal{D}_{\bar{\alpha}} := \left(\prod_{i=1, i \neq \alpha_1}^m \mathcal{Q}_i \right) \left(\prod_{i=1, i \neq \alpha_2}^{m_{\alpha_1}} \mathcal{Q}_{\alpha_1, i} \right) \cdots \left(\prod_{i=1, i \neq \alpha_{k-1}}^{m_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}}} \mathcal{Q}_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, i} \right) \quad (37)$$

y para el índice vacío \mathcal{D} es el operador identidad. Recordemos que $\mathcal{Q}_{\bar{\beta}}$ es el operador construido en la sección anterior para el subárbol $\mathcal{A}_{\bar{\beta}}$ y que los productos en (37) denotan la composición de operadores.

Notemos que para cada $\bar{\alpha} \in \mathcal{J}$ el operador $\mathcal{D}_{\bar{\alpha}}$ es de tipo S con $s(\mathcal{D}_{\bar{\alpha}}) < L_{\mathcal{A}}$.

El resultado de observabilidad que demostraremos es

Teorema IV.1. – Existe una constante $C > 0$ tal que

$$\mathbf{E}_{\mathcal{D}_{\bar{\alpha}}\bar{\phi}}(0) = \mathbf{E}_{\mathcal{D}_{\bar{\alpha}}\bar{\phi}}(t) \leq C \int_0^{2L_{\mathcal{A}}} |F(\tau)|^2 d\tau,$$

para toda solución $\bar{\phi}$ de (1)-(5) y todo $\bar{\alpha} \in \mathcal{J}_S$.

La demostración del está basada en

Lema IV.2. – Existe una constante positiva C , tal que para cada $\bar{\alpha} \in \mathcal{J}_S$ y cada solución $\bar{\phi}$ de (N), se verifica la desigualdad

$$\mathbf{E}_{\mathcal{D}_{\bar{\alpha}}\bar{\phi}}(t) \leq C \int_{t-2L_{\mathcal{A}}}^{t+2L_{\mathcal{A}}} (|F(\tau)|^2 + |G(\tau)|^2) d\tau,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Procedemos por inducción. Para el caso con una red de una sola cuerda la afirmación es una consecuencia inmediata de la Proposición II.4.

Fijemos $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{J}_S$ y supongamos que la afirmación del teorema es cierta para el subárbol \mathcal{A}_{α_1} . Esto implica que

$$\mathbf{E}_{\mathcal{D}_{\bar{\alpha}}^{\alpha_1}\bar{\phi}}(t) \leq C \int_{t-2L_{\alpha_1}}^{t+2L_{\alpha_1}} (|F_{\alpha_1}(\tau)|^2 + |G_{\alpha_1}(\tau)|^2) d\tau, \quad (38)$$

para toda solución \bar{u} de (N), donde

$$\mathcal{D}_{\bar{\alpha}}^{\alpha_1} := \left(\prod_{i=1, i \neq \alpha_2}^{m_{\alpha_1}} \mathcal{Q}_{\alpha_1, i} \right) \cdots \left(\prod_{i=1, i \neq \alpha_{k-1}}^{m_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}}} \mathcal{Q}_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, i} \right) \quad (39)$$

es el operador $\mathcal{D}_{\bar{\alpha}}$ para el subárbol \mathcal{A}_{α_1} con $\bar{\alpha} = (\alpha_2, \dots, \alpha_k)$.

Primeramente estimamos la energía $\mathbf{E}_{\mathcal{D}_{\bar{\alpha}}^{\alpha_1}\bar{\phi}}$ de $\mathcal{D}_{\bar{\alpha}}\bar{\phi}$ en el subárbol \mathcal{A}_{α_1} . Para hacerlo, tomamos

$$\bar{\omega} := \left(\prod_{j=1, j \neq \alpha_1}^m \mathcal{Q}_j \right) \bar{\phi}, \quad \bar{\omega}_i := \left(\prod_{\substack{j=1, j \neq \alpha_1 \\ j \neq i}}^m \mathcal{Q}_j \right) \bar{\phi}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (40)$$

Observemos que estas funciones son también soluciones de (N). Ellas verifican

$$\bar{\omega} = \mathcal{Q}_i \bar{\omega}_i \quad \mathcal{D}_{\bar{\alpha}} \bar{\phi} = \mathcal{D}_{\bar{\alpha}}^{\alpha_1} \bar{\omega}. \quad (41)$$

Además, de (38) resulta

$$\mathbf{E}_{\mathcal{D}_{\bar{\alpha}}^{\alpha_1}\bar{\omega}}(t) \leq C \int_{t-2L_{\alpha_1}}^{t+2L_{\alpha_1}} (|F_{\alpha_1}^{\bar{\omega}}(\tau)|^2 + |G_{\alpha_1}^{\bar{\omega}}(\tau)|^2) d\tau. \quad (42)$$

Pero de las fórmulas de acoplamiento (16) obtenemos que

$$\sum_{i=1}^m F_i^{\bar{\omega}} = \widehat{F}^{\bar{\omega}}, \quad G_i^{\bar{\omega}} = \widehat{G}^{\bar{\omega}}, \quad (43)$$

de modo que resulta

$$F_{\alpha_1}^{\bar{\omega}} = \widehat{F}^{\bar{\omega}} - \sum_{i=1, i \neq \alpha_1}^m \mathcal{Q}_i F_i^{\bar{\omega}_i} = \widehat{F}^{\bar{\omega}} + \sum_{i=1, i \neq \alpha_1}^m \mathcal{P}_i \widehat{G}^{\bar{\omega}_i}, \quad G_{\alpha_1}^{\bar{\omega}} = \widehat{G}^{\bar{\omega}}. \quad (44)$$

Usando entonces las igualdades (44), (42) dará

$$\mathbf{E}_{\mathcal{D}_{\bar{\alpha}}^{\alpha_1} \bar{\omega}}^{\alpha_1}(t) \leq C \int_{t-2L_{\alpha_1}}^{t+2L_{\alpha_1}} \left(|\widehat{F}^{\bar{\omega}}(\tau)|^2 + \sum_{i=1, i \neq \alpha_1}^m |\mathcal{P}_i \widehat{G}^{\bar{\omega}_i}(\tau)|^2 + |\widehat{G}^{\bar{\omega}}(\tau)|^2 \right) d\tau,$$

y esto implica que

$$\mathbf{E}_{\mathcal{D}_{\bar{\alpha}}^{\alpha_1} \bar{\omega}}^{\alpha_1}(t) \leq C \int_{t-2L_{\alpha_1}}^{t+2L_{\alpha_1}} \left(|\widehat{F}^{\bar{\omega}}(\tau)|^2 + \sum_{i=1, i \neq \alpha_1}^m |\mathcal{P}_i \widehat{G}^{\bar{\omega}_i}(\tau)|^2 + |\widehat{G}^{\bar{\omega}}(\tau)|^2 \right) d\tau. \quad (45)$$

Ahora, de la definición de $\bar{\omega}$ y de las fórmulas (17), (18) obtenemos

$$\widehat{F}^{\bar{\omega}} = \left(\prod_{j=1, j \neq \alpha_1}^m \mathcal{Q}_j \right) \widehat{F} = \left(\prod_{j=1, j \neq \alpha_1}^m \mathcal{Q}_j \right) \ell^+ F + \left(\prod_{j=1, j \neq \alpha_1}^m \mathcal{Q}_j \right) \ell^- G$$

y por consiguiente

$$\int_{t-2L_{\alpha_1}}^{t+2L_{\alpha_1}} |\widehat{F}^{\bar{\omega}}|^2 d\tau \leq 2 \int_{t-2L_{\alpha_1}}^{t+2L_{\alpha_1}} \left(\left| \left(\prod_{j=1, j \neq \alpha_1}^m \mathcal{Q}_j \right) \ell^+ F \right|^2 + \left| \left(\prod_{j=1, j \neq \alpha_1}^m \mathcal{Q}_j \right) \ell^- G \right|^2 \right) d\tau.$$

Observemos que los operadores $\left(\prod_{j=1, j \neq \alpha_1}^m \mathcal{Q}_j \right) \ell^+$ y $\left(\prod_{j=1, j \neq \alpha_1}^m \mathcal{Q}_j \right) \ell^-$ son de tipo S con $s < L_{\mathcal{A}} - L_{\alpha_1}$ y por ello, la última desigualdad, combinada con la Proposición IV.3 garantiza que

$$\int_{t-2L_{\alpha_1}}^{t+2L_{\alpha_1}} |\widehat{F}^{\bar{\omega}}(\tau)|^2 d\tau \leq C \int_{t-2L_{\mathcal{A}}}^{t+2L_{\mathcal{A}}} (|F(\tau)|^2 + |G(\tau)|^2) d\tau.$$

De manera similar pueden probarse las desigualdades

$$\int_{t-2L_{\alpha_1}}^{t+2L_{\alpha_1}} |\mathcal{P}_i \widehat{G}^{\bar{\omega}_i}(\tau)|^2 d\tau \leq C \int_{t-2L_{\mathcal{A}}}^{t+2L_{\mathcal{A}}} (|F(\tau)|^2 + |G(\tau)|^2) d\tau,$$

$$\int_{t-2L_{\alpha_1}}^{t+2L_{\alpha_1}} |\widehat{G}^{\bar{\omega}}(\tau)|^2 d\tau \leq C \int_{t-2L_{\mathcal{A}}}^{t+2L_{\mathcal{A}}} (|F(\tau)|^2 + |G(\tau)|^2) d\tau.$$

Entonces, estas tres desigualdades combinadas con (41) y (45) dan

$$\mathbf{E}_{\mathcal{D}_{\bar{\alpha}} \bar{\phi}}^{\alpha_1}(t) \leq C \int_{t-2L_{\mathcal{A}}}^{t+2L_{\mathcal{A}}} (|F(\tau)|^2 + |G(\tau)|^2) d\tau. \quad (46)$$

Pasamos ahora a estimar la energía $\mathbf{E}_{\mathcal{D}_{\bar{\alpha}} \bar{\phi}}^i$ de $\mathcal{D}_{\bar{\alpha}} \bar{\phi}$ en los restantes subárboles \mathcal{A}_i (es decir, para $i \neq \alpha_1$). De acuerdo al Lema IV.1, aplicado a $\bar{\omega}_i$ en el subárbol \mathcal{A}_i , resulta que para cada t' en $[t - L_i, t + L_i]$,

$$\mathbf{E}_{\bar{\omega}}^i(t') = \mathbf{E}_{\mathcal{Q}_i \bar{\omega}_i}^i(t') \leq C \int_{t-2L_i}^{t+2L_i} |G_i^{\bar{\omega}_i}(\tau)|^2 d\tau, \quad (47)$$

para $i = 1, \dots, m$. Teniendo en cuenta que

$$G_i^{\bar{\omega}_i} = \left(\prod_{\substack{j=1, j \neq \alpha_1 \\ j \neq i}}^m \mathcal{Q}_j \right) \widehat{G} = \left(\prod_{\substack{j=1, j \neq \alpha_1 \\ j \neq i}}^m \mathcal{Q}_j \right) \ell^+ F + \left(\prod_{\substack{j=1, j \neq \alpha_1 \\ j \neq i}}^m \mathcal{Q}_j \right) \ell^- G, \quad (48)$$

obtenemos de (47) y la Proposición IV.3(i)

$$\mathbf{E}_{\bar{\omega}}^i(t') \leq C \int_{t-L_{\mathcal{A}}-L_i+L_{\alpha_1}}^{t+L_{\mathcal{A}}+L_i-L_{\alpha_1}} (|F(\tau)|^2 + |G(\tau)|^2) d\tau \leq C \int_{t-2L_{\mathcal{A}}}^{t+2L_{\mathcal{A}}} (|F(\tau)|^2 + |G(\tau)|^2) d\tau, \quad (49)$$

(aquí hemos usado el hecho de que los operadores aplicados a F y G en el miembro derecho de (48) son de tipo S con $s = L_A - L_{\alpha_1} - L_i$).

Ahora, si aplicamos la Proposición IV.3(ii) con $\mathcal{B} = \mathcal{D}_{\bar{\alpha}}^{\alpha_1}$ a (49) (recordemos que $s(\mathcal{D}_{\bar{\alpha}}^{\alpha_1}) < L_{\alpha_1}$) se obtiene, luego de escoger $t' = t$,

$$\mathbf{E}_{\mathcal{D}_{\bar{\alpha}}^i} \bar{\phi}(t) = \mathbf{E}_{\mathcal{D}_{\bar{\alpha}}^{\alpha_1} \bar{\omega}}^i(t') \leq C \int_{t-2L_A}^{t+2L_A} (|F(\tau)|^2 + |G(\tau)|^2) d\tau. \quad (50)$$

Finalmente, a partir de la Proposición II.4 obtenemos que la componente ϕ de $\bar{\phi}$ verifica, para todo $t' \in [t - L_A, t + L_A]$,

$$E_{\phi}(t') \leq C \int_{t-\ell-L_A}^{t+\ell+L_A} (|F(\tau)|^2 + |G(\tau)|^2) d\tau.$$

Así, usando la Proposición IV.3(ii), resulta

$$E_{\mathcal{D}_{\bar{\alpha}} \bar{\phi}}(t') \leq C \int_{t-\ell-L_A}^{t+\ell+L_A} (|F(\tau)|^2 + |G(\tau)|^2) d\tau,$$

para todo $t' \in [t - L_A + s(\mathcal{D}_{\bar{\alpha}}), t + L_A - s(\mathcal{D}_{\bar{\alpha}})]$ y, como $s(\mathcal{D}_{\bar{\alpha}}) < L_A$, esto será cierto en particular para $t' = t$. Por consiguiente,

$$E_{\mathcal{D}_{\bar{\alpha}} \bar{\phi}}(t) \leq C \int_{t-2L_A}^{t+2L_A} (|F(\tau)|^2 + |G(\tau)|^2) d\tau. \quad (51)$$

Basta ahora combinar (46), (50), (51) y el hecho de que

$$\mathbf{E}_{\mathcal{D}_{\bar{\alpha}} \bar{\phi}} = E_{\mathcal{D}_{\bar{\alpha}} \bar{\phi}} + \sum_{i=1}^m \mathbf{E}_{\mathcal{D}_{\bar{\alpha}}^i \bar{\phi}},$$

para concluir la demostración. \square

Con ayuda del Lema IV.2 la demostración del Teorema IV.1 es simple.

Demostración del Teorema IV.1. Si $\bar{\phi}$ es una solución de (7)-(12), también lo será $\mathcal{D}_{\bar{\alpha}} \bar{\phi}$. En particular, la energía de $\mathcal{D}_{\bar{\alpha}} \bar{\phi}$ se conserva. Entonces, teniendo en cuenta que $G \equiv 0$ para las soluciones de (7)-(11), a partir del Lema IV.2 obtenemos

$$\mathbf{E}_{\mathcal{D}_{\bar{\alpha}} \bar{\phi}}(0) = \mathbf{E}_{\mathcal{D}_{\bar{\alpha}} \bar{\phi}}(2T_A) \leq C \int_0^{4L_A} |F(\tau)|^2 d\tau. \quad (52)$$

Por otra parte, en este caso $\mathcal{Q}F \equiv 0$ y por ello, usando la Proposición IV.4 (que puede aplicarse a \mathcal{Q} en base a la Proposición IV.6) tendremos

$$\int_0^{4L_A} |F(\tau)|^2 d\tau \leq C \int_0^{2L_A} |F(\tau)|^2 d\tau.$$

Con esto, la afirmación del teorema se obtiene a partir de (52). \square

4. Relación entre \mathcal{Q} y los autovalores

Nuestro siguiente objetivo es expresar la desigualdad (52) en términos de los coeficientes de Fourier del estado inicial de la solución \bar{u} de (1)-(6). Esto conducirá a desigualdades de observabilidad con pesos que dependen de los autovalores μ_n del operador $-\Delta_{\mathcal{A}}$. Para estudiar estos pesos necesitaremos algunas propiedades adicionales de los autovalores.

4.1. El problema de autovalores

Consideramos el problema de autovalores para el operador elíptico $-\Delta_{\mathcal{A}}$ asociado al problema hipérbolico (1)-(5):

$$-\theta_{xx}^{\bar{\alpha}}(x) = \mu \theta^{\bar{\alpha}}(x) \quad x \in [0, \ell_{\bar{\alpha}}], \quad \bar{\alpha} \in \mathcal{J}, \quad (53)$$

$$\theta^{\bar{\alpha}\circ\beta}(0) = \theta^{\bar{\alpha}}(\ell_{\bar{\alpha}}) \quad \bar{\alpha} \in \mathcal{J}_{\mathcal{M}}, \quad \beta = 1, \dots, m_{\bar{\alpha}}, \quad (54)$$

$$\sum_{\beta=1}^{m_{\bar{\alpha}}} \theta_x^{\bar{\alpha}\circ\beta}(0) = \theta_x^{\bar{\alpha}}(\ell_{\bar{\alpha}}) \quad \bar{\alpha} \in \mathcal{J}_{\mathcal{M}}, \quad (55)$$

$$\theta^{\bar{\alpha}}(\ell_{\bar{\alpha}}) = 0 \quad \bar{\alpha} \in \mathcal{J}_{\mathcal{S}}, \quad (56)$$

$$\theta(0) = 0 \quad \text{en la raíz } \mathcal{R}. \quad (57)$$

Como se ha indicado en el Capítulo I, el espectro de $-\Delta_{\mathcal{A}}$ está formado por una sucesión positiva y creciente de autovalores $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Éste será llamado *espectro de \mathcal{A}* y será denotado por $\sigma_{\mathcal{A}}$.

Está claro, que podemos considerar el problema (53)-(57) para cada uno de los subárboles $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}}$ de \mathcal{A} . El espectro correspondiente a $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}}$ será llamado *espectro del subárbol $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}}$* y será denotado por $\sigma_{\bar{\alpha}}$.

Por razones técnicas, al igual que en el caso del problema (1)-(5), consideraremos también soluciones regulares de (53), que verifican las condiciones de contorno (54)-(56), pero no necesariamente (57). Nos referiremos a estas soluciones como *soluciones de (\mathbf{N}_E) correspondientes a μ* .

Proposición IV.9. — *Si μ es un autovalor común de los subárboles $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}\circ i}$, $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}\circ j}$ ($i \neq j$) con la misma raíz $\mathcal{O}_{\bar{\alpha}}$ entonces, μ es también un autovalor de \mathcal{A} . Además, existe una autofunción no nula $\bar{\theta}$ asociada a μ tal que*

$$\theta(0) = \theta_x(0) = 0.$$

Demostración. Sean $\bar{\theta}^{\bar{\alpha}\circ i}$, $\bar{\theta}^{\bar{\alpha}\circ j}$ autofunciones no nulas correspondientes a μ de los subárboles $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}\circ i}$ y $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}\circ j}$, respectivamente. Estas funciones están definidas en los respectivos subárboles, pero será suficiente “pegarlas” de manera adecuada para construir una autofunción de \mathcal{A} .

Observemos que podemos asumir que los números $\theta_x^{\bar{\alpha}\circ i}(0)$, $\theta_x^{\bar{\alpha}\circ j}(0)$ son ambos diferentes de cero. En efecto, si uno de ellos, por ejemplo $\theta_x^{\bar{\alpha}\circ i}(0)$, se anula entonces, las igualdades

$$\theta^{\bar{\alpha}\circ i}(0) = \theta_x^{\bar{\alpha}\circ i}(0) = 0,$$

nos permitirían asegurar que la función $\bar{\theta}$, que se obtiene prolongando por cero la función $\bar{\theta}^{\bar{\alpha}\circ i}$ a todo el árbol \mathcal{A} , satisface (53)-(57) para ese valor de μ y por ello sería una autofunción de \mathcal{A} .

Definimos ahora la función $\bar{\theta}$ por

$$\theta_{\bar{\alpha}'} = \begin{cases} \theta_x^{\bar{\alpha} \circ j}(0) \theta_{\bar{\beta}, x}^{\bar{\alpha} \circ i} & \text{si } \bar{\alpha}' = \bar{\alpha} \circ i \circ \bar{\beta}, \\ -\theta_x^{\bar{\alpha} \circ i}(0) \theta_{\bar{\beta}, x}^{\bar{\alpha} \circ j} & \text{si } \bar{\alpha}' = \bar{\alpha} \circ j \circ \bar{\beta}, \\ 0 & \text{en los otros casos,} \end{cases}$$

es decir, $\bar{\theta}$ coincide en el subárbol $\mathcal{A}_{\bar{\alpha} \circ i}$ con $\theta_x^{\bar{\alpha} \circ j}(0) \bar{\theta}_x^{\bar{\alpha} \circ i}$, en $\mathcal{A}_{\bar{\alpha} \circ j}$ con $-\theta_x^{\bar{\alpha} \circ i}(0) \bar{\theta}_x^{\bar{\alpha} \circ j}$ y es cero fuera de esos subárboles. Es fácil ver que $\bar{\theta}$ satisface las condiciones de contorno (54)-(55) en $\mathcal{O}_{\bar{\alpha}}$:

$$\sum_{k=1}^{m_{\bar{\alpha}}} \theta_x^{\bar{\alpha} \circ k}(0) = \theta_x^{\bar{\alpha} \circ j}(0) \theta_x^{\bar{\alpha} \circ i}(0) - \theta_x^{\bar{\alpha} \circ i}(0) \theta_x^{\bar{\alpha} \circ j}(0) = 0 = \theta_x^{\bar{\alpha}}(\ell_{\bar{\alpha}}).$$

Como en los otros nodos estas condiciones, evidentemente, se satisfacen, $\bar{\theta}$ es una autofunción de \mathcal{A} .

Finalmente, observemos que en ambos casos la autofunción $\bar{\theta}$ construida aquí es tal que

$$\theta(0) = \theta_x(0) = 0,$$

y por ello, $\theta \equiv 0$, es decir, $\bar{\theta}$ se anula idénticamente en toda la cuerda que contiene a la raíz de \mathcal{A} . \square

Observación IV.4. — Notemos que la autofunción construida en la demostración de la Proposición IV.9 se anula no sólo en la cuerda que contiene a \mathcal{R} , sino también en cualquier cuerda que no pertenezca a uno de los subárboles $\mathcal{A}_{\bar{\alpha} \circ i}$, $\mathcal{A}_{\bar{\alpha} \circ j}$. Si denotamos por $\mathcal{A}_{\bar{\alpha} \circ i} \vee \mathcal{A}_{\bar{\alpha} \circ j}$ el árbol formado solamente por $\mathcal{A}_{\bar{\alpha} \circ i}$ y $\mathcal{A}_{\bar{\alpha} \circ j}$ en el cual el nodo $\mathcal{O}_{\bar{\alpha}}$ es considerado como un punto interior de una cuerda de longitud $\ell_{\bar{\alpha} \circ i} + \ell_{\bar{\alpha} \circ j}$, obtenemos que los subárboles $\mathcal{A}_{\bar{\alpha} \circ i}$, $\mathcal{A}_{\bar{\alpha} \circ j}$ comparten un autovalor si, y sólo si, existe una autofunción de $\mathcal{A}_{\bar{\alpha} \circ i} \vee \mathcal{A}_{\bar{\alpha} \circ j}$ que se anula en el punto $\mathcal{O}_{\bar{\alpha}}$.

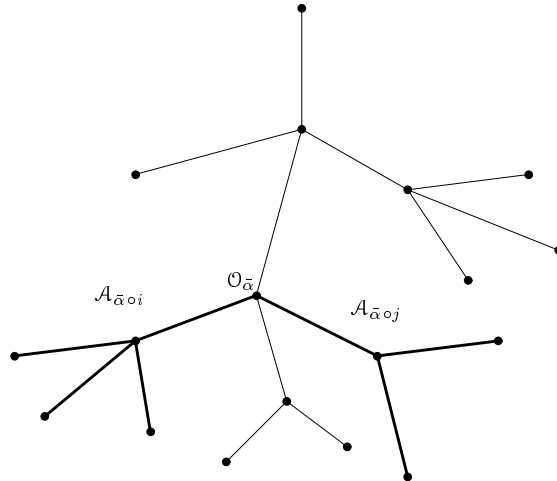


FIGURA 2. El subárbol $\mathcal{A}_{\bar{\alpha} \circ i} \vee \mathcal{A}_{\bar{\alpha} \circ j}$

Como hemos mostrado antes, los operadores \mathcal{P} y \mathcal{Q} son de tipo S con $s(\mathcal{P}) = s(\mathcal{Q}) = L_{\mathcal{A}}$. De acuerdo a la Observación IV.1, existen funciones p y q tales que, para todos los $t, \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{P}e^{i\lambda t} = p(\lambda)e^{i\lambda t}, \quad \mathcal{Q}e^{i\lambda t} = q(\lambda)e^{i\lambda t}. \quad (58)$$

Proposición IV.10. – Sean $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $f, g \in \mathbb{C}$ tales que

$$q(\lambda)f + i\lambda p(\lambda)g = 0. \quad (59)$$

Si el árbol \mathcal{A} posee la propiedad

$$|q_{\bar{\alpha}oi}(\lambda)| + |q_{\bar{\alpha}oj}(\lambda)| \neq 0 \text{ para todo } \bar{\alpha} \in \mathcal{J}_{\mathcal{M}}, i, j = 1, \dots, m_{\bar{\alpha}}, i \neq j, \quad (60)$$

entonces, existe una única solución $\bar{\theta}$ de (N_E) correspondiente al valor $\mu = \lambda^2$ tal que

$$\theta(0) = g, \quad \theta_x(0) = f. \quad (61)$$

Demostración. Inicialmente construimos la componente θ de $\bar{\theta}$ (aquella que corresponde a la cuerda e que contiene a la raíz). Tomamos

$$\theta(x) = g \cos \lambda x + \frac{f}{\lambda} \operatorname{sen} \lambda x, \quad (62)$$

que obviamente, satisface (61).

Si la red está formada solamente por una sola cuerda de longitud ℓ entonces,

$$p(\lambda) = \cos \lambda \ell, \quad q(\lambda) = i \operatorname{sen} \lambda \ell,$$

y la condición (59) se convierte en

$$if \operatorname{sen} \lambda \ell + ig \lambda \cos \lambda \ell = 0.$$

Esto implica que

$$\theta(\ell) = g \cos \lambda \ell + \frac{f}{\lambda} \operatorname{sen} \lambda \ell = 0,$$

lo cual significa que θ es una solución de (N_E) . Así, la afirmación es cierta en este caso.

En el caso un árbol general, las restantes componentes de $\bar{\theta}$ se construyen por inducción. Supongamos que la proposición es cierta para los subárboles $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$.

Si fuésemos capaces de escoger números f_1, \dots, f_m que verifiquen

$$\sum_{k=1}^m f_k = \theta_x(\ell) \text{ y } q_k(\lambda)f_k + i\lambda p_k(\lambda)\theta(\ell) = 0 \text{ para } k = 1, \dots, m, \quad (63)$$

entonces, de acuerdo a la hipótesis de inducción, podríamos encontrar soluciones $\bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^m$, definidas en los subárboles $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$, respectivamente, tales que

$$\theta^k(0) = \theta(\ell), \quad \theta_x^k(0) = f_k, \text{ para } k = 1, \dots, m.$$

Esto implicaría

$$\sum_{k=1}^m \theta_x^k(0) = \theta(\ell) \text{ y } \theta^k(0) = \theta(\ell), \text{ para } k = 1, \dots, m.$$

Por ello, la función $\bar{\theta}$ definida sobre el árbol por $\theta_{k \circ \bar{\alpha}} = \theta_{\bar{\alpha}}^k$ sería la solución de (N_E) , cuya existencia se afirma en la proposición. En conclusión, resta sólo probar la posibilidad de la descomposición (63).

Observemos que de la definición de las funciones p y q y de las fórmulas (28), (29) resulta

$$p = \cos \lambda \ell \sum_{k=1}^m p_k \prod_{j \neq k} q_j + i \operatorname{sen} \lambda \ell \prod_{j=1}^m q_j, \quad (64)$$

$$q = i \operatorname{sen} \lambda \ell \sum_{k=1}^m p_k \prod_{j \neq k} q_j + \cos \lambda \ell \prod_{j=1}^m q_j. \quad (65)$$

La condición (60) implica que entre los números $q_k(\lambda)$, $k = 1, \dots, m$, a lo sumo uno de ellos puede ser igual a cero. Consideraremos entonces dos casos: a) todos los números $q_k(\lambda)$, $k = 1, \dots, m$, son distintos de cero y b) exactamente uno de estos números, digamos $q_1(\lambda)$, es igual a cero.

Caso a). Si tomamos

$$f_k = \frac{-i \lambda p_k(\lambda) \theta(\ell)}{q_k(\lambda)}$$

entonces,

$$\sum_{k=1}^m f_k = -i \lambda \theta(\ell) \sum_{k=1}^m \frac{p_k}{q_k} = -i \lambda (g \cos \lambda \ell + \frac{f}{\lambda} \operatorname{sen} \lambda \ell) \frac{\sum_{k=1}^m p_k \prod_{j \neq k} q_j}{\prod_{j=1}^m q_j}.$$

Esta igualdad, en virtud de (64), (65), dará

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m f_k &= -i \lambda g \left(\frac{p}{\prod_{j=1}^m q_j} - i \operatorname{sen} \lambda \ell \right) - f \left(\frac{q}{\prod_{j=1}^m q_j} - \cos \lambda \ell \right) \\ &= -\lambda g \operatorname{sen} \lambda \ell + f \cos \lambda \ell - \frac{i \lambda p g + q f}{\prod_{j=1}^m q_j} = -\lambda g \operatorname{sen} \lambda \ell + f \cos \lambda \ell = \theta_x(\ell). \end{aligned}$$

De modo que los números f_1, \dots, f_m satisfacen las relaciones (63).

Caso b). Las igualdades (64), (65) conjuntamente con $q_1(\lambda) = 0$ dan

$$p(\lambda) = \cos \lambda \ell p_1(\lambda) \prod_{j \neq 1} q_j(\lambda), \quad q(\lambda) = i \operatorname{sen} \lambda \ell p_1(\lambda) \prod_{j \neq 1} q_j(\lambda),$$

y de (59) obtenemos

$$0 = q(\lambda) f + i \lambda p(\lambda) g = i \lambda (g \cos \lambda \ell + \frac{g}{\lambda} \operatorname{sen} \lambda \ell) p_1(\lambda) \prod_{j \neq 1} q_j(\lambda) = i \lambda \theta(\ell) p_1(\lambda) \prod_{j \neq 1} q_j(\lambda).$$

Pero la hipótesis (60) implica que $\prod_{j \neq 1} q_j(\lambda) \neq 0$ y entonces, necesariamente, $\theta(\ell) p_1(\lambda) = 0$. Esto significa que si escogemos $f_1 = \theta_x(\ell)$ y f_2, \dots, f_m que satisfagan

$$\sum_{k=2}^m f_k = 0 \quad \text{y} \quad q_k(\lambda) f_k + i \lambda p_k(\lambda) \theta(\ell) = 0 \quad \text{para } k = 2, \dots, m,$$

como en el caso anterior entonces, la condición (63) se satisface.

Con esto hemos conseguido probar la existencia de una solución con la propiedad (61). Resulta que para las soluciones que satisfacen (61) podemos dar una fórmula explícita. Realmente, si aplicamos las Proposiciones IV.7 y IV.8 a la solución

$$\bar{\theta}(t, x) = e^{i \lambda t} \bar{\theta}(x)$$

de (N) obtendremos

$$i\lambda p(\lambda)\theta^{\bar{\alpha}}(0) = \hat{k}(\lambda)\theta_x(0) = \hat{k}(\lambda)f, \quad p(\lambda)\theta_x^{\bar{\alpha}}(0) = -l(\lambda)\theta_x(0) = -l(\lambda)f, \quad (66)$$

$$q(\lambda)\theta^{\bar{\alpha}}(0) = k(\lambda)\theta(0) = k(\lambda)g, \quad q(\lambda)\theta_x^{\bar{\alpha}}(0) = i\lambda l(\lambda)\theta(0) = i\lambda l(\lambda)g, \quad (67)$$

donde k , \hat{k} y l son las funciones asociadas a los operadores \mathcal{K} , $\hat{\mathcal{K}}$ y \mathcal{L} respectivamente, según la Observación IV.1.

Por otro lado, la condición (60) implica que al menos uno de los números $p(\lambda)$ ó $q(\lambda)$ es diferente de cero (véase la Proposición IV.12 más abajo). Por ello, alguna de las igualdades (66), (67) nos proporciona una fórmula explícita para los valores de $\theta^{\bar{\alpha}}(0)$ y $\theta_x^{\bar{\alpha}}(0)$ para todo $\bar{\alpha} \in \mathcal{J}_{\mathcal{M}}$, es decir, para la solución $\bar{\theta}$. En particular, si $f = g = 0$ la solución correspondiente se anula idénticamente sobre \mathcal{A} , lo cual claramente implica la unicidad de la solución para valores arbitrarios de f y g . \square

Observación IV.5. – *La afirmación inversa es también cierta, aún si la condición (60) no se satisface. En efecto, si $\bar{\theta}$ es una solución de (N_E) entonces,*

$$\bar{\theta}(t, x) = e^{i\lambda t}\bar{\theta}(x)$$

es una solución de (N), y

$$\theta_t(t, 0) = i\lambda e^{i\lambda t}\theta(0), \quad \theta_x(t, 0) = e^{i\lambda t}\theta_x(0).$$

De las relaciones (19) y (58) resulta

$$0 = \mathcal{P}\theta_t(t, 0) + \mathcal{Q}\theta_x(t, 0) = (ip\lambda\theta(0) + q\theta_x(0))e^{i\lambda t},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Concluimos así que (59) se verifica.

Ahora estamos listos para demostrar la siguiente propiedad básica.

Proposición IV.11. – *Sea $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, λ^2 es un autovalor de \mathcal{A} si, y sólo si, $q(\lambda) = 0$.*

Demostración. Probaremos primero que de $q(\lambda) = 0$ resulta que λ^2 es un autovalor, es decir, que existe una solución no nula de (53)-(57) para ese valor de λ . Si el árbol cumple (60) entonces este hecho resulta de manera inmediata de la Proposición IV.10 seleccionando $g = 0$, $f \neq 0$. Notemos que la condición $0 \neq f = \theta_x(0)$ garantiza que $\bar{\theta}$ no es idénticamente igual a cero. En particular, la afirmación de la proposición es válida para la red formada por una sola cuerda, ya que en este caso la condición (60) se satisface siempre.

En el caso general, cuando la condición (60) puede no ser cierta, seguimos un argumento de inducción: suponemos que la afirmación se ha demostrado para todos los subárboles $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}}$ con $\bar{\alpha}$ no vacío.

Si $q_{\bar{\alpha}oi}(\lambda) = q_{\bar{\alpha}oj}(\lambda) = 0$ para algún $\bar{\alpha} \in \mathcal{J}_{\mathcal{M}}$, $i \neq j$, entonces, de acuerdo a la hipótesis de inducción, λ^2 es un autovalor de ambos subárboles $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}oi}$ y $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}oj}$. Por tanto, de la Proposición IV.9 se obtiene que λ^2 es también un autovalor de \mathcal{A} .

Veamos ahora la afirmación inversa. Sea $\bar{\theta}$ una autofunción no nula correspondiente al autovalor λ^2 . Entonces, la función $\bar{u}(t, x) = e^{i\lambda t}\bar{\theta}(x)$ es una solución de (N). Escojamos $\bar{\alpha} \in \mathcal{J}$ tal que alguno

de los números $\theta^{\bar{\alpha}}(0)$ ó $\theta_x^{\bar{\alpha}}(0)$ sea diferente de cero (esto es posible, pues en caso contrario resultaría $\bar{\theta} \equiv 0$). Para esta solución de (N) tenemos para cada $\bar{\alpha} \in \mathcal{J}$

$$F_{\bar{\alpha}}(t) = e^{i\lambda t} \theta_x^{\bar{\alpha}}(0), \quad G_{\bar{\alpha}}(t) = i\lambda e^{i\lambda t} \theta^{\bar{\alpha}}(0),$$

y en particular, $G \equiv 0$. Entonces, de las Proposiciones IV.7 y IV.8 resulta

$$0 = \mathcal{L}_{\bar{\alpha}} G = \mathcal{Q} F_{\bar{\alpha}} = \mathcal{Q} e^{i\lambda t} \theta_x^{\bar{\alpha}}(0) = q(\lambda) \theta_x^{\bar{\alpha}}(0),$$

$$0 = \mathcal{K}_{\bar{\alpha}} G = \mathcal{Q} G_{\bar{\alpha}} = \mathcal{Q} e^{i\lambda t} \theta^{\bar{\alpha}}(0) = i\lambda q(\lambda) \theta^{\bar{\alpha}}(0),$$

y por ello, necesariamente, $q(\lambda) = 0$. □

4.2. Propiedades adicionales de las funciones p y q

Proposición IV.12. – *Para todo árbol \mathcal{A} se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) *una de las funciones p , q es par y la otra es impar;*

(ii) *existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $p(\lambda_0) = q(\lambda_0) = 0$ si, y sólo si, existen dos subárboles $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}oi}$, $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}oj}$, $i \neq j$, con raíz común $\mathcal{O}_{\bar{\alpha}}$ tales que*

$$q_{\bar{\alpha}oi}(\lambda_0) = q_{\bar{\alpha}oj}(\lambda_0) = 0.$$

Demostración. Procedemos por inducción. Para la red de una cuerda

$$p(\lambda) = \cos \lambda \ell, \quad q(\lambda) = i \operatorname{sen} \lambda \ell.$$

En este caso (i) es trivial. La afirmación (ii) resulta del hecho que

$$|p(\lambda)|^2 + |q(\lambda)|^2 = 1.$$

Supongamos ahora que las propiedades (i), (ii) son válidas en los subárboles $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$.

Para una función h , que puede ser par o impar, denotaremos

$$\rho(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h \text{ es par,} \\ -1 & \text{si } h \text{ es impar.} \end{cases}$$

Observemos que la función ρ es multiplicativa:

$$\rho(h_1 h_2) = \rho(h_1) \rho(h_2).$$

Entonces, de acuerdo a las definiciones de p y q y las fórmulas (28), (29) tenemos que

$$q(\lambda) = i \operatorname{sen} \lambda \ell \sum_{i=1}^m p_i(\lambda) \prod_{j \neq i} q_j(\lambda) + \cos \lambda \ell \prod_{i=1}^m q_i(\lambda), \quad (68)$$

$$p(\lambda) = \cos \lambda \ell \sum_{i=1}^m p_i(\lambda) \prod_{j \neq i} q_j(\lambda) + i \operatorname{sen} \lambda \ell \prod_{i=1}^m q_i(\lambda). \quad (69)$$

Como las hipótesis respecto a los subárboles $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$ implican que $\rho(p_i) = -\rho(q_i)$, $i = 1, \dots, m$, entonces,

$$\rho(i \operatorname{sen} \lambda \ell p_i(\lambda) \prod_{j \neq i} q_j) = \prod_{i=1}^m \rho(q_i); \quad \rho(\cos \lambda \ell \prod_{i=1}^m q_i) = \prod_{i=1}^m \rho(q_i).$$

De estas relaciones y (69) obtenemos

$$\rho(q) = \prod_{i=1}^m \rho(q_i).$$

De forma análoga puede probarse que

$$\rho(p) = - \prod_{i=1}^m \rho(q_i).$$

De estas dos últimas igualdades resulta $\rho(p) = -\rho(q)$. Esto demuestra la propiedad (i).

Probaremos ahora (ii). Si $p(\lambda_0) = q(\lambda_0) = 0$ entonces, de (68), (69) se obtiene que

$$0 = q(\lambda_0) = i \operatorname{sen} \lambda_0 \ell \sum_{i=1}^m p_i(\lambda_0) \prod_{j \neq i} q_j(\lambda_0) + \cos \lambda_0 \ell \prod_{i=1}^m q_i(\lambda_0),$$

$$0 = p(\lambda_0) = \cos \lambda_0 \ell \sum_{i=1}^m p_i(\lambda_0) \prod_{j \neq i} q_j(\lambda_0) + i \operatorname{sen} \lambda_0 \ell \prod_{i=1}^m q_i(\lambda_0).$$

Obviamente, esto implica

$$\sum_{i=1}^m p_i(\lambda_0) \prod_{j \neq i} q_j(\lambda_0) = 0, \quad (70)$$

$$\prod_{i=1}^m q_i(\lambda_0) = 0. \quad (71)$$

Por otro lado, notemos que estas igualdades se cumplirán si, y sólo si, existe i_0 tal que

$$q_{i_0}(\lambda_0) = 0, \quad p_{i_0}(\lambda_0) \prod_{j \neq i_0} q_j(\lambda_0) = 0,$$

lo que equivale a que alguna de las siguientes afirmaciones es cierta:

- (a) existe $i_1 \neq i_0$ tal que $q_{i_1}(\lambda_0) = 0$;
- (b) $p_{i_0}(\lambda_0) = 0$.

En el primer caso, (ii) resulta directamente. En (b), de acuerdo a las hipótesis de inducción, existirán dos subárboles de \mathcal{A}_{i_0} , y por consiguiente, también de \mathcal{A} , que verifican la condición (ii). \square

Con ayuda de la Proposición IV.12, es posible calcular como actúa el operador \mathcal{Q} sobre las funciones $\operatorname{sen} \lambda t$ y $\cos \lambda t$.

Corolario IV.1. — *Se verifican las siguientes igualdades*

$$\mathcal{Q} \operatorname{sen} \lambda t = \begin{cases} q(\lambda) \operatorname{sen} \lambda t & \text{si } q \text{ es par,} \\ -iq(\lambda) \cos \lambda t & \text{si } q \text{ es impar;} \end{cases} \quad (72)$$

$$\mathcal{Q} \cos \lambda t = \begin{cases} q(\lambda) \cos \lambda t & \text{si } q \text{ es par,} \\ iq(\lambda) \operatorname{sen} \lambda t & \text{si } q \text{ es impar.} \end{cases}$$

Observación IV.6. — *Como consecuencia de las fórmulas (72), cuando q es una función par toma valores reales, mientras que, cuando q es impar, entonces toma valores imaginarios puros, es decir, iq es real.*

5. Resultados de observabilidad

En esta sección expresaremos las desigualdades del Teorema IV.1 en términos de los datos iniciales de la solución $\bar{\phi}$. Esto nos permitirá obtener desigualdades de observabilidad con pesos sobre los coeficientes de Fourier de los datos iniciales, que pueden calcularse de manera explícita en función de los autovalores.

5.1. Desigualdades de observabilidad con pesos

Como se ha indicado antes, una solución $\bar{\phi}$ de (7)-(11) se expresa en términos de los datos iniciales $\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1$ mediante la fórmula

$$\bar{\phi}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\phi_{0,n} \cos \lambda_n t + \frac{\phi_{1,n}}{\lambda_n} \operatorname{sen} \lambda_n t \right) \bar{\theta}_n, \quad (73)$$

donde $(\phi_{0,n}), (\phi_{1,n})$ son las sucesiones de coeficientes de Fourier de $\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1$ respecto a la base ortonormal de autofunciones $(\bar{\theta}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $\lambda_n = \sqrt{\mu_n}$.

Además, la energía de la solución $\bar{\phi}$ está dada por

$$\mathbf{E}_{\bar{\phi}} = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_n^2 \phi_{0,n}^2 + \phi_{1,n}^2). \quad (74)$$

Los operadores $\mathcal{D}_{\bar{\alpha}}$ definidos en la Sección 3 son de tipo S . Por ello, de acuerdo a la Observación IV.1, existen funciones $d_{\bar{\alpha}}$ tales que

$$\mathcal{D}_{\bar{\alpha}} e^{i\lambda t} = d_{\bar{\alpha}}(\lambda) e^{i\lambda t}.$$

En particular, cuando $\bar{\alpha}$ es el índice vacío tenemos $d(\lambda) \equiv 1$.

Teniendo en cuenta la definición (37) de $\mathcal{D}_{\bar{\alpha}}$, estas funciones pueden expresarse como

$$d_{\bar{\alpha}} := \left(\prod_{i=1, i \neq \alpha_1}^m q_i \right) \left(\prod_{i=1, i \neq \alpha_2}^{m_{\alpha_1}} q_{\alpha_1, i} \right) \cdots \left(\prod_{i=1, i \neq \alpha_{n-1}}^{m_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}}} q_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, i} \right). \quad (75)$$

Entonces, la Proposición IV.12 nos permite asegurar que para todo $\bar{\alpha} \in \mathcal{J}$, $d_{\bar{\alpha}}$ es una función par o impar. Aún más, del Corolario IV.1 obtenemos las igualdades

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\bar{\alpha}} \operatorname{sen} \lambda t &= \begin{cases} d_{\bar{\alpha}}(\lambda) \operatorname{sen} \lambda t & \text{para } d_{\bar{\alpha}} \text{ par,} \\ -i d_{\bar{\alpha}}(\lambda) \cos \lambda t & \text{para } d_{\bar{\alpha}} \text{ impar;} \end{cases} \\ \mathcal{D}_{\bar{\alpha}} \cos \lambda t &= \begin{cases} d_{\bar{\alpha}}(\lambda) \cos \lambda t & \text{para } d_{\bar{\alpha}} \text{ par,} \\ i d_{\bar{\alpha}}(\lambda) \operatorname{sen} \lambda t & \text{para } d_{\bar{\alpha}} \text{ impar.} \end{cases} \end{aligned} \quad (76)$$

Sea $\bar{\phi}$ una solución de (7)-(12) con estado inicial $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in Z \times Z$. Fijemos $\bar{\alpha} \in \mathcal{J}_M$ y denotemos $\bar{\omega} = \mathcal{D}_{\bar{\alpha}} \bar{\phi}$. Observemos que la función $\bar{\omega}$ es también solución de (7)-(11) con estado inicial en $Z \times Z$.

A partir de la fórmula (73) se obtiene

$$\bar{\omega}(t) = \mathcal{D}_{\bar{\alpha}} \bar{\phi}(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\phi_{0,n} \mathcal{D}_{\bar{\alpha}} \cos \lambda_n t + \frac{\phi_{1,n}}{\lambda_n} \mathcal{D}_{\bar{\alpha}} \operatorname{sen} \lambda_n t \right) \bar{\theta}_n.$$

Entonces, de (76) resulta

$$\begin{aligned}\bar{\omega}(t) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} d_{\bar{\alpha}}(\lambda_n) \left(\phi_{0,n} \cos \lambda_n t + \frac{\phi_{1,n}}{\lambda_n} \operatorname{sen} \lambda_n t \right) \bar{\theta}_n, & \text{si } d_{\bar{\alpha}} \text{ es par,} \\ \bar{\omega}(t) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} i d_{\bar{\alpha}}(\lambda_n) \left(\phi_{0,n} \operatorname{sen} \lambda_n t - \frac{\phi_{1,n}}{\lambda_n} \cos \lambda_n t \right) \bar{\theta}_n, & \text{si } d_{\bar{\alpha}} \text{ es impar.}\end{aligned}$$

Como consecuencia, en ambos casos la energía de $\bar{\omega}$, que se calcula por la fórmula (74), estará dada por

$$\mathbf{E}_{\bar{\omega}} = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} |d_{\bar{\alpha}}(\lambda_n)|^2 (\lambda_n^2 \phi_{0,n}^2 + \phi_{1,n}^2). \quad (77)$$

Con esto, la desigualdad del Teorema IV.1 puede escribirse en términos de los coeficientes de Fourier de los datos iniciales de la solución \bar{u} como:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |d_{\bar{\alpha}}(\lambda_n)|^2 (\lambda_n^2 \phi_{0,n}^2 + \phi_{1,n}^2) \leq C \int_0^{2L_A} |F(t)|^2 dt = C \int_0^{2L_A} |\phi_x(t, 0)|^2 dt. \quad (78)$$

Por consiguiente, si definimos

$$c_n := \max_{\bar{\alpha} \in \mathcal{J}_s} |d_{\bar{\alpha}}(\lambda_n)|, \quad (79)$$

hemos obtenido:

Teorema IV.2. – *Existe una constante positiva C , tal que*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n^2 (\lambda_n^2 \phi_{0,n}^2 + \phi_{1,n}^2) \leq C \int_0^{2L_A} |\phi_x(t, 0)|^2 dt, \quad (80)$$

para toda solución \bar{u} de (1)-(5) con estado inicial $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in V \times H$.

Observación IV.7. – *Es posible probar, usando, por ejemplo la fórmula (73) para las soluciones, que si la desigualdad (80) es cierta entonces, para todos los $\alpha, T \in \mathbb{R}$,*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n^2 (\lambda_n^2 \phi_{0,n}^2(T) + \phi_{1,n}^2(T)) \leq C \int_{\alpha}^{\alpha+2L_A} |\phi_x(t, 0)|^2 dt, \quad (81)$$

donde $\phi_{0,n}(T)$ y $\phi_{1,n}(T)$ son los coeficientes de Fourier de $\bar{\phi}|_{t=T}$ y $\bar{\phi}_t|_{t=T}$, respectivamente, en la base $(\bar{\theta}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

5.2. Árboles no degenerados

En general, algunos de los coeficientes c_n en la desigualdad (80) podrían anularse. Es por ello que consideramos una clase especial de árboles para los cuales todos esos números son diferentes de cero.

Definición IV.1. – *Diremos que el árbol A es **no degenerado** si los números c_n , definidos para ese árbol por (79), son distintos de cero para todo $n \in \mathbb{N}$. En caso contrario, diremos que el árbol es **degenerado**.*

La siguiente proposición proporciona una caracterización más transparente de los árboles no degenerados.

Proposición IV.13. — *El árbol \mathcal{A} es no degenerado si, y sólo si, los espectros $\sigma_{\bar{\alpha}oi}$, $\sigma_{\bar{\alpha}oj}$ de dos subárboles cualesquiera $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}oi}$, $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}oj}$ de \mathcal{A} con raíz común $\mathcal{O}_{\bar{\alpha}}$ son disjuntos.*

Demostración. Observemos que en realidad tiene lugar un resultado más general: una desigualdad del tipo (80) con coeficientes c_n diferentes de cero, no necesariamente definidos por (79), es imposible para un árbol que tenga dos subárboles con raíz común que compartan un autovalor μ . Realmente, en tal caso, con la ayuda de la Proposición IV.9 puede construirse una solución $\bar{\phi}$ de (7)-(11) que satisfaga $\phi_x(t, 0) \equiv 0$. Con esto, una desigualdad del tipo (80) daría

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n^2 (\lambda_n^2 \phi_{0,n}^2 + \phi_{1,n}^2) \leq 0,$$

lo cual es falso, pues $\bar{\phi}$ no es idénticamente igual a cero.

Para la afirmación inversa procedemos por reducción al absurdo. Probaremos que si $c_n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y dos subárboles cualesquiera de \mathcal{A} con raíz común tienen espectros disjuntos entonces, $d_{\bar{\alpha}}(\lambda_n) = 0$ para todo $\bar{\alpha} \in \mathcal{J}$. En particular, $d(\lambda_n) = 0$, lo que contradiría el hecho de que $d(\lambda_n) = 1$.

Notemos inicialmente, que esta propiedad es inmediata para los nodos exteriores ya que, de acuerdo a la definición (79),

$$c_n \geq |d_{\bar{\alpha}}(\lambda_n)|,$$

para todo $\bar{\alpha} \in \mathcal{J}_s$.

Para los nodos interiores seguiremos un argumento recursivo: probaremos que si $\bar{\alpha} \in \mathcal{J}_M$ y $d_{\bar{\alpha}o\beta}(\lambda_n) = 0$ para todo $\beta = 1, \dots, m_{\bar{\alpha}}$ entonces, $d_{\bar{\alpha}}(\lambda_n) = 0$.

En efecto, tenemos que, para cada $\beta = 1, \dots, m_{\bar{\alpha}}$,

$$d_{\bar{\alpha}o\beta}(\lambda_n) = d_{\bar{\alpha}}(\lambda_n) \prod_{i \neq \beta} q_{\bar{\alpha}oi}(\lambda_n). \quad (82)$$

Supongamos que $d_{\bar{\alpha}}(\lambda_n) \neq 0$. Entonces, (82) implica

$$\prod_{i \neq 1} q_{\bar{\alpha}oi}(\lambda_n) = 0;$$

por lo que existe algún $i^* \neq 1$ tal que

$$q_{\bar{\alpha}oi^*}(\lambda_n) = 0. \quad (83)$$

Pero entonces, de las igualdades $d_{\bar{\alpha}oi^*}(\lambda_n) = 0$ y (82) resulta que existe $j^* \neq i^*$ que también satisface

$$q_{\bar{\alpha}oj^*}(\lambda_n) = 0. \quad (84)$$

Sin embargo, las igualdades (83) y (84) permiten asegurar, en virtud de la Proposición IV.11, que en tal caso, $\mu_n = \lambda_n^2$ sería un autovalor común de los subárboles $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}oi^*}$ y $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}oj^*}$, que evidentemente tienen la misma raíz $\mathcal{O}_{\bar{\alpha}}$. Pero el árbol \mathcal{A} se ha escogido de modo que esto sea imposible. Así, $d_{\bar{\alpha}}(\lambda_n) = 0$. Esto completa la demostración de la proposición. \square

Observación IV.8. – De acuerdo a la proposición anterior, si los espectros de dos de los subárboles de \mathcal{A} con raíz común tienen intersección no vacía, la desigualdad (80) degenera; no podemos recuperar información sobre los coeficientes de Fourier $\phi_{0,n}$, $\phi_{1,n}$ de los datos iniciales de $\bar{\phi}$ a partir de la observación de $\phi_x(t, 0)$, para aquellos valores de n tales que $c_n = 0$. Sin embargo, como se ha indicado en la demostración de la proposición, este hecho no es consecuencia de la técnica empleada para la obtención de la desigualdad (80), pues para los árboles degenerados no es cierta ninguna desigualdad del tipo (80) con coeficientes c_n distintos de cero. Por esto, el Teorema IV.2 es exacto en el siguiente sentido: proporciona la desigualdad (80) siempre que una desigualdad de este tipo existe.

Corolario IV.2 (Propiedad de continuación única). – Si el árbol \mathcal{A} es no degenerado y $\bar{\phi}$ es una solución de (7)-(11) tal que $\phi_x(t, 0) = 0$ para casi todo $t \in [0, 2L_{\mathcal{A}}]$ entonces, $\bar{\phi} \equiv 0$.

Observación IV.9. – Combinando las Proposiciones IV.12(ii) y IV.13, obtenemos una caracterización alternativa de los árboles no degenerados: \mathcal{A} es no degenerado si, y sólo si,

$$|p(\lambda)|^2 + |q(\lambda)|^2 \neq 0,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposición IV.14. – Si el árbol \mathcal{A} es no degenerado entonces, todos sus autovalores son simples.

Demostración. Si λ_n^2 es un autovalor de un árbol no degenerado entonces, de acuerdo a la Proposición IV.11 y la Observación IV.9,

$$q(\lambda_n) = 0, \quad p(\lambda_n) \neq 0.$$

Por consiguiente, si $\bar{\theta}_n$ es una autofunción de \mathcal{A} correspondiente a λ_n^2 , la fórmula (66) da

$$\theta^{\bar{\alpha}}(0) = \frac{n(\lambda_n)}{i\lambda_n p(\lambda_n)} \theta_x(0), \quad \theta_x^{\bar{\alpha}}(0) = \frac{-l(\lambda_n)}{p(\lambda_n)} \theta_x(0).$$

Así, $\bar{\theta}_n$ se determina, salvo el factor constante $\theta_x(0)$, de manera única. \square

Observación IV.10. – Sea $(\tilde{\mu}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión estrictamente creciente formada por los autovalores μ_n de un árbol sin tener en cuenta sus multiplicidades. En el Capítulo V probaremos que $\tilde{\mu}_n$ satisface $\mu_n^N \leq \tilde{\mu}_n \leq \mu_n^D$, para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $(\mu_n^D)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(\mu_n^N)_{n \in \mathbb{N}}$ son las sucesiones ordenadas de manera creciente formadas por los autovalores distintos de las cuerdas con condiciones de contorno homogéneas de Dirichlet o Neumann, respectivamente. Este hecho permitirá probar que una desigualdad del tipo (80) es imposible para $T < 2L_{\mathcal{A}}$ (ver el Teorema V.1). Más aún, en este caso el sistema (1)-(5) no es aproximadamente controlable y por ello, tampoco espectralmente..

5.3. Sobre el tamaño del conjunto de los árboles no degenerados

Ahora proporcionaremos información sobre el tamaño del conjunto de los árboles no degenerados. Resulta que casi todos los árboles con la misma estructura son no degenerados en el sentido de una medida, definida de manera natural sobre el conjunto de árboles con esa estructura.

Seamos más precisos. Diremos que dos árboles son *topológicamente equivalentes* si sus aristas pueden ser numeradas con el mismo conjunto de multi-índices. Esto significa que los árboles equivalentes pueden diferir sólo en las longitudes de sus cuerdas. En particular, dos árboles equivalentes tienen el mismo número de aristas y vértices. Las clases de árboles topológicamente equivalentes serán llamadas *configuraciones topológicas*.

Fijemos una configuración topológica Σ con d aristas. Supondremos que en el conjunto de los índices \mathcal{J} para los elementos de los árboles que pertenecen a Σ , se ha definido un criterio de ordenamiento y usaremos la notación $\langle \mathcal{A} \rangle$ para el correspondiente conjunto ordenado de las longitudes de las aristas de $\mathcal{A} \in \Sigma$.

Entonces, Σ puede identificarse con $(\mathbb{R}_+)^d$ por medio de la aplicación canónica $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^d$ definida por

$$\pi(\mathcal{A}) = \langle \mathcal{A} \rangle \in \mathbb{R}^d.$$

Sea μ_Σ la medida inducida en Σ por la medida de Lebesgue de \mathbb{R}^d a través de π . Esto es, si $B \subset \Sigma$ entonces,

$$\mu_\Sigma(B) = m_d(\pi(B)),$$

donde m_d es la medida usual de Lebesgue en \mathbb{R}^d .

Tiene lugar

Proposición IV.15. – *Dada una configuración topológica Σ , casi todos los árboles (en el sentido de la medida μ_Σ) con esa configuración topológica son no degenerados.*

Demostración. Denotemos por $D_{\bar{\alpha}}^{i,j} \subset \Sigma$ el conjunto de aquellos árboles \mathcal{A} , tales que sus subárboles $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}oi}$ y $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}oj}$ son ambos no degenerados y tienen un autovalor en común. Entonces, el conjunto $\Sigma_{deg} \subset \Sigma$ formado por los árboles degenerados puede descomponerse como

$$\Sigma_{deg} = \bigcup_{\bar{\alpha} \in \mathcal{J}_M} \bigcup_{i,j=1}^{m_{\bar{\alpha}}} D_{\bar{\alpha}}^{i,j}. \quad (85)$$

Nuestro objetivo es probar que $\mu_\Sigma(D_{\bar{\alpha}}^{i,j}) = 0$, para todos los $\bar{\alpha} \in \mathcal{J}_M$, $i, j = 1, \dots, m_{\bar{\alpha}}$, $i \neq j$. Este hecho, en vista de (85), implicará $\mu_\Sigma(\Sigma_{deg}) = 0$. En lo sucesivo consideraremos que $\bar{\alpha}$, i y j están fijos.

La idea de la demostración es simple. Fijamos un árbol \mathcal{B} cuya estructura¹ coincide con la de $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}oi} \vee \mathcal{A}_{\bar{\alpha}oj}$ (veáse la Observación IV.4) y lo extendemos (es decir, añadimos aristas) a un árbol $\mathcal{A} \in D_{\bar{\alpha}}^{i,j}$. De acuerdo a la Observación IV.4, esto equivale a escoger el nodo $\mathcal{O}_{\bar{\alpha}}$ de $\mathcal{A} \in \Sigma$ en un punto de una cuerda de \mathcal{B} donde alguna autofunción de \mathcal{B} se anula (precisamente, en aquella cuerda de \mathcal{B} , donde éste debe estar situado para que la estructura del árbol obtenido sea la de Σ). Una vez que se ha escogido $\mathcal{O}_{\bar{\alpha}}$, las longitudes de las restantes aristas de \mathcal{A} pueden tomarse arbitrariamente.

Observemos que podemos asumir que no hay dos autofunciones (no idénticamente nulas) de \mathcal{B} que se anulan idénticamente en la arista que contiene a $\mathcal{O}_{\bar{\alpha}}$, pues en caso contrario, uno de los subárboles $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}oi}$ ó $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}oj}$ del árbol \mathcal{A} , obtenido según este procedimiento, sería degenerado y por ello,

¹Es decir, \mathcal{B} es topológicamente equivalente a $\mathcal{A}_{\bar{\alpha}oi} \vee \mathcal{A}_{\bar{\alpha}oj}$.

$\mathcal{A} \notin D_{\bar{\alpha}}^{i,j}$. Esta suposición implica que todas las autofunciones de \mathcal{B} son simples y por ello, el vértice $\mathcal{O}_{\bar{\alpha}}$ debe ser escogido en un conjunto de puntos, que es, a lo sumo numerable.

Así, hemos obtenido, luego de algún reordenamiento si fuese necesario, que el conjunto $\pi(D_{\bar{\alpha}}^{i,j})$ está contenido en un conjunto de la forma

$$\left\{ (h_1, h_2, \dots, h_d) \in (\mathbb{R}_+)^d : h_1 + h_2 = h, \quad h_1 \in \mathbf{N}(h, h_3, \dots, h_d) \right\}, \quad (86)$$

donde $\mathbf{N}(h, h_3, \dots, h_d)$ es un conjunto numerable que depende sólo de h y h_3, \dots, h_d .

Es fácil ver, usando, por ejemplo, el teorema de Fubini, que un conjunto definido por (86) tiene medida d -dimensional de Lebesgue igual a cero. Así, lo mismo será cierto para $\pi(D_{\bar{\alpha}}^{i,j})$ y por ello $\mu_{\Sigma}(D_{\bar{\alpha}}^{i,j}) = 0$. Esto completa la demostración. \square

Corolario IV.3. – *El conjunto $\Sigma \setminus \Sigma_{deg}$ de los árboles no degenerados es denso en Σ provisto de la métrica inducida en Σ por la métrica usual de \mathbb{R}^d a través de π .*

Observación IV.11. – *El conjunto Σ_{deg} , aunque es pequeño en el sentido de la medida μ_{Σ} , es denso en Σ . Basta ver que, si dos aristas de un árbol con un vértice común y el otro exterior, tienen longitudes racionalmente dependientes entonces, el árbol es degenerado.*

6. Consecuencias relativas a la controlabilidad

Reuniendo los resultados de las secciones precedentes obtenemos la siguiente caracterización de las propiedades de controlabilidad de los árboles.

Teorema IV.3. – *Sean \mathcal{A} un árbol y $T > 0$. Entonces,*

a) *Si $T \geq 2L_{\mathcal{A}}$ las propiedades*

- 1) *el sistema (1)-(6) es espectralmente controlable en tiempo T ;*
- 2) *el sistema (1)-(6) es aproximadamente controlable en tiempo T ;*
- 3) *\mathcal{A} es no degenerado;*
- 4) *dos subárboles cualesquiera de \mathcal{A} con raíz común tienen espectros disjuntos;*

son equivalentes y, cuando son ciertas, todos los estados iniciales del espacio \mathcal{W} , definido por

$$\mathcal{W} = \left\{ (\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in V \times H' : \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{c_n^2} \left(|u_n^0|^2 + \frac{1}{\mu_n} |u_n^1|^2 \right) < \infty \right\},$$

donde los pesos c_n están definidos por (79), son controlables en tiempo T . Además, estas propiedades son válidas para casi todo árbol topológicamente equivalente a \mathcal{A} .

b) *Si $T < 2L_{\mathcal{A}}$ la propiedad de controlabilidad espectral es falsa, independientemente de si el árbol es degenerado o no.*

Demostración. La afirmación a) resulta de las implicaciones:

1) \Rightarrow 2). Es un hecho general, pues $Z \times Z$ es denso en $H \times V'$ y por ello, la controlabilidad espectral es un caso particular de controlabilidad aproximada.

2) \Rightarrow 3). Resulta del hecho, indicado en la Proposición IV.13 y la Observación IV.8, que para los árboles degenerados existen autofunciones no nulas que se anulan idénticamente sobre la cuerda que contiene la raíz. Estas autofunciones no poseen la propiedad de continuación única desde la raíz.

3) \Rightarrow 4). Ha sido demostrado en la Proposición IV.13.

4) \Rightarrow 1). Es también consecuencia de la Proposición IV.13. Si dos subárboles cualesquiera de \mathcal{A} con raíz común tienen espectros disjuntos, existe una constante positiva C , tal que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n^2 (\lambda_n^2 \phi_{0,n}^2 + \phi_{1,n}^2) \leq C \int_0^{2L_{\mathcal{A}}} |\phi_x(t, 0)|^2 dt,$$

para toda solución $\bar{\phi}$ de (7)-(12) con estado inicial $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in V \times H$, donde todos los coeficientes c_n son distintos de cero. Esto implica que el espacio de datos iniciales

$$\mathcal{W} = \left\{ (\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in V \times H' : \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{c_n^2} \left(|u_n^0|^2 + \frac{1}{\mu_n} |u_n^1|^2 \right) < \infty \right\}$$

es controlable en cualquier tiempo $T \geq 2L_{\mathcal{A}}$. En particular, también será controlable $Z \times Z$.

La afirmación b) es cierta en el caso general de redes arbitrarias, cuya estructura no es necesariamente la de un árbol. Se demostrará en el Teorema V.1. \square

7. Observabilidad y controlabilidad simultánea de redes

Los resultados obtenidos en las secciones previas nos permiten considerar el problema de la controlabilidad desde un nodo exterior para varias redes en forma de árbol (un número finito) que deben ser controladas simultáneamente, es decir, se utiliza la misma función de control para controlar todas las redes.

Sean $\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^R$ los árboles asociados a las redes controladas. Para los elementos de la red cuyo grafo es \mathcal{A}^r usaremos las mismas notaciones que en las secciones precedentes, pero les añadiremos el superíndice r . Así, la solución de (1)-(6) para el árbol \mathcal{A}^r (en lo sucesivo nos referiremos brevemente a este problema como $(1)_r$ -(6) $_r$) se denota por \bar{u}^r y los espacios V y H construidos para ese árbol, por V^r y H^r .

Definimos el espacio de Hilbert

$$\mathbf{W} = \prod_{r=1}^R V^r \times H^r,$$

provisto de la estructura hilbertiana producto de las de $V^r \times H^r$. Los elementos de \mathbf{W} serán llamados *estados simultáneos*.

Diremos que el estado simultáneo $\bar{w} \in \mathbf{W}$, es *controlable en tiempo T* si es posible encontrar una función de control $v \in L^2(0, T)$ tal que las soluciones \bar{u}^r de $(1)_r$ -(6) $_r$ con estados iniciales $(\bar{u}_0^r, \bar{u}_1^r)$ (las componentes de \bar{w}) y $v^r = v$ verifican

$$\bar{u}^r(T, x) = \bar{u}^r(T, x) = \bar{0},$$

para todo $r = 1, \dots, R$.

Usando una vez más el HUM, el problema de caracterizar los estados simultáneos controlables se reduce al estudio de desigualdades de observabilidad para los sistemas homogéneos correspondientes. En efecto, supongamos que existen números c_n^k , $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, \dots, R$, distintos de cero tales, que para todo k la desigualdad

$$\int_0^T \left| \sum_{r=1}^R u_x^r(0, t) \right|^2 dt \geq \sum_{n \in \mathbf{Z}_+} (c_n^k)^2 \left(\mu_n^k |u_{0,n}^k|^2 + |u_{1,n}^k|^2 \right), \quad (87)$$

es cierta para todos los estados iniciales simultáneos $\bar{w} \in \mathbf{W}$, donde $(u_{0,n}^r)$ y $(u_{1,n}^r)$ son las sucesiones de los coeficientes de Fourier de las componentes \bar{u}_0^r y \bar{u}_1^r del estado inicial en las bases $(\bar{\theta}_n^r)$ de H^r , respectivamente, y \bar{u}^r es la solución de $(1)_r$ - $(6)_r$ con $v^r = 0$. Si definimos el conjunto

$$\mathcal{W}^r = \left\{ (\bar{u}_0^r, \bar{u}_1^r) \in V^r \times (H^r) : \|(\bar{u}_0^r, \bar{u}_1^r)\|_r^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(c_n^r)^2} \left(|u_{0,n}^r|^2 + \frac{1}{\mu_n^r} |u_{1,n}^r|^2 \right) < \infty \right\} \quad (88)$$

entonces, todos los estados iniciales simultáneos $\bar{w} \in \mathcal{W} = \prod_{i=1}^r \mathcal{W}^r$ son controlables en tiempo T .

En particular, si se verifican las desigualdades (87) entonces, los estados iniciales simultáneos $\bar{w} \in \prod_{i=1}^r Z^r \times Z^r$ son controlables (recordemos que Z^r es el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de las autofunciones $\bar{\theta}_n^r$ de \mathcal{A}^r). En este caso, diremos que las redes son *simultáneamente espectralmente controlables*.

Además, el conjunto de los estados simultáneos controlables en tiempo T es denso en \mathbf{W} (cuando esto ocurre decimos que las redes son *simultáneamente aproximadamente controlables en tiempo T*) si, y sólo si, se verifica la siguiente propiedad de continuación única:

$$\sum_{r=1}^R u_x^r(0, t) = 0 \text{ en } L^2[0, T] \text{ implica } (\bar{u}_0^r, \bar{u}_1^r) = (\bar{0}, \bar{0}), \text{ para todo } r = 1, \dots, R. \quad (89)$$

Resulta claro que, si un estado simultáneo es controlable, entonces serán también controlables cada una de las componentes de este estado en sus respectivas redes. Esto implica que, si esperamos que al menos tenga lugar la controlabilidad simultánea aproximada, necesitamos suponer que todos los árboles sobre los que están soportadas las redes son no degenerados.

Por otro lado, si dos de los árboles, digamos \mathcal{A}^1 y \mathcal{A}^2 , tienen un autovalor común entonces, usando el procedimiento de “pegado” descrito en la demostración de la Proposición IV.9, podremos construir soluciones no nulas \bar{u}^r de $(1)_r$ - $(6)_r$, $r = 1, 2$, tales que

$$u_x^1(t, 0) + u_x^2(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por consiguiente, si escogemos datos iniciales iguales a cero en los árboles \mathcal{A}^r , $r = 3, \dots, R$, obtendremos un estado simultáneo de \mathbf{W} para el cual las desigualdades (87) son imposibles y además, la propiedad de continuación única (89) no es cierta.

Por tanto, las condiciones de que los árboles \mathcal{A}^r , $r = 1, \dots, R$, sean no degenerados y sus espectros disjuntos dos a dos, son necesarias para la controlabilidad simultánea aproximada y entonces, también para la espectral. Veremos que estas condiciones son también suficientes.

Tomemos $T^* = \sum_{i=1}^r L^i$. Para cada $k = 1, \dots, R$ definimos el operador

$$\widehat{Q}_k := \prod_{r=1, r \neq k}^R Q^r,$$

donde Q^r es el operador Q correspondiente al árbol \mathcal{A}^r . Notemos que \widehat{Q}_k es un S -operador con $s(\widehat{Q}_k) = T^* - L^k$.

Sea \widehat{q}_k la función asociada a \widehat{Q}_k según la Observación IV.1. Entonces,

$$\widehat{q}_k = \prod_{r=1, r \neq k}^R q^r, \quad (90)$$

donde q^r es la función correspondiente a Q^r .

Proposición IV.16. – Si para un cierto k existen números c_n , $n \in \mathbb{N}$, tales que toda solución de $(1)_k$ - $(6)_k$ con $v^k = 0$ y estado inicial

$$(\bar{u}_0^k, \bar{u}_1^k) = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{0,n}^k \bar{\theta}_n^k, \sum_{n \in \mathbb{N}} u_{1,n}^k \bar{\theta}_n^k \right) \in V^k \times H^k$$

satisface

$$\int_0^{2L^k} |u_x^k(0, t)|^2 dt \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n^2 \left(\mu_n^k |u_{0,n}^k|^2 + |u_{1,n}^k|^2 \right) \quad (91)$$

entonces,

$$\int_0^{2T^*} \left| \sum_{r=1}^R u_x^r(0, t) \right|^2 dt \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n^2 |\widehat{q}_k(\lambda_n^k)|^2 \left(\mu_n^k |u_{0,n}^k|^2 + |u_{1,n}^k|^2 \right), \quad (92)$$

para todo $(\bar{u}_0^r, \bar{u}_1^r) \in V^r \times H^r$, $r = 1, \dots, R$.

Demostración. Como \widehat{Q}_k es un S -operador con $s(\widehat{Q}_k) = T^* - L^k$, usando la Proposición IV.3(i) obtenemos

$$\int_0^{2T^*} \left| \sum_{r=1}^R u_x^i(0, t) \right|^2 dt \geq \int_{T^*-L^k}^{T^*+L^k} |\widehat{Q}_k \sum_{r=1}^R u_x^i(0, t)|^2 dt. \quad (93)$$

Pero, como $Q^r u_x^r(0, t) = 0$, entonces $\widehat{Q}_k \bar{u}^k = 0$ si $r \neq k$. Por tanto, (93) se convierte en

$$\int_0^{2T^*} \left| \sum_{r=1}^R u_x^i(0, t) \right|^2 dt \geq \int_{T^*-L^k}^{T^*+L^k} |\widehat{Q}_k u_x^k(0, t)|^2 dt. \quad (94)$$

Consideramos ahora la función $\bar{\omega} = \widehat{Q}_k \bar{u}$. Como, obviamente, $\bar{\omega}$ es también una solución de $(1)_k$ - $(5)_k$, entonces, de acuerdo a (91) y la Observación IV.7 resulta

$$\int_{T^*-L^k}^{T^*+L^k} |\omega_x(0, t)|^2 dt \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n^2 \left(\mu_n^k \omega_{0,n}^2 + \omega_{1,n}^2 \right). \quad (95)$$

De otra parte, es fácil probar que los coeficientes de Fourier de los datos iniciales de \bar{u} y $\bar{\omega}$ están relacionados por

$$\mu_n^k \omega_{0,n}^2 + \omega_{1,n}^2 = q_k^2(\lambda_n^k) \left(\mu_n^k u_{0,n}^2 + u_{1,n}^2 \right). \quad (96)$$

Finalmente, combinando (94)-(96) y el hecho de que $\omega_x(0, t) = \widehat{Q}_k u_x^k(0, t)$, se obtiene la desigualdad (92). \square

Observemos que si los árboles $\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^R$ son no degenerados tendremos para todo $r = 1, \dots, R$ las desigualdades (91) con coeficientes c_n (dependientes de r) no nulos, que se calculan explícitamente por las fórmulas (79). Entonces, de acuerdo a la Proposición IV.16, tendremos también las desigualdades (87) con coeficientes que se calculan explícitamente:

$$c_n^r = |\widehat{q}_r(\lambda_n^r)|c_n,$$

los cuales son todos distintos de cero siempre que los espectros de dos cualesquiera de los árboles \mathcal{A}^r sean disjuntos, pues $\widehat{q}_r(\lambda_n^r) \neq 0$ para todo $r = 1, \dots, R$ y $n \in \mathbb{N}$. En efecto, si $\widehat{q}_r(\lambda_n^r) = 0$ para algunos r y n entonces, la igualdad (90) implicaría que $q^i(\lambda_n^r) = 0$ para algún $i \neq r$ y con ello, de la Proposición (IV.11), μ_n^r sería un autovalor común de los árboles \mathcal{A}^r y \mathcal{A}^i .

En conclusión, seremos capaces de construir bajo estas hipótesis, un espacio

$$\mathcal{W} = \prod_{r=1}^R \mathcal{W}^r,$$

donde \mathcal{W}^r están definidos por (88), de estados simultáneos controlables en tiempo $2T^*$. En particular,

Corolario IV.4. – *Los árboles $\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^R$ son simultáneamente espectralmente controlables en tiempo T (y entonces en tiempo $2T^*$), si, y sólo si, son espectralmente controlables y sus espectros son disjuntos dos a dos.*

8. Ejemplos

8.1. Red estrellada de n cuerdas

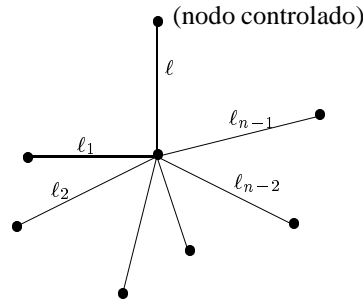
En el marco del estudio de la controlabilidad de redes de cuerdas desde un nodo exterior, la red estrellada de n cuerdas constituye el ejemplo más simple de red con un número arbitrario de cuerdas.

La red estrellada de n cuerdas está formada por n cuerdas conectadas en un punto. Cuando $n = 3$, ésta es la red de tres cuerdas estudiada en el Capítulo III.

Llamemos \mathcal{A} al grafo estrellado que soporta la red. Siguiendo el criterio de numeración introducido en la Sección 1 para árboles, denotaremos por \mathcal{R} el nodo controlado y por \mathcal{O} el nodo interior, aquel donde se unen las cuerdas. La cuerda controlada será e y su longitud ℓ . Cada uno de los restantes $n - 1$ nodos exteriores se denota por \mathcal{O}_i , $i = 1, \dots, n - 1$, la cuerda que lo contiene por e_i y la longitud de esta cuerda por ℓ_i .

Los únicos subárboles de \mathcal{A} son cuerdas e_i , $i = 1, \dots, n - 1$:

$$\mathcal{A}_i = \{e_i\}.$$

FIGURA 3. Red estrellada de n cuerdas

Por ello, los espectros σ_i de los subárboles, coinciden con los autovalores del problema de Dirichlet homogéneo para una cuerda y están dados por

$$\sigma_i = \left\{ \left(\frac{k\pi}{\ell_i} \right)^2 : k \in \mathbb{Z} \right\} \quad i = 1, \dots, n-1.$$

La condición de no degeneración de \mathcal{A} es $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ para cada par i, j con $i \neq j$. Esto significa

$$\frac{k\pi}{\ell_i} \neq \frac{m\pi}{\ell_j}$$

para todos los $k, m \in \mathbb{Z}$, que es equivalente a que el cociente $\frac{\ell_i}{\ell_j}$ sea irracional.

Podemos así concluir, aplicando el Teorema IV.3, que si $L_{\mathcal{A}}$ es la suma de las longitudes de todas las cuerdas de la red entonces, tiene lugar

Corolario IV.5. – *La red estrellada de n cuerdas es aproximadamente controlable en algún tiempo $T \geq 2L_{\mathcal{A}}$ (y entonces espectralmente controlable en tiempo $T = 2L_{\mathcal{A}}$) si, y sólo si, el cociente de dos cualesquiera de las longitudes de las cuerdas no controladas es un número irracional.*

Además, cuando se cumple la condición de no degeneración, todos los estados iniciales $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in V' \times H$ que satisfacen

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{c_k^2} u_{0,k}^2 < \infty, \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{c_k^2 \mu_k} u_{1,k}^2 < \infty, \quad (97)$$

son controlables en tiempo $T = 2L_{\mathcal{A}}$. Recordemos que en (97) $\mu_k = \lambda_k^2$ son los autovalores de la red y los coeficientes c_k están definidos por (79):

$$c_k = \max_{i=1, \dots, n-1} \prod_{j \neq i} |q_j(\lambda_k)|,$$

donde q_j es la función asociada al operador \mathcal{Q}_j del subárbol \mathcal{A}_j .

Pero al ser \mathcal{A}_j la cuerda e_j , el operador \mathcal{Q}_j coincide con ℓ_j^- (véase la Subsección 2.1, donde se calculan los operadores \mathcal{P} y \mathcal{Q} para una cuerda) y entonces, de la Observación IV.1,

$$q_j(\lambda_k) = i \operatorname{sen} \lambda_k \ell_j.$$

En conclusión,

$$c_k = \max_{i=1, \dots, n-1} \prod_{j \neq i} |\operatorname{sen} \lambda_k \ell_j|.$$

En el Apéndice A se dedica especial atención a la función

$$\mathbf{a}(\lambda, \ell_1, \dots, \ell_{n-1}) := \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{j \neq i} |\operatorname{sen} \lambda \ell_j|.$$

Allí se dan condiciones suficientes sobre las longitudes $\ell_1, \dots, \ell_{n-1}$ de modo que se satisfaga, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, una desigualdad del tipo

$$\mathbf{a}(\lambda, \ell_1, \dots, \ell_{n-1}) \geq C\lambda^\alpha.$$

Estas condiciones involucran a ciertos conjuntos \mathbf{B}_ε , $\varepsilon > 0$ que están definidos en el Apéndice A, pág. 170, donde además, se introducen condiciones sobre las longitudes, llamadas condiciones (S).

Como obviamente $nc_k \geq \mathbf{a}(\lambda_k, \ell_1, \dots, \ell_{n-1})$ entonces, aplicando el Corolario A.2 obtenemos

Corolario IV.6. – Si los números $\ell_1, \dots, \ell_{n-1}$ son tales que para todos los valores $i, j = 1, \dots, n-1$, $i \neq j$, los cocientes $\frac{\ell_i}{\ell_j}$ pertenecen a \mathbf{B}_ε entonces, existe una constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$c_k \geq \frac{C_\varepsilon}{\lambda^{n-2+\varepsilon}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, todos los estados iniciales $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in V^{n-2+\varepsilon} \times V^{n-3+\varepsilon}$ son controlables en tiempo $T = 2L_A$.

Bajo condiciones más restrictivas sobre las longitudes de las cuerdas no controladas puede garantizarse la existencia de un subespacio mayor de estados iniciales controlables.

Corolario IV.7. – Si los números $\ell_1, \dots, \ell_{n-1}$ verifican las condiciones (S) entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe una constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$c_k \geq \frac{C_\varepsilon}{\lambda^{1+\varepsilon}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, todos los estados iniciales $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in V^{1+\varepsilon} \times V^\varepsilon$ son controlables en tiempo $T = 2L_A$.

Observación IV.12. – Cuando $n = 3$ los resultados de los Corolarios IV.6 y IV.7 coinciden con el Corolario III.5 II referido a la red de tres cuerdas.

8.2. Control simultáneo de n cuerdas

Este problema es muy similar al anterior, aunque en realidad más simple. Consiste en controlar n cuerdas $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ de longitudes ℓ_1, \dots, ℓ_n , que no están acopladas; sólo que usamos el mismo control para todas. Este es el ejemplo más sencillo de control simultáneo de un número arbitrario de árboles en el sentido de la Sección 7. Notemos que el caso $n = 2$ ha sido estudiado en la Sección 2 del Capítulo III. Como indicamos allí, este es el problema estudiado en [AM2], [AM3], [BKL1], [BKL2], [BKL3], con ayuda del Teorema II.6. En [DZ3] se resolvió este problema usando la técnica que describimos aquí.

El sistema controlado se describe por

$$\begin{cases} u_{tt}^i - u_{xx}^i = 0 & (t, x) \in \mathbb{R} \times [0, \ell_i], \\ u^i(t, \ell_i) = 0, \quad u^i(t, 0) = v(t) & t \in \mathbb{R}, \\ u^i(0, x) = u_0^i(x), \quad u_t^i(0, x) = u_1^i(x) & x \in [0, \ell_i], \end{cases} \quad (98)$$

para $i = 1, \dots, n$.

Observemos que este sistema puede ser interpretado también como una red estrellada de n cuerdas que se controla desde el nodo interior.

De acuerdo al Corolario IV.4 de la Sección 7, las n cuerdas serán simultáneamente espectralmente controlables en algún tiempo T (y entonces en tiempo $T_0 = 2 \sum_{i=1}^n \ell_i$) si, y sólo si, los espectros de dos cuerdas cualesquiera son disjuntos. Esta última condición equivale a que todos los cocientes $\frac{\ell_i}{\ell_j}$ con $i \neq j$ sean números irracionales.

Puede obtenerse más información recurriendo directamente a la Proposición IV.16. En este caso, los árboles controlados son cuerdas: $\mathcal{A}_i = \{\mathbf{e}_i\}$. Se tiene entonces que $\mathcal{Q}_i = \ell_i^-$ y por ello

$$\mathcal{Q}_i = \ell_i^-, \quad \widehat{\mathcal{Q}}_i = \prod_{j \neq i} \mathcal{Q}_j = \prod_{j \neq i} \ell_j^-, \quad |\widehat{q}_i(\lambda)| = \prod_{j \neq i} |\text{sen}(\lambda \ell_j)|.$$

Además, los autovalores (μ_k^i) y autofunciones (θ_k^i) de cada \mathcal{A}_i pueden calcularse explícitamente

$$\mu_k^i = \left(\frac{k\pi}{\ell_i} \right)^2, \quad \theta_k^i(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell_i}} \text{sen}\left(\frac{k\pi}{\ell_i} x\right).$$

Por otra parte, si $(u_{0,k}^i), (u_{1,k}^i)$ denotan las sucesiones de coeficientes de Fourier del estado inicial $(\bar{u}_0^i, \bar{u}_1^i)$ de la cuerda \mathbf{e}_i en la base (θ_k^i) , entonces

$$\int_0^{2\ell_i} |u_x^i(t, 0)|^2 \geq 4 \sum_{k \in \mathbb{N}} (\mu_k^i (u_{0,k}^i)^2 + (u_{1,k}^i)^2), \quad (99)$$

para toda solución de

$$u_{tt}^i - u_{xx}^i = 0, \quad u^i(t, 0) = u^i(t, \ell_i) = 0,$$

con estado inicial $(\bar{u}_0^i, \bar{u}_1^i) \in Z_i \times Z_i$ (esta es la desigualdad de observabilidad de una cuerda desde uno de sus extremos, véase la Proposición II.4).

Aplicando la Proposición IV.16 a las desigualdades (99) resultará que, para cada $i = 1, \dots, n$, se verifican las desigualdades

$$\int_0^{T^*} \left| \sum_{i=1}^n u_x^i(t, 0) \right|^2 dt \geq 4 \sum_{k \in \mathbb{N}} |\widehat{q}_i(\lambda_k^i)|^2 (\mu_k^i (u_{0,k}^i)^2 + (u_{1,k}^i)^2),$$

para todo $i = 1, \dots, n$ y para cada solución de (98) homogéneo con estado inicial simultáneo $(\bar{u}_0^i, \bar{u}_1^i) \in Z_i \times Z_i, i = 1, \dots, n$.

Estas son las desigualdades de observabilidad asociadas al problema (98): si para todo $i = 1, \dots, n$, el estado inicial simultáneo $(u_0^i, u_1^i), i = 1, \dots, n$, satisface

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(u_{0,k}^i)^2}{|\widehat{q}_i(\lambda_k^i)|^2} < \infty, \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(u_{1,k}^i)^2}{|\widehat{q}_i(\lambda_k^i)|^2 \mu_k^i} < \infty,$$

entonces, este estado es controlable en tiempo T^* .

Los números $|\widehat{q}_i(\lambda_k^i)|$ pueden estimarse fácilmente:

$$|\widehat{q}_i(\lambda_k^i)| = \prod_{j \neq i} |\operatorname{sen}(\lambda_k^i \ell_j)| = \prod_{j \neq i} \left| \operatorname{sen}\left(k\pi \frac{\ell_j}{\ell_i}\right) \right| \geq C \prod_{j \neq i} \left\| \left\| k \frac{\ell_j}{\ell_i} \right\| \right\|.$$

(Recordemos que $\|\eta\|$ denota la distancia de η a \mathbb{Z} .)

Se obtienen entonces, teniendo en cuenta los resultados de aproximación diofántica del Apéndice A, condiciones que permiten identificar subespacios del espacio de estados iniciales simultáneos controlables en tiempo $T^* = 2 \sum_{i=1}^n \ell_i$:

Corolario IV.8. – Si los números ℓ_1, \dots, ℓ_n son tales que para todos los valores $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$, los cocientes $\frac{\ell_i}{\ell_j}$ pertenecen a \mathbf{B}_ε entonces, existe una constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|\widehat{q}_i(\lambda_k^i)| \geq \frac{C_\varepsilon}{(\lambda_k^i)^{n-1+\varepsilon}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, el espacio de los estados iniciales simultáneos controlables en tiempo $T^* = 2 \sum_{i=1}^n \ell_i$ contiene a todos los estados simultáneos que verifican

$$(u_0^i, u_1^i) \in V_i^{1+\varepsilon} \times V_i^\varepsilon,$$

para todo $i = 1, \dots, n$, donde V_i^α es el espacio V^r definido en el Capítulo I por (I.17) para la cuerda \mathbf{e}_i , es decir,

$$V_i^\alpha = \left\{ \varphi = \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{\ell_i} x\right) : \sum_{k \in \mathbb{N}} k^{2\alpha} |\varphi_k|^2 < \infty \right\}.$$

Corolario IV.9. – Si los números ℓ_1, \dots, ℓ_n verifican las condiciones (S) entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe una constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|\widehat{q}_i(\lambda_k^i)| \geq \frac{C_\varepsilon}{(\lambda_k^i)^{1+\varepsilon}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, el espacio de los estados iniciales simultáneos controlables en tiempo $T^* = 2 \sum_{i=1}^n \ell_i$ contiene a todos los estados simultáneos que verifican

$$(u_0^i, u_1^i) \in V_i^{1+\varepsilon} \times V_i^\varepsilon,$$

para todo $i = 1, \dots, n$.

Observación IV.13. – El problema del control simultáneo de n cuerdas puede ser estudiado con éxito con ayuda del método de los momentos. Basta notar que la función

$$F(z) = \prod_{i=1}^n \operatorname{sen} z \ell_i$$

es una función generatriz de la sucesión creciente (σ_m) formada por los números λ_k^i , $i = 1, \dots, n$, $k \in \mathbb{N}$ (las raíces cuadradas positivas de los autovalores de las cuerdas).

La función F es acotada, de tipo exponencial $A = \sum_{i=1}^n \ell_i$ y además,

$$|F'(\lambda_k^i)| = \prod_{j \neq i} \left| \operatorname{sen}\left(k\pi \frac{\ell_j}{\ell_i}\right) \right|.$$

Esto permite obtener resultados similares a los de los Corolarios IV.8 y IV.9.

8.3. Un árbol no estrellado

Consideraremos ahora un árbol \mathcal{A} que no es estrellado, con una estructura muy simple como la que se indica en la Figura 4. Supondremos además que $\ell_{1,2} = \ell_2$.

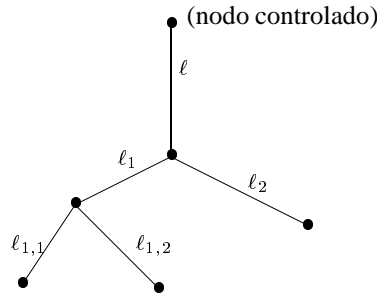


FIGURA 4. Árbol no estrellado

Este árbol tiene cuatro subárboles. Dos de ellos,

$$\mathcal{A}_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_{1,1}, \mathbf{e}_{1,2}\}, \quad \mathcal{A}_2 = \{\mathbf{e}_2\},$$

tienen la raíz común \mathcal{O} otros dos

$$\mathcal{A}_{1,1} = \{\mathbf{e}_{1,1}\}, \quad \mathcal{A}_{1,2} = \{\mathbf{e}_{1,2}\},$$

tienen la raíz común \mathcal{O}_1 .

Los operadores \mathcal{Q} correspondientes a estos subárboles son

$$\mathcal{Q}_2 = \ell_2^-, \quad \mathcal{Q}_{1,1} = \ell_{1,1}^-, \quad \mathcal{Q}_{1,2} = \ell_{1,2}^-,$$

$$\mathcal{Q}_1 = \left(\ell_1^+ \ell_{1,1}^- \ell_{1,2}^- + \ell_1^- \ell_{1,1}^+ \ell_{1,2}^- + \ell_1^- \ell_{1,1}^- \ell_{1,2}^+ \right).$$

Los tres primeros se obtienen inmediatamente, pues los subárboles respectivos son cuerdas. El de \mathcal{A}_1 , el operador \mathcal{Q} de una red de tres cuerdas, ha sido construido en el Capítulo III.

Tendremos que las funciones asociadas a estos operadores son

$$q_2(\lambda) = i \operatorname{sen} \lambda \ell_2, \quad q_{1,1}(\lambda) = i \operatorname{sen} \lambda \ell_{1,1}, \quad q_{1,2}(\lambda) = i \operatorname{sen} \lambda \ell_{1,2},$$

$$q_1(\lambda) = -(\cos \lambda \ell_1 \operatorname{sen} \lambda \ell_{1,1} \operatorname{sen} \lambda \ell_{1,2} + \operatorname{sen} \lambda \ell_1 \cos \lambda \ell_{1,1} \operatorname{sen} \lambda \ell_{1,2} + \operatorname{sen} \lambda \ell_1 \operatorname{sen} \lambda \ell_{1,1} \cos \lambda \ell_{1,2}).$$

Las funciones d correspondientes a los nodos simples no controlados son

$$d_{1,1}(\lambda) = q_2(\lambda)q_{1,2}(\lambda), \quad d_{1,2}(\lambda) = q_2(\lambda)q_{1,1}(\lambda), \quad d_2(\lambda) = q_1(\lambda).$$

Por último,

$$c_k = \max(|d_{1,1}(\lambda_k)|, |d_{1,2}(\lambda_k)|, |d_2(\lambda_k)|).$$

Es muy fácil ahora ver cuándo \mathcal{A} es degenerado. Si $c_k = 0$ entonces,

$$|d_{1,1}(\lambda_k)| = |d_{1,2}(\lambda_k)| = |d_2(\lambda_k)| = 0.$$

Teniendo en cuenta que $\ell_{1,2} = \ell_2$ de esta la última igualdad resulta $\text{sen } \lambda \ell_{1,2} = 0$ y por ello,

$$\text{sen } \lambda \ell_1 \text{ sen } \lambda \ell_{1,1} = 0.$$

Si fuese $\text{sen } \lambda \ell_{1,1} = 0$ (resp., $\text{sen } \lambda \ell_1 = 0$) entonces, necesariamente, $\frac{\ell_{1,1}}{\ell_{1,2}}$ (resp. $\frac{\ell_1}{\ell_{1,2}}$) sería un número racional. Podemos entonces asegurar que \mathcal{A} será no degenerado si los cocientes $\frac{\ell_{1,1}}{\ell_{1,2}}$ y $\frac{\ell_1}{\ell_{1,2}}$ son irracionales.

Además, se pueden dar condiciones sobre las longitudes que garanticen que los coeficientes c_k no sean demasiado pequeños. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es tal que $\lambda_k^\alpha c_k \rightarrow 0$ entonces,

$$\lambda_k^\alpha |d_{1,1}(\lambda_k)| \rightarrow 0, \quad \lambda_k^\alpha |d_{1,2}(\lambda_k)| \rightarrow 0, \quad \lambda_k^\alpha |d_2(\lambda_k)| \rightarrow 0.$$

Es fácil ver que esto implica

$$\lambda_k^{\frac{\alpha}{2}} |\text{sen } \lambda_k \ell_1 \text{ sen } \lambda_k \ell_{1,1}| \rightarrow 0. \quad (100)$$

Podemos aplicar entonces los resultados del Apéndice A para concluir que (100) es imposible si

- los cocientes $\frac{\ell_{1,1}}{\ell_{1,2}}$, $\frac{\ell_1}{\ell_{1,2}}$ y $\frac{\ell_1}{\ell_{1,1}}$ pertenecen a algún \mathbf{B}_ε y $\alpha > 4 + \varepsilon$ ó
- los números $\ell_1, \ell_{1,1}, \ell_{1,2}$ satisfacen las condiciones (S) y $\alpha > 2 + \varepsilon$.

Entonces, en los casos anteriores se tendrá, que existe una constante positiva C tal que para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_k \geq \frac{C}{\lambda_k^\alpha}$$

y por ello, que todos los estados iniciales $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in V^\alpha \times V^{\alpha-1}$ son controlables en tiempo igual al doble de la suma de las longitudes de las cuerdas.

Capítulo V

Algunos resultados de controlabilidad de redes generales

En este capítulo reunimos algunos resultados de carácter general, que no imponen a las redes ninguna configuración topológica específica.

El primero de estos resultados, descrito en la Sección 1, se refiere a la controlabilidad espectral desde un nodo exterior de redes soportadas sobre grafos arbitrarios, que pueden contener ciclos. Se obtiene una condición sobre las autofunciones de la red que garantiza que ésta sea espectralmente controlable en cualquier tiempo mayor que el doble de su longitud total. Para el caso de árboles, esta condición coincide con el criterio de controlabilidad espectral obtenido en el Capítulo IV (Teorema IV.3), salvo por el hecho de allí se obtuvo información también para el tiempo mínimo.

Sin embargo, para redes con estructuras más complejas es difícil obtener una caracterización algebraica general de la condición que garantiza la controlabilidad espectral. Esto requeriría tener en cuenta la estructura específica del grafo.

En la Sección 2 presentamos un resultado de carácter general relativo al control de redes arbitrarias actuando sobre todos sus nodos. Contrariamente a lo que puede parecer a primera vista, tal riqueza de controles continúa sin garantizar en general que la red sea exactamente controlable. Por ello, una vez más hacemos énfasis en la controlabilidad espectral del sistema. Para conseguirla, será suficiente escoger sólo cuatro controles diferentes, aunque éstos se apliquen simultáneamente en muchos nodos.

Por último, la Sección 3 está dedicada a mostrar que el teorema de Schmidt formulado en el Capítulo I (Teorema I.1) es exacto en el sentido de que, si un árbol tiene dos nodos no controlados entonces, la red correspondiente no es exactamente controlable en ningún tiempo $T > 0$.

1. Controlabilidad espectral de redes generales

1.1. Comportamiento asintótico de los autovalores

Los autovalores de una red no pueden calcularse de forma explícita. Recordemos que esto ya era imposible para el caso de la red de tres cuerdas: los autovalores se determinan en ese caso por la

ecuación trascendente $q(\lambda_k) = 0$, donde q está definido por la fórmula (III.52). Sin embargo, resulta simple obtener información sobre su comportamiento asintótico.

La idea es muy sencilla: los autovalores de la red pueden compararse con los autovalores de las cuerdas para los problemas de Dirichlet y Neumann.

Precisemos este hecho. Denotemos por $(\mu_n^{i,D}), (\mu_n^{i,N})$ respectivamente, las sucesiones de autovalores del operador $-\Delta$ sobre la cuerda e_i de longitud ℓ_i con condiciones de contorno de Dirichlet y Neumann homogéneas. Sean $(\mu_n^D), (\mu_n^N)$ las sucesiones estrictamente crecientes formadas por los elementos de los conjuntos

$$\bigcup_{i=1}^M (\mu_n^{i,D}), \quad \bigcup_{i=1}^M (\mu_n^{i,N}),$$

respectivamente.

Entonces, si $(\hat{\mu}_n)$ es la sucesión estrictamente creciente formada por los autovalores de la red, resulta

Proposición V.1. – *Para todo $n \in \mathbb{N}$ tienen lugar las desigualdades*

$$\mu_n^N \leq \hat{\mu}_n \leq \mu_n^D.$$

Esta proposición se demuestra en [Me], [vB3] para el caso general de ecuaciones con coeficientes variables. Para el caso de cuerdas, parece haber sido enunciada por primera vez por Camerer en 1980 (ver referencia [3] en [vB3]), aunque un estudio detallado se realiza también en [N]. Una instructiva aplicación de estas ideas para el caso de redes de vigas se da en [DN].

Observemos que los autovalores $\mu_n^{i,D}, \mu_n^{i,N}$ pueden calcularse de forma explícita:

$$\mu_n^{i,D} = \left(\frac{\pi n}{\ell_i} \right)^2, \quad \mu_n^{i,N} = \left(\frac{\pi(n-1)}{\ell_i} \right)^2 \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Por tanto, $\mu_n^{i,D} = \mu_{n+1}^{i,N}$ y lo mismo será cierto para las sucesiones $(\mu_n^D), (\mu_n^N)$:

$$\mu_n^D = \mu_{n+1}^N.$$

Con esto, la desigualdad de la Proposición V.1 se transforma en

$$\mu_n^N \leq \hat{\mu}_n \leq \mu_{n+1}^N. \quad (2)$$

Si denotamos $\hat{\lambda}_n := \sqrt{\hat{\mu}_n}$ entonces, una consecuencia inmediata de estas desigualdades es la propiedad de separación generalizada

$$\hat{\lambda}_{n+M+1} - \hat{\lambda}_n \geq \sqrt{\mu_{n+N}^N} - \sqrt{\mu_n^N} \geq \pi \min_{i=1, \dots, M} \left(\frac{1}{\ell_i} \right).$$

En efecto, de las igualdades (1) tenemos que, para cada $i = 1, \dots, M$, y cada $k \in \mathbb{N}$

$$\sqrt{\mu_{k+1}^{i,N}} - \sqrt{\mu_k^{i,N}} = \frac{\pi}{\ell_i}.$$

Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$, entre los $M + 1$ números

$$\sqrt{\mu_n^N}, \sqrt{\mu_{n+1}^N}, \dots, \sqrt{\mu_{n+M}^N}$$

hay necesariamente dos que corresponden al mismo valor de i^* de i . Por ello

$$\sqrt{\mu_{n+N}^N} - \sqrt{\mu_n^N} \geq \sqrt{\mu_{k+1}^{i^*,N}} - \sqrt{\mu_k^{i^*,N}} = \frac{\pi}{\ell_{i^*}} \geq \pi \min_{i=1, \dots, M} \left(\frac{1}{\ell_i} \right).$$

De manera similar a como se hizo en el Capítulo III para la red de tres cuerdas, puede obtenerse información asintótica sobre la sucesión $(\hat{\mu}_n)$ a partir de las desigualdades (2). En efecto, si $n(r, (a_n))$ denota la función de conteo de la sucesión (a_n) , es decir, $n(r, (a_n))$ es el número de elementos a_n contenidos en el intervalo $(0, r)$ entonces, de la desigualdad (2) resulta

$$n(r, (\sqrt{\mu_n^N})) - 1 \leq n(r, (\hat{\lambda}_n)) \leq n(r, (\sqrt{\mu_n^N})). \quad (3)$$

Por otra parte,

$$n(r, (\sqrt{\mu_n^N})) = \sum_{i=1}^M n(r, (\sqrt{\mu_n^{i,N}})). \quad (4)$$

Pero $\sqrt{\mu_n^{i,N}} = \frac{\pi(n-1)}{\ell_i}$, por lo que

$$n(r, (\sqrt{\mu_n^{i,N}})) = \left[\frac{r\ell_i}{\pi} \right] + 1$$

(aquí, $[\eta]$ denota la parte entera del número real η). De esta igualdad resulta

$$\frac{r\ell_i}{\pi} \leq n(r, (\sqrt{\mu_n^{i,N}})) \leq \frac{r\ell_i}{\pi} + 1$$

y por ello, a partir de (4),

$$\frac{r}{\pi}L \leq n(r, (\sqrt{\mu_n^N})) \leq \frac{r}{\pi}L + M.$$

Finalmente, sustituyendo esta estimación en (3) obtenemos

$$\frac{r}{\pi}L - 1 \leq n(r, (\hat{\lambda}_n)) \leq \frac{r}{\pi}L + M. \quad (5)$$

Observemos que de las desigualdades (5) resulta que la sucesión $(\hat{\lambda}_n)$ tiene densidad:

$$D(\hat{\lambda}_n) := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, (\hat{\lambda}_n))}{r} = \frac{L}{\pi}. \quad (6)$$

Es posible demostrar (véase, por ejemplo, el Problema 1, Pág. 142 en [Y]) que, para cualquier sucesión (a_n)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, (a_n))}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_n}.$$

Por esta razón, de (6) se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{\lambda}_n}{n} = \frac{\pi}{L}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{\mu}_n}{n^2} = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2;$$

esto es, los autovalores, se comportan asintóticamente como los de una cuerda de longitud L . Esto sugiere, al tener en cuenta que para el control puntual de una cuerda de longitud ℓ el tiempo mínimo de control es 2ℓ , que para el control desde uno de los nodos exteriores de la red el tiempo mínimo posible debe ser igual a $2L$. En el Teorema V.1 probaremos que este hecho es realmente cierto.

Resumiendo los resultados obtenidos hasta ahora tendremos

Proposición V.2. – Si $(\hat{\lambda}_n)$ es la sucesión estrictamente creciente formada por las raíces cuadradas positivas de los autovalores de la red entonces,

1) La función de conteo de $(\hat{\lambda}_n)$ satisface

$$\frac{r}{\pi}L - 1 \leq n(r, (\hat{\lambda}_n)) \leq \frac{r}{\pi}L + M.$$

2) La sucesión $(\hat{\lambda}_n)$ tiene densidad superior

$$D^+(\hat{\lambda}_n) = \frac{L}{\pi}.$$

3) Los números $\hat{\lambda}_n$ están separados en sentido generalizado:

$$\hat{\lambda}_{n+M+1} - \hat{\lambda}_n \geq \pi \min_{i=1, \dots, M} \left(\frac{1}{\ell_i} \right).$$

4) Para todo $T > 2\pi L$ existen números positivos γ_n , tales que

$$\int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \geq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n^2 |c_n|^2,$$

para toda sucesión finita (c_n) .

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{\lambda}_n}{n} = \frac{\pi}{L}$

Notemos que la propiedad 4 resulta de aplicar el Corolario II.5 del Teorema II.6.

Recordemos una noción de la teoría de series de Fourier no armónicas. Sea (λ_n) una sucesión de números reales distintos y denotemos por Θ el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas

$$f(t) = \sum c_n e^{i\lambda_n t}.$$

Se llama *radio de completitud* de (λ_n) al número

$$R(\lambda_n) := \sup \{ r : \Theta \text{ es denso en } C([-r, r]) \}.$$

La información de la Proposición V.2 permite calcular el radio de completitud de la sucesión $(\pm \hat{\lambda}_n)$.

Proposición V.3. – El radio de completitud de la sucesión $(\pm \hat{\lambda}_n)$ es igual a L .

La afirmación es una aplicación inmediata a la sucesión $(\pm \hat{\lambda}_n)$ del Teorema 2.3.1 de [HJ]. El mencionado Teorema 2.3.1 es una consecuencia del conocido teorema de Beurling y Malliavin para el cálculo del radio de completitud de una sucesión en función de su densidad (los detalles pueden encontrarse en el trabajo original de A. Beurling and P. Malliavin [BM]).

En [HJ] se demuestra también la siguiente proposición.

Proposición V.4 (Haraux y Jaffard, [HJ]). – Sea (λ_n) una sucesión de números reales. Entonces se verifican las propiedades

1) Para todo $T > 2R(\lambda_n)$ y para todo $n \in \mathbb{Z}$ existe una constante $C_n > 0$ tal que

$$\int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \geq C_n |a_n|^2, \quad (7)$$

para cualquier sucesión finita (a_n) .

2) Si $T < 2R(\lambda_n)$ para ningún conjunto finito $I \subset \mathbb{Z}$ existe una constante $C_I > 0$ tal que para alguna sucesión finita $(\alpha_n)_{n \in I}$ se satisfaga la desigualdad

$$\int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \geq C_I \left| \sum_{n \in I} \alpha_n a_n \right|^2, \quad (8)$$

para toda sucesión finita (a_n) .

Si aplicamos este resultado a la sucesión $(\pm \hat{\lambda}_n)$, teniendo en cuenta la Proposición V.3, obtenemos

Para cada $T > 2\pi L$ existen números positivos $C_n, n \in \mathbb{Z}$, tales que

$$\int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \geq C_n |a_n|^2,$$

para toda sucesión finita (a_n) .

Este resultado tiene la desventaja con respecto a la propiedad 4) de la Proposición V.2, de que se obtiene de forma no constructiva; mientras que los coeficientes γ_n en la Proposición V.2 4) pueden, en principio, expresarse de manera explícita en función de los autovalores. El interés de este enfoque podría considerarse en este momento, ante todo, de carácter histórico, pues se basa en resultados conocidos desde hace más de una década, mientras que las demostraciones del Teorema II.6 aún no han sido publicadas. Sin embargo, los enunciados listos para ser usados y las demostraciones sencillas contenidas en [HJ], seguirán siendo de referencia en problemas de este tipo.

1.2. Aplicación al control de redes

Los resultados obtenidos sobre la sucesión de autovalores permiten obtener la siguiente información referida al control desde un nodo exterior de redes arbitrarias de cuerdas.

Teorema V.1. – a) Para todo $T > 2L$ las siguientes propiedades del sistema (I.1)-(I.6) son equivalentes

- 1) el sistema es aproximadamente controlable en tiempo T ;
- 2) el sistema es espectralmente controlable en tiempo T ;
- 3) se verifica la propiedad de continuación espectral única: $\omega_x^1(\mathbf{v}_1) \neq 0$ para toda autofunción no nula $\bar{\omega}$.

b) Cuando $T < 2L$ el sistema (I.1)-(I.6) no es espectralmente controlable; más aún, ningún elemento de $Z \times Z$ es controlable en tiempo T .

Demostración. a) Demostraremos que $1) \Rightarrow 3) \Rightarrow 2)$. Esto, junto con la implicación $2) \Rightarrow 1)$ que es inmediata (la controlabilidad espectral es un caso particular de controlabilidad aproximada) daría la afirmación del teorema.

$1) \Rightarrow 3)$. Observemos que si $\varkappa_n = 0$ para algún $n = n_0$ entonces, para la solución de (I.7)-(I.11)

$$\bar{\phi}(t, x) = \cos \lambda_{n_0} t \bar{\theta}_{n_0}(x)$$

se cumpliría $\phi_x^1(t, \mathbf{v}_1) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Para esta solución $\bar{\phi}$ la propiedad de continuación única desde el nodo controlado no es cierta para ningún valor de $T > 0$ y por tanto, el sistema (I.1)-(I.6) no será aproximadamente controlable en ningún tiempo $T > 0$. Así, $1) \Rightarrow 3)$.

$3) \Rightarrow 2)$. Del Capítulo II sabemos que, si se verifica la desigualdad de observabilidad

$$\int_0^T |\phi_x^1(t, \mathbf{v}_1)|^2 dt \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n^2 \left(\mu_n |\phi_{0,n}|^2 + |\phi_{1,n}|^2 \right), \quad (9)$$

para toda solución \bar{u} del sistema homogéneo (I.1)-(I.6) con datos iniciales $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in Z \times Z$ entonces, todos los estados iniciales $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in H \times V'$ que verifican

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{c_n^2} |u_{0,n}|^2 < \infty, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{c_n^2 \mu_n} |u_{1,n}|^2 < \infty \quad (10)$$

son controlables en tiempo T .

Utilizando la fórmula (I.13) para las soluciones de (I.7)-(I.11), la desigualdad (9) se escribe como

$$\int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \varkappa_n \left(\phi_{0,n} \cos \lambda_n t + \frac{\phi_{1,n}}{\lambda_n} \operatorname{sen} \lambda_n t \right) \right|^2 dt \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n^2 \left(\mu_n |\phi_{0,n}|^2 + |\phi_{1,n}|^2 \right), \quad (11)$$

donde $(\phi_{0,n})$ y $(\phi_{1,n})$ son sucesiones finitas y \varkappa_n son los valores de derivadas normales de las autofunciones en el nodo controlado:

$$|\varkappa_n| = \theta_{n,x}^1(\mathbf{v}_1).$$

Si denotamos

$$a_n = \frac{1}{2} \left(\phi_{0,|n|} + \frac{\phi_{1,|n|}}{i\lambda_n} \right),$$

para $n \in \mathbb{Z}_*$, donde $\lambda_n = -\lambda_{-n}$ si $n < 0$, tendremos que

$$\phi_{0,n} = a_n + a_{-n}, \quad \phi_{1,n} = (a_n - a_{-n})i\lambda_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Con estas notaciones la desigualdad (11) se transforma en

$$\int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} a_n \varkappa_{|n|} e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \geq 4 \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n^2 \mu_n |a_n|^2, \quad (12)$$

para toda sucesión finita (a_n) de números complejos, que satisface la propiedad $a_{-n} = \overline{a_n}$.

Observemos ahora que, como la red es tal que ninguna de las autofunciones se anula idénticamente¹ en la cuerda controlada, los autovalores μ_n son todos simples. En efecto, si $\bar{\psi}$ y $\bar{\varphi}$ son dos

¹Esta condición es evidentemente equivalente a que la derivada normal de la autofunción se anule en el nodo controlado, pues, por definición, las autofunciones son iguales a cero en el nodo controlado y satisfacen una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

autofunciones linealmente independientes correspondientes al autovalor μ entonces, la función

$$\bar{\omega} = \varphi_x^1(\mathbf{v}_1)\bar{\psi} - \psi_x^1(\mathbf{v}_1)\bar{\varphi}$$

es también una autofunción, que es no nula por ser $\bar{\psi}$ y $\bar{\varphi}$ linealmente independientes y además

$$\omega_x^1(\mathbf{v}_1) = \varphi_x^1(\mathbf{v}_1)\psi_x^1(\mathbf{v}_1) - \psi_x^1(\mathbf{v}_1)\varphi_x^1(\mathbf{v}_1) = 0,$$

lo que contradice la hipótesis sobre la red.

En estas condiciones tendremos que las sucesiones (λ_n) y $(\hat{\lambda}_n)$ coinciden. Entonces, de la Proposición V.2 4) se obtiene que existen números positivos γ_n tales que

$$\int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} a_n \varkappa_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \geq 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n^2 \varkappa_n^2 |a_n|^2.$$

Así, podemos concluir que la desigualdad (12) se verifica con coeficientes

$$c_n = \frac{\gamma_n |\varkappa_n|}{\sqrt{2}\lambda_n}.$$

Notemos que estos coeficientes son todos distintos de cero, pues la hipótesis de 3) asegura que $\varkappa_n \neq 0$ para todo n . Entonces, serán controlables en tiempo T los estados iniciales definidos por (10) y en particular, aquellos que pertenecen a $Z \times Z$. Esto es, el sistema (I.1)-(I.6) es espectralmente controlable en tiempo T .

b) Sea $I \subset \mathbb{N}$ un conjunto finito. Al aplicar el Corolario II.2, resulta que el estado inicial

$$(\bar{u}_0, \bar{u}_1) = \left(\sum_{n \in I} \alpha_n \bar{\theta}_n, \sum_{n \in I} \beta_n \bar{\theta}_n \right) \in Z \times Z \quad (13)$$

es controlable en tiempo T si, y sólo si, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\int_0^T |\phi_x^1(t, \mathbf{v}_1)|^2 dt \geq C \left(\sum_{n \in I} \alpha_n \phi_{1,n} - \beta_n \phi_{0,n} \right)^2,$$

para toda solución $\bar{\phi}$ de (I.7)-(I.11) con estado inicial $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in Z \times Z$.

Como consecuencia, si el estado inicial (\bar{u}_0, \bar{u}_1) definido por (13) es controlable en tiempo T existe una constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} a_n \varkappa_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt &\geq C \left(\sum_{n \in I} \alpha_n (a_n - a_{-n}) i\lambda_n - \beta_n (a_n + a_{-n}) \right)^2 \\ &= C \left(\sum_{n \in I} (\alpha_n i\lambda_n - \beta_n) a_n + (-\alpha_n i\lambda_n - \beta_n) a_{-n} \right)^2 \\ &= C \left(\sum_{n \in I \cup -I} \rho_n a_n \right)^2, \end{aligned} \quad (14)$$

para toda sucesión finita (a_n) , donde

$$\rho_n = \alpha_{|n|} i\lambda_n - \beta_{|n|}.$$

Por otra parte, si $T < 2L$ entonces, como $R(\lambda_n) = L$ tendremos

$$T < 2R(\lambda_n).$$

Entonces, de la Proposición V.4 2) resulta que es imposible que se verifique una desigualdad del tipo (14). Por ello, el estado inicial (\bar{u}_0, \bar{u}_1) definido por (13) no es controlable en tiempo T si $T < 2L$. \square

Observación V.1. – Cuando $T > 2L$ y la propiedad de controlabilidad espectral única se verifica, si definimos el espacio \mathcal{W} como el completado de $Z \times Z$ con la norma

$$\|(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1)\| := \left\{ \int_0^T |\phi_x^1(t, \mathbf{v}_1)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}},$$

entonces, todos los estados iniciales $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in H \times V'$ tales que $(\bar{u}_1, \bar{u}_0) \in \mathcal{W}'$ (el dual de \mathcal{W}) son controlables en tiempo T .

De acuerdo a la Proposición V.2, el espacio \mathcal{W} contiene a todos los (\bar{u}_1, \bar{u}_0) que satisfacen

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\gamma_n^2 \varkappa_n^2} \left(|u_{0,n}|^2 + \frac{1}{\mu_n} |u_{1,n}|^2 \right) < \infty,$$

donde los coeficientes γ_n se calculan según el Corolario II.5 del Teorema II.6.

Observación V.2. – Cuando $T < 2L$ no sabemos qué ocurre en general con la controlabilidad aproximada del sistema (I.1)-(I.6); posiblemente, no sea suficiente la información disponible sobre las sucesiones (λ_n) y (\varkappa_n) para decidirlo.

Para el problema de las tres cuerdas sí hemos conseguido probar en la Sección 9 del Capítulo III, que siempre que $T < 2L$ la controlabilidad aproximada no tiene lugar. Recordemos que en ese caso fue posible construir explícitamente una solución para la cual la propiedad de continuación única no es válida. Esto puede hacerse también para la red estrellada de n cuerdas.

En [AM2], la falta de controlabilidad aproximada para el sistema de n cuerdas controladas simultáneamente se obtuvo a partir del Corolario II.4. Este enfoque, sin embargo, no es suficiente para el caso de redes no estrelladas controladas desde un nodo exterior, pues no disponemos de información suficiente sobre la sucesión (\varkappa_n) .

Por último, a diferencia del caso cuando la red es un árbol, no sabemos si la controlabilidad espectral tendrá lugar en el tiempo mínimo $T = 2L$.

2. Redes coloreadas

Consideramos ahora una red de N cuerdas sobre la que podemos actuar a través de todos sus nodos.

El movimiento de la red se describe por el sistema

$$\begin{cases} u_{tt}^i - u_{xx}^i = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times [0, \ell_k], \quad i = 1, \dots, N, \\ u^i(t, 0) = v^{k(\mathbf{v}_i^+)}(t) & t \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, N - 1, \\ u^i(t, \ell_i) = v^{k(\mathbf{v}_i^-)}(t) & t \in \mathbb{R}, \\ u^i(0, x) = u_0^i(x), \quad u_t^i(0, x) = u_1^i(x) & x \in [0, \ell_i], \quad i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (15)$$

Aquí, por \mathbf{v}_i^+ , \mathbf{v}_i^- se denotan los nodos inicial (el que corresponde a $x = 0$) y final ($x = \ell_i$), respectivamente. Por $k(\mathbf{v})$ se representa el índice del nodo \mathbf{v} .

El problema (15) está bien planteado para estados iniciales $(u_0^i, u_1^i) \in L^2(0, \ell_i) \times H^{-1}(0, \ell_i)$, $i = 1, \dots, N$, y controles $v^k \in L^2(0, T)$.

Este sistema es considerablemente más propicio de ser controlado que los estudiados anteriormente, pues el número de controles es muy elevado. Como es habitual, diremos que el estado inicial del sistema $(u_0^i, u_1^i) \in L^2(0, \ell_i) \times H^{-1}(0, \ell_i)$, $i = 1, \dots, N$, es controlable en tiempo $T > 0$, si es posible seleccionar los controles $v^k \in L^2(0, T)$ de modo que la solución u^i , $i = 1, \dots, N$, de (15) alcance el reposo en el tiempo T :

$$u^i(T, \cdot) = u_1^i(T, \cdot) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Para cada $i = 1, \dots, M$, introducimos los conjuntos

$$X_i^+ = \{j : \mathbf{v}_i^+ \in \mathbf{e}_j\}, \quad X_i^- = \{j : \mathbf{v}_i^- \in \mathbf{e}_j\},$$

que son, respectivamente, los conjuntos de los índices de las cuerdas que inciden, en los nodos inicial y final de la cuerda \mathbf{e}_i .

La aplicación del HUM garantiza que si, para cada $i = 1, \dots, M$ existe una sucesión de números reales no nulos tales que

$$\int_0^T (|\sum_{j \in X_i^+} \partial_n \phi^j(t, \mathbf{v}_i^+)|^2 + |\sum_{j \in X_i^-} \partial_n \phi^j(t, \mathbf{v}_i^-)|^2) dt \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} (c_n^i)^2 (\mu_n^i (\phi_{0,n}^i)^2 + (\phi_{1,n}^i)^2),$$

para toda solución $\bar{\phi} = (\phi^1, \dots, \phi^N)$ del problema (15) homogéneo entonces, los estados iniciales (u_0^i, u_1^i) , $i = 1, \dots, N$, que verifican

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(u_{0,n}^i)^2}{(c_n^i)^2} < \infty, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(u_{1,n}^i)^2}{\mu_n^i (c_n^i)^2} < \infty,$$

son controlables en tiempo T .

Notemos que el problema homogéneo corresponde a N ecuaciones de ondas con condiciones de Dirichlet homogéneas desacopladas. El hecho de que en el sistema controlado (15) las ecuaciones estaban acopladas en los nodos, se refleja ahora en que la magnitud “observada” en cada nodo es la suma de las derivadas normales de las soluciones que corresponden a las cuerdas que se unen en ese nodo. Observemos que este es un problema local, en el sentido de que en la desigualdad de observabilidad para la cuerda \mathbf{e}_i sólo intervienen las soluciones correspondientes a las cuerdas que tienen nodos en común con \mathbf{e}_i .

Recordemos ahora, que para el problema de control simultáneo de n cuerdas hemos probado que, si T_i^+ y T_i^- son las sumas de las longitudes de todas las cuerdas que son incidentes a los nodos \mathbf{v}_i^+ y \mathbf{v}_i^- , respectivamente, entonces se verifican las desigualdades

$$\int_0^{2T_i^+} |\sum_{j \in X_i^+} \partial_n \phi^j(t, \mathbf{v}_i^+)|^2 dt \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} (c_n^i)^2 (\mu_n^i (\phi_{0,n}^i)^2 + (\phi_{1,n}^i)^2), \quad (16)$$

$$\int_0^{2T_i^-} |\sum_{j \in X_i^-} \partial_n \phi^j(t, \mathbf{v}_i^-)|^2 dt \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} (c_n^i)^2 (\mu_n^i (\phi_{0,n}^i)^2 + (\phi_{1,n}^i)^2), \quad (17)$$

con coeficientes¹ que pueden calcularse de forma explícita, siempre que los cocientes $\frac{\ell_p}{\ell_i}$ sean números irracionales para todos los $p, q \in X_i^+$ en el caso de (16) y $p, q \in X_i^-$ para (17).

Como consecuencia, podemos indicar condiciones sobre las longitudes de las cuerdas, precisamente aquellas dadas para el control simultáneo de n cuerdas, que garanticen la controlabilidad del sistema (15) en espacios explícitos. En particular, bajo las hipótesis de irracionalidad mencionadas, el sistema será espectralmente controlable en cualquier tiempo T^* que satisfaga

$$T^* \geq 2 \max \{T_i^+, T_i^-\} \quad i = 1, \dots, M.$$

Pretendemos ahora reducir el número de funciones utilizadas para controlar el sistema (15) aplicando el mismo control en varios nodos. Supongamos que en el conjunto $\{1, 2, \dots, N\}$ de los índices para los nodos se ha establecido una partición

$$\{1, 2, \dots, N\} = K_1 \cup \dots \cup K_r,$$

de modo que no exista ninguna cuerda tal que sus dos nodos pertenezcan al mismo conjunto K_k . Diremos que dos nodos son equivalentes si sus índices pertenecen a la misma clase. Una manera simple de representar esta partición es suponer que los nodos de la red se han coloreado usando r colores distintos de manera que ninguna cuerda tenga sus dos extremos del mismo color. Serán equivalentes los nodos del mismo color.

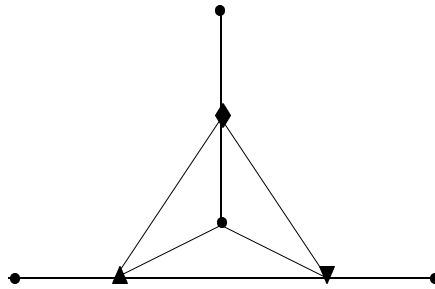


FIGURA 1. Red con nodos coloreados

En la Figura 1 se representa una red con nodos coloreados con cuatro colores que se han indicado con los símbolos $\blacklozenge, \blacktriangle, \blacktriangledown, \bullet$. En ese caso, cuatro es el menor número de colores necesarios para que no haya dos nodos del mismo color.

Consideramos que en el sistema (15) se añade la restricción adicional que $v_p = v_q$ si los nodos \mathbf{v}_p y \mathbf{v}_q son del mismo color.

No es difícil ver que esto conduce al estudio de la misma desigualdad de observabilidad que antes, sólo que los conjuntos X_i^+ y X_i^- deben ser reemplazados por

$$X_i^+ = \bigcup_{\mathbf{v} \sim \mathbf{v}_i^+} \{j : \mathbf{v} \in \mathbf{e}_j\}, \quad X_i^- = \bigcup_{\mathbf{v} \sim \mathbf{v}_i^-} \{j : \mathbf{v} \in \mathbf{e}_j\},$$

¹Los coeficientes c_n^i de las igualdades (16) y (17) son distintos. Los hemos designado con los mismos símbolos para evitar complicar aún más las notaciones.

(la notación $\mathbf{v} \sim \mathbf{v}'$ indica que los nodos \mathbf{v} y \mathbf{v}' son equivalentes) que son los conjuntos de los índices de las cuerdas que tienen algún nodo del mismo color que el nodo inicial de \mathbf{e}_i y del nodo final de \mathbf{e}_i , respectivamente.

Podemos concluir que, si las longitudes de las cuerdas satisfacen $\frac{\ell_p}{\ell_q} \notin \mathbb{Q}$ para todos los índices $p \neq q$ tales que alguno de los nodos de la cuerda \mathbf{e}_p es del mismo color que uno de \mathbf{e}_q entonces, el sistema (15) es espectralmente controlable en cualquier tiempo

$$T \geq 2 \max_{k=1, \dots, r} (T_k),$$

donde T_k es la suma de las longitudes de todas las cuerdas que tienen algún nodo de color k .

Para evitar el detalle de las notaciones, sustituiremos las condiciones anteriores por las siguientes, claramente más restrictivas,

- 1) los cocientes $\frac{\ell_p}{\ell_q}$ para todos los índices $p \neq q$ son números irracionales;
- 2) T es mayor o igual a dos veces la suma de las longitudes de todas las cuerdas de la red.

Bajo estas hipótesis, el número mínimo de controles necesarios para lograr la controlabilidad espectral de la red, sería igual al número mínimo de colores que son necesarios para colorear su grafo de modo que ninguna arista tenga sus vértices del mismo color. Este es el problema clásico sobre coloración de grafos (que es equivalente al de colorear un mapa). Su solución, el célebre Teorema de los Cuatro Colores asegura que si el grafo es plano, cuatro colores son suficientes. Este hecho, aparentemente evidente, se resistió durante mucho tiempo a una demostración rigurosa. Actualmente, sólo ha podido ser demostrado con la ayuda de ordenadores. Los detalles pueden consultarse en [AH].

Observemos ahora que en realidad, hemos obtenido dos desigualdades para cada una de las cuerdas: (16) y (17), cuando sólo una de ellas bastaría para demostrar la desigualdad de observabilidad correspondiente. Es por ello, que podemos entonces asumir que el control asociado a uno de los colores es igual a cero; en realidad no es necesario para controlar el sistema y los nodos donde está aplicado pueden dejarse fijos.

En resumen, hemos obtenido

Proposición V.5. — *Si la red está soportada por un grafo plano y las longitudes de sus cuerdas y T satisfacen las condiciones (1) y (2) entonces, son suficientes cuatro funciones diferentes para conseguir que el sistema (15) sea espectralmente controlable en tiempo T . Además, una de estas funciones puede tomarse idénticamente igual a cero.*

Observación V.3. — *La condición de que los extremos de cada cuerda sean de colores distintos es natural si se espera al menos la controlabilidad aproximada, pues es imposible controlar una cuerda usando el mismo control en ambos extremos. En efecto, la desigualdad de observabilidad asociada a este problema sería*

$$\int_0^T |\phi_x(t, 0) - \phi_x(t, \ell)|^2 dt \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n^2 (\mu_n \phi_{0,n}^2 + \phi_{1,n}^2),$$

donde ϕ es la solución de la ecuación de ondas $\phi_{tt} - \phi_{xx} = 0$ con condiciones de contorno $\phi(t, 0) = \phi(t, \ell) = 0$. Basta tomar

$$\phi(t, x) = \cos \frac{2\pi}{\ell} t \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\ell} x,$$

para ver que esta desigualdad no puede ser cierta. Más aún, en este ejemplo $\phi_x(t, 0) - \phi_x(t, \ell) = 0$, por lo que la controlabilidad aproximada tampoco tiene lugar.

3. Exactitud del Teorema de Schmidt

En esta sección demostraremos que el Teorema I.1 del Capítulo I es exacto en el sentido de que si en un árbol hay, al menos, dos nodos exteriores que no se controlan entonces, existen estados iniciales de la red $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in H \times V'$ que no son controlables en ningún tiempo T .

La demostración está basada en el hecho de que si hay dos nodos sin controlar entonces puede encontrarse un camino simple formado por cuerdas consecutivas que conecta estos nodos. Si existiese $T > 0$ tal que todo estado inicial $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in H \times V'$ es controlable en tiempo T entonces, se obtendría la controlabilidad exacta del sistema de cuerdas conectadas en serie con controles en los puntos de conexión, considerado en la Subsección 3.1. Es por ello, que nos dedicamos a estudiar este último sistema. Demostraremos que en realidad no es exactamente controlable nunca, independientemente del valor de T o de las longitudes de las cuerdas. De ello resulta que tampoco será exactamente controlable la red con dos o más nodos no controlados.

3.1. Control simultáneo de cuerdas conectadas en serie

Supongamos que tenemos N cuerdas de longitudes ℓ_1, \dots, ℓ_N que están conectadas en serie y que en cada uno de los puntos de conexión actúa un control que determina su desplazamiento.

El movimiento de las cuerdas se describe por el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} u_{tt}^k - u_{xx}^k = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times [0, \ell_k], \quad k = 1, \dots, N, \\ u^k(t, \ell_k) = u^{k+1}(t, 0) = v^k(t) & t \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, N-1, \\ u^1(t, 0) = u^N(t, \ell_N) = 0 & t \in \mathbb{R}, \\ u^k(0, x) = u_0^k(x), \quad u_t^k(0, x) = u_1^k(x) & x \in [0, \ell_k], \quad k = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (18)$$

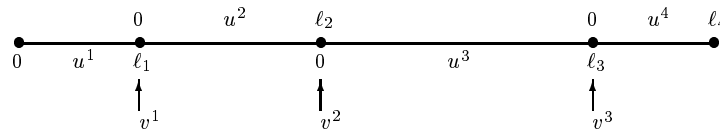


FIGURA 2. Cuatro cuerdas conectadas en serie con controles v^1, v^2, v^3 en los puntos de conexión

Para $T > 0$, este problema está bien planteado para estados iniciales $(u_0^k, u_1^k) \in L^2(0, \ell_k) \times H^{-1}(0, \ell_k)$, $k = 1, \dots, N$, y controles $v^k \in L^2(0, T)$. El problema homogéneo correspondiente lo estará para $(u_0^k, u_1^k) \in H_0^1(0, \ell_k) \times L^2(0, \ell_k)$.

Observemos que este problema es un caso particular del problema de redes coloreadas estudiado en la Sección 2. Podemos entonces indicar condiciones sobre las longitudes que garanticen que el sistema sea espectralmente controlable. Sin embargo, ahora nuestro objetivo es probar la existencia de datos iniciales $(u_0^k, u_1^k) \in L^2(0, \ell_k) \times H^{-1}(0, \ell_k)$, $k = 1, \dots, N$, que no son controlables en ningún tiempo $T > 0$, independientemente de cuáles sean las longitudes de las cuerdas.

Aplicando nuevamente el HUM resulta que el sistema (18) es exactamente controlable en tiempo T si, y sólo si, existe una constante $C > 0$ tal que las soluciones $\bar{\phi} = (\phi^1, \dots, \phi^N)$ del sistema homogéneo, que en este caso corresponde a N ecuaciones de ondas con condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas, verifican

$$\sum_{k=1}^{N-1} \int_0^T \left| \phi_x^k(t, \ell_k) - \phi_x^{k+1}(t, 0) \right|^2 dt \geq C \sum_{k=1}^N \mathbf{E}_k, \quad (19)$$

para $k = 1, \dots, N$, donde \mathbf{E}_k es la energía de la solución ϕ^k , que se conserva.

Notemos que el hecho de que la desigualdad (19) pueda cumplirse depende de las longitudes de las cuerdas. En efecto, si por ejemplo, todas las longitudes son iguales a ℓ entonces, las funciones

$$\phi^k(t, x) = (-1)^k \operatorname{sen} \frac{t\pi}{\ell} \operatorname{sen} \frac{x\pi}{\ell}, \quad k = 1, \dots, N,$$

son soluciones del sistema homogéneo (18) y además

$$\phi_x^k(t, \ell_k) - \phi_x^{k+1}(t, 0) = (-1)^k \frac{\pi}{\ell} \left(\operatorname{sen} \frac{t\pi}{\ell} \cos \frac{x\pi}{\ell} \Big|_{x=\ell} + \operatorname{sen} \frac{t\pi}{\ell} \cos \frac{x\pi}{\ell} \Big|_{x=0} \right) = 0, \quad k = 1, \dots, N.$$

Pero la energía de estas soluciones no es nula, pues ellas no lo son. Así, la desigualdad (19) no es cierta. Aún más, al no ser cierta la propiedad de continuación única, el sistema (18) no sería siquiera aproximadamente controlable.

Ejemplos similares pueden construirse fácilmente siempre que las longitudes de las cuerdas satisfagan $\frac{\ell_{k+1}}{\ell_k} \in \mathbb{Q}$ para todo k . En realidad, cuando esto no ocurre, es decir, si el cociente $\frac{\ell_{k+1}}{\ell_k}$ es irracional para algún k , entonces la propiedad de unicidad tiene lugar y con ella, la controlabilidad aproximada de (18).

Sin embargo, como se ha indicado antes, la desigualdad (19) no es válida nunca, independientemente de cuáles sean los valores de las longitudes de las cuerdas. Nuestro objetivo es probar esta afirmación.

Para cada $k = 1, \dots, N$, la solución ϕ^k puede expresarse como

$$\phi^k(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\phi_{0,n}^k \cos \lambda_n^k t + \frac{\phi_{1,n}^k}{\ell_k} \operatorname{sen} \lambda_n^k t \right) \operatorname{sen} \lambda_n^k x,$$

donde $\lambda_n^k = \frac{n\pi}{\ell_k}$ son los autovalores de la k -ésima cuerda y $(\phi_{0,n}^k), (\phi_{1,n}^k)$ son las sucesiones de coeficientes de Fourier de los datos iniciales ϕ_0^k, ϕ_1^k en la base $(\operatorname{sen} \lambda_n^k x)_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^2(0, \ell_k)$.

Entonces

$$\phi^k(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} a_n^k e^{i\sigma_n^k t} \operatorname{sen} \lambda_n^k x,$$

donde

$$\sigma_n^k = \operatorname{sgn}(n) \lambda_n^k, \quad a_n^k = \frac{1}{2} \left(\phi_{0,|n|}^k + \frac{\phi_{1,|n|}^k}{i \lambda_n^k} \right).$$

La desigualdad (19) puede ahora escribirse

$$\sum_{k=1}^{N-1} \int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left((-1)^n \lambda_n^k a_n^k e^{i\sigma_n^k t} - \lambda_n^{k+1} a_n^{k+1} e^{i\sigma_n^{k+1} t} \right) \right|^2 dt \geq C \sum_{k=1}^N \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left| \lambda_n^k a_n^k \right|^2. \quad (20)$$

Nuestro objetivo es construir sucesiones (a_n^k) , $k = 1, \dots, N$ para las cuales no se verifica la desigualdad (20).

Para simplificar las notaciones consideramos $N = 2$. Sea (σ_n) la sucesión creciente formada por los elementos de las sucesiones (σ_n^1) y (σ_n^2) . Definimos (α_n) por

$$\begin{aligned} \alpha_n &= (-1)^m \lambda_m^1 a_m^1, & \text{si } \sigma_n &= \sigma_m^1, \\ \alpha_n &= -\lambda_m^2 a_m^2, & \text{si } \sigma_n &= \sigma_m^2. \end{aligned}$$

Con esto, la desigualdad (20) se convierte en

$$\int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n e^{i\sigma_n t} \right|^2 dt \geq C \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\alpha_n|^2, \quad (21)$$

que sería una consecuencia de la desigualdad clásica de Ingham si entre los números σ_n existiese alguna separación uniforme.

Como $\sigma_{m+1}^1 - \sigma_m^1 = \frac{\pi}{\ell_1}$, $\sigma_{m+1}^2 - \sigma_m^2 = \frac{\pi}{\ell_2}$ podemos asegurar que $\sigma_{n+2} - \sigma_n \geq \pi \min \left\{ \frac{1}{\ell_1}, \frac{1}{\ell_2} \right\}$; sin embargo, podría ocurrir que $\liminf_{n \rightarrow \infty} (\sigma_{n+1} - \sigma_n) = 0$. De hecho, esto siempre ocurre. Basta notar que el número $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ puede aproximarse por racionales, esto es, existen sucesiones (p_k) , (q_k) de números enteros tales que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\ell_1}{\ell_2} - \frac{p_k}{q_k} \right) = 0.$$

Esto equivale a que $\sigma_{p_k}^1 - \sigma_{q_k}^2 \rightarrow 0$, de manera que realmente hay elementos de la sucesión (σ_n) que están muy cercanos.

Esta falta de separación entre los números σ_k provoca no sólo que no sea posible aplicar la desigualdad de Ingham, sino además que (21) no sea cierta. Tiene lugar

Proposición V.6. – *No existe ninguna constante positiva C tal que se verifique la desigualdad (19) para todas las soluciones del sistema homogéneo (18) con datos iniciales $(\phi_0^k, \phi_1^k) \in H_0^1(0, \ell_k) \times L^2(0, \ell_k)$, $k = 1, \dots, N$.*

Demostración. El elemento clave de la demostración es el teorema de Dirichlet sobre aproximación simultánea de números reales por medio de racionales (ver detalles en [C], Sección I.5):

Si ξ^1, \dots, ξ^M son números reales entonces, para cada $\varepsilon > 0$ y una cantidad infinita de valores de $p \in \mathbb{Z}$ existen números enteros $q_i(p)$, $i = 1, \dots, M$ tales que

$$|p\xi_i - q_i(p)| \leq \varepsilon \quad i = 1, \dots, M.$$

Fijemos $\varepsilon > 0$ y escojamos $\xi^i = \frac{\ell_{i+1}}{\ell_1}$, $i = 1, \dots, N - 1$. Al aplicar el teorema de Dirichlet a los números ξ^i , $i = 1, \dots, N - 1$ resulta, que hay infinitos valores de p para los que se verifica la desigualdad

$$\left| \frac{p\pi}{\ell_1} - \frac{q_i(p)\pi}{\ell_{i+1}} \right| \leq \varepsilon_1 = \varepsilon \max_{i=1, \dots, N-1} \left(\frac{1}{\ell_{i+1}} \right),$$

y esto es

$$\left| \lambda_p^1 - \lambda_{q_i(p)}^{i+1} \right| \leq \varepsilon_1. \quad (22)$$

Denotemos ahora por (σ_n) la sucesión creciente formada por las raíces cuadradas positivas de los autovalores λ_n^k de todas las cuerdas.

Para cada uno de los valores de p cuya existencia asegura el teorema de Dirichlet, definimos $m(p)$ por

$$\sigma_{m(p)} = \min \left\{ \lambda_p^1, \lambda_{q_1(p)}^2, \dots, \lambda_{q_{N-1}(p)}^i \right\}.$$

Entonces, para infinitos valores de $p \in \mathbb{Z}$ tiene lugar la desigualdad:

$$\left| \sigma_{m(p)+N-1} - \sigma_{m(p)} \right| \leq \varepsilon_1.$$

Como los elementos $\sigma_{m(p)}, \sigma_{m(p)+1}, \dots, \sigma_{m(p)+N-1}$ están cercanos puede asegurarse que entre ellos hay exactamente uno de los autovalores de cada cuerda. Sea $n_k(p)$ tal que

$$\lambda_{n_k(p)}^k \in \left\{ \sigma_{m(p)}, \sigma_{m(p)+1}, \dots, \sigma_{m(p)+N-1} \right\}$$

(este valor es único).

Entonces se verificará

$$\left| \lambda_{n_k(p)}^k - \lambda_{n_{k'}(p)}^{k'} \right| \leq \varepsilon_1, \quad (23)$$

para todos $k, k' = 1, \dots, N$.

Consideremos ahora, para cada $k = 1, \dots, N-1$, las soluciones de (18) homogéneo

$$\phi_p^k(t, x) = \frac{1}{2\lambda_{n_k(p)}^k} \cos 2\lambda_{n_k(p)}^k t \operatorname{sen} 2\lambda_{n_k(p)}^k x,$$

cuya energía es

$$\mathbf{E}_k = \frac{\ell_k}{2}.$$

Por otra parte,

$$\phi_{p,x}^k(t, \ell_k) - \phi_{p,x}^{k+1}(t, 0) = \cos 2\lambda_{n_k(p)}^k t - \cos 2\lambda_{n_{k+1}(p)}^{k+1} t.$$

Entonces, a partir de esta igualdad resulta

$$\int_0^T \left| \phi_{p,x}^k(t, \ell_k) - \phi_{p,x}^{k+1}(t, 0) \right|^2 dt \leq \left| \lambda_{n_k(p)}^k - \lambda_{n_{k+1}(p)}^{k+1} \right|^2 \frac{T^3}{3}$$

(hemos usado la desigualdad

$$\int_0^T (\cos xt - \cos yt)^2 \leq \frac{T^3}{3} |x - y|^2,$$

que se prueba fácilmente con ayuda del teorema del valor medio).

Teniendo en cuenta ahora (23), podemos concluir que

$$\int_0^T \left| \phi_{p,x}^k(t, \ell_k) - \phi_{p,x}^{k+1}(t, 0) \right|^2 dt \leq C \left| \lambda_{n_k(p)}^k - \lambda_{n_{k+1}(p)}^{k+1} \right|^2 \leq \frac{T^3}{3} \varepsilon_1^2.$$

Finalmente, si la desigualdad (19) fuese cierta obtendríamos

$$\frac{C}{2} \sum_{k=1}^N \ell_k = C \sum_{k=1}^N \mathbf{E}_k \leq \frac{T^3}{3} \varepsilon_1^2 = \varepsilon^2 \max_{i=1, \dots, N-1} \left(\frac{1}{\ell_{i+1}} \right)^2 \frac{T^3}{3},$$

lo que es imposible si tenemos en cuenta que ε puede escogerse arbitrariamente pequeño. \square

Observación V.4. – *Exactamente de la misma manera puede estudiarse el problema de la controlabilidad de N cuerdas conectadas en un ciclo, cuando se aplican controles en todos los nodos. A este problema corresponde el mismo sistema (18) donde las condiciones $u^1(t, 0) = u^N(t, \ell_N) = 0$ se sustituyen por $u^1(t, 0) = u^N(t, \ell_N) = v_N(t)$. En el Capítulo VII de [AI] puede encontrarse una demostración de la ausencia de controlabilidad exacta en este caso, basada en la utilización del método de los momentos.*

Capítulo VI

Control simultáneo desde el interior

Este capítulo está dedicado al control simultáneo desde una región interior de cuerdas con densidades distintas.

Esto está motivado por el siguiente hecho. Al realizar los cambios de variables $x \rightarrow \ell_1 x$, $x \rightarrow \ell_2 x$ en las ecuaciones del sistema (III.10) para el control simultáneo de cuerdas de densidad uno desde uno de los nodos exteriores, obtenemos

$$\begin{cases} \ell_k^2 u_{tt}^k - u_{xx}^k = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times [0, 1], \quad k = 1, 2, \\ u^k(., 0) = v, \quad u^k(., 1) = 0 & \text{en } \mathbb{R}, \\ u^k(0, .) = u_0^k, \quad u_t^k(0, .) = u_1^k & \text{en } [0, 1]. \end{cases} \quad (1)$$

Así, el de control simultáneo de dos cuerdas de longitudes ℓ_1 y ℓ_2 desde uno de los nodos exteriores puede interpretarse también como el control simultáneo desde un extremo de dos cuerdas de longitud uno con densidades ℓ_1 y ℓ_2 .

Esto sugiere estudiar el problema similar cuando el control actúa desde el interior de las cuerdas. A este problema está dedicada la Sección 1. Cuando las cuerdas son de igual longitud y el control actúa sobre toda la cuerda es posible controlarlas en tiempo arbitrariamente pequeño. Esto es cierto incluso en el caso de membranas. Estudiamos este problema en la Sección 2.

1. Control interior simultáneo de dos cuerdas

1.1. Formulación del problema

Sean ℓ_1, ℓ_2 números positivos y ω un intervalo contenido en $(0, \ell_1) \cap (0, \ell_2)$.

Consideramos el sistema

$$\begin{cases} \rho_k^2 u_{tt}^k - u_{xx}^k + f\chi_\omega = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times [0, \ell_k], \\ u^k(., 0) = u^k(., \ell_k) = 0 & \text{en } \mathbb{R}, \\ u^k(0, .) = u_0^k, \quad u_t^k(0, .) = u_1^k & \text{en } [0, \ell_k], \end{cases} \quad (2)$$

donde $f \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^2)$ y χ_ω es la función característica del intervalo ω .

Este sistema describe el movimiento de dos cuerdas e_1 y e_2 de longitudes ℓ_1, ℓ_2 y densidades ρ_1, ρ_2 , respectivamente, controladas por medio de una acción localizada en el intervalo ω que es la misma para las dos cuerdas.

El sistema (2) está bien puesto para estados iniciales

$$(u_0^k, u_1^k) \in \mathcal{W}_k := H_0^1(0, \ell_k) \times L^2(0, \ell_k), \quad k = 1, 2.$$

Estudiamos el problema de control para (2): *dado $T > 0$, determinar para qué estados iniciales $(u_0^k, u_1^k), k = 1, 2$, puede escogerse la función de control f de modo que*

$$u^k(T, \cdot) = u_t^k(T, \cdot) = 0, \quad k = 1, 2.$$

Diremos que el sistema (2) es *exactamente controlable en tiempo T* si todos los estados iniciales $(u_0^k, u_1^k) \in \mathcal{W}_k, k = 1, 2$, son controlables en tiempo T .

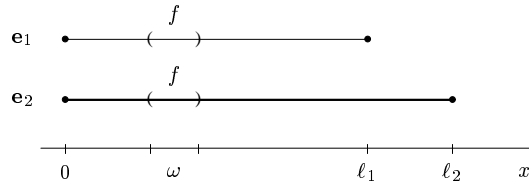


FIGURA 1. Dos cuerdas e_1 y e_2 de densidades distintas controladas simultáneamente desde el intervalo ω .

La aplicación del HUM garantiza que el sistema (2) es exactamente controlable en tiempo T si, y sólo si, existe una constante $C > 0$ tal que

$$C \int_{\omega} \int_0^T |\phi^1(t, x) + \phi^2(t, x)|^2 dt dx \geq \|(\phi_0^1, \phi_1^1)\|_{L^2 \times H^{-1}}^2 + \|(\phi_0^2, \phi_1^2)\|_{L^2 \times H^{-1}}^2, \quad (3)$$

para todas las soluciones ϕ^1, ϕ^2 de los ecuaciones homogéneas

$$\begin{cases} \rho_k^2 \phi_{tt}^k - \phi_{xx}^k = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times [0, \ell_k], \quad k = 1, 2, \\ \phi^k(\cdot, 0) = \phi^k(\cdot, \ell_k) = 0 & \text{en } \mathbb{R}, \\ \phi^k(0, \cdot) = \phi_0^k, \quad \phi_t^k(0, \cdot) = \phi_1^k & \text{en } [0, \ell_k]. \end{cases} \quad (4)$$

La soluciones de (4) están dadas por la fórmula

$$\phi^k(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\phi_{0,n}^k \cos \frac{n\pi t}{\rho_k \ell_k} + \frac{\rho_k \ell_k}{n\pi} \phi_{1,n}^k \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{\rho_k \ell_k} \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell_k}, \quad (5)$$

donde $(\phi_{0,n}^k), (\phi_{1,n}^k)$ son las sucesiones de coeficientes de Fourier de ϕ_0^k, ϕ_1^k , respectivamente, en la base $(\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell_k})_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^2(0, \ell_k)$.

Si denotamos

$$a_n^k = \frac{1}{2} \left(\phi_{0,|n|}^k + \frac{i\rho_k \ell_k}{n\pi} \phi_{1,|n|}^k \right), \quad k = 1, 2, \quad n \in \mathbb{Z}_*,$$

la fórmula (5) puede reescribirse como

$$\phi^k(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} a_n^k e^{\frac{i n \pi t}{\rho_k \ell_k}} \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{\ell_k}.$$

Con estas notaciones, la desigualdad (3) es equivalente a

$$C \int_{\omega} \int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} a_n^1 e^{\frac{i n \pi t}{\rho_1 \ell_1}} \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{\ell_1} + a_n^2 e^{\frac{i n \pi t}{\rho_2 \ell_2}} \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{\ell_2} \right|^2 dt dx \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} (|a_n^1|^2 + |a_n^2|^2), \quad (6)$$

para cualesquiera sucesiones complejas finitas $(a_n^1)_{n \in \mathbb{Z}_*}$, $(a_n^2)_{n \in \mathbb{Z}_*}$ que satisfacen $a_{-n}^1 = \overline{a_n^1}$, $a_{-n}^2 = \overline{a_n^2}$.

Obviamente, la desigualdad (6) es imposible si $\ell_1 = \ell_2$ y $\rho_1 = \rho_2$; bastaría tomar, por ejemplo $a_1^1 = -a_1^2 \neq 0$ y $a_n^1 = -a_n^2 = 0$ cuando $n \neq \pm 1$, para ver que en este caso (6) no se satisface. Nuestro objetivo es probar que la desigualdad (6) se verifica siempre que $\rho_1 \neq \rho_2$ si T es suficientemente grande. Este es el objeto de la siguiente subsección.

1.2. Control de cuerdas con densidades distintas

Asumimos que $\rho_1 \neq \rho_2$. Tiene lugar

Teorema VI.1. – Si $T > T_0 := 2 \max(\rho_1 \ell_1, \rho_2 \ell_2)$ entonces se verifica la desigualdad (6) para todas las sucesiones complejas finitas $(a_n^1)_{n \in \mathbb{Z}_*}$, $(a_n^2)_{n \in \mathbb{Z}_*}$ que satisfacen $a_{-n}^1 = \overline{a_n^1}$, $a_{-n}^2 = \overline{a_n^2}$.

Corolario VI.1. – Las cuerdas e_1 y e_2 son simultáneamente exactamente controlables en tiempo $T > T_0$ si $\rho_1 \neq \rho_2$.

Observación VI.1. – Este resultado muestra una importante diferencia entre el control desde un extremo de las cuerdas y el control desde una región interior arbitrariamente pequeña. Recordemos que, según el Corolario III.1, todos los estados iniciales de $(H_0^1(0, 1) \times L^2(0, 1))^2$ para el sistema (1) son controlables en tiempo $T \geq 2(\ell_1 + \ell_2)$ si, y sólo si, el cociente $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ pertenece al conjunto¹ \mathcal{F} que es de medida cero. Además, la controlabilidad exacta de (1) no se consigue nunca, independientemente de los valores de ℓ_1 y ℓ_2 . Esto muestra que la controlabilidad desde una región interior es una propiedad mucho más robusta que la controlabilidad desde un extremo de las cuerdas.

Para demostrar el Teorema VI.1 seguiremos el esquema utilizado en el Teorema III.2 relativo al control simultáneo de dos cuerdas desde un extremo. La idea es muy simple: construiremos un operador continuo $\mathbf{B} : L^2(\omega \times (0, T)) \rightarrow L^2(\omega' \times (0, T'))$ tal que, si ϕ^1, ϕ^2 son soluciones de (4) entonces, $\mathbf{B}\phi^1 = 0$ y además existe una constante $C > 0$ tal que

$$C \int_{\omega'} \int_0^{T'} |\mathbf{B}\phi^2|^2 dt dx \geq \|(\phi_0^2, \phi_1^2)\|_{L^2 \times H^{-1}}^2.$$

¹Recordemos que \mathcal{F} está formado por los números irracionales en cuyos desarrollos en fracción continua $[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$ la sucesión (a_n) es acotada.

Entonces tendremos que

$$C \int_{\omega} \int_0^T |\phi^1 + \phi^2|^2 dt dx \geq C \int_{\omega'} \int_0^{T'} |\mathbf{B}\phi^2|^2 dt dx \geq \|(\phi_0^2, \phi_1^2)\|_{L^2 \times H^{-1}}^2.$$

La desigualdad

$$C \int_{\omega} \int_0^T |\phi^1 + \phi^2|^2 dt dx \geq \|(\phi_0^1, \phi_1^1)\|_{L^2 \times H^{-1}}^2$$

se obtiene de forma análoga.

Fijamos $\omega_1 \in \mathbb{R}$ y definimos, para $a \in \mathbb{R}$, el operador lineal \mathbf{B}_a que actúa sobre una función $\phi(t, x)$ según la fórmula

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_a \phi(t, x) := & \phi(t + 2a(x - \omega_1), x + a(x - \omega_1)) - \phi(t + a(x - \omega_1), x + 2a(x - \omega_1)) \\ & - \phi(t + a(x - \omega_1), x) + \phi(t, x + a(x - \omega_1)). \end{aligned}$$

Observemos que, como $\omega_1 < \omega_2$ y $T > 0$, es posible escoger $\hat{\omega}_2 > \omega_1$ tal que

$$\hat{\omega}_2 < \frac{\omega_2 + 2a\omega_1}{1 + 2a} \quad \text{y} \quad \hat{T} := T - 2a(\hat{\omega}_2 - \omega_1) > 0. \quad (7)$$

Proposición VI.1. – Si $\hat{\omega}_2$ y \hat{T} satisfacen (7) entonces el operador \mathbf{B}_a es continuo de $L^2((0, T) \times (\omega_1, \omega_2))$ a $L^2((0, \hat{T}) \times (\omega_1, \hat{\omega}_2))$, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que

$$C \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_0^T |\phi(t, x)|^2 dt dx \geq \int_{\omega_1}^{\hat{\omega}_2} \int_0^{\hat{T}} |\mathbf{B}_a \phi(t, x)|^2 dt dx,$$

para toda función ϕ para la cual ambas integrales están definidas.

Demostración. Observemos que

$$\mathbf{B}_a \phi(t, x) = \sum_{(p,q) \in S} \phi(t + pa(x - \omega_1), x + qa(x - \omega_1)),$$

donde

$$S = \{(2, 1), (1, 2), (0, 1), (1, 0)\}.$$

Entonces,

$$\int_{\omega_1}^{\hat{\omega}_2} \int_0^{\hat{T}} |\mathbf{B}_a \phi(t, x)|^2 dt dx \leq 4 \sum_{(p,q) \in S} \int_{\omega_1}^{\hat{\omega}_2} \int_0^{\hat{T}} |\phi(t + pa(x - \omega_1), x + qa(x - \omega_1))|^2 dt dx. \quad (8)$$

Para estimar las integrales

$$\int_{\omega_1}^{\hat{\omega}_2} \int_0^{\hat{T}} |\phi(t + pa(x - \omega_1), x + qa(x - \omega_1))|^2 dt dx \quad (9)$$

realizamos el cambio de variables

$$\xi = t + pa(x - \omega_1), \quad \eta = x + qa(x - \omega_1). \quad (10)$$

En estas variables, (9) se escribe como

$$(1 + qa) \int \int_{\Omega_{p,q}} |\phi(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta,$$

donde $\Omega_{p,q}$ es la imagen de $(0, \hat{T}) \times (\omega_1, \hat{\omega}_2)$ por la aplicación definida por (10). Además, en vista de (7), para todo $(p, q) \in S$,

$$\Omega_{p,q} \subset (0, T) \times (\omega_1, \omega_2).$$

Por ello,

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_0^T |\phi(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \geq \int \int_{\Omega} |\phi(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta.$$

Este hecho, teniendo en cuenta la desigualdad (8), demuestra la proposición. \square

La siguiente proposición muestra como actúan los operadores \mathbf{B}_a sobre las funciones de la forma $e^{\frac{in\pi t}{\rho^\ell}} \operatorname{sen} \frac{in\pi x}{\ell}$. Se prueba mediante un simple cálculo.

Proposición VI.2. – Para todos los $\rho, \ell \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ tiene lugar la igualdad

$$\mathbf{B}_a \left(e^{\frac{in\pi t}{\rho^\ell}} \operatorname{sen} \frac{in\pi x}{\ell} \right) = 4e^{\frac{in\pi}{\rho^\ell}(t+x-\omega_1)} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi(x-\omega_1)}{2\ell} \alpha \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi(x-\omega_1)}{2\ell} \beta \right).$$

donde $\alpha = (\rho^{-1} + a)$ y $\beta = (\rho^{-1} - a)$.

Observación VI.2. – Si $\phi(t, x)$ es una solución de la ecuación de ondas

$$\rho^2 \phi_{tt} - \phi_{xx} = 0, \quad \phi(t, 0) = \phi(t, \ell) = 0,$$

cuyos datos iniciales $\phi|_{t=0}$ y $\phi_t|_{t=0}$ son combinaciones lineales finitas de las autofunciones $(\operatorname{sen} \frac{in\pi x}{\ell})$ entonces

$$\mathbf{B}_{\rho^{-1}} \phi(t, x) = 0.$$

Proposición VI.3. – Sean $\ell, \alpha \neq \beta$ números positivos e I un intervalo de \mathbb{R} . Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{R}$,

$$\int_I \left| \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi(x-\omega_1)}{2\ell} \alpha \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi(x-\omega_1)}{2\ell} \beta \right) \right|^2 dx \geq C.$$

Este hecho puede demostrarse fácilmente calculando la integral.

Demostración del Teorema VI.1. Sean $(a_n^1)_{n \in \mathbb{Z}_*}$, $(a_n^2)_{n \in \mathbb{Z}_*}$ sucesiones complejas finitas que satisfacen $a_{-n}^1 = \overline{a_n^1}$, $a_{-n}^2 = \overline{a_n^2}$ y

$$\phi^k(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} a_n^k e^{\frac{in\pi t}{\rho_k^{\ell_k}}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell_k}, \quad k = 1, 2.$$

Tomamos $a = \rho_1^{-1}$. Como $T > T_0$, es posible escoger $\hat{\omega}_2 > \omega_1$ suficientemente cercano a ω_1 de modo que $\hat{\omega}_2$ y \hat{T} que satisfagan (7) y además $\hat{T} \geq T_0$.

Entonces, según la Proposición VI.1,

$$C \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_0^T |\phi^1 + \phi^2|^2 dt dx \geq \int_{\omega_1}^{\hat{\omega}_2} \int_0^{\hat{T}} |\mathbf{B}_a \phi^1 + \mathbf{B}_a \phi^2|^2 dt dx. \quad (11)$$

Pero de acuerdo a la Observación VI.2,

$$\mathbf{B}_a \phi^1 = 0.$$

Por ello, de la desigualdad (11) resulta

$$C \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_0^T |\phi^1 + \phi^2|^2 dt dx \geq \int_{\omega_1}^{\hat{\omega}_2} \int_0^{\hat{T}} |\mathbf{B}_a \phi^2|^2 dt dx. \quad (12)$$

Por otra parte, como

$$\phi^2(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} a_n^2 e^{\frac{in\pi}{\rho_2 \ell_2} t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell_2},$$

la Proposición VI.2 garantiza que

$$\mathbf{B}_a \phi^2(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} a_n^2 e^{\frac{in\pi}{\rho_2 \ell_2} t} \Theta_n(x),$$

donde

$$\Theta_n(x) := 4e^{\frac{in\pi}{\rho_2 \ell_2}(x-\omega_1)} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell_2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi(x-\omega_1)}{2\ell_2} \alpha \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi(x-\omega_1)}{2\ell_2} \beta \right)$$

con

$$\alpha = \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1}, \quad \beta = \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}.$$

Además, de acuerdo a la Proposición VI.3, existe una constante $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica la desigualdad

$$\int_{\omega_1}^{\hat{\omega}_2} |\Theta_n(x)|^2 dx \geq C. \quad (13)$$

Entonces, como $\hat{T} \geq T_0 \geq 2\rho_2 \ell_2$,

$$\int_{\omega_1}^{\hat{\omega}_2} \int_0^{\hat{T}} |\mathbf{B}_a \phi^2|^2 dt dx \geq \int_{\omega_1}^{\hat{\omega}_2} \int_0^{2\rho_2 \ell_2} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} a_n^2 e^{\frac{in\pi}{\rho_2 \ell_2} t} \Theta_n(x) \right|^2 dt dx = 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n^2|^2 \int_{\omega_1}^{\hat{\omega}_2} |\Theta_n(x)|^2 dx,$$

(hemos utilizado el hecho de que las funciones $e^{\frac{in\pi}{\rho_2 \ell_2} t}$ son ortogonales en $(0, 2\rho_2 \ell_2)$) y por ello, en vista de (12) y (13),

$$C \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_0^T |\phi^1 + \phi^2|^2 dt dx \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n^2|^2.$$

La desigualdad

$$C \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_0^T |\phi^1 + \phi^2|^2 dt dx \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n^1|^2$$

se prueba de manera similar aplicando a $\phi^1 + \phi^2$ el operador \mathbf{B}_a con $a = \rho_2^{-1}$. Con esto concluye la demostración del teorema. \square

1.3. Control de cuerdas de igual densidad

El Teorema VI.1 no proporciona información sobre qué ocurre cuando $\rho_1 = \rho_2$ pero $\ell_1 \neq \ell_2$. Esto es debido al carácter local de los operadores \mathbf{B}_a , lo que les impide distinguir entre soluciones de ecuaciones de ondas que se propagan con la misma velocidad. Este hecho, sin embargo no es puramente técnico: si $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ no es suficiente que $\ell_1 \neq \ell_2$ para que se verifique la desigualdad (6).

En efecto, supongamos que

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

Entonces, las soluciones

$$\phi^1(t, x) = e^{\frac{ip\pi}{\rho\ell_1}t} \operatorname{sen} \frac{p\pi x}{\ell_1}, \quad \phi^2(t, x) = -e^{\frac{iq\pi}{\rho\ell_2}t} \operatorname{sen} \frac{q\pi x}{\ell_2}$$

satisfacen

$$\phi^1(t, x) + \phi^2(t, x) \equiv 0,$$

de modo que una desigualdad del tipo (6) es imposible para cualquier intervalo ω y cualquier tiempo T siempre que el cociente $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ sea un número racional. En este sentido el problema resulta similar al del control simultáneo de dos cuerdas desde un extremo. Utilizando la misma técnica que en el Teorema III.2 es posible probar una desigualdad más débil que (6).

Denotamos por Z^k , $k = 1, 2$, el espacio de las combinaciones lineales finitas de las funciones $\left(\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell_k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Teorema VI.2. – Sean $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ y $T \geq 2\rho(\ell_1 + \ell_2)$. Existe una constante $C > 0$ tal que

$$C \int_{\omega} \int_0^T |\phi^1(t, x) + \phi^2(t, x)|^2 dt dx \geq \sum \operatorname{sen}^2 \frac{\ell_2 n \pi}{\ell_1} ((\phi_0^1)^2 + n^{-2}(\phi_1^1)^2), \quad (14)$$

$$C \int_{\omega} \int_0^T |\phi^1(t, x) + \phi^2(t, x)|^2 dt dx \geq \sum \operatorname{sen}^2 \frac{\ell_1 n \pi}{\ell_2} ((\phi_0^2)^2 + n^{-2}(\phi_1^2)^2), \quad (15)$$

para todas las soluciones ϕ^1, ϕ^2 de (4) con estados iniciales en $Z^1 \times Z^1$ y $Z^2 \times Z^2$, respectivamente.

Demostración. La desigualdad (15) es equivalente a

$$C \int_{\omega} \int_0^T |\Phi|^2 dt dx \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n^2|^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\ell_1 n \pi}{\ell_2},$$

donde

$$\Phi := \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} a_n^1 e^{\frac{in\pi t}{\rho\ell_1}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell_1} + a_n^2 e^{\frac{in\pi t}{\rho\ell_2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell_2},$$

para todas las sucesiones finitas complejas que verifican $a_{-n}^1 = \overline{a_n^1}$, $a_{-n}^2 = \overline{a_n^2}$.

Para demostrar esta afirmación, observemos que, para cada $x \in \omega$,

$$(\rho\ell_1)^- \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}_*} a_n^1 e^{\frac{in\pi t}{\rho\ell_1}} \right) = 0, \quad (16)$$

donde $(\rho\ell_1)^-$ es el operador definido por (II.23) para el número $\rho\ell_1$ (la igualdad (16) corresponde a la $2\rho\ell_1$ -periodicidad de la solución ϕ^1). Entonces,

$$\begin{aligned} (\rho\ell_1)^- \Phi &= (\rho\ell_1)^- \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} a_n^2 e^{\frac{in\pi t}{\rho\ell_2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell_2} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} a_n^2 e^{\frac{in\pi t}{\rho\ell_2}} \operatorname{sen} \frac{\ell_1 n \pi}{\ell_2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{\ell_2}. \end{aligned}$$

Además, de la Proposición II.5 se obtiene que, para cada $x \in \omega$,

$$\int_0^T |\Phi|^2 dt \geq \int_{\rho\ell_1}^{T-\rho\ell_1} |(\rho\ell_1)^{-1}\Phi|^2 dt = \int_{\rho\ell_1}^{T-\rho\ell_1} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} a_n^2 e^{\frac{in\pi t}{\rho\ell_2}} \operatorname{sen} \frac{\ell_1 n \pi}{\ell_2} \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{\ell_2} \right|^2 dt. \quad (17)$$

Por otra parte, como $T \geq 2\rho(\ell_1 + \ell_2)$ entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\rho\ell_1}^{T-\rho\ell_1} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} a_n^2 e^{\frac{in\pi t}{\rho\ell_2}} \operatorname{sen} \frac{\ell_1 n \pi}{\ell_2} \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{\ell_2} \right|^2 dt &\geq \int_{\rho\ell_1}^{\rho\ell_1+2\rho\ell_2} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} a_n^2 e^{\frac{in\pi t}{\rho\ell_2}} \operatorname{sen} \frac{\ell_1 n \pi}{\ell_2} \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{\ell_2} \right|^2 dt \\ &= 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n^2|^2 \operatorname{sen}^2 \frac{n \pi x}{\ell_2} \operatorname{sen}^2 \frac{\ell_1 n \pi}{\ell_2}. \end{aligned}$$

(hemos utilizado el hecho de que las funciones $\left(e^{\frac{in\pi t}{\rho\ell_2}} \right)_{n \in \mathbb{Z}_*}$ son ortogonales en cualquier intervalo de longitud $2\rho\ell_2$).

Luego, en vista de (17),

$$C \int_{\omega} \int_0^T |\Phi|^2 dt dx \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n^2|^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\ell_1 n \pi}{\ell_2} \int_{\omega} \operatorname{sen}^2 \frac{n \pi x}{\ell_2} dx. \quad (18)$$

Finalmente, observemos que para todo intervalo $\omega \subset \mathbb{R}$ existe una constante $C = C(\omega)$ tal que

$$\int_{\omega} \operatorname{sen}^2 \frac{n \pi x}{\ell_2} dx \geq C.$$

Así, de (18) resulta

$$C \int_{\omega} \int_0^T |\Phi|^2 dt dx \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n^2|^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\ell_1 n \pi}{\ell_2}.$$

La desigualdad (14) se obtiene de manera análoga. \square

Corolario VI.2. – Si $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ es irracional y $T \geq 2\rho(\ell_1 + \ell_2)$ entonces el sistema (2) es espectralmente controlable en tiempo T , es decir, todos los estados iniciales $(u_0^1, u_1^1) \in Z^1 \times Z^1$, $(u_0^2, u_1^2) \in Z^2 \times Z^2$ son controlables en tiempo T .

Con información adicional sobre el cociente $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ pueden describirse subespacios de estados iniciales controlables de manera completamente análoga a como se hizo en la Subsección III.2.1.

Corolario VI.3. – a) Si $\frac{\ell_1}{\ell_2} \in \mathbf{B}_\varepsilon$ entonces, el subespacio de datos iniciales

$$(u_0^i, u_1^i) \in \hat{H}^{2+\varepsilon}(0, \ell_i) \times \hat{H}^{1+\varepsilon}(0, \ell_i),$$

es controlable en cualquier tiempo $T \geq 2\rho(\ell_1 + \ell_2)$. En particular, si $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ es un número algebraico irracional, este subespacio es controlable para cualquier $\varepsilon > 0$.

b) Si $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ admite un desarrollo acotado en fracción continua entonces, el subespacio de datos iniciales

$$(u_0^i, u_1^i) \in [H^2(0, \ell_i) \cap H_0^1(0, \ell_i)] \times H_0^1(0, \ell_i),$$

es controlable en cualquier tiempo $T \geq 2\rho(\ell_1 + \ell_2)$.

2. Control simultáneo sobre todo el dominio

Sea Ω es un conjunto abierto acotado de \mathbb{R}^n con frontera regular y $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$. Consideramos el sistema

$$\begin{cases} \rho_k^2 u_{tt}^k - \Delta u^k + f = 0 & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}, \\ u^k |_{\partial\Omega} = 0 & \text{en } \mathbb{R}, \\ u^k(0, \cdot) = u_0^k, \quad u_t^k(0, \cdot) = u_1^k & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (19)$$

El sistema (19) corresponde al movimiento de N membranas elásticas con densidades ρ_1, \dots, ρ_N que tienen la misma forma Ω en reposo y cuyos bordes están fijos, controladas a través de la función f que actúa sobre todo Ω . Cuando $n = 1$ el sistema (19) es un caso particular del sistema (2) con $\ell_1 = \ell_2$ y $\omega = (0, \ell_1)$.

El problema (19) está bien puesto para estados iniciales $(u_0^k, u_1^k) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $k = 1, \dots, N$. Cuando $f = 0$, (19) se convierte en el sistema homogéneo

$$\begin{cases} \rho_k^2 \phi_{tt}^k - \Delta \phi^k + f = 0 & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}, \\ \phi^k |_{\partial\Omega} = 0 & \text{en } \mathbb{R}, \\ \phi^k(0, \cdot) = \phi_0^k, \quad \phi_t^k(0, \cdot) = \phi_1^k & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (20)$$

que está también bien puesto para estados iniciales $(\phi_0^k, \phi_1^k) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, $k = 1, \dots, N$.

Si $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es la sucesión creciente de los autovalores de $-\Delta$ con condiciones de Dirichlet homogéneas en Ω y $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es la sucesión ortonormal en $L^2(\Omega)$ de autofunciones, entonces las soluciones de (20) se determinan por las fórmulas

$$\phi^k(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} a_n^k e^{\frac{\lambda_n t}{\rho_k}} \theta_{|n|}(x)$$

donde

$$\lambda_n = \sqrt{\mu_{|n|}} \operatorname{sgn} n, \quad n \in \mathbb{Z}_*,$$

$$a_n^k = \frac{1}{2} \left(\phi_{0,|n|}^k + i \lambda_n \phi_{1,|n|}^k \right), \quad k = 1, \dots, N, \quad n \in \mathbb{Z}_*.$$

El problema de control asociado al sistema (19) es: *dado $T > 0$, determinar para qué estados iniciales $(u_0^k, u_1^k) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $k = 1, \dots, N$, existe $f \in L^2(\Omega)$ tal que la solución de (19) satisfice*

$$u^k |_{t=T} = u_t^k |_{t=T} = 0.$$

Cuando esto es posible para todos los estados iniciales de $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ decimos que (19) es *exactamente controlable en tiempo T* .

La aplicación del HUM garantiza que el sistema (19) es exactamente controlable en tiempo T si, y sólo si, existe una constante $C > 0$ tal se verifica la desigualdad

$$C \int_{\Omega} \int_0^T \left| \sum_{k=1}^N \phi^k(t, x) \right|^2 dt dx \geq \sum_{k=1}^N \|(\phi_0^k, \phi_1^k)\|_{L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)}^2, \quad (21)$$

para todas las soluciones de (20) con estados iniciales $(\phi_0^k, \phi_1^k) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, $k = 1, \dots, N$.

Este hecho es equivalente a que exista una constante $C > 0$ tal que

$$C \int_{\Omega} \int_0^T \left| \sum_{k=1}^N \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} a_n^k e^{\frac{\lambda_n t}{\rho_k}} \theta_{|n|}(x) \right|^2 dt dx \geq 2 \sum_{k=1}^N \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n^k|^2, \quad (22)$$

para todas las sucesiones finitas complejas $(a_n^k)_{n \in \mathbb{Z}_*}$, $k = 1, \dots, N$, que verifican $a_{-n}^k = \overline{a_n^k}$.

Teorema VI.3. – *El sistema (19) es exactamente controlable en tiempo $T > 0$ si, y sólo si los números ρ_1, \dots, ρ_N son todos distintos.*

Demostración. Si dos de los números ρ_1, \dots, ρ_N coinciden, por ejemplo $\rho_1 = \rho_2$ entonces si escogemos

$$a_n^1 = -a_n^2, \quad a_n^k = 0, \quad k > N,$$

entonces la desigualdad (22) se transforma en

$$0 \geq 4 \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n^1|^2,$$

lo que no es cierto en general. Así, si dos de los números ρ_1, \dots, ρ_N coinciden existen sucesiones finitas para las cuales (22) es falsa.

Observemos ahora que, debido a la ortogonalidad en $L^2(\Omega)$ de las funciones $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la desigualdad (22) puede escribirse como

$$C \int_0^T \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_0^T \left| \sum_{k=1}^N a_n^k e^{\frac{\lambda_n t}{\rho_k}} \right|^2 dt \geq \sum_{k=1}^N \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n^k|^2.$$

Entonces, para todo $T > 0$ y números distintos ρ_1, \dots, ρ_N basta aplicar la Proposición VI.4 que se prueba a continuación para obtener la desigualdad (22) y con ello la demostración del Teorema. \square

Proposición VI.4. – *Sean ρ_1, \dots, ρ_N números positivos distintos y $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos que tiende a infinito. Entonces, para todo $T > 0$ existe una constante $C = C(T, N, \rho_1, \dots, \rho_N) > 0$ tal que*

$$\int_0^T \left| \sum_{k=1}^N a^k e^{\frac{i\lambda_n t}{\rho_k}} \right|^2 dt \geq C \sum_{k=1}^N |a^k|^2,$$

para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $(a^1, \dots, a^N) \in \mathbb{R}^N$.

Demostración. Procedemos por inducción respecto al número N . Para $N = 1$ la desigualdad es inmediata. Suponemos que la desigualdad es cierta para $N - 1$.

Denotemos

$$I_n = \sum_{k=2}^N a^k e^{\frac{i\lambda_n t}{\rho_k}}.$$

Entonces, de acuerdo a la hipótesis de inducción, existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^T |I_n|^2 dt \geq C \sum_{k=2}^N |a^k|^2.$$

Por otra parte,

$$\int_0^T \left| \sum_{k=1}^N a^k e^{\frac{i\lambda_n t}{\rho_k}} \right|^2 dt = |a^1|^2 T + 2\Re \left(\int_0^T a^1 e^{\frac{i\lambda_n t}{\rho_1}} \overline{I_n} dt \right) + \int_0^T |I_n|^2 dt. \quad (23)$$

Observemos que

$$\left| \Re \int_0^T a^1 e^{\frac{i\lambda_n t}{\rho_1}} \overline{I_n} dt \right| \leq |a^1| \left| \int_0^T e^{\frac{i\lambda_n t}{\rho_1}} \overline{I_n} dt \right| = |a^1| \left| \sum_{k=2}^N a^k \gamma_{n,k} dt \right|, \quad (24)$$

donde

$$\gamma_{n,k} = \int_0^T e^{\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_k}\right) i\lambda_n t} dt.$$

Además,

$$|a^1| \left| \sum_{k=2}^N a^k \gamma_{n,k} \right| \leq |a^1| \sum_{k=2}^N |a^k| |\gamma_{n,k}| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=2}^N \left(|a^1|^2 + |a^k|^2 \right) |\gamma_{n,k}|. \quad (25)$$

En resumen, de (24) y (25) resulta la desigualdad

$$\left| \Re \int_0^T a^1 e^{\frac{i\lambda_n t}{\rho_1}} \overline{I_n} dt \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=2}^N \left(|a^1|^2 + |a^k|^2 \right) |\gamma_{n,k}|,$$

que, en virtud de (23), implica

$$\int_0^T \left| \sum_{k=1}^N a^k e^{\frac{i\lambda_n t}{\rho_k}} \right|^2 dt \geq |a^1|^2 \left(T - \sum_{k=2}^N |\gamma_{n,k}| \right) + \sum_{k=2}^N |a^k|^2 (C - |\gamma_{n,k}|). \quad (26)$$

Observemos ahora que¹, para cada $k = 2, \dots, N$,

$$|\gamma_{n,k}| \leq \frac{2|\rho_k - \rho_1|}{\rho_1 \rho_k \lambda_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Por tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$\sum_{k=2}^N |\gamma_{n,k}| \leq \frac{T}{2}, \quad |\gamma_{n,k}| \leq \frac{C}{2}, \quad k = 2, \dots, N.$$

Como consecuencia, de (26) resulta que para $n \geq n_0$,

$$\int_0^T \left| \sum_{k=1}^N a^k e^{\frac{i\lambda_n t}{\rho_k}} \right|^2 dt \geq |a^1|^2 \frac{T}{2} + \frac{C}{2} \sum_{k=2}^N |a^k|^2 \geq C \sum_{k=1}^N |a^k|^2. \quad (27)$$

Finalmente, basta notar que las funciones $e^{\frac{i\lambda_n t}{\rho_k}}$, $k = 1, \dots, N$, son linealmente independientes sobre cualquier intervalo, por lo que

$$\int_0^T \left| \sum_{k=1}^N a^k e^{\frac{i\lambda_n t}{\rho_k}} \right|^2 dt > 0,$$

¹Es en este punto que resulta esencial en la demostración que los números ρ_k , $k = 1, \dots, N$, sean todos distintos.

salvo cuando $a^1 = \dots = a^N = 0$. Esto permite aplicar un argumento estándar de compacidad para probar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una constante $C_n > 0$ tal que

$$\int_0^T \left| \sum_{k=1}^N a^k e^{\frac{i\lambda_n t}{\rho_k}} \right|^2 dt \geq C_n \sum_{k=1}^N |a^k|^2.$$

Por tanto, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\int_0^T \left| \sum_{k=1}^N a^k e^{\frac{i\lambda_n t}{\rho_k}} \right|^2 dt \geq C \sum_{k=1}^N |a^k|^2,$$

para todo $n < n_0$. Este hecho, en vista de (27), da la afirmación de la proposición. \square

Capítulo VII

Otras ecuaciones sobre redes

En este capítulo consideramos el problema de control para las ecuaciones del calor, de Schrödinger y de vigas sobre redes. Hemos hecho énfasis en dos aspectos fundamentales: la controlabilidad espectral de los sistemas correspondientes y la posibilidad de identificar subespacios de datos iniciales controlables para estas ecuaciones a partir de subespacios de estados iniciales controlables para el sistema de las cuerdas (I.1)-(I.6).

El resultado fundamental de controlabilidad espectral que presentamos asegura, que siempre que el sistema (I.1)-(I.6) sea espectralmente controlable en algún tiempo $T > 0$, las ecuaciones del calor, de Schrödinger y de vigas consideradas serán también espectralmente controlables en cualquier tiempo $\tau > 0$. Entonces, en virtud del Teorema V.1, la controlabilidad espectral de estos sistemas admite una caracterización espectral: serán espectralmente controlables en cualquier tiempo $\tau > 0$ si, y sólo si, ninguna autofunción del operador elíptico $-\Delta_G$ asociado al sistema (I.1)-(I.6) se anula idénticamente en la cuerda controlada.

Por otra parte, la posibilidad de describir subespacios de datos iniciales controlables a partir de subespacios de estados controlables para el sistema (I.1)-(I.6) permite, en particular, identificar subespacios del tipo V^r (dominios de potencias del operador $-\Delta_G$) de datos iniciales controlables para las ecuaciones consideradas en este capítulo para las redes estrelladas a partir de los Corolarios IV.5 y IV.6 relativos a las redes de cuerdas.

1. Ecuación del calor

Llamaremos ecuación del calor sobre la red al siguiente sistema parabólico

$$u_t^i - u_{xx}^i = 0 \quad \text{en } \mathbb{R} \times [0, \ell_i], \quad i = 1, \dots, M, \quad (1)$$

$$u^1(t, \mathbf{v}_1) = h(t) \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

$$u^{i(j)}(t, \mathbf{v}_j) = 0 \quad t \in \mathbb{R}, \quad j = 2, \dots, N, \quad (3)$$

$$u^i(t, \mathbf{v}) = u^j(t, \mathbf{v}) \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}_M, \quad i, j \in I_{\mathbf{v}}, \quad (4)$$

$$\sum_{i \in I_{\mathbf{v}}} \partial_n u^i(t, \mathbf{v}) = 0 \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}_M, \quad (5)$$

$$u^i(0, x) = u_0^i(x) \quad x \in [0, \ell_i], \quad i = 1, \dots, M. \quad (6)$$

El problema (1)-(6) puede ser considerado como un modelo de la propagación del calor sobre la red bajo la acción de un control en uno de sus nodos exteriores.

Para cada $T > 0$, $h \in L^2(0, T)$ y $\bar{u}_0 = (u_0^1, \dots, u_0^M) \in H$ el sistema (1)-(6) tiene una única solución \bar{u} que satisface

$$\bar{u} \in C([0, T] : H) \cap L^2([0, T] : V).$$

Cuando $h \equiv 0$, esta solución se expresa mediante la fórmula

$$\bar{u}(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_{0,n} e^{-\mu_n t} \bar{\theta}_n(x),$$

si $\bar{u}_0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_{0,n} \bar{\theta}_n$. Recordemos, que $\mu_n = \lambda_n^2$ son los autovalores y $\bar{\theta}_n$ las autofunciones del problema elíptico asociado a (1)-(5), que es el mismo que corresponde a (I.1)-(I.5).

Para el sistema (1)-(6) consideramos el problema de control: *encontrar para qué datos iniciales $\bar{u}_0 \in V'$, existe una función $h \in L^2(0, T)$ tal que la solución \bar{u} de (1)-(6) satisface*

$$\bar{u}(T, x) = \bar{0}.$$

Cuando \bar{u}_0 tiene esta propiedad se dice que \bar{u}_0 es *controlable a cero en tiempo T* . Si todos los datos iniciales $\bar{u}_0 \in Z$ son controlables a cero en tiempo T (como antes, Z es el conjunto de las combinaciones lineales finitas de las autofunciones), diremos que el sistema (1)-(6) es *espectralmente controlable en tiempo T* .

Observemos, que a diferencia de lo que ocurre para la ecuación de ondas, que \bar{u}_0 y \bar{u}_1 sean controlables a cero no implica que exista $h \in L^2(0, T)$ tal que la solución de (1)-(6) con dato inicial \bar{u}_0 sea igual a \bar{u}_1 en el instante T . Esto está causado por la no reversibilidad en tiempo de la ecuación del calor: debido al carácter disipativo del operador del calor, las soluciones con datos iniciales $\bar{u}_0 \in H$ satisfacen $u^i(T) \in C^\infty((0, \ell_i))$ para $i = 2, \dots, M$. Por ello, pueden alcanzarse sólo estados del sistema muy regulares.

Al igual que en el caso de la ecuación de ondas, se obtiene un criterio de cuándo un dato inicial es controlable a cero:

Proposición VII.1. – *El dato inicial $\bar{u}_0 \in H$ es controlable a cero en tiempo T con control $h \in L^2(0, T)$ si, y sólo si, para todo $\bar{\phi}_0 \in Z$ se verifica la igualdad*

$$\langle \bar{u}_0, \bar{\phi}(T) \rangle_H = \int_0^T h(t) \partial_n \phi^1(T-t, \mathbf{v}_1) dt,$$

donde $\bar{\phi}$ es la solución del sistema homogéneo (1)-(6) con dato inicial $\bar{\phi}_0$.

Está claro, que es suficiente comprobar que la igualdad de la proposición anterior se verifica cuando $\bar{\phi}_0$ es una de las autofunciones. Esto es,

$$\int_0^T \varkappa_k e^{-\mu_k(T-t)} h(t) dt = u_{0,k} e^{-\mu_k T}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

donde $\varkappa_k = \partial_n \theta_k^1(\mathbf{v}_1)$ es la derivada normal de la autofunción $\bar{\theta}_k$ en el nodo controlado \mathbf{v}_1 .

Al efectuar el cambio de variable $t \rightarrow \frac{T}{2} - t$, obtenemos el problema de momentos:

Proposición VII.2. – *El dato inicial $\bar{u}_0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_{0,n} \bar{\theta}_n \in H$ es controlable a cero en tiempo T con control $h \in L^2(0, T)$ si, y sólo si, se verifican las igualdades*

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varkappa_k e^{-\mu_k t} h(t) dt = u_{0,k} e^{-\mu_n \frac{T}{2}}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Esta proposición permite dar la siguiente caracterización de las redes para las cuales el sistema (1)-(6) es espectralmente controlable.

Teorema VII.1. – *El sistema (1)-(6) es espectralmente controlable a cero en cualquier tiempo $T > 0$ si, y sólo si, $\varkappa_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. La necesidad de la condición $\varkappa_k \neq 0$ es inmediata: si $\varkappa_k = 0$ para algún valor de k entonces, la igualdad (8) se convierte en

$$u_{0,k} = 0.$$

Por consiguiente, no será posible controlar el dato inicial $\bar{u}_0 = \bar{\theta}_k \in Z$ para el cual $u_{0,k} = 1$.

Para probar que la condición $\varkappa_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ es suficiente para la controlabilidad espectral a cero de (1)-(6), basta probar que en este caso, para todo $T > 0$ existe una sucesión (w_n) biortogonal a $(\varkappa_k e^{-\mu_k t})$ en $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$.

De acuerdo al Teorema V.1, el sistema (I.1)-(I.6) es espectralmente controlable en tiempo $T = 2L$ (recordemos que L es la longitud total de la red). Entonces, según la Proposición II.8, existe una sucesión $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}_*}$ biortogonal a $(\varkappa_k e^{i\lambda_k t})$ en $L^2(-L, L)$.

Del Teorema II.3 concluimos que existe, para cada $T > 0$, una sucesión (w_n) biortogonal a $(\varkappa_k e^{-\mu_k t})$ en $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$. \square

Observación VII.1. – *Cuando la red es un árbol, la condición $\varkappa_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ coincide con el hecho de que dos subárboles cualesquiera con raíz común tienen espectros disjuntos y esta a su vez es la condición de noderogación considerada en el Capítulo IV.*

Siguiendo el esquema propuesto por Russell en [Ru1], es posible obtener más información sobre la controlabilidad del sistema (1)-(6) cuando se dispone de información sobre la controlabilidad de subespacios de la forma \mathcal{W}^r para la red de cuerdas:

Proposición VII.3. – *Si el subespacio \mathcal{W}^r es controlable para el sistema (I.1)-(I.6) en tiempo $T > 0$ entonces, todos los datos iniciales $\bar{u}_0 \in H$ son controlables a cero en cualquier tiempo $\tau > 0$ para el sistema (1)-(6).*

Demostración. De acuerdo a la Proposición II.9, si \mathcal{W}^r es controlable para el sistema (I.1)-(I.6) en tiempo $T > 0$ entonces, existe una sucesión $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}_*}$ biortogonal a $(\varkappa_k e^{i\lambda_k t})$ en $L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$. Además, existe una constante $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}_*$, la sucesión (v_n) satisface

$$\|v_n\|_{L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})} \leq C\lambda_n^{r-1}. \quad (9)$$

Del Teorema II.3 obtenemos que para cada $\tau > 0$ existe una sucesión (w_n) biortogonal a $(\varkappa_k e^{-\mu_k t})$ en $L^2(-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2})$, para la cual existen constantes positivas C_τ y γ tales que

$$\|w_n\|_{L^2(-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2})} \leq \|v_n\|_{L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})} e^{\gamma\lambda_n}, \quad (10)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

En vista de (9), (10) se obtiene

$$\|w_n\|_{L^2(-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2})} \leq C\lambda_n^{r-1} e^{\gamma\lambda_n}. \quad (11)$$

Por último, de la Proposición II.6 aplicada al problema de momentos (8) resulta, que serán controlables todos los estados iniciales $\bar{u}_0 \in H$ que satisfagan

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left| u_{0,n} e^{-\mu_n \frac{T}{2}} \right| \|w_n\|_{L^2(-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2})} < \infty. \quad (12)$$

En virtud de (11), luego de aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos que la convergencia (12) tendrá lugar si

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_{0,n}|^2 \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{2r-2} e^{2\gamma\lambda_n - \mu_n T} \right) < \infty.$$

Como $\mu_n = \lambda_n^2$ y $\lambda_n \rightarrow \infty$, la suma

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{2r-2} e^{2\gamma\lambda_n - \mu_n T}$$

es convergente para cualquier $r \in \mathbb{R}$ y por ello, serán controlables todos los datos iniciales que cumplan

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_{0,n}|^2 < \infty;$$

es decir, $\bar{u}_0 \in H$. □

El Teorema VII.1 y la Proposición VII.3 permiten obtener información de manera inmediata para la ecuación del calor sobre redes las estrelladas estudiadas en la Sección 8 del Capítulo IV, a partir de los Corolarios IV.5 y IV.6.

Corolario VII.1. – Si las longitudes $\ell_1, \dots, \ell_{n-1}$ de las aristas no controladas de la red estrellada son tales que

- 1) todos los cocientes $\frac{\ell_i}{\ell_j}$ con $i \neq j$ son números irracionales entonces, el sistema (1)-(6) es espectralmente controlable a cero en cualquier tiempo $T > 0$.
- 2) todos los cocientes $\frac{\ell_i}{\ell_j}$ con $i \neq j$ pertenecen a algún conjunto \mathbf{B}_ε entonces, todos los datos iniciales $\bar{u}_0 \in H$ son controlables a cero en cualquier tiempo $T > 0$.

2. Ecuación de Schrödinger

Llamaremos ecuación de Schrödinger al siguiente sistema

$$iu_t^k - u_{xx}^k = 0 \quad \text{en } \mathbb{R} \times [0, \ell_k], \quad k = 1, \dots, M, \quad (13)$$

$$u^1(t, \mathbf{v}_1) = h(t) \quad t \in \mathbb{R}, \quad (14)$$

$$u^{k(j)}(t, \mathbf{v}_j) = 0 \quad t \in \mathbb{R}, \quad j = 2, \dots, N, \quad (15)$$

$$u^k(t, \mathbf{v}) = u^j(t, \mathbf{v}) \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathcal{M}}, \quad k, j \in k_{\mathbf{v}}, \quad (16)$$

$$\sum_{k \in k_{\mathbf{v}}} \partial_n u^k(t, \mathbf{v}) = 0 \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathcal{M}}, \quad (17)$$

$$u^k(0, x) = u_0^k(x) \quad x \in [0, \ell_k], \quad k = 1, \dots, M. \quad (18)$$

Para cada $T > 0$ y $\bar{\phi}_0 = (\phi_0^1, \dots, \phi_0^M) \in V$ el sistema homogéneo (13)-(18) tiene una única solución $\bar{\phi}$ que se expresa por la fórmula

$$\bar{\phi}(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi_{0,n} e^{i\mu_n t} \bar{\theta}_n(x), \quad (19)$$

si $\bar{\phi}_0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi_{0,n} \bar{\theta}_n$. Una vez más, $\mu_n = \lambda_n^2$ son los autovalores y $\bar{\theta}_n$ las autofunciones del problema elíptico asociado a (I.1)-(I.5). El sistema homogéneo (13)-(18) está bien puesto en cualquiera de los espacios V^r ; la solución se expresa también por (19).

El sistema no homogéneo (13)-(18) está bien puesto para cada $T > 0$, $h \in L^2(0, T)$ y dato inicial $\bar{u}_0 \in V'$: existe una única solución \bar{u} de (13)-(18) que satisface

$$\bar{u} \in C([0, T] : V').$$

Para el sistema (13)-(18) consideramos el problema de control: encontrar para qué datos iniciales $\bar{u}_0 \in V'$ existe una función $h \in L^2(0, T)$ tal que la solución \bar{u} de (13)-(18) satisfice

$$\bar{u}(T, x) = \bar{0}.$$

Cuando esto sea posible, diremos que el dato inicial $\bar{u}_0 \in V'$ es controlable en tiempo T .

La siguiente proposición proporciona una caracterización de los datos iniciales controlables en tiempo T .

Proposición VII.4. – El dato inicial $\bar{u}_0 \in V'$ es controlable en tiempo T con control $h \in L^2(0, T)$ si, y sólo si, para todo $\bar{\phi}_0 \in Z$ se verifica la igualdad

$$i\langle \bar{u}_0, \bar{\phi}_0 \rangle_H = \int_0^T h(t) \overline{\partial_n \phi^1}(t, \mathbf{v}_1) dt,$$

donde $\bar{\phi}$ es la solución del sistema homogéneo (13)-(18) con dato inicial $\bar{\phi}_0$.

Esta caracterización puede escribirse en forma de un problema de momentos:

Proposición VII.5. – El dato inicial $\bar{u}_0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_{0,n} \bar{\theta}_n \in V'$ es controlable en tiempo T con control $h \in L^2(0, T)$ si, y sólo si, se verifican las igualdades

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \varkappa_n e^{-i\mu_n t} h(t) dt = u_{0,n} e^{-i\mu_n \frac{T}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (20)$$

Por otro lado, la técnica del HUM nos permite dar la siguiente caracterización alternativa:

Proposición VII.6. – Existen $T > 0$ y una sucesión $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números positivos tales que se verifica la desigualdad

$$\int_0^T |\partial_n \phi^1(t, \mathbf{v}_1)|^2 dt \geq \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k^2 |\phi_{0,k}|^2, \quad (21)$$

para toda solución $\bar{\phi}$ del sistema homogéneo (13)-(18) con dato inicial $\bar{\phi}_0 \in Z$ ó, lo que es equivalente, tiene lugar la desigualdad

$$\int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \varkappa_n a_n e^{i\mu_n t} \right|^2 dt \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n^2 |a_n|^2, \quad (22)$$

para toda sucesión finita (a_n) de números complejos si, y sólo si, el espacio

$$\mathcal{W} = \left\{ \bar{u}_0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_{0,n} \bar{\theta}_n \in V' : \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{c_n^2} |u_{0,n}|^2 < \infty \right\}$$

es controlable en tiempo T .

Teorema VII.2. – El sistema (13)-(18) es espectralmente controlable en cualquier tiempo $T > 0$ si, y sólo si, $\varkappa_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. La necesidad de la condición $\varkappa_n \neq 0$ es inmediata: si $\varkappa_n = 0$ para algún valor de n entonces, la igualdad de la Proposición VII.5 se convierte en

$$u_{0,n} = 0.$$

Por consiguiente, no será posible controlar el dato inicial $\bar{u}_0 = \bar{\theta}_n \in Z$ para el cual $u_{0,n} = 1$.

La demostración de la suficiencia puede obtenerse de la Proposición VII.5. El elemento fundamental lo proporciona la Proposición V.2 que asegura que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{n^2} = \frac{\pi^2}{L^2}.$$

Esto implica que la sucesión (μ_n) satisface

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\mu_n} < \infty, \quad (23)$$

Como se ha indicado en la Sección 3 de Capítulo II, el problema de momentos (20) tendrá solución para toda sucesión finita

$$m_n = \frac{1}{\varkappa_n} u_{0,n} e^{-i\mu_n \frac{T}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

si es posible construir una sucesión biortogonal de la sucesión $(e^{i\mu_n t})$.

Pero la propiedad (23) garantiza, que para todo $\tau > 0$ existe una función entera no nula de tipo exponencial a lo sumo τ , que se anula en cada μ_n (véase Teorema 15, pág. 139 en [Y]). Entonces, para cada $\tau > 0$ existirá una sucesión biortogonal a $(e^{i\mu_n t})$ en $L^2(-\tau, \tau)$. \square

Observación VII.2. – *Es posible también obtener la demostración de la suficiencia de la condición $\varkappa_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ para la controlabilidad espectral del sistema (13)-(18) a partir de la Proposición VII.6. En efecto, como la sucesión (λ_n) tiene densidad superior $D^+(\lambda_n)$ finita entonces, $D^+(\mu_n) = 0$. Al aplicar el Corolario II.5 del Teorema II.6 resulta, que para todo $T > 0$ existen números positivos γ_n , $n \in \mathbb{N}$, tales que*

$$\int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \varkappa_n a_n e^{i\mu_n t} \right|^2 dt \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \varkappa_n^2 \gamma_n^2 |a_n|^2,$$

para toda sucesión finita (a_n) de números complejos. Esta es la desigualdad (21) con $c_n = \varkappa_n \gamma_n$; todos estos números serán positivos si $\varkappa_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Corolario VII.2. – *Para todo $T > 0$ las propiedades del sistema (13)-(18):*

– *continuación única desde el nodo controlado de las soluciones del sistema homogéneo:*

$$\partial_n \phi^1(\cdot, \mathbf{v}_1) = 0 \text{ en } L^2(0; T) \text{ implica } \bar{\phi}_0 = \bar{0};$$

– *continuación espectral única desde el nodo controlado:*

$$\varkappa_n \neq 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N};$$

son equivalentes.

Al igual que para la ecuación del calor, es posible describir subespacios de datos iniciales controlables a partir de la información referida a la ecuación de ondas.

Proposición VII.7. – *Si el subespacio \mathcal{W}^r es controlable para el sistema (I.1)-(I.6) en algún tiempo $T > 0$ entonces, todos los datos iniciales $\bar{u}_0 \in V^{2r-1}$ son controlables a cero en cualquier tiempo $\tau > 0$ para el sistema (13)-(18).*

Demostración. Según la Observación II.6, si el subespacio \mathcal{W}^r es controlable para el sistema (I.1)-(I.6) en tiempo $T > 0$ entonces, se verifica la desigualdad

$$\int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \varkappa_n a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \geq C \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{2(1-r)} |a_n|^2, \quad (24)$$

para toda sucesión finita compleja (a_n) .

Observemos que si \mathcal{W}^r es controlable en tiempo T para el sistema (I.1)-(I.6) entonces (I.1)-(I.6) es espectralmente controlable y por ello $\varkappa_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Además, procediendo como en la Observación III.4, de (24) resulta que existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$C_1 \lambda_n^{1-r} \leq |\varkappa_n| \leq C_2 \lambda_n. \quad (25)$$

Entonces, la desigualdad (24) puede escribirse en la forma equivalente

$$\int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \geq C \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{2(1-r)} |a_n|^2 |\varkappa_n|^{-2}.$$

y de (25) resulta

$$\int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \geq C \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{-2r} |a_n|^2. \quad (26)$$

Si aplicamos el Teorema II.7 a la desigualdad (26) obtenemos

$$\int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e^{i\mu_n t} \right|^2 dt \geq C \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{-2r} |a_n|^2. \quad (27)$$

En vista de (25), a partir de (27) resulta

$$\int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \varkappa_n a_n e^{i\mu_n t} \right|^2 dt \geq C \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{-2r} |a_n|^2 |\varkappa_n|^2 \geq C \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{2(1-2r)} |a_n|^2. \quad (28)$$

Basta ahora notar que, según la Proposición VII.6, que la desigualdad (28) sea válida para toda sucesión finita compleja (a_n) equivale a que todos los datos iniciales $\bar{u}_0 \in V^{2r-1}$ sean controlables en tiempo $\tau > 0$ para el sistema (13)-(18). \square

El Teorema VII.2 y la Proposición VII.7 permiten obtener información de manera inmediata para la ecuación de Schrödinger sobre las redes estrelladas estudiadas en la Sección 8 del Capítulo IV, a partir de los Corolarios IV.5, IV.6 y IV.7.

Corolario VII.3. – Si las longitudes $\ell_1, \dots, \ell_{n-1}$ de las aristas no controladas de la red estrellada son tales que

- 1) todos los cocientes $\frac{\ell_i}{\ell_j}$ con $i \neq j$ son números irracionales entonces, el sistema (13)-(18) es espectralmente controlable en cualquier tiempo $T > 0$.
- 2) todos los cocientes $\frac{\ell_i}{\ell_j}$ con $i \neq j$ pertenecen a algún conjunto \mathbf{B}_ε entonces, el subespacio $V^{2n-4+\varepsilon}$ de datos iniciales para el sistema (13)-(18) es controlable en cualquier tiempo $T > 0$.
- 3) verifican las condiciones (S) entonces, para cada $\varepsilon > 0$ entonces, el subespacio $V^{1+\varepsilon}$ de datos iniciales para el sistema (13)-(18) es controlable en cualquier tiempo $T > 0$.

Observación VII.3. – Todos los resultados de esta sección son válidos para el sistema que resulta al sustituir la ecuación (13) por $iu_t^k + u_{xx}^k = 0$. En este caso, la desigualdad de observabilidad correspondiente es

$$\int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \kappa_n a_n e^{-i\mu_n t} \right|^2 dt \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n^2 |a_n|^2,$$

que, evidentemente, coincide con (22).

3. Un modelo de red de vigas

Consideraremos además el siguiente modelo de red de vigas flexibles controlada desde uno de los nodos exteriores.

$$u_{tt}^i + u_{xxxx}^i = 0 \quad \text{en } \mathbb{R} \times [0, \ell_i], \quad i = 1, \dots, M, \quad (29)$$

$$u^1(t, \mathbf{v}_1) = 0, \quad \partial_n^2 u^1(t, \mathbf{v}_1) = h(t) \quad t \in \mathbb{R}, \quad (30)$$

$$u^{i(j)}(t, \mathbf{v}_j) = 0 \quad t \in \mathbb{R}, \quad j = 2, \dots, N, \quad (31)$$

$$u^i(t, \mathbf{v}) = u^j(t, \mathbf{v}), \quad \partial_n^2 u^i(t, \mathbf{v}) = \partial_n^2 u^j(t, \mathbf{v}) \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}_M, \quad i, j \in I_{\mathbf{v}}, \quad (32)$$

$$\sum_{i \in I_{\mathbf{v}}} \partial_n u^i(t, \mathbf{v}) = \sum_{i \in I_{\mathbf{v}}} \partial_n^3 u^i(t, \mathbf{v}) = 0 \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}_M, \quad (33)$$

$$u^i(0, x) = u_0^i(x), \quad u_t^i(0, x) = u_1^i(x) \quad x \in [0, \ell_i], \quad i = 1, \dots, M. \quad (34)$$

Observemos que en este caso el control actúa a través de la derivada $\partial_n^2 u^1(\cdot, \mathbf{v}_1)$ en el nodo \mathbf{v}_1 .

El sistema (29)-(34) está bien puesto para $h \in L^2(0, T)$ y $\bar{u}_0 \in V$, $\bar{u}_1 \in V'$. El sistema homogéneo (29)-(34) lo está también para $\bar{u}_0 \in V^2$, $\bar{u}_1 \in H$.

Para el sistema (29)-(34) estudiamos el problema de control en tiempo T : *determinar para qué datos iniciales $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in V \times V'$, existe $h \in L^2(0, T)$ tal que la correspondiente solución \bar{u} de (29)-(34) satisfice*

$$\bar{u}(T, \cdot) = \bar{u}_t(T, \cdot) = \bar{0}.$$

Los estados iniciales (\bar{u}_0, \bar{u}_1) para los que existe tal función h serán llamados *controlables en tiempo T* . Diremos que un subespacio de $V \times V'$ es controlable en tiempo T si todos sus elementos lo son. En particular, si $Z \times Z$ es controlable en tiempo T , diremos que el sistema (29)-(34) es *espectralmente controlable en tiempo T* .

Señalemos que Z denota como en los casos anteriores el espacio de las combinaciones lineales finitas de las autofunciones del operador \mathcal{D}_G asociado a (29)-(34). Este es el operador $\mathcal{D}_G : H \rightarrow H$ definido por

$$\mathcal{D}_G(u^1, \dots, u^M) = (u_{xxxx}^1, \dots, u_{xxxx}^M)$$

con las condiciones de contorno

$$u^{i(\mathbf{v})}(\mathbf{v}) = \partial_n^2 u^{i(\mathbf{v})}(\mathbf{v}) = 0,$$

en los nodos exteriores, y

$$u^i(\mathbf{v}) = u^j(\mathbf{v}), \quad \partial_n^2 u^i(\mathbf{v}) = \partial_n^2 u^j(\mathbf{v}) \quad i, j \in I_{\mathbf{v}},$$

$$\sum_{i \in I_{\mathbf{v}}} \partial_n u^i(\mathbf{v}) = \sum_{i \in I_{\mathbf{v}}} \partial_n^3 u^i(\mathbf{v}) = 0$$

en los interiores.

El operador \mathcal{D}_G coincide con el cuadrado del operador elíptico $-\Delta_G$ asociado al problema (I.1)-(I.6). Por ello, las autofunciones de \mathcal{D}_G coinciden con las autofunciones $(\bar{\theta}_n)$ de $-\Delta_G$ y los autovalores son (μ_n^2) . En particular, el espacio Z para la ecuación (29)-(34) coincide con el de la ecuación (I.1)-(I.6). Además, la solución del sistema homogéneo (29)-(34) con datos iniciales

$$\bar{\phi}_0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi_{0,n} \bar{\theta}_n, \quad \bar{\phi}_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi_{1,n} \bar{\theta}_n,$$

se expresa mediante la fórmula

$$\bar{\phi}(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\phi_{0,n} \cos \mu_n t + \frac{\phi_{1,n}}{\mu_n} \operatorname{sen} \mu_n t \right) \bar{\theta}_n(x).$$

Proposición VII.8. – *El estado inicial $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in V \times V'$ es controlable en tiempo T con control $h \in L^2(0, T)$ si, y sólo si, para todo $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in Z \times Z$ se verifica la igualdad*

$$\langle \bar{\phi}_1, \bar{u}_0 \rangle_{V' \times V} - \langle \bar{u}_1, \bar{\phi}_0 \rangle_{V' \times V} = \int_0^T h(t) \partial_n \phi^1(t, \mathbf{v}_1) dt, \quad (35)$$

donde $\bar{\phi}$ es la solución del sistema homogéneo (29)-(34) con estado inicial $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1)$.

Está claro, que es suficiente comprobar la igualdad (35) para los estados iniciales de la forma $(\bar{0}, \bar{\theta}_n)$ y $(\bar{\theta}_n, \bar{0})$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces, si definimos $\mu_n = -\mu_{-n}$ para $n < 0$, la Proposición VII.8 da lugar a un problema de momentos:

Proposición VII.9. – *El estado inicial $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in V \times V'$ es controlable en tiempo T con control $h \in L^2(0, T)$ si, y sólo si, se verifican las igualdades*

$$\int_0^T \varkappa_{|n|} h(t) e^{i\mu_n t} dt = u_{1,|n|} - i\mu_n u_{0,|n|}, \quad (36)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}_*$.

Observemos que el problema de momentos (36) es el mismo que para la ecuación de Schrödinger, salvo que ahora la sucesión $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ debe ser sustituida por $(\mu_n)_{n \in \mathbb{Z}_*} = (\pm\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Por ello, de manera similar a como se demuestra el Teorema VII.2 es posible probar

Teorema VII.3. – *El sistema (29)-(34) es espectralmente controlable en cualquier tiempo $T > 0$ si, y sólo si, $\varkappa_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Por otra parte, la técnica del HUM nos permite obtener, a partir de la Proposición VII.8

Proposición VII.10. – Existen $T > 0$ y una sucesión $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números positivos tales que se verifica la desigualdad

$$\int_0^T |\partial_n \phi^1(t, \mathbf{v}_1)|^2 dt \geq \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k^2 (\mu_n^2 \phi_{0,k}^2 + \phi_{1,k}^2), \quad (37)$$

para toda solución $\bar{\phi}$ del sistema homogéneo (29)-(34) con estado inicial $(\bar{\phi}_0, \bar{\phi}_1) \in Z \times Z$ ó, lo que es equivalente, tiene lugar la desigualdad

$$\int_0^T \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} \alpha_{|n|} |a_n| e^{i\mu_n t} \right|^2 dt \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n^2 |a_n|^2, \quad (38)$$

para toda sucesión finita (a_n) de números complejos que verifica $a_{-n} = \overline{a_n}$ si, y sólo si, el espacio

$$\mathcal{W} = \left\{ (\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in V \times V' : \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{c_n^2} u_{0,n}^2 + \frac{1}{c_n^2 \mu_n^2} u_{1,n}^2 \right) < \infty \right\}$$

es controlable en tiempo T .

Al igual que para el sistema (13)-(18), es posible identificar subespacios controlables de estados iniciales del sistema (29)-(34) a partir de subespacios controlables para el sistema (I.1)-(I.6).

Proposición VII.11. – Si el subespacio \mathcal{W}^r es controlable para el sistema (I.1)-(I.6) en tiempo $T > 0$ entonces, todos los datos iniciales $(\bar{u}_0, \bar{u}_1) \in V^{2r+1} \times V^{2r-1}$ son controlables a cero en cualquier tiempo $\tau > 0$ para el sistema (29)-(34).

Como consecuencia, para las redes estrelladas tendremos

Corolario VII.4. – Si las longitudes $\ell_1, \dots, \ell_{n-1}$ de las aristas no controladas de la red estrellada son tales que

- 1) todos los cocientes $\frac{\ell_i}{\ell_j}$ con $i \neq j$ son números irracionales entonces, el sistema (29)-(34) es espectralmente controlable en cualquier tiempo $T > 0$.
- 2) todos los cocientes $\frac{\ell_i}{\ell_j}$ con $i \neq j$ pertenecen a algún conjunto \mathbf{B}_ε entonces, el subespacio $V^{2n-2+\varepsilon} \times V^{2n-4+\varepsilon}$ de estados iniciales para el sistema (29)-(34) es controlable en cualquier tiempo $T > 0$.
- 3) verifican las condiciones (S) entonces, para cada $\varepsilon > 0$ entonces, el subespacio $V^{3+\varepsilon} \times V^{1+\varepsilon}$ de estados iniciales para el sistema (29)-(34) es controlable en cualquier tiempo $T > 0$.

Conclusiones

1. Resumen de los resultados principales

1.1. Redes de cuerdas

El resultado fundamental sobre controlabilidad espectral de redes arbitrarias de cuerdas desde un nodo exterior está contenido en el Teorema V.1: *la red es espectralmente controlable en algún tiempo finito si, y sólo si, se verifica la propiedad de continuación espectral única desde el nodo controlado. Además, cuando la continuación espectral única tiene lugar, la red es espectralmente controlable en cualquier tiempo mayor que dos veces la longitud total de la red; este es el tiempo mínimo en que es posible conseguir el control espectral.* Desde este punto de vista, las redes de cuerdas se comportan esencialmente como una sola cuerda cuya longitud coincide con la longitud total de la red. La razón fundamental está en que la sucesión de autovalores de la red es asintóticamente equivalente a la sucesión de autovalores de una cuerda de la longitud indicada (Proposición V.2).

La diferencia entre ambos casos consiste en que, para una cuerda la propiedad de continuación espectral única se verifica siempre, mientras que para cualquier configuración topológica no trivial de la red, existen valores de las longitudes para las cuales la continuación espectral única no tiene lugar. Esto provoca que, a diferencia de las cuerdas que son exactamente controlables, la controlabilidad exacta de las redes no se consiga nunca (Teorema I.2). En este aspecto el control exterior de una red es análogo al control de una cuerda desde un punto interior.

La propiedad de controlabilidad espectral permite asegurar la controlabilidad de un subespacio de datos iniciales que se puede describir explícitamente en función de los autovalores de la red y los valores de las autofunciones en el nodo controlado (Observación V.1).

Si la red tiene una configuración topológica específica entonces puede darse información más precisa.

Redes en forma de árbol. Cuando el grafo que soporta la red es un árbol puede obtenerse una caracterización completa de los árboles que verifican la propiedad de continuación espectral única (Proposición IV.13) y con ello, de los árboles para los cuales tiene lugar la controlabilidad espectral en tiempo *igual* a dos veces la longitud de la red. El conjunto de los árboles con una configuración

topológica dada para los que la continuación espectral única falla es de medida cero (Proposición IV.15). Aunque estos resultados pueden obtenerse a partir del Teorema V.1, la técnica utilizada en el Capítulo IV, basada esencialmente en la representación de las soluciones por medio de la fórmula de D'Alembert, permite probar la controlabilidad espectral en el tiempo mínimo y además, proporciona una desigualdad de observabilidad con pesos (Teorema IV.2) que se calculan explícitamente en función de los autovalores.

Además, algunos resultados tienen interés independiente. Tal es el caso de las condiciones de compatibilidad $\mathcal{P}u_t(\cdot, \mathbf{v}) + \mathcal{Q}u_x(\cdot, \mathbf{v}) = 0$ en el nodo controlado (Proposición IV.5). A partir de ellas se obtienen, por ejemplo, una ecuación para el cálculo de los autovalores (Proposición IV.11) y la propiedad de pseudo-periodicidad de las soluciones del sistema homogéneo (Observación IV.3) que implica que aumentar el tiempo de control no conduce a mejorar los resultados de controlabilidad (Proposición IV.4).

Redes estrelladas. Las redes estrelladas son un caso particular de árboles y por ello pueden aplicarse los resultados del Teorema IV.3. En este caso, la condición de continuidad espectral única equivale a que los cocientes de las longitudes de las cuerdas no controladas sean números irracionales (Sección IV.8.1). Además, es posible identificar espacios de datos iniciales controlables de la forma \mathcal{W}^r (que son esencialmente espacios de Sóbólev sobre las cuerdas con condiciones de contorno y compatibilidad en los nodos múltiples apropiadas). La existencia de tales subespacios depende de las propiedades de aproximación diofántica de los cocientes de las longitudes.

Para estas redes es posible demostrar que cuando el tiempo de control es menor que el doble de la longitud de la red no sólo no es cierta la propiedad de controlabilidad espectral desde un nodo exterior, sino que tampoco tiene lugar la controlabilidad aproximada. En la Sección III.9 se ha construido un ejemplo de solución del correspondiente sistema homogéneo para la cual la propiedad de continuación única desde el nodo controlado es falsa en tiempos menores que el doble de la longitud de la red.

1.2. Control simultáneo de redes de cuerdas

Control simultáneo de árboles desde un nodo exterior. Los resultados obtenidos para el problema de control simultáneo de un número finito de redes en forma de árbol desde un nodo exterior (Corolario IV.4) son similares a los que corresponden a un sólo árbol: *las redes son simultáneamente espectralmente controlables en algún tiempo finito si, y sólo si, cada una de ellas es espectralmente controlable y sus espectros son disjuntos. El tiempo mínimo de control es la suma de los tiempos mínimos de control de las redes.*

Cuando las redes son simultáneamente espectralmente controlables es posible indicar subespacios de estados iniciales controlables, definidos explícitamente en función de los autovalores de las redes (Proposición IV.16). En particular, si las redes que se controlan simultáneamente son cuerdas, para ciertos valores de sus longitudes pueden indicarse espacios de Sóbólev de estados iniciales controlables (Corolarios IV.8 y IV.9). A su vez, se prueba (Corolario III.3) que, en dependencia de las longitudes de las cuerdas, el espacio de datos iniciales controlables puede ser arbitrariamente pequeño, es decir, existen estados iniciales con coeficientes de Fourier que crecen arbitrariamente rápido que no son controlables en ningún tiempo finito.

Control en todos los nodos con cuatro funciones. La combinación de los resultados sobre controlabilidad simultánea de cuerdas permiten resolver el problema sobre cuántos controles distintos son necesarios para, al aplicarlos en todos los nodos de una red general, conseguir la controlabilidad espectral. La aplicación del Teorema de los Cuatro Colores permite asegurar que, bajo ciertas condiciones de irracionalidad de las longitudes de las cuerdas, cuatro controles (uno de ellos además, idénticamente igual a cero) son suficientes para controlar la red en un tiempo T^* (y entonces en cualquier tiempo mayor que T^*) que es menor que dos veces la longitud total de la red (Proposición V.5).

Control interior simultáneo de cuerdas. El control simultáneo de dos cuerdas de densidades distintas desde un subconjunto abierto resulta ser una propiedad más robusta: las cuerdas son simultáneamente exactamente controlables en cualquier tiempo mayor que los tiempos característicos de ambas cuerdas (Corolario VI.1). Sin embargo, cuando las cuerdas tienen la misma densidad los resultados son completamente análogos a los que se obtienen para el control simultáneo desde un extremo (Corolarios VI.2 y VI.3).

1.3. Otras ecuaciones sobre redes

Para las ecuaciones sobre redes de tipo Shrödinger (Teorema VII.2), del calor (Teorema VII.1) y de vigas (Teorema VII.3) consideradas, la condición de continuación espectral única desde el nodo controlado es necesaria y suficiente para la controlabilidad espectral en cualquier tiempo arbitrariamente pequeño.

Cuando se conocen espacios de estados iniciales controlables del tipo \mathcal{W}^r para la ecuación de ondas sobre una red (que es el caso, por ejemplo, de las redes estrelladas), entonces es posible identificar subespacios de datos iniciales controlables para las ecuaciones del calor, de Schrödinger y de vigas sobre esa red (Proposiciones VII.3, VII.7, VII.11, respectivamente). En particular, la ecuación del calor será exactamente controlable.

2. Líneas futuras

El contexto de las multi-estructuras es extremadamente rico y plantea innumerables problemas cuya naturaleza matemática es muy compleja. En muchos casos, cuestiones básicas como la existencia y unicidad de soluciones permanecen abiertas. El tratamiento de estos problemas conducirá inevitablemente al surgimiento de nuevas herramientas matemáticas.

Consideramos que sería natural continuar el estudio iniciado en este trabajo en tres líneas fundamentales:

1.– Estudio de modelos más complejos de redes de cuerdas o vigas homogéneas que proporcionen una descripción más realista del movimiento de estos objetos y que tengan en cuenta su carácter tridimensional.

- 2.– Estudio de ecuaciones con coeficientes variables sobre grafos. En base a los resultados de [Me] y [vB3], es de esperar que la técnica utilizada en los Capítulos V y VII pueda ser adaptada a este caso.
- 3.– Estudio de sistemas de objetos multidimensionales acoplados, ya sea en forma de una red o a través de las condiciones de contorno. Ejemplos sencillos podrían ser haces de membranas o placas conectadas a lo largo de una hipersuperficie.

Además, en relación con los problemas resueltos en esta memoria,

– sería útil encontrar una descripción similar a la hecha en el Capítulo IV para árboles en el caso de redes generales que contienen ciclos basada en la fórmula de representación de D'Alembert. Esto permitiría, en particular, indicar subespacios de estados iniciales de la red controlables desde un nodo exterior, decidir qué ocurre en el tiempo mínimo de control y encontrar condiciones que garanticen la controlabilidad simultánea de redes generales.

– sería interesante esclarecer qué ocurre con la controlabilidad aproximada de redes generales cuando el tiempo de control es menor que el doble de la longitud de la red.

Apéndice A

Algunas consecuencias de teoremas de aproximación diofántica

En este apartado reunimos algunos resultados que han sido utilizados en las demostraciones de diferentes teoremas en el texto principal. Todos ellos tienen en común el ser consecuencias de teoremas relativos a la aproximación de números reales por números racionales.

Para $\eta \in \mathbb{R}$ denotamos por $|||\eta|||$ la distancia desde η al conjunto \mathbb{Z} :

$$|||\eta||| := \min_{x \in \mathbb{Z}} |\eta - x|$$

y por $\mathbf{E}(\eta)$ al entero¹ más cercano a η :

$$|\eta - \mathbf{E}(\eta)| = |||\eta|||.$$

Observemos que $0 \leq |||\eta||| \leq \frac{1}{2}$ y además que η puede expresarse como

$$\eta = \mathbf{E}(\eta) + \mathbf{F}(\eta), \tag{1}$$

donde

$$|\mathbf{F}(\eta)| = |||\eta|||, \quad -\frac{1}{2} \leq \mathbf{F}(\eta) \leq \frac{1}{2}.$$

Dados los números reales positivos ℓ_1, \dots, ℓ_N , definimos la función

$$\mathbf{a}(\lambda) = \mathbf{a}(\lambda, \ell_1, \dots, \ell_N) := \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} |\operatorname{sen} \lambda \ell_j|.$$

Esta función aparece con frecuencia en los problemas considerados. Nuestro objetivo es encontrar condiciones sobre los números ℓ_1, \dots, ℓ_N que garanticen que para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ la función

$$\mathbf{a}(\lambda) \lambda^\alpha$$

permanezca acotada inferiormente cuando $\lambda \rightarrow \infty$.

¹Si $|||\eta||| = \frac{1}{2}$ existirán dos números con esta propiedad: $\eta + \frac{1}{2}$ y $\eta - \frac{1}{2}$. En este caso $\mathbf{E}(\eta)$ denotará a alguno de estos dos valores.

Para $m \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, N$, denotamos

$$\mathbf{z}^i(m) := \mathbf{z}^i(m, \ell_1, \dots, \ell_N) := \prod_{j \neq i} \left\| \frac{\ell_j}{\ell_i} m \right\|,$$

$$\mathbf{m}^i(\lambda) := \mathbf{m}^i(\lambda, \ell_1, \dots, \ell_N) := \mathbf{E} \left(\frac{\ell_i}{\pi} \lambda \right).$$

La siguiente proposición permite reducir el problema planteado a uno de aproximación por racionales.

Proposición A.1. – *Existe una constante positiva C tal que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se verifica la desigualdad*

$$\mathbf{a}(\lambda) \geq C \min_{i=1, \dots, N} \mathbf{z}^i(\mathbf{m}^i(\lambda)).$$

Demostración. Observemos inicialmente que todo $x \in \mathbb{R}$ puede expresarse en la forma

$$x = \pi \mathbf{E} \left(\frac{x}{\pi} \right) + \pi \mathbf{F} \left(\frac{x}{\pi} \right).$$

Entonces resulta

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \pi \mathbf{F} \left(\frac{x}{\pi} \right). \quad (2)$$

Teniendo en cuenta que si $|x| \leq \frac{1}{2}$ se cumplen las desigualdades

$$2|x| \leq |\operatorname{sen} \pi x| \leq \pi|x|,$$

de (2) se obtiene, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$2 \left\| \frac{x}{\pi} \right\| \leq |\operatorname{sen} x| \leq \pi \left\| \frac{x}{\pi} \right\|. \quad (3)$$

A partir de esta desigualdad, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ tendremos que

$$2 \left\| \mathbf{m}^i(\lambda) \frac{\ell_j}{\ell_i} \right\| \leq \operatorname{sen} \left(\mathbf{m}^i(\lambda) \frac{\ell_j}{\ell_i} \pi \right). \quad (4)$$

Si denotamos

$$\gamma^i = \mathbf{F} \left(\frac{\ell_i}{\pi} \lambda \right),$$

entonces

$$\mathbf{m}^i(\lambda) = \mathbf{E} \left(\frac{\ell_i}{\pi} \lambda \right) = \frac{\ell_i}{\pi} \lambda - \mathbf{F} \left(\frac{\ell_i}{\pi} \lambda \right) = \frac{\ell_i}{\pi} \lambda - \gamma^i.$$

Sustituyendo esta expresión de $\mathbf{m}^i(\lambda)$ en el miembro derecho de (4) resulta

$$\begin{aligned} 2 \left\| \mathbf{m}^i(\lambda) \frac{\ell_j}{\ell_i} \right\| &\leq \left| \operatorname{sen} \left(\ell_j \lambda - \gamma^i \frac{\ell_j}{\ell_i} \pi \right) \right| = \left| \operatorname{sen} \ell_j \lambda \cos \gamma^i \frac{\ell_j}{\ell_i} \pi - \cos \ell_j \lambda \operatorname{sen} \gamma^i \frac{\ell_j}{\ell_i} \pi \right| \\ &\leq |\operatorname{sen} \ell_j \lambda| + |\gamma^i| \frac{\ell_j}{\ell_i} \pi. \end{aligned}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la desigualdad (3) se obtiene

$$|\gamma^i| = \left\| \lambda \frac{\ell_i}{\pi} \right\| \leq \frac{1}{2} |\operatorname{sen} \lambda \ell_i|.$$

Podemos así concluir que para todo $i = 1, \dots, N$ y todo $j \neq i$

$$\left| \left| \mathbf{m}^i(\lambda) \frac{\ell_j}{\ell_i} \right| \right| \leq \frac{1}{2} |\operatorname{sen} \ell_j \lambda| + \frac{\pi \ell_j}{4 \ell_i} |\operatorname{sen} \lambda \ell_i|.$$

Multiplicando estas desigualdades, obtenemos que existe una constante $C > 0$ tal que para todo $i = 1, \dots, N$, se cumple

$$\mathbf{z}^i(\mathbf{m}^i(\lambda)) = \prod_{j \neq i} \left| \left| \frac{\ell_j}{\ell_i} \mathbf{m}^i(\lambda) \right| \right| \leq C |\operatorname{sen} \lambda \ell_i| + \frac{1}{2^{N-1}} \prod_{j \neq i} |\operatorname{sen} \ell_j \lambda|. \quad (5)$$

Con esto resulta muy sencillo demostrar la afirmación de la proposición. Probaremos que si (λ_n) es una sucesión tal que $\mathbf{a}(\lambda_n) \rightarrow 0$ entonces, existe un valor i_0 de i tal que $\mathbf{z}^{i_0}(\mathbf{m}^{i_0}(\lambda_n)) \rightarrow 0$.

En efecto, observemos que si la sucesión (λ_n) es tal que $\mathbf{a}(\lambda_n) \rightarrow 0$ entonces, para todo i

$$\prod_{j \neq i} |\operatorname{sen} \ell_j \lambda_n| \rightarrow 0.$$

Existirá entonces algún i_0 tal que $|\operatorname{sen} \lambda_n \ell_{i_0}| \rightarrow 0$. Con esto, de la desigualdad (5) para $i = i_0$ resultaría

$$\mathbf{z}^{i_0}(\mathbf{m}^{i_0}(\lambda_n)) \rightarrow 0.$$

Esto demuestra la proposición. □

Corolario A.1. – Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Si para cada $i = 1, \dots, N$, los cocientes $\frac{\ell_j}{\ell_i}$, $j = 1, \dots, N$, tienen la propiedad de que existe una constante $C_i > 0$ tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$m^\alpha \prod_{j \neq i} \left| \left| \frac{\ell_j}{\ell_i} m \right| \right| \geq C_i, \quad (6)$$

entonces

$$\mathbf{a}(\lambda) \lambda^\alpha \geq C,$$

para todo $\lambda > 0$.

En lo que sigue veremos algunos teoremas sobre aproximación racional que proporcionan condiciones suficientes para que se cumpla una desigualdad del tipo (6).

Recordemos que un número real ξ es llamado algebraico si ξ es raíz de algún polinomio con coeficientes racionales. El conjunto \mathbb{A} de los números algebraicos es un subcuerpo de \mathbb{R} . La medida de Lebesgue de \mathbb{A} es igual a cero, pero \mathbb{A} es denso en \mathbb{R} ; además $\mathbb{A} \setminus \mathbb{Q}$ también lo es. Se dice que el número algebraico ξ es de orden p si el polinomio con coeficientes racionales de grado mínimo que se anula en ξ es de grado p .

Un problema clásico en Teoría de Números es: dados $\xi, \alpha \in \mathbb{R}$, determinar si la inecuación

$$\left| \left| \xi m \right| \right| \leq \frac{1}{m^\alpha}$$

tiene soluciones $m \in \mathbb{Z}$. Esto equivale a que existan $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\left| \xi - \frac{n}{m} \right| \leq \frac{1}{m^{\alpha+1}}.$$

La relevancia de este problema está relacionada con el siguiente teorema debido a Liouville:

Teorema A.1 (Liouville). – Si ξ es un número algebraico de orden $p \geq 2$, entonces la inecuación

$$\left| \xi - \frac{n}{m} \right| \leq \frac{1}{m^p}$$

no tiene soluciones $n, m \in \mathbb{Z}$.

Este hecho permitió a Liouville demostrar que no todos los números son algebraicos, al construir ejemplos explícitos de números $\xi \in \mathbb{R}$, conocidos como números de Liouville, uno de los cuales es

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n^{n^2}},$$

tales que (6) tiene solución para todo p . Actualmente este hecho puede parecer sencillo, pues claramente el conjunto de los números algebraicos tiene medida de Lebesgue igual a cero, de modo que la mayoría de los números reales no lo son. Sin embargo, en su momento este resultado tuvo una gran relevancia.

Posteriormente, Roth demostró un resultado mucho más fuerte:

Teorema A.2 (Roth, [R]). – Si ξ es un número algebraico de orden $p \geq 2$, entonces la inecuación

$$\left| \xi - \frac{n}{m} \right| \leq \frac{1}{m^2} \tag{7}$$

tiene a lo sumo un número finito de soluciones $n, m \in \mathbb{Z}$.

Los siguientes resultados proporcionan información adicional

Proposición A.2 ([C], pág. 120). – Para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $\mathbf{B}_\varepsilon \subset \mathbb{R}$, tal que la medida de Lebesgue de $\mathbb{R} \setminus \mathbf{B}_\varepsilon$ es igual a cero, y una constante $C_\varepsilon > 0$ para los cuales, si $\xi \in \mathbf{B}_\varepsilon$ entonces,

$$|||\xi m||| \geq \frac{C_\varepsilon}{m^{1+\varepsilon}}.$$

Por otra parte, cuando $\varepsilon = 0$ puede darse una respuesta completa. Sea \mathcal{F} el conjunto de todos los números irracionales $\eta \in \mathbb{R}$ tales que si $[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$ es el desarrollo de η en fracción continua (veáse, por ejemplo, [C]) entonces, la sucesión (a_n) es acotada. El conjunto \mathcal{F} es no numerable y tiene medida de Lebesgue igual a cero.

Proposición A.3 ([La], Teorema 6, pág. 24). – Existe una constante positiva C tal que

$$|||\xi m||| \geq \frac{C}{m},$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, si, y sólo si $\xi \in \mathcal{F}$.

En particular, \mathcal{F} está contenido en los conjuntos \mathbf{B}_ε para todo $\varepsilon > 0$.

El siguiente teorema debido a W. Schmidt proporciona información sobre la aproximación simultánea de varios números reales por racionales con el mismo denominador n .

Teorema A.3 (W. Schmidt, [S]). — Si los números ξ_1, \dots, ξ_N son algebraicos y $1, \xi_1, \dots, \xi_N$ son linealmente independientes sobre el cuerpo \mathbb{Q} , para todo $\varepsilon > 0$, la ecuación

$$|||n\xi_1||| \cdot |||n\xi_2||| \cdots |||n\xi_N||| n^{1+\varepsilon} \leq 1$$

tiene, a lo sumo, una cantidad finita de soluciones $n \in \mathbb{N}$.

Una consecuencia inmediata de este teorema es que, si los números ξ_1, \dots, ξ_N son algebraicos y $1, \xi_1, \dots, \xi_N$ son \mathbb{Q} -linealmente independientes, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|||n\xi_1||| \cdot |||n\xi_2||| \cdots |||n\xi_N||| n^{1+\varepsilon} \geq C_\varepsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como contrapartida, Schmidt demostró la siguiente versión más exacta del teorema de Dirichlet.

Teorema A.4 (W. Schmidt, [S]). — Si ξ^1, \dots, ξ^M son números reales y $\varepsilon < \frac{1}{M}$ entonces, para una cantidad infinita de valores de $p \in \mathbb{Z}$, existen números enteros $q_i(p)$, $i = 1, \dots, M$ tales que

$$|p\xi_i - q_i(p)| \leq \frac{1}{p^\eta} \quad i = 1, \dots, M. \quad (8)$$

Definición A.1. — Diremos que los números reales ℓ_1, \dots, ℓ_N verifican las condiciones (S) si

- ℓ_1, \dots, ℓ_N son linealmente independientes sobre el cuerpo \mathbb{Q} de los números racionales;
- los cocientes $\frac{\ell_i}{\ell_j}$ son números algebraicos para $i, j = 1, \dots, N$.

Observemos que si ℓ_1, \dots, ℓ_N verifican las condiciones (S) entonces, para cada i los cocientes $\frac{\ell_j}{\ell_i}$, $j = 1, \dots, N$, satisfacen las condiciones del teorema de Schmidt. En efecto, si ℓ_i y ℓ_j son números algebraicos, el cociente de ellos también lo es. Además, si

$$\alpha_1 \frac{\ell_1}{\ell_i} + \cdots + \alpha_{i-1} \frac{\ell_{i-1}}{\ell_i} + \alpha_i \cdot 1 + \alpha_{i+1} \frac{\ell_{i+1}}{\ell_i} + \cdots + \alpha_N \frac{\ell_N}{\ell_i} = 0, \quad \alpha_i \in \mathbb{Q},$$

entonces

$$\alpha_1 \ell_1 + \cdots + \alpha_N \ell_N = 0, \quad \alpha_i \in \mathbb{Q},$$

y por ello, si ℓ_1, \dots, ℓ_N son linealmente independientes sobre \mathbb{Q} , resultará $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, N$, por lo que $\frac{\ell_j}{\ell_i}$, $j = 1, \dots, N$, también lo son.

Combinando estos resultados con el Corolario A.1 obtenemos

Corolario A.2. – Sean ℓ_1, \dots, ℓ_N números positivos. Entonces,

- 1) Si para todos los valores $i, j = 1, \dots, N$, $i \neq j$, los cocientes $\frac{\ell_i}{\ell_j}$ pertenecen a \mathbf{B}_ε entonces, existe una constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\mathbf{a}(\lambda) \geq \frac{C_\varepsilon}{\lambda^{N-1+\varepsilon}},$$

para todo $\lambda > 0$. En particular, si todos los cocientes pertenecen a \mathcal{F} entonces, esta desigualdad tiene lugar con $\varepsilon = 0$.

- 2) Si los números ℓ_1, \dots, ℓ_N verifican las condiciones (S) entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe una constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\mathbf{a}(\lambda) \geq \frac{C_\varepsilon}{\lambda^{1+\varepsilon}},$$

para todo $\lambda > 0$.

Proposición A.4. – Sea (ω_n) una sucesión no acotada de soluciones positivas de la ecuación

$$\sum_{i=0}^N \left(\cos \ell_i \omega \prod_{j \neq i} \sin \ell_j \omega \right) = 0 \quad (9)$$

y supongamos que los números ℓ_0, \dots, ℓ_N verifican las condiciones (S). Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe una constante C_ε tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $i = 0, \dots, N$, tiene lugar la desigualdad

$$|\sin \ell_i \omega_n| \geq \frac{C_\varepsilon}{\omega_n^{1+\varepsilon}}.$$

Demostración. Es similar a la de la Proposition A.1. Demostraremos que existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $i = 0, \dots, N$, se cumple la desigualdad

$$\prod_{j \neq i} \left| \left| \frac{\ell_j}{\ell_i} \mathbf{m}^i(\omega_n) \right| \right| \leq C |\sin \omega_n \ell_i|. \quad (10)$$

Esto, teniendo en cuenta el teorema de Schmidt, daría la afirmación de la proposición.

Para probar (10) es suficiente ver que si $|\sin \omega_n \ell_i| \rightarrow 0$ entonces

$$\prod_{j \neq i} \left| \left| \frac{\ell_j}{\ell_i} \mathbf{m}^i(\omega_n) \right| \right| \rightarrow 0. \quad (11)$$

En efecto, si $|\sin \omega_n \ell_0| \rightarrow 0$ (hemos tomado $i = 0$ para simplificar las notaciones) entonces, de la igualdad (9) resulta

$$\prod_{j=1}^N |\sin \ell_j \omega_n| \rightarrow 0. \quad (12)$$

Por otra parte, la desigualdad (5) obtenida en la demostración de la Proposición A.1, nos permite asegurar que

$$\prod_{j=1}^N \left| \left| \frac{\ell_j}{\ell_0} \mathbf{m}^0(\omega_n) \right| \right| \leq C |\sin \omega_n \ell_0| + \frac{1}{2^N} \prod_{j=1}^N |\sin \ell_j \omega_n|.$$

De aquí, en base (12) y que $|\sin \omega_n \ell_0| \rightarrow 0$ resulta (11). Esto demuestra la afirmación. \square

Bibliografía

- [AH] K. Appel, W. Haken, *Every planar map is four colorable*, Illinois Journal of Mathematics **21** (1977), 429–567.
- [AI] S. A. Avdonin, S. A. Ivanov, *Families of exponentials: The method of moments in controllability problems for distributed parameter systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [AM1] S.A. Avdonin, W. Moran, *Ingham type inequalities and Riesz bases of divided differences*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., por aparecer.
- [AM2] S.A. Avdonin, W. Moran, *Simultaneous control problems for systems of elastic strings and beams*, Systems Control Lett. **44:2** (2001), 147–155.
- [AM3] S.A. Avdonin, W. Moran, *Simultaneous controllability of elastic systems*, in: I.I. Eremin, I. Lasiecka, V.I. Maksimov, (Eds.), Proceedings of the International Conference on Distributed Systems, Ekaterinburg, Russia, 30 May–2 June, 2000, pp. 28–31, IMM UrO RAN, 2000.
- [AT] S.A. Avdonin, M. Tucsnak, *Simultaneous controllability in sharp time for two elastic strings*, ESAIM:COCV **6** (2001), 259–273.
- [Ba] N.K. Bari, *Biorthogonal systems and bases in Hilbert spaces*, Učen. Zap. Mosk. Gos. Univ. **4** (1951), no. 148, 68–107.
- [vB1] J. von Below, *A characteristic equation associated to an eigenvalue problem on c^2 -networks*, Linear Alg. Appl. **71** (1985), 309–325.
- [vB2] J. von Below, *Classical solvability of linear parabolic equations on networks*, J. Diff. Eq. **72** (1988), 316–337.
- [vB3] J. von Below, *Parabolic network equations*, Habilitation Thesis, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, 1993.
- [B] A. Beurling, *The collected works of Arne Beurling*, L. Carleson, P. Malliavin, J. Neuberger, J. Wermer, (Eds.), vol. 2 Harmonic Analysis, Birkhäuser, Boston, 1989.
- [BKL1] C. Baiocchi, V. Komornik, P. Loreti, *Ingham-Beurling type theorems with weakened gap conditions*, Acta Math. Hungar., por aparecer.
- [BKL2] C. Baiocchi, V. Komornik, P. Loreti, *Ingham type theorems and applications to control theory*, Boll. Un. Mat. Ital. **B 8 (II-B)** (1999), 33–63.
- [BKL3] C. Baiocchi, V. Komornik, P. Loreti, *Généralisation d'un théorème de Beurling et application à la théorie du contrôle*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I **330** (2000), 281–286.
- [BM] A. Beurling, P. Malliavin, *On the closure of characters and zeros of entire functions*, Acta Math. **118** (1967), 79–93.
- [Br] H. Brésiz, *Análisis funcional: Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial, 1984.
- [C] J.M. Cassels, *An introduction to diophantine approximation*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966.
- [Ca] C. Castro, *Boundary controllability of the one-dimensional wave equation with rapidly oscillating density*, Asymptotic Analysis **20** (1999), 317–350.
- [CDK] G. Chen, M. Delfour, A. Krall, G. Payre, *Modelling, stabilization and control of serially connected beams*, SIAM J. Control Opt. **25** (1987), 526–546.
- [CH] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, vol. I, Interscience, New York, 1962.
- [ChZh] G. Chen, J. Zhou, *The wave propagation method for the analysis of boundary stabilization in vibrating structures*, SIAM J. Appl. Math. **50** (1990), 1254–1283.
- [CZ] C. Castro, E. Zuazua, *Une remarque sur les séries de Fourier non-harmoniques et son application à la contrôlabilité des cordes avec densité singulière*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I **332** (1996), 365–370.
- [DN] B. Dekoninck, S. Nicaise, *Control of networks of Euler-Bernoulli beams*, ESAIM:COCV **4** (1999), 57–81.
- [DZ1] R. Dáger, E. Zuazua, *Observation and control of vibrations in tree-shaped networks of strings*, por aparecer.

- [DZ2] R. Dáger, E. Zuazua, *Controllability of star-shaped networks of strings*, In: Bermúdez A. et al. (Eds), Fifth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, SIAM Proceedings (2000), 1006–1010.
- [DZ3] R. Dáger, E. Zuazua, *Controllability of star-shaped networks of strings*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I **332** (2001), 621–626.
- [DZ4] R. Dáger, E. Zuazua, *Controllability of tree-shaped networks of vibrating strings*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I **332** (2001), 1087–1092.
- [F] H. Fattorini, *On complete controllability of linear systems*, J. Diff. Eq. **3** (1967), 391–402.
- [F1] H. O. Fattorini, *Estimates for sequences biorthogonal to certain complex exponentials and boundary control of the wave equation*, Lectures Notes in Control and Inform. Sci. **2** (1979), 111–124.
- [FR] H.O. Fattorini, D.L. Russell, *Uniform bounds on biorthogonal functions for real exponentials and application to the control theory of parabolic equations*, Quart. Appl. Math. **32** (1974), 45–69.
- [HJ] A. Haraux, S. Jaffard, *Pointwise and spectral control of plate vibrations*, Revista Matemática Iberoamericana **7:1** (1991), 1–24.
- [Ho] L.F. Ho, *Controllability and stabilizability of coupled strings with control applied to the coupled points*, SIAM J. Control Optim. **31** (1993), 1416–1437.
- [HP] V.C.L. Hutson, J.S. Pym, *Applications of functional analysis and operator theory*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 146, Acad. Press, London, 1980.
- [In] A.E. Ingham, *Some trigonometrical inequalities with applications in the theory of series*, Math. Z. **41** (1936), 367–379.
- [IK] E. Isaacson, H.B. Keller, *Analysis of numerical methods*, John Wiley & Sons, New York, 1966.
- [JTZ1] S. Jaffard, M. Tucsnak, E. Zuazua, *On a theorem of Ingham*, J. Fourier Anal. Appl. **3** (1997), 577–582.
- [JTZ2] S. Jaffard, M. Tucsnak, E. Zuazua, *Singular internal stabilization of the wave equation*, J. Differential Equations **145** (1998), 184–215.
- [Kh] A.G. Khapalov, *Interior point control and observation for the wave equation*, Abstract and Applied Analysis **1** (1996), no. 2, 219–236.
- [K] V. Komornik, *Exact controllability and stabilization. The multiplier method*, Masson, Paris and John Wiley & Sons, Chichester, 1994.
- [Kr] W. Krabs, *On moment theory and controllability of one-dimensional vibrating systems and heating processes*, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., vol. 173, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [La] S. Lang, *Introduction to diophantine approximations*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1966.
- [Leb] G. Lebeau, *Contrôle de l'équation de Schrödinger*, J. Math. Pures Appl. **71** (1992), 267–291.
- [Leu] G. Leugering, *Reverberation analysis and control of networks of elastic strings*, Control of PDE and appl., Lect. Notes in Pure and Applied Math. (1996), 193–206.
- [Lev] B.J. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, Translation of Math. Monographs, vol. 5, AMS, 1950.
- [Li1] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte de systèmes distribués*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I **302** (1986), 471–475.
- [Li2] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte perturbations et stabilisation de systèmes distribués*, vol. I, Masson, Paris, 1988.
- [LLS1] E. Lagnese, G. Leugering, E.J. P.G. Schmidt, *Control of planar networks of Timoshenko beams*, SIAM J. Control Optim. **31** (1993), 780–811.
- [LLS2] J.E. Lagnese, G. Leugering, E.J.P.G. Schmidt, *Modelling, analysis and control of multi-link flexible structures*, Systems and Control: Foundations and Applications, Birkhäuser-Basel, 1994.
- [LS] G. Leugering, E.J.P.G. Schmidt, *On the control of networks of vibrating strings and beams*, Proc. of the 28th IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 3, IEEE, 1989, pp. 2287–2290.
- [LZ] G. Leugering, E. Zuazua, *Exact controllability of generic trees*, “Control of Systems Governed by Partial Differential Equations”, Nancy, France, March 1999, ESAIM Proceedings.
- [LM] J.-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris, 1968.
- [Me] F. Ali Mehmeti, *A characterisation of generalized c^∞ notion on nets*, Int. Eq. and Operator Theory **9** (1986), 753–766.

- [Me] F. Ali Mehmeti, *Regular solutions of transmission and interaction problems for wave equations*, Math. Meth. Appl. Sci. **11** (1989), 665–685.
- [N] S. Nicaise, *Spectre des réseaux topologiques finis*, Bull. Sc. math, 2^e série **111** (1987), 401–413.
- [PW] R.E.A.C. Paley, N. Wiener, *Fourier transform in the complex domain*, Am. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 19, Am. Math. Soc., New York, 1934.
- [PZ] J.P. Puel, E. Zuazua, *Exact controllability for a model of multidimensional flexible structure*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **123 A** (1993), 323–344.
- [Re] R.M. Redheffer, *Elementary remarks on completeness*, Duke Math. J. **35** (1968), 103–116.
- [Ro] S. Rolewicz, *On controllability of systems of strings*, Studia Math. **36** (1970), no. 2, 105–110.
- [R] K.F. Roth, *Rational approximation to algebraic numbers*, Mathematika **2** (1955), 1–20.
- [Ru1] D.L. Russell, *A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations*, Studies in Appl. Math. **52** (1973), 189–221.
- [Ru2] D.L. Russell, *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations*, SIAM Review **20** (1978), 639–739.
- [Ru3] D.L. Russell, *The Dirichlet-Neumann boundary control problem associated with Maxwell's equations in a cylindrical region*, SIAM J. Control Optim. **24** (1986), 199–229.
- [S] W.M. Schmidt, *Simultaneous approximation to algebraic numbers by rationals*, Acta Math. **125** (1970), 189–202.
- [Sch] E.J.P.G. Schmidt, *On the modelling and exact controllability of networks of vibrating strings*, SIAM J. Control. Optim. **30** (1992), 229–245.
- [TW] M. Tucsnak, G. Weiss, *Simultaneous exact controllability and some applications*, SIAM J. Control Optim. **38** (2000), 1408–1427.
- [U] U. Ullrich, *Divided differences and systems of nonharmonic Fourier series*, Proc. Amer. Math. Soc. **80** (1980), 47–57.
- [W] N. Wiener, *A class of gap theorems*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **2:3** (1934), 367–372.
- [Y] R.M. Young, *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, Academic Press, New York, 1980.