UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL

LAS BASES ESTOCÁSTICAS
DE
LA MODELIZACIÓN FINANCIERA

Santiago Leguey Galán

presentada en el

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA

para la obtención del

Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

Director: Prof. Dr. D. Eugenio Prieto Pérez

Madrid, Marzo de 1.995

PRESENTACION

Es un hecho conocido que en una proporción considerable de las actividades económicas se encuentra presente, en mayor o menor medida, un cierto grado de aleatoriedad. Dicha aleatoriedad implica un desconocimiento sobre los resultados que se obtendrán, provocando en el individuo una sensación de incertidumbre que, en principio, podría alejar al sujeto de este tipo de actividades. Como contrapartida se encuentran las compensaciones, generalmente monetarias, que la actividad económica genera. Se encuentra por tanto, el posible inversor ante el problema de cuantificar el riesgo a que se ve sometido, para así poder decidir si la empresa que se está evaluando, se emprende o no.

Dado el carácter subjetivo de la percepción de los riesgos, la cuantificación mencionada se hace aún más difícil. Por cada sujeto que estudie la situación se tendrá, posiblemente, una apreciación distinta del riesgo.

Por otra parte no es menos cierto que existe un gran número de individuos dispuestos a emprender negocios, lo que supone una gran variedad de percepciones, muchas de las cuales han de ser necesariamente contrapuestas. De esta diversidad surge la posibilidad de transferir parte del riesgo. Esta posibilidad trae como consecuencia dos cuestiones, en primer lugar, sea cual sea la estimación que se ha hecho del riesgo que comporta determinada actividad, la posibilidad de reducir e incluso eliminar dicha incertidumbre puede evitar la exclusión del mercado de los inversores más conservadores. Cabe resaltar, como segunda cuestión que, en cualquier caso las condiciones de seguridad aumentan permitiendo *escoger* el nivel de incertidumbre dentro de una planificación general en la que pudieran concurrir distintas operaciones sobre diversos campos.

Las aseguradoras, en este contexto, hacen el papel de asumir el riesgo no aceptado por las empresas. Pero el seguro no es el único instrumento útil a la hora de paliar los efectos de la aleatoriedad, y no siempre es el más adecuado ya que aparejado al concepto de seguro, se halla el de siniestro, el seguro surge para compensar los efectos negativos de un siniestro, siendo por su propia formulación un contrato en el que queda excluido de cualquier modo el beneficio del asegurado. Sin embargo un modo de reducir el riesgo es la fijación de unos beneficios mínimos, o la limitación de un determinado. precio entre unos márgenes..etc. Coberturas que no ofrecen ordinariamente las aseguradoras.

En el marco de las operaciones financieras se han desarrollado contratos que permiten canalizar las necesidades de protección ante determinados riesgos, de acuerdo con las expectativas de cada inversor. Entre ellos destacan las opciones en sus distintas modalidades, contratos de futuros, contratos forward..etc.

Con estos contratos se consigue obviamente un beneficio derivado de la desaparición de una parte de la incertidumbre. Frente a la prestación así obtenida se debe responder con una contraprestación que suponga una contrapartida equivalente, el precio del contrato. Naturalmente la determinación de dicho precio supone la base para que exista un acuerdo entre el tomador y el tenedor del contrato, y el que éste sea universal es importante para evitar situaciones de injusticia.

La modelización de la incertidumbre es una de las partes de la ciencia que asume la estadística matemática. Por su parte la matemática financiera ha sido tradicionalmente la encargada de valorar las diferentes operaciones financieras. La conjunción de ambas ramas permitiría el estudio de modelos financieros cuyas componentes fueran estocásticas. Y este es precisamente el caso en el que nos encontramos, puesto que tratamos de cuantificar el valor de un contrato sobre un elemento de cambio cuyo precio es incierto.

En esta evaluación se aunarán supuestos de índole estadística sobre la evolución del precio del objeto del contrato, e hipótesis sobre el funcionamiento del mercado en el que se negocia.

En cuanto a la teoría que sustenta los modelos estadísticos, ésta se inscribe dentro del cálculo estocástico, en el cual se tratan cuestiones como la integral estocástica, ecuaciones diferenciales estocásticas, control óptimo, entre otras. Dicha teoría está avanzada y desarrollada de tal manera, que es posible un aprendizaje a traves de los libros compendiando los descubrimientos de los autores, y de manuales diseñados a tal efecto, de suerte que un trabajo relevante en este campo debería recurrir a las más sofisticadas técnicas matemáticas para obtener resultados de interés.

Por su parte la valoración de opciones y futuros, si bien puede considerarse como una aplicación práctica dentro del cálculo estocástico- ya que se han elegido para la modelización de la incertidumbre, sin duda debido a al convencimiento de la superioridad de un análisis dinámico sobre el estático, elementos como *procesos de Wiener, el lema de Itô, ecuaciones diferenciales estocásticas..etc.-*, no es menos cierto que ha sido desatendida, al menos si se contrasta con el rigor y la atención que se ha prestado a la parte teórica.

Sin embargo hay pruebas evidentes del interés que suscita esta parte de la *estadística financiera*, basta consultar los últimos números de las revistas especializadas para encontrar una gran cantidad y variedad de artículos sobre el tema.

En estas condiciones se aprecia la carencia de un puente apropiado entre ambas ramas, de modo que presente un balance apropiado entre los desarrollos matemáticos y sus aplicaciones especificas destinadas a la valoración de opciones.

Es por todo lo expuesto el objetivo de este trabajo el empezar a subsanar las deficiencias observadas, exponiendo rigurosamente el enlace entre el cálculo estocástico y la modelización financiera aplicada a la valoración de opciones. Se incluye para ello una gran parte dedicada a resultados teóricos que aunque no todos vayan a utilizarse en las aplicaciones, sirven para comprender mejor la naturaleza de los elementos con que se está tratando, con este objeto se incluyen bastantes demostraciones de estos resultados, procurando en ellas resaltar el sistema de actuación frente a un desarrollo detallado de cada paso. Finalmente se ven una serie de aplicaciones, que por supuesto no pretende ser un compendio de todos los posibles casos, más bien deben entenderse como ejemplos ilustrativos de un método general.

La parte más interesante del trabajo es la especificidad de la aplicación. Hay literatura dedicada al cálculo estocástico y sus aplicaciones a la ingeniería, e incluso a la economía. En estos trabajos se abordan un conjunto de problemas concretos escogidos en un ámbito muy general y se resuelven, o simplemente se plantean, desde el punto de vista del cálculo estocástico. En todo caso no se ofrece una visión en profundidad de los problemas que se plantean, y sus resoluciones, cuando se varía la orientación de los problemas tratados, o simplemente se trata de considerar casos más generales.

Dentro de las aplicaciones se analiza la obtención del valor de opciones de compra europeas bajo distintas circunstancias, ya variando el activo subyacente, ya las hipótesis generales que se asumen para la valoración. Se muestra el método general que permite la valoración en cada una de esas situaciones. Sin embargo, la mayor parte de las opciones que se comercializan son americanas, éstas son más difíciles de valorar, ya que, como se muestra, el valor de una opción americana se obtiene como la solución de una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, sujeta a varias restricciones de contorno. La forma tradicional de atacar el problema de la valoración de opciones americanas ha sido la resolución mediante técnicas numéricaso aproximadas de dicha ecuación.

En este trabajo se encuentra otra vía de aproximación a las opciones americanas, la idea es obtener opciones americanas mediante combinaciones de opciones europeas, mucho más fácilmente evaluables. Para ello se introducen un nuevo tipo de opciones que generalizan las opciones clásicas, las que denominamos opciones de elección múltiple, y cuyo papel, en el objetivo que se persigue, es el de ejercer de pivote entre dos instantes de tiempo.

Se analizan las opciones de elección múltiple en general, y luego particularizando al entorno concreto que proporcionan las condiciones de Black y Scholes para valorar una opción europea sobre una acción, se evalua una opción de elección múltiple que permite en esencia comprar acciones, y otra que lo que permite es venderlas. Del análisis de estos casos particulares se extraerán dos importantes conclusiones, la primera es que nunca tiene sentido el ejercicio anticipado de las opciones de compra americanas, y por tanto su valor debe coincidir con el de las opciones de compra europeas. La segunda es que, la opción de venta americana si es susceptible de ser ejercida antes de su vencimiento, y por ello tiene un sobrevalor que habrá que analizar. Por último se encuentra el valor de una opción de elección múltiple que permite en n periodas de tiempo una venta de activo, en las mismas condiciones en que lo haría una opción de venta americana, obteniéndose en cada paso una cota inferior del valor de ésta.

Las ecuaciones diferenciales juegan un papel fundamental en el desarrollo de las aplicaciones matemáticas, físicas, económicas y en las ingenierías. En los modelos que se usan para simplificar se omiten elementos ambientales que tienen influencia en el resultado final de la variable que se esté estudiando, además, los errores de medida y la aleatoriedad natural inherente a algunos fenomenos justifican el que la función que describe la evolución de la variable se considere aleatoria. Otra fuente de aleatoriedad en este contexto viene dada por el desconocimiento de los valores iniciales asociados al problema. De modo que las ecuaciones diferenciales estocásticas surgen de forma espontánea con el propósito de formular la realidad de manera más adecuada.

Históricamente los primeros pasos en este campo se deben a la física, Gibbs en 1903 trató el problema de la evolución de un gran número de partículas de forma probabilística, asociando la incertidumbre al desconocimiento de la posición inicial, describiendo el sistema como

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(X,t)$$
$$X(t_0) = X_0$$

con X_0 un vector aleatorio con distribución conocida.

Si además el sistema está sometido a interacción con otros elementos, ésta se puede representar como una perturbación de carácter aleatorio. El sistema anterior aparecería como

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(X,t) + \sigma(X,t)\xi(t,w)$$
$$X(t_0) = X_0 \quad .$$

La ecuación más conocida en que aparecen perturbaciones como las indicadas es la ecuación de Langevin para describir el movimiento Browniano. El movimiento Browniano fue descubierto en 1827 por un botánico escoces -Robert Brown- observando el movimiento de unos granos de polen inmersos en un fluido. El modelo matemático del movimiento no obtuvo resultados fructiferos hasta 1906, cuando Einstein y Smoluchowski obtuvieron una ecuación diferencial para modelizarlo. Y finalmente en 1908 Langevin escribió la ecuación diferencial estocástica

$$\frac{dV}{dt} + V\alpha = \xi(t,w)$$

donde V es la primera coordenada del vector velocidad de la partícula.

El *proceso* $\xi(t)$ tiene media cero, su función de covarianza es cero excepto en la diagonal, donde vale infinito. Por ello no se trata de un proceso estocástico en sentido estricto, se trata de una idealización matemática conocida como *ruido blanco*, útil para procesos de rápida variación y prácticamente incorrelados entre dos instantes de tiempo. Pese a ello, es posible calcular la distribución de probabilidad de V(t) y, aunque no es diferenciable en ningún punto con probabilidad uno, se puede identificar la integral $B(t) = \int_{t_0}^{t} \xi(s)ds$, con el movimiento browniano.

En matemáticas la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas surgió como un método para construir procesos markovianos de difusión sobre la base del movimiento Browniano, encontrando que además si los coeficientes eran suficientemente regulares, un proceso de difusión se podía considerar como la solución de una ecuación diferencial estocástica. Fue Bernstein en los años 30 el pionero en estos estudios, aunque no eran su objetivo directo, sino que *se encontró* con ello estudiando comportamientos límite en cadenas de markov. En los años 40 K. Itô trata de forma rigurosa ecuaciones en que el ruido blanco se veía involucrado, sistematizando y construyendo toda una teoría.

Desde principios de los 60 se acepta de modo generalizado la importancia de las ecuaciones diferenciales estocásticas en la modelización y análisis de sistemas dinámicos. Todavía hoy siguen apareciendo artículos y libros dedicados tanto a las bases teóricas como a sus aplicaciones.

INDICE

2. ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCASTICAS

CAPÍTULO PRIMERO

ELEMENTOS DEL CÁLCULO ESTOCÁSTICO

CAPITULO PRIMERO

1.1 INTRODUCCION

En el estudio de funciones reales los operadores derivada e integral aparecen como herramientas imprescindibles para el análisis. Pero en un problema práctico generalmente las funciones con que se trabaja, no acaban de ser determistas, circunstancias que abarcan desde el desconocimiento del fenómeno, hasta errores de medida inducen a pensar que es más adecuado el modelizar algunos de estos problemas como procesos estocásticos. Resultará, por tanto, necesario hacer uso de las derivadas e integrales. En este caso tales elementos no están unívocamente definidos, por lo que se hace imprescindible un tratamiento riguroso de las definiciones equivalentes a las dadas para los operadores utilizados en el análisis clásico, así como de las relaciones existentes entre ellas.

Según la naturaleza de los procesos implicados se pueden considerar dos grandes bloques de estudio, el de los *procesos regulares*, cuyo tratamiento es una réplica del análisis clásico, y el de los *procesos irregulares*, para los cuales las herramientas habituales se manifiestan insuficientes, y por tanto necesitan de una teoría propia más específica.

Se considerarán en general, procesos con valores en los números complejos, variando en un índice T continuo (intervalos en $\mathbb{R}$ finitos o infinitos) tales que son medibles y separables, se considerará también que están normalizados, es decir todas las varibles tienen media cero (en caso contrario se tomaría el proceso despues de restar su media).

Se estudia la continuidad, derivabilidad e integrabilidad desde el punto del cálculo de segundo orden, y en trayectorias, junto con sus relaciones, se verá que no resultan suficientes, por lo que a continuación se introducen los principales elementos del cálculo de Itô. Se define la integral de Itô respecto a un movimiento Browniano, y se estudian las propiedades de dicha integral, entre las que destacan el tratarse de una martingala en tiempo continuo. Propiedad que sirve de base para caracterizar una amplia clase de procesos que se pueden representar como integrales respecto a algún movimiento Browniano. A partir de la integral se definirá la diferencial estudiando la regla de Itô, resultado fundamental para la manipulación de diferenciales. Para finalizar, se hará una consideración sobre el ruido blanco, viendo un resultado sobre convergencia de integrales respecto a un ruido blanco a la integral de Itô, resultado que justifica la representación, por otra parte muy extendida, del ruido blanco como la diferencial de Itô del movimiento Browniano dB(t).

1.2 PROCESOS DE SEGUNDO ORDEN

Se dice que un proceso $\{X(t),\ t\in T\}$ es de **segundo orden** si $E[|X(t)|^2]<\infty$ $\forall\ t\in T$. Se dirá además que es una **variedad lineal** si toda combinación lineal de variables del proceso, es una variable del proceso. Una variedad lineal se dirá cerrada si todos los límites en media cuadrática de variables del proceso, siguen estando en el proceso.

Dado un proceso de segundo orden X(t) siempre existe una **mínima variedad lineal cerrada** que lo contiene, se notará por H_X a esta variedad.

La existencia de segundos momentos de todas las variables implica que existen los momentos cruzados, tiene por tanto perfecto sentido definir la **función de covarianza** del proceso como

$$K_X(t_1,t_2) = \mathrm{cov}(X(t_1),X(t_2)) = E[X(t_1)\bar{X}(t_2)]$$

donde $\bar{X}(t_2)$ es el conjugado de $X(t_2)$.

Se tiene entonces determinado un producto escalar dado por

$$\langle X(t_1),X(t_2)\rangle = K_X(t_1,t_2)$$

lo que nos permite considerar un proceso de segundo orden como una función de T en un *espacio de Hilbert*

$$X : T \longrightarrow H_X \subseteq L_2(\Omega,A,P) \qquad t \longrightarrow X(t)$$

donde H_X es un subespacio lineal cerrado de un espacio métrico lineal completo y cerrado (L_2), la norma de sus elementos en L_2 viene dada por,

$$\|X(t)\| = K_X(t,t) = E[|X(t)|^2] \quad ,$$

en donde se puede observar que que el tratamiento de un proceso de segundo orden con la norma inducida por el producto escalar determinado por la función de covarianza, es equivalente al estudio del proceso con la norma que provee la media cuadrática.

Se llamarán **propiedades de segundo orden** a aquellas que pueden ser expresadas en términos de los segundos momentos, y en particular de la función de covarianza. Puede probarse que la clase de las funciones de covarianza es cerrada respecto a la adición, multiplicación por números positivos y paso al límite.

Debido a que determinado tipo de procesos (estacionarios) presentan una expresión particular en la función de covarianza, las propiedades de segundo orden exigirán un tratamiento adecuado a tal expresión, por ello se enumeran a continuación algunos resultados relativos a estos procesos.

1.2.1 Procesos estacionarios; descomposicion espectral

Un proceso estocástico se dice **estacionario** si la distribución conjunta de cualesquiera n variables $X(t_1+\tau)$, $X(t_2+\tau)$.....$X(t_n+\tau)$ no depende de τ.

Un proceso estocástico se dice **estacionario de covarianza** (débilmente estacionario) si su función de covarianza sólo depende de la distancia entre sus argumentos

$$K_X(r,s) = K_X(r-s) \ .$$

Si un proceso de segundo orden es estacionario, es obvio que también es estacionario de covarianza, el reciproco es falso en general, salvo para casos particulares como los procesos gaussianos cuyas variables toman valores en $\mathbb{R}$.

Considérese un proceso de segundo orden normalizado, aplicando la desigualdad de Schwarz se obtiene que $K_X^2(r,s) \le K_X(r)K_X(s)$, si se considera que el proceso es estacionario de covarianza, tomando r=s se tiene $K_X(0) \ge |K_X(r)|$, de donde se deduce que la función de covarianza es continua si y sólo si es continua en el cero.

Una de las particularidades más importantes de los procesos estacionarios es la posibilidad de caracterizarlos mediante su representación espectral, aplicando el *teorema de Bochner* [1] se llega a que una función de

[1] El teorema afirma que una función es definida no negativa si y sólo si

covarianza de un proceso estacionario de covarianza admite siempre la siguiente representación,

$$K_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF(\lambda)$$

donde $F(\lambda)$ es una función real, no decreciente y acotada (es decir, genera una medida finita en $\mathbb{R}$), que se conoce como **distribución espectral.** la distribución espectral de un proceso está determinada de forma única salvo constante aditiva, que puede ser escogida para que $F(\infty) = K_X(0)$ y $F(-\infty) = 0$.

Si $F(\lambda)$ es una función absolutamente continua llamaremos **función de densidad espectral** a $f(\lambda) = F'(\lambda)$, en tal caso,

$$K_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} f(\lambda) d\lambda.$$

Una condición suficiente para asegurar que existe la función de densidad espectral, es que $\int_{-\infty}^{\infty} |K_X(t)| dt < \infty$. Además, en estas condiciones existe una transformación inversa de la forma

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} dK_X(t) dt,$$

en general, dados dos puntos de continuidad de $F(\lambda)$, se tiene que

$$F(\lambda_2)-F(\lambda_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T\infty}^{T} \frac{e^{-it\lambda_2} - e^{-it\lambda_1}}{-it} K_X(t) dt$$

La función $F(\lambda)$ representa la tasa de variación del proceso en cada unidad de tiempo, el **espectro** consiste en todos los puntos en cuyo entorno la función es estrictamente creciente, estos puntos se conocen como **frecuencias.**

---

admite la descomposición $f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} e^{it\mu} dF(\lambda,\mu)$, para F una función que determina una medida finita en el plano.

Se definen los **momentos espectrales** como $\lambda_k = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^k dF(\lambda)$, se comprueba que el momento de orden 2k, existe siempre que la función de covarianza sea 2k veces diferenciable en cero, si ésto ocurre la función de covarianza admite el desarrollo

$$K_X(t) = \sum_{j=1}^{2k} \frac{\lambda_j}{j!}(it)^{2j} + o(t^{2k}).$$

A continuación se exponen algunas de las propiedades de segundo orden más importantes, y su relación con la función de covarianza del proceso.

1.2.2 Propiedades de segundo orden

Un proceso de segundo orden X(t) se dice que **converge en media cuadrática** (m.c.) a X(s) cuando $t \to s$ si

$$E[|X(t)-X(s)|^2] \to 0 \text{ cuando } t \to s.$$

Se tiene que la distancia entre dos variables X(t) y X(s) es

$$d(X(t),X(s))=E[|X(t)-X(s)|^2] = K_X(t,t)+K_X(s,s)-2K_X(t,s)$$

aplicando la desigualdad de Schwarz

$$d(X(t),X(s)) \leq (K_X(t,t)-K_X(s,s))^2.$$

Desigualdad que permitirá acabar trasladando las propiedades de segundo orden a las aplicaciones usuales sobre la función $\sigma^2(t)=k_X(t,t)$, con las oportunas variaciones en el enunciado de los resultados, de hecho, los resultados que caracterizan las propiedades que a continuación se exponen, se prueban básicamente escribiendo la definición de la propiedad involucrada y usando la observación anterior.

1.2.2.1 Continuidad

Teorema 1.2.1

Un proceso de segundo orden converge en m.c a X(s) *cuando* $t\to s$ *si y sólo si* $K_X(r,t)\to K_X(s,s)$ *cuando* $r\to s$ *y* $t\to s$.

Demostración

$E[|X(t)-X(s)|^2] = K_X(t,t)+K_X(s,s)-2K_X(t,s) \longrightarrow 0$ si $k_X(r,t) \to K_X(s,s)$ cuando $r\to s$ y $t\to s$.

Para ver que es condición necesaria sea $X(t)\to\to X(s)$ en m.c.

$$K_X(r,t) - K_X(s,s) = E[X(r)\bar{X}(t)-X(s)\bar{X}(s)] =$$
$$E[(X(r)-X(s))(\bar{X}(t)-\bar{X}(s)] + E[(X(r)-X(s))\bar{X}(s)] + E[(\bar{X}(t)-\bar{X}(s))X(s)] \le$$
$$E^{1/2}[(X(r)-X(s))^2]E^{1/2}[(\bar{X}(t)-\bar{X}(s))^2] + E^{1/2}[(X(r)-X(s))^2]E^{1/2}[\bar{X}(s)^2] +$$
$$E^{1/2}[(\bar{X}(t)-\bar{X}(s))^2]E^{1/2}[X(s)^2] \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } r\to s \text{ y } t\to s \ \blacksquare.$$

Un proceso de segundo orden es **continuo en media cuadrática** si $\forall\, s\in T$

$$E[|X(s+h)-X(s)|^2]\to 0 \text{ cuando } h\to 0$$

Teorema 1.2.2

Un proceso de segundo orden es continuo en m.c. si y sólo si su función de covarianza es continua en todos los puntos de la diagonal, además si $K_X(t,s)$ *es continua siempre que* $t=s$*, también lo es en cualquier punto* $(t,s)\in T\times T$.

Si el proceso es estacionario de covarianza el proceso es continuo si y sólo si la función de covarianza es continua en 0.

El teorema de Bolzano y su consiguiente aplicación al teorema del valor intermedio se formularía como sigue

Teorema del valor intermedio

Considérese un proceso de segundo orden continuo en m.c.. Si $\|X(b)\|<\|X(a)\|$ $a<b$, *entonces para cada* $K\in(\|X(a)\|,\|X(b)\|)$ *fijo de antemano, existe un* $c\in(a,b)$ *con* $\|X(c)\|=K$.

Para probarlo basta observar que puesto que el proceso es continuo $K_X(t,t)$ es continua, aplicando el teorema del valor intermedio para funciones reales se llega al resultado.

1.2.2.2 Diferenciabilidad

Un proceso de segundo orden tiene **derivada en media cuadrática** en el punto t X'(t) si $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(X(t+h)-X(t))=X'(t)$ considerando el límite en m.c..

Teorema 1.2.3

Un proceso de segundo orden es diferenciable en m.c. en el punto t si y sólo si la función de covarianza tiene derivada segunda finita en el punto (t,t).

Demostración

Por el teorema 1.2.1 se tiene que $\frac{1}{h}(X(t+h) - X(t))$ converge en m.c. si y sólo si $Cov(\frac{1}{h}(X(t+h) - X(t)), \frac{1}{\varepsilon}(X(t+\varepsilon) - X(t)))$ converge a un límite finito para $h\to 0$ y $\varepsilon\to 0$.

ahora $\lim_{h,\varepsilon\to 0} Cov(\frac{1}{h}(X(t+h) - X(t)), \frac{1}{\varepsilon}(X(t+\varepsilon) - X(t))) =$

$$\lim_{h,\varepsilon\to 0} \frac{k_X(t+h,t+\varepsilon) - k_X(t+h,t) - k_X(t,t+\varepsilon) + k_X(t,t)}{h\varepsilon} = \frac{d^2}{dtds} k_X(t,s)\Big|_{t=s} \quad \blacksquare$$

Por tanto, el proceso será diferenciable en todo punto si es dos veces diferenciable en la diagonal.

El siguiente teorema proporciona una condición de existencia de las derivadas de orden superior, relacionando además su valor con las derivadas de la función de covarianza.

Teorema 1.2.4

Si un proceso de segundo orden tiene derivada en m.c., entonces las derivadas $\dfrac{dK_X(t,s)}{dt}$, $\dfrac{dK_X(t,s)}{ds}$, $\dfrac{d^2K_X(t,s)}{dtds}$, *existen y además las funciones de covarianza entre las variables del proceso original y el proceso derivado quedan como sigue*

$$K_{X,X'}(t,s)=E[\,|X(t)\bar{X}'(s)|\,] = \frac{dK_X(t,s)}{ds},$$

$$K_{X',X}(t,s)=E[\,|X'(t)\bar{X}(s)|\,] = \frac{dK_X(t,s)}{dt},$$

$$K_{X',X'}(t,s)=E[\,|X'(t)\bar{X}'(s)|\,] = \frac{d^2K_X(t,s)}{dtds}.$$

Para derivadas de orden superior se puede extender el resultado, si el proceso es n veces derivable en m.c., entonces existen las derivadas

$$\frac{d^{i+j}K_X(t,s)}{dt^i ds^j} \quad \forall\ 0\le i\le n\ ,\ 0\le j\le n\ ,\ \textit{y además}$$

$$K_{X^i,X^j}(t,s)=E[\,|X^i(t)\bar{X}^j(s)|\,] = \frac{d^{i+j}K_X(t,s)}{dt^i ds^j}$$

donde x^i *es la i-ésima derivada de* X(t).

La demostración es una réplica de la del teorema 1.2.3.

Si se consideran procesos estacionarios de covarianza , los teoremas 1.2.3 y 1.2.4 queda reformulados como sigue

Teorema (1.2.3)'

Un proceso de segundo orden estacionario de covarianza, es diferenciable en m.c. si y sólo si su función de covarianza $K_X(\tau)$ *es dos veces diferenciable en cero.*

Teorema (1.2.4)'

Si un proceso de segundo orden estacionario de covarianza admite derivada en m.c., entonces las derivadas $\dfrac{dK_X(t)}{dt}$ *y* $\dfrac{d^2K_X(t)}{dt^2}$*, existen, y además verifican*

$$\tau=t-s \qquad K_{X,X'}(\tau)=E[\,|X(t)\bar{X}'(s)|\,] = \frac{dK_X(\tau)}{d\tau}$$

$$K_{X',X}(\tau)=E[\,|X'(t)\bar{X}(s)|\,]= -\frac{dK_X(\tau)}{d\tau}$$

$$K_{X',X'}(\tau)=E[\,|X'(t)\bar{X}'(s)|\,]= -\frac{d^2K_X(\tau)}{d\tau^2}$$

en general si el proceso es n veces derivable en m.c. existen las derivadas

$$\frac{d^{i+j}K_X(\tau)}{d\tau^{i+j}} \qquad \forall\ 0\le i\le n\ ,\ 0\le j\le n\ ,\ \text{y además}$$

$$K_{X^i,X^j}(t,s)=E[\,|X^i(t)\bar{X}^j(s)|\,] =(-1)^i\,\frac{d^{i+j}K_X(\tau)}{dt^{i+j}}\ ,\ \tau=t-s\ .$$

Para el caso de procesos estacionarios de covarianza la derivabilidad en m.c. se puede caracterizar en términos de su densidad espectral. Un proceso estacionario de covarianza es diferenciable en m.c. si el momento espectral de orden dos $\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 f(\lambda)d\lambda$ existe, si además admite función de densidad espectral, la relación entre la densidad espectral del proceso original y la del proceso derivado viene dada por

$$f_{X'}(\lambda)=\lambda^2 f_X(\lambda),$$

La relación que existe entre la densidad espectral del proceso original y la asociada con la función de covarianza de los procesos derivada k-ésima y j-ésima es, $f_{X^k,X^{j'}}(\lambda)=(i\lambda)^{j+k}f_X(\lambda)$

Las propiedades de la diferencial en m.c. no difieren de las conocidas en el caso clásico:

- Es lineal
- Diferenciabilidad en m.c. implica continuidad en m.c.
- Regla de la cadena

1. Si f es diferenciable en todos los puntos del recorrido de X(t)

$$(f(X(t)))'=f'(X(t))X'(t)$$

2. Si X(t) es diferenciable en t=f(s)

$$(X(f(s)))'=X'(f(s))f'(s)$$

- En general, la reglas de diferenciación usuales siguen siendo válidas.
- Especial importancia tiene el

Teorema de Rolle

Sea X(t) *un proceso diferenciable en m.c.. Si* $\|X(b)\|=\|X(a)\|$ *para algún* $a<b$*, entonces existe* $c\in(a,b)$ con $\|X'(c)\|=0$.

Demostración

El teorema es consecuencia inmediata del teorema 1.2.3, y la consideración de la derivada de $\sigma^2(t)$ como la derivada direccional en la dirección (1,1) de $K_X(t,s)$■

La importancia del resultado es que $\|X'(c)\|=0$ implica que X'(c)=0 c.s. lo que permite obtener igualdades c.s. de planteamientos en m.c., por ejemplo, como una consecuencia inmediata se obtiene

Teorema del valor medio

Sea X(t) *un proceso de segundo orden diferenciable en m.c..*
Dado $a<b$ $\exists$ $c\in(a,b)$ *con* $X(b)-X(a)=X'(c)(b-a)$ *c.s..*

Demostración

Tómese Y(t) = X(t)(b-a) - t(X(b)-X(a)), es fácil ver que Y(t) es derivable, aplicando el teorema de Rolle y despejando en Y'(c)=0 se obtiene el resultado■

Cabe preguntarse, una vez se tiene caracterizada la derivabilidad en todos los ordenes del proceso, si éste admitirá un desarrollo en serie de potencias de manera análoga al que admiten las funciones infinitamente derivables. Si la función de covarianza del proceso es infinitas veces diferenciable respecto a cada uno de sus argumentos, el proceso X(t) es infinitas veces derivable, y por tanto, para cada n el proceso $X_n(t)=\sum_{k=0}^{n} X^k(0)\frac{t^k}{k!}$, donde $X^k(0)$ es la derivada k-esima en el punto a, está perfectamente definido. Se dirá que un proceso de segundo orden X(t) es **analítico en el punto 0,** si

$$E[|X_n(t)-X(t)|^2]\to 0 \text{ en m.c. cuando } n\to\infty.$$

Un proceso de segundo orden se dirá **analítico,** si es analítico en todo punto $t\in T$.

Teorema 1.2.5

Un proceso de segundo orden es analítico si y sólo si la función de covarianza es analítica en cada punto de la diagonal.

La demostración no presenta ninguna dificultad siguiendo el mismo curso que las expuestas previamente.

1.2.2.3 Integrabilidad

Para definir la **integral en media cuadrática en el sentido de Riemann** en un intervalo [a,b], se considerará en primer lugar una partición del intervalo, $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$, y una secuencia de puntos intermedios $t_i^*\in[t_i,t_{i+1}]$. Dados éstos, se toma la suma de Riemann $I(n)=\sum_{i=1}^{n-1} X(t_i^*)(t_{i+1}-t_i)$ si cuando $n\to\infty$ se van tomando particiones cuyo diámetro tiende a cero, y existe el límite en m.c. de las sumas I(n), siendo éste independiente de las particiones y la secuencia de puntos intermedios escogidos, se dirá que

$\lim_{n\to\infty} I(n)=I=\int_a^b x(t)dt$, es la integral de Riemann del proceso en [a,b].

Teorema 1.2.6 (Condición suficiente de integrabilidad Riemann)

Un proceso de segundo orden es integrable Riemann en m.c. en el intervalo [a,b] si $\int_a^b\int_a^b K_X(t,s)dtds$ *existe en el sentido usual de Riemann. En tal caso*

$$E[|I|^2]=\int_a^b\int_a^b K_X(t,s)dtds.$$

propiedad que se generaliza considerando dos procesos integrables Riemann en [a,b], X(t) e Y(t) *si* $K_{X,Y}(t,s)=E[X(t)\bar{Y}(s)]$ *se verifica que*

$$E\Big[\int_a^b g(t)X(t)dt\int_a^b \overline{h(s)Y(t)}ds\Big]=\int_a^b\int_a^b g(t)\overline{h(s)}K_{X,Y}(dt,ds).$$

Demostración

Considérense dos particiones del intervalo [a,b], y las sumas de Riemann correspondientes a cada una de las particiones I(n) e I(m). Por el teorema 1.2.1 sabemos que I(n) converge si y sólo si $K_X(I(n),I(m))$ converge.

$$K_X(I(n),I(m)) = E\Big[\sum_{i=1}^{n-1} X(t_i^*)(t_{i+1}-t_i)\ \overline{\sum_{i=1}^{m-1} X(s_i^*)(s_{i+1}-s_i)}\ \Big] =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\ \sum_{i=1}^{m-1}(s_{i+1}-s_i)(t_{i+1}-t_i)\quad E[X(s_i^*)\bar{X}(t_i^*)] \longrightarrow \int_a^b\int_a^b K_X(t,s)dtds$$ cuando el diámetro de la partición tiende a cero $(n,m\to\infty)$.

$E[|I|^2] = \lim_{n,m\to\infty} K_X(I(n),I(m))$, permutando el límite y la esperanza se obtiene el teorema, y de idéntico modo su generalización ■.

Las integrales impropias de Riemann se definen como el límite en m.c. de integrales propias cuando los límites de integración convergen a $\pm\infty$.

De nuevo las propiedades de la integral son las propiedades usuales:

- La integral es un operador lineal,

- $\int_a^b X(t)dt + \int_b^c X(t)dt = \int_a^c X(t)dt$ si a<b<c,

- Continuidad en m.c. implica integrabilidad, puesto que ésta depende de la integrabilidad de la función de covarianza para la que es condición suficiente la continuidad,

- Integración por partes,

- Teorema fundamental del cálculo, regla de Barrow...etc.

Si se consideran procesos estacionarios de covarianza, una condición suficiente de integrabilidad es que la función de covarianza sea continua en el cero, y por tanto continua, y por ello integrable en cualquier intervalo acotado.

Esta definición de integral es insuficiente para cubrir las necesidades que el cálculo de procesos genera, por ejemplo si h(t) es una función definida en el intervalo [a,b], con diferencial acotada en el mismo intervalo h'(t), se pretende evaluar la expresión $\int_a^b h'(t)X(t)dt$, la fórmula de integración por partes lleva a que

$$\int_a^b h'(t)X(t)dt = X(b)h(b) - X(a)h(a) - \int_a^b h(t)dX(t)$$

atendiendo al último sumando de la expresión , pueden ocurrir dos situaciones,

- X(t) admite derivada en m.c., lo que induce a considerar dX(t)=X'(t)dt

- X(t) no admite derivada en m.c., situación que se resuelve mediante la consideración de la **integral en el sentido de Riemann-Stiltjes en media cuadrática.**

Para definir ésta se considera una partición del intervalo [a,b], y la suma

$$I(n)= \sum_{i=1}^{n-1} h(t_i)[X(t_{i+1})-X(t_i)]$$

la integral $\int_a^b h(t)dX(t)$ se interpretará como el límite en m.c. de las sumas I(n) cuando al tender n a infinito el diámetro de la partición tiende a cero.

Una condición suficiente de integrabilidad en el sentido de Riemann-Stiltjes (R-S) se obtiene de forma análoga al teorema 1.2.6

Teorema (1.2.6)'

Una función h(t) *es R-S integrable respecto a un proceso de segundo orden* X(t) *en el intervalo* [a,b], *si*

$$\int_a^b\int_a^b h(t)\bar{h}(s)K_X(dt,ds) \tag{1.1}$$

existe en el sentido de R-S, en tal caso

$$E[\,|\int_a^b h(t)dX(t)|^2] = \int_a^b\int_a^b h(t)\bar{h}(s)K_X(dt,ds).$$

Además si h(t) *y* g(t) *son dos funciones integrables* (R-S) *respecto a* X(t) e Y(t) *y* $K_{X,Y}(t,s) = E[X(t)\bar{Y}(s)]$ *se verifica que*

$$E[\int_a^b g(t)dX(t)\int_a^b \overline{h(s)dY(t)}\,]=\int_a^b\int_a^b g(t)\overline{h(s)}K_{X,Y}(dt,ds).$$

La demostración es análoga a la del teorema 1.2.6.

Es fácil probar que las propiedades de esta integral son las mismas que las anteriormente citadas, es decir, las habituales.

Una generalización natural de la integral de una función respecto a un proceso estocástico es la consideración de la integral de un proceso X(t) respecto de otro proceso Y(t). Se define en primer lugar para un proceso simple de la forma $X(t) = \sum_{k=1}^{n} X_k\, I_{[t_k,t_{k+1}]}$ como

$$\int_a^b X(t)dY(t)=\sum_{k=1}^{n} X_k\ (Y(t_{k+1})-Y(t_k)),$$

para un proceso cualquiera se considera una partición del intervalo, t_k' una secuencia de puntos intermedios de la partición $t_k' \in[t_k,t_{k+1}]$ y las sumas de aproximación $X^n(t) = \sum_{k=1}^{n} X(t_k')\ I_{[t_k,t_{k+1}]}$, donde el índice n hace referencia al tamaño de la partición, los proceso $X^n(t)$ son procesos simples que se aproximan a X(t) cuando el diámetro de la partición tiende a cero ($n\to\infty$), por tanto se define

$$\int_a^b X(t)dY(t)=\lim_{n\to\infty} \int_a^b X^n(t)dY(t)$$

tomando el límite en m.c. y siempre que no dependa de la partición elegida ni de la secuencia de puntos intermedios dentro de la partición.

Teorema 1.2.7 (Criterio de integrabilidad)

Sea X(t) *un proceso cuyas variables son independientes de los incrementos del proceso* Y(t), Y(t+h)-Y(t) *en* [a,b]x[a,b], $\int_a^b X(t)dY(t)$ *existe si y sólo si existe* $\int_a^b\int_a^b K_X(t,s)K_Y(dt,ds) <\infty$.

Si además $X_1(t)$ y $X_2(t)$ *son dos procesos integrables en* [a,b] *respecto a* Y(t)

$$E[\int_a^b X_1(t)dY(t)\int_a^b \bar{X}_2(t)d\bar{Y}(t)]=\int_a^b\int_a^b E[X_1(t)\bar{X}_2(s)]K_Y(dt,ds)$$

siempre que las integrales involucradas existan.

Demostración

La demostración es similar a la del teorema 1.2.6 considerando las pertinentes sumas de aproximación, y que al ser $X(t_i)$ independiente de $Y(t_{i+1}) - Y(t_i)$, $E[X(t_i)(Y(t_{i+1}) - Y(t_i))] = E[X(t_i)]E[(Y(t_{i+1}) - Y(t_i))]$ ■.

Otro criterio de integrabilidad se obtiene a traves del concepto de variación de la función de covarianza. Dadas dos particiones del intervalo $[a,b]$ $a=t_0<t_1<....<t_n=b$ y $a=t'_0<t'_1<....<t'_m=b$ se dice que $K_Y(t,s)$ es de **variación acotada** en $[a,b]$ si para cualquier par de particiones se verifica que $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[K_Y(t_{i+1},t_{j+1})-K_Y(t_{i+1},t_j)-K_Y(t_i,t_{j+1})+K_Y(t_i,t_j)]<\infty$ si y sólo si

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(Y(t_{i+1})-Y(t_i))(\bar{Y}(t_{j+1})-\bar{Y}(t_j))]<\infty.$$

Se tiene como consecuencia del teorema anterior que si $X(t)$ es continuo en m.c., independiente de los incrementos de $Y(t)$ y las funciones de covarianza de $X(t)$ e $Y(t)$ son acotada y de variación acotada respectivamente, entonces $X(t)$ es integrable respecto a $Y(t)$.

las propiedades formales de la integral se vuelven a verificar como en los casos anteriores c.s..

1.2.2.3.1 Procesos de incrementos ortogonales

Entre la clase de procesos que no admiten derivada en m.c. cabe destacar los **procesos de incrementos ortogonales**, es decir, procesos que verifican

$$E[(X(t)-X(s))(X(t')-X(s'))] = 0 \quad \forall\ s<t<s'<t'.$$

Es sabido que dado un proceso de incrementos ortogonales existe una función $F(t)$ tal que $E[|X(t)-X(s)|^2] = F(t)-F(s)$ si $s<t$,

para un t_0 fijo
$$F(t) = \begin{cases} E[|X(t)-X(s)|^2] & \text{si } t>t_0 \\ -E[|X(t)-X(s)|^2] & \text{si } t<t_0 \end{cases}.$$

Esta función es única salvo constante aditiva, además es monótona no decreciente y no negativa, por lo que define una medida sobre $\mathbb{R}$. La continuidad en m.c. es, en este caso, equivalente a la continuidad de la función $F(t)$.

Se tiene que la función de covarianza de los procesos de incrementos ortogonales es

$$K_X(t,s)=\begin{cases} F(\min(t,s)) & \text{si } t>t_0 \text{ y } s>t_0 \\ -F(\max(t,s)) & \text{si } t<t_0 \text{ y } s<t_0 \,, \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

que es siempre de variación acotada, por tanto $\int_a^b h(t)dX(t)$ tendrá sentido siempre que h(t) sea tal que la expresión 1.1 tiene sentido.

Habitualmente el método que se sigue para construir la integral de R-S respecto a un proceso de incrementos ortogonales, es el de ir aproximando la clase de las funciones integrables mediante funciones escalonadas, funciones continuas y acotadas, y finalmente considerar todas aquellas funciones alcanzables mediante un paso al límite, proceso que se reproduce por la posibilidad que ofrece de sistematizar la construcción de integrales más generales.

-Paso 1 si $h(t) = \sum_{i=1}^{n-1} h_i I_{[t_i,t_{i+1}]}$ es una función escalonada en [a,b] con $a = t_0<t_1<....<t_n = b$, se define

$$I(n) = \int_a^b h(t)dX(t) = \sum_{i=1}^{n-1} h_i(X(t_{i+1})-X(t_i)).$$

Así definida, la integral es lineal y verifica

$$E[|I(n)|^2] = \int_a^b |h(t)|^2 dF(t)$$

propiedad esta última, que revela la existencia de una isometría entre el espacio de las funciones escalonadas en [a,b] con la distancia que proporciona la media cuadrática y el espacio de las funciones integrables al cuadrado en [a,b] respecto a F(t), con la distancia dada por

$$d(h(t),g(t)) = \int_a^b |h(t)-g(t)|^2 dF(t) \qquad (1.2)$$

-Paso 2

Si h(t) es una función continua, acotada e integrable al cuadrado en el intervalo [a,b] puede probarse la existencia de una sucesión de funciones escalonadas que convergen a ella en la distancia dada por 1.2 y que la correspondiente sucesión de integrales I(n) converge en m.c. a un cierto límite I que se interpretará como

$$I = \int_a^b h(t)dX(t)$$

-Paso 3

Si h(t) es cualquier función integrable al cuadrado respecto a F(t) en [a,b], se puede repetir el paso dos quedando definida la integral mediante el correspondiente paso al límite. Es resaltable el hecho de que se ha restringido la clase de las funciones integrables respecto al proceso X(t) a aquellas funciones de cuadrado integrable respecto a F(t) en [a,b].

La integral así definida es lineal, tiene esperanza nula y varianza dada por

$$E[|I|^2] = \int_a^b |h(t)|^2 dF(t)$$

1.2.2.3.2 Descomposicion espectral

La definición de integración de procesos de segundo orden permite generalizar el concepto de descomposición espectral.

Dado un proceso de segundo orden, se define la **función muestral de covarianza** como

$$K_T(v) = \begin{cases} \frac{1}{T}\int_0^{T-v} X(t)X(t+v)dt & \text{si } 0\le v\le T \\ 0 & \text{si } v>T \\ -K_T(v) & \text{si } v<0 \end{cases}$$

Si existe una función G(v) tal que $\lim_{T\to\infty} E[K_T(v)]=G(v)$, y es continua, entonces existe una función $F(\lambda)$, que determina una medida finita en $\mathbb{R}$ tal que

$$G(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}dF(\lambda).$$

Si X(t) es un proceso estacionario de covarianza, se verifica que $K_X(t)=G(t)$.

Teorema 1.2.8

Para cada proceso de segundo orden continuo y estacionario de covarianza X(t), *existe un proceso de incrementos ortogonales* Y(t), *determinado de forma única salvo por una variable aleatoria aditiva (que se puede escoger para que* $Y(-\infty)=0$ *) tal que*

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}dY(\lambda).$$

Demostración

Si X(t) es estacionario de covarianza por el Teorema de Bochner

$$E[X(t)\bar{X}(t+s)] = E[X(t)\bar{X}(0)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}dF(\lambda).$$

Se puede considerar una correspondencia entre cada X(t) en H_X y las funciones de la forma $e^{it\lambda}$ en $L_2(F)$. Además éste espacio se puede generar a partir de combinaciones lineales y paso al límite - considerando la distancia dada por 1.2 - con funciones de la forma anterior.

Se define para cada λ_0 $\quad h(\lambda) = I_{(-\infty,\lambda_0]}(\lambda) \in L_2(F)$, y sea $Y(\lambda_0)$ la variable en H_X que le corresponde mediante la aplicación anterior,

$$E[Y(\lambda_0)\bar{X}(0)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)dF(\lambda)$$

$Y(\lambda)$ define un proceso de incrementos ortogonales que satisface la condición $E[|Y(t)-Y(s)|^2] = F(t) - F(s)$ si $t > s$, $E[Y(\lambda)] = 0$ y $E[|Y(\lambda)|^2] = F(\lambda)$.

Considérese $\lambda_0,\ldots,\lambda_n$ una partición en $(-K,K)$ y la variable aleatoria en $L_2(F)$ $\nu = \sum_{j=1}^{n} e^{it\lambda_j}[Y(\lambda_{j+1}-Y(\lambda_j)]$, a la que le corresponde la función $g(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} e^{it\lambda_j}[h(\lambda_{j+1}-h(\lambda_j)]$. Cuando $K \to \infty$ siendo $\max\{\lambda_{j+1}-\lambda_j\} \to 0$, se verifica que $g(\lambda) \to e^{it\lambda}$ mientras que $\nu \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}dY(\lambda)$, por tanto a $e^{it\lambda}$ le corresponde $\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}dY(\lambda)$, pero anteriormente se había visto que le correspondía $X(t)$, por tanto $X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}dY(\lambda)$ ■.

Este resultado extiende el concepto de representación espectral utilizado para la función de covarianza. La relación que existe entre los distintos elementos que componen las representaciones es

$$E[Y(t)]=0, \quad E[|Y(\lambda)|^2]=F(\lambda), \quad E[|dY(\lambda)|^2]=dF(\lambda),$$

donde $dY(\lambda)$ es el valor del salto de $Y(\ )$ en el punto λ, es decir la diferencia entre el límite por la derecha y el límite por la izquierda, y de igual modo para $dF(\lambda)$.

El proceso $Y(t)$ se llama **proceso espectral asociado a $X(t)$**. Si λ_1 y λ_2 son dos puntos de continuidad de $F(\lambda)$ se obtiene la transformación inversa del proceso espectral

$$Y(\lambda_2)-Y(\lambda_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-it\lambda_2} - e^{-it\lambda_1}}{-it} X(t)dt$$

tomando el límite en m.c.

Si λ no es un punto de continuidad

$$Y(\lambda^+) \quad -Y(\lambda^-) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-it\lambda} X(t)dt.$$

Pero la existencia de procesos espectrales no se limita a la clase de los estacionarios de covarianza,

Teorema 1.2.9

Un proceso de segundo orden X(t) *admite proceso espectral* Y(t) *si y sólo si su función de covarianza se puede representar como*

$$K_X(t,s)=\iint e^{i(tz_1-sz_2)}K(dt,ds)$$

donde K(t,s) *es una función de covarianza de variación acotada sobre* $R\times R$.

En general, el proceso espectral que se asegura existe cuando se verifica la condición del teorema, no será de incrementos ortogonales.

Otra de las utilidades del proceso espectral es caracterizar la variedad lineal generada por X(t). Considérese X(t) un proceso continuo en m.c., estacionario de covarianza, con distribución espectral F(λ). Una variable aleatoria $Y \in H_X$ si y sólo si existe una función $\mu(\lambda)$ integrable al cuadrado respecto a F(λ) que verifica

$$Y = \int_{\mathbb{R}} \mu(\lambda)d\hat{X}(\lambda) \tag{1.3}$$

Cabe preguntarse si 1.3 puede generalizarse, de modo que para un proceso Y(t) deba existir una función $\mu(\lambda,t)$ tal que $\mu(\cdot,t) \in L^2(F)$ y

$$\forall\ t \quad Y(t) = \int_{\mathbb{R}} \mu(\lambda,t)d\hat{X}(\lambda).$$

En general no es cierto que deba existir tal función , pero sí hay una clase de procesos que está en esta situación. Considérese X(t) un proceso continuo en m.c. y estacionario de covarianza, se dice que el proceso Z(t) es **conjuntamente estacionario con X(t)** si $\forall$ s,t $E[Z(t)\bar{X}(s)] = E[Z(0)\bar{X}(t-s)]$.

Si Z(t) es conjuntamente estacionario con X(t), entonces $\exists\ \mu(\lambda)\in L^2(F)$ tal que $Z(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}\mu(\lambda)dY(\lambda)\ \forall\ t\in\mathbb{R}$. Además el proceso Z(t) es estacionario y cualquier combinación lineal de X(t) y Z(t) es también un proceso estacionario.

El proceso espectral puede también utilizarse para caracterizar la normalidad de un proceso.

Teorema 1.2.10

Sea X(t) *un proceso estacionario de covarianza y continuo en m.c.. X(t) es normal si y sólo si su proceso espectral asociado es normal.*

1.2.3 Ergodicidad

Los resultados sobre ergodicidad ilustran sobre el comportamiento del proceso en el infinito, estos resultados validan algunos de los métodos utilizados para inferir las expresiones de las funciones fundamentales de los procesos de segundo orden, cuando se ha observado el proceso durante un largo periodo de tiempo.

Teorema 1.2.11

Sea X(t) $t\in[0,\infty)$ *un proceso de segundo orden, sea* $Y(t) = X(t)-E[X(t)]$, *el proceso normalizado, supongamos que su función de covarianza* $K_X(t,s)$ *es continua,* entonces

$$\frac{1}{T}\int_0^T Y(t)dt \longrightarrow 0 \quad \text{en m.c. cuando } T\to\infty \tag{1.4}$$

si y sólo si

$$\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T K_X(t,s)dtds \longrightarrow 0 \text{ cuando } T\to\infty \,. \tag{1.5}$$

El resultado es inmediato partiendo de la última observación en el teorema 1.2.6.

La convergencia en 1.4 puede cambiarse por convergencia casi seguro (c.s.) si 1.5 se sustituye por la condición más restrictiva

$$K_X(t,s) < C\,\frac{t^\alpha+s^\alpha}{1+(t-s)^\beta} \qquad \text{con } C\ \alpha \text{ y } \beta \text{ constantes, } C>0,\ 0\le 2\alpha<\beta<1.$$

Si el proceso es estacionario de covarianza la condición 1.5 se transforma en, $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T(1-\frac{\tau}{T})K_X(\tau)d\tau=0$, condición que es trivialmente satisfecha si $K_X(\tau)\to 0$ cuando $|\tau|\to\infty$. Lo que representa una situación bastnte corriente, la dependencia lineal entre dos variables suficientemente lejanas en el tiempo es insignificante. Para procesos estacionarios de covarianza la condición queda

Teorema 1.2.12

Sea X(t) *un proceso estacionario de covarianza, si*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T K_X(t)dt=0 \quad \textit{entonces} \quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt=0 \quad \textit{en m.c.}$$

Si para algún $\beta>0$ $K_X(t)=0(|t^\beta|)$ la convergencia en 1.4 es c.s.

Una caracterización del comportamiento de los promedios que se tratan, se consigue a traves de la descomposición espectral. De las fórmulas de inversión del proceso espectral y la función de covarianza respectivamente, se tiene que si Y(t) es el proceso espectral asociado a X(t) se verifica que

$$\frac{1}{T}\int_0^T X(t)e^{-it\lambda}dt \longrightarrow dY(\lambda) \quad \text{en m.c. cuando } T\to\infty$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T K_X(t)e^{-it\lambda}dt \longrightarrow dF(\lambda) \quad \text{cuando } T\to\infty.$$

de donde se obtiene como corolario que, una condición suficiente para que se verifique 1.5, es que la distribución espectral de X(t) sea continua en $\lambda=0$.

1.3. CALCULO EN TRAYECTORIAS

La forma más natural de interpretar el cálculo estocástico, es a traves de las propiedades analíticas de las trayectorias para cada w en el espacio muestral. El conocimiento del proceso a traves de éstas, es mucho más informativo que los resultados de segundo orden. Es por tanto de gran relevancia el cálculo en trayectorias, y la relación que existe con el cálculo en m.c..

En primer lugar un resultado sobre la medibilidad de las trayectorias, Recuérdese que un proceso $\{X(t) \ t\in T\}$ se decía **medible** si T es medible Lebesgue y $\forall$ w $X(t,w)$ es medible respecto a la medida producto $m(t)\times P(w)$ con m la medida de Lebesgue, bajo el supuesto de que ambas medidas son independientes.

Se tiene que cuando un proceso es medible, las trayectorias son medibles Lebesgue salvo quizá para un conjunto de trayectorias de probabilidad nula. En sentido inverso si las trayectorias del proceso son continuas en probabilidad en todos sus puntos salvo quizá en un conjunto de medida Lebesgue cero (que no tiene porque ser el mismo en cada trayectoria) entonces existe un proceso medible y separable equivalente a X(t).

El objeto de nuestro interés será buscar condiciones que aseguren el cumplimiento de las propiedades analíticas que se cuestionan, continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad, para casi todas las trayectorias.

En lo que sigue se considerará $T=[a,b]$ finito o infinito, y que todos los índices que se usan están dentro del intervalo.

El siguiente teorema y la posterior observación caracterizan la **continuidad c.s.**

Teorema 1.3.1

Sea un proceso estocástico X(t) *para el cual existen dos funciones* g(h) *y* q(h) *no decrecientes en un entorno de cero, tales que* ∀ t *fijo y h en ese entorno*

$$P\left\{ |X(t+h)-X(t)| \geq g(h) \right\} \leq q(h)$$

y además $\sum_{n=1}^{\infty} g(2^{-n}) < \infty$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n q(2^{-n}) < \infty$. *Entonces existe un proceso equivalente a* X(t) *continuo c.s. en T.*

Demostración

Supóngase que T = [0,1], y sea para cada n $X_n(t) = X(\frac{r}{2^n}) + (2^n t-r)[tX(\frac{r+1}{2^n})-X(\frac{r}{2^n})]$ para $\frac{r}{2^n} \leq t \leq \frac{r+1}{2^n}$.

Se verifica que $|X_{n+1}(t) -X(t)| \leq \frac{1}{2} |X(\frac{2r+1}{2^{n+1}})-X(\frac{r}{2^n})| + \frac{1}{2} |X(\frac{2r+1}{2^{n+1}})-X(\frac{2r+2}{2^{n+1}})|$ $= \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B.$

Puesto que ni A ni B dependen de n se tiene que $\max_n |X_{n+1}(t) -X(t)| \leq \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ cuando $\frac{r}{2^n} \leq t \leq \frac{r+1}{2^n}$, por tanto

$$P(\max_n |X_{n+1}(t) -X(t)| \geq g(2^{-(n+1)})) \leq P(A \geq g(2^{-(n+1)})+P(B \geq g(2^{-(n+1)})) \leq q(2^{-(n+1)})$$

Pero por hipótesis $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n q(2^{-n}) < \infty$, aplicando el lema de Borel Cantelli se tiene que $X_n(t)$ converge c.s. uniformemente en [0,1] a Z(t), como además $X_n(t)$ es continuo el el límite también lo es.

Por otra parte $X_n(\frac{r}{2^m}) = X_{n+1}(\frac{r}{2^m})$, de modo que $\lim_{n\to\infty} X_n(\frac{r}{2^m}) = X(\frac{r}{2^m})$, si $t \neq \frac{r}{2^m}$ $\forall$ r y m enteros, existe una sucesión t_n de números de la forma $\frac{r}{2^m}$, tales que $t_n \to t$ $0 < t-t_n < \frac{1}{2^n}$, como $\sum_{n=1}^{\infty} g(2^{-n}) < \infty$, usando de nuevo el lema de Borel Cantelli se tiene que $X(t_n) \to X(t)$ c.s., pero $X(t_n) = Z(t_n)$, dado que $Z(t)$ es continuo, X=Z c.s.■.

Una condición suficiente para que se verifique el teorema es que

$$\forall\ t \text{ y } h>0\ E[|X(t+h)-X(t)|^p] \leq \rho(h) \qquad \text{donde } p>0 \text{ y}$$

$\rho(h)=c|h^{1+r}|$ para algún c>0, r>0 **(condición de Kolmogorov)**

$\rho(h)=\dfrac{c|h|}{|\log|h||^{1+r}}$ para algún c>0, r>p .

Si no es posible verificar que el proceso es continuo c.s., sí que se puede acotar el tipo de discontinuidades que puede presentar.

Teorema 1.3.2

Sea un proceso estocástico X(t) *para el cual existen dos funciones* g(h) *y* q(h) *no decrecientes en un entorno de cero, tales que* $\forall$ $a \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq b$ *fijo y* $h=t_3-t_1$ *en ese entorno*

$$P\left\{|[X(t_3)-X(t_2)][X(t_2)-X(t_1)]| \geq g^2(h)\right\} \leq q(h)$$

y además $\sum_{n=1}^{\infty} g(2^{-n}) < \infty$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n q(2^{-n}) < \infty$. *Entonces existe un proceso equivalente a* X(t) *cuyas trayectorias presentan a lo sumo discontinuidades de primer orden c.s. en T. (si se consideran procesos separables, el propio proceso verifica el teorema).*

A partir de este teorema Chentov demostró que una condición suficiente para obtener las mismas conclusiones, es que

$$E[|[X(t_3)-X(t_2)][X(t_2)-X(t_1)]|^p] \leq K|h|^{1+r} \qquad (1.6)$$

para algunas constantes p, K y r positivas.

Si el proceso es de incrementos independientes la condición 1.6 se transforma en $E[|X(t+h)-X(t)|^2]<Ah$ para algún $A>0$.

Para estudiar la **diferenciabilidad de las trayectorias** del proceso se tiene el siguiente teorema que proporciona una condición suficiente de diferenciabilidad, endureciendo las condiciones del teorema 1.3.1

Teorema 1.3.3

Sea $X(t)$ *un proceso que satisface las condiciones del teorema* 1.3.1, *si para* $Y_h(t)=X(t+h)-X(t)$ *existen dos funciones* $g(h)$ *y* $q(h)$ *no decrecientes en un entorno de cero, y* verificando

$$P\left\{|Y_h(t)-Y_h(t-h)| \geq g^2(h)\right\} \leq q(h)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n g(2^{-n}) < \infty \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n q(2^{-n}) < \infty .$$

Entonces existe un proceso equivalente a $X(t)$ *cuyas trayectorias son diferenciables con continuidad c.s..(él mismo si es separable).*

La demostración sigue el mismo camino que la vista en 1.3.1.

Una condición suficiente para que se verifique el teorema es que

$\forall$ t y $h>0$ $E[|Y_h(t+h)-Y_h(t)|^p] \leq \rho(h)$ donde $p>0$ y

$\rho(h)=c|h^{1+r}|$ para algún $c>0$, $r>0$ **(condición de Kolmogorov)**

$\rho(h)=\dfrac{c|h|}{|\log|h||^{1+r}}$ para algún $c>0$, $r>p$.

La **integración para una trayectoria** queda determinada por la integral de Lebesgue $\int_A X(t,w)dt$. La integral $\int_A X(t)dt$ será entonces una variable aleatoria que para cada w toma el valor de la integral anterior. Los momentos de esta variable (cuando existen) son fácilmente calculables sin más que aplicar el teorema de Fubini. El siguiente teorema proporciona una condición suficiente de integrabilidad c.s..

Teorema 1.3.4

Sea X(t) *un proceso medible, supóngase que existen los primeros momentos para todo t, y que la función* E[X(t)] *es integrable Lebesgue en A, entonces las trayectorias del proceso son casi seguramente integrables en A y además* existe el momento de primer orden de la integral y es igual a

$$E[\int_A X(t)dt]=\int_A E[X(t)]dt$$

Demostración

Al ser medible sus trayectorias son integrables Lebesgue, aplicando el teorema de Fubini se concluye el resultado∎

1.4 RELACION ENTRE LAS PROPIEDADES ANALITICAS DE SEGUNDO ORDEN Y LAS PROPIEDADES CASI SEGURO.

Resulta evidente que el cálculo en media cuadrática no proporciona una información completa sobre los procesos con que se trabaja. Por ejemplo, el proceso de Poisson es continuo en media cuadrática aunque sus trayectorias son discontinuas con probabilidad uno. Por éllo es útil complementar la información que se tiene con la derivada del análisis de las trayectorias, así como con el conocimiento de las relaciones existentes entre ambos.

CONTINUIDAD

Considérese un proceso de segundo orden separable y continuo en m.c. si $E[|X(t+h)-X(t)|^2]= K_X(t+h,t+h)+K_X(t,t)-2K_X(t+h,t) \leq Kh^{1+r}$, por la condición de Kolmogorov se tendría la continuidad c.s.. Por otra parte $K_X(,)$ es una función continua si además fuera uniformemente continua (en cada componente) con $\delta(\varepsilon)=K\varepsilon^{1/(1+r)}$ se verificaría que $|K_X(t+h,t)-K_X(t,t)|\leq Ch^{1+r}$ lo que implicaría el cumplimiento de la condición de Kolmogorov.

En el caso estacionario de covarianza la condición suficiente se expresa como $|K_X(t+h)-K_X(t)|\leq Ch^{1+r}$

La relación entre continuidad y diferenciabilidad en cada caso está perfectamente determinada, la relación entre diferenciabilidad en m.c. y continuidad c.s. se soluciona para el caso de procesos estacionarios de covarianza, ya que debido a la condición de Kolmogorov si un proceso estacionario de covarianza es diferenciable en m.c. existe un proceso equivalente a él, cuyas trayectorias son continuas c.s..

DIFERENCIABILIDAD

Sea X(t) un proceso de segundo orden separable y continuo en m.c. y $Y_h(t)=X(t+h)-X(t)$.

Si existen las derivadas cruzadas de la función de covarianza $K_X(t,s)$ el teorema 1.2.4 asegura que el proceso es diferenciable en m.c.

Si existen las derivadas cruzadas de la función de covarianza $K_{Y_h}(t,s)$ y verifican $\frac{d^2}{dtds}K_{Y_h}(t,s) \leq Ch^2$ para todo h en un entorno de cero, entonces casi todas las trayectorias son diferenciables.

En general si $\frac{d^{2n+2}}{dt^{n+1}ds^{n+1}}K_{Y_h}(t,s)$ existe y es finita, entonces las trayectorias de X(t) son n veces diferenciables c.s..

INTEGRACION

La relación fundamental la proporciona el próximo resultado.

Teorema 1.4.1

Sea X(t) *un proceso medible y continuo en m.c. entonces* $\int_a^b X(t)dt$ *existe c.s y en m.c. y además son iguales c.s.*

Para ver que es cierto considérese I_n las sumas de aproximación a la integral en m.c., es fácil comprobar que $E[|I_n-I|^2] \to 0 \quad n\to\infty$ donde I es la integral definida para el cálculo en trayectorias■

1.5 CALCULO DE ITÔ

Hasta aquí se ha tratado de las propiedades de segundo orden de procesos que verificaban determinadas condiciones de regularidad, pero estos elementos no son suficientes para el análisis de todos los procesos. Los procesos con incrementos ortogonales no admitían derivada en m.c., lo que pone de manifiesto que hay procesos lo suficientemente irregulares como para ser tratados aparte.

1.5.1 Insuficiencia de la integral de Riemann-Stiltjes

En la definición del concepto de integrabilidad se impone la condición de que el límite de las sumas de aproximación no dependa de los puntos intermedios de la partición escogida. Se verá que ante algunos procesos esta restricción es insoslayable. En particular el movimiento browniano no es integrable respecto a otro movimiento browniano B(t).

Tratemos de calcular $\int_a^b B(t)dB(t)$

Sea $\{t_j\}_{j\geq 0}$ una partición de [a,b]. La aproximación de un proceso cualquiera X(t) mediante funciones escalonadas vendrá dada por:

$$\sum_{j\geq 0} X(t_j^*) I_{[t_j,t_{j+1}]} \qquad 0 \leq t_j < t_{j+1} \leq T \quad t_j \leq t_j^* \leq t_{j+1} \text{ , } t_j^* < t_{j+1}^* \text{ .}$$

Considérense las aproximaciones a la integral a traves de dos elecciones distintas de puntos intermedios, $t_j^*=t_j$ en un caso y $t_j^* = t_{j+1}$ en otro, la integral de los correspondientes procesos simples que aproximan B(t) es

$$I_1^n = \sum_{j\geq 0} B(t_j)(B(t_{j+1})-B(t_j)),$$

$$I_2^n = \sum_{j\geq 0} B(t_{j+1})(B(t_{j+1})-B(t_j)).$$

Es inmediato comprobar que el límite en m.c. es distinto, basta observar que

$$E[I_1^n]=0 \to 0 \text{ cuando } n\to\infty$$

mientras que $E[I_2^n]=b-a \to b-a$ cuando $n\to\infty$, por tanto la integral depende de la elección de t_j^*.

1.5.2 Integral estocástica

A pesar de lo que se acaba de observar, es razonable aproximar un proceso mediante funciones escalonadas de la forma anterior. Para continuar por este camino se debe efectuar una elección de t_j^*.

Las elecciones más usuales son $t_j^* = t_j$ que da lugar a la **integral de Itô,** y $t_j^* = \dfrac{t_{j+1}+t_j}{2}$, el punto medio del intervalo, que conduce a la **integral de Stratanovich.** Consideraremos la elección debida a Itô :

$$I = \sum_{j\geq 0} X(t_j)(B(t_{j+1})-B(t_j)) .$$

Para construir la integral de Itô es necesario considerar en (Ω,F,P), el espacio probabilistico de definición del movimiento browniano, una familia no decreciente de σ-álgebras $\{F_t\}\subset F$, que verifique

- Para cada t B(t) es F_t-medible,
- B(t)-B(s) son independientes de F_r $\forall$ r<s,

Llamamos clase de procesos integrables en [a,b] según Itô (H_2[a,b]) a los procesos X(t) que verifican las condiciones

- $\int_0^T X(t)^2 dt < \infty$ c.s.

-$\forall$ t X(t) es F_t-medible.

Es importante resaltar que con estas condiciones el proceso X(t) es independiente de los incrementos de B(t).

La construcción de la integral se hace de la misma manera que en el caso de la integral de una función respecto a un proceso con incrementos ortogonales.

i- Si X(t) es un proceso simple en t, se define $I = \sum_{j\geq 0} X_j(B(t_{j+1})-B(t_j))$.

Propiedades

P1- Si X(t) e Y(t) son dos procesos en $H_2[0,T]$ y α y β dos constantes tales que $\alpha X(t)+\beta Y(t) \in H_2[a,b]$, entonces:

$$\int_a^b [\alpha X(t) + \beta Y(t)]dB(t) = \alpha \int_a^b X(t)dB(t) + \beta \int_a^b Y(t)dB(t) .$$

P2- Si $X(t) \in H_2[a,b]$ y $\int_a^b E[X(t)^2]dt < \infty$, entonces:

$$E[\int_a^b X(t)dB(t)] = 0 \text{ y } E[\left(\int_a^b X(t)dB(t) \right)^2] = \int_a^b E[X(t)^2]dt.$$

Esta última igualdad se conoce como **la isometría de Itô.**

P3- $\forall$ X $\in$ $H_2[a,b]$, C > 0 , M > 0,

$$P\left(\left| \int_0^T X(t)dB(t) \right| > C \right) \leq P\left(\int_0^T X(t)^2 dt > N \right) + \frac{N}{C^2} .$$

Para procesos simples, la propiedad P1 se demuestra sin más que aplicar la definición; para la segunda, basta usar la condición de independencia entre X(t) y los incrementos de B(t); la tercera propiedad se deriva en esencia de la propiedad anterior y de la definición de la clase de procesos integrables.

La idea es extender la definición de integral a todo $H_2[0,T]$ de manera que se sigan verificando las propiedades P1 y P2 -la clave está en que se conserve la isometría de Itô-, y como consecuencia la propiedad P3.

ii- * Si $Y(t) \in H_2$, acotado y continuo, existen procesos simples, integrables $X_n(t)$, que convergen a Y(t) con la distancia definida por

$$d_1 = d(X(t),Y(t)) = E[\int_a^b (Y(t)-X(t)^2 dt], \text{ es decir,}$$

$$E[\int_a^b (Y(t)-X_n(t))^2 dt] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad (1.7).$$

* Si $Y(t) \in H_2$ es acotado, existen funciones acotadas $X_n(t) \in H_2$ que verifican 1.6

* Si $Y(t) \in H_2$, existen funciones acotadas $X_n(t) \in H_2$ que verifican 1.7.

Por tanto si $Y(t) \in H_2$, existen funciones simples $X_n(t) \in H_2$ que verifican 1.7.

Entonces se define $\int_0^T Y(t)dB(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^T X_n(t)dB(t)$ tomando el límite en m.c.. Puede probarse que el límite es independiente de la elección de la secuencia X_n que converge a Y(t). Por tanto la integral está bien definida. Además por tratarse de convergencia en m.c. se tiene también la convergencia de los dos primeros momentos, luego

$$E[\int_a^b Y(t)dB(t)] = \lim_{n\to\infty} E[\int_a^b X_n(t)dB(t)]$$

$$E[\left(\int_a^b Y(t)dB(t)\right)^2] = \lim_{n\to\infty} E[\left(\int_a^b X_n(t)dB(t)\right)^2] = \lim_{n\to\infty}\int_a^b E[X(t)^2]dt = \int_a^b E[Y(t)^2]dt.$$

es decir, se verifica la propiedad P2, la P1 y la P3 son inmediatas.

Siempre que $\int_a^b E[X(t)^2]dt < \infty$ $a \le c < d \le b$, se puede definir la integral $\int_c^d X(t)dB(t)$ con $a \le c < d \le b$, como la integral del proceso $X(t)I_{[c,d]}(t)$.

Puede probarse como extensión de la propiedad P2, que

$$\int_a^b X(t)dB(t)/F_a] = 0 \text{ y}$$

$$E[\left(\int_a^b X(t)dB(t)\right)^2 /F_a]=\int_a^b E[X(t)^2/F_a]dt,$$

La integral $\int_{-\infty}^{\infty} X(t)dB(t)$ se entiende como

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} X(t)dB(t)$$

tomando el límite en m.c..

EXTENSIONES DE LA INTEGRAL ESTOCASTICA

1.5.2.1 Integral respecto a una martingala

La generalización inmediata es buscar $I = \int_0^T X(t)dY(t)$ donde $Y(t)$ es un proceso cualquiera. El desarrollo es prácticamente el mismo que en el caso anterior, sólo varían las condiciones que se exige a los procesos $X(t)$ e $Y(t)$.

Se considerará una familia no decreciente de σ-álgebras $\{F_t\}$ tales que

- $Y(t)$ es una martingala de segundo orden con $E[Y(t)] = 0$,

- Existe una función monótona no decreciente F(t) tal que

$$E[|Y(t)-Y(s)|^2] = E[|Y(t)-Y(s)|^2/\mathcal{F}_s] = F(t)-F(s) \ \forall \ s<t.$$

(Nótese que si además las trayectorias son continuas y $F(t) = \sigma^2 t$, Y(t) es un movimiento browniano estándar)

- X es un proceso medible respecto a dP×dF,
- X(t) es $\mathcal{F}_t$-medible, $\forall$ t,
- $\int_0^T E[X(t)^2]dF(t) < \infty$.

Condiciones que como en el caso anterior implican que X(t) es independiente de Y(t+s)-Y(t).

La propiedad P2 queda

P'2- Si X es integrable y $\int_0^T E[X(t)^2]dF(t) < \infty$ entonces: $E[\int_0^T X(t)dY(t)] = 0$ y

$$E[\left(\int_0^T X(t)dY(t)\right)^2] = \int_0^T E[X(t)^2]dF(t).$$

El resto del desarrollo es idéntico al del caso anterior teniendo en cuenta que la distancia entre variables se define como:

$$d_1 = d(X(t),Y(t)) = E[\int_0^T (Y(t)-X(t))^2 dF(t)].$$

Obsérvese que la integral estocástica no es única, puesto que la definición no depende de los conjuntos de medida nula, pudiéndose considerar como una clase de variables iguales c.s.

Usando esta extensión se pueden considerar integrales respecto a procesos de salto, y en particular respecto al proceso de Poissón.

1.5.2.2 Integral de Poisson

La integral de Poissón es un caso particular de las integrales respecto a **medidas aleatorias numerables**. Una **medida aleatoria** sobre $(E,\mathcal{A})$ se define como un proceso estocástico $\{M(A),\ A\in\mathcal{A}\}$ que toma valores no negativos, y tal que $M(A\cup B)=M(A)+M(B)$, si además $M(A)$ es una variable aleatoria numerable para cada $A\in\mathcal{A}$ se dice que la medida es numerable. Las medidas aleatorias numerables tienen especial importancia porque los procesos puntuales pueden ser identificados con medidas numerables.

Si $E=\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R}^{n}$ y M es una medida aleatoria numerable, se puede construir por el procedimiento de Itô una integral de la forma

$$\int_a^b\int_A X(t,u)M(dt,du)$$

donde $X(t,u)$ será un proceso que verifique las condiciones requeridas de integrabilidad.

La integral debe construirse por el procedimiento de Itô porque no es interpretable en el sentido de Riemman-Stiltjes, (no en todos los casos), si se pretendiera evaluar $\int_a^b N(t)dN(t)$ con $N(t)$ un proceso de Poissón, se razonaría de la misma manera que se hacia para la integral del movimiento browniano que el límite de las sumas de aproximación depende de la elección de los puntos intermedios de la partición.

La integral 1.8 cuando $M(t,u)$ es la medida de Poissón, se puede entender como un caso particular de integración respecto a una martingala, puesto que si $N([o,t]\times A)$ es una medida de poissón sobre $\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R}^{n}$ se tiene que $\bar{N}(t)=N([o,t]\times A)-t\lambda(A)$ es una martingala de segundo orden continua en m.c., (donde $\lambda(A)$ es la intensidad del proceso de Poissón).

Teorema 1.5.1

Sea N(t,u) *un proceso de Poissón definido en* $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n$*. Sea* $I_n=\int_a^b\int_A N(dt,du)$ *el número de sucesos ocurridos en* [a,b]×A, *(se interpreta como el número de sucesos con característica en el conjunto A, que han ocurrido en el tiempo* [a,b]*). Si*

1- $E[I_n]=P(U\in A)\int_a^b \lambda(s)ds$ para cada a<b, y $A\in\mathbb{R}^n$, *donde* U *es la variable marginal de* $N(t,U)=N(t\times U)$

ii- El proceso X(t,u) *es independiente de* I_n $\forall$ $u\in\mathbb{R}^n$ *siempre que t<a<b*

iii- X(t,u) *es casi seguramente continuo en u,continuo por la izquierda en t y acotado en* [a,b]×A *para cada* A *acotado.*

entonces existe

$$I_1 = \int_a^b \int_A X(t,u)N(dt,du) \tag{1.8}$$

y es igual a

$$I_1=\begin{cases} 0 & \text{si } I_n=0 \\ \sum_{n=1}^{I_n} X(\tau_n,u_n) & \text{si } I_n\neq 0 \end{cases}$$

donde τ_n *es el instante de ocurrencia ddel n-esimo suceso y* u_n *su característica. Además*

si $I_2= I_1 - \int_a^b \int_A X(t,u)\lambda(t)dtdP(u)$ *donde P(u) es la distribución marginal de* U

se verifican

$$E[I_1]=0 \qquad y \qquad E[|I_2|^2]= \int_a^b \int_A X(t,u)\lambda(t)dtdP(u) \ .$$

Las dos primeras condiciones del teorema son análogas a las exigidas para la integrabilidad según Itô, y los resultados sobrte los momentos son del mismo tipo, lo único realmente novedoso, es la fórmula de cálculo de la integral.

1.5.3 El proceso $Z(t) = \int_0^t X(s)dY(s)$

Consideremos el proceso definido por $Z(t) = \int_0^t X(s)dY(s)$ $0 \leq t \leq T$ donde $X(t)$ e $Y(t)$ son dos procesos tales que $\forall$ $t \geq 0$ X es integrable respecto a $Y(t)$ en $[0,t]$. Se van a estudiar algunas de las propiedades de $Z(t)$.

Teorema 1.5.2

El proceso $Z(t)$ *es una martingala.*

Demostración

Por definición $Z(t)$ es el límite en m.c. de variables $Z^n(t) = \int_0^T X^n(t)dY(t)$, con $X^n(t)$ procesos simples en $[o,t]$ que convergen a $X(t)$ con la distancia d_1.

Sea $s<t$

$$Z^n(t) = \sum_{t_j \leq s} X^n(t_j)[Y(t_{j+1})-Y(t_j)] + \sum_{s<t_j \leq t} X^n(t_j)[Y(t_{j+1})-Y(t_j)] = Z^n(s)$$

$$+ \sum_{s<t_j \leq t} X^n(t_j)[Y(t_{j+1})-Y(t_j)]$$

usando que $X^n(t)$ es F_t-medible, que $Y(t)$ es una martingala y que $Y(t+s)-Y(t)$ es independiente de F_t se tiene que $E[Z^n(t)/F_s] = Z^n(s)$; es decir $\forall$ $B \in F_s$ $\int_B Z^n(t)dP = \int_B Z^n(s)dP$, haciendo tender n a infinito tenemos $\int_B Z(t)dP = \int_B Z(s)dP$ ■.

Además podemos definir Z(t) de manera que sea separable y también medible, ya que para cada t elegimos la integral dentro de un conjunto de variables iguales c.s., siendo posible coordinar la elección de tal modo que, el proceso Z(t) sea una martingala medible, y separable.

Esta propiedad es la que distingue esencialmente a la elección de Itô del resto de posibles consideraciones de la integral estocástica, de hecho el trabajar con esta interpretación en lugar de la quizá más natural de Stratanovich, se debe en gran medida a esta característica que no tienen las otras integrales.

El siguiente teorema busca caracterizar la continuidad de Z(t).

Teorema 1.5.3

Si la función determinada por $F(t)-F(s) = E[|Y(t)-Y(s)|^2]$ *es continua entonces el proceso* Z(t) *es continuo en m.c., y si no lo es, los puntos fijos de discontinuidad de* Z(t) *son discontinuidades de* F. *Si el proceso* Y(t) *tiene trayectorias continuas c.s., entonces también las tiene* Z(t).

Demostración

Las dos primeras proposiciones se justifican por la propiedad P2

$$E[|Z(t)-Z(s)|^2] = \int_s^t E[X(t)^2]dF(t).$$

Para la tercera observemos que Y(t) es una martingala (que podemos suponer separable) con trayectorias continuas, entonces se trata de un movimiento browniano, salvo una reparametrización del tiempo.

Lema Si X(t) es una martingala separable de segundo orden

$$P(\sup_{0\leq t\leq T}|X(t)|>\varepsilon) \leq \frac{E[X(T)^2]}{\varepsilon^2} \blacksquare$$

Ahora si $X(t)$ es un proceso simple la continuidad es obvia (es suma de procesos continuos), si no lo es, tomemos $X^n(t)$ procesos simples convergiendo en d_2 a $X(t)$, tales que $d_2(X^n(t),X(t)) \leq \frac{1}{n^4}$. Se verá que $X^n(t)$ converge uniformemente a $X(t)$ con probabilidad uno.

Si $Z^n(t) = \int_0^t X^n(s)dB(s)$, aplicando el lema a $Z(T)-Z^n(t)$, se tiene que

$$P(\sup_{0\leq t\leq T} |Z(t)-Z^n(t)| > \frac{1}{n}) \leq \frac{E[|Z(T)-Z^n(T)|^2]}{\frac{1}{n^2}} \leq n^2 d_2(X^n(t),X(t)) \leq \frac{1}{n^2},$$

que es el término general de una serie convergente. Por el lema de Borel-Cantelli,

$$P(\lim\sup \{\sup_{0\leq t\leq T} |Z(t)-Z^n(t)| > \frac{1}{n}\}) = 0,$$

y por lo tanto,

$$P(|Z(t)-Z^n(t)| < \frac{1}{n}) = 1 \qquad \text{si n es suficientemente grande.} \blacksquare$$

Aplicando el teorema a la integral de Itô se concluye que es $Z(t)$ es continuo.

Anteriormente vimos que $Z(t)$ era una martingala, si cumple las condiciones para que se pueda definir una integral respecto a ella, se puede considerar $\int_a^b X_1(t)dZ(t)$ para algún proceso $X(t)$ que verifique las condiciones de integrabilidad. Así se puede considerar un **cambio de variable** dado por $dZ(t)=X(t)dY(t)$, relación que no es más que otra forma de expresar

$$Z(t) = \int_0^t X(s)dY(s). \text{ Se tiene que}$$

$$\int_a^b X_1(t)dZ(t)=\int_a^b X_1(t)X(t)dY(t).$$

El tipo de integrales más habitual, y el que hasta hoy ha resultado más útil, es el de las integrales respecto al movimiento browniano. Se considera el problema de caracterizar aquellos procesos que pueden ser representados como una integral respecto a un movimiento browniano.

Sea $Z(t) = \int_0^t X(t)dB(t)$ una integral respecto a un movimiento browniano ($\sigma^2=1$). Entonces:

$$E[|Z(t)-Z(s)|^2/F_s] = E[\int_s^t |X(u)|^2 du/F_s] \tag{1.9}$$

También sabemos que Z(t) es una martingala separable, y que sus trayectorias son continuas c.s. ya que las del movimiento browniano lo son. El siguiente teorema prueba que estas condiciones son suficientes para garantizar que Z(t) puede escribirse como la integral de algún proceso respecto a un movimiento browniano

Teorema 1.5.4

Sea Z(t) *una martingala separable de segundo orden cuyas trayectorias son continuas c.s.. Si existe un proceso* X(t) *separable,* dP×dt *medible, con* X(t) F_t*-medible, que no se anula c.s. y que verifica* 1.9, *entonces existe un* movimiento browniano B(t) *que verifica*

$$Z(t) = Z(a)+\int_a^t X(s)dB(s) \quad c.s. \tag{1.10}$$

Demostración

Definamos $Y(t) = \int_a^t \frac{dZ(s)}{X(s)}$. Este proceso es una martingala, tiene trayectorias continuas (por ser una integral estocástica respecto a un proceso con trayectorias continuas c.s.), y verifica

$$E[|Y(t)-Y(s)|^2/F_s] = t-s \text{ c.s.}$$

Por lo tanto se trata de un movimiento browniano, es claro que verifica 1.10 con probabilidad 1.

Si X(t) puede anularse, definimos $Y(t) = \int_a^t \frac{dZ(s)}{X(s)} + \int_a^t X'(s)dB(s)$

donde $X' = I_{[X(t)=0]}$, y B(t) es un movimiento browniano que verifica,

$$E[(Z(t)-Z(s))(B(t')-B(s'))] = 0 \quad s<t \ s<s'<t',$$

obteniéndose que Y(t) es un movimiento browniano. Usando las reglas de combinación de integrales, se llega a que

$$Z(t) = Z(a)+\int_a^t X(s)dY(s) + \int_a^t X'(s)dZ(s).$$

Además $X(t)X'(t)=0$, por lo que $E[\int_a^t X'(s)dZ(s)] = \int_a^t E[(X'(s)X(s))^2]ds = 0$.

Por tanto se anula el último sumando de la derecha en la expresión anterior, volviendo a darse la relación 1.10 ■

1.5.4 Diferencial estocástica

Se tratará ahora del otro elemento fundamental en el cálculo, la diferencial, restringiéndonos a la interpretación de Itô, es decir considerando únicamente integrales respecto a un movimiento browniano.

Sea $\{X(t)\ t \geq 0\}$ un proceso que $\forall\ 0 \leq s < t \leq T$ verifica:

$$X(t)-X(s) = \int_s^t a(t)dt+\int_s^t b(t)dB(t) \qquad (1.11),$$

donde a(t) y b(t) son dos procesos tales que la expresión de la derecha tiene sentido , $\int_s^t a(t)dt < \infty$, $\int_s^t b(t)^2dt < \infty$ c.s., y B(t) es un movimiento browniano.

Se dirá que X(t) **tiene diferencial estocástica en [0,T]** y la representaremos como

$$dX(t) = a(t)dt+b(t)dB(t) \qquad (1.12).$$

Es claro por la definición que la diferencial estocástica es lineal, sin embargo no se comporta como las diferenciales ordinarias en el resto de operaciones. Veremos como manipular esta diferencial. La clave de las operaciones está en que $[dB(t)]^2 \cong dt$ en el siguiente sentido: consideremos $\{t_k^n\}$ una partición de $[s,t]$ cuyo diámetro se hace 0 al tender n a infinito. Se tiene que $\xi_n = \sum_{k=0}^{n-1} [B(t_{k+1})-B(t_k)]^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} t-s$ en probabilidad -es inmediato comprobar que $E[\xi_n] = t-s \ \forall\ n$ y $V[\xi_n] \longrightarrow 0$-.

Como aplicación inmediata podemos calcular

$$\int_s^t B(u)dB(u) = \lim_n \sum_{k=0}^{n-1} B(t_k)[B(t_{k+1})-B(t_k)] =$$

$$= \frac{1}{2}(B(t)^2-B(s)^2) - \frac{1}{2}\xi_n \longrightarrow \frac{1}{2}(B(t)^2-B(s)^2) - \frac{1}{2}(t-s),$$

relación que podemos expresar como $\int B(u)dB(u) = \frac{1}{2}(B(t)^2 - t),$ (1.13)

que en forma diferencial queda

$$d(\frac{1}{2}B(t)^2) = \frac{1}{2}dt+B(s)dB(s). \qquad (1.14)$$

Por procedimientos similares se calcula $d(tB(t)) = B(t)dt+tdB(t)$ (1.15).

Estas dos relaciones permiten establecer la regla de diferenciación de un producto de procesos diferenciables, de polinomios,..etc.

Diferencial de un producto

Sean X *e* Y *dos procesos con diferenciales respectivas*

$$dX(t) = a(t)dt+b(t)dB(t) \qquad dY(t) = c(t)dt+e(t)dB(t).$$

Entonces:

$$d(X(t)Y(t)) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + b(t)e(t)dt.$$

Demostración

Supongamos que el teorema está probado para a,b,c,d procesos constantes (variables aleatorias). De la la aditividad de la diferencial se desprende el resultado para funciones simples, y pasando al límite tendríamos la demostración completa. Lo probaremos entonces en este único caso:

$dX(t) = adt + bdB(t)$ $dY(t) = cdt + edB(t)$, es decir, $X(t) = X(0) + at + bB(t)$, $Y(t) = Y(0) + ct + eB(t)$ (por simplificar se supondrá $X(0) = Y(0) = 0$).

Multiplicando X(t)Y(t) tenemos

$$X(t)Y(t) - X(s)Y(s) = ac\int_s^t 2udu + (ae+cb)\int_s^t d(tB(t)) + be\int_s^t d(B(u)^2)$$

sustituyendo las relaciones 1.14 y 1.15 y reagrupando términos se llega a,

$$\int_s^t (aY(u)+cX(u)+be)du + \int_s^t (bY(u)+cX(u))dB(u),$$

que en notación diferencial se expresa como

$$d(X(t)Y(t)) = (aY(t)+cX(t)+be)dt + (bY(t)+cX(t))dB(t).$$

Reagrupando de nuevo términos, tenemos el resultado requerido.■

Una aplicación inmediata de la fórmula de diferenciación de un producto, proporciona una réplica de la fórmula de integración por partes del análisis determinista.

Sea $Y(t)=f(t)B(t)$ donde $f(t)$ es una función determinista de variación acotada, se tiene que $dY(t)=f(t)dB(t)+B(t)df(t)$, expresándolo en forma integral y despejando

$$\int_a^b f(t)dB(t) = [f(t)B(t)]_a^b - \int_a^b B(t)df(t)$$

La fórmula esencial de diferenciación viene dada por el próximo teorema

Teorema 1.5.5 -Fórmula de Itô-

Sea X(t) *un proceso con diferencial* $dX(t) = a(t)dt + b(t)dB(t)$ *y* $f(t,x)$ *tal que* $f(t,\cdot) \in C^2(\mathbb{R})$ *y* $f(\cdot,t) \in C^1[0,T]$. *Entonces el proceso* $f(t,X(t))$ *tiene diferencial estocástica dada por:*

$$df(t,X((t)) = [\frac{df}{dt}(t,X(t)) + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}t,X(t)))b^2(t) + \frac{df}{dx}(t,X(t))a(t)]dt +$$
$$+ \frac{df}{dx}(t,X(t))b(t)dB(t).$$

Demostración

Se necesitarán unos resultados previos,

Resultado 1 Buscamos la diferencial de un polinomio en B(t). Por el resultado 1.14, y tras aplicar un procedimiento de inducción se llega a :

$$d(B(t)^n) = \frac{n(n-1)}{2} B(t)^{n-2}dt+nB(t)^{n-1}dB(t) .$$

Esta observación junto con la aditividad de la diferencial justifican que dado p(x) un polinomio,

$$d(p(B(t)) = \frac{dp}{dx}(B(t))d(B(t)) + \frac{1}{2}\frac{d^2p}{dx^2}(B(t))dt.$$

Resultado 2 Sea f(x) una función (real) dos veces diferenciable con continuidad. Podemos aproximar $\frac{d^2f}{dx^2}(x)$ uniformemente por polinomios $q_n(x)$ de manera que $Q_n(x) = f(0) + \frac{df}{dx}(0)x + \int_0^x (x-y)q_n(y)dy$ verifica que :

$$\underset{(a)}{Q_n(B(t)) - Q_n(B(s))} = \underset{(b)}{\int_s^t \frac{dQ_n}{dx}(B(u))dB(u)} + \int_s^t q_n(B(t))dB(t)$$

(a) $\longrightarrow$ $f(B(t))-f(B(s))$

(b) $\longrightarrow$ $\displaystyle \frac{1}{2}\int_s^t \frac{df^2}{dx^2}(B(t))dt + \int_s^t \frac{df}{dx}(B(t))dB(t),$

de donde concluímos $\displaystyle d(f(B(t)) = \frac{df}{dx}(B(t))d(B(t)) + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(B(t))dt.$

Resultado 3 Sea $\Phi(t,x)$ una función en $[0,T]\times\mathbb{R}$ diferenciable con continuidad una vez respecto a t y dos veces respecto a x, entonces:

$$d(\Phi(t,B(t))) = [\frac{d\Phi}{dt}(t,B(t))+\frac{1}{2}\frac{d^2\Phi}{dx^2}(t,B(t))]dt+\frac{d\Phi}{dx}(t,B(t))dB(t) .$$

Si se pudiera escribir $\Phi(t,x) = g(t)f(x)$ con $g \in C^1[o,T]$ y $f \in C^2(\mathbb{R})$, para demostrar el teorema bastaría aplicar el resultado anterior junto con la diferencial del producto. Además se verifica que la clase de funciones que se pueden escribir en la forma deseada es cerrada respecto a transformaciones lineales y convergencia uniforme. Pudiendo aproximar Φ uniformemente por funciones $\Phi_n=\sum_{k=1}^{n} g_k(t)f_k(x)$, con $g_k \in C^1[o,T]$ y $f_k\in C^2(\mathbb{R})$.

El resultado es válido si Φ es un proceso estocástico dependiendo de dos parametros t y x siempre que $\forall$ t $\Phi(t,\cdot)$ sea $\mathcal{F}_t$-medible y para cada w se verifiquen las condiciones del lema.

Se esboza finalmente la demostración en el caso en que a(t) y b(t) son constantes (variables aleatorias). De aquí se valida automáticamente para funciones simples, y pasando al límite se completaría la demostración.

De $a(t) = a$ $b(t) = b$, se tiene $X(t) = X(0) + at + bB(t)$. Se define Φ tal que $\Phi(t,B(t)) = f(t,X(t))$ y $\Phi(t,x) = f(t,X(0)+at+bx)$. Para obtener el resultado basta calcular las derivadas parciales y aplicar el resultado 3 ■.

Se Puede expresar esta fórmula como:

$$df(t,X((t)) = \frac{df}{dt}(t,X(t))dt + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(t,X(t)))(dX(t))^2 + \frac{df}{dx}(t,X(t))dX(t) ,$$

teniendo en cuenta que $dB(t)^2 \cong dt$ y $dtdB(t) = o(dt) = dtdt$.

1.5.5 Extensión de la diferencial estocástica

Una extensión del concepto de diferencial estocástica se obtiene sin más que considerar la integral respecto a la medida de poissón.

Se dirá que X(t) admite diferencial estocástica en [0,T] si $\forall$ 0<s<t<T

$$X(t)-X(s) = \int_s^t a(s)ds + \int_s^t b(s)dB(s) + \int_s^t\int_A c(s,u)N(ds,du) \qquad (1.16),$$

donde a(t),b(t),c(t,u) son procesos tales que las integrales están bien definidas, y se expresará como .

$$dX(t) = a(t)\ dt + b(t)dB(t) + c(s,u)dN(s,u)$$

- Fórmula de Itô extendida-

Si X(t) admite diferencial como en 1.16, y f(t,x) es una función dos veces diferenciable con continuidad respecto a x, y una respecto a t y Y(t)=f(t,X(t))

$$df(t,X((t)) = [\frac{df}{dt}(t,X(t)) + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}t,X(t)))b^2(t) + \frac{df}{dx}(t,X(t))a(t)]dt +$$

$$+ \frac{df}{dx}(t,X(t))b(t)dB(t) + \int_A [f(t,\ X(t)+c(t,u)) - f(t,X(t)]N(dt,dx)$$

si el conjunto de características A se reduce a un punto, el último término queda [f(t, X(t)+c(t,u)) - f(t,X(t)]dN(t)

1.5.6 Caso n-dimensional

Para definir las integral de Itô de un proceso n-dimensional, se debe, en primer lugar considerar un movimiento browniano n-dimensional $\vec{B}(t)=(B_1(t),\dots,B_n(t))$, donde los $B_i(t)$ son movimientos brownianos unidimensionales independientes.

Sea $\overrightarrow{X(t)}=(X_1(t),\ldots\ldots,X_n(t))$ un proceso tal que para cada i $X_i(t)$ es integrable en [a,b] en el sentido de Itô. Se define

$$\int_a^b \vec{X}(t)d\vec{B}(t)=\sum_{i=1}^{n}\int_a^b X_i(t)dB_i(t)$$

Sea $\overrightarrow{X_{nxm}(t)}=(\vec{X}_1(t),\ldots\ldots,\vec{X}_n(t))$ un proceso nxm dimensional, tal que para cada i, $\vec{X_i}(t)$ es un proceso n-dimensional integrable en [a,b] respecto a un movimiento browniano n-dimensional $\vec{B}(t)$. Si $I_i=\int_a^b \vec{X}_i(t)d\vec{B}(t)$ se define

$$\int_a^b \overrightarrow{X_{nxm}(t)}\, d\vec{B}(t)=\vec{I}(t)=(I_1,\ldots\ldots,I_n).$$

Las propiedades de la integral multidimensional son la extensión natural de las unidimensionales,

$$E[|\vec{I}|^2]=\int_a^b \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} E[|X_{i,j}(t)|^2]=\int_a^b E[|\overrightarrow{X_{nxm}(t)}|^2]$$

$$\text{con } |\overrightarrow{X_{nxm}(t)}|^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} E[|X_{i,j}(t)|^2] .$$

Se dice que un proceso n-dimensional admite diferencial estocástica en [a,b], si existen dos procesos $\vec{A}(t)$, y $\overrightarrow{M_{nxm}(t)}$ tales que $\forall$ a<s<t<b se tiene que

$$X(t)-X(s)=\int_s^t \vec{A}(\tau)d\tau+\int_s^t \overrightarrow{M_{nxm}(\tau)}d\vec{B}(\tau) \tag{1.17}$$

donde $$\int_s^t \vec{A}(\tau)d\tau = \left(\int_s^t A_1(\tau)d\tau, \quad ,\int_s^t A_n(\tau)d\tau \right).$$

Regla de Itô n-dimensional

Considérese un proceso n-dimensional cuya que admite diferencial en la forma dada por 1.17 Sea $f(t,x_1,....,x_n)$ una función diferenciable con continuidad dos veces en las x_i y una vez en t, entonces

$$df(t,X_1,..,X_n) = \left\{ \frac{df}{dt}((t,X_1,..,X_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx_i}(t,X_1,..,X_n)A_i(t) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{kk=1}^{m} \frac{d^2f}{dx_i dx_j}(t,X_1,..,X_n)M_{ik}(t)M_{jk}(t) \right\} dt$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{df}{dx_i}(t,X_1,..,X_n)M_{ij}(t)dB(t).$$

Cuando se tienen n procesos independientes, que admiten diferencial de la forma $dX_i = A_i(t)dt+M_i(t)dB(t)$ y $f(t,x_1,....,x_n)$ una función diferenciable con continuidad dos veces en las x_i y una vez en t, entonces

$$df(t,X_1,..,X_n) = \left\{ \frac{df}{dt}((t,X_1,..,X_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx_i}(t,X_1,..,X_n)A_i(t) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{df^2}{dx_i dx_j}(t,X_1,..,X_n)M_i(t)M_j(t) \right\} dt$$
$$+\sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx_i}(t,X_1,..,X_n)M_i(t)dB(t).$$

Expresión que puede ser representada como

$$df(t,X_1,....,X_n) = \frac{df}{dt}((t,X_1,....,X_n)dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx_i}(t,X_1,....,X_n)A_i(t)dX_i +$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{df^2}{dx_i dx_j}(t,X_1...,X_r)M_i(t)M_j(t)]dX_i dX_j. \tag{1.18}$$

sin más que tener en cuenta las relaciones establecidas para el producto de diferenciales, y que permanece válida en el caso en que no hay independencia entre los procesos de Wiener, y se asume la relación $dB_i(t)dB_j(t)=\rho_{i,j}dt$.

La diferencial en n dimensiones considerando la integral de Poissón queda determinada por la relación

$$X(t)-X(s)=\int_s^t \vec{A}(\tau)d\tau + \int_s^t \overrightarrow{M_{nxm}(\tau)}d\vec{B}(\tau) + \int_s^t \int_A \vec{C}(\tau,u)N(d\tau,du) \qquad (1.19)$$

donde $\vec{A}_{nx1}$, $\vec{B}_{nxm}$, $\vec{C}_{nx1}$ son procesos que hacen que las integrales estén bien definidas, y N(t,u) es un proceso de Poissón en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.

La regla de Itô se transforma en

Regla de Itô generalizada (n-dimensional)

Considérese un proceso n-dimensional cuya que admite diferencial en la forma dada por 1.19. Sea $f(t,x_1,....,x_n)$ una función diferenciable con continuidad dos veces en las x_i y una vez en t, entonces

$$\begin{aligned} df(t,X_1,..,X_n) \;=\; & \left\{ \frac{df}{dt}((t,X_1,..,X_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{df}{dx_i}(t,X_1,..,X_n)A_i(t) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{kk=1}^{m} \frac{df^2}{dx_i dx_j}(t,X_1,..,X_n)M_{ik}(t)M_{jk}(t) \right\} dt \\ & + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{df}{dx_i}(t,X_1,..,X_n)M_{ij}(t)dB(t) + \\ + \int_A & \left\{ f(t,X_1(t)+c_1(t,u),..,X_n(t)+c_n(t,u))-f(t,X_1(t),..,X_n(t)) \right\} N(dt,dx) \end{aligned}$$

Se indica a continuación la expresión n-dimensional de la integral de Stratanovich y, su relación con la integral de Itô.

La definición más general de la integral de Stratanovich en n dimensiones parte de un proceso de difusión n dimensional con coeficiente de tendencia $\vec{a}(t,x)$ y matriz de difusión $\vec{b}(t,x)$, tal que $\frac{db}{dx_i}(t,x)$ es una función continua de sus argumentos i=1...n.

Si $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to f(t,x)\in \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ es continua en x y $\forall$ $t\in[a,b]$ verifica

i- Existen $\frac{df(t,x)}{dx_i}$ $i=1....n$

ii- $\int_a^b E[\,|f(s,X(s))\vec{a}(s,X(s))|\,]ds < \infty$

iii- $\int_a^b E[\,|f(s,X(s))\vec{b}(s,X(s))f'(s,X(s))|\,]ds < \infty$ (f' denota la traspuesta)

entonces dada una partición del intervalo [a,b] $a=t_0<t_1<....<t_n=b$ se define la integral de Stratanovich (IS) como el límite cuando el diámetro de las partición tiende a cero ($n\to\infty$) de

$$IS = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(t_i, \frac{Y(t_{i+1})+Y(t_i)}{2}\right)(Y(t_{i+1})-Y(t_i))$$

La relación entre las integral de Itô y la de Stratanovich viene dada por la siguiente expresión

$$IS = I + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int_a^b \overrightarrow{\left(\frac{df_{\cdot k}}{dx_j}\right)}(s,X(s))\; b_{i,j}(s,X(s))ds$$

donde
$$\overrightarrow{\left(\frac{df_{\cdot k}}{dx_j}\right)} = \begin{pmatrix} \frac{df_{1k}}{dx_j} \\ \vdots \\ \frac{df_{mk}}{dx_j} \end{pmatrix}$$

1.6 RUIDO BLANCO

Considérese una variable aleatoria X con esperanza igual a cero, varianza uno y función de distribución F(x). Para cada conjunto numerable $t_1,\dots,t_n$ se consideran $X_{t_1},\dots,X_{t_n}$ variables independientes identicamente distribuídas según F(x). Es claro que las funciones de distribución conjuntas verifican las condiciones de consistencia de Kolmogorov, por tanto existe un proceso estocástico cuyas variables son independientes, identicamente distribuídas y tienen varianza uno.

Las trayectorias de este proceso son excepcionalmente irregulares, y más aún si $V(X)=N\to\infty$. Los procesos de este tipo se conocen como **ruidos**, pero se pueden encontrar ruidos de manera algo menos artificial.

Considérese $\{Y(t)\ ,t \in \mathbb{R}\}$ un proceso de segundo orden con incrementos ortogonales $(E[(Y(t_1)-Y(t_2))(Y(t_3)-Y(t_4))]=\ 0 \quad \forall\ t_1<t_2<t_3<t_4)$ y estacionarios, tal que $E[Y(t)=\ 0$ y $E[\,|Y(t)-Y(s)|\,] = \sigma^2(t-s) \quad t > s$. Se tratará de estudiar el proceso derivada de Y(t). Para ello se toma para cada h > 0 fijo, el proceso que representa el cociente incremental de Y(t), se define $X_h(t) = \dfrac{Y(t+h)-Y(t)}{h}$.

Este proceso es estacionario, tiene como función de covarianza

$$K_{X_h}(t) = \begin{cases} 0 & |t| \geq h \\ \dfrac{\sigma^2}{h^2}(h-|t|) & |t| < h \end{cases}$$

y densidad espectral dada por

$$f_h(\lambda) = \frac{1-\cos 2\pi h\lambda}{2\pi^2 h^2\lambda^2}\,\sigma^2.$$

El comportamiento en m.c. de la derivada de Y(t) vendrá determinado por el límite del proceso $X_h(t)$ ($X_h(t)$ converge en m.c. a X(t) cuando $h\to 0$ si para cada t se da la convergencia en m.c. de las variables $X_h(t)$).

El proceso X_h no converge en m.c. a ningún proceso X cuando $h \to 0$, ya que este proceso sería estacionario, ortogonal y de parámetro continuo, y es fácil ver que no existe tal proceso; si existiera, puesto que es límite de combinaciones lineales de las variables de Y(t) estaría en H_Y, variedad generada por un proceso continuo (por tanto la función de covarianza de Y(t) es continua). Usando la continuidad de la función de covarianza es inmediato comprobar que cualquier familia ortogonal en H_Y es a lo sumo numerable.

Nótese que $f_h(\lambda) \xrightarrow[h\to 0]{} \sigma^2$, parecería que los X_h convergen a un proceso estacionario cuya función de densidad espectral es constantemente σ^2, Se tiene entonces las tentación de definir la derivada como un proceso cuya densidad espectral es constante, pero la función de covarianza de un proceso estacionario con función de densidad espectral constante sería

$$K_X(t)=\begin{cases} \infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases} .$$

Por tanto ni siquiera tiene sentido como proceso de segundo orden, puede probarse además que el proceso Y(t) es casi seguramente no diferenciable en ningun punto.

Este "proceso" ficticio al que convergen las X_h se conoce como **Ruido blanco**, entonces el ruido blanco es una abstracción matemática que representa un proceso estacionario, cuyas variables son ortogonales con media cero y varianza infinita.

Si el proceso B(t) de partida es un proceso gaussiano, el ruido blanco que se obtiene es un gaussiano, estacionario, con variables independientes, idénticamente distribuídas -según una normal de media cero y varianza infinito-. En particular si se trata de un movimiento Browniano, el ruido blanco se interpreta como su derivada, y como tal se representa como $\dfrac{dB(t)}{dt}$.

Una posibilidad de evitar que la varianza se haga infinito, es considerar la función de densidad espectral constante en una banda de amplitud C alrededor del cero, y truncada por cero en el resto de los valores.

Otra posibilidad -muy usada para procesos gaussianos estacionarios, es tomar como función de densidad espectral $f(\lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{ab}{b^2+\lambda^2}$, que es aproximadamente constante en un entorno de cero tan grande como se quiera según los valores de a y b, la función de covarianza asociada será $K_X(\tau)=ae^{-b|\tau|}$.

1.6.1 Aproximación de la integral estocástica

La regla de diferenciación de Itô proporciona un método para calcular integrales estocásticas. Hay otros sistemas de evaluación de la integral mediante procedimientos iterativos basados en **integrales de ruido blanco.**

Una sucesión de procesos de segundo orden $\{X^n(t), t\in\mathbb{R}\}$ continuos en m.c. se dice que **convergen a un ruido blanco** si:

i- $\forall\ f\in L^2 \quad X_n(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)X^n(t)dt$ es una secuencia convergente en m.c. a X(f)

ii- $\lim_{n\to\infty} E[X_n(f)X_n(g)] = \sigma^2 \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)dt \ \ \forall\ f,g\in L^2$.

Esta última relación indica que $E[X(f)X(g)]=\sigma^2\int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)dt$, de donde se sugiere la convergencia de $X^n(t)$ a un proceso con densidad espectral constante σ^2. Se representa esta relación por $X(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)X(t)dt$, donde X(t) es un ruido blanco. A pesar de que esta relación es únicamente una representación formal, y de que X(t) no existe realmente como proceso, es posible escribir X(f) como una integral respecto a un proceso de segundo orden.

Teorema 1.6.1

Sea una sucesión de procesos de segundo orden $\{X^n(t), t\in\mathbb{R}\}$ *continuos en m.c. que convergen a un ruido blanco.* Si $Z(t) = \lim_{n\to\infty}\int_0^t X^n(s)ds$, *se verifica que Z(t) es de incrementos ortogonales y*

$X(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dZ(t)$, lo que formaliza la idea anterior. Llamaremos a X(f) *integral de f respecto a un ruido blanco.*

Demostración

Sea $Z(t) = \lim_{n\to\infty}\int_0^t X^n(s)ds$, se tiene que $Z(b) - Z(a) = \lim_{n\to\infty} X_n(I_{(a,b]}(s))$, como se trata de una sucesión que converge a un ruido blanco se verifica que

$E[(Z(b)-Z(a))(Z(d)-Z(c))] = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} I_{(a,b]}(s)I_{(c,d]}(s)ds$, por tanto Z(t) es un proceso de incrementos ortogonales y además $E[dZ(t)dZ(s)] = \sigma^2 I_{t=s}$.

Para cada función $f(t) \in L_2$ se puede definir la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dZ(t)$ como en la sección 1.2.2.3.1.

- Si f es una función escalonada $f(t) = \sum_{k=1}^{m} f(t_k)I_{(t_k,t_{k+1}]}(t)$

$$X(f) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{m} f(t_k)I_{(t_k,t_{k+1}]}(t) \Big)X^n(s)\, ds =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} f(t_k) \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_{(t_k,t_{k+1}]}(t))X^n(s)ds = \sum_{k=1}^{m} f(t_k)(Z(t_{k+1})-Z(t_k)) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dZ(t) .$$

- Si f es cualquier función en L_2, es límite de funciones escalonadas $f_n \to f$. para estas funciones se tiene que

$$X(f_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\, dZ(t) \to \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dZ(t)$$, por otra parte

$$\lim_{n\to\infty} X(f-f_n) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (f-f_n)\, X^m(s)ds = \lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} (f-f_n)\, X^m(s)ds = 0.$$

Basta ahora observar que $X(f) = X(f-f_n) + X(f_n)$ ■.

CAPÍTULO SEGUNDO

ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS

CAPITULO SEGUNDO

2.1 INTRODUCCIÓN

Un gran número de fenómenos en economía, física, biología...etc, pueden ser modelizados mediante ecuaciones diferenciales en las que se ven envueltos términos de carácter aleatorio. Ésto lleva a la consideración de las ecuaciones diferenciales estocásticas (e.d.e.). Un primer problema que surge a la hora de abordar la definición de las e.d.e., es la diversidad de interpretaciones que tiene una expresión del tipo

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(t,X(t),Y(t)) \tag{2.1}$$

donde los términos X(t) e Y(t) son procesos estocásticos, F es una función definida en $[0,T]\times\mathbb{R}^2$, el proceso X(t) es la solución de la ecuación (incógnita), e Y(t) un proceso conocido. Puesto que no existe una única interpretación de $\frac{dX(t)}{dt}$, tampoco la habrá de la ecuación 2.1. Ésta se tratará de distinta manera según la naturaleza de los procesos implicados, procesos "regulares", permiten una consideración en media cuadrática o con probabilidad uno, mientras que las ecuaciones "irregulares", aquellas en que aparecen términos como el *ruido blanco*, necesitarán de un tratamiento especial en el sentido de Itô, Stratanovich y similares.

La teoría desarrollada para este último tipo de ecuaciones, buscaba en un principio la construcción de procesos markovianos de difusión cuyos coeficientes fueran conocidos.

Los problemas que se tratan en el estudio de las ecuaciones diferenciales estocásticas, son en principio los mismos que en el caso determinista, existencia y unicidad de soluciones, dependencia de parámetros y valores iniciales, estudio del comportamiento de las soluciones, prestando especial atención en este último aspecto a la naturaleza probabilística de las mismas.

Se estudia en primer lugar condiciones para asegurar la existencia de soluciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas, y el comportamiento general de las mismas cuando se pueda garantizar que existen. A continuación se complica el problema imponiendo restricciones adicionales sobre la solución, de tal modo que la mantengan dentro de un determinado rango de valores. Se citan algunos de los casos en que es posible determinar explícitamente la solución, y en que condiciones es posible. Por último se presta atención a las ecuaciones lineales y a otras posibles interpretaciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas, vinculandolas con la modelización y resolución de sistemas dinámicos.

2.2 DEFINICION. TEOREMAS DE EXISTENCIA.

Es necesario antes que nada enumerar una serie de elementos que se usarán para definir las e.d.e.. En primer lugar se tiene un espacio de probabilidad, y dentro del álgebra correspondiente se considera una familia no decreciente de sigma-álgebras $\{F_t, 0 \leq t \leq T\}$ - **filtración**-, de modo que dados X(t) y B(t), un proceso cualquiera y un proceso de Wiener estándar, $\{X(s)\ s \leq t\}$ y $\{B(s)\ s \leq t\}$ son F_t-medibles (se considerará generalmente la mínima sigma álgebra que cumple la condición anterior).

Se define también la familia de procesos integrables al cuadrado

$$H_2[0,T]=\{\ X(t) \text{ procesos } F_t\text{-medibles tales que } \int_0^t X^2(s)ds < \infty \text{ c.s. para } 0<t\leq T\ \},$$

se exige también que los incrementos del movimiento Browniano B(t+s)-B(t) sean independientes de F_t.

Una e.d.e. en el sentido de Itô es una expresión de la forma

$$dX(t) = \mu(t,X(t))dt + \sigma(t,X(t))dB(t) \tag{2.2}$$

Un proceso X(t) se dirá que se solución de la ecuación anterior si se verifican las restricciones anteriores, los coeficientes de la ecuación $|\mu(t,X(t))|^{1/2}$ y $\sigma(t,X(t))$ están en $H_2[0,T]$, y además admite diferencial

$$dX(t) = \bar{\mu}(t)dt + \bar{\sigma}(t)dB(t)$$

verificándose que

$$\bar{\mu}(t)=\mu(t,X(t)) \text{ c.s.} \quad \text{y } \bar{\sigma}(t)=\sigma(t,X(t)) \text{ c.s.}.$$

La ecuación 2.2. puede expresarse en forma integral como

$$X(t)=X(0)+\int_0^t \mu(t,X(t))dt + \int_0^t \sigma(t,X(t))dB(t) \qquad 0<t\leq T \tag{2.3}$$

y se resolverá habitualmente con una restricción inicial $X(0)=X_0$ para alguna variable aleatoria X_0 independiente de B(t).

En el caso n-dimensional se tiene como incognita el proceso $\vec{X}(t) = (X_1(t).....X_n(t))$, los coeficientes de la ecuación
$\vec{\mu}(t,X(t))=(\mu_1(t,X(t)),.....\mu_n(t,X(t)))$
y $\sigma(t,X(t))=\{\sigma_{i,j}(t,X(t)),\ i=1..n,\ j=1..n\}$
son medibles e integrables (en las condiciones requeridas) en $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ y, $\vec{B}(t)=(B_1(t).....B_n(t))$ es un movimiento Browniano n-dimensional.

La ecuación 2.2 se transforma en

$$d\vec{X}(t) = \vec{\mu}(t,X(t))dt + \vec{\sigma}(t,X(t))d\vec{B}(t).$$

repitiéndose las mismas condiciones para que un proceso sea la solución sólo que extendidas naturalmente al caso n-dimensional.

Definidas así las e.d.e. procede estudiar cuando existirá un proceso que solucione la ecuación.

Teorema 2.2.1

Supóngase que se verifican las siguientes condiciones

i- los coeficientes están definidos en [0,T]×$\mathbb{R}$ *y son funciones medibles de sus argumentos*

ii- Condición de Lipschitz

Existe una constante K *tal que*

$|\mu(t,x)-\mu(t,y)|+|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \leq K|x-y| \quad \forall\ t\in[0,T]$

iii- Condición de crecimiento

$$|\mu(t,x)|^2+|\sigma(t,x)|^2 \leq K^2(1+x^2).$$

iv- X(0) *tiene segundos momentos finitos y es independiente de B(t).*

Entonces existe una solución de 2.2. en [0,T] *en las siguientes condiciones* a - *Es única c.s.*

Si $X_1(t)$ *y* $X_2(t)$ *son dos soluciones de la ecuación que verifican las condiciones del teorema*

$$P\left(\sup_{0\le t\le T} |X_1(t) - X_2(t)|=0 \right)=1$$

b - *Cumple la condición inicial* $X(0)=X_0$

c - *Es continua c.s.*

d - *Tiene segundos momentos uniformemente acotados*

$$\sup_{0\le t\le T} E[X^2(t)] < \infty.$$

Demostración

En primer lugar se verá la unicidad. Para ello es suficiente considerar dos soluciones, $X_1(t)$ y $X_2(t)$, que verifiquen a. Aplicando la condición de Lipschitz a $E[(X_1(t)-X_2(t))^2]$, y teniendo en cuenta que se trata de dos soluciones de la ecuación 2.2 se llega a que

$$E[(X_1(t)-X_2(t))^2] \le C\int_0^t E[(X_1(s)-X_2(s))^2]ds$$

Tomando $f(t) = \int_0^t E[(X_1(t)-X_2(t))^2]$, la relación anterior se puede expresar como $\dfrac{df(t)}{dt} \le Cf(t),\ f(0) = 0,$

y por tanto, $0 \le f(t) \le f(0)e^{Ct}=0$, luego $f(t)=0\ \forall t$.

Entonces, se tiene que $E[(X_1(t)-X_2(t))^2]=0\ \forall\ t$, de donde se deduce que $P(|X_1(t)-X_2(t)|=0)=1\ \forall\ t$. Esta relación es válida para $t\in N$, siendo N un conjunto numerable y denso en $[0,T]$, y por continuidad de $X_1(t)$ y $X_2(t)$ se extiende a $0\le t\le T$.

Para ver la existencia se construirá una solución.

$$\text{Sea } X_0(t)= X_0,\quad X_n(t) = X_0 + \int_0^t \mu(s,X_{n-1}(s))ds + \int_0^t \sigma(s,X_{n-1}(s))dB(s) \quad (2.4).$$

Puede comprobarse por inducción que $\forall\ n$ $\sigma(s,X_{n-1}(s))$ es integrable, es decir, $X_n(t)$ está bien definido.

i- Veamos que $\forall$ n X_n es continuo en m.c.

Usando $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, se obtiene

$$E[(X_{n+1}(t)-X_{n+1}(s))^2] \leq 2\left\{E\left[\left(\int_s^t \mu(s,X_n(s))ds\right)^2\right] + E\left[\left(\int_s^t \sigma(s,X_n(s))ds\right)^2\right]\right\}$$

y aplicando la desigualdad de Schwarz y la propiedad P2 de las integrales estocásticas se llega a

$$E[(X_{n+1}(t)-X_{n+1}(t))^2] \leq 2\left\{(t-s)E\left[\int_s^t \mu^2(u,X_n(u))du\right]+E\left[\int_s^t \sigma^2(u,X_n(u))du\right]\right\},$$

por la condición de Lipschitz

$$E[(X_{n+1}(t)-X_{n+1}(t))^2] \leq 2K^2(1+t-s)\int_s^t (1+E[X_n(u)^2]du \xrightarrow[s \to t]{} 0.$$

ii- Veamos como $\{X_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión convergente en m.c.

Usando $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, se obtiene

$$E[(X_{n+1}(t)-X_n(t))^2] \leq$$

$$2\left\{E\left[\left(\int_0^t \left(\mu(u,X_n(u))-\mu(u,X_{n-1}(u))\right)du\right)^2\right]+E\left[\left(\int_0^t \left(\sigma(u,X_n(u))-\sigma(u,X_{n-1}(u))\right)dB(u)\right)^2\right]\right\}$$

y aplicando la propiedad P2 y la condición de Lipschitz

$$E[(X_{n+1}(t)-X_n(t))^2] \leq 2K^2(1+T)\int_0^t E[(X_n(t)-X_{n-1}(t))^2] \qquad (2.5).$$

Aplicando 2.4 y 2.5 reiteradas veces, se llega a que

$$E[(X_{n+1}(t)-X_n(t))^2] \leq [2K^2(1+T)]^n \frac{t^n}{n!}E[X_0^2] \qquad (2.6).$$

Ahora si se aplica la desigualdad de Cauchy-Schwarz a

$X_{n+m}(t)-X_n(t)=\sum_{k=1}^{m} X_{n+k}(t)-X_{n+k-1}(t)$, se obtiene

$$E[X_{n+m}(t)-X_n(t))^2]\leq \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^{n+k}}\right)\left(\sum_{k=1}^{m} 2^{n+k}E[(X_{n+k}(t)-X_{n+k-1}(t))^2]\right) \tag{2.7}$$

Por 2.6 y 2.7 $\sup_{m\geq 0} E[X_{n+m}(t)-X_n(t))^2] \leq E[X_0^2] \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{[4K^2(1+Tt)]^j\ t^n}{j!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

uniformemente en t. Entonces $X_n(t)$ es una sucesión de procesos convergente en m.c. a un proceso X(t) de modo que $\sup_{0\leq t\leq T} E[(X_n(t)-X(t))^2] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. X(t) es una solución continua de 2.2, (que podemos escoger medible y separable). X(t) es continuo por ser límite uniforme de procesos continuos. Para ver que verifica 2.2 se toman límites en 2.4, además $X_n(t)$ es F_t-medible, y por tanto el límite también lo es. ∎

Es posible demostrar la existencia de solución sin la condición de Lipschitz, pero en tal caso no se puede garantizar la unicidad de ésta.

El teorema se extiende de forma inmediata al caso n-dimensional, sin más que considerar en *ii* y *iii* $|\vec{\mu}(t,x)|$ la norma en $\mathbb{R}^n$ y $|\vec{\sigma}(t,x)|$=traza($\sigma\sigma^t$).

Puede probarse la existencia de solución sustituyendo la restricción que supone la condición de Lipschitz por otras hipótesis sobre los coeficientes algo menos duras.

Teorema 2.2.2

Supongamos que los coeficientes satisfacen las siguientes condiciones:

1- *para algún* K $\quad |\mu(t,x)|^2+|\sigma(t,x)|^2 \leq K^2(1+x^2)$

2- $\forall$ N $\exists$ *una constante* L_N *tal que* $\forall$ x,y con $|x|< N$ y $|y|< N$

$$|\mu(t,x)-\mu(t,y)|+|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \leq L_N|x-y|.$$

Entonces existe una única solución de 2.2 en [0,T] *verificando la condicion inicial* $X(0)=X_0$.

Demostración

Sean $X_N(0)= \begin{cases} X_0 & |X_0|\le N \\ -N & X_0<-N \\ N & X_0>N \end{cases}$

$\mu_N(t,x)= \begin{cases} \mu(t,x) & |X_0|\le N \\ \mu(t,-N) & X_0<-N \\ \mu(t,N) & X_0>N \end{cases}$

$\sigma_N(t,x)= \begin{cases} \sigma(t,x) & |X_0|\le N \\ \sigma(t,-N) & X_0<-N \\ \sigma(t,N) & X_0>N \end{cases}$

y sea $X_N(t)$ la solución de

$$dX(t) = \mu_N(t,X(t))dt + \sigma_N(t,X(t))dB(t)$$

con estos coeficientes se verifican las hipótesis del teorema 2.2.1, y por tanto existe una solución que satisface a,b,c,d.

Sea $\tau_N = \max_t \{ \sup_{0\le s\le t} X_N(s)\le N\}$, y considérese un $M > N$, apoyándonos en el teorema 2.3.1, se tiene que

$P(\sup_{0\le s\le t} |X_N(s)-X_M(t)|>0) \le P(\tau_N>T) = P(\sup_{0\le s\le T} |X_n(s)|>N) \to 0$ si $N\to\infty$, ya que se puede probar que

$\lim_{N\to\infty} P(\sup_{0\le s\le T} |X_N(s)|>N) \le P(\frac{1}{1+X_0^2} \le \alpha)$ para cualquier $\alpha>0$ arbitrario.

Entonces $X_N(t)$ converge uniformemente c.s. a $X(t)$ que es la solución (continua) de la ecuación original que cumple $X(0)=X_0$.

Para ver la unicidad considérense X_1 y X_2 dos soluciones y sea $I(t) = I_A(t)$ la función indicatriz del conjunto A siendo éste $A = \{\sup_{s\le t}|X_1(s)|\le N\} \cap \{\sup_{s\le T} |X_2(s)|\le N\}$. Usando la hipótesis 2 y las propiedades de la integral estocástica se comprueba que

$$E[|X_1(t)-X_2(t)|^2 I(t)] \leq 2(1+T)L_N\int_0^t E[|X_1(s)-X_2(s)|^2 I(s)]ds$$

para alguna constante L_N que depende de N.

Lema

Si $\phi(t)$ y $\alpha(t)$ son dos funciones medibles y acotadas tales que existe un

L>0 $\quad \Phi(t) \leq \alpha(t) + L\int_0^t \phi(s)ds$ entonces

$$\Phi(t) \leq \alpha(t) + L\int_0^t e^{L(t-s)}\alpha(s)ds \blacksquare$$

Usando el lema $E[|X_1(t)-X_2(t)|^2 I(t)] = 0$, por tanto, $P(X_1(t)\neq X_2(t)) \leq$
$P(\sup_{0\leq s\leq T}|X_1(s)|> N) + P(\sup_{0\leq s\leq T}|X_2(s)|> N) \to 0 \quad N\to 0 \blacksquare$

La primera condición del teorema puede sustituirse por
$x|\mu(t,x)|+|\sigma(t,x)|^2 \leq K^2(1+x^2)$ llegándose a las mismas conclusiones.

Si se trata de una ecuación homogénea las condiciones se transforman en la forma natural, asegurando en este caso la existencia de la solución en toda la semirrecta real positiva.

2.3 COMPORTAMIENTO DE LAS SOLUCIONES

2.3.1 Características generales

Se ha visto que las condiciones para asegurar la existencia de soluciones de las e.d.e. pasan por un comportamiento suficientemente regular de los coeficientes. La dependencia que tienen las soluciones de la ecuación de los coeficientes de la misma, queda ilustrada por el siguiente teorema

Teorema 2.3.1

Sean $X_i(t)$ *i=1,2. las soluciones respectivas de las ecuaciones* $dX_i(t) = \mu_i(t,X(t))dt + \sigma_i(t,X(t))dB(t)$ i=1,2., *donde los coeficientes satisfacen las hipótesis del teorema* 2.1, *y se supone una misma condición inicial. Supongamos que existe una región* R tal que $\mu_1(t,x) = \mu_2(t,x)$ y $\sigma_1(t,x)= \sigma_2(t,x)$ $\forall$ $x\in R$. *Sean* $\tau_i=\{inf\ t$ t.q. $X_i(t)\notin R\}$ *i=1,2. los tiempos de salida de* R. *Se verifican*

i- $\tau_1=\tau_2$ c.s.

ii- $P(\sup_{0\le t\le \tau_1} |X_1-X_2|=0) = 1.$

Una de las más importantes características de las soluciones de las e.d.e. es que en las mismas condiciones que se exigen para la existencia y unicidad de las mismas, se tienen procesos muy manejables

Teorema 2.3.2

Supongamos que los coeficientes de una ecuación satisfacen las condiciones del teorema 2.1. *Entonces la solución es un proceso de Markov (continuo), cuyas probabilidades de transición vienen dadas por* $P(t,x,s,A) = P(X(s)\in A/X(t)=x) = P(X_{x,t}(s)\in A)$ s>t. *Donde* $X_{x,t}$ *es la solución en el intervalo* [t,T] *de la ecuación con condición inicial* X(t)=x

$$X(s)=x+\int_t^s \mu(u,X(u))du+\int_t^s \sigma(u,X(u))dB(u).$$

Demostración

Considérese $X_{x,t}$ la solución de (10). $X_{x,t}$ sólo depende de los sucesos $\{B(u)-B(t)\ u\ge t\}$. Por otra parte X(s) y $X_{X(t),t}$ son soluciones de $X(s) = X(t) + \int_t^s \mu(u,X(u))du + \int_t^s \sigma(u,X(u))dB(u)$,y como la solución es única, si s>t $X(s) = X_{X(t),t}(s)$; es decir, si se considera el proceso X(t) condicionado por su valor en t, se tiene un proceso Y(x) $x\in\mathbb{R}$ independiente de $\mathcal{F}_t$, con $Y(X(s)) = X(s)$ s>t.

Lema Sea Z(t) un proceso medible, acotado e independiente de F_t, ξ una variable F_t-medible. Entonces $E[Z(\xi)/F_t]=E[Z(\xi)]$.

La demostración del lema es sencilla para procesos simples, y se extiende pasando al límite en la forma usual.

Ahora aplicando el lema:

$$E[I_A(X(s))/F_t] = E[I_A(Y(s))/F_t] = E[I_A(X_{x=X(t),t})] = P(t,X(t)=x,s,A).\blacksquare$$

Puede comprobarse que, cuando los coeficientes son homogéneos, los procesos solución no sólo son markovianos, sino también fuertemente markovianos, en este último caso la solución será un proceso homogéneo de Markov cuyas probabilidades de transición vienen dadas por $P(x,s,A)=P(t,x,t+s,A)=P(X(s)\in A)$ donde X(s) es la solución de la ecuación homogénea con condición inicial X(0)=x.

Se define un **proceso de difusión** como un proceso markoviano que verifica:

1- $\forall\ \varepsilon>0$, $\forall\ t\in[0,T]$ $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h} P(|X(t+h)-X(t)|>\varepsilon/X(t)=x)=0$, esta condición se conoce como la **condición de Dinkyn.**

2- $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h} E[X(t+h)-X(t)/X(t)=x]=\mu(t,x)$ para alguna función $\mu(t,x)$.

3- $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h} E[(X(t+h)-X(t))^2/X(t)=x]=\sigma^2(t,x)$ para alguna función $\sigma^2(t,x)$.

Lema. Una condición suficiente para que se verifique la condición de Dinkyn, es que, para algún p>2 $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h} E[(X(t+h)-X(t))^p/X(t)=x]=0$.

Teorema 2.3.3

Supóngase que los coeficientes de una ecuación $\mu(t,x)$ *y* $\sigma(t,x)$ *son continuos en sus argumentos, y que* $\exists$ K *para el que* $\mu(t,x)^2+\sigma(t,x)^2 \le K^2(1+x^2)$, *y que* $\forall$ N, $\exists$ L_N *que verifica* $|\mu(t,x)-\mu(t,y)|+|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \le L_N|x-y|$. *Entonces la solución de la ecuación, es un proceso de difusión con coeficiente de tendencia* $\mu(t,x)$ *y coeficiente de difusión* $\sigma^2(t,x)$.

El planteamiento que inicialmente se hizo de las e.d.e fue el de considerarlas un modelo de generación de procesos de difusión. El hecho es que no todos los procesos de difusión responden al modelo, pero hay una amplia clase de estos procesos que respondieron a los objetivos iniciales. En los próximos teoremas se contrasta a esta idea en ambos sentidos.

Teorema 2.3.4

Sean $\mu(x,t)$, $\sigma(x,t)$, *dos funciones medibles en* $[o,T]\times\mathbb{R}$, *para las que existen constantes* K y σ_0 *con*

$\mu(t,x)^2 \leq K(1+x^2)$ y $0<\sigma_0^2 \leq \sigma^2(t,x) \leq K(1+x^2)$, *y tales que verifican la condición de Holder;* $|\mu(t,x)-\mu(t,y)| \leq K|x-y|^p$

$$|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \leq K|x-y|^p \text{ para algún } p>0.$$

Entonces, existe un proceso de difusión cuyos parámetros de tendencia y difusión son, $\mu(t,x)$ *y* $\sigma(t,x)$ *respectivamente, además si en la condición de Holder, se puede tomar* $p=1$, *este proceso es la única solución en* $[0,T]$ *de* $dX(t)=\mu(t,x)dt+\sigma(t,x)dB(t)$.

Teorema 2.3.5

Sea X(t) *la solución de una e.d.e cuyos coeficientes verifican las condiciones del teorema de existencia y unicidad, se define*

$$Z_\lambda(t)=\lambda X(t)-\lambda\int_0^t \mu(s,X(s))ds-\frac{1}{2}\lambda^2\int_0^t \sigma^2(s,X(s))ds$$

se tiene que $dZ_\lambda(t)=\lambda X(t)-[\lambda\mu(t,X(t))+\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2(t,X(t))]dt=$

$$= -\frac{\lambda^2}{2}\sigma^2(t,X(t))dt + \lambda\,\sigma(t,X(t))dB(t)$$

se tiene que $Y_\lambda(t)=\exp\{Z_\lambda(t)\}$ *es una martingala con trayectorias continuas y está en* $H_2[0,T]$.

Un resultado en sentido inverso caracteriza procesos de difusión mediante la propiedad anterior. Si para cualquier valor positivo del parámetro λ, $Y_\lambda(t)$ es una martingala con trayectorias continuas y los coeficientes son suficientemente regulares, entonces X(t) es un proceso de difusión determinado por $\mu(t,x)$ y $\sigma(t,x)$.

Teorema 2.3.6

Sea X(t) *un proceso de difusión en [0,T] cuyos parámetros* $\mu(t,x)$ *y* $\sigma^2(t,x)$ *son continuos en sus argumentos, y verifican :*

i- $\exists$ *una constante* K *t.q.* $|\mu(t,x)|\le K(1+|x|)$,

ii- $\sigma^2(t,x)$ *tiene derivadas acotadas, y* $\dfrac{1}{\sigma^2(t,x)}$ *también es acotada,*

iii- $\exists$ *una función* $\psi(x)$ *independiente de t, y un* h, *tales que:*

$\psi(x)>1+|x|$, $\sup\limits_{0\le t\le T} E[\psi(X(t))]<\infty$ *y*

$|E[(X(t+h)-X(t))/X(t)=x]|+|E[(X(t+h)-X(t))^2/X(t)=x]| \le h\psi(x)$

$E[(|X(t+h)|+X(t+h)^2)/X(t)=x] \le \psi(x)$.

Entonces, existe un M.B. B(t) *tal que* X(t) *es una solución de la ecuación* $dX(t) = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dB(t)$.

Demostración

Se considera el cambio $Y(t)=g(t,X(t))=\displaystyle\int_0^x \frac{dz}{\sqrt{\sigma(t,z)}}$ que transforma la ecuación de manera que el coeficiente de difusión se hace uno.

$$dY(t)=\bar{\mu}(t,Y(t))dt +dB(t) \qquad (2.8)$$

donde $\bar{\mu}$ se calcula como en 2.16, usando la transformación de itô y el hecho de que las derivadas parciales respecto a t una vez, y dos respecto a x son acotadas, se concluye que

$E[|Y(t+h)-Y(t)|/Y(t)]\le L\ \psi(t,g^{-1}(t,x))$ y

$E[|Y(t+h)-Y(t)|^2/Y(t)]\le L\ \psi(t,g^{-1}(t,x))$.

Sea ahora $Z(t)=Y(t)-Y(0)-\displaystyle\int_0^t \bar{\mu}(s,Y(s))ds$, que resulta ser un proceso F_t medible, siendo F_t la filtración generada por Y(t), y verifica que

$$|E[Z(t+h)-Z(t)/F_t]|=E[|Y(t+h)-Y(t)|/Y(t)]-\int_t^{t+h} E[\bar{\mu}(s,Y(s))/F_t]ds$$

$$\leq L\ \psi(t,g^{-1}(t,x))h+K_1\int_t^{t+h} E[1+g(s,X(s))/F_t]ds\leq L_1\ \psi(t,g^{-1}(t,x)),$$

y también que

$$E[|Z(t+h)-Z(t)|^2/F_t]\leq L_1\psi(t,g^{-1}(t,x))\ h$$

Relaciones que permiten concluir, tras aplicar el teorema de la convergencia dominada que

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} E[\bar{\mu}(s,X(s))/F_t]ds \xrightarrow[h\to 0]{} \mu(t,X(t)) \text{ c.s.}$$

$$\frac{1}{h}\ E[|Z(t+h)-Z(t)|^2/F_t] \xrightarrow[h\to 0]{} 1 \quad \text{c.s.}$$

$$\frac{1}{h}\ E[|Y(t+h)-Y(t)|^2/F_t] \xrightarrow[h\to 0]{} 1 \quad \text{c.s.}$$

por tanto, puesto que Z(t) es continuo se trata de un movimiento browniano estándar que satisface la relación $Y(t)=Y(0)+\int_0^t \bar{\mu}(s,Y(s))ds+Z(t)$, de modo que el proceso Z(t) verifica la expresión 2.8, basta ahora aplicar la transformación inversa para finalizar la demostración ∎

2.3.2 Dependencia de parámetros

Del mismo modo que en las ecuaciones diferenciales ordinarias es un problema de interés el estudio de la dependencia que la solución tiene de las condiciones iniciales, y de manera mas general de sus parámetros, se plantea idéntica cuestión para las e.d.e.

Considérese una familia de e.d.e dependientes de un parámetro α

$$dX_\alpha(t) = \mu_\alpha(t,X_\alpha(t))dt + \sigma_\alpha(t,X_\alpha(t))dB(t). \tag{2.9}$$

con condición inicial $X_\alpha(0)=c_\alpha$. Se tiene que la solución depende de forma continua del parámetro α en determinadas condiciones.

Teorema 2.3.7

Sea $X_\alpha(t)$ una solución de la ecuación 2.9. Si $\forall\ \alpha$ los coeficientes de la ecuación verifican las condiciones del teorema 2.2.1 y además

i- $c_\alpha \longrightarrow c_{\alpha_0}$ en probabilidad

ii- $\forall\ N > 0\ ,\ |x|\leq N$ y $t\in[0,T]$

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \sup |\mu_\alpha(t,x)-\mu_{\alpha_0}(t,x)|+|\sigma_\alpha(t,x)-\sigma_{\alpha_0}(t,x)|=0$$

iii- $\exists\ K > 0$ *independiente de* α *tal que* $\forall\ t \in [0,T]$

$$|\mu_\alpha(t,x)|^2+|\sigma_\alpha(t,x)|^2\leq K^2(1+|x|^2) \quad \text{entonces}$$

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \{ \sup_t |X_\alpha(t)-X_{\alpha_0}(t)|\}[\longrightarrow 0 \text{ en probabilidad}$$

La dependencia respecto a la condición inicial está resuelta como un caso particular del teorema anterior cuando los coeficientes no dependen del parámetro, pero la condición inicial sí.

De igual modo existen resultados que determinan condiciones en las cuales el proceso es diferenciable respecto a un parámetro, como caso particular se considera también la diferenciabilidad del proceso respecto a la condición inicial.

Teorema 2.3.8

Supongamos que los coeficientes de una e.d.e son continuos en sus argumentos, y además dos veces diferenciables respecto a x , y una respecto a t , y que estas derivadas parciales están acotadas, entonces la solución de la ecuación con condición inicial X(0)=c

$$X(t)=c + \int_0^t \mu(s,X(s))ds + \int_0^t \sigma(s,X(s))dB(s) \qquad 0<t\leq T$$

es dos veces diferenciable en m.c. respecto a c y

$$\frac{dX(t)}{dc} = 1+\int_0^t \mu_x(s,X(s))\,\frac{d}{dc}X(s)ds + \int_0^t \sigma_x(s,X(s))\,\frac{d}{dc}X(s)dB(s)$$

$0<t\leq T$

2.3.3 Determinación de la distribución de probabilidad

Una vez visto que la solución de una e.d.e es , en determinadas ocasiones, un proceso markoviano de difusión, se trata ahora de estudiar algunas de las características asociadas al proceso solución, entre ellas sus probabilidades de transición. Es necesario para ello determinar la función $u(t,x)=E_{t,x}[f(X(s))]=E[f(X(s))/X(t)=x]$ donde X(s) es la solución del problema

$$dX(s) = \mu(s,X(s))ds + \sigma(s,X(s))dB(s) \qquad (2.10)$$

en el intervalo [t,T], con condición inicial X(t)=x

Teorema 2.3.9

Supongamos que los coeficientes de la ecuación 2.5 *son continuos, admiten segundas derivadas parciales respecto a x, y para algún* K *y* M > 0 *se verifican*

1- $|\mu(t,x)|+|\sigma(t,x)| \leq K(1+|x|)$

2- $|\mu_x t,x)|+|\sigma_{xx}(t,y)|+|\sigma_x(t,x)|+|\sigma_{xx}(t,y)| \leq K(1+|x|^m)$

si además la función f(x) *involucrada en la definición de* u(t,x) *es diferenciable dos veces y verifica*

$$f(x)|+|f_x(x)|+|f_{xx}(x)|=K(1+|x|^m) \qquad (2.11)$$

entonces llamando L *al operador diferencial*

$$L\equiv \mu(t,x)\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{d^2}{dx^2}$$

La función u(t,x) *verifica la ecuación* **(ecuación de Kolmogorov)**

ED1 $\qquad \frac{d}{dt}u(t,x) + Lu(t,x) = 0$ en $(0,s)\times\mathbb{R}$ *con la condición inicial*

$$\lim_{t\nearrow s} u(t,x)=f(x)$$

Demostración

Como la solución de la ecuación 2.10 con condición inicial $X(t-h)=x$ coincide con la solución de 2.10 cuando la condición inicial es $X(t)=X_{x,t-h}(t)$ se tiene que

$$u(t-h,x)=E[E[f(X_{x,t-h}(s))]/X_{x,t-h}(t)]=E[u(t,X_{x,t-h}(t))].$$

Además de 2.11, 1 y 2 se puede probar que $u(t,x)$ es dos veces diferenciable con continuidad.

Lema

Si $f(x)$ es dos veces diferenciable con continuidad, satisface 2.11 y los coeficientes están en las condiciones del teorema 2.3.3, se demuestra aplicando la transformación de Itô y tomando límites que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} E[f(X_{x,t-h}(t))-f(x)] = \mu(t,x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)f''(x) \blacksquare$$

Usando el lema se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} E[u(t,x)-u(t-h,x)] = -\mu(t,x)\frac{d}{dx}u(t,x) - \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{d^2}{dx^2}u(t,x).$$

Esta última expresión es continua en t y por ello también lo son las derivadas parciales de $u(t,x)$. Finalmente $u(t,x)$ es derivable por la izquierda y continua respecto a t, por lo que se verifica la ED1. La condición inicial se deduce de la relación $X_{x,t}(s) \to x$ en probabilidad cuando $t \nearrow s$ $\blacksquare$

La ED1 se generaliza al caso n-dimensional sin más que considerar el operador diferencial

$$L^n \equiv \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t,x)\frac{d}{dx_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{i,j}(t,x)\frac{d^2}{dx_j dx_i}$$

Del mismo modo que la solución del problema anterior pasa por la determinación de una determinada ecuación en derivadas parciales se pueden expresar las las soluciones de problemas vinculados con e.d.p's a traves de funciones de las soluciónes de ecuaciones diferenciales estocásticas. En particular la solución del problema de Cauchy

$$Lu + u_t = f(x,t) \qquad u(x,T) = \phi(x) \tag{2.12}$$

con

$$Lu = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n} a_{i,j}(x,t)\,\frac{d^2u}{dx_i dx_j} + \sum_{i}^{n} b_i(x,t)\,\frac{du}{dx_i} + c(x,t)u$$

es, bajo condiciones suficientes de regularidad de todas las funciones implicadas,

$$u(x,t) = E[\exp\{\int_t^T c(X(u),u)du\}\,\phi(X(T)) - \int_t^T f(X(s),s)\exp\{\int_t^s c(X(u),u)du\}ds \,/X(t)=x]$$

donde X(t) es el proceso incógnita de la e.d.e que se considera.

Se establecerán otras ecuaciones diferenciales para estudiar diversas características del proceso. Se define

$Y(t)=\int_t^T g(s,X(s))ds$, donde X(s) es la solución de la ecuación 2.10, es posible encontrar la distribución de probabilidad conjunta de las variables Y(t), y f(X(T))

Teorema 2.3.10

Supongamos que se verifican las hipótesis del teorema anterior, y que la función g(t,x) usada en la definición de Y(t) satisface la condición 2.6 Entonces la función característica de la variable conjunta $V_{x,t}(\lambda,\mu)=E_{x,t}[\exp\{i\lambda Y(t)+i\mu f(X(T))\}]$ [1]
satisface la ecuación

$$\text{ED2} \qquad \frac{d}{dt}V_{x,t}(\lambda,\mu) + L\,V_{x,t}(\lambda,\mu) + i\lambda g(t,x)V_{x,t}(\lambda,\mu)=0$$

con condición inicial $\lim_{t\nearrow T} V_{x,t}(\lambda,\mu)=\exp\{i\mu f(x)\}$.

[1] Nótese que la dependencia de las variables x y t viene dada por la condición inicial de la ecuación 2.5. X(t)=x.

Demostración

La idea es seguir la demostración del teorema 2.3.9, se deduce la diferenciabilidad de la función V, de las funciones f y g y la del proceso $X_{x,t}(s)$ respecto a x. Usando el mismo lema se determina la expresión de la derivada $\frac{d}{dt}V$ probando su existencia a partir de la existencia de derivada por la izquierda y el argumento de continuidad■

Del desarrollo de la función característica en términos de los momentos se tiene que, llamando M_k al momento de orden k respecto al origen de la variable Y(t) ($M_k=M_k(t,x)=E_{t,x}[Y(t)^k]$) , M_k se puede determinar para cualquier k resolviendo la siguiente ecuación recurrente

$$\frac{d}{dt}M_k(t,x) + L\, M_k(t,x) + Kg(t,x)M_{k-1}(t,x)=0$$

con condición inicial $$\lim_{t\nearrow T} M_k(t,x)=\begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{si } k\neq 0 \end{cases}$$

La ED2 también es satisfecha por la función

$$V_{x,t}(\lambda)=E_{x,t}[\exp\{\lambda Y(t)\}f(X(T))]$$

con condición inicial

$$\lim_{t\nearrow T} V_{x,t}(\lambda,\mu)=f(x) .$$

Esta última relación se conoce como la fórmula de Feynman y Kac, describe un proceso con "killing" en el siguiente sentido. Sea considera el proceso $X_1(t)$ definido como X(t) hasta un determinado instante, e indefinido a partir de éste, considerando entonces que el proceso desaparece. Si g(t,x) es la tasa de desaparición $g(t,x)=\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} P(X_1(t)$ desaparezca en $(t,t+h)/X(t)=x)$, la función $V_{x,t}(\lambda)=E[f(X_1(t))]$.

En busca de una generalización aún mayor, se determinará la distribución de la variable $Z(t)=\int_t^T h(s,X(s))dB(s)$, donde $h(t,x)$ es dos veces diferenciable respecto a x y verifica la condición 2.11.

Teorema 2.3.11

Supongamos que se verifican las condiciones del teorema 2.3.9

Se define $W_{x,t}(\lambda,\mu)=E_{x,t}[\exp\{i\lambda Y(t)+i\mu Z(t)\}f(X(T))]$, *se tiene que el funcional W verifica la ecuación diferencial*

ED3
$$\frac{d}{dt}W_{x,t}(\lambda,\mu) + L\, W_{x,t}(\lambda,\mu) + i\mu h(t,x)\frac{d}{dx}W_{x,t}(\lambda,\mu)+ + (i\lambda g(t,x)-\frac{1}{2}\mu^2h^2(t,x))W_{x,t}(\lambda,\mu) = 0$$

en $(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}$ *y verificando la condición inicial* $\lim_{t\nearrow T} W_{x,t}=f(x)$.

La demostración sigue el curso de la de los dos teoremas precedentes.

En mecánica clásica la evolución de la densidad de un sistema de partículas en un espacio de fases está gobernado por la ecuación de Liouville, análogamente se puede derivar una ecuación para la conservación de la probabilidad de un sistema. Se obtienen así dos ecuaciones diferenciales, en cada una de las cuales están involucradas las derivadas parciales hasta de segundo orden de las probabilidades de transición. Se debe, por tanto, buscar algún resultado sobre la diferenciabilidad de las probabilidades de transición que validen las expresiones que posteriormente se indicarán.

Teorema 2.3.12

Si se verifican las condiciones

1- $\mu(t,x)$ y $\sigma(t,x)$ son tres veces diferenciables con continuidad respecto a x

2- Si $B(u,x)= -\frac{1}{2}\mu^2(u,x) - \frac{1}{2}\mu_x^2(u,x) - \int_0^x \mu_u(u,y)dy$ *satisface*

2.1- $\lim_{|x|\to\infty} \sup \frac{\sup_{0\le t\le T} B(t,x)}{1+x^2} = 0$

2.2- $B(t,x)\le K(1+x^2)$ *para algún* $K > 0$

3- Se verifica $\lim_{|x|\to\infty} \sup_{0\le t\le T} e^{-\delta x^2}\{|\frac{dB(t,x)}{dt}|+|\frac{dB(t,x)}{dx}|+|\frac{d^2B(t,x)}{dx^2}|\}=0$

entonces las densidades de transición $p(t,x,s,y)$ *son una vez diferenciables respecto a cada uno de sus argumentos, y dos veces respecto a* x *y respecto a* y *para* $s>t$.

Además en las mismas condiciones es posible calcular explícitamente en términos de esperanzas la expresión de $p(t,x,s,y)$.

La primera de las ecuaciones que verifica la densidad de transición es la ecuación del futuro de Kolmogorov, **-ecuación de Fokker-Planck-**. Si la densidad de transición es diferenciable dos veces respecto a x y una respecto a s, se tiene que

$$\text{ED4} \quad \frac{d}{ds}p(t,x,s,y) + \frac{d}{dy}[\mu(s,y)p(t,x,s,y)] = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dy^2}[\sigma(s,y)p(t,x,s,y)] \qquad s > t > 0$$

suponiendo que existen las derivadas parciales que aparecen relativas a los coeficientes.

Se tiene además que la función de distribución del proceso $X(t)$ $F(t,y)=P(X(t)\le y)$ verifica

$$\text{ED5} \qquad \frac{d}{dt}F(t,y)) + \mu(t,y)\frac{d}{dy}F(t,y) - \frac{1}{2}\frac{d}{dy}[\sigma(t,y)\frac{d}{dy}F(t,y)] = 0$$

con condición inicial $\lim_{t\to 0} F(t,y)=F(y)$

siendo F(y) la función de distribución de la variable X(0).

La segunda ecuación que se obtiene es la ecuación del pasado de Kolmogorov. Si las densidades de transición son continuas y acotadas en x, s, y t para $s-t > \delta > 0$, y además son diferenciables dos veces respecto a x y una respecto a t, entonces se cumple la relación

$$\text{ED6} \quad \frac{d}{dt}p(t,x,s,y) + \mu(s,y)\frac{d}{dx}[p(t,x,s,y)] = \frac{1}{2}\sigma^2(s,y)\frac{d^2}{dx^2}p(t,x,s,y) \qquad s>t>0$$

En la misma situación, la función $V_s(t,x)=\int f(y)p(t,x,s,dy)$ también verifica la ecuación del pasado para funciónes f continuas y acotadas tales que se anulan fuera de un intervalo finito. De análoga forma la función $V_t(s,y)=\int g(x)p(t,dx,s,y)$ verifica la ecuación del futuro siempre que g sea una función continua, acotada y que se anula fuera de un intervalo finito, y que los coeficientes estén en las condiciones anteriormente mencionadas.

La ecuación de Fokker-Planck sólo está resuelta para los casos más sencillos, por ello el conocimiento de los momentos de la solución proporciona una información esencial.

Si existe algún momento de orden par de la condición inicial, se obtienen cotas para los momentos de la solución general de la ecuación

Teorema 2.3.13

Supongamos que los coeficientes de una ecuación satisfacen las condiciones del teorema 2.2., y que para algún m $E[X_0^{2m}] < \infty$. *Entonces existe una constante* C tal que $E[X(t)^{2m}] \leq E[1+X_0^{2m}]e^{ct}$. *Si la condición anterior no se satisface, entonces existe otra constante* C_1 *tal que* $E[(X(t)-X_0)^{2m}] \leq C_1E[1+X_0^{2m}]e^{C_1t}t^m$.

Supóngase que X(t) es un proceso n-dimensional que soluciona una e.d.e, sea $h(X(t))=X^{k_1}(t)X^{k_2}(t)\cdots X^{k_n}(t)$, y $E[h(X(t)]$ el momento respecto al origen de ordenes $k_1 \ldots k_n$, se comentarán dos métodos para calcular h(X(t)).

$$\text{Sea } m(k_1,..,k_n,t)=\frac{d}{dt}h(X)=\int_{\mathbb{R}^{2n}} h(x)\frac{d}{dt}p(0,x_0,t,x)]f(x_0)dxdx_0.$$

donde $f(x_0)$ es la densidad de X(0), sustituyendo en la ecuación de fokker-Planck e integrando, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales .

Otro método se basa en la aplicación de la transformación de Itô a la cantidad h(X)

$$\frac{d}{dt}E[h(X)\ ] =$$

$$\sum_j E[\mu_i(X(t))\ \frac{d}{dx_i}h(X(t))] + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k,} E[\sigma_{i,k}(X(t))\sigma_{j,k}(X(t))\frac{d^2}{dx_i dx_j}]h(X(t)]$$

De la relación anterior se obtiene, para los distintos momentos, un sistema recurrente de ecuaciones con el serio inconveniente de que en la ecuación k-ésima se ven envueltos momentos de orden mayor que k, para ser operativos se deben asumir algunas hipótesis, generalmente sobre los momentos de orden superior, que permitan resolver el sistema.

Si las e.d.e de partida no dependen explícitamente del tiempo, las ecuaciones de Kolmogorov se aplicarán a las correspondientes densidades de transición p(x,s,y). En este caso se obtienen interesantes relaciones entre los coeficientes de la ecuación y algunos tiempos de Markov.

Sea $\tau_x=\inf_t \{X(t)=a, \text{ o } X(t)=b\}$ siendo X(t) la solución de la ecuación $dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dB(t)$ con condición inicial $X(0)=x \in [a,b]$.

Si $v(x)=E[\tau_x]$ se verifica que

ED7 $\frac{1}{2}\sigma^2(x)v_{xx}(x) + \mu(x)v_x(x)=-1$ [2]

---

2 Se puede encontrar una solución explícita de esta ecuación.

Considérese el momento de orden dos de τ_x $v_1(x)=E[\tau_x^2]$ se tiene que

ED8 $$\frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2}{dx^2}v_1(x) + \mu(x)\frac{d}{dx}v_1(x)=-2v(x)$$

Por último se considera $P_{a,b}(x)$, la probabilidad de que X(t), la solución de la ecuación con condición inicial $X(0)=x\in[a,b]$ alcance el punto a antes que el b. Se obtiene que

$$P_{a,b}(x)=\frac{u(x)-u(b)}{u(a)-u(b)}$$ donde u(x) es una solución no trivial de la ecuación

ED9 $$\frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2}{dx^2}u(x) + \mu(x)\frac{d}{dx}u(x) = 0.$$

2.3.4 Estabilidad

La estabilidad de las soluciones de una e.d.e se puede entender como la sensibilidad del sistema descrito por la ecuación, a ligeros cambios en las condiciones de partida, o los parámetros de los que pueda depender el modelo.

Formalmente hay varios significados del concepto de estabilidad, los mismos que en el caso determinista, junto a los añadidos debido al carácter aleatorio de las soluciones. Se estudiará la variación de las soluciones alrededor de un *punto de equilibrio.*

Se dice que X(t) una solución de una e.d.e es una **solución de equilibrio** (punto de equilibrio) si existe una constante c, tal que X(t)=c casi seguramente, y $\mu(t,c)=0=\sigma(t,c)$ $\forall$ t $\in[0,T]$.

A continuación se enumerarán las distintas definiciones de estabilidad de la solución de equilibrio. Sin pérdida de generalidad se considerará el caso c=0.

- $X(t)=0$ es una solución **estable en probabilidad** si $\forall\ \varepsilon>0\ \delta>0\ \exists\ \tau>0$ tal que si $Y(t)$ es la solución con condición inicial $Y(0)=Y_0$ (constante) y $|y_0|<\tau$ entonces $P(\text{ para algún } t>0\ |Y(t)|>\varepsilon\ )=0$

Khasminski probó que una condición suficiente para garantizar la estabilidad en probabilidad es que $\lim\limits_{|Y_0|\to 0} P(\sup\limits_{t\geq t_0} |Y(t)|>\varepsilon\ )=0.$

- $X(t)=0$ es una solución **asintóticamente estable en probabilidad** si es estable en probabilidad y además $\lim\limits_{t_0\to\infty} P(\text{para } t\geq t_0\ |Y(t)|<\varepsilon\ )=1.$

- $X(t)=0$ es una solución **asintóticamente estable en probabilidad en el sentido fuerte** si es asintóticamente estable en probabilidad y para cualquier condición inicial Y_0 no aleatoria continua siéndolo.

- $X(t)=0$ es **estable casi seguro** si existe $\tau>0$ tal que toda solución $Y(t)$ con condición inicial constante $|y_0|<\tau$ tiene trayectorias casi seguramente estables en el sentido determinista del término.

- $X(t)=0$ es **asintóticamente estable c.s.** si es estable c.s. y $Y(t)\to 0$ c.s.

- $X(t)$ es **estable en media p-esima** si $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \tau>0$ tal que si $|Y_0|<\tau$ $E[|Y(t)|^p]<\varepsilon$

Si $p>q$ y $X(t)=0$ es estable en media p-ésima , también lo es en media q-ésima, además la estabilidad en media p implica la estabilidad en probabilidad

- $X(t)=0$ es **asintóticamente estable en media p-ésima** si es estable en media p-ésima y $\lim\limits_{t\to\infty} E[|Y(t)|^p]=0$

- $X(t)=0$ es **exponencialmente estable en media p-ésima** si existen dos constantes positivas c_1 y c_2 y $\tau<0$ tales que si $|Y_0|<\tau$ $E[|Y(t)|^p]\leq c_1|Y_0|^p e^{-c_2 t}.$

Una condición suficiente para que se tenga la estabilidad exponencial en media p-ésima, es que exista una función $v(t,x)$ *definida en* $[t_0, \infty)\times\mathbb{R}$, *continua, diferenciable con continuidad una vez respecto a t, y dos respecto a x, y* c_1 c_2 *y* c_3 *tres constantes que satisfacen*

$$c_1|x|^p \le v(t,x) \le c_2|x|^p \quad \text{y} \quad Lv(t,x) \le -c_3|x|^p .$$

En estas condiciones existe una cuarta constante c_4 y una variable aleatoria $k(c)$ finita c.s. tal que $|X(t)| \le k(c)e^{-c_4(t-t_0)}$ c.s. $\forall$ $t\ge t_0$, con $X(t)$ la solución de la ecuación con condición inicial $X(t_0)=c$

- $X(t)=0$ es **estable en el sentido de Gihman y Skorohod** si $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $\tau>0$ tal que si $|Y_0|<\tau$ $P(\lim Y(t)=0) \ge 1-\varepsilon$.

Si se transforma la condición $|Y_0|<\tau$, por $Y_0\in(0,\tau)$ (resp $(-\tau,0)$) se hablará de estabilidad por la derecha (resp izquierda). Esta condición de estabilidad es aún más debil que la estabilidad en probabilidad

El siguiente teorema caracteriza la estabilidad en este último sentido cuando los coeficientes no dependen del tiempo

Teorema 2.3.14

Supongamos que $X(t)=0$ *es un punto de equilibrio, y que existe* $\tau>0$ *tal que* $\sigma(x)>0$ *para* $0<|x|<\tau$ *entonces*

- *La solución es estable por la derecha si y sólo si* $I_1<\infty$
- *La solución es estable por la izquierda si y sólo si* $I_2<\infty$
- *La solución es estable si y sólo si* $I_1+I_2<\infty$

donde $$I_1=\int_0^\tau \exp\left[\int_u^\tau \frac{2\mu(y)}{\sigma^2(y)}dy\right]du \qquad I_2=\int_{-\tau}^0 \exp\left[-\int_{-\tau}^u \frac{2\mu(y)}{\sigma^2(y))}dy\right]du$$

En el caso determinista el método de lyapunov proporciona una herramienta muy potente para estudiar la estabilidad de un sistema sin necesidad de encontrar explícitamente la solución del mismo. Lyapunov descubrió condiciones para asegurar que un punto de equilibrio es estable . Estas condiciones se basan en la obtención de una función, $v(t,x)$, (función de Lyapunov) con las siguientes propiedades:

a1- $v(t,x) \geq w(x)\ \forall\ t \geq t_0$, donde $w(x)$ es una función definida positiva en el sentido de Lyapunov $-w(0)=0$, y $w(x)>0$ en un entorno de cero-

a2- $v(t,0)=0 \quad \forall\ t \geq t_0$

a3- $v(t,x)$ tiene derivadas parciales acotadas respecto a sus argumentos.

a4- Se satisface la desigualdad $\frac{d}{dt}v(t,x)=\frac{d}{dt}v(t,x)+f(t,x)\frac{d}{dx}v(t,x) \leq 0$ $\forall\ t \geq 0\ |x|<h$ para algún $h>0$

Más aún, se asegura la existencia de un punto de equilibrio asintóticamente estable si la función $v(t,x)$ verifica:

b1- Existe una función $w(x)$ definida positiva en el sentido de Lyapunov tal que $v(t,x) \leq w(x)\ t \geq t_0$

b2- $\frac{d}{dt}v(t,x)$ verifica las condiciones a1 y a2

En el tratamiento de ecuaciones aleatorias, es necesario asumir las siguientes hipótesis para obtener resultados análogos a los obtenidos en el caso clásico.

Se tratan ecuaciones cuyos coeficientes verifican las condiciones del teorema de existencia 2.2.1 tales que su condición inicial $X(t_0)=c$ es constante c.s., y para las que la solución $X(t)=0$ es un punto de equilibrio para la ecuación con condición inicial $c=0$.

Se considera el operador diferencial

$$Lg(t,x)=\frac{d}{dt}g(t,x)+\mu(t,x)\frac{d}{dx}g(t,x)+\frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{d^2}{dx^2}\,g(t,x)$$

que hará el papel de la derivada en la carcterización de la estabilidad vía funciones de lyapunov.

Teorema 2.3.15

En las condiciones mencionadas, si existe una función $v(t,x)$ *definida en* $[t_0,\infty)\times(-h,h)$ *(salvo quizá en x=0), diferenciable con continuidad una vez respecto a t, y dos respecto a x, que además verifique* $Lv(t,x)\leq 0$, *entonces el punto de equilibrio es estable en probabilidad.*

Si además $v(t,x)$ *verifica* b1, y $Lv(t,x)$ verifica a1 y a2 -una condición suficiente para que se cumpla a1 y a2 es que para alguna constante $k>0$ $Lv\leq -kv$ - *entonces la solución* $X(t)=0$ *es asintóticamente estable en probabilidad.*

En ambos casos se tiene que

$$P(\sup_{t\geq s} v(t,X(t))\geq\varepsilon)\leq\frac{v(s,x)}{\varepsilon^2} \quad s\geq t_0$$

donde X(t) es la solución de la ecuación con condición inicial X(s)=x.

Si la función de Lyapunov obtenida está definida en $[t_0,\infty)\times\mathbb{R}$ *y es tal qu*

$$\inf_{t\geq t_0} v(t,x)\xrightarrow[|x|\to\infty]{}\infty$$

, entonces la posición de equilibrio es asintóticamente estable en el sentido fuerte.[3]

En el estudio del comportamiento de las soluciones, no siempre es posible llegar a determinar alguna condición de estabilidad o inestabilidad. Sin embargo en ocasiones resulta más sencillo determinar la acotabilidad de la misma. El análisis de de la acotabilidad de las soluciones se basa en métodos similares a los empleados para estudiar la estabilidad en el sentido de Ghiman y Skorohod para sistemas homogéneos.

[3] En Arnold se encuentran condiciones del mismo tipo que determinan la inestabilidad de una solución, se muestran además algunas técnicas para encontrar funciones de lyapunov.

Teorema 2.3.16

Supongamos que una e.d.e cuyos coeficientes no dependen del tiempo tiene una única solución X(t) *que verifica la condición inicial* X(0)=c (cte), *se definen*

$$I_1=\int_{-\infty}^{x}\exp\left[-\int_{0}^{u}\frac{2\mu(y)}{\sigma^2(y)}dy\right]du \qquad I_2=\int_{x}^{\infty}\exp\left[-\int_{0}^{u}\frac{2\mu(y)}{\sigma^2(y)}dy\right]du,$$ *pueden ocurrir*

- $I_1=\infty$ e $I_2=\infty$, entonces $\quad P(\sup_t X(t)=\infty)=P(\inf_t X(t)=-\infty) = 1$
- $I_1<\infty$ e $I_2<\infty$, entonces

$$P(\sup_t X(t)=\infty)=P(\lim_{t\to\infty} X(t)=\infty)=\frac{E[I_1(X(0))]}{E[I_1(X(0))]+E[I_2(X(0))]}$$

$$P(\inf_t X(t)=-\infty) = P(\lim_{t\to\infty} X(t)=-\infty)=\frac{E[I_2(X(0))]}{E[I_1(X(0))]+E[I_2(X(0))]}$$

- $I_1<\infty$ e $I_2=\infty$, entonces

$$P(\sup_t X(t)<\infty)=P(\inf_t X(t)=-\infty) = P(\lim_{t\to\infty} X(t)=-\infty)= 1$$

- $I_1=\infty$ e $I_2<\infty$, entonces

$$P(\sup_t X(t)=\infty)=P(\inf_t X(t)>-\infty) = P(\lim_{t\to\infty} X(t)=\infty)= 1.$$

Demostración

Se comprobará el primero de los casos, el resto se deducen mediante argumentos similares.

Sea $\varphi(x)=\int_{0}^{x}\exp\left[-\int_{0}^{u}\frac{2\mu(y)}{\sigma^2(y)}dy\right]du$, y $a<x<b$ se tiene que $P_{a,b}(x)=\frac{u(x)-u(b)}{u(a)-u(b)}$

donde u(x) satisface ED9, sustituyendo directamente se comprueba que $\varphi(x)$ verifica la ecuación. por tanto se puede escribir

$$P(X(\tau_{a,b}(x)=a))=\frac{\varphi(x)-\varphi(b)}{\varphi(a)-\varphi(b)}, \qquad P(X(\tau_{a,b}(x))=b)=\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)},$$

es claro que

$P(\sup_{t>0} X(t)\geq b)\geq P(X(\tau_{a,b}(x))=b)\to 1 \quad a \to -\infty,$

y que

$P(\inf_{t>0} X(t)\le a)\ge P(X(\tau_{a,b}(x))=a)\to 1 \quad b\to\infty$

por tanto.

$P(\sup_{t>0} X(t)\ge b)=1$ y $P(\inf_{t>0} X(t)\le a)=1$. además $P(\sup_{t>0} X(t)\ge\infty)=\lim_{b\to\infty} P(\sup_{t>0} X(t)\ge b)=1$

y $P(\inf_{t>0} X(t)\le -\infty)=\lim_{a\to-\infty} P(\inf_{t>0} X(t)\le a)=1$ ■

En el caso en que los coeficientes dependen del tiempo no se tienen resultados tan completos como los descritos anteriormente. Cuando $\sigma(t,x)>0$ se puede hacer un cambio de variable que transforme la ecuación en otra cuyo coeficiente de difusión sea uno. Se obtienen en este caso algunos resultados sobre la acotación de las soluciones

Teorema 2.3.17

Considérese un proceso de difusión no homogéneo con $\sigma(t,x)=1$. Se definen las siguientes cantidades

$$a(t)=\inf_{t} \mu(t,x) \qquad R_1(T)=\frac{1}{\sqrt{2T\log\log T}}\int_0^T a(t)dt \qquad \alpha=\lim\inf_{T\to\infty} R_1(T)$$

$$b(t)=\sup_{t} \mu(t,x) \qquad R_2(T)=\frac{1}{\sqrt{2T\log\log T}}\int_0^T b(t)dt \qquad \beta=\lim\sup_{T\to\infty} R_1(T)$$

$$a_1(t)=\inf_{t>0} \mu(t,x) \qquad S_1(x)=\exp(-\int_0^x 2a_1(t)dt \qquad \gamma_1=\int_{-\infty}^0 S_1(x)dx \qquad \gamma_2=\int_0^\infty S_1(x)dx$$

$$b_1(t)=\sup_{t>0} \mu(t,x) \qquad S_2(x)=\exp(-\int_0^x 2b_1(t)dt \qquad \delta_1=\int_{-\infty}^0 S_2(x)dx \qquad \delta_2=\int_{0}^{\infty} S_2(x)dx$$

- si $\alpha>1$ $\quad P(\lim_{t\to\infty} X(t)=\infty) = 1.$
- si $\beta<-1$ $\quad P(\lim_{t\to\infty} X(t)=-\infty) = 1.$
- si $\gamma_1=\infty$ y $\gamma_2<\infty$ $\quad P(\lim_{t\to\infty} X(t)=\infty) = 1.$
- si $\delta_1<\infty$ y $\delta_2=\infty$ $\quad P(\lim_{t\to\infty} X(t)=-\infty) = 1.$

Una condición en el otro sentido se obtiene de la existencia de una función v(t,x) (de Lyapunov) en las condiciones del teorema 2.3.15, si tal función existe y $\lim_{\substack{x\to\infty \\ T\to\infty}} \inf_{t>T} v(t,x) = \infty$ se tiene que $P(\sup_{t>0} X(t) < \infty) = 1$.

2.3.5 Comportamiento asintótico

Una vez vistas condiciones para que el proceso sea acotado o no, conviene estudiar como se comporta el proceso en el infinito, especialmente cuando se trata de un proceso no acotado es una cuestión de interés la forma en que se va a infinito (o a $-\infty$). Se considerará únicamente el caso homogéneo.

Sea X(t) un proceso que converge a infinito c.s. se dice que una función determinista g(t) es *el orden de crecimiento* de X(t) si $P(\lim_{t\to\infty} \frac{X(t)}{g(t)} = 1) = 1$. Los siguientes resultados van encaminados a encontrar condiciones que aseguren la existencia de un orden de crecimiento y la forma que tendrán éstos.En primer lugar se busca un orden lineal de crecimiento

Teorema 2.3.18

Sea X(t) *la solución de una e.d.e con coeficientes homogéneos, tal que* X(t) *converge c.s. a* ∞ *si* $-\lim_{x\to\infty} \mu(x)=\mu_0>0$ *y* $\sigma(x)$ *es positiva y acotada entonces la función* $g(t)=m_0t$ *es un orden de crecimiento para* X(t).

A partir de este teorema y de la transformación de Itô se encuentran condiciones para todo tipo de ordenes de crecimiento, basta que $Y(t)=f(X(t))$ donde f(x) es una función que admite la transformación de Itô y $f(x)\to\infty$ $x\to\infty$, tenga un orden de crecimiento lineal , es decir, $P(\lim_{t\to\infty} \frac{f(X(t))}{t\bar{\mu}_0} = 1) = 1$,usando la inversa de f(x) se encuentra la función buscada.

Teorema 2.3.19

Considérese la ecuación transformada para que su coeficiente de difusión sea uno, si $A(z)=2\int_0^z \mu(x)dx$ *se puede descomponer en la suma de tres funciones*

$A(z)=Cz^{\alpha}+\beta(z)+\gamma(z)$ *con* C *una constante positiva y* $1<\alpha<2$

$\frac{d}{dz}\beta(z)=o(z^{\alpha-1})$ $z\to\infty$ *y* $\gamma(z)$ *una función uniformemente continua y acotada*

entonces existe un orden de crecimiento proporcional a $t^{\frac{1}{2-\alpha}}$.

El siguiente teorema formaliza la idea intuitiva de que si el coeficiente de difusión no es grande comparado con el de tendencia, el proceso se va a infinito de acuerdo con una ecuación diferencial en la que no tiene influencia el término perturbador dB(t), es decir se busca el orden de crecimiento entre las soluciones de $dg(t)=\mu(g(t))dt$

Teorema 2.3.20

Supóngase que

i- $\mu(x)\to\mu_0>0$,

ii- la ecuación $dg(t)=\mu(g(t))dt$ *tiene una única solución (para una condición inicial dada que verifique .* $\mu(x)>0$*),*

iii- $\frac{\sigma(x)}{\mu(x)}$ *es acotado* $\frac{d}{dx}\mu(x)\to 0$ $x\to\infty$

iv - $g(x)\to\infty$ $x\to\infty$ *y existe una constante* $C>0$ *tal que*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\left|\frac{z}{u}-1\right|\le\varepsilon \quad z>C} \left|(g(z)/g(u))-1\right|=0$$

entonces $$P\left(\lim_{t\to\infty}\frac{X(t)}{g(t)}=1\right)=1.$$

En el análisis de los procesos en el infinito , se buscan otros resultados además de la existencia de órdenes de crecimiento, como son los que atañen a la distribución de probabilidad de X(t) $t\to\infty$, Se deteminara ésta en algunas situaciones bajo una conveniente normalización.

Teorema 2.3.21

Sea X(t) *la solución de una e.d.e. homogénea cuyos coeficientes verifican las siguientes condiciones.*

i- $\mu(x)$, $\sigma(x)$ *y* $\frac{d}{dx}\sigma(x)$ *cumplen la condición de Lipschitz*

ii- $\sigma(x)>0$ *y* $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{\sigma^2(x)}dx = S<\infty$.

iii- $\int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(z)-\frac{1}{2}\sigma(z)\frac{d}{dz}\sigma(z)}{\sigma^2(z)} dz = 0$ *entonces*

$$\frac{S\ X(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow{Ley} N(0,1).$$

Lema

si se verifican

1- $\sigma(x)>0$ *y* $\exists \lim_{|x|\to\infty} \sigma(x)=\frac{1}{S}>0$

2- $\int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(z)}{\sigma(z)} dz = 0$ entonces también se verifican *ii y iii en el teorema anterior.*

aunque la condición *ii* no se cumpla, es posible encontrar una distribución límite

Teorema 2.3.22

Supongamos que se verifican las condiciones i y iii del teorema anterior y que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^{kx} \frac{dy}{\sigma(y)}}{\displaystyle\int_0^{k} \frac{dy}{\sigma(y)}} = \begin{cases} x^{\alpha} & x>0 \\ -C|x|^{\alpha} & x<0 \end{cases}$$

entonces la función de densidad de $\dfrac{X(t)}{g(t)}$ $t\to\infty$ está dada por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\dfrac{1}{\alpha}\, x^{(1/\alpha)-1} \exp\{-\dfrac{x^{2/\alpha}}{2}\} & x>0 \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, C^{-1/\alpha}\, \dfrac{1}{\alpha}\, |x|^{(1/\alpha)-1} \exp\{-\dfrac{|x|^{2/\alpha}}{2C^{2/\alpha}}\} & x<0 \end{cases}$$

donde g(t) *es una solución de* $\sqrt{t} = \displaystyle\int_0^{g(t)} \frac{1}{\sigma^2(y)}\,dy.$

Se trata ahora de estudiar la distribución ergódica del proceso solución, para ello se cuenta con un importante resultado que afirma que $\lim_{T\to\infty} \int_0^{T} f(X(s))ds = \int f(s)dG(s)$ c.s. donde G(x) es la función de distribución límite de X(t) y f(x) es una función suficientemente regular. Se restringirá el estudio al caso en que el proceso es finito c.s. es decir al caso en que las cantidades $I_1=\infty$ en $x=\infty$ e $I_1=-\infty$ en $x=-\infty$, donde I_1 está definida como en 2.3.16.

Considerando el proceso Y(t)=f(X(t)) para f(x) la función que consigue que el coeficiente de tendencia de Y(t)=0, nos limitaremos al caso en que $\mu(x)=0$, y $\sigma(x)>0$ $\forall$ $x\in\mathbb{R}$

Teorema 2.3.23

sea $\varphi(x)$ *una función medible y acotada, entonces*

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T E[\varphi(X(t))]dt = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(y)}{\sigma(y)}\, dy}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma(y)}\, dy} .$$

Además la distancia al límite se puede evaluar mediante la desigualdad

$$\left| \int_0^T E[\varphi(X(t))]dt - \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(y)}{\sigma(y)}\, dy}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma(y)}\, dy} \right| \leq \frac{1}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma(y)}\, dy} \cdot \sup_z |\varphi(z)| \cdot$$

$$\left\{ \int_{|x-y|\geq T} \frac{dy}{\sigma^2(y)} + \frac{H}{T} \int_{|x-y|\leq T} |x-y| \frac{dy}{\sigma^2(y)} \right\}$$

para alguna constante positiva H.

Bajo las mismas hipótesis del teorema anterior se da la convergencia en m.c., e imponiendo alguna condición adicional a la función $\varphi(x)$, se tiene también la convergencia c.s.

Teorema 2.3.24

si la función $\varphi(x)$ *verifica* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{|\varphi(y)|}{\sigma(y)}\, dy < \infty$ *entonces*

$$P\left(\lim_{T\to\infty} \int_0^T E[\varphi(X(t))]dt = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(y)}{\sigma(y)}\,dy}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma(y)}\,dy}\right) = 1.$$

En cuanto a la función de distribución ergódica se tiene que si $\sigma(x)$ satisface la condición de Lipschitz y se cumple la condición del teorema anterior para $\varphi(x)=1$,

$$\lim_{t\to\infty} P(X(t)\le y) = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sigma^2(y)}\,dy}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma^2(y)}\,dy}.$$

2.4 E.D.E CON ESPACIO DE ESTADOS RESTRINGIDO

El objetivo que se persigue a continuación es encontrar un proceso que sea la solución de una determinada e.d.e. y, además esté restringido a un intervalo concreto (finito o infinito), es decir, se busca X(t) tal que

c1- $X(0)\in(a,b)$

c2- $a\le X(t)\le b \qquad t\ge 0$

c3- X(t) verifica $\quad dX(t)=\mu(t,X(t))dt+\sigma(t,X(t))dB(t) \qquad (2.13)$

Puede ocurrir que exista una solución de 2.13 que haga que el conjunto $\{X(t)\notin(a,b)\}$ sea vacío, en tal caso $\tau=\tau_{a,b}=\inf_t \{X(t)\notin(a,b)\}=\infty$, y el proceso nunca abandona el intervalo (a,b), se dirá que este intervalo es una *barrera natural* para X(t). Si por el contrario $\tau<\infty$ se deben imponer restricciones sobre el comportamiento del proceso en los puntos extremos del intervalo para que no salga de él.

Los mejores resultados a este respecto, se obtienen cuando los coeficientes son homogéneos, se verá en este caso en que condiciones puede el proceso alcanzar alguna de las cotas, (en particular el extremo inferior, a).

Se supone que dentro del intervalo considerado los coeficientes verifican la condición de Lipschitz y en general se estará en condiciones de asumir la existencia de un proceso de difusión continuo que solucione 2.13

Sea β un punto interior del intervalo (a,b), y supóngase la condición inicial X(0)=x dentro del intervalo (a,β), las siguientes cantidades caracterizan el comportamiento del proceso a la hora de escapar del intervalo por el punto a.

$$L_1= \int_a^\beta \exp\{\int_\beta^x \frac{2\mu(z)}{\sigma^2(z)}dz\}dx$$

$$L_2=\int_a^\beta \frac{1}{\sigma^2(y)} [\int_a^y \exp\{-\int_\beta^x \frac{2\mu(z)}{\sigma^2(z)}dz\}dx] \exp\{\int_\beta^y \frac{2\mu(z)}{\sigma^2(z)}dz\} dy$$

$$L_3= \int_a^\beta \frac{1}{\sigma^2(z)} \exp\{\int_{x_0}^z \frac{2\mu(u)}{\sigma^2(u)}du\}dz$$

- Si $L_1=\infty$ X(t) alcanza el punto β antes que el a c.s. para cualquier condición inicial X(0), lo que dado el carácter markoviano del proceso implica que nunca se alcanza la barrera x=a.

- Si $L_1<\infty$ y $L_2=\infty$ pueden ocurrir dos cosas
    - $\tau_{a,\beta}=\infty$ y $X(t)\to a$ cuando $t\to\infty$
    - $\tau_{a,\beta}<\infty$ y $X(\tau_{a,\beta})=\beta$

en el primer caso el proceso alcanza el punto a en tiempo infinito, (realmente no se escapa del intervalo), mientras que en el segundo llega antes al punto β. En cualquiera de las dos situaciones no se traspasa la barrera en x=a.

- Si $L_1<\infty$ y $L_2<\infty$ se tiene que $\tau_{a,\beta}<\infty$ c.s., $E[\tau_{a,\beta}]<\infty$ y $P(\lim_{\varepsilon\to 0} X(\tau_{a+\varepsilon,\beta-\varepsilon})=a)>0$ en esta situación se puede alcanzar el punto a también de dos modos distintos

- $L_3=\infty$, si se denomina $X_\varepsilon(t)$ a un proceso que tiene la misma ley de probabilidad que X(t) y, que se inicia en el punto $a+\varepsilon$ cada vez que llega al punto a, se tiene que $P(\sup_t X_\varepsilon(t)=\beta)=0$, entonces siempre que $\varepsilon<\beta-a$ el proceso se saldrá del intervalo por el punto a, denominandose x=a **barrera absorbente** .

- $L_3<\infty$, en este caso $P(\sup_t X_\varepsilon(t)=\beta)>0$ y se pueden alcanzar ambos extremos con probabilidad positiva, en este caso se dice que x=a es una **barrera regular.**

Se consideran a continuación procesos que pueden alcanzar los extremos del intervalo en tiempo finito, para lograr restringirlos a éste se deberá definir el comportamiento del proceso en estos puntos, quizá la forma más sencilla de extender el proceso sea asumir que continúa de manera constante con el mismo valor que tomó en el instante de salida.

2.4.1 Procesos con absorción en la barrera.

Se considera un caso algo más general que el planteado, se trataran procesos con barreras dadas por dos funciones que verifiquen $g_1(t)\leq g_2(t)$.
Se busca un proceso X(t) que satisfaga la ecuación 2.13 en el interior de la región que acotan $g_1(t)$ y $g_2(t)$, y tal que $g_1(t)\leq X(t)\leq g_2(t)$.

Sea $\tau=\{\inf_t X(t)=g_1(t)$ o $X(t)=g_2(t)\}$ el primer instante de salida de la región. Si los coeficientes son continuos en sus argumentos y satisfacen la condición de Lipschitz, en el interior de la región de definición se puede probar la existencia de una solución del problema planteado.

Teorema 2.4.1

En las condiciones anteriores existe una solución continua de la ecuación 2.13 *que tiene* $g_1(t)$ *y* $g_2(t)$ *como barreras absorbentes si y sólo si* $g_1(0)\leq X(0)\leq g_2(0)$ *y* X(0) *es independiente de* B(t).

En general se puede centrar la atención a procesos que se mueven en la banda $0 \leq X(t) \leq 1$ ya que si los coeficientes son suficientemente regulares se podrá encontrar una transformación de la ecuación que conduzca a resolver el problema 2.13 con barreras $g_1(t) \equiv 0$ y $g_2(t) \equiv 1$ y además $\sigma(t,X(t)) \equiv 1$.

Se presentan a continuación una serie de ecuaciones diferenciales que caracterizan el comportamiento probabilístico de la solución del problema ya simplificado.

Teorema 2.4.2

Si $\mu(t,x)$ *es dos veces diferenciable con continuidad respecto a* x *y una respecto a* t *en* $(0,1)$ *y* $f(x)$ *es una función que admite segundas derivadas y que, se anula en los extremos del intervalo* $[0,1]$ $(f(0)=f(1)=0)$, *se tiene que el funcional* $u(t,x) = E[f(X(s))/X(t)=x]$ *satisface la ecuación diferencial* ED1

$$-\frac{d}{dt}u(t,x) = \mu(t,x)\frac{d}{dx}u(t,x) + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}u(s,x) \quad \textit{con condiciones de contorno}$$

$$\lim_{t \nearrow s} u(t,x)=f(x) \qquad \lim_{x \nearrow 1} u(t,x)=\lim_{s \searrow 0} u(t,x)=0$$

si $V^1_{x,t}(\lambda)=E[f(X(s))\exp\{\lambda\int_t^s g(u,X(u))du\}/X(t)=x]$ $\quad t<s \quad$ *donde* f *y* $g(t,x)$ *son dos funciónes dos veces diferenciables con continuidad respecto a* x *y, las derivadas están acotadas, se tiene que* $V^1_{x,t}(\lambda)$ *es una solución de* ED2

$$-\frac{d}{dt}V^1_{x,t}(\lambda) = \mu(t,x)\frac{d}{dx}V^1_{x,t}(\lambda) + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}V^1_{x,t}(\lambda) + \lambda g(t,x)V^1_{x,t}(\lambda)$$

con condiciones de contorno $\lim_{t \nearrow s} V^1_{x,t}(\lambda)=f(x) \qquad \lim_{x \nearrow 1} V^1_{x,t}(\lambda)=\lim_{t \searrow 0} V^1_{x,t}(\lambda)=0.$

Como aplicación se pueden calcular las probabilidades
$P_0(t,x,s)=P(X(s)=0/X(t)=x)$
$P_1(t,x,s)=P(X(s)=1/X(t)=x)$
$q(t,x,s)=P_0+P_1=P(\tau<s/X(t)=x)$. Resolviendo las ecuaciones

ED10 $$-\frac{d}{dt}P_0(t,x,s) = \mu(t,x)\frac{d}{dx}P_0(t,x,s) + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}P_0(t,x,s)$$ con

$$\lim_{t\nearrow s} P_0(t,x,s)= \lim_{x\nearrow 1} P_0(t,x,s)=0 \qquad \lim_{x\searrow 0} P_0(t,x,s)=1$$

ED11 $$-\frac{d}{dt}P_1(t,x,s) = \mu(t,x)\frac{d}{dx}P_1(t,x,s) + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}P_1(s,x,t)$$ con

$$\lim_{t\nearrow s} P_1(t,x,s)=0 \qquad \lim_{x\nearrow 1} P_1(t,x,s)=1 \qquad \lim_{x\searrow 0} P_1(t,x,s)=0$$ y,

ED12 $$-\frac{d}{dt}q(t,x,s) = \mu(t,x)\frac{d}{dx}q(t,x,s) + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}q(t,x,s)$$ con

$$\lim_{t\nearrow s} q(t,x,s) \quad \lim_{x\nearrow 1} q(t,x,s) = \lim_{x\searrow 0} q(t,x,s)=1.$$

En el caso homogéneo se asimilan las expresiones anteriores, definiéndose $V^1_{x,t}(\lambda)=E[f(X(s))\exp\{\lambda\int_t^s g(X(u))du\}/X(t)=x]$. Resulta en este caso de gran utilidad la transformada de Laplace para resolver las ecuaciones planteadas. Se introduce para ello la función $\psi_\lambda(x)=\int_0^\infty u(t,x)e^{-\lambda t}dt$ que usualmente se denomina *el resolvente*. Se *tiene que* $\psi_\lambda(x)=\int_0^1 K_\lambda(x,y)\ f(y)dy$ donde $K_\lambda(x,y)$ es la *función de Green* asociada a la ecuación. La función de Green toma la expresión

$$K_\lambda(x,y) = \begin{cases} \dfrac{h_1(x)h_2(y)}{b(y)} & x<y \\[2ex] \dfrac{h_1(y)h_2(x)}{b(y)} & y<x \end{cases}$$

con $b(y)=\frac{1}{2}[h_1(y)\frac{d}{dy}h_2(y)-h_2(y)\frac{d}{dy}h_1(y)]$ siendo $h_1(y)$ y $h_2(y)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación

ED13 $$\frac{d}{dx}(\mu(x)h(x))+\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}h(x)-\lambda h(x)+g(x)h(x)=0$$

con $h(0)=h(1)=0$

verificando cada una de ellas $\frac{d}{dx}h_1(X=0)>0$ y $\frac{d}{dx}h_2(X=1)>0$.

Del mismo modo que se encontraron ecuaciones diferenciales para algunos funcionales de interés, se pueden encontrar ecuaciones para sus respectivas transformadas de Laplace.

Teorema 2.4.3

Sean $\psi_\lambda(x)$, $P_0(\lambda,x)$, $P_1(\lambda,x)$, $q(\lambda,x)$ *las transformadas de Laplace de las correspondientes funciones definidas anteriormente. Se tiene que estas funciones se determinan como las soluciones de las siguientes ecuaciones.*

considérese el operador L *definido por* $Lu=\mu(x)\frac{du}{dx}+\frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2}$

entonces $L\,\psi_\lambda(x)+g(x)\,\psi_\lambda(x)-\lambda\,\psi_\lambda(x)=-f(x)$

$\psi_\lambda(0)=\psi_\lambda(1)=0$

ED14 $LP_0(\lambda,x)=\lambda P_0(\lambda,x)$ con $P_0(\lambda,0)=\frac{1}{\lambda}$ y $P_0(\lambda,1)=0$

ED15 $LP_1(\lambda,x)=\lambda P_1(\lambda,x)$ con $P_1(\lambda,0)=\frac{1}{\lambda}$ y $P_1(\lambda,1)=0$

ED16 $Lq(\lambda,x)=\lambda q(\lambda,x)$ con $q(\lambda,0)=\frac{1}{\lambda}=q(\lambda,1)$

2.4.2 Procesos que se reflejan instantaneamente en la barrera

Se construirá un proceso que en el intervalo escogido se comporte de acuerdo con la ecuacion 2.13, que sea continuo, y que permanezca en el interior del intervalo $[0,\infty)$ salvo quizá en un conjunto de puntos de medida Lebesgue nula en los cuales el proceso se haría cero. Se exigirá también que este proceso verifique adicionalmente las restricciones usuales que cumplen las soluciones de las e.d.e, como que X(t) sea $\mathcal{F}_t$-medible y, X(0) independiente de B(t).

El problema de encontrar tal proceso es equivalente al de encontrar dos procesos X(t) e Y(t) definidos en [0,T] que verifiquen

i- Tanto X(t) como Y(t) son $\mathcal{F}_t$-medibles y continuos en [0,T]

ii- Y(t) es no decreciente, y sólo crece en los puntos en que X(t)=0

iii- $\forall$ $t\in[0,T]$ se verifica

$$X(t)=X(0)+\int_0^t \mu(t,X(t))dt + \int_0^t \sigma(t,X(t))dB(t) + Y(t) \qquad 0<t\leq T \tag{2.14}$$

Se tienen que las condiciones *i*,*ii* y *iii* determinan de forma única c.s. los procesos X(t) e Y(t).

Se procede a continuación a describir las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de un proceso con reflexión instantánea en X=0. Si los coeficientes son suficientemente regulares, se tiene que $u_1(t,x)=E[f(X(s))/X(t)=x]$ verifica la ecuación ED1

$$-\frac{d}{dt}u_1(t,x) = \mu(t,x)\frac{d}{dx}u_1(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{d^2}{dx^2}u_1(t,x)$$

con condiciones de contorno $\lim_{t\nearrow s} u_1(t,x)=f(x)$ y $\frac{d}{dx}u_1(t,x=0)=0$. Es decir, verifica la ecuación de Kolmogorov añadiendo una restricción adicional en las condiciones iniciales.

Si $X(t)$ verifica 2.14 con $X(t)=x$, para $s>t$ la función $V^1_{x,t}(\lambda)=E[\exp\{\int_t^s g(u,X(u))du\}f(X(s))/X(t)=x]$ satisface la ecuación ED2

$$-\frac{d}{dt}V^1_{x,t}(\lambda) = \mu(t,x)\frac{d}{dx}V^1_{x,t}(\lambda) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{d^2}{dx^2}V^1_{x,t}(\lambda) + \lambda g(t,x)V^1_{x,t}(\lambda)$$

con condiciones iniciales $\lim_{t\nearrow s} V^1_{x,t}(\lambda)=f(x)$ y $\frac{d}{dx}V^1_{x,t}(\lambda)=0.$

La existencia de un proceso que sufra reflexión instantánea en dos barreras está asociada con la aparición de un tercer proceso que replique en la barrera superior el papel del proceso $Y(t)$. Un proceso con reflexión instantanea en el intervalo $[0,1]$ queda determinado por tres procesos $X(t)$, $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ tales que

i- $X(t)$, $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ son F_t-medibles, continuos c.s. y $0\leq X(t)\leq 1$ en $[0,T]$

ii- $Y_1(t)$ es no decreciente y crece sólo cuando $X(t)=0$

$Y_2(t)$ es no creciente y decrece sólo cuando $X(t)=1$

iii- se verifica

$$X(t)=X(0)+\int_0^t\mu(t,X(t))dt + \int_0^t\sigma(t,X(t))dB(t) + Y_1(t) + Y_2(t) \qquad 0<t\leq T \qquad (2.15)$$

Si se considera $\tau_X=\inf_t\left\{ X(t)=x \text{ tras haber sido reflejado por alguna de las barreras} \right\}$, el proceso en el intervalo $[0,\tau_X]$ se comporta igual que si contara con una única barrera (en la que se refleja) de modo que la existencia de un proceso con las características buscadas se asegura sin más que considerar una partición del intervalo $[0,T]$ basada en los sucesivos tiempos τ_X.

En este caso la el funcional $V^1_{x,t}(\lambda)$ verifica la ecuación anterior para $\lambda=1$ con las mismas restricciones añadiendo la de que $\left.\frac{d}{dx}V^1_{x,t}(\lambda)\right|_{x=1} = 0$

Cuando los coeficientes son homogéneos se obtienen interesantes resultados acerca del comportamiento de las soluciones.

Si $\mu(x,t)=\mu(x)$ y $\sigma(x,t)=\sigma(x)$ y $X(t)$ es un proceso que cumple *i,ii* y *iii* se tiene que $E[\tau(y)/X(0)=x]=V_0(y)-V_0(x)$ $0<x<y<1$ donde $\tau(y)=\inf_t \{X(t)=y\}$ y V_0 es la solución de

ED17 $$\mu(x)\frac{d}{dx}V_0(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x) \frac{d^2}{dx^2} V_0(x) = 1 \quad \text{con } \frac{d}{dx}V_0(x=0)=0$$

si $x>1$ la condición se transforma en $\frac{d}{dx}V_0(x=1)=0$ permaneciendo válido el resultado.

En cuanto al comportamiento ergódico del proceso se tiene que

Teorema 2.4.4

Si $f(x)$ *es medible y acotado en* $(0,1)$, *el límite* $\lim_{x\nearrow\infty} E[f(X(t))/X(0)=x]$ *existe y no depende de* x.

Como corolario se obtiene la existencia de la función de distribución estacionaria $F(y)=\lim_{x\nearrow\infty} F_t(x,y)=\lim_{x\nearrow\infty} P(X(t)\le y/X(0)=x)$, que explícitamente se calcula como

$$F(y)=\frac{\int_0^y \frac{\phi(z)}{\sigma^2(z)}\,dz}{\int_0^1 \frac{\phi(z)}{\sigma^2(z)}\,dz} \qquad 0\le y\le 1$$

con $\phi(z)=\exp\{\int_0^z \frac{2\mu(u)}{\sigma^2(u)}\,du\}$.

Se tiene que además la media del proceso a lo largo del tiempo converge c.s. a la media de la distribución ergódica.

Teorema 2.4.5

Sea f(x) *una función medible, si* $\int_0^1 |f(y)|dF(y)<\infty$ entonces

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(X(t))dt = \int_0^1 f(y)dF(y) \qquad \text{c.s.}$$

Los correspondientes resultados aplicados a procesos con una sóla barrera reflejante en x=0 se enunciarían como sigue

Teorema 2.4.6

Si $\int_0^\infty \frac{\phi(z)}{\sigma^2(z)}dz<\infty$ *entonces existe la distribución estacionaria y es de la forma*

$$F(y)=\frac{\displaystyle\int_0^y \frac{\phi(z)}{\sigma^2(z)}dz}{\displaystyle\int_0^1 \frac{\phi(z)}{\sigma^2(z)}dz} \qquad 0\le y<\infty \qquad \text{con } \phi(z)=\exp\{\int_0^z \frac{2\mu(u)}{\sigma^2(u)}du\}.$$

Teorema 2.4.7

Sea f(x) *una función medible, si* $\int_0^\infty |f(y)|dF(y)<\infty$ entonces

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(X(t))dt = \int_0^\infty f(y)dF(y) \qquad \text{c.s..}$$

2.4.3 Procesos con reflexión diferida en la barrera

Se considerarán procesos homogéneos con una barrera en x=0, cuyos coeficientes satisfagan la condición de Lipschitz, con $\sigma(x)>0$ si $x>0$ y, $\sigma(0)=0$ $\mu(0)>0$. Un proceso que satisface 2.13 se dice que experimenta *reflexión diferida* en x=0 si $X(t)\geq 0$. La existencia de un proceso con estas características puede probarse usando la obvia similitud entre éste y el proceso de reflexión instantánea. Se tiene que las distribuciones finito-dimensionales del proceso están determinadas de forma única por la distribución de la condición inicial X(0) y los coeficientes de la ecuación.

Se exponen a continuación una serie de ecuaciones que describen el comportamiento probabilístico de las soluciones.

Si $\phi(t)$ satisface la ecuación ED1 con coeficientes homogéneos

$$\frac{d}{dt}\phi(t,x) = \mu(x)\frac{d}{dx}\phi(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2}{dx^2}\phi(t,x) \qquad \text{con}$$

$$\lim_{x\downarrow 0} \mu(0)\frac{d}{dx}\phi(t,x)= \frac{d}{dt}\phi(t,0) \quad \text{y} \quad \mu(0)\frac{d}{dx}\phi(t,x)<\infty \qquad \text{entonces}$$

$$E[\phi(t,X(s))/F_t]=\phi(s,X(t)) \qquad s<t$$

Sea $u_\lambda(x)$ la transformada de Laplace de $\phi(t,x)$, se tiene que $u_\lambda(x)$ satisface la ecuación

$$\text{ED18} \qquad \lambda u_\lambda(x)-\phi(o,x)=\mu(x)\frac{d}{dx}u_\lambda(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2}{dx^2}u_\lambda(x) \qquad \text{con}$$

$$\lim_{x\downarrow 0} \mu(0)\frac{d}{dx}u_\lambda(x)=\lambda u_\lambda(x)-\phi(0,0).$$

Si $\phi(t,x)=\phi(x)$ y $u_\lambda(x)$ es una solución acotada de la ecuación que verifica

$$\sigma(x)\frac{d}{dx}u_\lambda(x)<\infty \qquad \text{entonces } u_\lambda(X(t))=e^{\lambda t}E[\int_t^\infty e^{-\lambda s}\phi(X(s))ds/F_t].$$

Se encuentra a traves de esta solución condiciones para que la solución sea un proceso homogéneo de Markov. Si existe una clase de funciones acotadas ϕ, tales que

- $\sigma(x)\frac{d}{dx}u_\lambda(x)<\infty$, $\forall\ \lambda$ cuya parte real sea positiva.

- cualquier función acotada es límite puntual de elementos de la clase,

Entonces el proceso con reflexión diferida en x=0 es un proceso homogéneo de Markov cuyas probabilidades de transición satisfacen la siguiente relación para cualquier función acotada g(x)

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int g(y)p(t,x,dy)dt=\lim_{n\to\infty} u_\lambda^n(x)$$

donde $u_\lambda^n(x)$ es una solución de ED18 para $\phi(x)=\phi_n(x)$ y $\phi_n(x)$ una sucesión de funciones que converge puntualmente a g(x).

Los teoremas ergódicos se reformulan como sigue

Teorema 2.4.8

Si $\phi(x)=\exp\{\int_0^x \frac{2\mu(u)}{\sigma^2(u)}du\}$ *y* $\int_0^\infty \frac{\phi(u)}{\sigma^2(u)}du<\infty$ *y* f(x) *es una función acotada que verifica*

1- $\frac{\sigma(x)}{\phi(x)}\int_x^\infty f(z)\ \frac{\phi(z)}{\sigma^2(z)}dz<\infty$

2- $\int_0^\infty \frac{\phi(z)f(z)}{\sigma^2(z)}\int_0^z \frac{dx}{\phi(x)}dx<\infty$

se tiene que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T E[f(X(t))]dt = \frac{f(0)+2\mu(0)\int_0^\infty f(z)\,\frac{\phi(z)}{\sigma^2(z)}dz}{1+2\mu(0)\int_0^\infty \frac{\phi(z)}{\sigma^2(z)}dz}$$

Si $F_t(y)=P(X(t)\le y)$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F_t(y) = \frac{1+2\mu(0)\int_0^y \frac{\phi(z)}{\sigma^2(z)}dz}{1+2\mu(0)\int_0^\infty \frac{\phi(z)}{\sigma^2(z)}dz} \qquad y>0$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T P(X(t)=0)\,dt = \frac{1}{1+2\mu(0)\int_0^\infty \frac{\phi(z)}{\sigma^2(z)}dz}.$$

Por último si se considera el cambio de variable dado por $Y(t)=f(X(t))$ donde $f(x)=\int_0^x \frac{dz}{\phi(z)}$, se tendrá que el coeficiente de difusión de la ecuación transformada será $\bar{\sigma}^2(z)=\frac{\sigma^2(f^{-1}(z))}{\phi(f^{-1}(z))}$ con $f^{-1}(z)$ la inversa de $f(z)$.

Si $\int_0^\infty \frac{dz}{\bar{\sigma}^2(z)}<\infty$ y $g(x)$ es una función medible para la que $\int_0^\infty |g(z)|\,\frac{dz}{\bar{\sigma}^2(z)}<\infty$

se tiene que $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T g(Y(t))dt = \frac{g(0)+2\mu(0)\int_0^\infty g(z)\,\frac{1}{\bar{\sigma}^2(z)}dz}{1+2\mu(0)\int_0^\infty \frac{dz}{\bar{\sigma}^2(z)}dz}$

2.4.4 Procesos con salto en la barrera

Se trata de un proceso que se comporta con arreglo a 2.13 en el interior del espacio de estados y que al alcanzar la barrera regresa automáticamente a un punto del interior fijo de antemano o de acuerdo con una variable aleatoria con recorrido en el interior del espacio de estados.

Se considerarán procesos homogéneos que en $(0,\infty)$ se rigen por c3 y cuando $X(t)=0$ $X(t^{+})=\xi$ donde ξ es una variable aleatoria positiva independiente de $B(t)$ $t>0$. Si en $x>0$ se cumple la condición de Lipschitz se construye una solución considerando

$$\tau_i=\{\inf_t X(t)=0 \text{ por i-ésima vez}\}$$

$\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias cada una de las cuales determina el regreso del proceso tras la k-ésima salida del interior.

si $0\leq t<\tau_1$ $X(t)$ es la solución de c3 con condición inicial $X(0)$

si $\tau_k\leq t<\tau_{k+1}$ $X(t)=X(t-\tau_k)$ con condición inicial $X(0)=\xi_k$

si $t=\tau_k$ $X(t)=\xi_k$.

La solución así definida es única, y se trata de un proceso markoviano, homogéneo cuyas probabilidades de transición se pueden determinar a traves de la función $u_\lambda(X(t))=E[\int_0^\infty e^{-\lambda s}f(X(s))ds/X(0)=x]$ $\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int f(y)p(t,x,dy)$ donde $f(x)$ es una función lo suficientemente regular para que las expresiones que siguen tengan sentido.

Teorema 2.4.9

Sea $u_\lambda(x)$ *una solución acotada de*

$$-\lambda u_\lambda(x) + \mu(x)\frac{d}{dx}u_\lambda(x) + \frac{d^2}{dx^2}u_\lambda(x) = g(x) \quad \text{con}$$

$u_\lambda(0)=\int_0^\infty u_\lambda(y)dF(y)$ $\quad F(y)=P(\xi_k\leq y)$ *para g(x) una función continua y acotada*

entonces
$$u_\lambda(x)= E[\int_0^\infty e^{-\lambda t}g(X(t))dt].$$

Se enuncian dos teorema ergódicos para finalizar

Teorema 2.4.10

Sean $\phi(x)=\exp\{\int_0^x \frac{2\mu(u)}{\sigma^2(u)}du\}$ y $B(x)= \frac{2\phi(x)}{\sigma^2(x)}\int_0^x \frac{1-F(y)}{\phi(y)}dy.$

Si $\int_0^\infty B(y)dy <\infty$, para cualquier función continua y acotada $g(x)$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T E[g(X(t))]dt = \frac{\int_0^\infty B(x)g(x)dx}{\int_0^\infty B(x)dx}.$$

Teorema 2.4.11

Si $X(t)$ *satisface* $dX(t)=\sigma(X(t))dB(t)$ $t>0$ $\sigma(x)$ verifica la condición de Lipschitz y $\int_0^\infty \frac{dz}{\sigma^2(z)} <\infty$, y la variable ξ tiene esperanza finita y es finita c.s. , se tiene que para una función medible $f(x)$ con $\int_0^\infty |f(x)|\frac{dx}{\sigma^2(x)} <\infty$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(X(t))dt = \frac{\int_0^\infty \frac{f(x)}{\sigma^2(x)}\int_0^x (1-F(y))dydx}{\int_0^\infty \frac{1}{\sigma^2(x)}\int_0^x (1-F(y))dydx}$$ c.s. ($F(y)$ la función de distribución de ξ)

2.5 SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCASTICAS MEDIANTE CAMBIO DE VARIABLE

Se intenta ahora resolver explícitamente la ecuación 2.1 para algunos caso particulares. Usando la transformación de Itô, se puede encontrar la solución de algunos tipos de ecuaciones diferenciales estocásticas, que reúnen las condiciones, para asegurar la existencia y unicidad de las soluciones.

Sea $f(t,x)$, definida en $[o,T]\times\mathbb{R}$, una función dos veces diferenciable con continuidad respecto a x, y una respecto a t, de modo que se puede aplicar la fórmula de Itô a $f(t,X(t))$. Supongamos que para cada t fijo $\exists$ $g(t,x)$, función inversa de $f(t,\cdot)$, es decir, $f(t,g(t,x)) = x$. Si $X(t)$ es la solución de $dX(t) = \mu(t,X(t))dt + \sigma(t,X(t))dB(t)$, y se hace el cambio $Y(t) = f(t,X(t))$, $X(t) = g(t,Y(t))$, se obtendrá la ecuación

$$dY(t) = [\ \frac{d}{dt}f(t,g(t,Y(t))) + \mu(t,g(t,Y(t))\frac{d}{dx}f(t,g(t,Y(t))) +$$
$$\sigma^2(t,g(t,Y(t)))\frac{1}{2}\ \frac{d^2}{dx^2}f(t,g(t,Y(t)))]dt + \sigma(t,g(t,Y(t)))\frac{d}{dx}f(t,g(t,Y(t)))]dB(t) =$$
$$= \hat{\mu}(t,Y(t))dt + \hat{\sigma}(t,Y(t))dB(t). \qquad (2.16)$$

Se supone que todas las derivadas relativas a los coeficientes que aparecen existen. Se buscarán condiciones que permitan transformar la ecuación en otra cuya solución sea conocida

Caso 1

Los coeficientes no dependen de x: $dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t)$, $X(0)=X_0$. Obviamente la solución es $X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(u)du + \int_0^t \sigma(u)dB(u)$. El proceso solución es Normal, (la integral estocástica es límite de sumas de variables normales independientes), tiene incrementos independientes, y por la propiedad p2 de las integrales

$$E[X(t)-X(0)] = \int_0^t \mu(u)du, \quad y \quad V(X(t)-X(0)) = \int_0^t \sigma^2(u)dB(u).$$

Si además los coeficientes no son aleatorios, y la condición inicial es normal o constante, el proceso solución es, generalizando a una ecuación n-dimensional, un proceso n-dimensional gaussiano con media dada por la expresión anterior y matriz de varianzas y covarianzas

$$K_X(t,s)=K_X(0,0) + \int_0^{\min(t,s)} \sigma(u)\sigma(u)^T \, du$$

Caso 2

Cabe preguntarse, cuando existirá una función f que reduzca una ecuación general al caso anterior. $dX(t)=\hat{\mu}(t)dt+\hat{\sigma}(t)dB(t)$. De 2.16 se sigue que esta función deberá verificar el sistema

$$\frac{d}{dt}f(t,x) + \mu(t,x)\frac{d}{dx}f(t,x) + \sigma^2(t,x)\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}f(t,x) = \hat{\mu}(t) \qquad (2.17)$$

$$\sigma(t,x)\frac{df}{dx}(t,x) = \hat{\sigma}(t) \qquad (2.18)$$

Derivando respecto a x en 2.17 y sustituyendo 2.18 con las derivadas correspondientes en la ecuación resultante se obtiene

$$\frac{1}{\sigma(t,x)}\frac{d}{dt}\hat{\sigma}(t)=\hat{\sigma}(t)\left\{\frac{1}{\sigma^2(t,x)}\frac{d}{dx}\sigma(t,x) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\mu(t,x)}{\sigma(t,x)}\right) + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\sigma(t,x)\right\} \qquad (2.19)$$

separando los coeficientes que sólo dependen de t y diferenciando respecto a x en ambos lados de la igualdad, se tiene que la condición que deben cumplir los coeficientes para que se pueda reducir la ecuación al caso anterior es

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dt}f(t,x)+\mu(t,x)\frac{d}{dx}f(t,x)+\frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{d^2}{dx^2}f(t,x)\right] = 0.$$

el coeficiente $\hat{\sigma}$ se obtiene resolviendo 2.19, a continuación se despeja f(t,x) de 2.18 y finalmente $\hat{\mu}(t,x)$ se obtiene de 2.17.

Caso 3

Si los coeficientes no dependen de t, $\mu(t,x) = \mu(x)$, $\sigma(t,x) = \sigma(x)$ y $dX(t)= \mu(X(t))dt+\sigma(X(t))dB(t)$. Siguiendo los mismos pasos que en el caso 2, se encuentra que la condición para reducir la ecuación al caso 1, es

$$\frac{d}{dx}\left(\sigma(x)[\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\sigma(x) - \frac{d}{dx}(\frac{\mu(x)}{\sigma(x)})]\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\hat{\sigma}(t)}\frac{d}{dt}\hat{\sigma}(t)\right)=0, \tag{2.20}$$

se tiene que $\hat{\sigma}(t)=e^{ct}$ y $f(t,x)=e^{ct}\int_0^x\frac{dy}{\sigma(y)}$, con c constante además, $\hat{\mu}(t)=ke^{ct}$

$k=[c\int_0^x\frac{dy}{\sigma(y)}+\frac{\mu(x)}{\sigma(x)} - \frac{1}{2}\frac{\frac{d}{dx}\sigma(x)}{\sigma(x)}]$, de 2.20 se deduce que efectivamente k es una constante.

Caso 4

Se llaman *ecuaciones lineales*, a aquellas cuyos coeficientes, toman la forma $\mu(t,x) = \alpha(t) + \beta(t)x$, $\sigma(t,x) = \gamma(t) + \delta(t)x$. Una ecuación lineal, se llama *homogénea*, si $\alpha(t) = \gamma(t) = 0$. Se tratarán éstas en primer lugar. La ecuación queda $dX(t) = \beta(t)X(t)dt + \delta(t)X(t)dB(t)$. Si $X(t)>0$ se puede considerar la transformación $Y(t) = \log X(t)$; aplicando la regla de Itô, se llega a una ecuación cuyos coeficientes sólo dependen de t. La solución es

$Y(t) = Y(0) + \int_0^t[\beta(s)-\frac{1}{2}\delta^2(s)]ds + \int_0^t\delta(s)dB(s)$, por tanto

$X(t) = e^{Y(t)}$, $X(0) = e^{Y(0)}$.

De igual modo se trata con $X(t)<0$, permaneciendo válida la solución siempre que, $X(t)\neq 0$.

En el caso lineal general, se considera el cambio $Y(t) = X(t)Z(t)$ (2.21)

con $Z(t) = \exp\{-\left(\int_0^t [\beta(s)-\frac{1}{2}\delta^2(s)]ds+\int_0^t \delta(s)dB(s)\right)\}$.

Haciendo la diferencial del producto, se tiene

$$dY(t) = Z(t)[\alpha(t)-\gamma(t)\delta(t)]dt + Z(t)\gamma(t)dB(t),$$

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t Z(t)[\alpha(t)-\gamma(t)\delta(t)]dt + \int_0^t Z(t)\gamma(t)dB(t), \quad Y(0) = X(0).$$

Despejando $X(t)$ en 2.21 y sustituyendo $Z(t)$ por su valor se obtiene la solución.

En el siguiente apartado se tratarán las ecuaciones lineales con mayor generalidad.

Caso 5

Por último se verá cuando es posible reducir una ecuación, al caso lineal, (sólo en el supuesto de que los coeficientes no dependan de t). Considérese una función f, y su inversa g. Sea $Y(t)=f(X(t))$, $X(t)=g(Y(t))$ por 2.16 la función debe verificar:

$$\mu(g(x))\frac{d}{dx}f(g(x)) + \sigma^2(g(x))\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}f(g(x)) = \alpha+\beta x \qquad \sigma(g(x))\frac{d}{dx}f(g(x)) = \gamma+\delta x.$$

si $x=f(z)$ se tiene

$$\mu(z)\frac{d}{dz}f(z) + \sigma^2(z)\frac{1}{2}\frac{d^2}{zx^2}f(z) = \alpha+\beta f(z) \qquad \sigma(z)\frac{d}{dz}f(z) = \gamma+\delta f(z)$$

Resolviendo el sistema, se llega a que la condición para la existencia de una función que reduzca la ecuación al caso lineal, viene dada por

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{d}{dx}\{\sigma(x)\frac{d}{dx}[\frac{\mu(x)}{\sigma(x)} - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\sigma(x)]\}}{\frac{d}{dx}[\frac{\mu(x)}{\sigma(x)} - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\sigma(x)]}\right) = 0 \text{ si } \delta\neq 0.$$

En tal caso, $f(x) = C\exp\{\delta\int_0^x \frac{dz}{\sigma(z)}\}$ con $\delta = -\frac{\frac{d}{dx}\{\sigma(x)\frac{d}{dx}[\frac{\mu(x)}{\sigma(x)} - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\sigma(x)]\}}{\frac{d}{dx}[\frac{\mu(x)}{\sigma(x)} - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\sigma(x)]}$

δ es efectivamente una constante, ya que por la condición anterior su derivada es cero.

Si $\delta=0$ la condición de reducibilidad viene dada por

$\frac{d}{dx}\{\sigma(x)\frac{d}{dx}[\frac{\mu(x)}{\sigma(x)} - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\sigma(x)]\} = 0$; en tal caso $f(x)=\gamma\int_0^x \frac{dz}{\sigma(z)} + C$,

$$\gamma = \frac{C_1}{[\frac{\mu(x)}{\sigma(x)} - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\sigma(x)] - \beta\int_0^x \frac{dz}{\sigma(z)}}.$$

2.6 E.D.E LINEALES

Se trata ahora de e.d.e cuyos coeficientes son funciones lineales en x, se trata por tanto de ecuaciones de la forma

$$dX(t)=(A(t)X(t)+a(t))dt+\sum_{i=1}^{m}(D^1(t)X(t)+d^1(t))dB(t) \qquad (2.22)$$

donde

$X(t)=(X_1(t),\ldots,X_n(t))^T$

$A(t)=(\mu_{i,j}(t))$ i=1....n, j=1....n

$a(t)=(a_1(t),\ldots,a_n(t))^T$

$D^k(t)=(\sigma^k_{i,j}(t))i,j=1....n$

$d^k(t)=(d^k_1(t)......,d^k_n(t))^T$

$B(t)=(B_1(t),.....,B_m(t))^T$ un movimiento Browniano m-dimensional

Se considerarán en adelante ecuaciones lineales procedentes de un sistema lineal determinista a la que se le añade una perturbación del tipo del ruido blanco, a estas ecuaciones se las llama **ecuaciones lineales en sentido estricto,** y se forman a partir de las anteriores anulando las matrices correspondientes al coeficiente de difusión. Serán de la forma

$$dX(t)=(A(t)X(t)+a(t))dt+D(t)dB(t) \tag{2.23}$$

$(D)_{n\times m} =(d^k_i(t))$ i=1...n, k=1...m.

De las condiciones del teorema de existencia y unicidad 2.2.1 se tiene que la ecuación tendrá solución única para el problema de Cauchy con condición inicial constante (e independiente de $B(t)-B(s)$ $s\geq t_0$) siempre que sus coeficientes sean medibles y acotados en $[t_0,T)$. En este caso es posible encontrar una expresión explícita de la solución

Teorema 2.6.1

Considérese la ecuación n-dimensional 2.23 *en la cual el término* $(DdB)_{n\times 1}$ *representa la perturbación debida a n combinaciones lineales de m ruidos blancos.*

Si $\phi(t)$ *es la matriz fundamental del sistema determinista* $\frac{d}{dt}X(t)=A(t)X(t)+a(t)$, *es decir, la solución de* $\frac{d}{dt}\phi(t)=A(t)\phi(t)$ $\phi(t_0)=I_n$ *se tiene que*

$$X(t)=\phi(t)[c + \int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)a(s)ds + \int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)D(s)dB(s)].$$

Demostración

Sea $Y(t)=c+\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)a(s)ds+\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)D(s)dB(s)$

su diferencial es $\quad dY(s)=\phi^{-1}(s)[a(s)ds+D(s)dB(s)]$.

Aplicando la transformación de Itô a $X(s)=\phi(s)Y(s)$ se tiene que $X(t)$ verifica 2.23.

Para n=1 la matriz fundamental es $\Phi(t)=\exp(\int_{t_0}^{t}A(s)ds)$, obteniendose la consiguiente expresión de la solución

$$X(t)=\exp(\int_{t_0}^{t}A(s)ds)[c+\int_{t_0}^{t}\exp(-\int_{t_0}^{t}A(s)ds)a(s)ds+\int_{t_0}^{t}\exp(-\int_{t_0}^{t}A(s)ds)D(s)dB(s)\ ].$$

Es fácil calcular los primeros momentos de la solución siempre que existan, es decir, siempre que $E[|X(t_0)|^2]<\infty$ existirán los dos primeros momentos de la solución. Se tiene que $m(t)=E[X(t)]$ es la solución de la ecuación diferencial determinista

ED19 $$\frac{d}{dt}m(t)=A(t)m(t)+a(t) \quad \text{con } m(t_0)=E[c]$$

obteniéndose como expresión final $m(t)=\phi(t)(\ E[c]+\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)a(s)ds\ )$.

La matriz de varianzas y covarianzas cruzadas $K_X(t,s)=E[(X(t)-m(t))(X(s)-m(s))^T]=$

$$\phi(s)(\ E[(c-m(c))(c-m(c))^T]+\int_{t_0}^{\min(s,t)}\phi^{-1}(u)D(u)D(u)^T(\phi^{-1}(u))^T du\ )\phi(t)^T.$$

En particular La matriz de varianzas y covarianzas de X(t), K(t) se obtendrá como la única solución simétrica y definida no negativa de la ecuación matricial

ED20 $$\frac{d}{dt} K(t)=A(t)K(t)+K(t)A(t)^T+ D(t)D(t)^T \quad \text{con } K(t_0)=V(c)$$

Los siguientes resultados atañen a la distribución de probabilidad de la solución, se dan condiciones para que sea normal estacionaria y tenga incrementos independientes

Teorema 2.6.2

La solución de una ecuación lineal en sentido estricto 2.23 es un proceso estocástico gaussiano si y sólo si la condición inicial $X(0)=c$ *está distribuida según una normal (o se trata de una constante)* .

El proceso tendrá incrementos independientes si y sólo si la condición inicial es constante o $A(t)=0$.

La solución será un proceso gaussiano estacionario si $A(t)=A$, $a(t)=0$, $D(t)=D$, *los autovalores de la matriz* D *tienen parte real negativa y* $X(t_0)\equiv N(0,K)$ siendo $K=\int_0^\infty e^{At}DD^Te^{A^Tt}dt$

entonces $m(t)=0$ y $K(t,s)=\begin{cases} Ke^{A(t-s)} & 0\le t\le s \\ Ke^{A^T(s-t)} & 0\le s\le t \end{cases}$.

Se tiene que $X(t)$ es un proceso estacionario, incluso cuando la condición inicial c no se distribuye normal, siempre que $E[c]=0$ y $E[cc^T]=k$.

La solución de la ecuación general también se puede encontrar, en el caso homogéneo siempre que la condición inicial sea independiente de los incrementos del movimiento browniano y sus coeficientes sean medibles y acotados en $[t_0,T)$.

Teorema 2.6.3

La solución de la ecuación 2.23 con coeficientes homogéneos es en las condiciones descritas

$$X(t)=\phi(t)\{\ c + \int_0^t \phi^{-1}(s)dY(s)\}.$$

con $$dY(t)=[a(t)- \sum_{k=1}^{m} D^l(t)d^l(t)]dt + \sum_{k=1}^{m} d^l(t)dB_l(t)$$

y $\phi(t)$ *la matriz fundamental de la ecuación homogénea correspondiente*

$$d\phi(t)=A(t)\phi(t)dt + D(t)\phi(t)dB(t) \qquad \phi(0)=I_n.$$

La demostración se hace por sustitución directa en la ecuación.

En este caso se puede encontrar la esperanza como la solución de ED19 y el momento de orden dos $a_2(t)=E[X(t)X(t)^T]$ será la solución de

$$\frac{d}{dt}a_2(t) = A(t)a_2(t) + a_2(t)A(t)^T + a(t)m(t)^T + m(t)a(t)^T + D(t)a_2(t)D(t)^T +$$
$$D(t)m(t)d(t)^T + d(t)m(t)^T D(t) + d(t)d(t)^T\ )$$

con $a_2(t_0)=E[cc^T]$

2.6.1 Estabilidad de ecuaciones lineales

Generalmente no es fácil determinar la estabilidad de la solución,En el caso de ecuaciones lineales de la forma

$$dX(t)=A(t)X(t)dt+D(t)X(t)dB(t) \qquad X(t_0)=c \qquad (2.24),$$

con $A(t)$ y $D((t)$ coeficientes continuos en $t \geq t_0$, y c constante, los dos primeros momentos $m(t)=E[X(t)]$ y $a_2(t)=E[X(t)X(t)^T]$

se encuentran como las respectivas soluciones de las ecuaciones (deterministas)

$$\frac{d}{dt}m(t)=A(t)m(t) \qquad m(t_0)=c$$

$$\frac{d}{dt}a_2(t)=A(t)a_2(t)+a_2(t)A(t)^T+D(t)a_2(t)D(t)^T \qquad a_2(t_0)=E[cc^T]\ .$$

Por tanto la estabilidad de los dos primeros momentos, puede estudiarse a traves de la estabilidad de las soluciones de equilibrio de las dos ecuaciones anteriores que, en este caso es equivalente a la estabilidad en media cuadrática. Además puede probarse que, la estabilidad exponencial de la solución de equilibrio $a_2(t)=0$ implica la estabilidad en probabilidad de 2.24.

Debido a la forma de la ecuación, la solución depende linealmente de la condición inicial, es decir la solución de 2.24 con condición inicial $X(0)=\alpha c+\beta$ será $Y(t)=\alpha X(t)+\beta$ .Por tanto $P(\lim_{t\to\infty} X(t)=0)=k$ (cte) para cualquier condición inicial, entonces la estabilidad asintótica en probabilidad se dará sólo cuando k=1, por tanto sólo si $X(t)\to 0$ c.s., es decir, en este caso la estabilidad asintótica en probabilidad es equivalente a la estabilidad en el sentido fuerte.

Cabe por último señalar que en las ecuaciones lineales la estabilidad exponencial en media p-ésima implica la estabilidad asintótica en probabilidad, recíprocamente, si la solución de equilibrio es asintóticamente estable en probabilidad, también lo será en media p-ésima para algún p suficientemente pequeño, (lo que implica estabilidad exponencial en media p-ésima) .

En cuanto la ecuación se complica, no es fácil obtener resultados sobre estabilidad. Es frecuente considerar a cambio, una ecuación lineal que sea "representativa" de la que realmente se pretende estudiar, sin más que tomar hasta el segundo término del desarrollo de Taylor en un entorno del punto de equilibrio. Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones linealizadas* y constituyen una herramienta muy útil en el análisis de la estabilidad. El siguiente teorema justifica tal procedimiento en el caso unidimensional.

Teorema 2.6.5 (*Khasminski*)

Supongamos que los coeficientes de una e.d.e 2.2 verifican

- $|\mu(t,x)-a(t)x|=o(|x|)$
- $|\sigma(t,x)-s(t)x|=o(|x|)$ *uniformemente en* $t\geq t_0$ *cuando* $|x|\to 0$, *donde* $a(t)$ *y* $s(t)$ *son funciones acotadas en t. Se considera la ecuación lineal*

$$\frac{dX(t)}{X(t)}=a(t)dt+s(t)dB(t) \qquad X(t_0)=c \tag{2.25}$$

si en el punto de equilibrio de la ecuación 2.24 se verifica la **condición de Khasminski** $\lim\limits_{|Y_0|\to 0} P(\sup\limits_{t\geq t_0}|Y(t)|>\varepsilon)=0$ uniformemente, y éste es asintóticamente estable en probabilidad en el sentido fuerte, entonces el punto de equilibrio de la ecuación original es asintóticamente estable en probabilidad, si $a(t)=a$ y $s(t)=s$, entonces la estabilidad asintótica en probabilidad de la condición de equilibrio en la ecuación lineal implica la estabilidad en el mismo sentido en la ecuación original.

2.7 OTRAS INTERPRETACIONES DE LAS E.D.E

2.7.1 Ecuaciones en media cuadrática y casi seguro.

Considérese el espacio de Hilbert formado por las variables aleatorias que tienen segundos momentos finitos y la norma dada por la media cuadrática. Sea $F:[0,T]\times L_2 \longrightarrow L_2$, y la ecuación

$$\frac{dY(t)}{dt} = F(t,X(t)) \quad \text{con condición inicial } Y(0)=Y_0 \tag{2.26}$$

Se dirá que $Y(t)$ es una solución en media cuadrática de la ecuación si

- $Y(t)$ es un proceso de segundo orden continuo en media cuadrática
- $Y(0)=Y_0$
- $F(t,Y(t))$ es la derivada en m.c. de $Y(t)$ $\forall$ $t\in[0,T]$.

La teoría dedicada a este tipo de ecuaciones es una particularización de resultados más generales sobre ecuaciones diferenciales en espacios de Banach.

El primer problema a tratar es el de la existencia de soluciones, los siguientes resultados lo resuelven parcialmente.

Teorema 2.7.1

Si F(t,y) *satisface la condición de Lipschitz*

$\|F(t,x)-F(t,y)\| \le K(t)\ \|x-y\|$ *para alguna función* K(t) *con* $\int_0^T K(t)dt < \infty$, *entonces para cualquier condición inicial* Y_0 *existe una única solución en m.c..*

Tanto la condición de Lipschitz como el pedir que la función F(t,·) transforme procesos de segundo orden en procesos de segundo orden, son muy restrictivas, y generalmente de difícil verificación, por ello no se aborda el problema de un modo global, sino que se estudian modelos más concretos y tratables. Entre ellos destacan modelos dados por funciones lineales del tipo

$$F(t,Y(t))=\xi Y(t)+X(t)$$

donde ξ es una variable aleatoria con momentos finitos, X(t) es un proceso de segundo orden. Para ellos se tiene un resultado sobre existencia, basado en la función generatriz de la variable ξ, $G(s)=E[e^{s\xi}]$.

Teorema 2.7.2

Si existe R *tal que* G(s) *es analítica* $\forall\ |s|<R$

Y_0 *y* X(t) *son independientes de* ξ*, y* X(t) *es integrable en m.c. entonces existe una única solución en m.c. en* $t<\frac{R}{2}$.

Es posible considerar otra interpretación del problema 2.26 Dado un w fijo, éste se plantea como un problema clásico, en este sentido considerando trayectoria a trayectoria, las e.d.e son tratables como familias de ecuaciones diferenciales dependientes del parámetro w. El problema que surge a continuación es que las soluciones de las ecuaciones individualmente consideradas no tienen porque ser las trayectorias de ningún proceso estocástico, en el caso en que lo sean, se dirá que tal proceso es la **solución en trayectorias (c.s.)** del problema 2.26 si el proceso solución:

- es absolutamente continuo en t
- verifica la condición inicial $Y(0)=Y_0$ c.s.
- es casi seguramente diferenciable y $\dfrac{dY(t)}{dt} = F(t,Y(t))$ c.s.

Para esta interpretación se tiene el siguiente teorema de existencia de soluciones.

Teorema 2.7.3

Supóngase que $F(t,Y(t))$ *verifica*

i- $\forall$ *t fijo se trata de una variable aleatoria*

ii- es continua en t c.s.

iii- verifica la condición de Lipschitz c.s., es decir, $\exists$ $K(t,w)$ tal que $\|F(t,x)-F(t,y)\| \le K(t,w) \; \|x-y\|$ *para cada* w *fijo dentro de un conjunto de probabilidad* 1

entonces el problema 2.26 tiene una única solución c.s..

La relación existente entre la integral en m.c y la integral c.s determina la relación entre las soluciones del problema consideradas bajo los dos puntos de vista.

Teorema 2.7.4

Sea $Y(t)$ *una solución del problema en m.c., existe un proceso equivalente* $Z(t)$ *que es una solución en trayectorias.*

Si $Z(t)$ *es una solución c.s., un proceso equivalente a él* $Y(t)$ *es solución en m.c. si y sólo si* $\int_0^T \| F(t,Y(t))\| \, dt < \infty \; \infty$ (en m.c.).

Es lógico suponer que del mismo modo que se recurría a la integral de Itô para soslayar las insuficiencias de la integral en m.c., sea necesaria la interpretación del problema en el mismo sentido. En efecto, incluso ante los problemas más simples se muestra la insuficiencia del cálculo en m.c.

Considérese el problema lineal $\frac{dY(t)}{dt}=X(t)Y(t)$ con $X(t)$ un ruido blanco procedente de un movimiento browniano. La solución $Y(t)=Y_0\exp(X(t))$ no es un proceso de segundo orden a menos que $X(t)$ esté acotado c.s..

2.7.2 Ecuaciones de ruido blanco

Considérense una sucesión de procesos $\xi_n(t)$ "convergiendo" a un ruido blanco procedente de un movimiento browniano $\frac{dB(t)}{dt}$. Para cada uno de ellos se plantea la ecuación

$$\frac{dX(t)}{dt} = \mu(t,X(t)) + \sigma(t,X(t))\xi_n(t), \tag{2.27}$$

con la condición inicial $X_n(0)=X_0$.

Recordemos que la condición de convergencia a un ruido blanco, dada en el apartado 1.6.1

$\int f(x)dB_n(x) \to \int f(x)dB(x)\ \forall\ f(x)\in L^2$, se interpretaba como $\frac{dB_n(t)}{dt} \to \frac{dB(t)}{dt}$.

Lo que nos lleva a exigir a los procesos ξ_n que se verifique

$$B_n(t) = \int_0^t \xi_n(u)du \qquad (2.28),$$

de modo que 2.27 queda

$$dX(t) = \mu(t,X(t))dt + \sigma(t,X(t))dB_n(t).$$

Si la sucesión de soluciones de 2.27 converge en m.c. (o de alguna otra manera), es natural tomar el proceso límite como la solución de 2.1. Sólo se podrá hablar de solución cuando la sucesión converja y además verifique 2.1. Se verá en primer lugar la relación que hay entre la interpretación de Itô y la que se plantea ahora, para estudiar después alguna condicion para que la sucesión de soluciones sea convergente.

Paso 1

Se estudia la convergencia de $Y_n(t)=\int_0^t \varphi(t,B_n(t))dB_n(t)$, donde φ es una función que verifica

$$\varphi(t,B_n(t)) \to \varphi(t,B(t)), \text{ y } \qquad \frac{d}{dt}\varphi(t,B_n(t)) \to \frac{d\varphi}{dt}(t,B_n(t)) \tag{2.29}$$

Sea $\psi(t,x) = \int_0^x \varphi(t,z)dz$, si calculamos $d\psi(t,x)$ en el punto $(t,B_n(t))$, e integramos entre 0 y t, la expresión resultante que se obtiene es

$$Y_n(t) = \psi(t,B_n(t)) - \psi(0,B_n(0)) - \int_0^t \frac{d\psi}{dt}(s,B_n(s))ds.$$

Por 2.29 se obtiene que $Y_n(t) \to Y^*(t) = \psi(t,B(t) - \psi(0,B(0)) - \int_0^t \frac{d\psi}{dt}(s,B(s))ds.$

Paso 2

Aplicando la diferencial de Itô a $d\psi(t,B(t))$ se llega a que

$$Y(t) = Y^*(t) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d\varphi}{dx}(s,B(s))ds.$$

$Y(t)$ es la interpretación de Itô de la integral $Y(t)=\int_0^t \varphi(t,B(t))dB(t)$, e $Y^*(t)$, la nueva interpretación. Este resultado, nos induce a buscar una relación similar entre las soluciones de una ecuación diferencial.

Paso 3

Hagamos en $dX(t) = \mu(t,X(t))dt + \sigma(t,X(t))dB_n(t)$,

el cambio de variable para lograr que $\hat{\sigma}(t,x)=1$. Esto es, $Z_n(t)=\psi(t,X_n(t))$, con $\psi(t,x)=\int_0^x \frac{dz}{\sigma(t,z)}$, obteniéndose

$$dZ_n(t) = \hat{\mu}(t,X_n(t))dt + dB_n(t), \quad \hat{\mu}(t,X_n(t)) = \frac{\mu(t,X_n(t))}{\sigma(t,X_n(t))} + \frac{d\psi}{dt}(t,X_n(t)), \text{ y}$$

$$\hat{\sigma}(t,X_n(t))=1.$$

Si se dan las condiciones para la existencia de los límites, las relaciones se transforman en

$$dZ(t) = \hat{\mu}(t,X(t))dt + dB(t),$$

$$\hat{\mu}(t,X(t)) = \frac{\mu(t,X(t))}{\sigma(t,X(t))} + \frac{d\psi}{dt}(t,X(t)), \quad \text{y} \quad \hat{\sigma}(t,X(t))=1.$$

Paso 4

Si suponemos que X(t) es diferenciable con diferencial

$$dX(t)=a(t)dt+b(t)dB(t) \tag{2.30}$$

aplicando la fórmula de diferenciación de Itô a $d\psi(t,X(t))$, y comparando el resultado con el del paso 3, se llega a

$$b(t) = \frac{1}{\frac{d\psi}{dx}(t,X(t))}, \quad \text{y} \quad a(t) = \mu(t,X(t))+\frac{1}{2}\sigma(t,X(t))\frac{d\sigma}{dx}(t,X(t)).$$

Sustituyendo en 2.30 se tiene que

$$dX(t) = [\mu(t,X(t)) + \frac{1}{2}\sigma(t,X(t))\frac{d\sigma}{dx}(t,X(t))]dt + \sigma(t,X(t))dB(t).$$

Si interpretamos la solución de la ecuación como el límite de una sucesión de soluciónes, ésta coincide con la solución de Itô de la otra ecuación con un término añadido $\frac{1}{2}\sigma(t,X(t))\frac{d}{dx}\sigma(t,X(t))dt$.

Veamos seguidamente que si los procesos y funciones involucrados son lo bastante regulares, será posible encontrar una solución que se adecúe a la última interpretación dada.

Teorema 2.7.5

Si $\varphi(t,x)$ *tiene derivadas parciales continuas en* $[0,T]\times\mathbb{R}$, *y* $(B_n)_{n\geq 0}$ *es una sucesión de procesos con trayectorias continuas, de variación acotada y uniformemente acotadas en* $[0,T]$, $-\sup_n \sup_t |B_n(t)|<\infty$ -, *que converge c.s. a* $B(t)$ *para cada t fijo, entonces*

$$\int_0^T \varphi(t,X(t))dB_n(t) \longrightarrow \int_0^T \varphi(t,X(t))dB(t) + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d\varphi}{dx}(t,X(t)).\ \text{c.s.}$$

Además si φ *sólo depende de* x *no es necesario pedir la acotabilidad uniforme de las trayectorias.*

De este resultado se sigue además que la integral de Itô se puede calcular como límite de integrales de Riemann-Stiltjes.

2.8 E.D.E. Y SISTEMAS DINAMICOS

Quizá la forma más natural de presentar las e.d.e es como e.d.con algunos de sus términos sometidos a impulsos aleatorios, dependiendo de cuales sean estos términos, del carácter de la aleatoriedad, y obviamente de la expresión analítica de la ecuación, se podrá determinar con más o menos facilidad la solución de la misma, y/o su ley de probabilidad, momentos....

Los sistemas dinámicos modelizan en general el estado de una magnitud que varía a lo largo del tiempo. Éstos toman la forma de ecuaciones diferenciales, de manera que cada problema concreto conlleva el estudio de una ecuación (ya se ha comentado la dificultad de atacar globalmente la resolución de las ecuaciones). Se presentan algunas de las ecuaciones aisladas del problema que las generó y, haciendo especial hincapié en su comportamiento probabilístico, y en las particularidades que éste aporta a la solución.

Un sistema dinámico estará regido por un cojunto de ecuaciones

$\dfrac{dY_i}{dt} = F_i(t,Y_1(t),\dots Y_n(t))$ $\quad i=1\dots n$ $\quad$ junto con unas condiciones iniciales $Y_i(0)=Y_{i,0}$.

El caso más sencillo de tratar es en el que los términos de la ecuación son no aleatorios salvo las condiciones iniciales, éstas son aleatorias y se supone conocida su distribución de probabilidad conjunta. Si el sistema se puede resolver explícitamente como $Y_i(t)=g_i(t, Y_{1,0},\ldots,Y_{n,0})$ i=1...n y g_i son continuas y biyectivas, entonces existirá una transformada inversa y, por tanto, la distribución de probabilidad de la solución se obtiene de la de las condiciones iniciales sin más que efectuar un cambio de variable.

Un segundo método se obtiene aplicando la ecuación de Liouville. Se tiene que si la integral de una función $f(t,\vec{y})$ respecto a la variable espacial, no varía durante el movimiento del sistema, esa función satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt}f(t,\vec{y}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dY_i}[f(t,\vec{y})F_i(t,\vec{y})] = 0$$

Ecuación que representa la conservación de la energia del sistema durante su evolución y que en nuestro caso se refiere a la conservación de la probabilidad. Es claro que si S_0 y S_t son dos regiones del espacio relacionadas por $S_t=g(S_0)$, $P(Y(0)\in S_0)=P(Y(t)\in S_t)$, por tanto se satisface la condición de Liouville y por ende su ecuación, cuya solución es

$$f(t,\vec{y}) = f_0(\vec{y}_0)\exp\{- \int_0^t \frac{d}{dg_i}F_i(\tau,\vec{y}=g(\tau,\vec{y}_0))d\tau\}.$$

Los sistemas más estudiados son sin duda los sistemas lineales de la forma

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t)+X(t) \qquad Y(0)=Y_0 \tag{2.31}$$

con $A(t)=(a_{i,j}(t))$i=1..n, j=1...n con $(a_{i,j}(t))$ continua

X(t) continuo en m.c..

(Nótese que si X(t)=B(t)) estaríamos ante un caso particular de los sistemas lineales anteriormente estudiados).

La solución de la ecuación 2.31 es

$$Y(t)=\phi(t,0)Y_0 + \int_0^t \phi(t,s)X(s)ds$$

donde $\phi(t,s)$ es la matriz fundamental del sistema considerado , es decir, la solución de

$$\frac{d}{dt}\phi(t,s)=A(t)\phi(t,s) \qquad \text{con } \phi(0,0)=I_n,$$

En función de esta matriz los momentos quedan (suponiendo $Y_0=0$)

$$m(t)=E[Y(t)]=\int_0^t \phi(t,s)E[X(s)]ds$$

$$K_y(t,s)=cov(Y(t),Y(s))=\int_0^t\int_0^s \phi(t,u)K_x(u,v)\phi^T((s,v)dudv$$

se puede comprobar que si $A(t)=A$ la solución es un proceso estacionario de covarianza, que puede representarse como $Y(t)=\int_0^\infty \phi(\tau)X(t-\tau)d\tau$.

Si el sistema es de la forma

$$Q_n(\frac{d}{dt})Y(t) = X(t) \tag{2.32}$$

$$Q_n(p)=p^n + a_1(t)p^{n-1}+ .....+ a_n(t) \qquad (Q_n(\frac{d}{dt})=\frac{d^n}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \quad +a_n(t))$$

y $X(t)$ un proceso de segundo orden estacionario de covarianza, la matriz fundamental del sistema (*función de Green* del sistema) $G(t,s)$ representa la respuesta del sistema a un impulso que se recibió en el instante $s<t$, si los coeficientes son constantes $G(t,s)=G(t-s)$. Obteniendose la expresión de los momentos particularizando en la fórmula anterior.

Veremos que aunque el proceso considerado no sea estacionario, se puede en determinadas condiciones tratar como si lo fuera.

Generalizando un poco la ecuación se tiene

$$Q_n(\frac{d}{dt})Y(t)=e^{\beta t}X(t) \tag{2.33}$$

con X(t) un proceso estacionario de covarianza y β una constante en este caso la función de covarianza del proceso se calcula como

$K_y(t,s) = e^{\beta(t+s)}\int_{\mathbb{R}} e^{iw(t+s)}\frac{g_X(w)}{|Q_n(\beta+iw)|}dw$ siendo $g_X(w)$ la densidad espectral del proceso X(t).

Por último considérese el sistema

$$Q_n(\frac{d}{dt})Y(t)=Z(t) \tag{2.34}$$

donde Z(t) no es estacionario, pero admite la representación $Z(t)=\int_0^{\infty} h(t,\tau)X(t-\tau)$ para algún proceso X(t) estacionario de covarianza. se tiene que

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{t} G(t-\tau)Z(\tau)d\tau$$

$$E[Y(t)]=m_X(t)\int_{-\infty}^{t}\int_0^{\infty} h(s,\tau)d\tau ds$$

$$K_y(t,s) = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{s} G(t-\tau_1)G(s-\tau_2)K_Z(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$$

siendo $K_Z(t)=\int_{\mathbb{R}} g_Z(w,t)\ dw$ $\qquad g_Z(w,t)=|A(w,t)|^2 g_X(w)$

$A(w,t)=\int_0^{\infty} h(t,\tau)e^{-iw\tau}d\tau$.

se consigue tratar finalmente un proceso no estacionario con el mismo tipo de formulación final que se obtuvo para éstos.

Si en 2.34 Z(t) admite una expansión ortogonal (Karhunen-Loeve)

$Z(t)=\sum_k Z_k\varphi_k(t)$ entonces la solución en m.c. de la ecuación viene dada por

la expansión $Y(t)=\sum_k G(t,s)\psi_k(s)$ con $\psi_k(t)=\int_0^t G(t,s)\varphi_k(s)ds$.

La función de covarianza en términos de ψ_k queda

$$K_y(t,s) = \sum_k \sigma_k^2\ \psi_k(t)\overline{\psi_k(t)}$$

$$\sigma_k^2=E[Z_k]$$

Hay ecuaciones que aparentemente no admiten unas interpretación en el sentido de Itô, aquellas que sufren perturbaciones que no proceden de un ruido blanco gaussiano, pero que, si dicha perturbación X(t) es a su vez la solución de una e.d.e en el sentido de Itô, permiten una resolución sin más que considerar conjuntamente la incognita original y la perturbación como incógnitas de una nueva ecuación. si la ecuación es de la forma

$$\frac{d}{dt}Y(t)=F(t,Y(t))dt+X(t) \qquad y \qquad dX(t)=\mu(t,X(t))dt+\sigma(t,X(t))dB(t)$$

se busca una solución Z(t)=(X(t),Y(t)) en el sentido de Itô con la correspondiente transformación en los coeficientes de la ecuación, si éstos satisfacen las condiciones de existencia, la ecuación de Fokker-Planck proporciona las probabilidades de transición de la ecuación, tomando las marginales de Y(t), se tiene la solución originalmente buscada.

Una de las ideas más fructíferas en el análisis de las soluciones de las ecuaciones diferenciales deterministas se debe a Bogoliubov, que considera ecuaciones dependientes de un parámetro, que en ocasiones se introduce para poder resolver la ecuación, de la forma $\frac{d}{dt}Y(t)=\varepsilon F(t,Y(t))\quad Y(0)=Y_0$.

Si existe $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(t,Y(t))dt = F_0(t)$ se puede aproximar la solución de la ecuación anterior por la solución de $\frac{d}{dt}Y_1(t)=\varepsilon F_0(t)$ $Y_1(0)=Y_0$ en intervalos de amplitud $\frac{1}{\varepsilon}$.

Una generalización posterior establece que si se tiene una ecuación de la forma $\frac{d}{dt}Z_\varepsilon(t)=F(Z_\varepsilon(t),X(\frac{t}{\varepsilon}))$ $Z_\varepsilon(0)=Y_0$.
con la función F verificando la condición de Lipschitz respecto a z, continua y acotada en sus argumentos, y tal que $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T F(z,X(t))dt = F_0(z)$ (2.35)
uniformemente en z, entonces $Z_\varepsilon(t) \longrightarrow Z(t)$ $\varepsilon\to 0$ donde $Z(t)$ es la solución de $\frac{d}{dt}Z(t)=F(Z(t))$ $Z(0)=Y_0$

En el caso aleatorio, si $X(t)$ es un proceso n-dimensional y $F(y,x)=(F_1(y,x),\ldots,F_n(y,x))$ satisface las condiciones anteriores con probabilidad uno, se obtienen los mismos resultados trayectoria a trayectoria.

Variando la condición 2.27 se obtendrían otros resultados en el mismo sentido.

Teorema 2.8.1

Si $F(x,y)$ *satisface la condición de Lipschitz y existe un a función* $F_0(y)$ *tal que* $\lim_{T\to\infty} P\left\{ \left| \frac{1}{T}\int_t^{t+T} F(y,X(s))ds - F_0(y)\right|>\delta\right\}=0$ *uniformemente en* $y \in\mathbb{R}^n$ *y* $\forall\ \delta > 0$ *y,* $\sup_t E[|F(y,X(t))|] < \infty$. *Entonces para cada* $\delta>0$ *y* $t>0$ $\lim_{\varepsilon\to 0} P(\sup_{0\le t\le T} |Z_\varepsilon(t)-Z(t)|>\delta) = 0.$

Es decir, bajo las condiciones del problema, basta asegurar quie el parámetro es suficientemente pequeño para poder aproximar el proceso original mediante el proceso perturbado. Si $Z_\varepsilon(t)=Z_0 + \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} F(X(s))ds$

y $K_{i,j}=\mathrm{cov}(F_i(X(s+\tau)) ,F_j(X(s)))$ tal que $\sum_{i=1}^{n} K_{i,i}(\tau) \to 0$ si $\tau\to\infty$, entonces se satisfacen las hipótesis del teorema para $m=F_0(y)=E[F(X(s))]$, entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P(\sup_{0\le t\le T} |Z_\varepsilon(t)-Z(t)|>\delta) = 0. \qquad \text{con } Z(t) = mt+Z_0,$$

si además el proceso $X(t)$ es tal que $\mathrm{cov}(X(t),X(s))\to 0$ cuando $t-s\to\infty$ el proceso $Z_\varepsilon(t)$ converge en ley a un proceso gaussiano para $\varepsilon\to 0$.

Khasminski obtuvo una mejora del resultado anterior estableciendo

Teorema 2.8.2

considérese el problema

$$\frac{d}{dt}Z_\varepsilon(t) = \varepsilon\ F(z(t),t,\gamma,\varepsilon)$$

con $F(z,t,\gamma,\varepsilon)=F_1(z,t,\gamma) + \varepsilon F_2(z,t,\gamma)$, *siendo* F_1 *y* F_2 *funciones medibles tales que*

$$|F_i(z,t,\gamma)|< C \qquad |\frac{d}{dz_j} F_i(z,t,\gamma)| < C \qquad |\frac{d^2}{dz_j dz_k} F_i(z,t,\gamma)| < C$$

se tiene que si $\varepsilon\to 0$ $t\to\infty$ *con* $\varepsilon t=\tau$ *fijo* , $Z_\varepsilon(t)$ *converge en ley a un proceso* $Z(t)$ *markoviano de difusión solución de la e.d.e*

$$d(Z(t))=\mu(Z(t))dt+\sigma(Z(t))dB(t))$$ *con coeficientes*

$$\mu_i(z)=\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T E[F_{2,i}\ F(t,\gamma)dt +$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \int_0^s \sum_{j=1}^{n} E[F_{1,j}(y,t,\gamma)\ \frac{d}{dy_j}F_{1,i}(y,t,\gamma)]ds\ dt$$

con $F_{1,i}$ $(F_{2,i})$ la componente i-ésima de la función F_1 (F_2)

$$y\ \sigma_{i,j} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^s \sum_{j=1}^{n} E[F_{1,i}(y,t,\gamma)\ F_{1,j}(y,t,\gamma)]ds\ dt.$$

Una de las técnicas más usadas en el estudio de las ecuaciones no lineales,- que ya se comentó para estudiar la estabilidad-, es el uso de ecuaciones linealizadas "equivalentes", en el sentido de proximidad entre la solución de partida y la linealizada. Dos problemas surgen al tratar de aplicar esta técnica, en primer lugar la elección del sistema lineal que represente a la ecuación y, después la evaluación de la bondad de la aproximación. El primero se resuelve habitualmente usando el criterio de mínimos cuadrados, para determinar los parámetros de la función lineal correspondiente. El problema que se presenta es que los parámetros quedan en función de los momentos del proceso solución de la ecuación original, para solventarlo se proponen varias opciones, una de ellas es calcular los momentos a partir de la distribución de probabilidad estacionaria que, en un gran número de casos se podrá calcular. Otras opciones dependen más directamente del problema con el que se trabaje, pues lo que se propone es la asunción de algunas hipótesis sobre los momentos, sobre la interdependencia de las variables involucradas... etc, que resuelvan el problema.

En la mayor parte se las situaciones no existen métodos analíticos para evaluar el grado de aproximación obtenido, el error mínimo cuadrático da una pauta sobre la posible exactitud de los resultados, pero, se ha comprobado empíricamente que en algunas ecuaciones el procedimiento funciona bien, mientras que en otras el alejamiento es tan significativo que llega a distorsionar gravemente la interpretación de la solución.

Otro método de resolución consiste en la introducción de un parámetro perturbador (generalmente muy pequeño) que afecte a los términos no lineales. La idea es considerar que el sistema se comporta realmente de forma lineal y que en la parte no lineal se están reflejando las anomalías del sistema. Se asume que la solución admite un desarrollo en serie de potencias respecto al parámetro, de la sustitución del desarrollo en la ecuación y la igualación de las potencias del parámetro se obtiene un sistema de ecuaciones lineales de los que se determina los coeficientes del desarrollo en serie.

Resta señalar la existencia de otros métodos como la aplicación del principio de maximización de la entropía combinado con las ecuaciones para los momentos, métodos numéricos, algorítmicos, soluciones aproximadas en un número finito de puntos que son, como los ya presentados, una adaptación de los utilizados en el análisis clásico

CAPÍTULO TERCERO

APLICACIONES FINANCIERAS: VALORACIÓN DE OPCIONES

CAPITULO TERCERO

3.1 INTRODUCCIÓN

El mundo de las finanzas está experimentando durante los últimos años constantes innovaciones, la mayor parte de las cuales provienen de la consideración del riesgo como un factor habitual de trabajo. Paralelamente a la aparición del riesgo como elemento indisoluble de algunas operaciones financieras, surgen instrumentos de cobertura que permiten paliar los efectos de éste.

Los elementos de cobertura varían tanto en su forma como en su coste dependiendo del riesgo a cubrir, siniestros, fluctuaciones desfavorables de los tipos de interés, de los tipos de cambio...etc. La determinación del precio de la cobertura supone un problema de la misma índole que la fijación de la prima en una empresa de seguros, con algunas diferencias derivadas de las imposiciones legales y de imagen, así como del carácter de los intrumentos financieros, que, a diferencia de las aseguradoras permiten la especulación.

Las opciones financieras en este ámbito es uno de los objetos financieros que con mayor fuerza han irrumpido en el mercado. No se trata de una forma nueva de negociar pero, la existencia de mercados organizados de opciones y las distintas modalidades que continuamente se ponen en uso, han facilitado en los últimos años su expansión y generalización dentro del mercado financiero.

La valoración de opciones financieras bajo diferentes consideraciones constituye el propósito fundamental de este capítulo. En primer lugar se consideran las relaciones fundamentales entre los distintos activos financieros, opciones, futuros, contratos forward..etc. A continuación se observan algunas restricciones sobre el valor de las opciones, ya sean de compra o de venta, europeas o americanas. Seguidamente se entra en detalle con el cálculo del valor de una opción de compra sobre una acción que no reparte dividendos, replicando los pasos que dieron Black y Scholes. Para inmediatamente, y en la línea que marcaron originalmente, considerar modelos de valoración en los cuales se asumen hipótesis más complejas sobre los elementos que determinan el precio de las opciones ciñéndonos al tipo europeo, considerando además la valoración de opciones sobre distintos activos.

Finalmente se presenta un breve apunte sobre la valoración de opciones americanas, ilustrando los métodos que se han venido utilizando. Se plantea a continuación una generalización de la idea de opción, que permite abordar seguidamente el problema de aproximar el valor de las opciones de tipo americano a traves de sucesiones de opciones europeas.

3.2 OPCIONES FINANCIERAS: CONCEPTOS BÁSICOS

Se dedica este apartado a precisar el significado de la terminología que se empleará a continuación, así como a la consideración de distintos aspectos del empleo de opciones y sus relaciones más inmediatas con otros instrumentos financieros.

Una opción es un contrato que proporciona al adquirente del mismo el derecho de comprar (o vender) una determinada cantidad de un activo **-activo subyacente-** fijada en el contrato. Este derecho puede ser ejercido (o no) en una fecha fija, en cuyo caso estaríamos ante una **opción europea** o, puede ejercerse en cualquier instante hasta un límite prefijado, **opción americana.** La fecha máxima fijada para la ejecución del contrato se llama **fecha de vencimiento.** El precio estipulado de compra (o venta) del activo subyacente en la fecha de vencimiento se denomina **precio de ejercicio.**

Es claro que el adquirente de la opción obtiene una ventaja de su adquisición, puesto que podrá comprar (vender) el activo subyacente a un precio inferior (superior) al del mercado, consiguiendo asi una mayor ganancia o garantizando un mínimo beneficio. En caso de que las condiciones del mercado le fueran adversas, no ejercería la opción quedando sujeto a las condiciones del mismo. Por su parte el vendedor de la opción queda obligado ante las decisiones del comprador, de modo que asume un riesgo comprometiéndose a vender (comprar) al precio de ejercicio pactado. La contrapartida que tiene el vendedor de la opción es el coste de la misma o **prima.**

Una opción de compra (el adquirente de la opción paga por el derecho de comprar) se denomina **Call,** de venta **Put.** Se dice que el comprador de la opción adopta una posició larga **(long),** mientras que el vendedor toma la posición corta **(short).**

En términos de beneficio/pérdida las posiciones son simétricas en el sentido de que la pérdida o ganancia del comprador es la ganancia o pérdida del vendedor (asumiendo como pérdida la no ganancia), en este sentido puede afirmarse que el mercado de opciones es un juego de suma nula.

Resulta evidente que el precio de la opción está sujeto a las fluctuaciones en el precio del activo subyacente, por tanto, la distribución de probabilidad del mismo a lo largo del tiempo, y las características del contrato, fecha y precio de ejercicio, son factores que influirán de forma determinante en el valor de la opción.

Se supondrá que no hay costes de transacción en el mercado, que se puede invertir cualquier cantidad monetaria en cualquiera de los activos que se negocian y que existe un activo que proporciona una tasa de interés conocida y libre de riesgo - en algunos casos se suprimirá esta última suposición-.

Debe considerarse una restricción adicional sobre el precio de una opción, éste debe ser estipulado de tal modo que se evite el **arbitraje,** entendiendo como arbitraje, toda operación consistente en combinaciones de compra/venta de distintos instrumentos financieros que proporciona como resultado un beneficio con riesgo nulo.

3.2.1 Relaciones entre contratos de opciones y futuros.

Entre las hipótesis que se formulan sobre el mercado de finanzas se pueden distinguir dos tipos, las que van encaminadas a que el funcionamiento del mismo sea óptimo, y aquellas que pretenden facilitar la labor analítica de la valoración mediante la simplificación del modelo. Las primeras nos aseguran cuestiones tan evidentes como, si dos activos (carteras) tienen el mismo valor en algun instante futuro, lógicamente deben tener el mismo precio, si un activo tiene con seguridad un valor positivo en el futuro, el coste del mismo debe ser positivo. Supuestos de esta índole están evitando que se produzca el arbitraje. Formalmente para la consecución de las próximas relaciones se admitirán las siguientes premisas:

- Los individuos son racionales

- Se puede invertir en un activo sin riesgo con una tasa de interés conocida r, y tomar prestado con idéntica tasa

- Los contratos que se consideran **futuros, contratos forward, opciones, y opciones sobre futuros** tienen la misma fecha de ejercicio

- El coste de mantenimiento del activo subyacente tiene una tasa de interés onocida b.

Este coste se refiere al precio que se ha de pagar por la conservación de la mercancía, también se conoce como coste de almacenamiento. Será positivo cuando se trabaje con mercancias, y negativo o nulo cuando el activo subyacente sean acciones que producen rendimiento, bonos..etc.

Se considera a continuación las relaciones que se dan entre los precios de los distintos instrumentos financieros que se van a considerar.

Contratos de futuros y contratos forward

Un contrato **forward** es un acuerdo para entregar una determinada cantidad del activo subyacente en un momento futuro T, a un precio especificado en la fecha en que se firma el contrato. El pago por el activo se hace efectivo en un sólo plazo en el instante T, y no existen pagos intermedios.

El valor de la posición adquirida mediante un contrato forward en un instante $t \leq T$ será

$$V(t)=(f(t)-f(0))e^{-r(T-t)}$$

donde f(t) es el precio del contrato en el momento t, es decir se valora la posición como el valor actualizado del beneficio/pérdida acumulada hasta el periodo t.

En un **contrato de futuros**, al igual que en un contrato forward se acuerda entregar una determinada cantidad del activo subyacente a un precio y en un instante especificados. Con la diferencia de que se consideran las variaciones en el precio del activo en instantes previamente estipulados, de tal manera que en estos instantes el comprador y el vendedor del futuro se ven obligados a cancelar el contrato, y suscribir otro en las mismas condiciones, salvo el precio del activo que se actualiza. El incremento o descenso en el precio de éste debe, por tanto, ser compensado en los mencionados instantes, de modo que el comprador del contrato tiene espectativas alcistas en el precio del activo subyacente, y recibirá - caso de confirmarse éstas- en cada instante en que se mida la variación, una cantidad monetaria equivalente al incremento de valor de su contrato. Naturalmente el vendedor está en la posición contraria, él apuesta por un cambio a la baja debiendo pagar si el precio aumenta y recibiendo dinero en caso contrario. El valor de la posición adquirida mediante la compra de un futuro es

$$V(t)=\sum_{\tau=1}^{t}(F(\tau)-F(\tau-1))e^{-r(T-\tau)}$$

donde F(t) es el precio del futuro en el instante t, y τ se mueve por los instantes en que se realizan los pagos compensatorios, entonces el valor de la posición se obtiene mediante la actualización entre cada dos pagos, de las cantidades pagadas.

Si la tasa de interés es conocida y no cambia durante la duración del contrato, se puede comprobar que el valor de un contrato de futuros debe coincidir con el del contrato forward, de otro modo se abrirían puertas al arbitraje, como seguidamente se razona.

Considérense dos carteras, la primera de ellas formada por un contrato forward y una inversión en el activo sin riesgo por un valor $f(0)e^{-rT}$, y la segunda que consta de $F(0)e^{-rT}$ pts invertidas en el activo sin riesgo y que sigue una estrategia de compra de futuros consistente en negociar contratos de futuros según el precio que tomen los mismos, de modo que en el día τ tras la negociación se tienen $e^{-r(T-\tau)}$ pts invertidas en futuros, se trata con esta forma de invertir de ir contrarrestando la variación en el precio de los contratos con el tamaño de la posición[1]. Es claro que en el momento de finalizar los contratos ambas carteras tienen el mismo valor, pues deben tomar el mismo valor que el activo subyacente, F(T)=f(T)=S(T), donde S(t) es el

1 Esta estrategia de inversión se conoce como **Rollover**

valor en t del activo S. Por tanto los contratos deben tener el mismo valor en el momento de iniciarse, dado que este instante puede ser cualquiera se tiene que $F(t)=f(t)$, de modo que valorando uno cualquiera de los dos queda automáticamente valorado el otro.

Relación entre un contrato de futuros y el activo subyacente

Se deducirá la relación entre el valor del contrato y el activo del mismo modo que se hizo en el caso anterior. Considérense dos carteras, la primera formada por una inversión de $e^{(b-r)T}S(0)$ pts en el activo S, cantidad que se conserva hasta el instante T, la segunda cartera se forma mediante una estrategia **rollover** en futuros y $F(0)e^{-rT}$pts invertidas en el activo libre de riesgo. En el instante T el valor de ambas carteras es S(T), por tanto su precio debe coincidir en cualquier instante, de donde se tiene que $F(t)=S(t)e^{b(T-t)}$.

Relación entre el activo y las distintas opciones

Estas relaciones se suelen rotular como relaciones de paridad Put-Call. La idea es que se puede constrir una cartera cuyo resultado en la fecha de ejercicio es cierto, y esto proporciona una relacion entre los distintos componentes de la misma.

- *Europeas.* Formemos una cartera comprando una Call y vendiendo una Put ambas con idénticas características, y con un mismo precio X. Además se compra activo por valor de $e^{(b-r)T}S(0)$ pts y se pide un préstamo de Xe^{-rT} pts al tipo de interés constante r. Se comprueba fácilmente que sea cual sea la evolución del activo subyacente el valor final de la cartera es nulo, de donde

$$C(S,T) - P(S,) - S(0)e^{(b-r)T} - Xe^{-rT} = 0$$

- *Americanas.* Supongamos que $b \geq r$, y formemos una cartera (C1) mediante la compra de una Put, la venta de una Call una compra de activo subyacente por valor $e^{(b-r)T}S(0)$ pts y se pide un préstamo de Xe^{-rT} pts al tipo de interés constante r.

Construyamos otra cartera (C2) mediante la compra de una Call, la venta de una Put, la venta de una unidad del activo por valor S(0) y la compra de X pts de activo libre de riesgo .

Si $b < r$ consideramos la cartera (C3) constituida igual que la C1, pero con una compra de activo por valor de S(0) pts . Y una segunda cartera (C4) igual que C2 reemplazando S(0) por $S(0)e^{(b-r)T}$.

Si $b \geq r$ razonando con los posibles efectos de un ejercicio anticipado según la evolución del activo subyacente sobre las carteras C1 y C2 se llega a

$$S(T) - X \leq C(T,S(T)) - P(T,S(T)) \leq S(0)e^{(b-r)T} - Xe^{-rT}$$

donde la primera desigualdad se debe a la consideración de la primera cartera y la segunda desigualdad a la segunda.

Razonando del mismo modo con C3 y C4 cuando $b < r$ se llega a

$$S(0)e^{(b-r)T} - X \leq C(T,S(T)) - P(T,S(T)) \leq S(T) - Xe^{-rT}$$

Ha de tenerse en cuenta que si no hay ejercicio anticipado el valor de una opción europea y una americana coinciden.

Opciones sobre futuros y opciones sobre el activo

Europeas Como se están considerando contratos que tienen la misma fecha de ejercicio, en el momento de expirar la opción el valor del futuro sobre el activo coincide con el del activo, y por tanto $C(S,T)=C(F,T)$ y $P(S,T)=P(F,T)$, donde F es el precio del futuro sobre el activo en el instante T.

Americanas Puesto que $F(t)=S(t)e^{b(T-t)}$, si $b>0$ el valor del futuro antes de la fecha de ejercicio es superior al valor del activo en la misma fecha, lo que supone que la posibilidad de ejercicio anticipado tiene un valor positivo, y por tanto $C(S,T) \leq C(F,T)$ y $P(S,T) \geq P(F,T)$.

Opciones sobre futuros

Las relaciones de paridad de las opciones Put y Call cuando el activo subyacente es un futuro conducen a las mismas expresiones ya deducidas para un activo cualquiera S, con la variación que produce en la formulación la consideración de la relación $F(t)=S(t)e^{b(T-t)}$.

En general todas las relaciones son válidas cuando se asumen las hipótesis de partida, pero pueden variar si se cambia alguna de ellas.

3.2.2 Relaciones entre opciones sobre acciones.

Como ya se citó anteriormente el arbitraje es una situación que debe evitarse en un mercado que funcione correctamente, según Cox y Rubinstein una situación de arbitraje se da cuando es posible obtener un beneficio seguro de forma inmediata sin necesidad de una inversión inicial, y con la garantía de que tal acción no supondrá pérdida alguna en un futuro sea cual fuere la evolución del mercado.

Se consideran a continuación una serie de restricciones que han de tenerse en cuenta para evitar el arbitraje. Se supondrá además de las hipótesis habituales sobre el mercado, que se negocia sobre activos que no tienen coste de almacenaje b=0 - se supondrá que se trata de una acción-, que pueden repartir dividendos en unas fechas determinadas, y que las opciones con que se trata son americanas.

En general la negación de las relaciones que se expondrán a continuación permiten construir una **cartera de arbitraje**, lo que por si solo demuestra la veracidad de las proposiciones. Se enumerarán las distintas relaciones indicando cuando proceda la composición de una posible cartera de arbitraje (en cursiva).

Se notará por C el valor de una opción de compra, expresándola como C(,) cuando se quiera resaltar la dependencia de uno o varios de sus argumentos. Respectivamente una opción de venta se notará por P.

E = Precio de ejercicio.

S = Valor de la acción.

r = Tasa de interés.

D^+= Valor actualizado de los máximos dividendos que se podrían pagar a lo largo de la vida de la opción.

D^-= Valor actualizado de los mínimos dividendos que se podrían pagar a lo largo de la vida de la opción.

T,t = Instantes de vencimiento y evaluación respectivamente.

Opciones de compra

- $S \geq C \geq 0$
- $C \geq S - E$ (salvo quizá en la fecha de ejercicio o justo antes de repartir dividendos)

Las relaciones anteriores implican que si S=0, entonces C=0, y si E=0 entonces C=S

- $C \geq S - Er^{-t} - D^+$

Compra de una Call, venta de una acción , se pide un préstamo de D^+*, y se efectua una inversión sin riesgo por valor de* Er^{-t}.

- El valor de una Call es una función no creciente del precio de ejercicio.

$$C(E_1) \geq C(E_2) \quad \text{si} \quad E_2 \geq E_1$$

Compra de $C(E_1)$ *y venta de* $C(E_2)$

- Si $C(E_1)$ y $C(E_2)$ son los precios de dos Call con precios de ejercicio respectivos E_1 y E_2, se tiene que $0 \leq C(E_1) - C(E_2) \leq E_2 - E_1$

Compra de $C(E_1)$*, venta de* $C(E_2)$ *e inversión al tipo de interés sin riesgo por un valor de* E_2-E_1 .

- El valor de un Call es una función convexa del precio de ejercicio.

Si $E = \lambda E_1 + (1-\lambda)E_2 \qquad C(E) \leq \lambda C(E_1) + (1-\lambda)C(E_2)$

Es posible comprar Call con la misma distribución que la parte derecha de la desigualdad, y vender la parte izquierda.

- El valor de un Call es una función no decreciente de la fecha de ejercicio.
  $C(T) \geq C(T_1)$ si $T \geq T_1$,
  compra por $C(T)$ *y venta de* $C(T_1)$

- Sólo es interesante ejercer una Call en la fecha de ejercicio o justo antes de un reparto de dividendos. Es una consecuencia inmediata de la segunda proposición.

- Si en algún momento resulta favorable el ejercicio anticipado de una call, también lo es de todas aquellas que tengan bien una anterior fecha de ejercicio, bien un precio de ejercicio menor. Es consecuencia de las proposiciones anteriores.

Opciones de venta

En general las relaciones de paridad entre las opciones de compra y de venta justifican, a partir de las relaciones anteriores, las restricciones que se exponen a continuación sobre el precio de una opción de venta P.

- $E-S \leq P \leq E$
- $0 \leq P$
- $P \geq D^{-} + Er^{-t} - S$
- El valor de una Put es una función no decreciente de:

  - precio de ejercicio,
  - fecha de ejercicio
  - precio del activo subyacente

- El valor de una Put es una función convexa de:

  - precio de ejercicio
  - precio del activo subyacente

- Si $E_1 < E_2$ son dos precios de ejercicio $E_2 - E_1 \geq P(E_2) - P(E_1)$

- Si en algún momento resulta interesante ejercer anticipadamente una Put, también se deben ejercer todas aquellas que tengan un precio de ejercicio o una fecha de ejercicio anterior (y el resto de las condiciones idénticas

3.3 VALORACIÓN DE UNA OPCIÓN DE COMPRA; MODELO DE BLACK Y SCHOLES

En el año 1973 Black y Scholes en su artículo " The pricing of options and corporate liabilities" propusieron la fórmula que se describe a continuación para la valoración de una opción de compra europea sobre una acción que no reparte dividendos en el periodo considerado.

En primer lugar suponían que el precio de la opción depende del precio de la acción subyacente y del tiempo a traves de una función $F(s,t)$ dos veces diferenciable con continuidad respecto a s y una respecto a t.

- $W(t)=F(S(t),t)$

  $S(t)$=Precio de la acción

  $W(t)$=Precio de la opción

  $W(0)=0$ y $W(T)=\max\{0, S(T)-E\}$

siendo T y E la fecha y el precio de ejercicio respectivamente.

- El precio de la acción esta determinado por la e.d.e.

$$dS(t) = \mu(t,S(t))dt + \sigma(S(t),t))dB(t) \qquad S(0)=S_0$$

y correspondientemente la variación en el precio de la opción sobre la acción vendrá dado por

$$dW(t)=[F_t(S(t),t)+\mu(S(t),t)F_S(S(t),t)+\frac{1}{2}\sigma^2(S(t),t)\ F_{SS}(S(t),t)]\ dt$$
$$+\sigma(S(t),t)F_S(S(t),t)dB(t) = \mu_W dt + \sigma_W dB(t)$$

- Se considera una cartera que en el instante t está formada por $N_1(t)$ acciones, $N_2(t)$ opciones de compra sobre el mismo activo y $Q(t)$ es el valor de invertido en un activo sin riesgo que proporciona un interés $r(t)$. Si $P(t)$=Valor de la cartera en el instante t

$$P(t)=N_1(t)S(t)+N_2(t)W(t)+Q(t) \tag{3.1}$$

Se considerará que los cambios de composición de la cartera son lentos en función del precio de variación de ésta ($dN_1(t)=dN_2(t)=0$)

- $dP(t)= d(N_1(t)S(t)) + d(N_2(t)W(t)) + dQ(t)$

aplicando la regla de diferenciación del producto

$$d(N_1(t)S(t))= S(t)dN_1(t) + N_1(t)dS(t) + dN_1(t)dS(t) = N_1(t)dS(t)=$$
$$N_1(t)[\ \mu(t,S(t))dt + \sigma(S(t),t))dB(t)\ ]$$

$$d(N_2(t)W(t))= W(t)dN_2(t) + N_2(t)dW(t) + dN_2(t)dW(t) = N_2(t)dW(t)=$$
$$N_2(t)dF(S(t),t)$$

usando la transformación de Itô en la última expresión

$$d(N_2(t)W(t))=N_2(t)[\ \mu_W dt + \sigma_W dB(t)\ ]$$

$$dQ(t)= Q(t)r(t)dt$$

- agrupando las expresiones

$$dP(t) =$$
$$[\ N_1(t)\mu(t,S(t))+N_2(t)\mu_W + Q(t)r(t)\ ]dt + [N_1(t)\sigma(S(t),t)) + N_2(t)\sigma_W]\ dB(t)$$
$$= \mu_P dt+\sigma_P dB(t) \tag{3.2}$$

la expresión 3.2 bajo los supuestos citados constituye la base para la determinación de la función F(s,t), la hipótesis fundamental es que es posible formar una cartera equivalente a la dada cuyo rendimiento es igual al tipo de interés sin riesgo

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = r(t)dt\ ,$$

usando 3.1

$$dP(t)=P(t)r(t)=(N_1(t)S(t)r(t) + (N_2(t)W(t)r(t)) + Q(t)r(t))dt$$

3.2 queda

$$0 = [\, N_1(t)\mu(t,S(t)) + N_2(t)\mu_W \; - N_1(t)S(t)r(t) - N_2(t)W(t)r(t)]dt + [N_1(t)\sigma(S(t),t)) + N_2(t)\,\sigma_W]\, dB(t)$$

por tanto

$$N_1(t)[\mu(t,S(t)) - S(t)r(t)] = N_2(t)[W(t)r(t) - \mu_W] \tag{3.3}$$

$$N_1(t)\sigma(S(t),t)) + N_2(t)\,\sigma_W=0 \tag{3.4}$$

3.3 está indicando que si la tendencia (al alza) del precio de la acción es mayor que el rendimiento sin riesgo del su valor, el precio de una opción sobre dicha acción debe ser tal que la tasa de retorno sin riesgo de la opción sea superior a la tendencia en el precio de la opción. En efecto, la compra y venta de opciones se fundamenta en espectativas de signo contrario sobre la evolución del precio del activo subyacente, la acción. Si el precio de ésta estuviera perfectamente determinado, un contrato justo sería aquel en que el ejercicio de la opción traería como consecuencia una ganancia igual a la prima pagada, y por tanto un beneficio/pérdida global nulo/a. Pueden ocurrir:

i- $\dfrac{\mu(t,S(t))}{S(t)} > r(t) > \dfrac{\mu_W}{W(t)}$

ii- $\dfrac{\mu(t,S(t))}{S(t)} < r(t) < \dfrac{\mu_W}{W(t)}$

iii- $\mu(t,S(t))=r(t)\;S(t)$ entonces

$\mu_W=W(t)r(t)$ ó $N_2=0$

i y *ii* de acuerdo con la idea anterior sitúan de forma relativa los comportamientos *deterministas* de la acción y la opción, por su parte el papel que juega el tipo de interés en la fórmula es el de evitar situaciones absurdas en las cuales la inversión no tuviera sentido o se permitiera el arbitraje, fundamentando la última aseveración en la hipótesis de que es posible obtener prestamos al tipo de interés sin riesgo.

- La siguiente suposición que se efectua es sobre la distribución del precio de la acción, se cuenta con que en el periodo de vigencia de la opción no se reparten dividendos y esto repercute en que no hay cambios bruscos en el precio, lo que junto a consideraciones de carácter empírico, induce a modelizar el precio de la acción a traves de un movimiento browniano geométrico de parámetros μ y σ constantes

$$dS(t) = \mu\ S(t))dt + \sigma\ S(t)dB(t) \qquad S(0)=S_0$$

Si además se considera que la composición de la cartera permanece inalterable hasta la fecha de ejercicio y la tasa de retorno del activo sin riesgo es constante en ese lapso de tiempo se tendrá que 3.3 y 3.4 se transforman en

$$N_1S(t)[\ \mu - r] = N_2[W(t)r - \mu_W] \tag{3.5}$$

$$N_1\sigma\ S(t) + N_2\ \sigma_W = 0 \tag{3.6}$$

Despejando en 3.5 y 3.6 se tiene

$$\frac{\mu-r}{\sigma} = \frac{\mu_W-W(t)r}{\sigma_W}$$

sustituyendo $W(t)=F(S(t),t)$, μ_W y σ_W se llega a la ecuación diferencial determinista

$$\frac{1}{2}\ \sigma^2S(t)\ F_{SS}(S(t),t) + r\ S(t)F_S(S(t),t) + F_t(S(t),t) - rF(S(t),t) = 0 \tag{3.8}$$

con condiciones $\qquad F(S_0,0)=0$ y $F(S(T),T)=\max\ \{\ 0,\ S(T)-E\ \}$ (3.9)

Para resolverla se hace el siguiente cambio de variable

$$Y(X,v)=e^{r(T-t)}F(S,t)$$

$$X = \frac{2}{\sigma^2}\ (r - \frac{\sigma^2}{2})[\log\frac{S}{E} +(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)]$$

$$v = \frac{2}{\sigma^2}\ (r - \frac{\sigma^2}{2})^2(T-t)$$

con lo que la condición inicial se transforma en

$$Y(X,0)=\begin{cases} E(\ \exp(\ \dfrac{X\sigma^2}{2r-\sigma^2}) - 1) & X\geq 0 \\ 0 & X<0 \end{cases} \tag{3.10}$$

$*\quad \dfrac{dY}{ds} = \dfrac{dY}{dx}\dfrac{dX}{ds} + \dfrac{dY}{dv}\dfrac{dv}{ds}$; de donde $F_S = e^{-r(T-t)}\dfrac{dY}{dx}\ \dfrac{2}{\sigma^2}\ (r - \dfrac{\sigma^2}{2})\ \dfrac{1}{S}$

$*\quad$ como $\dfrac{dv}{ds} = 0,\quad \dfrac{d^2Y}{ds^2} = \dfrac{d^2Y}{dx^2}\left(\dfrac{dX}{ds}\right)^2 + \dfrac{dY}{dx}\dfrac{d^2X}{ds^2}$ de donde

$$F_{SS}= e^{-r(T-t)}\left\{ \frac{d^2Y}{dx^2}\left[\frac{2}{\sigma^2}(r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{1}{S}\right]^2 + \frac{dY}{dx}\left[-\frac{2}{\sigma^2}(r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{1}{S^2}\right] \right\}$$

$*\quad \dfrac{dY}{dt} = \dfrac{dY}{dx}\dfrac{dX}{dt} + \dfrac{dY}{dv}\dfrac{dv}{dt}$ de donde $F_t - rF = e^{-r(T-t)}\left\{ \dfrac{dY}{dx}\dfrac{dX}{dt} + \dfrac{dY}{dv}\dfrac{dv}{dt}\right\}$

Sustituyendo todas las expresiones anteriores en 3.8 y simplificando se tiene la ecuación $\dfrac{d^2Y}{dx^2} = \dfrac{dY}{dv}$.

Por otro lado se tiene que la solución general del problema de contorno

$\dfrac{du}{dt} = a^2 \displaystyle\sum_i \dfrac{d^2u}{dx_i^2}$ con $u_t(0)=f(x)$ es

$u(t)= \dfrac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(\alpha)\exp(-\sum \dfrac{(x_i-\alpha_i)^2}{4a^2t})\ d\alpha$. Que en el caso particular que planteamos se reduce a

$$Y(X,v)=\int_{\frac{-x}{\sqrt{2v}}}^{\infty} E\left[\exp\left((X+q\sqrt{2v})\frac{\sigma^2}{2r-\sigma^2}\right)-1\right]\exp\left(-\frac{q^2}{2}\right)dq$$

aplicando la transformación inversa se tiene la fórmula de Black y Scholes

$$\boxed{W(t)=F(S(t),t) = S(t)N(d_1) - E\, e^{r(T-t)}\, N(d_2)}$$

siendo N(x) la función de distribución de una variable aleatoria normal de parámetros 0 y 1, y

$$d_1 = \frac{\log\frac{S(t)}{E} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Otro método alternativo de derivación de la fórmula se tiene considerando que el inversor adopta una actitud de neutralidad ante el riesgo, y por tanto la rentabilidad esperada de la opción a su vencimiento es igual al tipo de interés sin riesgo, es decir

$$F(S(t),t)=W(t)=e^{-r(T-t)}\, E[W(T)],$$

teniendo en cuenta la relación entre el precio de una acción y el valor de la opción en la fecha de ejercicio, y la distribución del precio de la acción se llega al mismo resultado.

3.4 OTROS METODOS DE VALORACIÓN DE OPCIONES

Las últimas técnicas de valorar opciones se fundamentan en distintas suposiciones sobre los elementos que determinan el precio de la misma.

Es evidente que el activo subyacente es un elemento determinante a la hora de determinar el precio de una opción, y también lo es el hecho de que la distribución de probabilidad de éstos variará de uno a otros, de modo que en algunos casos el valor asignado por el modelo desarrollado originalmente por Black y Scholes se asemejará al valor real, mientras que en otros no tendrá siquiera sentido el plantear la situación con dicho esquema.

Otros elemento determinantes serán las distintas consideraciones que se puedan hacer acerca de parámetros como la volatilidad del activo subyacente o la tasa de interés.

Se tratará con tres tipos de activos, que presentan claras diferencias entre ellos, acciones, bonos y divisas, y que en su conjunto se han considerado suficientemente representativas.

Se supondrá en general que el coste de almacenamiento es nulo, $b = 0$, comentándose en cada situación las hipótesis que se asumen, o las variaciones respecto a casos tratados con anterioridad.

Como norma general se parte de suposiciones que garantizan un buen funcionamiento del mercado, éstas mediante distintios argumentos conducirán a una ecuación en derivadas parciales de sgundo orden, cuya resolución teniendo en cuenta las restricciones naturales que se imponen sobre el precio del activo, proporciona, de forma cerrada en algunos casos y formalmente en otros el valor buscado.

3.4.1 El activo subyacente es una acción

ELASTICIDAD DE LA VARIANZA CONSTANTE [2]

En el contexto que usaron Black y Scholes para la valoración de una opción sobre una acción se asumía que el precio de esta última seguía un movimiento browniano geométrico cuyas media y varianza infinitesimales eran consideradas constantes. Sin embargo diversos estudios de carácter empírico refutan esta suposición. Se buscan, por tanto, modelos que se adecúen a la

2 Se define la elasticidad de una función $y=f(x)$ como $e(x)=f'(x)\frac{x}{y}$

variabilidad detectada en la varianza. Se propone utilizar el siguiente proceso para describir la variación en el precio del activo subyacente

$$dS(t) = S(t)\mu dt + \sigma S(t)^m dB(t)$$

que para m=1 coincide con el caso estudiado. El resto de las hipótesis permanecen inalteradas.

En gran parte de los estudios realizados para analizar el modelo se coincide en el mayor poder predictivo del caso en que se toma la elasticidad de la varianza constante, y en que en un porcentaje significativo de los casos m<1, encontrando por otra parte que el valor de m difiere considerablemente según el activo subyacente con el que se trate. Análisis que motivan el estudio del modelo para m<1 [3].

Llamando F(t,S) al valor de una opción de compra en el instante t cuando el activo toma el valor S se tiene que la variación de éste viene dada por

$$dF(t,S) = [F_t(t,S) + \mu S F_s(t,S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^{2m} F_{ss}(t,S)]\, dt + \sigma S^m F_s(t,S)\, dB(s) .$$

bajo el supuesto de una tasa de interés constante r, de que la acción no produce dividendos..etc , es posible -de forma absolutamente análoga a la empleada por Black y Scholes en su modelo original- formar una cartera que elimine el riesgo, obteniendo que precio de la opción debe ser la solución de

$$F_t + \mu\ S\ F_s + \frac{1}{2}\sigma^2 S^{2m}\ F_{ss} - rF = 0$$

sujeta a $$F(T,s) = \max\{S(T)-E,\ 0\}$$

Usando el resultado 2.12, se tiene que la solución de la ecuación es

---

3 Beckers, Cristie y otros autores estudiaron por separado los mejores estimadores para m, coincidiendo en que en *largos* periodos de tiempo- un año día a día, 60 años quincenalmente, respectivamente ambos sobre diversos activos- valores de m<1 proporcionaban el mejor ajuste.

$$F(t,S) = e^{-r(T-t)}E[\ \max\{S(T)-E,\ 0\}\ /\ S(t) = s]$$

Por tanto para evaluar la expresión anterior es necesario calcular

$$\int_E^{\infty} (S(T)-E)p(S(T)/S(t)=s)dS(T)\ . \tag{3.11}$$

La ecuación del pasado de la e.d.e que rige el proceso es

$$0 = p_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^{2m}\ p_{ss} + \mu S\ p_s$$

$p = p(S(T),T,s,t)$ cuya solución es

$$p(S(T),T,s,t) = 2(1-m)K^q(xw^{1-4m})^{q/2}e^{-(x+w)}\ I_q(2\sqrt{xw})$$

con

$q = \dfrac{1}{2(1-m)}$,

$K = \dfrac{r}{\sigma^2(1-m)[e^{2r(1-m)(T-t)}-1]}$,

$x = Ks^{2r(1-m)(T-t)}$,

$w = KS(T)^{2(1-m)}$,

$I_q(y) = \left(\dfrac{y}{2}\right)^q \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^j}{\Gamma(q+j+1)j!}$, es decir, la función modificada de Bessel de primera especie y orden q

sustituyendo en 3.11 y haciendo el cambio $z = KS^{2(1-m)} = w$, se obtiene

$$F(t,S) = s\int_y^{\infty} e^{-(x+w)}\left(\frac{w}{x}\right)^{q/2} I_q(2\sqrt{xw})\ dz\ -\ Ee^{-r(T-t)}\int_y^{\infty} e^{-(x+w)}\left(\frac{x}{w}\right)^{q/2} I_q(2\sqrt{xw})\ dz$$

con $y = KE^{2(1-m)}$.

El integrando de la primera integral es la función de densidad de una χ_n^2 no central evaluada en el punto 2w, con parámetro de la centralidad $\lambda = 2x$, y $2 + 2q$ grados de libertad [4], la segunda también corresponde a la función de densidad de una χ_n^2 en el punto 2x, con parámetro de la centralidad $\lambda = 2w$ y los mismos grados de libertad.

Llamando $Q(x,n,\lambda)$ al complementario de la función de distribución de una χ_n^2 no central con parámetro de la centralidad λ se tiene que

$$\boxed{F(t,S) = s\, Q(2w,\ 2 + 2q,\ 2x) - E\, e^{-r(T-t)}\, Q(2x,\ 2 + 2q,\ 2w)}$$

Es trivial comprobar que si $m = \dfrac{2k-1}{2k}$ para algún $k \in \mathbb{N}$ $k \geq 2$ la fórmula de valoración se puede expresar como

$$F(t,S) = s\, Q(2w,\ 2 + 2q,\ 2x) - E\, e^{-r(T-t)}\, Q(2w,\ 2 - 2q,\ 2x).$$

VARIANZA ALEATORIA

Otro enfoque para soslayar el problema de la no estaticidad de la varianza parte de la consideración de la misma como otro elemento aleatorio cuya distribución vendría dada por

$$d\sigma(t) = \mu_1(t)dt + \sigma(t)^n \sigma_1(t)\ dB_1(t)$$

el precio de la acción se sigue tomando como en el apartado anterior

4 La función de densidad de una χ_n^2 con $\lambda = \mu_1^2 + \qquad + \mu_n^2$ el parámetro de la centralidad es $$f(y) = \frac{e^{-1/2(\lambda+y)}}{2^{n/2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^{1/2(n+j-1)} \lambda^j}{\Gamma(\frac{1}{2}n + j)\ 2^{2j} j!}.$$

$$dS(t) = S(t)\mu dt + \sigma S(t)^m dB(t)$$

con $dB_1(t)dB(t) = \rho dt$ siendo ρ el coeficiente de correlación entre las variables $B_1(t)$ y $B(s)$ con $t = s$, en otro caso se suponen incorreladas.

Si el precio de un Call es función del tiempo, del precio del activo y de la volatilidad del mismo, $F(t,S(t),\sigma(t))$, aplicando la versión simplificada de la regla de Itô se obtiene

$$dF = F_t dt + F_s dS + F_\sigma d\sigma + \frac{1}{2}\sigma^2 S^{2m} F_{ss} dt + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S^{2n} F_{\sigma\sigma} dt + F_{s\sigma}\sigma^{n+1} S^m \sigma_1 \rho\, dt$$

Se supone ahora la existencia de un activo, quizá una combinación de activos, cuyo precio R se rige por la ecuación

$$dR = R\mu_R\, dt + \sigma_R R^n dB_2(t)$$

es decir, existe un activo cuya estructura de precios es idéntica, salvo parámetros, a la de la varianza de la acción.

Se forma a continuación una cartera mediante la compra de una acción, la venta de $\frac{1}{F_S}$ Calls sobre la acción y la compra de k unidades del activo P.

Si $k = \frac{1}{F_S}\frac{\sigma_S\,\sigma^n}{\sigma_R\,R^n}F_\sigma$ se tiene que el valor de la cartera en el instante t, P(t), es

$$P = S - \frac{1}{F_S}\left(F - \frac{1}{F_S}\frac{\sigma_1\sigma^n}{\sigma_R R^{n-1}}F_\sigma\right)$$

$$\text{y} \qquad dP = \mu_P dt,$$

ya que con la combinación escogida el término σ_P se anula. Se tiene entonces que en un mercado en equilibrio $dP = rPdt = \mu_P\, dt$, de donde se obtiene la ecuación de valoración

$$F_t + rS\, F_s - rF + \frac{1}{2}\sigma^2 S^{2m} F_{ss} + [\mu_1\sigma + \frac{\sigma_1\sigma^n}{\sigma_P^{\,n\beta-1}}(r - \mu_R)]\, F_\sigma + \frac{1}{2}\,\sigma_1^2\, S^{2n}\, F_{\sigma\sigma} +$$

$$F_{s\sigma}\, \sigma^{n+1}\, S^m\, \sigma_1\rho = 0 \tag{3.12}$$

con

$$F(T,S(T),\sigma(T)) = \max\{\, S(T)-E,\ 0 \,\} \,.$$

Otro modo de obtener una ecuación para la valoración hubiera sido formar la cartera sin tener en cuenta el activo que se comporta como la varianza, y suponer a cambio que el riesgo es completamente diversificable, lo que supone que en equilibrio $E[\frac{dV}{V}] = rdt$. Se obtendría en tal caso la ecuación

$$F_t + rS\, F_s - rF + \frac{1}{2}\sigma^2 S^{2m} F_{ss} + \mu_1\sigma\, F_\sigma + \frac{1}{2}\,\sigma_1^2\, S^{2n}\, F_{\sigma\sigma} + F_{s\sigma}\, \sigma_s^{n+1}\, S^m\, \sigma_1\rho = 0$$

con $$F(T,S(T),\sigma(T)) = \max\{\, S(T)-E,\ 0 \,\}. \tag{3.13}$$

Si $\mu_R = \mu_1$, $\sigma_R = \sigma_1$, $n = 1$, $R = \gamma\sigma$ para alguna constante γ (situación que se interpreta como que la volatilidad es un activo negociable), las ecuaciones 3.12 y 3.13 coinciden salvo la sustitución del término μ_1 por $r\sigma$.

Es obvio que si $\sigma_1 = 0$ ambos supuestos conducen a la misma ecuación

$$F_t + rS\, F_s - rF + \frac{1}{2}\sigma^2 S^{2m} F_{ss} + \mu_1\sigma\, F_\sigma = 0 \tag{3.14}$$

con la misma condición inicial.

Todavía no se ha encontrado una solución analítica general de ninguna de estas tres ecuaciones. Se dará la solución de B2 en el caso en que m=n=1 y ρ=0. Aplicando el resultado 2.7 se llega a que la solución es

$$F(t,S(t),\sigma(t)) = e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}^2} \max\{S(T)-E\} p(S(T),\sigma(T)/S(t)=s,\sigma(t)=\sigma) dS(T) d\sigma(T) =$$

$$= e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} \max\{S(T)-E\} p(dS(T)/S(t)=s,\sigma(t)=\sigma).$$

El problema es encontrar $p(S(T)/S(t)=s,\sigma(t)=\sigma)$ partiendo de las ecuaciones que siguen S y σ, y de que dB y dB_1 están incorrelados.

Considérese la ecuación diferencial estocástica que determina la distribución de S(t) en el caso en que $\sigma(t)$ es una función determinista, usando el teorema 2.6.4 se tiene que la solución de la ecuación lineal homogénea con que se trabaja es,

$$S(T) = S(t)\ [\exp\{\ \mu(T-t) - \int_t^T \frac{\sigma^2(s)}{2}ds + \int_t^T \sigma(s)dB(s)]$$

Se trata, por tanto, de un proceso cuya distribución es lognormal con media, $m(T) = S(t)e^{\mu(T-t)}$ y varianza,

$V(T) = S^2(t) \exp\{ \int_t^T \sigma^2(s)ds\}$, de modo que la dependencia de la varianza se da a traves de la varianza media en el intervalo (t,T)

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma^2(s)ds\ .$$

La integral $\int_E^\infty (S(T)-E)p(S(T)/S(t)=s,\sigma(t)=\sigma)dS(T)$ se puede expresar como

$$\int_0^\infty \int_E^\infty (S(T)-E)p(S(T),\bar{\sigma}/S(t)=s,\sigma(t)=\sigma)dS(T)d\bar{\sigma}$$

$$= \int_0^\infty I(S(t)=s,\bar{\sigma})\ p(\bar{\sigma}/S(t)=s,\sigma(t))d\bar{\sigma} \qquad (3.15)$$

con $I(S(t)=s,\bar{\sigma}) = \int_E^\infty (S(T) - E)p(S(T)/S(t)=s,\bar{\sigma})dS(T)$ resultando esta última expresión, gracias a la observación anterior acerca de la distribución de S(t), la misma que se calculó para evaluar una opción de compra en la idea original de Black y Scholes con varianza $\bar{\sigma}^2$, por tanto, 3.15 queda

$$\int_0^{\infty}[S(t)N(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)]\ p(\bar{\sigma}/S(t)=s)d\bar{\sigma}$$

$$\text{con } d_1 = \frac{\log\frac{S}{E} + (r + \frac{\bar{\sigma}}{2})(T-t)}{\sqrt{\bar{\sigma}^2(T - t)}} \quad \text{y } d_2 = d_1 - \sqrt{\bar{\sigma}^2(T - t)}$$

Hasta ahora no se ha conseguido determinar una expresión analítica de la distribución de $\bar{\sigma}/S(t)$, pero si es posible determinar cuantos de sus momentos queramos, lo que permite tras expandir $I(s,\bar{\sigma})$ en serie de Taylor alrededor de su esperanza aproximar, con el grado de certeza deseado, el resultado final.

3.4.2 El activo subyacente es un bono

En el modelo de valoración de opciones de Black y Scholes con el fin de obtener una solución exacta del problema se asumen algunas hipótesis de carácter bastante restrictivo. Entre ellas destacan la consideración como constantes de parámetros que en buena lógica deben variar con el tiempo y además de forma aleatoria. cabe destacar la volatilidad del activo subyacente σ y la tasa de interés. Un intento de extrapolar las condiciones del modelo para valorar opciones sobre otro tipo de activos, podría suponer un choque frontal entre las restricciones que se imponen en el entorno de Black y Scholes y las características inherentes al propio activo.

En el caso que se está considerando el valor de un bono depende esencialmente de la tasa de interés y del tiempo hasta su madurez. Dado que el tiempo de vida de los bonos puede llegar a ser muy largo, no tiene demasiado sentido considerar el valor del mismo dependiente de una tasa de interés determinista y constante en el tiempo.

Se considerará que el valor de un bono $S(r,\tau)$ es función de la tasa de interés $r(t)$, y de τ=T-t el tiempo que falta hasta su vencimiento.

Para obtener una fórmula de valoración de un bono se asumen las siguientes hipótesis sobre el mercado:

- Los precios de los activos con que se trabaja siguen una distribución dada por un movimiento browniano geométrico de parámetros a_1,σ_1 constantes a lo largo de la vida del activo.

- Se asume que la tasa de interés sigue un proceso de Ornstein Uhlenbeck de la forma $$dr = a(r_0-r)dt + \sigma dB(t)$$
donde r_0 se interpreta como la tasa media observada y el parámetro "a" es la velocidad de cambio de sentido de la tendencia.

- Los individuos tratan de maximizar su utilidad esperada a traves de una función de utilidad de la forma $u(d,t)=f(t)\log(d)$, donde d representa las reglas óptimas de consumo.

A partir de estas hipótesis Dothan, Merton y otros obtuvierón una relación que asegura que en un mercado como el descrito la tasa de retorno esperada de los bonos y opciones sobre bonos con que se comercia ($\hat{\alpha}$), debe ser una función lineal de la forma

$$\frac{\hat{\alpha}-r}{\hat{\sigma}} = -\lambda \tag{3.16}$$

donde $\hat{\sigma}$ es la volatilidad de la tasa de retorno del activo y λ es una constante que representa el coste del riesgo en ese mercado, que se supone igual para todos los contratos sobre bonos que se negocian.

Aplicando el lema de Itô a $S(r,\tau)$ se tiene que

$$dS= (\frac{1}{2}\sigma^2 S_{rr} + a(r_0-r)S_r - S_\tau)dt + \sigma S_r dB(t)$$

de donde

$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma S_r}{S} \tag{3.17}$$

Se supone además que el bono paga dividendos con una tasa continua dada por $h(r,t)$. Entonces, puesto que, en un mercado en equilibrio el retorno obtenido por el bono en un instante de tiempo debe ser igual que su tendencia infinitesimal, se debe verificar

$$(\hat{\alpha}\ S - h)dt = (\frac{1}{2}\sigma^2 S_{rr} + a(r_0 - r)S_r - S_\tau)dt \qquad (3.18)$$

de 3.16 y de 3.17 se tiene que $\hat{\alpha}\ S = rS - \lambda\sigma S_r$, sustituyendo en 3.18 se obtiene la ecuación que resuelve el problema

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S_{rr} + [a(r_0 - r)S_r + \lambda\sigma] - rS - S_\tau + h = 0 \qquad (3.19).$$

Si suponemos que el precio de todos los contratos derivados de los bonos, U(r,t), sólo depende del tiempo y en última instancia de de la tasa de interés, razonamientos idénticos a los anteriores conducen a que U(r,t) verifica la ecuación 3.19 con la condición U(r,T) = g(r), donde g(r(T)) es el pago final que realiza el contrato U, que evidentemente será distinto para cada modalidad que se considere. Además dependiendo de la naturaleza de los mismos pueden aparecer otras condiciones iniciales o de contorno

En los siguientes resultados se obtiene una expresión para valorar un bono y una solución general de la ecuación 3.19. Solución que se podrá determinar en función del precio de los bonos.

VALOR DE UN BONO

Sea S(r,t,s) el precio en el instante t de un bono que vence en T=s cuando r(t)=r y que no produce rendimiento anticipado. Se obtiene como la solución de 3.19 con g(r)=1 para estandarizar.

Proposición 3.1

La solución del problema

$$\frac{1}{2}\sigma^2 U_{rr} + [a(r_0 - r) + \lambda\sigma]U_r - rU + U_t + h = 0 \quad ^{5} \qquad (3.20)$$

$$\text{con } U(r,T) = g(r)$$

es

[5] Nótese que $U_t = -U_\tau \quad \tau = s - t$

$$U(r,t) = S(r,t,T)\ E[g(R(r,t,s))] + \int_t^T S(r,t,s)\ E[h(R(r,t,s),s)]\ ds \qquad (3.21)$$

con R(r,t,s) *una variable aleatoria normalmente distribuida de media*

$$f(r,t,s) = \frac{-\frac{d}{ds}S(r,t,s)}{S(r,t,s)}$$, *y varianza*

$$v^2(t,s) = Var(r(s)/r(t)).$$

- Observando que el proceso con el que tratamos es un caso particular de las ecuaciones diferenciales estocásticas lineales, es posible aplicar la fórmula general de resolución de tales ecuaciones, obteniéndose

$$r(T) = r\ e^{-a(T-t)} + r_0(1-e^{-a(T-t)}) + \sigma e^{-a(T-t)} \int_t^T e^{a(s-t)}\ dB(s) \qquad (3.22)$$

se trata por tanto de un proceso gaussiano con media

$$E[r(T)/r(t)=r] = r\ e^{-a(T-t)} + r_0(1-e^{-a(T-t)}) = m(r,t,T)$$

y varianza

$$V(r(T)/r(t)=r) = \frac{\sigma^2}{2a}(1-e^{-2a(T-t)}) -.$$

Además

$$\boxed{S(r,t,s) = \exp\ \{\ \frac{1}{2}\ k^2(t,s) - n(r,t,s)\ \}} \qquad s>t \qquad (3.23)$$

$$f(r,t,s) = m(r,t,s) - q(t,s)$$

con

$$k^2(t,s) = \frac{\sigma^2(4e^{-a\tau} - e^{-2a\tau} + 2a\tau - 3)}{2a^3}$$

$$n(r,t,s) = \tau(r_0 + \lambda\frac{\sigma}{a}) + \frac{(r - r_0 - \lambda\frac{\sigma}{a})(1 - e^{-a\tau})}{a}$$

$$m(r,t,s) = re^{-a\tau} + (r_0 + \lambda\frac{\sigma}{a})(1 - e^{-a\tau})$$

$$q(t,s) = \frac{\sigma^2 (1 - e^{-a\tau})}{2a^2}$$

Demostración

Se considera el proceso r(t) determinado por

$$dr = (ar_0 + \lambda\sigma - ar)dt + \sigma dB(t)$$

Usando 2.7 para $Lu = \frac{1}{2}\sigma^2 u_{rr} + (ar_0+\lambda\sigma-ar)u_r - ru + h$

$c(r,t) = -r, \quad \phi(X(T)) = g(r(T)), \quad f(x,t) = -h(r,t)$

se tiene

$$U(r,t) = E[Z(t,T)g(r(T)) - \int_t^T h(r(s),s)Z(t,s)ds \;/r(t)=r\;] \tag{3.24}$$

$Z(t,s) = \exp\{-Y(t,s)\}$

$Y(t,s) = \int_t^s r(u)du$

para calcular la esperanza es necesario conocer la distribución conjunta de las variables $r^*(t)$ e $Y(t,s)$. Del teorema 2.6.2 se sabe que si la condición inicial X(0) de una ecuación diferencial estocástica lineal se distribuye según una normal, o es constante, la solución de la ecuación es un proceso gaussiano. De tal manera que log(r(t)) y log(Y(t,s)) se distribuyen conjuntamente como una normal bivariante cuyos parámetros habrá que determinar.

Conocemos la media y la varianza de r(t)/r(s), además r(t) e Y(t,s) se pueden tratar conjuntamente sin más que considerar la ecuación

$$d\begin{pmatrix} r(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ar_0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}ds + \begin{pmatrix} \sigma \\ 0 \end{pmatrix}dB(s) \qquad \text{con } \begin{pmatrix} r(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuya matriz fundamental es

$$\Phi(T) = \begin{pmatrix} e^{-a(T-t)} & 0 \\ \dfrac{1-e^{-a(T-t)}}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

. De la resolución general de ecuaciones lineales tenemos que

$$\begin{pmatrix} r(T) \\ Y(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\, e^{-a(T-t)} + r_0(1-e^{-a(T-t)}) \\ \dfrac{r}{a}(1-e^{-a(T-t)}) + \dfrac{r_0}{a}e^{a(T-t)}(1-e^{-a(T-t)})^2 + r_0(T-t) - \dfrac{r_0}{a}(e^{a(T-t)}-1) \end{pmatrix} +$$

$$+ \quad \Phi(T) \int_t^T \begin{pmatrix} \sigma e^{a(s-t)} \\ \dfrac{\sigma}{a}(1-e^{a(s-t)}) \end{pmatrix} dB(s).$$

Por las propiedades de los momentos de la integral estocástica se tiene que

$$E[Y(t,T)/r(t)=r] = \left(\frac{r}{a} - \frac{r_0}{a}\right)(1-e^{-a(T-t)}) + r_0(T-t) = n(r,t,T) \ ,$$

del mismo modo

$$Var[Y(t,T)/r(t)=r] = k^2(t,T).$$

Finalmente usando el resultado dado por la ED20 se obtiene la expresión de la matriz de varianzas y covarianzas entre $\begin{pmatrix} r(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} r(s) \\ Y(s) \end{pmatrix}$, que para T = s = t permite obtener

$$cov(r(T),Y(t,T)) = q(t,T)$$

Ahora por el resultado 2.12 sabemos que

$$U(r,t) = E_{r,t}[e^{-Y(t,T)}g(r(T) + \int_t^T h(r(s)e^{-Y(t,S)}ds]$$

Llamando $G_Y(r,t)$ a la función generatriz de una variable con distribución normal con los parámetros descritos anteriormente en t = -1 se tiene

$$G_Y(r,t) = e^{K^2/2 - n(r,t,T)} = S(r,t,T)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Y(t,T)} P(Y(T),r(T)/r(t)=r)dY(T) = G_Y(r,t)P(r(T)/Y(t),r(t))$$

siendo el último término la función de densidad de una variable normal con media m-q = f y varianza v^2. El resultado queda ahora probado sin mas que permutar el orden de integración en 3.24 y sustituir las dos últimas relaciones observadas. Si se aplica a h≡0, g≡1 y T=s se obtiene el valor de S conforme a lo propuesto.

VALOR DE UNA OPCIÓN DE COMPRA SOBRE UN BONO

Como aplicación inmediata se obtiene una fórmula de valoración de una opción de compra sobre un bono.

Supóngase que la fecha de ejercicio de la opción es anterior al vencimiento del bono -En caso contrario habría un intervalo de tiempo en el cual el precio de la opción sería conocido y constante, y sin embargo no se podría ejercer, naturalmente en el caso de opciones europeas-, se supone también que no se pagan dividendos, h=0, y que el precio pactado de ejercício es E.

Sea $S^*(t,s)$ el valor en t de un bono que vence en s>t, dependiente del valor aleatorio que pueda tomar r(t).

Si U(r,t) es el precio de una opción de compra en las condiciones descritas cuya fecha de ejercicio es T, se tiene sin más que aplicar 3.21 que

$$U(r,t) = S(r,t,T)E[\max(0,S^*-E)]. \tag{3.25}$$

Además de 3.23 se tiene que $\log S = \frac{1}{2}k^2(t,s) - n(r,t,s)$ puesto que se trata de una función lineal en r(t), S^* se distribuye lognormal.

Usando de nuevo 3.21 para determinar el precio de un bono, se toma

$$g(r)=S^*(r,T), \text{ y resulta } S(r,t,s) = S(r,t,T)\ E[S^*(r,T)] \tag{3.26}$$

Por otra parte $\mathrm{Var}(n(r,t,s)) = (1-e^{-a(T-t)})^2 \dfrac{\mathrm{Var}(r)}{a^2} =$

$$= (1-e^{-a(T-t)})^2 \frac{v^2(t,T)}{a^2} = \mathrm{Var}(\log S^*) = \sigma^2_{S^*}\ . \tag{3.27}$$

De 3.26 y 3.27 queda perfectamente determinada la distribución de S^*, tras resolver 3.25 el valor de la opción queda

$$\boxed{C(r,t) = S(r,t,S)N(h) - E\ S(r,t,T)\ N(h - \sigma_{s^*})}$$

$$\text{con } h = \frac{\log\left(\dfrac{S(r,t,s)}{S(r,t,T)E}\right)}{\sigma_{s^*}} + \frac{\sigma_{s^*}}{2}\ .$$

La fórmula así obtenida es es completamente análoga a la calculada por Black y Scholes, el punto de partida es una variable lognormal, S(r,t,T) hace el papel de $e^{-r(T-t)}$, y en cada caso se usan las correspondientes varianzas que son obviamente distintas.

Este mismo resultado permitiría determinar el valor de opciones más complejas, en las que el activo subyacente fuera una cartera formada por distintos tipos de bonos.

VALOR DE UN FUTURO SOBRE UN BONO

En el mercado de futuros se observa una diferencia fundamental respecto de otro tipo de contratos, y es el hecho de que para negociar con futuros no es necesario una aportación inicial, situación que modifica la relación 3.16 transformandola en $\hat{\alpha} = \lambda\hat{\sigma}$, esta consideración junto con que no se repartan dividendos conduce de idéntica forma que en el caso anterior a la ecuación que debe verificar el precio de un futuro sobre un bono, ésta coincide con la anterior salvo que los términos h y rU desaparecen de la expresión transformándose en

$$\frac{1}{2}\sigma^2 U_{rr} + [a(r_0-r) + \lambda\sigma]U_r + U_t = 0$$

sujeto a $\qquad U(r,T) = S(r,T_F,T)$ [6]

donde T_F es la fecha de vencimiento del contrato de futuros $T_F < T$.

Aplicando 2.12 se tiene que la solución es

$$U(r,t) = E[S(r,T_F,T)/r(t)=r] \tag{3.28}$$

Usando la relación 3.23, la expresión anterior se transforma en

$$U(r,t) = [\exp(\frac{1}{2}k^2 - (T - T_F)(r_0 + \frac{\lambda\sigma}{a}) + \frac{(r_0 + \frac{\lambda\sigma}{a})}{a} (1 - e^{-a(T-T_F)})].$$
$$E[\exp(\frac{r}{a}(1 - e^{-a(T-T_F)})/r(t)=r] \tag{3.29}$$

se debe por tanto calcular la densidad de transición de r(t) a r(T), de la relación 3.22, se tiene que resolviendo la integral

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi V(r(T))}} \exp\{\frac{s}{a}(1 - e^{-a(T-T_F)}) - \frac{1}{2V(r(T))} (s - m(t))^2 \}ds$$

6

Condición algo diferente de la que se imponía cuando se consideraba una tasa de interés determinista. La relación expresa que el precio de un futuro a su vencimiento debe coincidir con el precio de los bonos en dicho instante.

y efectuando el producto que se indica en 3.29 se obtiene la solución, que tras agruparla convenientemente resulta ser

$$\boxed{U(r,t) = e^{-X(t)r - Y(t)}}$$

$$X(t) = F(t,T) - F(t,T_F)$$

$$F(t,s) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(t-s)})$$

$$Y(t) = (r_0 + \frac{\lambda\sigma}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2})(T - T_F - X(t)) - \frac{\sigma^2}{2a^2}(X(t) - \frac{a}{2}X(t)^2 - F(T_F,T))$$

VALOR DE UNA OPCIÓN DE COMPRA SOBRE UN FUTURO (SOBRE UN BONO)

la ecuación 3.19 proporciona también el valor de una opción de compra cuando el activo subyacente es un futuro sobre un bono. En la valoración de este activo intervienen tres fechas clave, T vencimiento del bono, T_F vencimiento del futuro, y T_C vencimiento de la opción. Para que la situación mantenga su sentido debe darse $T > T_F > T_C$. La condición de contorno que se impone es $U(r,T_c) = \max\{\phi(r,T_c) - E,\ 0\}$, para ϕ el valor del futuro en el instante de vencimiento de la opción.

Aplicando de nuevo la proposición 3.1 se llega a

$$\boxed{U(r,T_C) = H(r,t)N(h) - E\ S(r,t,T_C)\ N(h - \sigma_p)}$$

$$\text{con } h = \frac{\log\left(\dfrac{H(r,t)}{S(r,t,T_C)E}\right)}{\sigma_p} + \frac{\sigma_p}{2}$$

$$\sigma_P = X(T_C)\sqrt{V(r(T))} = \frac{1}{a}\left(e^{-a(t_C-T_F)} - e^{-a(t_c-T)}\right)\sqrt{\frac{\sigma^2}{2a}(1-e^{-2a(T-t)})}$$

$$H(r,t) = S(r,T,T_C)\phi(r,t)\exp\{\frac{\sigma^2}{2a^2}X(T_C)\ (1 - e^{-a(t-T_C)})^2\}$$

ELASTICIDAD DE LA VARIANZA CONSTANTE

Una de las críticas más sólidas que se hace a este modelo de valoración es la inconveniencia del proceso que sigue la tasa de interés, si bien la media *elástica* responde a los objetivos de *impedir* alejamientos bruscos de la tasa observada dependiendo del valor que tome el parámetro a, no es menos cierto que también los impide en un largo periodo de tiempo, lo que resulta inconsistente si se tiene en cuenta que con activos que se negocian a largo plazo la tasa de interés puede evolucionar hasta alcanzar puntos muy alejados de los originales.

Por otra parte si se estudia el comportamiento del proceso en el punto $r=0$, se observa que éste es un punto alcanzable[7] y por tanto, con probabilidad positiva la tasa de interés podría tomar valores negativos. Es posible conseguir que esta probabilidad sea tan pequeña como se quiera en un margen de tiempo prefijado, pero ello a costa de mantener el proceso *cerca* de su origen.

Se encuentran enfrentados dos aspectos importantes, por una parte la adaptabilidad del proceso al fenómeno que describe, y por otra las posibles incongruencias debidas a su formulación matemática. Se busca otro modelo cuyas características sean, *a priori*, más adecuadas para modelizar la evolución a largo plazo de r(t). Se propone escoger entre

$$dr = a(r_0-r)dt + \sigma r^m dB(t)$$

para algún valor de m que lo haga adecuado a los objetivos buscados.

El mismo proceso que llevó a la determinación de la ecuación 3.19 conduce a

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r^{2m} U_{rr} + (a(r_0-r)+\lambda\sigma r^m)U_r + U_t - Ur * h = 0 \tag{3.30}$$

$$\text{con } U(r,T) = g(r)$$

[7] El comportamiento del proceso en se estudia a partir de las cantidades L_1 y L_2 definidas en la sección 2.4.

para determinar contratos que se derivan de los bonos, excepto cuando se trata de futuros que se valorarán como la solución de

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r^{2m} U_{rr} + (a(r_0-r)+\lambda\sigma r^m)U_r + U_t = 0 \tag{3.31}$$

$$\text{con } U(r,T) = S(r,T_F,T).$$

Si se supone h=0, aplicando el resultado 2.12, la solución de 3.30 es

$$U(r,t) = E[g(r(T))\exp(\int_t^T r(s)ds)/r(t)=r]$$

Para encontrar la esperanza es necesario determinar las probabilidades de transición. De la aplicación de los métodos usuales de resolución de ecuaciones en derivadas parciales -separación de variables, y expansión en serie de potencias- se concluye que sólo es posible encontrar una solución no degenerada para valores de m de la forma $m = \frac{1+z}{2}$, $m = \frac{1-z}{2}$. Como anteriormente se había mencionado, el interés del análisis se centraba en los casos en que $m<1$, lo que conduce a la consideración del caso $m = \frac{1}{2}$.

En este caso la densidad de transición de r(T) resulta ser

$$p(r(T)/r(t)=r) = Ke^{-(x+w)}\left(\frac{w}{x}\right)^{q/2} I_q(2\sqrt{xw}) .$$

Aplicando los resultados anteriores se obtiene el precio de un bono como

$$\boxed{S(r,t) = A(t,T)e^{-rB(t,T)}}$$

con

$$A(t,T) = \left(\frac{1}{1+C(t,T)}\right)^{1+q} \qquad C(t,T) = \frac{a+\lambda+\gamma}{2\gamma}(e^{\gamma(T-t)}-1)$$

para λ el precio del riesgo, $\gamma = \sqrt{(a+\lambda)^2+2\sigma^2}$, y $q = \frac{2ar}{\sigma^2} - 1$,

$$B(t,T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{2\gamma(e^{\gamma(T-t)}-1)(a+\lambda+\gamma)} .$$

A partir de él, y según la relación 3.28, se tiene que el precio de un futuro es

$$\boxed{F(r,t) = A_F(t,T_F)e^{-rB_F(t,T_F)}}$$

con

$$A_F(t,T_F) = A(t,T_F)\left(\frac{1}{1+\frac{1}{\alpha}B(t,T_F)(1-e^{-(a+\lambda)(T_F-t)}}\right)^{1+q}$$

$$\alpha = \frac{2(a+\lambda)}{\sigma^2}$$

$$B_F(t,T_F) = B(t,T_F)\left(\frac{e^{-(a+\lambda)(T_F-t)}}{1+\frac{1}{\alpha}B(t,T_F)(1-e^{-(a+\lambda)(T_F-t)}}\right)^{1+q} .$$

Resultando finalmente el valor de una opción de compra sobre un futuro sobre un bono como

$$\boxed{U(r,t) = D(t,T_C)F(r,t)[1-Q(d_1,d_2,d_3)] - S(r,t)E[1-Q(e_1,e_2,e_3)]}$$

con

$$D(t,T_C) = A(t,T_C)\ e^{-rB(t,T_C)}$$

$$A(t,T_C) = \left(\frac{2\gamma e^{1/2(a+\lambda+\gamma)(T_C-t)}}{\sigma^2(e^{\gamma(T_C-t)}-1)[\frac{2\gamma}{\sigma^2(e^{\gamma(T_C-t)}-1)} + \frac{a+\lambda+\gamma}{\sigma^2} + B_F(t,T_C)}\right)^{1+q}$$

$$B(t,T_C) = \frac{\dfrac{2}{\sigma^2} - \alpha B_F(t,T_C) - B_F^2(t,T_C)}{\sigma^2(e^{\gamma(T_C-t)}-1)\left[\dfrac{2\gamma}{\sigma^2(e^{\gamma(T_C-t)}-1)} + \dfrac{a+\lambda+\gamma}{\sigma^2} + B_F(t,T_C)\right.}$$

$$d_1 = \frac{2}{B_F(t,T_C)} \log\left(\frac{A_F(t,T_C)}{E}\right) \left[\frac{2\gamma}{\sigma^2(e^{\gamma(T_C-t)}-1)} + \frac{a+\lambda+\gamma}{\sigma^2} + B_F(t,T_C)\right]$$

$$d_2 = 2q + 1$$

$$d_3 = \frac{2re^{\gamma(T_C-t)}\left[\dfrac{2\gamma}{\sigma^2(e^{\gamma(T_C-t)}-1)}\right]^2}{\dfrac{2\gamma}{\sigma^2(e^{\gamma(T_C-t)}-1)} + \dfrac{a+\lambda+\gamma}{\sigma^2} + B_F(t,T_C)}$$

$$e_1 = d_1 - 2\log\left(\frac{A_F(t,T_C)}{E}\right)$$

$$e_2 = d_2$$

$$e_3 = d_3 \frac{\dfrac{2\gamma}{\sigma^2(e^{\gamma(T_C-t)}-1)} + \dfrac{a+\lambda+\gamma}{\sigma^2} + B_F(t,T_C)}{\dfrac{2\gamma}{\sigma^2(e^{\gamma(T_C-t)}-1)} + \dfrac{a+\lambda+\gamma}{\sigma^2}}$$

3.4.3. Opciones sobre divisas

En un contrato de opciones de compra sobre divisas se adquiere la posibilidad de comprar una determinada cantidad de **moneda extranjera**, por un precio fijado en la moneda del propio país (E), **moneda nacional**. En este tipo de comercio el valor futuro del activo subyacente con el que se comercia, depende del precio de los activos sin riesgo negociados en cada país, de hecho, se trata de una función de la diferencia entre los tipos de interés nacional y extranjero. Por esta razón los supuestos del modelo de valoración de opciones sobre acciones no son apropiados para un contrato de estas características.

Se consideran a continuación algunas de las relaciones básicas entre los bonos, las opciones, los tipos de interés y la tasa de cambio entre los dos países. Sean

$B(t)$ Valor (en moneda nacional) de un bono nacional en el instante t

$B_e(t)$ Valor (en moneda extranjera) de un bono extranjero en el instante t

r La tasa nacional de interés sin riesgo

r_e La tasa extranjera de interés sin riesgo

$S(t)$ La tasa de cambio en el instante t

una unidad moneda extranjera = $S(t)$ unidades de moneda nacional

$C(t,S)$, $P(t,S)$ los valores de una opción de compra y de venta respectivamente. El precio de ejercicio E en este caso está referido al cambio unidad a unidad.

- $C(S,t) \geq S(t)B_e(t) - E\,B(t)$

Considérense una cartera formada por la compra de una Call y E bonos nacionales, y una segunda cartera compuesta por una compra de bonos extranjeros por valor de $B_e(t)S(t)$ en moneda nacional. Teniendo en cuenta todas las posibles posiciones de la tasa de cambio se ve que el valor de la primera cartera es siempre superior al de la segunda [8]

- Relación de paridad Put-Call para opciones sobre divisas

$$P(S,t) = C(S,t) - S(t)B_e(t) + EB(t)$$

Se prueba comprobando que las siguientes dos carteras son equivalentes en el instante de vencimiento. Una primera compuesta por la compra de una Put, al precio en moneda nacional de $P(S,t)$, sobre una unidad monetaria extranjera al precio de ejercicio E. Y una segunda construida tras las siguientes

[8] Nótese que $B(T) = 1$ y $B_e(T) = 1$ cada uno en su respectiva moneda.

operaciones, venta de un bono extranjero por valor en moneda nacional de $S(t)B_e(t)$, compra de E bonos nacionales, compra de una Call sobre una unidad monetaria extranjera.

- Las relaciones anteriores suelen expresarse en términos del valor nacional futuro de la divisa entregada en la fecha de ejercicio de la opción $F(t) = S(t)\,\dfrac{B_e(T)}{B(T)}$. transformándose en

$C(S,t) \geq B(t)(F(t)-E)$

$P(S,t) = C(S,t) + B(t)(E - F(t))$.

VALOR DE UNA OPCIÓN SOBRE DIVISAS

Se asumen las restricciones usuales sobre el funcionamiento del mercado ya mencionadas en la sección 3.4.2.1, racional, sin costes de transacción ..etc. Además el precio de las opciones depende únicamente del tiempo hasta su madurez., y del valor de la tasa de cambio, comportándose ésta según un movimiento browniano geométrico de parámetros μ y σ.

$$dS = \mu S + \sigma S dB(s)$$

La relación 3.16 relacionaba el **exceso de retorno**, y el precio del riesgo, que se supone constante e igual para todos los activos que se negocian. En este caso $\hat{\alpha}_i = r_e + \mu$, $\hat{\sigma}_i = \sigma$. Tras usar la transformación de Itô podemos escribir

$$C_t - S(r- r_e)C_S - \frac{\sigma^2}{2}S^2 C_{SS} + rC = 0 \qquad \text{con la restricción}$$

$C(T,S(T)) = \max(S(T) - E, 0)$ ya que obviamente sólo será interesante ejercer una opción de compra si el precio en dinero nacional de una moneda extranjera es superior al precio pactado (E) para dicha moneda.

La solución de la ecuación es

$$C(S,t) = e^{-r(T-t)}E[\max(S(T) - E,\ 0)/S(t) = S].$$

ecuación que ya se resolvió, con los cambios pertinentes, en el modelo original de Black y Scholes, resultando en este caso

$$\boxed{C(S,t) = e^{-r_e(T-t)} S\, N(d_1) - e^{-r(T-t)} E\, N(d_2)}$$

$$\text{para } d_1 = \frac{\log(\frac{S}{E}) + (r - r_e - \frac{\sigma^2}{2})(T - t) + \sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Como es habitual el valor de una opción de venta se obtiene directamente de las relaciones de paridad Put Call.

TASA DE INTERES ALEATORIA

Como ya se ha comentado en otras ocasiones la consideración de la tasa de interés estocástica modeliza mejor *a priori* algunas situaciones de negociación como pueden ser contratos a largo plazo.

La influencia de la variabilidad de las tasas de interés queda reflejada por el comportamiento de los bonos. Suponemos que éste viene dado por

$$dB = B\, \mu_B\, dt + B\, \sigma_B dZ_2$$

$$dB_e = B_e\, \mu_e\, dt + B_e\, \sigma_e dZ_3$$

donde los coeficientes son funciones del valor del bono y del tiempo. Por razones obvias se cambia la notación usual del proceso de Wiener designándolo por Z_i. La tasa de cambio continúa comportándose como en el caso anterior

$$dS = S\, \mu_S\, dt + S\, \sigma_S\, dZ_1 .$$

La función de correlación de los tres procesos de Wiener será

$$(\rho_{i,j}) = (\rho_{i,j}(t))_{i,j} = 1,2,3.$$

De las relaciones que se han visto entre los distintos activos implicados se infiere que el precio de una opción dependerá del precio de ejercicio, la tasa de cambio, el valor de los bonos y el tiempo. Y aún más se puede suponer a la luz de las mismas relaciones (y por la perspectiva desde la que tomamos la negociación) que la dependencia del valor de los bonos extranjeros y de la tasa de cambio, se da a traves del valor en moneda nacional del bono extranjero, es decir, es una función de $G = S\ B_e$

Por la regla de diferenciación del producto dada por la generalización de 1.8, la tasa de retorno de G se expresa como

$$\frac{dG}{G} = \mu_G\, dt + \sigma_G\, dZ$$

$\mu_G = \mu_S + \mu_e + \rho_{1,3}\, \sigma_S \sigma_e$

$\sigma_G\, dZ = \sigma_S\, dZ_1 + \sigma_e dZ_3$

Se notará por $\rho_{0,2}(t) = \rho_{0,2}$ a la función de correlación entre B y G, y al valor de una opción de compra por $C = C(G,B,t)$.

Considérese a continuación una cartera (P) formada por una Call, b bonos extranjeros con valor nacional bG y e bonos nacionales.

$$P = C + bG + eB$$

Si esta cartera no requiere inversión inicial para su formación P=0 en el momento de su formación, en una situación de equilibrio su valor final debe ser nulo, por tanto dP = 0, aplicando la transformación de Itô

$$dP = dC + bdG + edB = \mu_P dt + \sigma_P dB(t) = 0$$

con $$dC = [C_t + \mu_G G C_G + \mu_B B C_B + \frac{1}{2}\,(\, C_{GG} G^2 \sigma_G^2 + 2GB\rho_{02} C_{GB} + B^2 \sigma_B^2 C_{BB})]\, dt$$

$$C_G G \sigma_G dZ + e\sigma_B B dZ_1$$

de $\sigma_P = 0$ resulta

$$b = -C_G \quad y \quad e = -C_B$$

de $\mu_P = 0$ se tiene

$$C_t + \frac{1}{2}(\, C_{GG}\, G^2\, \sigma_G^2 + 2C_{GB}\sigma_G\sigma_B\rho_{0,2} + C_{BB}\, B^2\, \sigma_B^2) = 0 \qquad (3.32)$$

con las restricciones $C(S(T),1,T) = \max(S(T) - E,\ 0).$[9]
$C(0,B,t) = 0$

La ecuación diferencial estocástica que deben verificar conjuntamente G(t) y B(t) es

$$d\begin{pmatrix} B(s) \\ G(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_B & 0 \\ 0 & \mu_G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B(s) \\ G(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_B dZ_1 & 0 \\ 0 & \sigma_e dZ_3 + \sigma_s dZ_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B(s) \\ G(s) \end{pmatrix}$$

cuya solución dada la condición inicial $\begin{pmatrix} B(t) \\ G(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ G \end{pmatrix}$ es

$$\begin{pmatrix} B(t) \\ G(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\exp\{\mu_B - \frac{\sigma_B^2}{2}(T-t) + \sigma_B dZ_2\} \\ G\exp\{\mu_G - \frac{\sigma_G^2}{2}(T-t) + \sigma_e dZ_3 + \sigma_s dZ_1\} \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

Puesto que la condición inicial es constante la solución es un proceso gaussiano con momentos fácilmente calculables a partir de la expresión anterior.

Por otra parte la solución de la ecuación 3.32 es

$$C(G(t),\ B(t),\ t) = E[\max\{S(T)-E,\ 0\}/G(t)=G, B(T)=B]$$

ahora de 3.33 se tiene que S(T)/G(t),B(t) tiene distribución lognormal de parámetros

$$E[S(T)/G(t),B(t)] = \log\frac{G(t)}{B(t)} + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)$$

$$Var(S(T)/G(t),B(t)) = \sigma\sqrt{T-t}$$

con $\sigma = Var(\log\frac{G(t)}{B(t)}) = \sigma_G + \sigma_B + \sigma_B\sigma_G\rho_{02}$

9

G(T) = S(T) porque se partía de que los bonos tenían igual vencimiento, y por tanto, si $B(T)=1, B_e(T) = 1$.

La solución de la correspondiente integral nos lleva a la fórmula de valoración

$$\boxed{C(T) = S(t)\ B_e(t)N(d_1) - E\ B(t)N(d_2)}$$

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{G}{EB}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

VARIANZA ALEATORIA

En el primer modelo de valoración de opciones sobre divisas -modelo de Black y Scholes modificado- se parte de la lognormalidad de la tasa de cambio, algunos estudio empíricos rechazan esta hipótesis y atribuyen las causas de la inadecuación del modelo al hecho de que la varianza no es constante. Se propone la siguiente alternativa:

la tasa de cambio es lognormal de parámetros μ y σ

$$dS = \mu S\ dt + \sigma S\ dB_1(t)$$

el logaritmo de la desviación típica sigue un proceso de Ornstein Uhlenbeck de la forma

$$d(\log\sigma) = \beta\ (a - \log\sigma)dt + \gamma dB_2(t)$$

y por tanto

$$d\sigma = \sigma[\frac{1}{2}\gamma^2 + \beta\ (a - \log\sigma)]dt + \gamma\sigma dB_2(t)$$

con $dB_1(t)dB_2(t) = \delta dt$. Y tomando constante el resto de los factores involucrados.

En esta situación autores como Hull, White y Scott han probado que no existe un argumento de arbitraje para la creación de una cartera sin riesgo que conduzca á una única ecuación de valoración. Sin embargo se puede utilizar la fórmula general de valoración de activos desarrollada en el contexto del modelo general de una economía en equilibrio por Cox, Ingersoll y Ross, que asume la existencia de un activo cuya ley de probabilidad está regida por la misma ecuación diferencial estocástica que la varianza, es decir, supone que la varianza es un activo negociable. Llevando a la ecuación

$$\frac{1}{2}C_{ss}\sigma^2S^2 + C_{s\sigma}\delta\gamma\sigma^2S + \frac{1}{2}C_{\sigma\sigma}\sigma^2\gamma^2 + C_SS\ (r - r_e) + C_\sigma[\sigma(\frac{1}{2}\gamma^2 + \beta\ (a - \log\sigma)) - \phi_\sigma]$$
$$+ C_t - rC = 0$$

donde ϕ_σ es el coste del riesgo del artículo que se comporta como σ. La solución teniendo en cuenta las condiciones usuales de contorno es

$$C(S,\sigma,t) = E[e^{-r(T-t)}\max\{S(T) - E,\ 0\}/S(t)\sigma(t)]=$$

$$=e^{-r(T-t)}\int_E^\infty (S(T)-E)p(S(T)/S(t)=s,\sigma(t)=\sigma)dS(T)$$

de la observación 3.15 se tiene que la dependencia de la varianza se da a traves de la varianza media $\bar{\sigma} = \frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma(s)ds$. Y por tanto

$$C(S,\sigma,t) = \int_0^\infty I_1(S(t)=s,\bar{\sigma})P(\bar{\sigma}/S(t),\sigma(t))d\bar{\sigma}$$

con $I_1(S(t)=s,\bar{\sigma}) = e^{-r(T-t)}\int_E^\infty (S(T)-E)p(S(T)/S(t),\bar{\sigma})dS(T)$ que resulta ser el valor de una opción de compra que se obtuvo en la sección 3.4.3.1 -modelo de Black y Scholes modificado-, obteniéndose finalmente

$$C(S,\sigma,t) = \int_{\mathbb{R}} [e^{-r_e(T-t)}SN(d_1) - e^{-r(T-t)}EN(d_2)]\ p(\bar{\sigma}/S(T)=s,\sigma(t)=\sigma)$$

siendo d_1 y d_2 los valores obtenidos en la mencionada sección, y teniendo en cuenta que la varianza con la que se ha de trabajar es $\bar{\sigma}$.

Todavía no se ha encontrado una expresión analítica exacta de

$P(\bar{\sigma}/S(T)=s,\sigma(t)=\sigma)$, de hecho lo que se obtienen son aproximaciones al valor de $C(S,\sigma,t)$ obtenidas mediante técnicas de simulación.

3.4.4 Opciones americanas

La mayor parte de las opciones que se negocian en el mercado son de tipo americano. Pese a ello no existen, en un alto porcentaje de los casos fórmulas cerradas de valoración, al contrario de lo que ocurría con las opciones europeas.

Es evidente que la posibilidad de ejercicio anticipado que tienen las opciones americanas tiene un valor positivo, y por tanto, el precio de éstas será superior o cuanto menos igual al de la correspondiente opción europea. El problema que surge en la valoración es que el citado sobreprecio tendrá sentido tan sólo cuando el ejercicio anticipado lo tenga.

La opción posee un valor en si misma puesto que supone un derecho, que se pierde en el momento en que se ejerce. Por otra parte si se decide ejercer la opción es porque se va a obtener un beneficio, de modo tal que si el beneficio obtenido es superior al valor intrinseco de la opción el ejercicio de la misma supone una operación correcta, mientras que en caso contrario perjudicaría nuestros intereses.

Surgen por tanto dos problemas, el de encontrar explícitamente una expresión que evalue una opción americana, y determinar las condiciones que se deben cumplir para que ésta sea ejercida. Se plantea el caso de una opción de venta sobre una acción, que no reparte dividendos, con una tasa de interés constante y conocida, en el entorno general que plantearón Black y Scholes en su modelo original. Se notará por P_a a la opción americana y por P_e a la europea, dejándolo como P cuando no exista duda.

Éste último problema según se ha argumentado se resuelve a partir del primero, ejercer la opción será interesante sólo cuando

$$E - S \geq P(S,t) \tag{3.34}$$

puesto que partimos de la base de que operamos en un mercado racional no puede

ocurrir que se verifique 3.34 en el instante de firma del contrato ya que se ejerceria la opción inmediatamente después de su compra obteniendose un beneficio de E - S(t) - P(S(t),t). De modo que un criterio de ejercicio es, ejercer la opción en el primer instante t tal que el precio de la acción en $S(t) = S_0$ verifique $E - S_0 = P(S_0,t)$. (3.35)
por tanto, la fórmula de valoración sólo es necesaria para $S > S_0$, en otro caso el valor de la opción es E - S.

En cuanto al primer problema se plantearía como,
encontrar P(S,t) *que verifique*

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 P_{ss} + \mu S P_s - rP + P_t = 0 \tag{3.36}$$

sujeto a

- $P_a(S,t) \geq P_e(S,t)$
- $P_a(S,t) \geq \max\{E - S,\ 0\}$
- $\lim\limits_{S\to\infty} P(S,t) = 0$
- $P(S,t) \leq E$ puesto que P(S,t) es no decreciente respecto a t
  $E - S \geq P(S,t)\ (S,t) \leq P(S,T) \leq \max\{E- S,0\} \leq E$

Además se impone la condición adicional de que la solución sea una función continua, ya que una función discontinua permitiria el arbitraje mediante pivoteo en los puntos de discontinuidad.

El problema se ha resuelto en apenas algunos casos límite que se citan a continuación.

RESTRICCION	VALOR DEL PUT
$r = 0$	$P_a = P_e$
$T = t$	$P_a = P_e$
$\sigma^2 = 0$	$P_a = \max\{E-s,0\}$
$E = 0$	$P_a = 0$
$E = \infty$	$P_a = \infty$
$S = 0$	$P_a = E$

RESTRICCION VALOR DEL PUT

$$T = \infty \qquad\qquad P_a = \begin{cases} \dfrac{E}{1+M}\left(\dfrac{S_0}{S(T)}\right)^M & S(T) \geq S_0 \\ E - S & S_0 \geq S(T) \end{cases}$$

donde $M = \dfrac{2r}{\sigma^2}$ y $S_0 = \dfrac{ME}{1+M}$

En otros casos tan sólo ha sido posible obtener aproximaciones, bien mediante algorimos numéricos, bien de otro tipo como a continuación exponemos a modo de ejemplo.

EJEMPLO

Gracias a las relaciones de paridad Put-Call conocemos el valor de una opción de venta europea. Evaluar una opción de venta americana es tanto como valorar el sobreprecio que ésta tiene respecto a su homónima europea. Se trata entonces de encontrar una función e(S,t) que verifique

$$P_a(S,t) = P_e(S,t) + e(S,t)$$

Es claro que ésta función debe verificar 3.36, y ser tal que se cumplan todas las restricciones del problema.

Se propone escoger $e(S,t) = K(t)\ f(S,K(t))$ con $K(t) = 1 - e^{-r(T-t)}$ [10]

3.36 se transforma en

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f_{ss} + \mu S f_s - \frac{rf}{1-e^{-r(T-t)}}\left[\frac{f_K}{f}(1-e^{-r(T-t)}) - 1\right] = 0 \qquad (3.37)$$

cuya solución se aproxima por

$$f(S) = aS^q + b\ S^p$$ [11]

10

Una expresión funcional de este tipo hace cierta la restricción $P_e(S,T) = P_a(S,T)$ siempre que $f(S,0) < \infty$.

11

que es la solución general de la ecuación $\dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 f_{ss} + \mu S f_s - \dfrac{rf}{1-e^{-r(T-t)}} = 0$

con q<0 y p>0 las raices de $q^2+(\frac{2r}{\sigma^2}-1)q+\frac{2r}{\sigma^2(1-e^{-r(T-t)})}=0.$

De la condición $\lim_{S\to\infty} P(S,t)=0$ se deduce que b=0. Para que $P(S,t)\geq \max\{E-S,0\}$, se debe verificar

$$P(S_0,t)+(1-e^{-r(T-t)})aS_0^q = E-S_0 \qquad \text{con } S_0 \text{ definido como en 3.35.}$$

Derivando respecto a S se tiene

$$P_s(S_0,t)+(1-e^{-r(T-t)})\frac{aq}{S_0}S_0^q=-1$$

de las dos expresiones anteriores se obtiene , tras sustituir P_s por su valor - que se obtiene operando en la fórmula de B y S- que S_0 es un punto fijo de la función $g(S)=-q\,\frac{E-P(S)}{N(d_1)-q}$. De donde se podría obtener S_0 por métodos computacionales. Tras ello se deduce que

$$a=-\frac{S_0N(d_1)}{q}\left(\frac{S}{S_0}\right)^q.$$

Puede probarse que este resultado coincide con la fórmula de Merton para $T\to\infty$.

3.4.5 Una generalización de las opciones financieras

Las opciones financieras como instrumentos de cobertura permiten protegerse ante variaciones, bien al alza, bien a la baja, del precio del activo subyacente. Mediante la combinación de distintos contratos financieros se puede acotar de modo más específico las variaciones del valor del activo de las que nos queremos cubrir.

En definitiva, estas estrategias de negociación con opciones, conllevan una toma de decisión entre varias posibilidades, siempre dependiendo del valor que tome el precio del activo subyacente, y un beneficio/pérdida que está ligada a la decisión que se haya adoptado.

Nos proponemos, al hilo de esta idea, generalizar el concepto de opción considerando contratos que cuenten con varias posibilidades de elección. En principio y para mantener la filosofía de los contratos de opciones, se considerarán estas posibilidades mutuamente excluyentes.

Definición

Llamaremos opción de **elección múltiple** a un contrato que permite realizar, no de forma obligatoria, una y sólo una de entre n posibles acciones predeterminadas[12]. Cada una de estas acciones A_i consistirá en la compra (o venta) de un determinado instrumento financiero, con un precio de ejercicio, ya de compra, ya de venta E_i. Si C_i representa el activo asociado a la i-ésima acción, el beneficio obtenido de ejercerla será $C_i - E_i$, si se trata de comprar dicho activo, y $E_i - C_i$, si se trata de venderlo. El ejercicio de cada una de las acciones debe ser anterior a una fecha límite T, pudiendo ser en un instante prefijado T_i, o en un determinado intervalo de tiempo $[T_{i,1},T_{i,2}]$. queda claro que el ejercicio de cualquiera de estas acciones implica el fin del periodo de validez del contrato. Obviamente podría llegarse a la fecha límite sin que hubiera resultado interesante ejecutar ninguna de las acciones, en tal caso no existe obligación alguna de escoger entre las acciones posibles, sino que se puede dejar expirar el contrato sin mayor coste que la pérdida del precio del mismo pagado en el momento de su adquisición.

Los instrumentos implicados pueden estar referidos a uno o varios activos subyacentes, con cualquier tipo de posible relación entre ellos.

Debe imponerse una restricción adicional, y es que no existan acciones redundantes, es decir, que con probabilidad positiva existan valores de los activos subyacentes tales que, cada una de las posibles acciones sea preferida a todas las restantes.

12 Este concepto es susceptible de una inmediata generalización, sin más que permitir $2 \leq k \leq n$ acciones conjuntas.

Notaremos por $C(t,A_1,\ldots,A_n)$ al valor en el instante t de las opciones de elección múltiple sobre n acciones, en la descripción de cada una de las acciones vendrá especificado el precio y fecha de ejercicio, si es de compra o de venta, y en general todos los elementos que tengan influencia en el valor de dicha acción.

Diremos que una opción de elección múltiple es **europea** si existen $t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n \le T$ instantes de tiempo tales que la decisión A_i sólo se puede ejecutar en el instante t_i. Si la mencionada acción no se ejecuta, se perdería el derecho que dicha acción conllevaba, si se ejecuta, el contrato desaparece y con él la posibilidad de ejercer el resto de las acciones permitidas. Se notarán por $C_E(t,A_1,\ldots,A_n)$ prescindiendo del subíndice cuando no sea necesario.

Proposición 3.2 (S. Leguey)

Dada un opción europea de elección múltiple con valor $C_E(t,A_1,\ldots,A_n)$, existe una acción A'_2, y otra opción de elección múltiple con valor $C_1(t,A_1,A'_2)$ tales que $C_E(t,A_1,\ldots,A_n) = C_1(t,A_1,A'_2)$.

Demostración

Basta considerar una acción A'_2 que permita adquirir al precio de ejercicio $E'_2=0$, una opción múltiple europea con valor $C_E(t,A_2,\ldots,A_n)$, y cuya fecha de ejercicio es $T'_2=T_1$. Resulta evidente que la decisión de ejercer o no ejercer la acción A_1 lleva al mismo resultado considerando cualquiera de las dos opciones, por tanto el valor de ambas debe coincidir■

Puesto que no se está restringiendo el tipo de instrumento sobre el que ejercer cada posible acción, es suficiente limitar las opciones europeas de elección múltiple al caso en que hay únicamente dos acciones.

Diremos que una opción de elección múltiple es **americana** si existen $t_{1,1}$, $t_{2,1},\ldots t_{n,1}$ y, $t_{1,2} \le t_{2,2} \le \ldots \le t_{n,2} \le T$ con $t_{i,1} \le t_{i,2}$ i=1...n, tales que la decisión A_i se puede ejecutar en el intervalo $[t_{i,1},t_{i,2}]$. Se notarán por $C_A(t,A_1,\ldots,A_n)$ prescindiendo del subíndice cuando no sea necesario.

Proposición 3.3 (S. Leguey)

Dada un opción **americana** de elección múltiple con valor $C_A(t,A_1,\dots,A_n)$, existe una acción A'_2, y otra opción de elección múltiple con valor $C_1(t,A_1,A'_2)$ tales que $C_A(t,A_1,\dots,A_n) = C_1(t,A_1,A'_2)$.

Demostración

Basta considerar una acción A'_2 que permita adquirir al precio de ejercicio $E'_2=0$, una opción múltiple americana con valor $C_A(t,A_2,\dots,A_n)$, y cuyo periodo de ejercicio es el intervalo $[t,t_{1,1}]$. Puede ocurrir que se decida ejecutar la acción A_1 en un instante $t_{1,1}\leq t\leq t_{1,2}$, en cuyo caso la respuesta es idéntica estando en posesión de cualquiera de las dos acciones. Si se quisiera en ese mismo intervalo ejercer alguna de las otras acciones, bastaría, en el caso en que se poseyera la opción C_1, ejercer A'_2 para inmediatamente ejercer la acción deseada. En caso de no ejercer ninguna acción hasta $t_{1,2}$, se ejecutaría A'_2■

Al igual que lo que ocurría con las opciones europeas, es suficiente considerar situaciones como las enmarcadas por la expresión $C_A(t,A_1,A_2)$. Dentro del tipo de las opciones americanas se pueden englobar las europeas, considerando intervalos unipuntuales, y otras en que las posibles acciones se pueden tomar puntualmente unas, y a lo largo de un intervalo las otras. Por tanto cualquier opción de elección múltiple se puede reducir al caso en que únicamente existen dos acciones.

En lo sucesivo se tratarán opciones europeas con dos posibles elecciones, ambas sobre un mismo activo subyacente, y con idéntica fecha de ejercicio $T_1=T_2=T$.

Diremos que una opción de elección múltiple, en las condiciones del párrafo anterior, es **de compra** si cualquiera que sea la elección, o la secuencia de elecciones, que se tome, el resultado final es una compra del activo subyacente, si por contra el resultado final es siempre una venta de activo, las denominaremos opciones **de venta.**

Planteamiento de la ecuación general de valoración

Supongamos que el activo subyacente considerado es una acción que no reparte dividendos, y situémonos en el entorno que dió lugar a la fórmula original de valoración de Black y Scholes. Formando una cartera libre de riesgo y aplicando el lema de Itô llegamos a que las opciones de elección múltiple deben verificar la ecuación,

$$C_t + C_S rS + \frac{1}{2} S^2\sigma^2 C_{SS} - rC = 0 \tag{3.38}$$

sujeta a alguna de las siguientes restricciones,

$$- \ C(T,S_T) = \max\{0,\ C_1-E_1,\ C_2-E_2\}$$

si ambas acciones permiten comprar el instrumento C_i,

$$- \ C(T,S_T) = \max\{0,\ E_1-C_1,\ C_2-E_2\}$$
$$C(T,S_T) = \max\{0,\ C_1-E_1,\ E_2-C_2\}$$

si una de las acciones permite comprar y la otra vender,

$$- \ C(T,S_T) = \max\{0,\ E_1-C_1,\ E_2-C_2\}$$

si ambas permiten vender sus C_i correspondientes.

Determinaremos a continuación el valor de dos opciones de elección múltiple, en función de las soluciones de dos ecuaciones no lineales, que habría que obtener, en cada caso particular, mediante alguno de los procedimientos algorítmicos habituales.

Sea $C(t,A_1,A_2)$ el precio en el instante T de una opción de elección múltiple europea que vence en T>t. Las acciones que se permiten son:

A_1 - En el instante T se puede comprar una determinada cantidad de acciones (S) al precio E_1.

A_2 - En el instante T se puede comprar una opción europea de compra (clásica), sobre la misma cantidad de acciones que en la acción anterior (A_1) y con precio de ejercicio asociado a dicha opción igual a E_0, pudiendo ejercerse ésta en un instante $T_1>T$. El coste pactado por comprar esta opción es de E_2 unidades monetarias.

Se trata, por tanto , de valorar una opción de compra sobre acciones con dos posibles costes finales; se puede comprar en el tiempo T con coste E_1, o comprar en T_1 con coste E_0+E_2 ,-obviamente podría no ejercerse la opción en el instante T, con un coste añadido nulo, o no ejercerse en T_1 con un coste adicional en este caso de E_2 -. Por supuesto no siempre es necesario llegar a comprar el activo subyacente, ya que, si el precio de compra de la opción (A_2) es inferior al de mercado, podría obtenerse de su venta un beneficio igual a la diferencia de precios abandonando la operación.

Proposición 3.4 (S. Leguey)

Una opción como la planteada es de elección múltiple si y sólo si se verifican las dos siguientes condiciones

I. $E_2 < E_1 N(d_1(E_1)) - E_0 e^{-r(T_1-T)} N(d_2(E_1))$

II. $E_2 < E_1 < E_2 + E_0 e^{-r(T_1-T)}$.

Donde N(x) es la función de distribución de una variable normal de parámetros cero y uno, y $d_1(E_1)$ es valor que toma d_1 en la fórmula de Black y Scholes para $S = E_1$.

Estas condiciones exigen: primero, que el precio que se pague por la opción no exceda el valor teórico de la misma, para el precio del activo en que resulta indiferente ejercer la primera acción o no ejercerla. Y segundo, que el precio pagado por el activo, si éste se adquiere en T, sea inferior al precio, actualizado en el instante T, que se pagaría si se adquiriese el activo en el instante T_1.

Demostración

En el instante T en que se debe ejercer la opción múltiple el valor de la opción sobre el activo será

$$C_2(T,S_T) = S_T N(d_1) - E_0 e^{-r(T_1-T)} N(d_2)$$

con

$$d_1 = \frac{\log(\frac{S_T}{E_0}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T_1-T)}{\sigma\sqrt{T_1-T}}, \qquad d_2 = d_1-\sigma\sqrt{T_1-T}$$

siendo S_T el valor de la acción en T.

De las condiciones finales impuestas en 3.38 se deduce que para que sea posible realizar las dos acciones, deben existir valores de S_T que con probabilidad positiva verifiquen conjuntamente:

$$C_2(T,S_T) > E_2 \tag{3.39}$$

y

$$C_2(T,S_T) - E_2 > S_T - E_1 \tag{3.40}$$

y otros valores que, también con probabilidad positiva, verifiquen

$$S_T > E_1 \tag{3.41}$$

y

$$C_2(T,S_T) - E_2 < S_T - E_1 \tag{3.42}$$

Nótese que si $E_1 < E_2$ 3.40 no se verifica nunca, de donde se tiene que $E_1 > E_2$.

Sea $f(S) = S - C_2(T,S) - E_1 + E_2$

$\lim_{S\to 0} f(S) = E_2 - E_1 < 0,$

$\lim_{S\to\infty} f(S) = E_2 - E_1 + E_0e^{-r(T_1-T)},$

además $f'(S) = 1-N(d_1(S)) > 0 \quad \forall\ S$, por tanto, $f(S)$ es no decreciente y obviamente continua.

Pueden ocurrir:

- $E_1 > E_0e^{-r(T_1-T)} + E_2$, entonces $f(S) < 0\ \forall\ S$, por lo cual siempre sería más conveniente comprar la opción (acción A_2) que el activo (acción A_1), como consecuencia nunca se verificaría 3.42.

- Si por contra $E_1 < E_0 e^{-r(T_1-T)} + E_2$, existirá un único punto S_1 tal que $f(S_1) = 0$, de modo que;

si $S < S_1$ $f(S) < 0$ y resulta más rentable la acción (A_2), por tanto se verifica 3.40,

si $S > S_1$ $f(S) > 0$ y es mejor comprar el activo que la acción, verificándose 3.41.

Por tanto si $S_T > \max\{S_1, E_1\}$, resulta beneficioso, y es la mejor acción posible, comprar el activo.

Ya tenemos una condición para que se cumpla 3.40, necesitamos encontrar alguna para que se tenga 3.39.

Sea $g(S) = C_2(T,S) - E_2$

$\lim_{S\to 0} g(S) = - E_2 < 0$, y $\lim_{S\to\infty} g(S) = \infty$,

además $g'(S) > 0 \quad \forall S$, por tanto, $f(S)$ es no decreciente y, de nuevo, continua. Por tanto existe un único punto S_2 tal que $g(S_2) = 0$, de forma que :

si $S < S_2$ $g(S) < 0$ no es beneficioso tomar la acción (A_2), y no se tiene 3.39

si $S > S_2$ $g(S) > 0$, se verifica 3.39, y si es beneficioso comprar la opción.

Entonces si $S_2 < S_T < S_1$, 3.39 y 3.40 ocurren simultáneamente, determinando A_2 como la mejor acción. Buscamos, pues, alguna condición para que $S_2 < S_1$.

Se tiene que $f(S) = -g(S)$ en $S = E_1$, por otra parte
$f(E_1) = E_2 - E_1 N(d_1(E_1)) + E_0 e^{-r(T_1-T)} N(d_2(E_1))$, pueden ocurrir:

- $f(E_1) = 0$, entonces $E_1 = S_1 = S_2$, y nos encontramos en el punto crítico en que es indiferente ejercer cualquiera de las dos posibilidades, o ninguna de ellas, ya que, tanto el precio de ejercicio de la acción como el de la opción coinciden con su valor de mercado.

- $f(E_1) > 0$, como $g(S_2) = -g(S_2) = 0$ y $-g(S)$ es no creciente, se tiene que $S_1 < E_1 < S_2$.

- $f(E_1) < 0$, razonanado de idéntico modo llegamos a $S_2 < E_1 < S_1$. De donde obtenemos la condición *1* ■

Proposición 3.5 (S. Leguey)

Sea $C(t,S_0,A_1,A_2)$ el valor de una opción de elección múltiple como la que se describe en la proposición anterior, y que verifica *1.* y *11.* Entonces,

$$\boxed{\begin{aligned} C(t,S,A_1,A_2) = {} & e^{-r(T_1-t)}\left[S_0 e^{\mu(T_1-t)}\phi_2 - E_0\phi_1\right] + \\ & e^{-r(T-t)}\left[S_0 e^{\mu(T-t)} N(d_1) - E_1 N(b_1) - E_2\left(N(b_2)-N(b_1)\right)\right] \end{aligned}}$$

con

$$b_1 = \frac{\log(\frac{S_0}{S_1}) + m_1}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad b_2 = \frac{\log(\frac{S_0}{S_2}) + m_1}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_1 = \frac{\log(\frac{S_0}{S_1}) + m_1'}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$m_1 = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) \qquad m_1' = (\mu + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)$$

$$m_2 = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T_1-T) \qquad m_2' = (\mu + \frac{\sigma^2}{2})(T_1-T)$$

$$\phi_1 = P\left(N_2\left[\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2(T-t) & 0 \\ 0 & \sigma^2(T_1-T) \end{pmatrix}\right] \in R \right)$$

$$\phi_2 = P\left(N_2\left[\begin{pmatrix} m_1' \\ m_2' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2(T-t) & 0 \\ 0 & \sigma^2(T_1-T) \end{pmatrix}\right] \in R \right)$$

con $R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \log(\frac{S_2}{S_0}) < x < \log(\frac{S_1}{S_0}),\ \log(\frac{E_0}{S_0}) < x+y < \infty \}$.

Demostración

De la observación 3.38 y el resultado 2.12, se tiene que,

$$C(t,S_0,A_1,A_2) = e^{-r(T-t)}E[\max\{0,\ S_T-E_1,\ C_2(T,S_T)-E_2\}/S(t)=S_0]$$

Usando la proposición anterior,

$$C(t,S_0,A_1,A_2) = e^{-r(T-t)}\left[\int_{S_2}^{S_1}\left(C_2(T,S_T)-E_2\right)P(S_T/S_0)dS_T + \int_{S_1}^{\infty}(S_T-E_1)P(S_T/S_0)dS_T\right]$$

teniendo en cuenta que

$$C_2(T,S_T) = e^{-r(T_1-T)}\int_{E_0}^{\infty}(S_{T_1}-E_0)P(S_{T_1}/S_T)dS_{T_1}$$

se llega al resultado■

Dada la forma en que se define la nueva opción, podría suponerse que el precio de la misma, no es más que una combinación lineal del precio de una opción de compra cuyo activo subyacente es otra opción de compra sobre una acción, y una opción de compra sobre una acción. Sin embargo, existe una diferencia esencial entre las opciones de elección múltiple y las combinaciones de distintas opciones que dan lugar, aparentemente, a las mismas posibilidades, y ésta reside en el carácter mutuamente excluyente de las acciones que se permiten realizar en una opción de elección múltiple. Este hecho, por si mismo, justifica la imposibilidad, observada a posteriori, de estudiar el nuevo tipo de opciones a traves de las combinaciones de otras.

Además, el mismo razonamiento nos permite afirmar que el precio de una opción de elección múltiple $C(t,S_0,A_1,A_2)$ debe ser menor a igual que $C_1(t,A_1) + C_2(t,A_2)$, donde $C_1(t,A_1)$ y $C_2(t,A_2)$ representan opciones que permite desarrollar en T las mismas acciones A_1 y A_2, permitidas por $C(t,S_0,A_1,A_2)$.

Consideramos a continuación el problema de valorar una opción de venta, europea, y de elección múltiple, sobre una acción en las mismas condiciones que la que acabamos de valorar.

Sea $P(t,S_0,A_1,A_2)$ el precio de una opción europea de elección múltiple que permite realizar las siguentes acciones:

- A_1 En el instante T se puede vender una determinada cantidad de acciones (S) al precio de ejercicio E_1.

- A_2 En el instante T se puede comprar una opción europea de venta sobre la misma cantidad de acciones, el precio de ejercicio de la opción que se compra es E_0 y la fecha de ejercicio de la misma $T_1>T$. El coste de comprar esta opción es E_2.

De nuevo se trata de un contrato que permite vender una cantidad de activo en dos instantes distintos del tiempo, y a distintos precios; obteniendo un total de E_1 unidades monetarias en el instante T, o de E_0-E_2 en T_1, siempre en el supuesto en que el activo finalmente se vende. Obviamente no se está teniendo en cuenta en este primer análisis el precio del activo en el mercado, o si se se posee el mismo a la hora de la venta.

Se encontrarán condiciones para que la opción descrita realmente sea de elección múltiple.

Proposición 3.6 (S. Leguey)

Una opción como la que se describe es realmente de elección múltiple si y sólamente si verifica las dos siguientes condiciones:

I. $E_1 > E_0e^{-r(T_1-T)} - E_2 > 0$

II. $E_0e^{-r(T_1-T)}[1-N(d_2(E_1))] - E_2 > E_1[1-N(d_1(E_1))]$.

La primera condición compara el montante que se recibiría, actualizado en el instante T, con las dos posibles actuaciones, exigiendo que de la venta de la acción se obtenga un total superior. La segunda alude a esta misma circunstancia, pero en sentido contrario, y ponderando con unos coeficientes referidos a la probabilidad de las distintas actuaciones.

Demostración

El valor de la opción de venta que se podría adquirir en el instante T se determina usando la paridad entre opciones de compra europeas y opciones de venta como,

$$P(T,S_T) = C(T,S_T) - S_T + E_0e^{-r(T_1-T)}$$

Usando 3.38, se tiene que debemos encontrar valores del activo que con probabilidad positiva verifiquen,

$S_T < E_1$ 3.43 junto con $E_1 - S_T < P(T,S_T) - E_2$ 3.44, en cuyo caso se realizaría la primera acción vendiendo activo en T, y,

$P(T,S_T) > E_2$ 3.45 junto con $E_1 - S_T > P(T,S_T) - E_2$ 3.46.

De la paridad entre opciones de compra (clásicas) y opciones de venta se tiene que 3.44 y 3.46 se transforman en

$E_1 + E_2 > C(T,S_T) + E_0e^{-r(T_1-T)}$ y

$E_1 + E_2 < C(T,S_T) + E_0e^{-r(T_1-T)}$ respectivamente.

Sea $f_1(S) = C(T,S_T) + E_0e^{-r(T_1-T)} - E_1 - E_2$

$\lim_{S\to 0} f_1(S) = E_0e^{-r(T_1-T)} - E_1 - E_2$, y $\lim_{S\to\infty} f_1(S) = \infty$

además $f'(S) = N(d_1(S)) > 0 \quad \forall$ S, por tanto, f(S) es no decreciente y obviamente continua. Puede suceder:

- $E_1 > E_0e^{-r(T_1-T)} - E_2$, $f_1(0) < 0$, entonces existe un único punto S_1 tal que $f_1(S_1) = 0$, de modo que,

$S_T < S_1$ se verifica 3.44, y si

$S_T > S_1$ se verifica 3.46.

- Si por contra, $E_1 < E_0e^{-r(T_1-T)} - E_2$, $f_1(S) > 0 \ \forall$ S, y 3.44 nunca podría ocurrir, resultando que la venta del activo es siempre menos rentable que la adquisición de la opción.

Por tanto, si $S_T < \min\{E_1,S_1\}$ se tiene que vender activo es la acción más beneficiosa.

Para analizar la segunda acción sea

$g_1(S) = P(T,S_T) - E_2 = C(T,S_T) - S_T + E_0e^{-r(T_1-T)} - E_2$

$\lim_{S\to 0} g_1(S) = E_0e^{-r(T_1-T)} - E_2$, y $\lim_{S\to\infty} g_1(S) = -E_2 < 0$

además $g_1'(S) = N(d_1(S))-1 < 0 \quad \forall$ S, por tanto, $g_1(S)$ es no creciente y continua. Pueden ocurrir:

- $E_0e^{-r(T_1-T)} - E_2 > 0$,entonces $g_1(S) < 0 \quad \forall\ S$, concluyendo que 3.45 no ocurre nunca, por lo tanto debe ocurrir

- $E_0e^{-r(T_1-T)} - E_2 < 0$, $g_1(0) > 0$ entonces existe un único punto S_2 tal que $g_1(S_2) = 0$, de modo que,

si $S_T < S_2$ $g_1(S) > 0$, pudiéndose realizar A_2, mientras que si $S_T > S_2$ $g_1(S) < 0$ y la compra de la opción de venta sería perjudicial.

De modo que si $S_1 < S_T < S_2$ 3.45 y 3.46 son ciertas simultáneamente, motivando la compra de la opción. Buscamos, pues, condiciones para que $S_1 < S_2$.

Es inmediato comprobar que

$f_1(E_1) = g_1(E_1) = E_0e^{-r(T_1-T)}[1-N(d_2(E_1))] - E_1[1-N(d_2(E_1))] - E_2$.

Se pueden dar las siguientes situaciones:

- $f_1(E_1) = 0$, se tiene que $S_1=S_2=E_1$, es el caso crítico de indiferencia
- $f_1(E_1) < 0$, entonces $S_2 < E_1 < S_1$
- $f_1(E_1) > 0$, entonces $S_1 < E_1 < S_2$, de donde se obtiene la segunda condición $\blacksquare$

Proposición 3.7 (S. Leguey)

Sea $P(t,S_0,A_1,A_2)$ el valor de una opción de elección múltiple como la que se describe en la proposición anterior, y que verifica *I.* y *II.* Entonces,

$$\boxed{\begin{aligned} P(t,S,A_1,A_2) = {} & e^{-r(T_1-t)} \left[E_0\psi_2 - S_0e^{\mu(T-t)}\psi_1 \right] + \\ & e^{-r(T-t)} \left[E_1N(x_1) + \right] + E_2 \left(N(x_1) - N(x_2)\right) - S_0e^{\mu(T-t)}N(y_1) \end{aligned}}$$

con

$$x_1 = \frac{\log(\frac{S_1}{S_0}) - m_1}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad b_2 = \frac{\log(\frac{S_2}{S_0}) - m_1}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$y_1 = \frac{\log(\frac{S_1}{S_0}) - m_1'}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\psi_1 = P\left(N_2\left[\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2(T-t) & 0 \\ 0 & \sigma^2(T_1-T) \end{pmatrix}\right] \in R_1\right)$$

$$\psi_2 = P\left(N_2\left[\begin{pmatrix} m_1' \\ m_2' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2(T-t) & 0 \\ 0 & \sigma^2(T_1-T) \end{pmatrix}\right] \in R_1\right)$$

con $R_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \log(\frac{S_1}{S_0}) < x < \log(\frac{S_2}{S_0}),\ -\infty < x+y < \log(\frac{E_0}{S_0})\ \}$.

Demostración

De la observación 2.12 y 3.38, se tiene que,

$$P(t,S_0,A_1,A_2) = e^{-r(T-t)}E[\max\{0,\ E_1-S_T,\ P(T,S_T)-E_2\}/S(t)=S_0]$$

Usando la proposición anterior,

$$C(t,S_0,A_1,A_2) = e^{-r(T-t)}\left[\int_{S_1}^{S_2}\Big(P(T,S_T)-E_2\Big)P(S_T/S_0)dS_T + \int_{-\infty}^{S_1}(E_1-S_T)P(S_T/S_0)dS_T\right]$$

y teniendo en cuenta que

$$P(T,S_T) = e^{-r(T_1-T)}\int_{-\infty}^{E_0}(E_0-S_{T_1})P(S_{T_1}/S_T)dS_{T_1}$$

se llega al resultado■

Obsérvese que la estructura final de la fórmula de valoración, de la opción de compra y la de venta es muy similar, se encuentran básicamente dos sumandos, referidos, cada uno de ellos, a los distintos instantes en que es posible comprar o vender el activo. En el primer sumando se compara, salvo las ponderaciones que resumen el carácter aleatorio del precio del activo, el valor final teórico del activo con el precio fijado del mismo en el instante T_1, actualizando estas cantidades al instante de valoración t. El segundo sumando, referido al tiempo T, compara, ignorando de nuevo los términos en que se centra la parte aleatoria, el valor teórico de la acción con los costes de ejercer las dos posibles acciones, todo ello valorado en el punto de partida t.

Los dos casos particulares que se han visto tienen una peculiaridad, y es que son opciones que permiten realizar una misma operación en distintos momentos, aunque en cada uno de ellos se pueda asumir distinto coste.

Encontramos una generalización de esta idea considerando $T_n=\{t\le t_1\le \ldots \le t_n=T\}$, una sucesión finita de instantes de tiempo, y una opción múltiple europea $C(t,A_1(t_1),\ldots .A_n(t_n))$ de modo que las A_i permiten relizar la misma acción en distintos instantes de tiempo, y con diferentes costes. Habíamos visto que esta opción se podía expresar como,

$$C(t,A_1(t_1),\ldots .A_n(t_n)) = C(t,A_1(t_1),C_1(t_1)) ,$$

con

$$C_i(t_i) = C(t_i,A_{i+1}(t_{i+1}),C_{i+1}(t_{i+1})) , \tag{3.47}$$

$$C_{n-2}(t_{n-2}) = C(t_{n-2},A_{n-1}(t_{n-1}),A_n(T))) ,$$

dada

$C_{i-1}(t_{i-1})$ se considera E_i el precio de ejercicio de A_i, el precio de compra de $C_i(t_i)$ se supone cero. Si $E_i=E$ $i=1\ldots n$,y $A_1=..=A_n=A$ diremos que $C(t,A_1(t_1),\ldots .A_n(t_n))$ es una opción sucesiva respecto a la acción A, y la notaremos como $C(t,A(T_n))$. Una opción sucesiva es simplemente una opción, relativa a la acción A, que se encuentra entre las europeas y las americanas, en el sentido de que permite distintos tiempos de ejercicio. Si sólo fuera uno sería una opción europea, y de tipo americano si se admitiese la posibilidad de ejercicio en todo el intervalo. Es evidente que,

$$C_E(t,A(T))\le C(t,A(T_n)) \le C_A(t,A((t,T]))$$

donde el primer y último términos de la desigualdad representan el valor de una opción europea y americana respectivamente, que permiten la acción A.

Si admitimos n=∞ obtenemos podemos aproximarnos a las opciones americanas clásicas a traves de opciones sucesivas. Si $n \to \infty$ podemos considerar una sucesión de tiempos densa en (t,T], como las fórmulas de valoración son funciones continuas del tiempo y del activo, y éste se comporta como un proceso continuo de difusión, se tiene que,

$$\lim_{n\to\infty} C(t,A(T_n)) = C_A(t,A((t,T])) \tag{3.48}$$

siempre que $\lim_{n\to\infty} T_n$ sea denso en (t,T].

Como aplicación se puede, a partir de las opciones sucesivas, probar analíticamente que el ejercicio anticipado de una opción de compra americana nunca se produce, y por tanto su valor coincide con el de una opción europea de las mismas características.

Sea A la acción consistente en comprar una cantidad (S) del activo al precio de ejercicio E, y sea $T_2 = \{t_1,T\}$ entonces $C(t,A(T_2))$ es una opción de elección múltiple, al menos en su forma, con $E_1 = E_0 = E$ y $E_2=0$. Es trivial comprobar que la condición *II.* de la proposición 3.4 no se verifica, de donde se tiene que el ejercicio en el instante intermedio t_1, nunca se realizará, por lo que $C(t,A(T_2)) = C_E(t,A(T))$. Ahora de 3.47 se tiene por inducción que $C(t,A(T_n)) = C(t,A(T_{n+1}))$, usando 3.48 se demuestra lo que nos proponíamos.

$$C_E(t,A(T)) = \lim_{n\to\infty} C(t,A(T_n)) = C_A(t,A((t,T])).$$

Se trata a continuación de estudiar el valor de una opción de venta americana a traves de opciones sucesivas de venta. Consideramos en primer lugar una opción de elección múltiple como la analizada en las proposiciones 3.6 y 3.7, para $E_2=0$ y $E_1=E_0$ es decir, $C(t,A(T_2))$ para A la acción consistente en vender una cantidad S de activo al precio E_1, y $T_2 = \{T,T_1\}$. Comenzamos estudiando las condiciones de 3.6 para que se trate de una auténtica opción de elección múltiple;

I. se traduce en $E_1 > E_1 e^{-r(T_1-T)} > 0$, que es trivialmente satisfecha,

II. queda $\quad e^{-r(T_1-T)} N\left(\left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)\frac{\sqrt{T_1-T}}{\sigma}\right) > N\left(-\left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right)\frac{\sqrt{T_1-T}}{\sigma}\right),$

sea $h(\tau) = e^{-r\tau}N((\frac{\sigma^2}{2} - r)\frac{\tau}{\sigma}) - N(-(\frac{\sigma^2}{2} + r)\frac{\tau}{\sigma})$, para $\tau = \sqrt{T_1 - T}$,

se verifica que $h(0)=0$, y que $\lim_{\tau \to 0} h'(\tau) > 0$, por lo tanto, al menos para valores pequeños de τ se satisface la segunda condición, por lo que tiene sentido continuar el análisis, partiendo de que los parámetros de los que depende la expresión, toman valores tales que ambas condiciones se verifican.

Usando 3.7 se tiene que

$$C(t,A(T_2)) = e^{-r(T_1-t)}\left[E_0\psi_2 - S_0e^{\mu(T-t)}\psi_1\right] + e^{-r(T-t)}\left[E_1N(x_1) - S_0e^{\mu(T-t)}N(y_1)\right] \qquad (3.49)$$

ψ_1 y ψ_2 siguen igual transformando R_1 en

$$R_1' = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \log(\frac{S_1}{S_0}) < x < \infty \text{ , } -\infty < x+y < \log(\frac{E_1}{S_0}) \}$$

S_1 es la solución de la ecuación

$$E_1e^{-r(T_1-t)}(1-N(d_2(S))) + SN(d_1(S)) = E_1,$$

quedando x_1 e y_1 como se definieron.

añadimos otro instante de tiempo t_1 $t < t_1 < T < T_1$, y tratamos de evaluar $C(t,T_3(A))$ con $T_3=\{t_1,T,T_1\}$, sea

$f_2(S) = C(t_1,A(T_2)) - E_1 + S$, se tiene que

$f_2(0) = E_1(e^{-r(T-t)}-1) < 0$, y $f_2(\infty) = \infty$,

como f_2 es continua, existe al menos un punto S_2 con $f_2(S_2)=0$, supongamos que S_2 es el primer punto que verifica la condición. entonces si $S < S_2^*$ es mejor vender el activo que comprar la acción. En esencia lo que buscamos es determinar para que valores del activo es más interesante la venta instantánea, que demorarla hasta el próximo momento en que dicha venta es posible. Existe un punto crítico S_2 en el cual se decide no efectuar la venta, entonces la ganancia de una operación de venta para valores del activo mayores que S_2^* sería $E_1-S < E_1-S_2$ claramente inferior al posible beneficio obtenido en el punto de corte, por tanto no es posible que exista ningún otro punto que anule la función $f_2(S)$.

Como el valor de $C_2(t,T_2(A)) \geq 0$, no puede ocurrir que $S_2^* > E_1$, puesto que se incurriría en contradicción.

Proposición 3.8 (S. Leguey)

Sea $C(t,T_3(A))$ con $T_3=\{t_1,T,T_1\}$ el valor de la opción que se acaba de describir.

$$\boxed{\begin{aligned} C(t,T_3(A)) = \; & e^{-r(T_1-t)}\left[E_0\varphi_2 - S_0 e^{\mu(T_1-t)}\varphi_1\right] + \\ & e^{-r(T-t)}\left[E_0\psi_2 - S_0 e^{\mu(T-t)}\psi_1\right] + \\ & e^{-r(t_1-t)}\left[E_0\zeta_2 - S_0 e^{\mu(t_1-t)}\zeta_1\right] \end{aligned}}$$

con

$$\zeta_1 = N\left(\frac{\log(\frac{S_2}{S_0}) - m_1}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \qquad \zeta_2 = N\left(\frac{\log(\frac{S_2}{S_0}) - m_1'}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

$$\psi_1 = P\left(N_2\left[\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2(t_1-t) & 0 \\ 0 & \sigma^2(T-t_1) \end{pmatrix}\right] \in R_1\right)$$

$$\psi_2 = P\left(N_2\left[\begin{pmatrix} m_1' \\ m_2' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2(t_1-t) & 0 \\ 0 & \sigma^2(T-t_1) \end{pmatrix}\right] \in R_1\right)$$

con $R_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \log(\frac{S_2}{S_0}) < x < \infty,\ -\infty < x+y < \log(\frac{S_1}{S_0})\}$.

$$\varphi_1 = P\left(N_3 \in \left[\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2(t_1-t) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2(T-t_1) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2(T_1-T) \end{pmatrix} \right] \in R_2 \right)$$

$$\varphi_2 = P\left(N_3 \in \left[\begin{pmatrix} m_1' \\ m_2' \\ m_3' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2(t_1-t) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2(T-t_1) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2(T_1-T) \end{pmatrix} \right] \in R_2 \right)$$

y

$$R_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \log\left(\frac{S_2}{S_0}\right) < x < \infty,\ \log\left(\frac{S_1}{S_0}\right) < x+y < \infty,\ -\infty < x+y+z < \log\left(\frac{E_1}{S_0}\right) \}.$$

$$\text{con } m_1 = (t_1-t)\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right), \qquad m_2 = (T-t_1)\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right), \qquad m_3 = (T_1-T)\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$m_1' = m_1 - \sigma^2(t_1-t), \qquad m_2' = m_2 - \sigma^2(T-t_1), \qquad m_3' = m_3 - \sigma^2(T_1-T).$$

Siendo S_1 el punto crítico determinado en la proposición 3.6, evaluado en t_1.

Demostración

Como ya habíamos observado en proposiciones anteriores, el valor de la opción depende de su forma específica, lo que aplicando 2.12 lleva en este caso a que,

$$C(t,T_3(A)) = e^{-r(T_1-t)} E[\max\{0,\ E_1-S_{t_1},\ C(t_1,T_2(A))\}/S(t)=S_0] =$$

$$e^{-r(T_1-t)} \left[\int_{S_2}^{\infty} C(t_1,T_2(A))\, P(S_T/S_0) dS_T + \int_{-\infty}^{S_2} (E_1-S_T) P(S_T/S_0) dS_T \right]$$

como $C(t_1,T_2(A))$ lo hemos evaluado en 3.49, basta expresarlo en forma integral para llegar al resultado∎

Podemos por un proceso de inducción determinar el valor de $C(t,T_n(A))$, por simplificar se tomará $T_n=\{t_1,\ldots t_n=T\}$ con

$$T-t_{n-1} =\ldots= t_2-t_1 = t_1-t = c_n = \frac{T-t}{n},$$

$$m_1 =\ldots= m_n = c_n(\mu-\frac{\sigma^2}{2})$$

$$m_1' =\ldots= m_n' = m_n - c_n\sigma^2,$$

$\Sigma_k^n = \sigma^2 c_n I_k$, para I_k la matriz identidad de orden k.

- Sea $\{S_k\}_{k=1}^n$ la sucesión formada por los puntos críticos que se van encontrando en cada paso, de modo que $S_1=E_1$, y S_{k+1}^n $k = 1\ldots n-1$, es la solución de

$$E_1-S = C(t_{n-k},T_{k+1}(A)).$$

- Sea $N_{k,1}^n$ una variable distribuida según una normal k-dimensional de media

$\vec{m}_{k,1}^n=\begin{pmatrix} m_n \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$, y matriz de varianzas y covarianzas Σ_k^n , y

$N_{k,2}^n$ otra variable distribuida según una normal k-dimensional de media

$\vec{m}_{k,2}^n=\begin{pmatrix} m_n' \\ \vdots \\ m_n' \end{pmatrix}$, y con la misma matriz de varianzas y covarianzas Σ_k^n.

- Sean $R_1^n = \{ x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } -\infty < x < \log(\frac{S_n}{S_0}) \}$

$R_2^n = \{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } -\infty < x_1+x_2 < \log(\frac{S_{n-1}}{S_0}) \text{ , } \log(\frac{S_n}{S_0}) < x < \infty \}$

$$R_k^n = \{ (x_1,\ldots x_k) \in \mathbb{R}^k \text{ t.q. } -\infty < x_1+\ldots+x_k < \log(\frac{S_{n-k+1}}{S_0}) \text{ ,}$$

$$\log(\frac{S_{n-k+2}}{S_0}) < x_1+\ldots+x_{k-1} < \infty$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

$$\log(\frac{S_{n-1}}{S_0}) < x_1+x_2 < \infty \text{ , } \log(\frac{S_n}{S_0}) < x_1 < \infty \}$$

- finalmente $\psi^n_{k,1} = P(\ N^n_{k,1} \in R^n_k\ )$, $\psi^n_{k,2} = P(\ N^n_{k,2} \in R^n_k\ )$

entonces:

$$\boxed{C(t,T_n(A)) = \sum_{k=1}^{n} e^{-krc_n}[E_1\psi^n_{k,2} - S_0e^{k\mu c_n}\psi^n_{k,1}]}$$

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

- El cálculo en media cuadrática, íntimamente relacionado con las propiedades de la función de covarianza, resulta ser una herramienta de análisis de gran potencia. Consta de un gran número de propiedades que replican a las ya conocidas en el análisis determinista. Pese a ello resulta insuficiente, ya que hay amplias clases de procesos que necesitan de un tratamiento distinto.

- La integral de Itô (integral estocástica) genera una clase de procesos que son martingalas y además continuos. Se tiene en el otro sentido que hay una extensa clase de martingalas continuas que pueden ser representadas como integrales respecto a un movimiento browniano.

- A diferencia de lo que ocurre en el cálculo determinista, en el cálculo estocástico se introduce el concepto de integral para, a partir de él definir la diferencial. Las reglas de manipulación de las diferenciales no coinciden con las conocidas, aunque muchas de ellas son semejantes, la transformación esencial del cálculo diferencial estocástico viene dada por la **regla de Itô,** que determina la diferencial de una transformación suficientemente suave de un proceso X(t) que admita diferencial en la forma

$$dX(t) = a(t)dt + b(t)dB(t)$$

como

$$df(t,X((t)) = [\frac{df}{dt}(t,X(t)) + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(t,X(t))b^2(t) + \frac{df}{dx}(t,X(t))a(t)]dt + \\ + \frac{df}{dx}(t,X(t))b(t)dB(t).$$

- Las ecuaciones diferenciales estocásticas como las ecuaciones diferenciales ordinarias plantean el problema de la existencia y unicidad de soluciones, llegando a que si los coeficientes son funciones que verifican determinadas condiciones de regularidad, estará asegurada la existencia de una solución. Y no sólo eso sino que dicha solución será un proceso markoviano de difusión, de modo que es posible plantear una ecuación diferencial estocástica cuyos coeficientes reflejen el comportamiento que pretendemos observar en la variable, siempre que el comportamiento se ésta sea modelizable a traves de un proceso de difusión. Verificándose además, que hay una amplia gama de difusiones que se pueden expresar como las soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas.

- La ley de probabilidad del proceso solución de una ecuación diferencial estocástica, determinada a traves de sus probabilidades de transición es la solución de una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, de hecho los momentos, función característica..etc. también se determinan por la misma vía. Recíprocamente problemas asociados con ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden se pueden asociar a momentos de la solución de una ecuación diferencial estocástica, en particular la solución del problema de Cauchy

$$\frac{du(x,t)}{dt} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n} a_{i,j}(x,t)\,\frac{d^2u(x,t)}{dx_i dx_j} + \sum_{i}^{n} b_i(x,t)\,\frac{du(x,t)}{dx_i} + c(x,t)u(x,t) = f(x,t)$$

sujeto a

$$u(x,T) = \phi(x)$$

es

$$\boxed{u(x,t)=E[\exp\{\int_t^T c(X(u),u)du\}\ \phi(X(T))-\int_t^T f(X(s),s)\exp\{\int_t^s c(X(u),u)du\})ds/X(t)=x]}$$

con X(t) el proceso solución de una ecuación diferencial estocástica cuyos coeficientes están dados por los términos $a_{i,j}$, $b_{i,j}$.

- Los modelos de valoración de activos financieros, los que se han tratado en este trabajo, parten de un modelo de comportamiento estocástico del activo subyacente, las tasas de interés y/o las varianzas, que se representa mediante una determinada ecuación diferencial estocástica, usualmente modelos lineales que son los más sencillos de tratar. A continuación se determina la forma diferencial del activo aplicando la transformación de Itô, para llegar a la ecuación de valoración tras la asunción de algunas hipótesis sobre el funcionamiento del mercado. Ésta ecuación, gracias a la relación que hay entre las ecuaciones diferenciales estocásticas y las ecuaciones en derivadas parciales, se puede calcular como la esperanza de una transformación de la solución, con lo cual el problema vuelve a ser determinar la distribución de probabilidad de la solución para así finalizar el cálculo.

- El modelo original de Black y Scholes para la valoración de una opción de compra sobre una acción que no reparte beneficios, también responde al esquema anterior. La ecuación que se plantea es

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S(t)\, F_{SS}(S(t),t) + r\, S(t)F_S(S(t),t) + F_t(S(t),t) - rF(S(t),t) = 0$$

con condiciones $F(S_0,0)=0$ y $F(S(T),T)=\max\{0, S(T)-E\}$

y su solución viene dada por

$$F(t,S) = e^{-r(T-t)}E[\max\{S(T)-E, 0\} / S(t) = s]$$

que finalmente nos conduce a la consabida fórmula

$$\boxed{W(t)=F(S(t),t) = S(t)N(d_1) - E\, e^{r(T-t)}\, N(d_2)}.$$

- El problema de valorar opciones europeas sobre distintos activos no está resuelto en su totalidad. En primer lugar se ha visto que en ocasiones nos enfrentamos a distintas ecuaciones de valoración, que obviamente producen distintos resultados. Otra de las causas más importantes de que no esté resuelto el problema es que excepto en los casos más sencillos las condiciones generales de obtención del modelo analítico de valoración conducen a ecuaciones hoy en día irresolubles de modo exacto.

- A lo largo del capítulo se han considerado modelos en los cuales el activo subyacente fluía en forma continua, una alternativa natural se obtiene considerando la variación del precio del activo como una mixtura entre un movimiento de tipo continuo y otro en el cual los precis cambian de manera discreta. Por ejemplo es habitual la consideración de variaciones instantaneas de amplitud $\xi(t)$ en instantes discretos siguiendo un proceso geométrico de Poisson de parámetro λ.

$$S(t)=S_0\exp\{\xi(t)N(t) + \mu t\}$$

o equivalentemente

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \xi(t)dN(t)$$

en este caso la variación de un contrato de opciones W(t,S) estará regido por la ecuación

$$dW(t)= [F_t(S(t),t) + \mu S(t)F_S(S(t),t)]dt + [F(\xi S,t)-F(S,t)]dN(t) .$$

En el caso en que S es una acción y W una opción de compra sobre la misma, la suposición de que se puede formar una cartera cuyo rendimiento está libre de riesgo conduce al siguente sistema de ecuaciones

$$N_1S(\mu-r) + N_2 [F_t(S(t),t) + \mu S(t)F_S(S(t),t)-F(S(t),t)r] = 0$$
$$N_1S\xi + N_2[F(\xi S,t)-F(S,t)] = 0$$

de donde se llega a

$$F_t(S(t),t) + \mu S(t)F_S(S(t),t) - \frac{\mu-r}{\xi} F(\xi S(t),t) + \frac{\mu-r(\xi+1)}{\xi} F(S(t),t) =0$$

que no tiene solución conocida. Para encontrar una expresión que permita cuantificar la opción se deberán asumir hipótesis adicionales del estilo de las comentadas en el método alternativo de derivación de la fórmula de Black y Scholes.

- Es interesante resaltar que hay muchos más tipos de opciones que los que se han tratado, aquellas en que la fecha de ejercicio es extensible en uno o varios periodos, otras en que la referencia del precio del activo subyacente se toma sobre el valor máximo o mínimo que tomó en un determinado periodo, otras con un precio de ejercicio variable, generalmente un promedio de los valores del activo...etc. Sin dejar por supuesto de mencionar las opciones sobre otros activos como pueden ser los índices bursatiles, que no son especialmente relevantes a la hora de particularizar un sistema de valoración.

- Es obligado referirse a la importancia que tienen los métodos iterativos de resolución, que en una gran proporción de casos constituyen el único camino para obtener un resultado numérico. Y especialmente en el caso de las opciones americanas en las que son la base fundamental de resolución del problema.

- El concepto de opción es inmediatamente generalizable a un artículo financiero que permite la consideración de diferentes actuaciones, dependiendo de la evolución del activo o activos sobre los que se esté trabajando, las opciones de elección múltiple. Este instrumento, además del interés que pudiera tener en si mismo, va a permitir aproximar el valor de una opción de venta de tipo americano.

- El valor de una opción de venta americana sobre una acción que no reparte dividendo, y en el contexto original que plantearon Black y Scholes, se aproxima inferiormente como límite de la siguiente expresión,

$$\boxed{C(t,T_n(A)) = \sum_{k=1}^{n} e^{-krc_n}[E_1\psi_{k,2}^{n} - S_0 e^{k\mu c_n}\psi_{k,1}^{n}]}$$

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFIA

[1] - ABELLÓ RIERA, J y OLLER MACIA, J (1992) "Introducción a las opciones financieras". Gestión 2000.

[2] - ARNAIZ VELLANDO, G "Introducción a la estadística teórica" (3ª edición). Lex-Nova.

[3] - ARNOLD (1974) "Stochastic differential equations, Theory and aplications". John Wiley & Sons.

[4] - BARLETT,M , S (1980) "An introduction to stochastic processes with special reference to methods and applications".(3ªed) Cambridge university press.

[5] - BLACK, F & SCHOLES, M (1973) "The pricing of options and corporate liabilities. Journal of political economy, No 81, 637-654.

[6] - BRENNAN, M & SCHWARTZ, E (1977) "The valuation of american put options". The journal of finance, Vol 32, No 2, 449-462.

[7] - CHEN, REN-RAW (1992) "Exact solutions for futures and european futures options on pure discount bonds". The journal of financial and quantitative analysis, Vol 27, No 1, 97-107.

[8] - CHESNEY, M & SCOTT, L (1989) "Pricing european currency options...". Journal of financial and quantitative analysis, Vol 24, No 3, 265 -284.

[9] - CHUNG, K, L (1982) "Lectures from Markov processes to Brownian motion". Springer-Verlag.

[10] - COURTADON, GEORGE (1982) " The pricing of options on default-free bonds". The journal of financial and quantitative analysis, Vol 17, No 1, 75-100.

[11] - COX INGERSOLL & ROSS (1985) "An intertemporal general equilibrium model of asset prices". Econometrica, Vol 53, No 2, 363-384.

[12] - COX INGERSOLL & ROSS (1985) " A theory of the term structure of interest rates". Econometrica, Vol 53, No 2, 385-407.

[13] - COX, D & MILLER, H (1965) "The theory of stochastic processes". John Wiley & Sons.

[14] - CRAMER & LEADBETTER (1967) "Stationary and related stochastic processes". John Wiley & Sons.

[15] - DEVOLDER, P (1993) "Finance stochastique". Editions de L'universite de Bruselles.

[16] - DOOB (1953) "Stochastic processes". John Wiley & Sons.

[17] - DYNKIN (1965) "Markov processes" (Vol I y II). Academic press.

[18] - ELLIOT (1982) "Stochastic calculus and applications". Springer Verlag.

[19] - ETHIER, STEWART, N (1986) "Markov processes". John Wiley & Sons.

[20] - FABOZZI (1986) "Advances in futures and options research" (Vol 1 y 2). JAI press inc.

[21] - FELDMAN, DAVID (1993) "European options on bond futures: a closed form solution". The journal of futures markets, Vol 13, No 3, 325-333.

[22] - FITZGERAL, D & RIDELL, T (1989) "Financial futures and options, recent developments". IFR publishing.

[23] - FRIEDMAN, AVNER (1975) "Stochastic differential equations and applications" (vol 1 y 2). Academic Press.

[24] - GARMAN, M & KOHLHAGEN, S (1983) "Foreing currency option values". Journal of international money and finance, Vol 2, 231-237.

[25] - GESKE, R & JOHNSON, H (1984) "The american put option valued analitically". The journal of finance, Vol 39, No 5, 1511-1524.

[26] - GIBSON, R (1991) "L'evaluation des options. Analyse et evaluation descontrats d'options standarises". Mc Graw-Hill.

[27] - GIHMAN, I & SKOROHOD, A,V (1972) "Stochastic differential equations". Springer-Verlag.

[28] - GIHMAN, I & SKOROHOD, A,V (1975) "The theory of stochastic processes" (vol I, II, y III). Springer-Verlag.

[29] - HARRISON & PLISKA "The evaluation of european options". Stochastic Processes and their applications, vol 15, 313-316.

[30] - HULL, J & WHITE, A (1987) "The pricing of options on assets with stochastic volatilities. The journal of finance, Vol 42, No 2, 281-300.

[31] - ITÔ, K & McKEAN, JR (1974) "Difussion processes and their sample paths" (2ªedición). Springer-Verlag.

[32] - ITÔ, K (1978) "Proceedings of the international symposium on stochastic differential equations". John Wiley & Sons.

[33] - JACOD, J (1979) "Calcule stochastique et probleme de martingale". Springer Verlag.

[34] - JACOD, J & SHIRYAEV, A, N (1987) " Limit theorems for stochastic processes". Springer-Verlag

[35] - JAMSHIDIAN, FARSHID (1989) "An exact bond option formula".The journal of finance, Vol 44, No 1, 205-209.

[36] - JAZWINSKI, A (1970) "Stochastic processes and filtering theory". Academic press.

[37] - JOHNSON, H & SHANNO, D (1987) "Option pricing when variance is changing". The journal of financial and quantitative analysis, Vol 22, No 2, 143-151.

[38] - KARLING, S & TAYLOR, H (1981) "A second course in stochastic processes".

[39] - KAZIMIERZ SOBCZYK (1991) "Stochastic differential equations with applications to phisics and engineering". Kluwer academic publishers.

[40] - LAMOTHE FERNÁNDEZ, P (1993) " Opciones financieras: un enfoque fundamental". McGraw-Hill.

[41] - LEVY, P (1965) " Processus stochastiques et mouvement Brownien". Gauthier-Villars.

[42] - LOEVE, M (1967) "Teoría de la probabilidad". Tecnos.

[43] - LOZANO ARNICA, G (1991) "Génesis y desarrollo de los modelos analíticos de valoración de opciones sobre instrumentos financieros ". Tesis doctoral Universidad de las Islas Baleares.

[44] - MALLIARIS, A, G, & BROCK, W, A (1982) "Stochastic methods in economics and finance". North Holland.

[45] - McKEAN (1969) "Stochastic integrals". Academic press.

[46] - McMILLAN, W (1986) "Analytic aproximation for the american put option". Advances in futures and options research, Vol 1, 119-139.

[47] - METIVIER, M (1982) "Semimartingales, a course on stochastic processes". De Gruyter.

[48] - MURPHY, JOSHEP "The random character of interest rates". McGraw-Hill.

[49] - OKSENDAL, BERNT (1991) "Stochastic differential equations" (3^a edición). Springer-Verlag.

[50] - ORLIN GRABBE, J (1983) "The pricing of call and put options on foreing exchange". Journal of international money and finance, Vol 2, 239-253.

[51] - PARZEN, E (1972) "Procesos estocásticos". Paraninfo.

[52] - PUGACHEV, V, S & SINITSYN (1987) "Stochastic differential systems". John Wiley & Sons.

[53] - RABINOVITCH (1988) "Pricing stock and bond options when the default-free rate is stochastic". The journal of financial and quantitative analysis, Vol 23, No 4, 447-457.

[54] - REVUZ, D & YORK, M (1990) "Continous martingales and Brownian motion". Springer-Verlag.

[55] - ROGER, PATRICK (1991) "Les outils de la modélisation financiére". Presses universitaires de France.

[56] - ROZANOV, YURY, A (1987) "Introduction to random processes". Springer-Verlag.

[57] - SCHORODER, M ((1989) "Computing the constant elasticity of variance option pricing formula". The journal of finance, Vol 44, No 1, 211-219.

[58] - SCHUS, ZEEV (1980) "Theory and applications of stochastic differential equations". John Wiley & Sons.

[59] - WONG, EUGENE, & HAJEK, BRUCE (1985) "Stochastic processes in engineering systems". Springer-Verlag.

[60] - WONG, E (1971) "Stochastic processes in information and dinamical systems". McGraw-Hill.