

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

**FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**

Departamento de Estadística e Investigación Operativa



**ALGUNAS APORTACIONES SOBRE REPRESENTACIÓN  
DE PREFERENCIAS**

**MEMORIA PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO DE  
DOCTOR POR**

Daniel Gómez González

Bajo la dirección de los Doctores:

Javier Montero de Juan

Javier Yáñez Gestoso

**Madrid, 2002**

**ISBN: 84-669-1796-9**

**Universidad Complutense de Madrid**

Facultad de Matemáticas

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

TESIS DOCTORAL

**ALGUNAS APORTACIONES SOBRE  
REPRESENTACIÓN DE  
PREFERENCIAS**

Realizada por: Daniel Gómez González.

Dirigida por: Javier Montero de Juan.  
Javier Yáñez Gestoso.

Mis primeras palabras tienen que ser de gratitud a tantas personas que han hecho posible la culminación de este trabajo. En primer lugar, mi eterno reconocimiento y mi profundo agradecimiento a los profesores Javier Montero y Javier Yáñez. Su generosidad, su paciencia y la dedicación que han demostrado permanentemente conmigo han hecho fácil esta tarea. Sin su apoyo, su amistad, su condescendencia y su buen humor no hubiera sido posible llegar hasta el final de un trabajo, que alumbra multitud de posibilidades creativas. Gracias a ambos.

Igualmente debo agradecer el interés y el constante apoyo que el profesor Juan Tejada me ha ofrecido durante todo este periodo.

También me gustaría expresar mi sincera gratitud a la profesora Ana del Amo por el continuado apoyo que me brindó durante su periodo como profesora de nuestra Universidad Complutense.

Asimismo, gracias a todos los profesores, compañeros de trabajo, por su ayuda en todo este tiempo. Gracias a Teresa Ortuño, Victoria López, Conrado Manuel, Enrique González, Mónica del Pozo, y a otros muchos.

En este capítulo de agradecimientos debo recordar al profesor Gregorio Díaz. Él sembró en un joven estudiante la inquietud y el horizonte de una vocación que, día a día, se va haciendo realidad. Gracias.

Y por último, gracias infinitas a quienes sin su permanente comprensión, ayuda y ánimo, este trabajo no hubiera visto la luz. Gracias a mi familia, a Luismi, Angelines, Luis, Rafa y a Clara.

# Prólogo

En esta memoria se aborda, tanto en el caso nítido como en el difuso, uno de los principales problemas asociados a la teoría de la decisión, como es el de la *representación de las preferencias*. La teoría desarrollada será utilizada para la mejora de diversas técnicas para la clasificación en problemas de teledetección.

Un problema de decisión es abordable, cuando permite una respuesta clara y sencilla, probablemente sin tener en cuenta un modelo abstracto. Sin embargo, los problemas de decisión complejos requieren de un modelo matemático para su análisis.

La complejidad de un problema, en el sentido de no poder ser resuelto de forma directa, puede venir dada por un problema de organización de la información, aunque el decisor está desbordado por la cantidad de información, el problema solamente requiere procedimientos de organización de datos, o por la estructura interna del problema, es en este caso cuando el modelo formal juega un papel esencial en el problema de decisión al mostrar la estructura interna del problema.

Sin embargo, los modelos matemáticos de estos problemas complejos pueden ser difíciles de resolver y de interpretar. Por este motivo, en muchas ocasiones se buscan procedimientos de simplificación del modelo que permiten una fácil resolución dando lugar a soluciones aproximadas, las escuelas americanas clásicas de multicriterio se pueden englobar aquí (ver, por ejemplo [123]).

Otra alternativa es no tratar de resolver el modelo, sino comprender el problema, entender

su estructura, de modo que el problema pueda ser analizado por medio de un adecuado software, casi seguro interactuando con el decisor. Los decisores no suelen aceptar "cajas negras" en sus procesos de decisión, parcialmente porque ellos conocen la naturaleza compleja del problema que están tratando.

Una de las claves para poder entender un problema de decisión es el conocimiento de los posibles criterios subyacentes. La teoría clásica de la dimensión es una posibilidad natural cuando la información está dada en términos de relaciones nítidas: el número de criterios subyacentes debe ser una vía para el conocimiento, entendimiento, y toma de decisiones de dicho problema. Algunas de las aproximaciones algorítmicas conocidas pueden verse en [142].

Cuando se trata con relaciones de preferencia difusas, la búsqueda de una representación comprensible para el decisor, es absolutamente necesaria. Una primera propuesta puede ser encontrada en [94], a partir de la así llamada "función de dimensión".

La función de dimensión, tal y como aquí va a ser desarrollada, trae al contexto difuso algunos conceptos fundamentales en la representación de relaciones de preferencia nítidas. Hay que puntualizar que incluso en este contexto se presentan dificultades computacionales que han frenado el desarrollo de dicha teoría en la práctica. El trabajo de Yáñez-Montero [142] jugará un papel esencial en este aspecto.

Esta memoria ha sido desarrollada como indicamos a continuación:

En el capítulo 2 se introduce un nuevo concepto de dimensión para cualquier tipo de relación nítida no reflexiva. Esta nueva definición dará lugar a nuevas representaciones de las relaciones de preferencia binaria. Algunas propiedades son desarrolladas, así como algunos algoritmos que permiten su cálculo. En este capítulo también se presenta el concepto de dimensión desde diferentes visiones de racionalidad dando lugar a nuevas representaciones.

Una vez definido el concepto de dimensión en el caso nítido, en el capítulo 3 se introduce la función de dimensión de relaciones de preferencia difusas. Algunas propiedades deseables para dicha función son analizadas.

Los capítulos 4, 5 y 6 abordan el problema de clasificación en teledetección. La teledetección se puede definir como el conjunto de técnicas que permite obtener información a distancia de las áreas de la superficie terrestre mediante el análisis de la energía electromagnética que las mismas emiten y reflejan.

Los problemas de clasificación en teledetección son muy complejos debido a diversos factores, como son la climatología, rotación de la tierra, altitud de cada uno de los pixels, además de problemas de decisión complejos. Este problema se considera un problema abierto.

En los capítulos 4 y 5 se desarrollan nuevas técnicas para la clasificación de imágenes digitales desde diferentes perspectivas teniendo en cuenta la información dada por el entorno de un pixel.

En el capítulo 4 se buscarán en una primera fase regiones homogéneas, teniendo en cuenta el concepto de variacional de un pixel, posteriormente, en una segunda fase, se determinará una clasificación difusa.

En el capítulo 5 se aborda el problema de la clasificación difusa de imágenes digitales, para ello se obtendrá en una primera fase una clasificación nítida basada en la coloración de un grafo difuso. Al igual que en el anterior capítulo, esta clasificación nítida dará lugar a una clasificación difusa de la imagen digital.

Finalmente, en el capítulo 6 se propone una metodología para la agregación de los métodos de clasificación vistos anteriormente basada en la representación de las relaciones de preferencia. En este sentido, la teoría desarrollada en los capítulos 2 y 3 permite analizar este tipo de problemas proporcionando herramientas válidas para el problema de clasificación. Se analizan diversos métodos y propiedades.

# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Problemas de decisión . . . . .	1
1.2	Conceptos Básicos sobre conjuntos difusos . . . . .	5
1.2.1	Agregación en conjuntos difusos . . . . .	11
1.3	Relaciones de preferencia difusa . . . . .	13
1.3.1	Estructura de preferencia . . . . .	15
1.4	Teledetección . . . . .	16
1.4.1	Clasificación en Teledetección . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Dimensión en relaciones de preferencia binarias</b>	<b>20</b>
2.1	El concepto de dimensión . . . . .	20
2.2	Representación general de relaciones de preferencia binaria . . . . .	24
2.3	Concepto de dimensión no basado en órdenes lineales . . . . .	36
2.4	Algoritmo . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Dimensión en relaciones de preferencia difusas</b>	<b>56</b>

<i>Índice General</i>	2
3.1 Representación de relaciones de preferencia max-min transitivas . . . . .	57
3.2 Representación en el caso general . . . . .	67
3.3 Propiedades de la función de dimensión . . . . .	77
3.4 Niveles críticos complementarios . . . . .	85
<b>4 Clasificación en teledetección. Variación de la homogeneidad de los pixels.</b>	<b>91</b>
4.1 Modelización matemática . . . . .	96
4.1.1 Red de pixels . . . . .	97
4.2 Algoritmos variacionales . . . . .	99
4.3 Determinación de Regiones . . . . .	109
4.4 Clasificación difusa de imágenes digitales . . . . .	114
4.5 Proceso interactivo de clasificación . . . . .	117
4.6 Resultados Computacionales. . . . .	121
<b>5 Clasificación en teledetección. Coloración del grafo difuso</b>	<b>142</b>
5.1 Grafo difuso de pixels . . . . .	143
5.2 Algoritmo estricto de Coloración . . . . .	146
5.2.1 Procedimiento de coloración binaria . . . . .	148
5.2.2 Algoritmo estricto de coloración . . . . .	158
5.2.3 Análisis de la complejidad computacional . . . . .	161
5.3 Algoritmo relajado de coloración . . . . .	162
5.3.1 Resultados Computacionales . . . . .	167



<i>Índice General</i>	3
5.4 Determinación de las regiones homogéneas . . . . .	183
5.4.1 Resultados Computacionales . . . . .	184
5.5 Proceso interactivo de clasificación . . . . .	197
<b>6 Clasificación en teledetección. Agregación de preferencias.</b>	<b>201</b>
6.1 Relación de preferencia entre bandas . . . . .	202
6.1.1 Relación basada en varios decisores . . . . .	211
6.1.2 Relación basada en otros átomos de racionalidad . . . . .	213
6.2 Relación de preferencia entre variacionales . . . . .	215
6.2.1 Relación basada en varios decisores . . . . .	221
6.2.2 Relación basada en los objetos. . . . .	222
<b>7 Conclusiones y futuras líneas de Investigación</b>	<b>224</b>
7.1 Conclusiones . . . . .	224
7.2 Futuras líneas de Investigación . . . . .	226
<b>Bibliografía</b>	<b>228</b>

# Capítulo 1

## Introducción

El objetivo de este capítulo será el de sentar las bases para una buena comprensión de esta memoria. Para ello, en primer lugar, se hará un breve repaso a los problemas de decisión y porqué es interesante el análisis de las preferencias de un decisor. En segundo lugar se verán algunos conceptos básicos sobre conjuntos difusos, incertidumbre, y relaciones de preferencia. Finalmente se plantea el problema de la clasificación en teledetección.

### 1.1 Problemas de decisión

Los problemas de decisión están presentes en cualquier momento de nuestras vidas. La mayoría de las veces que nos enfrentamos a uno de estos problemas se utiliza la lógica, intuición, experiencia, etc ... para tratar de tomar una decisión acertada. Sin embargo, existen muchas situaciones en las que la incertidumbre, cantidad de información, disparidad de criterios o simplemente complejidad del problema hacen que la razón, la intuición o la experiencia den lugar a decisiones erróneas. Es en estos casos cuando se requiere de un buen análisis. Por este motivo surgen los *sistemas de ayuda a la decisión* que permiten analizar y comprender el problema que el decisor tiene entre manos. Una buena comprensión del problema incluye la identificación de los distintos criterios que influyen en la decisión; una

valoración adecuada de éstas permitirá al decisor tomar mejores decisiones.

Algunos ejemplos de problemas de decisión son:

- Una persona que va a decidir la adquisición de un coche tendrá en cuenta los criterios: *precio, capacidad, estética, consumo, seguridad ...*
- Un estudiante que debe decidir qué carrera universitaria elegir tendrá que tener en cuenta *aptitudes, salidas, gustos, dificultad ...*
- Una familia que debe decidir la compra de una vivienda tendrá que tener en cuenta *precio, zona, confort ...*

Todos los problemas de decisión vistos en los ejemplos anteriores son problemas multicriterio y, por tanto, la dificultad de la decisión estriba en la existencia de criterios que pueden ser contradictorios entre sí. En estos casos, el problema que se le plantea al decisor es el de decidir cuál de sus alternativas es la *más deseable*.

En función de las características del problema de decisión que se trata de resolver, existen diversos métodos y planteamientos de *ayuda a la decisión*. Algunas enfoques son:

## **Programación multiobjetivo**

La programación multiobjetivo u optimización vectorial es de gran utilidad cuando el marco decisional está definido por una serie de objetivos a optimizar que deben satisfacer una serie de restricciones. Las funciones objetivo serán modelizadas al igual que las restricciones mediante programación matemática.

Como en la mayoría de los casos es imposible maximizar todos los objetivos satisfaciendo las restricciones, la programación multiobjetivo trata de encontrar y determinar el conjunto de soluciones eficientes o de Pareto.

**Definición 1.1.** Se dirá que una decisión es óptima de Pareto si no existe otra decisión que la mejore en todos los objetivos, siendo al menos en uno mejor estrictamente.

En la literatura se pueden encontrar diversas aproximaciones que tratan de encontrar el conjunto de soluciones eficientes. Algunas de ellas son el método de las restricciones [74], el de las ponderaciones [146], el método N.I.S.E. [25], el simplex multicriterio [145], etc.

## Programación de Compromiso

La programación compromiso fue inicialmente desarrollada por Yu [143] y por Zeleny [145, 144]. La idea básica de la programación por compromiso consiste en utilizar un punto ideal como punto de referencia para el decisor. Teniendo en cuenta que en el punto ideal se maximizan todos los objetivos del decisor, el decisor elegirá de entre todos los puntos eficientes aquél que se encuentre a distancia menor del punto ideal. De esta forma mediante la programación compromiso se reduce en cada paso el conjunto de alternativas *deseables* para el decisor.

En este enfoque la elección de la función distancia es esencial, y no debe entenderse únicamente en sentido geométrico, ya que debe contemplar las preferencias del decisor.

## Programación por metas

Uno de los problemas que tienen los enfoques anteriores es la complejidad computacional. A medida que se incrementa el tamaño del problema se hace muy complejo el cálculo de todas las soluciones eficientes.

La programación por metas cambia la filosofía de *optimización* vista por los anteriores enfoques. En este nuevo enfoque la idea no es maximizar una función sino la de satisfacer una serie de restricciones (metas). Para ello bastará con determinar niveles mínimos de aceptación para algunos objetivos, que pasarán a ser parte de las restricciones del problema.

Desde el artículo pionero de Charnes y Cooper [23] se han desarrollado numerosas técnicas basadas en programación por metas, algunas de ellas se pueden encontrar en [108].

### **Enfoques interactivos multicriterio**

En estos enfoques se van mejorando soluciones parciales gracias a la interacción con el decisor hasta que se llega a una solución adecuada para todos. Algunos de los más conocidos algoritmos interactivos en problemas de decisión son: Método STEM [15], Método de Zionts - Wallenius [150], ELECTRE [112], PROMETHEE [20, 75], y otros muchos.

Los enfoques señalados anteriormente (programación multiobjetivo, de compromiso, por metas e interactivo) tienen un denominador común: en todas ellos se tiene un conocimiento a priori de los criterios, factores y objetivos del problema de decisión. Sin embargo, existen otros problemas de decisión en los que los criterios o los objetivos no son conocidos incluso por el decisor. Veamos algunos ejemplos.

- Supongamos que se tiene que elegir entre varios cuadros cuál de ellos es más bello. El concepto de belleza es algo subjetivo a cada persona, por lo tanto, lo que para una persona puede ser bello, para otra podría no serlo. En este problema de decisión parece muy complicado establecer unos criterios a priori.
- En problemas de clasificación en teledetección, suele ser habitual tener que discriminar entre varias fotografías dependiendo de cuál de ellas refleja mejor el objeto que se está estudiando. En el problema de decisión asociado, los criterios están basados en la experiencia, y en la mayoría de los casos son desconocidos por el fotointérprete.

Un enfoque adecuado a este tipo de problemas es el basado en el análisis de las preferencias del decisor.

Así pues, existen diversas situaciones en las que sería muy interesante determinar cuáles son los criterios, objetivos y factores que influyen en el problema de decisión.

En esta línea aparece el concepto de dimensión (que se analizará en el capítulo 2) [45] en relaciones de preferencia. El concepto de dimensión en una relación de preferencias responde a la idea del número de criterios que explican las preferencias del decisor. Una vez que se tienen dichos criterios la comprensión y resolución del problema se hace más asequible.

Una relación puede verse como un subconjunto  $R \subset X \times X$ . También puede verse como una función

$$\mu^R : X \times X \rightarrow \{0, 1\}$$

donde  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  representa el conjunto finito de alternativas y  $\mu^R(x_i, x_j) = 1$  cuando el par  $(x_i, x_j) \in R$ , y  $\mu^R(x_i, x_j) = 0$  en otro caso.

**Definición 1.2.** Se dice que  $R$  es un orden parcial si verifica las siguientes propiedades:

- No Reflexiva o Antireflexiva ( $\mu^R(x_i, x_i) = 0 \quad \forall x_i \in X$ )
- Asimétrica ( $\mu^R(x_i, x_j) = 1 \Rightarrow \mu^R(x_j, x_i) = 0$ )
- Transitiva ( $\mu^R(x_i, x_j) = \mu^R(x_j, x_k) = 1 \Rightarrow \mu^R(x_i, x_k) = 1$ )

## 1.2 Conceptos Básicos sobre conjuntos difusos

La teoría de los conjuntos difusos fue introducida por L. A. Zadeh [147] en 1965. Este nuevo concepto cambió la forma de considerar la ambigüedad y la imprecisión, así como el tratamiento de problemas en los que aparece incertidumbre. En las teorías tradicionales se fuerza a que las representaciones del mundo real que se realizan encajen dentro de modelos muy precisos, tomando la imprecisión como un factor de distorsión. El concepto de conjunto difuso, así como el concepto de incertidumbre difusa, supuso una revolución en contextos como la teoría de decisión y la clasificación.

Por este motivo, es necesario incorporar la imprecisión para representar la información en procesos en los que un aumento de la precisión volvería completamente inabordable el problema.

## Incertidumbre

Dependiendo de la situación, existen muchos tipos de incertidumbre, por ejemplo, cuando se está lanzando un dado, acerca de cuál será el resultado; cuando la gente piensa si le irán bien las cosas; cuando una empresa se pregunta cuál será la demanda de un producto, cuando alguien dice *preferiría no madrugar*. Está claro que en todos estos casos existe lo que se conoce diariamente como incertidumbre, pero se puede observar que la incertidumbre en los casos mencionados anteriormente es muy diferente.

En unos casos se tiene incertidumbre probabilística, por ejemplo *no sé cuál será el resultado cuando se tire el dado*, pero se conoce la distribución de probabilidades, y por tanto se podrá tomar una decisión que dependa del resultado del dado. Cuando la empresa se pregunta cuál será la demanda de un producto, está claro que existe incertidumbre, pero podría hacer un estudio de series temporales, para poder estimar cuál será la demanda con un grado de confianza. Sin embargo cuando alguien dice *Preferiría no madrugar* la incertidumbre de esa frase viene dada por la vaguedad que tiene el lenguaje, por las aspiraciones del decisor, porque en el lenguaje no suelen aparecer verdades absolutas, no existe el sí o el no como lo conocemos normalmente en matemáticas, en realidad lo que quiere expresar esa persona es que sus preferencias irán evolucionando a medida que vaya pasando la hora de levantarse. Así pues, está claro que existen además de la probabilística otros tipos de incertidumbre.

Cuando en este trabajo se habla de la incertidumbre difusa, se hace referencia a un incertidumbre más subjetiva que objetiva, se hace referencia a una incertidumbre en la forma de hablar (vaguedad en el lenguaje), a la incertidumbre que aparece cuando se quiere modelizar una preferencia personal, a los grados de verdad con que ocurren las cosas, etc.

El concepto de conjunto difuso recoge esta idea.

## Conjuntos difusos

**Definición 1.3.** Sea  $X$  un espacio de objetos, no vacío, con un elemento genérico de  $X$  que denotamos por  $x$ .

Un *conjunto difuso* o *clase difusa*  $A$  en  $X$  es una función  $\mu_A$  de  $X$  llamada *función de pertenencia*, que asocia a cada punto de  $X$  un número real en el intervalo  $[0,1]$ . El valor de  $\mu_A(x)$  representa el grado de pertenencia de  $x$  a  $A$ . Así cuanto más cerca esté  $\mu_A(x)$  de la unidad más alto es el grado de pertenencia de  $x$  a  $A$ . Claramente la función de pertenencia es la extensión de la función característica clásica de un subconjunto de  $X$  (Zadeh [147]).

**Definición 1.4.** Sea  $A$  conjunto difuso en el universo  $X$ . Definimos  $\alpha$  corte de  $A$ , y lo denotamos por  $A^\alpha$  al siguiente conjunto:  $\{x \in X / \mu_A(x) \geq \alpha\}$

**Definición 1.5.** Un conjunto difuso  $A$  se dice *vacío* si y sólo si su función de pertenencia es idénticamente 0 en  $X$ , esto es  $\mu_A(x) = 0$ , para todo  $x \in X$ .

**Definición 1.6.** Se dice que dos conjuntos difusos  $A$  y  $B$  son *iguales* ( $A = B$ ) si y sólo si  $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ , para todo  $x \in X$ .

**Definición 1.7.** Dubios y Prade [43] definen un número difuso como un conjunto difuso en la recta de números reales. Así pues un **número difuso**  $\tilde{a}$ , es un conjunto difuso con función de pertenencia  $\mu_a$ . Existen diversos tipos de números difusos, a continuación veremos algunos de los que más se han utilizado en la literatura. Esta definición ha sido criticada por Kerre [69], que exige que los números difusos verifiquen algunas propiedades deseables como: la continuidad de la función de pertenencia, convexidad, etc.



## Operadores de conjuntos difusos

Al igual que en el tratamiento de problemas de optimización, lógica, decisión, etc.. se hace imprescindible el uso de las operaciones básicas entre conjuntos como: intersección, unión, complementaridad..., para el tratamiento de problemas con incertidumbre difusa es necesario introducir las principales operaciones entre conjuntos difusos (intersección ,unión complementaridad ).

L. A. Zadeh sugirió la utilización de  $\min(\varphi, \psi)$ ,  $\max(\varphi, \psi)$  como extensión natural de las operaciones intersección y unión en conjuntos nítidos respectivamente.

Pero la naturaleza de los conjuntos difusos permite definir nuevas operaciones. Así, nos encontramos autores como Fodor [50], Ovchinnikov [99], Trillas [129], Weber [132] y Yager [133] entre otros, introducen los operadores  $T$ -norma, y  $T$ -conorma. Una propiedad fundamental de estos operadores es que contienen como caso particular los definidos originalmente por Zadeh.

Estas nuevas operaciones definidas entre conjuntos difusos (entre las que se destacan las T-normas y las T-conormas) juegan un papel esencial en los procesos de agregación de conjuntos difusos.

### $T$ -normas

Las conjunciones que vamos a ver a continuación sirven como base para definir las intersecciones de subconjuntos difusos de un conjunto dado.

**Definición 1.8.** Una función  $T : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$  que verifica

$$T(1, x) = x \quad \forall x \in [0, 1] \quad (1.1)$$

$$T(x, y) = T(y, x) \quad \forall x, y \in [0, 1] \quad (1.2)$$

$$T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z) \quad \forall x, y, z \in [0, 1] \quad (1.3)$$

$$T(x, y) \leq T(u, v) \quad \text{si } 0 \leq x \leq u \leq 1, 0 \leq y \leq v \leq 1 \quad (1.4)$$

se denomina norma triangular o *t-norma*.

### **T-conormas**

Las disyunciones que vamos a ver a continuación sirven como base para definir las uniones de subconjuntos difusos de un conjunto dado

**Definición 1.9.** Una función  $S : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  que verifica

$$S(0, x) = x \quad \forall x \in [0, 1] \quad (1.5)$$

$$S(x, y) = S(y, x) \quad \forall x, y \in [0, 1] \quad (1.6)$$

$$S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z) \quad \forall x, y, z \in [0, 1] \quad (1.7)$$

$$S(x, y) \leq S(u, v) \quad \text{si } 0 \leq x \leq u \leq 1, 0 \leq y \leq v \leq 1 \quad (1.8)$$

se denomina conorma triangular o *t-conorma*.

Hemos de señalar que como en el caso de las *t-normas* (1.5), (1.8) juntas implican  $S(1, x) = 1 \quad \forall x \in [0, 1]$ .

### Ejemplos

Las siguientes funciones son ejemplos de *t-normas* y sus *t-conormas* asociadas.

$$(1) \quad T_1(x, y) = \min \{x, y\}.$$

$$S_1(x, y) = \max \{x, y\}. \quad (\text{Zadeh})$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad T_2(x, y) &= x \cdot y. \\
 S_2(x, y) &= x + y - x \cdot y. && \text{(probabilística)} \\
 (3) \quad T_3(x, y) &= \text{máx} \{x + y - 1, 0\}. \\
 S_3(x, y) &= \text{mín} \{x + y, 1\}. && \text{(Lukasiewicz)} \\
 (4) \quad T_4(x, y) &= \begin{cases} \text{mín} \{x, y\}, & \text{si } \text{máx} \{x, y\} = 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \\
 S_4(x, y) &= \begin{cases} \text{máx} \{x, y\}, & \text{si } x = 0 \text{ ó } y = 0, \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

## Negaciones

La negación es una operación unitaria que identifica el valor verdadero de  $NOT P$  de un proposición  $P$ .

**Definición 1.10.** Una función  $n : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$  que satisface  $n(0) = 1$ ,  $n(1) = 0$  y además es no creciente, se denomina *negación*.

**Definición 1.11.** Una negación  $n$  se denomina *estricta* si  $n$  es continua y estrictamente decreciente. Se denomina *fuerte* si es una involución  $n(n(x)) = x$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ .

## Tripletas de Morgan

Si  $T$  es una  $t$ -norma,  $S$  una  $t$ -conorma y  $n_1, n_2$  dos negaciones estrictas, entonces se pueden expresar dos tipos de leyes de De Morgan:

$$\textit{Primera ley} \quad n_1(S(x, y)) = T(n_1(x), n_1(y)), \quad (1.9)$$

$$\textit{Segunda ley} \quad n_2(T(x, y)) = S(n_2(x), n_2(y)). \quad (1.10)$$

### 1.2.1 Agregación en conjuntos difusos

En esta sección haremos un breve repaso sobre la agregación en conjuntos difusos, que es esencial en problemas de clasificación difusa. Los procedimientos de agregación de información están presentes continuamente en la mayoría de los problemas y decisiones a las que nos enfrentamos.

En muchos contextos, por ejemplo, la elaboración de una opinión global, el proceso de agregación es esencial. En principio, la única propiedad que se debe exigir a una regla de agregación es su capacidad para transformar un conjunto de datos dando lugar a una representación más sencilla.

Existen diversas formas de definir un operador de agregación. Aquí se propone la siguiente:

**Definición 1.12.** Un *operador de agregación* de dimensión  $n$  es toda aplicación

$$\phi_n : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1],$$

que verifique las siguientes condiciones (ver, entre otros, los trabajos de Dombi [40, 41]):

1.  $\phi_n$  es monótona no decreciente en cada coordenada.
2.  $\phi_n$  es continua.
3.  $\phi_n(0, \dots, 0) = 0$ .
4.  $\phi_n(1, \dots, 1) = 1$ .

Asimismo, consideraremos que una regla de agregación debe agregar un número finito pero arbitrario de valores, a través de operadores de agregación apropiados. Tomando como espacio de valores el intervalo unidad, (lo cual en ningún modo puede considerarse restrictivo

en la práctica), una regla de agregación se puede formalizar como una secuencia de operadores

$$\{\phi_n : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]\}_{n>1},$$

de tal manera que, caso de presentarse al usuario una familia de  $n$  valores,  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , dicho usuario le aplicaría  $\phi_n$  para obtener el valor agregado  $\phi_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

A diferencia de otros enfoques, que están interesados en el operador, se seguirá la línea desarrollada por J. Montero [88, 89] donde lo más importante es la regla de agregación. Nótese que en una regla de agregación pueden ser diferentes los operadores de agregación  $\phi_n$  en función de  $n$ .

## Operadores OWA

En algunos problemas, la ordenación previa que se permite al decisor o usuario es única, bien porque el orden en el que los datos le son aportados tiene un significado esencial, al haber sido procesados y ordenados los datos, bien porque sólo hay una forma *natural* de hacerlo.

Los operadores OWA son una importante familia de operadores que suponen el orden usual en el intervalo unidad. Introducidos por Yager [135, 136], con el intento de englobar a un buen bloque de agregadores situados entre el operador *mínimo* y el operador *máximo* (la mayor  $t$ -norma y la menor  $t$ -conorma, respectivamente), su presentación más usual está basada en la ordenación natural decreciente.

Un operador OWA de dimensión  $n$  es un operador

$$\phi : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$$

tal que para cualquier  $n$ -upla  $(a_1, \dots, a_n)$  le asigna un valor ponderado

$$\phi(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n w_i a_{[i]}.$$

para alguna familia de pesos  $W = (w_1, \dots, w_n)$  tal que

1.  $w_i \in [0, 1]$  para todo  $1 \leq i \leq n$
2.  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$

### 1.3 Relaciones de preferencia difusa

La teoría de los conjuntos difusos permite extender el concepto de relación binaria del caso clásico, asignando a cada par ordenado de elementos un número en el intervalo unidad que representa el grado de verdad con el cual los elementos en cuestión pertenecen a la relación (ver el trabajo de Zadeh [148]).

**Definición 1.13.** Sea  $X$  un conjunto dado y  $(T, S, n)$  una tripleta de De Morgan modelizando *AND*, *OR* y *NOT*, respectivamente, entonces: Una *relación binaria difusa*  $R$  es una función  $R : X \times X \rightarrow [0, 1]$ .<sup>1</sup>

Esto es,  $R$  es una función tal que asigna a cada par de puntos  $a, b \in X$  el valor  $R(a, b)$ . Este valor recoge el grado de interacción entre  $a$  y  $b$ . En el caso que estamos tratando,  $X$  será el conjunto de alternativas y  $R$  una relación de preferencia difusa en  $X$  entonces  $R(a, b)$  se entiende como el grado en que ' $a$  no es peor que  $b$ '. Utilizando la terminología de los conjuntos difusos,  $R$  es un subconjunto difuso del conjunto  $X \times X$ , se justifica así el término de *relación binaria difusa*.

---

<sup>1</sup>Llamaremos  $R$  a la relación, pero denotaremos  $\mu_R$  cuando nos refiramos a la función de pertenencia de dicha relación.

Dada la relación binaria difusa  $R$  es posible definir las relaciones binarias complementario  $R^c$  y la inversa  $R^{-1}$  de una relación difusa  $R$  se definen de la siguiente forma:

$$R^c(a, b) = n(R(a, b)), \quad (1.11)$$

$$R^{-1}(a, b) = R(b, a), \quad (1.12)$$

Algunas propiedades básicas de las relaciones binarias difusas son:

**Definición 1.14.** Una relación binaria  $R$  difusa en  $X$  se dice que es:

- *reflexiva* si  $\mu_R(a, a) = 1 \quad \forall a \in X$ .
- *irreflexiva* si  $\mu_R(a, a) = 0, \forall a \in X$ .
- *T-antisimétrica* si para  $a \neq b$  se tiene  $T(\mu_R(a, b), \mu_R(b, a)) = 0$ .
- *asimétrica* si  $T(\mu_R(a, b), \mu_R(b, a)) = 0$  para cada  $a, b \in X$ .
- *S-completa* si para  $a \neq b$  entonces  $S(\mu_R(a, b), \mu_R(b, a)) = 1$ .
- *fuertemente S-completa* si  $T(\mu_R(a, b), \mu_R(b, a)) = 1 \quad \forall a, b \in X$ .
- *T-transitiva* si

$$T(\mu_R(a, c), \mu_R(c, b)) \leq \mu_R(a, b), \quad \forall a, b, c \in X.$$

Para mayor información acerca de las relaciones de preferencia se puede empezar en J. Montero y J. Tejada [92], Montero *et al.* [93], Ovchinnikov [98], S. Ovchinnikov y M. Roubens [100].

### 1.3.1 Estructura de preferencia

La modelización de preferencias es una parte fundamental de varios campos aplicados pero al mismo tiempo tiene interés desde el punto de vista teórico.

Como ya se indicó anteriormente, en la teoría clásica de modelización de preferencias (ver, entre otros, el trabajo de M. Roubens y Ph. Vincke [111]), una relación binaria  $R$  con respecto a cada par de alternativas  $(a, b)$  de un conjunto dado  $X$  se considera como una *relación de preferencia débil*:

$$aRb \iff a \text{ no es peor que } b.$$

Esto implica que  $R$  es una relación *reflexiva*. Asociada a cada relación de preferencia binaria  $R$ , tenemos las siguientes relaciones:

<i>Preferencia estricta:</i>	$aPb \iff aRb \text{ y no } bRa.$
<i>Indiferencia:</i>	$aIb \iff aRb \text{ y } bRa.$
<i>Incomparabilidad:</i>	$aJb \iff \text{no } aRb \text{ y no } bRa.$

Orlovsky, Ovchinnikov, Roubens y Fodor han realizado avances importantes, (entre otros, ver J. C. Fodor [49], J. C. Fodor y M. Roubens [53], [54], S. Ovchinnikov y M. Roubens [100], S. Ovchinnikov [98]) tratando el problema de definir valores de intensidad estricta a partir de preferencias difusas débiles. Sin embargo, nuestro objetivo es definir, a partir de los datos, la estructura de preferencia completa, incluyendo no sólo la preferencia estricta sino también la indiferencia y la incomparabilidad.

En esta memoria se ha analizado únicamente la relación de preferencia estricta.

A continuación se verán algunas propiedades de las funciones de preferencia difusas que



serán útiles para la comprensión de trabajo.

**Definición 1.15.** Una relación difusa  $\mu$  se dice  $\alpha_2$ -antisimétrica si  $R^\alpha$  es antisimétrica para todo  $\alpha > \alpha_2$

**Definición 1.16.** Una relación binaria difusa  $\mu$  definida en un conjunto finito  $X$  es max-min transitiva si

$$\bullet \mu(x, y) \geq \text{Min}\{\mu(x, z); \mu(z, y)\} \quad \forall x, y, z \in X$$

Entonces es trivial demostrar que

**Proposición 1.1.** Una relación binaria difusa  $\mu$  es max-min transitiva si y sólo si  $R^\alpha$  es transitiva  $\forall \alpha \in (0, 1]$

Esta propiedad es desde luego generalizable para la noción de relaciones max-\* transitivas (ver Dubois-Prade [42], por ejemplo).

**Definición 1.17.** Sea  $*$  :  $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  operación binaria en  $[0, 1]$  (con las propiedades usuales), entonces diremos que la relación difusa  $\mu$  es max-\* transitiva si y sólo si

$$\mu(x, y) \geq \mu(x, z) * \mu(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$$

Por tanto, la proposición 1.1 puede generalizarse trivialmente al caso max-\* transitivo.

## 1.4 Teledetección

A lo largo del tiempo se han dado varias definiciones sobre el término *teledetección*. Estas definiciones son ligeramente diferentes, pero todas ellas tienen un denominador común: *obtención de información a cierta distancia sobre el objeto en estudio*. Los problemas de teledetección que se van a estudiar en esta memoria están directamente relacionados con la

observación de elementos de la superficie terrestre por medio de la energía electromagnética reflejada o emitida. Esto nos lleva a definir la teledetección como el conjunto de técnicas que permite obtener información a distancia de las áreas de la superficie terrestre mediante el análisis de la energía electromagnética que las mismas emiten y reflejan.

Se puede encontrar una introducción histórica a la teledetección en los trabajos de Campbell [22], Chuvieco [24], Simonett [121] y Stone [125], entre otros. Un elemento esencial en teledetección es la habilidad para grabar una imagen de la superficie terrestre; por tanto, el punto inicial de la evolución en este campo podría decirse que fue la invención de la fotografía.

En sentido amplio la teledetección no engloba sólo los procesos que permiten obtener una imagen desde el aire o el espacio, sino también su posterior tratamiento, en el contexto de una determinada aplicación. Es de especial interés, entre otros, en los campos de la geografía, biología, edafología, ciencias forestales, agronomía, oceanografía, cartografía e inteligencia militar.

Como ejemplos concretos de aplicaciones de teledetección, se pueden citar:

- Catastro y Planeamiento Urbano
- Inventario regional del medio ambiente para preparar estudios de impacto ambiental.
- Cartografía geológica para la explotación mineral y petrolífera.
- Verificación de contenidos de salinidad en las principales corrientes de agua.
- Cartografía térmica de la superficie del mar.
- Verificación y control de la calidad física del agua, turbidez y contenido de algas.
- Cartografía de la cobertura vegetal del suelo.
- Rápida evaluación de condiciones de estrés en la vegetación, por lo efectos de la sequía o deforestación.

- Cartografía de áreas quemadas y seguimiento de los ritmos de repoblación natural.
- Contribución a la cartografía e inventario de la cobertura y uso del suelo.
- Selección de rutas óptimas para nuevas vías de comunicación.
- Cartografía e inventario de cultivos por especies.
- Predicción del rendimiento de cultivos.

La mayor parte de las aplicaciones arriba reseñadas no son exclusivas de la teledetección espacial, aunque el uso de ésta consigue reducir los costes y el tiempo en obtener resultados. En breves términos, esta técnica aporta, frente a la fotografía aérea, las siguientes ventajas:

- **Cobertura global y periódica de la superficie terrestre.** Gracias al uso de satélites se pueden obtener imágenes repetitivas de la mayor parte de la Tierra, incluso de áreas inaccesibles por otros medios ( zonas polares o desérticas, por ejemplo.)
- **Visión panorámica.** Una sola imagen del satélite NOAA abarca 9 millones de kilómetros cuadrados.
- **Homogeneidad en la toma de datos.** Una gran superficie se detecta por el mismo sensor y en una fracción muy pequeña de tiempo.
- **Información sobre regiones no visibles del espectro.** Los sensores ópticos-electrónicos facilitan imágenes sobre áreas no accesibles con la fotografía convencional: infrarrojo medio y térmico, etc. A cada imagen analizada se le asigna una serie de variables, que se llaman bandas espectrales. Estas bandas del espectro proporcionan una valiosa información para estudios medioambientales, registrando problemas imperceptibles al ojo humano. El formato digital de la imágenes agiliza su tratamiento y reduce costes para integrar los resultados con otro tipo de cartografía más convencional

### 1.4.1 Clasificación en Teledetección

Para la mayoría de usuarios de la teledetección, la clasificación supone la fase más importante en el tratamiento de imágenes digitales. Esto es debido a que los datos que se obtienen de los sensores son medidas relativas, en muchos casos distorsionadas por el clima, atmósfera, y otras condiciones ambientales. Es decir, estos datos obtenidos no tienen sentido por sí solos, es necesario hacer una interpretación. Pero si bien no se puede establecer una medida física (como la humedad, temperatura ...) asociada a cada banda existe una alta correlación positiva entre las bandas y este tipo de medidas. Por ese motivo la clasificación digital no busca patrones concretos que pudieran servir en posteriores estudios, busca patrones válidos para una determinada imagen y un territorio concreto (ver [24, 107]). Así pues, en un primer paso es preferible aplicar un algoritmo no supervisado hasta que el aprendizaje del sistema nos proporcione más información acerca de las clases.

**Definición 1.18. Pixel.** Mínima unidad discriminante en una imagen digital.

**Definición 1.19.** La clasificación de imágenes digitales es el proceso de asignar **pixels** a clases. Cada pixel se trata como una unidad individual compuesta de valores en diferentes bandas espectrales.

En la mayoría de estudios que se desarrollan para la clasificación de imágenes digitales se comparan pixels entre sí o con algunos objetos conocidos, para poder formar grupos de pixels similares en clases dependiendo de algunas categorías de interés. Estas clases forman regiones de un mapa o imagen, de forma que después de la clasificación la imagen digital se presenta como un mosaico de parcelas (regiones) homogéneas (cada una de ellas normalmente serán representadas mediante un color, para poder ser visualizadas por el usuario).

## Capítulo 2

# Dimensión en relaciones de preferencia binarias

En este capítulo se analiza el problema de la representación de relaciones de preferencia binarias a partir de su dimensión. Con el fin de evitar las limitaciones del concepto clásico, se propone un nuevo concepto de dimensión que permite representar no solamente aquellas relaciones que sean órdenes parciales, sino cualquier relación no reflexiva. Finalmente se ven algunas propiedades asociadas a este nuevo concepto y se proponen diversos algoritmos para su cálculo.

### 2.1 El concepto de dimensión

Desde un punto de vista normativo, una hipótesis clave en la modelización de preferencias es la de suponer que las preferencias definen un *orden lineal estricto* (asimétrico, transitivo, y relación binaria completa) [111]. En este sentido, las preferencias pueden ser modelizadas en la recta real. Los órdenes lineales estrictos son considerados en la mayoría de los campos como modelos ideales para los decisores, los cuales son capaces de expresar sus preferencias como un perfecto discriminador ante cada elección binaria. En este caso cualquier problema

de ordenación de decisiones puede ser resuelto. Sin embargo, estos órdenes lineales estrictos no se suelen encontrar en el mundo real. La transitividad e incomparabilidad no puede ser siempre impuesta, ésta es la principal razón por la cual los modelos con alternativas necesitan un estudio con más detalle para conseguir una mejor representación de las preferencias individuales, incluyendo la modelización difusa (ver [55]).

El concepto de dimensión ha sido muy estudiado en el contexto de las relaciones binarias nítidas. Una relación binaria puede verse como un subconjunto  $R \subset X \times X$ . También puede verse como una función

$$\mu^R : X \times X \rightarrow \{0, 1\}$$

donde  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  representa el conjunto finito de alternativas y  $\mu^R(x_i, x_j) = 1$  cuando el par  $(x_i, x_j) \in R$ , y  $\mu^R(x_i, x_j) = 0$  en otro caso.

Cuando se tiene que  $x_i R x_j$ , queremos decir que la alternativa  $x_i$  es estrictamente preferida a la alternativa  $x_j$  (ya que el orden que se considera no es reflexivo), también se puede denotar por  $x_i > x_j$

Una relación de preferencias binaria  $(X, R)$  tiene asociado, de forma directa un digrafo  $G_R = (X, R)$ , donde el conjunto de vértices son las alternativas y los arcos son las relaciones. A lo largo de la memoria cuando se trate con relaciones de preferencia binarias se hablará indistintamente del digrafo o de la relación.

La Teoría de la dimensión fue inicialmente desarrollada por Dushnik-Miller [45] en el año 1941, y solamente es aplicada a órdenes parciales.

Szpilrajn [126] demostró que cualquier orden parcial puede ser representado como intersección de órdenes lineales. Este resultado fue esencial para la posterior definición de dimensión dada por Dushnik-Miller (ver [45]).

**Definición 2.1.** Dado un orden parcial  $R$ . Se define la dimensión de este orden al mínimo

número de órdenes lineales (órdenes parciales completos) cuya intersección es  $R$ .

Sea  $R$  un orden parcial o Poset (Partial Orders Set) con dimensión  $d$ . Cada elemento  $x_i \in X$  puede ser representado en el espacio  $(x_i^1, \dots, x_i^d) \in \mathfrak{R}^d$  de la siguiente forma:

$$x_i R x_j \iff x_i^k > x_j^k \quad \forall k \in \{1, \dots, d\} \quad \forall x_i, x_j \in X$$

(ver Trotter [130]).

En este trabajo se denotará por  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$  al orden lineal  $x_1 > x_2, \dots, x_1 > x_n, \dots, x_2 > x_n, \dots, x_{n-1} > x_n$ .

La intersección de órdenes lineales en un poset, permite contemplar las *incomparabilidades* en la Teoría de la decisión. La dimensión  $d$  de una relación nítida sugiere la existencia de  $d$  criterios subyacentes, y las coordenadas de cada elemento representan el valor de esa alternativa respecto a ese criterio.

Teniendo en cuenta esto, el decisor podrá entonces buscar criterios subyacentes.

El concepto de dimensión en relaciones de preferencia tiene asociado tres problemas internos:

- (i) Un problema de *representación general*: Los órdenes parciales (Las preferencias complejas) tienen que ser representadas en términos de preferencias simples (El operador intersección representa los órdenes parciales con los órdenes lineales).
- (ii) Un problema de *Racionalidad*: En la teoría clásica, las preferencias deben ser representadas en términos de órdenes lineales, que son nuestro núcleo de racionalidad (lo que en la teoría clásica se entiende como *consistencia*). La elección de este átomo de racionalidad debe ser un problema a tener en cuenta.

- (iii) Un problema de *eficiencia*: Basándonos en *el principio de parsimonia*, la representación anterior tiene que ser tan simple y compacta como sea posible, por este motivo se busca la representación minimal.

Desde el punto de vista algorítmico, la Teoría de la dimensión presenta muchas dificultades, Yannakakis [141] demuestra que el problema de determinar la dimensión  $d$  de un orden parcial es un problema  $NP - duro$  si la dimensión es mayor o igual que 3. En esta línea el algoritmo exacto propuesto por Yáñez-Montero [142] permite el cálculo de la dimensión para problemas con dimensiones medias.

**Ejemplo 2.1.** Sea  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  y sea  $P$  un poset en  $X$ :

$$P = \{x_1 > x_2, x_3 > x_4\}$$

$P$  se puede escribir como intersección de los siguientes órdenes lineales:

$L_1 = [x_1, x_2, x_3, x_4]$  y  $L_2 = [x_3, x_4, x_1, x_2]$  Así tenemos que  $\dim(P) = 2$

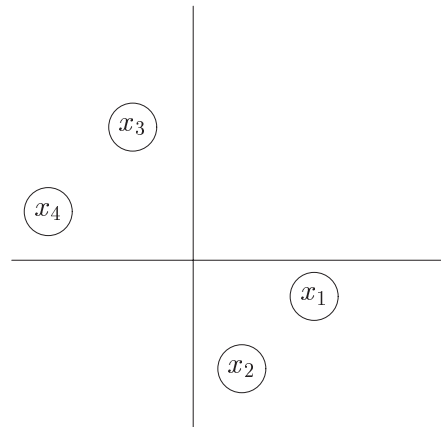


Figura 2.1: Representación de las preferencias del ejemplo 2.1



## 2.2 Representación general de relaciones de preferencia binaria

Como ya se ha dicho anteriormente, la Teoría de la dimensión clásica (nítida) propone la representación de órdenes parciales por medio de órdenes lineales. Entre todas las posibles inconsistencias <sup>1</sup>, solamente la incomparabilidad es modelizada. Para una modelización más realista se debería intentar relajar tanto como sea posible las restricciones acerca de la relación.

En una relación binaria  $R$  se distinguen, a parte de la incomparabilidad, dos diferentes clases de inconsistencias no modelizadas por la definición clásica de dimensión:

- (a) *Ciclos*: Un  $k$ -ciclo es una secuencia  $\{x_1, \dots, x_k\}$  de  $k$  alternativas que verifica que  $x_i R x_{i+1}$  para todo  $i = 1, \dots, k - 1$  y además  $x_k R x_1$ .

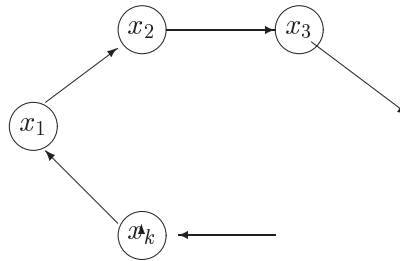


Figura 2.2: Inconsistencia ciclo

- (b) *Intransitividad*: Esta clase de inconsistencias aparece cuando existen tres alternativas  $x_1, x_2, x_3$  verificando  $x_1 R x_2$  y  $x_2 R x_3$  pero no  $x_1 R x_3$

---

<sup>1</sup>En la teoría clásica se entiende como inconsistencia a toda relación que no sea un orden lineal. Así tendremos una inconsistencia cuando aparezcan: intransitividades, incomparabilidad o ciclos

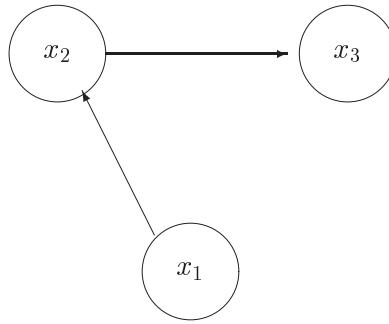


Figura 2.3: Intransitividad

Parece claro que un 1-ciclo puede ser eliminado (si se impone a la relación que sea irreflexiva)  $(x, x) \notin R$  para todo  $x \in X$ .

Para eliminar los 2-ciclos se deben chequear todo par de alternativas, para todos los pares que cumplan  $(x_1, x_2) \in R$  entonces  $(x_2, x_1) \notin R$ , es decir, esta relación de preferencia es asimétrica.

Podría también pensarse que los 3-ciclos en una relación de preferencias no puede darse.

Pero para aquellos ciclos de longitud  $k > 3$  se verifica que a mayor longitud del ciclo más difícil, y menos realista es eliminar estos ciclos de una relación de preferencias (El número de alternativas incrementa la posibilidad de que el decisor cometa este tipo de inconsistencias [87]).

Parece claro que este tipo de inconsistencias (*ciclos, intransitividad*) no siempre pueden ser eliminadas en la práctica, teniendo en cuenta que el decisor no es capaz de chequear sus preferencias para fijar nuestro modelo matemático. Por este motivo se hace necesario dar un nuevo concepto que permita modelizar este tipo de relaciones.

Se consideran a continuación dos posibles situaciones para poder entender la aproximación que en este capítulo se hace.

1.  $X = \{x_1, x_2\}$  y  $R_1$  de forma que  $\mu^{R_1}(x_1, x_2) = \mu^{R_1}(x_2, x_1) = 0$
2.  $X = \{x_1, x_2\}$  y  $R_2$  de forma que  $\mu^{R_2}(x_1, x_2) = \mu^{R_2}(x_2, x_1) = 1$

La primera relación  $R_1$  que se tiene muestra dos alternativas *incomparables*, permitiendo una representación estándar con dimensión 2, se puede observar que  $R_1$  es intersección de dos órdenes

$$\mathcal{C} = \{L_1, L_2\}$$

lineales estrictos  $L_1 = [x_1, x_2]$  y  $L_2 = [x_2, x_1]$ . Así se tiene,

$$R_1 = L_1 \cap L_2$$

En la segunda relación  $R_2$  se tiene un ciclo de dos alternativas, por lo que no se puede tener una representación como intersección de dos órdenes lineales. Sin embargo se tienen dos órdenes lineales  $L_1$  y  $L_2$  que podrían explicar la relación  $R_2$ , si se usa el operador unión:

$$R_2 = L_1 \cup L_2$$

En ambos ejemplos se puede observar que existen dos criterios. Se obtiene así que  $R_1$  y  $R_2$  son explicados por medio de los órdenes lineales  $L_1$  y  $L_2$  operados de distinta forma por medio de la unión y de la intersección.

El siguiente resultado demuestra que una relación de preferencia estricta puede ser representada en términos de uniones e intersecciones de órdenes lineales (ver [61, 62] y [55]): mientras la *incomparabilidad* es explicada mediante la intersección de operadores, la *inconsistencia* (es decir, ciclos y no transitividad) estará explicada con el operador unión.

**Teorema 2.1.** Sea  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  conjunto finito de alternativas, y sea

$$\mathcal{C} = \{L/L \text{ órdenes lineales en } X\} \subset X \times X$$

Entonces, para cada relación binaria no reflexiva  $R$  en  $X$  existe una familia de órdenes lineales  $\{L_{st}\}_{s,t} \subset \mathcal{C}$  de forma que

$$R = \bigcup_s \bigcap_t L_{st}$$

**Demostración 2.1.** Por una parte, si  $R$  es una relación binaria vacía (es decir  $\mu^R(x_i, x_j) = 0 \forall (x_i, x_j)$ ),  $R$  puede ser representado como intersección de dos órdenes lineales

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n] \cap [x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1]$$

En otro caso, sea  $R$  una relación binaria no vacía y sea  $(x_i, x_j)$  un par que verifica que  $\mu^R(x_i, x_j) = 1$ . Entonces definimos el orden parcial  $R^{ij}$  de la siguiente forma:  $\mu^{R^{ij}}(x_i, x_j) = 1$  y  $\mu^{R^{ij}}(x_k, x_l) = 0, \forall (x_k, x_l) \neq (x_i, x_j)$ . Obviamente

$$R = \bigcup_{\{(i,j)/x_i R x_j\}} R^{ij}$$

donde  $R^{ij}$  es un orden parcial, por el resultado de Dushnik-Miller cada orden parcial puede ser representado mediante intersección de órdenes lineales, así tenemos que  $R^{ij} = \bigcap_k L_k^{ij}$ , entonces,

$$R = \bigcup_{ij} \bigcap_k L_k^{ij}$$

◇.

Después de demostrarse que toda relación puede ser representada, mediante uniones e intersecciones de órdenes lineales, se podrá generalizar el concepto de dimensión, inicialmente definido únicamente para una relación transitiva y no reflexiva.

**Definición 2.2.** Sea  $X$  un conjunto finito de alternativas. Se define la *dimensión generalizada* de una relación binaria nítida  $R$  como el mínimo número de diferentes órdenes lineales,  $L_{st}$  tal que

$$R = \bigcup_s \bigcap_t L_{st}$$

Como se puede observar en la demostración del teorema 2.1 visto anteriormente, la representación minimal para el caso extremo de  $R = \emptyset$  es obtenida por medio de intersección de dos órdenes lineales, de este modo  $\dim(R) = 2$ . Para relaciones de preferencia más generales, sin embargo el procedimiento de la demostración del teorema 2.1 no necesariamente encuentra la mínima representación para  $R$ . En realidad este procedimiento nos dará una cota superior para el problema.

A partir de ahora se denota por:

- $\dim(P)$ : Dimensión de un poset en el sentido clásico [45]
- $\text{Dim}(R)$ : Dimensión generalizada de una relación [64].

Veamos a continuación los siguientes ejemplos:

**Ejemplo 2.2.** Sea  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  y sea  $R$  una relación binaria en  $X$ :

$$R = \{x_1 > x_2, x_3 > x_4\}$$

Por el teorema 2.1 se tiene la siguiente descomposición,

$$R = \{x_1 > x_2\} \cup \{x_3 > x_4\}$$

Ahora cada uno de estos posets puede escribirse como intersección de dos órdenes lineales de forma que obtenemos una cota para la dimensión de  $R$ , se sabe que con 3 diferentes órdenes lineales podemos explicar la relación  $R$  :

$$R = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \cap [x_4, x_3, x_1, x_2]\} \cup \{[x_3, x_4, x_2, x_1] \cap [x_1, x_2, x_3, x_4]\}$$

Sin embargo la relación  $R$  define un poset cuya dimensión es igual a 2 :

$$R = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \cap [x_3, x_4, x_1, x_2]\}$$

Existe otro caso extremo para el cual el procedimiento empleado en el teorema 2.1 es muy ilustrativo.

**Ejemplo 2.3.** Supongamos que se tiene la siguiente relación  $\overline{R}$  definida de la siguiente forma  $\mu^{\overline{R}}(x_i, x_j) = 1, \forall i \neq j$ . Entonces

$$x_1 > x_2 = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n] \cap [x_n, x_{n-1}, \dots, x_3, x_1, x_2]$$

y en general,

$$x_i > x_j = [x_i, x_j, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n] \cap [x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_i, x_j] \quad \forall i \neq j$$

Se puede concluir que  $R$  puede ser recubierto por medio de  $n \cdot (n - 1)$  órdenes lineales. Si  $n = 3$  esta representación implica el uso de todos los órdenes posibles en  $X$ . Sin embargo,  $\text{Dim}(\overline{R}) = 2$ , ya que  $\overline{R} = [x_1 \dots x_n] \cup [x_n, \dots, x_1]$ .

**Ejemplo 2.4.** Sea  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  y sea  $R$  una relación binaria nítida definida por la siguiente matriz

$$\mu^R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde se denota,  $\mu_{ij}^R = \mu^R(x_i, x_j)$ .

El digrafo asociado a esta relación se puede ver en la siguiente figura.

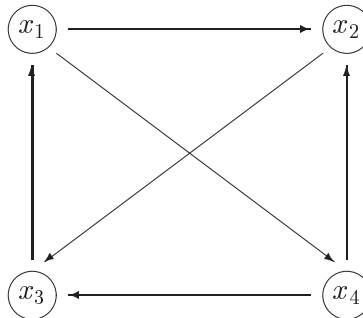


Figura 2.4: Relación binaria

Esta relación binaria  $R$  puede ser representada mediante la unión de tres posets  $R_1, R_2, R_3$  con las siguientes matrices:

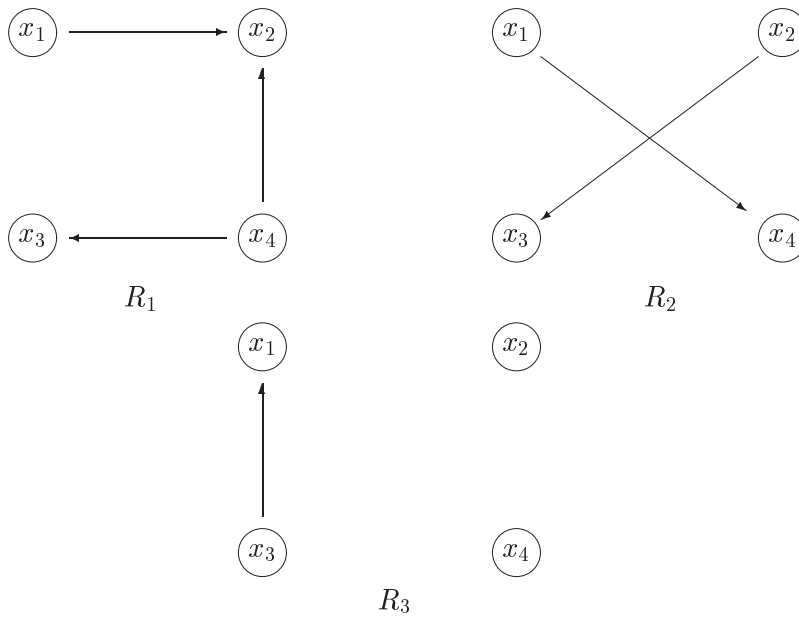


Figura 2.5: Relación binaria descompuesta en órdenes parciales

descomposición en órdenes parciales

$$\mu^{R_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mu^{R_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mu^{R_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Por otra parte, cada uno de estos tres posets puede ser representado como intersección de los siguientes órdenes lineales:

$$R_1 = [x_1, x_4, x_2, x_3] \cap [x_4, x_3, x_1, x_2]$$

$$R_2 = [x_2, x_3, x_1, x_4] \cap [x_1, x_4, x_2, x_3]$$

$$R_3 = [x_4, x_3, x_1, x_2] \cap [x_2, x_3, x_1, x_4]$$

Para este caso la dimensión generalizada es 3.

Aunque cabría esperar que la idea de dimensión generalizada aquí propuesta coincida con la definición clásica en el contexto de órdenes parciales, esto no tiene por que resultar así. Además, la implementación práctica de la dimensión generalizada es susceptible de la misma crítica fundamental en el caso nítido: su complejidad algorítmica. Posibles cotas pueden obtenerse sin embargo adaptando los algoritmos desarrollados en [62] y [142].

Es inmediato demostrar, por ejemplo, que

**Teorema 2.2.** *Sea  $P$  un orden parcial, entonces  $Dim(P) \leq dim(P)$*

**Demostración 2.2.** *Es trivial demostrar que  $Dim(P) \leq dim(P)$  si  $P$  es un poset, ya que la representación minimal para  $P$  en el sentido clásico también nos sirve para dar una cota de  $Dim(P)$ .*

Sin embargo, es esencial observar que nuevo concepto de *dimensión generalizada* no es una extensión del concepto clásico de dimensión: dado un orden parcial, la representación generalizada minimal puede requerir menos órdenes lineales que los que requiere la representación clásica, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.5.** Sea  $X = \{y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n\}$  familia finita de  $2n$  alternativas,  $n \geq 6$ , y consideremos la relación  $P_6$  definida como una *corona* sobre  $X$  (ver Trotter [130], página 34):

$\mu^{P_6}(y_i, z_j) = 1$  si  $i \neq j$  y  $\mu^{P_6}(x, x') = 0$  en otro caso. Se puede ver, e.g., [130])  $dim(P_6) = n$ . Pero  $Dim(P_6) < n$ .

En efecto, tomemos  $k$ ,  $2 < k < n - 2$ , y consideremos dos subórdenes parciales  $P$  and  $Q$  de  $P_6$  con

- $\mu^P(y_i, z_j) = 1$  si  $i \leq k < j$  o  $j \leq k < i$  ( $\mu^P(x, x') = 0$  en otro caso), y
- $\mu^Q(y_i, z_j) = 1$  si  $i \neq j$  y  $i, j \leq k$  o  $i, j > k$  ( $\mu^Q(x, x') = 0$  en otro caso).

Es fácil comprobar que  $\dim(P) = 2$ , mientras que  $\dim(Q) = \max(k, n - k)$ . Como

$$P_6 = P \cup Q$$

se ha logrado una representación generalizada con

$$\max(k, n - k) + 2 < n$$

órdenes lineales, y todavía algunos de estos órdenes pueden estar repetidos, o simplemente no tratarse de una representación minimal. En cualquier caso,  $\text{Dim}(P_6) < \dim(P_6)$ .

**Teorema 2.3.** *Sea  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  una familia finita de alternativas,  $n \geq 4$ , y sea  $P$  poset definido en  $X$ . Entonces*

$$\text{Dim}(P) \leq \dim(P) \leq n/2$$

**Demostración:** la primera igualdad es inmediata de las definiciones de dimensión clásica y generalizada; para la segunda desigualdad, ver Trotter [130].  $\diamond$

Además, como ya se ha visto, puesto que cada arco se puede representar como intersección de dos órdenes lineales,  $\text{Dim}(R) \leq 2n(n - 1)$  sea cual sea la relación binaria nítida y no reflexiva  $R$  siendo  $n = |X|$ .

Sin embargo, esta nueva definición del concepto de dimensión presenta algunos de los

problemas que presentaba la definición clásica, la complejidad algorítmica es alta.

## Complejidad del problema

Dada una relación de preferencias binaria y no reflexiva  $R \subset X \times X$ . El problema de la dimensión generalizada es el de encontrar el mínimo número  $Dim(R)$  de órdenes lineales  $L_{st}$  tal que

$$R = \bigcup_s \bigcap_t L_{st}$$

Denotamos por DGDP *decision generalized dimension problem* al problema de decisión asociado. Se demostrará que este problema de decisión pertenece a la clase  $NP$ , es decir, la verificación dada una solución, a la cuestión "Es  $Dim(R) \leq k$ " puede ser hecha en tiempo polinomial.

**Proposición 2.1.**  $DGDP \in NP$

**Demostración:**

Dada una familia de órdenes lineales  $L_{st}$  tal que  $R = \bigcup \bigcap L_{st}$ , la verificación puede ser hecha en tiempo polinomial y por tanto pertenece a la clase  $NP$ .  $\square$

**Teorema 2.4.**  $DGDP \in NP - \text{completo}$  .

**Demostración:**

Yannakakis [141] demuestra que el problema de decisión  $dim(P) \leq k$  es  $NP - \text{completo}$  para cualquier  $k$  fijo, siendo  $k \geq 3$ . De hecho, el problema de decisión asociado a la dimensión

clásica para un orden parcial  $P$ , siendo  $\dim(P) \geq 3$ , es  $NP - \text{completo}$ .

Se va a demostrar que para cualquier poset de dimensión 3 se tiene que  $\text{Dim}(P) = \dim(P)$ . Así se concluirá que  $DGDP$  es un problema  $NP - \text{completo}$ .

Sea  $P$  poset tal que  $\dim(P) = 3$ . Se verifica entonces que  $\text{Dim}(P) \leq \dim(P)$ , supongamos que  $\text{Dim}(P) < 3$  y se llegará a una contradicción.

No puede ser  $\text{Dim}(P) = 1$ , a no ser que  $P$  sea orden lineal, y entonces se tendría que  $\dim(P) = 1$ .

Por tanto  $\text{Dim}(P) = 2$ . Sea  $k$  el número de uniones asociado a  $\text{Dim}(P)$ , hay dos casos:

- **1 Caso**  $k = 1$  entonces  $\dim(P) = 2$  (contradicción, ya que  $\dim(P) = 3$ ).
- **2 Caso**  $k = 2$

Para este caso, salvo simetría sólo tenemos dos posibles representaciones:

- $P = L'_1 \cup L'_2$ ,  $P$  sería unión de dos órdenes lineales distintos, por tanto  $P$  no sería un poset.
- $P = L'_1 \cup (L'_2 \cap L'_1)$ . Es este caso  $P = L_1$  y entonces  $\dim(P) = 1$

Así pues, para posets de dimensión 3 el problema de dimensión clásico coincide con el nuevo problema. □

A pesar de todo, se puede conseguir una buena cota para casos medianos mediante la combinación de los algoritmos que se presentan en [62] y [142].

### 2.3 Concepto de dimensión no basado en órdenes lineales

La mayor parte de la literatura presupone, y así se ha supuesto hasta ahora incluso en esta memoria, que la idea de racionalidad radica únicamente en la noción de orden lineal. De este modo se puedan representar las alternativas como en la recta real. Sin embargo, la *racionalidad* depende del contexto, y puede variar de una aplicación a otra, o incluso evolucionar en el tiempo; ver, por ejemplo, Montero-Cutello [30].

Así pues, no es descabellado pensar que un criterio no tiene porque ordenar las alternativas como si de un orden lineal se tratara. Por ejemplo, supongamos que se quiere comprar una casa, y entre muchos criterios, uno de ellos es la calidad del vecindario. Con este criterio puede ocurrir que sea imposible discriminar entre un barrio en las afueras donde no hay problemas de ruido, delincuencia etc. y otro barrio, donde las comunicaciones sean mucho mejores pero se tengan problemas de ruido, aparcamiento. Este criterio podría ser un Poset. Desde este punto de vista cambiaríamos el átomo de racionalidad de órdenes lineales por el de órdenes parciales.

En general, se puede decir que cada decisor tiene una familia de estructuras de preferencia que considera absolutamente racionales (por ejemplo, todos los órdenes lineales). Esto es lo que se puede denotar por *núcleo* de racionalidad. A partir de ahí se define lo que se podría llamar la familia *representable* de preferencias (primero como intersecciones de elementos en el núcleo, caso clásico y luego como uniones de intersecciones, caso generalizado).

No se puede tomar como base de racionalidad cualquier familia de relaciones binarias. Pero tampoco se debe aceptar sin más que los órdenes lineales sean el único punto de partida posible. Por ejemplo, en [62] se está de facto admitiendo que todo orden parcial es absolutamente racional (el núcleo de racionalidad no tiene por qué estar formado por relaciones completas, sino simplemente las que son transitivas).

El siguiente resultado muestra que tenemos un amplio potencial de núcleos de racionalidad a partir de los cuales cualquier relación de preferencia sigue siendo representable.

**Teorema 2.5.** *Sea  $\mathcal{C}$  familia no vacía de preferencias nítidas definidas sobre una familia finita de alternativas de modo que*

$$\cap\{R \in \mathcal{C} \mid (a, b) \in R\} = \{(a, b)\} \quad \forall (a, b) \in X \times X$$

*Entonces cualquier relación binaria de preferencia puede representarse como unión de intersecciones de elementos en dicho núcleo.*

**Demostración:**

Cualquier relación de preferencia, considerada como un conjunto de alternativas, se puede representar como unión de las correspondientes intersecciones.  $\square$

**Teorema 2.6.** *Sea  $X$  finito, y sea  $\mathcal{C}$  una familia de preferencias asimétricas en  $X$ ,  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X \times X)$ . Denotamos por  $\pi : X \rightarrow X$  a una permutación, y supongamos que*

$$C \in \mathcal{C} \iff C_\pi \in \mathcal{C}$$

*para todo  $\pi$ , es decir,*

$$(a, b) \in R \iff (\pi(a), \pi(b)) \in R_\pi$$

*Se denota por  $\Delta = \{R \in \mathcal{C} \mid (a, b) \in R\}$ . Si  $|\Delta| > 1$  entonces, cualquier relación binaria nítida puede ser representada por medio de uniones de intersecciones de elementos en  $\mathcal{C}$ .*

**Demostración:**

Se demostrará que

$$\bigcap_{C \in \Delta} C = \{(a, b)\}$$

Sea  $C \in \mathcal{C}$ , como  $|\Delta| > 1$  existen al menos dos relaciones distintas  $C$  y  $C'$  distintas en  $\Delta$ .

- Existe  $C' \in \Delta$  con  $(c, d) \in C - C'$  y  $\{c, d\} \cap \{a, b\} = \emptyset$ . En este caso, es claro que si  $(x, y) \in C$  con  $\{x, y\} \cap \{a, b\} = \emptyset$ , existirá otro  $C_\pi \in \Delta$  tal que  $(y, x) \in C_\pi$ , y por tanto,  $(x, y) \notin C_\pi$ : si más que considerar  $\pi$  tal que  $\pi(a) = a, \pi(b) = b, \pi(y) = c, \pi(x) = d$ .

Por otra parte si  $\{x, y\} \cap \{a, b\} \neq \emptyset$ , existen dos posibilidades: o ni  $a||c$  y  $b||d$  o existe una cadena de orden dos que contiene a tres de las cuatro alternativas.

- En el primer caso, es decir,  $(a, c), (c, a), (b, d), (d, b) \notin C$ , de nuevo podemos asegurar que

$$(x, y) \notin \bigcap_{C \in \Delta} C$$

- En el segundo caso, o  $(a, c), (c, d) \in R$ , o  $(c, a), (a, b) \in C$ , o  $(c, d), (d, b) \in C$ , o  $(a, b), (b, d) \in C$ . Si por ejemplo,  $(a, c), (c, d) \in C$ , se puede considerar una permutación  $\pi$  tal que  $\pi(a) = a, \pi(b) = b, \pi(c) = x$  de forma que  $(a, x) \in C_\pi$  pero  $(x, a) \notin C_\pi$ ; pero si se considera una permutación  $\pi$  tal que  $\pi(a) = c, \pi(b) = d, \pi(c) = x$  entonces  $(x, a) \in C_\pi$  pero  $(a, x) \notin C_\pi$ . De forma similar se puede construir una permutación de forma que se pueda concluir que

$$(x, y) \notin \bigcap_{C \in \Delta} C$$

para todos  $(x, y) \neq (a, b)$ .

- En otro caso, en  $\Delta$  no existe  $C'$  con la condición de que  $\{c, d\} \cap \{a, b\} \neq \emptyset$ . En este caso la relación  $C$  está formada por cadenas no transitiva de orden tres.

En esta situación es fácil ver que:

$$\bigcap_{R \in \Delta} R \subseteq \{(a, b)\}$$

Así pues,

$$\bigcap_{C \in \Delta} C = \{(a, b)\}$$

□

Por tanto, lo que se entiende por consistencia en la teoría clásica podría relajarse dando así lugar a diferentes núcleos de racionalidad. El caso más común es que el decisor defina una *estructura*, quedando los elementos sujetos a permutaciones con esa misma estructura básica (todos los órdenes lineales presuponen una representación en una línea recta, por ejemplo): la familia  $\mathcal{C}$  estaría formada por las permutaciones de esa estructura. Es decir, que

$$R \in \mathcal{C} \Rightarrow R_\pi \in \mathcal{C}$$

para toda  $R_\pi$  obtenida como alguna permutación  $\pi$  en el conjunto de alternativas, i.e.,

$$(a, b) \in R \iff (\pi(a), \pi(b)) \in R_\pi$$

Hay muchas estructuras nítidas que pueden servirnos como núcleo de racionalidad. La familia formada por todos los órdenes lineales está en un extremo, pero observar que, según el resultado anterior, sería lícito trabajar incluso con estructuras que contengan ciclos *largos*



de alternativas diferentes.

**Ejemplo 2.6.** En muchas ocasiones un decisor no es capaz de entender, ordenar o chequear de forma lineal un número alto de alternativas, por diversos motivos: O bien porque el número es demasiado alto y le resulta inabordable el problema o bien porque existen algunas alternativas que son incomparables, o simplemente por la alta probabilidad de equivocarse a la hora de ordenar. Por estos motivos un posible núcleo de racionalidad más abordable podría ser un orden lineal, pero de tamaño menor.

Un caso de especial interés podrían estar formado por las permutaciones de ordenes lineales de tamaño  $k$ .

**Definición 2.3. Orden lineal de tamaño k**

Sea  $X = \{x_1 \dots x_n\}$  conjunto de alternativas posibles. Una relación  $R$  es un orden lineal de tamaño  $k$  si verifica:

- $k$  alternativas están relacionadas mediante un orden lineal.
- El resto de las alternativas ( $n-k$ ) son incomparables a todas las alternativas.



Figura 2.6: Orden lineal de tamaño 4

La familia de permutaciones de todos los órdenes lineales de tamaño  $k$  pertenece al conjunto de átomos de racionalidad definidos anteriormente ya que obviamente se verifica:

$$(a, b) \in R \iff (\pi(a), \pi(b)) \in R_\pi$$

En los casos extremos:

- $k=1$  representamos la relación no reflexiva como el conjunto de preferencias que componen la relación.
- $k=n$  tenemos los órdenes lineales.

**Ejemplo 2.7.** Sea  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$  conjunto de alternativas y sea  $R$  una relación binaria nítida definida por la siguiente matriz

$$\mu^R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde se denota,  $\mu_{ij}^R = \mu^R(x_i, x_j)$ .

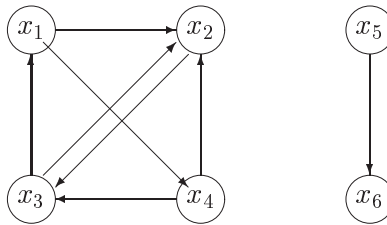


Figura 2.7:

Supongamos que se escoge como átomo de racionalidad los órdenes lineales de tamaño 3. La intersección de órdenes lineales de tamaño 3 da lugar a poset de tres alternativas:

- Órdenes lineales de tamaño 3.

- Relaciones con un solo arco.
- Relaciones transitivas con dos arcos.
- Relación vacía.

Así pues, en la representación propuesta (como uniones de intersecciones) se tendrá que expresar la relación  $R$  como unión de órdenes lineales y aristas. Un algoritmo que parece natural proponer es el de encontrar todos los órdenes lineales de tamaño 3 primero, para luego representar los arcos no contenidos en órdenes lineales de orden 3.

En este ejemplo es fácil comprobar que así se encuentra la representación óptima.

$R$  puede escribirse como unión de  $R_1, R_2, R_3$  y  $R_4$  donde:

$$\mu^{R_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

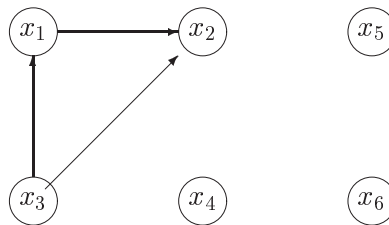


Figura 2.8:

$$\mu^{R_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

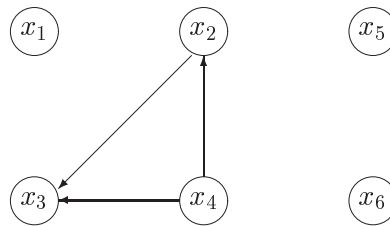


Figura 2.9:

$$\mu^{R_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

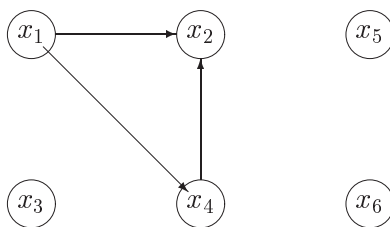


Figura 2.10:

$$\mu^{R_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

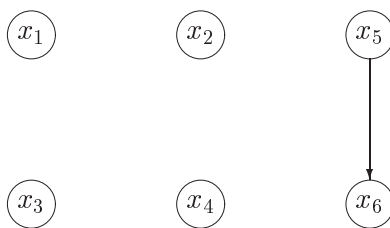


Figura 2.11:

Esta representación utiliza 5 núcleos de racionalidad distintos ya que

$$R_4 = [x_1, x_5, x_6] \cap [x_5, x_6, x_1]$$

$$R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup ([x_1, x_5, x_6] \cap [x_5, x_6, x_1])$$

También puede observarse que, para este núcleo de racionalidad, la representación es minimal.

En este caso, se puede comprobar que la dimensión generalizada usando como núcleo de racionalidad órdenes lineales tendría dimensión menor.

Esta propiedad no será cierta en general. La representación mediante órdenes lineales podrá ser mayor, menor o igual que la representación mediante órdenes lineales de tamaño tres en función del caso que tengamos.

**Ejemplo 2.8.** Otro caso de interés podrían estar formado por las permutaciones de una estructura jerárquica (ver, [58]).

Cuando se tienen muchas alternativas, una técnica para abordar el problema de dimensión puede ser el de empaquetar aquellas alternativas que se encuentren en un mismo nivel (entendiendo que entre ellas son incomparables), con la intención de que los paquetes ahora se orden de una forma conocida. De este modo se puede estudiar el problema de representación de esos paquetes. En esta línea aparecen las estructuras jerárquicas.

**Definición 2.4.** Una estructura jerárquica es un orden parcial  $R$  tal que existe una partición del conjunto de alternativas

$$X = \cup_{j=1}^k H_j \quad / \quad H_i \cap H_j = \emptyset, \forall i \neq j$$

de modo que

$$R = [\cup_{j=1}^k P_j] \cup P_0$$

donde cada  $P_j$  define un subposet  $H_j$  y

$$P_0 = \{(x, y) / x \in H_i, y \in H_j, i < j\}$$

Las estructuras jerárquicas se pueden organizar como órdenes lineales de posets (cada  $H_j$  representará un nivel en  $X$ ). Si cada uno de estos niveles  $H_j$  contiene un único elemento, nuestra estructura jerárquica es un orden lineal. Si  $k = 1$ , se trata de un orden parcial sin más.

**Teorema 2.7.** *Sea  $(X, R)$  una estructura jerárquica con  $k$  niveles. Entonces*

$$Dim(R) \leq \max_{j=1, \dots, k} \{dim(P_j)\}$$

**Demostración:** directa gracias a Hiraguchi (ver [58], página 136), donde la *estructura organizadora* no era necesariamente un orden lineal sino un poset arbitrario (cada  $P_j$  puede ser para Hiraguchi un nodo de un orden parcial cualquiera).  $\diamond$

En cualquier caso, es fácil intuir que dentro de estas estructuras jerárquicas van a aparecer los *patrones* de racionalidad en principio más frecuentes.

**Observación.** Otra posibilidad a tener en cuenta, como ya se ha comentado, es tratar de eliminar las inconsistencias que se refieran a ciclos largos (ver [87]). Los ciclos largos son desde luego muy difíciles de manejar para un decisor estándar, que debe tener una intuición simultánea de toda la familia de alternativas. Así, por ejemplo, se podría admitir dentro de nuestro núcleo de racionalidad los ciclos de una determinada longitud. Esto lo podríamos

lograr considerando como parte del núcleo de racionalidad solamente las cadenas de una cierta longitud, declarando la incomparabilidad con el resto de alternativas: la representación estaría en este caso formada por *cajas* de tamaño acotado. Quizá esta opción podría ser un camino para escapar a los problemas de complejidad que el cálculo de toda dimensión plantea inicialmente.

## 2.4 Algoritmo

El concepto de dimensión generalizado permite la representación de cualquier relación no reflexiva, en esta sección se plantean diversas heurísticas para su cálculo.

La idea de orden parcial maximal (ver ver [10, 47, 106, 62]) responde a la imposibilidad de añadir un arco a la relación de forma que se sigan manteniendo las propiedades de orden parcial.

El algoritmo propuesto por González-Pachón et al. ([62]) necesita algunos resultados y modificaciones para poder ser extendido al caso en que tengamos relaciones no reflexivas. En esta sección se presenta un algoritmo que encuentra una buena cota mediante el citado algoritmo combinado con el algoritmo propuesto por Yáñez-Montero en [142].

Como se ha visto en la sección 2.3 de este capítulo, toda relación no reflexiva puede representarse como unión de intersección de órdenes lineales: por tanto, toda relación se podrá escribir como unión de órdenes parciales. Nuestro objetivo para obtener una cota de la dimensión será en una primera fase representar toda relación mediante uniones de órdenes parciales *maximales*, para luego obtener una representación por medio de uniones de intersecciones.

Por tanto, en una primera fase se tratará de empaquetar la mayor cantidad de preferencias de forma *racional*, entendiendo por un conjunto de preferencias racionales cuando forman un poset.



Antes de mostrar el algoritmo presentado en esta sección se verán algunas definiciones básicas.

**Definición 2.5.** Dada una relación binaria no reflexiva  $R$ , se define el conjunto de órdenes parciales contenidos en  $R$  y se denota por  $P(R)$ .

**Definición 2.6.**  $P^*$  Es un orden parcial maximal de  $R$  si:

- $P^* \in P(R)$
- $\nexists P' \in P(R)$  que verifique que  $P^* \subset P'$

Denotamos por  $P(R)^* = \{P^* \in P(R) \mid P^* \text{ es maximal}\}$ .

**Teorema 2.8.** Dada  $R$  una relación no reflexiva, se tiene que

$$R = \bigcup_{P^* \in P(R)^*} P^*$$

**Demostración:**

Demostraremos solamente que

$$R \subset \bigcup_{P^* \in P(R)^*} P^*$$

El otro contenido se tiene trivialmente por la definición de los  $P(R)^*$

Sea  $(x_i, x_j) \in R$ , consideramos la relación  $R_{ij} = \{(x_i, x_j)\}$ . Esta relación es un orden parcial en  $R$ . Sea  $R_{ij}$  un orden maximal de  $R$  que contiene a  $R_{i,j}$  (que siempre existe). De esta forma tenemos  $(x_i, x_j) \in R_{ij} \in P(R)^*$ . Luego el otro contenido también se da.  $\square$

Una vez demostrado que toda relación se puede escribir como unión de posets maximales, estamos en condiciones de presentar un algoritmo que permite esta representación.

Este algoritmo utiliza una estrategia *voraz*: irá añadiendo arcos a la relación siempre y cuando sea posible, chequeando las consecuencias al añadir o quitar un arco.

Sea  $G_R = (X, R)$  digrafo asociado a la relación de preferencias  $R$

Denotaremos por  $m = |R|$ , al número de relaciones binarias, por  $Cont$  al número de arcos no asignados, y por  $H(etiq) = (X, K)$  al digrafo parcial de  $G_R$  donde:

- $K$  es el conjunto de arcos asignados.

El pseudocódigo del núcleo del algoritmo es el siguiente:

**Proc. Maximal(G,etiq)**

Hacer  $etiq(e_1) = 1$

**do**  $i = 1, m$

**if** ( $etiq(i) = 0$ ) **then**

$etiq(i) = 1$

**if** (En  $H(etiq)$  existen ciclos de longitud 2) **then**

$etiq(i) = 0$

**else**

**call** Transitividad( $H(etiq), etiq(i), i, boolean,$ )

**if** ( $boolean = false$ ) **then**

$etiq(i) = 0$

**else**

Añadir los arcos necesarios para la transitividad.

**end if**

**end if**

**end if**

**enddo**

El procedimiento *Transitividad* calcula la relación minimal transitiva que contiene a la relación de preferencias binaria que estamos modelizando mediante el digrafo  $H(etiq)$

**Proc. Transitividad(H(etiq),etiq(i),i;boolean,)**

Chequeo para la existencia de circuitos.

```

if (Existen ciclos) then (boolean = false y etiq(i) = 0)
else
  do l=1,n
    do h=1,n
      if (etiq(l, h) = 1) then
        do k=1,n
          if (etiq((l, h)) = 1 y etiq((h, k)) = 1) then
            etiq(l, k) = 1
            if (Adyacen(l, k) ≠ 1) then (boolean = false etiq(i) = 0).
            end if
          end if
        enddo
      enddo
    enddo
  enddo
end if
end if

```

Una vez desarrollado el algoritmo que nos representa una relación como unión de posets maximales, basta con aplicar el algoritmo visto en [142] para obtener una cota de la dimensión definida en este capítulo.

A continuación aplicamos el algoritmo presentado a una relación de preferencias.

**Ejemplo 2.9.** Sea  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  y sea  $R$  una relación binaria nítida definida por la

siguiente matriz

$$\mu^R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde se denota,  $\mu_{ij}^R = \mu^R(x_i, x_j)$ .

El digrafo asociado a esta relación se puede ver en la siguiente figura.

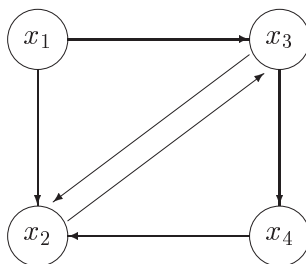


Figura 2.12: Relación binaria

Supongamos que la ordenación de arcos es la lexicográfica. Así primero irá la arco(1,2), luego la (1,3) y así sucesivamente.

**Primera Iteración.** La arco(1,2) se etiqueta.

1 Iteración

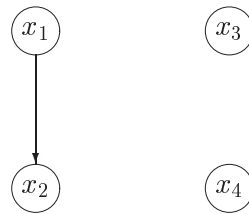


Figura 2.13: Relación binaria

**Segunda Iteración.** La arco(1,3) se etiqueta.

2 Iteración

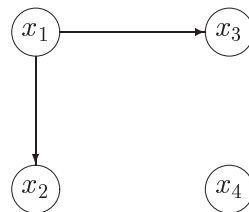


Figura 2.14: Relación binaria

**Tercera Iteración.** La arco(2,3) se etiqueta.

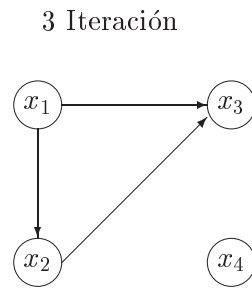


Figura 2.15: Relación binaria

**Cuarta Iteración.** Al intentar añadir la arco(3, 2) se forma un ciclo de tamaño dos, por tanto  $etiq(3, 2) = 0$ . La arco(3, 4) no forma un ciclo de tamaño dos, luego en un principio se etiqueta. Sin embargo cuando llamamos al procedimiento transitividad, la clausura transitiva no puede formarse, entonces no se etiqueta. Lo mismo pasa con el arco (4, 2). Se termina con todos los arcos, luego este poset es maximal.  $Cont = 3$ .

**Quinta Iteración.** Como  $Cont = 3$  todavía nos quedan tres arcos por empaquetar. Para el cálculo del siguiente poset maximal, empezamos con un arco que no haya sido etiquetado como es el (3, 2).

**Sexta Iteración.** Añadimos el arco (3, 4).

**Séptima Iteración.** Añadimos el arco (4, 2).

La descomposición hecha da lugar a dos posets maximales  $R_1$  y  $R_2$  donde:

$$\mu^{R_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mu^{R_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = ([x_1, x_2, x_3, x_4] \cap [x_4, x_1, x_2, x_3]) \cup ([x_1, x_3, x_4, x_2] \cap [x_3, x_4, x_2, x_1])$$

Se puede observar que este algoritmo es polinomial, además se podría aplicar la misma filosofía para desarrollar algoritmos que permitan una representación como unión de relaciones que cumplan otras propiedades.

También puede pensarse en desarrollar un algoritmo como el visto en [61] en el que la unión de los posets se hace de forma disjunta. En este algoritmo no se garantiza obtener un poset maximal tal y como lo hemos definido.

**Observación:** Este algoritmo obtiene una representación de una relación  $R$  como unión de posets maximales. Esta representación no tiene porqué coincidir con la representación asociada a la  $Dim(R)$ , es decir la que minimiza el número de órdenes lineales  $L_{ST}$  tal que  $R = \cup \cap L_{ST}$ .

Concretamente en el ejemplo (2.5), al ser  $R = P$  un poset sólo el operador intersección es utilizado y esta representación utiliza más órdenes lineales que  $Dim(P)$  ( $Dim(P) = 5 < dim(P) = 6$ ).



## Capítulo 3

# Dimensión en relaciones de preferencia difusas

La mayoría de los problemas de decisión asociados a relaciones de preferencia vienen dados en términos de relaciones de preferencia difusas. Uno de las principales críticas que se le achacan a las relaciones de preferencia difusas es que son difíciles de comprender e interpretar. Nuestro objetivo en este capítulo es dar algunas herramientas útiles para la comprensión de este tipo de relaciones a partir del análisis de su dimensión.

Un problema específico que queremos resolver es el de la comprensión de las preferencias difusas, dado que gran parte de los problemas de decisión con los que nos encontramos parten con información constituida por preferencias difusas.

Una vez generalizado el concepto de dimensión en la teoría clásica, se puede abordar sin restricciones de carácter teórico la definición de dimensión. Y entonces se podrá abordar el análisis de la dimensión para la secuencia de  $\alpha$ -cortes de una relación de preferencia difusa.

En este capítulo, al igual que se hacía en el anterior, se recalcará el hecho de que la idea de dimensión es efectivamente relativa a una idea previa de racionalidad, pero que esa racionalidad no es única (ver [30] y otros trabajos relacionados como [88]).

### 3.1 Representación de relaciones de preferencia max-min transitivas

Dado un conjunto finito  $X$  de alternativas, una relación de preferencias difusas en  $X$  es un subconjunto difuso del producto cartesiano  $X \times X$  siendo este conjunto caracterizado a través de su función de pertenencia

$$\mu : X \times X \rightarrow [0, 1]$$

de forma que  $\mu(x_i, x_j)$  representa el grado con el que la alternativa  $x_i$  es preferida a  $x_j$  (ver [148]). Asumiremos que esta intensidad es referida a la preferencia estricta de forma que  $\mu(x_i, x_j)$  representa el grado con el que la afirmación  $x_i > x_j$  es cierta. En consecuencia,

$$\mu(x_i, x_i) = 0 \quad \forall x_i \in X$$

Al igual que se tenía en el caso nítido, asociado a una relación de preferencias difusas se tendrá un digrafo valorado  $G_R = (X, R, \mu)$ . Denotaremos de aquí en adelante por  $\mu_{ij} = \mu(x_i, x_j)$ . Así pues, se hablará indistintamente de la relación de preferencias difusas o de la matriz  $\mu$ .

Una vez que  $\alpha \in (0, 1]$  ha sido fijado, el  $\alpha$ -corte de la relación de preferencia valorada  $\mu$  es definido como una relación binaria nítida  $R^\alpha$  en  $X$ :

$$x_i R^\alpha x_j \iff \mu(x_i, x_j) \geq \alpha$$

**Ejemplo 3.1.** Sea

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0.7 & 0.8 \\ 0.3 & 0 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

La relación difusa definida en  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$

Para  $\alpha = 0.35$ , se define la relación binaria nítida  $R^{0.35}$  resulta

$$R^{0.35} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Desde luego,  $R^{0.35}$  no verifica la asimetría, pues existen dos elementos  $x_2, x_3 \in X$  tales que  $x_2 R^{0.35} x_3$  y  $x_3 R^{0.35} x_2$ . Este problema estará presente, en general, para valores bajos de  $\alpha$ . Para estos valores no podremos asignar ninguna dimensión en el sentido clásico, dado que las relaciones asociadas no definen un orden parcial.

En el ejemplo 3.1 se puede ver que para valores de  $\alpha$  superiores a 0.4 desaparecen los ciclos de orden 2. En general se tiene el siguiente resultado, que se demuestra fácilmente.

**Proposición 3.1.** *Sea  $R$  una relación de preferencias difusas. Entonces  $R^\alpha$  es asimétrica para todo  $\alpha > \alpha_2$  siendo*

$$\alpha_2 = \max_{i < j} \min\{\mu(x_i, x_j), \mu(x_j, x_i)\}$$

Sin embargo, el hecho de que  $\alpha > \alpha_2$  no implica que podamos calcular la dimensión en el sentido clásico para  $R^\alpha$ .

**Ejemplo 3.2.** Sea  $\mu$  la relación difusa en  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$  definida por

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

que verifica que  $\alpha = 0.4$ . La relación

$$R^{0.55} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

no es transitiva:

$$x_1 R^{0.55} x_2 \quad x_2 R^{0.55} x_3$$

al no verificar que  $x_1 R^{0.55} x_3$ .

**Definición 3.1.** Una relación binaria difusa  $\mu$  definida en un conjunto finito  $X$  es max-min transitiva si

- $\mu(x, y) \geq \text{Min}\{\mu(x, z); \mu(z, y)\} \quad \forall x, y, z \in X \text{ distintos}$

Es fácil demostrar que

**Proposición 3.1.** Una relación binaria difusa  $\mu$  es max-min transitiva si y sólo si  $R^\alpha$  es transitiva  $\forall \alpha \in (0, 1]$

La transitividad de la familia de relaciones nítidas  $\{R^\alpha, \alpha \in (0, 1]\}$  debe estar relacionada con la transitividad de la relación difusa  $\mu$ . Aunque se pueden encontrar en la literatura diversas formalizaciones de transitividad difusa (ver [91]), la definición más extendida es la *max-min transitiva*.

**Corolario 3.1.** *Sea  $\mu$  una relación difusa max-min transitiva. Entonces  $R^\alpha$  será un orden parcial para todo  $\alpha > \alpha_2$ .*

Para aquellos casos en los que  $R^\alpha$  sea un orden parcial (asimétrica, y transitiva) se puede definir la dimensión  $d(\alpha)$ . La función de dimensión ha sido en este sentido definida como

$$d : [0, 1] \rightarrow N$$

con  $d(\alpha) = \dim(R^\alpha)$  para aquellos  $\alpha$  en que la dimensión esté bien definida.

En la literatura se pueden encontrar diferentes aproximaciones, para tratar el problema de la dimensión con preferencias difusas en función de diferentes puntos de vista. Por ejemplo, Adnadjevic [2] propone una definición alternativa para la dimensión de relaciones de preferencia difusas basadas en la noción *multicadenas*, pero asumiendo propiedades de consistencia fuertes para las relaciones de preferencia del decisor. Por el contrario Ovchinnikov [98] propone un concepto de dimensión diferente en términos de una representación subyacente (interna) que parece ser demasiado difícil de llevar a cabo por los decisores. La misma crítica se puede hacer a Fodor-Roubens [55] y Doignon-Mitas [39] (ambos basados en resultados previos de Valverde [131]).

La aproximación nítida aplicada a todos los  $\alpha$ -cortes de una relación de preferencia, como la propuesta en [94], parece más ventajosa para los decisores en la práctica, y de hecho se tendrá en cuenta para obtener cotas operativas. Sin embargo, esta aproximación requiere las hipótesis de asimétrica y transitividad para cada  $\alpha$  corte. En el caso de que nuestra relación de preferencia sea max-min transitiva  $R^\alpha$  es un orden parcial mientras todos los  $\alpha$  cortes no muestren ciclos de orden 2.

Así, si  $\mu$  es max-min transitiva podemos considerar la dimensión de  $R^\alpha$  para todo  $\alpha > \alpha_2$

Siguiendo a Trotter [130], a partir de la dimensión de un poset cada elemento  $x \in X$

puede ser representado en el espacio

$$\mathfrak{R}^{d(\alpha)}$$

de modo que

$$x = (x_1^\alpha, \dots, x_{d(\alpha)}^\alpha) \in \mathfrak{R}^{d(\alpha)} \quad \forall x \in X$$

donde

$$xR^\alpha y \iff x_i^\alpha > y_i^\alpha \quad \forall i \in \{1, \dots, d(\alpha)\} \quad \forall x, y \in X$$

Habría entonces que suponer que existen al menos  $d(\alpha)$  criterios subyacentes de tal manera que todos los elementos de  $X$  están ordenados de acuerdo con cada uno de estos criterios.

En el ejemplo 3.1,  $\alpha_2 = 0.4$  y entonces podemos distinguir los siguientes casos:

- $\alpha \in [0.4, 0.6)$

$$R^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$d(\alpha) = 1$  y los tres objetos pueden ser representados en una recta de la siguiente manera:

$$x_1 = (0.75) \quad x_2 = (0.50) \quad x_3 = (0.25)$$

$$x_1 > x_2 > x_3$$

- $\alpha \in [0.6, 0.7)$

$$R^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$d(\alpha) = 2$  y una representación en el plano podría ser:

$$x_1 = (0.75, 0.75) \quad x_2 = (0.50, 0.25) \quad x_3 = (0.25, 0.50)$$

- $\alpha \in [0.7, 0.8)$

$$R^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces  $d(\alpha) = 2$ , con representación en el plano del tipo

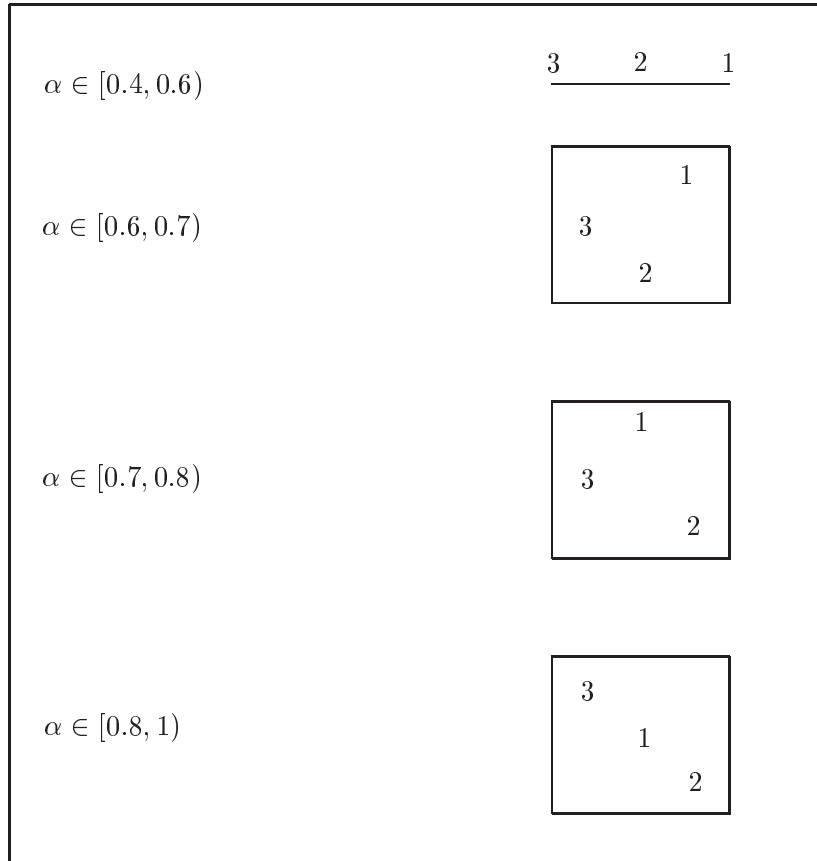
$$x_1 = (0.50, 0.75) \quad x_2 = (0.75, 0.25) \quad x_3 = (0.25, 0.50)$$

- $\alpha \in [0.8, 1)$

$$R^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego  $d(\alpha) = 2$ , con representación de nuevo en el plano, por ejemplo, con

$$x_1 = (0.50, 0.50) \quad x_2 = (0.75, 0.25) \quad x_3 = (0.25, 0.75)$$



Aunque en este ejemplo 3.1 la dimensión  $d(\alpha)$  crece con respecto a  $\alpha$ , en general esta tendencia no es cierta. Veamos un ejemplo más:

**Ejemplo 3.3.** Sea  $\mu$  la relación de preferencia difusa en  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$  dada



por:

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & .4 & .4 & .5 & .7 & .8 \\ .1 & 0 & .4 & .8 & .5 & .8 \\ .2 & .3 & 0 & .8 & .8 & .5 \\ .1 & .1 & .2 & 0 & .4 & .4 \\ .1 & .1 & .2 & .1 & 0 & .4 \\ .2 & .1 & .3 & .1 & .2 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces  $\alpha_2 = 0.3$  y:

- $\alpha \in (0.3, 0.4]$ ,  $d(\alpha) = 1$

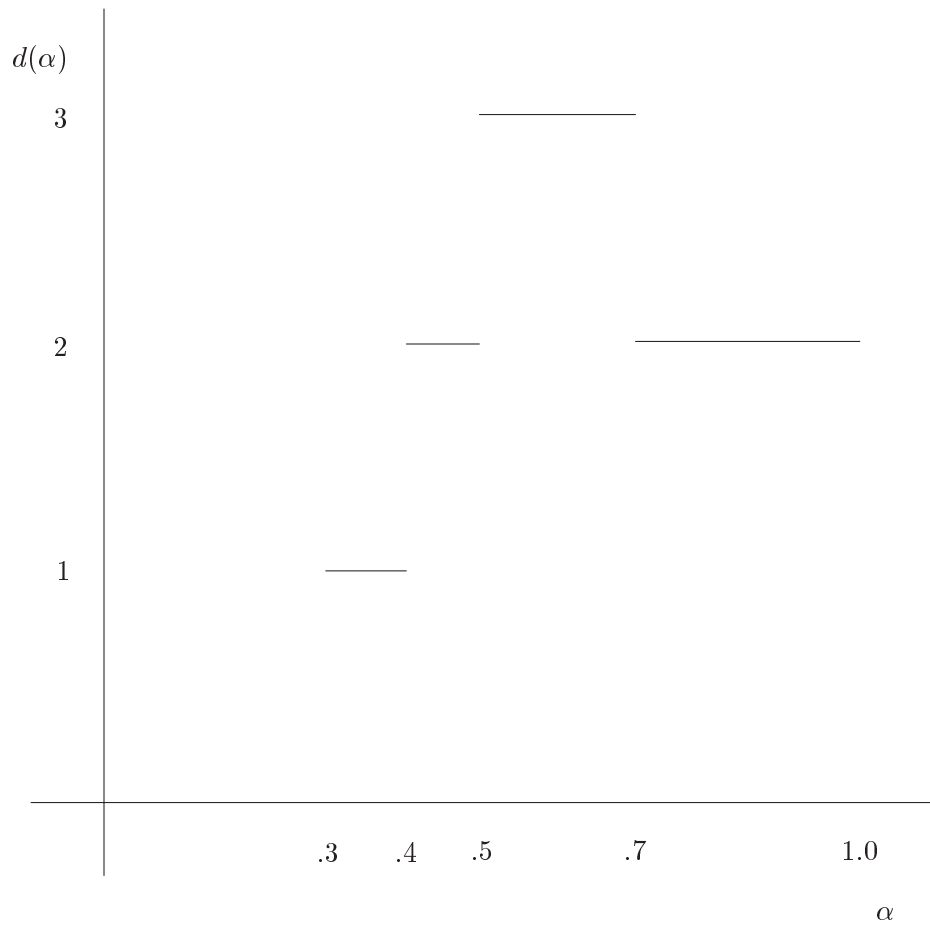
$$R^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\alpha \in (0.4, 0.5]$ ,  $d(\alpha) = 2$

$$R^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Dada una relación max-min transitiva, la familia  $\{d(\alpha), \alpha \in (\alpha_2, 1]\}$  aporta una información bastante compacta y muy útil para valorar la complejidad del problema tratado, a través de los criterios implícitos usados por el decisor. Una representación gráfica de  $d(\alpha)$  sobre  $\alpha$  ayudará sin duda a comprender mejor qué tipo de criterios buscamos. En la siguiente figura presentamos este tipo de gráfico para el ejemplo 3.3.



Otro problema que aparece en esta aproximación es cómo explotar la información de la función de dimensión

$$\{d(\alpha), \alpha \in (\alpha_2, 1]\}$$

que parece ser suma de toda la información acerca del número de criterios subyacentes, y una representación gráfica de  $d(\alpha)$  versus  $\alpha$  permite tener un conocimiento muy amplio acerca del problema, (quizás tomando información ventajosa de algunos índices de dispersión etc [94]).

Sin embargo la hipótesis de que  $\mu$  sea max-min transitiva parece muy restrictiva en la práctica sobre todo cuando el número de alternativas ( $|X|$ ) es suficientemente grande.

### 3.2 Representación en el caso general

La teoría clásica de la Dimensión sólo es capaz de representar la incomparabilidad. Sin embargo, gracias a la introducción de la dimensión generalizada, se puede representar no sólo la incomparabilidad sino también las inconsistencias que se presentan en una relación de preferencia difusas. Se trata de un avance fundamental en el contexto de las preferencias difusas, donde las dificultades naturales de asignación de intensidades de preferencias hacen más que aconsejable la relajación al máximo de toda restricción formal. Además, aún en el caso en que nuestra relación de preferencias sea max-min transitiva, se ha demostrado la existencia de un valor  $\alpha_2$  entre la inconsistencia y la incomparabilidad. Así pues para aquellos valores  $\alpha > \alpha_2$  la representación podría hacerse sin el uso del operador unión.

**Ejemplo 3.1.** Sea  $X = \{x_1, x_2\}$  y denotemos por  $L_1 = [x_1, x_2]$  y  $L_2 = [x_2, x_1]$  los dos posibles órdenes lineales en  $X$ . Sea  $\mu$  la siguiente relación valorada estricta  $\mu(x_1, x_2) = 0.3$  y  $\mu(x_2, x_1) = 0.4$ . Esta relación se representa en la figura 3.1.

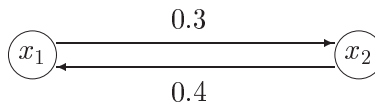


Figura 3.1: Relación binaria difusa del ejemplo 3.1

En este caso,

1. Si  $\alpha > 0.3$  no existe ciclo en  $R^\alpha$ , pero dos casos pueden ser distinguidos:

$$(a) \quad \alpha > 0.4 \quad \Rightarrow \quad \mu^{R^\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad d(\alpha) = 2, \quad R^\alpha = L_1 \cap L_2$$

$$(b) \quad 0.3 < \alpha \leq 0.4 \quad \Rightarrow \quad \mu^{R^\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad d(\alpha) = 1, \quad R^\alpha = L_2$$

2. Si  $\alpha \leq 0.3$ , hay un ciclo en  $R^\alpha$  y

$$\mu^{R^\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Dim(R^\alpha) = 2, \quad R^\alpha = L_1 \cup L_2$$

Es importante observar que se han encontrado tres representaciones básicas, que nos muestran tres aptitudes diferentes del decisor.

De hecho, tres personas con las misma relación de preferencia  $\mu$ , si las fuerzan a tomar decisiones nítidas, podrían presentar diferentes caras dependiendo del nivel de exigencia: Si el decisor no tiene en cuenta bajas intensidades (valores altos de  $\alpha$  en el ejemplo anterior), tendremos alternativas fácilmente no comparables; si el decisor es sensible a intensidades bajas (valores bajos de  $\alpha$  en el anterior ejemplo) los ciclos serán frecuentes; con un apropiado rango (valores medios para  $\alpha$  en el anterior ejemplo), tenemos un orden lineal asociado.

Por supuesto, el último caso permite una decisión directa, pero se observa que los ciclos formales probablemente introducen una clase especial de stress, diferente al que produce la no comparabilidad (ver [102, 117]).

Los ciclos largos pueden darse, aunque tengamos un solo criterio por problemas de percepción: sin embargo, cuando tenemos incomparabilidades es por la presencia de varios criterios.

A partir del teorema de representación 2.1, nada más natural que introducir la noción de *función de dimensión generalizada* de una preferencia difusa. Por supuesto, la información

realmente relevante será no tanto el número de órdenes necesarios para esa representación minimal, sino esa representación en sí misma.

En efecto, la representación generalizada introducida en el capítulo anterior nos permite definir la *función de dimensión generalizada*:

**Definición 3.2.** Dada una relación de preferencia difusa no reflexiva

$$\mu : X \times X \rightarrow [0, 1]$$

se define su *función de dimensión generalizada* como la aplicación

$$\begin{aligned} D : (0, 1] &\rightarrow \mathcal{N} \\ \alpha &\rightarrow D(\alpha) = \text{Dim}(R^\alpha) \end{aligned}$$

donde  $\text{Dim}(R^\alpha)$  es la dimensión generalizada de  $R^\alpha$ .

Esta función de dimensión generalizada está, pues, bien definida, aunque no sea exactamente una extensión de la función de dimensión vista en la sección anteriormente.

A continuación veamos una relación de preferencia que no es max-min transitiva.

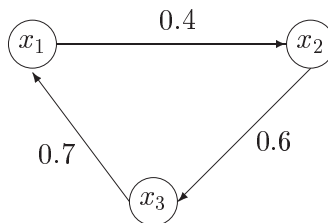


Figura 3.2: Relación binaria valorada difusa del ejemplo 6.3

**Ejemplo 3.2.** Sea  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$  y supongamos que tenemos la siguiente relación de

preferencia

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 \\ 0.7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta relación no es max-min transitiva ya que  $\min\{\mu_{31}, \mu_{12}\} = 0.4$  que es mayor que  $\mu_{32} = 0$

Cuatro casos pueden ser considerados (ver que  $\alpha_2 = 0$ ):

- Cuando  $\alpha \leq 0.4$ , existe un 3-ciclo en el  $\alpha$ -corte asociado, y este  $\alpha$ -corte puede ser representado en términos de 3 órdenes lineales nítidos:

$$R^\alpha = \{[x_1, x_2, x_3] \cap [x_3, x_1, x_2]\} \cup \{[x_2, x_3, x_1] \cap [x_1, x_2, x_3]\} \cup \{[x_3, x_1, x_2] \cap [x_2, x_3, x_1]\}$$

- Cuando  $0.4 < \alpha \leq 0.6$ , no tenemos ciclos, pero como  $x_2 > x_3$  y  $x_3 > x_1$  están presentes, se está perdiendo  $x_2 > x_1$ :

$$R^\alpha = \{[x_2, x_3, x_1] \cap [x_1, x_2, x_3]\} \cup \{[x_3, x_1, x_2] \cap [x_2, x_3, x_1]\}$$

así que necesitamos también 3 órdenes lineales.

- Cuando  $0.6 < \alpha \leq 0.7$ , se tiene una relación con un único par (3, 1)

$$R^\alpha = [x_3, x_1, x_2] \cap [x_2, x_3, x_1]$$

Este poset tiene dimensión 2.

- Cuando  $\alpha > 0.7$ , tenemos un poset con incomparabilidades entre todo los pares de elementos:

$$R^\alpha = [x_1, x_2, x_3] \cap [x_3, x_2, x_1]$$

y consecuentemente, 2 órdenes lineales son necesitados.

Podemos ver la función de dimensión de esta relación binaria en la figura 3.3.

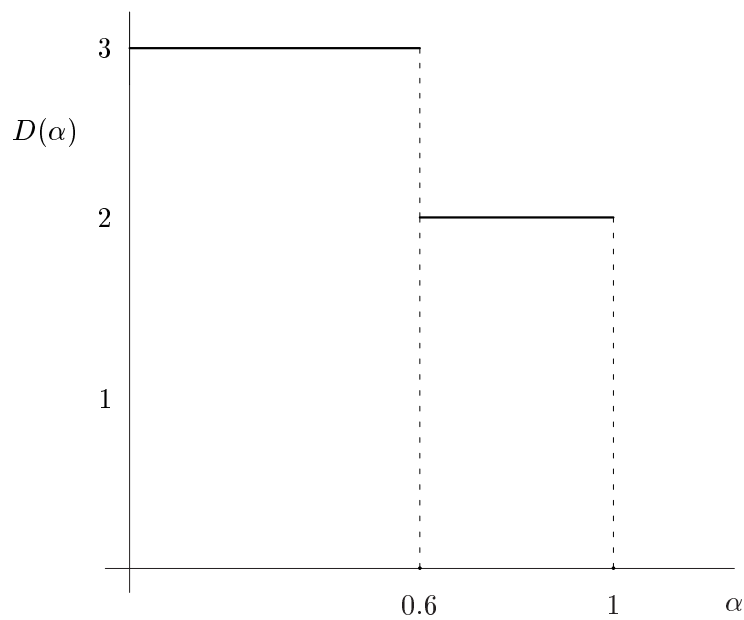


Figura 3.3: Función de dimensión generalizada del ejemplo 6.3

**Ejemplo 3.3.** Sea  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$  y  $\mu$  una relación de preferencia difusa (ver figura 3.4).

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0.7 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$



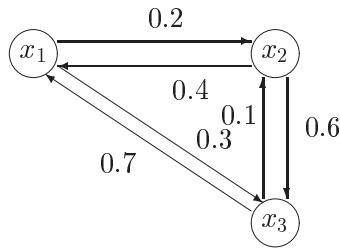


Figura 3.4: Relación binaria difusa del ejemplo 3.3

Siete intervalos para el parámetro  $\alpha$  pueden ser considerados:

1. Cuando  $\alpha \leq 0.1$ , tenemos

$$\mu^{R^\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta relación tiene ciclos (*e.g.*,  $x_1 > x_3, x_3 > x_1$ ) pero es transitiva. Esta relación puede ser obtenida como

$$R^\alpha = L_1 \cup L_2$$

donde

$$\mu^{L_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mu^{L_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto es,

$$R^\alpha = ([x_1, x_2, x_3]) \cup ([x_3, x_2, x_1])$$

y  $Dim(R^\alpha) = 2$ .

2. Cuando  $0.1 < \alpha \leq 0.2$ ,  $R^\alpha$  también tenemos ciclos y la transitividad no se da:

$$\mu^{R^\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso,  $R^\alpha$  puede ser obtenido como unión de dos posets

$$R^\alpha = L_1 \cup R_1$$

donde

$$\mu^{R_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de forma que tenemos

$$R^\alpha = ([x_1, x_2, x_3]) \cup ([x_3, x_2, x_1] \cap [x_2, x_3, x_1])$$

y  $Dim(R^\alpha) = 3$ .

3. Cuando  $0.2 < \alpha \leq 0.3$ , la relación  $R^\alpha$  todavía tiene ciclos pero es transitiva de nuevo:

$$\mu^{R^\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquí,

$$R^\alpha = L_3 \cup L_2$$

donde

$$\mu^{L_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mu^{L_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$R^\alpha = ([x_2, x_3, x_1]) \cup ([x_2, x_3, x_1])$$

así pues tenemos que  $Dim(R^\alpha) = 2$ .

4. Cuando  $0.3 < \alpha \leq 0.4$ , el  $\alpha$ -corte no tiene ciclos y es transitiva

$$R^\alpha = L_3 = [x_2, x_3, x_1]$$

Por lo tanto,  $Dim(R^\alpha) = dim(R^\alpha) = 1$ .

Para valores grandes,  $\alpha > 0.3$ , la relación  $R^\alpha$  no tendrá ciclo (decimos que una alternativa es mejor que otra, cuando lo tenemos muy claro).

5. Cuando  $0.4 < \alpha \leq 0.6$ , la relación  $R^\alpha$  empieza a no ser transitiva:

$$\mu^{R^\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y el operador unión es de nuevo necesitado:

$$R^\alpha = R_3 \cup R_4$$

donde

$$\mu^{R_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mu^{R_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de forma que

$$R^\alpha = ([x_2, x_3, x_1] \cap [x_3, x_1, x_2]) \cup ([x_1, x_2, x_3] \cap [x_2, x_3, x_1])$$

y  $Dim(R^\alpha) = 3$ .

6. Cuando  $0.6 < \alpha \leq 0.7$ , la relación  $R^\alpha$  define el anterior  $R_3$  poset:

$$\mu^{R^\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$R^\alpha = [x_2, x_3, x_1] \cap [x_3, x_1, x_2]$$

y por lo tanto  $Dim(R^\alpha) = dim(R^\alpha) = 2$ .

7. Cuando  $0.7 < \alpha$ , la relación  $R^\alpha$  es una relación vacía.

$$\mu^{R^\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con  $Dim(R^\alpha) = dim(R^\alpha) = 2$  y

$$R^\alpha = [x_1, x_2, x_3] \cap [x_3, x_2, x_1]$$

La función de dimensión generalizada de este ejemplo 3.3 puede verse en la figura 3.5.

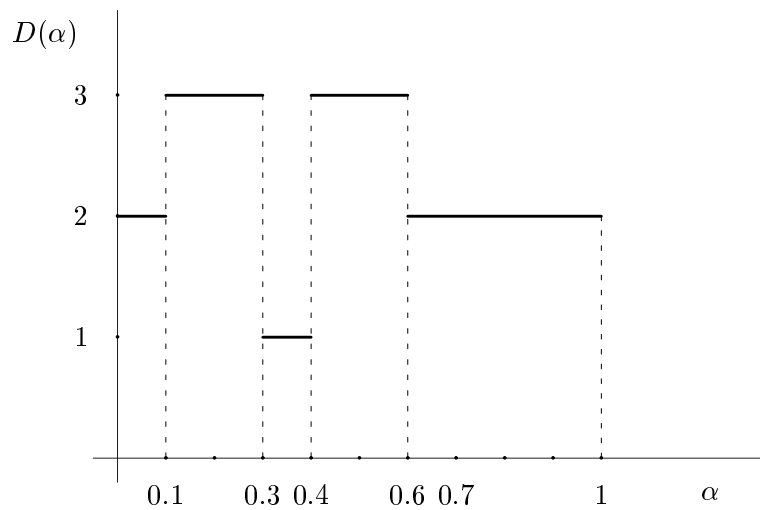


Figura 3.5: Función de dimensión generalizada del ejemplo 3.3

### 3.3 Propiedades de la función de dimensión

Veamos ahora una propiedad interesante para esta función de dimensión generalizada, que indica que de algún modo podemos considerar "suave", pues cuando quitemos o añadamos un arco (en el digrafo asociado a la relación binaria), la dimensión se modificará a lo más en dos. Este resultado en sí tendrá aplicación directa cuando los valores  $\{\mu(x_i, x_j)\}_{i \neq j}$  sean la realización de una medida continua  $\lambda$  en  $[0, 1]^{n(n-1)}$ , de modo que no habrá dos valores iguales, casi seguro, i.e.,  $\lambda\{\mu(x_i, x_j) = \mu(x_k, x_l)\} = 0$  para todo  $(x_i, x_j) \neq (x_k, x_l)$ . Así pues, se puede ver que salvo una cantidad finita de números la función de dimensión es continua.

Ordenamos en la recta real todas las valoraciones de las preferencias entre alternativas, que serán los posibles puntos donde la función de dimensión es discontinua.

$$0 < \alpha_1 \dots < \alpha_{n*(n-2)} < \alpha_{n*(n-1)} \leq 1$$

Denotamos por  $R^{\alpha_i} = \{(x, y) \mid \mu_R(x, y) \geq \alpha_i\}$

**Teorema 3.1.** *En las condiciones especificadas anteriormente, se verifica*

$$Dim(\alpha_{i-1}) - Dim(\alpha_i) \leq 2.$$

*Es decir, al añadir un arco al digrafo que modeliza la relación de preferencia asociada, la dimensión a lo sumo disminuye en dos unidades.*

**Demostración:**

Sea  $(a, b)$  la relación añadida, entonces se tiene que  $R^{\alpha_{i-1}} = R^{\alpha_i} \cup (a, b)$ .

Sea  $Dim(R^{\alpha_i}) = d_i$ . Se representa la relación  $R^{\alpha_{i-1}} = R^{\alpha_i} \cup (a, b)$ .

Como  $(a, b)$  se puede escribir como intersección de dos órdenes lineales, a lo sumo se introducen dos órdenes nuevos.

Por tanto se tiene que  $Dim(\alpha_{i-1}) - Dim(\alpha_i) \leq d_i + 2 - d_i = 2$ .

Obsérvese que el peor de los casos, es decir cuando la dimensión más aumenta, es cuando  $(b, a)$  pertenece a todos los órdenes lineales de la representación  $R^{\alpha_i} = \bigcup \bigcap L_{st}$ . Ya que en caso de que exista algún  $L_{st}$  en el cual  $(b, a) \notin L_{st}$ . Se podría escribir  $(a, b)$  como intersección de dos órdenes lineales siendo uno de ellos  $L_{ST}$ . Para esta situación, se tiene que  $Dim(\alpha_{i-1}) - Dim(\alpha_i) \leq 1$ .

□

**Teorema 3.1.** *En las condiciones del teorema anterior se tiene que:*

$$Dim(\alpha_{i-1}) - Dim(\alpha_i) \geq -2$$

*es decir, en el mejor de los casos cuando añadimos un arco la dimensión disminuye en dos unidades.*

**Demostración:**

Sea  $(a, b)$  la relación que se quita, entonces se tiene que  $R^{\alpha_i} = R^{\alpha_{i-1}} - \{(a, b)\}$ . Sea  $R^{\alpha_{i-1}} = \cup_s \cap_t L_{st}$  la representación minimal de  $R^{\alpha_{i-1}}$ . La relación complementaria de  $(a, b)$  puede ser representada como unión de dos órdenes lineales,  $\{(a, b)\}^c = L_1^{(b,a)} \cup L_2^{(b,a)}$  (por ejemplo,  $\{(x_1, x_2)\}^c = [x_2, x_1, x_3, \dots, x_n] \cup [x_n, \dots, x_3, x_2, x_1]$ ) donde:

$$L_1^{(b,a)} = [a, b, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-2}}]$$

$$L_2^{(b,a)} = [x_{i_{n-2}} \dots, x_{i_1}, a, b]$$

Por consiguiente, se puede hacer la siguiente representación:

$$R^{\alpha_i} = [\cup_s \cap_t L_{st}] \cap [L_1^{(b,a)} \cup L_2^{(b,a)}] = [\cup_s \cap_t (L_{st} \cap L_1^{(b,a)})] \cup [\cup_s \cap_t (L_{st} \cap L_2^{(b,a)})]$$

En esta representación, a lo sumo, se emplean dos nuevos órdenes y el teorema queda así demostrado. Además, salvo en el caso en que  $(a, b) \in \cap_t L_{st}$  para todo  $t$ , se puede hacer la representación de  $R^{\alpha_{i-1}}$  con un orden lineal más que en la representación minimal de  $R^{\alpha_i}$

□

A continuación se ve un lema que será útil para la demostración de una propiedad que es deseable a la función de dimensión.

**Lema 3.1.** *Sea  $(X, P)$  un poset con  $\dim(P) \geq 3$ , sea  $(X, P^+)$  una relación tal que:*

- $P^+ = P \cup (x_i, x_j)$
- $(x_i, x); (x, x_i) \notin P \quad \forall x \in X$
- $(x_j, x); (x, x_j) \notin P \quad \forall x \in X$

*Entonces*

- $P^+$  es un poset.
- $\dim(P) = \dim(P^+)$ .

**Demostración:**

Al ser  $x_i, x_j$  nodos aislados en la relación  $P$  al añadir la relación  $(x_i, x_j)$  las propiedades de transitividad y no reflexividad siguen conservándose. Por tanto  $P^+$  es un poset.



Sea  $P = \bigcap_{k=1,d} L_k$ . Sin pérdida de generalidad se puede suponer que los nodos  $x_i, x_j$  son contiguos en los órdenes lineales de dicha representación.

Es fácil ver que  $\dim(P^+) \leq \dim(P)$  ya que se pueden encontrar  $d$  órdenes lineales (los que generan  $P$ ) que generen  $P^+$  sin más que cambiar  $x_i$  por  $x_j$  de orden cuando aparezcan en sentido inverso. Así pues, basta demostrar que  $\dim(P) \leq \dim(P^+)$ .

Sea  $P^+ = \bigcap_{k=1,d} L_k$ , como los nodos  $x_i, x_j$  son nodos aislados (salvo por un arco), se puede encontrar una realización óptima para esta relación que verifique que:

$$L_1 = [x_i, x_j, \dots]$$

$$L_d = [\dots, x_i, x_j]$$

Basta cambiar de orden  $x_i$ , por  $x_j$  en el ultimo realizador (obteniendo así  $L'_d$  para tener que  $P = \bigcap_{k=1,d-1} L_k \cap L'_d$ , y por tanto  $\dim(P) \leq d = \dim(P^+)$

□

**Teorema 3.2.** *En las hipótesis del teorema anterior, sea  $\mu_{i,j} = \alpha_l$  donde  $x_i, x_j$  son nodos aislados, entonces  $\dim(\alpha_l) = \dim(\alpha_{l-1})$*

**Demostración:**

Como  $\mu_{i,j} = \alpha_l$  se tiene que  $R^{\alpha_{l-1}} = R^{\alpha_l} \cup (x_i, x_j)$

Sea  $R^{\alpha_l} = \cup_{k=1,d} P_k$  su realización óptima. Al igual que en el lema anterior, se puede suponer sin pérdida de generalidad que en todos los posets  $P_k$  de esa descomposición, los nodos aislados  $x_i$  y  $x_j$  sean contiguos.

Escribimos  $R^{\alpha_{l-1}} = \cup_{k=i,d} P'_k$  donde  $P'_k = P_k \cup (x_i, x_j) \quad \forall k$ .

Como se ve en el lema no solamente se tiene que  $dim(P_1) = dim(P'_1)$ , sino que los realizadores que minimizan  $P_k$  y  $P'_k$  son idénticos salvo por el orden de los nodos  $x_i$  y  $x_j$ .

Entonces  $Dim(\alpha_{l-1}) \leq Dim(\alpha_l)$ .

Veamos a continuación que se tiene la otra igualdad. ( $Dim(\alpha_{l-1}) \geq Dim(\alpha_l)$ ).

Supongamos que esta desigualdad no se da, entonces es fácil comprobar que los mismos realizadores que nos dan la representación minimal para  $R^{\alpha_{l-1}}$  nos dan una representación minimal para  $R^{\alpha_l}$ . Esto es una contradicción que viene de suponer que no se da esa desigualdad.

□

La nueva definición de dimensión propuesta en este trabajo además de presentar propiedades de suavidad respecto al número de relaciones binarias también es suave respecto al número de alternativas. En el siguiente teorema se demuestra que si aumentamos el número de alternativas en una unidad la dimensión no puede dar grandes saltos.

**Teorema 3.3.** *Dada una relación binaria no reflexiva  $(X, R)$  y sea  $a \in X$ . Entonces la relación binaria  $(X - \{a\}, R^a = R|_{X - \{a\}})$  verifica que  $Dim(R^a) \leq Dim(R)$*

**Demostración:**

Dada

$$R = \bigcup_s \bigcap_t L_{st}$$

representación minimal de  $R$ , sean

$$L_{st}^* = L_{st}|_{X-\{a\}}$$

Es fácil ver que

$$R^a = \bigcup_s \bigcap_t L_{st}^*$$

Así se tiene que

$$\text{Dim}(R^a) \leq \text{Dim}(R)$$

□

**Teorema 3.4.** *En las condiciones del teorema anterior, si la alternativa "a" no pertenece a ciclos de orden dos entonces:*

$$\text{Dim}(R^a) \leq \text{Dim}(R) \leq \text{Dim}(R^a) + 3$$

**Demostración:**

Sea  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  conjunto de alternativas, con  $a = x_1$ . Se puede observar que

$$R = R|_{X-\{a\}} \cup R_1 \cup R_2$$

donde

$$R_1 = \{(x_1, x_i)/(x_1, x_i) \in R\}$$

y

$$R_2 = \{(x_i, x_1)/(x_i, x_1) \in R\}$$

Como la alternativa  $x_1 \in X$  no pertenece a ningún ciclo de orden dos,

$$\{x_i/(x_i, x_1) \in R\} \cap \{x_i/(x_1, x_i) \in R\} = \emptyset$$

Entonces se pueden considerar los siguientes órdenes lineales:

$$L_1^* = \{(x_1, x_i)/i > 1\} \cup \{(x_i, x_j)/(x_i, x_1), (x_1, x_j) \in R\} \\ \{(x_i, x_j)/(x_1, x_i), (x_1, x_j) \in R_1, 1 < i < j\} \cup \{(x_i, x_j)/(x_i, x_1), (x_j, x_1) \in R_2, 1 < i < j\}$$

y

$$L_2^* = R_1 \cup R_2 \cup \{(x_i, x_j)/(x_i, x_1) \in R_2, (x_1, x_i) \in R_1\} \cup \\ \{(x_j, x_i)/(x_1, x_i), (x_1, x_j) \in R_1, 1 < i < j\} \cup \{(x_j, x_i)/(x_i, x_1), (x_j, x_1) \in R_2, 1 < i < j\}$$

$$L_3^* = \{(x_i, x_1)/i > 1\} \cup \{(x_i, x_j)/(x_i, x_1), (x_1, x_i) \in R\} \\ \{(x_i, x_j)/(x_1, x_i), (x_1, x_i) \in R_1, 1 < i < j\} \cup \{(x_i, x_j)/(x_i, x_1), (x_i, x_1) \in R_2, 1 < i < j\}$$

Dados estos tres órdenes se tiene que  $R_1 = L_1^* \cap L_2^*$  y  $R_2 = L_2^* \cap L_3^*$ . Así pues, se puede concluir que :  $Dim(R) \leq Dim(R|_{X-\{a\}}) + 3$ .

Se puede observar que en el caso en que  $x_1$  pertenezca a algún ciclo de orden dos, se puede garantizar que la dimensión, a lo sumo, crece en cuatro unidades.

$$Dim(R) \leq Dim(R|_{X-\{a\}}) + 4$$

□

**Teorema 3.5.** *Sea  $R \subset X \times X$  relación no reflexiva. Sea  $X \subset X^*$  y sea  $R^* \subset X^* \times X^*$  una extensión de  $R$  a  $X^*$  Entonces:*

$$Dim(R) \leq Dim(R^*)$$

**Demostración:**

El siguiente resultado se demuestra de forma análoga al teorema 3.3

□

### 3.4 Niveles críticos complementarios

Después de todo lo visto anteriormente, la función de dimensión generalizada está bien definida asignando la dimensión  $D(\alpha)$  a cada  $\alpha$ -corte  $R^\alpha$ , con  $\alpha \in (0, 1]$ .

Sin embargo, la función de dimensión generalizada no captura toda la información dada en la representación vista anteriormente. Parece obvio de los anteriores ejemplos que diferentes representaciones dan lugar a la misma dimensión. Dependiendo del valor de  $\alpha$ , cada  $\alpha$ -corte de una relación de preferencia difusa puede ser:

- Un orden completo, es decir,  $R^\alpha$  en un orden lineal; o
- Orden parcial, es decir, antisimétrica y transitiva pero con algunas incomparabilidades; o
- No transitiva sin ciclos (es decir algunos arcos implicados por la transitividad no aparecen); o
- Una Relación más conflictiva debida a la existencia de ciclos (es decir, secuencia  $x_1, \dots, x_k$  de forma que  $x_i > x_{i+1}, \forall i = 1, \dots, k-1$  and  $x_k > x_1$ ; observamos que esta definición incluye la simetría, es decir, ciclos de orden 2 donde los arcos  $x_i > x_j$  y  $x_j > x_i$  simultáneamente aparecen).

Por tanto, nada más natural que intentar determinar niveles críticos que permitan identificar esas diferentes regiones, de forma similar a como se define el índice  $\alpha_2$  en el contexto de relaciones max-min transitivas. Por un lado, se ha puntualizado que la relación puede simplemente no ser transitiva porque faltan arcos o porque de hecho tengamos algún ciclo. Así que la región de intransitividad se debiera dividir en dos partes, en función de si hay ciclos presentes o no. Además, la región de *inconsistencias debidas a ciclos* se puede dividir a su vez en muchas regiones, dependiendo de la longitud de esos ciclos que aparecen, o simplemente de la longitud del ciclo más corto (como ya se proponía en [87], cuanto más corto es el ciclo,

más conflictiva es la situación: la presencia de ciclos largos puede deberse sencillamente a problemas asociados a errores de estimación). Esta argumentación nos lleva a introducir una serie de niveles críticos que complementan al índice  $\alpha_2$  ya introducido.

Introducimos los siguientes niveles:

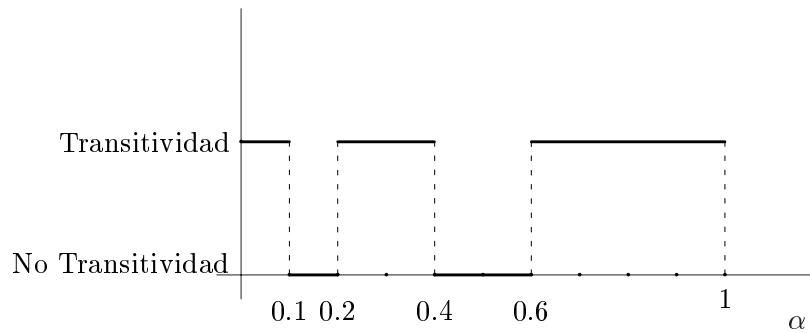


Figura 3.6: Intervalos de transitividad del ejemplo 3.3

1. El nivel de transitividad  $\alpha_0$ , representa el mínimo valor tal que  $R^\alpha$  es transitiva para todo  $\alpha > \alpha_0$ .

Puede chequearse la transitividad de los  $\alpha$ -cortes en el ejemplo 3.3:

- $\alpha \in (0.0, 0.1]$ :  $R^\alpha$  es transitivo.
- $\alpha \in (0.1, 0.2]$ :  $R^\alpha$  no es transitivo, ya que

$$\mu(x_3, x_2) = 0.1 < \min\{\mu(x_3, x_1) = 0.7, \mu(x_1, x_2) = 0.2\}$$

- $\alpha \in (0.2, 0.4]$ :  $R^\alpha$  es transitivo.
- $\alpha \in (0.4, 0.6]$ :  $R^\alpha$  no es transitivo, ya que

$$\mu(x_2, x_1) = 0.4 < \min\{\mu(x_2, x_3) = 0.6, \mu(x_3, x_1) = 0.7\}$$

- $\alpha \in (0.6, 1.0]$ :  $R^\alpha$  es transitivo.

Aquí,  $\alpha_0 = 0.6$  (ver figura del ejemplo 3.3).

2. El *nivel de  $k$ -aciclidad*  $\alpha_k$ , representa el mínimo valor de forma que  $R^\alpha$  no tenga  $l$ -ciclos  $\forall l \leq k$  para todo  $\alpha > \alpha_k$ . Por supuesto,  $\alpha_1 = 0$  como por hipótesis tenemos que:  $\mu(x, x) = 0, \forall x \in X$ , y  $\alpha_2$  ha sido también definido. Es obvio que  $(\alpha_k)_{k=1}^\infty$  en una sucesión no decreciente cuyo máximo es un nivel crítico denotado como *nivel de aciclidad*  $\alpha_\infty$  siendo el mínimo valor a partir del cual ya no existen ciclos en  $R^\alpha, \forall \alpha > \alpha_\infty$ . Obviamente,  $\alpha_\infty = \alpha_n$ ,  $n$  siendo el número de elementos en  $X$ .

Además, nuestra función de dimensión generalizada, junto con la secuencia de valores críticos  $(\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_\infty)$  da una completa información para la representación de los criterios y sus inconsistencias asociadas. En particular, podemos asegurar que los  $\alpha$ -cortes son posets para cualquier

$$\alpha > \max\{\alpha_0, \alpha_2\}$$

El nivel de transitividad puede ser fácilmente obtenido por medio del siguiente algoritmo, cuya complejidad es  $O(n^3)$ :



```

α₀ = 0
do i = 1, n
    do j = 1, n (j ≠ i)
        do k = 1, n (k ≠ i, k ≠ j)
            β = min{μik; μkj}
            if (μij < β) then
                α₀ = max{α₀; β}
            endif
        enddo
    enddo
enddo

```

Calculo del nivel de transitividad.

Si queremos calcular  $\alpha_\infty$ , necesitamos enumerar todos los ciclos posibles definidos  $X$ .  
 Teniendo en cuenta que existen

$$\binom{n}{k} \cdot (k-1)!$$

ciclos de  $k$  elementos en  $X$ , el número total de número de ciclos en  $X$  es

$$\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \cdot (k-1)!$$

El nivel de aciclicidad puede ser calculado como

$$\alpha_\infty = \max_{C(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})} \{\min\{\mu(x_{i_1}, x_{i_2}), \dots, \mu(x_{i_k}, x_{i_1})\}\}$$

Este cálculo tiene complejidad exponencial.

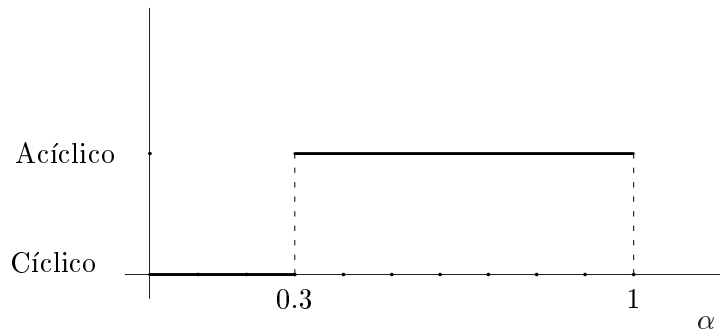


Figura 3.7: Intervalos de aciclicidad del ejemplo 3.3

En el ejemplo anteriormente visto (ejemplo 3.3) podemos encontrar tres ciclos de orden dos posibles y dos de orden tres:

1.  $C(x_1, x_2) : \min\{\mu(x_1, x_2) = 0.2; \mu(x_2, x_1) = 0.4\} = 0.2$
2.  $C(x_1, x_3) : \min\{\mu(x_1, x_3) = 0.3; \mu(x_3, x_1) = 0.7\} = 0.3$
3.  $C(x_2, x_3) : \min\{\mu(x_2, x_3) = 0.6; \mu(x_3, x_2) = 0.1\} = 0.1$
4.  $C(x_1, x_2, x_3) : \min\{\mu(x_1, x_2) = 0.2; \mu(x_2, x_3) = 0.6; \mu(x_3, x_1) = 0.7\} = 0.2$
5.  $C(x_3, x_2, x_1) : \min\{\mu(x_3, x_2) = 0.1; \mu(x_2, x_1) = 0.4; \mu(x_1, x_3) = 0.3\} = 0.1$

Aquí,

$$\alpha_\infty = \max\{0.2, 0.3, 0.1, 0.2, 0.1\} = 0.3 = \alpha_2$$

El intervalo de aciclicidad es  $(0.3, 1]$  (podemos verlo en la figura 3.7), mientras algunos ciclos aparecen en  $R^\alpha$  para  $\alpha \in (0.0, 0.3]$ .

La región Poset, es decir, los valores de  $\alpha$  para los cuales  $R^\alpha$  es un poset, del ejemplo 3.3 pueden verse en la figura 3.8:  $(0.3, 0.4] \cup (0.6, 1.0]$ .

La teoría clásica no es aplicada a esos dos intervalos, mientras que nuestra versión extendida si  $((0.0, 0.3] \cup (0.4, 0.6])$ .

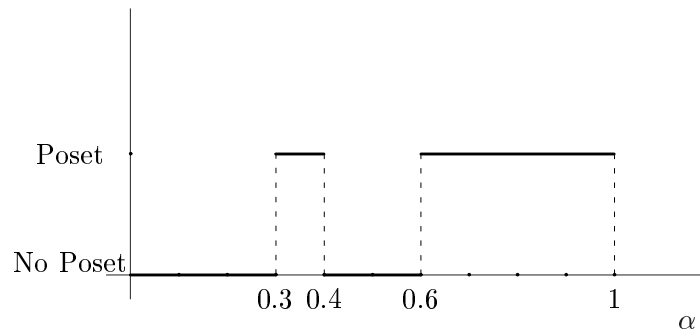


Figura 3.8: Intervalos de Poset del ejemplo 3.3

## Capítulo 4

# Clasificación en teledetección.

# Variación de la homogeneidad de los pixels.

En este capítulo se analizará el problema de clasificación de una imagen obtenida vía satélite para poder desarrollar técnicas de clasificación no supervisada (ver [3, 4, 5, 7]).

Durante las dos últimas décadas han aparecido numerosas técnicas para el reconocimiento de patrones y clasificación para la extracción de información de datos procedentes de teledetección. La gran mayoría de estas técnicas son supervisadas y tienen un sistema de aprendizaje basado en redes neuronales como podemos ver en [19, 80].

Actualmente la clasificación multispectral puede realizarse utilizando una gran variedad de algoritmos, que se pueden clasificar en tres grandes grupos: clasificación nítida (dentro de esta clasificación tenemos dos enfoques: clasificación supervisada y no supervisada), clasificación utilizando conjuntos difusos, y enfoques híbridos que utilizan información colateral adicional.

En la **clasificación supervisada** [19, 80], la identidad, localización y características

de algunos tipos de terreno son conocidos a priori, mediante análisis de fotografías aéreas, mapas y experiencia personal. El analista intenta encontrar lugares específicos en los datos que representen ejemplos de estos tipos de terreno conocidos. Estas áreas se conocen como *training sites*, ya que las características de estos tipos de area se suelen determinar mediante algoritmos de aprendizaje. Cada pixel es evaluado y será asignado a la clase a la cual tiene mayor probabilidad de pertenecer. Este procedimiento se conoce como clasificación nítida ya que un pixel sólo puede ser asignado a una clase.

En la **clasificación no supervisada**: las clases, así como otras características, no son conocidas a priori. En estos casos se ha de agrupar los pixels con características similares dentro de un cluster de acuerdo con algún criterio determinado (ver [5, 13]).

La clasificación en teledetección debe hacerse de un modo similar a como se hace en la foto-interpretación [24, 59, 107]. En primer lugar el foto-intérprete identifica cada región homogénea de acuerdo con una serie de criterios: textura, tono, forma etc. Posteriormente, y una vez determinado el objetivo del estudio, delimita sobre el resto de las fotografías las zonas que corresponden a ese patrón determinado anteriormente. Este procedimiento tiene, entre otras la siguiente limitación (ver [24, 19, 80]):

- La clasificación obtenida no es correcta en este tipo de problemas debido a la naturaleza de los datos. Para paliar este problema aparece la clasificación difusa, que puede utilizarse en combinación con los dos enfoques vistos anteriormente , ver [19, 59, 80].

Para resolver el problema de clasificación en teledetección, no se han utilizado en esta memoria algoritmos supervisados por diversos motivos.

- Los métodos supervisados requieren de información a priori, que en muchas ocasiones no se tiene, al menos en una primera fase.
- Porque son algoritmos computacionalmente lentos, teniendo en cuenta que se quiere interactuar con el decisor muchas veces hasta lograr buenos resultados.

- Los datos obtenidos en teledetección, no tienen porqué corresponder con medidas físicas como la humedad, calor, etc, ya que son medidas ordinales. Estos datos dependen de muchos factores climatológicos que influyen en la fotografía. Así, patrones de una clase determinada que podemos suponer a priori (en una fotografía de una zona tomada un día), puede ser muy diferentes con los patrones de esa misma clase en la misma zona en una fotografía tomada otro día.

La mayoría de los algoritmos no supervisados que se usan en teledetección, son adaptaciones de algoritmos estadísticos clásicos como Dendograma, K-medias etc. Estos algoritmos no tienen en cuenta el entorno que rodea a un pixel. Esto en principio supone un problema ya que, en algunas ocasiones, ésta es la única forma de encontrar una región homogénea dentro de una imagen.

El procedimiento que se presenta en este capítulo busca en una primera fase aquellas regiones que son homogéneas, para ello analiza el entorno que rodea a cada pixel. Estas regiones se encuentran teniendo en cuenta un nuevo concepto como es el de la *variacional* asociada a un pixel. Los pixels de transición, que no pertenecen a ninguna región homogénea, son de esta forma reconocidos. Una vez determinados los pixels de transición, una clasificación nítida es propuesta. De esta clasificación nítida se obtienen las regiones homogéneas dentro de la imagen. Estas regiones pueden ser analizadas para obtener el grado de pertenencia de cada pixel a dicha región.

## **El problema de la clasificación difusa**

Clasificación y Control han sido tradicionalmente, desde los comienzos de la historia de la Teoría de Conjuntos difusos [147], los dos campos de mayor desarrollo práctico (ver, e.g., [17, 149]). De hecho, muchos problemas dentro de cada una de estas dos áreas fácilmente sugieren la aplicación de conceptos difusos. Algunas veces, una aproximación difusa parece ofrecer una simplificación de una realidad extremadamente compleja, sería el caso en algunos

problemas de Control; otras veces sin embargo, los conceptos que el decisor tiene en su mente son difusos por naturaleza en el sentido de que se admiten grados de verificación, éste sería el caso de muchos problemas de clasificación, donde la introducción de clases nítidas representan una simplificación de la realidad excesivamente poco realista, que fácilmente nos llevará a erróneas interpretaciones de las observaciones que hemos tomado directamente.

En muchas aplicaciones de modelos de clasificación difusa se parte de una familia de clases  $\mathcal{C}$  previamente definidas. La cuestión es entonces determinar para cada objeto  $x$  bajo consideración, el grado  $\mu_C(x)$  en que el objeto  $x$  pertenece a la clase  $C \in \mathcal{C}$ . De esta manera, se tiene definida una función de pertenencia

$$\mu_C : X \rightarrow [0, 1]$$

para cada clase  $C \in \mathcal{C}$  (ver, e.g., Roubens [110]).

Desde nuestro punto de vista, esta aproximación resulta todavía bastante poco realista, ya que muchos decisores encontrarán serias dificultades para asignar esos grados de pertenencia a una clase sin tener en cuenta las otras posibilidades de clasificación. Todo método de clasificación es en la práctica altamente dependiente de la familia (cerrada) que el decisor está forzado a considerar incluso en el contexto nítido, donde el decisor suele revisar todas las clases antes de escoger una clase concreta como la más apropiada.

Un concepto clave dentro de clasificación es por lo tanto la noción de *partición*, ya que aporta una familia estructurada de clases dentro de la cual hemos de movernos (las clases están fuertemente inter-relacionadas entre sí).

La noción de *partición difusa* fue introducida por Ruspini [115] (ver también Bezdek-Harris [17], Bezdek [16], Butnariu [21], Dumitrescu [44] y Iancu [66]): dada una familia

discreta  $\mathcal{C}$  de *clases*, se supone que para cada objeto  $x \in X$  bajo consideración se verifica que

$$\sum_{C \in \mathcal{C}} \mu_C(x) = 1$$

Cada objeto pertenece hasta un cierto punto a cada clase, y el total de pertenencia se distribuye entre todas las clases. De esta manera se generalizaba trivialmente el concepto de partición nítido: siempre que se verifique

$$\mu_C(x) \in \{0, 1\} \quad \forall x, \forall C$$

entonces cada objeto estará en una única una clase:

$$\forall x \in X \Rightarrow \exists C \in \mathcal{C} / \mu_C(x) = 1; \mu_{C'}(x) = 0, \forall C' \neq C$$

La propuesta inicial de Ruspini [115] representa desde nuestro punto de vista una situación deseable en muchas ocasiones, pero aun así todavía muy restrictiva en la práctica de la modelización difusa. Con frecuencia, las clases difusas no definen una partición de Ruspini, y es sólo a través de un largo y tedioso proceso de aprendizaje cuando el decisor puede realmente definir una partición difusa en el sentido de Ruspini, de tal modo que cada objeto se encuentra plenamente explicado y sin rastro de información superflua.

El modelo *ideal* para clasificación en el sentido de Ruspini puede, además de ser muy difícil de conseguir, no ser deseado, al menos en determinados problemas concretos de clasificación. Algunos problemas de clasificación de frutas, por ejemplo, son tales que las restricciones del mercado imponen un número muy grande de clases *solapadas*, de tal modo que una pieza de fruta puede estar simultáneamente asociada a varias clases.

Algunas de las dificultades que presenta la noción de partición de Ruspini pueden ser parcialmente resueltas con la aproximación más débil propuesta por algunos autores (ver



[127, 128]). En esta memoria se proponen sistemas de clasificación difusa a través de un modelo agregativo, donde el modelo de Ruspini no será más que un modelo aditivo particular. Entonces podemos tener en cuenta algunos de los resultados que hemos presentado anteriormente, y explicar axiomáticamente otras estructuras alternativas para clasificación, cada una justificada a través de un agregador concreto (ver [40, 41, 54, 93] y también [140, 11]).

## 4.1 Modelización matemática

Una imagen es un mapa de puntos (pixels), cada uno de los cuales está caracterizado por una serie de medidas como pueden ser intensidad del blanco, rojo, azul, altitud, etc. Estas medidas corresponden a cada una de las bandas a las que se hizo referencia al introducir el problema de la teledetección.

Matemáticamente, llamamos  $P$  al conjunto de pixels

$$P = \{(i, j) / i \in \{1, \dots, r\} \ j \in \{1, \dots, s\}\}$$

de una imagen  $I$ . Cada pixel es caracterizado por  $b$  medidas numéricas. La imagen  $I$  puede ser caracterizada por esos valores numéricos, así tenemos

$$I = \left\{ \overline{x_{i,j}} = (x_{i,j}^1, \dots, x_{i,j}^b) / (i, j) \in P \right\}$$

### 4.1.1 Red de pixels

Dada una imagen  $I = \{ \overline{x_{i,j}} = (x_{i,j}^1, \dots, x_{i,j}^b) / (i, j) \in P \}$ , sea

$$d : P \times P \longrightarrow [0, \infty)$$

una medida de desemejanza o distancia definida en  $P$ . Por ejemplo, se puede suponer sin pérdida de generalidad la distancia euclídea en  $\mathbb{R}^b$ :

$$d(\overline{x_{i,j}}; \overline{x_{i',j'}}) = \sqrt{\sum_{k=1}^b (x_{i,j}^k - x_{i',j'}^k)^2} \quad \forall (i, j), (i', j') \in P$$

**Observación.** En esta memoria se ha utilizado como función distancia la euclídea. Puede pensarse en otras funciones distancia:

- $d(\overline{x_{i,j}}; \overline{x_{i',j'}}) = (|x_{i,j}^k - x_{i',j'}^k|)$  donde  $k \in \{1, \dots, b\}$ . En este caso solamente se tiene en cuenta la información dada por la  $k$ -ésima banda.
- $d(\overline{x_{i,j}}; \overline{x_{i',j'}}) = (\sum_{k=1,b} |x_{i,j}^k - x_{i',j'}^k|)$ . Distancia de Manhattan.
- $d(\overline{x_{i,j}}; \overline{x_{i',j'}}) = (\sqrt{\sum_{k=1,h} (F_k - F'_k)^2})$  donde  $F_k = \sum_j \lambda_j^k x_j^k$  es una combinación lineal de la imagen digital. <sup>1</sup>

Los pixels adyacentes se definen a partir de un grafo basado en la representación de la imagen en el plano. Así, dos pixels se dirá que son adyacentes cuando comparten una coordenada en común, siendo la otra contigua.

---

<sup>1</sup>Cuando el tamaño de las bandas es muy grande, es técnica habitual el disminuir el número de bandas realizando un análisis factorial transformando la imagen original otra de tamaño menor. Aquí el papel de los  $F_k$  es el de los factores en dicho análisis.

Formalmente, se puede asociar el grafo  $G(I) = (P, E)$  a la imagen  $I$ :

$$E = \left\{ \{(i, j); (i', j')\} \in V \times V / \vee \begin{bmatrix} i = i' & |j - j'| = 1 \\ j = j' & |i - i'| = 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Se propone la siguiente definición.

**Definición 4.1.** Dado el grafo  $G(I)$  asociado a la imagen  $I$  y la distancia entre pixels  $d$ , la red de pixels es el par  $N(I) = (G(I), d)$ .

Veamos un ejemplo.

**Ejemplo 4.1.** Sea  $N(I) = (G(I), d)$  la red con  $r = 3$  y  $s = 4$  que aparece en la siguiente figura. Se incluyen sólo las distancias entre pixels adyacentes.

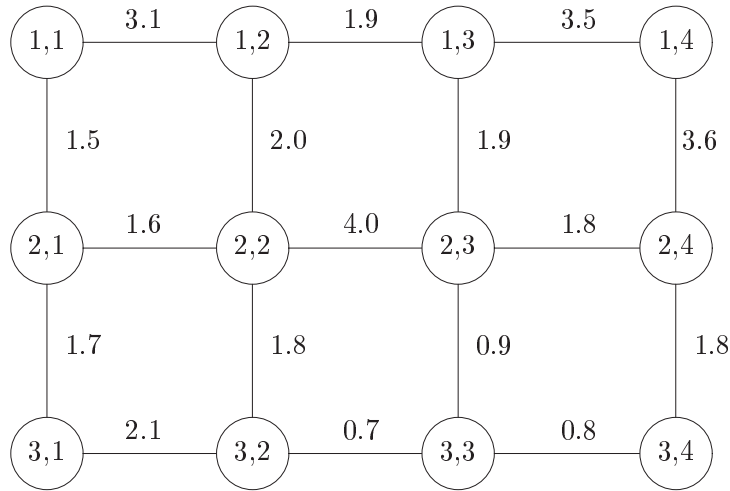


Figura 4.1: Red de pixels del ejemplo 4.1

## 4.2 Algoritmos variacionales

Uno de los principales problemas que existen en los sistemas de clasificación de imágenes digitales es el de determinar regiones homogéneas dentro de la imagen. La mayoría de los algoritmos de clasificación obtienen de una forma supervisada [19] una serie de patrones asociados a cada una de las clases que se desea investigar en la imagen en particular. Una vez que se tienen estos patrones, se asigna cada uno de los pixels a aquella clase en la que la distancia sea mínima. Sin embargo en estos sistemas de clasificación no se tiene en cuenta el entorno que rodea a un pixel. Por este motivo presentamos un algoritmo interactivo que tiene en cuenta el entorno de los pixels para obtener una buena clasificación.

Cuando un pixel está rodeado por otros con las mismas características, la heterogeneidad (medido en este caso como la *variacional*) tanto vertical como horizontal es muy baja. En estos casos el pixel se encuentra dentro de una región. Por otra parte cuando un pixel se encuentra en una frontera la variación o bien vertical o bien horizontal es muy grande, siendo detectada por una de estas dos direcciones.

**Definición 4.2.** Sea  $P$  conjunto de pixels, y sea  $I$  imagen asociado a dicho conjunto, definimos la *variacional* vertical de la imagen digital  $(P, I)$  a la imagen  $(DP_{ver}, DI_{ver})$ :

$$DP_{ver} = \{(i, j) / i \in \{2, \dots, r-1\} j \in \{1, \dots, s\}\}$$

$$DI_{ver} = \{y_{i,j} / (i, j) \in DP_{ver}\}$$

donde

$$y_{i,j} = d(\overline{x_{(i-1,j)}}, \overline{x_{(i+1,j)}}) \quad \forall (i, j) \in DP_{ver} \quad (4.1)$$

En esta nueva imagen, a cada pixel  $(i, j) \in DP_{ver}$  de la red le asociamos la distancia que existe entre los dos pixels adyacentes verticales  $\overline{x_{i-1,j}}$  y  $\overline{x_{i+1,j}}$ .

Del mismo modo se puede definir la variacional horizontal de una imagen digital.

**Definición 4.3.** Sea  $P$  conjunto de pixels, y sea  $I$  imagen asociado a dicho conjunto, definimos la *variacional* horizontal de la imagen digital  $(P, I)$  a la imagen  $(DP_{hor}, DI_{hor})$ :

$$DP_{hor} = \{(i, j) / i \in \{1, \dots, r\} \quad j \in \{2, \dots, s-1\}\}$$

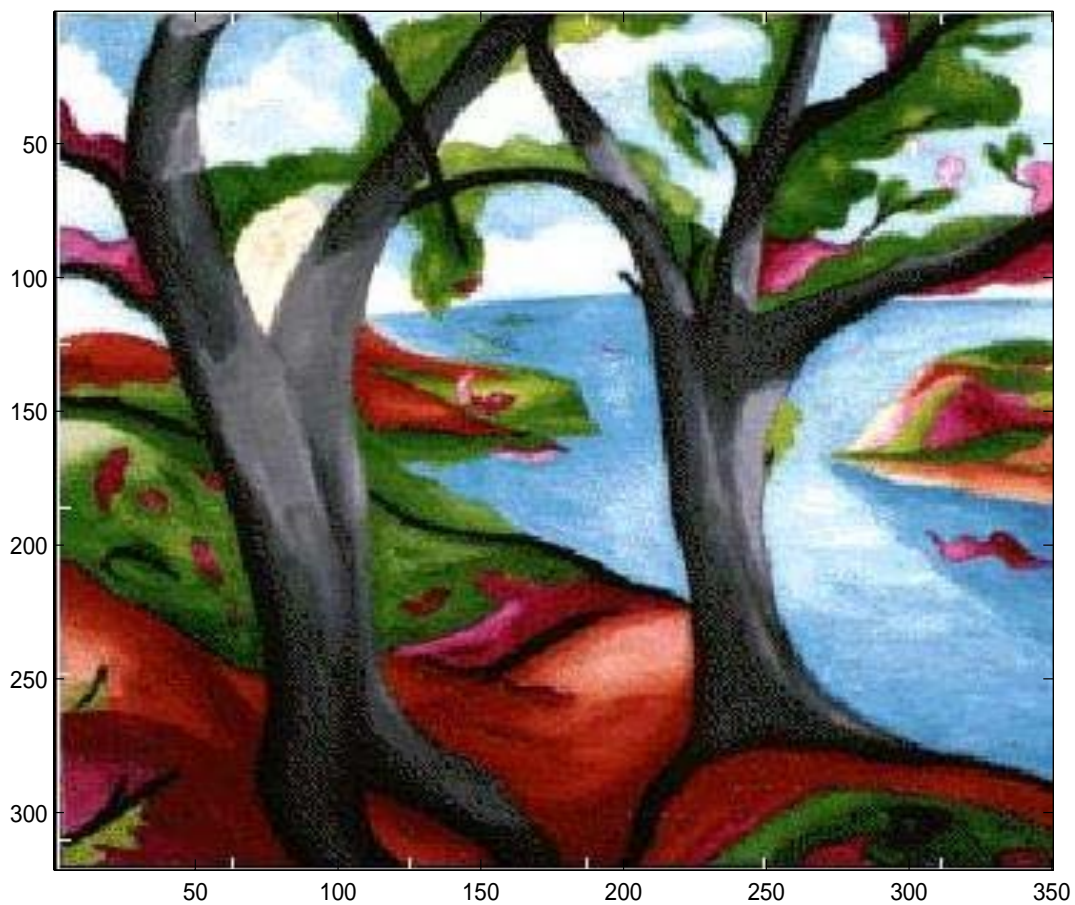
$$DI_{hor} = \{y_{i,j} / (i, j) \in DP_{hor}\}$$

donde

$$y_{i,j} = d(\overline{x_{(i,j-1)}}, \overline{x_{(i,j+1)}}) \quad \text{Si } (i, j) \in DP_{hor} \quad (4.2)$$

En esta nueva imagen a cada pixel de la red le asociamos la distancia que existe entre los dos pixels adyacentes verticales  $\overline{x_{i,j-1}}$  y  $\overline{x_{i,j+1}}$ .

**Ejemplo 4.1.** La imagen que se va a estudiar aquí es una acuarela en papel que se ha digitalizado via scanner (incluida en el programa MATLAB 6.21 como ejemplo y guardada en el fichero *tree*). La fotografía, analizada en [3], se muestra a continuación. También se muestran las variacionales vertical y horizontal de dicha imagen.



Se obtiene la variación horizontal y vertical de dicha imagen.

Imagen de la variación vertical de la imagen del matlab

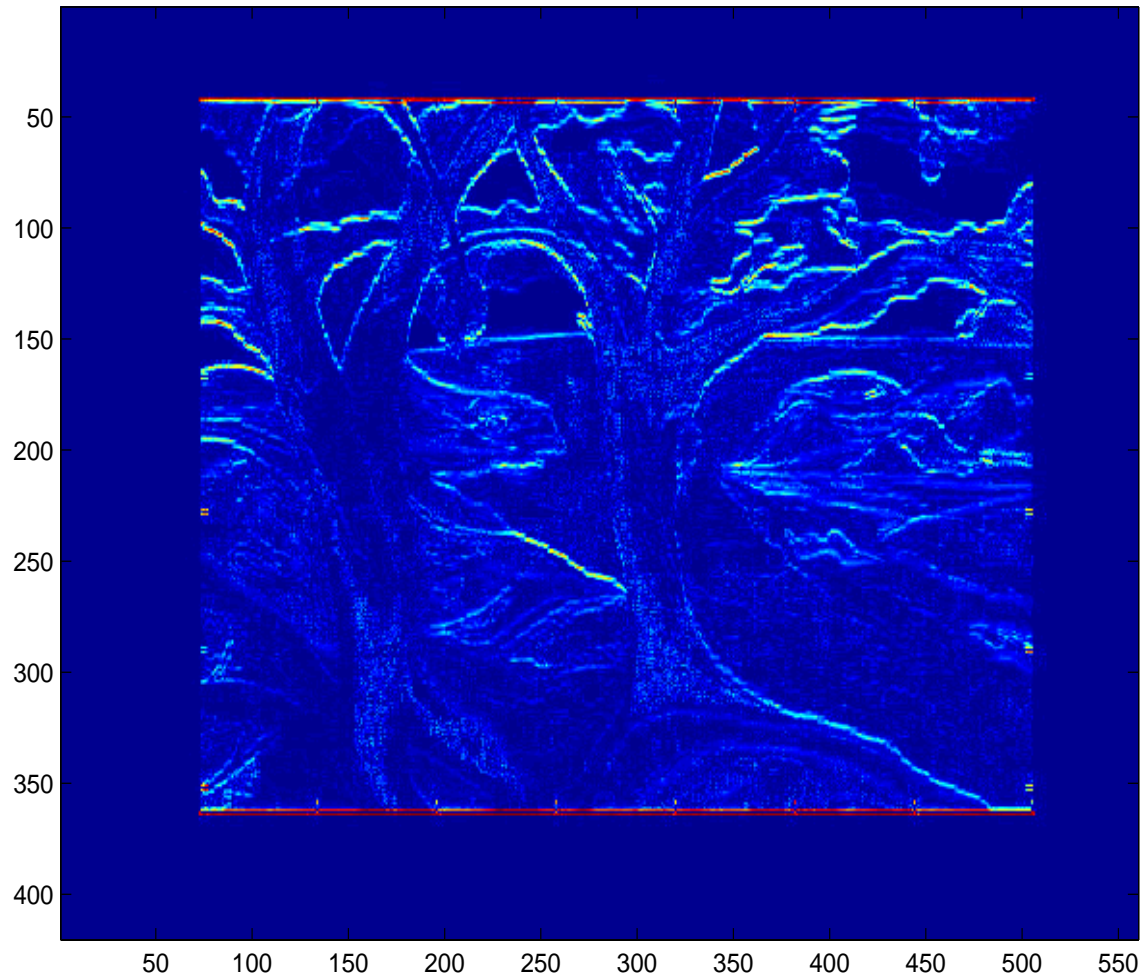
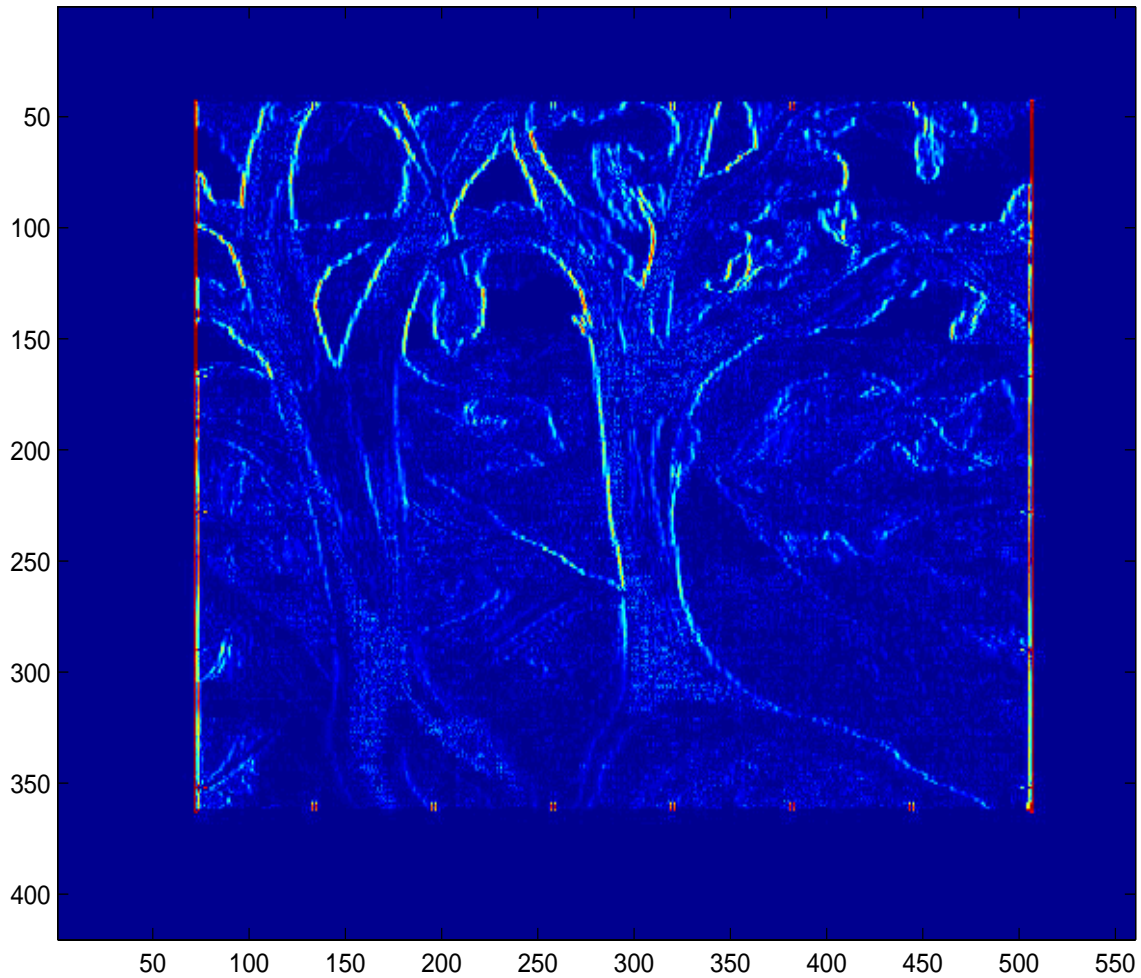


Imagen de la variacional horizontal de la imagen del matlab



Se puede observar que los principales objetos de la imagen quedan claramente identificados mediante las variacionales horizontal y vertical. Sin embargo, se pueden tener otras situaciones no tan deseables. Uno de los principales problemas con los que se encuentran en teledetección es el de distinguir entre estas dos situaciones:

- Cuando existe una zona mal definida que gradualmente se confunde con otra zona. Por ejemplo un bosque que poco a poco se va fundiendo con una zona de mar, en estas situaciones la frontera tal y como se entiende en el caso nítido no existe.
- Cuando aparece una región que va cambiando gradualmente de intensidad igual a como



aparece en la segunda figura.

Primera situación



Segunda situación



Figura 4.2:

Como puede observarse, estas dos situaciones no son distinguibles por la variacional horizontal y vertical, ya que asignarían la misma variación a dos situaciones completamente distintas. Para erradicar este problema es necesario utilizar otras direcciones (menos locales en este caso). Por este motivo es necesario definir la variacional en un caso más general.

**Definición 4.4.** Dada una red de pixels y una imagen digital  $(P, I)$  como la definida anteriormente, y un vector  $v \in \mathbb{N}^2$ , definimos la variacional del pixel  $(i, j)$  con dirección  $v$  ( $d_{i,j}(v)$ ) a:

$$d_{i,j}(v) = \frac{d(\overline{x_{(i,j)-v}}, \overline{x_{(i,j)+v}})}{\|v\|} \quad (4.3)$$

**Definición 4.5.** Dada una imagen digital  $(P, I)$ :

$$P = \{(i, j) / i \in \{1, \dots, r\} j \in \{1, \dots, s\}\}$$

$$I = \left\{ \overline{x_{i,j}} = (x_{i,j}^1, \dots, x_{i,j}^b) / (i, j) \in P \right\}$$

y un vector  $v = (v_1, v_2)$  con  $v_1, v_2 \in \mathbb{N}$ , se define la variacional de la imagen digital con dirección  $v$ , a la imagen digital  $(DP_v, DI_v)$  definida por:

$$DP_v = \{(i, j) / i \in \{1, \dots, r'\} j \in \{1, \dots, s'\}\}$$

donde  $r' = r - v_1 + 1$  y  $s' = s - v_2 + 1$

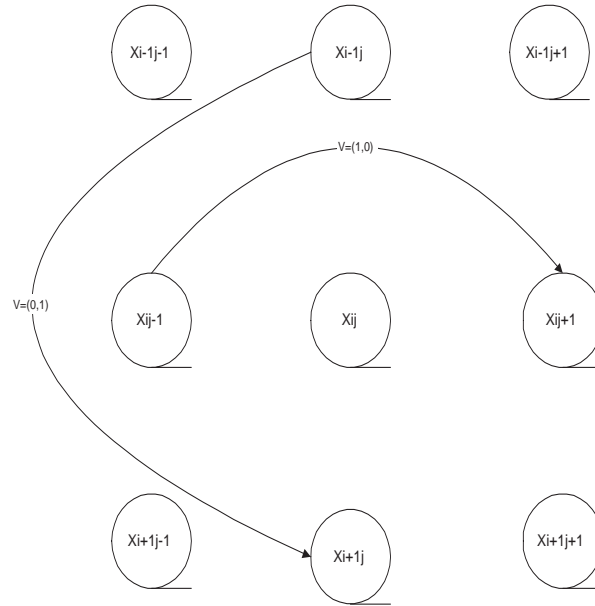
$$DI_v = \{(y_{i,j} / (i, j) \in DP_v\}$$

donde

$$y_{i,j} = d(\overline{x_{(i,j)-v}}, \overline{x_{(i,j)+v}}) \quad (4.4)$$

Dada la definición de variacional, se puede observar que para el caso particular en que la dirección  $v$  sea  $(1, 0)$  tenemos la variacional horizontal mientras que para la dirección  $v = (0, 1)$  se tiene la variacional vertical definidas anteriormente. Así se tiene que  $DI_{ver} = DI_{(0,1)}$  y  $DI_{hor} = DI_{(1,0)}$ .

Gráficamente, si se usan las direcciones  $v = (1, 0)$  y  $v = (0, 1)$  se tiene:



La variacional de la imagen es una nueva imagen que representa el movimiento de los pixels con dirección  $v$ . Por ejemplo si se calcula la variacional de la imagen con dirección  $v = (1, 0)$ , se tiene una nueva imagen en la que en cada pixel se ha medido su heterogeneidad en dirección horizontal. Esta nueva imagen da una idea al decisor de cuáles serán las regiones homogéneas en la imagen que determinaremos posteriormente.

Una vez que se tienen las variacionales de una imagen con dirección  $(v_1, \dots, v_k)$  se puede agregar esa información para obtener la imagen frontera.

**Definición 4.6.** Sea  $(P, I)$  imagen digital, y sean  $\{(DP_{v_i}, DI_{v_i}) \mid i \in \{1, \dots, k\}\}$  variacionales de la imagen digital, se define la *frontera de la imagen digital* a la imagen  $(P, FR(I))$  definida por:

$$FR(I) = \{(fr_{i,j}) \mid (i, j) \in P\}$$

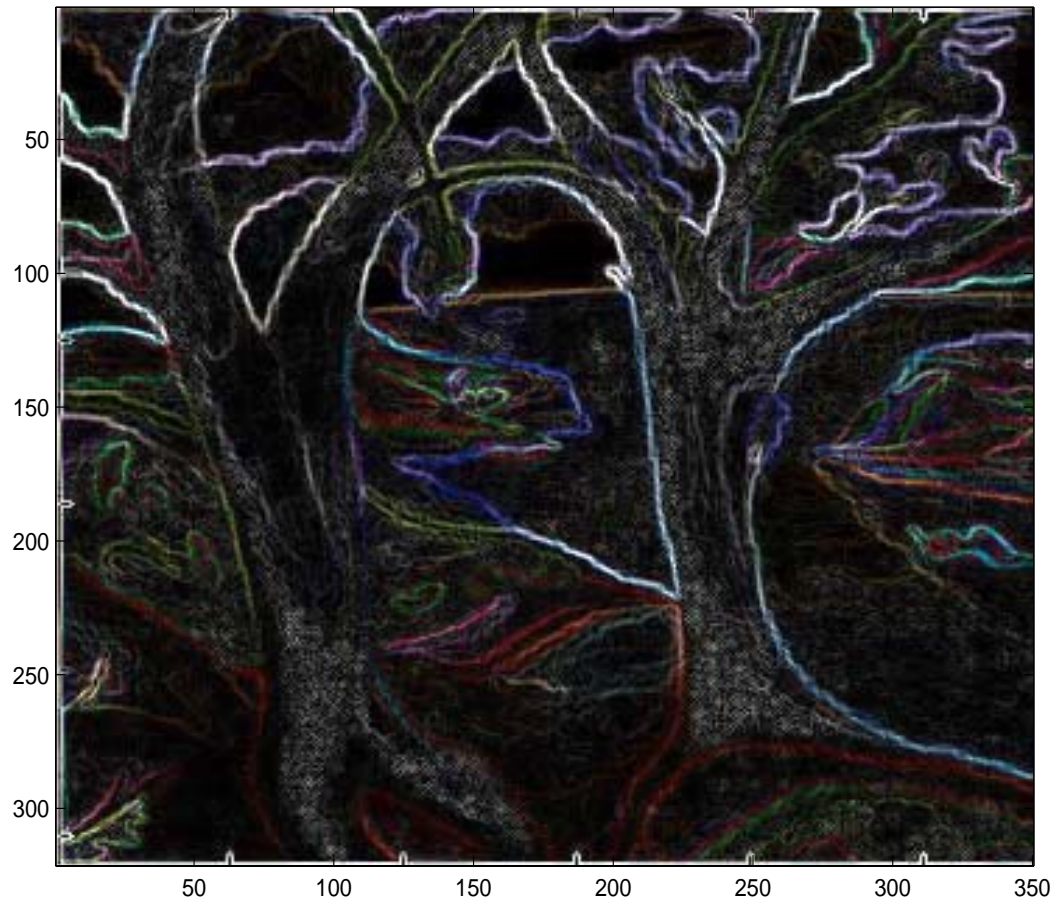
donde

$$fr_{i,j} = \Phi(y_{i,j}^{v_1}, \dots, y_{i,j}^{v_k}) \quad (4.5)$$

donde  $\Phi$  es un operador de agregación.

Usando el operador de agregación *media* en la imagen del MATLAB para las direcciones horizontal y vertical obtenemos la siguiente frontera de la imagen.

**Frontera de la imagen del matlab**



### 4.3 Determinación de Regiones

La variacional de una imagen digital da una visión general del problema que se está tratando. Para cada una de las direcciones en las que se decide hacer el estudio se tiene una salida diferente en forma de imagen digital. Por ejemplo se tendrá dos salidas si se tiene en cuenta las direcciones vertical y horizontal.

Toda esa información debe ser amalgamada para determinar el número de regiones diferentes que existen y los diferentes patrones asociados a cada una de ellas. Desafortunadamente, esta tarea es muy complicada y requiere de una interacción con el decisor que determinará unos niveles de aceptación para la interpretación de la imagen.

**Definición 4.7.** Dada una imagen digital  $(P, I)$ :

$$P = \{(i, j) / i \in \{1, \dots, r\} \ j \in \{1, \dots, s\}\}$$

$$I = \left\{ (\overline{x_{i,j}} = (x_{i,j}^1, \dots, x_{i,j}^b) / (i, j) \in P \right\}$$

y dado un nivel de significación  $\alpha \in \mathbb{R}$ , se define la imagen digital **suavizada** de variación con dirección  $v$ , como la imagen digital  $(SDP_v, SDI_v(\alpha))$  caracterizada por:

$$SDP_v = \{(i, j) / i \in \{1, \dots, r'\} \ j \in \{1, \dots, s'\}\}$$

$$SDI_v(\alpha) = \{(s_{i,j}) / (i, j) \in SDP_v\}$$

donde

$$s_{i,j} = \begin{cases} y_{(i,j)} & Si \quad |y_{i,j}| > \alpha \\ 0 & Si \quad |y_{i,j}| \leq \alpha \end{cases} \quad (4.6)$$

De esta forma, todas aquellas variaciones que se produzcan a niveles bajos no serán consideradas como relevantes en el estudio. La imagen digital suavizada va a ser esencial en la determinación de la homogeneidad de los pixels, es decir, para determinar si un pixel se encuentra en una región o está entre varias.

**Definición 4.8.** Dada la imagen digital suavizada de variación con dirección  $v$

$$(SDP_v, SDI_v(\bar{\alpha}))$$

. Se dirá que un pixel  $(i, j) \in SDP_v$  tiene **heterogeneidad irrelevante** respecto dicha dirección  $v$  cuando  $s_{i,j} = 0$ .

**Definición 4.9.** Sean  $\{(SDP_{v_k}, SDI_{v_k}(\bar{\alpha}_k))\}$  imágenes digitales suavizadas de variación con direcciones  $(v_1, \dots, v_k)$ , se dirá que un pixel tiene **heterogeneidad irrelevante** respecto esas direcciones cuando lo sea para cada una de ellas.

Una vez que se han clasificado los pixels en pixels con heterogeneidad irrelevante y relevante, se está en condiciones de determinar las regiones homogéneas dentro de una imagen.

**Definición 4.10.** Diremos que región  $R \subset P \times P$  es homogénea si:

- $\forall (i, j) \in R, (i, j)$  es de heterogeneidad irrelevante.
- Está rodeada de pixels de heterogeneidad relevante.

**Ejemplo 4.2.** Sea  $(P, I)$  una imagen digital, de tamaño  $3 \times 7$ . Una vez hecha la discriminación entre aquellos pixels irrelevantes y de variación relevante (denotados por 0 y 1 respectiva-

mente) estamos en condiciones de determinar las regiones homogéneas. A continuación se ve el grafo asociado a dicha clasificación.

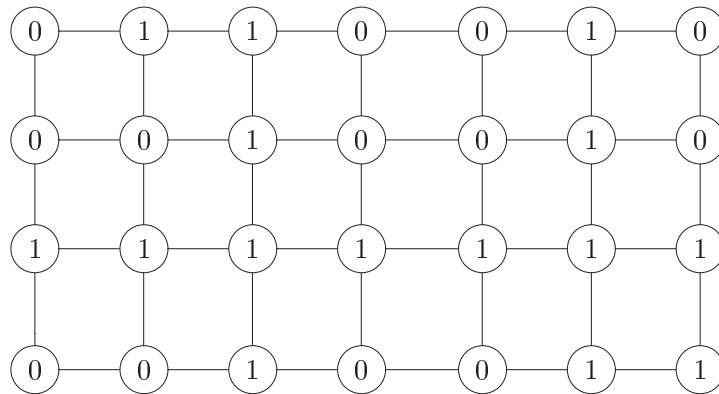


Figura 4.3: Red de pixels

Como puede verse la región  $R = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2)\}$  es una región homogénea ya que está formada por pixels de variación irrelevante y rodeada por pixels con *alta* variación. En esta red de pixels tenemos cinco regiones homogéneas.

A continuación se presenta un algoritmo para la determinación de las regiones utilizando solamente las direcciones vertical y horizontal. La generalización al caso en que se tengan más direcciones es directa.



**Entrada de Datos.**  $x_{i,j}^k$  donde  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $j \in \{1, \dots, s\}$   $k \in \{1, \dots, b\}$ , f, etc.

**Paso 1.** Cálculo de las imágenes  $(DP_{ver}, DI_{ver})$  y  $(DP_{hor}, DI_{hor})$ .

Se denota por  $y_{i,j}$  a los pixels pertenecientes a  $DI_{hor}$  y

por  $z_{i,j}$  a los pixels pertenecientes a  $DI_{ver}$ .

**Paso 2. Suavizado-Determinación de las regiones.**

Fijar un nivel de significación  $\alpha$  y calcular

$(SDP_{ver}(\alpha), SDI_{ver}(\alpha))$  y  $(SDP_{hor}(\alpha), SDI_{hor}(\alpha))$

$\alpha$  (tanto para el vertical como para la horizontal).

Denotamos a los pixels por  $y_{ij}^s$  y  $z_{ij}^s$ .

call **Solapamiento**

**Solapamiento.**

**do**  $i = 1, r'$

**do**  $j = 1, s'$

**if**  $(y_{i,j}^s \wedge z_{i,j}^s) = 0$  **then.**

**if** *Existe adyacente asignado* **then**

Analizar todos los valores consecutivos y reordenar.

$Region(i, j) = Region(i', j')$

**else**

Asignar a una nueva región.

$Nreg = Nreg + 1$

$Region(i, j) = Nreg$

**endif**

**enddo**

**enddo**

**Proposición 4.1.** *La complejidad del algoritmo visto anteriormente es lineal en el número de pixels de la imagen.*

### Observación

La determinación de regiones, así como la de su frontera es un proceso que va a ser repetido (interactuando con el decisor) muchas veces en el sistema de clasificación que se propone. Por este motivo es muy importante el hecho de que en cada iteración la complejidad computacional sea baja.

Una vez finalizado este paso, se han determinado regiones homogéneas a partir del entorno de cada pixel y de su variación. Esto permitirá tener una visión del problema y ayudará al decisor a determinar los patrones y el número de clases.

Se denotará por  $R$  a la matriz que determina la región de cada pixel, de forma que  $R_{i,j} \neq 0$  identifica la región a la que pertenece el pixel  $(i, j) \in P$ . En el caso en que el pixel no pertenezca a ninguna región se tiene que  $R_{i,j} = 0$ .

Una vez determinadas aquellas regiones que son homogéneas dentro de la imagen, se determinaran los patrones asociados a cada región.

**Definición 4.11.** Dada una imagen digital  $(P, I)$  con conjunto de regiones homogéneas  $R_1, \dots, R_{NREG}$ , se dirá que  $\overline{h^r} \in \mathbb{R}^b$  es un patrón de la región  $R_k$ , si  $\overline{h^r}$  es un elemento representativo de dicha región.

El problema de determinar el patrón asociado a una región es un problema difícil de resolver. Aun así, existen diversas formas de determinar patrones que pueden ser aceptados por el decisor, como por ejemplo:

- $\overline{h^r} = \sum_{(i,j) \in R_r} w_{i,j} \overline{x_{i,j}}$ .
- $\overline{h^r} = \overline{x_{i,j}}$  donde  $x_{i,j}$  es un elemento de la k-esima región que el decisor sabe que está bien clasificado.

- $\overline{h^r} = \Phi(\overline{x_{i,j}}) \quad \forall (i, j) \in R_r$  donde  $\Phi$  es un operador de agregación. En este caso el patrón se obtiene como agregación de toda la información contenida en la región.

Para una visualización de los resultados obtenidos con la clasificación nítida vista hasta ahora, se define la visualización de la imagen digital.

**Definición 4.12.** Sea  $R$  la matriz que determina la región de cada pixel, se define la visualización de la imagen digital, a la imagen digital  $(VP, VI)$  caracterizada por:

$$VP = \{(i, j) / i \in \{1, \dots, r'\} \quad j \in \{1, \dots, s'\}\}$$

$$VI = \{\overline{h_{i,j}} = (h_{i,j}^1, \dots, h_{i,j}^b) / (i, j) \in VP\}$$

donde  $\overline{h_{i,j}} = Patron(R(i, j))$

## 4.4 Clasificación difusa de imágenes digitales

Sea  $NREG$  el número de regiones y sean  $\{\overline{h^1}, \dots, \overline{h^{NREG}}\}$  el conjunto de patrones asociados a la imagen digital  $(VP, VI)$ . Puede ocurrir que algunos de estos patrones sean parecidos al representar en la imagen original objetos análogos (una zona boscosa, una zona pantanosa, etc ...). Por este motivo es necesario una clasificación que determine el conjunto de clases o regiones diferentes de la imagen digital. En principio se podría presentar una clasificación nítida o difusa.

Como ya se ha comentado antes, parece mucho más adecuada una clasificación difusa en problemas de clasificación en teledetección, ya que las fronteras tal y como se presentan en

la naturaleza no son nítidas y, por tanto, se tendrán muchos pixels que no pertenezcan a ninguna región en particular, estando entre varias.

En la mayoría de los problemas de clasificación difusa, se plantea, el problema de construir la función de pertenencia asociada a una clase. En esta memoria, se construirá la función de pertenencia asociada a una región basándose en una medida de semejanza a un patrón de dicha región, aunque podrían pensarse en otras formas de construcción como las desarrolladas en [3].

Con el fin de obtener una clasificación difusa de algunas de las regiones de interés, se propone la siguiente metodología:

Sea  $\overline{h^r}$  el patrón asociado a la región de interés  $r$ , para cada una de las  $b$  bandas que caracterizan los pixeles sea  $\mu_r^k(i, j)$  el grado de pertenencia de del pixel  $(i, j) \in P$  a la región  $r$  respecto de la banda  $k \in \{1, \dots, b\}$  se modelizará como un número difuso ([42]), por ejemplo:

- Trapezoidal  $\mu_r^b(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x_{ij}^b < R_0 \\ x_{ij}^b - \underline{R} + 1 & \text{Si } R_0 \leq x_{ij}^b < \underline{R} \\ 1 & \text{Si } \underline{R} \leq x_{ij}^b \leq \overline{R} \\ -x_{ij}^b + \overline{R} + 1 & \text{Si } \overline{R} \leq x_{i,j}^b \leq R^0 \\ 0 & \text{Si } x_{i,j}^b \geq R^0 \end{cases}$

- Triangular  $\mu_r^k(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x_{ij}^b < \alpha_0 \\ \frac{x_{ij}^b - \alpha_0}{med - \alpha_0} & \text{Si } \alpha_0 \leq x_{ij}^b < med \\ \frac{-x_{ij}^b + \alpha^0}{\alpha^0 - med} & \text{Si } med \leq x_{i,j}^b \leq \alpha^0 \\ 0 & \text{Si } x_{i,j}^b \geq \alpha^0 \end{cases}$

- Exponencial y Gaussiana [59].

La clasificación que se ha propuesto hasta ahora en esta memoria construye la función de pertenencia banda a banda. Si se quiere obtener una clasificación global, bastaría con agregar [53] a cada una de las clases todas las bandas. Así se tendría:

$$\mu_r(i, j) = \Phi(\mu_r^1(i, j), \dots, \mu_r^b(i, j)) \quad \forall (i, j) \in P$$

## Determinación del número de clases

La determinación del número de clases en problemas de clasificación es un problema muy estudiado en la literatura y difícil de resolver.

Una posibilidad para la determinación del número de clases, es que este número sea determinado por el decisor, el cual tiene información sobre el número idóneo de clases que explican perfectamente la imagen digital. En la mayoría de los problemas que hemos resuelto en esta memoria se ha seguido esta metodología.

Aunque la metodología ideal sería un proceso de aprendizaje como el visto en [3, 4], en el cual se dan medidas sobre la relevancia, redundancia y cubrimiento de las clases, y permiten así determinar el número óptimo de clases.

Una familia de clases que se pueda considerar *buena* será normalmente el fruto de un largo proceso de aprendizaje, sometido a pruebas que pueden resultar fallidas. Es necesario que cada solución que se obtenga pueda ser evaluada de tal modo que se sugieran posibles líneas de mejora: suprimir clases, definir mixturas de las clases ya existentes o buscar clases realmente nuevas. Nosotros creemos que junto a los tradicionales análisis puramente estadísticos los índices anteriormente introducidos (relevancia, redundancia y cubrimiento) nos van a permitir mejorar el proceso.

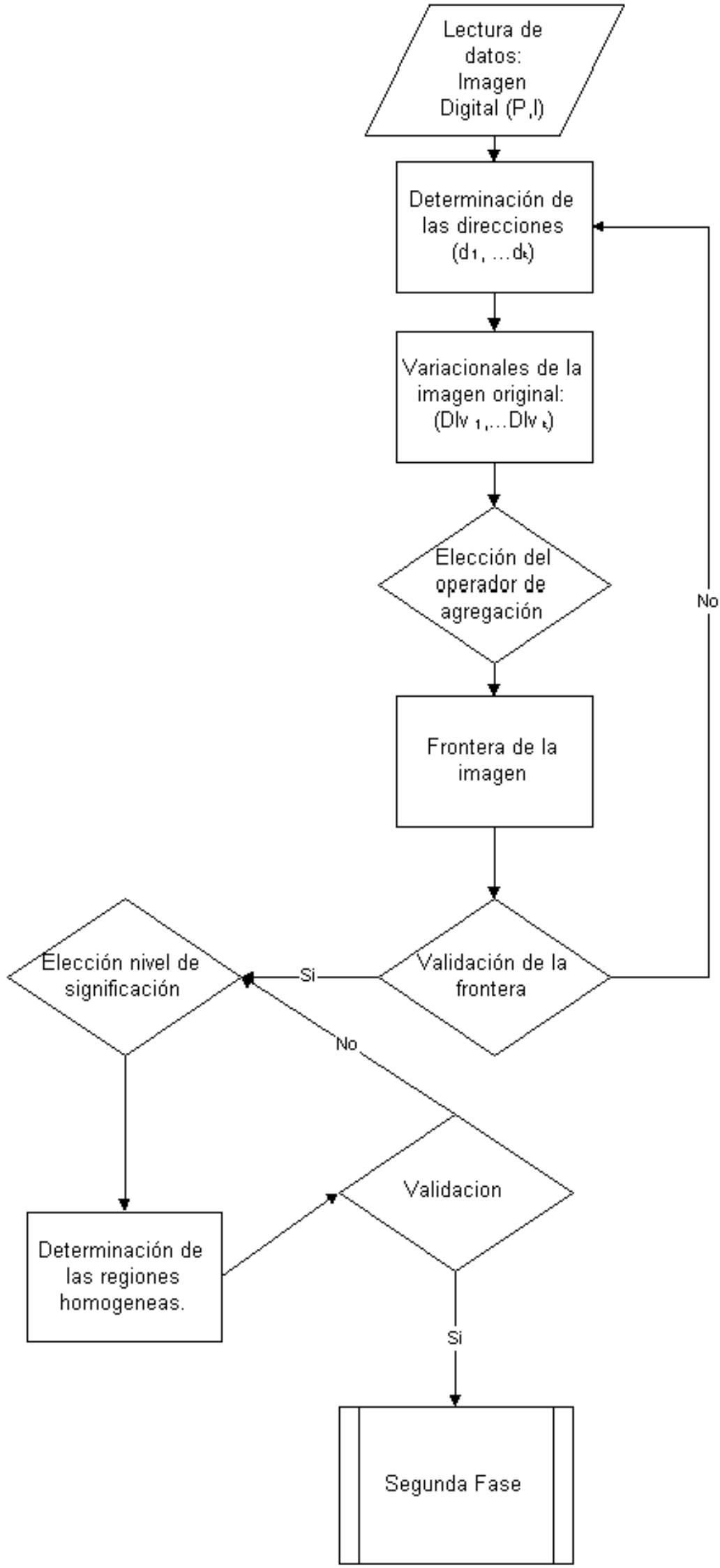
Dado que esos tres índices básicos admiten grados de verificación, el decisor debe determinar hasta qué punto la solución actual satisface sus aspiraciones. Así, por ejemplo, si para determinado pixel  $(i, j) \in P$  se tiene que el grado de explicación es cero, está claro que parece muy necesaria la búsqueda de una clase adicional. En general, una vez eliminadas las clases poco informativas, si el grado de explicación de un objeto es suficientemente bajo para el

decisor, debemos pensar en introducir una nueva clase *extra*; y si la redundancia entre varias clases es *muy alta*, debiéramos pensar en *redefinir* alguna de estas clases.

## 4.5 Proceso interactivo de clasificación

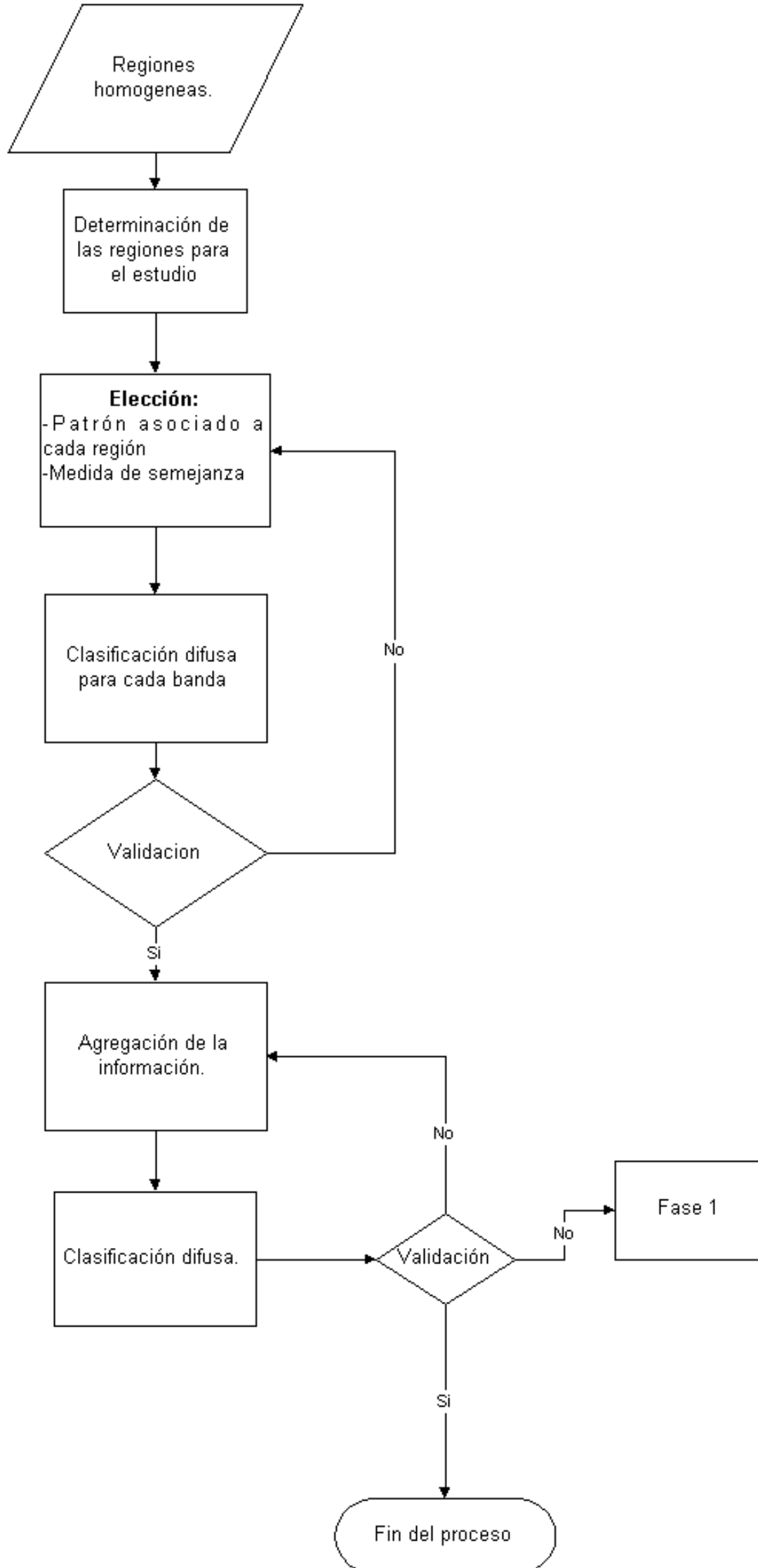
A lo largo de todos los procesos de clasificación vistos en este capítulo se ha hecho hincapié en que son procesos interactivos. A continuación se presenta un algoritmo interactivo que recoge todos estos procesos. Los algoritmos que se presentan en el capítulo 5 de esta memoria han sido desarrollados en los lenguajes de programación Fortran 90, C++ borland builder y Matlab 6.21. Creándose un entorno *amigable* para que el decisor pueda agregar la información más cómodamente y decidir en que regiones quiere hacer el estudio.

**Algoritmo de clasificación variacional. 1 Fase**

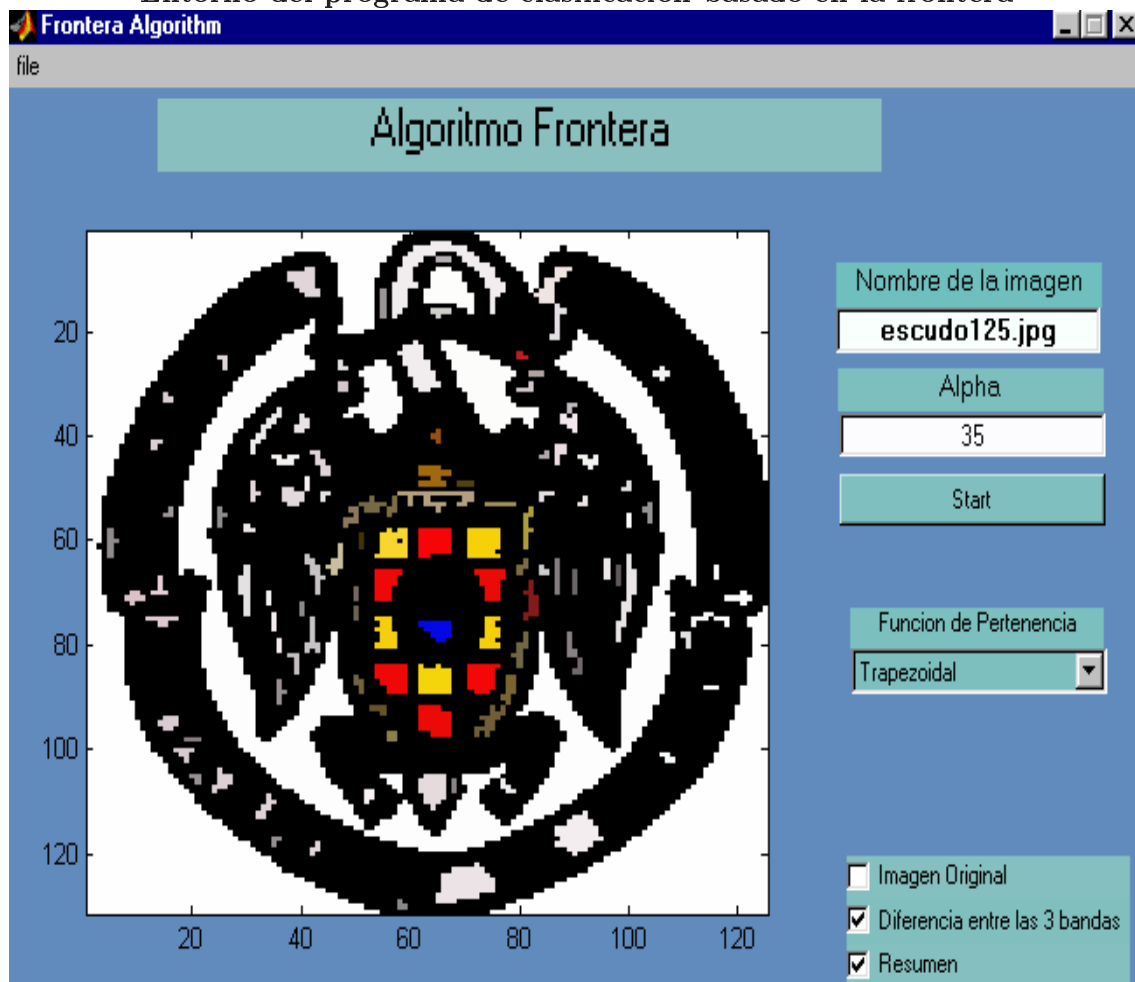




**Algoritmo de clasificación variacional. 2 Fase**



### Entorno del programa de clasificación basado en la frontera



A continuación se presentan algunos de los resultados obtenidos mediante esta metodología.

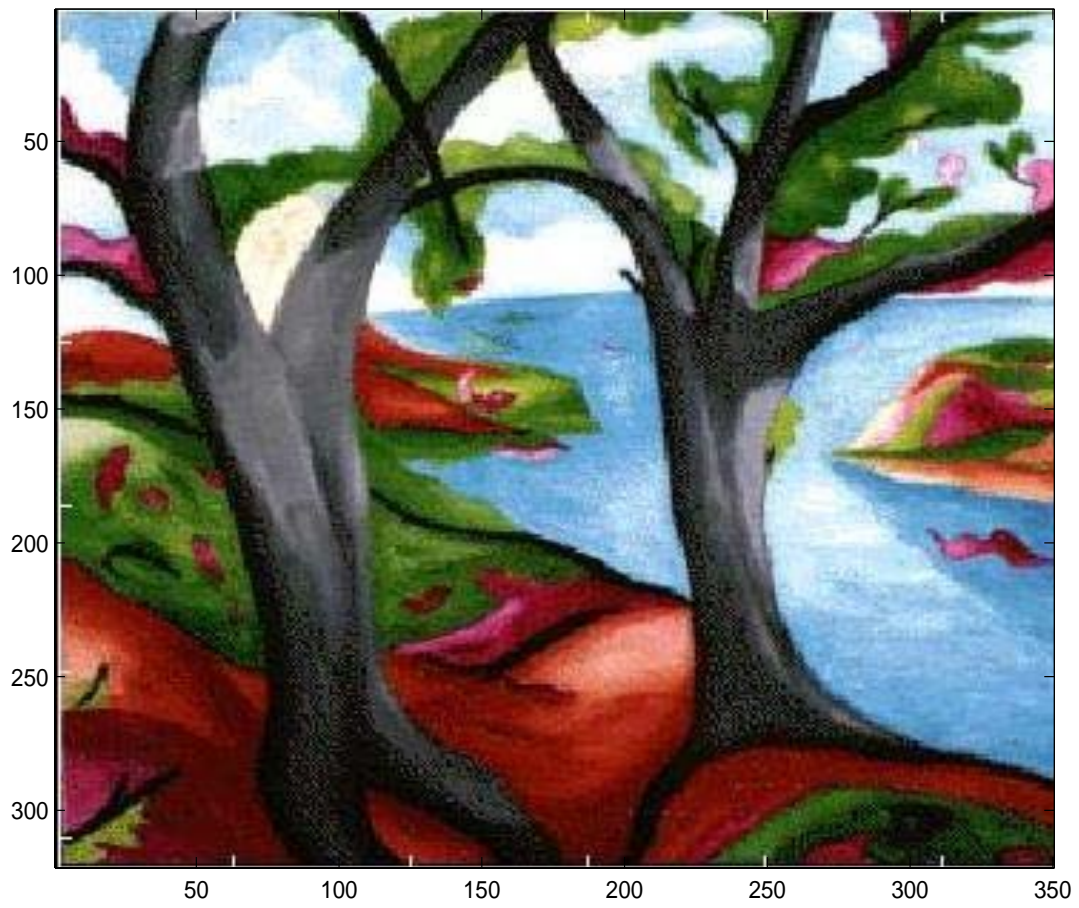
## 4.6 Resultados Computacionales.

Se han aplicado estos algoritmos a dos imágenes ("MATLAB" y "SEVILLA"), de las que presentamos las figuras de algunas visualizaciones de los resultados.

1. "MATLAB": dibujo estándar de un árbol que aparece en el MATLAB [5].
  - Imagen MATLAB: se trata de una imagen relativamente sencilla, con objetos reconocibles a simple vista.
  - Imagen digital *Frontera* de la imagen anterior obtenida mediante la agregación de la variacionales vertical y horizontal.
  - Imagen digital *Visualización (VP, VI)* de la imagen MATLAB
  - Funciones de pertenencia a la clase "Mar": una para cada banda más la agregación.
  - Funciones de pertenencia a la clase "Árbol": una para cada color más la agregación.
  - Función de pertenencia agregada de la clase "árbol", re-escalada para una mejor visualización.
  
2. "SEVILLA": la imagen digital de la región de Sevilla estudiada en [7], donde se analiza únicamente el espectro visible (las tres bandas RGB: rojo, verde y azul).
  - Imagen original de SEVILLA.
  - Imagen digital *Frontera* de la imagen anterior obtenida mediante la agregación de la variacionales vertical y horizontal.
  - Imagen digital *Visualización (VP, VI)* de la imagen SEVILLA.
  - Funciones de pertenencia a la clase "Secano": una para cada banda más la agregación.

- Función de pertenencia agregada de la clase "Secano", re-escalada.
  - Funciones de pertenencia a la clase "Río": una para cada color más la agregación.
  - Función de pertenencia agregada para la clase "Río", re-escalada.
3. "MADRID": Imagen digital de la sierra de Madrid, donde se analizan las bandas 1-6.
- Imagen del espectro visible de MADRID.
  - Imagen digital *Frontera* de la imagen anterior obtenida mediante la agregación de las variacionales vertical y horizontal.
  - Funciones de pertenencia a la clase "Lago": una para cada banda.
  - Agregación de la información dada por las cuatro bandas.

**Imagen tomada de MATLAB**



**Imagen digital *Frontera de la imagen* (MATLAB)**

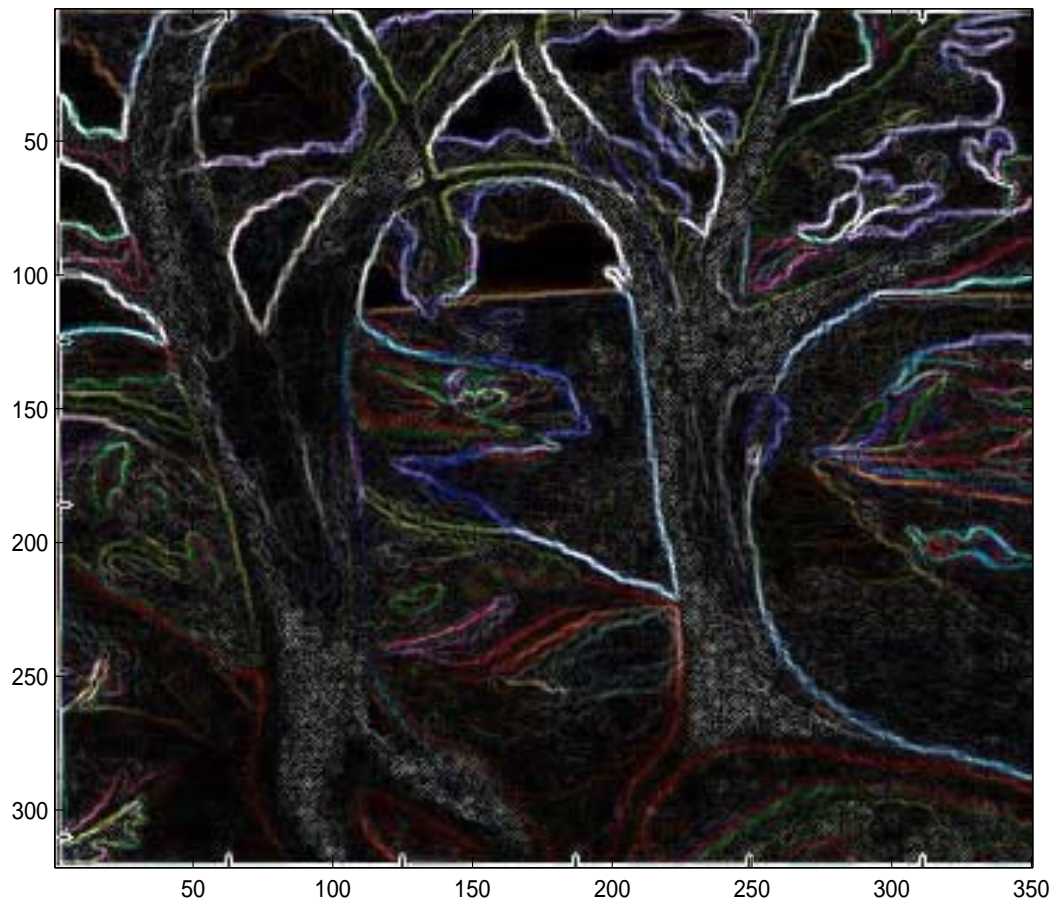
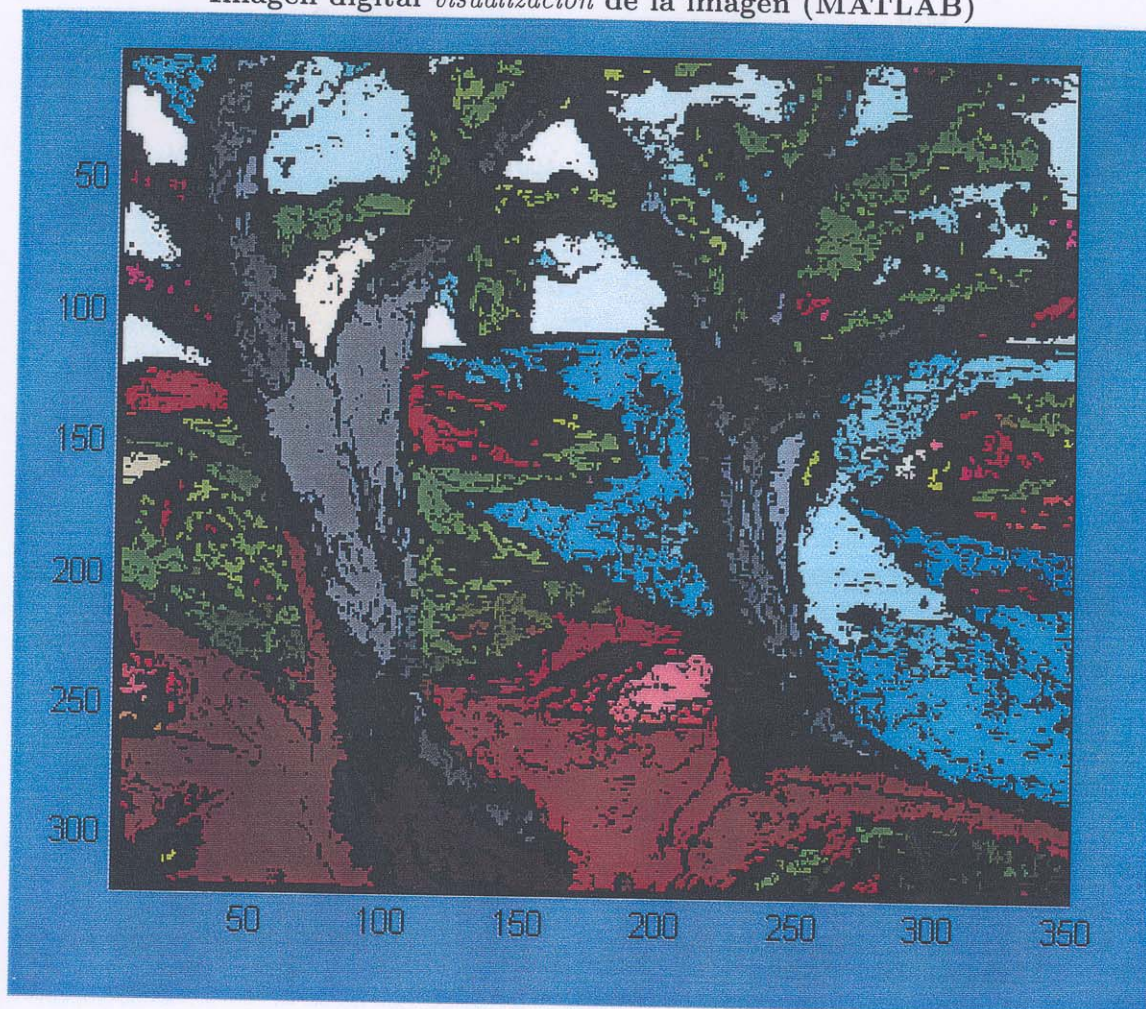
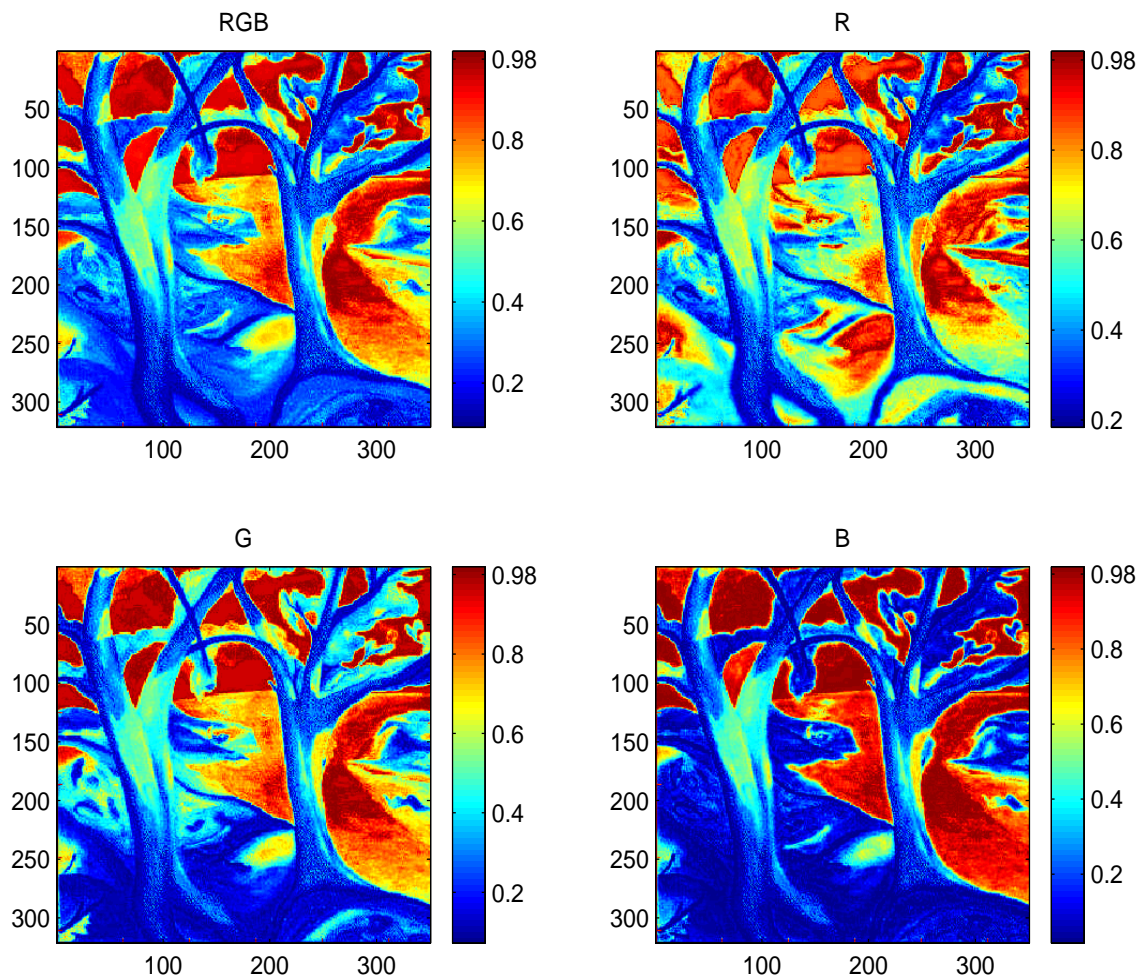


Imagen digital *visualización de la imagen (MATLAB)*

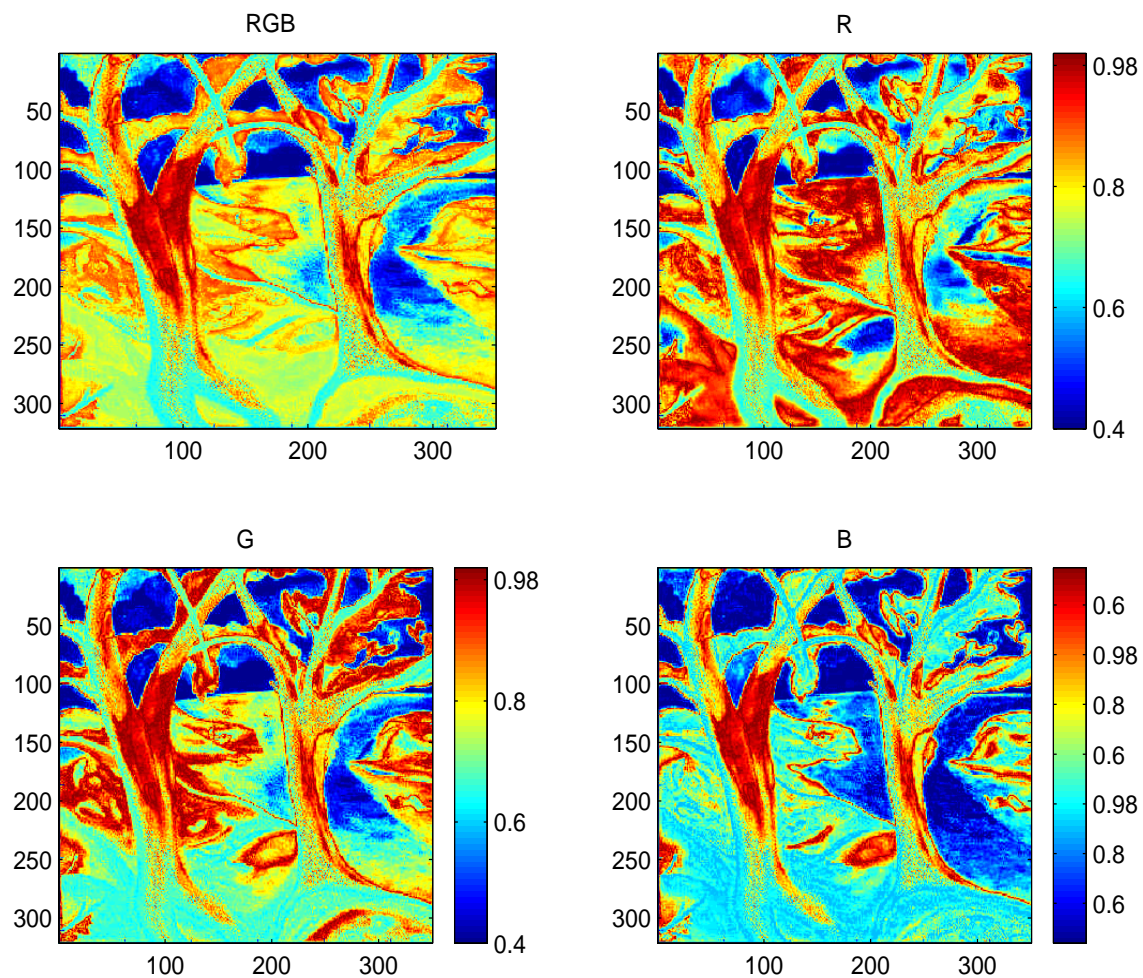




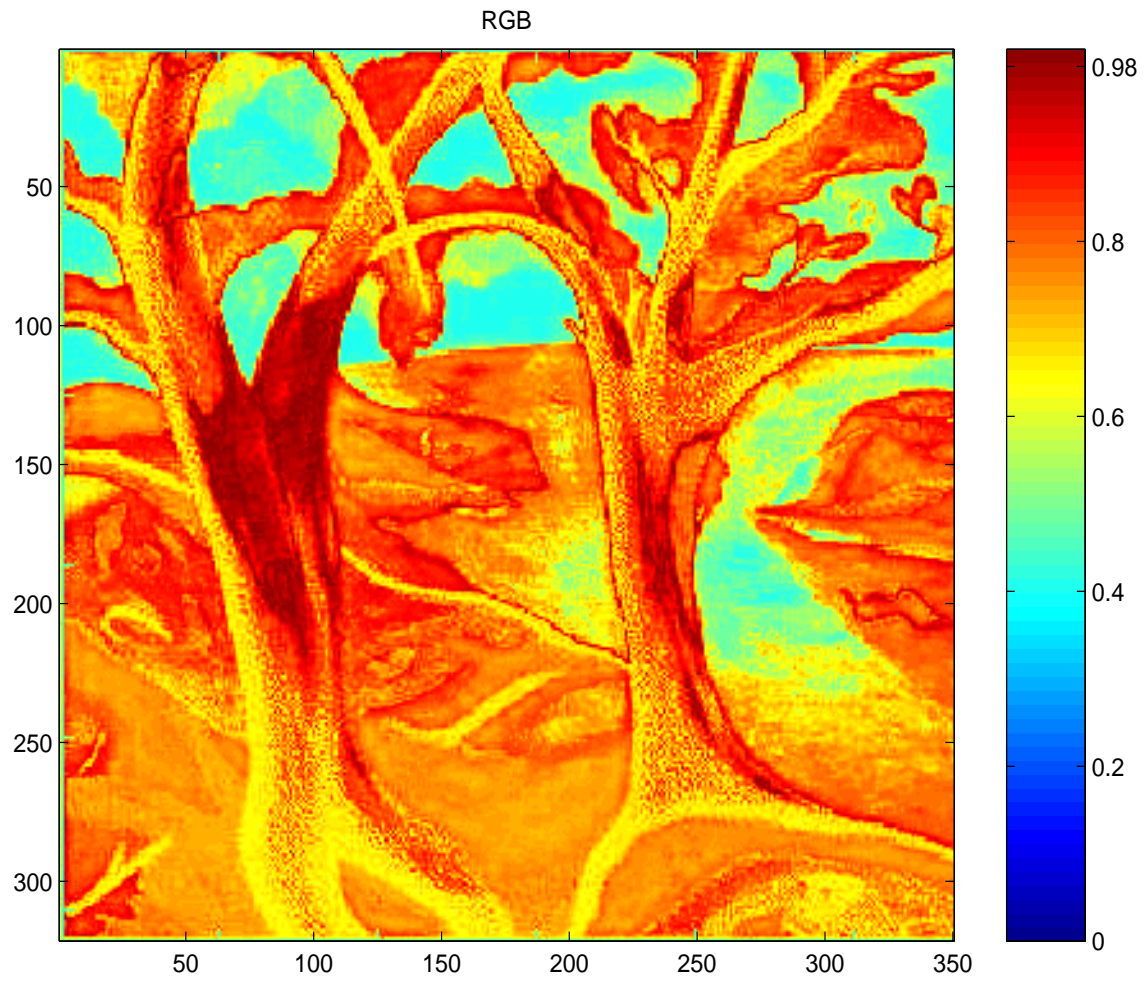
**Funciones de pertenencia a la clase "Mar" (MATLAB)**



### Funciones de pertenencia a la clase "Árbol" (MATLAB)



**Función de pertenencia de la clase "Árbol" (MATLAB)**



**Imagen original de SEVILLA**

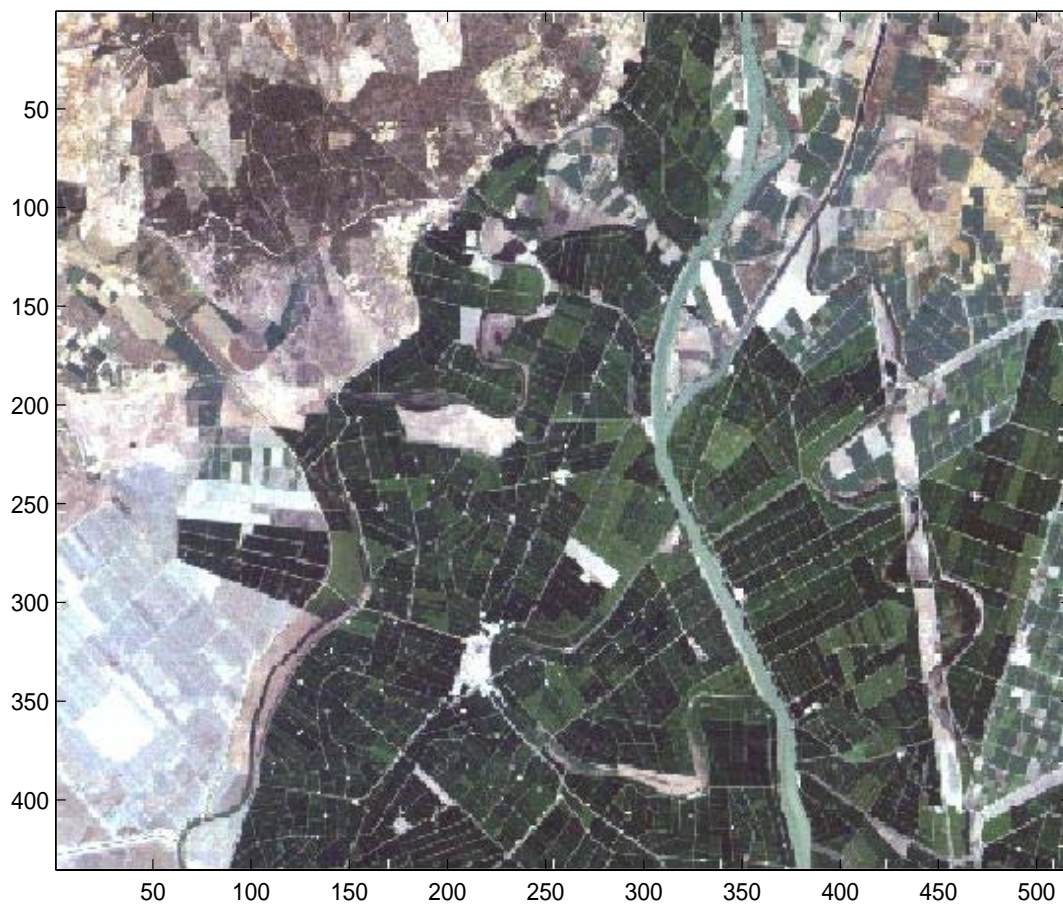


Imagen digital *Frontera de la imagen (SEVILLA)*

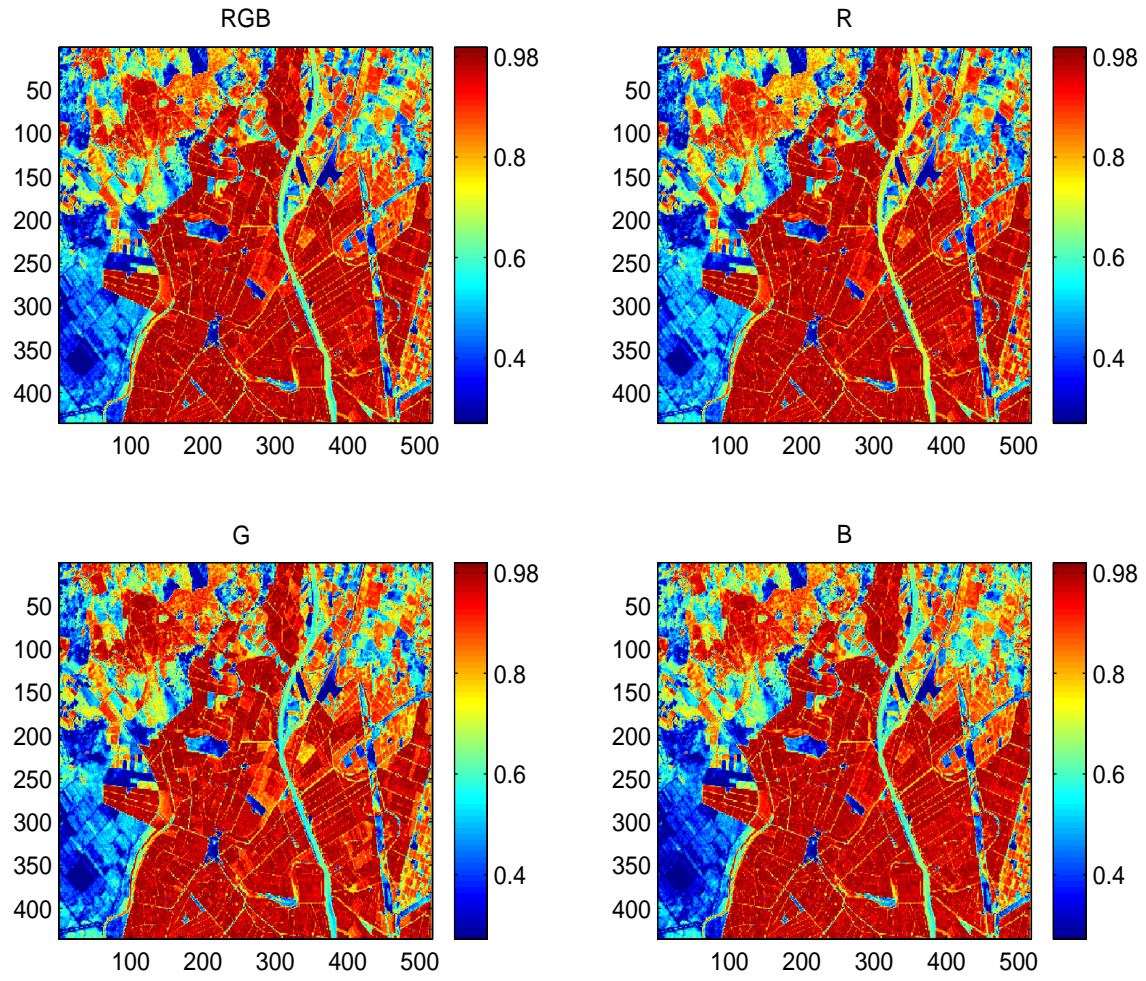


Capítulo 4. Clasificación en coloración. Variación de la homogeneidad de los píxeles.131

Imagen digital visualización de la imagen (SEVILLA)

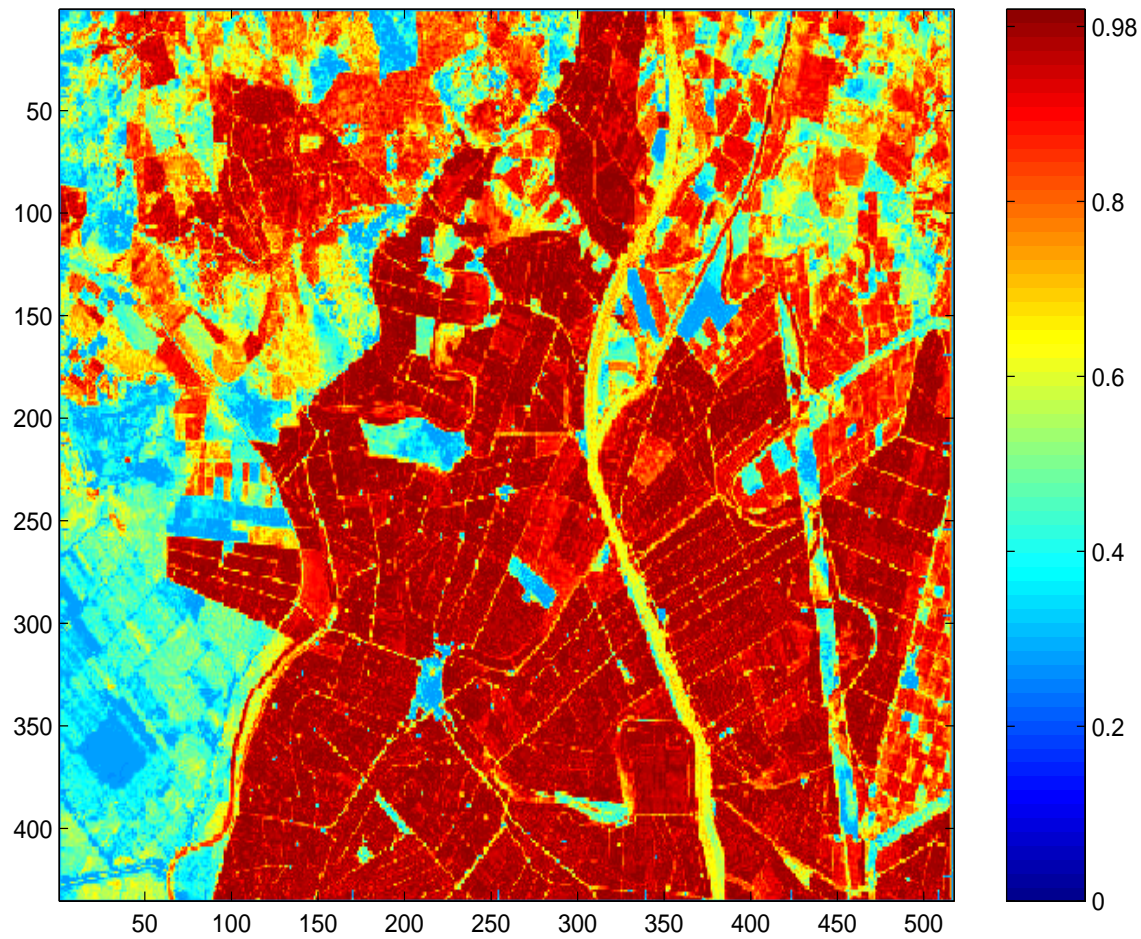


### Funciones de pertenencia a la clase "Secano" (SEVILLA)



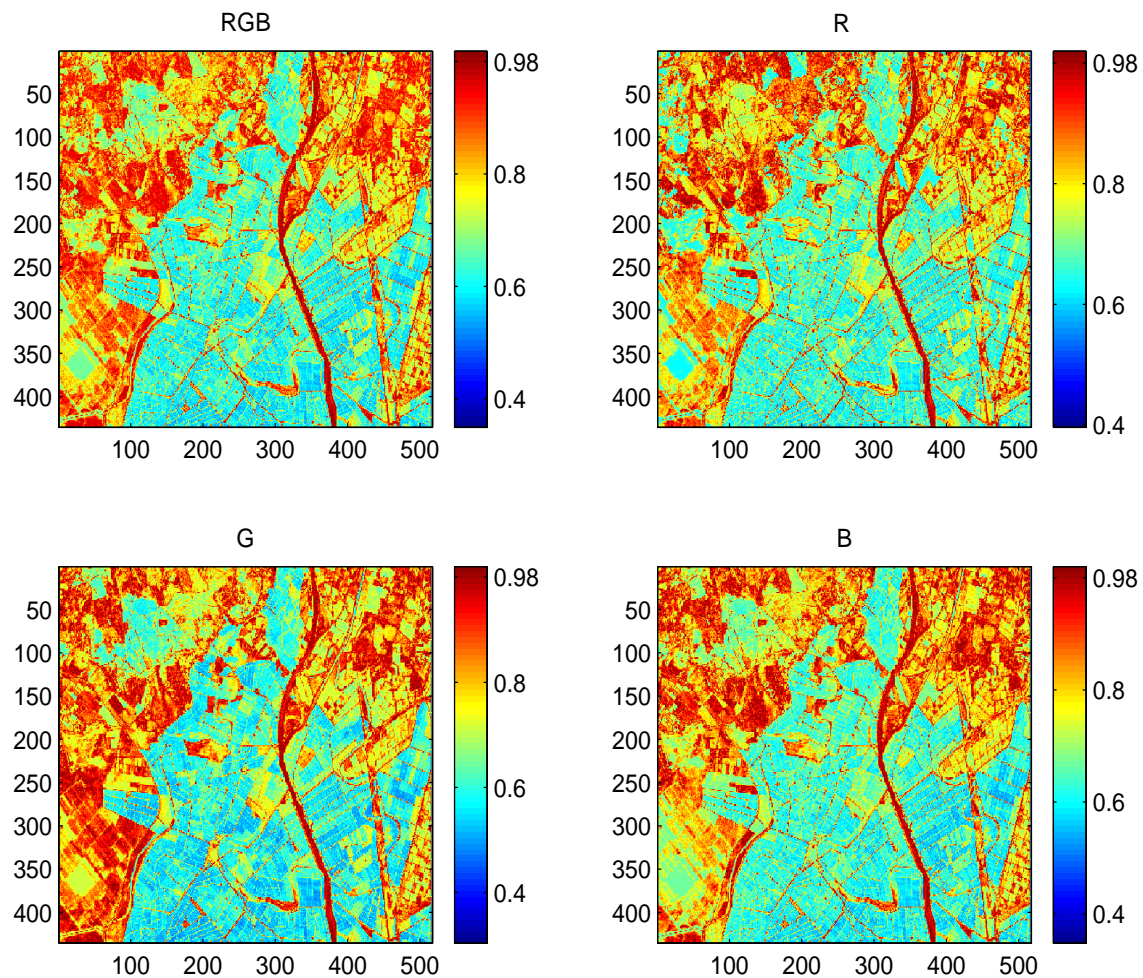
**Función de pertenencia de la clase "Secano" re-escalada (SEVILLA)**

RGB



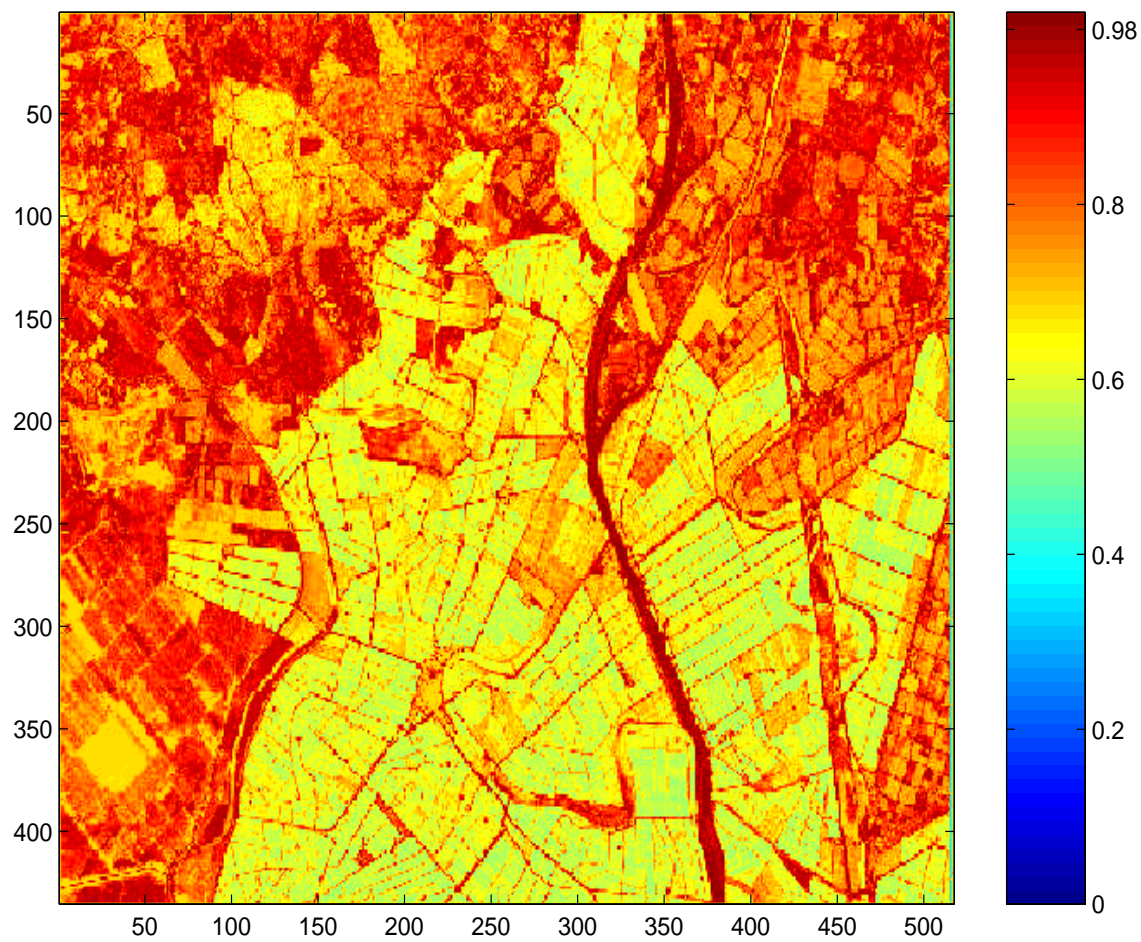


### Funciones de pertenencia a la clase "Río" (SEVILLA)



**Función de pertenencia de la clase "Río" re-escalada (SEVILLA)**

RGB



**Imagen del espectro visible de MADRID.**

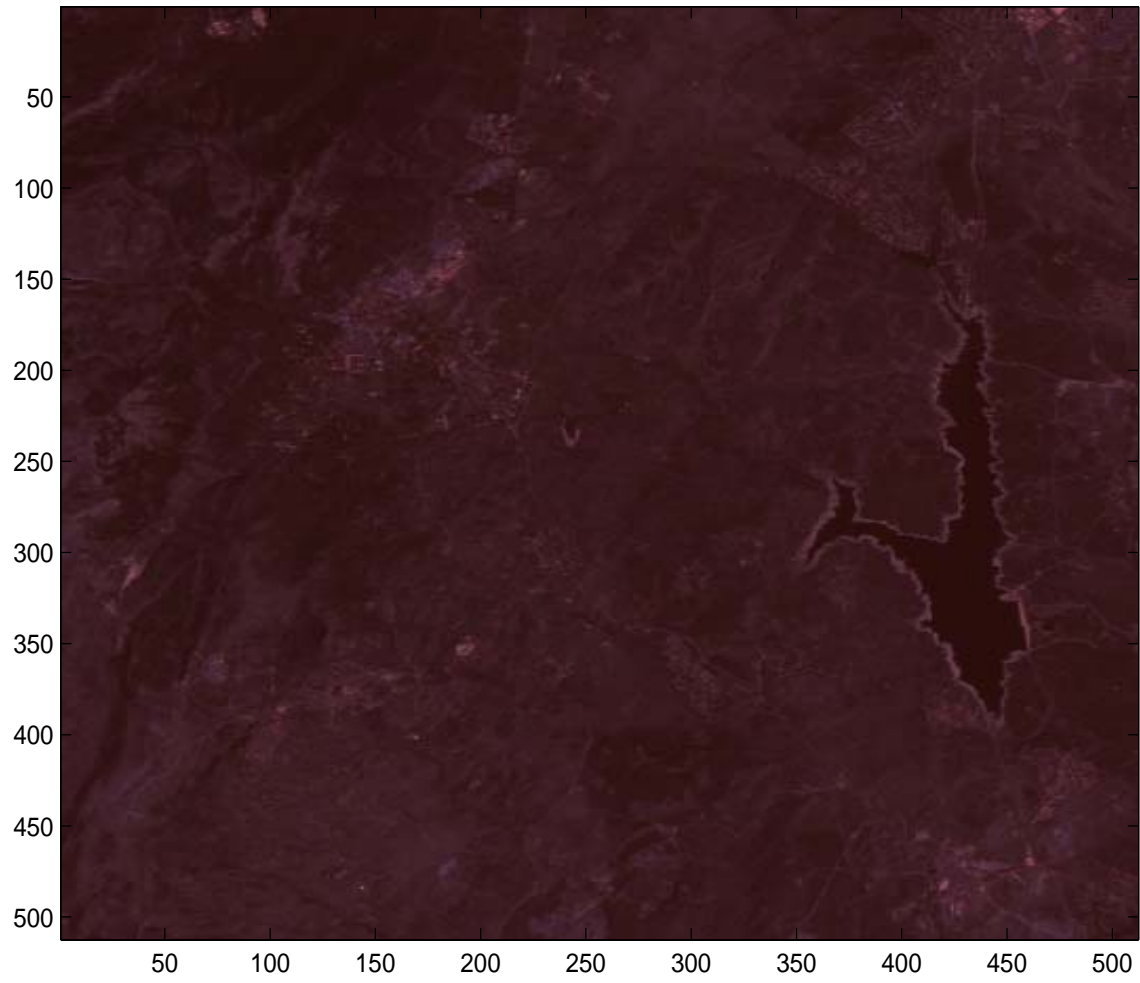
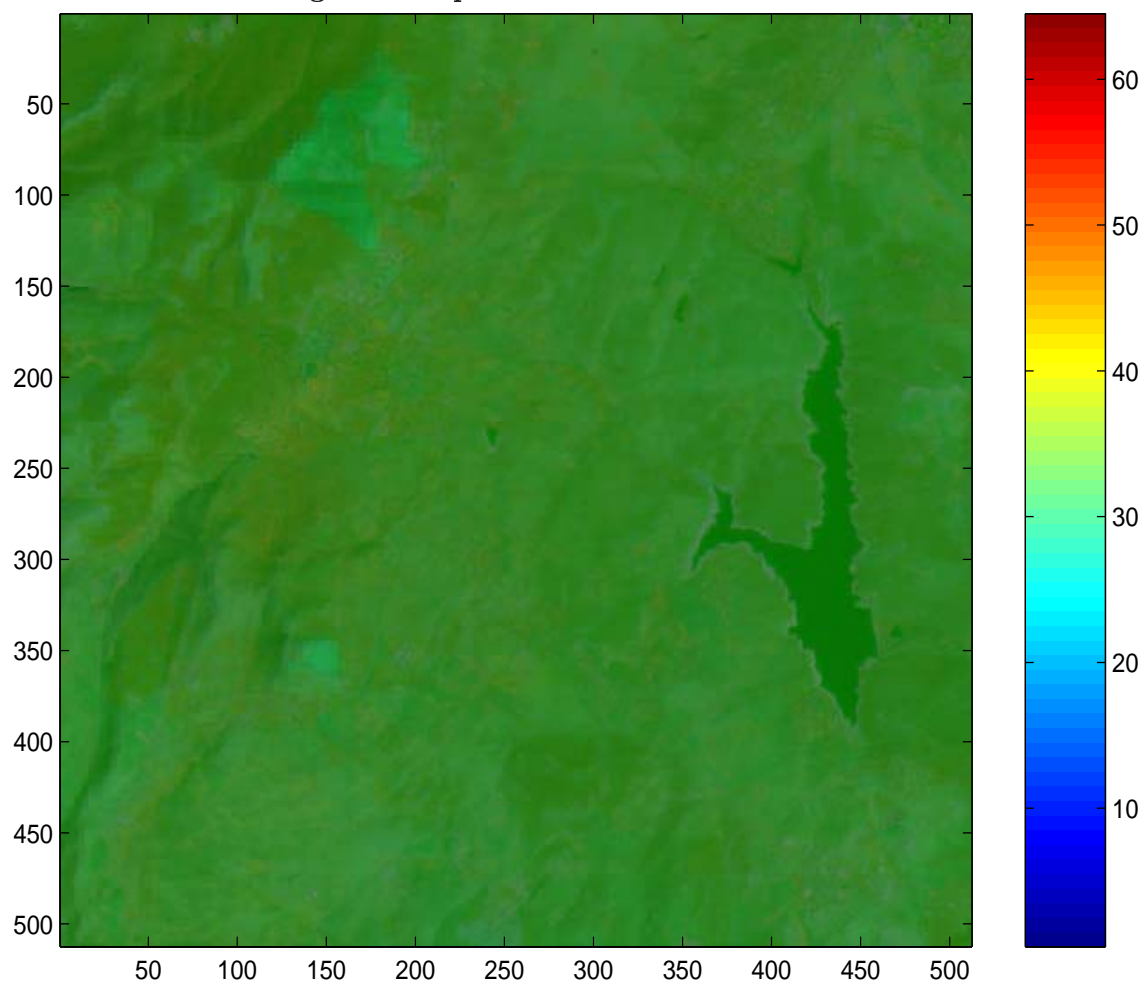
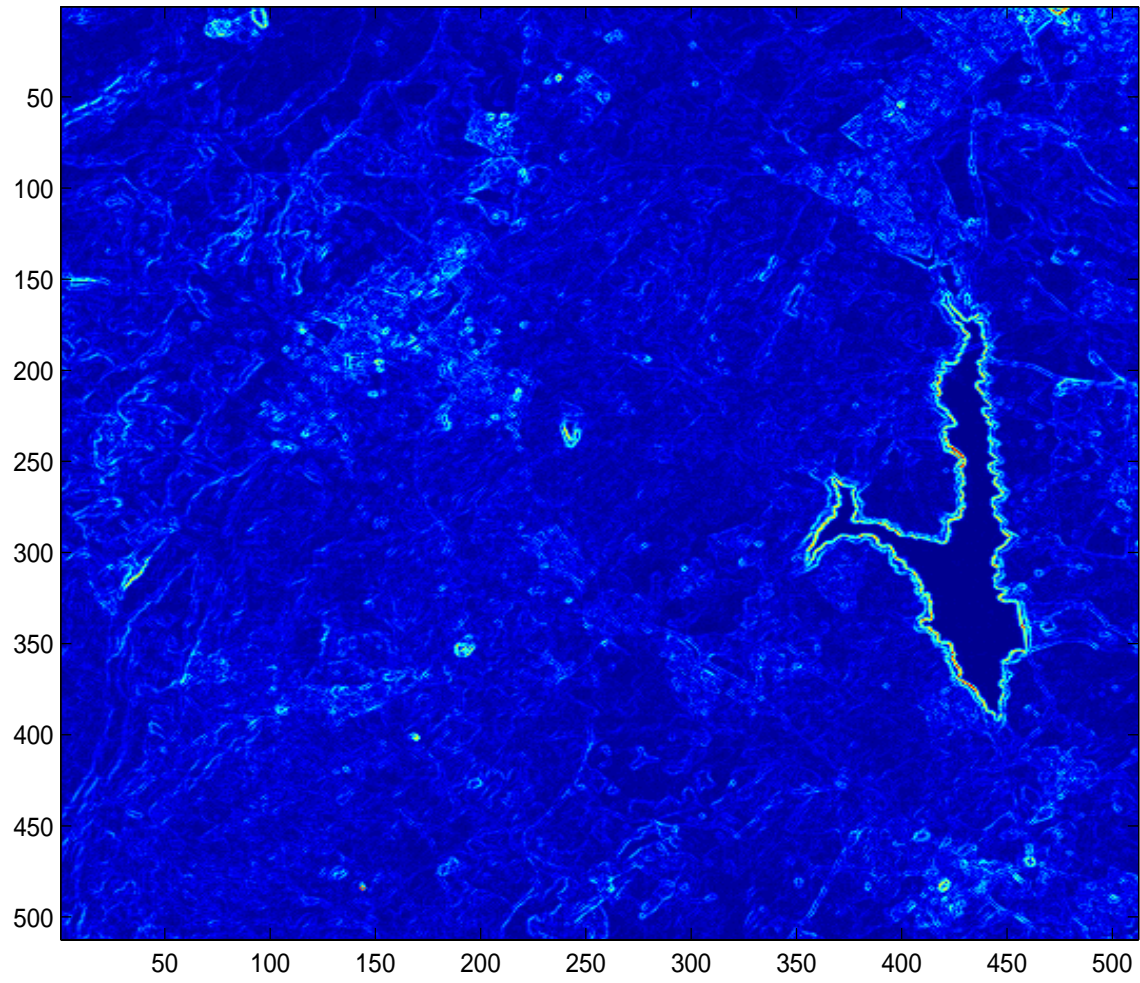


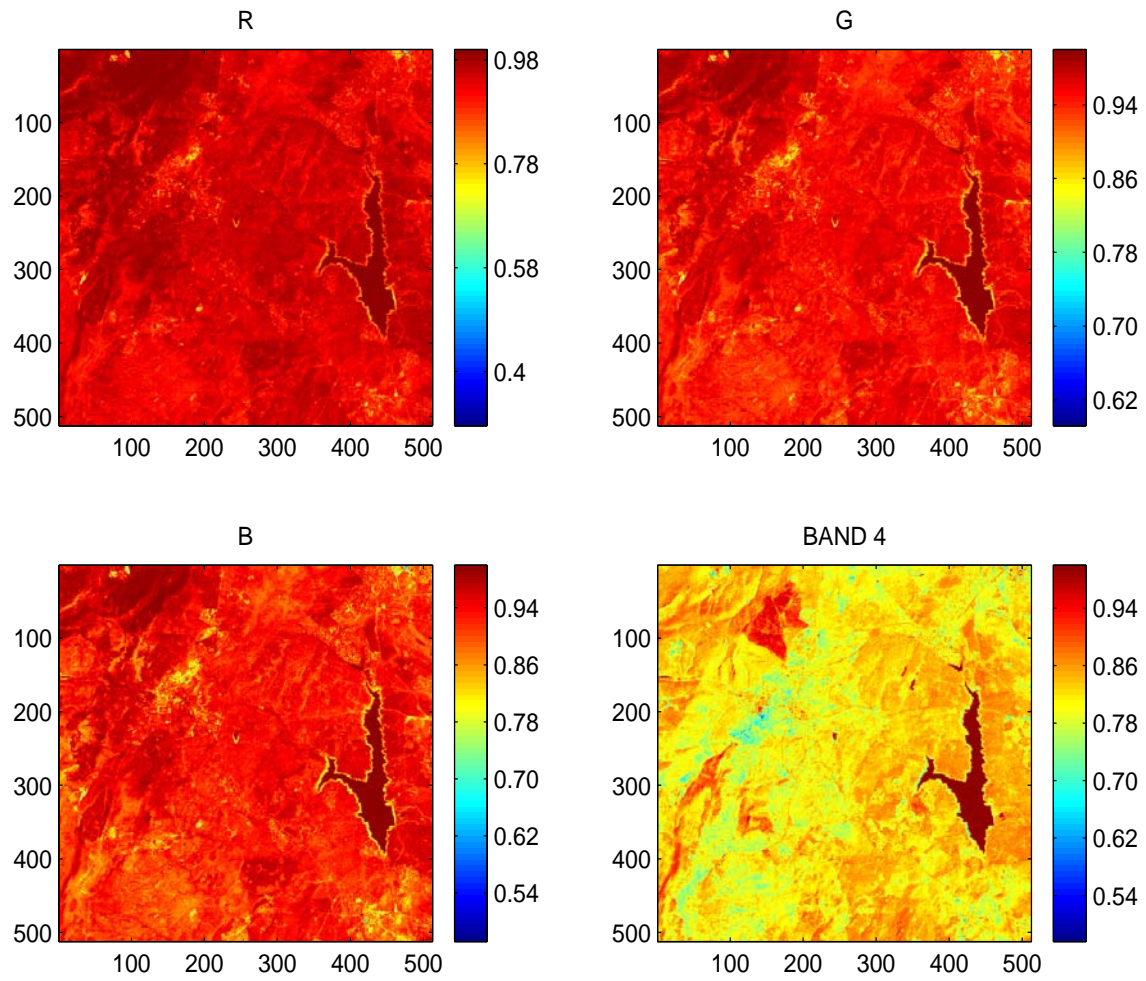
Imagen del espectro no visible de MADRID.



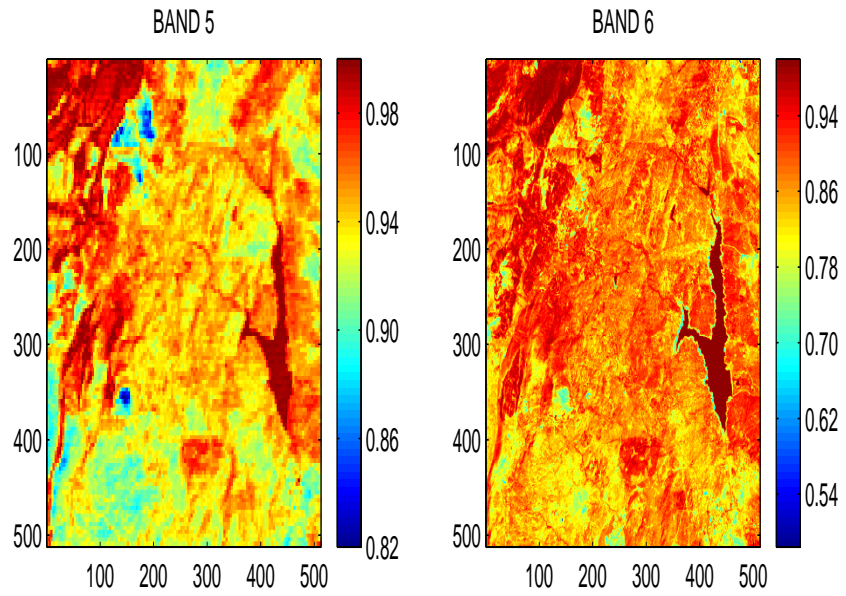
Visualización conjunta de los algoritmos de frontera.



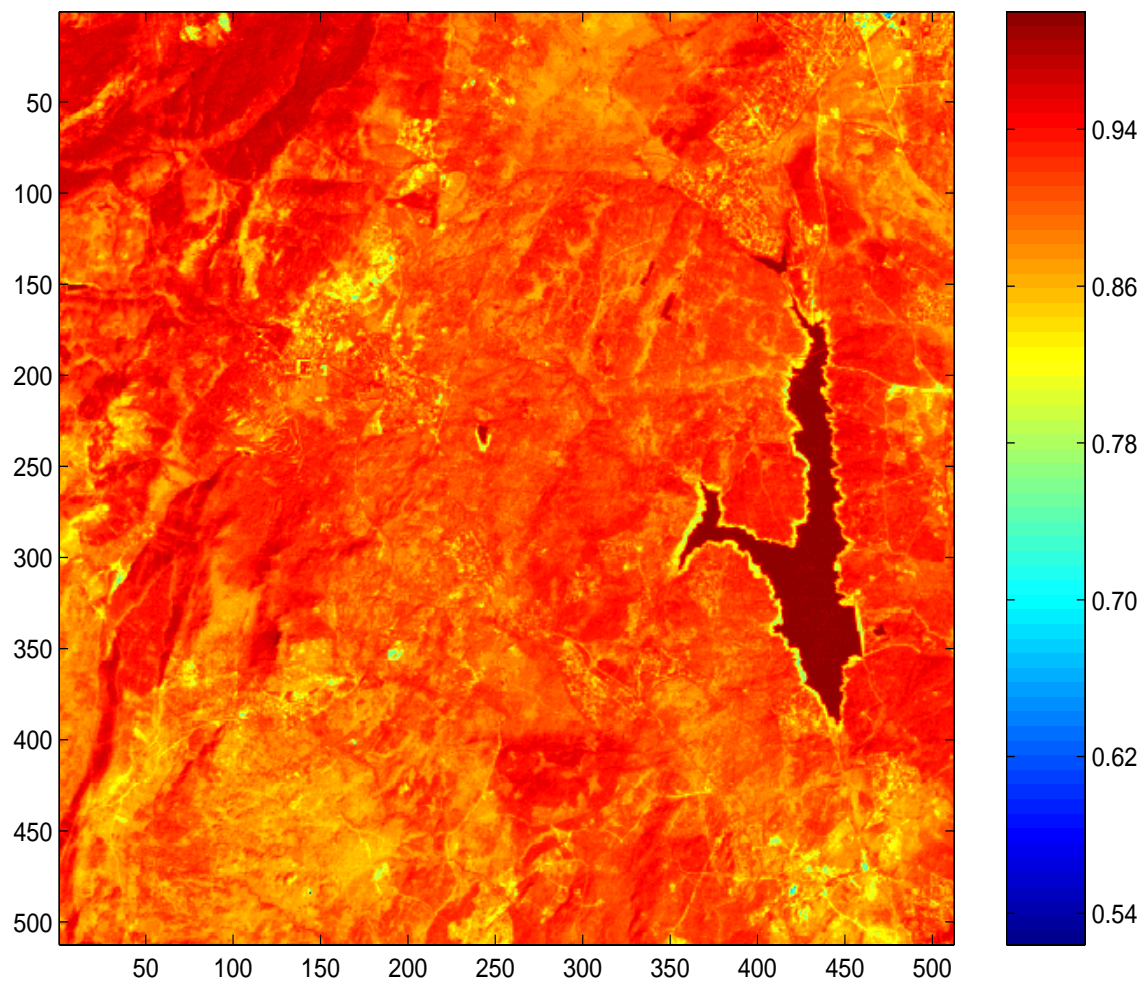
**Funciones de pertenencia a la clase "Lago": una para cada banda.**



**Funciones de pertenencia a la clase "Lago": una para cada banda.**



**Agregación de la información dada por las cuatro bandas.**





## Capítulo 5

# Clasificación en teledetección.

## Coloración del grafo difuso

En este capítulo se propone una metodología no supervisada de coloración nítida, que será considerada en sistemas de clasificación difusos futuros (ver [8]). Esta metodología se define por medio de una coloración binaria nítida, que permitirá encontrar regiones consistentes y determinar las posibles clases difusas.

Este capítulo está dividido de la siguiente forma: en la sección 2 se introduce el grafo difuso de pixels asociado a la imagen digital. En la sección 3 se presenta el algoritmo de estricto de coloración. Este algoritmo tiene algunos problemas computacionales, y por este motivo se presenta en la sección 4 el algoritmo de coloración relajado. En la sección 5 esta coloración dará lugar a un procedimiento que se aplicará en la clasificación de una imagen real ([7]).

Una de las principales críticas que se hacen a los algoritmos de clasificación de imágenes digitales en el caso no supervisado, es que la mayoría de ellos no tienen en cuenta la información del entorno que rodeaba a un pixel. Por este motivo se desarrollarán técnicas que, teniendo en cuenta esta información, encuentren regiones homogéneas dentro de la imagen.

Debido a la naturaleza de los problemas de clasificación en teledetección, se sugiere el uso de técnicas basadas en modelos difusos. Este es el caso cuando no se tienen objetos para ser clasificados. Los objetos, al menos en un sentido estándar, suelen presentar bordes claros y bien definidos, y la clasificación puede ser desarrollada basándose en un análisis de frontera y con un conocimiento previo de las formas de los diferentes objetos del estudio. Por el contrario, muchos problemas de clasificación de la superficie terrestre usan, referencias mostrando la graduación de la clases desde una clase hasta la siguiente.

Así pues, en muchas situaciones, no existen fronteras bien definidas, y cada clase define un conjunto difuso sin una forma particular (ver [17]). Por este motivo durante los últimos años se ha producido un incremento en la investigación de la teoría de los conjuntos difusos aplicados a los problemas de clasificación en teledetección [57].

Para resolver el problema de clasificación en teledetección se pueden encontrar en la literatura muchas y diversas aproximaciones. En Amo *et al.* [5, 7], por ejemplo, se propone un modelo de clasificación basado en un modelo outranking modificado [103, 114, 122]. Pero la información de salida suele ser difícil de interpretar por un decisor no cualificado.

Una necesidad principal es desarrollar una técnica de representación difusa. En particular, se precisa algún tipo de herramienta de coloración que permita una imagen consistente e informativa que mostrase las posibles regiones y grado de pertenencia de las posibles clases.

## 5.1 Grafo difuso de pixels

Dada una imagen  $I$ , un problema estándar de clasificación nítida es el de la búsqueda de una *buena* partición del conjunto de pixels en regiones. Estas regiones serán consideradas como candidatos para una nueva clase, en el caso en el que la región sea lo suficientemente homogénea. Así pues en primer lugar se tratará de determinar una familia de pixels  $\{A_1, \dots, A_c\}$  de forma que  $P = \cup_{k=1}^c A_k$  pero  $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ .

Una de las claves en el proceso de clasificación aquí propuesto será el de la elección de la función distancia entre pixels  $d$ , sin pérdida de generalidad, en este capítulo se va a utilizar la distancia Euclidea. Por supuesto, otra distancia puede ser tomada en cuenta en futuras investigaciones. Obviamente el proceso de clasificación depende fuertemente de la selección apropiada de la distancia, para ser elegida se deberán tener en cuenta todas las características de la imagen así como los objetivos de la clasificación que se va a realizar.

Por este motivo el conjunto de pixels  $P$ , está siendo modelizado como un grafo planar difuso cuyos nodos son pixels, descritos por medio de sus coordenadas cartesianas  $i \in \{1, \dots, r\}$  y  $j \in \{1, \dots, s\}$ .

El grafo será planar en el sentido de que dos pixels  $(i, j)$  y  $(i', j')$  no pueden ser conectados si  $|i - i'| + |j - j'| > 1$ . Consecuentemente, dos pixels podrían ser adyacentes solamente si ellos comparten una coordenada, siendo la otra contigua.

La primera definición de grafo difuso fue propuesta por Kaufmann en [68], desde las relaciones difusas introducida por Zadeh en [148]. Aunque Rosenfeld introdujo en [109] otra definición elaborada, incluyendo nodos difusos y aristas difusos, en este capítulo se tratará con nodos nítidos y aristas difusos (ver [70]).

Sea  $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$  un grafo difuso, donde  $V$  es el conjunto de nodos, y  $\tilde{E}$  el conjunto de aristas difusos caracterizados por la matriz  $\mu = (\mu_{ij})_{i,j \in V}$ :

$$\mu_{ij} = \mu_{\tilde{E}}(\{i, j\}) \quad \forall i, j \in V$$

siendo  $\mu_{\tilde{E}} : V \times V \rightarrow M$  su función de pertenencia.

Cada elemento  $\mu_{ij} \in M$  representa el nivel de intensidad de una arista  $\{i, j\}$  para cada  $i, j \in V$ . En este sentido, un grafo difuso puede ser también denotado como  $\tilde{G} = (V, \mu)$ .

El conjunto  $M$  es linealmente ordenado de forma que dos valores  $\mu_{i,j} \prec \mu'_{i',j'}$  verifican

que el nivel de intensidad de la arista  $\{i, j\}$  es menor que el nivel de intensidad de la arista  $\{i', j'\}$ . El conjunto  $M$  permite la graduación literal del conjunto de aristas; por ejemplo, si  $M = \{n, l, h\}$  las aristas pueden ser graduados como nulo ( $n$ ), bajo ( $l$ ) o alto ( $h$ ).

Un grafo difuso  $\tilde{G}$  puede ser considerado como una generalización del grafo  $G$ , ya que, tomando  $M = \{0, 1\}$ ,  $\tilde{G}$  es un grafo nítido si la matrix  $\mu$  es definida como

$$\mu_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } \{i, j\} \in E \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \forall i, j \in V$$

$$\tilde{E} = \left\{ \{d(\overline{x_{i,j}}, \overline{x_{i',j'}})\} / \vee \begin{bmatrix} i = i' & |j - j'| = 1 \\ j = j' & |i - i'| = 1 \end{bmatrix} \right\}$$

**Definición 5.1.** Dada la imagen  $I$ , y una distancia  $d$  entre pixels, el *grafo difuso de pixels* es definido como el par  $\widetilde{G}(I) = (P, \tilde{E})$ .

Teniendo en cuenta la topología de  $\widetilde{G}(I)$ , los pixels del grafo difuso pueden ser también caracterizados por el conjunto  $P$  y las dos matrices  $r \times s$ ,  $D^1$  y  $D^2$ , donde

$$D_{i,j}^1 = d(\overline{x_{i,j}}, \overline{x_{i+1,j}}) \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r-1\} \times \{1, \dots, s\}$$

y

$$D_{i,j}^2 = d(\overline{x_{i,j}}, \overline{x_{i,j+1}}) \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, s-1\}$$

El proceso de coloración propuesto en este capítulo estará basado en esta representación alternativa, de ahora en adelante se identificará el grafo difuso de pixels  $\widetilde{G}(I)$  por  $(r, s, D^1, D^2)$ . A continuación se introduce un ejemplo ilustrativo.

**Ejemplo 5.1.** Sea  $(r, s, D^1, D^2)$  grafo de pixels difuso con  $r = 3, s = 4$  y

$$D^1 = \begin{pmatrix} 1.5 & 2.0 & 1.9 & 3.6 \\ 1.7 & 1.8 & 0.9 & 1.8 \end{pmatrix} \quad D^2 = \begin{pmatrix} 3.1 & 1.9 & 3.5 \\ 1.6 & 4.0 & 1.8 \\ 2.1 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix}$$

EL grafo de pixels difuso puede verse en la siguiente figura.

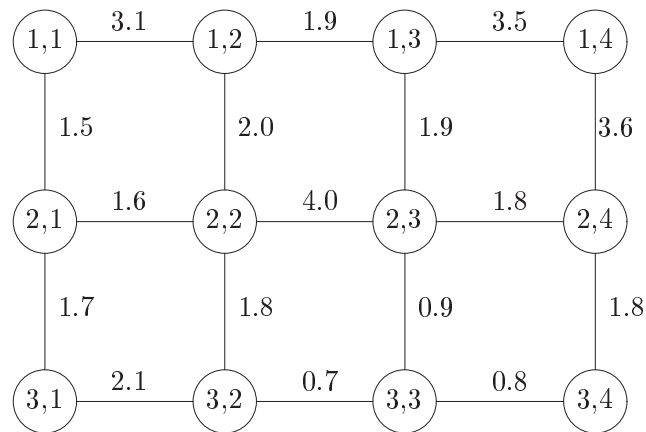


Figura 5.1: Grafo difuso de pixels del ejemplo 4.1

El algoritmo de coloración propuesto en la siguiente sección tiene la ventaja sobre la representación alternativa anterior, que muestra la relación de intensidad entre los pixels adyacentes en el grafo difuso de pixels  $\widetilde{G(I)}$ .

## 5.2 Algoritmo estricto de Coloración

Una  $c$ -coloración de un grafo  $G = (V, E)$  (ver [101]) es una función

$$C : V \longrightarrow \{1, \dots, c\}$$

que verifica que  $C(v) \neq C(v')$  si  $\{v, v'\} \in E$ . Una  $c$ -coloración induce una clasificación nítida del conjunto de nodos  $V$ , asociando a cada color una clase:

$$V_C(k) = \{v \in V / C(v) = k\} \quad k \in \{1, \dots, c\}$$

Una coloración binaria de un grafo  $G = (V, E)$  es un caso particular de una 2-coloración

$$col : V \longrightarrow \{0, 1\}$$

El objetivo que se persigue es obtener una clasificación del conjunto de pixels por medio de una  $c$ -coloración  $C$  del grafo difuso de pixels  $\widetilde{G(I)}$ : el pixel  $(i, j) \in P$  estará clasificado como  $k \in \{1, \dots, c\}$  si su color es  $C(i, j) = k$ .

El problema de coloración de un grafo difuso puede verse en [104]. Se define la familia de  $G_\alpha$ , a los grafos nítidos definidos mediante  $\alpha$ -cortes del conjunto de aristas

$$E_\alpha = \{\{i, j\} / \mu_{i,j} \geq \alpha\}$$

Los valores del parámetro  $\alpha$  serán seleccionados de forma que un sucesivo proceso de coloración binario será aplicado a algunos subgrafos parciales difusos de  $\widetilde{G(I)}$ .

La primera coloración binaria analiza el conjunto de pixels  $P$  clasificando cada pixel como 0 ó 1. La segunda coloración binaria es aplicada por separado a cada subgrafo generado por aquellos pixels coloreados como 0 obteniendo así las clases 00 y 01, y para el subgrafo generado por aquellos pixels coloreados como 1, para obtener las clases 10 y 11.

Este proceso jerárquico de coloración binaria es repetido en el proceso de coloración

estricto. En este sentido una  $c$ -coloración  $C$  será definida en  $\widetilde{G(I)}$ : Si  $C(i, j) = k$ , con  $k = 6$  por ejemplo, entonces la representación binaria de  $k - 1 = 5$  es 101, es decir, el pixel  $(i, j)$  será coloreado tres veces como 1, 0 y 1 respectivamente. En este ejemplo se necesitan tres procesos binarios de coloración fijando en cada uno de ellos el primer, segundo y tercer dígito de la representación binaria de  $k - 1$ .

### 5.2.1 Procedimiento de coloración binaria

El procedimiento de coloración binaria clasifica dos pixels adyacentes como 0 y 1 si sólo si la distancia ente ellos es mayor o igual que un valor prefijado  $\alpha$ . Esta es una aproximación alternativa al problema de clasificación clásico ya que en la aproximación clásica dos pixels serán clasificados en la misma clase si son similares sin tener en cuenta si son adyacentes o no.

Formalmente, para definir el primer procedimiento de coloración binario, dado un valor  $\alpha$ , sea  $G_\alpha$  el  $\alpha$ -corte del grafo difuso  $\widetilde{G(I)}$ :

$$G_\alpha = (P, E_\alpha)$$

donde

$$E_\alpha = \{\{(i, j), (i + 1, j)\} / d_{i,j}^1 < \alpha\} \cup \{\{(i, j), (i, j + 1)\} / d_{i,j}^2 < \alpha\}$$

El conjunto  $E_\alpha$  es el conjunto de todos los pares de pixels adyacentes con distancia  $d$  menor que  $\alpha$ .

Sea  $col : P \rightarrow \{0, 1\}$  una coloración binaria de  $G_\alpha$ . Teniendo en cuenta la topología del grafo difuso de pixels, la primera coloración binaria puede ser obtenida asignando color arbitrario ("0" o "1") a un pixel concreto, y definiendo un orden en el cuál cada pixel será

coloreado; si se supone, por ejemplo, que el primer pixel es el  $(1, 1)$  en la parte superior izquierda de la imagen, los pixels serán coloreados desde la izquierda hasta la derecha y de arriba a abajo con un valor de  $\alpha$  fijo:

$$col(i + 1, j) = \begin{cases} col(i, j) & \text{if } d_{i,j}^1 < \alpha \\ 1 - col(i, j) & \text{if } d_{i,j}^1 \geq \alpha \end{cases} \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r - 1\} \times \{1, \dots, s\}$$

$$col(i, j + 1) = \begin{cases} col(i, j) & \text{if } d_{i,j}^2 < \alpha \\ 1 - col(i, j) & \text{if } d_{i,j}^2 \geq \alpha \end{cases} \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, s - 1\}$$

Dado un pixel coloreado  $(i, j)$ , los pixels adyacentes  $(i + 1, j)$  and  $(i, j + 1)$  son coloreados; el pixel  $(i + 1, j + 1)$  puede ser coloreado desde el pixel  $(i + 1, j)$  y desde el pixel  $(i, j + 1)$ . Una restricción natural es que ambos colores deben ser iguales, en otro caso el color será denotado como *inconsistente*

En este sentido, la coloración binaria es también dependiente del orden particular de coloración que hemos escogido: en el anterior ejemplo 4.1, si se elige  $\alpha = 3.0$  y  $col(1, 1) = 0$ , entonces  $col(1, 2) = 1$  y  $col(2, 1) = 0$ ; sin embargo,  $col(2, 2) = 1$  si el pixel  $(2, 2)$  es coloreado desde  $(1, 2)$  pero  $col(2, 2) = 0$  si es coloreado desde  $(2, 1)$ . Esta situación de inconsistencia necesita ser primero identificada.

**Definición 5.2.** Dado el conjunto de pixels  $P$  un *cuadrado* es un subconjunto de cuatro pixels

$$sq(i, j) \equiv \{(i, j); (i + 1, j); (i, j + 1); (i + 1, j + 1)\}$$

siendo  $i \in \{1, \dots, r - 1\}$  y  $j \in \{1, \dots, s - 1\}$ .



Denotaremos entonces por  $PS$  el conjunto de todos los *cuadrados*

$$PS = \{sq(i, j) / i \in \{1, \dots, r - 1\} j \in \{1, \dots, s - 1\}\}$$

**Definición 5.3.** Dado un grafo difuso de pixels  $(r, s, D^1, D^2)$ , un cuadrado  $sq(i, j) \in PS$  es *consistente* a nivel  $\alpha$  si, dado un color arbitrario  $col(i, j)$ , el anterior procedimiento de coloración binaria asigna el mismo color al pixel  $(i + 1, j + 1)$ , tanto si en coloreado desde el pixel  $(i, j + 1)$  o desde el pixel  $(i + 1, j)$ . En otro caso se dirá que el cuadrado de pixels es *inconsistente*.

En el ejemplo 4.1, el pixel  $sq(1, 1)$  es inconsistente al nivel  $\alpha = 3.1$ , pero consistente al nivel  $\alpha = 3.2$ .

Consecuentemente, la anterior coloración binaria de grafo difuso de pixels depende de la elección del valor  $\alpha$ . Puede aparecer dos situaciones extremas:

- $\bar{\alpha} = \max_{(i,j) \in P} \{d_{i,j}^1; d_{i,j}^2\}$

Si se fija un valor  $\alpha > \bar{\alpha}$ , entonces toda la imagen es considerada como una clase única ( $col(i, j) = col(1, 1) \forall (i, j) \in P$ ).

- $\underline{\alpha} = \min_{(i,j) \in P} \{d_{i,j}^1; d_{i,j}^2\}$

En el caso  $\alpha < \underline{\alpha}$ , la imagen parece un tablero de ajedrez, siendo todos los pixels adyacentes clasificados como "0" y "1":

$$col(i, j) = \begin{cases} col(1, 1) & \text{si } (i + j) \text{ es impar} \\ 1 - col(1, 1) & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \forall (i, j) \in P$$

En este sentido, solamente el intervalo  $[\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$  debería ser considerado. Determinar un nivel  $\alpha$  intermedio apropiado no es una cuestión trivial.

Dado un nivel  $\alpha$ , los cuadrados inconsistentes pueden ser detectados con la función binaria

$$inconsis_{\alpha}(i, j, D^1, D^2) = \begin{cases} 1 & \text{si } sq(i, j) \text{ es inconsistente al nivel } \alpha \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde cada valor  $inconsis_{\alpha}(i, j, D^1, D^2)$  depende de los valores del cuadrado  $d_{i,j}^1$ ,  $d_{i,j+1}^1$ ,  $d_{i,j}^2$  y  $d_{i+1,j}^2$ .

Se puede notar que esta función binaria es muy importante, así que se debería escoger un valor apropiado para  $\alpha$ . Esta elección dará lugar a la coloración binaria  $col$ . Sin embargo la función  $inconsis_{\alpha}(i, j, D^1, D^2)$  no depende del color particular del pixel  $(i, j)$ .

Para la comprensión del Pseudocódigo que se dará a continuación algunos comentarios son necesarios. Se introducen cuatro nuevas variables.

1.  $y_1$ , es definida de forma que  $y_1 = 0$  si sólo si  $col(i + 1, j) = col(i, j)$  ( $y_1 = 1$  en otro caso);
2.  $y_2 = 0$  si sólo si  $col(i + 1, j + 1) = col(i + 1, j)$  ( $y_2 = 1$  en otro caso);
3.  $y_3 = 0$  si sólo si  $col(i, j + 1) = col(i, j)$  ( $y_3 = 1$  en otro caso); y
4.  $y_4 = 0$  si sólo si  $col(i + 1, j + 1) = col(i, j + 1)$  ( $y_4 = 1$  en otro caso).

<b>function</b> <i>inconsis</i> ( <i>i, j, α, D<sup>1</sup>, D<sup>2</sup></i> ) $y_1 = 0$ <b>if</b> ( $d_{i,j}^1 \geq \alpha$ ) $y_1 = 1$ $y_2 = 0$ <b>if</b> ( $d_{i+1,j}^2 \geq \alpha$ ) $y_2 = 1$ $y_3 = 0$ <b>if</b> ( $d_{i,j}^2 \geq \alpha$ ) $y_3 = 1$ $y_4 = 0$ <b>if</b> ( $d_{i,j+1}^1 \geq \alpha$ ) $y_4 = 1$ $inconsis = 0$ <b>if</b> ( $ y_1 + y_2 - 1  \neq 0 \wedge  y_3 + y_4 - 1  = 0$ ) $inconsis = 1$ <b>if</b> ( $ y_1 + y_2 - 1  = 0 \wedge  y_3 + y_4 - 1  \neq 0$ ) $inconsis = 1$
--

Es fácil demostrar que

$$inconsis_{\alpha}(i, j, D^1, D^2) = mod(|y_1 + y_2 - 1| + |y_3 + y_4 - 1|; 2)$$

**Definición 5.4.** Dado un valor de  $\alpha$ , el grafo difuso de pixels  $(r, s, D^1, D^2)$  es *consistente al nivel  $\alpha$*  si todos los cuadrados  $sq(i, j) \in PS$  son consistentes al nivel  $\alpha$ .

El grafo difuso del ejemplo 4.1 es inconsistente al nivel  $\alpha = 3.1$ , pero es consistente al nivel  $\alpha = 4.1$ .

**Definición 5.5.** Dado el grafo difuso de pixels  $(r, s, D^1, D^2)$ , el *nivel de consistencia*, denotado como  $\alpha^*$ , es el máximo valor  $\alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$  para el cual el grafo difuso es consistente.

La existencia de este nivel de consistencia está siempre asegurada, al menos mientras la imagen contenga un número finito de pixels. Si alguna inconsistencia es detectada para algún valor de  $\alpha$  dado, puede ser introducido un procedimiento decreciente para encontrar un valor  $\alpha^*$  menor que asegure la consistencia. Este procedimiento será inicializado con  $\alpha^* = \bar{\alpha}$ .

En el ejemplo 4.1, el cuadrado  $sq(1,2)$  es inconsistente al nivel  $\alpha = \bar{\alpha} = 4.0$ , ya que  $col(1,2) = col(1,3) = col(2,2)$  pero  $col(2,3) = col(1,3)$  y  $col(2,3) = 1 - col(2,2)$ . Este cuadrado no puede ser consistente para un nivel  $\alpha \in (2.0, 4]$ . Para  $\alpha = 2.0$ , sin embargo, el cuadrado  $sq(2,1)$  es inconsistente para cualquier valor de  $\alpha \in (1.8, 2.0]$ . De hecho, puede ser chequeado que si  $\alpha = 1.8$ , el grafo difuso de pixels es consistente siendo inconsistente para cualquier valor de  $\alpha \in (1.8, 4.0]$ . En este caso,  $\alpha^* = 1.8$ .

Para determinar  $\alpha^*$  se busca entre aquellos cuadrados inconsistentes  $sq(i, j)$ : Si este cuadrado es inconsistente al nivel  $\alpha$ , se puede computar el máximo valor  $\alpha'$  para el cuál este cuadrado será consistente, por medio de una nueva función *newalpha*, que será evaluada para cada cuadrado:

<p><b>function</b> <math>newalpha_{\alpha}(i, j, D^1, D^2)</math></p> <p><math>\alpha' = 0</math></p> <p><b>if</b> (<math>d_{i,j}^1 &lt; \alpha \wedge \alpha' \leq d_{i,j}^1</math>)    <math>\alpha' = d_{i,j}^1</math></p> <p><b>if</b> (<math>d_{i,j}^2 &lt; \alpha \wedge \alpha' \leq d_{i,j}^2</math>)    <math>\alpha' = d_{i,j}^2</math></p> <p><b>if</b> (<math>d_{i,j+1}^1 &lt; \alpha \wedge \alpha' \leq d_{i,j+1}^1</math>)    <math>\alpha' = d_{i,j+1}^1</math></p> <p><b>if</b> (<math>d_{i+1,j}^2 &lt; \alpha \wedge \alpha' \leq d_{i+1,j}^2</math>)    <math>\alpha' = d_{i+1,j}^2</math></p> <p><math>newalpha = \alpha'</math></p>
--

En el ejemplo 4.1, se puede ver que  $newalpha_{4.0}(1, 2, D^1, D^2) = 2.0$  y  $newalpha_{2.0}(2, 1, D^1, D^2) = 1.8$ .

En este ejemplo, todos los pixels han sido coloreados al principio, después, se ha buscado el valor  $\alpha^*$  que asegura la consistencia. Así pues se tiene a los pixels clasificados en las clases "0" o "1". Se debería ahora proceder a conseguir un color más preciso para ambas clases (la clase "0" debe a su vez ser dividida en la clase "00" o "01"). Esto será realizado de forma separada, activando alternativamente solo una de las clases que ya están coloreadas en una etapa anterior.

De la misma forma se procederá en las posteriores etapas, de forma que el anterior proceso de coloración binaria es aplicado a aquellos pixels activados, es decir un subconjunto de pixels  $P' \subset P$ . Este subconjunto de pixels  $P'$  puede ser caracterizado por una matriz  $act$  tal que  $act(i, j) = 1, \forall (i, j) \in P'$  y  $act(i, j) = 0 \quad \forall (i, j) \notin P'$ .

Se puede computar el intervalo  $[\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$  para los pixels activados, por medio del procedimiento  $initalpha(r, s, D^1, D^2, act)$ . En el caso en que no existan dos pixels adyacentes activados el proceso debería parar. Esta situación es fácilmente detectable en el pseudocódigo que se muestra a continuación, donde la menor distancia entre pixels activados  $\underline{\alpha}$  es inicializada como un valor arbitrariamente grande (la mayor distancia entre pixels activados  $\bar{\alpha}$  es inicializada como 0).

```

initalpha(r, s, D1, D2, act)
α = 999999.9
 $\bar{\alpha}$  = 0
do i = 1, r - 1
  do j = 1, s - 1
    if ( $d_{i,j}^1 > \bar{\alpha} \wedge act(i, j) * act(i + 1, j) = 1$ )  $\bar{\alpha} = d_{i,j}^1$ 
    if ( $d_{i,j}^2 > \bar{\alpha} \wedge act(i, j) * act(i, j + 1) = 1$ )  $\bar{\alpha} = d_{i,j}^2$ 
    if ( $d_{i,j}^1 < \underline{\alpha} \wedge act(i, j) * act(i + 1, j) = 1$ )  $\underline{\alpha} = d_{i,j}^1$ 
    if ( $d_{i,j}^2 < \underline{\alpha} \wedge act(i, j) * act(i, j + 1) = 1$ )  $\underline{\alpha} = d_{i,j}^2$ 
  enddo
enddo

```

De nuevo se puede observar que un cuadrado dado puede ser consistente para un valor  $\alpha$  pero inconsistente para otro valor  $\alpha' < \alpha$ . Aquí un procedimiento decreciente repetido para el conjunto de cuadrados de pixels  $PS$  encontrará el nuevo valor  $\alpha^*$  asegurando que todos los cuadrados son hechos consistentes en la nueva coloración.

La siguiente función, *consislevel*, es el corazón de nuestro algoritmo: esta función será

evaluada iterativamente obteniendo así el nivel de consistencia  $\alpha^*$  para la familia de pixels que han sido activados. Los inputs del procedimiento *consislevel* son los pixels del grafo difuso  $(r, s, D^1, D^2)$  y la matriz *act*. El intervalo  $[\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$  es evaluado después de que el procedimiento *initalpha* sea llamado; el valor que devuelve dicho procedimiento es  $\alpha^*$ . El pseudocódigo asociado a *consislevel* $(r, s, D^1, D^2, act)$ , que evalúa el nivel de consistencia  $\alpha^*(act)$ , para un subconjunto de pixels activados  $P' \subset P$ , es ahora dado. Hay que observar que inicialmente cuando  $act(i, j) = 1 \forall (i, j) \in P$ , entonces  $\alpha^*(act) = \alpha^*$ , el nivel de consistencia del grafo difuso de pixels.

```

function consislevel( $r, s, D^1, D^2, act$ )
call initalpha( $r, s, D^1, D^2, act, \underline{\alpha}, \bar{\alpha}$ )
if ( $\underline{\alpha} \leq \bar{\alpha}$ ) then
  consistent = 0
  do while (consistent = 0)
    consistent = 1
    do  $i = 1, r - 1$ 
      do  $j = 1, s - 1$ 
        if ( $act(i, j) * act(i, j + 1) * act(i + 1, j) * act(i + 1, j + 1) = 1$ ) then
          if (inconsis( $i, j, \bar{\alpha}, d_{i,j}^1; d_{i,j}^2; d_{i,j+1}^1; d_{i+1,j}^2$ ) = 1) then
            consistent = 0
             $\bar{\alpha} = newalpha(i, j, D^1, D^2, \bar{\alpha})$ 
          endif
        endif
      enddo
    enddo
  enddo
endif
consislevel =  $\bar{\alpha}$ 

```

Siguiendo un orden estándar en los pixels activados el nivel  $\alpha^*(act)$  asegura un procedi-

miento de coloración binaria válido  $col$  tal que:

$$col(i+1, j) = \begin{cases} col(i, j) & \forall (i, j) \in P \text{ tal que } act(i, j) * act(i+1, j) = 1 \text{ y } d_{i,j}^1 < \alpha^*(act) \\ 1 - col(i, j) & \forall (i, j) \in P \text{ tal que } act(i, j) * act(i+1, j) = 1 \text{ and } d_{i,j}^1 \geq \alpha^*(act) \end{cases}$$

y

$$col(i, j+1) = \begin{cases} col(i, j) & \forall (i, j) \in P \text{ tal que } act(i, j) * act(i, j+1) = 1 \text{ y } d_{i,j}^2 < \alpha^*(act) \\ 1 - col(i, j) & \forall (i, j) \in P \text{ tal que } act(i, j) * act(i, j+1) = 1 \text{ y } d_{i,j}^2 \geq \alpha^*(act) \end{cases}$$

Todos estos cálculos se agruparán en el proceso  $bincol_\alpha(r, s, D^1, D^2, act, col)$ . Este proceso calcula la coloración binaria de los pixels activados en el nivel  $\alpha$ . Este procedimiento se inicializa  $col(i, j) = 0 \quad \forall (i, j) \in P$ . El Pseudocódigo de este procedimiento final de coloración es el siguiente:

```

bincol $\alpha$ ( $r, s, D^1, D^2, act, col$ )
do  $j = 2, s$            ! coloración de la primera fila
  if( $act(1, j - 1) * act(1, j) = 1$ ) then
     $col(1, j) = col(1, j - 1)$     if ( $d_{1,j}^2 \geq \alpha$ )  $col(1, j) = 1 - col(1, j - 1)$ 
  endif
enddo
do  $k = 2, r$            ! coloración de las otras filas
  do  $j = 1, n$          ! coloración vertical
    if( $act(k - 1, j) * act(k, j) = 1$ ) then
       $col(k, j) = col(k - 1, j)$     if ( $d_{k-1,j}^1 \geq \alpha$ )  $col(k, j) = 1 - col(k - 1, j)$ 
    endif
  enddo
  do  $j = 2, s$          ! coloración horizontal desde la izquierda
    if( $act(k - 1, j - 1) * act(k, j - 1) * act(k, j) = 1$ ) then
       $col(k, j) = col(k, j - 1)$     if ( $d_{k,j-1}^2 \geq \alpha$ )  $col(k, j) = 1 - col(k, j - 1)$ 
    endif
  enddo
  do  $j = s - 1, 1, -1$  ! coloración horizontal desde la derecha
    if( $act(k, j + 1) = 1 \wedge act(k, j) = 1$ ) then
       $col(k, j) = col(k + 1, j)$     if ( $d_{k,j}^2 \geq \alpha$ )  $col(k, j) = 1 - col(k, j + 1)$ 
    endif
  enddo
enddo
enddo

```

Volviendo de nuevo al ejemplo 4.1, y a la asignación  $act(i, j) = 1 \forall (i, j) \in P$  y  $\alpha = \alpha^* = 1.8$ , el procedimiento *bincol* computa la coloración binaria vista en la figura 5.2.



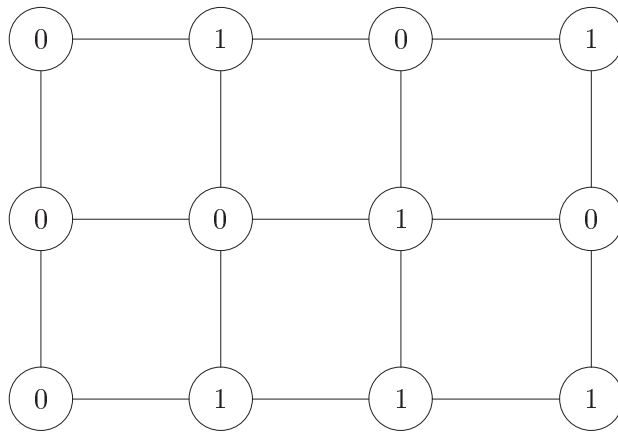


Figura 5.2: Primera coloración binaria del grafo de pixels difuso del ejemplo 4.1

Después de una primera etapa, los pixels coloreados son clasificados en dos clases: 0 y 1, dependiendo de cuál es la distancia considerada entre pixels adyacentes.

### 5.2.2 Algoritmo estricto de coloración

El proceso de clasificación inducido por la coloración binaria puede ser redefinido, aplicado a cada matriz  $act$ , para clasificar pixels de la clase 0 de la siguiente forma:

$$act(i, j) = \begin{cases} 1 & \forall (i, j) \in P / col(i, j) = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El procedimiento  $bincol$  es entonces aplicado con el valor  $\alpha = consislevel(r, s, D^1, D^2, act)$ . Los pixels activados serán clasificados de nuevo como 0 o 1 dando lugar a las clases "00" y "01".

Análogamente, las clases 10 y 11, son definidas cuando este segundo proceso de coloración

es repetido para la clase 1, de forma que cuatro clases son obtenidas: "00", "01", "10" y 11.

Los pixels clasificados pueden ser identificados por la función:

$$C : P \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$$

donde  $C(i, j)$  es el número entero asociado con el número binario de la clase.

El mismo procedimiento de coloración puede ser sucesivamente aplicado a cada familia de pixels pertenecientes a la misma clase de color, siempre y cuando existan pixels adyacentes con al menos dos distancias distintas entre ellos. (es decir, siempre que se cumpla que  $consislevel(r, s, D^1, D^2, act) > 0$ ). Así, si este proceso de coloración es sucesivamente aplicado  $t$  veces, obtendremos  $2^t$  clases.

En el caso en que se añada un nuevo nivel de clasificación, incrementando el parámetro  $t$ , es porque existen al menos dos pixels adyacentes  $((i, j)$  y  $(i', j')$ ) en la misma clase ( $C(i, j) = C(i', j')$ ) verificando que  $d((i, j), (i', j')) \geq \alpha^*(act)$ , cuando  $act(i, j) = act(i', j') = 1$ ; este número de pares será denotado por  $adp$ . En otro caso, el proceso de coloración para.

El pseudocódigo de este proceso de coloración, denotado como **crucol**( $r, s, D^1, D^2, C$ ) es el siguiente;

```

crucol( $r, s, D^1, D^2, C$ )
 $col(i, j) = 0 \quad \forall (i, j) \in P$ 
 $act(i, j) = 1 \quad \forall (i, j) \in P$ 
 $C(i, j) = 0 \quad \forall (i, j) \in P$ 
 $adp = 1$ 
 $it = 0$ 
do while ( $adp > 0$ )
   $adp = 0$ 
  do  $itclass = 0, 2^{it} - 1$ 
     $act(i, j) = \begin{cases} 1 & \forall (i, j) \in P / C(i, j) = itclass \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ 
     $\alpha = consislevel(r, s, D^1, D^2, act)$ 
    if ( $\alpha > 0$ ) then
      call  $bincol(r, s, D^1, D^2, act, \alpha, col)$ 
       $adp = adp + \dots$ 
       $\dots | \{ \{(i, j); (i', j')\} / \text{adyacentes}, act(i, j) = act(i', j') = 1 \text{ and } col(i, j) = col(i', j') \} |$ 
    endif
  enddo
   $C(i, j) = 2 \cdot C(i, j) + col(i, j) \quad \forall (i, j) \in P$ 
   $it = it + 1$ 
enddo

```

Este procedimiento de clasificación puede verse como un método jerárquico divisible [46]. Estos métodos de clasificación empiezan con un cluster que contiene a todos los elementos, y en cada paso se dividen las clases obteniendo mayor número de clases en la siguiente iteración. Si el proceso lo dejásemos correr, finalmente se tendrían tantas clases como objetos.

Aplicando el procedimiento *crucol* al ejemplo 4.1, se tiene que  $it = 4$ , luego al menos aparecerán  $2^4 = 16$  clases de color. La coloración final puede verse en la siguiente figura

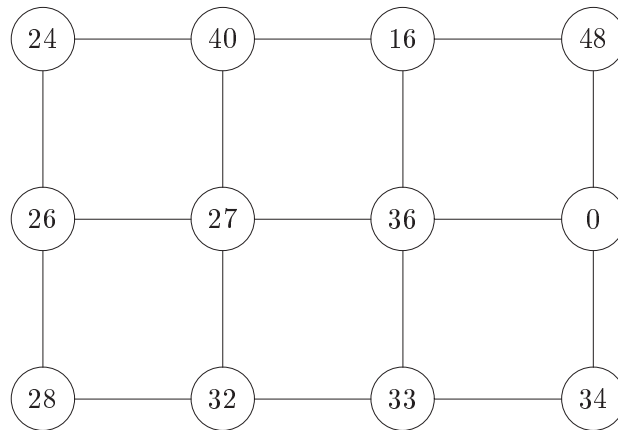


Figura 5.3: Coloración del grafo difuso de pixels del ejemplo 4.1

### 5.2.3 Análisis de la complejidad computacional

Es obvio del ejemplo 4.1 que algunas clases pueden ser eliminadas (el número de clases de color es 16, mayor que el número de pixels del grafo difuso 12). Esto es debido a la secuencia de decrecimiento del parámetro  $\alpha$  para cada clase de color. Sin embargo si existen demasiadas inconsistencias, el valor  $\alpha$  puede decrecer de forma que algunos subconjuntos de  $P$  pueden ser coloreados dando lugar a un tablero de ajedrez.

De hecho, el algoritmo anterior *crucol* no tiene complejidad polinomial. En el peor de los casos, el número  $it$  de operaciones esta asociado con el valor  $r \times s - 1$  y para este caso, todas las clases de color excepto una están vacías.

En el caso limite, cuando  $t \rightarrow \infty$ , la coloración  $C : P \rightarrow \{0, 1, \dots, 2^t - 1\}$  obtenida, puede ser entendida como una coloración continua  $(0, 1)$ . Esta coloración continua puede ser vista como una coloración en blanco y negro de la imagen con la propiedad de que la diferente intensidad del color de dos pixels adyacentes será proporcional a la distancia entre ellos.

A pesar de todo, cuando se manejan imágenes reales, el anterior algoritmo estricto de coloración es muy ineficiente desde un punto de vista computacional. Un apropiado decreci-

miento del parámetro  $\alpha$  permitirá un *ratio* aceptable de cuadrados de pixels inconsistentes. Este decrecimiento será el núcleo del algoritmo de coloración relajado que se introduce en la siguiente sección.

### 5.3 Algoritmo relajado de coloración

Cuando se trabaja con imágenes digitales de tamaño medio o alto, el número de inconsistencias en relación con el tamaño de la imagen suele ser muy pequeño. Sin embargo puede ocurrir, que cuando se busca en el proceso de decrecimiento el valor  $\alpha^*(act)$  este sea el valor 0. Consecuentemente los pixels no son clasificados.

Para paliar este problema, se propone relajar las restricciones de consistencia dando lugar así a un nuevo procedimiento de coloración binaria, permitiendo algunas inconsistencias (por ejemplo un 1 % de cuadrados inconsistentes). La complejidad computacional queda resuelta fijando un pequeño número de iteraciones *it* (4 o 5, por ejemplo).

Denotamos por *incratio* como el porcentaje de inconsistencias del proceso de coloración binario, es decir el número de pixels inconsistentes divididos por  $(r - 1)(s - 1)$ . Como se puede observar si permitimos valores grandes de *incratio*, el valor de  $\alpha$  que necesitamos no decrecerá mucho y necesitaremos por tanto un número de clases pequeño. Por otro lado, a mayor valor de *incratio* mayor número de pixels serán coloreados erróneamente.

Así pues, se buscará un valor de *compromiso* entre estas dos situaciones. Esta solución de compromiso debe tener en cualquier caso ratios de inconsistencia pequeños (por ejemplo del orden de 0.01, de forma que un porcentaje muy pequeño de pixels serán coloreados de forma equivocada, en el caso de que la imagen sea grande esa clasificación errónea no podrá ser percibida por el ojo humano). Cada pixel inconsistente deberá entonces ser *aislado* de forma que su inconsistencia no induzca más inconsistencias en los pixels adyacentes.

Sea *col* una coloración binaria. Inicialmente,  $col(i, j) = 0 \forall (i, j) \in P$ , y entonces se

procederá a asignar nuevos colores a cada pixel. El orden con el que los pixels serán de nuevo coloreados será el mismo que teníamos en el algoritmo estricto de coloración (de izquierda a derecha y de arriba a abajo).

En el proceso de coloración de la primera fila, desde la izquierda hasta la derecha, no se producirán inconsistencias, así como el proceso de coloración vertical de las columnas desde la primera. Las inconsistencias, si existen, aparecerán cuando una arista *horizontal* este siendo chequeado con una arista vertical. Denotaremos por *ninc* al número total de pixels inconsistentes.

Dados dos pixels horizontales adyacentes activados  $(k, j - 1)$  y  $(k, j)$ , ambos coloreados desde  $(k - 1, j - 1)$  y  $(k - 1, j)$  respectivamente, se tiene que

$$ninc = ninc + 1 \quad \text{if } \vee \begin{cases} col(k, j - 1) = col(k, j) & \wedge d_{k, j-1}^2 \geq \alpha \\ col(k, j - 1) \neq col(k, j) & \wedge d_{k, j-1}^2 < \alpha \end{cases}$$

Para que el proceso de coloración funcione correctamente, dado un pixel activado  $(i, j) \in P$ , es muy importante distinguir entre aquéllos que todavía no han sido coloreados,  $act(i, j) = 2$ , y aquéllos que han sido coloreados,  $act(i, j) = 1$ . Inicialmente  $act(i, j) = 2$ , para todos los pixels activados  $(i, j)$ .

Se distinguirán los pixels activados  $act(i, j) \neq 0$  de los no activados  $act(i, j) = 0$ , en el primer caso caso  $act(i, j) = 2$  si no han sido coloreados y  $act(i, j) = 1$  cuando lo sean consistentemente y  $act(i, j) = -1$  en otro caso. Como se ha mencionado anteriormente, estos pixels inconsistentes deben ser aislados para que no *contaminen* a los pixels adyacentes.

Un pixel inconsistente puede ser arbitrariamente coloreado. Iteraciones posteriores suavizaran los efectos de esta coloración arbitraria.

El pseudocódigo del procedimiento de coloración binaria se da a continuación.

```
apbincol( $r, s, D^1, D^2, act, \alpha, col$ )
```

```
do  $j = 2, s$       ! se coloread la primera fila
```

```
  if( $act(1, j - 1) * act(1, j) \geq 1$ ) then
```

```
     $col(1, j) = col(1, j - 1)$    if ( $d_{1,j-1}^2 > \alpha$ )  $col(1, j) = 1 - col(1, j - 1)$ 
```

```
  endif
```

```
   $act(1, j) = 1$ 
```

```
enddo
```

```
do  $k = 2, r$       ! se colorean el resto de filas
```

```
  do  $j = 1, s$       ! coloración vertical
```

```
    if( $act(k - 1, j) * act(k, j) = 2$ ) then
```

```
       $act(k, j) = 1$ 
```

```
       $col(k, j) = col(k - 1, j)$    if ( $d_{k-1,j}^1 \geq \alpha$ )  $col(k, j) = 1 - col(k - 1, j)$ 
```

```
    endif
```

```
  enddo
```

```
do  $j = 2, s$       ! coloración horizontal desde la izquierda
```

```
  if( $act(k, j - 1) = 1 \wedge act(k, j) = 2$ ) then
```

```
     $act(k, j) = 1$ 
```

```
     $col(k, j) = col(k, j - 1)$    if ( $d_{k,j-1}^2 \geq \alpha$ )  $col(k, j) = 1 - col(k, j - 1)$ 
```

```
  endif
```

```
  if( $act(k, j - 1) * act(k, j) = 1$ ) then      ! chequeamos la inconsistencia de  $sq(k - 1, j - 1)$ 
```

```
    if( $\{d_{k,j-1}^2 < \alpha \wedge col(k, j - 1) = col(k, j)\} \vee \{d_{k,j-1}^2 \geq \alpha \wedge col(k, j - 1) \neq col(k, j)\}$ ) then
```

```
       $ninc = ninc + 1$     $act(k, j) = -1$     $\alpha' = newalpha(k - 1, j - 1, D^1, D^2, \alpha)$ 
```

```
       $col(k, j - 1) = col(k - 1, j - 1)$    if ( $d_{k-1,j-1}^1 \geq \alpha'$ )  $col(k, j - 1) = 1 - col(k - 1, j - 1)$ 
```

```
       $col(k, j) = col(k - 1, j)$    if ( $d_{k-1,j}^1 \geq \alpha'$ )  $col(k, j) = 1 - col(k - 1, j)$ 
```

```
    endif
```

```
  endif
```

```
enddo
```

```
...
```

```

apbincol( $r, s, D^1, D^2, act, \alpha, col$ )    (cont.)
...
do  $j = s - 1, 1, -1$     ! coloración horizontal desde la derecha
  if( $act(k, j + 1) = 1 \wedge act(k, j) = 2$ ) then
     $act(k, j) = 1$ 
     $col(k, j) = col(k, j + 1)$     if ( $d_{k,j}^2 \geq \alpha$ )  $col(k, j) = 1 - col(k, j + 1)$ 
  endif
  if( $act(k, j + 1) * act(k, j) = 1$ ) then    ! chequeamos la inconsistencia de  $sq(k - 1, j)$ 
    if( $\{d_{k,j}^2 < \alpha \wedge col(k, j + 1) = col(k, j)\} \vee \{d_{k,j}^2 \geq \alpha \wedge col(k, j + 1) \neq col(k, j)\}$ ) then
       $ninc = ninc + 1$      $act(k, j) = -1$      $\alpha' = newalpha(k - 1, j, D^1, D^2, \alpha)$ 
       $col(k, j) = col(k - 1, j)$     if ( $d_{k-1,j}^1 \geq \alpha'$ )  $col(k, j) = 1 - col(k - 1, j)$ 
       $col(k, j + 1) = col(k - 1, j + 1)$     if ( $d_{k-1,j+1}^1 \geq \alpha'$ )  $col(k, j + 1) = 1 - col(k - 1, j + 1)$ 
    endif
  endif
enddo
enddo

```

Para detener el crecimiento exponencial de las iteraciones del algoritmo estricto, el parámetro  $it$  debe estar acotado (en este sentido se tiene un control a priori sobre el número de particiones). Se denota por  $it_M$  dicha cota.

Los diferentes  $it_M$  valores de  $\alpha$  han sido escogidos teniendo en cuenta los diferentes valores de las distancias entre pixels. El parámetro  $it_M$  deber ser elegido teniendo en cuenta muchos factores. Empíricamente, así como para mejorar la visualización de los resultados un valor razonable es  $it_M = 6$



Una vez se ha fijado el valor de  $it_M$ , diferentes valores de  $\alpha$  pueden ser elegidos. Denotamos por  $\alpha_{it}$ , con  $it \in \{1, \dots, it_M\}$ , la familia de esos valores. El procedimiento *vecalpha* devuelve esos valores en el vector  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{it_M})$ .

```
vecalpha( $r, s, D^1, D^2, it_M, \alpha$ )
```

```
 $DS = \{d_{i,j}^1, d_{i,j}^2; (i, j) \in P\}$ 
```

```
Sea  $ODS = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  conjunto ordenado  $DS$ 
```

```
Sea  $DODS = \{b_0 = 0; b_1; \dots; b_m\}$  los distintos valores ordenados del conjunto  $ODS$ 
```

```
Sea  $f_j$  la frecuencia de  $b_j, j \in \{0, 1, \dots, m\}$ 
```

```
if ( $m \leq it_M$ ) then
```

```
     $it_M = m$ 
```

```
    do  $it = 1, it_M$ 
```

```
         $\alpha_{it} = b_{m-it+1}$ 
```

```
    enddo
```

```
else
```

```
     $cfr = 0$            ! frecuencias acumulativas
```

```
     $j = 0$ 
```

```
     $\Delta = \frac{n-f_0}{it_M}$ 
```

```
    do  $it = 1, it_M$ 
```

```
         $bfr = (it - 1) \cdot \Delta$ 
```

```
        do while ( $cfr < bfr$ )
```

```
             $j = j + 1$ 
```

```
             $cfr = cfr + f_j$ 
```

```
        enddo
```

```
         $\alpha_{it_M-it+1} = b_j$ 
```

```
    enddo
```

```
endif
```

El pseudocódigo asociado al algoritmo relajado de coloración estará basado en los sucesivos

procedimientos de coloración binaria relajados para los diferentes niveles  $\alpha$ :

<pre> <b>apcol</b>(<math>r, s, D^1, D^2, it_M, C</math>) <math>C(i, j) = 0 \ \forall (i, j) \in P</math> <math>col(i, j) = 0 \ \forall (i, j) \in P</math> <b>call</b> <i>vecalpha</i>(<math>r, s, D^1, D^2, it_M, \alpha</math>) <b>do</b> <math>it = 1, it_M</math>     <b>do</b> <math>itclass = 0, 2^{it-1} - 1</math>         <math>act(i, j) = \begin{cases} 2 &amp; \forall (i, j) \in P / C(i, j) = itclass \\ 0 &amp; \text{en otro caso} \end{cases}</math>         <b>call</b> <i>apbincol</i>(<math>r, s, D^1, D^2, act, \alpha_{it}, col</math>)     <b>enddo</b>     <math>C(i, j) = 2 \cdot C(i, j) + col(i, j) \ \forall (i, j) \in P</math> <b>enddo</b> </pre>
--

### 5.3.1 Resultados Computacionales

Se han aplicado estos algoritmos a dos imágenes ("WRITE" , "ESCUDO"), de las que se presentan las figuras de algunas visualizaciones de los resultados.

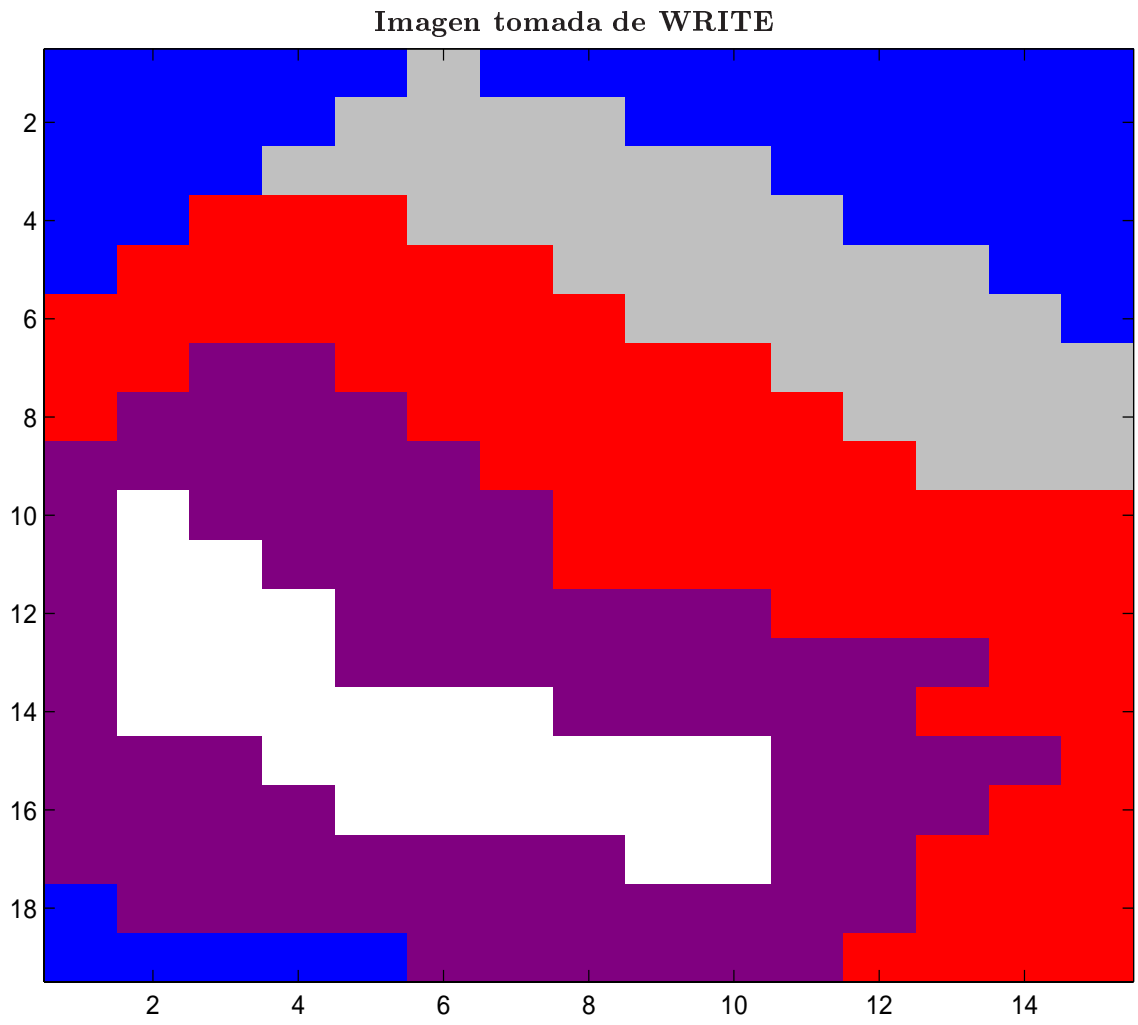
1. "WRITE": Ejemplo estándar.

- Imagen original.
- Clasificación utilizando 2 colores.
- Clasificación utilizando 4 colores.
- Clasificación utilizando 8 colores
- Clasificación utilizando 16 colores

- Clasificación utilizando 32 colores
- Clasificación utilizando 64 colores

2. "ESCUDO": la imagen del escudo de la Universidad Complutense.

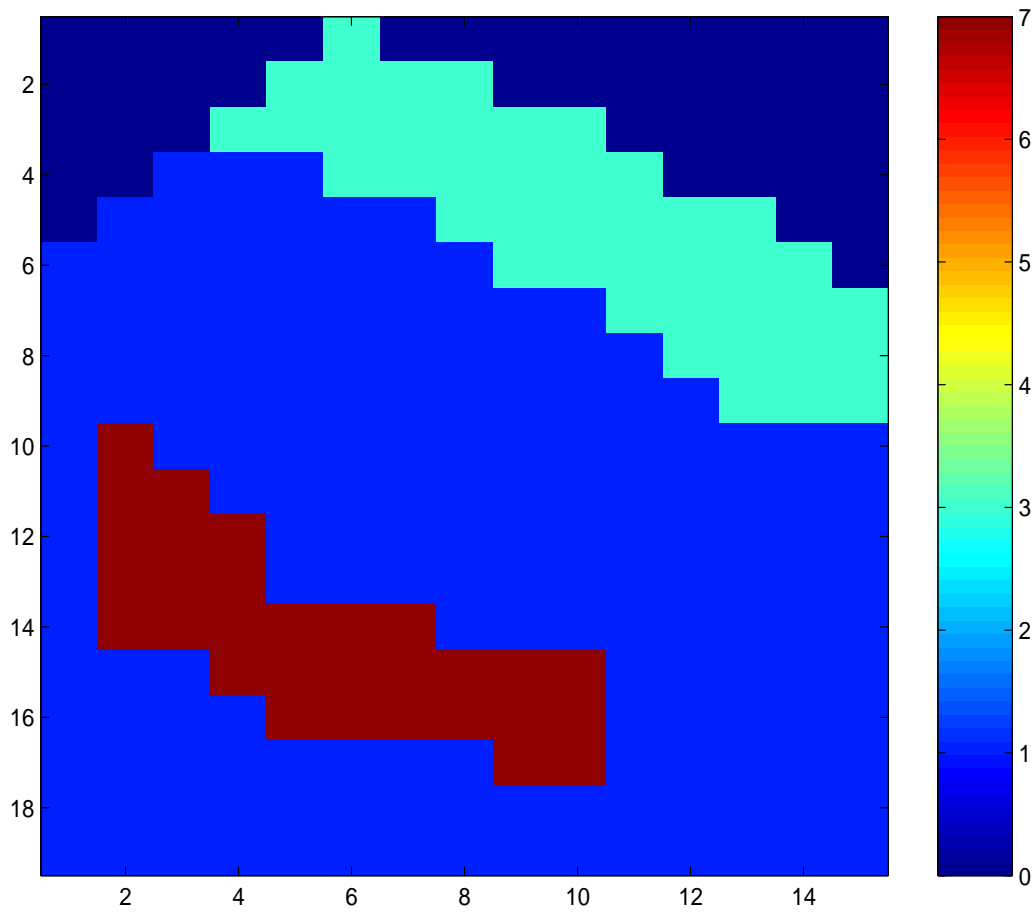
- Imagen original del ESCUDO.
- Clasificación utilizando 2 colores.
- Clasificación utilizando 4 colores.
- Clasificación utilizando 8 colores
- Clasificación utilizando 16 colores
- Clasificación utilizando 32 colores
- Clasificación utilizando 64 colores







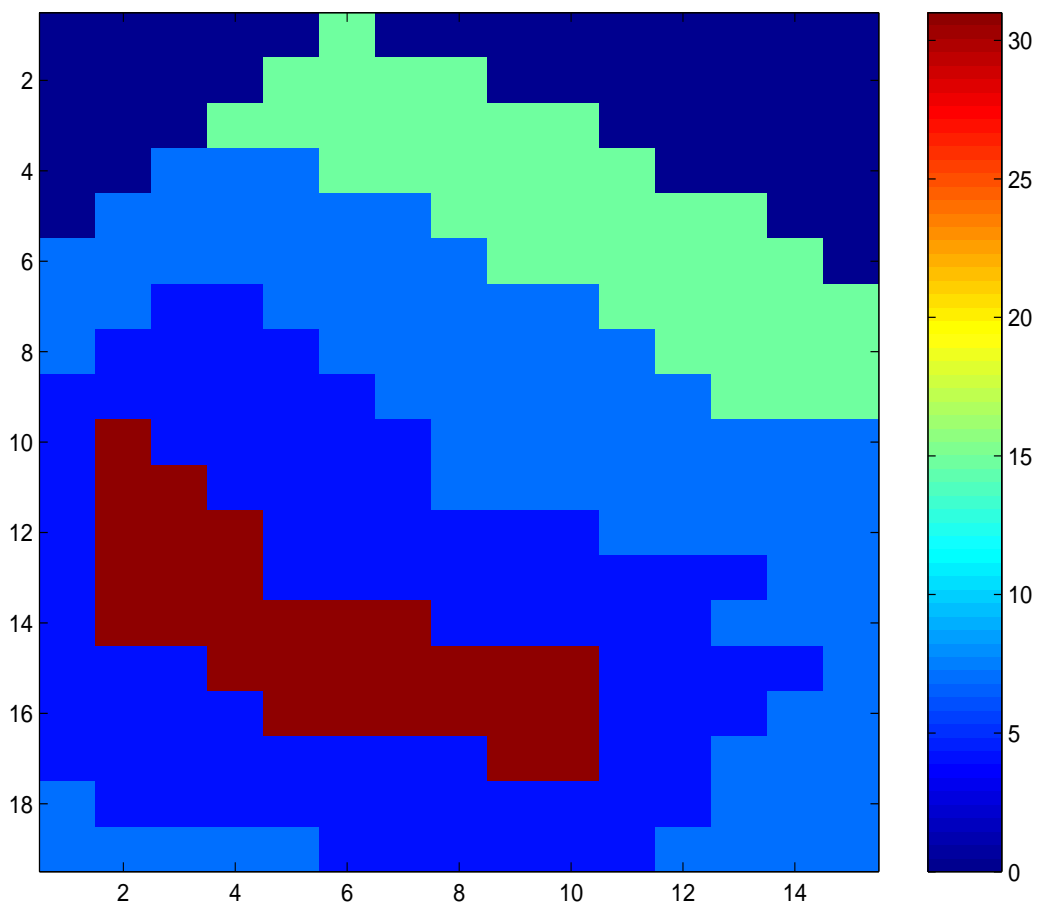
**Clasificación utilizando 8 colores. (WRITE)**







**Clasificación utilizando 32 colores. (WRITE)**



**Clasificación utilizando 64 colores. (WRITE)**

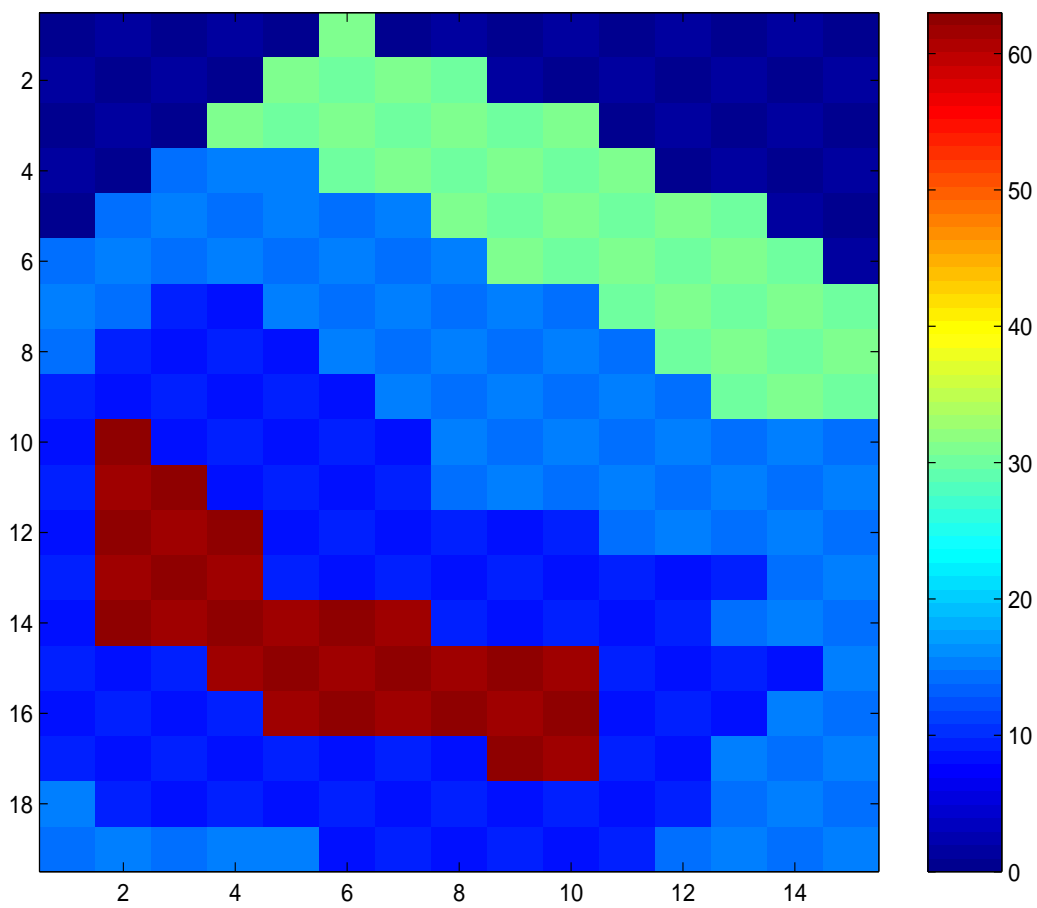
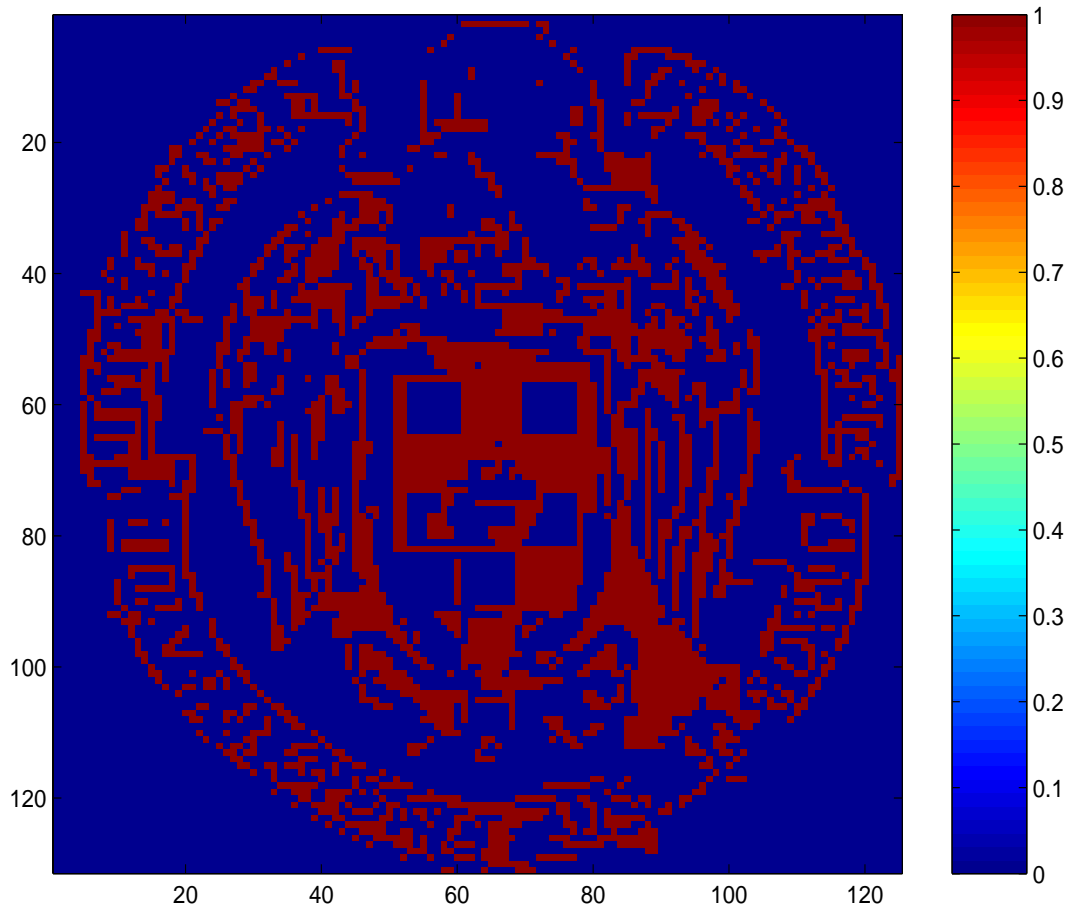


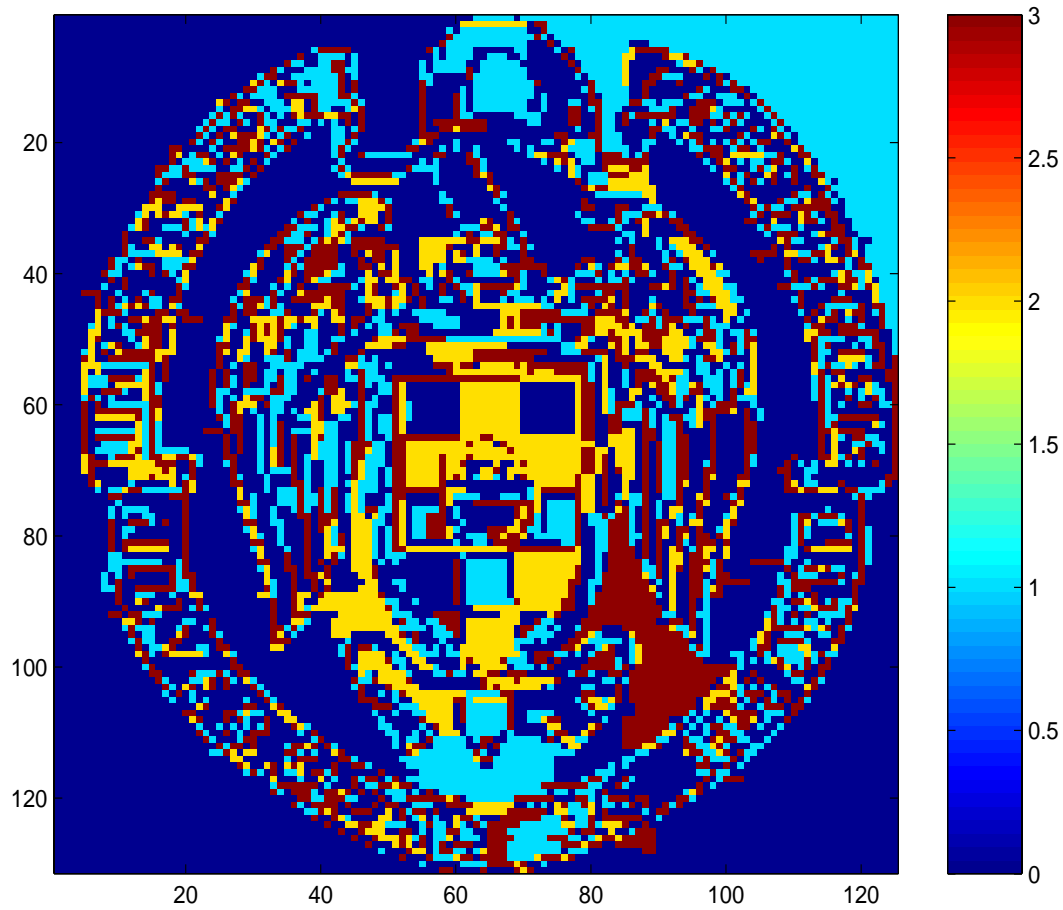
Imagen del ESCUDO de la Universidad Complutense



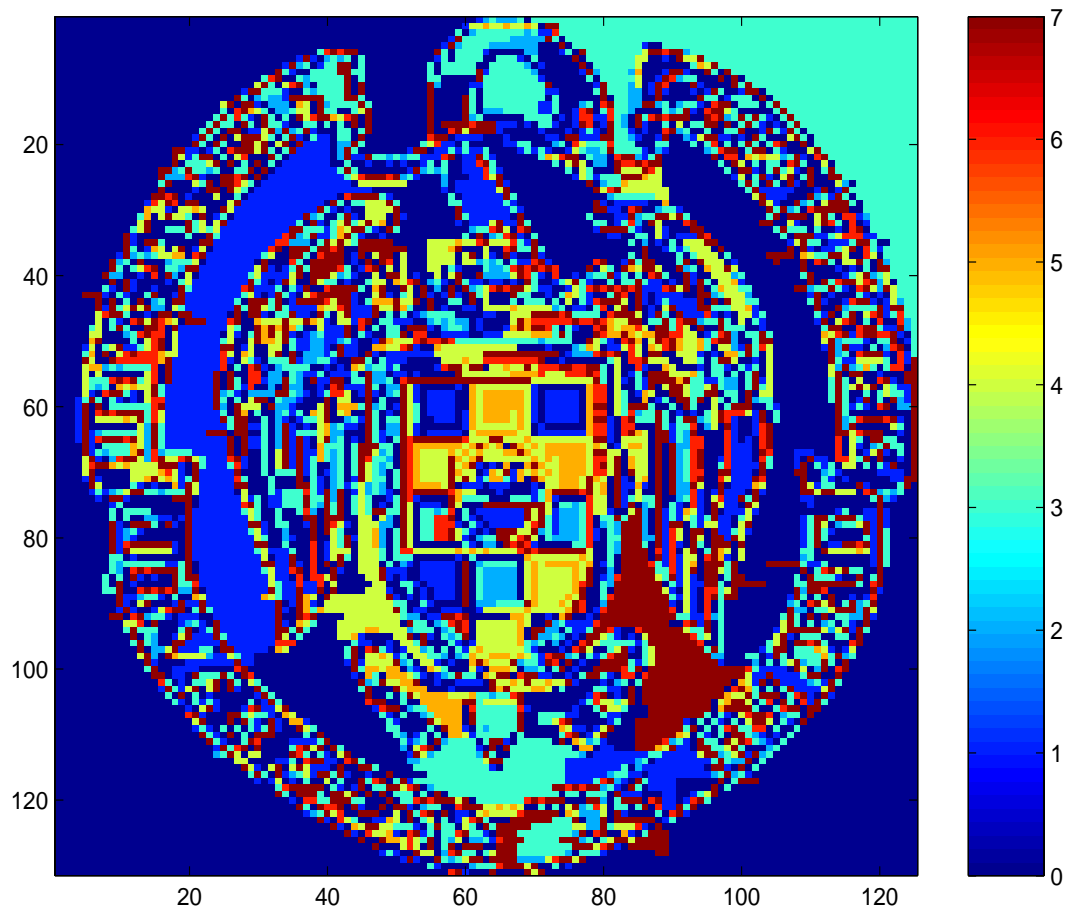
**Clasificación utilizando 2 colores. (ESCUDO)**



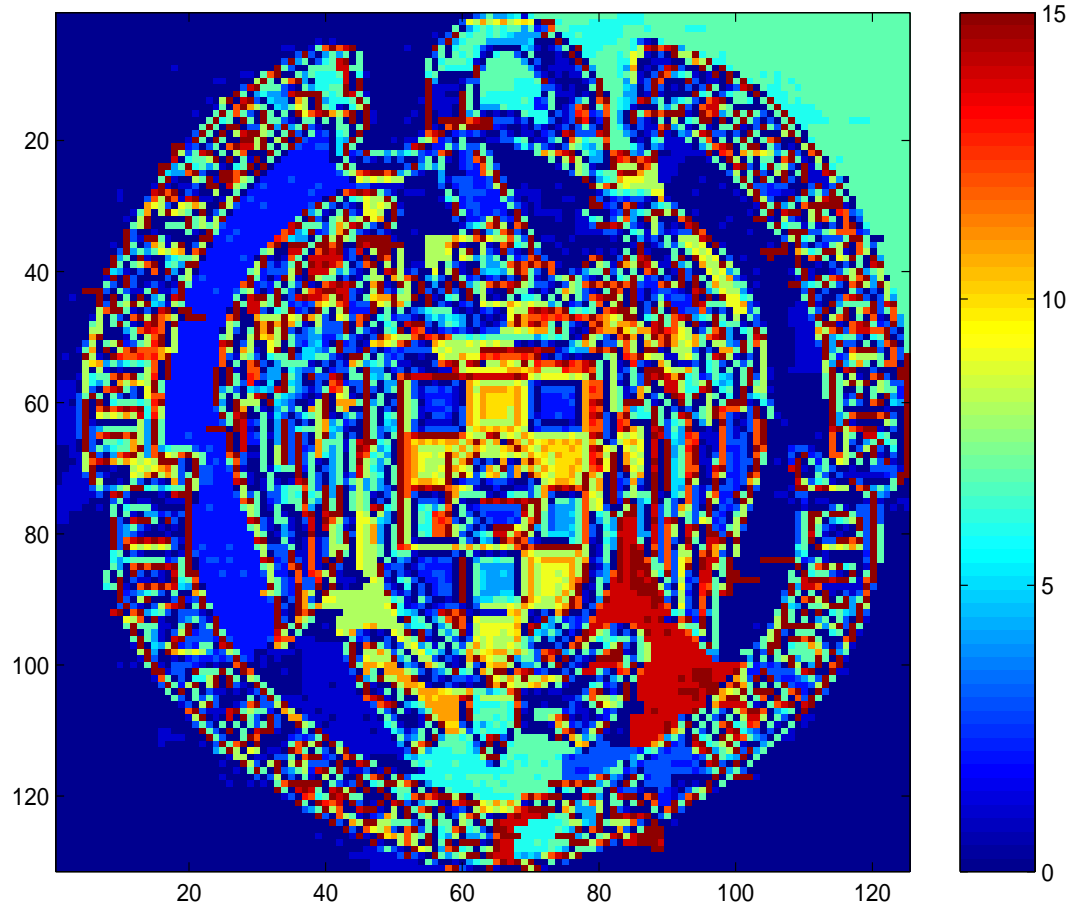
**Clasificación utilizando 4 colores. (ESCUDO)**



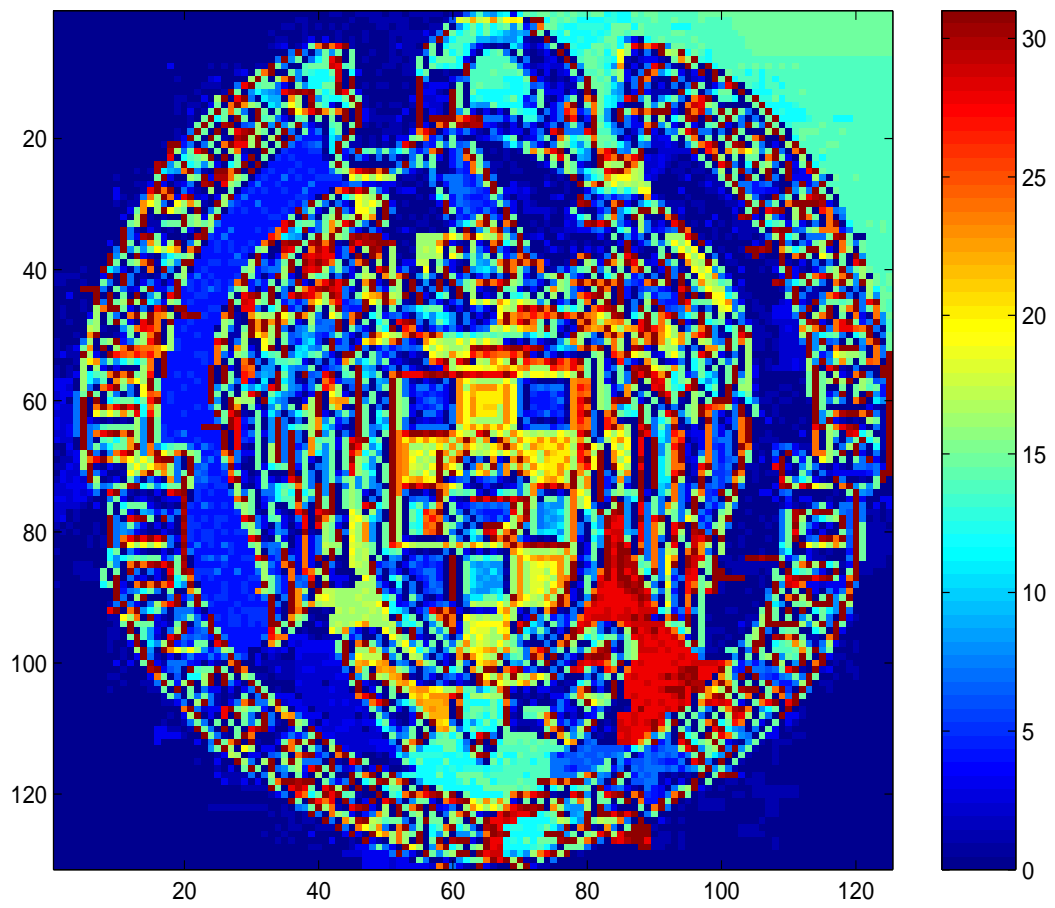
**Clasificación utilizando 8 colores. (ESCUDO)**



**Clasificación utilizando 16 colores. (ESCUDO)**

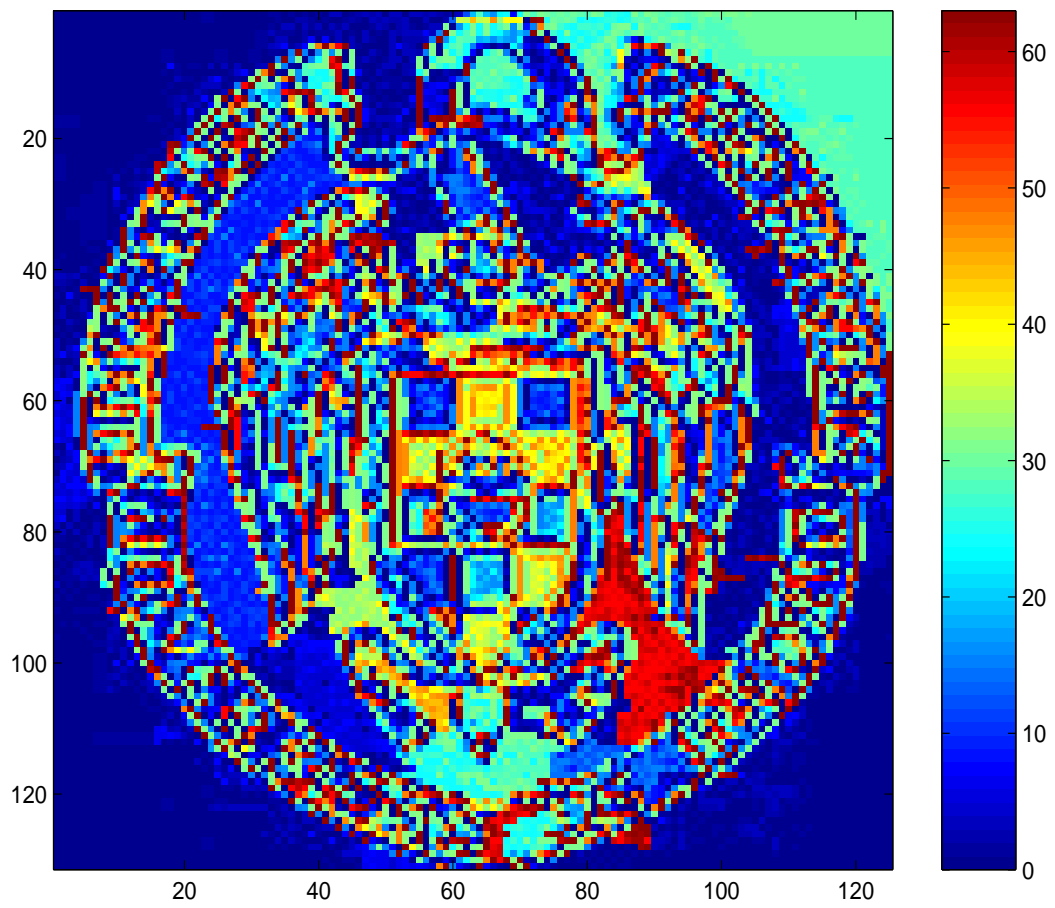


**Clasificación utilizando 32 colores. (ESCUDO)**





**Clasificación utilizando 64 colores. (ESCUDO)**



## 5.4 Determinación de las regiones homogéneas

A partir de los algoritmos introducidos anteriormente, se tiene una clasificación nítida. Sean  $C_1, \dots, C_{2it}$  las clases de dicha clasificación.

**Definición 5.6.** Dada una clase  $C_k$  Diremos que región  $R \subset P \times P$  es homogénea respecto a dicha clase si:

- $\forall (i, j) \in R, (i, j) \in C_k$ .
- Está rodeada de pixels que no pertenecen a  $C_k$

De esta forma se obtienen las diferentes regiones homogéneas dentro de la imagen digital.

**Ejemplo 5.2.** Sea  $(P, I)$  una imagen digital, de tamaño  $3 \times 7$ . Una vez hecha la clasificación utilizando cuatro colores, tenemos cuatro clases: 0, 1, 2, 3. A continuación se ve el grafo asociado a dicha clasificación.

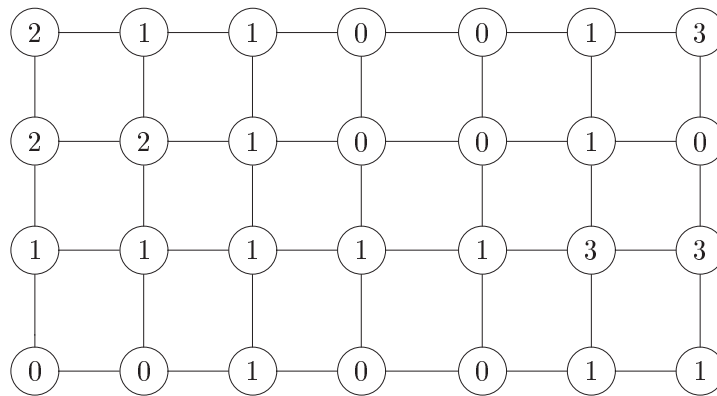


Figura 5.4: Red de pixels

Como puede verse la región  $R = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2)\}$  es una región homogénea respecto a la clase 2. En esta red de pixels se distinguen diez regiones homogéneas.

### 5.4.1 Resultados Computacionales

Se han determinado las regiones homogéneas a tres imágenes digitales ("WRITE" , "ESCUDO", "MATLAB" ) en función del número de colores usado.

1. "WRITE": Ejemplo estándar.

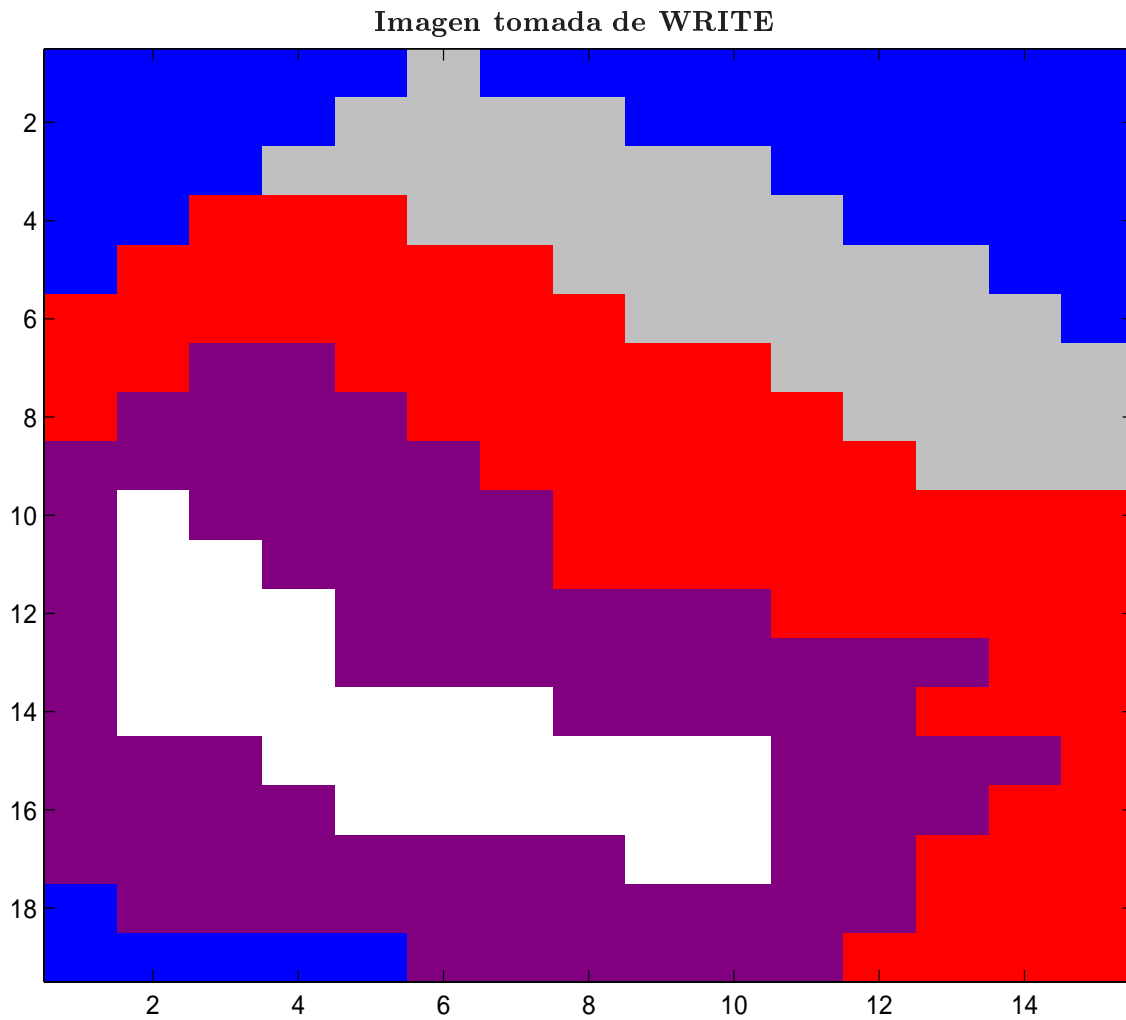
- Imagen original.
- Clasificación utilizando 2 colores.
- Clasificación utilizando 4 colores.
- Clasificación utilizando 8 colores

2. "ESCUDO": la imagen del escudo de la Universidad Complutense.

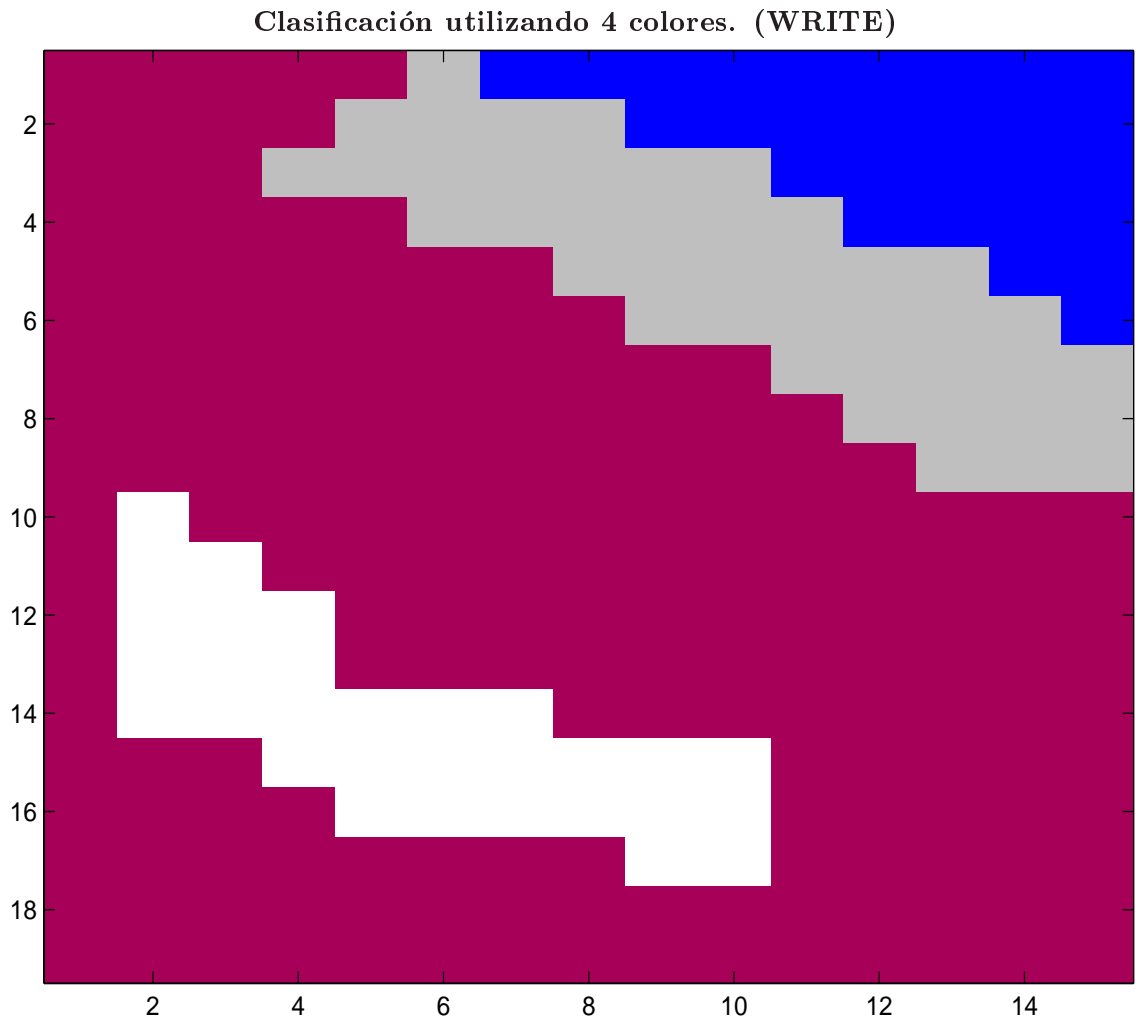
- Imagen original del ESCUDO.
- Clasificación utilizando 2 colores.
- Clasificación utilizando 4 colores.
- Clasificación utilizando 8 colores
- Clasificación utilizando 16 colores
- Clasificación utilizando 32 colores
- Clasificación utilizando 64 colores

3. "MATLAB":

- Imagen original.
- Clasificación utilizando 2 colores.
- Clasificación utilizando 4 colores.
- Clasificación utilizando 8 colores







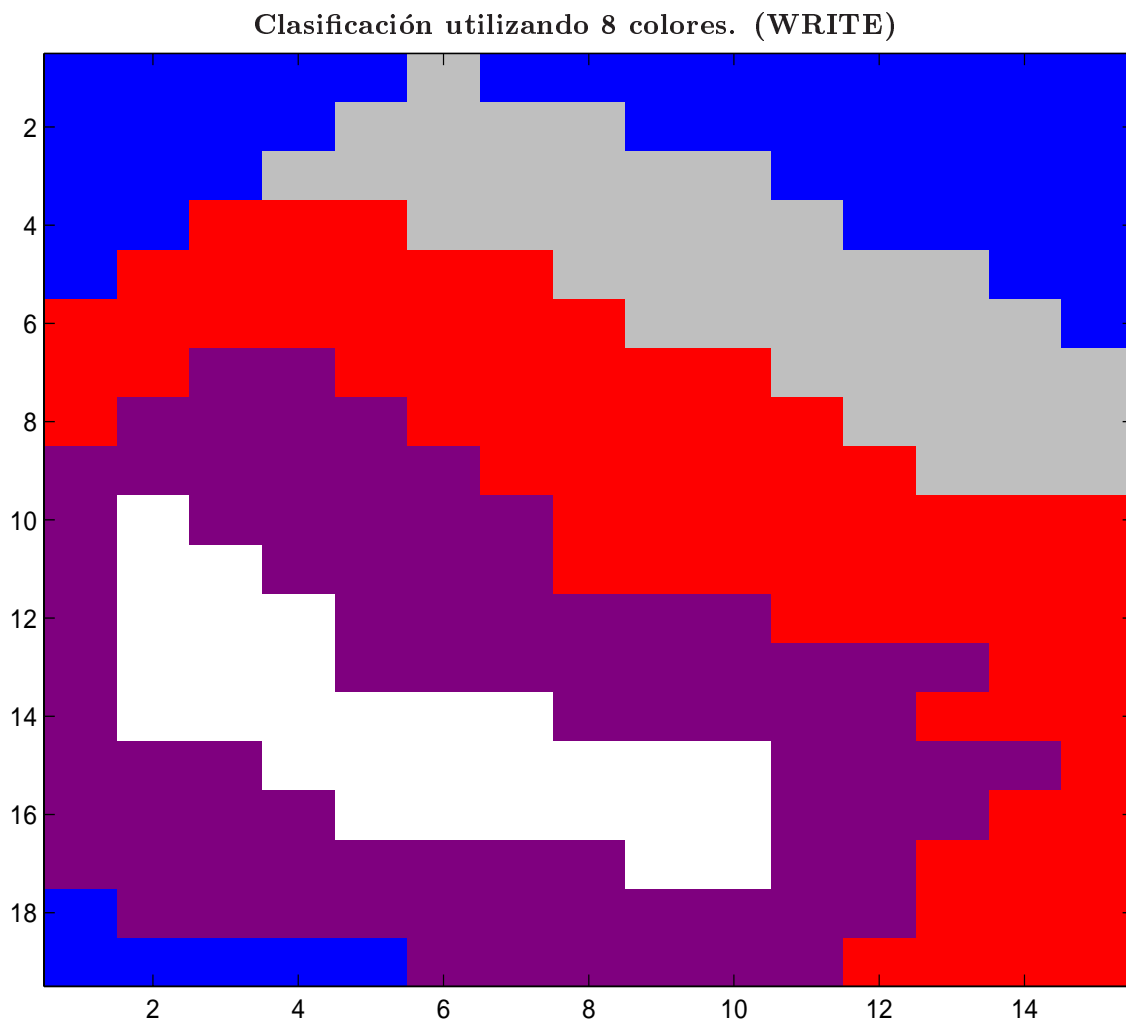
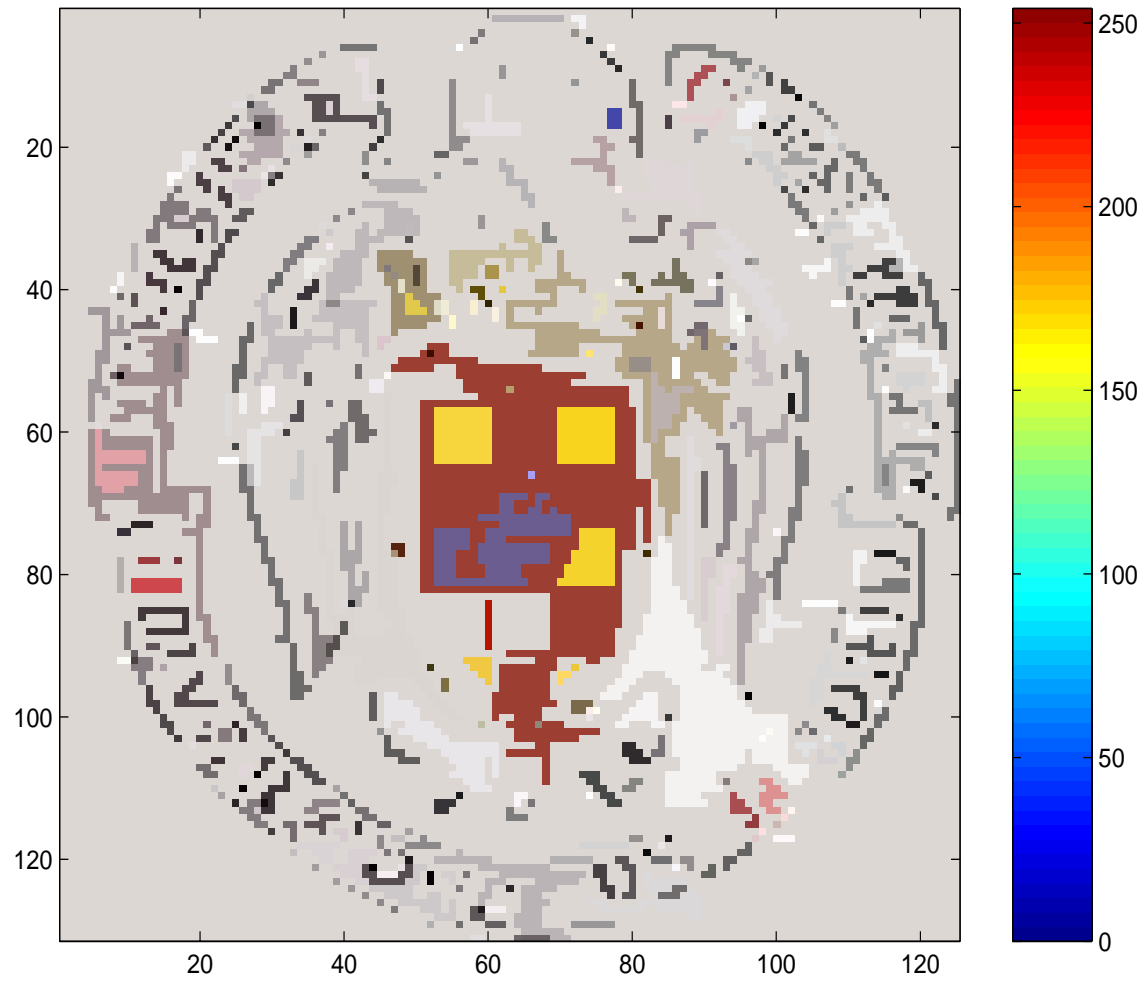


Imagen del ESCUDO de la Universidad Complutense

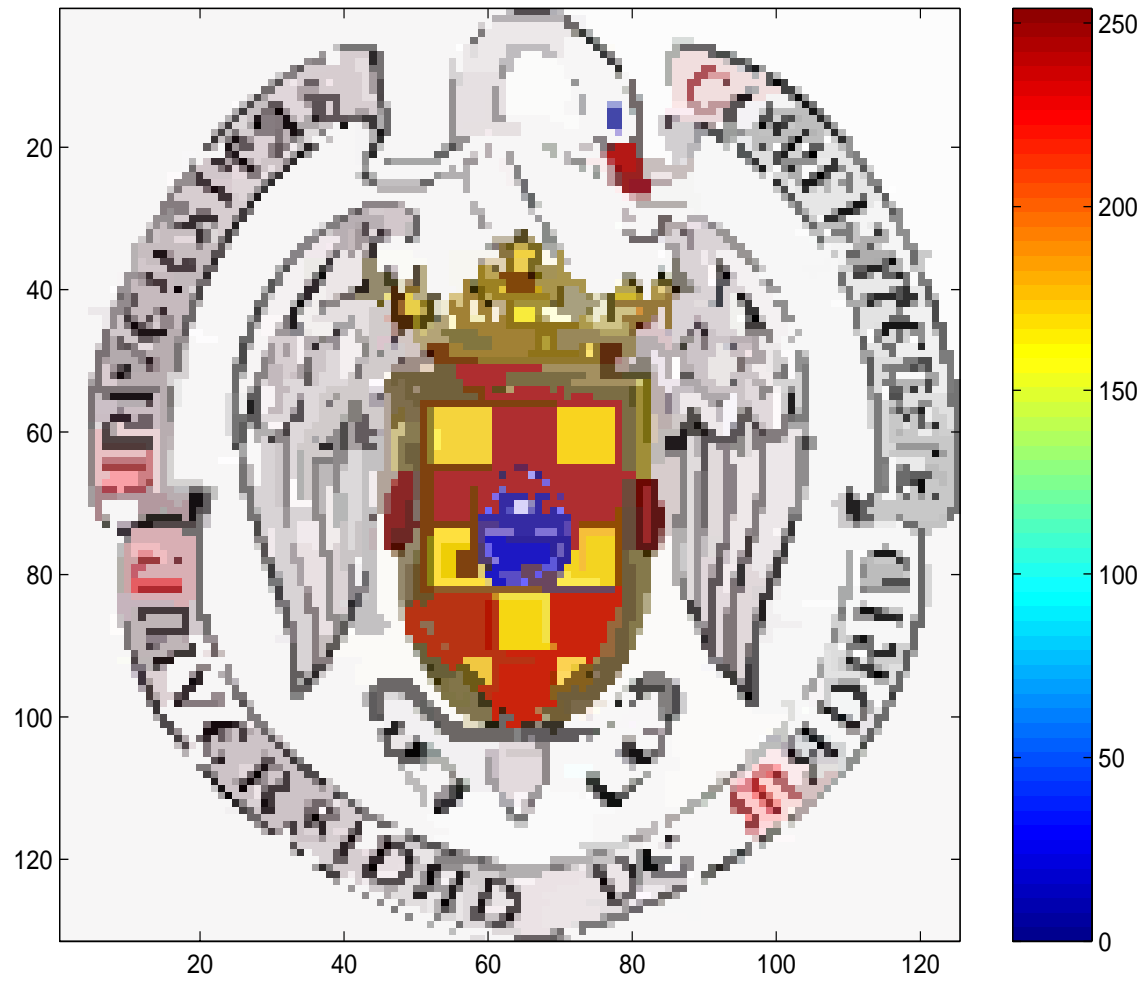




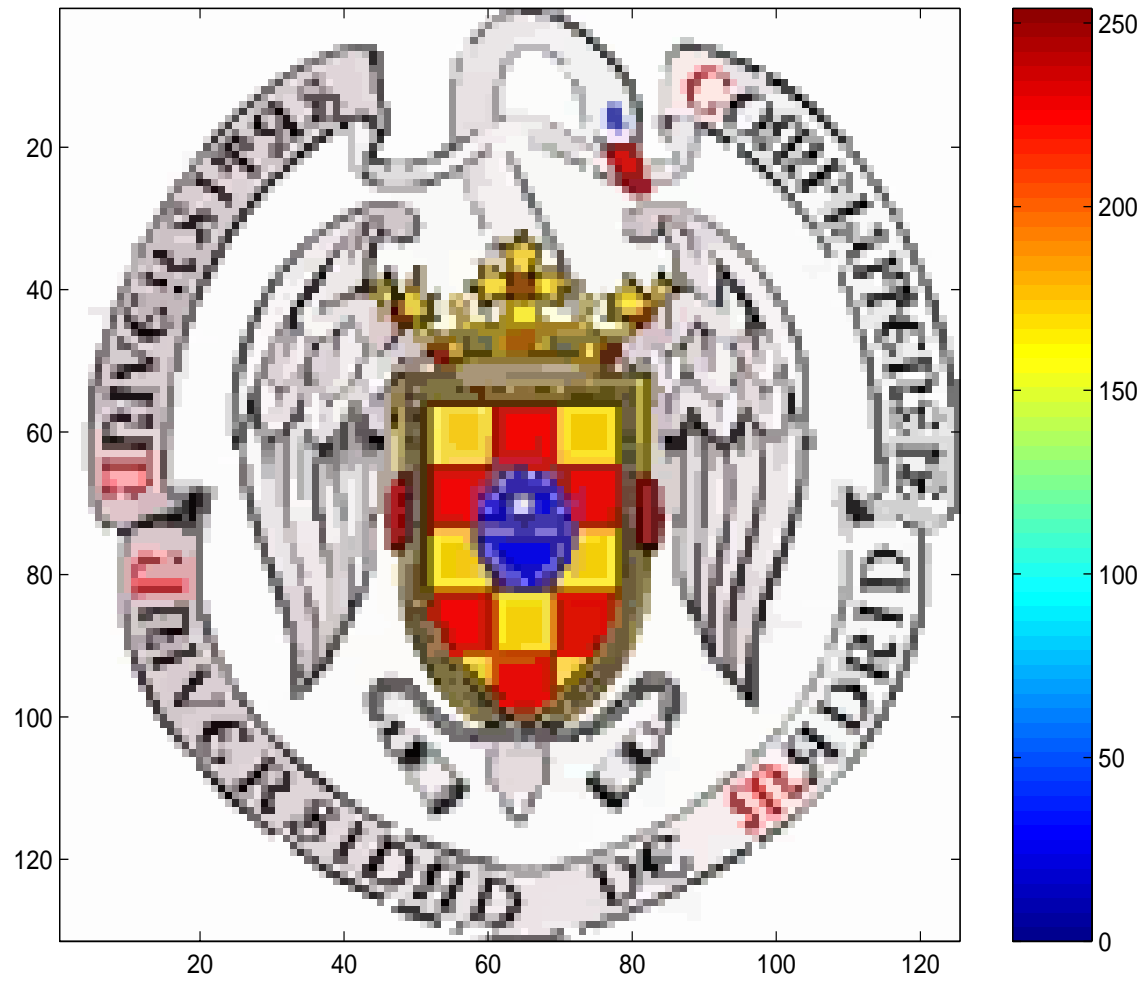
Clasificación utilizando 2 colores. (ESCUDO)



Clasificación utilizando 4 colores. (ESCUDO)



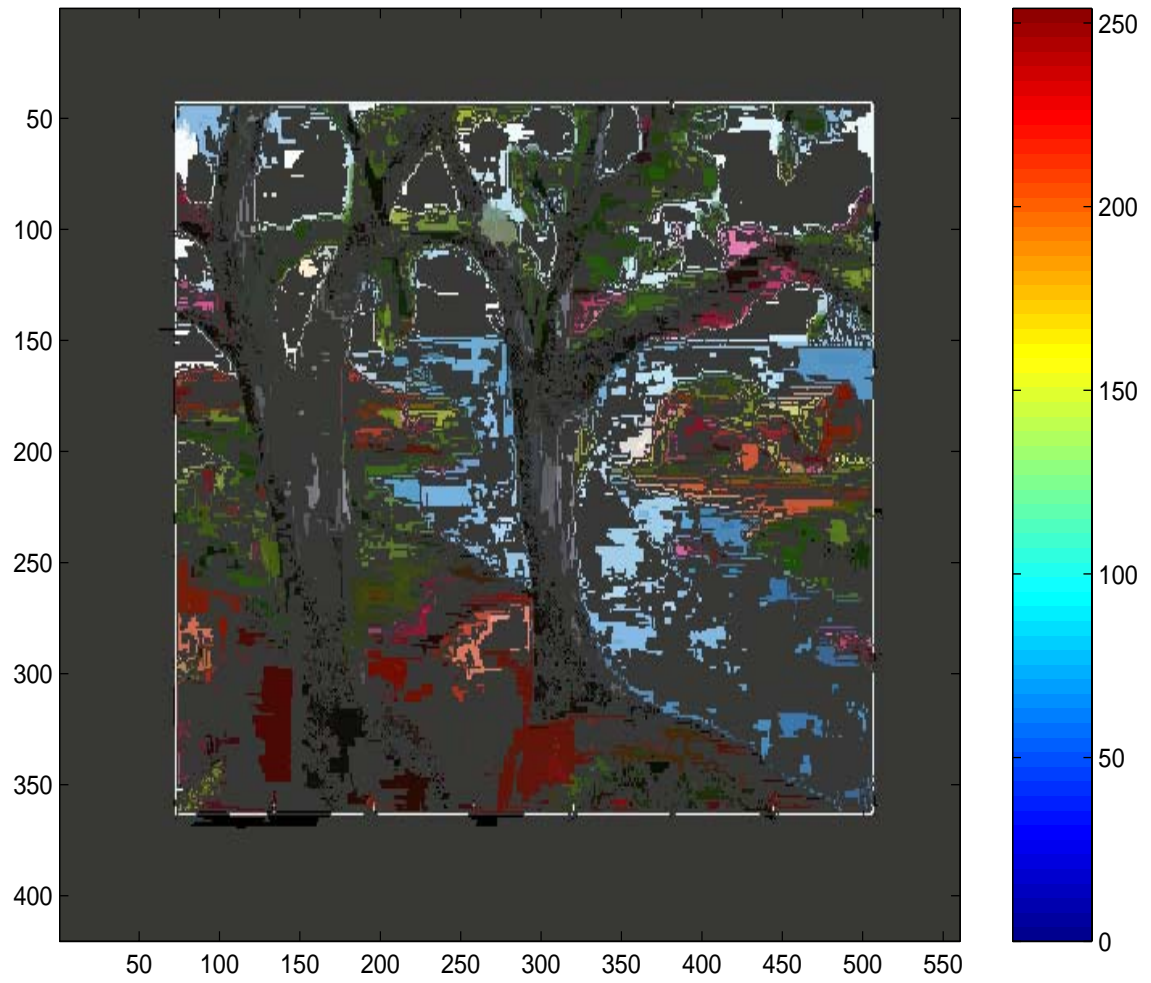
Clasificación utilizando 8 colores. (ESCUDO)



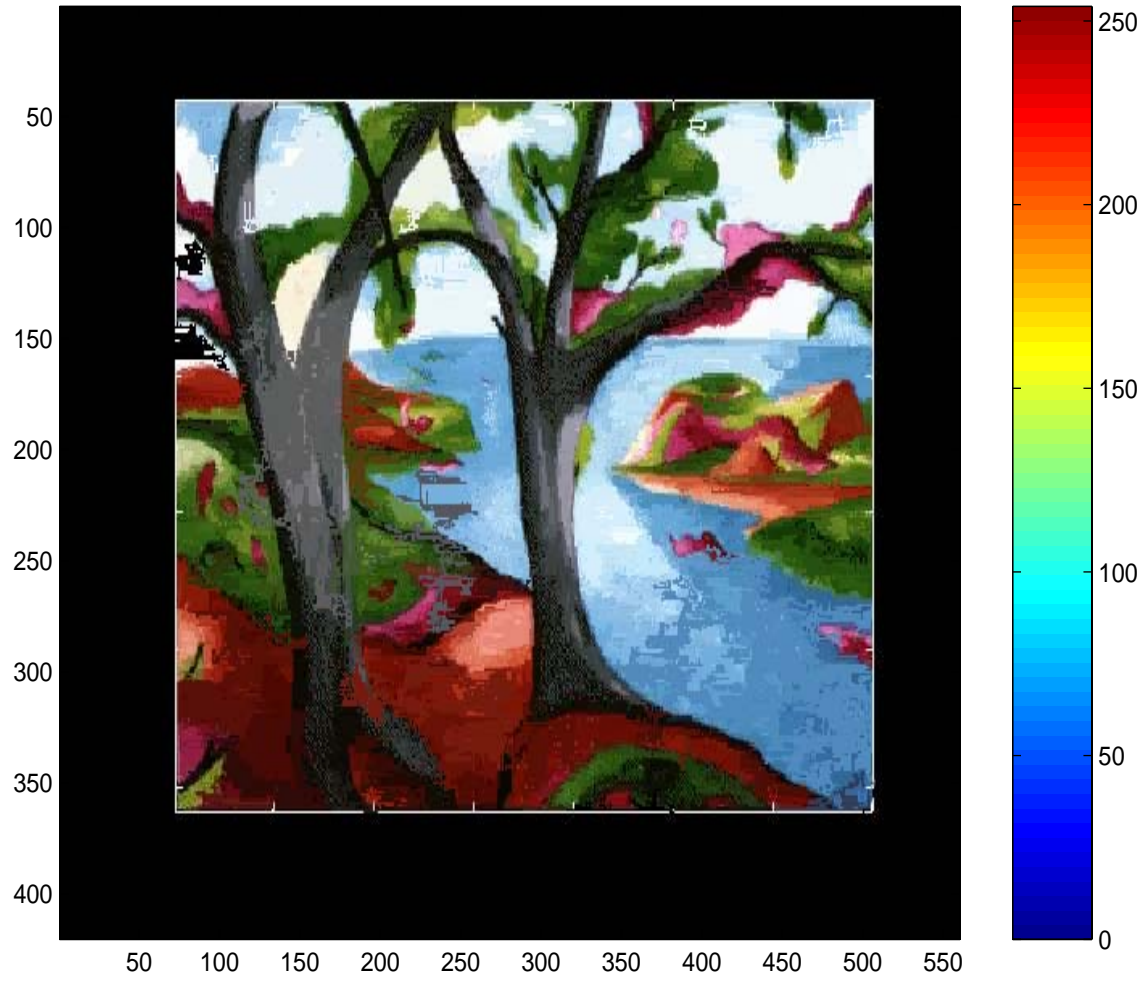
**Imagen del Matlab**

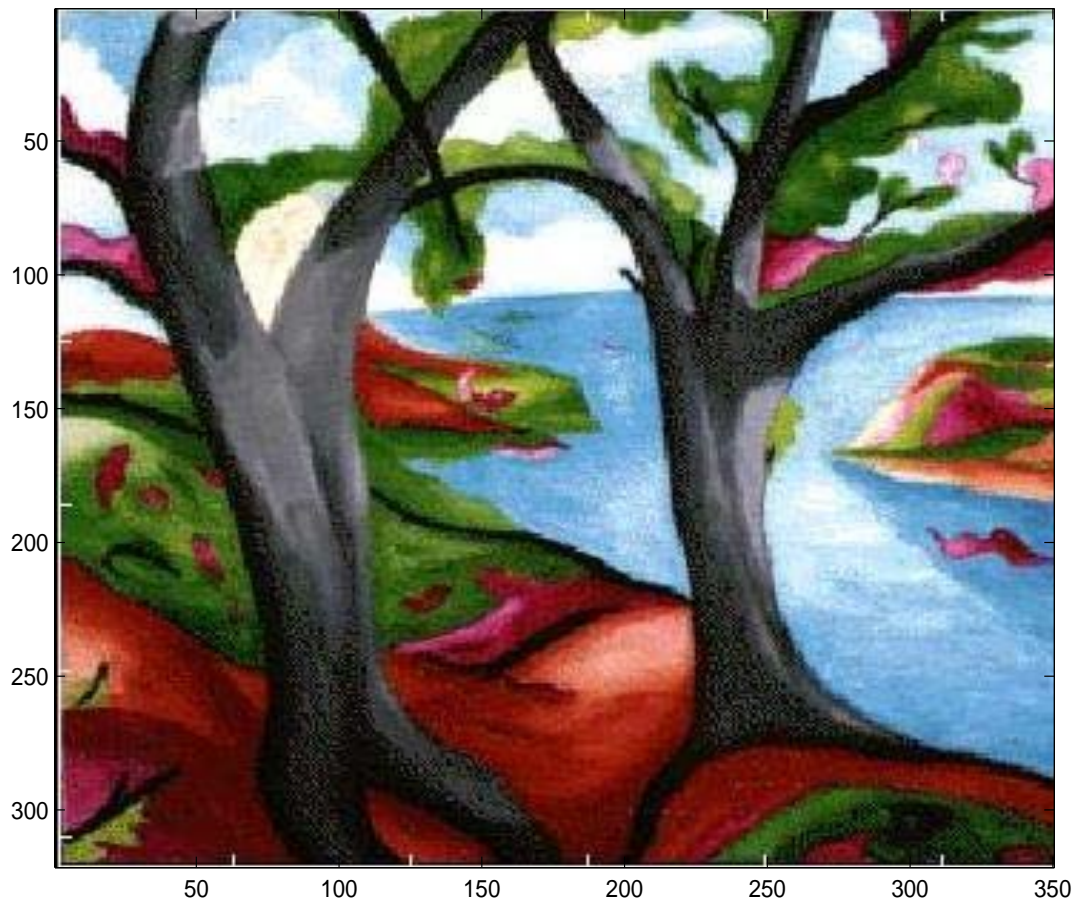


Clasificación utilizando 2 colores. (MATLAB)



Clasificación utilizando 4 colores. (MATLAB)



**Clasificación utilizando 8 colores. (MATLAB)**

Como puede observarse, con pocos colores se obtiene una clasificación muy buena y prácticamente idéntica a la original. Si el número de colores es suficientemente grande se tendrán tantas regiones homogéneas como se tienen en la fotografía original. Una vez que se tiene una buena información acerca del número de clases y sus características se está en disposición de realizar una clasificación difusa (ver [4, 5, 7]).

## 5.5 Proceso interactivo de clasificación

Uno de los principales problemas que aparecen en la clasificación en *remote sensing* es la de tratar de clasificar los pixels de una imagen sin información previa. El procedimiento visto en este capítulo, permite clasificar los pixels de una imagen digital teniendo en cuenta el entorno en que se encuentra.

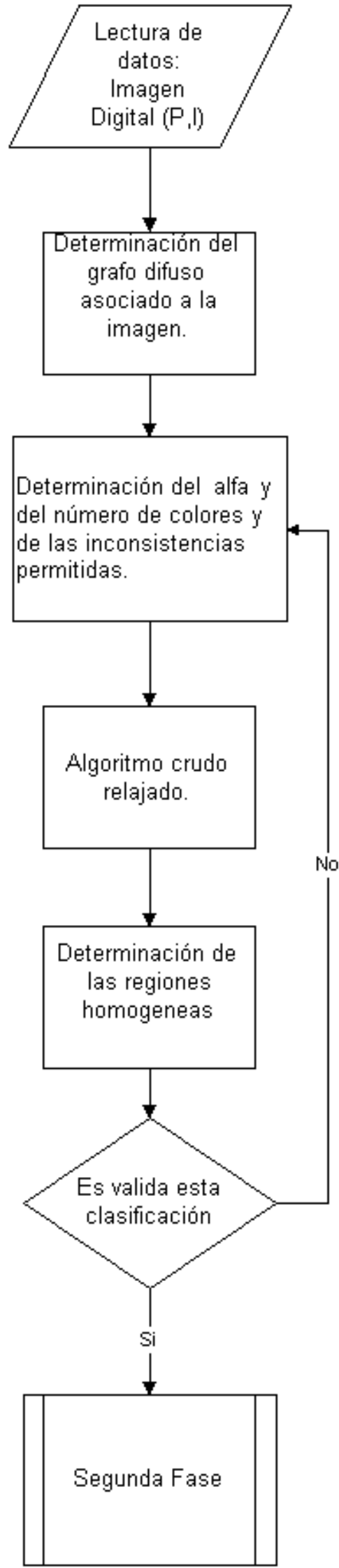
A medida que se incrementa el número de colores, la información que se extrae de la imagen va aumentando, hasta que llega un momento en que dicha información se va perdiendo debido a la gran cantidad de clases. Por este motivo el proceso de clasificación nítido deberá parar cuando el decisor vea que la información que le proporciona la clasificación empieza a disminuir.

Una vez que tenemos información acerca de las regiones homogéneas en la imagen digital, se puede aplicar la metodología vista en el capítulo anterior para obtener una clasificación difusa.

A continuación se presenta un esquema de cómo quedaría el algoritmo de clasificación basado en la coloración de grafos difusos. Además de los algoritmos interactivos aquí presentados serían convenientes otros algoritmos de aprendizaje para la determinación del número de clases que explican el problema. Aquí aparecerán ideas como la relevancia de una clase, la redundancia entre varias clases y cubrimiento de los pixels.

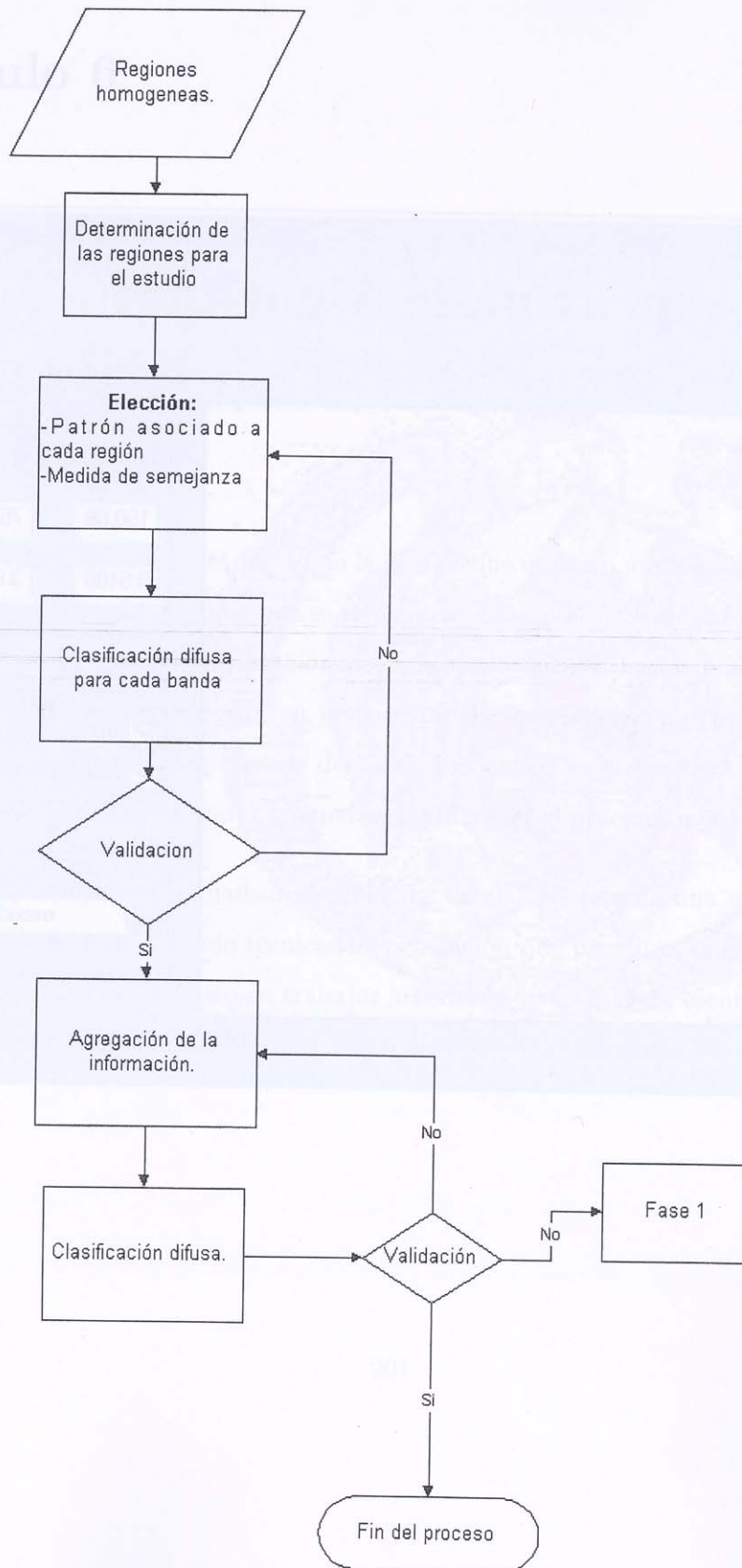


**Algoritmo de clasificación basado en la coloración. 1 Fase**

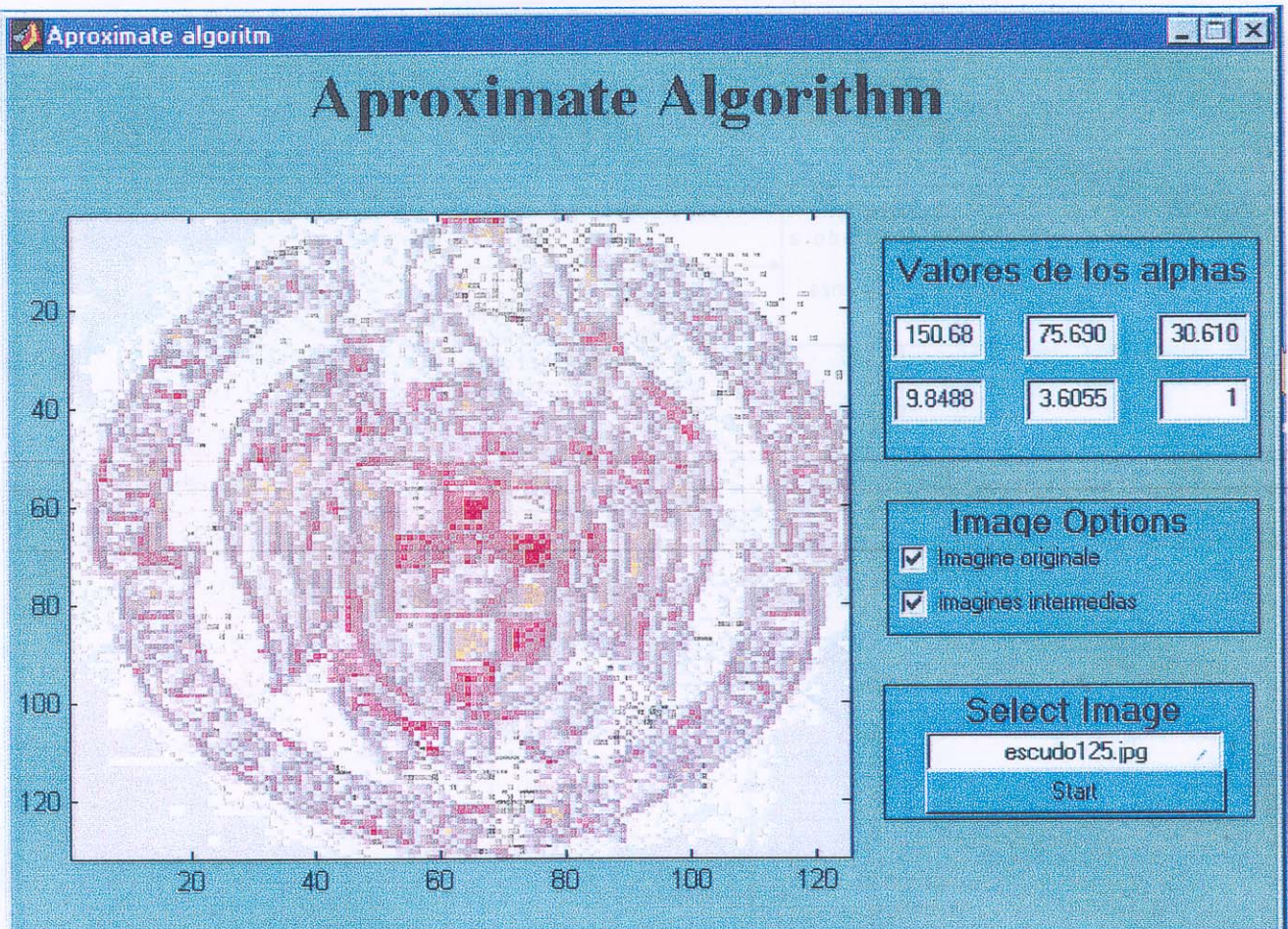


**Algoritmo de clasificación basado en la coloración. 2 Fase**

Algoritmo de clasificación basado en la coloración. 2 Fase



Entorno del programa de clasificación basado en la coloración



## Capítulo 6

# Clasificación en teledetección.

# Agregación de preferencias.

A lo largo de esta memoria se ha defendido la idea de que un buen modelizador debe ayudar al decisor a comprender el problema que se le plantea. Las anteriores metodologías propuestas para resolver problemas de clasificación de imágenes digitales hacen hincapié en que son procesos interactivos y, por tanto, en muchas de las fases de estos procesos el decisor se encuentra con problemas complejos de decisión. Las técnicas de representación presentadas en los capítulos anteriores juegan un papel importante en el proceso de ayuda a la decisión.

En este capítulo, se va a analizar el problema de clasificación de una imagen digital obtenida vía satélite, desarrollando técnicas de agregación que permitan mejorar el modelo de clasificación no supervisado visto en trabajos anteriores [3, 5, 7]. Será esencial la representación de relaciones de preferencia introducidas en los primeros capítulos de esta memoria.

## 6.1 Relación de preferencia entre bandas

En esta sección se agregará la información de cada una de las bandas de la imagen digital, objeto de estudio del problema de teledetección. El proceso de agregación puede hacerse de forma automática o teniendo en cuenta las preferencias del decisor.

En los procesos de clasificación de imágenes digitales vistos en los capítulos 4 y 5 se obtenía en primer lugar una clasificación difusa teniendo en cuenta la información dada por cada banda  $k \in \{1, \dots, b\}$ , dando lugar así al grado de pertenencia  $(\mu_r^k(i, j))$  del pixel  $(i, j)$  al objeto  $r$ . Para obtener el grado de pertenencia  $(\mu_r(i, j))$  del pixel  $(i, j)$  al objeto  $r$ , se agregaba la información dada por cada banda utilizando algún operador de agregación automático. Sin embargo, sería útil tener en cuenta la información dada por las preferencias del decisor en dicha agregación.

En el caso de imágenes en el *espectro visible*, la visualización de la imagen es posible, esto hace que la interpretación de la imagen sea directa y por tanto, la agregación de los  $((\mu_r^1, \dots, \mu_r^b))$  no sea necesaria. Cada una de estas funciones de pertenencia puede ser interpretada como la intensidad en cada una de las bandas del espectro visible. En esta situación la función de pertenencia es presentada como una imagen donde el blanco  $((0, 0, 0)$  para cada una de las bandas R, G, B del espectro visible) representa el grado de pertenencia más bajo y el negro  $((1, 1, 1))$  representa grado de pertenencia más alto.

En otros casos, puede ocurrir que la imagen no pueda visualizarse y, por tanto, existen dificultades en la interpretación y en el análisis [24]. Es necesaria entonces la agregación de los  $((\mu_r^1, \dots, \mu_r^b))$ .

En el caso en que el número de bandas sea muy grande, una de las principales técnicas se basan en la reducción del número de bandas de la imagen original. En esta línea aparece el análisis factorial ([5, 18, 24]), pero surgen otros problemas:

- Se pierde la capacidad de interpretar las nuevas variables, que serán combinación lineal

de las  $b$  bandas que existían. Se resuelve un problema pero aparece otro más grave, que es el de la interpretación, muy importante en problemas de teledetección.

- En todos los análisis factoriales se reduce el número de variables conservándose un alto porcentaje de variabilidad; sin embargo, esto podría ocasionar la pérdida de alguna banda que fuera imprescindible para clasificar un objeto que se encuentra en una zona muy pequeña y con poca variabilidad.
- En muchas ocasiones, la cantidad de información que explica una banda no es cuantificable, y se necesita la interpretación de un experto.

Nuestro objetivo en este capítulo será el de agregar la información contenida en cada banda dando lugar así a una clasificación de la imagen digital. Este proceso de agregación estará basado en el análisis de las preferencias del decisor.

No todas las bandas proporcionan una información simétrica y la importancia de una banda para identificar un objeto requiere cierta interpretación, por este motivo es necesario realizar un análisis de la importancia de cada banda. En muchos casos, esta agregación se hace teniendo en cuenta la ordenación dada por el foto-intérprete. De esta posible ordenación se propone siguiente:

De esta forma se propone la siguiente relación:

$$kR^rk' \text{ si la banda } k \text{ explica mejor el objeto } r \text{ que la banda } k'.$$

El estudio de la representación de esta relación binaria ayudará a comprender el problema de preferencias asociado y permitirá al decisor resolver el problema de agregación de las bandas de una forma más adecuada.

Es fácil que ocurra, que las preferencias del decisor no verifiquen algunas de las propiedades que se le exigen a la teoría clásica de la dimensión. Así pues, se hará imprescindible, para un



análisis de la dimensión, la teoría desarrollada anteriormente que permite la representación de cualquier relación no reflexiva.

Sea  $(P, I)$  imagen digital con  $b$  bandas  $(k_1, k_2, \dots, k_b)$ . Supongamos que después de un análisis se ha identificado el objeto  $r$ , y se ha construido la función de pertenencia de dicho objeto en cada banda  $(\mu_r^k)$ .

A continuación se construye la relación binaria  $R^r$  también denotada como  $\mu^{R^r}$ . Esta relación de preferencia sobre los objetos normalmente no será un orden parcial. Se calcula su dimensión así como una representación válida de dicha dimensión teniendo así  $R^r = \bigcup \bigcap L_{st}$ .

Una vez se tienen los órdenes lineales que explican la relación de preferencia entre bandas del decisor, se propone la siguiente agregación. Si se piensa en una agregación de las funciones de pertenencia  $\mu_r^k$   $k \in \{1, \dots, b\}$  en forma de O.W.A. [135, 136] y se asigna peso  $w_1$  a aquellas bandas más preferidas en los órdenes lineales y peso  $w_n$  a las menos preferidas se tiene el siguiente operador de agregación O.W.A.:

$$\phi(a_1, \dots, a_b) = \sum_{i=1, b} \frac{W_i}{W} a_i$$

donde:

- $W_i = \sum_l w_{o(l)}$  es la suma de los pesos de la banda  $i$  en los diferentes órdenes lineales.
- $W = \sum W_i$

Aplicando este operador a las diferentes funciones de pertenencia se tiene que:

$$\mu_r(i, j) = \phi(\mu_r^1(i, j), \dots, \mu_r^b(i, j)) = \sum_{k=1, b} \frac{W_k}{W} \mu_r^k(i, j)$$

Así pues, este procedimiento permite la agregación banda a banda de la función de per-

tenencia siempre que se cumpla que la relación de preferencias asociada sea no reflexiva.

**Ejemplo 6.1.** . Sea  $(P, I)$  imagen digital con cuatro bandas  $(k_1, k_2, k_3, k_4)$ . Se ha identificado el objeto  $r$  en dicha imagen y se tiene una función de pertenencia del objeto  $r$  para cada banda.

Sea  $X = \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$  y sea  $R^r$  una relación binaria nítida obtenida de la comparación entre bandas:

$$\mu^{R^r} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde llamaremos,  $\mu_{ij}^{R^r} = \mu^{R^r}(k_i, k_j)$ .

El digrafo asociado a esta relación se puede ver en la siguiente figura.

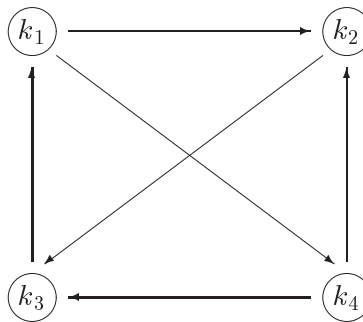


Figura 6.1: Relación binaria del ejemplo 6.1

Esta relación binaria  $R^r$  no es transitiva y puede ser representada mediante la unión de tres posets  $R_1, R_2, R_3$  con las siguientes matrices:

$$\mu^{R_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mu^{R_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mu^{R_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

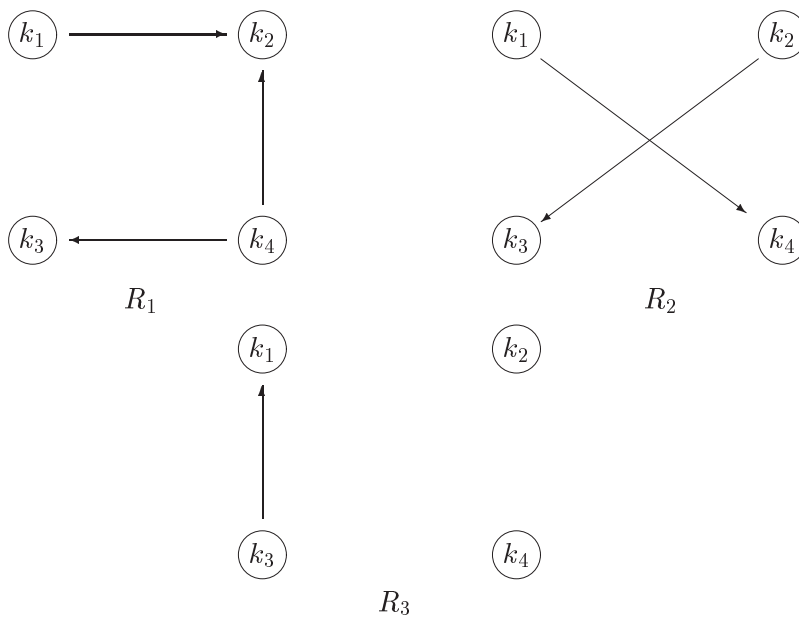


Figura 6.2: Descomposición en órdenes parciales de la relación binaria del ejemplo 6.1

Por otra parte, cada uno de estos tres posets puede ser representado como intersección

de los siguientes órdenes lineales:

$$R_1 = [k_1, k_4, k_2, k_3] \cap [k_4, k_3, k_1, k_2]$$

$$R_2 = [k_2, k_3, k_1, k_4] \cap [k_1, k_4, k_2, k_3]$$

$$R_3 = [k_4, k_3, k_1, k_2] \cap [k_2, k_3, k_1, k_4]$$

Suponiendo que esta representación de preferencias es válida para el decisor, la dimensión es 3. Tendiendo en cuenta la anterior metodología y suponiendo que el vector de pesos es  $w = (4, 3, 2, 1)$  se tiene la siguiente agregación:

$$\mu_r = \frac{16}{60}\mu_r^1 + \frac{14}{60}\mu_r^2 + \frac{14}{60}\mu_r^3 + \frac{16}{60}\mu_r^4$$

donde el peso asociado a la banda  $k_1$  ( $\frac{16}{60} = \frac{4+2+2+4+2+2}{10+10+10+10+10+10}$ ) se ha obtenido como suma de los pesos de la posición que ocupa  $k_1$  en los diferentes órdenes lineales.

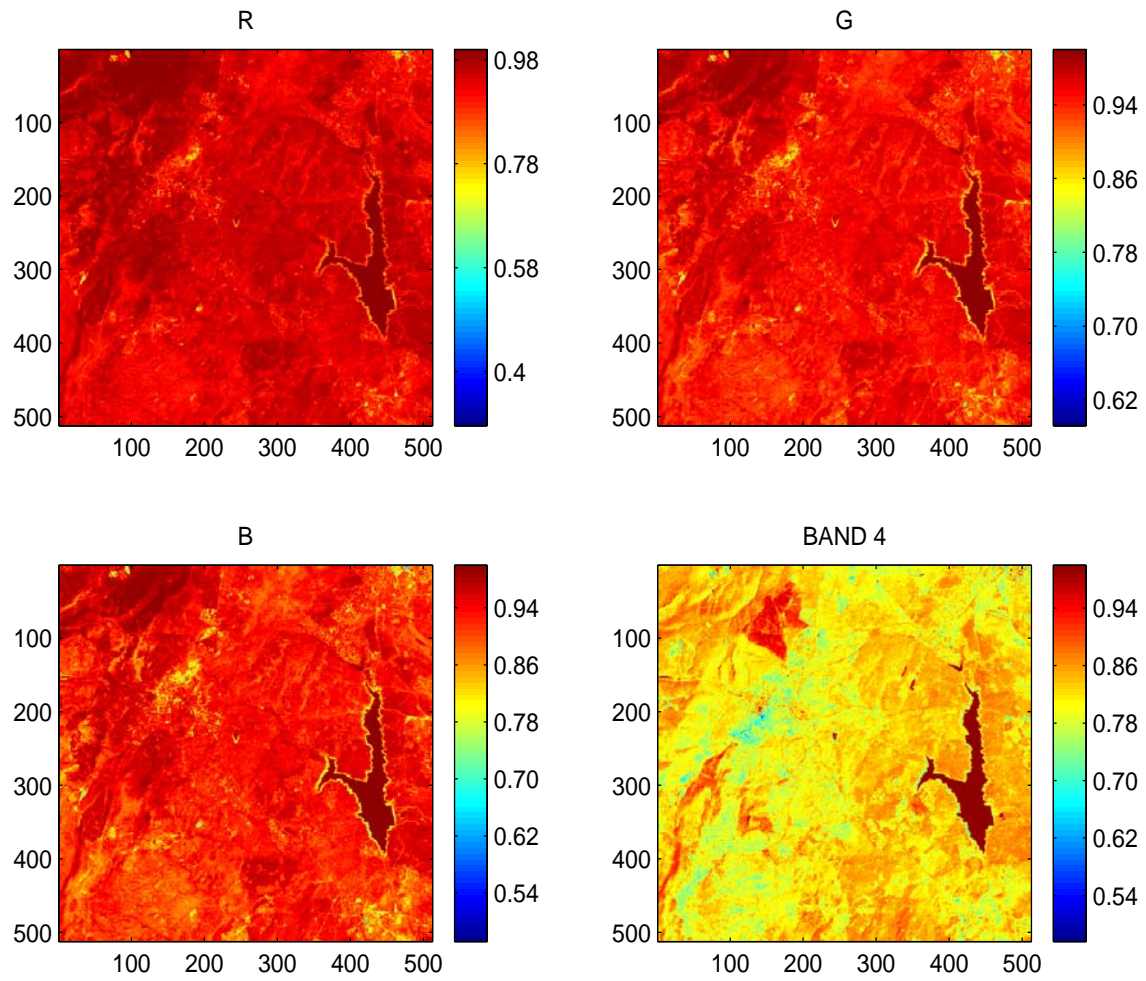
Dada la representación anterior, las bandas 1 y 4 tienen mayor importancia (es decir, explican mejor el objeto  $r$ ), mientras que las bandas 2 y 3 tienen un peso menor. Puede observarse en el digrafo de la relación que 1 y 4 son preferibles a 2 y 3.

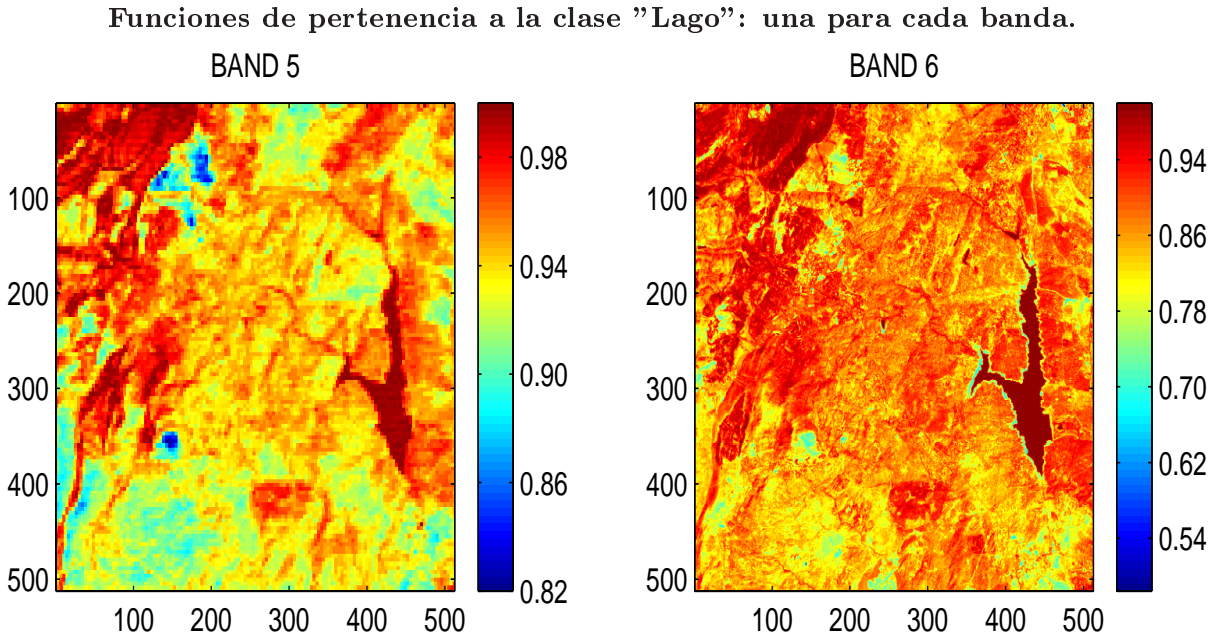
**Ejemplo 6.2.** Sea la imagen digital tomada sobre la sierra de Madrid estudiada en los capítulos 4 y 5.

Una vez desarrolladas las técnicas propuestas en los capítulos anteriores se obtienen los objetos a estudiar y para cada una de las bandas las funciones de pertenencia a dichos objetos.

A continuación se muestran las funciones de pertenencia del objeto *lago* sobre las diferentes bandas espectrales de la imagen digital tomada sobre la sierra de Madrid.

**Funciones de pertenencia a la clase "Lago": una para cada banda.**





Una vez hecha la clasificación banda a banda ( $\mu_r^k \quad \forall k \in \{1, \dots, 6\}$ ) se está interesado en agregar esta información para obtener una clasificación difusa de cada pixel en esa clase.

Después de preguntar al decisor cuál de las bandas cree que representa mejor la región lago se obtiene la siguiente relación de preferencia:

$$\mu^{R^{lago}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde se denota,  $\mu_{ij}^{R^{lago}} = \mu^{R^{lago}}(k_i, k_j)$ .

Esta relación es representada por dos órdenes lineales

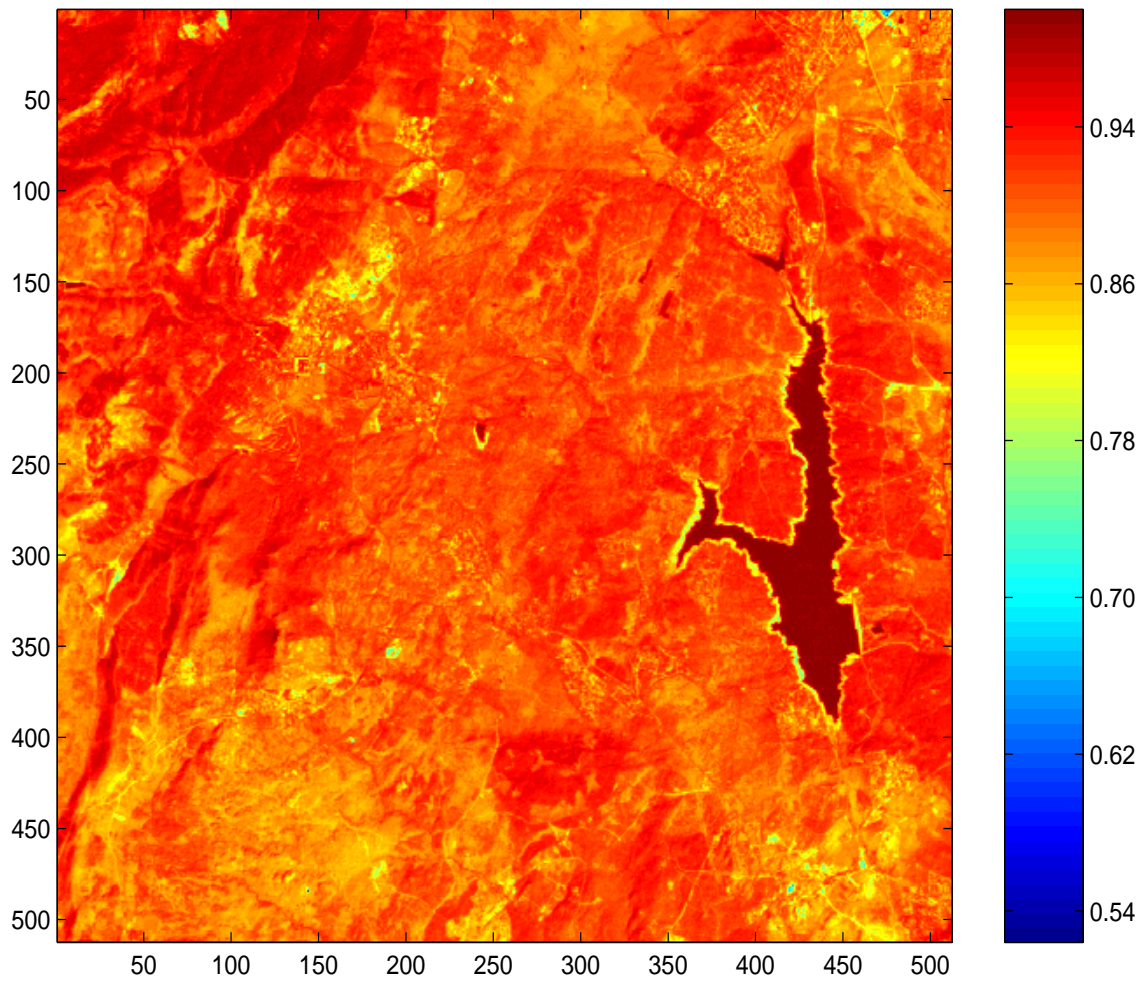
$$L = [k_6, k_4, k_5, k_1, k_2, k_3] \cap [k_6, k_5, k_4, k_3, k_2, k_1]$$

Y por tanto la agregación es:

$$\mu_{lago}(i, j) = \frac{1}{4}\mu_{lago}^1(i, j) + \frac{1}{4}\mu_{lago}^2(i, j) + \frac{1}{4}\mu_{lago}^3(i, j) + \frac{3}{8}\mu_{lago}^4(i, j) + \frac{3}{8}\mu_{lago}^5(i, j) + \frac{1}{2}\mu_{lago}^6(i, j)$$

que es representada en la siguiente imagen:

Imagen de la función de pertenencia de la clase lago



### 6.1.1 Relación basada en varios decisores

Si la comparación entre las bandas la realizan varios especialistas se pueden tener opiniones y criterios muy diversos, por lo que la relación de preferencia  $R^r$  no es válida para todos. En esta sección se tratará de agregar la información banda a banda cuando aparecen varios especialistas en interpretación de imágenes digitales.

Nos encontramos de forma natural con un problema de relaciones de preferencias difusas.

Una posibilidad para la construcción de la relación de preferencias difusas  $\mu^{R^r}$  para cada objeto  $r$ :

$\mu_R^r(k, k') =$  proporción de especialistas que prefieren la banda  $k$  a la  $k'$  para explicar el objeto  $r$

**Ejemplo 6.3.** Sea  $(P, I)$  imagen digital con tres bandas  $(R, G, B)$  correspondientes a las intensidades color rojo, verde y azul.

Sea  $X = \{R, G, B\}$  y sea  $\mu$  relación de preferencia

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 \\ 0.7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Supongamos que esta matriz se ha obtenido con la anterior metodología. Se puede observar que, por ejemplo  $\mu_R(R, B) = 0.4$ , lo que quiere decir que el 40 % de los intérpretes prefieren la banda  $R$  para interpretar el objeto  $r$  que la banda  $B$ .

Cuando se analiza este problema desde el punto de vista de la dimensión aparecen cuatro casos posibles:

- Cuando  $\alpha \leq 0.4$ , se está en el caso en el que cualquier diversidad de elección en los decisores, provoca un arco en el grafo asociado al corte. Para este caso existe un 3-ciclo



en el  $\alpha$ -corte asociado, y este  $\alpha$ -corte puede ser representado en términos de 3 órdenes lineales nítidos, que explican las diferentes corrientes de pensamientos relacionadas con este objeto:

$$R^\alpha = \{[R, G, B] \cap [B, R, G]\} \cup \{[G, B, R] \cap [R, G, B]\} \cup \{[B, R, G] \cap [G, B, R]\}$$

Primero se divide el conjunto de relaciones en tres Posets (correspondientes a las tres líneas de pensamiento)

- 40 % prefiere la banda R a la G. (Poset 1)
- 60 % prefiere la banda G a la B. (Poset 2)
- 70 % prefiere la banda B a la R. (Poset 3)

Para este caso  $W = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

- Cuando  $0.4 < \alpha \leq 0.6$ , Para este valor de  $\alpha$ , la opinion del 40 % de los decisores no se considera relevante. Así solamente se tienen dos opiniones:
  - 60 % prefiere la banda G a la B.
  - 70 % prefiere la banda B a la R.

No se tienen ciclos, pero como  $G > B$  y  $B > R$  están presentes, se está perdiendo  $G > R$ :

$$R^\alpha = \{[G, B, R] \cap [R, G, B]\} \cup \{[B, R, G] \cap [G, B, R]\}$$

así que se necesita también 3 órdenes lineales.

Para este caso  $W = (\frac{7}{24}, \frac{9}{24}, \frac{8}{24})$

- Cuando  $0.6 < \alpha \leq 0.7$ , se tiene un conjunto totalmente ordenado con un solo elemento:

$$R^\alpha = [B, R, G] \cap [G, B, R]$$

Este poset tiene dimensión 2.

Para este caso  $W = (\frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \frac{5}{12})$

- Cuando  $\alpha > 0.7$ , aparece un poset con incomparabilidades entre todos los pares de elementos:

$$R^\alpha = [R, G, B] \cap [B, G, R]$$

y consecuentemente, 2 órdenes lineales son necesitados.

Para este caso  $W = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

### 6.1.2 Relación basada en otros átomos de racionalidad

Como ya se apuntaba en el capítulo 2, además de los órdenes lineales existen otras posibilidades de lo que se entiende normalmente por un criterio. Por este motivo se desarrolló en el capítulo 2 el concepto de dimensión y representación de preferencias en el caso en que el átomo de racionalidad sea distinto de un orden lineal.

Del mismo modo a como se ha propuesto anteriormente, la agregación basada en la relación de preferencia entre bandas se puede generalizar al caso en que nuestros átomos de racionalidad no sean órdenes lineales.

Sean  $(w_1, \dots, w_b)$  los pesos de las bandas según su preferencia en el átomo de racionalidad. Se define el siguiente operador de agregación O.W.A.:

$$\phi(a_1, \dots, a_b) = \sum_{i=1, b} \frac{W_i}{\overline{W}} a_i$$

donde:

- $W_i = \sum_l w_{o(l)}$
- $W = \sum W_i$

donde  $o(l)$  es la posición que ocupa la banda  $i$ -ésima en el átomo de racionalidad  $l$

Aplicando este operador a las diferentes clases de pertenencia de las regiones se tiene:

$$\mu_r(i, j) = \phi(\mu_r^1(i, j), \dots, \mu_r^b(i, j)) = \sum_{k=1, b} \frac{W_k}{W} \mu_r^k(i, j)$$

**Ejemplo 6.4.** Sea  $(P, I)$  una imagen digital con cinco bandas  $X = (k_1, \dots, k_5)$ . Supongamos que se trabaja con el átomo de racionalidad de los órdenes lineales de tamaño 3. Sea  $w = (3, 2, 1, 0, 0)$  pesos correspondientes las bandas ordenadas en nuestro átomo de racionalidad, y sea  $R$  una relación binaria nítida que modeliza la relación de preferencia la banda  $k_i$  es preferida a la banda  $k_j$  para el estudio del objeto  $r$ .

$$\mu^{R^r} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde se denota,  $\mu_{ij}^{R^r} = \mu^{R^r}(k_i, k_j)$ .

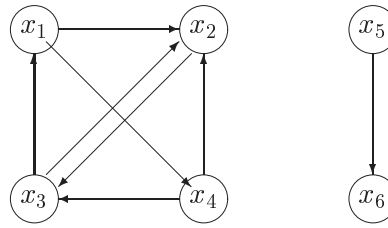


Figura 6.3:

Como se analiza en el capítulo 2 una representación óptima para esta relación es:

$$R = [k_3, k_1, k_2] \cup [k_4, k_2, k_3] \cup [k_1, k_4, k_2] \cup ([k_1, k_5, k_6] \cap [k_5, k_6, k_1])$$

Para esta representación la agregación sería  $W = (\frac{9}{30}, \frac{4}{30}, \frac{4}{30}, \frac{4}{30}, \frac{4}{30}, \frac{5}{30}, \frac{5}{30}, \frac{3}{30})$

## 6.2 Relación de preferencia entre variacionales

En el proceso de clasificación del capítulo 4, la variacional de una imagen con dirección  $v$  representaba la heterogeneidad de cada pixel en esa dirección. Teniendo en cuenta diferentes direcciones, que deberán ser determinadas por el decisor, y agregando la información obtenida de una forma adecuada se obtenía una medida general de la no homogeneidad de un pixel, entendida como la frontera.

Sean  $fr^{v_l}(i, j)$  medidas de heterogeneidad del pixel  $(i, j)$  asociadas a las direcciones  $v_l \forall l \in \{1, \dots, k\}$ . A partir de estas medidas se puede construir una medida general  $(fr(i, j))$  de no homogeneidad de un pixel agregando la información dada por cada dirección. Así pues se tendrá:

$$fr(i, j) = \Phi(fr^{v_1}(i, j), \dots, fr^{v_k}(i, j))$$

Asociado a este problema de agregación surge un problema de decisión: ¿cuál de las direcciones discrimina mejor los objetos dentro de la imagen y, por tanto, debe tener mayor peso a la hora de medir dicha heterogeneidad?

De esta forma se puede definir la siguiente relación:

*$uRv$  si la dirección  $u$  discrimina mejor los objetos en la imagen digital que la dirección  $v$ .*

El estudio de la representación de esta relación binaria ayudará a comprender el problema de preferencias asociado y permitirá al decisor resolver el problema de agregación de las direcciones de una forma más adecuada.

**Ejemplo 6.5.** Se quiere agregar la información obtenida por las direcciones horizontal, vertical y diagonal (representadas por  $h, v, d$ ) de la imagen digital de Sevilla vista en el capítulo 4.

Imagen de la variación vertical de la imagen de Sevilla

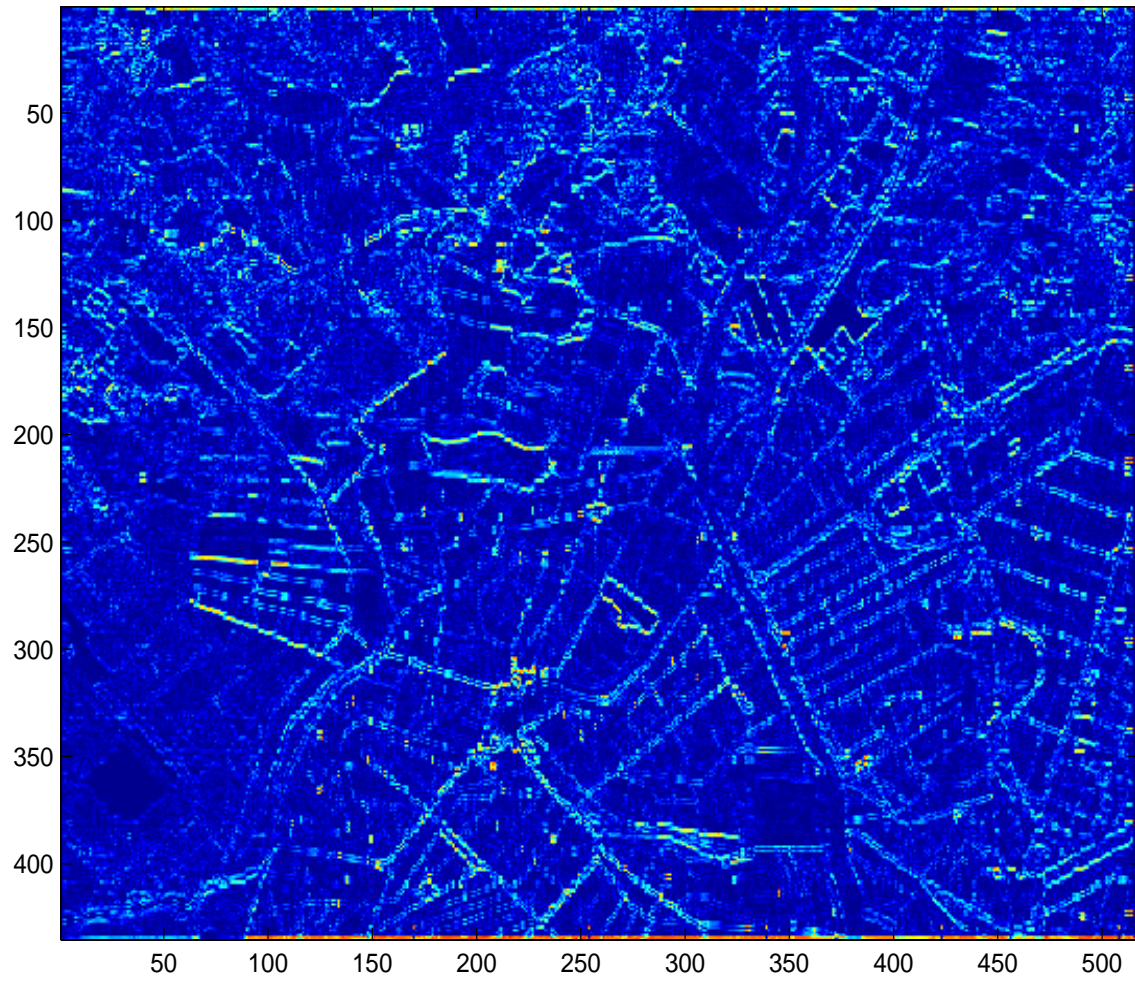


Imagen de la variacional horizontal de la imagen de Sevilla

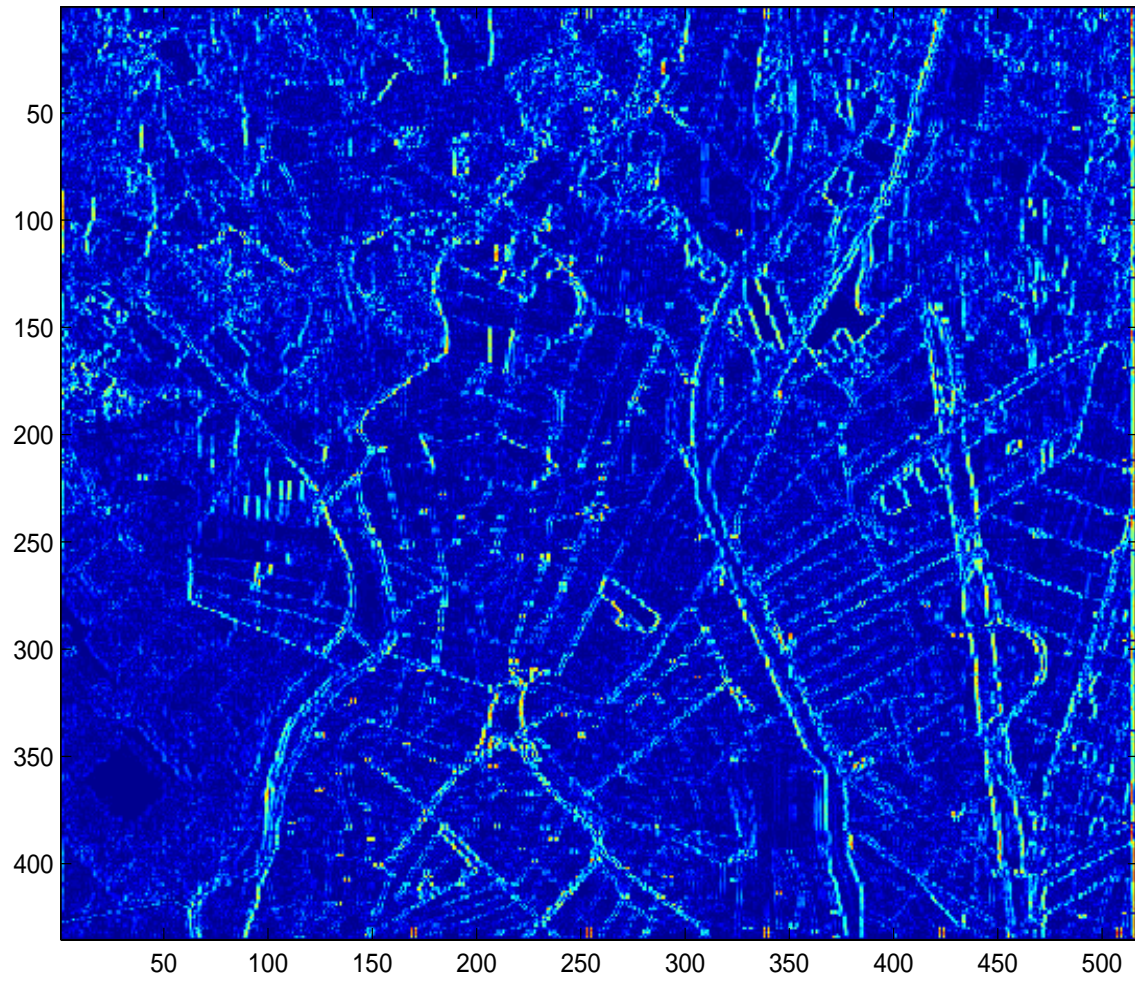
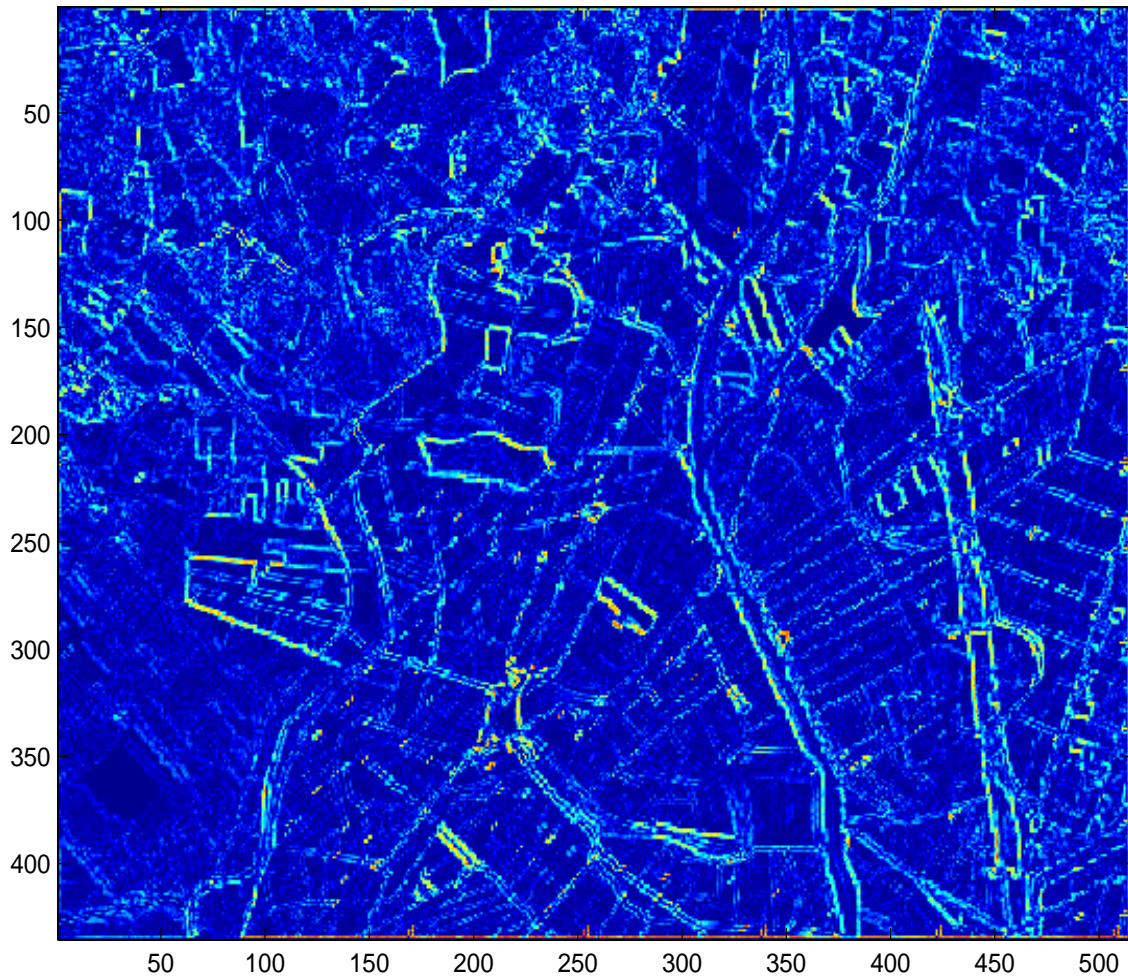


Imagen de la variacional diagonal de la imagen de Sevilla



Sea  $R$  la relación binaria en  $X = \{d, h, v\}$  que representa la decisión de cual de las direcciones discrimina mejor los objetos dentro de la imagen. La relación binaria que modeliza las preferencias del foto-intérprete son:

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Esta relación binaria puede ser explicada mediante dos órdenes lineales:

$R = [d, h, v] \cap [d, v, h]$ . Siguiendo la línea desarrollada en la anterior sección se agrega esta información de la siguiente manera:

$$fr(i, j) = \frac{1}{2}fr^d(i, j) + \frac{1}{4}fr^h(i, j) + \frac{1}{4}fr^v(i, j) \forall (i, j) \in P$$

Sean  $(w_1, \dots, w_k)$  los pesos de las  $k$ -direcciones elegidas  $((v_1, \dots, v_k))$  según su preferencia en un orden lineal. Una posible agregación sería:

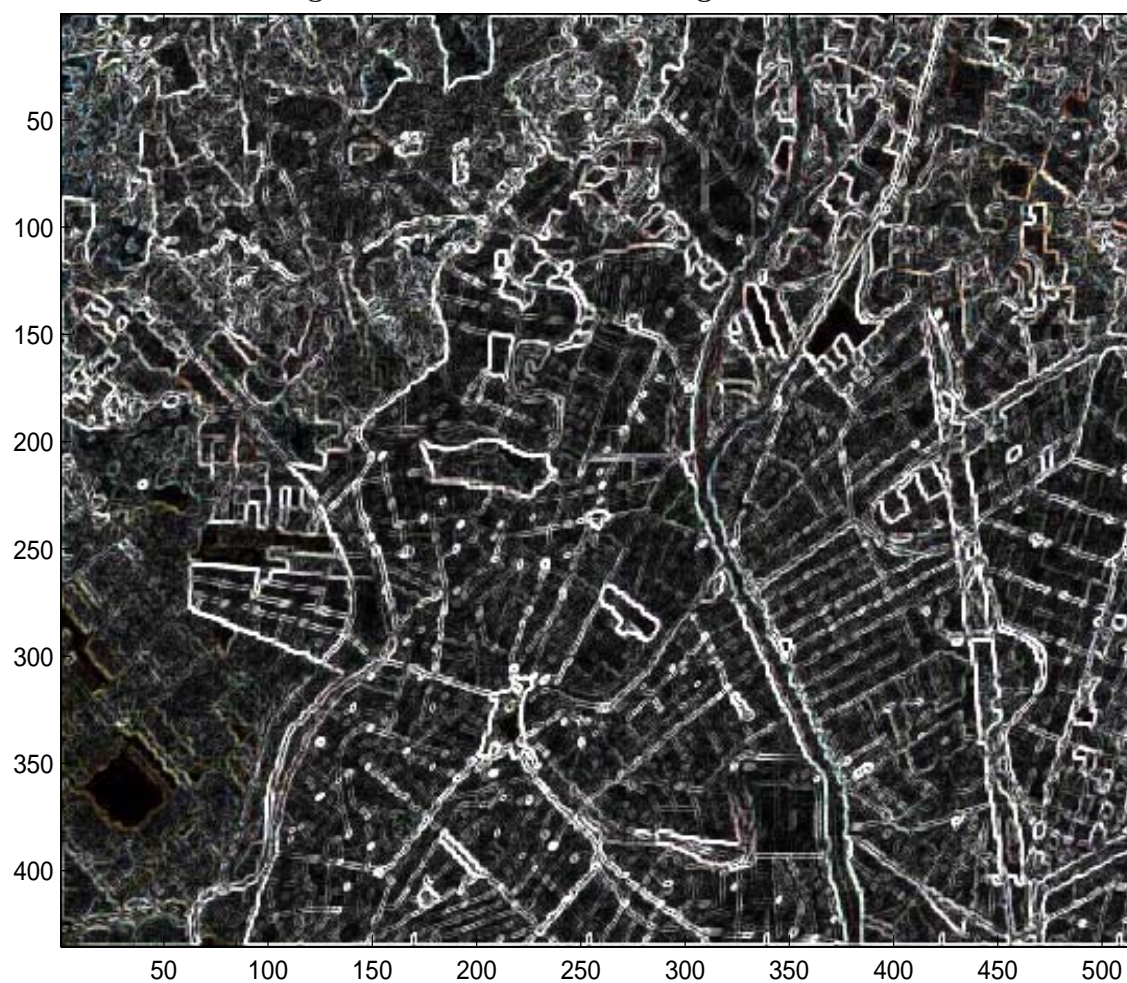
$$fr(i, j) = \sum_{i=1, k} \frac{W_i}{W} fr^{v_i}(i, j)$$

donde:

- $W_i = \sum_i w_{o(i)}$  es la suma de los pesos en los diferentes órdenes lineales.
- $W = \sum W_i$

Se ha aplicado esta metodología a la imagen digital tomada sobre Sevilla:

Imagen de la Frontera de la región de Sevilla



### 6.2.1 Relación basada en varios decisores

La relación de preferencia entre variacionales puede definirse teniendo en cuenta la opinión de varios especialistas, de este modo, surge de forma natural un problema de relaciones de preferencias difusas.

Una posibilidad para la construcción de la relación de preferencias valoradas es la siguiente:

$\mu_R(u, v) = \text{proporción de especialistas que prefiere la dirección } u \text{ a la } v$

Analizado la función de dimensión asociada a esta relación así como la representación en cada uno de los casos, una agregación es posible dando lugar a la frontera de la imagen digital.

### 6.2.2 Relación basada en los objetos.

La aproximación vista en la anterior sección, está basada en la relación

*$vRv$  si la dirección  $v$  discrimina mejor los objetos dentro de una fotografía que  $v$ .*

Sin embargo, en muchas ocasiones, resulta difícil determinar si una dirección discrimina mejor los objetos que otra, ya que, habrá direcciones que discriminen bien unos objetos y otros no, haciendo compleja la comparabilidad entre direcciones.

Por tanto, puede resultar difícil construir la relación que denotábamos anteriormente por  $\mu^R(u, v)$ . El objetivo en esta sección será el de construir dicha relación.

Fijados una serie de objetos en la imagen digital,  $r_1 \dots r_s$ , una pregunta mucho más fácil de responder es la siguiente: *dada una dirección, ¿discrimina mejor un objeto  $r_i$  que otra?*. De esta forma surge la relación que se denota por  $\mu^{R_i}$ :

*$uR_i v$  si la dirección  $u$  discrimina mejor el objeto  $r_i$  que la dirección  $v$ .*

Parece lógico pensar que esta relación sí va a poder ser construida con facilidad por el foto-intérprete. El problema que se planea ahora es cómo agregar las relaciones  $(R_1, \dots, R_s)$  para obtener la relación difusa  $\mu^R$  entre direcciones. Para la agregación de estas relaciones de preferencia se construye otra relación de preferencia entre los objetos que aparecen en nuestro estudio:

$r \succ_H r'$  si el objeto  $r$  es más relevante en nuestro estudio que el objeto  $r'$ .

El estudio y análisis de este problema de decisión hará posible una agregación. Al igual que en las agregaciones anteriores se utilizará un operador de agregación O.W.A.

Sean  $(w_1, \dots, w_s)$  los pesos de los objetos según su preferencia en un orden lineal. Se define el siguiente operador de agregación O.W.A.:

$$\phi(a_1, \dots, a_s) = \sum_{i=1, s} \frac{W_i}{W} a_i$$

donde:

- $W_i = \sum_l w_{o(l)}$  es la suma de los pesos de los objetos  $r_i$  en los diferentes órdenes lineales.
- $W = \sum W_i$

Aplicando este operador a las diferentes funciones de pertenencia se tiene que:

$$\mu^R(u, v) = \phi(R_1(u, v), \dots, R_s(u, v)) = \sum_{i=1, s} \frac{W_i}{W} R_i(u, v)$$

## Capítulo 7

# Conclusiones y futuras líneas de Investigación

### 7.1 Conclusiones

Los *sistemas de ayuda a la decisión* permiten analizar y comprender el problema que el decisor tiene entre manos. Una buena comprensión del problema permitirá al decisor tomar mejores decisiones.

Uno de los sistemas de ayuda a la toma de decisiones más utilizados es el análisis de las preferencias del decisor. La modelización de las preferencias por medio de funciones de utilidad, teoría de grafos etc, así como el análisis de los criterios permiten en muchas ocasiones una comprensión del problema.

Una de las principales críticas que se le hacen a las relaciones de preferencias, sobre todo en el caso difuso, es que son muy difíciles de interpretar para el decisor, y en la mayoría de los casos no se ayuda al decisor a resolver los problemas de decisión.

Por este motivo en esta tesis hemos tratado de abordar el problema de la representación de

preferencias para poder mejorar las técnicas que permiten al decisor entender sus preferencias y a la vez el problema con el que se enfrenta. En esta línea aparece el concepto de dimensión en relaciones de preferencia, como una buena representación de relaciones de preferencia binaria.

La generalización de este concepto al caso difuso era hasta ahora es muy restrictiva, haciéndose posible la generalización solamente en casos poco reales, ya que se exigen unas propiedades muy fuertes a la relación de preferencias difusas. Por este motivo hemos abordado el problema de la dimensión en relaciones de preferencias, primero en el caso nítido, para luego poder pasar al caso difuso.

Una vez desarrollada la teoría que permite una mejor comprensión de las preferencias, en esta memoria se ha abordado el problema de la clasificación no supervisada en teledetección. Para realizar esta clasificación se ha planteado un modelo difuso de clasificación que permita representar la realidad de una forma más flexible.

El problema de la clasificación en teledetección se ha abordado desde dos enfoques distintos:

- El primero de los enfoques construye, mediante la variacional de una imagen, regiones homogéneas dentro de la imagen, así como una posterior clasificación difusa.
- El segundo de los enfoques, mediante un procedimiento de coloración del grafo difuso asociado determina, regiones homogéneas dentro de la imagen, permitiendo al igual que el anterior enfoque, una clasificación difusa.

En ambos métodos se emplean diversas técnicas de agregación tanto automáticas (capítulos 4 y 5), como basadas en la representación de las preferencias del decisor (capítulo 6).

## 7.2 Futuras líneas de Investigación

### Otras aproximaciones para la clasificación en teledetección.

En los métodos de clasificación desarrollados en esta memoria, se produce una pérdida de información al aplicar la función distancia entre pixels. Esta función distancia comprime la información que se tiene en  $\mathbb{R}^b$  para tenerla en  $\mathbb{R}^1$ . Otra aproximación que surge de forma natural en este modelo, es aplicar la metodología vista en los capítulos 4 y 5 a cada banda. De esta forma se obtendría una clasificación de las regiones para cada banda. Una vez hecho esto existen diversas formas de agregar esa información para obtener una clasificación difusa final. Sería interesante comparar esta nueva metodología con la desarrollada en esta memoria.

### Elección de la función distancia y función de pertenencia

Los procesos de clasificación presentados en esta memoria son fuertemente dependientes de la elección de la función distancia. Sería interesante analizar la función distancia según las características del problema.

También podría analizarse las diferentes posibilidades para la construcción de la función de pertenencia así como la elección de un patrón asociado a una región.

### Otros métodos de agregación basados en relaciones de preferencias

Supongamos que se supiese resolver el problema de agregación cuando la relación de preferencia del foto-interprete fuese un orden lineal. Teniendo en cuenta esta representación (dada en forma de órdenes lineales) se podría resolver el problema basándose en las operaciones de unión e intersección de conjuntos difusos.

## **Algoritmos Heurísticos para el cálculo de la función de dimensión**

En esta memoria se aborda el problema del cálculo de la dimensión basándose en la idea de *Poset maximal*. Uno de los problemas que quedan sin resolver es el de como descomponer la relación de preferencias de modo que la representación sea minimal. En esta línea podría pensarse en otros algoritmos heurísticos y exactos que obtengan buenas aproximaciones de la dimensión.

## **Átomo de racionalidad**

Desarrollar algoritmos que permitan la representación de una relación de preferencias como uniones de intersecciones de átomos de racionalidad diferentes a órdenes lineales. En esta línea analizar la complejidad en función del átomo de racionalidad.

## **La terna de las relaciones de preferencia**

A lo largo de esta memoria solamente la preferencia estricta es modelizada, podría pensarse en desarrollar una teoría en paralelo que permita la representación de la indiferencia o preferencia débil.



# Bibliografía

- [1] J. Aczel: *Lectures on Functional Equations and their Applications*. Academic Press, New York, 1966.
- [2] D. Adnadjevic: *Dimension of fuzzy ordered sets*. *Fuzzy Sets and Systems* 67:349-357 (1994).
- [3] A. Amo: *Modelos de Agregación Recursiva y su Aplicación a la Clasificación Difusa de Imágenes Digitales*. Ph.D. Thesis, Universidad Complutense de Madrid (1999).
- [4] A. del Amo, D. Gómez , J. Montero y G. Biging *Relevance and Redundancy in fuzzy classification systems*. *Mathware and Soft Computing* 8, 203-216 (2001)
- [5] A. Amo, J. Montero y G. Biging: *Classifying pixels by means of fuzzy relations*. *Int. J. General Systems* 29:605–621 (2000).
- [6] A. Amo, J. Montero y G. Biging: *Relevancia y redundancia en sistemas de clasificación difusa*. En: *Proceedings Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy, ESTYLF 2000* (A. Ollero, S. Sánchez, B. Arrue and I. Baturone, eds., Universidad de Sevilla, Sevilla); pp. 521-525 (2000).
- [7] A. Amo, J. Montero, A. Fernández, M. López, J. Tordesillas y G. Biging: *Spectral fuzzy classification: an application*. *IEEE Transactions of Systems, Man and Cybernetics* (to appear).
- [8] A. Amo, J. Montero y V. Cutello: *On the principles of fuzzy classification*. En: *Proceedings North American Fuzzy Information Processing Society Conference*; 675–679 (1999).
- [9] A. del Amo, J. Montero y E. Molina: *Representation of consistent recursive rules*. *European Journal of Operational Research* 130:29–53 (2001).
- [10] R. Aumann: *Utility theory without the completeness axiom*. *Econometrica* 30 (2): 445–462 (1962).
- [11] B. de Baets: *Uninorms: the known classes*. En: D. Ruan, H.A. Abderrahim and P. D’hont, eds., *Fuzzy Logic and Intelligent Technologies for Nuclear Science and Industry*. World Scientific, Singapore (1998); páginas 21–28

- [12] B. De Baets: *Idempotent uninorms*. European Journal of Operational Research 118:631–642 (1999).
- [13] G. H. Ball y D. J. Hall: *ISODATA - A Novel Method of Data Analysis and Pattern Classification*. Stanford Research Institute, Menlo Park, California (1965).
- [14] V. Belton y J. Hodgkin: *Facilitators, decision makers, D.I.Y. users: is intelligent multicriteria decision support for all feasible or desirable?*. European Journal of Operational Research 113:247–260 (1999).
- [15] R. J. Benayoun, J. T. Montgolfier, J. Tergny y O. Laritchev: *Linear programming with multiple objective functions: Step Method (STEM)*. Mathematical Programming 1 366-375 (1971).
- [16] J.C. Bezdek: *Fuzzy models for pattern recognition: background, significance and key points*. En: J.C. Bezdek and S.K. Pal, eds.; *Fuzzy Models for Pattern Recognition*. IEEE Press, New York (1992); páginas 1–27.
- [17] J.C. Bezdek y J.D. Harris: *Fuzzy partitions and Relations: an axiomatic basis for clustering*. Fuzzy Sets and Systems 1:111–127 (1978).
- [18] G.S. Biging, R.G. Congalton y E.C. Murphy (1991). A comparison of photointerpretation and ground measurements of forest structure, *Proceedings of the Fifty-seventh annual meeting of the American Society of Photogrammetry and Remote Sensing*, Baltimore, MD, March, **3**, pp.6–15.
- [19] E. Binaghi, P. Madella, M. G. Montesano y A. Rampini: *Fuzzy contextual classification of multisource remote sensing images*. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing 35:326–339 (1997).
- [20] J. P. Brans, Ph. Vincke: *A preference ranking organisation method. (The PROMETHEE method for multiple criteria decision-making)*. Management Science. 31, 647–656 (1985).
- [21] D. Butnariu: *Additive fuzzy measures and integrals*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 93:436–452 (1983).

- [22] J.B. Campbell (1987). *Introductory to Remote Sensing*, The Guilford Press, New York.
- [23] A. Charnes, W. W. Cooper: *Management models and industrial applications of linear programming*. 1 John Wiley and Sons, New York, 1961.
- [24] E. Chuvieco: *Fundamentos de Teledetección Espacial*, Rialp, Madrid (1990).
- [25] J. L. Cohon, R. L. Church, D. P. Sheer: *Generating multiobjective trade-offs: an algorithm for bicriterion problems* Water Resources Research 15, 1001-1010 (1979).
- [26] T.H. Cormen, C.E. Leiserson y R.R. Rivest: *Introduction to Algorithms*. MIT Press, Cambridge, MA (1990).
- [27] V. Cutello, E. Molina y J. Montero: *Associativeness versus recursiveness*. In: Proceedings of 26-th IEEE International Symposium on Multiple-valued Logic, Santiago de Compostela, (1996); pp. 154–159.
- [28] V. Cutello, E. Molina y J. Montero: *Binary operators and connective rules*. En: M.H. Smith, M.A. Lee, J. Keller y J. Yen, Eds., Proceedings of NAFIPS'96 (North American Fuzzy Information Processing Society). IEEE Press, Piscataway, NJ (1996); pp. 46–49.
- [29] V. Cutello y J. Montero: *A characterization of rational amalgamation operations*. International Journal of Approximate Reasoning 8:325–344 (1993).
- [30] V. Cutello y J. Montero: *Fuzzy rationality measures*. Fuzzy sets and Systems 62:39–54 (1994).
- [31] V. Cutello y J. Montero: *Recursive families of OWA operators*. En: P.P. Bonissone, Ed., Proceedings of the Third IEEE Conference on Fuzzy Systems. IEEE Press, Piscataway, NJ (1994); páginas 1137–1141.
- [32] V. Cutello y J. Montero: *Hierarchical aggregation of OWA operators: basic measures and related computational problems*. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 3:17–26 (1995).

- [33] V. Cutello y J. Montero: *The computational problems of using OWA operators*. En: B. Bouchon-Meunier, R.R. Yager y L.A. Zadeh, Eds., *Fuzzy Logic and Soft Computing*. World Scientific, Singapore (1995); páginas 166–172.
- [34] V. Cutello y J. Montero: *Information and aggregation: ethical and computational issues*. En: D. Ruan, Ed., *Fuzzy Sets Theory and Advanced Mathematical Applications*. Kluwer, Boston (1995); páginas 175–198.
- [35] V. Cutello y J. Montero: *Non deterministic fuzzy classification systems*. En: FUZZ-IEEE'97. IEEE Press, Piscataway, NJ (1997); vol. 3, páginas 1689–1694.
- [36] V. Cutello y J. Montero: *Recursive connective rules*. Int. J. Intelligent Systems 14, 3–20 (1999).
- [37] H. Dyckoff: *Basic concepts for a theory of evaluation: hierarchical aggregation via autodistributive connectives in fuzzy set theory*. European Journal of Operational Research 20:221–233 (1985)
- [38] H. Dyckoff y W. Pedrycz: *Generalized means as model of compensative connectives*. Fuzzy sets and Systems 14:143–154 (1984).
- [39] J.P. Doignon y J. Mitas: *Dimension of valued relations*. European Journal of Operational Research 125:571–587 (2000).
- [40] J. Dombi: *Basic concepts for a theory of evaluation: the aggregative operator*. European Journal of Operational Research, 10:282–293 (1982).
- [41] J. Dombi: *A general class of fuzzy operators, the De Morgan class of fuzzy operators and fuzziness measures induced by fuzzy operators*. Fuzzy Sets and Systems 8:149–163 (1982).
- [42] D. Dubois y H. Prade: *Fuzzy Sets and Systems*. Academic Press, New York (1980).
- [43] D. Dubois y H. Prade. *Ranking fuzzy numbers in setting of possibility theory*. Inform. Sci. 30 (1983) 183-224

- [44] D. Dumitrescu: *Fuzzy partitions with the connectives  $T_\infty, S_\infty$* . Fuzzy Sets and Systems 47, 193–195 (1992).
- [45] B. Dushnik y E.W. Miller: *Partially ordered sets*. American Journal of Mathematics 63:600–610 (1941).
- [46] B. S. Everitt *Cluster analysis*. 1993.
- [47] P. C. Fishburn *Utility theory for decision making*. New York: Wiley (1970).
- [48] J. C, Fodor (1991). Strict preference relations based on weak t-norms, *Fuzzy Sets and Systems* **43**, pp. 327–336.
- [49] J. C, Fodor (1992). An axiomatic approach to fuzzy preference modelling, *Fuzzy Sets and Systems* **52**, pp. 47–52.
- [50] J. C. Fodor (1993). On contrapositive symmetry of implications in fuzzy logic, Proceedings of the First European Congress on Fuzzy and Intelligent Technologies, Aachen Verlag der Augustinus Buchhandlung, pp. 1342-1348.
- [51] J. C. Fodor (1993). A new look at fuzzy connectives, *Fuzzy Sets and Systems*, **57**, pp. 141-148.
- [52] J.C. Fodor, J.L. Marichal y M. Roubens: *Characterization of the ordered weighted averaging operators*. Institut de Mathématique, Université de Liège, Prépublication 93.011.
- [53] J.C. Fodor y M. Roubens: *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*. Kluwer, Dordrecht (1994).
- [54] J.C. Fodor y M. Roubens: *Valued preference structures*. European Journal of Operational Research 79:277–286 (1994).
- [55] J.C. Fodor y M. Roubens: *Structure of valued binary relations*. Mathematical Social Sciences 30:71–94 (1995).
- [56] J.C. Fodor, R.R. Yager y A. Rybalov: *Structure of uninorms*. Int. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 5:411–427 (1997).

- [57] G.M. Foody: *The continuum of classification fuzziness in thematic mapping*. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing 65:443–451 (1999).
- [58] M.C. Golumbic: *Algorithmic graph theory and perfect graphs*. Academic Press, New York (1980).
- [59] S. Gopal y C. Woodcock: *Theory and Methods for accuracy assessment of thematic maps using fuzzy sets*. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing 60:181–188 (1994).
- [60] D. Gómez, J. Montero, J. Yáñez, J. González-Pachón y V. Cutello: *Crisp dimension theory and valued preference relations*. Submitted
- [61] J. González-Pachón y S. Ríos-Insua: *A method for searching rationality in pairwise choices*. En: Fandel, G. and Gal, T. (Eds.), *Multiple Criteria Decision Making*, LNEMS 448, Springer (1997), páginas 374-382.
- [62] J. González-Pachón y S. Ríos-Insua: *Mixture of maximal quasi orders: a new approach to preference modelling*. Theory and Decisions 47:73–88 (1999).
- [63] J. González-Pachón, D. Gómez, J. Montero y J. Yáñez: *Searching for the dimension of binary valued preference relations*. International Journal of Approximate Reasoning. To appear.
- [64] J. González-Pachón, D. Gómez, J. Montero y J. Yáñez: *Soft dimension theory*. Fuzzy Sets and Systems. To appear
- [65] G.H. Hardy, J.E. Littlewood y G. Polya: *Inequalities*. Cambridge U.P. (1954).
- [66] I. Iancu: *Connectives for fuzzy partitions*. Fuzzy Sets and Systems 101:509–512 (1999).
- [67] J. R. Jensen: *Introductory digital image processing*. 1986 Prentice-Hall.
- [68] A. Kaufmann Introduction à la théorie des sous-ensembles flous, 1. Éléments théoriques de base. Masson et Cie, Paris, France, (1973).

- [69] E. E. Kerre. *A deeper look on fuzzy numbers from a theoretical as well as from a practical point of view*. in: M. M. Gupta and T. Yamakawa; Eds : Fuzzy Logic in Knowledge Based Systems, Decision and Control. (Elsevier, Amsterdam, 1979) 153-164.
- [70] L. Kóczy *Fuzzy graphs in the evaluation and optimization of networks*. Fuzzy sets and systems; 46, (1992) 307-319.
- [71] G.J. Klir y T.A. Folger: *Fuzzy sets, Uncertainty and Information*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ (1988).
- [72] T.C. Koopmans: *Representation of preference ordering with independent components of consumption*. En: C.B. McGuire y R. Radner, Eds., *Decision and Organization*. North-Holland, Amsterdam (1972); páginas 57–78 (2nd edition by the University of Minnesota Press, 1986).
- [73] K.T. Mak: *Coherent continuous systems and the generalized functional equation of associativity*. Mathematics of Operations Research, 12:597–625 (1987).
- [74] J. A. Marglin : *Public Investment Criteria*. MIT press, Cambridge, Massachusetts, 1967.
- [75] C. Marichal and J.P. Brans: *The GDSS Promethee Procedure*. Journal of Decision Systems 7:283–307 (1988).
- [76] J.L. Marichal, P. Mathonet y E. Tousset: *Characterization of some aggregation functions stable for positive transformations*. Fuzzy Sets and Systems 102:293–314 (1999).
- [77] B. Mareschal y J.P. Brans: *Geometrical representation for MCDA*. European Journal of Operational Research 34:67-77 (1988).
- [78] M. Mas, G. Mayor, J. Suñer y J. Torrens: *Generation of multi-dimensional aggregation functions*. Mathware and Soft Computing 5:233–242 (1998).
- [79] S. Medasani, J. Kim y R. Krishnapuram: *An overview of membership function generation techniques for pattern recognition*. Int. J. Approximate Reasoning 19:391–417 (1998).



- [80] F. Melgani, A.R. Bakir, A. Hashemy y S.M.R. Taha: *An explicit fuzzy Supervised classification method for multispectral remote sensing images*. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing 38:287–295 (2000).
- [81] K. Menger (1979). *Selected Papers in Logic and Foundations, Didactics, Economics* (Reidel, Dordrecht).
- [82] R. Mesiar: *Aggregation operators: some classes and construction methods*. En: Proceedings Eight International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (2000); páginas 707–711.
- [83] R. Mesiar y B. De Baets: *New construction methods for aggregation operators*. En: Proceedings Eight International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (2000); páginas 701–710.
- [84] J. Montero: *A note on Fung-Fu's theorem*. Fuzzy Sets and Systems 17:259–269 (1985).
- [85] J. Montero: *Comprehensive fuzziness*. Fuzzy Sets and Systems 20:79–86 (1986).
- [86] J. Montero: *Extensive fuzziness*. Fuzzy Sets and Systems 21:201–209 (1987).
- [87] J. Montero: *Arrow's theorem under fuzzy rationality*. Behavioral Science 32:267-273 (1987).
- [88] J. Montero: *Aggregation of fuzzy opinions in a non-homogeneous group*. Fuzzy Sets and Systems 25:15–20 (1988).
- [89] J. Montero: *Rational aggregation rules*. Fuzzy Sets and Systems 25:15–20 (1988).
- [90] J. Montero y M. Mendel: *Crisp acts, fuzzy decisions*. En: E. Barro, A. Bugarín y A. Sobrino, Eds., *Advances in Fuzzy Logic*. Universidade de Santiago de Compostela, Santiago (1998); páginas 219–238.
- [91] J. Montero y J. Tejada: *Some problems on the definition of fuzzy preference relations*. Fuzzy Sets and Systems 20:45–53 (1986).

- [92] J. Montero y J. Tejada (1986). Fuzzy preferences in decision making, en B. Bouchon y R.R. Yager (editores), *Uncertainty in Knowledge-based Systems* (Springer Verlag, Berlin), pp. 144–150
- [93] J. Montero, J. Tejada y V. Cutello: *A general model for deriving preference structures from data*. European Journal of Operational Research 98:98–110 (1997).
- [94] J. Montero, J. Yáñez y V. Cutello: *On the dimension of fuzzy preference relations*. Proceedings International ICSC Symposium on Engineering of Intelligent Systems, University of La Laguna (1998); vol. 3, páginas 38–33.
- [95] J. Montero, J. Yáñez, D. Gómez y J. González-Pachón: *Consistency in dimension theory*. Proceedings of the Workshop on Preference Modelling and Applications (2001); páginas 93-98.
- [96] J. Montero, J. Yáñez, D. Gómez J. Glez-Pachón y V. Cutello: *Underlying criteria in valued preference criteria Referencia: Computational Intelligence Systems for Applied Research*. D. Ruan, P. D'hont, E. Kerre, eds.(World Scientific, Singapore); pp. 89-96.
- [97] J. Montero, J. Yáñez y J. González-Pachón: *Searching for the dimension of a fuzzy preference relation*. Proceedings EURO Conference (2000); páginas 16–19.
- [98] S.V. Ochinnikov: *Representation of transitive fuzzy relations*. En: H.J. Skala, S. Termini and E. Trillas (eds.), *Aspects of Vagueness*, Reidel, Amsterdam (1984); páginas 105–118.
- [99] S. Ovchinnikov (1983). General negations in fuzzy set theory, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **92**, pp. 234–239.
- [100] S.V. Ovchinnikov y M. Roubens: *On strict preference relations*. Fuzzy Sets and Systems 43:319–326 (1991).
- [101] P. M. Pardalos, T. Mavridou, J. and Xue The Graph Coloring Problem: A Bibliographic Survey. In: Du, D.-Z., and Pardalos, P.M. (Eds.). *Handbook of Combinatorial Optimization*, vol. 2 (Kluwer Academic Publishers, Boston, 1998), pp. 331-395.

- [102] P.K. Pattanaik: *Voting and Collective Choice*. Cambridge U.P., London (1971).
- [103] A.D. Pearman, J. Montero y J. Tejada: *Fuzzy multicriteria decision support for budget allocation in the transport sector*. TOP 3:47–68 (1995).
- [104] J. Ramírez: *Extensiones del Problema de Coloración de Grafos*. Thesis. Universidad Complutense de Madrid. Madrid, Spain, 2001.
- [105] J. A. Richards: *Remote sensing digital image. Analysis*. 1986. Springer-Verlag.
- [106] D. Rios Insua: *Sensitivity analysis in multiobjective decision making*. New York: Springer (1990).
- [107] C. Robinove: *The logic of multispectral classification and mapping the land*. Remote Sensing of Environment. 11 (1981), 231-244.
- [108] C. Romero: *Teoría de la decisión multicriterio: Conceptos, técnicas y aplicaciones*. Alianza Universidad Textos. Madrid (1993)
- [109] A. Rosenfeld: *Fuzzy graphs*. In: Zadeh, L.A. Fu, K.S., and Shimura, M., eds, *Fuzzy sets and their applications to cognitive and decision processes*, Academic Press New York, (1975) 77-95.
- [110] M. Roubens: *Pattern classification problems and fuzzy sets*. Fuzzy Sets and Systems 1:239–253 (1978).
- [111] M. Roubens y Ph. Vincke: *Preference Modelling*. Springer-Verlag, Berlin (1985).
- [112] B. Roy: *Un algorithme de classements fondé sur le une représentation floue des preferences en présence de critères multiples (la méthode ELECTRE)*. Revue Française d’Informatique et de Recherche Opérationnelle 8:57–75 (1968).
- [113] B. Roy: *Decision aid and decision making*. European Journal of Operational Research 45:324–331 (1990).
- [114] B. Roy: *Decision Science or decision-aid science*. European Journal of Operational Research 66:184–203 (1993).

- [115] E.H. Ruspini: *A new approach to clustering*. Information and Control 15:22–32 (1969).
- [116] A. Salski, O. Fränze y P. Kandzia: *Fuzzy Logic in Ecological Modelling* (Special issue). Ecological Modelling 85 (1995).
- [117] A.K. Sen: *Collective Choice and Social Welfare*. Holden-Day, San Francisco (1970).
- [118] B. Schweizer y A. Sklar: *Probabilistic Metric Spaces*. North-Holland, New York (1983).
- [119] G. Shafer: *Savage revisited (with discussion)*. Statistical Science 1:463–501 (1986).
- [120] G. Shafer: *Rejoinders to comments on "Perspectives on the theory and practice of belief functions"*. Int. J. Approximate Reasoning 6:445–480 (1992).
- [121] D.S. Simonett (1966). Present and Future Needs of Remote Sensing in Geography, *Proceedings of the Fourth International Symposium on Remote Sensing of Environment*. Ann Arbor: University of Michigan, pp.37-47.
- [122] J. Siskos, J. Lochard, y J. Lombard: *A multicriteria decision making methodology under fuzzyness: Application to the evaluation of radiological protection in nuclear power plants*. 216-283 in H. J. Zimmerman, L. A. Zadeh and B.R. Gaines (eds.) *Fuzzy Sets and decision analysis*, North Holland, Amsterdam.
- [123] Y. Siskos y A. Spyridakos: *Intelligent multicriteria decision support: overview and perspectives*. European Journal of Operational Research 113:236–246 (1999).
- [124] B. Schweizer y A. Sklar (1983). *Probabilistic Metric Spaces*, North-Holland, Amsterdam.
- [125] K. Stone, Developing Geographical Remote Sensing. Capítulo 1 de *Remote sensing: Techniques for Environmental Analysis*
- [126] E. Szpilrajn: *Sur l'extension de l'ordre partiel*. Fundamenta Mathematicae 16:386–389 (1930).

- [127] H. Thiele: *A characterization of Ruspini-partitions by similarity relations*. Proceedings Information Processing and Management of Uncertainty Conference (1996); páginas 389–394.
- [128] H. Thiele: *A characterization of arbitrary Ruspini-partitions by fuzzy similarity relations*. Proceedings FUZZ-IEEE conference (1997); páginas 131–134.
- [129] E. Trillas: *Sobre funciones de negacion en la teoria de conjuntos difusos*. Stochastica 3:47–59 (1979).
- [130] W.T. Trotter: *Combinatorics and Partially Ordered Sets; Dimension Theory*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London (1992).
- [131] L. Valverde: *On the structure of F-indistinguishability operators*. Fuzzy Sets and Systems 17:313–328 (1985).
- [132] S. Weber (1983). A general concept of fuzzy connectives, negations and implications based on t-norms and t-conorms, *Fuzzy Sets and Systems* **11**, pp. 115–134.
- [133] R.R. Yager (1980). On the measure of fuzziness and negation II. Lattices., *Information and Control* **44**, pp. 236–260.
- [134] R.R. Yager (1987). Quasi-associative operations in the combination of evidence, *Kybernetes* **16**, pp. 37–41.
- [135] R.R. Yager: *On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making*. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 18:183–190 (1988).
- [136] R.R. Yager: *Families of OWA operators*. Fuzzy Sets and Systems 59:125–148 (1993).
- [137] R.R. Yager: *MAM and MOM operators for aggregation*. Information Sciences 69:259–273 (1993).
- [138] R.R. Yager: *Aggregation operators and fuzzy systems modeling*. Fuzzy Sets and Systems 67:129–145 (1994).

- [139] R.R. Yager: *Fusion of ordinal information using weighted median aggregation*. Int. J. Approximate Reasoning 18:35–52 (1998).
- [140] R.R. Yager y A. Rybalov: *Uninorm aggregation operators*. Fuzzy Sets and Systems 80:111–120 (1996).
- [141] M. Yannakakis: *On the complexity of the partial order dimension problem*. SIAM Journal of Algebra and Discrete Mathematics 3:351–358 (1982).
- [142] J. Yáñez y J. Montero: *A poset dimension algorithm*. Journal of Algorithms 30, 185–208 (1999).
- [143] P. L. Yu: *A class of solutions for group decision problems*. Management Science. 19, 936-946, (1973)
- [144] M. Zeleny: *A Concept of compromise solutions and the method of the displaced ideal*. Computers and Operations Research. 1 479-496 (1974).
- [145] M. Zeleny: *Compromise programming. Multi Criteria Decision Making (J. L. Cochrane and Zeleny editores)*. University of South Carolina Press. Columbia, 262-301 (1973)
- [146] L.A. Zadeh: *Optimality and non-scalar - valued performance criteria*. IEEE Transactions of Automatic Control 8:59–60 (1963).
- [147] L.A. Zadeh: *Fuzzy Sets*. Information and Control 8:338–353 (1965).
- [148] L.A. Zadeh: *Similarity relations and fuzzy orderings*. Information Science 3:177–200 (1971).
- [149] L.A. Zadeh: *Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes*. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 1:28–44 (1973).
- [150] S. Ziont y J. Wallenius: *An interactive programming method for solving the multicriteria problem*. Management Science 21, 1387-1396, (1976).