Dos Problemas en Espacios de Banach reales: Complejificaciones y Desigualdades de Bernstein-Markov.

Gustavo Adolfo Muñoz Fernández

Memoria presentada para aspirar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas dirigida por los profesores:
José Luis González Llavona y Yannis Sarantopoulos.

Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

Octubre, 1999

Índice General

Agradecimientos.

Quisiera manifestar mi gratitud a un buen número de personas sin cuya ayuda esta tesis jamás habría tenido lugar. Mi primer agradecimiento va dirigido a mi familia y a mi novia Marta. Ellos han sido sin duda los primeros en estar ahí. De ninguna de las maneras me olvidaré de mi buen amigo Pedro Sánchez Ballesteros, sin cuyas enseñanzas no me habría dedicado a las matemáticas. Tampoco me quiero olvidar de mis buenos profesores Juan Antonio Jiménez y Pedro González. Gracias también a José Luis González Llavona, quien me introdujo en la teoría de polinomios en espacios de Banach junto con Séan Dineen. Gracias por tu apoyo constante y por la confianza que depositaste en mi. Agradezco también a A. Tonge por su ayuda durante mis dos estancias en Kent State University, donde tuve el placer de trabajar con él y con Y. Sarantopoulos en el estudio de la teoría de complejificaciones que presentamos en la primera parte de esta memoria. Por encima de todo quisiera agradecer a Y. Sarantopoulos por su paciencia conmigo, por su generosidad tanto en el trabajo como en el trato personal, por los infinitos favores prestados desde el primer momento hasta el mismísimo último suspiro en la redacción de esta memoria, por transmitirme ese tesón inquebrantable que hay que mantener en el trabajo. No quiero olvidarme tampoco de su inestimable ayuda durante mi primera estancia en Kent ni de su increíble hospitalidad durante mi estancia en Atenas, donde además pudimos desarrollar parte del contenido de la segunda parte de la memoria. No sólo me has dado la oportunidad de aprender matemáticas, también he podido conocer a una buena persona.

Hago extensivo mi agradecimiento a todos los miembros del Departamento de Análisis por permitirme investigar en un ambiente inmejorable. En particular, quisiera agradecer a José Luis Gámez por estar siempre solícito a prestar ayuda con los ordenadores. Para finalizar agradezco al Proyecto DGYCT PB 93-0452 y a la Dirección General de la Comunidad de Madrid por subvencionar este trabajo.

Introducción.

Esta tesis puede enmarcarse en el ámbito de la teoría de polinomios en espacios de Banach. No obstante, el lector comprobará que las conexiones con la teoría de la aproximación son numerosas.

La memoria se encuentra dividida en dos partes. En un principio la teoría de las complejificaciones desarrollada en la primera parte estaba pensada en cierta medida para servir de herramienta en la resolución de problemas específicos en espacios de Banach reales, a partir de resultados conocidos en espacios de Banach complejos. En la segunda parte de la memoria se plantea determinar estimaciones óptimas de las normas de las derivadas de un polinomio en un espacio de Banach real. Sabiendo que en el caso complejo se conocen con valores óptimos algunas estimaciones de este tipo, se podría intentar aplicar la técnica de las complejificaciones para estudiar el caso real. Sin embargo el rendimiento de esta estrategia no ha sido el esperado. Esto no supone en modo alguno una pérdida de interés en la teoría de las complejificaciones. Por otro lado, los problemas propuestos en la segunda parte pueden estudiarse con resultados razonablemente buenos mediante la aplicación de otras técnicas. Como consecuencia de todo esto, las dos partes de la memoria resultan ser casi independientes.

En el primer capítulo de la memoria realizamos un breve sumario de los resultados más elementales sobre la teoría de polinomios en espacios de Banach, productos tensoriales e ideales de Banach que serán usados en capítulos posteriores. Este capítulo no aporta nada nuevo. Tampoco pretende ser una referencia sobre los temas anteriormente citados para el lector, que por otro lado, se le supone al tanto de todo lo que en él se dice. Con este primer capítulo se pretende simplemente dar a la tesis una idea de completitud y de trabajo autocontenido.

En la primera parte de la tesis realizamos un estudio de los procesos que nos permiten interpretar de forma satisfactoria un espacio de Banach real como subespacio real de un espacio de Banach complejo. Los resultados originales que allí se exponen son en gran medida el fruto de la colaboración científica con Y. Sarantopoulos y

A. Tonge [**46**]. Algunos resultados de esta parte también se recogen en [**48**]. La temática estudiada en esta primera parte coincide con la de la tesis doctoral de P. Kirwan [**35**]. Esta coincidencia es extensible a parte del contenido de ambos trabajos. Este hecho se debe a una mera coincidencia y se puede asegurar sin ningún género de duda que ambos trabajos son totalmente independientes.

Desde un punto de vista algebraico, la *complejificación* de un espacio vectorial real E se puede llevar esto a cabo en términos de pares ordenados de forma sencilla. Basta darse cuenta de que el espacio $E \times E$ se convierte en un espacio vectorial complejo si definimos la adición mediante

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v) \quad \forall x, y, u, v \in E, \tag{S}$$

y el producto externo por

$$(a + ib)(x, y) = (ax - by, bx + ay) \quad \forall x, y \in E, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{P}$$

Esta es básicamente la única definición posible de complejificación a nivel algebraico, no obstante las posibilidades se multiplican a la hora de considerar la *complejificación* de la norma de un espacio de Banach real. Si la estructura del espacio lo permite, por ejemplo si el espacio se trata de un retículo de Banach real, existe un procedimiento estándar que nos permite obtener su versión compleja. Efectivamente, si E es un retículo de Banach real, entonces la expresión

$$\|(x, y)\| = \|(|x|^2 + |y|^2)^{\frac{1}{2}}\| \quad \forall x, y \in E,$$

donde la parte derecha se define en términos del cálculo funcional (véase por ejemplo [**20**, p. 326]) representa una norma compleja y completa en $E \times E$ muy especial: El espacio $E \times E$ dotado de esta norma constituye la versión compleja de E. Para espacios de Banach reales arbitrarios, también se puede usar el cálculo funcional para definir la complejificación de su norma recurriendo al hecho de que todo espacio de Banach es subespacio de un cierto retículo, en particular de $C(B_{E^*}^{w^*})$, siendo $B_{E^*}^{w^*}$ la bola unidad de E^* con la topología débil* (w^*). Es así como surge nuestro primer ejemplo de procedimiento natural de complejificación: el procedimiento de Taylor. En realidad se pueden definir infinitos procedimientos que como el de Taylor, nos permiten extender la norma de un espacio de Banach real a su complejificación de forma conveniente.

La idea de asociar a cada espacio de Banach real un espacio de Banach complejo está motivada por la riqueza del análisis complejo y tiene como principal objetivo el adaptar en la medida de lo posible las técnicas complejas en la resolución de problemas en un contexto real. El estudio de las funciones analíticas en un espacio de Banach es un problema de interés en el que las técnicas complejas juegan un papel decisivo. La complejificación de un espacio de Banach real nos ofrece la posibilidad de usar técnicas complejas en la demostración de resultados para funciones analíticas reales. La idea es básicamente la siguiente: Supongamos que E yF son dos espacios de Banach reales y que $\widetilde{E}$ y $\widetilde{F}$ son dos complejificaciones de E y F respectivamente. Si f es una función analítica en un entorno de $x_0 \in E$ con valores en F, entonces existe $\epsilon > 0$ tal

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x - x_0),$$

para todo $x \in x_0 + \epsilon E$, siendo P_n ($n \in \mathbb{N}$) un polinomio homogéneo de grado n en E con valores en F y P_0 una función constante. Si es posible extender los polinomios P_n ($n \in \mathbb{N}$) al espacio $\widetilde{E}$ sin perder control de su norma, entonces la función f podrá verse en todo momento como la restricción de una función holomorfa en un cierto entorno de x_0 en $\widetilde{E}$, a un entorno de x_0 en E. El control sobre la norma de las extensiones está asegurado en algunas situaciones (véase [**66**, Theorem 4.2]). En esta disertación no nos limitaremos a desarrollar las bases de una teoría general de complejificaciones de espacios de Banach, también estudiaremos el problema de la variación de la norma de un polinomio o una aplicación multilineal definidos en un espacio de Banach real cuando se consideran sus extensiones a una complejificación del espacio donde se definen.

En un principio, la motivación que nos condujo al estudio de los procesos de complejificación fue la obtención de constantes de polarización óptimas para espacios de Banach reales, a partir de las estimaciones conocidas para espacios de Banach complejos. La aplicación directa de las técnicas de complejificación no siempre aporta resultados óptimos en este sentido, no obstante el estudio de los procesos de complejificación tiene un interés intrínseco innegable como lo demuestra la profusión con que han sido usados por numerosos autores. A título de ejemplo mencionaremos los trabajos de A. Alexiewicz y Orlicz [**1**], C. Benítez, Y. Sarantopoulos y A. Tonge [**8**], J. Bochnak [**14**], J. Bochnak y J. Siciak [**15**] y A. E. Taylor [**66**].

La primera parte de la tesis se encuentra a su vez dividida en dos capítulos. En el primero (capítulo 2 de la tesis), se desarrollan las herramientas básicas de la teoría. Comenzamos dando una definición más general de complejificación a nivel algebraico que la dada en términos de pares ordenados en esta introducción. Si E es un espacio vectorial real, su complejificación algebraica es un espacio vectorial complejo $\widetilde{E}$ tal que E es subespacio real de $\widetilde{E}$ y $\widetilde{E} = E \oplus iE$ (véanse los Axiomas (C1) y (C2)). Haremos hincapié en que la complejificación algebraica es única *salvo isomorfismos, no obstante veremos también que será de utilidad interpretar la* complejificación desde diversos puntos de vista. Así hablaremos de complejificación por pares ordenados, por productos tensoriales o por operadores lineales.

La complejificación de un espacio de Banach no es tan obvia en el sentido de que las posibilidades ahora son infinitas. Si E es un espacio de Banach real, entre todas las normas que se pueden definir en $\widetilde{E}$ calificaremos de *razonables* sólo aquellas que satisfagan ciertas condiciones naturales, a saber, que la norma compleja en $\widetilde{E}$ sea una extensión de la norma de E y que preserve la norma del conjugado de los elementos de $\widetilde{E}$ (véanse los Axiomas (NR1) y (NR2)). Esta segunda condición parece ser la única diferencia entre el concepto de norma de complejificación razonable de P. Kirwan y el nuestro. El primer ejemplo de norma razonable que encontramos se debe a A. E. Taylor. Su definición vino a enmendar una interpretación errónea de la función $n_2(x+iy) = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ como norma compleja en $\widetilde{E}$. La definición de la norma de Taylor (véase la Definición 2.5) presenta la peculiaridad de no depender de ninguna característica del espacio de Banach que complejifica. Además, los operadores lineales entre dos espacios de Banach E y F se pueden extender a operadores lineales entre $\widetilde{E}$ y $\widetilde{F}$ sin alteración de su norma, cuando se considera la complejificación de Taylor en ambos espacios (Axioma (PC)). La norma de Taylor resulta ser nuestro primer ejemplo de *procedimiento natural de complejificación* (véase la Definición 2.16).

Usando las distintas interpretaciones de la complejificación de un espacio vectorial real, se pueden obtener otros ejemplos de procedimientos naturales de complejificación. Se verá que las normas tensoriales y las normas de ideales de operadores definen procedimientos naturales de complejificación. Así, se verá que entre los procedimientos de complejificación notables, el *procedimiento de Taylor* procede de la norma tensorial inyectiva, el *procedimiento de Bochnak* procede de la norma tensorial proyectiva y que el *procedimiento de Lindenstrauss-Tzafriri* deriva de la norma del ideal de operadores continuos.

En este capítulo estudiamos también relaciones entre normas razonables. Si E es un espacio de Banach real, se prueba que existe una norma razonable en $\widetilde{E}$ mínima (la norma de Taylor) y una norma razonable máxima (la norma de Bochnak). Se prueba también que todas las normas razonables en $\widetilde{E}$ son equivalentes.

El capítulo se cierra con el estudio de dos cuestiones. Por un lado se investiga si todo espacio de Banach complejo es la complejificación de un cierto espacio de Banach real de acuerdo con los Axiomas (NR1) y (NR2). Por otro lado se estudia si son intercambiables las operaciones de dualidad y complejificación para un procedimiento natural de complejificación dado. Se verá mediante un ejemplo no trivial de N. J. Kalton que la respuesta a la primera cuestión es negativa. En cuanto al segundo problema, veremos que sólo es cierto bajo condiciones muy restrictivas (véase la Proposición 2.51).

El segundo capítulo de la primera parte (tercer capítulo de la tesis), está dedicado al estudio de la variación de la norma de un operador multilineal o un polinomio definidos entre espacios de Banach reales, cuando se consideran sus extensiones a las complejificaciones de los espacios donde se definen. El capítulo comienza por estudiar el problema de la complejificación de operadores multilineales y polinomios desde un punto de vista algebraico. Un resultado elemental (véase por ejemplo [**15**] y [**66**]), demuestra que tanto los operadores multilineales como los polinomios entre espacios vectoriales reales se pueden extender de forma única a las complejificaciones de los espacios donde están definidos. Las fórmulas (3.2) y (3.3) muestran la forma que han de tener estas extensiones para operadores multilineales y polinomios homogéneos respectivamente. Una simple inspección de estas fórmulas revela que la complejificación de un operador multilineal continuo o un polinomio en un espacio de Banach siguen siendo continuas sea cual sea la complejificación usada en los espacios de Banach considerados. Nuestro problema consistirá en evaluar la razón entre la norma de los operadores reales y los complejificados, que naturalmente dependerá de la complejificación que se use. El primer resultado de la Sección 2 simplifica el estudio para operadores con valores escalares al probar que para calcular la norma de la complejificación de una forma multilineal o un polinomio homogéneo con valores escalares basta con estudiar su parte real o imaginaria (véase la Proposición 3.8). Este resultado será usado frecuentemente a lo largo de la Sección 2 del capítulo. En uno de los resultados principales del capítulo, se establece una estimación general óptima para las normas de las complejificaciones de las componentes homogéneas de mayor grado de un polinomio (véase la Proposición 3.15). En concreto, si E es un espacio de Banach real, ν un procedimiento natural de complejificación y $P = P_n + P_{n-1} + \ldots + P_0 : E \to \mathbb{R}$ es un polinomio, siendo P_k un polinomio k-homogéneo para cada $1 \leq k \leq n$ y P_0 una constante, entonces $\|\widetilde{P}_n\|_\nu \leq 2^{n-1}\|P\|$ $(n \geq 1)$ y $\|\widetilde{P}_{n-1}\|_\nu \leq 2^{n-2}\|P\|$ $(n \geq 2)$. Estas estimaciones generalizan otras semejantes de C. Visser [**71**] y H.-J. Rack [**51**]. De la primera de estas desigualdades se desprende una estimación para la norma de la complejificación de un polinomio homogéneo, estimación que resulta ser óptima. También se prueba una estimación similar para formas multilineales (véase la Proposición 3.18). P.

Kirwan [**35**] ha estudiado también este tipo de desigualdades de una forma totalmente independiente. Sus demostraciones están basadas en una fórmula alternativa a (3.3) (véase la fórmula (3.25)). Mediante este procedimiento se obtienen en general peores estimaciones. Veremos que una ligera modificación de las técnicas de P. Kirwan proporciona una mejora de sus estimaciones. En cualquier caso, la mejora no proporciona las constantes óptimas.

En los resultados finales de la Sección 2 del capítulo se presentan algunas estimaciones de la norma de la complejificación de una forma multilineal y un polinomio homogéneo para procedimientos de complejificación particulares. El estudio de las formas multilineales es más sencillo. Si E es un espacio de Banach real y L es una forma multilineal en E^n, en la Proposición 3.24 damos estimaciones para la norma de $\widetilde{L}$ cuando se consideran las normas (p). Se prueba que para $p \geq 2$, estas estimaciones son óptimas. Este resultado es extensible al conjunto de normas de complejificación p-dominantes, como se muestra en la Proposición 3.29. Las estimaciones así obtenidas mejoran un resultado de P. Kirwan. Si ν es un procedimiento natural de complejificación, el valor más pequeño de la relación $\|\widetilde{L}\|_\nu/\|L\|$ para toda forma multilineal L en E^n se obtiene para el procedimiento de Bochnak. J. Bochnak probó [**14**] que $\|\widetilde{L}\|_B = \|L\|$. Por el contrario, si se usa la complejificación de Taylor, la Proposición 3.31 demuestra que no existe ningún espacio de Banach real bidimensional E para el que $\|\widetilde{L}\|_T = \|L\|$ para toda forma bilineal L en E.

El estudio de los polinomios homogéneos es más complicado. La Proposición 3.33 muestra una ligera mejora de las estimaciones generales para polinomios homogéneos cuando se consideran procedimientos 2-dominantes. Como consecuencia, se prueba que si P es un polinomio 2-homogéneo con valores escalares en un espacio de Banach real y ν es un procedimiento de complejificación 2-dominante, entonces $\|\widetilde{P}\|_\nu = \|P\|$. Por el contrario, la Proposición 3.39 muestra que esto no ocurre para ningún espacio de Banach si se usa la complejificación de Taylor. Por otro lado, los Ejemplos 3.35 y 3.36 muestran que en general la extensión de polinomios homogéneos de grado > 3 no es posible sin alterar su norma, aun usando la norma de Bochnak. El caso de los polinomios 3-homogéneos no está estudiado. Si se logra probar que éstos se pueden complejificar sin alterar su norma para un cierto procedimiento de complejificación, presumiblemente el de Bochnak, entonces se puede obtener fácilmente una caracterización de los polinomios extremales en un espacio de Banach real de dimensión 3 (véase la Observación 3.37).

En la Sección 3 del capítulo se estudian complejificaciones de polinomios no homogéneos con valores escalares. P. Erdös ha encontrado una estimación óptima de la norma de la complejificación de un polinomio en una variable (véase el Teorema 3.45). Nuestro único resultado de esta sección trata de generalizar a polinomios definidos en un espacio de Banach real este resultado (véase la Proposición 3.47). Nuestra constante difiere de la probada por P. Erdös en el caso clásico en un factor $2^{n/2}$, siendo n el grado del polinomio. Este resultado mejora una estimación de P. Kirwan [**35**, Theorem 5.6].

En la última sección del capítulo, estudiamos el caso de operadores multilineales y polinomios con valores vectoriales. La falta de un resultado como la Proposición 3.8 da cuenta de la aparición de un factor 2 en las estimaciones generales sobre la norma de la complejificación de un operador multilineal y polinomio homogéneo (véanse la Proposición 3.49 y el Corolario 3.50). Por otro lado, cuando se trata de espacios de Hilbert este factor dos se puede reducir a $\sqrt{2}$ cuando se usan procedimientos 2-dominantes, como se demuestra en la Proposición 3.52.

La segunda parte de la memoria consta de un solo capítulo (el Capítulo 4) dedicado al estudio de desigualdades de tipo Bernstein-Markov para polinomios definidos entre espacios de Banach reales. Todos los resultados originales de este capítulo se recogen en un proyecto de artículo conjunto con Y. Sarantopoulos [**47**]. Desde un punto de vista muy general, el problema se puede plantear de la siguiente manera: Dentro de la clase de los polinomios definidos en un espacio de Banach real arbitrario, acotados por una cierta mayorante dentro de la bola unidad, se buscan cotas óptimas para las normas de sus derivadas así como acotaciones puntuales de las derivadas en el interior de la bola unidad. Las estimaciones dependerán en todo momento de las mayorantes que se consideren. El caso más general, pues engloba a todos los polinomios salvo un constante de proporcionalidad, se da cuando se considera una mayorante constante que tomaremos igual a uno por comodidad. También estudiaremos casos más restrictivos como la mayorante $\varphi(t) = \sqrt{1-t^2}$.

En esta memoria se distinguirán dos problemas. En primer lugar estudiaremos el problema de determinar estimaciones de la norma de las derivadas de un polinomio en un espacio de Banach real. Este problema se conoce como *problema de Markov* gracias a la aportación realizada en su resolución por los hermanos Markov, para el caso de polinomios en una variable. El otro problema consiste en encontrar acotaciones puntuales de la norma de las derivadas de un polinomio definido en un espacio de Banach real, dentro de la bola unidad. Esto se conoce como *problema de Bernstein* por la contribución de S. Bernstein al estudio de este problema para polinomios en una variable.

La primera sección de este capítulo está dedicada a hacer recuento de los resultados conocidos en el caso clásico (en una variable) relacionados con estos problemas. Aunque no aporta ningún resultado original, puede servir de guía a un lector quizá no muy familiarizado con estos resultados. En esta sección, así como en el resto de la memoria, la norma de un polinomio p en una variable será siempre su supremo en el intervalo $[-1, 1]$ y se representará por $\|p\|_{[-1,1]}$. Hoy en día, las desigualdades de Markov en una variable (4.2) y (4.3) son referencias obligadas en muchos aspectos de la teoría de la aproximación. La desigualdad de Bernstein (4.4) también tiene un peso específico en la teoría de la aproximación. Para derivadas superiores, R. Duffin y A. C. Schaeffer han proporcionado estimaciones puntuales similares a la de Bernstein (véase la desigualdad (4.5)).

Si se consideran condiciones más restrictivas sobre los polinomios, entonces las estimaciones de los hermanos Markov y de S. Bernstein pueden mejorarse considerablemente. El profesor Turán propuso en 1970 realizar un estudio similar para la clase de los polinomios p tales que $|p(t)| \leq \sqrt{1-t^2}$ para todo $t \in [-1, 1]$. Un año más tarde Q. I. Rahman [**53**] encontró una estimación óptima para la norma de la primera derivada de estos polinomios así como estimaciones puntales de esta en el interior del intervalo $[-1, 1]$. También estudió el problema de Bernstein-Markov para los polinomios p tales que $|p(t)| \leq |t|$ para todo $t \in [-1, 1]$.

En la segunda sección del capítulo se estudian ciertas generalizaciones de los resultados clásicos. La desigualdad de Markov para la primera derivada (4.2) fue generalizada al caso de polinomios en ℓ_2^m por O. G. Kellogg (véase el Teorema 4.19). Usando técnicas complejas, M. Baran [**7**] dio una demostración alternativa del resultado de O. G. Kellogg, así como una generalización de (4.4) para el caso de polinomios en varias variables. Y. Sarantopoulos generalizó (4.2) y (4.4) para polinomios definidos en un espacio de Banach real (véase el Teorema 4.21). El problema de Markov para la derivada n-ésima de un polinomio de grado n también es generalizable a espacios de Banach reales con la misma constante que en el caso clásico si se considera el polinomio homogéneo asociado a la derivada n-ésima en vez de la propia derivada (véase la Proposición 4.30). Por esta razón, a partir de ahora y mientras no se especifique lo contrario, al hablar de la derivada k-ésima en un punto de un polinomio de grado n ($n \geq k$) en un espacio de Banach, nos referiremos a su polinomio k-homogéneo asociado. El resultado para la derivada n-ésima de un polinomio de grado n junto con el resultado de Y. Sarantopoulos para la primera derivada hacen pensar que las desigualdades conocidas en el caso clásico también se sostienen en general, conjetura establecida por L. A. Harris en el Problema 74 del

"Scottish Book" [44]. Usando técnicas de Y. Sarantopoulos, probamos que la norma de la segunda y tercera derivada de un polinomio en un espacio de Banach real está acotada por una constante que difiere en un factor $\sqrt{2}$ y $3'7941$ respectivamente de la constante encontrada en el caso clásico por los hermanos Markov (véanse las Proposiciones 4.33 y 4.35). V. I. Skalyga ha anunciado recientemente en [**64**] (aunque no disponemos de demostración) unas aproximaciones al problema de Markov para la segunda y tercera derivada, con constantes que difieren de las estimaciones de los hermanos Markov en factores $1'2327$ y $2'4$ respectivamente para valores altos de n. Por otro lado, encontramos estimaciones puntuales de la segunda y tercera derivada de un polinomio en el interior de la bola unidad (véanse las Proposiciones 4.33 y 4.35). Estas estimaciones mejoran desigualdades similares de V. I. Skalyga.

Si nos restringimos al estudio de polinomios sobre un espacio de Hilbert real, somos capaces de mejorar nuestras estimaciones anteriores para la segunda y tercera derivada. Usando técnicas diferentes, encontramos una cota superior para la norma de la segunda y tercera derivada que coincide con la estimación clásica para polinomios de una variable. También obtenemos una estimación puntual de la norma de la segunda y tercera derivada sobre la bola unidad que generaliza una desigualdad de R. Duffin y A. C. Schaeffer mencionada anteriormente (véanse las Proposiciones 4.45 y 4.47). Tenemos cierta evidencia de que las técnicas usadas pueden generalizarse a derivadas superiores. Esto probaría la ya comentada conjetura de Harris para espacios de Hilbert. Por último, y sin abandonar el caso de polinomios definidos en espacios de Hilbert reales, probamos que para derivadas altas de polinomios de grado suficientemente grande, las estimaciones clásicas de los hermanos Markov se cumplen con tanta aproximación como queramos (véase la Proposición 4.53).

En la tercera y última parte de este capítulo se estudian desigualdades de tipo Bernstein-Markov para polinomios en un espacio de Hilbert real H dominados dentro de la bola unidad por la mayorante $\varphi(x) = \sqrt{1 - \|x\|^2}$, $\forall x \in \bar{B}_H$. Los resultados posteriores generalizan los ya probados por Q. I. Rahman para el caso de polinomios en una variable (véase las Proposiciones 4.59 y 4.62).

CAPÍTULO 1

Preliminares.

En este capítulo presentamos un breve sumario de resultados estándar sobre teoría de polinomios en espacios de Banach, productos tensoriales e ideales de operadores que serán necesarios para entender las secciones posteriores. En lo sucesivo, $\mathbb{K}$ denota tanto el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ como el de los complejos $\mathbb{C}$, mientras que $\mathbb{N}$ representa el conjunto de los números naturales. Los espacios vectoriales o de Banach serán denotados con las letras mayúsculas E, F, G, H, X e Y. Siempre que sea determinante se especificará el cuerpo sobre el que están definidos, de otra forma se entenderá que pueden ser tanto reales como complejos. Los espacios de Banach clásicos se referirán con las notaciones estándar, especificando cuando sea preciso si se trata de las versiones reales o complejas. Así, usamos por ejemplo las notaciones $\ell_p(\mathbb{R})$ y $\ell_p(\mathbb{C})$ para referirnos al espacio ℓ_p real y complejo respectivamente. Cuando no haya lugar a confusión escribiremos simplemente ℓ_p.

1. Polinomios en espacios de Banach.

Desde el punto de vista algebraico, la definición que usaremos de polinomio y polinomio homogéneo entre dos espacios vectoriales (reales o complejos) es la siguiente:

Definición 1.1. Se dice que una aplicación $P : E \longrightarrow F$ es un polinomio homogéneo de grado n, o simplemente n-homogéneo, si existe una aplicación n-lineal (lineal en cada una de sus n variables) $L : E^n \longrightarrow F$ tal que P es la restricción de L a la diagonal de E^n, es decir, si $P(x) = L(x, \dots, x)$ para todo x en E. A menudo escribiremos esta relación con la notación abreviada $P = \widehat{L}$. Así, un polinomio P de grado $\leq n$ en E se define como una suma de la forma $P = P_n + P_{n-1} \dots + P_0$, siendo P_k un polinomio k-homogéneo con $1 \leq k \leq n$ y P_0 una constante.

No es difícil ver que la Definición 1.1 es equivalente al concepto de polinomio algebraico en varias variables cuando nos restringimos a espacios vectoriales de dimensión finita. En algunos casos es útil la interpretación del concepto de polinomio que acabamos de dar en términos de productos tensoriales (véase la Proposición

1.18). Si E y F son dos espacios vectoriales, usaremos las notaciones $\mathcal{P}_a({}^nE;F)$, $\mathcal{L}_a({}^nE;F)$ y $\mathcal{P}_{n,a}(E;F)$ para referirnos respectivamente al espacio de los polinomios n-homogéneos, al espacio de las aplicaciones n-lineales y al espacio de los polinomios de grado $\leq n$ entre E y F. Cuando $n=0$, convenimos en decir que los conjuntos anteriores representan las funciones constantes en E ó E^n, según proceda, con valores en F. El subíndice a hace referencia a que se trata de aplicaciones algebraicas. Si F coincide con $\mathbb{K}$, escribiremos simplemente $\mathcal{P}_a({}^nE)$, $\mathcal{L}_a({}^nE)$ y $\mathcal{P}_{n,a}(E)$ en vez de $\mathcal{P}_a({}^nE;\mathbb{K})$, $\mathcal{L}_a({}^nE;\mathbb{K})$ y $\mathcal{P}_{n,a}(E;\mathbb{K})$ respectivamente.

El primer resultado significativo que presentamos sobre teoría de polinomios en espacios vectoriales establece un isomorfismo algebraico entre el espacio de polinomios n-homogéneos y el de aplicaciones n-lineales simétricas definidos entre dos espacios vectoriales.

Definición 1.2. Sean E y F dos espacio vectoriales y sea $L \in \mathcal{L}_a(E;F)$. Entonces decimos que L es simétrica si para toda permutación σ de $(1,2,\ldots,n)$ se tiene que

$$L(x_1,\ldots,x_n) = L(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}) \quad \forall x_k \in E \ (1 \leq k \leq n).$$

Denotaremos por $\mathcal{L}_a^s({}^nE;F)$ el espacio de las aplicaciones n-lineales simétricas entre los espacios vectoriales E y F. Cuando F coincida con $\mathbb{K}$ escribiremos $\mathcal{L}_a^s({}^nE)$ en vez de $\mathcal{L}_a^s({}^nE;\mathbb{K})$.

Proposición 1.3 (Fórmula de polarización). *Sean E y F dos espacios vectoriales. Si $P \in \mathcal{P}({}^nE;F)$ es un polinomio n-homogéneo, entonces existe una única forma n-lineal simétrica $L \in \mathcal{L}({}^nE;F)$ tal que $P(x) = L(x,\ldots,x)$, $\forall x \in E$. Además, L viene dada por*

$$L(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{2^n n!}\sum \epsilon_1\cdots\epsilon_n P(\epsilon_1 x_1 + \ldots + \epsilon_n x_n), \tag{1.1}$$

para todo $x_1,\ldots,x_n \in E$, donde la suma se toma sobre las 2^n combinaciones posibles de los ϵ_k, con $\epsilon_k = \pm 1$ $(1 \leq k \leq n)$.

Corolario 1.4. *La fórmula (1.1) define un isomorfismo algebraico entre los espacios $\mathcal{P}_a({}^nE;F)$ y $L \in \mathcal{L}_a^s({}^nE;F)$.*

Definición 1.5. Dado $P \in \mathcal{P}_a({}^nE;F)$, llamaremos polar de P a la única forma n-lineal simétrica $L \in \mathcal{L}_a^s({}^nE;F)$ tal que $P = \widehat{L}$. En algunas referencias se usa la notación $L = \check{P}$.

En algunos casos es útil disponer de una fórmula de polarización diferente a la mostrada en (1.1). Sea r_k la k-ésima función de Rademacher (recuérdese que $r_k(t) = \text{sign}(\operatorname{sen} 2^n \pi t)$, $\forall t \in [0,1]$, donde sign representa la función signo). La bien conocida ortogonalidad de las funciones r_k nos permiten probar fácilmente que si $P \in \mathcal{P}_a({}^nE)$ y $L \in \mathcal{L}_a^s(E)$ es la polar de P, entonces:

$$L(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 r_1(t) \cdots r_n(t) P(r_1(t)x_1 + \ldots + r_n(t)x_n) dt, \tag{1.2}$$

para todo $x_1, \ldots, x_n \in E$.

Si E es un espacio de Banach, denotaremos con $\|\cdot\|_E$ la norma de E. Cuando no haya lugar a confusión escribiremos simplemente $\|\cdot\|$. Usaremos las notaciones B_E, $\bar{B}_E$ y S_E para referirnos respectivamente a la bola unidad abierta, a la bola unidad cerrada y a la esfera unidad del espacio E. Es decir:

$$\begin{aligned} B_E &= \{x \in E : \ \|x\| < 1\}, \\ \bar{B}_E &= \{x \in E : \ \|x\| \leq 1\}, \\ S_E &= \{x \in E : \ \|x\| = 1\}. \end{aligned}$$

Nos limitaremos a partir de ahora a estudiar operadores continuos. Así, las notaciones $\mathcal{P}_a({}^nE;F)$, $\mathcal{L}_a({}^nE;F)$, $\mathcal{L}_a^s({}^nE;F)$ y $\mathcal{P}_{n,a}(E;F)$ serán reemplazadas por $\mathcal{P}({}^nE;F)$, $\mathcal{L}({}^nE;F)$, $\mathcal{L}^s({}^nE;F)$ y $\mathcal{P}_n(E;F)$ respectivamente, cuando sólo se consideren aplicaciones continuas. De forma similar, las notaciones $\mathcal{P}_a({}^nE)$, $\mathcal{L}_a({}^nE)$, $\mathcal{L}_a^s({}^nE)$ y $\mathcal{P}_{n,a}(E)$ se sustituirán por $\mathcal{P}({}^nE)$, $\mathcal{L}({}^nE)$, $\mathcal{L}^s({}^nE)$ y $\mathcal{P}_n(E)$ respectivamente. Se comprueba que las siguientes definiciones corresponden a normas completas en los espacios $\mathcal{P}_n(E;F)$ y $\mathcal{L}({}^nE;F)$:

$$\begin{aligned} \|P\| &= \sup\{\|P(x)\|_F : \ x \in \bar{B}_E\} \quad \forall P \in \mathcal{P}_n(E;F), \\ \|L\| &= \sup\{\|L(x_1, \ldots, x_n)\|_F : \ x_1, \ldots, x_n \in \bar{B}_E\} \quad \forall L \in \mathcal{L}({}^nE;F). \end{aligned}$$

Se puede ver que con estas normas los subespacios $\mathcal{P}({}^nE;F)$ y $\mathcal{L}^s({}^nE;F)$ de $\mathcal{P}_n(E;F)$ y $\mathcal{L}({}^nE;F)$ respectivamente, son cerrados, es decir, se trata a su vez de espacios de Banach.

1.1. Constantes de polarización. Se puede probar haciendo uso de las fórmulas de polarización (1.1) o (1.2) que el isomorfismo algebraico existente entre $\mathcal{P}_a({}^nE;F)$ y $\mathcal{L}_a^s({}^nE;F)$ es un isomorfismo topológico entre $\mathcal{P}({}^nE;F)$ y $\mathcal{L}^s({}^nE;F)$. En concreto se puede establecer la siguiente desigualdad:

Teorema 1.6. *Sean E y F espacios de Banach y supongamos que $P \in \mathcal{P}(^nE;F)$ y $L \in \mathcal{L}^s(^nE;F)$ son tales que $\widehat{L} = P$. Entonces*

$$\|P\| \leq \|L\| \leq \frac{n^n}{n!}\|P\|. \tag{1.3}$$

La constante universal $n^n/n!$ no puede ser reemplazada por otra menor en general. Si $E = \ell_1^m$ ($m \in \mathbb{N}$), $F = \mathbb{K}$ y definimos el polinomio $\Phi_n \in \mathcal{P}(^n\ell_1^m)$ por $\Phi(t_1, \ldots, t_m) = t_1 \cdots t_m$, $\forall (t_1, \ldots, t_m) \in \ell_1^m$ entonces se tiene que $\|\check{\Phi}_n\| = n^n/n!\|\Phi_n\|$. El polinomio Φ_n se refiere frecuentemente en la literatura como polinomio de Nachbin.

Para espacios de Banach específicos, a menudo es posible una mejora de la desigualdad (1.3). En cualquier caso, por el Teorema de Hahn-Banach esta mejora es independiente del espacio F. Esto nos permite limitarnos al estudio de polinomios con valores escalares sin pérdida de generalidad. Las constantes óptimas en la desigualdad (1.3) para cada espacio de Banach reciben el nombre de constantes de polarización, es decir:

Definición 1.7 (Constantes de polarización). Si E es un espacio de Banach, entonces se definen sus constantes de polarización $\mathbb{K}(n;E)$ ($n \in \mathbb{N}$) por

$$\mathbb{K}(n,E) = \inf\{c > 0 : \|L\| \leq c\|\widehat{L}\|,\ \forall L \in \mathcal{L}^s(^nE)\}.$$

En general es relevante la naturaleza del cuerpo $\mathbb{K}$. El estudio de las constantes $\mathbb{K}(n,E)$ para espacios concretos constituye una línea de investigación abierta hoy en día. Para más detalles referimos al lector a **[21]**, **[27]**, **[57]** y **[69]**. En esta memoria no profundizaremos en este problema, nos limitaremos a presentar algunos resultados que serán de utilidad en capítulos posteriores.

1.2. Polinomios extremales. Según el Teorema 1.6, para cualquier espacio de Banach E se tiene que

$$1 \leq \mathbb{K}(n,E) \leq \frac{n^n}{n!}.$$

Son de un interés particular los dos casos extremos, es decir cuando $\mathbb{K}(n,E) = n^n/n!$ y cuando $\mathbb{K}(n,E) = 1$. Un ejemplo típico de espacio para el que $\mathbb{K}(n,E) = 1$ es $\ell_2(\mathbb{K})$. En general, cualquier espacio de Hilbert verifica esta propiedad (véase **[6]**, **[21]**, **[27]** y **[30]**):

Teorema 1.8. *Si H es un espacio de Hilbert (real o complejo), entonces*

$$\|L\| = \|\widehat{L}\| \quad \forall L \in \mathcal{L}^s(^nH). \tag{1.4}$$

Además, Y. Sarantopoulos y C. Benítez han probado en [**8**] que cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces la identidad (1.4) para $n = 2$, caracteriza los productos internos reales. En el caso complejo no es posible probar un resultado similar. Se puede encontrar un contraejemplo en [**27**].

El otro caso extremo (cuando $\mathbb{K}(n, E) = n^n/n!$) también ha sido estudiado tanto en el supuesto real como en el complejo. En cualquier caso, los espacios isométricos poseen las mismas constantes de polarización. Para explotar esta propiedad introducimos el concepto de distancia de Banach-Mazur y el de representabilidad finita:

Definición 1.9. Si E y F son dos espacios de Banach isomorfos, entonces se define su distancia de Banach-Mazur por

$$\mathrm{d}(E, F) = \inf\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\| : \ T \in \mathcal{L}(E; F) \text{ es un isomorfismo}\}.$$

Decimos que F está *finitamente representado* en E si para cada subespacio Y de F de dimensión finita y cada $\epsilon > 0$ existe un subespacio X de E de dimensión finita tal que $\mathrm{d}(X, Y) \leq 1 + \epsilon$.

Y. Sarantopoulos ha probado en [**58**] el siguiente resultado sobre los espacios de Banach complejos E para los que $\mathbb{C}(n, E) = n^n/n!$. Se incluye además una caracterización de los espacios de Banach complejos de dimensión n que cumplen esa propiedad:

Teorema 1.10 (Y. Sarantopoulos). *Si E es un espacio de Banach complejo tal que $\mathbb{C}(n, E) = n^n/n!$, entonces ℓ_1^n está finitamente representado en E. Es más, si E tiene dimensión n, entonces $\mathbb{C}(n, E) = n^n/n!$ si y sólo si E es isométrico a ℓ_1^n.*

En los espacios de Banach E para los que $\mathbb{K}(n, E) = n^n/n!$, los polinomios extremales tienen especial relevancia:

Definición 1.11. Si E es un espacio de Banach tal que $\mathbb{K}(n, E) = n^n/n!$, se dice que un polinomio $P \in \mathcal{P}(^nE)$ es extremal si

(E1) existen elementos $x_1, \dots, x_n \in S_E$ tales que $\check{P}(x_1, \dots, x_n) = \|\check{P}\|$, y
(E2) $\|\check{P}\| = n^n/n!\|P\|$.

Y. Sarantopoulos ha demostrado el siguiente resultado sobre polinomios extremales en espacios complejos. El resultado demuestra en particular que en $\ell_1^n(\mathbb{C})$, el único polinomio extremal (salvo una constante) es el polinomio de Nachbin Φ_n (véase [**58**]):

Teorema 1.12 (Y. Sarantopoulos). *Sea E un espacio de Banach complejo tal que $\mathbb{C}(n,E) = n^n/n!$. Si $P \in \mathcal{P}(^nE)$ es extremal y $x_1, \dots, x_n \in S_E$ son tales que $\check{P}(x_1, \dots, x_n) = n^n/n!\|P\|$, entonces el espacio generado por $x_1, \dots, x_n$ es isométrico a ℓ_1^n. Además existe una constante $c \in \mathbb{C}$ tal que*

$$\widehat{L}(z_1x_1 + \ldots + z_nx_n) = c \cdot z_1 \cdots z_n,$$

para todo $z_k \in \mathbb{C}$ $(1 \leq k \leq n)$. En particular, si E tiene dimensión n, toda forma multilineal alcanza su norma y en consecuencia E es isométrico a ℓ_1^n. Además todos los polinomios extremales de grado n en E son múltiplos del polinomio Φ_n.

El estudio de los espacios de Banach reales E tales que $\mathbb{R}(n,E) = n^n/n!$ ofrece más dificultades debido a la imposibilidad de usar las técnicas complejas. Sin embargo, el caso real ha sido estudiado recientemente en **[36]** por P. Kirwan, Y. Sarantopoulos y A. Tonge. Como en el caso complejo, para espacios de Banach reales se demuestra que si existen polinomios extremales de grado n entonces el espacio contiene copias isométricas de ℓ_1^n. Se prueba también que los polinomios extremales en espacios reales de dimensión 2 y 3 son los múltiplos de Φ_2 y Φ_3 respectivamente. No obstante, para $n > 3$ los polinomios extremales de grado n no son caracterizados por Φ_n al igual que ocurre en el caso complejo.

1.3. Constantes de polarización generalizadas. Un problema de nuestro interés, más general que el de determinar $\mathbb{K}(n,E)$ es el de estimar las constantes de polarización generalizadas:

Definición 1.13. Sea E un espacio de Banach y tomemos $n, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ con $n = n_1 + \ldots + n_k$. Entonces se define la constante de polarización generalizada $\mathbb{K}(n_1, \dots, n_k; E)$ como

$$\mathbb{K}(n_1,\dots,n_k;E) := \inf\{c : |L(x_1^{n_1},\dots,x_k^{n_k})| \leq c\|\widehat{L}\|,\ L \in \mathcal{L}^s(^nE),\ x_1,\dots,x_k \in B_E\},$$

donde $L(x_1^{n_1}, \dots, x_k^{n_k})$ denota $L(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{n_1 \text{ veces}}, \dots, \underbrace{x_k, \dots, x_k}_{n_k \text{ veces}})$.

Nuestro interés por las constantes de polarización generalizadas se verá en el Capítulo 4, ya que proporcionan estimaciones precisas de la norma de la derivada de un polinomio homogéneo.

Sea $P \in \mathcal{P}_n(E;F)$, entonces para cada $x \in E$, $D^{(k)}P(x)$ $(2 \leq k \leq n)$ denota la derivada Fréchet k-ésima de P en x, mientras que $\widehat{D}^{(k)}P(x)$ $(2 \leq k \leq n)$ representa el polinomio k-homogéneo asociado a $D^{(k)}P(x)$ $(2 \leq k \leq n)$. La primera derivada Fréchet de P en x se representa simplemente por $DP(x)$, aunque también usaremos al notación gradiente $\nabla P(x)$ en espacios de dimensión finita. Como ya dijimos en la introducción, al hablar de la derivada k-ésima de un polinomio $P \in \mathcal{P}_n(E)$ $(n \geq k)$ en un punto $x \in E$, nos referiremos frecuentemente a $\widehat{D}^{(k)}P(x)$ en vez de a $D^{(k)}P(x)$.

La conexión entre el problema de estimar las constantes de polarización generalizadas para un espacio de Banach y el de acotar la norma de la derivada de un polinomio homogéneo definido sobre el mismo espacio se evidencia en el siguiente resultado:

Proposición 1.14. *Sea E un espacio de Banach (real o complejo). Entonces*

$$D^{(k)}P(x)y_1\dots y_k = k!\binom{n}{k}L(x^{n-k}, y_1, \dots, y_k) \quad \forall x, y_1, \dots, y_k \in E.$$

En particular

$$\widehat{D}^{(k)}P(x)y = k!\binom{n}{k}L(x^{n-k}y^k) \quad \forall x, y \in E.$$

La determinación de las constantes $\mathbb{K}(n_1, \dots, n_k; E)$ representa niveles de dificultad diferentes según sea $\mathbb{K}$ el cuerpo de los números reales o los complejos. Las técnicas complejas permiten obtener resultados óptimos en general. L. A. Harris ha encontrado en **[27]** el valor óptimo de $\mathbb{C}(n_1, \dots, n_k; E)$ en general, para cada espacio de Banach complejo E y cada k-tupla de números naturales $(n_1, \dots n_k)$ (véase también **[28]**):

Teorema 1.15 (L. A. Harris). *Sea E un espacio de Banach complejo y sean $n_1, \dots, n_k$ números naturales. Si $n = n_1 + \dots + n_k$ y $L \in \mathcal{L}^s({}^nE)$, entonces*

$$\sup\{|L(x_1^{n_1}, \dots, x_k^{n_k})| : \ x_1, \dots, x_k \in \bar{B}_E\} \leq \frac{n_1! \cdots n_k! \ n^n}{n_1^{n_1} \cdots n_k^{n_k} n!} \ \|\widehat{L}\|. \tag{1.5}$$

La igualdad en (1.5) se alcanza para el polinomio Φ_n definido en $E = \ell_1^m(\mathbb{C})$. El equivalente del Teorema 1.15 para el caso real no se conoce, al menos con constante óptima.

2. Productos tensoriales.

Si E y F son dos espacios vectoriales, sea $\mathcal{B}_a(E, F)$ el espacio de las formas bilineales definidas en $E \times F$. Igualmente, si G es otro espacio vectorial sea $\mathcal{B}_a(E, F; G)$ el espacio de los operadores bilineales definidos entre $E \times F$ y G. El producto tensorial de dos espacios vectoriales se define como el único (salvo isomorfismos) espacio vectorial que satisface la siguiente propiedad universal:

Definición 1.16. Sean E y F espacios vectoriales. Entonces el espacio $E \otimes F$ es el producto tensorial de E y F si existe un operador bilineal $\Delta \in \mathcal{B}_a(E, F; E \otimes F)$ tal que para todo espacio vectorial G y todo operador $\phi \in \mathcal{B}_a(E, F; G)$, existe un operador $L \in \mathcal{L}_a(E \times F; G)$ que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[dr, "\phi"'] & & E \otimes F \arrow[dl, "L"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

De forma equivalente $\phi = L \circ \Delta$.

Observaciones 1.17. (i) Dados dos espacios vectoriales E y F, una descripción útil de su producto tensorial $E \otimes F$ viene dada por el subespacio de $\mathcal{B}_a(E, F)^*$ generado por las aplicaciones

$$x \otimes y(\phi) = \phi(x, y) \quad \forall \phi \in \mathcal{B}_a(E, F),$$

con $x \in E$ e $y \in F$. Se prueba fácilmente que este espacio verifica la propiedad universal anterior con Δ definida por $\Delta(x, y) = x \otimes y$ para cada $(x, y) \in E \times F$.

(ii) Se sigue del diagrama anterior que $\mathcal{B}_a(E, F; G)$ es isomorfo a $\mathcal{L}_a(E \otimes F; G)$ para cada espacio vectorial G. En particular $\mathcal{B}_a(E, F)$ es isomorfo a $(E \otimes F)^*$. Si $f \in E^*$ y $g \in F^*$, $f \otimes g$ representa la forma lineal en $(E \otimes F)^*$ definida por $(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x)g(y)$ para $x \in E$ e $y \in F$.

(iii) La generalización del concepto de producto tensorial entre dos espacios vectoriales se extiende de forma trivial al producto de varios espacios. Dado un espacio vectorial E, usaremos la notación $\bigotimes^n E$ para referirnos al producto tensorial $E \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E$.

El concepto de polinomio homogéneo entre espacios vectoriales introducido en la Sección 1 se puede interpretar de forma sencilla en términos de productos tensoriales como sigue:

Proposición 1.18. *Si E y F son dos espacios vectoriales, entonces P es un polinomio n-homogéneo entre E y F si y sólo si existe $T \in \mathcal{L}_a(\bigotimes^n E; F)$ tal que $P(x) = T(x \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes x)$ para cada $x \in E$.*

2.1. Normas tensoriales razonables. Sean E y F dos espacios de Banach. Ahora los productos $x \otimes y$ con x e y elementos de E y F respectivamente, se considerarán definidos en el espacio de las formas bilineales continuas en $E \times F$ que denotaremos por $\mathcal{B}(E,F)$. Igualmente, si G es otro espacio de Banach entonces $\mathcal{B}(E,F;G)$ representa el conjunto de operadores bilineales de $E\times F$ en G. De entre todas las normas que podemos introducir en $E\otimes F$, nos interesaremos sólo en aquellas que verifiquen ciertas condiciones razonables (véase [**61**]):

Definición 1.19. Sean E y F dos espacios de Banach. Decimos que la norma $\|\cdot\|_{E\otimes F}$ en $E\otimes F$ es una norma tensorial razonable si

(NTR1) $\|x\otimes y\|_{E\otimes F}=\|x\|_E\cdot\|y\|_F \quad \forall x\in E,\ \forall y\in F.$
(NTR2) $\|f\otimes g\|_{(E\otimes F,\|\cdot\|_{E\otimes F})^*}=\|f\|_{E^*}\cdot\|g\|_{F^*} \quad \forall f\in E^*,\ \forall g\in F^*.$

Para simplificar la notación, a partir de ahora nos referiremos a las normas tensoriales razonables con el subíndice genérico α. Si E y F son dos espacios de Banach y $\|\cdot\|_\alpha$ es una norma tensorial razonable en $E\otimes F$, entonces $E\otimes_\alpha F$ denotará la compleción del espacio normado $(E\otimes F,\|\cdot\|_\alpha)$.

Una primera consecuencia de la Definición 1.19 es que la norma dual en $E\otimes_\alpha F$ es a su vez una norma tensorial razonable:

Proposición 1.20. *Sean E y F dos espacios de Banach y sea $\|\cdot\|_\alpha$ una norma tensorial razonable en $E\otimes F$. Entonces $\|\cdot\|_{(E\otimes F,\|\cdot\|_\alpha)^*}$ es una norma tensorial razonable en $E^*\otimes F^*$ que denotaremos con $\|\cdot\|_{\alpha^*}$.*

Existen dos normas tensoriales razonables notables en el producto tensorial de cualquier par de espacios de Banach:

Proposición 1.21. *Si E y F son dos espacios de Banach, entonces:*

(a) *Existe una norma tensorial razonable minimal en $E\otimes F$ que denotaremos con el subíndice ϵ y que viene dada por*

$$\|u\|_\epsilon:=\sup\{|\sum\varphi(x_k)\psi(y_k)|:\ u=\sum x_k\otimes y_k,\ \|\varphi\|_{E^*}\le 1,\ \|\psi\|_{F^*}\le 1\}.$$

Nos referiremos a esta norma como norma tensorial inyectiva y a $E\otimes_\epsilon F$ como el producto tensorial inyectivo de E y F.

(b) *Existe una norma tensorial razonable maximal en $E\otimes F$ que denotaremos con el subíndice π y que viene dada por*

$$\|u\|_{E\otimes_\pi F}:=\inf\{\sum\|x_k\|\cdot\|y_k\|:\ u=\sum x_k\otimes y_k\}.$$

Nos referiremos a esta norma como norma tensorial proyectiva y a $E\otimes_\pi F$ como el producto tensorial proyectivo de E y F.

El siguiente resultado nos proporciona una representación de $\mathcal{B}(E,F)$ en términos del dual de $E\otimes_\pi F$ para cada par de espacios de Banach E y F:

Proposición 1.22. *Sean E, F y G espacios de Banach. Entonces la identificación*

$$\mathcal{L}(E \otimes_\pi F; G) \ni v \longleftrightarrow \phi \in \mathcal{B}(E, F; G),$$

definida por

$$v(x \otimes y) = \phi(x, y) \quad \forall x \in E, \ \forall y \in F,$$

define una isometría entre los espacios $\mathcal{L}(E \otimes_\pi F; G)$ y $\mathcal{B}(E, F; G)$.

Corolario 1.23. *Si E y F son dos espacios de Banach, entonces $\mathcal{B}(E, F)$ es isométrico a $(E \otimes_\pi F)^*$.*

Un resultado equivalente para el dual de $E \otimes_\epsilon F$ requiere la introducción de un nuevo concepto:

Definición 1.24. Si E y F son dos espacios de Banach, se dice que una forma bilineal $\phi \in \mathcal{B}(E, F)$ es de tipo integral si existe una medida de Borel μ en el espacio compacto $(\bar{B}_{E^*}, w^*) \times (\bar{B}_{F^*}, w^*)$, siendo w^* la topología débil*, tal que

$$\phi(x, y) = \int_{\bar{B}_{E^*} \times \bar{B}_{F^*}} f(x) g(y) d\mu(f, g), \quad \forall x \in E \quad \forall y \in F.$$

Así, se tiene lo siguiente:

Proposición 1.25. *Si E y F son dos espacios de Banach, entonces un forma bilineal $\phi \in \mathcal{B}(E, F)$ define un elemento de $(E \otimes_\epsilon F)^*$ si y sólo si ϕ es de tipo integral.*

2.2. Algunas propiedades básicas de los productos tensoriales inyectivo y proyectivo.

2.2.1. **Dualidad.** Veamos primeramente que dados dos espacios vectoriales E y F, el dual de $E \otimes F$ se puede expresar en términos del operador "traza". Denotaremos por $\mathcal{F}(E; F)$ el conjunto de operadores de rango finito de E en F, es decir, el formado por los operadores lineales en $\mathcal{L}_a(E; F)$ de la forma $\sum_{k=1}^m f_k \otimes x_k$, donde $f_k \in \mathcal{L}_a(E)$, $x_k \in F$ y $f_k \otimes x_k \in \mathcal{L}_a(E)$ viene dado por $(f_k \otimes x_k)(x) = f_k(x) x_k$, $\forall x \in E$. Si $E = F$ escribimos simplemente $\mathcal{F}(E)$.

Definición 1.26. Sea E un espacio vectorial y sea $u \in \mathcal{F}(E)$ de la forma $u = \sum_{k=1}^m f_k \otimes x_k$, con $x_1, \ldots, x_m \in E$ y $f_1, \ldots, f_m \in E^*$. Entonces se define la traza de u por

$$\mathrm{tr}_E(u) := \sum_{k=1}^m f_k(x_k).$$

Se comprueba de forma elemental que esta definición de traza coincide con el concepto clásico de traza de una matriz. La correspondencia

$$E \otimes F \ni z = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k \longmapsto S_z \in \mathcal{F}(F^*; E),$$

definida por

$$S_z(f) := \sum_{k=1}^{n} f(y_k) x_k \quad \forall f \in F^*,$$

identifica a $E \otimes F$ como subespacio isomorfo de $\mathcal{L}_a(F^*; E)$. Por otro lado, se tiene que $(E \otimes F)^* = \mathcal{B}_a(E, F) = \mathcal{L}_a(E; F^*)$ y en consecuencia, cada elemento φ de $(E \otimes F)^*$ se puede asociar biunívocamente a un elemento T_φ de $\mathcal{L}_a(E; F^*)$. Entonces se tiene:

Proposición 1.27 (Dualidad de la traza). *Sean E y F espacios vectoriales. Si $\varphi \in (E \otimes F)^*$ y $z \in E \otimes F$, entonces*

$$\varphi(z) = \mathrm{tr}_E(S_z \circ T_\varphi) = \mathrm{tr}_{F^*}(T_\varphi \circ S_z),$$

donde $\circ$ se refiere a la composición de operadores.

La importancia de la traza también radica en el papel que juega a la hora de evaluar el dual de un espacio de operadores. En dimensión finita, el siguiente resultado es fácil de ver:

Proposición 1.28. *Sean E y F espacios de Banach de dimensión finita y sea $\|\cdot\|_\alpha$ una norma en $\mathcal{L}(E; F)$. Si se define $\|\cdot\|_{\alpha^*}$ en $\mathcal{L}(F; E)$ de tal manera que*

$$\|v\|_{\alpha^*} := \sup\{|\,\mathrm{tr}_E(uv)|: \ u \in \mathcal{L}(E; F), \ \|u\|_\alpha \leq 1\},$$

entonces $(\mathcal{L}(E; F), \|\cdot\|_\alpha)^* = (\mathcal{L}(F; E), \|\cdot\|_{\alpha^*})$.

La norma tensorial inyectiva se define con la idea de ser la norma dual de la norma tensorial proyectiva en el sentido de la dualidad de la traza. Se tiene (véase para más detalles 6.1 en [**19**]):

Proposición 1.29. *Si E y F son dos espacios de Banach, entonces*

$$E \otimes_\epsilon F \hookrightarrow (E^* \otimes_\pi F^*)^*,$$
$$E^* \otimes_\epsilon F \hookrightarrow (E \otimes_\pi F^*)^*,$$
$$E^* \otimes_\epsilon F^* \hookrightarrow (E \otimes_\pi F)^*.$$

Curiosamente, la norma tensorial proyectiva no es en general dual de la norma tensorial inyectiva en el sentido de la dualidad de la traza. No obstante, siempre que uno de los espacios sea de dimensión finita se tiene que:

Proposición 1.30. *Si E y F son dos espacios de Banach y uno de ellos tiene dimensión finita, entonces*

$$E \otimes_\pi F \hookrightarrow (E^* \otimes_\epsilon F^*)^*,$$
$$E^* \otimes_\pi F \hookrightarrow (E \otimes_\epsilon F^*)^*,$$
$$E^* \otimes_\pi F^* \hookrightarrow (E \otimes_\epsilon F)^*.$$

2.2.2. **Cocientes y subespacios.** Si E es un espacio de Banach y G es un subespacio de E, nos podemos preguntar si $G \otimes_\pi F$ y $G \otimes_\epsilon F$ son subespacios isométricos de $E \otimes_\pi F$ y $E \otimes_\epsilon F$ respectivamente para cada espacio de Banach F. De forma similar, si G es un cociente de E, también parece natural preguntarse si $G \otimes_\pi F$ y $G \otimes_\epsilon F$ son cocientes isométricos de $E \otimes_\pi F$ y $E \otimes_\epsilon F$ respectivamente para cada espacio de Banach F. Los siguiente resultados elementales de la teoría de productos tensoriales muestran bajo qué condiciones los productos tensoriales proyectivo e inyectivo preservan subespacios y cocientes. En cuanto al producto tensorial proyectivo se tiene lo siguiente (véase por ejemplo 1.5 y 3.9 en [**19**]):

Proposición 1.31. *El producto tensorial proyectivo preserva cocientes. Por el contrario, no preserva subespacios en general, ni siquiera de forma isomorfa.*

Los productos tensoriales en los que interviene $L_1(\mu)$ pueden describirse en términos de funciones integrables Bochner (véase por ejemplo 3.3 en [**19**]):

Proposición 1.32. *Sea (Ω, μ) un espacio de medida y sea E un espacio de Banach. Entonces $L_1(\mu) \otimes_\pi E = L_1(\mu, E)$, donde $L_1(\mu, E)$ representa el espacio de las funciones integrables Bochner en (Ω, μ) con valores en E.*

De la proposición anterior se ve fácilmente que $L_1(\mu) \otimes_\pi \cdot$ preserva subespacios. Grothendieck ha demostrado que sólo los espacios $L_1(\mu)$ presentan esta propiedad (véase por ejemplo 3.11 en [**19**]):

Proposición 1.33. *Sea E un espacio de Banach. Entonces $E \otimes_\pi \cdot$ respeta subespacios isométricamente si y sólo si E es isométrico a algún $L_1(\mu)$.*

Para el producto tensorial inyectivo se tiene lo siguiente (véase por ejemplo 4.3 en [**19**]):

Proposición 1.34. *El producto tensorial inyectivo preserva subespacios. Por el contrario, no preserva cocientes, ni siquiera de forma isomorfa.*

Sin embargo, como $L_1(\mu) \otimes \cdot$ preserva cocientes, ϵ es dual para π y $C(K)$ es en cierto modo dual de $L_1(\mu)$ (al menos sabemos que $C(K)^{**} = L_1(\mu)$ para alguna medida μ por el Teorema de Kakutani), entonces tenemos lo siguiente (consúltese por ejemplo 4.4 en [**19**] para los detalles):

Proposición 1.35. *Sean E y F espacios de Banach. Si F es un cociente de E con proyección Q, entonces $C(K)\otimes F$ es un cociente de $C(K)\otimes_\epsilon E$ con proyección $id\otimes_\epsilon Q$.*

2.3. Normas tensoriales. Nótese que la definición de la norma tensorial inyectiva y proyectiva no está sujeta a ninguna característica específica de los espacios que intervienen. Esta propiedad motiva la definición de norma tensorial en la clase $\mathcal{B}an$ de los espacios de Banach.

Definición 1.36. Una norma tensorial α en la clase $\mathcal{B}an$ es una correspondencia que asocia a cada par de espacios de Banach E y F una norma tensorial razonable $\|\cdot\|_\alpha$ en $E\otimes F$ de tal manera que también se verifica la siguiente propiedad

(U) Si E, F, G, H son dos espacios de Banach, $u_1\in\mathcal{L}(E;G)$ y $u_2\in\mathcal{L}(F;H)$, entonces el operador $u_1\otimes u_2\in\mathcal{L}(E\otimes_\alpha F; G\otimes_\alpha H)$ definido por

$$u_1\otimes u_2(x\otimes y)=u_1(x)\otimes u_2(y)\quad \forall x\in E,\quad \forall y\in F,$$

verifica que $\|u_1\otimes u_2\|_{\mathcal{L}(E\otimes_\alpha F;G\otimes_\alpha H)}\leq\|u_1\|\cdot\|u_2\|$.

Esta condición se llama a menudo Axioma de Uniformidad.

Observaciones 1.37. (i) La definición anterior se debe a R. Schatten [**60**]. (Véase también [**19**, p. 147]).

(ii) Se puede probar que las normas tensoriales proyectiva e inyectiva verifican el Axioma (U) y por lo tanto son normas tensoriales en el sentido de la Definición 1.36 (véase por ejemplo 3.2 y 4.1 en [**19**]). Entre todas las normas tensoriales, la proyectiva es la más grande y la inyectiva la más pequeña.

2.3.1. **Normas tensoriales en el sentido de Grothendieck.** Si α es una norma tensorial en la clase $\mathcal{F}in$ de todos los espacios de Banach de dimensión finita, hay una forma natural de extender α a una norma tensorial en la clase $\mathcal{B}an$. Esta extensión se lleva a cabo mediante un procedimiento inductivo y proporciona la definición original de norma tensorial de Grothendieck (véase [**25**]):

Obsérvese que si $E, F\in\mathcal{F}in$ y $\|\cdot\|_\alpha$ es una norma tensorial razonable en $E\otimes F$, entonces $(E\otimes F,\|\cdot\|_\alpha)$ es un espacio de dimensión finita y en consecuencia completo. Por tanto $E\otimes_\alpha F=(E\otimes F,\|\cdot\|_\alpha)$. Si E es un espacio de Banach, $\mathcal{F}in_E$ denota el conjunto de subespacios de dimensión finita de E. Si E y F son dos espacios de Banach, definimos en primer lugar un orden parcial en $\mathcal{F}_E\times\mathcal{F}_F$ mediante la relación

$(X,Y) \le (X',Y')$ si $X \subseteq X'$ e $Y \subseteq Y'$. Este orden hace del conjunto $I = \mathcal{F}_E \times \mathcal{F}_F$ un conjunto dirigido. Dado $u \in E \otimes F$, se puede probar que la red $(\|u\|_{X \otimes_\alpha Y})_{(X,Y) \in I}$ es monótona. Efectivamente, si $(X,Y) \le (X',Y')$ e $i_{(X,X')}$, $i_{(Y,Y')}$ representan las inclusiones naturales $X \hookrightarrow X'$ e $Y \hookrightarrow Y'$ respectivamente, entonces siempre que $u \in E \otimes F$ esté en $X \otimes Y$ se tiene que

$$\|u\|_{X' \otimes_\alpha Y'} = \|(i_{(X,X')} \otimes i_{(Y,Y')})(u)\|_{X' \otimes_\alpha Y'} \le \|u\|_{X \otimes_\alpha Y}.$$

Así, para cada $u \in E \otimes F$ se puede definir $\|u\|_{\overrightarrow{\alpha}}$ sin ninguna ambigüedad por

$$\|u\|_{\overrightarrow{\alpha}} := \lim_{(X,Y) \in I} \|u\|_{X \otimes_\alpha Y},$$

o lo que es lo mismo

$$\|u\|_{\overrightarrow{\alpha}} := \inf\{\|u\|_{X \otimes_\alpha Y} : \ X \in \mathcal{F}_E, \ Y \in \mathcal{F}_F, \ u \in X \otimes Y\}.$$

La flecha hace referencia al hecho de que $\|\cdot\|_{\overrightarrow{\alpha}}$ se define a partir de un procedimiento inductivo. Se puede probar que $\|\cdot\|_{\overrightarrow{\alpha}}$ es una norma razonable en $E \otimes F$ independientemente de la naturaleza de los espacios de Banach E y F. Además, $\overrightarrow{\alpha}$ verifica el Axioma (U). En consecuencia, $\overrightarrow{\alpha}$ es una norma tensorial en el sentido de la Definición 1.36 (véase por ejemplo [**19**, p. 149]). Todas las normas tensoriales en la clase $\mathcal{B}an$ obtenidas a partir de una norma tensorial en $\mathcal{F}in$ mediante un procedimiento inductivo de este tipo, se llaman normas tensoriales finitamente generadas. Dicho de otra forma:

Definición 1.38. Decimos que una norma tensorial α en la clase $\mathcal{B}an$ es finitamente generara si $\alpha = \overrightarrow{\alpha}$.

Observación 1.39. Grothendieck sólo consideró en [**25**] normas tensoriales finitamente generadas. Por esta razón las normas tensoriales finitamente generadas también son llamadas normas tensoriales en el sentido de Grothendieck. Como cabía esperar, las normas tensoriales inyectiva y proyectiva son finitamente generadas (véase por ejemplo 3.2 y 4.1 en [**19**]), es decir, son normas tensoriales en el sentido de Grothendieck.

3. Ideales de operadores.

Dados E y F espacios vectoriales, $f \in E^*$ y $x \in F$, recuérdese que $f \otimes x$ denota el elemento de $\mathcal{L}(E;F)$ dado por

$$f \otimes x(e) = f(e)x \quad \forall e \in E.$$

Definición 1.40. Un ideal de operadores $\mathcal{A}$ es un procedimiento que asigna a cada par de espacios de Banach (E,F) un subespacio $\mathcal{A}(E;F)$ de $\mathcal{L}(E;F)$ tal que

(I1) $f \otimes x \in \mathcal{A}(E;F) \quad \forall f \in E^*, \quad \forall x \in F$.

(I2) Si G y H son espacios de Banach, entonces para cada $u \in \mathcal{L}(F;H)$, $v \in \mathcal{A}(E;F)$ y $w \in \mathcal{L}(G;E)$, se tiene que $uvw \in \mathcal{A}(G;H)$.

Si además se cuenta con un procedimiento α que asocia a cada par de espacios de Banach (E,F) una norma $\|\cdot\|_\alpha$ en $\mathcal{A}(E;F)$ tal que

(NI1) $\|f \otimes x\|_\alpha = \|f\| \cdot \|x\| \quad \forall f \in E^*, \quad \forall x \in F$,

(NI2) Si G y H son dos espacios de Banach, $u \in \mathcal{L}(F;H)$, $v \in \mathcal{A}(E;F)$ y $w \in \mathcal{L}(G;E)$, entonces $\|uvw\|_\alpha \leq \|u\| \cdot \|v\|_\alpha \cdot \|w\|$,

(NI3) $(\mathcal{A}(E;F), \|\cdot\|_\alpha)$ es un espacio de Banach,

entonces el par $[\mathcal{A}, \|\cdot\|_\alpha]$ se llama ideal de operadores de Banach o simplemente ideal de Banach mientras que la norma $\|\cdot\|_\alpha$ recibe el nombre de norma de ideal de Banach.

Ejemplos familiares de ideales de Banach son el ideal de los operadores continuos con la norma usual $[\mathcal{L}, \|\cdot\|]$, el de los operadores compactos $[\mathcal{K}, \|\cdot\|]$ y el de los operadores débilmente compactos $[\mathcal{W}, \|\cdot\|]$. Otro ejemplo quizá menos habitual de ideal de Banach es el constituido por los operadores p-sumantes:

Definición 1.41. Sean E y F dos espacios de Banach y sea p tal que $1 \leq p < \infty$. Entonces se dice que un operador lineal $u \in \mathcal{L}(E;F)$ es p-sumante si existe una constante $c \geq 0$ de tal manera que para cada número natural m y cada elección $x_1, \ldots, x_m$ de elementos de E se tiene que

$$(\sum_{k=1}^{m} \|ux_k\|^p)^{1/p} \leq c \cdot \sup\{(\sum_{k=1}^{m} |f(x_k)|^p)^{1/p} : \ f \in B_{E^*}\} \qquad (\pi_p)$$

El ínfimo de los valores c para los cuales se cumple la desigualdad (π_p) se denotará por $\|u\|_{\pi_p}$. Igualmente, el conjunto de los operadores p-sumantes de E en F se representará por $\Pi_p(E;F)$. Se puede probar comprobar que $\|\cdot\|_{\pi_p}$ $(1 \leq p < \infty)$ es una norma completa en $\Pi_p(E;F)$ y que el par $[\Pi_p, \|\cdot\|_{\pi_p}]$ es un ideal de Banach para cada $1 \leq p < \infty$.

Otro ejemplo interesante de ideal de Banach lo aportan los operadores integrales:

Definición 1.42. Sean E y F espacios de Banach y p tal que $1 \leq p \leq \infty$. Decimos que un operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ es p-integral si existe una medida de probabilidad μ y operadores $a \in \mathcal{L}(L_p(\mu);F)$ y $b \in \mathcal{L}(E;L_\infty(\mu))$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{u} & F & \xrightarrow{J_F} & F^{**} \\ \Big\downarrow b & & & & \Big\uparrow a \\ L_\infty(\mu) & & \xrightarrow{i_p} & & L_p(\mu), \end{array}$$

donde $i_p : L_\infty(\mu) \to L_p(\mu)$ es la identidad y $J_F : F \to F^{**}$ la inyección canónica del espacio F en su bidual.

El espacio de todos los operadores p-integrales con $1 \leq p < \infty$ entre los espacios de Banach E y F se representará por $\mathcal{I}_p(E; F)$. Se puede definir una norma completa en $\mathcal{I}_p(E; F)$ mediante

$$\|u\|_{i_p} := \inf \|a\| \cdot \|b\| \quad \forall u \in \mathcal{L}(E; F),$$

tomándose el ínfimo sobre todas las medidas de probabilidad μ y todos los operadores $a \in \mathcal{L}(L_p(\mu); F)$ y $b \in \mathcal{L}(X; L_\infty(\mu))$ que satisfacen el diagrama de arriba. Se puede ver además que el par $[\mathcal{I}_p, \|\cdot\|_{i_p}]$ es un ideal de Banach.

Otro ejemplo interesante de ideal de Banach es el constituido por los operadores integrales. Si E y F son dos espacios de Banach, todo operador $L \in \mathcal{L}(E; F)$ define una forma lineal $\beta_{J_F L}$ en $\mathcal{L}(E \otimes_\pi F^*)$ dada por

$$\beta_{J_F L}(x \otimes y^*) := (J_F L x) y^*,$$

donde $J_F : F \to F^{**}$ es la inyección canónica del espacio F en su bidual, $x \in E$ e $y^* \in F^*$. Entonces, un operador $L \in \mathcal{L}(E; F)$ se dice integral si su funcional asociado $\beta_{J_F L}$ en $\mathcal{L}(E \otimes_\pi F^*)$ es continuo respecto a la norma tensorial inyectiva, es decir, si $\beta_{J_F L} \in \mathcal{L}(E \otimes_\epsilon F^*)$. El espacio de los operadores integrales entre E y F se representa por $\mathcal{I}(E; F)$. Si $L \in \mathcal{L}(E; F)$ es integral, su norma integral se define mediante $\|L\|_I := \|\beta_{J_F L}\|_{\mathcal{L}(E \otimes_\epsilon F^*)}$. Se puede probar que el par $[\mathcal{I}, \|\cdot\|_I]$ es un ideal de Banach.

Parte 1

Complejificaciones.

CAPíTULO 2

Complejificación de espacios de Banach reales.

En este capítulo pretendemos hacer un estudio formal de los procedimientos que nos permiten interpretar de forma satisfactoria un espacio de Banach real como subespacio real de un espacio de Banach complejo. Desde un punto de vista algebraico, todo espacio vectorial real E se puede considerar subespacio real del espacio complejo $E \times E$ con las operaciones (S) y (P) (véase la página ii de la Introducción). En primer lugar se verá que salvo isomorfismos no existe otro espacio vectorial complejo $\widetilde{E}$ del que E sea subespacio real y que cumpla además la identidad $\widetilde{E} = E \oplus iE$. También estudiaremos otras representaciones isomorfas útiles de la complejificación por pares ordenados en términos de productos tensoriales e ideales de operadores.

La extensión de la norma de un espacio de Banach real E a su complejificación $\widetilde{E}$ se puede llevar a cabo de múltiples formas. En una primera aproximación al problema se puede usar la definición de norma reticular compleja teniendo en cuenta el hecho de que todo espacio de Banach es subespacio del retículo $C(B_{E^*}^{w^*})$. La norma compleja así obtenida en $\widetilde{E}$ fue introducida por A. E. Taylor (véase [**45**]). La norma de Taylor cumple ciertas condiciones naturales que exigiremos a todas las normas de complejificación *razonables* que definamos en $\widetilde{E}$, a saber, que la norma en $\widetilde{E}$ sea una extensión de la norma del espacio E y que preserve la norma del conjugado de los elementos de $\widetilde{E}$.

Otros ejemplos de normas de complejificación razonables han sido definidos por A. Alexiewicz y W. Orlicz [**1**], J. Bochnak [**14**], P. Kirwan [**35**], J. Lindenstrauss y L. Tzafriri [**39**, p. 81], G. A. Muñoz, Y. Sarantopoulos y A. Tonge [**48**] y I. E. Verbitskii [**70**] entre otros. La definición de todos los ejemplos de normas razonables de complejificación presentados en las referencias anteriores tienen la peculiaridad de no depender de los espacios a los que se aplican. Además su uso permite la extensión de operadores lineales entre espacios de Banach reales sin alteración alguna de su norma. Los procedimientos de complejificación que cumplan estos requisitos son de especial relevancia y se les llamará *procedimientos naturales de complejificación.*

El capítulo está básicamente dedicado al estudio de mecanismos que nos permitan encontrar de forma sistemática ejemplos de estos procedimientos. Así, veremos que además de las normas de complejificación definidas por pares ordenados, las normas tensoriales y las normas de ideales de Banach también definen procedimientos naturales de complejificación. Asimismo, se prueba que los procedimiento naturales de complejificación también se pueden generar por dualidad. En la parte final del capítulo estudiaremos distintas representaciones de los procedimientos más usados (el de Taylor, Bochnak y Lindenstrauss-Tzafriri). El capítulo finaliza con el estudio de algunos problemas asociados a la propia estructura de las complejificaciones, entre los que destaca el problema inverso a los procesos de complejificación y un problema sobre dualidad.

1. Complejificación algebraica de un espacio vectorial real.

Desde un punto de vista algebraico, la complejificación de un espacio vectorial real no ofrece ningún problema. En una primera aproximación podemos imitar la forma en que los números complejos se obtienen a partir de los reales:

1.1. Complejificación por pares ordenados: Si E es un espacio vectorial real, entonces el producto cartesiano $E \times E$ dotado de las operaciones (S) y (P) que recordamos a continuación, se puede interpretar como un espacio vectorial complejo:

$$(x,y)+(u,v) := (x+u, y+v) \quad \forall x,y,u,v \in E, \tag{S}$$

$$(\alpha + i\beta)(x,y) := (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y) \quad \forall x,y \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{P}$$

El producto cartesiano $E \times E$ con estas operaciones será referido frecuentemente con la notación $\widetilde{E}$. La identificación $x \to (x,0)$ representa una aplicación lineal real que nos permite ver el espacio E como subespacio real de $\widetilde{E}$. Esta identificación justifica el uso de la representación $z = x + iy$ en vez de $z = (x,y)$. También escribiremos $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$ y diremos que x e y son respectivamente la parte real e imaginaria de z. Si $z = x + iy$ es un elemento cualquiera de $\widetilde{E}$, definimos su conjugado de forma canónica por $\bar{z} = x - iy$.

Aunque esencialmente lo que acabamos de contar es la única definición natural de complejificación de un espacio vectorial real, la interpretación por pares ordenados no siempre será la más útil para nuestros propósitos. También interpretaremos por complejificación de un espacio vectorial real E cualquier espacio vectorial complejo isomorfo a $\widetilde{E}$ que satisfaga las propiedades de este último reseñadas en el párrafo anterior. La siguiente definición recoge esta idea de forma general:

Definición 2.1. Sea E un espacio vectorial real. Decimos que un espacio vectorial complejo $\widetilde{E}$ es complejificación de E si:

(C1) Existe una aplicación lineal real e inyectiva $j_E : E \to \widetilde{E}$.
(C2) $\widetilde{E}$ es suma directa de $j_E(E)$ e $ij_E(E)$, es decir $\widetilde{E} = j_E(E) \oplus ij_E(E)$.

Es fácil ver que la definición de complejificación que acabamos de dar es compatible con la interpretación de complejificación por pares ordenados:

Proposición 2.2. *Sea E un espacio vectorial real y sea $\widetilde{E} = E \times E$ con las operaciones (S) y (P). Entonces $\widetilde{E}$ es una complejificación en el sentido de la Definición 2.1, donde j_E viene dada por $j_E(x) = (x, 0)$, $\forall x \in E$.*

Como anunciábamos antes, la interpretación por pares ordenados de la complejificación de un espacio vectorial real es esencialmente la única posible:

Proposición 2.3. *La complejificación algebraica de un espacio vectorial real es única salvo isomorfismos.*

DEMOSTRACIÓN. Si E es un espacio vectorial real, veremos que toda complejificación $\widetilde{E}$ de E es isomorfa a $E \times E$ dotado con las operaciones (S) y (P). Sea j_E como en el Axioma ($C1$) y definamos $T : E \times E \to \widetilde{E}$ por $T(x, y) = j_E(x) + ij_E(y)$. Es fácil ver que T es lineal. Por otro lado, supongamos que $T(x + iy) = j_E(x) + ij_E(y) = 0$ para todo $x, y \in E$. Por el Axioma (C2) se tiene que $j_E(x) = j_E(y) = 0$ y por (C2) que $x = y = 0$. En consecuencia T es inyectivo. Que T es sobreyectivo es consecuencia inmediata del Axioma (C2). □

A continuación mostramos otras representaciones útiles de la complejificación algebraica de un espacio vectorial real.

1.2. Complejificación por productos tensoriales: Sea $\{e_1, e_2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Dado un espacio vectorial real E, todo elemento de $E \otimes \mathbb{R}^2$ admite una representación canónica única de la forma $x \otimes e_1 + y \otimes e_2$ para cierto $x \in E$ e $y \in F$. El espacio $E \otimes \mathbb{R}^2$ dotado de las siguientes operaciones:

$$(x \otimes e_1 + y \otimes e_2) + (u \otimes e_1 + v \otimes e_2) := (x + u) \otimes e_1 + (y + v) \otimes e_2, \tag{2.1}$$

$$(\alpha + i\beta)(x \otimes e_1 + y \otimes e_2) := (\alpha x - \beta y) \otimes e_1 + (\beta x + \alpha y) \otimes e_2, \tag{2.2}$$

para cada $x, y, u, v \in E$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, constituye un espacio vectorial complejo. Es más:

Proposición 2.4. *Sea E un espacio vectorial real y sea $\widetilde{E} = E \otimes \mathbb{R}^2$ con las operaciones definidas en (2.1) y (2.2). Entonces $\widetilde{E}$ es una complejificación de E en el sentido de la Definición 2.1, donde j_E viene dada por $j_E(x) = x \otimes e_1$, $\forall x \in E$.*

1.3. Complejificación por operadores lineales: Dado E espacio vectorial real, para cada $x, y \in E$ representamos con la notación $T_{x,y}$ el elemento de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2; E)$ definido como

$$T_{x,y}(e_1) = x \quad \text{y} \quad T_{x,y}(e_2) = y.$$

Recordamos que $\{e_1, e_2\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Nótese que todos los elementos de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2; E)$ tienen la forma de $T_{x,y}$ para algún $x, y \in E$. Es fácil ver que el espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2; E)$ se convierte en un espacio vectorial complejo definiendo las siguientes operaciones:

$$T_{x,y} + T_{u,v} := T_{x+u,y+v} \quad \forall x, y, u, v \in E \tag{2.3}$$

$$(\alpha + i\beta)T_{x,y} := T_{\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y} \quad \forall x, y \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Es más:

Proposición 2.5. *Sea E un espacio vectorial real y sea $\widetilde{E} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; E)$ con las operaciones definidas en (2.3) y (2.4). Entonces $\widetilde{E}$ es una complejificación de E en el sentido de la Definición 2.1, donde j_E viene dada por $j_E(x) = T_{x,0}$, $\forall x \in E$.*

Veamos ahora cómo definir de forma satisfactoria la complejificación de un espacio de Banach real:

2. Complejificación de un espacio de Banach real.

El proceso mediante el cual se definen los números complejos a partir de los números reales es una complejificación más. Por lo tanto, el proceso de complejificación de la norma de un espacio de Banach real no ha de ser sino una generalización del mecanismo que define la norma compleja estándar a partir de la norma usual en la recta real. En nuestra definición de la complejificación de la norma de un espacio de Banach real partimos de dos propiedades elementales de los números complejos, a saber, que para cada número real t se tiene que $|t| = |t + 0i|$ y para cada número complejo z su conjugado $\bar{z}$ verifica que $|z| = |\bar{z}|$. Así, entre todas las normas que se pueden definir en la complejificación algebraica de un espacio de Banach real, estaremos interesados únicamente en aquellas que satisfacen las siguientes condiciones naturales (véase [**48**]):

Definición 2.6 (Normas razonables). Si $\|\cdot\|_E$ es la norma de un espacio de Banach real E y $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ es una norma en $\widetilde{E}$, entonces decimos que $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ es una *norma razonable* si se cumple:

(NR1) $\|x\|_E = \|j_E(x)\|_{\widetilde{E}} \quad \forall x \in E.$

(NR2) $\|j_E(x) + ij_E(y)\|_{\widetilde{E}} = \|j_E(x) - ij_E(y)\|_{\widetilde{E}} \quad \forall x, y \in E.$

Diremos que el espacio $\widetilde{E}$ dotado de una norma razonable $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ es una complejificación razonable de E.

Dicho de otra forma, una norma razonable es una extensión de la norma del espacio E a su complejificación $\widetilde{E}$ (Axioma (NR1)), que además preserva la norma del conjugado (Axioma (NR2)). Con el objeto de simplificar la notación, desde ahora escribiremos x en vez de $j_E(x)$.

Las normas razonables satisfacen otras propiedades elementales de los números complejos, como por ejemplo que para cada $z \in \mathbb{C}$ se tiene que $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ y $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$:

Proposición 2.7. *Sea E un espacio de Banach real y sea $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ una norma razonable en $\widetilde{E}$. Entonces, para cada $x, y \in E$ se tiene que*

$$\|x + iy\|_{\widetilde{E}} \geq \max\{\|x\|_E, \|y\|_E\}.$$

Demostración. Del Axioma (NR1) se obtiene que

$$2\|x\|_E = \|(x + iy) + (x - iy)\|_{\widetilde{E}} \leq \|x + iy\|_{\widetilde{E}} + \|x - iy\|_{\widetilde{E}}.$$

Por tanto, del Axioma (NR2) se sigue que $\|x\|_E \leq \|x + iy\|_{\widetilde{E}}$. Igualmente se prueba que $\|y\|_E \leq \|x + iy\|_{\widetilde{E}}$. □

Además, las normas razonables construidas a partir de normas completas son también completas como cabía esperar, es decir:

Proposición 2.8. *Si E es un espacio de Banach real y $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ es una norma razonable en $\widetilde{E}$, entonces $(\widetilde{E}, \|\cdot\|_{\widetilde{E}})$ es un espacio de Banach complejo.*

Demostración. Supongamos que $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio normado $(\widetilde{E}, \|\cdot\|_{\widetilde{E}})$ tal que $z_n = x_n + iy_n$ con $x_n, y_n \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 2.7 las sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ son también de Cauchy y por lo tanto convergentes, digamos que a x_0 e y_0 respectivamente. Es fácil ver que $z_n \underset{n}{\longrightarrow} z_0 = x_0 + iy_0$. Efectivamente

$$\|z_n - z_0\|_{\widetilde{E}} = \|x_n - x_0 + i(y_n - y_0)\|_{\widetilde{E}} \leq \|x_n - x_0\|_E + \|y_n - y_0\|_E \underset{n}{\longrightarrow} 0.$$

□

En **[35]**, P. Kirwan establece la definición de norma razonable de forma ligeramente diferente sustituyendo el Axioma (NR2) por:

(NR2′) $\|j_E(x) + ij_E(y)\|_{\widetilde{E}} \geq \max\{\|j_E(x)\|_{\widetilde{E}}, \|j_E(y)\|_{\widetilde{E}}\}.$

La Proposición 2.7 muestra que (NR2) es más fuerte que (NR2′). Sería interesante saber si los Axiomas (NR2) y (NR2′) son equivalentes.

2.1. Primeros ejemplos de normas razonables. Dado un espacio de Banach E, cuando no haya lugar a confusión simplificaremos a partir de ahora la notación $\|\cdot\|_E$ por $\|\cdot\|$ para referirnos a su norma.

El primer ejemplo de norma razonable que presentamos en esta memoria se debe a A. E. Taylor. En [**66**] (véase también [**67**]) dado un espacio de Banach real E, se define en $\widetilde{E}$ la siguiente aplicación

$$n_2(x+iy) := \sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2} \quad \forall x, y \in E.$$

Es fácil verse tentado a interpretar n_2 como una norma razonable habida cuenta del parecido que guarda con la norma compleja estándar. De hecho muchos cayeron en este error al final de los años 30, pero en realidad n_2 no es ni siquiera una norma compleja en general. La aplicación n_2 verifica los Axiomas (NR1) y (NR2). Además es fácil ver que:

(1) $n_2(z) \geq 0 \; \forall z \in \widetilde{E}$ y $n_2(z) = 0$ si y sólo si $z = 0$,
(2) $n_2(\alpha z) = |\alpha| n_2(z) \; \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall z \in \widetilde{E}$, y
(3) $n_2(z+w) \leq n_2(z) + n_2(w) \; \forall z, w \in \widetilde{E}$.

Sin embargo, la homogeneidad en sentido complejo (Axioma (2) con $\alpha \in \mathbb{C}$) se satisface sólo si exigimos que la norma esté generada por un producto interno:

Proposición 2.9. *Dado E espacio de Banach real, la aplicación n_2 es una norma razonable en $\widetilde{E}$ si y sólo si E es un espacio de Hilbert.*

DEMOSTRACIÓN. Si E es un espacio de Hilbert, la homogeneidad se prueba de forma estándar usando la estructura de producto interno del espacio. Por otro lado, si

$$n_2(\lambda(x+iy)) = |\lambda| n_2(x+iy) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \forall x, y \in E,$$

poniendo $\lambda = 1+i$, se obtiene la identidad del paralelogramo

$$\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2) \quad \forall x, y \in E,$$

y en consecuencia, la norma de E se obtiene a partir de un producto interno. □

Así pues, los resultados obtenidos por A. E. Taylor referidos a n_2 sólo tienen sentido en espacios de Hilbert. Para enmendar esta deficiencia, A. E. Taylor sugirió en [**45**] a A. D. Michal y M. Wyman la siguiente definición:

$$\|x+iy\|_T := \sup_{\varphi \in B_{E^*}} \sqrt{\varphi(x)^2+\varphi(y)^2} \quad \forall x, y \in E. \tag{2.5}$$

Observación 2.10. Nótese que el Teorema de Hahn-Banach nos permite obtener la siguiente descripción alternativa de $\|\cdot\|_T$:

$$\begin{aligned}\|x+iy\|_T &= \sup_{\|\varphi\|_{E^*}\leq 1} \sqrt{\varphi(x)^2+\varphi(y)^2}\\ &= \sup_{\|\varphi\|_{E^*}\leq 1}\ \sup_{0\leq t\leq 2\pi} |\varphi(x)\cos t - \varphi(y)\operatorname{sen} t|\\ &= \sup_{0\leq t\leq 2\pi}\ \sup_{\|\varphi\|_{E^*}\leq 1} |\varphi(x\cos t - y\operatorname{sen} t)|\\ &= \sup_{0\leq t\leq 2\pi} \|x\cos t - y\operatorname{sen} t\|. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Aunque se trata de un problema estándar, vamos a ver por completitud que ahora $\|\cdot\|_T$ sí es homogénea en sentido complejo. Es más:

Proposición 2.11. *Si E es un espacio de Banach real, entonces $\|\cdot\|_T$ es una norma razonable en $\widetilde{E}$.*

DEMOSTRACIÓN. En cuanto a la comprobación de que $\|\cdot\|_T$ es efectivamente una norma compleja, el único punto que requiere detenimiento es el de probar su homogeneidad en sentido complejo, para lo cual utilizaremos la representación (2.6). Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Por simplicidad supondremos que λ tiene módulo 1, es decir, $\lambda = e^{i\theta}$ siendo θ el argumento de λ. Entonces, teniendo en cuenta la periodicidad de las funciones sen y cos, para cada $x, y \in E$ se tiene que

$$\begin{aligned}\|e^{i\theta}(x+iy)\|_T &= \|x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta + i(x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)\|_T\\ &= \sup_{0\leq t\leq 2\pi} \|x(\cos\theta\cos t - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} t) - y(\operatorname{sen}\theta\cos t + \cos\theta\operatorname{sen} t)\|\\ &= \sup_{0\leq t\leq 2\pi} \|x\cos(\theta+t) - y\operatorname{sen}(\theta+t)\| = \|x+iy\|_T.\end{aligned}$$

Por otro lado, la comprobación del cumplimiento de los Axiomas (NR1) y (NR2) es inmediata. □

A partir de ahora nos referiremos a $\|\cdot\|_T$ como la norma de Taylor. Más adelante probaremos algunas propiedades de esta norma que la convierten en una complejificación notable. En la siguiente sección se define el concepto de procedimiento natural de complejificación y se dan algunos ejemplos interesantes introducidos desde diversos puntos de vista.

2.2. Procedimientos naturales de complejificación. Nótese que en la definición de la norma de Taylor no se hace mención alguna a las propiedades del espacio que se complejifica. Se puede decir que la complejificación de Taylor es un *procedimiento* que asigna a cada espacio de Banach real E una norma razonable en $\widetilde{E}$. La norma de Taylor cumple además una propiedad que vamos a exigir a todos los procedimientos de complejificación naturales. La propiedad a la que aludimos hace referencia a la conservación de la norma de un operador lineal al ser complejificado. Para empezar veamos qué entendemos por esto complejificación de un operador lineal. Por su sencillez, dejamos para el lector los detalles de la demostración del siguiente resultado.

Proposición 2.12 (Complejificación de operadores lineales). *Sean E y F dos espacios vectoriales reales y sea $L \in \mathcal{L}_a(E;F)$. Entonces existe un único operador lineal $\widetilde{L}$ en $\mathcal{L}_a(\widetilde{E};\widetilde{F})$ tal que $\widetilde{L}_{|E} = L$. Al operador $\widetilde{L}$ se le llama complejificación de L. Es más, usando las diferentes representaciones de $\widetilde{E}$ y $\widetilde{F}$ se tiene:*

$$\begin{aligned}
\widetilde{L}(x+iy) &= L(x) + iL(y) \quad \forall (x,y) \in E \times E,\\
\widetilde{L}(x \otimes e_1 + y \otimes e_2) &= L \otimes id_{\mathbb{R}^2} \quad \forall x \otimes e_1 + y \otimes e_2 \in E \otimes \mathbb{R}^2,\\
\widetilde{L}(T_{x,y}) &= L \circ T_{x,y} \quad \forall T_{x,y} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; E).
\end{aligned}$$

En otras palabras, todo operador lineal entre dos espacios vectoriales reales E y F admite una sola extensión lineal a sus complejificaciones $\widetilde{E}$ y $\widetilde{F}$. Veamos que para operadores continuos, esta extensión sigue siendo posible con continuidad si se considera la norma de Taylor, es más:

Proposición 2.13. *Sean E y F dos espacios de Banach reales y $L \in \mathcal{L}(E;F)$. Entonces $\widetilde{L} \in \mathcal{L}((\widetilde{E}, \|\cdot\|_T); (\widetilde{F}, \|\cdot\|_T))$ y además $\|L\| = \|\widetilde{L}\|_T$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\widetilde{L}$ es una extensión de L, entonces $\|\widetilde{L}\| \geq \|L\|$. Por otro lado, si $x, y \in E$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{L}(x+iy)\|_T = \|L(x) + iL(y)\|_T &= \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} \|L(x)\cos t - L(y)\operatorname{sen} t\|_F\\
&= \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} \|L(x\cos t - y \operatorname{sen} t)\|_F \leq \|L\| \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} \|x\cos t - y\operatorname{sen} t\|_E\\
&= \|L\| \cdot \|x + iy\|_T,
\end{aligned}$$

y por lo tanto $\|\widetilde{L}\| \leq \|L\|$. □

La siguiente propiedad general de las normas razonables garantiza la extensión con continuidad de los operadores lineales entre dos espacios de Banach reales, sean cuales sean las normas razonables que se consideren:

Proposición 2.14. *Sea E un espacio de Banach real y sea $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ una norma razonable arbitraria en $\widetilde{E}$, entonces*

$$\|x+iy\|_T \leq \|x+iy\|_{\widetilde{E}} \leq 2\|x+iy\|_T \quad \forall x,y \in E. \tag{2.7}$$

Es más, el Ejemplo 2.40 demuestra que la desigualdad (2.7) es óptima.

DEMOSTRACIÓN. Para cada $t \in \mathbb{R}$ y $x, y \in E$ se tiene que

$$\|x+iy\|_{\widetilde{E}} = \|e^{it}(x+iy)\|_{\widetilde{E}} = \|(x\cos t - y \operatorname{sen} t) + i(x \operatorname{sen} t + y\cos t)\|_{\widetilde{E}}.$$

Ahora aplicando el Axioma (NR1) y la desigualdad triangular obtenemos

$$\|x\cos t - y\operatorname{sen} t\|_E \leq \|x+iy\|_{\widetilde{E}} \leq \|x\cos t - y\operatorname{sen} t\|_E + \|x\operatorname{sen} t + y\cos t\|_E,$$

de donde se sigue fácilmente el resultado. □

En particular, la Proposición 2.14 demuestra que todas las normas razonables son equivalentes. Este hecho, junto con la Proposición 2.13, prueba que la extensión de un operador lineal se puede hacer siempre de forma continua. Además se tiene la siguiente relación entre la norma del operador y la norma de su extensión:

Corolario 2.15. *Si E y F son dos espacios de Banach reales y $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ y $\|\cdot\|_{\widetilde{F}}$ son dos normas razonables en $\widetilde{E}$ y $\widetilde{F}$ respectivamente, entonces para todo $L \in \mathcal{L}(E;F)$ se tiene que $\widetilde{L}$ es continuo como operador entre los espacios $(\widetilde{E}, \|\cdot\|_E)$ y $(\widetilde{F}, \|\cdot\|_F)$ y $\|\widetilde{L}\| \leq 2\|L\|$. Además se verá en el Ejemplo 3.51 que esta desigualdad es óptima.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x+iy \in \widetilde{E}$ tal que $\|x+iy\|_{\widetilde{E}} \leq 1$. Entonces usando la descripción alternativa de la norma de Taylor (2.6) junto con (2.7), obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{L}(x+iy)\|_{\widetilde{F}} \leq 2\|\widetilde{L}(x+iy)\|_T &= 2\sup_{0\leq t\leq 2\pi} \|L(x)\cos t - L(y)\operatorname{sen} t\|_F \\
&= 2\sup_{0\leq t\leq 2\pi} \|L(x\cos t - y\operatorname{sen} t)\|_F \leq 2\|L\| \sup_{0\leq t\leq 2\pi} \|x\cos t - y\operatorname{sen} t\|_E \\
&= 2\|L\|\cdot\|x+iy\|_T \leq 2\|L\|\cdot\|x+iy\|_{\widetilde{E}}.
\end{aligned}$$

□

A partir de ahora nos interesaremos casi exclusivamente por los *procedimientos de complejificación* que como el de Taylor preservan la norma de los operadores lineales al ser complejificados.

Definición 2.16. Llamamos *procedimiento natural de complejificación* a todo mecanismo ν que asigne a cada espacio de Banach real una norma razonable $\|\cdot\|_\nu$ en su complejificación con la siguiente propiedad:

(PC) Si E, F son dos espacios de Banach reales y $L \in \mathcal{L}(E; F)$, entonces su complejificación $\widetilde{L} : (\widetilde{E}, \|\cdot\|_\nu) \to (\widetilde{F}, \|\cdot\|_\nu)$ tiene la misma norma que L.

Diremos que $\|\cdot\|_\nu$ es una *norma de complejificación natural* en $\widetilde{E}$ y que $(\widetilde{E}, \|\cdot\|_\nu)$ es una *complejificación natural* de E. Además denotaremos con $\|\widetilde{L}\|_\nu$ la norma de $\widetilde{L}$ como elemento de $\mathcal{L}\big((\widetilde{E}, \|\cdot\|_\nu); (\widetilde{F}, \|\cdot\|_\nu)\big)$.

3. Complejificaciones duales.

Dado un espacio vectorial real E, representaremos la complejificación de E^* por $(E^*)^\sim$. Según la interpretación por pares ordenados de la complejificación de un espacio vectorial real, se tiene que $(E^*)^\sim = \{\varphi + i\psi : \ \varphi, \psi \in E^*\}$. Por otro lado, $(\widetilde{E})^*$ consta de formas lineales definidas en $\widetilde{E}$. En principio no es del todo evidente que el dual de $\widetilde{E}$ coincida con la complejificación de E^*. Sin embargo, no es difícil establecer un isomorfismo algebraico entre estos dos espacios. Veremos también que si E es un espacio de Banach real y $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ es una norma razonable en $\widetilde{E}$, entonces $(\widetilde{E}, \|\cdot\|_{\widetilde{E}})^*$ es una complejificación razonable de E^*. Esto da lugar a la definición de las normas de complejificación duales (véase también [**35**] y [**48**]).

Proposición 2.17. *Si E es un espacio vectorial real, entonces la aplicación $\Upsilon : (E^*)^\sim \longrightarrow (\widetilde{E})^*$ dada por*

$$\Upsilon(\varphi + i\psi)(x + iy) := \big(\varphi(x) - \psi(y)\big) + i\big(\varphi(y) + \psi(x)\big) \quad \forall x, y \in E, \tag{2.8}$$

es un isomorfismo algebraico.

Demostración. Se demuestra fácilmente que Υ es lineal. Supongamos ahora que $\Upsilon(\varphi + i\psi) = 0$. Entonces si ponemos $y = 0$ en (2.8) tenemos que $\varphi(x) + i\psi(x) = 0$, $\forall x \in E$, de donde es inmediato que $\varphi = \psi = 0$. Por lo tanto Υ es inyectiva. Veamos por último que Υ es sobreyectiva. Si $f \in (\widetilde{E})^*$, entonces $\varphi = \operatorname{Re} f_{|E}$ y $\psi = \operatorname{Im} f_{|E}$ son formas lineales *reales* en E. Además se ve claramente que $\Upsilon(\varphi + i\psi) = f$, con lo que se concluye la demostración. $\square$

Proposición 2.18. *Si E es un espacio de Banach real y $\widetilde{E} = (\widetilde{E}, \|\cdot\|_{\widetilde{E}})$ es una complejificación razonable de E, entonces $(\widetilde{E})^* = (\widetilde{E}, \|\cdot\|_{\widetilde{E}})^*$ es una complejificación razonable de E^*.*

DEMOSTRACIÓN. Definamos $j_{E^*} : E^* \to (\widetilde{E})^*$ mediante $j_{E^*}(\varphi) = \varphi + i0$. Es fácil ver que j_{E^*} verifica los Axiomas (C1) y (C2). Comprobar los Axiomas (NR1) y (NR2) requiere algo más de trabajo. En primer lugar, si $\varphi \in E^*$ entonces

$$\begin{aligned}\|j_{E^*}(\varphi)\|_{(\widetilde{E})^*} &= \sup\{|(\varphi + i0)(x+iy)| : \|x+iy\|_{\widetilde{E}} \leq 1\} \\ &= \sup\{\sqrt{\varphi(x)^2 + \varphi(y)^2} : \|x+iy\|_{\widetilde{E}} \leq 1\} \\ &\leq \|\varphi\|_{E^*} \sup\{\|x+iy\|_T : \|x+iy\|_{\widetilde{E}} \leq 1\}.\end{aligned}$$

Pero como por (2.7) la norma de Taylor es la norma razonable más pequeña, entonces se tiene que

$$\|j_{E^*}(\varphi)\|_{(\widetilde{E})^*} \leq \|\varphi\|_{E^*}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\|j_{E^*}(\varphi)\|_{(\widetilde{E})^*} &\geq \sup\{|(\varphi + i0)(x+i0)| : \|x\|_E \leq 1\} \\ &= \sup\{|\varphi(x)| : \|x\|_E \leq 1\} \\ &= \|\varphi\|_{E^*}.\end{aligned}$$

Esto prueba que $\|j_{E^*}(\varphi)\|_{(\widetilde{E})^*} = \|\varphi\|_{E^*}$. En consecuencia j_{E^*} cumple el Axioma (NR1). Para comprobar el cumplimiento del Axioma (NR2) nótese que si $\varphi, \psi \in E^*$ y $x, y \in E$, entonces

$$\begin{aligned}|(\varphi - i\psi)(x+iy)| &= \big|\big(\varphi(x) + \psi(y)\big) + i\big(\varphi(y) - \psi(x)\big)\big| \\ &= \big|\big(\varphi(x) + \psi(y)\big) - i\big(\varphi(y) - \psi(x)\big)\big| \\ &= |(\varphi + i\psi)(x - iy)|.\end{aligned}$$

Como $\|x+iy\|_{\widetilde{E}} = \|x-iy\|_{\widetilde{E}}$, se sigue finalmente que $\|\varphi + i\psi\|_{(\widetilde{E})^*} = \|\varphi - i\psi\|_{(\widetilde{E})^*}$. □

Observación 2.19. Dado un espacio de Banach real E y una norma razonable $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ en $\widetilde{E}$, la Proposición 2.18 nos permite definir en $(E^*)^\sim$ una norma razonable por medio del isomorfismo Υ, cuya expresión viene dada por la identidad

$$\|\varphi + i\psi\|_{(E^*)^\sim} := \|\Upsilon(\varphi + i\psi)\|_{(\widetilde{E})^*}. \tag{2.9}$$

Con esta definición es evidente que se verifica la igualdad

$$((E^*)^\sim, \|\cdot\|_{(E^*)^\sim}) = (\widetilde{E}, \|\cdot\|_{\widetilde{E}})^*. \tag{2.10}$$

Este comentario sugiere la definición de norma dual de una norma razonable:

Definición 2.20. Dado un espacio de Banach real E y una norma razonable $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ en $\widetilde{E}$, definimos la norma dual de $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ como la norma razonable $\|\cdot\|_{(E^*)^\sim}$ en $(E^*)^\sim$ dada por (2.9). Esta norma verifica la igualdad (2.10). Igualmente, si ν y ν^* son dos procedimientos naturales de complejificación, decimos que ν^* es el dual de ν si para cada espacio de Banach real E y cada $\varphi, \psi \in E^*$ se tiene que $\|\varphi + i\psi\|_{\nu^*} := \|\Upsilon(\varphi + i\psi)\|_\nu$. Esto garantiza en todo momento el cumplimiento de la siguiente identidad:

$$((E^*)^\sim, \|\cdot\|_{\nu^*}) = (\widetilde{E}, \|\cdot\|_\nu)^*.$$

4. Construcción de procedimientos naturales de complejificación.

Esta sección está dedicada a la construcción de ejemplos de procedimientos naturales de complejificación. Cada uno de los diferentes enfoques dados de la complejificación algebraica de un espacio vectorial real (véase la Sección 1), sugiere la utilización de técnicas específicas para definir procedimientos naturales de complejificación. Quizá el método de formación de procedimientos naturales de complejificación más intuitivo sea aquel en el que se interpreta la complejificación algebraica en términos de pares ordenados (véase la Sección 1.1). Este método será descrito en primer lugar. Si interpretamos la complejificación algebraica como un producto tensorial (véase la Sección 2), es tentador intentar definir procedimientos naturales de complejificación en términos de normas tensoriales. Veremos que toda norma tensorial representa un procedimiento natural de complejificación. Recíprocamente, veremos que toda norma razonable en la complejificación de un espacio de Banach real es una norma tensorial razonable. Por último, si interpretamos la complejificación algebraica en términos de operadores lineales (véase la Sección 1.3), veremos que toda norma de ideal de operadores representa un procedimiento natural de complejificación.

4.1. Método por pares ordenados. Dado un espacio de Banach real E, se puede generar un buen número de normas razonables en $\widetilde{E}$ partiendo de las funciones

$$n_p(x + iy) := (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p} \quad \forall x, y \in E \quad (1 \leq p \leq \infty).$$

Las funciones n_p $(1 \leq p \leq \infty)$ no son homogéneas en sentido complejo en general. Este problema se soluciona definiendo

$$\widetilde{n}_p(x + iy) := \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} n_p(e^{it}(x + iy)) \quad \forall x, y \in E \quad (1 \leq p \leq \infty).$$

Por otro lado, como

$$\sup_{0 \leq t \leq 2\pi} \left(|\cos t|^p + |\operatorname{sen} t|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \begin{cases} 1 & (2 \leq p < \infty), \\ 2^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} & (1 \leq p \leq 2) \end{cases},$$

habrá que multiplicar $\widetilde{n}_p$ por el factor $2^{\min(1/2-1/p,0)}$ con el fin de asegurar el cumplimiento del Axioma (NR1). En definitiva se tiene lo siguiente:

Proposición 2.21. *Sea E un espacio de Banach real y $p \geq 1$. Entonces la aplicación $\|\cdot\|_{(p)}$ definida por*

$$\|x+iy\|_{(p)} := 2^{\min(1/2-1/p,0)} \sup_{0\leq t\leq 2\pi} \left(\|x\cos t - y \operatorname{sen} t\|^p + \|x \operatorname{sen} t + y\cos t\|^p\right)^{1/p},$$

para cada $x, y \in E$, es una norma razonable en $\widetilde{E}$. Además $\|\cdot\|_{(p)}$ es una norma de complejificación natural.

Observación 2.22. Nótese que $\|\cdot\|_{(\infty)} = \lim_{p\to\infty} \|\cdot\|_{(p)}$ se reduce a $\|\cdot\|_T$. Por otro lado, la norma $\|\cdot\|_{(1)}$ fue usada por A. Alexiewicz y W. Orlicz en [**1**] (salvo el factor de corrección $1/\sqrt{2}$). La norma $\|\cdot\|_{(2)}$ fue introducida por J. Lindenstrauss y L. Tzafriri en [**39**, p. 81]. Por esta razón nos referiremos a ella en lo sucesivo con la notación $\|\cdot\|_{LT}$. En la siguiente sección haremos un estudio más detallado de este procedimiento.

Veremos en seguida la demostración de la Proposición 2.21 como caso particular de un resultado más general. Se pueden construir más ejemplos de procedimientos naturales de complejificación dentro de la interpretación por pares ordenados definiendo una norma sobre la base de un promedio integral de la función $t \mapsto n_p(e^{it}(x+iy))$. Esto es lo que hace P. Kirwan en [**35**]. Si para cada $p, q \geq 1$ definimos $c_{p,q} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|\cos\theta|^p + |\operatorname{sen}\theta|^p)^{q/p} d\theta\right)^{1/q}$ (nótese que $c_{2,q} = 1$ para todo $q \geq 1$), entonces se tiene lo siguiente:

Proposición 2.23. *Sea E un espacio de Banach real y $p, q \geq 1$. Entonces la aplicación $\|\cdot\|_{(p,q)}$ definida por*

$$\|x+iy\|_{(p,q)} := \frac{1}{c_{p,q}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\|x\cos t - y \operatorname{sen} t\|^p + \|x\operatorname{sen} t + y\cos t\|^p\right)^{q/p} dt\right)^{1/q},$$

para todo $x, y \in E$, es una norma razonable en $\widetilde{E}$. Además $\|\cdot\|_{(p,q)}$ es una norma de complejificación natural.

Demostración. Que $\|\cdot\|_{(p,q)}$ es una norma compleja ha sido probado por P. Kirwan en [**35**, Corollary 2.2]. Por otro lado, una simple inspección de la definición de $\|\cdot\|_{(p,q)}$ muestra que la elección de la constante $c_{p,q}$ ($1 \leq p, q \leq \infty$) es la adecuada para salvaguardar el cumplimiento del Axioma (NR1). Veamos que $\|\cdot\|_{(p,q)}$ verifica también el Axioma (NR2): Como el integrando en la definición de $\|x+iy\|_{(p,q)}$ es una función periódica de periodo 2π, realizando la sustitución $t = -s$, para $x, y \in E$ se tiene que

$$\begin{aligned}\|x+iy\|_{(p,q)} &= \frac{1}{c_{p,q}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\|x\cos t - y\operatorname{sen} t\|^p + \|x\operatorname{sen} t + y\cos t\|^p\right)^{q/p}dt\right)^{1/q} \\ &= \frac{1}{c_{p,q}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\|x\cos s + y\operatorname{sen} s\|^p + \|x\operatorname{sen} s - y\cos s\|^p\right)^{q/p}dr\right)^{1/q} \\ &= \|x-iy\|_{(p,q)}.\end{aligned}$$

Resta probar que la norma $\|\cdot\|_{(p,q)}$ es una norma de complejificación natural. Efectivamente, si F es otro espacio de Banach real, $x, y \in E$ y $L \in \mathcal{L}(E; F)$, entonces

$$\begin{aligned}\|\widetilde{L}(x+iy)\|_{(p,q)} &= \|L(x)+iL(y)\|_{(p,q)} \\ &= \frac{1}{c_{p,q}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\|L(x)\cos t - L(y)\operatorname{sen} t\|_F^p + \|L(x)\operatorname{sen} t + L(y)\cos t\|_F^p\right)^{q/p}dt\right)^{1/q} \\ &\le \|L\|\frac{1}{c_{p,q}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\|x\cos t - y\operatorname{sen} t\|_E^p + \|x\operatorname{sen} t + y\cos t\|_E^p\right)^{q/p}dt\right)^{1/q} \\ &= \|L\|\cdot\|x+iy\|_{(p,q)},\end{aligned}$$

y en consecuencia $\|\widetilde{L}\|_{(p,q)} = \|L\|$. □

Observación 2.24. Nótese que para cada $p \ge 1$, $\|\cdot\|_{(p,\infty)} := \lim_{q\to\infty}\|\cdot\|_{(p,q)}$ se reduce a $\|\cdot\|_{(p)}$ con $c_{p,\infty} = \lim_{q\to\infty} c_{p,q} = 2^{\min(1/2-1/p,0)}$. En particular $c_{p,\infty} = 1$ si $p \ge 2$. Por otro lado, si $1 \le q < \infty$, entonces $\|\cdot\|_{(\infty,q)} := \lim_{p\to\infty}\|\cdot\|_{(p,q)}$ se reduce a la norma

$$\|x+iy\|_{(\infty,q)} := \frac{1}{c_{\infty,q}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\max\{\|x\cos t - y\operatorname{sen} t\|\ ,\ \|x\operatorname{sen} t + y\cos t\|\}^q dt\right)^{1/q},$$

definida para $x, y \in E$, con $c_{\infty,q} = \lim_{p\to\infty} c_{p,q} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\max\{|\cos t|, |\operatorname{sen} t|\}^q dt\right)^{1/q}$. Finalmente, se ve claramente que $\|\cdot\|_{(\infty,\infty)} := \lim_{p,q\to\infty}\|\cdot\|_{p,q} = \|\cdot\|_T$.

A título de ejemplo diremos para terminar esta sección que P. Kirwan menciona en **[35]** un caso más de norma natural de complejificación. Se trata de la norma $\|\cdot\|_{(T,q)}$ con $q \ge 1$ definida por

$$\|x+iy\|_{(T,q)} := \frac{1}{c_q}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|x\cos t - y\operatorname{sen} t\|^q dt\right)^{1/q},$$

para todo $x, y \in E$. En este caso, para salvaguardar el cumplimiento del Axioma (NR1) se define $c_q = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\cos t|^q dt\right)^{1/q}$. Obsérvese también que $\|\cdot\|_{(T,\infty)} := \lim_{q\to\infty}\|\cdot\|_{(T,q)}$, se reduce a $\|\cdot\|_{(\infty)} = \|\cdot\|_T$.

4.2. Método por productos tensoriales. Usando la representación por productos tensoriales de la complejificación de un espacio de Banach, en esta sección vamos a ver la estrecha relación que existe entre los conceptos de norma razonable y el de norma tensorial razonable (en el sentido de la Definición 1.19). Igualmente, comprobaremos que toda norma tensorial en el sentido de la Definición 1.36 define un procedimiento de complejificación natural.

Proposición 2.25. *Si E es un espacio de Banach real, entonces todas las normas razonables en $\widetilde{E} = E \otimes \ell_2^2$ son normas tensoriales razonables.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ una norma razonable en $\widetilde{E}$. Recordamos que hay que probar las siguientes identidades:

$$\|x \otimes a\|_{\widetilde{E}} = \|x\|_E \|a\|_{\ell_2^2} \quad \forall x \in E, \quad \forall a \in \ell_2^2,$$
$$\|\varphi \otimes b\|_{(\widetilde{E})^*} = \|\varphi\|_{E^*} \|b\|_{\ell_2^2} \quad \forall \varphi \in E^*, \quad \forall b \in (\ell_2^2)^* = \ell_2^2.$$

Sea $x \in E$ y $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 \in \ell_2^2$. Entonces

$$x \otimes a = a_1 x \otimes e_1 + a_2 x \otimes e_2 = (a_1 + i a_2)(x \otimes e_1).$$

Por lo tanto, aplicando la homogeneidad de la norma $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ y el Axioma (NR1) se tiene que

$$\|x \otimes a\|_{\widetilde{E}} = \|(a_1 + i a_2)(x \otimes e_1)\|_{\widetilde{E}} = |a_1 + i a_2| \cdot \|x \otimes e_1\|_{\widetilde{E}} = \|a\|_{\ell_2^2} \|x\|_E.$$

Igualmente, como por la Proposición 2.18 $(\widetilde{E}, \|\cdot\|_{\widetilde{E}})^*$ es una complejificación razonable de E^*, se tiene que

$$\|\varphi \otimes b\|_{(\widetilde{E})^*} = \|\varphi\|_{E^*} \|b\|_{\ell_2^2} \quad \forall \varphi \in E^*, \quad \forall b \in \ell_2^2.$$

□

Proposición 2.26. *Sea E un espacio de Banach real. Si α es una norma tensorial, entonces $\widetilde{E} = E \otimes_\alpha \ell_2^2$ es una complejificación natural de E.*

DEMOSTRACIÓN. Veremos primero que $E \otimes_\alpha \ell_2^2$ es un espacio complejo. Todas las propiedades de la norma se satisfacen de forma trivial salvo la homogeneidad. Comprobemos que

$$\|\lambda(x + iy)\|_{E \otimes_\alpha \ell_2^2} = |\lambda| \cdot \|x + iy\|_{E \otimes_\alpha \ell_2^2}$$

para todo $x, y \in E$ y cada $\lambda \in \mathbb{C}$. Podemos suponer que λ tiene norma 1. Así, si θ es el argumento de λ, entonces $\lambda = e^{i\theta}$. Por otro lado, si $u : \ell_2^2 \to \ell_2^2$ es la aplicación lineal representada por la matiz

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

entonces $\|u\| = 1$ y por lo tanto, aplicando la propiedad de uniformidad (U) se tiene que

$$\begin{aligned}
\|e^{i\theta}(x+iy)\|_{E\otimes_\alpha \ell_2^2} &= \|(x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta) + i(x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)\|_{E\otimes_\alpha \ell_2^2} \\
&= \|x\otimes(e_1\cos\theta + e_2\operatorname{sen}\theta) + y\otimes(-e_1\operatorname{sen}\theta + e_2\cos\theta)\|_{E\otimes_\alpha \ell_2^2} \\
&= \|(id_E\otimes u)(x\otimes e_1 + y\otimes e_2)\|_{E\otimes_\alpha \ell_2^2} \\
&\leq \|id_E\otimes u\|_{\mathcal{L}(E\otimes_\alpha \ell_2^2; E\otimes_\alpha \ell_2^2)}\|x\otimes e_1 + y\otimes e_2\|_{E\otimes_\alpha \ell_2^2} \\
&= \|x+iy\|_{E\otimes_\alpha \ell_2^2}.
\end{aligned}$$

Como esto se cumple para todo número real θ, se deduce que

$$\|e^{i\theta}(x+iy)\|_{E\otimes_\alpha \ell_2^2} = \|x+iy\|_{E\otimes_\alpha \ell_2^2}.$$

Sea $j_E : E \to E\otimes_\alpha \ell_2^2$ tal que $j_E(x) = x\otimes e_1$. Si $x\in E$, entonces

$$\|j_E(x)\|_{E\otimes_\alpha \ell_2^2} = \|x\otimes e_1\|_{E\otimes_\alpha \ell_2^2} = \|x\|_E\|e_1\|_{\ell_2^2} = \|x\|_E,$$

de donde se sigue el cumplimiento del Axioma (NR1). Definamos ahora la aplicación lineal $v : \ell_2^2 \to \ell_2^2$ mediante $v(e_1) = e_1$ y $v(e_2) = -e_2$. Es fácil comprobar que $\|v\| = 1$. Entonces, si $x,\ y\in E$, por la propiedad de uniformidad (U) se tiene que

$$\begin{aligned}
\|x-iy\|_{E\otimes_\alpha \ell_2^2} &= \|x\otimes e_1 - y\otimes e_2\|_{E\otimes_\alpha \ell_2^2} \\
&= \|(id_E\otimes v)(x\otimes e_1 + y\otimes e_2)\|_{E\otimes_\alpha \ell_2^2} \\
&\leq \|id_E\otimes v\|_{\mathcal{L}(E\otimes_\alpha \ell_2^2; E\otimes_\alpha \ell_2^2)}\|x\otimes e_1 + y\otimes e_2\|_{E\otimes_\alpha \ell_2^2} \\
&= \|x+iy\|_{E\otimes_\alpha \ell_2^2}.
\end{aligned}$$

Se obtiene pues que $\|x+iy\|_{E\otimes_\alpha \ell_2^2} = \|x-iy\|_{E\otimes_\alpha \ell_2^2}$. Por lo tanto se cumple el Axioma (NR2).

Por último, si $L\in\mathcal{L}(E;F)$, entonces $\widetilde{L} : E\otimes_\alpha \ell_2^2 \to F\otimes_\alpha \ell_2^2$ viene dada por $\widetilde{L} = L\otimes id_{\ell_2^2}$ (véase la Proposición 2.12). Así, por la propiedad (U) de las se sigue finalmente que $\|\widetilde{L}\| = \|L\|$. □

Observación 2.27. Dado un espacio de Banach real E, las normas de complejificaciones naturales en $\widetilde{E} = E\otimes \ell_2^2$ generadas por el producto tensorial inyectivo y el producto tensorial proyectivo tienen un interés especial. De la definición de las normas tensoriales inyectiva y proyectiva (véase la Sección 2 del Capítulo 1) y por la Proposición 2.26, las aplicaciones

$$\|x \otimes e_1 + y \otimes e_2\|_{E \otimes_\epsilon F} = \sup\{|\varphi(x)\psi(e_1) + \varphi(y)\psi(e_2)| : \ \|\varphi\|_{E^*} \leq 1, \ \|\psi\|_{\ell_2^2} \leq 1\}$$

y

$$\|x \otimes e_1 + y \otimes e_2\|_{E \otimes_\pi F} = \inf\{\sum \|x_k\|_E \cdot \|\lambda_k\|_{\ell_2^2} : \ x \otimes e_1 + y \otimes e_2 = \sum x_k \otimes \lambda_k\},$$

definidas para cada $x, y \in E$, son dos normas de complejificaciones naturales en $\widetilde{E} = E \otimes \ell_2^2$. Una manipulación elemental demuestra que $\|\cdot\|_{E \otimes_\epsilon \ell_2^2}$ coincide con la norma de Taylor (véase la Proposición 2.30). Por otro lado, veremos también que la norma $\|\cdot\|_{E \otimes_\pi \ell_2^2}$ presenta propiedades extremales notables. Esta norma fue usada por J. Bochnak en [**14**], lo que justifica que nos refiramos a ella como norma de Bochnak. La norma de Bochnak será representada con la notación $\|\cdot\|_B$.

4.3. Método por operadores lineales. En esta sección descubriremos la relación existente entre los conceptos de procedimiento natural de complejificación y el de norma de ideales de operadores (véase la Sección 3 del Capítulo 1). Veremos que si interpretamos la complejificación de un espacio de Banach real en términos de operadores lineales, entonces las normas de ideales de operadores generan procedimientos de complejificación naturales.

Proposición 2.28. *Sea E un espacio de Banach real y sea α una norma de ideales de operadores. Entonces $\widetilde{E} = \mathcal{L}(\ell_2^2; E)$ dotado con la norma $\|\cdot\|_\alpha$ es una complejificación natural de E.*

DEMOSTRACIÓN. Si α es una norma de ideal de Banach, recordamos que de acuerdo con la Definición 1.40 se tiene que

(a) para cada $a \in \ell_2^2$ y $x \in E$, entonces $\|a \otimes x\|_\alpha = \|a\| \cdot \|x\|$, y
(b) si F es un espacio de Banach real, $u \in \mathcal{L}(\ell_2^2; \ell_2^2)$, $T \in \mathcal{L}(\ell_2^2; E)$ y $v \in \mathcal{L}(E; F)$, entonces

$$\|vTu\|_\alpha \leq \|v\| \cdot \|T\|_\alpha \cdot \|u\|.$$

Nótese que si $a \in \ell_2^2$ y $x \in E$, entonces el operador $a \otimes x \in \mathcal{L}(\ell_2^2; E)$ (véase la Sección 3 del Capítulo 1) viene ahora dada por

$$(a \otimes x)(b) = < a, b > x \quad \forall b \in \ell_2^2,$$

donde $< a, b >$ representa el producto interno en ℓ_2^2 aplicado entre a y b.

Probaremos primero que $\|\cdot\|_\alpha$ es una norma compleja en $\widetilde{E}$. Se puede demostrar fácilmente que se cumplen todos los axiomas que definen una norma compleja, aunque quizá la homogeneidad compleja de $\|\cdot\|_\alpha$ requiere algo más de detenimiento. Hemos de probar que

$$\|\lambda(x+iy)\|_\alpha = |\lambda| \cdot \|x+iy\|_\alpha,$$

para todo $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Como siempre basta tomar λ de módulo 1, por ejemplo $\lambda = e^{i\theta}$ siendo $\theta \in \mathbb{R}$ su argumento. La aplicación lineal $u : \ell_2^2 \to \ell_2^2$ dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

tiene norma 1. Por lo tanto, de (b) se sigue que

$$\begin{aligned} \|e^{i\theta}(x+iy)\|_\alpha &= \|T_{x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta}\|_\alpha \\ &= \|T_{x,y}u\|_\alpha \leq \|T_{x,y}\|_\alpha \cdot \|u\| = \|x+iy\|_\alpha. \end{aligned}$$

Pero como esto es cierto para cada número real θ, en realidad tiene que haber igualdad. Dicho de otra forma $\|e^{i\theta}(x+iy)\|_\alpha = \|x+iy\|_\alpha$.

Si ahora $j_E : E \to \mathcal{L}(\ell_2^2; E)$ está definida por $j_E(x) = T_{x,0}$, de (a) se sigue que

$$\|j_E(x)\|_\alpha = \|(1,0)\otimes x\|_\alpha = \|(1,0)\|_{\ell_2^2} \cdot \|x\| = \|x\|,$$

lo cual demuestra el Axioma (NR1). Por otro lado, si definimos $v : \ell_2^2 \to \ell_2^2$ mediante $v(e_1) = e_1$ y $v(e_2) = -e_2$, entonces $\|v\| = 1$. Pero aplicando (b) una vez más se obtiene

$$\begin{aligned} \|x-iy\|_\alpha &= \|T_{x,-y}\|_\alpha = \|T_{x,y}v\|_\alpha \\ &\leq \|T_{x,y}\|_\alpha \cdot \|v\| = \|x+iy\|_\alpha, \end{aligned}$$

para cada $x, y \in E$, de donde se deduce inmediatamente el Axioma (NR2).

Finalmente, si $L \in \mathcal{L}(E;F)$ entonces $\widetilde{L} : (\mathcal{L}(\ell_2^2;E), \|\cdot\|_\alpha) \to (\mathcal{L}(\ell_2^2;F), \|\cdot\|_\alpha)$ viene dado por $\widetilde{L}(T) = LT$ para cada $T \in \mathcal{L}(\ell_2^2;E)$ (véase la Proposición 2.12). Pero como

$$\|\widetilde{L}(T)\|_\alpha = \|LT\|_\alpha \leq \|L\| \cdot \|T\|_\alpha$$

entonces $\|\widetilde{L}\| \leq \|L\|$. Esto demuestra el Axioma (PC). □

5. Complejificaciones notables.

5.1. La complejificación de Taylor. Como veremos a continuación, uno de los aspectos más interesantes de la complejificación de Taylor es que coincide con la norma reticular (véase la introducción del capítulo) en espacios $C(K)$. Además se tiene que

$$\big(\widetilde{\ell_\infty(\mathbb{R})}\big)_T = \ell_\infty(\mathbb{C}).$$

En este sentido, nótese que todo espacio de Banach real E puede considerarse como un subespacio de un cierto $C(K)$. Efectivamente, dado que B_{E^*} es compacto, si para cada $x \in E$ definimos $f_x \in C(B_{E^*})$ por $f_x(\varphi) = \varphi(x)$, entonces la aplicación $x \mapsto f_x$ es una isometría por el Teorema de Hahn-Banach.

Proposición 2.29. *Sea E un espacio de Banach real. Si E se considera como subespacio de un cierto $C(K)$, entonces la complejificación reticular y la de Taylor coinciden en $\widetilde{E}$. En particular, si E es un $C(K)$, su complejificación reticular coincide con la de Taylor.*

DEMOSTRACIÓN. Si $x, y \in E$, entonces

$$\begin{aligned}\|x + iy\|_{C_{\mathbb{C}}(B_{E^*})} &= \|f_x + i f_y\|_{C_{\mathbb{C}}(B_{E^*})} = \|\left(|f_x|^2 + |f_y|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|_{C_{\mathbb{R}}(B_{E^*})} \\ &= \sup_{\|\varphi\|_{E^*} \le 1} \left(|f_x(\varphi)|^2 + |f_y(\varphi)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sup_{\|\varphi\|_{E^*} \le 1} \sqrt{\varphi(x)^2 + \varphi(y)^2}.\end{aligned}$$

□

Como anunciábamos en la Sección 4.2, la norma de Taylor puede expresarse en términos de la norma tensorial inyectiva:

Proposición 2.30. *Sea E un espacio de Banach real. Entonces la complejificación $\widetilde{E} = E \otimes_\epsilon l_2^2$ es la complejificación de Taylor.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x, y \in E$. Entonces

$$\begin{aligned}\|x \otimes e_1 + y \otimes e_2\|_{E \otimes_\epsilon l_2^2} &= \sup\{|\varphi(x) a_1 + \varphi(y) a_2| : \ \|\varphi\|_{E^*} \le 1, \ \|(a_1, a_2)\|_{l_2^2} \le 1\} \\ &= \sup\{\sqrt{\varphi(x)^2 + \varphi(y)^2} : \ \|\varphi\|_{E^*} \le 1\} \\ &= \|x + iy\|_T.\end{aligned}$$

□

La norma de Taylor también puede expresarse en términos de una norma de ideales de operadores:

Proposición 2.31. *La norma de Taylor procede del ideal de Banach $[\mathcal{L}, \|\cdot\|]$.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración se sigue de la identidad

$$\begin{aligned}\|T_{x,y}\| &= \sup_{a^2+b^2=1} \|T_{x,y}(ae_1+be_2)\| \\ &= \sup_{a^2+b^2=1} \|ax+by\| \\ &= \sup_{0\le t\le 2\pi} \|x\cos t - y \operatorname{sen} t\| \\ &= \|x+iy\|_T,\end{aligned}$$

para cada $x, y \in E$. □

Otro aspecto notable de la complejificación de Taylor es que en virtud de la desigualdad (2.7), dado un espacio de Banach real E, de entre todas las normas razonables que podemos definir en $\widetilde{E}$, la norma $\|\cdot\|_T$ es la más pequeña. A continuación estudiamos una complejificación con propiedades extremales opuestas en este sentido a la complejificación de Taylor:

5.2. La complejificación de Bochnak. Dado un espacio de Banach real E, recordamos que la norma de Bochnak viene dada por el producto tensorial proyectivo en $E \otimes \ell_2^2$ (véase la Sección 4.2), es decir

$$\|x+iy\|_B = \inf\{\|x_k\|_E \cdot |\lambda_k| : x \otimes e_1 + y \otimes e_2 = \sum x_k \otimes \lambda_k\}.$$

Una consecuencia inmediata de la Proposición 1.32 es que la complejificación de Bochnak proporciona la complejificación reticular de los espacios $L_1(\mu)$ reales. En particular

$$(\widetilde{\ell_1(\mathbb{R})})_B = \ell_1(\mathbb{C}).$$

Si E es un espacio de Banach real, vimos en la Proposición 2.25 que toda norma razonable en $\widetilde{E} = E \otimes \ell_2^2$ es una norma tensorial razonable. Pero el producto tensorial proyectivo es la norma tensorial razonable más grande (véase la Sección 2 del Capítulo 1). Así pues se tiene para $\|\cdot\|_B$ propiedades extremales antagónicas a las de $\|\cdot\|_T$:

Proposición 2.32. *Si E es un espacio de Banach real, entonces la norma de Bochnak es la mayor norma razonable que se puede definir en $\widetilde{E}$.*

Esta caracterización de la norma de Bochnak como la norma razonable más grande que podemos definir en la complejificación de un espacio de Banach nos permitirá encontrar otra representación de la norma de Bochnak en términos de funcionales sobre $\widetilde{E}$.

Proposición 2.33. *Sea E un espacio de Banach real. Si definimos*

$$\|x+iy\|_V := \sup\{|f(x+iy)| : \; f \in \mathcal{L}_a(\widetilde{E}), \; \|f_{|_E}\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{C})} \leq 1\},$$

para cada $x, y \in E$, entonces $\|\cdot\|_V$ es una norma razonable en $\widetilde{E}$.

DEMOSTRACIÓN. La comprobación de que $\|\cdot\|_V$ es una norma compleja es un ejercicio elemental que dejamos para el lector. También es fácil probar que $\|\cdot\|_V$ verifica el Axioma (NR1). Efectivamente, si $x \in E$ entonces para toda $f \in \mathcal{L}_a(\widetilde{E})$ tal que $\|f_{|_E}\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{C})} \leq 1$, se tiene que $|f(x)| \leq \|x\|$. Esto prueba que $\|x\|_V \leq \|x\|$. Por otro lado

$$\begin{aligned}\|x\|_V &= \sup\{|f(x)| : \; f \in \mathcal{L}_a(\widetilde{E}), \; \|f_{|_E}\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{C})} \leq 1\} \\ &\geq \sup\{|\widetilde{f}(x)| : \; f \in \mathcal{L}(E), \; \|f\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1\} \\ &= \sup\{|f(x)| : \; f \in \mathcal{L}(E), \; \|f\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1\} = \|x\|,\end{aligned}$$

con lo cual $\|x\|_V = \|x\|$. Para ver que $\|\cdot\|_V$ verifica el Axioma (NR2) nótese que si $g, h \in E^*$ y $\|(g+ih)_{|_E}\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{C})} \leq 1$, entonces $\|(g-ih)_{|_E}\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{C})} \leq 1$. El Axioma (NR2) se sigue pues de la relación $|(g+ih)(x+iy)| = |(g-ih)(x-iy)|$ para cada $x, y \in E$. □

Observación 2.34. La norma $\|\cdot\|_V$ ha sido usada por I. E. Verbitskii (véase [**70**]), por esta razón nos referiremos a ella temporalmente como norma de Verbitskii. No obstante, el siguiente resultado establecido por I. E. Verbitskii [**70**] (véase también [**35**, Proposition 3.6]) revela que la norma de Verbitskii no es sino otra manifestación de la norma de Bochnak.

Proposición 2.35. *Sea E un espacio de Banach real. Si $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ es una norma razonable en $\widetilde{E}$, entonces*

$$\|x+iy\|_{\widetilde{E}} \leq \|x+iy\|_V \quad \forall x, y \in E.$$

En otras palabras, $\|\cdot\|_V$ es la norma razonable más grande que podemos definir en $\widetilde{E}$ y por lo tanto $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_B$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x, y \in E$. Entonces

$$\begin{aligned}\|x+iy\|_{\widetilde{E}} &= \sup\{|f(x+iy)| : \; f \in \mathcal{L}(\widetilde{E}), \; \|f\|_{\mathcal{L}(\widetilde{E})} \leq 1\} \\ &\leq \sup\{|f(x+iy)| : \; f \in \mathcal{L}_a(\widetilde{E}), \; \|f_{|_E}\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{C})} \leq 1\} \\ &= \|x+iy\|_V.\end{aligned}$$

□

Por la definición de norma integral (véase el final de la Sección 3 del primer Capítulo), teniendo en cuenta que $(\ell_2^2)^* = \ell_2^2$ y la dualidad existente entre las normas π y ϵ, aún es posible una representación más de la norma de Bochnak en términos de una norma de ideales de operadores:

Proposición 2.36. *Si E es un espacio de Banach real, entonces $\|\cdot\|_B$ procede de la norma integral.*

La norma de Bochnak no es fácil de calcular en la mayoría de los casos. El siguiente resultado nos proporciona una cota superior de $\|x+iy\|_B$, donde x, y son elementos de un espacio de Banach real E:

Proposición 2.37. *Sea E un espacio de Banach real y sea $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ una norma razonable en $\widetilde{E}$. Entonces, para cada $x, y \in E$ se tiene que*

$$\|x+iy\|_{\widetilde{E}} \leq \inf_{0\leq t\leq 2\pi} \left(\|x\cos t - y \operatorname{sen} t\|_E + \|x \operatorname{sen} t + y\cos t\|_E\right). \tag{2.11}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea t tal que $0 \leq t \leq 2\pi$. De la homogeneidad de $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ se deduce que

$$\|x+iy\|_{\widetilde{E}} = \|e^{it}(x+iy)\|_{\widetilde{E}} = \|(x\cos t - y\operatorname{sen} t) + i(x\operatorname{sen} t + y\cos t)\|_{\widetilde{E}}.$$

Pero usando la desigualdad triangular se obtiene que

$$\|x+iy\|_{\widetilde{E}} \leq \|x\cos t - y\operatorname{sen} t\| + \|x\operatorname{sen} t + y\cos t\|,$$

para cada t tal que $0 \leq t \leq 2\pi$. El resultado se sigue pues inmediatamente. $\square$

Observación 2.38. Si B representa la aplicación definida en $\widetilde{E}$ dada por la parte derecha de la desigualdad (2.11), es fácil comprobar que B cumple todos los axiomas que definen una norma compleja salvo quizá la propiedad triangular. Además B también satisface los Axiomas (NR1) y (NR2). Por lo tanto, sería interesante saber si la aplicación

$$B(x+iy) = \inf_{0\leq t\leq 2\pi} \left(\|x\cos t - y\operatorname{sen} t\| + \|x\operatorname{sen} t + y\cos t\|\right) \quad \forall x, y \in E,$$

es una norma en $\widetilde{E}$, en cuyo caso coincidiría con la norma de Bochnak. No obstante, se pueden dar ejemplos que prueban que en general esto no es así.

Ejemplo 2.39. *Sea $E = \ell_\infty^2 \oplus_1 \mathbb{R}$ el espacio $\mathbb{R}^3$ con la norma, $\|(t_1, t_2, t_3)\|_E = \max\{|t_1|, |t_2|\} + |t_3|$. Entonces B no verifica la propiedad triangular en $\widetilde{E}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ y $e_3 = (0,0,1)$. Entonces

$$B(e_1 + ie_2) = \inf_{0\leq t\leq 2\pi} \{\|(\cos t, -\operatorname{sen} t, 0)\|_E + \|(\operatorname{sen} t, \cos t, 0)\|_E\}$$
$$= 2 \inf_{0\leq t\leq 2\pi} \max\{|\cos t|, |\operatorname{sen} t|\} = \sqrt{2}.$$

Es inmediato que $B(e_1) = 1$. Por otro lado

$$B(e_1 + e_3 + ie_2) = \inf_{0\leq t\leq 2\pi} \{\|(\cos t, -\operatorname{sen} t, \cos t)\|_E + \|(\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} t)\|_E\}$$
$$= \inf_{0\leq t\leq 2\pi} \{2\max\{|\cos t|, |\operatorname{sen} t|\} + |\cos t| + |\operatorname{sen} t|\} = 2\sqrt{2}.$$

Por lo tanto,

$$B(e_1 + e_3 + ie_2) = 2\sqrt{2} > 1 + \sqrt{2} = B(e_3) + B(e_1 + ie_2).$$

□

Nota: Agradezco al Prof. Juan Ferrera Cuesta por su orientación en la busca del ejemplo anterior.

Por último veremos que la desigualdad (2.7) es óptima y que la norma de Bochnak representa el caso extremo:

Ejemplo 2.40. *Sea $E = \ell_2^2(\mathbb{R})$. Entonces $\|e_1 + ie_2\|_B = 2$ y $\|e_1 + ie_2\|_T = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Que $\|e_1 + ie_2\|_T = 1$ es elemental. Por otro lado, de la Proposición 1.23 se tiene que $(\ell_2^2 \otimes_\pi \ell_2^2)^*$ es isométrico a $\mathcal{B}(\ell_2^2, \ell_2^2)$. Ahora bien, $\mathcal{B}(\ell_2^2, \ell_2^2)$ es isométrico a $\mathcal{L}(\ell_2^2; \ell_2^2)$. Los elementos de $\ell_2^2 \otimes \ell_2^2$ se identifican con matrices 2×2. En particular $e_1 + ie_2$ se identifica con la matriz identidad 2×2, I_2. Por la dualidad de la traza (véase la Sección 3 del Capítulo 1) se tiene que

$$\|e_1 + ie_2\|_B = \sup\{|\operatorname{tr}(I_2 v)| : \|v\|_{\mathcal{L}(\ell_2^2;\ell_2^2)} \leq 1\}$$
$$= \sup\{|\operatorname{tr}(v) : \|v\|_{\mathcal{L}(\ell_2^2;\ell_2^2)} \leq 1\}.$$

Tomando $v = I_2$ se ve que $\|e_1 + ie_2\|_B \geq 2$ y por lo tanto $\|e_1 + ie_2\|_B = 2$. □

5.3. La complejificación de Lindenstrauss-Tzafriri. Si E es un espacio de Banach real, recordemos que la norma de Lindenstrauss-Tzafriri en $\widetilde{E}$ coincide con la norma $\|\cdot\|_{(2)}$ y por lo tanto viene dada por

$$\|x + iy\|_{LT} = \sup_{0\leq t\leq 2\pi} \{\|x\cos t - y\operatorname{sen} t\|^2 + \|x\operatorname{sen} t + y\cos t\|^2\}^{1/2},$$

para cada $x, y \in E$. Uno de los aspectos más interesantes de esta norma es que la complejificación de un espacio de Hilbert real produce un espacio de Hilbert complejo. Si H es un espacio de Hilbert real, usando su estructura de producto interno se ve fácilmente que

$$\|x+iy\|_{LT}=\sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2}\quad \forall x,y\in H.$$

Por lo tanto, la norma de Lindenstrauss-Tzafriri coincide con la norma n_2 definida por A. E. Taylor a finales de los años 30 para espacios de Hilbert. La identidad anterior muestra claramente que la norma de Lindenstrauss-Tzafriri en espacios $L_2(\mu)$ no es sino su complejificación reticular. En particular

$$(\widetilde{\ell_2(\mathbb{R})})_{LT}=\ell_2(\mathbb{C}).$$

Proposición 2.41. *Sea E un espacio de Banach real y p tal que $1\le p\le\infty$. Entonces*

$$\|x+iy\|_{(p)}\le\|x+iy\|_{(2)}\le 2^{|1/2-1/p|}\|x+iy\|_{(p)},$$

para cada $x,y\in E$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que $p\ge 2$. Entonces si $z=x+iy$, por la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\begin{aligned}\|z\|_{(2)}&=\sup_{0\le t\le 2\pi}\left(\|x\cos t-y\operatorname{sen}t\|^2+\|x\operatorname{sen}t+y\cos t\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&\le 2^{1/2-1/p}\sup_{0\le t\le 2\pi}\left(\|x\cos t-y\operatorname{sen}t\|^p+\|x\operatorname{sen}t+y\cos t\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=2^{1/2-1/p}\|z\|_{(p)}.\end{aligned}$$

Si $1\le p\le 2$, aplicando la monotonía de las normas ℓ_p encontramos que

$$\begin{aligned}\|z\|_{(2)}&=\sup_{0\le t\le 2\pi}\left(\|x\cos t-y\operatorname{sen}t\|^2+\|x\operatorname{sen}t+y\cos t\|^2\right)^{1/2}\\&\le\sup_{0\le t\le 2\pi}\left(\|x\cos t-y\operatorname{sen}t\|^p+\|x\operatorname{sen}t+y\cos t\|^p\right)^{1/p}\\&=2^{1/p-1/2}\|z\|_{(p)}.\end{aligned}$$

La otra desigualdad se prueba de forma similar. □

En espacios de Hilbert, la norma de Lindenstrauss-Tzafriri admite una representación en función de la norma de ideales de operadores 2-sumantes:

Proposición 2.42. *Si H es un espacio de Hilbert real, entonces*

$$\sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2}=\|x+iy\|_{LT}=\|x+iy\|_{\pi_2},$$

para cada $x,y\in H$.

DEMOSTRACIÓN. Simplemente hay que tener en cuenta que en $\mathcal{L}(\ell_2^2; H)$ la norma 2-sumante π_2 coincide con la norma de Hilbert-Schmidt (véase [**20**]). $\square$

Para espacios de Banach arbitrarios se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.43. *Sea E un espacio de Banach real y sea p tal que $1 \leq p < \infty$. Entonces*

$$\|x + iy\|_{(p)} \leq \begin{cases} \|x + iy\|_{\pi_p} & si \quad 2 \leq p < \infty, \\ \|x + iy\|_{\pi_2} & si \quad 1 \leq p \leq 2, \end{cases}$$

para cada $x, y \in E$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $t \in \mathbb{R}$ arbitrario y supongamos primero que $p \geq 2$. Entonces

$$\begin{aligned} \|x \cos t - y \operatorname{sen} t\|^p + &\|x \operatorname{sen} t + y \cos t\|^p \\ &= \|T_{x,y}(\cos t, -\operatorname{sen} t)\|^p + \|T_{x,y}(\operatorname{sen} t, \cos t)\|^p \\ &\leq \|x + iy\|_{\pi_p}^p \sup_{a^2+b^2=1} \left(|a \cos t - b \operatorname{sen} t|^p + |a \operatorname{sen} t + b \cos t|^p\right) \\ &= \|x + iy\|_{\pi_p}^p \sup_s \left(|\cos(s + t)|^p + |\operatorname{sen}(s + t)|^p\right). \end{aligned}$$

Como esto es cierto para todo t, se tiene que

$$\sup_u \left(|\cos u|^p + |\operatorname{sen} u|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 1 \quad (p \geq 2),$$

y entonces el resultado se cumple para todo p con $2 \leq p < \infty$. Si tomamos p con $1 \leq p \leq 2$, por la Proposición 2.41 se tiene que $\|x + iy\|_{(p)} \leq \|x + iy\|_{(2)}$. Por otro lado, se ve de la definición de norma p-sumante que $\|x + iy\|_{(2)} \leq \|x + iy\|_{\pi_p}$. Por lo tanto queda probado lo que buscábamos. $\square$

6. Problemas inherentes a las complejificaciones.

En esta sección discutiremos básicamente dos problemas relacionados con las complejificaciones. Por un lado estudiaremos el problema inverso a la complejificación, es decir, dado un espacio de Banach complejo F, se trata de encontrar un espacio de Banach real E y un procedimiento natural de complejificación ν tales que $(\widetilde{E})_\nu = F$. A este problema nos referiremos con el término *descomplejificación de espacios de Banach.* Por otro lado, dado un procedimiento natural de complejificación ν y un espacio de Banach real E, veremos bajo qué condiciones el isomorfismo natural Υ existente entre $(\widetilde{E}, \|\cdot\|_\nu)^*$ y $((E^*)^\sim, \|\cdot\|_\nu)$ (véase la Proposición 2.17) es una isometría.

6.1. Descomplejificación de espacios de Banach. En términos algebraicos todo espacio vectorial complejo se puede expresar como la complejificación de un espacio vectorial real:

Proposición 2.44. *Sea F un espacio vectorial complejo y sea $\mathcal{B} = \{e_j : j \in J\}$ una base de F, donde J es un conjunto de índices. Entonces el espacio vectorial real E generado por las combinaciones lineales reales de los elementos e_j ($j \in J$) es tal que $\widetilde{E} = F$.*

DEMOSTRACIÓN. El Axioma (C1) se satisface de forma inmediata siendo j_E la inclusión $E \hookrightarrow F$. Si $z \in F$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $z = \sum_{k=1}^{m}(\alpha_k + i\beta_k)e_{j_k}$ para ciertos índices $j_k \in J$ ($1 \leq k \leq m$) y ciertos números reales α_k, β_k ($1 \leq k \leq m$). Así, z se puede escribir como $z = x + iy$ siendo $x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_{j_k} \in E$ e $y = \sum_{k=1}^{m} \beta_k e_{j_k} \in E$. Además, si suponemos que $z = 0$, entonces $\alpha_k + i\beta_k = 0$ ($1 \leq k \leq m$), de donde $\alpha_k = \beta_k = 0$ ($1 \leq k \leq m$). En consecuencia $x = y = 0$. Esto prueba que $F = E \oplus iE$, es decir, el Axioma (C2). $\square$

El problema de descomplejificar un espacio de Banach no tiene en general una solución positiva. Par verlo nos será útil el concepto de espacio conjugado:

Definición 2.45. Se llama conjugado de un espacio de Banach complejo E y lo denotamos con $\bar{E}$ al espacio E dotado del producto exterior alternativo dado por $\lambda \odot z = \bar{\lambda} z$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ y cada $z \in E$. Decimos que E es un espacio conjugado si es isomorfo a su conjugado.

Los espacios complejificados mediante procedimientos naturales de complejificación son espacios conjugados, es más:

Proposición 2.46. *Sea E un espacio de Banach real y ν un procedimiento natural de complejificación. Entonces $(\widetilde{E})_\nu$ y $(\overline{\widetilde{E}})_\nu$ son isométricos.*

DEMOSTRACIÓN. Se define la aplicación $T : \widetilde{E} \to \overline{\widetilde{E}}$ mediante $T(x+iy) = x - iy$ para cada $x, y \in E$. Se deja al lector la comprobación de que T es efectivamente un isomorfismo algebraico. Ahora bien, por el Axioma (NR2) se comprueba directamente que $\|T(x + iy)\|_\nu = \|x - iy\|_\nu = \|x + iy\|_\nu$ para cada $x, y \in E$. Por lo tanto, T es una isometría. $\square$

N. J. Kalton proporciona en [**32**] un ejemplo no trivial de espacio de Banach complejo que no es conjugado:

Ejemplo 2.47. *Sea ω el conjunto de las sucesiones de números complejos y supongamos que $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ es la función dada por $f_\alpha(t) = t^{1+i\alpha}$ para cada $t \geq 0$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Sea $\Omega_\alpha : \ell_2 \to \omega$ la aplicación que hace corresponder a cada $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$ la sucesión $\Omega_\alpha(z)$ definida como*

$$\Omega_\alpha(z)_n = z_n f_\alpha\left(\log \frac{\|z\|_2}{|z_n|}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Convenimos en tomar como cero la parte derecha cuando $z_n = 0$. Si definimos ahora $Z_2(\alpha)$ como el espacio de pares $(z_1, z_2) \in \ell_2 \times \omega$ tales que

$$\|(z_1, z_2)\|_\alpha = \|z_1\|_{\ell_2} + \|z_2 - \Omega_\alpha(z_1)\|_{\ell_2} < \infty,$$

*entonces $Z_2(\alpha)$ es un espacio de Banach para una cierta norma equivalente a la cuasi-norma $\|\cdot\|_\alpha$ (véase también [**33**]). Además se prueba en [**32**,* Corollary 3] *que $Z_2(\alpha)$ no es isomorfo a su conjugado cuando $\alpha \neq 0$. En consecuencia, por la Proposición 2.46 el espacio $Z_2(\alpha)$ no puede obtenerse como complejificación de un espacio de Banach real por un procedimiento natural de complejificación.*

6.2. Sobre el isomorfismo natural Υ. En esta sección veremos que dado un espacio de Banach real E y un procedimiento natural de complejificación ν, el isomorfismo natural Υ define una isometría entre $(\widetilde{E}, \|\cdot\|_\nu)^*$ y $((E^*)^\sim, \|\cdot\|_\nu)$ exclusivamente cuando E es un espacio de Hilbert real. En ese caso la isometría tiene lugar cuando se usa la complejificación de Lindenstrauss-Tzafriri. Introduciremos antes de nada en nuestra terminología los conceptos de procedimientos 2-dominantes y 2-dominados (véase también la Definición 3.26):

Definición 2.48. Decimos que un procedimiento natural de complejificación ν es 2-dominante si para cada espacio de Banach real E se tiene que $\|x + iy\|_\nu \geq \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ para todo $x, y \in E$. Igualmente decimos que ν es 2-dominado si para cada espacio de Banach real E se tiene que $\|x + iy\|_\nu \leq \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ para todo $x, y \in E$.

Observación 2.49. Una simple inspección de la definición de la norma de Lindenstrauss-Tzafriri revela que da lugar a un procedimiento natural de complejificación 2-dominante. El procedimiento de Bochnak también lo es evidentemente por tratarse del procedimiento natural de complejificación más grande. La Proposición 2.43 muestra que los procedimientos p-sumantes con $1 \leq p \leq 2$, también son 2-dominantes. Por otro lado, el procedimiento de Taylor es evidentemente 2-dominado.

En la demostración usaremos también el siguiente lema:

Lema 2.50. *Si E es un espacio de Banach real y $f, g \in E^*$, entonces*

$$\sup_{\|x\|^2+\|y\|^2=1} |(f+ig)(x+iy)| = \sup_{a^2+b^2=1} \left\{\|af+bg\|^2 + \|bf-ag\|^2\right\}^{1/2}.$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}
\sup_{\|x\|^2+\|y\|^2=1} |(f+ig)(x+iy)| &= \sup_{\|x\|^2+\|y\|^2=1} \left\{[f(x)-g(y)]^2 + [f(y)+g(x)]^2\right\}^{1/2} \\
&= \sup_{\|x\|^2+\|y\|^2=1} \sup_{a^2+b^2=1} \left\{a[f(x)-g(y)] + b[f(y)+g(x)]\right\} \\
&= \sup_{a^2+b^2=1} \sup_{\|x\|^2+\|y\|^2=1} \left\{(af+bg)(x) + (bf-ag)(y)\right\} \\
&= \sup_{a^2+b^2=1} \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \sup_{c^2+d^2=1} \left\{(af+bg)(cx) + (bf-ag)(dy)\right\} \\
&= \sup_{a^2+b^2=1} \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \left\{[af(x)+bg(x))]^2 + [bf(y)-ag(y)]^2\right\}^{1/2} \\
&= \sup_{a^2+b^2=1} \left\{\|af+bg\|^2 + \|bf-ag\|^2\right\}^{1/2}.
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.51. *Sea ν un procedimiento natural de complejificación y supongamos que o bien ν es 2-dominante o ν es 2-dominado. Entonces, para cada espacio de Banach real E, el isomorfismo natural Υ entre $\left((E^*)^\sim, \|\cdot\|_\nu\right)$ y $\left((\widetilde{E})^*, \|\cdot\|_\nu\right)$ es una isometría sólo cuando E es un espacio de Hilbert real. Es más, si E es un espacio de Hilbert y Υ es una isometría, entonces $\|\cdot\|_\nu$ coincide con la norma de Lindenstrauss-Tzafriri.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que ν es 2-dominado y que el isomorfismo Υ entre $(E^*)^\sim$ y $(\widetilde{E})^*$ es una isometría. Si $\varphi, \psi \in E^*$, entonces por el Lema 2.50 se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 &\geq \|\varphi + i\psi\|^2_{(E^*)^\sim} = \|\varphi + i\psi\|^2_{(\widetilde{E})^*} = \sup_{\|x+iy\|_{\widetilde{E}}=1} |(\varphi+i\psi)(x+iy)|^2 \\
&\geq \sup_{\|x\|^2+\|y\|^2=1} |(\varphi+i\psi)(x+iy)|^2 = \sup_{a^2+b^2=1} (\|a\varphi+b\psi\|^2 + \|b\varphi-a\psi\|^2).
\end{aligned}$$

Si tomamos $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces las desigualdades anteriores implican que

$$\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 \geq \frac{1}{2}(\|\varphi + \psi\|^2 + \|\varphi - \psi\|^2).$$

Obsérvese que si ν fuera 2-dominante, entonces la última desigualdad invertiría su sentido. En cualquier caso nos encontramos ante una caracterización de los espacios definidos por productos internos (véase [**18**, p. 117]), así que E es un espacio de Hilbert real. Veamos ahora que $\|x + iy\|_\nu = \|x + iy\|_{LT} = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ para todo $x, y \in E$. Si suponemos que ν es 2-dominado, entonces para cada $x, y \in E$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|x + iy\|_\nu &= \sup_{\|\varphi + i\psi\|_{(\widetilde{E})^*} \leq 1} |(\varphi + i\psi)(x + iy)| \geq \sup_{\|\varphi + i\psi\|_{(\widetilde{E})^*} \leq 1} |\varphi(x) - \psi(y)| \\ &\geq \sup_{\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 \leq 1} |\varphi(x) - \psi(y)| = \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \|x + iy\|_\nu. \end{aligned}$$

Por tanto $\|x + iy\|_\nu = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$. Si ν se trata de un procedimiento 2-dominante, se llega a la misma conclusión de forma similar. $\square$

6.3. Otros problemas inherentes a las complejificaciones. Si E es un espacio de Banach real y F un subespacio suyo, podría pensarse que para cada procedimiento natural de complejificación ν se tiene que $(\widetilde{F}, \|\cdot\|_\nu)$ es un subespacio de $(\widetilde{E}, \|\cdot\|_\nu)$. No obstante esto no ocurre en general. De la definición de la norma de Taylor es inmediato que $(\widetilde{F}, \|\cdot\|_T)$ sí es un subespacio de $(\widetilde{E}, \|\cdot\|_T)$ (véase también la Proposición 1.34). Con más generalidad, si p y q son tales que $1 \leq p, q \leq \infty$, entonces es fácil de probar que $(\widetilde{F}, \|\cdot\|_{(p,q)})$ y $(\widetilde{F}, \|\cdot\|_{(T,q)})$ son subespacios de $(\widetilde{E}, \|\cdot\|_{(p)})$ y $(\widetilde{E}, \|\cdot\|_{(T,q)})$ respectivamente. No obstante, esto no se cumple para la complejificación de Bochnak (véase la Proposición 1.31).

Por otro lado, los espacios cocientes tampoco se preservan por complejificación en el siguiente sentido. Si F es un cociente del espacio de Banach real E, entonces $(\widetilde{F}, \|\cdot\|_\nu)$ no tiene por qué ser un cociente de $(\widetilde{E}, \|\cdot\|_\nu)$. Esto es lo que ocurre para el procedimiento de Taylor (véase la Proposición 1.34). Por el contrario, las propiedades generales del producto tensorial proyectivo aseguran que $(\widetilde{F}, \|\cdot\|_B)$ sea siempre un cociente de $(\widetilde{E}, \|\cdot\|_B)$ (véase la Proposición 1.31).

CAPíTULO 3

Complejificación de polinomios y formas multilineales.

Un resultado estándar (véase la Proposición 3.1) prueba que dados dos espacios vectoriales reales E y F y un operador n-lineal $L \in \mathcal{L}_a({}^nE; F)$, existe un único operador n-lineal $\widetilde{L} \in \mathcal{L}_a({}^n\widetilde{E}; \widetilde{F})$ que extiende L a la complejificación algebraica de E y F. Al operador $\widetilde{L}$ se le llama complejificación de L. Una consecuencia de este resultado es que si P es un polinomio homogéneo en $\mathcal{P}({}^nE; F)$ entre los espacios vectoriales reales E y F, entonces existe un único polinomio $\widetilde{P} \in \mathcal{P}({}^n\widetilde{E}; \widetilde{F})$ que extiende P a la complejificación algebraica de E y F (véase la Proposición 3.3). Al polinomio $\widetilde{P}$ se le llama complejificación de P. Si E y F son dos espacios de Banach reales y $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ y $\|\cdot\|_{\widetilde{F}}$ son dos normas razonables en $\widetilde{E}$ y $\widetilde{F}$ respectivamente, entonces veremos que las extensiones de todo operador en $\mathcal{L}({}^nE; F)$ y $\mathcal{P}_n(E; F)$ son también continuas. Ahora bien, la norma de los operadores complejificados va a depender de la complejificación que se utilice. En este capítulo veremos de qué forma varía la norma de la complejificación de un operador multilineal o un polinomio entre espacios de Banach reales y hasta qué punto podemos conseguir que la extensión conserve la norma de la aplicación real, cuando se usan varios procedimientos de complejificación. En este sentido han trabajado numerosos autores como A. E. Taylor [**66**], J. Bochnak y J. Siciak [**15**], R. Aron, B. Beauzamy y P. Enflo [**3**], M. Lacruz [**38**], P. Kirwan [**35**] y G. A. Muñoz, Y, Sarantopoulos y A. Tonge [**48**].

1. Complejificación algebraica de polinomios y operadores multilineales.

Dado un operador multilineal definido entre espacios vectoriales reales, su extensión queda determinada de forma única por linealidad. Ya se vio en la Proposición 2.12 cómo funciona la extensión compleja para el caso de operadores lineales. Veamos cómo llevar a cabo la extensión de operadores bilineales. Sean E y F dos espacios vectoriales reales y $L \in \mathcal{L}_a({}^2E; F)$. Entonces para $x_k, y_k \in E$ $(k = 1, 2)$, la extensión lineal $\widetilde{L}$ de L viene dada por

$$\begin{aligned}\widetilde{L}(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) &= \widetilde{L}(x_1, x_2) - \widetilde{L}(y_1, y_2) + i[\widetilde{L}(x_1, y_2) + \widetilde{L}(y_1, x_2)] \\ &= L(x_1, x_2) - L(y_1, y_2) + i[L(x_1, y_2) + L(y_1, x_2)]. \qquad (3.1)\end{aligned}$$

Se comprueba fácilmente que $\widetilde{L}$ es efectivamente un operador bilineal en $\mathcal{L}_a({}^2\widetilde{E};\widetilde{F})$. La generalización de este razonamiento proporciona la extensión de un operador multilineal arbitrario (véase por ejemplo [**15**, Theorem 3]):

Proposición 3.1. *Si E y F son dos espacios vectoriales reales y $L \in \mathcal{L}_a({}^nE;F)$, entonces el único operador n-lineal $\widetilde{L}$ definido entre $\widetilde{E}^n$ y $\widetilde{F}$ que extiende L a $\widetilde{E}^n$ viene dado por*

$$\widetilde{L}(x_1^0 + ix_1^1, \dots, x_n^0 + ix_n^1) = \sum i^{\sum_{j=1}^n \epsilon_j} L(x_1^{\epsilon_1}, \dots, x_n^{\epsilon_n}), \tag{3.2}$$

donde $x_k^0, x_k^1 \in E$ y la suma se extiende a las 2^n elecciones independientes de $\epsilon_k = 0, 1$ $(1 \le k \le n)$.

Se observa que el operador complejificación preserva la simetría de los elementos de $\mathcal{L}_a^s({}^nE;F)$:

Corolario 3.2. *Si E y F son espacios vectoriales reales y $L \in \mathcal{L}_a^s({}^nE;F)$, entonces $\widetilde{L} \in \mathcal{L}_a^s({}^n\widetilde{E};\widetilde{F})$.*

Se puede obtener un resultado similar para polinomios. Primero veamos cómo se extienden para un caso sencillo. Si E y F son dos espacios vectoriales reales, $P \in \mathcal{P}_a({}^2E;F)$ y $L \in \mathcal{L}_a^s({}^2E;F)$ es la polar de P, entonces de (3.1) se deduce directamente que la extensión compleja de P viene dada de forma única por

$$\widetilde{P}(x+iy) = P(x) - P(y) + 2iL(x,y) \quad \forall x, y \in E.$$

Para el caso general se tiene lo siguiente (véase por ejemplo [**66**, p. 313]):

Proposición 3.3. *Si E y F son dos espacios vectoriales reales y $P \in \mathcal{P}_a({}^nE;F)$, entonces el único polinomio n-homogéneo $\widetilde{P}$ definido entre $\widetilde{E}$ y $\widetilde{F}$ que extiende P a $\widetilde{E}$ viene dado por*

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(x+iy) = &\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k} L(x^{n-2k}y^{2k}) \\ &+ i \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k \binom{n}{2k+1} L(x^{n-(2k+1)}y^{2k+1}).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Igualmente, si $P \in \mathcal{P}_{n,a}(E;F)$ es tal que $P = \sum_{k=0}^n P_k$ con $P_k \in \mathcal{P}_a({}^nE;F)$ $(0 \le k \le n)$, entonces P tiene una única extensión compleja $\widetilde{P}$ determinada por $\widetilde{P} = \sum_{k=0}^n \widetilde{P}_k$, donde $\widetilde{P} = P_0$.

Estas dos proposiciones sugieren la siguiente definición:

Definición 3.4. Si $L \in \mathcal{L}_a(^nE;F)$ y $P \in \mathcal{P}_a(^nE;F)$, se definen sus complejificaciones $\widetilde{L}$ y $\widetilde{P}$ como el único operador n-lineal $\widetilde{L} \in \mathcal{L}_a(^n\widetilde{E};\widetilde{F})$ y el único polinomio n-homogéneo $\widetilde{P} \in \mathcal{P}_a(^n\widetilde{E};\widetilde{F})$ que extiende L y P a $\widetilde{E}^n$ y $\widetilde{E}$, respectivamente, con valores en $\widetilde{F}$. Nótese que $\widetilde{L}$ y $\widetilde{P}$ vienen dados por (3.2) y (3.3). Igualmente, si $P \in \mathcal{P}_{n,a}(E;F)$, su complejificación es el único polinomio $\widetilde{P} \in \mathcal{P}_{n,a}(\widetilde{E};\widetilde{F})$ que extiende P a los espacios $\widetilde{E}$ y $\widetilde{F}$.

Ejemplo 3.5. *La complejificación de polinomios en $\mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$) consiste simplemente en sustituir las variables reales por variables complejas. Así, si P es un polinomio en m variables reales, entonces*

$$\widetilde{P}(x+iy) = P(x_1+iy_1,\dots,x_m+iy_m),$$

para cada $x=(x_1\dots,x_m)$ e $y=(y_1\dots,y_m)$ en $\mathbb{R}^m$.

Observación 3.6. Para cada par de espacios vectoriales reales E y F, teniendo en cuenta la unicidad de las extensiones, se sigue de forma trivial que el operador complejificación $\sim$ define una aplicación lineal real entre $\mathcal{L}_a(^nE;F)$ y $\mathcal{L}_a(^n\widetilde{E};\widetilde{F})$ por un lado y $\mathcal{P}_{n,a}(E;F)$ y $\mathcal{P}_{n,a}(\widetilde{E};\widetilde{F})$ por otro. En otras palabras

$$(\alpha L_1+\beta L_2)^\sim = \alpha\widetilde{L}_1+\beta\widetilde{L}_2 \quad \forall L_1,L_2 \in \mathcal{L}_a(^nE;F), \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R},$$

$$(\alpha P_1+\beta P_2)^\sim = \alpha\widetilde{P}_1+\beta\widetilde{P}_2 \quad \forall P_1,P_2 \in \mathcal{P}_{n,a}(E;F), \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

En virtud del Corolario 3.2 y la Proposición 3.3, el operador complejificación $\sim$ restringido a $\mathcal{L}_a^s(^nE;F)$ y $\mathcal{P}_a(^nE;F)$ toma valores en $\mathcal{L}_a^s(^n\widetilde{E};\widetilde{F})$ y $\mathcal{P}_a(^n\widetilde{E};\widetilde{F})$, respectivamente. Por otro lado, si G es otro espacio vectorial real, usando la unicidad de las extensiones se tiene también que

$$(P_1\cdot P_2)^\sim = \widetilde{P}_1\cdot\widetilde{P}_2 \quad \forall P_1,P_2 \in \mathcal{P}_{n,a}(^nE;F),$$

$$(P_1\circ P_2)^\sim = \widetilde{P}_1\circ\widetilde{P}_2 \quad \forall P_1 \in \mathcal{P}_{n,a}(^nE;F), \quad \forall P_2 \in \mathcal{P}_{n,a}(^nF;G),$$

donde $\cdot$ representa el producto usual de operadores y $\circ$ se refiere a su composición.

2. Complejificación de operadores con valores escalares.

En esta sección comenzamos el estudio comparativo de las normas de un operador multilineal o un polinomio homogéneo con las normas de sus complejificaciones respectivas para varios procedimientos naturales de complejificación. Nos limitaremos al estudio de operadores con valores escalares, que es más sencillo de tratar gracias a la Proposición 3.8. Sea E un espacio de Banach real y sea ν un procedimiento natural de complejificación. Para cada $L \in \mathcal{L}(^nE)$ y $P \in \mathcal{P}(^nE)$, denotemos con $\|\widetilde{L}\|_\nu$ y $\|\widetilde{P}\|_\nu$ la norma de L y P como operadores definidos en $(\widetilde{E},\|\cdot\|_\nu)^n$ y

$(\widetilde{E}, \|\cdot\|_\nu)$ respectivamente. Para empezar, es evidente que las normas de las extensiones de $\widetilde{L}$ y $\widetilde{P}$ verifican que $\|\widetilde{L}\|_\nu \geq \|L\|$ y $\|\widetilde{P}\|_\nu \geq \|P\|$. Por otro lado, buscamos constantes M_1 y M_2 tales que

$$\|\widetilde{L}\|_\nu \leq M_1\|L\| \quad \forall L \in \mathcal{L}(^nE), \tag{3.4}$$

$$\|\widetilde{P}\|_\nu \leq M_2\|P\| \quad \forall P \in \mathcal{P}(^nE). \tag{3.5}$$

El valor óptimo de las constantes en las desigualdades (3.4) y (3.5) depende del procedimiento de complejificación usado y del espacio que se considere. Esto motiva las siguientes definiciones:

Definición 3.7. Dado un espacio de Banach real E y un procedimiento natural de complejificación ν, se definen las constantes $\mathcal{L}_\nu(n; E)$ y $\mathcal{P}_\nu(n; E)$ como los valores óptimos de M_1 y M_2 en (3.4) y (3.5) respectivamente, es decir

$$\mathcal{L}_\nu(n; E) := \inf\{M_1 : \ \|\widetilde{L}\|_\nu \leq M_1\|L\|, \ \forall L \in \mathcal{L}(^nE)\},$$

$$\mathcal{P}_\nu(n; E) := \inf\{M_2 : \ \|\widetilde{P}\|_\nu \leq M_2\|P\|, \ \forall P \in \mathcal{P}(^nE)\}.$$

Nuestro primer resultado nos permite limitarnos a la parte real o imaginaria de la complejificación de operadores en $\mathcal{L}(^nE)$ ó $\mathcal{P}(^nE)$ a la hora de estimar su norma. Nótese antes de nada que si $L \in \mathcal{L}(^nE)$ (respectivamente $P \in \mathcal{P}(^nE)$), entonces $\operatorname{Re}\widetilde{L}$ y $\operatorname{Im}\widetilde{L}$ (respectivamente $\operatorname{Re}\widetilde{P}$ y $\operatorname{Im}\widetilde{P}$) son dos formas n-lineales en $\widetilde{E}^n$ en sentido real (respectivamente dos polinomios n-homogéneos en $\widetilde{E}$ en sentido real).

Proposición 3.8. *Sea E un espacio de Banach real y ν un procedimiento natural de complejificación. Entonces para cada $L \in \mathcal{L}(^nE)$ y $P \in \mathcal{P}(^nE)$ se tiene que*

$$\|\widetilde{L}\|_\nu = \|\operatorname{Re}\widetilde{L}\|_\nu = \|\operatorname{Im}\widetilde{L}\|_\nu,$$

$$\|\widetilde{P}\|_\nu = \|\operatorname{Re}\widetilde{P}\|_\nu = \|\operatorname{Im}\widetilde{P}\|_\nu.$$

DEMOSTRACIÓN. Dado $x_k + iy_k \in \widetilde{E}$ $(1 \leq k \leq n)$, siempre se puede encontrar un número real t, tal que

$$e^{it}\widetilde{L}(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) = |\widetilde{L}(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)|.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}|\widetilde{L}(x_1+iy_1,\dots,x_n+iy_n)| &= \widetilde{L}\big(e^{i\frac{t}{n}}(x_1+iy_1),\dots,e^{i\frac{t}{n}}(x_n+iy_n)\big)\\ &= \operatorname{Re}\widetilde{L}\big(e^{i\frac{t}{n}}(x_1+iy_1),\dots,e^{i\frac{t}{n}}(x_n+iy_n)\big)\\ &\le \|\operatorname{Re}\widetilde{L}\|_\nu \|e^{i\frac{t}{n}}(x_1+iy_1)\|_\nu\cdots\|e^{i\frac{t}{n}}(x_n+iy_n)\|_\nu\\ &= \|\operatorname{Re}\widetilde{L}\|_\nu\|x_1+iy_1\|_\nu\cdots\|x_n+iy_n\|_\nu.\end{aligned}$$

Es decir, $\|\widetilde{L}\|_\nu \le \|\operatorname{Re}\widetilde{L}\|_\nu$. Como la desigualdad recíproca es evidente, concluimos que $\|\widetilde{L}\|_\nu = \|\operatorname{Re}\widetilde{L}\|_\nu$. Igualmente se tiene $\|\widetilde{L}\|_\nu = \|\operatorname{Im}\widetilde{L}\|_\nu$. El mismo argumento funciona para polinomios homogéneos. □

2.1. Estimaciones para un procedimiento de complejificación genérico. El resultado central de esta sección es una versión general de una desigualdad muy conocida en Teoría de la Aproximación. Se trata de la desigualdad de Chebyshev sobre el coeficiente del término de mayor grado en un polinomio:

Teorema 3.9 (Desigualdad de Chebyshev). *Si $p(t)=\sum_{k=0}^n a_k t^k$, $\forall t\in\mathbb{R}$ es un polinomio real de grado $\ge n$ $(n\ge 1)$, entonces*

$$|a_n| \le 2^{n-1}\max_{-1\le t\le 1}|p(t)|. \tag{3.6}$$

Además, el resultado es óptimo pues la igualdad se alcanza para el polinomio de Chebyshev de la primera especie de grado n definido en el intervalo $[-1,1]$ por $T_n(t)=\cos(n\arccos t)$, $\forall t\in[-1,1]$.

Un antiguo resultado de V. Markov (véase [**49**, p.56]) nos permite disponer de estimaciones óptimas para los otros coeficientes del polinomio real $p=\sum_{k=0}^n a_k t^k$. En particular se tiene que

$$|a_{n-1}| \le 2^{n-2}\max_{-1\le t\le 1}|p(t)|. \tag{3.7}$$

Usando una técnica de C. Visser, se prueba las siguientes extensiones de (3.6) y (3.7):

Teorema 3.10. *Sea $P=P_n+\ldots+P_0:\ell_\infty^m(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ un polinomio de grado $\le n$ con $P_k\in\mathcal{P}({}^k\ell_\infty^m(\mathbb{R}))$ $(0\le k\le n)$. Entonces*

$$\|\widetilde{P}_n\|_T = \sup_{\substack{0\le t_k\le 2\pi\\ 1\le k\le m}}|P_n(e^{it_1},\dots,e^{it_m})| \le 2^{n-1}\|P\|_{\ell_\infty^m(\mathbb{R})}\quad (n\ge 1), \tag{3.8}$$

$$\|\widetilde{P}_{n-1}\|_T = \sup_{\substack{0\le t_k\le 2\pi\\ 1\le k\le m}}|P_{n-1}(e^{it_1},\dots,e^{it_m})| \le 2^{n-2}\|P\|_{\ell_\infty^m(\mathbb{R})}\quad (n\ge 2). \tag{3.9}$$

Observación 3.11. Nótese que en las igualdades de (3.8) y (3.9) hemos usado el hecho de que la norma de Taylor proporciona la complejificación reticular de $\ell_\infty^m(\mathbb{R})$ (véase la Proposición 2.29). Por otro lado, la desigualdad (3.8) se debe a C. Visser [**71**], mientras que H.-J. Rack obtuvo (3.9) en [**51**] a partir de una modificación de la demostración de C. Visser (véase también [**52**] y [**55**]).

2.1.1. **Una primera aplicación.** La desigualdad (3.8) puede aplicarse para obtener una cota inferior óptima de la norma de un polinomio con coeficientes reales en varias variables en función de los coeficientes de los términos de mayor grado. Este problema ya ha sido investigado previamente por varios autores (véase [**3**], [**4**] y [**5**]). Todo polinomio P de grado n en $\mathbb{K}^m$ con coeficiente en $\mathbb{K}$ puede escribirse de la siguiente forma canónica:

$$P(t_1, \dots, t_m) = \sum_{j=1}^{m} a_j t_j^n + \sum_{|N| \leq n} a_N t_1^{N_1} \cdots t_m^{N_m} \quad \forall (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{K}^m, \tag{3.10}$$

donde $N = (N_1, \dots, N_m) \in \mathbb{N}^m$, $|N| = N_1 + \dots + N_m$ y las m-tuplas N tales que $|k| = n$ tienen al menos dos componentes distintas de cero. Si P se escribe en términos de sus componentes homogéneas, es decir $P = P_n + \dots + P_0$ con $P_k \in \mathcal{P}_a({}^k\mathbb{K}^m)$ $(0 \leq k \leq m)$, se ha probado en [**4**] (véase también [**5**] y el Teorema 1.1 de [**3**]) que

$$\sum_{j=1}^{m} |a_j| \leq \sup_{\substack{0 \leq t_k \leq 2\pi \\ 1 \leq k \leq m}} |P_n(e^{it_1}, \dots, e^{it_m})| = \|P_n\|_{\ell_\infty^m(\mathbb{C})}. \tag{3.11}$$

Una estimación similar has sido probada para el caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (véase el Teorema 1.6 en [**3**]):

$$\sum_{j=1}^{m} |a_j| \leq 2^{n+2} n^2 \sup_{\substack{-1 \leq t_k \leq 1 \\ 1 \leq k \leq m}} |P(t_1, \dots, t_m)| = 2^{n+2} n^2 \|P\|_{\ell_\infty^m(\mathbb{R})}. \tag{3.12}$$

No obstante, usando la desigualdad (3.8) junto con la estimación (3.11), la constante $2^{n+2}n^2$ en (3.12) puede mejorarse considerablemente como sigue:

Proposición 3.12. *Sea P un polinomio de grado n en $\mathbb{R}^m$ con coeficientes reales que supondremos escrito en la forma (3.10). Entonces*

$$\sum_{j=1}^{m} |a_j| \leq 2^{n-1} \sup_{\substack{-1 \leq t_k \leq 1 \\ 1 \leq k \leq m}} |P(t_1, \dots, t_m)| = 2^{n-1} \|P\|_{\ell_\infty^m(\mathbb{R})}.$$

Además la constante 2^{n-1} es óptima pues la igualdad se alcanza para el polinomio definido por $P(t_1, \dots, t_m) = \sum_{k=1}^{m} T_n(t_k)$ $\forall (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$, donde T_n es el polinomio de Chebyshev de grado n de la primera especie.

2.1.2. **Estimaciones generales para formas multilineales y polinomios homogéneos.** Como veremos a continuación, las desigualdades (3.8) y (3.9) se pueden probar en un contexto más general utilizando una extensión de la técnica de C. Visser. Antes necesitaremos dos lemas elementales:

Lema 3.13. *Para cada par de números enteros p y n se cumple la siguiente relación ortogonal:*

$$\frac{1}{2n}\sum_{p=0}^{2n-1}(-1)^p e^{ikp\pi/n} = \begin{cases} 1 & si\ k = n\ (mod\ 2n) \\ 0 & si\ k \neq n\ (mod\ 2n). \end{cases} \tag{3.13}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $a = e^{i(n+k)\pi/n}$. Entonces

$$\sum_{p=0}^{2n-1}(-1)^p e^{ikp\pi/n} = \sum_{p=0}^{2n-1} e^{ip\pi} e^{ikp\pi/n} = \sum_{p=0}^{2n-1}[e^{i(n+k)\pi/n}]^p = \sum_{p=0}^{2n-1} a^p. \tag{3.14}$$

Supongamos que $k = n$ (mod $2n$). Entonces existe m entero tal que $k = 2nm + n$, es decir, $(n+k)/n$ es par y en consecuencia $a = 1$. Por lo tanto, el resultado se obtiene de la identidad (3.14). Si ahora $k \neq n$ (mod $2n$), entonces $k \neq 2nm + n$ para cada m entero, lo que implica que $(n+k)/n$ no es un número entero par. Entonces $a \neq 1$ y $\sum_{p=0}^{2n-1} a^p = (1 - a^{2n})/(1-a)$, pero como $a^{2n} = 1$, entonces el resultado se sigue de (3.14). □

Por su simplicidad dejamos al lector la demostración del siguiente lema:

Lema 3.14. *Para cada número complejo λ y cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$\sup_t |\lambda e^{int} + \bar{\lambda} e^{-int}| = 2|\lambda|.$$

Proposición 3.15. *Sea E un espacio de Banach real y ν un procedimiento natural de complejificación. Si $P \in \mathcal{P}_n(E)$ es tal que $P = \sum_{k=0}^{n} P_k$ con $P_k \in \mathcal{P}(^kE)$ $(0 \leq k \leq n)$, entonces*

$$\|\widetilde{P}_n\|_\nu \leq 2^{n-1}\|P\| \quad (n \geq 1), \tag{3.15}$$

$$\|\widetilde{P}_{n-1}\|_\nu \leq 2^{n-2}\|P\| \quad (n \geq 2). \tag{3.16}$$

Además las desigualdades (3.15) y (3.16) son óptimas en general, alcanzándose la igualdad para $E = \mathbb{R}$ y $P = T_n$.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos $z = x + iy \in (\widetilde{E}, \|\cdot\|_\nu)$ tal que $\|z\|_\nu = 1$. Definamos el polinomio trigonométrico f de grado $\leq n$ mediante la identidad

$$f(t) := \widetilde{P}\left(\frac{ze^{it} + \bar{z}e^{-it}}{2}\right) = P(x\cos t - y \operatorname{sen} t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}. \tag{3.17}$$

Obsérvese que

$$a_n = \frac{1}{2^n}\widetilde{P}_n(z), \; a_{-n} = \bar{a}_n = \frac{1}{2^n}\widetilde{P}_n(\bar{z}) \quad \text{y} \tag{3.18}$$

$$a_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}\widetilde{P}_{n-1}(z), \; a_{-(n-1)} = \bar{a}_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}\widetilde{P}_{n-1}(\bar{z}). \tag{3.19}$$

Como $\sup_t \|x\cos t - y \operatorname{sen} t\| = \|z\|_T \leq \|z\|_\nu = 1$, se tiene que

$$|f(t)| \leq \|P\| \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.20}$$

Ahora usando (3.17), (3.18) y la fórmula (3.13) se deduce que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2n}\sum_{p=0}^{2n-1}(-1)^p f(t + p\frac{\pi}{n}) &= \frac{1}{2n}\sum_{p=0}^{2n-1}(-1)^p \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ik(t+p\pi/n)} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}\left[\frac{1}{2n}\sum_{p=0}^{2n-1}(-1)^p e^{ikp\pi/n}\right] \\
&= a_n e^{int} + a_{-n}e^{-int} = \frac{1}{2^n}\widetilde{P}_n(z)e^{int} + \frac{1}{2^n}\widetilde{P}_n(\bar{z})e^{-int}.
\end{aligned}$$

Considerando (3.20) junto con la identidad anterior, encontramos que

$$\sup_t |\widetilde{P}_n(z)e^{int} + \widetilde{P}_n(\bar{z})e^{-int}| \leq 2^n\|P\|.$$

Por otro lado, puesto que $\widetilde{P}(\bar{z}) = \overline{\widetilde{P}_n(z)}$, por el Lema 3.14, tenemos que

$$\sup_t |\widetilde{P}_n(z)e^{int} + \widetilde{P}_n(\bar{z})e^{-int}| = \sup_t |\widetilde{P}_n(z)e^{int} + \overline{\widetilde{P}_n(z)}e^{-int}| = 2|\widetilde{P}_n(z)|,$$

de donde se sigue inmediatamente la desigualdad (3.15).

Para demostrar (3.16) procedemos como en la demostración de (3.15), pero usando (3.17), (3.19) y la fórmula (3.13) con $n-1$ en lugar de n. $\square$

De las desigualdades (3.15) y (3.16) se deduce una generalización inmediata de las estimaciones (3.6) y (3.7). A saber, si $P = \sum_{k=0}^{n} P_k$ con $P_k \in \mathcal{P}(^nE)$ $(0 \leq k \leq n)$ es un polinomio de grado $\leq n$ en un espacio de Banach real E, entonces $\|P_n\| \leq 2^{n-1}\|P\|$ y $\|P_{n-1}\| \leq 2^{n-2}\|P\|$. Pero estas estimaciones generales sobre las normas de P_n y P_{n-1} son fácilmente deducibles a partir de las correspondientes estimaciones para el caso de polinomios en una variable, es más, también se dispone de estimaciones óptimas de la norma de las otras componentes homogéneas de P:

Teorema 3.16 (V. Markov). *Sea E un espacio de Banach real y supongamos que $P = \sum_{k=0}^{n} P_k \in \mathcal{P}_n(E)$, donde $P_k \in \mathcal{P}(^kE)$ $(0 \leq k \leq n)$. Entonces, si $k \geq 1$*

$$\|P_k\| \leq 2^{k-1}\frac{n(\frac{n+k}{2}-1)!}{k!(\frac{n-k}{2})!}\|P\| \quad \textit{si } n-k \textit{ es par,} \tag{3.21}$$

$$\|P_k\| \leq 2^{k-1}\frac{(n-1)(\frac{n+k-1}{2}-1)!}{k!(\frac{n-k-1}{2})!}\|P\| \quad \textit{si } n-k \textit{ es impar.} \tag{3.22}$$

DEMOSTRACIÓN. El resultado se demuestra reduciendo el problema al caso de polinomios en una variable. Efectivamente, sea $x \in \bar{B}_E$ y definamos el polinomio $p(t) = P(tx) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)t^k$. Entonces $\max_{-1\leq t\leq 1}|p(t)| \leq \|P\|$ y por lo tanto basta aplicar las estimaciones clásicas (véase [**49**, p. 56]) a los coeficientes de p para obtener lo buscado. □

Observación 3.17. En el caso complejo las estimaciones (3.21) y (3.22) pueden simplificarse sensiblemente. Si E es un espacio de Banach complejo y $P = \sum_{k=0}^{n} P_k \in \mathcal{P}_n(E)$ con $P_k \in \mathcal{P}(^kE)$ $(0 \leq k \leq n)$, entonces $\|P_k\| \leq \|P\|$ (véase por ejemplo [**20**, p. 330]). Por otro lado, si ahora E es un espacio de Banach real, de la desigualdad $\|P_n\| \leq \|P\|$ se deduce una estimación óptima de la norma de la derivada n-ésima de un polinomio en un espacio de Banach real (véase la Proposición 4.30).

La desigualdad (3.15) se cumple en particular para los polinomios homogéneos. Además una ligera modificación de su demostración prueba un resultado similar para formas multilineales:

Proposición 3.18. *Sea E un espacio de Banach real y ν un procedimiento natural de complejificación. Entonces para cada $P \in \mathcal{P}(^nE)$ y $L \in \mathcal{L}(^nE)$ se tiene*

$$\|\widetilde{P}\|_\nu \leq 2^{n-1}\|P\|, \tag{3.23}$$

$$\|\widetilde{L}\|_\nu \leq 2^{n-1}\|L\|. \tag{3.24}$$

DEMOSTRACIÓN. La desigualdad (3.24) se prueba a partir de la demostración de la Proposición 3.15, sólo que redefiniendo (3.17) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} f(t) := & \widetilde{L}\Big(\frac{z_1 e^{it} + \bar{z}_1 e^{-it}}{2}, \dots, \frac{z_n e^{it} + \bar{z}_n e^{-it}}{2}\Big) \\ = & L(x_1 \cos t - y_1 \operatorname{sen} t, \dots, x_n \cos t - y_n \operatorname{sen} t) \\ = & \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}, \end{aligned}$$

para $z_k = x_k + iy_k \in \widetilde{E}$ con $\|z_k\|_\nu = 1$ $(1 \leq k \leq n)$ y teniendo en cuenta que ahora $a_n = \frac{1}{2^n}\widetilde{L}(z_1, \dots, z_n)$ y $a_{-n} = \bar{a}_n = \frac{1}{2^n}\widetilde{L}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$. □

Como veremos en el siguiente ejemplo, las desigualdades (3.23) y (3.24) son óptimas. Además la desigualdad (3.24) tampoco se puede mejorar aun considerando solamente formas multilineales simétricas. Por último, la constante 2^{n-2} en (3.16) no se puede mejorar aunque se consideren polinomios de grado exactamente n:

Ejemplo 3.19. *Para cada $1 \leq m \leq n$ definimos el polinomio $P_m \in \mathcal{P}(^m\ell_2^2)$ mediante la fórmula*

$$P_m(x) = \operatorname{Re}(x_1 + ix_2)^m \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \ell_2^2.$$

Sea L_m la polar de P_m $(1 \leq m \leq n)$. Entonces si usamos la complejificación de Taylor se tiene

(a) $\|\widetilde{P}_n\|_T = 2^{n-1}\|P_n\|$
(b) $\|\widetilde{L}_n\|_T = 2^{n-1}\|L_n\|$
(c) $\lim_{t\to 0^+} \|\widetilde{P}_{n-1}\|_T / \|tP_n + P_{n-1}\| = 2^{n-2}$.

DEMOSTRACIÓN. Como $\|P_m\| = L_m(1,0) = 1$, entonces según el Teorema 1.8 tenemos que $\|L_m\| = \|P_m\| = 1$. Por otro lado, para cada $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, se tiene que $L_m(x^{m-2k}y^{2k}) = \operatorname{Re}(x_1 + ix_2)^{m-2k}(y_1 + iy_2)^{2k}$. Por lo tanto, de (3.3) se deduce que

$$\operatorname{Re}\widetilde{P}_m(x + iy) = \operatorname{Re}\Big\{\sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]}(-1)^k\binom{m}{2k}(x_1 + ix_2)^{m-2k}(y_1 + iy_2)^{2k}\Big\}.$$

Tomemos $x = (1,0)$ e $y = (0,1)$. Entonces $\|x + iy\|_T = \sup_\theta \|(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\|_{\ell_2^2} = 1$ y

$$\operatorname{Re}\widetilde{P}_m\big((1,0) + i(0,1)\big) = \sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]}\binom{m}{2k} = 2^{m-1}.$$

Por lo tanto, por la Proposición 3.8 tenemos $\|\widetilde{P}_m\|_T = \|\operatorname{Re}\widetilde{P}_m\|_T \geq 2^{m-1}$, de donde se sigue que

$$\|\widetilde{L}_m\|_T \geq \|\widetilde{P}_m\|_T \geq 2^{m-1}\|P_m\| = 2^{m-1}\|L_m\|.$$

No obstante, según (3.23) las desigualdades anteriores se convierten en igualdades:

$$\|\widetilde{L}_m\|_T = 2^{m-1}\|L_m\| \quad \text{y} \quad \|\widetilde{P}_m\|_T = 2^{m-1}\|P_m\|.$$

Tomando ahora $m = n$ obtenemos (a) y (b). Para demostrar (c) veamos que para $t > 0$ se tiene que

$$\|tP_n + P_{n-1}\| = 1 + t.$$

Como $(tP_n + P_{n-1})(1,0) = 1 + t$, la norma es al menos $1 + t$. Por otro lado, si $|x_1 + ix_2| \leq 1$ entonces

$$\left|\operatorname{Re}\left(t(x_1 + ix_2)^n + (x_1 + ix_2)^{n-1}\right)\right| \leq |t(x_1 + ix_2)^n + (x_1 + ix_2)^{n-1}| \leq 1 + t,$$

de tal manera que la norma no puede superar $1 + t$. $\square$

Observación 3.20. La desigualdad (3.24) ha sido probada de forma independiente por P. Kirwan en [**35**, Corollary 5.6]. El mismo autor ha encontrado también [**35**, Corollary 5.15] una desigualdad similar a (3.23), pero con la constante 2^n que es ligeramente peor. En ambos casos, la técnica empleada por P. Kirwan está basada en la siguiente fórmula de polarización (véase [**35**, Theorem 5.14]): Si E es un espacio de Banach real, $P \in \mathcal{P}(^nE)$ y $x, y \in E$, entonces

$$\widetilde{P}(x + iy) = \frac{2^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta)e^{in\theta}d\theta. \tag{3.25}$$

Una ligera modificación del argumento usado por P. Kirwan para obtener (3.25) nos permite probar la siguiente generalización:

Proposición 3.21. *Sea E un espacio de Banach real y $P = \sum_{k=0}^n P_k$ con $P_k \in \mathcal{P}(^kE)$ $(0 \leq k \leq n)$. Entonces, para cada $x + iy \in \widetilde{E}$ se tiene*

$$\widetilde{P}_n(x + iy) = \frac{2^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta)e^{in\theta}d\theta, \tag{3.26}$$

$$\widetilde{P}_{n-1}(x + iy) = \frac{2^{n-1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta)e^{i(n-1)\theta}d\theta. \tag{3.27}$$

Usando las técnicas de P. Kirwan hemos sido capaces de mejorar la constante 2^n obtenida por este autor en la desigualdad (3.23), no obstante no hemos so capaces de encontrar aun el valor óptimo demostrado por otros métodos en la Proposición 3.18.

Proposición 3.22. *Sea E un espacio de Banach real y $P = \sum_{k=0}^{n} P_k$ con $P_k \in \mathcal{P}(^kE)$ $(0 \leq k \leq n)$. Entonces si ν es un procedimiento natural de complejificación, usando las identidades (3.26) y (3.27) se obtiene*

$$\|\widetilde{P}_n\|_\nu \leq 2^{n-1/2}\|P\|, \tag{3.28}$$

$$\|\widetilde{P}_{n-1}\|_\nu \leq 2^{n-3/2}\|P\|. \tag{3.29}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $x + iy \in \widetilde{E}$ tal que $\|x + iy\|_\nu \leq 1$ y definamos el polinomio trigonométrico T de grado $\leq n$ como

$$T(\theta) = P(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\theta} \quad \forall \theta \in \mathbb{R},$$

donde

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T(\theta)e^{-ik\theta}d\theta \quad (-n \leq k \leq n).$$

En particular, por (3.26) se tiene que $c_{-n} = 2^{-n}\widetilde{P}_n(x + iy)$. Igualmente, tomando conjugados en ambos lados de la identidad (3.26) obtenemos también que $c_n = 2^{-n}\overline{\widetilde{P}_n(x + iy)}$. Por otro lado, en virtud de la identidad de Parseval,

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |T(\theta)|^2 d\theta.$$

Por todo lo anterior

$$\begin{aligned}
2|\widetilde{P}_n(x + iy)|^2 2^{-2n} &= |c_n|^2 + |c_{-n}|^2 \\
&\leq \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |T(\theta)|^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta)|^2 d\theta \leq \|P\|^2.
\end{aligned}$$

Así obtenemos

$$|\widetilde{P}_n(x + iy)| \leq 2^{n-1/2}\|P\|,$$

de donde $\|\widetilde{P}_n\|_\nu \leq 2^{n-1/2}\|P\|$. Para la demostración de (3.29) procedemos igual que en la demostración de (3.28), pero usamos (3.27) en lugar de (3.26) para probar que $c_{n-1} = 2^{-n+1}\overline{\widetilde{P}_{n-1}(x + iy)}$ y $c_{-n+1} = 2^{-n+1}\widetilde{P}_{n-1}(x + iy)$. $\square$

2.2. Estimaciones para procedimientos específicos. Aunque el Ejemplo 3.19 muestra que la constante que aparece en (3.23) y (3.24) es óptima en general, aportando la complejificación de Taylor el caso extremal, para procedimientos particulares dicha constante se puede sustituir por otra menor en muchos casos. Las estimaciones para formas multilineales son más fáciles de determinar.

2.2.1. **Estimaciones para formas multilineales.** Puesto que el procedimiento de Bochnak es el mayor de todos los procedimientos naturales de complejificación, las mejoras más sustanciales se producirán utilizando esta complejificación. Esto es así hasta el extremo de poderse extender las formas multilineales sin alteración de su norma (véase [**14**, p. 276]):

Teorema 3.23 (J. Bochnak). *Si E es un espacio de Banach real, entonces para cada $L \in \mathcal{L}(^nE)$ se tiene que*

$$\|\widetilde{L}\|_B = \|L\|.$$

Usando las normas (p) $(1 \leq p \leq \infty)$ también se consiguen mejoras sustanciales de la desigualdad (3.24):

Proposición 3.24. *Sea E un espacio de Banach real y sea $1 \leq p \leq \infty$. Entonces para cada $n \geq 2$ y $L \in \mathcal{L}(^nE)$ se tiene*

$$\|\widetilde{L}\|_{(p)} \leq \begin{cases} 2^{n/2-1/2}\|L\| & si \quad 1 \leq p \leq 4/3, \\ 2^{n/2-2/p'}\|L\| & si \quad 4/3 \leq p \leq 2, \\ 2^{n/p'-1}\|L\| & si \quad 2 \leq p \leq \infty \ . \end{cases}$$

Demostración. Primero estudiamos el caso $n = 2$. Si $x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$ entonces

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}\widetilde{L}(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)| &= \big|L(x_1, x_2) - L(y_1, y_2)\big| \\ &\leq \|L\|(\|x_1\| \cdot \|x_2\| + \|y_1\| \cdot \|y_2\|). \end{aligned}$$

Si $1 \leq p \leq 4/3$, entonces por la Proposición 2.7 se tiene que

$$\|x_1\| \cdot \|x_2\| + \|y_1\| \cdot \|y_2\| \leq \big(\|x_1\| + \|y_1\|\big)\|x_2 + iy_2\|_{(p)}$$

y por lo tanto, usando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned} \|x_1\| \cdot \|x_2\| + \|y_1\| \cdot \|y_2\| &\leq 2^{1/p'}\big(\|x_1\|^p + \|y_1\|^p\big)^{1/p}\|x_2 + iy_2\|_{(p)} \\ &\leq 2^{1/2}\|x_1 + iy_1\|_{(p)}\|x_2 + iy_2\|_{(p)}. \end{aligned}$$

Así, para $1 \leq p \leq 4/3$, la Proposición 3.8 prueba que $\|\widetilde{L}\|_{(p)} \leq 2^{1/2}\|L\|$.

Ahora, para $4/3 \leq p \leq 2$, la desigualdad de Hölder y la monotonicidad de las normas ℓ_p demuestran que

$$\begin{aligned}\|x_1\| \cdot \|x_2\| + \|y_1\| \cdot \|y_2\| &\leq \big(\|x_1\|^p + \|y_1\|^p\big)^{1/p}\big(\|x_2\|^{p'} + \|y_2\|^{p'}\big)^{1/p'} \\ &\leq \big(\|x_1\|^p + \|y_1\|^p\big)^{1/p}\big(\|x_2\|^p + \|y_2\|^p\big)^{1/p} \\ &\leq 2^{2(1/p-1/2)}\|x_1 + iy_2\|_{(p)}\|x_2 + iy_2\|_{(p)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $4/3 \leq p \leq 2$, por la Proposición 3.8 se tiene que $\|\widetilde{L}\|_{(p)} \leq 2^{1-2/p'}\|L\|$.

Para terminar, sea $2 \leq p \leq \infty$. Como $\frac{1}{p} + \frac{1}{p} \leq 1$, por la desigualdad de Hölder generalizada obtenemos

$$\begin{aligned}\|x_1\| \cdot \|x_2\| + \|y_1\| \cdot \|y_2\| &\leq 2^{1-2/p}\big(\|x_1\|^p + \|y_1\|^p\big)^{1/p}\big(\|x_2\|^p + \|y_2\|^p\big)^{1/p} \\ &\leq 2^{2/p'-1}\|x_1 + iy_1\|_{(p)}\|x_2 + iy_2\|_{(p)},\end{aligned}$$

y usando de nuevo la Proposición 3.8, $\|\widetilde{L}\|_{(p)} \leq 2^{2/p'-1}\|L\|$.

Para valores más altos de n razonamos por inducción. Definamos

$$K_n^{(p)} = \begin{cases} 2^{n/2-1/2} & \text{si} \quad 1 \leq p \leq 4/3, \\ 2^{n/2-2/p'} & \text{si} \quad \underline{4/3 \leq p \leq 2}, \\ 2^{n/p'-1} & \text{si} \quad 2 \leq p \leq \infty. \end{cases}$$

Si $L \in \mathcal{L}(^nE)$, entonces para cada $x \in E$ fijo la aplicación $F_x(x_1, \ldots, x_{n-1}) := L(x_1, \ldots, x_{n-1}, x)$ define una forma $(n-1)$-lineal continua en E que denotaremos con F_x. Para $x_k + iy_k \in E$ $(1 \leq k \leq n)$, la hipótesis de inducción y la Proposición 3.8 dan

$$\begin{aligned}&|\operatorname{Re}\widetilde{L}(x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)| \\ &\quad = \big|\operatorname{Re}\widetilde{F}_{x_n}(x_1 + iy_1, \ldots, x_{n-1} + iy_{n-1}) - \operatorname{Im}\widetilde{F}_{y_n}(x_1 + iy_1, \ldots, x_{n-1} + iy_{n-1})\big| \\ &\quad \leq \big(\|\operatorname{Re}\widetilde{F}_{x_n}\|_{(p)} + \|\operatorname{Im}\widetilde{F}_{y_n}\|_{(p)}\big)\|x_1 + iy_1\|_{(p)} \cdots \|x_{n-1} + iy_{n-1}\|_{(p)} \\ &\quad \leq K_{n-1}^{(p)}\|L\|\big(\|x_n\| + \|y_n\|\big)\|x_1 + iy_1\|_{(p)} \cdots \|x_{n-1} + iy_{n-1}\|_{(p)}.\end{aligned}$$

Ahora aplicando una vez más la desigualdad de Hölder,

$$\|x_n\| + \|y_n\| \leq 2^{1/p'}\big(\|x_n\|^p + \|y_n\|^p\big)^{1/p} \leq \begin{cases} 2^{1/2}\|x_n + iy_n\|_{(p)} & \text{si} \quad 1 \leq p \leq 2, \\ 2^{1/p'}\|x_n + iy_n\|_{(p)} & \text{si} \quad 2 \leq p \leq \infty\,. \end{cases}$$

El resultado se sigue pues claramente por inducción. □

En el siguiente ejemplo vemos que las estimaciones encontradas en la proposición anterior son óptimas cuando $p \geq 2$:

Ejemplo 3.25. *Sea $P_n : \ell_2^2 \to \mathbb{R}$ el polinomio definido en el Ejemplo 3.19 y L_n su polar. Entonces para cada $p \geq 2$ se tiene*

$$\|\widetilde{L}_n\|_{(p)} = \|\widetilde{P}_n\|_{(p)} = 2^{n/p'-1}\|P_n\| = 2^{n/p'-1}\|L_n\|.$$

DEMOSTRACIÓN. Para cada $p \geq 2$ pongamos $x = (2^{-1/p}, 0)$ e $y = (0, 2^{-1/p})$. Entonces $\|x + iy\|_{(p)} = 1$ y

$$\operatorname{Re} \widetilde{P}_n(x+iy) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} 2^{-n/p} = 2^{n-1}2^{-n/p} = 2^{\frac{n}{p'}-1}.$$

Así, por la Proposición 3.8 se tiene que $\|\widetilde{P}_n\|_{(p)} = \|\operatorname{Re} \widetilde{P}_n\|_{(p)} \geq 2^{n/p'-1}$. En consecuencia

$$\|\widetilde{L}_n\|_{(p)} \geq \|\widetilde{P}_n\|_{(p)} \geq 2^{n/p'-1} = 2^{n/p'-1}\|P_n\| = 2^{n/p'-1}\|L_n\|.$$

Pero las desigualdades recíprocas también son ciertas por la Proposición 3.24, obteniéndose así la igualdad. □

P. Kirwan ha obtenido una desigualdad similar a la probada en la Proposición 3.24 para $p \geq 2$, pero su constante, $2^{n/p'}$, es ligeramente peor (véase [**35**, Theorem 5.9]). Sin embargo, su resultado está enunciado en el contexto más amplio de las complejificaciones p-dominantes:

Definición 3.26. Sea E un espacio de Banach real y sea $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ una norma razonable en E. Decimos que $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ es una norma p-dominante con $2 \leq p \leq \infty$ si

$$\|x+iy\|_\nu \geq \left\{\|x\|^p + \|y\|^p\right\}^{1/p} \quad \forall x, y \in E.$$

Dado un procedimiento natural de complejificación ν, decimos que es p-dominante ($2 \leq p \leq \infty$) si para cada espacio de Banach E se tiene que $\|\cdot\|_\nu$ es p-dominante en $\widetilde{E}$.

Observación 3.27. Nótese que en la definición anterior no hemos considerado los p menores que 2. En realidad no tiene sentido hablar de complejificaciones p-dominantes con $1 \leq p < 2$. Efectivamente, sea E un espacio de Banach real y sea $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ una norma razonable en $\widetilde{E}$ p-dominante. Entonces, para cada $x \in S_E$ se tiene

$$2^{1/2} = \|x + ix\|_{\widetilde{E}} \geq 2^{1/p},$$

de donde es inmediato que $p \geq 2$.

Las normas (p) $(2 \leq p \leq \infty)$ definen los procedimientos p-dominantes más pequeños:

Proposición 3.28. *Sea ν un procedimiento natural de complejificación p-dominante $(2 \leq p \leq \infty)$. Entonces dado un espacio de Banach real E se tiene que*

$$\|x+iy\|_{(p)} \leq \|x+iy\|_\nu \quad \forall x, y \in E.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea E un espacio de Banach real, $x, y \in E$ y $p \geq 2$. Entonces para cada $\theta \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned}\|x+iy\|_\nu &= \|e^{i\theta}(x+iy)\|_\nu = \|(x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta) + i(x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)\|_\nu \\ &\geq \left\{\|x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta\|^p + \|x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta\|^p\right\}^{1/p},\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\|x+iy\|_\nu \geq \sup_\theta \left\{\|x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta\|^p + \|x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta\|^p\right\}^{1/p} = \|x+iy\|_{(p)}.$$

Para $p=\infty$, nótese que $\|\cdot\|_{(\infty)}$ es en realidad la norma de Taylor, en consecuencia, por la Proposición 2.14 es la norma razonable más pequeña en $\widetilde{E}$. □

Usando la terminología de procedimientos p-dominantes, el resultado que acabamos de probar nos proporciona la siguiente generalización de la Proposición 3.24 (comparar con [**35**, Theorem 5.9]):

Proposición 3.29. *Sea ν un procedimiento natural de complejificación p-dominante $(2 \leq p \leq \infty)$. Entonces para cada espacio de Banach real E y cada $L \in \mathcal{L}(^nE)$ se tiene que*

$$\|\widetilde{L}\|_\nu \leq 2^{n/p'-1}\|L\|.$$

Si bien las formas multilineales se pueden extender sin alterar su norma cuando se usa la complejificación de Bochnak (véase el Teorema 3.23), cuando se usa la complejificación de Taylor, un resultado similar para formas bilineales no se da jamás, al menos en espacios bidimensionales. Para demostrar esto probaremos un resultado previo en el que se usará la siguiente notación: Si E y F son dos espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{L}(E;F)$ y $L \in \mathcal{L}(^nF)$, entonces $L \circ T$ se define mediante $L\circ T(x_1,\ldots,x_n) = L(T(x_1),\ldots,T(x_n))$ para todo $x_k \in E$ $(1 \leq k \leq n)$. Evidentemente $L \circ T \in \mathcal{L}(^nE)$ y $\widetilde{L\circ T} = \widetilde{L}\circ\widetilde{T}$. Además, $\|L\circ T\| \leq \|L\|\cdot\|T\|^n$.

Lema 3.30. *Si E y F son espacios de Banach isomorfos y ν es un procedimiento natural de complejificación, entonces*

$$\mathcal{K}_\nu(n;F) \leq (\mathrm{d}(E,F))^n \mathcal{K}_\nu(n;E),$$

donde $\mathrm{d}(E,F)$ *denota la distancia de Banach-Mazur y $\mathcal{K} = \mathcal{L}$ ó $\mathcal{P}$ (recuérdese la Definición 3.7).*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\mathcal{K} = \mathcal{L}$ (la demostración para $\mathcal{K} = \mathcal{P}$ es idéntica). Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Entonces existe un isomorfismo $T \in \mathcal{L}(E; F)$ tal que $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leq \mathrm{d}(E, F) + \epsilon$. Sea ahora $L \in \mathcal{L}(^n F)$. Evidentemente $\|\widetilde{T^{-1}}\|_\nu = \|T^{-1}\|$, y como $L \circ T \in \mathcal{L}(^n E)$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{L}\|_\nu &\leq \|\widetilde{L \circ T}\|_\nu \cdot \|T^{-1}\|^n \\
&\leq (\mathcal{L}_\nu(n; E) + \epsilon)\|L \circ T\| \cdot \|T^{-1}\|^n \\
&\leq (\mathcal{L}_\nu(n; E) + \epsilon)\|T\|^n \cdot \|T^{-1}\|^n \cdot \|L\| \\
&\leq (\mathcal{L}_\nu(n; E) + \epsilon)(\mathrm{d}(E, F) + \epsilon)^n \|L\|.
\end{aligned}$$

De esta manera hemos probado que $\mathcal{L}_\nu(n; F) \leq (\mathcal{L}_\nu(n; E) + \epsilon)(\mathrm{d}(E, F) + \epsilon)^n$ para todo $\epsilon > 0$, de donde el resultado buscado se sigue inmediatamente. $\square$

Proposición 3.31. *No existe ningún espacio de Banach real bidimensional E tal que $\|\widetilde{L}\|_T = \|L\|$, para cada $L \in \mathcal{L}(^2 E)$.*

La demostración se basa en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.32. *Sea $L \in \mathcal{L}^s(^2 \ell_1^2)$ la forma bilineal definida por*

$$L(x, y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_2 y_2$$

para cada $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ en $\mathbb{R}^2$. Entonces $\|\widetilde{L}\|_T > \|L\|$.

DEMOSTRACIÓN. Es claro que $\|L\| = \|P\| = 1$. Por otro lado, se tiene que

$$\widetilde{P}(x + iy) = (x_1 + iy_1)^2 + 2(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) - (x_2 + iy_2)^2.$$

Si ponemos $x = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ e $y = (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, entonces $\|x + iy\|_T = 1$ y $|\widetilde{P}(x + iy)| = |1 + i| = \sqrt{2}$. Por lo tanto, $\|\widetilde{L}\|_T > \|L\|$. $\square$

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 3.31. Sea E un espacio de Banach real bidimensional. Supongamos que $\|L\| = \|\widetilde{L}\|_T$ para cada $L \in \mathcal{L}(^2 E)$. Por lo tanto $\mathcal{L}_T(2; E) = 1$. El Ejemplo 3.19 prueba que

$$2 = \mathcal{L}_T(2; \ell_2^2) \leq (\mathrm{d}(E, \ell_2^2))^2.$$

Si ponemos $F = \ell_2^2$ en el Lema 3.30, entonces deducimos así que $\mathrm{d}(E, \ell_2^2) = \sqrt{2}$, de donde $E = \ell_1^2$ (véase la Proposición 37.4 en [**68**]). Por lo tanto, se puede tener la condición $\|L\| = \|\widetilde{L}\|_T$ para cada $L \in \mathcal{L}(^2 E)$ sólo si $E = \ell_1^2$. Sin embargo, el Ejemplo 3.32 proporciona una forma bilineal simétrica $L \in \mathcal{L}^s(^2 \ell_1^2)$ tal que $\|\widetilde{L}\|_T > \|L\|$. $\square$

2.2.2. **Estimaciones para polinomios homogéneos con valores escalares.** Las técnicas usadas en la demostración de las Proposiciones 3.24 y 3.29 no son aplicables a polinomios homogéneos, salvo a aquellos de grado 2. Nótese que en este caso, la norma de la complejificación de todo polinomio 2-homogéneo por un procedimiento 2-dominante coincide con la norma del polinomio. En el caso general no somos capaces de demostrar un resultado equivalente a la Proposición 3.24, pero sí podemos mejorar ligeramente la estimación general (3.23):

Proposición 3.33. *Sea ν un procedimiento de complejificación 2-dominante. Entonces para cada espacio de Banach real E y cada $P \in \mathcal{P}(^nE)$ se tiene que*

$$\|\widetilde{P}\|_\nu \leq 2^{n-2}\|P\| \quad \text{si } n \text{ es par,} \tag{3.30}$$

$$\|\widetilde{P}\|_\nu \leq 2^{n-3/2}\|P\| \quad \text{si } n \text{ es impar.} \tag{3.31}$$

DEMOSTRACIÓN. Dado que la complejificación de Lindenstrauss-Tzafriri es el procedimiento de complejificación natural 2-dominante más pequeño, bastará con estudiar el caso en que $\nu = (2) = LT$.

Sea $z = x + iy \in \widetilde{E}$ tal que $\|z\|_{LT} = 1$ y definamos igual que en la demostración de la Proposición 3.15 el polinomio trigonométrico de grado $\leq n$ dado por

$$f(t) := \widetilde{P}\Big(\frac{ze^{it} + \bar{z}e^{-it}}{2}\Big) = P(x\cos t - y \operatorname{sen} t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.32}$$

Sabemos que $|f(t)| \leq \|P\|$, $\forall t \in \mathbb{R}$, así que usando la definición de $\|\cdot\|_{(2)}$ tenemos,

$$\begin{aligned}
\Big|f\big(t + \frac{p\pi}{n}\big)\Big| &+ \Big|f\big(t + \frac{(p+n/2)\pi}{n}\big)\Big| \\
&= \Big|P\big(x\cos(t + \frac{p\pi}{n}) - y\operatorname{sen}(t + \frac{p\pi}{n})\big)\Big| \\
&\quad + \Big|P\big(x\operatorname{sen}(t + \frac{p\pi}{n}) + y\cos(t + \frac{p\pi}{n})\big)\Big| \\
&\leq \|P\| \sup_s \big(\|x\cos s - y\operatorname{sen} s\|^n + \|x\operatorname{sen} s + y\cos s\|^n\big) \\
&\leq \|P\| \cdot \|x + iy\|_{(2)}^n = \|P\|.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Ahora usando la definición de f, la relación ortogonal (3.13) y las identidades (3.18), se deduce que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n}\sum_{p=0}^{2n-1}(-1)^p f\big(t+(p+\frac{n}{2})\frac{\pi}{n}\big) &= \frac{1}{2n}\sum_{p=0}^{2n-1}(-1)^p\sum_{k=-n}^{n}a_k e^{ik\left(t+(p+n/2)\pi/n\right)}\\ &= \sum_{k=-n}^{n}a_k e^{ik(t+\pi/2)}\left[\frac{1}{2n}\sum_{p=0}^{2n-1}(-1)^p e^{ikp\pi/n}\right]\\ &= a_n e^{in(t+\pi/2)}+a_{-n}e^{-in(t+\pi/2)}\\ &= \frac{1}{2^n}\widetilde{P}_n(z)e^{int}e^{in\pi/2}+\frac{1}{2^n}\widetilde{P}_n(\bar{z})e^{-int}e^{-in\pi/2}. \qquad (3.34)\end{aligned}$$

De la demostración de la Proposición 3.15 también sabemos que

$$\frac{1}{2n}\sum_{p=0}^{2n-1}(-1)^p f(t+p\frac{\pi}{n}) = \frac{1}{2^n}\widetilde{P}_n(z)e^{int}+\frac{1}{2^n}\widetilde{P}_n(\bar{z})e^{-int}. \qquad (3.35)$$

Sea $\epsilon=(-1)^k$ para $n=2k$ ó $n=2k+1$. Si multiplicamos (3.34) por ϵ y le sumamos (3.35) obtenemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2n}\sum_{p=0}^{2n-1}(-1)^p\left[f(t+p\frac{\pi}{n})+\epsilon f\big(t+(p+\frac{n}{2})\frac{\pi}{n}\big)\right]\\ &\qquad = \frac{1}{2^n}\widetilde{P}_n(z)e^{int}\big[1+\epsilon e^{in\pi/2}\big]+\frac{1}{2^n}\widetilde{P}_n(\bar{z})e^{-int}\big[1+\epsilon e^{-in\pi/2}\big].\end{aligned}$$

Pero teniendo en cuenta (3.33) se sigue que

$$\sup_t\left\{\frac{1}{2^n}\widetilde{P}_n(z)e^{int}\big[1+\epsilon e^{in\pi/2}\big]+\frac{1}{2^n}\widetilde{P}_n(\bar{z})e^{-int}\big[1+\epsilon e^{-in\pi/2}\big]\right\}\le\|P\|,$$

Finalmente, si $n=2k$, entonces $1+\epsilon e^{in\pi/2}=1+\epsilon e^{-in\pi/2}=2$, y en consecuencia la desigualdad (3.30) se sigue del Lema 3.14. Por otro lado, si $n=2k+1$, entonces $1+\epsilon e^{in\pi/2}=1+i$ y $1+\epsilon e^{-in\pi/2}=1-i$. Por lo tanto, aplicando una vez más el Lema 3.14 se tiene la desigualdad (3.31). □

Corolario 3.34. *Sea ν un procedimiento de complejificación 2-dominante. Entonces para cada espacio de Banach real E y cada $P\in\mathcal{P}(^2E)$ se tiene que*

$$\|\widetilde{P}\|_\nu=\|P\|.$$

A la vista del Corolario 3.34, nos podemos preguntar si existe algún procedimiento natural de complejificación para el que se tenga un resultado similar pero para polinomios homogéneos de grados mayores que 2. Los siguientes ejemplos demuestran que esto no es posible en general para polinomios de grado ≥ 4 aunque se considere la complejificación de Bochnak.

Ejemplo 3.35. *Definamos el polinomio homogéneo* $P_{4m} : \ell_\infty^4 \to \mathbb{R}$ *mediante la fórmula*

$$P_{4m}(x) = \left[(x_1^2 - x_2^2)^2 - (x_3^2 - x_4^2)^2\right]^m \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \ell_\infty^4.$$

Se tiene que $\|P_{4m}\| = 1$ *para cada* $m \in \mathbb{N}$, *pero* $\lim_{m\to\infty} \|\widetilde{P}_{4m}\|_B = \infty$.

DEMOSTRACIÓN. Como $|a^2 - b^2| \leq 1$ siempre que $a, b \in [-1, 1]$, se ve claramente que $\|P_{4m}\| = 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Sea ahora $z_0 = (1, i, 1/\sqrt{2}e^{i\pi/4}, 1/\sqrt{2}e^{i3\pi/4}) \in \widetilde{\ell}_\infty^4$ y escribamos $z_0 = x_0 + iy_0$ con $x_0 = (1, 0, 1/2, -1/2)$ e $y_0 = (0, 1, 1/2, 1/2)$. Entonces de la Proposición 2.37 se deduce que

$$\begin{aligned}
\|z_0\|_B &\leq \inf_t \left\{\|x_0 \cos t - y_0 \operatorname{sen} t\|_\infty + \|x_0 \operatorname{sen} t + y_0 \cos t\|_\infty\right\} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\|x_0 - y_0\|_\infty + \|x_0 + y_0\|_\infty\right) \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\|(1, -1, 0, -1)\|_\infty + \|(1, 1, 1, 0)\|_\infty\right) = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Así pues

$$\|\widetilde{P}_{4m}\|_B \geq \frac{|\widetilde{P}_{4m}(z_0)|}{\|z_0\|_B^{4m}} \geq \frac{\left[(1 - i^2)^2 - \frac{1}{4}(i + i)^2\right]^m}{4^m} = \left(\frac{5}{4}\right)^m,$$

y en consecuencia $\lim_{m\to\infty} \|\widetilde{P}_{4m}\|_B = \infty$. Un resultado similar para los grados no múltiplos de 4 se obtiene considerando los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned}
&P_{4m+1} : \ell_\infty^5 \to \mathbb{R} \quad \text{definido por} \quad P_{4m+1}(x) = \left[(x_1^2 - x_2^2)^2 - (x_3^2 - x_4^2)^2\right]^m x_5, \\
&P_{4m+2} : \ell_\infty^6 \to \mathbb{R} \quad \text{definido por} \quad P_{4m+2}(x) = \left[(x_1^2 - x_2^2)^2 - (x_3^2 - x_4^2)^2\right]^m x_5 x_6, \\
&P_{4m+3} : \ell_\infty^7 \to \mathbb{R} \quad \text{definido por} \quad P_{4m+3}(x) = \left[(x_1^2 - x_2^2)^2 - (x_3^2 - x_4^2)^2\right]^m x_5 x_6 x_7.
\end{aligned}$$

□

Modificando el Ejemplo 3.35 se puede conseguir una divergencia más rápida del cociente $\|\widetilde{P}_n\|_B / \|P_n\|$ $(n \in \mathbb{N})$. En el siguiente ejemplo dejamos indicado como hacerlo al menos para n de la forma $n = 2^m$ $(m \geq 3)$. Nótese que en el Ejemplo 3.35 se encontró que

$$\frac{\|\widetilde{P}_n\|_B}{\|P_n\|} \geq (1'2)^{n/4},$$

para todo n múltiplo de 4 y en particular para los n de la forma $n = 2^m$ $(m \geq 3)$.

Ejemplo 3.36. *Definimos por recurrencia* $Q_{2^m} : \ell_\infty^{2^m} \to \mathbb{R}$ $(m \in \mathbb{N})$ *mediante las siguientes fórmulas:*

$$Q_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2,$$

$$Q_{2^m}(x_1, \ldots, x_{2^m}) = Q_{2^{m-1}}(x_1, \ldots, x_{2^{m-1}})^2 - Q_{2^{m-1}}(x_{2^{m-1}+1}, \ldots, x_{2^m})^2.$$

Por otro lado, definimos los elementos Z_{2^m} $(m \in \mathbb{N})$ *de* $(\widetilde{\ell_\infty^{2^m}})_B$ *mediante*

$$Z_2 = (z_1, z_2) \quad con \quad z_1 = 1, \quad z_2 = i \quad para\ m = 1,$$

$$Z_{2^m} = (z_1, \ldots, z_{2^m}) \quad con \quad z_{2^{m-1}+j} = z_j e^{i\pi/2^m} \quad (1 \leq j \leq 2^{m-1}) \quad para\ m \geq 1.$$

Entonces se prueba por inducción que Q_{2^m} $(m \in \mathbb{N})$ *es un polinomio homogéneo de norma 1 en* $\mathcal{P}(^{2^m}\ell_\infty^{2^m})$, *que* $\|Z_{2^m}\|_B \leq \sqrt{2}$ $(m \in \mathbb{N})$, *y que*

$$\frac{\|\widetilde{Q}_n\|_B}{\|Q_n\|} = \|\widetilde{Q}_n\|_B \geq \frac{|\widetilde{Q}_n(z_n)|}{\|Z_n\|_B^n} > (1'32)^{n/4},$$

para todo n *de la forma* $n = 2^m$ *con* $m \geq 3$.

Observación 3.37. Usando la conocida caracterización de los polinomios extremales en espacios complejos de dimensión finita de Y. Sarantopoulos (véase el Teorema 1.12), P. Kirwan, Y. Sarantopoulos y A. Tonge observan en **[36]** que del hecho de que los polinomios 2-homogéneos se puedan complejificar sin alterar su norma usando procedimientos 2-dominantes, se infiere que los polinomios 2-homogéneos extremales en espacios reales de dimensión 2 son proporcionales a Φ_2. Efectivamente, sea E un espacio de Banach real de dimensión 2 y $P \in \mathcal{P}(^2E)$ un polinomio extremal. Supongamos que $L \in \mathcal{L}^s(^2E)$ es la polar de P, entonces $\|L\| = 2\|P\|$. Por otro lado sabemos que $\|\widetilde{L}\|_B = \|L\|$ y $\|\widetilde{P}\|_B = \|P\|$, luego $\|\widetilde{L}\|_B = 2\|\widetilde{P}\|_B$. Por tanto, $\widetilde{P}$ es extremal en $(\widetilde{E}, \|\cdot\|_B)$ y en consecuencia, por el Teorema 1.12 se deduce que $(\widetilde{E}, \|\cdot\|_B) = \ell_1^2(\mathbb{C})$ y que $\widetilde{P}$ es proporcional a Φ_2. Naturalmente se tendrá lo mismo para P. Sería interesante probar que los polinomios 3-homogéneos se pueden complejificar también sin alterar su norma de acuerdo al procedimiento de Bochnak, es decir, si E es un espacio de Banach real y $P \in \mathcal{P}(^3E)$, entonces $\|\widetilde{P}\|_B = \|P\|$. Esto probaría que los polinomios extremales de grado 3 en espacios de dimensión 3 son proporcionales a Φ_3. P. Kirwan, Y. Sarantopoulos y A. Tonge llegan a esta conclusión en **[36]** usando métodos totalmente diferentes. Como decíamos en la Sección 1.2 del Capítulo 1, estos mismos autores establecen en **[36]** que, a diferencia del caso complejo, en los espacios reales existen ejemplos de polinomios extremales de grado n ajenos a Φ_n para $n > 3$. La imposibilidad de complejificar polinomios

n-homogéneos con $n > 3$ preservando su norma daría cuenta de esta propiedad de los espacios de Banach reales.

Si para los procedimientos 2-dominantes siempre podemos complejificar polinomios 2-homogéneos preservando su norma, usando la complejificación de Taylor no existe espacio de Banach real para el que se pueda complejificar un polinomio 2-homogéneo sin alterar su norma. Para probar esto necesitaremos el siguiente resultado:

Lema 3.38. *Sea E un espacio de Banach real y sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces para cada $P \in \mathcal{P}(^nE)$ se tiene que*

$$\|DP\| \leq n\|\widetilde{P}\|_T.$$

En particular, si $P \in \mathcal{P}(^2E)$, entonces $\|L\| \leq \|\widetilde{P}\|_T$, donde $L \in \mathcal{L}^s(^2E)$ con $\widehat{L} = P$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $S(\theta) := \widetilde{P}(x\cos\theta + iy\operatorname{sen}\theta)$, donde $x, y \in S_E$. Entonces S es un polinomio trigonométrico complejo de grado $\leq n$. Como

$$\|x\cos\theta + iy\operatorname{sen}\theta\|_T = \sup_\phi \|x\cos\theta\cos\phi + y\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi\| \leq 1,$$

se tiene que $|S(\theta)| \leq \|\widetilde{P}\|_T$ para todo número real θ. Usando ahora la conocida desigualdad de Bernstein para polinomios trigonométricos (véase el Teorema 4.3), se sigue que

$$|inL(x^{n-1}y)| = |S'(0)| \leq n\sup_\theta |S(\theta)| \leq n\|\widetilde{P}\|_T,$$

donde $L \in \mathcal{L}^s(^nE)$ representa la polar de P. Por lo tanto $|L(x^{n-1}y)| \leq \|\widetilde{P}\|_T$ para todo $x, y \in S_E$, y en consecuencia el resultado se sigue. □

Proposición 3.39. *No existe ningún espacio de Banach real E tal que $\|P\| = \|\widetilde{P}\|_T$, para cada $P \in \mathcal{P}(^2E)$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\|P\| = \|\widetilde{P}\|_T$ para cada $P \in \mathcal{P}(^2E)$. Entonces, si $L \in \mathcal{L}^s(^2E)$ representa la polar de P, por el Lema 3.38, tenemos que

$$\|P\| = \|L\| = \|\widetilde{P}\|_T \quad \forall P \in \mathcal{P}(^2E).$$

Esto implica que E es un espacio de Hilbert real (véase el comentario inmediatamente posterior al Teorema 1.8). Pero cuando E es un espacio de Hilbert real, el Ejemplo 3.19 muestra que existe un polinomio $P \in \mathcal{P}(^2E)$ tal que $\|\widetilde{P}\|_T = 2\|P\|$, luego el enunciado tiene que ser cierto. □

Las desigualdades (3.30) y (3.31) pueden ser mejoradas considerablemente si suponemos que la norma del espacio E procede de un producto interno. Efectivamente, si H es un espacio de Hilbert real sabemos que $(\widetilde{H}, \|\cdot\|_{LT})$ es un espacio de Hilbert complejo. Por otro lado, si $L \in \mathcal{L}^s({}^nH)$ y $P \in \mathcal{P}({}^nH)$ son tales que $\widehat{L} = P$, entonces $\|L\| = \|P\|$. Además, sabemos que $\widetilde{L}$ es la polar de $\widetilde{P}$ (véase el Corolario 3.2). Por lo tanto, el Teorema 1.8 nos garantiza que $\|\widetilde{L}\|_{LT} = \|\widetilde{P}\|_{LT}$. Así, de la Proposición 3.24 y teniendo en cuenta que el procedimiento de Lindenstrauss-Tzafriri es el procedimiento 2-dominante más pequeño, se obtiene la siguiente estimación:

Proposición 3.40. *Si H es un espacio de Hilbert real, ν es un procedimiento 2-dominante y $P \in \mathcal{P}({}^nH)$, entonces*

$$\|\widetilde{P}\|_\nu \leq 2^{(n-2)/2}\|P\|.$$

Si se considera la complejificación de Bochnak, entonces teniendo en cuenta el Teorema 3.23 y que la constante de polarización del espacio es 1, se tiene:

Proposición 3.41. *Si H es un espacio de Hilbert real y $P \in \mathcal{P}({}^nH)$, entonces*

$$\|\widetilde{P}\|_B = \|P\|.$$

3. Complejificación de polinomios no homogéneos.

Ninguna de las técnicas usadas hasta el momento para estudiar la complejificación de polinomios homogéneos es aplicable al estudio de polinomios no homogéneos. Por esta razón dedicamos una sección a este problema. El caso de polinomios en una variable ha sido estudiado exhaustivamente por diversos autores. Para empezar señalamos el siguiente resultado de S. N. Bernstein [**9**] (véase también [**41**, p. 42]):

Teorema 3.42 (S. N. Bernstein). *Si p es un polinomio de grado $\leq n$ en una variable con coeficientes complejos, entonces para cada número complejo z se tiene*

$$|p(z)| \leq (a+b)^n \max_{-1\leq t\leq 1} |p(t)|, \tag{3.36}$$

donde a y b son los semiejes de la elipse que pasa por z y tiene sus focos en 1 y -1.

Si $\|p\|_{\mathbb{D}}$ y $\|p\|_{[-1,1]}$ representan el máximo de $|p|$ sobre el disco unidad en el plano complejo $\mathbb{D}$ y sobre el intervalo $[-1,1]$ respectivamente, entonces el Teorema 3.42 proporciona una estimación del cociente $\|p\|_{\mathbb{D}}/\|p\|_{[-1,1]}$. Efectivamente, consideremos la elipse de semiejes $a = \sqrt{2}$ y $b = 1$, y con focos en 1 y -1. Como $\mathbb{D}$ está contenido en dicha elipse, aplicando el Principio del Módulo Máximo a (3.36) se obtiene lo siguiente:

Corolario 3.43. *Sea p un polinomio de grado $\leq n$ en una variable con coeficientes complejos, entonces*

$$\|p\|_{\mathbb{D}} \leq (1+\sqrt{2})^n \|p\|_{[-1,1]}. \tag{3.37}$$

Observación 3.44. J. Siciak [**62**] ha generalizado (3.37) para polinomios en varias variables complejas. Su resultado mejora además el Teorema 2.1 en [**3**]. M. Lacruz ha encontrado en [**38**, Theorem 5.7.7] estimaciones análogas a (3.37) para polinomios en retículos de Banach reales. Con más generalidad, P. Kirwan [**35**, Theorem 5.16] ha obtenido estimaciones similares para polinomios en un espacio de Banach real.

Para el caso de polinomios con coeficientes reales, un resultado de P. Erdös [**24**] nos permite mejorar considerablemente la desigualdad (3.37).

Teorema 3.45 (P. Erdös). *Sea p un polinomio de grado $\leq n$ en una variable con coeficientes reales, entonces*

$$\|p\|_{\mathbb{D}} \leq |T_n(i)| \cdot \|p\|_{[-1,1]},$$

donde T_n es el polinomio de Chebyshev de primera especie de grado n e i es la unidad imaginaria.

En nuestro único resultado de esta sección, cuya demostración es similar a la del Teorema 5.7.7 en [**38**], probamos una generalización del Teorema 3.45 para el caso de polinomios definidos en un espacio de Banach real. Necesitaremos la siguiente extensión de un resultado conocido para polinomios en una variable (véase [**38**, Lemma 7.7.3]):

Lema 3.46. *Sea E un espacio de Banach complejo y sea $P \in \mathcal{P}_n(E)$. Entonces*

$$\|P\| \leq \frac{1}{r^n} \max\{|P(x)| : \|x\| \leq r\}.$$

Proposición 3.47. *Sea ν un procedimiento natural de complejificación. Entonces para cada espacio de Banach real E y cada $P \in \mathcal{P}(^nE)$ se tiene*

$$\|\widetilde{P}\|_T \leq 2^{n/2} |T_n(i)| \cdot \|P\|, \tag{3.38}$$

donde $2^{n/2}|T_n(i)| \leq 1/2[(2+\sqrt{2})^n + (2-\sqrt{2})]$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Por el Lema 3.46 existe $z = x + iy \in \widetilde{E}$ tal que $\|z\|_T \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ y

$$|\widetilde{P}(z)| = |\widetilde{P}(x+iy)| \geq (1-\epsilon)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \|\widetilde{P}\|_T.$$

Como el polinomio $q(t) := P(x+ty)$ tiene coeficientes reales, por el Teorema 3.45 se tiene que

$$\max_{|z|=1} |q(z)| \le |T_n(i)| \max_{-1\le t\le 1} |q(t)|.$$

Por otro lado, si $-1 \le t \le 1$, entonces

$$\|x+ty\| = \sup_{\varphi\in B_{E^*}} |\varphi(x)+t\varphi(y)| \le \sqrt{1+t^2} \sup_{\varphi\in B_{E^*}} \sqrt{\varphi^2(x)+\varphi^2(y)} \le \sqrt{2}\|x+iy\|_T \le 1.$$

Esto prueba que $\max_{-1\le t\le 1} |q(t)| \le \|P\|$, de donde

$$\begin{aligned}(1-\epsilon)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \|\widetilde{P}\|_T \le |\widetilde{P}(x+iy)| = |q(i)| \le \max_{|z|=1} |q(z)| \\ \le |T_n(i)| \max_{-1\le t\le 1} |q(t)| \le |T_n(i)| \cdot \|P\|.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $\epsilon > 0$ se tiene que

$$\|\widetilde{P}\|_T \le (1-\epsilon)^{-1} 2^{n/2} |T_n(i)| \cdot \|P\|,$$

lo que completa la demostración. □

Observaciones 3.48. (i) R. Aron, P. Enflo y B. Beauzamy [**3**, Theorem 2.1] han obtenido estimaciones similares para polinomios en $\ell_\infty^m(\mathbb{R})$, usando la complejificación usual, que en este caso es la de Taylor. Su constante es $1/2[2+\sqrt{2})^n+(2-\sqrt{2})^n]$

(ii) M. Lacruz ha obtenido estimaciones similares para polinomios en retículos de Banach reales con constante $1/2[3\sqrt{2}+4)^n + (3\sqrt{2}-4)^n]$.

(iii) P. Kirwan ha estudiado este problema [**35**, Theorem 5.16] para el caso de polinomios definidos en un espacio de Banach real. La constante que obtiene es $1/2[2\sqrt{2}+2)^n + (2\sqrt{2}-2)^n]$.

4. Complejificación de operadores con valores vectoriales.

El caso de formas multilineales y polinomios homogéneos con valores escalares es más fácil de estudiar gracias a la Proposición 3.8. En ausencia de un resultado similar para aplicaciones multilineales y polinomios homogéneos con valores vectoriales, no hemos sido capaces de generalizar las Proposiciones 3.15 y 3.18 sin alterar las constantes, salvo cuando se usa la complejificación de Taylor. Si se usan procedimientos de complejificación diferentes en los espacios de Banach reales E y F, ya indicamos en el Corolario 2.15 que en general es inevitable el incremento de la norma de la complejificación de un operador lineal en $\mathcal{L}(E;F)$ hasta en un factor 2. Este factor 2 aparece también a la hora de complejificar polinomios homogéneos en $\mathcal{P}(^nE;F)$ y formas n-lineales en $\mathcal{L}(^nE;F)$. Para facilitar el estudio de estos problemas introduciremos la siguiente notación: Si ν_1 y ν_2 son dos procedimientos naturales de complejificación, entonces $\|\widetilde{L}\|_{\nu_1\to\nu_2}$ y $\|\widetilde{P}\|_{\nu_1\to\nu_2}$ representan respectivamente la norma de L y P como operadores de $(\widetilde{E}, \|\cdot\|_{\nu_1})$ en $(\widetilde{F}, \|\cdot\|_{\nu_2})$. Cuando $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ escribiremos $\|\widetilde{L}\|_\nu$ y $\|\widetilde{P}\|_\nu$ en vez de $\|\widetilde{L}\|_{\nu\to\nu}$ y $\|\widetilde{P}\|_{\nu\to\nu}$, respectivamente.

Proposición 3.49. *Sean E y F espacios de Banach reales y sean ν_1 y ν_2 dos procedimientos naturales de complejificación.*

(a) *Si $P \in \mathcal{P}_n(E;F)$ tal que $P(x) = \sum_{k=0}^n P_k(x)$, con $P_k \in \mathcal{P}(^nE;F)$ $(0 \le k \le n)$, entonces*

$$\|\widetilde{P}_n\|_{\nu_1\to\nu_2} \le 2^n\|P\|,$$
$$\|\widetilde{P}_{n-1}\|_{\nu_1\to\nu_2} \le 2^{n-1}\|P\|.$$

(b) *Si $L \in \mathcal{L}(^nE;F)$, entonces $\|\widetilde{L}\|_{\nu_1\to\nu_2} \le 2^n\|L\|$.*

Para el caso en que $\nu_1 = \nu_2 = T$, las constantes pueden reducirse en un factor 2.

Demostración. Sea $z = x + iy \in \widetilde{E}$ tal que $\|z\|_{\nu_1} = 1$ y definamos el polinomio trigonométrico f igual que en la demostración de la Proposición 3.15. Ahora f es un polinomio con valores vectoriales, pero las relaciones sobre los coeficientes a_k $(1 \le k \le n)$ se siguen cumpliendo igualmente. De hecho la demostración se desarrolla idénticamente a la de la Proposición 3.15 hasta que llegamos a la desigualdad

$$\sup_t \|\widetilde{P}_n(z)e^{int} + \widetilde{P}_n(\bar{z})e^{-int}\| \le 2^n\|P\|.$$

Ahora el Lema 3.14 ya no es aplicable y es entonces cuando hay que introducir un factor 2. Por (2.7) se tiene que

$$\sup_t \|\widetilde{P}_n(z)e^{int} + \widetilde{P}_n(\bar{z})e^{-int}\| = 2\|\widetilde{P}_n(z)\|_T \ge \|\widetilde{P}_n(z)\|_{\nu_2}.$$

Se ve también que si $\nu_1 = \nu_2 = T$, entonces no hace falta introducir un factor 2. $\square$

De la Proposición 3.49 se deduce inmediatamente el siguiente corolario:

Corolario 3.50. *Sean ν_1 y ν_2 dos procedimientos naturales de complejificación. Entonces para cada par de espacios de Banach reales E y F se tiene*

$$\|\widetilde{P}\|_{\nu_1\to\nu_2} \le 2^n\|P\| \quad \forall P \in \mathcal{P}(^nE;F),$$
$$\|\widetilde{L}\|_{\nu_1\to\nu_2} \le 2^n\|L\| \quad \forall L \in \mathcal{L}(^nE;F). \tag{3.39}$$

La estimación (3.39) ha sido probada también por P. Kirwan (véase [**35**, Corollary 5.6]). El siguiente ejemplo nos proporciona un caso extremal en el que se da la igualdad en las estimaciones del Corolario 3.50:

Ejemplo 3.51. *Si $E = F = \ell_2^2$, definamos $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$ como*

$$P(x) = (\mathrm{Re}(x_1 + ix_2)^n, \mathrm{Im}(x_1 + ix_2)^n) \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \ell_2^2.$$

Entonces, si L es la polar de P se tiene que

$$\|\widetilde{P}\|_{T\to B} = 2^n\|P\| \quad y \quad \|\widetilde{L}\|_{T\to B} = 2^n\|L\|.$$

DEMOSTRACIÓN. Se ve fácilmente que $\|L\| = \|P\| = 1$. Como

$$L(x^{n-2k}y^{2k}) = \left(\mathrm{Re}(x_1 + ix_2)^{n-2k}(y_1 + iy_2)^{2k}, \mathrm{Im}(x_1 + ix_2)^{n-2k}(y_1 + iy_2)^{2k}\right),$$

entonces (3.3) implica que

$$\mathrm{Re}\widetilde{P}(x + iy)$$
$$= \sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{n}{2k}\left(\mathrm{Re}(x_1 + ix_2)^{n-2k}(y_1 + iy_2)^{2k}, \mathrm{Im}(x_1 + ix_2)^{n-2k}(y_1 + iy_2)^{2k}\right),$$

donde $x = (x_1, x_2) \in \ell_2^2$ e $y = (y_1, y_2) \in \ell_2^2$. Tomemos $x = e_1$ e $y = e_2$. Entonces

$$\|x + iy\|_T = \sup_\theta \|(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\|_{\ell_2^2} = 1,$$

y

$$\mathrm{Re}\,\widetilde{P}(e_1 + ie_2) = \sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k}e_1 = 2^{n-1}e_1. \tag{3.40}$$

Igualmente se puede probar que

$$\mathrm{Im}\,\widetilde{P}(e_1 + ie_2) = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}\binom{n}{2k+1}e_2 = 2^{n-1}e_2. \tag{3.41}$$

Por lo tanto, $\|\widetilde{P}\|_{T\to B} \geq \|\widetilde{P}(e_1 + ie_2)\|_B = 2^{n-1}\|e_1 + ie_2\|_B = 2^n$, es decir

$$\|\widetilde{L}\|_{T\to B} \geq \|\widetilde{P}\|_{T\to B} \geq 2^n\|P\| = 2^n\|L\|.$$

Pero como por la Proposición 3.49 se sabe que

$$\|\widetilde{P}\|_{T\to B} \leq 2^n\|P\| \quad \text{y} \quad \|\widetilde{L}\|_{T\to B} \leq 2^n\|L\|,$$

entonces las desigualdades anteriores se convierten en igualdades y se llega a

$$\|\widetilde{L}\|_{T\to B} = \|\widetilde{P}\|_{T\to B} = 2^n\|P\| = 2^n\|L\|.$$

□

Las constantes del Corolario 3.50 pueden mejorarse para espacios concretos. Si nos limitamos a espacios de Hilbert, entonces todas las constantes se pueden reducir en el factor multiplicativo $2^{-(n+1)/2}$ (comparar con las Proposiciones 3.24 y 3.40):

Proposición 3.52. *Sea ν un procedimiento de complejificación 2-dominante. Entonces para cada par de espacios de Hilbert reales H_1 y H_2 y cada $L \in \mathcal{L}(^nH_1; H_2)$, se tiene que*

$$\|\widetilde{L}\|_\nu \leq 2^{(n-1)/2}\|L\|. \tag{3.42}$$

Además si $P \in \mathcal{P}(^nH_1; H_2)$, entonces

$$\|\widetilde{P}\|_\nu \leq 2^{(n-1)/2}\|P\|. \tag{3.43}$$

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 3.28basta hacer el estudio para el procedimiento de Lindenstrauss-Tzafriri. En ese caso, para probar la desigualdad (3.42) nótese que $\mathcal{L}(^nH_1; H_2)$ es isométrico al espacio $\mathcal{L}(^{n+1}H_1^n \times H_2; \mathbb{R})$ y aplíquese a este último la Proposición 3.24. Así, la desigualdad (3.43) se sigue de la desigualdad (3.42) teniendo en cuenta que $(\widetilde{H}_1, \|\cdot\|_{LT})$ y $(\widetilde{H}_2, \|\cdot\|_{LT})$ son espacios de Hilbert y en consecuencia su constante de polarización es 1 (véase el Teorema 1.8). □

La constante $2^{(n-1)/2}$ en (3.42) y (3.43) es óptima:

Ejemplo 3.53. *Sea $H_1 = H_1 = \ell_2^2$, $P \in \mathcal{P}(^nH_1; H_2)$ el polinomio del Ejemplo 3.51 y $L \in \mathcal{L}(^nH_1; H_2)$ su polar, entonces*

$$\|\widetilde{P}\|_{LT} = 2^{(n-1)/2}\|P\| \quad y \quad \|\widetilde{L}\|_{LT} = 2^{(n-1)/2}\|L\|.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $x = 1/\sqrt{2}e_1$ e $y = 1/\sqrt{2}e_2$, entonces $\|x + iy\|_{LT} = 1$. Ya se vio que $\|P\| = 1$. Además, por (3.40) y (3.41) se tiene que

$$\|\widetilde{P}\|_{LT} \geq \|\widetilde{P}(x + iy)\|_{LT} = 2^{-n/2}\|\widetilde{P}(e_1 + ie_2)\| = 2^{(n-2)/2}\|e_1 + ie_2\|_{LT} = 2^{(n-1)/2}.$$

Esto último, junto con la desigualdad (3.43), prueba la primera igualdad. La segunda es inmediata teniendo en cuenta que por ser todos los espacios considerados de Hilbert, el Teorema 1.8 es aplicable. □

Observaciones 3.54. (i) La desigualdad (3.42) fue obtenida por A. E. Taylor en [**66**, pp. 313-314] con técnicas diferentes, sin embargo en su demostración se exigía que L fuera simétrica. De todos modos, obsérvese que la desigualdad (3.43) sí se infiere del resultado de A. E. Taylor.

(ii) Por otro lado, D. H. Hyers estableció erróneamente en [**31**, p. 435] que dados dos espacios de Hilbert reales H_1 y H_2, la extensión $\widetilde{L} : \widetilde{H}_1^n \to \widetilde{H}_2$ de cualquier operador n-lineal $L \in \mathcal{L}(^n H_1; H_2)$ preserva su norma bajo el procedimiento de Lindenstrauss-Tzafriri. En realidad esto sólo es posible en general para formas bilineales.

Parte 2

Desigualdades polinomiales.

CAPÍTULO 4

Desigualdades polinomiales en espacios de Banach reales.

En este capítulo se investiga el problema de encontrar cotas superiores para la norma de las derivadas de un polinomio definido entre espacios de Banach arbitrarios, cuando se satisfacen ciertas condiciones sobre la bola unidad del dominio. Este tipo de problemas son de gran interés en Teoría de la Aproximación y la Teoría de Funciones Analíticas en espacios de Banach. Los problemas estudiados en esta parte de la tesis admiten una formulación conjunta elemental en términos de polinomios dominados por *mayorantes funcionales*:

Definición 4.1. Se dice que una función positiva $\phi : [-1, 1] \to \mathbb{R}^+$ es mayorante de un polinomio P definido entre los espacios de Banach E y F si

$$\|P(x)\| \leq \phi(\|x\|) \quad \forall x \in B_E.$$

El conjunto de los polinomios continuos de grado $\leq n$ definidos entre los espacios de Banach E y F acotados por una mayorante funcional ϕ sobre la bola unidad se denotará por $\mathcal{P}_n^\phi(E; F)$. Cuando F coincida con el cuerpo $\mathbb{K}$ escribiremos $\mathcal{P}_n^\phi(E)$ en vez de $\mathcal{P}_n^\phi(E; \mathbb{R})$.

Si E y F son espacios de Banach reales, en este capítulo nos ocupamos del problema consistente en determinar cotas superiores para las normas de las derivadas de un polinomio perteneciente a la clase $\mathcal{P}_n^\phi(E; F)$, siendo ϕ una cierta mayorante funcional. La situación más general se da cuando la mayorante es una función constante. Este caso incluye a todos los polinomios salvo una constante. Con el objetivo de simplificar nuestros cálculos, consideraremos que las mayorantes constantes son idénticamente 1. También estudiaremos el caso de polinomios dominados por una mayorante no constante. En particular se investigará el caso de la mayorante $\varphi(t) = \sqrt{1 - t^2}$, $\forall t \in [-1, 1]$. Con más precisión, si E y F son dos espacios de Banach reales, en este capítulo:

(1) Se obtienen cotas superiores para la norma de un polinomio en la clase $\mathcal{P}_n^1(E; F)$.
(2) Se obtienen cotas puntuales superiores en B_E para la norma de las derivadas de un polinomio en $\mathcal{P}_n^1(E; F)$.

(3) Se obtienen cotas similares a las descritas en los puntos anteriores para polinomios en $\mathcal{P}_n^{\varphi}(E;F)$.

Las desigualdades aludidas en el punto (1) son conocidas como *desigualdades de Markov* gracias a la contribución de los hermanos Markov al estudio de aquel problema para polinomios en una variable. Por otro lado, la aportación de S. Bernstein en la obtención de cotas puntuales para las derivadas de polinomios en una variable, justifica que las desigualdades anunciadas en el punto (2) sean llamadas *desigualdades de Bernstein.* Por razones obvias, las desigualdades mencionadas en (3) se llaman *desigualdades de tipo Bernstein-Markov para polinomios con mayorantes.*

Los problemas para polinomios en una variable se llamarán frecuentemente problemas en el *caso clásico.* En la primera parte del capítulo presentamos un breve resumen de resultados clásicos para polinomios en una variable relacionados con los problemas de Bernstein-Markov. Las desigualdades de Markov (4.2) y (4.3) que allí se presentan proporcionan cotas superiores óptimas para las normas de las derivadas de un polinomio en $\mathcal{P}_n^1(\mathbb{R})$. Las desigualdades de tipo Bernstein (4.4) y (4.5) para polinomios en $\mathcal{P}_n^1(\mathbb{R})$ proporcionan mejoras considerables, en el interior del intervalo unidad $[-1,1]$, de las estimaciones de los hermanos Markov. Su importancia también radica en el hecho de que son el punto de partida de una de las demostraciones más sencillas de las desigualdades (4.2) y (4.3) respectivamente (véanse los Teoremas 4.9 y 4.12). Por otro lado, también se dan estimaciones óptimas y buenas estimaciones puntuales en (4.14) y (4.15) respectivamente, para las normas de las derivadas de polinomios en la clase $\mathcal{P}_n^{\varphi}(\mathbb{R})$.

Los resultados presentados en esta primera sección motivan su generalización para los polinomios pertenecientes a las clases $\mathcal{P}_n^1(E;F)$ y $\mathcal{P}_n^{\varphi}(E;F)$, donde E y F son espacios de Banach reales. En cuanto a la clase $\mathcal{P}_n^1(E;F)$, existe una generalización de Y. Sarantopoulos de (4.2) y (4.4) para la primera derivada (véase el Teorema 4.21). También se puede probar (4.3) para la derivada n-ésima de un polinomio en $\mathcal{P}_n^1(E;F)$ (véase 4.30). Estos hechos nos permiten especular con la posibilidad de que (4.3) sea cierta para la derivada k-ésima de un polinomio en $\mathcal{P}_n^1(E;F)$ con $1<k<n$ (véase el comentario al Problema 74 en [**44**]).

En la segunda sección, se generalizan algunas desigualdades clásicas de Bernstein-Markov para polinomios en $\mathcal{P}_n^1(E;F)$. Se da una cota superior de la norma de la segunda y tercera derivadas de un polinomio en $\mathcal{P}_n^1(E;F)$ que difiere en factores $\sqrt{2}$ y $3'7941$de las constantes conocidas en el caso clásico. Además se dan estimaciones puntuales para la segunda y tercera derivadas de un polinomio en $\mathcal{P}_n^1(E;F)$ sobre la bola unidad de E (véanse las Proposiciones 4.33 y 4.35). Cuando se trata de polinomios definidos en un espacio de Hilbert real, mejoramos nuestras desigualdades anteriores para la segunda y tercera derivadas. En realidad encontramos la mejor estimación posible para la norma de la segunda y tercera derivada, es decir, generalizamos (4.3) para $k = 2$ y $k = 3$. Además obtenemos una estimación puntual que generaliza (4.5) para la segunda y la tercera derivada (véanse las Proposiciones 4.45 y 4.47). En la demostración de estos resultados damos también la idea para la generalización de (4.3) y (4.5) para cualquier derivada de un polinomio en un espacio de Hilbert real. En la última parte de la sección, se aportan estimaciones asintóticamente óptimas, cuando n tiende a infinito, de la norma de las derivadas $(n-k)$-ésimas de polinomios de grado n definidos en un espacio de Hilbert real (véase la Proposición 4.53).

Para los polinomios pertenecientes a la clase $\mathcal{P}_n^{\varphi}(E;F)$, aportamos generalizaciones de (4.14) y (4.15) con desigualdades idénticas a las clásicas, para el caso en que E es un espacio de Hilbert real.

Todos los resultados de las secciones siguientes estarán enunciados sin pérdida de generalidad para polinomios con valores escalares. Una consecuencia elemental del teorema de Hahn-Banach lo justifica:

Proposición 4.2. *Sean E y F espacios de Banach reales y consideremos una función $\phi : [-1,1] \to \mathbb{R}^+$. Si para cada $x \in B_E$ existen números reales positivos $C_{\mathcal{L}}^{(k)}(x)$ y $C_{\mathcal{P}}^{(k)}(x)$ tales que*

$$\|D^{(k)}P(x)\|_{\mathcal{L}(^nE)} \leq C_{\mathcal{L}}^{(k)}(x) \quad \forall P \in \mathcal{P}_n^{\phi}(E),$$
$$\|\widehat{D}^{(k)}P(x)\|_{\mathcal{P}(^nE)} \leq C_{\mathcal{P}}^{(k)}(x) \quad \forall P \in \mathcal{P}_n^{\phi}(E),$$

entonces

$$\|D^{(k)}P(x)\|_{\mathcal{L}(^nE;F)} \leq C_{\mathcal{L}}^{(k)}(x) \quad \forall P \in \mathcal{P}_n^{\phi}(E;F),$$
$$\|\widehat{D}^{(k)}P(x)\|_{\mathcal{P}(^nE;F)} \leq C_{\mathcal{P}}^{(k)}(x) \quad \forall P \in \mathcal{P}_n^{\phi}(E;F).$$

1. Desigualdades de Bernstein-Markov en una variable.

En esta sección introduciremos los resultados más conocidos relacionados con los problemas de Bernstein-Markov para polinomios en una variable, algunos de los cuales serán generalizados en secciones posteriores. Comenzamos por presentar dos resultados estándar en teoría de la aproximación que serán de vital importancia en nuestro trabajo.

Teorema 4.3 (Desigualdad de Bernstein). *Sea $T(\theta) = \sum_{k=0}^{n} c_k e^{ik\theta}$ un polinomio trigonométrico complejo de grado $\leq n$ tal que $\sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T(\theta)| \leq 1$. Entonces*

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T'(\theta)| \leq n.$$

La siguiente versión fuerte de la desigualdad de Bernstein para polinomios trigonométricos reales será también útil en las próximas secciones:

Teorema 4.4 (Desigualdad de Szegö). *Sea $T(\theta) = \sum_{k=0}^{n} c_k e^{ik\theta}$ un polinomio trigonométrico real de grado $\leq n$ tal que $\sup_{\theta\in\mathbb{R}} |T(\theta)| \leq 1$. Entonces*

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R}} \left(n^2 T(\theta)^2 + T'(\theta)^2\right) \leq n^2. \tag{4.1}$$

La desigualdad anterior fue demostrada por primera vez por J. G. Van der Corput y G. Schaake [**17**], aunque se deducía de forma implícita de una desigualdad anterior de G. Szegö [**65**].

1.1. Desigualdades de Bernstein-Markov para polinomios en una variable. El problema de dar una estimación genérica de la norma de la derivada de un polinomio surgió curiosamente a propuesta de un químico y no de un matemático. Fue D. Mendeleev, autor del sistema periódico de los elementos, quien estudió por primera vez este problema. No vamos a entrar en detalles de los motivos que llevaron a Mendeleev a estudiar un problema de este tipo, nos limitaremos a decir que en un punto determinado de sus investigaciones, Mendeleev se percató de la utilidad que para su trabajo suponía el poder tener una estimación precisa de lo grande que puede hacerse la derivada de un polinomio de grado 2 definido en un cierto intervalo $[\alpha, \beta]$. Las estimaciones de la derivada de un polinomio p en $[\alpha, \beta]$ dependen de su norma sobre el intervalo $[\alpha, \beta]$, es decir, de $\|p\|_{[\alpha,\beta]} = \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |p(t)|$. De hecho, $\|p\|_{[\alpha,\beta]}$ aparece siempre como un factor multiplicativo en las estimaciones de la derivada de p. Con el objetivo de simplificar los cálculos, consideraremos sólo polinomios que verifiquen la condición $\|p\|_{[\alpha,\beta]} \leq 1$. Es más, el cambio de variable $t \mapsto [\alpha + \beta - (\alpha - \beta)t]/2$, reduce el problema (salvo la constante $(\beta - \alpha)/2$) al de determinar una cota para $|p'(t)|$ con $t \in [-1, 1]$, siempre que p pertenezca a la clase $\mathcal{P}_n^1(\mathbb{R})$. La respuesta que dio Mendeleev a este problema para polinomios de grado 2 en la clase $\mathcal{P}_2^1(\mathbb{R})$ fue la desigualdad $|p'(t)| \leq 4$, $\forall t \in [-1, 1]$. Es más, 4 es la mejor constante posible ya que la igualdad se alcanza para el polinomio $p(t) = 1 - 2t^2$. Nótese que $|p(t)| \leq 1$, $\forall t \in [-1, 1]$ y $|p'(\pm 1)| = 4$. Como era de esperar, Mendeleev transmitió su descubrimiento a la comunidad matemática. En 1889 el matemático ruso A. A. Markov encontró una generalización del resultado de Mendeleev para polinomios de grado arbitrario n en la clase $\mathcal{P}_n^1(\mathbb{R})$:

Teorema 4.5 (A. A. Markov). *Sea p un polinomio en $\mathcal{P}_n^1(\mathbb{R})$. Entonces*

$$\|p'\|_{[-1,1]} \leq n^2. \tag{4.2}$$

La desigualdad (4.2) es óptima para la clase $\mathcal{P}_n^1(\mathbb{R})$, alcanzándose la igualdad para el polinomio de Chebyshev de grado n de la primera especie T_n. Es más, la desigualdad para T_n sólo se alcanza en los extremos del intervalo $[-1,1]$. El trabajo original de A. A. Markov fue publicado en ruso [**42**] en 1889. En [**13**] se recoge una muestra de algunos de los resultados más importantes relacionados con este tema, incluyendo una demostración simple de (4.2).

Una vez resuelto el problema de encontrar una cota óptima para la derivada de un polinomio, es natural preguntarse qué tipo de estimación satisfacen las derivadas superiores. La respuesta a esta cuestión no tardó en aparecer y fue precisamente un hermano de A. Markov, V. A. Markov, quien dio la solución en 1892:

Teorema 4.6 (V. A. Markov). *Sea p un polinomio en $\mathcal{P}_n^1(\mathbb{R})$. Entonces*

$$\|p^{(k)}\|_{[-1,1]} \leq T_n^{(k)}(1) = \frac{n^2(n^2-1)\cdots(n^2-(k-1)^2)}{1\cdot 3\cdots(2k-1)}. \tag{4.3}$$

Naturalmente, la constante que aparece en (4.3) es óptima y la igualdad *sólo* se alcanza para T_n en los extremos del intervalo $[-1,1]$. Nótese que para $k=1$ la desigualdad (4.3) se reduce a (4.2). El trabajo original de V. A. Markov fue publicado en ruso en 1892. En 1916 apareció una versión en alemán del mismo [**43**]. Han aparecido con posterioridad demostraciones más sencillas de la desigualdad (4.3), entre las que cabe destacar la presentada por S. Bernstein usando un argumento variacional (véase los trabajos completos de S. Bernstein [**10**]) y sobre todo la de R. Duffin y A. C. Schaeffer [**22**].

El problema de estimar la derivada de un polinomio da mucho más de sí, si lo que buscamos es dar una estimación de la derivada en un punto fijo. Si $t_0 \in [-1,1]$, el problema que nos planteamos ahora es el de determinar el máximo valor que puede alcanzar $p^{(k)}(t_0)$ $(1 \leq k \leq n)$, siendo p un polinomio en $\mathcal{P}_n^1(\mathbb{R})$. En general vamos a obtener estimaciones mucho mejores que las dadas en (4.2) y (4.3). Usaremos la siguiente notación para referirnos a la mejor estimación puntual de la derivada

k-ésima de un polinomio en el interior del intervalo $[-1,1]$. Dados $n,k \in \mathbb{N}$ con $n \geq k$ escribimos

$$\mathcal{D}_n^{(k)}(t) = \sup_{p \in \mathcal{P}_n^1(\mathbb{R})} |p^{(k)}(t)|.$$

Según la desigualdad (4.3), es evidente que $\mathcal{D}_n^{(k)}(t) \leq T_n^{(k)}(1)$, $\forall t \in [-1,1]$. La determinación de la función $\mathcal{D}_n^{(k)}$ es un problema bastante complicado incluso para $k=1$, no obstante existen técnicas que nos proporcionan el valor de $\mathcal{D}_n^{(k)}(t)$ para cada $t \in [-1,1]$ y $k \leq n$. Para la primera derivada no es difícil probar que $\mathcal{D}_n^{(1)}(t) = T_n'(t)$ para cada $t \in [-1, -\cos(\pi/2n)] \cup [\cos(\pi/2n), 1]$ (véase [**12**]), sin embargo, esta identidad no es cierta en todo el intervalo $[-1,1]$. E. V. Voronovskaja [**72**] ha generado un procedimiento que permite encontrar el valor exacto de $\mathcal{D}_n^{(1)}(t)$ en el resto del intervalo $[-1,1]$ (para ver la forma de $\mathcal{D}_2^{(1)}$ y $\mathcal{D}_3^{(1)}$ consúltese [**12**]). Es más, es posible incluso obtener el valor de $\mathcal{D}_n^{(k)}(t)$ para cada $t \in [-1,1]$ y cada $k \leq n$ (véase [**26**]). Un problema menos ambicioso pero igualmente interesante consiste en encontrar una curva sencilla que mayore de la forma más ajustada posible a $\mathcal{D}_n^{(k)}$ en el intervalo $[-1,1]$. S. Bernstein probó en 1912 que $\mathcal{D}_n^{(1)}(t) \leq n(1-t^2)^{-1/2}$, $\forall t \in (-1,1)$. Escrito de otra forma se tiene:

Teorema 4.7 (S. Bernstein). *Sea p un polinomio en $\mathcal{P}_n^1(\mathbb{R})$. Entonces*

$$|p'(t)| \leq \frac{n}{\sqrt{1-t^2}} \quad \forall t \in (-1,1). \tag{4.4}$$

Observación 4.8. El resultado anterior es una consecuencia inmediata de la desigualdad de Bernstein para polinomios trigonométricos. Para ver esto basta aplicar el Teorema 4.3 al polinomio trigonométrico definido por $\theta \mapsto p(\cos\theta)$ para cada $p \in \mathcal{P}_n^1(\mathbb{R})$.

Es posible probar la desigualdad de Markov (4.2) usando (4.4). El lector encontrará una demostración de este resultado en [**34**] (véase también el Teorema 3.3.6 en [**40**]):

Teorema 4.9. *Si $p \in \mathcal{P}_{n-1}^1(\mathbb{R})$ es tal que $|p(t)| \leq n(1-t^2)^{-1/2}$, $\forall t \in (-1,1)$, entonces se tiene que*

$$\|p'\|_{[-1,1]} \leq n^2.$$

Para derivadas superiores, R. Duffin y A. C. Schaeffer probaron la siguiente desigualdad de tipo Bernstein en el interior del intervalo $[-1,1]$ (véase [**22**]):

Teorema 4.10 (R. Duffin y A. C. Schaeffer). *Sea $p \in \mathcal{P}_n^1(\mathbb{R})$ y $t \in (-1,1)$. Entonces se tiene que*

$$|p^{(k)}(t)| \leq \left| \frac{d^k}{dt^k} e^{in \arccos t} \right| = \left\{ \left(\frac{d^k}{dt^k} \cos n\theta \right)^2 + \left(\frac{d^k}{dt^k} \operatorname{sen} n\theta \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \qquad (4.5)$$

donde $t = \cos\theta$.

Observación 4.11. De ahora en adelante escribiremos $\mathcal{M}_n^{(k)}(t)$ para denotar la parte derecha de (4.5), para cada $t \in (-1,1)$. Es decir,

$$\mathcal{M}_n^{(k)}(t) := \left\{ \left(\frac{d^k}{dt^k} \cos n\theta \right)^2 + \left(\frac{d^k}{dt^k} \operatorname{sen} n\theta \right)^2 \right\}^{1/2} \quad \forall t \in (-1,1).$$

Nótese que si $k = 1$, $\mathcal{M}_n^{(1)}(t) = (1-t^2)^{-1/2}$, para todo $t \in (-1,1)$. También se tiene que

$$\mathcal{M}_n^{(2)}(t) = \left(\frac{n^4}{(1-t^2)^2} + \frac{n^2 t^2}{(1-t^2)^3} \right)^{1/2} \quad \forall t \in (-1,1),$$

$$\mathcal{M}_n^{(3)}(t) = \left\{ \left(\frac{3n^2 t}{(1-t^2)^2} \right)^2 + \left(\frac{n(2t^2+1-n^2+n^2t^2)}{(1-t^2)^{5/2}} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad \forall t \in (-1,1).$$

El Teorema 4.9 admite una generalización para derivadas superiores que usa la estimación puntual (4.5). De hecho esto constituye lo que posiblemente sea la demostración más sencilla del Teorema 4.6 (véase **[22]**):

Teorema 4.12 (Duffin y Schaeffer). *Sea p un polinomio en $\mathcal{P}_{n-k}(\mathbb{R})$ $(n \geq k)$ tal que $|p(t)| \leq \mathcal{M}_n^k(t)$, $\forall t \in (-1,1)$, entonces se tiene que*

$$\|p\|_{[-1,1]} \leq T_n^{(k)}(1) = \frac{n^2(n^2-1)\cdots(n^2-(k-1)^2)}{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}.$$

1.1.1. **Desigualdades de Bernstein-Markov para polinomios complejos en una variable.** Llegados a este punto vamos a hacer una incursión en el caso complejo para notar que en este supuesto los resultados obtenidos son diferentes. Representaremos el disco unidad mediante $\mathbb{D}$, es decir, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Además $\|p\|_{\mathbb{D}} = \max_{z\in\mathbb{D}} |p(z)|$ representará el máximo valor del módulo de un polinomio p en el disco unidad. Si p es un polinomio en $\mathcal{P}_n^1(\mathbb{C})$, entonces el principio del módulo máximo junto con la desigualdad de Bernstein para polinomios trigonométricos prueban que $\|p'\|_{\mathbb{D}} \leq n$. A diferencia del caso real, ahora sí es posible generalizar de forma trivial la estimación obtenida para la primera derivada a derivadas superiores. Efectivamente, aplicando k veces ($k \leq n$) el resultado anterior se tiene:

Teorema 4.13 (S. Berstein). *Sea p un polinomio en $\mathcal{P}_n^1(\mathbb{C})$, entonces*

$$\|p^{(k)}\|_{\mathbb{D}} \leq n(n-1)\cdots(n-k+1). \tag{4.6}$$

Además la constante obtenida en (4.6) es óptima, siendo $p(z) = z^n$ el polinomio extremal.

1.2. Desigualdades de Bernstein-Markov para polinomios con mayorantes funcionales. El otro problema que nos ocupa en este capítulo consiste en sustituir la mayorante constante con la que habíamos venido trabajando hasta ahora por una mayorante más complicada. El profesor Turán propuso en una conferencia celebrada en Varna (Bulgaria) en 1970 el problema correspondiente a la mayorante $\varphi(t) = \sqrt{1-t^2}$, $t \in [-1,1]$. Es decir, si $p \in \mathcal{P}_n^{\varphi}(\mathbb{R})$ y $t_0 \in [-1,1]$, Turán propone determinar

$$\sup_{p \in \mathcal{P}_n^{\varphi}(\mathbb{R})} |p'(t_0)|.$$

Un año más tarde, Q. I. Rahman publica un artículo [**53**] en el que se investiga no sólo el problema propuesto por Turán, sino también el correspondiente a la mayorante $\psi(t) = |t|$, $t \in [-1,1]$. En el siguiente resultado se da una estimación óptima de la norma de la derivada de un polinomio perteneciente a la clase $\mathcal{P}_n^{\varphi}(\mathbb{R})$:

Teorema 4.14 (Q. I. Rahman). *Sea p un polinomio en $\mathcal{P}_n^{\varphi}(\mathbb{R})$. Entonces*

$$\|p'\|_{[-1,1]} \leq 2(n-1). \tag{4.7}$$

La constante en la desigualdad (4.7) no puede ser reemplazada por otra menor. Efectivamente, si U_n es el polinomio de Chebyshev de segunda especie de grado n definido por $U_n(t) = (1-t^2)^{-1/2}\operatorname{sen}[(n+1)\arccos t]$, $\forall t \in [-1,1]$, entonces la igualdad en (4.7) se alcanza para el polinomio $p_n(t) = (1-t^2)U_{n-2}(t)$. Además, la igualdad *sólo* se alcanza en los extremos del intervalo $[-1,1]$.

La desigualdad (4.7) puede mejorarse en los puntos interiores del intervalo $[-1,1]$. El siguiente resultado proporciona una estimación más precisa de $|p'(t)|$ para aquellos valores de t en el interior de $[-1,1]$ que se encuentren lo suficientemente alejados de los extremos.

Teorema 4.15 (Q. I. Rahman). *Sea p un polinomio en $\mathcal{P}_n^{\varphi}(\mathbb{R})$. Entonces*

$$|p'(t)| \leq \left\{ \frac{t^2}{1-t^2} + n^2 \right\}^{1/2} \quad \forall t \in (-1,1). \tag{4.8}$$

El hecho de restringir el número de polinomios sometidos a estudio también repercute en la magnitud de sus coeficientes. Efectivamente, para los polinomios de la clase $\mathcal{P}_n^{\varphi}(\mathbb{R})$ se puede establecer una cota superior para sus coeficientes mejor que la del caso general (véase [**53**] y [**54**]):

Teorema 4.16 (Q. I. Rahman). *Sea p un polinomio en $\mathcal{P}_n^{\varphi}(\mathbb{R})$ de la forma $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$. Entonces se tiene que $|a_k|$ $(1 \leq k \leq n)$ está acotado por el valor absoluto del coeficiente de t^k en el polinomio $p_n(t) = (1-t^2)U_{n-2}(t)$ ó $p_{n-1}(t) = (1-t^2)U_{n-3}(t)$ $(t \in [-1,1])$ dependiendo de si la diferencia $n-k$ es par o impar respectivamente. En particular, para $n \geq 2$ se tiene que $|a_1| \leq n-1$ y $|a_2| \leq \{(n-1)^2+1\}/2$. Si $n \geq 3$, entonces $|a_n| \leq 2^{n-2}$ y $|a_{n-1}| \leq 2^{n-3}$.*

Como ya anunciábamos, Q. I. Rahman proporcionó en [**53**] resultados semejantes para la mayorante $\psi(t) = |t|$, $\forall t \in [-1,1]$. En este caso, para valores altos de n, la mejor estimación de la norma de la derivada de un polinomio en la clase $\mathcal{P}_n^{\psi}(\mathbb{R})$ coincide básicamente para valores grandes de n con la constante encontrada por A. A. Markov en el Teorema 4.2 (véase [**53**]):

Teorema 4.17 (Q. I. Rahman). *Sea p un polinomio en $\mathcal{P}_n^{\psi}(\mathbb{R})$, entonces*

$$\|p'\|_{[-1,1]} \leq (n-1)^2 + 1 \tag{4.9}$$

La constante que aparece en (4.9) no puede reemplazarse por otra menor, ya que la igualdad se alcanza para el polinomio dado por $p(t) = tT_{n-1}(1)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Además la igualdad se da *sólo* en los extremos del intervalo $[-1,1]$. El siguiente resultado de Q. I. Rahaman mejora (4.9) para aquellos puntos del interior de $[-1,1]$ que se encuentran lo suficientemente alejados de los extremos (véase [**53**]):

Teorema 4.18 (Q. I. Rahaman). *Sea p un polinomio en $\mathcal{P}_n^{\psi}(\mathbb{R})$. Entonces*

$$|p'(t)| \leq \left\{ (n-1)^2 \frac{t^2}{1-t^t} + 1 \right\}^{1/2} \quad \forall t \in (-1,1).$$

Algunos de los resultados presentados en esta introducción a los problemas de Bernstein-Markov para polinomios en una variable pueden ser generalizados al caso de polinomios definidos en un espacio de Banach real. Éste será nuestro objetivo en las siguientes secciones.

2. Desigualdades de Bernstein-Markov en espacios de Banach reales.

En esta sección realizaremos algunas generalizaciones a polinomios en espacios de Banach reales de los problemas de Bernstein-Markov presentados en la sección anterior. Como ya indicábamos en la introducción del capítulo, estudiaremos sólo polinomios de norma ≤ 1 con el fin de evitar el tener que arrastrar una constante en todos los cálculos. A la vista de los resultados ya conocidos y los que se obtendrán, se conjetura que todas las desigualdades que se han presentado en la sección precedente se verifican con las mismas constantes en el caso general.

2.1. Desigualdades de Bernstein-Markov para la primera derivada en espacios de Banach reales. O. G. Kellogg probó en 1928 [**34**] que para polinomios en varias variables (con la norma euclídea) la desigualdad de Markov para la primera derivada (4.2) sigue cumpliéndose:

Teorema 4.19 (O. G. Kellogg). *Sea P un polinomio en $\mathcal{P}_n^1(\ell_2^m)$. Entonces*

$$\|\nabla P(x)\|_{\mathcal{L}(\ell_2^m)} \leq n^2 \quad \forall x \in \bar{B}_{\ell_2^m}.$$

En 1975, L. A. Harris dio otra demostración del resultado anterior para espacios de Hilbert reales en general. Es más, también encontró una generalización de (4.4) (véase [**27**, Theorem 5]):

Teorema 4.20 (L. A. Harris). *Sea H un espacio de Hilbert real y sea $P \in \mathcal{P}_n^1(H)$. Si $< \cdot, \cdot >$ denota el producto interno en H, entonces*

$$|DP(x)y| \leq \min\left\{\frac{n(1-\|x\|^2+ < x,y >^2)\sqrt{1-P(x)^2}}{\sqrt{1-\|x\|^2}}, n^2\right\},$$

para cada $x \in B_H$ e $y \in S_H$. En particular

$$\|DP(x)\| \leq \min\left\{\frac{n\sqrt{1-P(x)^2}}{\sqrt{1-\|x\|^2}}, n^2\right\} \leq \min\left\{\frac{n}{\sqrt{1-\|x\|^2}}, n^2\right\}, \tag{4.10}$$

para todo $x \in B_H$.

En 1991, Y. Sarantopoulos generalizó (4.10) para cualquier espacio de Banach real. Dada la importancia que tienen las técnicas que emplea Y. Sarantopoulos para resultados posteriores, damos a continuación una demostración completa de su generalización:

Teorema 4.21 (Y. Sarantopoulos). *Sea E un espacio de Banach real y $P \in \mathcal{P}_n^1(E)$. Entonces*

$$\|DP(x)\| \leq \min\left\{\frac{n\sqrt{1-P(x)^2}}{\sqrt{1-\|x\|^2}}, n^2\right\} \leq \min\left\{\frac{n}{\sqrt{1-\|x\|^2}}, n^2\right\}, \tag{4.11}$$

para cada $x \in B_E$. En particular se tiene que $\|DP\| \leq n^2$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in B_E$ e $y \in S_E$. Definamos T como el polinomio trigonométrico de grado $\leq n$ dado por

$$T(\theta) = P(x \cos\theta + y\sqrt{1-\|x\|^2}\operatorname{sen}\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Como $\|x\cos\theta + y\sqrt{1-\|x\|^2}\operatorname{sen}\theta\| \leq 1$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, se tiene que $\|T\| \leq 1$. Por otro lado, aplicando la regla de la cadena

$$T'(\theta) = DP(x\cos\theta + y\sqrt{1-\|x\|^2}\operatorname{sen}\theta)(-x\operatorname{sen}\theta + y\sqrt{1-\|x\|^2}\cos\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, la desigualdad de Bernstein para polinomios trigonométricos implica que

$$\sqrt{1-\|x\|^2}|DP(x)y| = |T'(0)| \leq n.$$

De esta forma se llega a

$$\|DP(x)\| \leq \frac{n}{\sqrt{1-\|x\|^2}}.$$

Sea ahora p el polinomio en una variable real definido por $p(t) = DP(tx/\|x\|)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ (sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x \neq 0$ por continuidad). El polinomio p verifica la desigualdad $|p(t)| \leq n/(1-t^2)^{-1/2}$, $\forall t \in (-1,1)$. Por tanto, el Teorema 4.9 garantiza que $|p(t)| \leq n^2$, $\forall t \in [-1,1]$. En particular, si $t = \|x\|$ se tiene que $\|DP(x)\| \leq n^2$. □

Observación 4.22. Para polinomios en varias variables, Baran [7] ha dado una demostración independiente del resultado anterior (aunque más complicada) usando técnicas complejas.

2.1.1. **Desigualdades de Markov para polinomios sobre conjuntos convexos.** Existe en la actualidad una línea de investigación activa que estudia con más generalidad el problema de Bernstein-Markov para la primera derivada de polinomios en espacios de Banach reales. La variante del problema que acabamos de ver en el Teorema 4.21 consiste en sustituir en la norma polinomial la bola unidad del espacio por otro conjunto convexo. Las constantes que aparecen en las desigualdades del tipo Bernstein-Markov obtenidas de este modo no dependerán solamente de la naturaleza del espacio que se considere, sino también de la geometría del conjunto convexo:

Definición 4.23. Si E es un espacio de Banach, decimos que un subconjunto $K \subset E$ es un cuerpo convexo si K es convexo, cerrado y acotado.

Los siguientes conceptos serán de utilidad para comprender esta sección:

Definición 4.24. *Si K es un cuerpo convexo en un espacio de Banach real E, entonces:*

(a) El diámetro de K se define como

$$\operatorname{diam}(K) = \sup_{x,y \in K} \|x - y\|.$$

(b) El diámetro interior de K se define como

$$r(K) = \sup\{r : x_0 + r\bar{B}_E \subset K, \text{ para algún } x_0 \in K\}.$$

(c) Si $h \in S_E$, definimos

$$W_K(h) = sup\{\|x - y\| : x, y \in K, \ x - y = ch \text{ para algún } c \in \mathbb{R}\}.$$

y

$$W_K = \inf\{W_K(h) : \ h \in S_E\}.$$

(d) Si $P \in \mathcal{P}_n(E)$, entonces se define su norma respecto de K como

$$\|P\|_K = \sup_{x \in K} |P(x)|.$$

Dado un espacio de Banach real E y un cuerpo convexo K, el problema que se plantea es encontrar una cota para $\|DP(x)\|_{\mathcal{L}(E)}$, donde $P \in \mathcal{P}_n(E)$ es tal que $\|P\|_K \leq 1$ y $x \in K$. Nótese que este problema se reduce al resuelto por Y. Sarantopoulos en el Teorema 4.21 para el caso especial en que K sea la bola unidad del espacio. Gran parte de la investigación que se realiza hoy en día en este sentido está encaminada al estudio del problema en espacios euclídeos de dimensión finita. En dimensión uno los cuerpos convexos son los intervalos compactos de la forma $[\alpha, \beta]$. Si $\alpha \neq \beta$ y $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ es tal que $\|p\|_{[\alpha,\beta]} \leq 1$, entonces el cambio de variable $t \mapsto [\alpha + \beta - (\alpha - \beta)t]/2$ junto con el Teorema 4.2 demuestran que

$$\|p'\|_{[\alpha,\beta]} \leq \frac{2}{\beta - \alpha} n^2,$$

con igualdad para el polinomio $T_{n,\alpha,\beta}$ definido por $T_{n,\alpha,\beta}(t) := T_n(\frac{2t-\alpha-\beta}{\beta-\alpha})$, para $t \in [\alpha, \beta]$. Para dimensiones superiores, C. Coatmelec [**16**] probó en 1966 que dado un cuerpo convexo K en ℓ_2^m, existe una constante C_K que depende de diam(K), tal que para cada polinomio $P \in \mathcal{P}_n(\ell_2^m)$ con $\|P\|_K \leq 1$ y cada $x \in K$, se tiene que

$$\|\nabla P(x)\|_{\mathcal{L}(\ell_2^m)} \leq C_K n^2.$$

En 1974, R. D. Wilhelmsen [**73**] probó el siguiente resultado:

Teorema 4.25 (R. D. Wilhelmsen). *Sea K un cuerpo convexo en ℓ_2^m y sea $P \in \mathcal{P}_n(\ell_2^m)$ tal que $\|P\|_K \leq 1$. Entonces para cada $x \in K$ se tiene que*

$$\|\nabla P(x)\|_{\mathcal{L}(\ell_2^m)} \leq \frac{4n^2}{\operatorname{diam}(K)}. \tag{4.12}$$

Dado un cuerpo convexo K en ℓ_2^m y $P \in \mathcal{P}_n(\ell_2^m)$ con $\|P\|_K \leq 1$, en vista de la desigualdad (4.12) nos podemos preguntar cuál es la mejor constante M_K en la desigualdad

$$\|\nabla P(x)\|_{\mathcal{L}(\ell_2^m)} \leq \frac{M_K n^2}{\operatorname{diam}(K)} \quad \forall x \in \bar{B}_{\ell_2^m}.$$

R. D. Wilhelmsen sabía por el Teorema 4.19 (véanse también los Teoremas 4.20 y 4.21), que $M_K = 2$ cuando K coincide con la bola unidad de ℓ_2^m. Cuando $m = 1$, el polinomio de Chebyshev T_n muestra que la constante $M_{[-1,1]} = 2$ es óptima. Es más, A. Kroó y Sz. Révész han demostrado recientemente en [**37**] que no hay ningún cuerpo convexo en ℓ_2^m para el que $M_K < 2$, es decir, $M_K \geq 2$. En definitiva, para cada cuerpo convexo K en ℓ_2^m se tiene que

$$2 \leq M_K \leq 4.$$

R. D. Wilhelmsen conjeturó que $M_K = 2$ para todo cuerpo convexo en ℓ_2^m. Esta conjetura es cierta y se sigue del Teorema 4.21, cuando K es la bola unidad de un cierto espacio de Banach in $\mathbb{R}^m$, es decir, cuando K tiene simetría central. Sin embargo, la conjetura no es cierta en general para cuerpos convexos asimétricos, como lo demuestra el siguiente ejemplo de L. Bialas-Cieẑ y P. Goetgheluck (véase [**11**]):

Ejemplo 4.26. *Si $K = \Delta_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$, entonces el polinomio $P \in \mathcal{P}_2(\ell_2^2)$ definido por*

$$P(x, y) = 4(9x^2 - 4y^2 + 9xy + 2y + 1)/5 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

verifica que $\|P\|_{\Delta_0} = 1$ *y* $\|\nabla P(1,0)\|_{\mathcal{L}(\ell_2^2)} = 4\sqrt{202}/5$. *Pero como* $\mathrm{diam}(\Delta_0) = \sqrt{2}/2$, *este ejemplo demuestra que*

$$M_{\Delta_0} \geq \frac{4\sqrt{202}}{5}\frac{\sqrt{2}/2}{4} = 2\sqrt{1.01} > 2.$$

A. Kroó y Sz. Révész [**37**] han demostrado que la constante que aparece en (4.12) se puede reducir por un factor $\sqrt{2}$. Esto unido a la estimación $M_K \geq 2$, proporciona el siguiente resultado:

Teorema 4.27 (A. Kroó y Sz. Révész). *Si K es un cuerpo convexo en ℓ_2^m y definimos*

$$\mathcal{D}(n, K) = \sup\{\|\nabla P\|_{\mathcal{L}(\ell_2^m)} : \ P \in \mathcal{P}_n(\ell_2^m),\ \|P\|_K \leq 1\},$$

entonces

$$\frac{2n^2}{\mathrm{diam}(K)} \leq \mathcal{D}(n, K) \leq \frac{2\sqrt{2}n^2}{\mathrm{diam}(K)}.$$

Expresado de otra forma se tiene que $2 \leq M_K \leq 2\sqrt{2}$.

Para polinomios definidos en un espacio de Banach real arbitrario, A. V. Andrianov [**2**] ha obtenido la siguiente generalización del Teorema 4.25.

Teorema 4.28 (A. V. Andrianov). *Sea E un espacio de Banach real y sea K un cuerpo convexo en E. Entonces para cada $P \in \mathcal{P}_n(E)$ tal que $\|P\|_K \leq 1$ se tiene*

$$\|DP(x)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{4n^2}{r(K)} \quad \forall x \in K.$$

V. I. Skalyga [**64**] ha anunciado recientemente (sin demostración) la siguiente mejora de la desigualdad anterior:

Teorema 4.29 (V. I. Skalyga). *Sea E un espacio de Banach real y sea K un cuerpo convexo en E. Entonces para cada $P \in \mathcal{P}_n(E)$ tal que $\|P\|_K \leq 1$ se tiene*

$$\|DP(x)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{2.6402n^2}{W_K} \quad \forall x \in K.$$

Nótese en los dos últimos resultados que $\mathrm{diam}(K) \geq W_K \geq r(K)$ para cada cuerpo convexo K en $\mathcal{R}^n$.

En el resto de esta memoria nos limitaremos a estudiar el caso en que K coincida con la bola unidad del espacio.

2.2. Desigualdades de Bernstein-Markov para derivadas superiores de polinomios definidos en espacios de Banach reales. Hemos visto que para todo espacio de Banach real E y todo polinomio $P \in \mathcal{P}_n^1(E)$, se tiene que $\|DP(x)\| \leq n^2 = T_n^{(1)}(1)$, $\forall x \in \bar{B}_E$, donde la constante n^2 no se puede mejorar en general. No es difícil obtener estimaciones óptimas para el polinomio homogéneo asociado a la derivada n-ésima de cualquier elemento de $\mathcal{P}_n^1(E)$:

Proposición 4.30. *Si E es un espacio de Banach real y $P \in \mathcal{P}_n^1(E)$, entonces*

$$\|\widehat{D}^{(n)}P(x)\| \leq 2^{n-1}n! = T_n^{(n)}(1) \quad \forall x \in \bar{B}_E.$$

La constante $T_n^{(n)}(1)$ no se puede mejorar en general.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $P = \sum_{k=0}^n P_k$ con $P_k \in \mathcal{P}(^kE)$. Como por el Teorema 3.16 se tiene que $\|P_n\| \leq 2^{n-1}$ (véase también (3.16)), entonces para cada $x, y \in \bar{B}_E$, de la Proposición 1.14 se sigue que

$$|\widehat{D}^{(n)}P(x)y| = |\widehat{D}^{(n)}P_n(x)y| = n!|P_n(y)| \leq 2^{n-1}n! = T_n^{(n)}(1).$$

□

A la vista de estos hechos, parece razonable plantearse la posibilidad de generalizar la desigualdad (4.3) para cualquier derivada de un polinomio definido en un espacio de Banach real. Esta cuestión ya fue abierta por L. A. Harris en "The Scottish Book", problema 74 en el año 1975. En la misma referencia, L. A. Harris aporta la siguiente estimación de la norma de $\widehat{D}^{(k)}P$ $(k \leq n)$(véase [**44**]):

Proposición 4.31 (L. A. Harris). *Sea E un espacio de Banach real y sea $P \in \mathcal{P}_n^1(E)$. Entonces*

$$\|\widehat{D}^{(k)}P(x)\| \leq 2^{2k-1}T_n^{(k)}(1) \quad \forall x \in \bar{B}_E. \tag{4.13}$$

En lo sucesivo veremos que la técnica empleada por Y. Sarantopoulos para probar (4.11) usada junto con la siguiente generalización del Teorema 4.12 nos permite obtener mejoras sustanciales de la estimación (4.13) para $k = 2, 3$. Además, para esos valores de k se obtienen con la misma demostración estimaciones puntuales en el interior de la bola unidad semejantes a las dadas en el Teorema 4.5.

Lema 4.32. *Si P es un polinomio de grado $\leq n - k$ $(n \geq k)$ definido sobre un espacio de Banach real E tal que $|P(x)| \leq \mathcal{M}_n^{(k)}(\|x\|)$, $\forall x \in B_E$, entonces $|P(x)| \leq T_n^{(k)}(1)$, $\forall x \in \bar{B}_E$. Recordemos que $\mathcal{M}_n^{(k)}(t)$ representa la parte derecha de la desigualdad (4.5) para cada $t \in (-1, 1)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $x \neq 0$. Sea $x \in \bar{B}_E \setminus \{0\}$ y definamos $p(t) = P(tx/\|x\|)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Entonces p es un polinomio en una variable real de grado $\leq n - k$ $(n \geq k)$ tal que $|p(t)| \leq \mathcal{M}_n^{(k)}(|t|) = \mathcal{M}_n^{(k)}(t)$, $\forall t \in (-1, 1)$. En consecuencia, por el Teorema 4.12 (véase [**22**]) se tiene que $|p(t)| \leq T_n^{(k)}(1)$, $\forall t \in [-1, 1]$. La demostración se concluye poniendo $t = \|x\|$. □

Proposición 4.33. *Sea E un espacio de Banach real y P un polinomio en $\mathcal{P}_n^1(E)$. Entonces, para cada x en B_E se tiene que*

$$\|\widehat{D}^{(2)}P(x)\| \leq \min\left\{\frac{n^2}{1 - \|x\|^2} + \frac{n\|x\|}{(1 - \|x\|^2)^{3/2}}\ ,\ \sqrt{2}T_n^{(2)}(1)\right\}. \tag{4.14}$$

En particular, por continuidad de $\widehat{D}^{(2)}P$ se tiene que $\|\widehat{D}^{(2)}P(x)\| \leq \sqrt{2}\frac{n^2(n^2-1)}{3}$, $\forall x \in \bar{B}_E$.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos $x \in B_E$ e $y \in S_E$. Sea T el polinomio trigonométrico real de grado $\leq n$ dado por

$$T(\theta) = P(x\cos\theta + \sqrt{1 - \|x\|^2}y \operatorname{sen}\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} T''(\theta) =& D^2P(x\cos\theta + \sqrt{1 - \|x\|^2}y\operatorname{sen}\theta)(-x\operatorname{sen}\theta + \sqrt{1 - \|x\|^2}y\cos\theta)^2 \\ &- DP(x\cos\theta + \sqrt{1 - \|x\|^2}y\operatorname{sen}\theta)(x\cos\theta + \sqrt{1 - \|x\|^2}y\operatorname{sen}\theta). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Por otro lado, como

$$\|x\cos\theta + \sqrt{1 - \|x\|^2}y\operatorname{sen}\theta\| \leq 1 \quad \forall\theta \in \mathbb{R},$$

entonces $|T(\theta)| \leq 1$, para cada número real θ. Por tanto, aplicando a T la desigualdad de Bernstein para polinomios trigonométricos, se tiene que

$$|T''(0)| = |(1 - \|x\|^2)D^2P(x)y^2 - DP(x)x| \leq n^2.$$

Teniendo en cuenta ahora la desigualdad (4.11), se obtiene una parte del resultado buscado:

$$(1 - \|x\|^2)|D^2P(x)y^2| \leq n^2 + |DP(x)x| \leq n^2 + \frac{n\|x\|}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}.$$

Para demostrar la otra desigualdad implícita en (4.14) apliquemos a lo anterior la desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned}|\widehat{D}^{(2)}P(x)y| &\leq \frac{n^2}{1-\|x\|^2}+\frac{n\|x\|}{(1-\|x\|^2)^{3/2}}\\ &\leq \sqrt{2}\left(\frac{n^4}{(1-\|x\|^2)^2}+\frac{n^2\|x\|^2}{(1-\|x\|^2)^3}\right)^{1/2}=\sqrt{2}\mathcal{M}_n^{(2)}(\|x\|).\end{aligned}$$

Para finalizar, basta con aplicar el Lema 4.32 al polinomio definido en E por $w\mapsto \widehat{D}^{(2)}P(w)y$, $\forall w\in E$ y tomar el supremo sobre todos los elementos y de la esfera unidad S_E. Se tendría entonces que $\|\widehat{D}^{(2)}P(x)\|\leq\sqrt{2}T_n^{(2)}(1)$, $\forall x\in B_E$, lo que completa la demostración de (4.14). □

Para derivadas superiores, la técnica empleada en la Proposición 4.33 se complica extraordinariamente. No obstante, para la tercera derivada aún es posible encontrar resultados interesantes sin demasiado esfuerzo. Primero probaremos el siguiente lema:

Lema 4.34. *Existe una sucesión decreciente de números reales positivos* $\{M_n\}_{n=3}^{\infty}$ *con límite* $2\sqrt{\sqrt{21}-1}$, *tal que para cada* $n\geq 3$ *y cada* $t\in[0,1)$ *se tiene que*

$$\begin{aligned}&\frac{6n^2t}{(1-t^2)^2}+\frac{n(5t^2+1+n^2-n^2t^2)}{(1-t^2)^{5/2}}\\ &\qquad\leq M_n\left\{\left(\frac{3n^2t}{(1-t^2)^2}\right)^2+\left(\frac{n(2t^2+1-n^2+n^2t^2)}{(1-t^2)^{5/2}}\right)^2\right\}^{1/2}=M_n\cdot\mathcal{M}_n^{(3)}(t).\end{aligned}$$

Para cada $n\geq 3$, *el número* M_n *está dado por*

$$M_n^2=\frac{12n^4+96n^2-4-4(3n^2-1)\sqrt{21n^4-42n^2+1}}{3n^2(4-n^2)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $t\in[0,1)$ y $n\geq 3$, entonces por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}&\frac{6n^2t}{(1-t^2)^2}+\frac{n(5t^2+1+n^2-n^2t^2)}{(1-t^2)^{5/2}}\\ &\qquad\leq\sqrt{2}\left\{\left(\frac{6n^2t}{(1-t^2)^2}\right)^2+\left(\frac{n(5t^2+1+n^2-n^2t^2)}{(1-t^2)^{5/2}}\right)^2\right\}^{1/2}. \qquad (4.16)\end{aligned}$$

Vamos a encontrar una constante C_n tal que la desigualdad

$$\begin{aligned}\left\{\left(\frac{6n^2t}{(1-t^2)^2}\right)^2+\left(\frac{n(5t^2+1+n^2-n^2t^2)}{(1-t^2)^{5/2}}\right)^2\right\}^{1/2}&\\ \le C_n\left\{\left(\frac{3n^2t}{(1-t^2)^2}\right)^2+\left(\frac{n(2t^2+1-n^2+n^2t^2)}{(1-t^2)^{5/2}}\right)^2\right\}^{1/2}&=C_n\cdot\mathcal{M}_n^{(3)}(t),\quad(4.17)\end{aligned}$$

se cumple para cada $n\ge 3$ con $t\in[0,1)$. Si elevamos al cuadrado cada miembro de (4.17) y a continuación simplificamos por $(1-t^2)^5/n$, se obtiene

$$36n^2t^2(1-t^2)+(5t^2+1+n^2-n^2t^2)^2\le C_n^2\big[9n^2t^2(1-t^2)+(2t^2+1-n^2+n^2t^2)^2\big].$$

Realizando algunos cálculos elementales se llega a

$$\begin{aligned}&\big[(n^4-5n^2+4)C_n^2-n^4+46n^2-25\big]t^4\\&\quad+\big[(-2n^4+7n^2+4)C_n^2+2n^4-44n^2-10\big]t^2\\&\qquad+(n^4-2n^2+1)C_n^2-n^4-2n^2-1\ge 0.\end{aligned}$$

Esta desigualdad es cierta siempre que el discriminante Δ_{n,C_n} de la expresión bicuadrada de la izquierda sea negativo. El valor del discriminante está dado por:

$$\Delta_{n,C_n}=9\big[(-3n^4+12n^2)C_n^4+(-12n^4-96n^2+4)C_n^2+240n^4+96n^2\big].$$

El valor más pequeño de C_n para el cual Δ_{n,C_n} es negativo está dado por la única raíz positiva de la ecuación $\Delta_{n,C_n}=0$. Por lo tanto

$$C_n'^2=\frac{6n^4+48n^2-2-2(3n^2-1)\sqrt{21n^4-42n^2+1}}{3n^2(4-n^2)}.$$

Teniendo en cuenta (4.16) y (4.17), basta poner $M_n=\sqrt{2}C_n$. Para finalizar la demostración, usando cálculo elemental se comprueba que $\{M_n\}_{n=3}^{\infty}$ es decreciente y que $\lim_n M_n=2\sqrt{\sqrt{21}-1}$. □

Proposición 4.35. *Sea E un espacio de Banach real y sea P un polinomio $\mathcal{P}_n^1(E)$. Entonces, para cada x en B_E se tiene*

$$\begin{aligned}&\|\widehat{D}^{(3)}P(x)\|\\&\le\min\left\{\frac{6n^2\|x\|}{(1-\|x\|^2)^2}+\frac{n(5\|x\|^2+1+n^2-n^2\|x\|^2)}{(1-\|x\|^2)^{5/2}},M_n\cdot T_n^{(3)}(1)\right\}.\qquad(4.18)\end{aligned}$$

En particular, por continuidad de $\widehat{D}^{(3)}P$, para cada $x\in\bar{B}_E$ se tiene $\|\widehat{D}^{(3)}P(x)\|\le M_n\cdot T_n^{(3)}(1)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in B_E$, $y \in S_E$ y definamos T de la misma forma que en la demostración de la Proposición 4.33, es decir

$$T(\theta) = P(x\cos\theta + \sqrt{1-\|x\|^2}y\operatorname{sen}\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Si derivamos (4.15) una vez más,

$$\begin{aligned}T'''(\theta) = &\widehat{D}^{(3)}P(x\cos\theta + \sqrt{1-\|x\|^2}y\operatorname{sen}\theta)(-x\operatorname{sen}\theta + \sqrt{1-\|x\|^2}y\cos\theta)\\ &- 3D^{(3)}P(x\cos\theta + \sqrt{1-\|x\|^2}y\operatorname{sen}\theta)(-x\operatorname{sen}\theta + \sqrt{1-\|x\|^2}y\cos\theta)\\ &\qquad (x\cos\theta + \sqrt{1-\|x\|^2}y\operatorname{sen}\theta).\end{aligned}$$

Ahora, por la desigualdad de Bernstein para polinomios trigonométricos, se obtiene

$$\begin{aligned}|T'''(0)| = \big|&(1-\|x\|^2)^{3/2}\widehat{D}^{(3)}P(x)y - 3\sqrt{1-\|x\|^2}\cdot D^{(2)}P(x)xy\\ &- \sqrt{1-\|x\|^2}\cdot DP(x)y\big| \le n^3,\end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned}(1-\|x\|^2)^{3/2}|\widehat{D}^{(3)}P(x)y| \le\ & n^3 + 3\sqrt{1-\|x\|^2}\cdot\|D^{(2)}P(x)\|\cdot\|x\|\\ &+ \sqrt{1-\|x\|^2}\cdot\|DP(x)\|. \qquad (4.19)\end{aligned}$$

Por otro lado, según la desigualdad (1.3) de los preliminares sobre polinomios, tenemos que $\|D^{(2)}P(x)\| \le 2\|\widehat{D}^{(2)}P(x)\|$. Poniendo esto en (4.19) junto con (4.11) y (4.14) obtenemos

$$(1-\|x\|^2)^{3/2}|\widehat{D}^{(3)}P(x)y| \le n^3 + 6\sqrt{1-\|x\|^2}\cdot\frac{n}{1-\|x\|^2}\left(n + \frac{\|x\|}{\sqrt{1-\|x\|^2}}\right)\cdot\|x\| + n.$$

Aplicando a la desigualdad anterior el Lema 4.34 se sigue que

$$\begin{aligned}|\widehat{D}^{(3)}P(x)y| &\le \frac{6n^2\|x\|}{(1-\|x\|^2)^2} + \frac{n(5\|x\|^2+1+n^2-n^2\|x\|^2)}{(1-\|x\|^2)^{5/2}}\\ &\le M_n\left\{\left(\frac{3n^2\|x\|}{(1-\|x\|^2)^2}\right)^2 + \left(\frac{n(2\|x\|^2+1-n^2+n^2\|x\|^2)}{(1-\|x\|^2)^{5/2}}\right)^2\right\}^{1/2}\\ &= M_n\cdot\mathcal{M}_n^{(3)}(\|x\|).\end{aligned}$$

Para finalizar la demostración de (4.18), procedemos igual que en la demostración de la Proposición 4.33, es decir, aplicando el Lema 4.32 al polinomio de grado $\le n-3$ definido en E por $w \mapsto \widehat{D}^{(3)}P(w)y$, $\forall w \in E$ y tomando el supremo sobre todos los elementos y de la esfera unidad S_E. $\square$

Corolario 4.36. *Si E es un espacio de Banach real y $P \in \mathcal{P}_n^1(E)$, entonces para cada $x \in \mathring{B}_E$ tenemos*

$$\|\widehat{D}^{(3)}P(x)\| < 3'7941 \cdot T_n^{(3)}(1) \approx 0'2530 \cdot n^2(n^2-1)(n^2-2^2).$$

DEMOSTRACIÓN. Nótese que la Proposición 4.30 proporciona una estimación óptima para la derivada tercera de un polinomio de grado 3 en un espacio de Banach real. Por lo tanto, podemos tomar $n \geq 4$ en el enunciado de la Proposición 4.35. Como $\{M_n\}_{n=3}^{\infty}$ es decreciente, es decir, $M_n \leq M_4$ para $n \geq 4$, entonces

$$\|\widehat{D}^{(3)}P(x)\| \leq M_4 \cdot T_n^{(3)}(1) \approx 3'7941 \cdot T_n^{(3)}(1) \approx 0'2530 \cdot n^2(n^2-1)(n^2-2^2).$$

para cada $x \in \mathring{B}_E$. □

V. I. Skalyga ha investigado este tipo de desigualdades [**63**] y [**64**]. En [**63**] el autor demuestra que para $k=2$, la desigualdad (4.3) puede ser generalizada en el siguiente sentido:

Proposición 4.37. *Sea P un polinomio en $\mathcal{P}_n^1(\ell_\infty^m)$ ($m \in \mathbb{N}$). Entonces*

$$\|D^{(2)}P(x)\|_{\mathcal{L}(^2\ell_1^m)} \leq T_n^{(2)}(1) = \frac{n^2(n^2-1)}{3} \quad \forall x \in B_{\ell_\infty^m}.$$

En [**64**] V. I Skalyga enuncia un buen número de resultados relacionados con el problema de Bernstein-Markov para polinomios en espacios de Banach reales arbitrarios, entre los que se encuentran (sin demostración) las siguientes estimaciones:

Proposición 4.38. *Sea E un espacio de Banach real y sea P un polinomio en $\mathcal{P}_n^1(E)$. Entonces, para cada x en B_E se tiene*

$$\|\widehat{D}^{(2)}P(x)\| \leq \min\left\{\frac{n^2+n\|x\|^2}{(1-\|x\|^2)^{3/2}}, \frac{n^2(n^2-1)}{3} + 0.07754n^4\right\}, \tag{4.20}$$

$$\|\widehat{D}^{(3)}P(x)\| \leq \min\left\{\frac{n^3+n+6n(n-1)\|x\|}{(1-\|x\|^2)^{5/2}}, \frac{4n^4(n^2-2^2)}{5^2}\right\}. \tag{4.21}$$

Observación 4.39. En las desigualdades anteriores, nótese que el crecimiento de las estimaciones para la norma de los operadores $\widehat{D}^{(2)}P$ y $\widehat{D}^{(3)}P$ viene dado por $0'4109 \cdot n^4$ y $0'16 \cdot n^6$ para la segunda y la tercera derivada respectivamente, mientras que el de las nuestras es $0'4715 \cdot n^4$ y $0'2530 \cdot n^6$ para la segunda y para la tercera derivada respectivamente. No obstante, se puede comprobar fácilmente que nuestra estimación puntual para la norma $\widehat{D}^{(2)}P(x)$ es mejor que la estimación puntual que aparece implícitamente en (4.20) para cualquier x en la bola unidad B_E. Algo parecido ocurre para la tercera derivada. En este caso, nuestra estimación de la norma de $\widehat{D}^{(3)}P(x)$ es mejor que la estimación puntual que aparece implícitamente en (4.21), salvo para una pequeña bola centrada en el origen cuyo radio tiende a cero cuando n tiende a infinito.

V. I. Skalyga también enuncia en [**64**] (sin demostración) la siguiente estimación de la norma de la derivada k-ésima de un polinomio en un espacio de Banach:

Proposición 4.40. *Sea E un espacio de Banach real y $P \in \mathcal{P}_n^1(E)$. Supongamos que $1 > x_1^{(k-1)} > x_2^{(k-1)} > \ldots > x_{n-k+1}^{(k-1)} > 0$ son las $n-k+1$ raíces del polinomio $T_n^{(k-1)}$. Si definimos $a_{n,k} = \min_{1\leq i \leq n-k+1} |(1-(x_i^{(k-1)})^2)^{k/2} T_n^{(k)}(x_i^{(k-1)})|$ y $m_{n,k} = T_n^{(k)}(1)/a_{n,k}$ para todo n, k con $n \geq k$, entonces para cada x en B_E,*

$$\|D^{(k)}P(x)\| \leq \min\left\{ \min\left\{ \frac{k^{k/2}n!}{k!(1-\|x\|^2)^{k/2}}, \frac{m_{n,k}k^{k/2}n!}{k!} \right\}, \left(\frac{n!}{k!}\right)^2 \right\}.$$

La técnica empleada en las Proposiciones 4.33 y 4.35 puede darse por agotada para la tercera derivada por la complejidad de las operaciones a que da lugar. Una posible forma de atacar el problema para derivadas superiores consiste en intentar trasladar en la medida de lo posible al caso real las desigualdades óptimas que se conocen para la norma del polinomio homogéneo asociado a la derivada de un polinomio en un espacio de Banach *complejo*. Aunque como veremos las técnicas de complejificación no dan buenos resultados, esto nos da pie para introducir qué es lo que ocurre en el caso complejo.

2.2.1. **Desigualdades de Bernstein-Markov en espacios de Banach complejos.** Para empezar, la desigualdad (4.6), que refleja el máximo valor que puede alcanzar el módulo de la derivada de un polinomio en $\mathcal{P}_n^1(\mathbb{C})$, no se cumple en general para espacios de Banach complejos arbitrarios. L. A. Harris probó en 1975 [**27**] que la constante que aparece en (4.6) debe ser reemplazada en el caso general por otra mayor. En el siguiente teorema de L. A. Harris se muestra una versión mejorada de su propio resultado al que aludíamos antes (consultar [**28**]):

Teorema 4.41 (L. A. Harris). *Sea E un espacio de Banach complejo y sea $P \in \mathcal{P}_n^1(E)$. Entonces*

$$\|\widehat{D}^{(k)}P(z)\| \leq \frac{n^n k!}{(n-k)^{n-k}k^k} \quad si \quad \|z\| \leq 1. \tag{4.22}$$

$$\|\widehat{D}^{(k)}P(z)\| \leq \frac{n^n k!}{(n-k)^{n-k}k^k}\|z\|^{n-k} \quad si \quad \|z\| \geq 1. \tag{4.23}$$

Las estimaciones (4.22) y (4.23) son óptimas, alcanzándose la igualdad en ambos casos para el polinomio de Nachbin Φ_n definido en $E = \ell_1^n(\mathbb{C})$ y el punto $z = (1/n, \ldots, 1/n)$.

Observación 4.42. La estimación (4.22) puede ser utilizada para obtener una estimación similar para espacios de Banach reales usando técnicas de complejificación. Efectivamente, sea E un espacio de Banach real, $P \in \mathcal{P}_n^1(E)$ y ν un procedimiento natural de complejificación. Entonces, teniendo en cuenta que $\widehat{D}^{(k)}\widetilde{P}(x)|_E = \widehat{D}^{(k)}P(x)$, $\forall x \in E$, de las desigualdades (4.22) y (3.38) se sigue que

$$\|\widehat{D}^{(k)}P(x)\| \leq \|\widehat{D}^{(k)}\widetilde{P}(x)\|_\nu \leq \frac{n^n k!}{(n-k)^{n-k}k^k}\|\widetilde{P}\|_\nu \leq \frac{n^n k!}{(n-k)^{n-k}k^k}2^{n/2}|T_n(i)|.$$

No obstante, es fácil ver que la constante obtenida de este modo por complejificaciones es mucho mayor que la dada por L. A. Harris en (4.13).

2.3. Desigualdades de Bernstein-Markov para polinomios en espacios de Hilbert reales. En esta sección veremos que la desigualdad de Markov (4.3) puede ser generalizada al menos para la segunda y tercera derivada de un polinomio definido sobre un espacio de Hilbert real. Veremos también que en el interior de la bola unidad es posible mejorar la estimación dada en (4.3) para $k = 2$ y $k = 3$. De hecho probaremos que (4.5) se cumple para la segunda y tercera derivada de un polinomio definido en un espacio de Hilbert real. Por último, encontramos una estimación asintóticamente óptima de la norma de las derivadas *altas* de un polinomio definido en un espacio de Hilbert real de grado suficientemente grande. La generalización del siguiente resultado estándar puede ser usado en la demostración de las desigualdades (4.3) y (4.5) para la segunda derivada de un polinomio definido en un espacio de Hilbert real. También será usada más adelante con otros propósitos.

Lema 4.43. *Supongamos que $f(t) = \sqrt{1-t^2}p(t)$, para todo $t \in [-1,1]$, donde $p \in \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R})$. Si $|f(t)| \leq 1$, para todo $t \in [-1,1]$, entonces*

$$|f'(t)| \leq \frac{n\sqrt{1-f(t)^2}}{\sqrt{1-t^2}} \quad \forall t \in (-1,1). \tag{4.24}$$

Demostración. Sea $T(\theta) := f(\cos\theta) = |\operatorname{sen}\theta|p(\cos\theta)$, para cada $\theta \in \mathbb{R}$. Por lo tanto T es un polinomio trigonométrico de grado $\leq n-1$ tal que $T(\theta) \leq 1$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Aplicando la desigualdad de Szegö al polinomio T se obtiene

$$n^2 f(\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta f'(\cos\theta)^2 = n^2T(\theta)^2 + T'(\theta)^2 \leq n^2.$$

Si ponemos $\cos\theta = t$ en la desigualdad anterior, entonces (4.24) se sigue. □

Proposición 4.44. *Sea H un espacio de Hilbert real y $P \in \mathcal{P}_{n-1}(H)$ verificando la condición*

$$(1-\|x\|^2)^{1/2}|P(x)| \leq 1 \quad \forall x \in B_H.$$

Si definimos $f : \bar{B}_H \to \mathbb{R}$, por $f(x) := (1 - \|x\|^2)^{1/2} P(x)$, $\forall x \in B_H$, entonces

$$\|Df(x)\| \leq \frac{n\sqrt{1 - f(x)^2}}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} \quad \forall x \in B_H. \tag{4.25}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in B_H$ e $y \in S_H$. Si $< \cdot, \cdot >$ es el producto interno en H, para cada $t \in \mathbb{R}$ consideramos el vector $x + \alpha(t - \beta)y \in H$, donde

$$\alpha = \sqrt{1 - \|x\|^2 + < x, y >^2} \qquad \text{y} \qquad \beta = \frac{< x, y >}{\alpha}.$$

Como

$$\|x + \alpha(t - \beta)y\|^2 = 1 - \alpha^2(1 - t^2),$$

se tiene que $x + \alpha(t - \beta)y \in \bar{B}_H$, para todo $t \in [-1, 1]$. Definamos $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mediante

$$g(t) := f(x + \alpha(t - \beta)y) \quad \forall t \in [-1, 1].$$

Si $p(t) := P(x + \alpha(t - \beta)y)$, entonces $\alpha p \in \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ y

$$\begin{aligned} g(t) &= f(x + \alpha(t - \beta)y) = \sqrt{1 - \|x + \alpha(t - \beta)y\|^2} P(x + \alpha(t - \beta)y) \\ &= \sqrt{1 - t^2}(\alpha p)(t), \end{aligned}$$

para todo $t \in [-1, 1]$. Además, por hipótesis se tiene que

$$|g(t)| = |\sqrt{1 - t^2}(\alpha p)(t)| \leq 1 \quad \forall t \in [-1, 1].$$

Por lo tanto, por el Lema 4.43 obtenemos

$$|g'(t)| \leq \frac{n\sqrt{1 - g(t)^2}}{\sqrt{1 - t^2}} \quad \forall t \in (-1, 1).$$

Como $|\beta| < 1$, $g'(\beta) = \alpha Df(x)y$ y $g(\beta) = f(x)$, la desigualdad anterior implica que

$$|Df(x)y| \leq \frac{n\sqrt{1 - f(x)^2}}{\alpha\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{n\sqrt{1 - f(x)^2}}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}.$$

Esto concluye la demostración de (4.25). □

El siguiente resultado generaliza las desigualdades de Bernstein-Markov (4.3) y (4.5) para la segunda derivada de un polinomio definido en un espacio de Hilbert real:

Proposición 4.45. *Sea H un espacio de Hilbert real y sea P un polinomio en $\mathcal{P}_n^1(H)$. Entonces para cada x en B_H se tiene:*

$$\|\widehat{D}^{(2)} P(x)\| \leq \min\left\{ \left(\frac{n^4}{(1 - \|x\|^2)^2} + \frac{n^2\|x\|^2}{(1 - \|x\|^2)^3} \right)^{1/2}, T_n^{(2)}(1) \right\}. \tag{4.26}$$

En particular, por continuidad del operador $D^{(2)}P$ se tiene que $\|\widehat{D}^{(2)}P(x)\| \leq \frac{n^2(n^2-1)}{3}$, $\forall x \in \bar{B}_H$.

Demostración. Sea $x \in B_H$ e $y \in S_H$. Si $< \cdot, \cdot >$ es el producto interno en H, definimos para cada $t \in \mathbb{R}$ el vector $x + \alpha(t-\beta)y \in H$, como en la demostración de la Proposición 4.44, es decir

$$\alpha = \sqrt{1 - \|x\|^2 + < x, y >^2} \qquad \text{y} \qquad \beta = \frac{< x, y >}{\alpha}.$$

Como $x + \alpha(t-\beta)y \in \bar{B}_H$ para todo $t \in [-1,1]$, entonces el polinomio $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ definido por $p(t) := P(x + \alpha(t-\beta)y)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ verifica que $\|p\| \leq 1$. Si aplicamos las desigualdad de tipo Bernstein (4.5) para la segunda derivada a p, entonces

$$|p''(t)| \leq \mathcal{M}_n^{(2)}(t) \quad \forall t \in (-1,1).$$

En particular,

$$\alpha^2|\widehat{D}^{(2)}P(x)y| = |p''(\beta)| \leq \mathcal{M}_n^{(2)}(\beta) = \alpha^2\left(\frac{n^4}{(1-\|x\|^2)^2} + \frac{n^2 < x, y >^2}{(1-\|x\|^2)^3}\right)^{1/2}.$$

Si aplicamos la desigualdad de Schwarz en el último término se obtiene $|\widehat{D}^{(2)}P(x)y| \leq \mathcal{M}_n^{(2)}(\|x\|)$ para todo $x \in B_H$. Para completar la demostración de (4.26), simplemente se aplica el Lema 4.32 al polinomio de grado $n-2$ dado por $w \mapsto \widehat{D}^{(2)}P(w)y$, $\forall w \in H$ y se toma el supremo sobre todos los elementos y de la esfera unidad S_H. □

Observación 4.46. La proposición anterior puede ser probada mediante la aplicación de la desigualdad (4.25). Efectivamente, sea $y \in S_H$ y definamos $Q(x) = 1/nDP(x)y$ para cada x en H. Q es un polinomio de grado $\leq n-1$, por lo tanto, por (4.11) también satisface la estimación $(1-\|x\|^2)^{1/2}|Q(x)| \leq 1$ para cada $x \in B_H$. Definamos una aplicación $f : B_H \to \mathbb{R}$ por $f(x) = Q(x)(1-\|x\|^2)^{1/2}$, $\forall x \in B_H$. Entonces, por la Proposición 4.44, la desigualdad de Schwarz y el hecho de que $(\sqrt{1-f(x)^2})^2 + f(x)^2 = 1$, $\forall x \in B_H$, se sigue

$$\begin{aligned}
|\widehat{D}^{(2)}P(x)y| = n|DQ(x)y| &= n\left|\frac{Df(x)y}{\sqrt{1-\|x\|^2}} + \frac{< x, y > f(x)}{(\sqrt{1-\|x\|^2})^3}\right| \\
&\leq \frac{n^2\sqrt{1-f(x)^2}}{1-\|x\|^2} + \frac{n\|x\| \cdot |f(x)|}{(\sqrt{1-\|x\|^2})^3} \\
&\leq \left(\frac{n^4}{(1-\|x\|^2)^2} + \frac{n^2\|x\|^2}{(1-\|x\|^2)^3}\right)^{1/2} = \mathcal{M}_n^{(2)}(\|x\|) \quad \forall x \in B_H.
\end{aligned}$$

Para completar la demostración de (4.26), simplemente se aplica el Lema 4.32 al polinomio de grado $n-2$ dado por $w \mapsto \widehat{D}^{(2)}P(w)y$, $\forall w \in H$ y se toma el supremo sobre todos los elementos y de la esfera unidad S_H.

El procedimiento usado en la demostración de la Proposición 4.45 puede ser utilizado para obtener estimaciones análogas de derivadas superiores. Para la tercera derivada se tiene lo siguiente:

Proposición 4.47. *Sea H un espacio de Hilbert real y sea P un polinomio en $\mathcal{P}_n^1(H)$. Entonces para cada x en B_H se tiene:*

$$\|\widehat{D}^{(3)}P(x)\| \leq \min\left\{\left\{\left(\frac{3n^2\|x\|}{(1-\|x\|^2)^2}\right)^2+\left(\frac{n(2\|x\|^2+1-n^2+n^2\|x\|^2)}{(1-\|x\|^2)^{5/2}}\right)^2\right\}^{1/2}, T_n^{(3)}(1)\right\}. \tag{4.27}$$

En particular, por continuidad del operador $D^{(3)}P$ se tiene que

$$\|\widehat{D}^{(3)}P(x)\| \leq T_n^{(3)}(1) = \frac{n^2(n^2-1)(n^2-2^2)}{15} \quad \forall x \in \bar{B}_H.$$

Demostración. Sea $x \in B_H$ e $y \in S_H$. Definimos para cada $t \in \mathbb{R}$ el vector $x+\alpha(t-\beta)y \in H$, como en la demostración de las Proposiciones 4.44 y 4.45. Sea $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ el polinomio definido por $p(t) := P(x+\alpha(t-\beta)y)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Sabemos que $\|p\| \leq 1$. Si aplicamos la desigualdad de tipo Bernstein (4.5) para la tercera derivada a p, entonces

$$\begin{aligned}
\alpha^3|\widehat{D}^{(3)}P(x)y| &= |p'''(\beta)| \leq \mathcal{M}_n^{(3)}(\beta)\\
&= \alpha^3\left\{\left(\frac{3n^2 <x,y>}{(1-\|x\|^2)^2}\right)^2+\left(\frac{n(2<x,y>^2+\alpha^2-\alpha^2n^2+n^2<x,y>^2)}{(1-\|x\|^2)^{5/2}}\right)^2\right\}^{1/2}\\
&= \alpha^3\left\{\left(\frac{3n^2 <x,y>}{(1-\|x\|^2)^2}\right)^2+\left(\frac{n(3<x,y>^2+1-\|x\|^2-n^2+n^2\|x\|^2)}{(1-\|x\|^2)^{5/2}}\right)^2\right\}^{1/2}.
\end{aligned}$$

Considerando la desigualdad de Schwarz en el último miembro de la desigualdad anterior se tiene que $\|\widehat{D}^{(3)}P(x)\| \leq \mathcal{M}_n^{(3)}(\|x\|)$, lo que prueba la primera desigualdad implícita en (4.27). La otra desigualdad implícita en (4.27) se demuestra aplicando el Lema 4.32 al polinomio de grado $n-3$ dado por $w \mapsto \widehat{D}^{(3)}P(w)y$, $\forall w \in H$ y se toma el supremo sobre todos los elementos y de la esfera unidad S_H. □

Observación 4.48. La técnica empleada para probar las Proposiciones 4.45 y 4.47 se muestra extraordinariamente complicada para derivadas superiores a la tercera. No obstante pensamos que tanto la desigualdad (4.3) como (4.5) se pueden generalizar para cualquier derivada de un polinomio en un espacio de Hilbert real mediante la aplicación de nuestros métodos. Esto demostraría la conjetura establecida por L. A. Harris en The Scottish Book, Problema 74 (véase [**44**]).

2.3.1. **Desigualdades de Markov para derivadas altas de un polinomio en un espacio de Hilbert real.** En un espacio de Hilbert la norma de un polinomio homogéneo coincide con la norma de su polar. En esta sección aprovechamos este hecho para obtener estimaciones *casi óptimas* para las normas de derivadas *altas* de polinomios de grado suficientemente grande. Se usará varias veces la fórmula ya familiar

$$T_n^{(k)}(1) = \frac{n^2(n^2-1)\cdots(n^2-(k-1)^2)}{1\cdot 3\cdots(2k-1)}. \tag{4.28}$$

Proposición 4.49. *Si H es un espacio de Hilbert real y P es un polinomio en $\mathcal{P}_n^1(H)$, entonces se tiene la estimación*

$$\|\widehat{D}^{(n-1)}P(x)\| \leqq \left(1+\frac{1}{2n}\right)T_n^{(n-1)}(1) \quad \forall x\in \bar{B}_H. \tag{4.29}$$

Demostración. Supongamos que $P=\sum_{k=0}^n P_k$ con $P_k\in\mathcal{P}(^nH)$ $(1\le k\le n)$ y sea $L_k\in\mathcal{L}^s(^kH)$ tal que $P_k=\widehat{L}_k$ $(1\le k\le n)$. Sabemos por el Teorema 1.8 que $\|P_k\|=\|L_k\|$ $(1\le k\le n)$. Además, de la Proposición 3.16 se sigue que $\|P_n\|\le 2^{n-1}$ y $\|P_{n-1}\|\le 2^{n-2}$. Por tanto, para cada $x,y\in\bar{B}_H$ se tiene

$$\begin{aligned}
|\widehat{D}^{(n-1)}P(x)y| &= |\widehat{D}^{(n-1)}P_n(x)y+\widehat{D}^{(n-1)}P_{n-1}(x)y|\\
&\le n!|L_n(xy^{n-1})|+(n-1)!|P_{n-1}(y)|\\
&\le n!\|P_n\|+(n-1)!\|P_{n-1}\|\\
&\leqq n!2^{n-1}+(n-1)!2^{n-2}\\
&= \left(1+\frac{1}{2n}\right)T_n^{(n-1)}(1).
\end{aligned}$$

El resultado se sigue tomando el supremo sobre todos los elementos y de la bola unidad B_H. □

Nótese que para valores altos de n la estimación obtenida para la derivada (n-1)-ésima coincide básicamente con $T_n^{(n-1)}(1)$. Un resultado semejante se obtiene para la derivada (n-2)-ésima:

Proposición 4.50. *Si H es un espacio de Hilbert real y P es un polinomio en $\mathcal{P}_n^1(H)$, entonces se tiene la estimación*

$$\|\widehat{D}^{(n-2)}P(x)\| \le \frac{2n-2}{2n-3}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2(n-1)}\right)T_n^{(n-2)}(1) \quad \forall x \in \bar{B}_H. \tag{4.30}$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $P = \sum_{k=0}^n P_k$, $P_k \in \mathcal{P}(^nH)$ y $L_k \in \mathcal{L}^s(^kH)$ $(1 \le k \le n)$ son iguales que en la demostración de la proposición anterior. Teniendo en cuenta la estimación $\|P_{n-2}\| \le n2^{n-3}$ aportada por la Proposición 3.16, junto con las estimaciones ya usadas anteriormente $\|P_n\| \le 2^{n-1}$ y $\|P_{n-1}\| \le 2^{n-2}$ y el hecho de que por el Teorema 1.8 se tenga $\|P_k\| = \|L_k\|$ $(1 \le k \le n)$, entonces para cada $x, y \in \bar{B}_H$ obtenemos

$$\begin{aligned}
|\widehat{D}^{(n-2)}P(x)y| &= |\widehat{D}^{(n-2)}P_n(x)y + \widehat{D}^{(n-2)}P_{n-1}(x)y + \widehat{D}^{(n-2)}P_{n-2}(x)y| \\
&\le (n-2)!\left[\binom{n}{n-2}|L_n(x^2y^{n-2})| + \binom{n-1}{n-2}|L_{n-1}(xy^{n-2})| + |P_{n-2}(y)|\right] \\
&\le (n-2)!\left[\frac{n(n-1)}{2}\|P_n\| + (n-1)\|P_{n-1}\| + \|P_{n-2}\|\right] \\
&\le n!2^{n-1}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{4(n-1)}\right] \\
&= T_n^{(n-2)}(1)\frac{2n-2}{2n-3}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2(n-1)}\right).
\end{aligned}$$

El resultado se sigue tomando el supremo sobre todos los elementos y de la bola unidad B_H. □

De las Proposiciones 4.49 y 4.50 obtenemos las siguientes estimaciones:

Corolario 4.51. *Sea H un espacio de Hilbert real y $P \in \mathcal{P}_n^1(H)$. Entonces*

$$\|D^{(n-1)}P\| = \|\widehat{P}^{(n-1)}P\| < 1'225 \cdot T_n^{(n-1)}(1), \tag{4.31}$$

$$\|D^{(n-2)}P\| = \|\widehat{D}^{(n-2)}P\| < 1'5143 \cdot T_n^{(n-2)}(1). \tag{4.32}$$

DEMOSTRACIÓN. La estimación (4.31) se deduce de (4.29), teniendo en cuenta que los casos $n = 2, 3$ están ya cubiertos por (4.11) y (4.26), respectivamente y que $1 + 1/2n \le 9/8 = 1'225$, $\forall n \ge 4$. Por otro lado, en (4.32) ya han sido estudiados los casos $n = 3, 4$ en (4.11) y (4.26), respectivamente. En consecuencia, (4.32) se sigue de (4.30) y de la siguiente desigualdad evidente

$$\frac{2n-2}{2n-3}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2(n-1)}\right) \le \frac{53}{35} < 1'5143 \quad \forall n \ge 5.$$

□

La técnica usada para probar las desigualdades (4.29) y (4.30) no se agota en el segundo paso, se puede probar un resultado similar para la derivada $n-k$ $(n \geq k)$ con n suficientemente grande. Antes probaremos el siguiente lema:

Lema 4.52. *Para cada número natural k existe una sucesión de números positivos $\{b_n^k\}_{n=k}^{\infty}$ tal que $b_n^k \underset{n}{\longrightarrow} 1$ y*

$$T_n^{(n-k)}(1) = 2^{n-1}\frac{n!}{k!}b_n^k.$$

Demostración. De (4.28) se deduce que

$$T_n^{(n-k)}(1) = \frac{n^2(n^2-1)\cdots(n^2-(n-k-1)^2)}{1\cdot 3\cdots(2(n-k)-1)} \quad (k \leq n). \tag{4.33}$$

La demostración es sencilla por inducción a partir de (4.33). Para $k=1$ se puede probar que $T_n^{(n-1)}(1) = T_n^n(1) = n!2^{n-1}$, con lo que bastaría con poner $b_n^1 = 1$, $\forall n \geq 1$. Supongamos que hemos construido una sucesión $\{b_n^k\}_{n=k}^{\infty}$ como en el enunciado del lema, entonces de (4.33) se obtiene

$$\begin{aligned} T_n^{(n-k-1)}(1) &= \frac{n^2(n^2-1)\cdots(n^2-(n-k-2)^2)}{1\cdot 3\cdots(2(n-k-1)-1)} = T_n^{(n-k)}(1)\frac{2(n-k)-1}{n^2-(n-k-1)^2} \\ &= 2^{n-1}\frac{n!}{k!}b_n^k\frac{2(n-k)-1}{(k+1)(2n-k-1)} = 2^{n-1}\frac{n!}{(k+1)!}b_n^{k+1}, \end{aligned}$$

donde

$$b_n^{k+1} = \frac{2(n-k)-1}{2n-k-1}b_n^k, \quad n \geq k+1.$$

Como $b_n^{k+1} \underset{n}{\longrightarrow} 1$, la demostración se da por terminada. $\square$

Proposición 4.53. *Sea H un espacio de Hilbert real y sea $k \in \mathbb{N}$. Entonces existe una sucesión de números positivos $\{a_n^k\}_{n=k}^{\infty}$ tal que $a_n^k \underset{n}{\longrightarrow} 1$, de tal manera que para cualquier polinomio P de grado $\leq n$ definido en H se verifica la estimación*

$$\|D^{(n-k)}P(x)\| = \|\widehat{D}^{(n-k)}P(x)\| \leq a_n^k T_n^{(n-k)}(1)\|P\|.$$

Demostración. Operamos de forma similar a como lo hicimos en las demostraciones de las Proposiciones 4.29 y 4.30. Sea $P = \sum_{k=0}^{n} P_k$ con $P_k \in \mathcal{P}(^kH)$ y supongamos que $L_k \in \mathcal{L}^s(^kH)$ $(1 \leq k \leq n)$ es la polar de P_k, es decir, $\widehat{L}_k = P$. Sea $A_k^{(n)}$ la constante que aparece en (3.21) y (3.22) dependiendo de si $n-k$ es par o impar respectivamente. Sabemos por la Proposición 3.16 que $\|P_k\| \leq A_k^{(n)}$ $(1 \leq k \leq n)$.

También sabemos por el Teorema 1.8 que $\|P_k\| = \|L_k\|$ $(1 \leq k \leq n)$. Entonces usando la Proposición 1.14 para las derivadas de los polinomios homogéneos se obtiene

$$\begin{aligned}
|\widehat{D}^{(n-k)}P(x)y| &= |\widehat{D}^{(n-k)}P_n(x)y + \widehat{D}^{(n-k)}P_{n-1}(x)y + \ldots + \widehat{D}^{(n-k)}P_{n-k}(x)y| \\
&\leq (n-k)!\left[\binom{n}{n-k}L_n(x^k y^{n-k}) + \binom{n-1}{n-k}L_{n-1}(x^{k-1}y^{n-k}) + \ldots + P_{n-k}(y)\right] \\
&\leq (n-k)!\left[\binom{n}{n-k}A_n^{(n)} + \binom{n-1}{n-k}A_{n-1}^{(n)} + \ldots + A_{n-k}^{(n)}\right] \\
&= 2^{n-1}\frac{n!}{k!}\left[1 + \frac{\binom{n-1}{n-k}}{2^{n-1}\binom{n}{n-k}}A_{n-1}^{(n)} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}\binom{n}{n-k}}A_{n-k}^{(n)}\right].
\end{aligned}$$

Por otro lado, es fácil ver que

$$\frac{\binom{n-j}{n-k}}{2^{n-1}\binom{n}{n-k}}A_{n-j}^{(n)} \underset{n}{\longrightarrow} 0,$$

para todo $j = 1, \ldots, k$. Efectivamente, si j es par, esto es, si $j = 2h$ para algún $h = 1, \ldots, [k/2]$, entonces

$$\frac{\binom{n-j}{n-k}}{2^{n-1}\binom{n}{n-k}}A_{n-j}^{(n)} = \frac{k!}{2^j(k-j)!h!}\frac{(n-h-1)!}{(n-1)!} \underset{n}{\longrightarrow} 0.$$

Si j es impar, la demostración es exactamente la misma. Por lo tanto, poniendo

$$a_n^k = \frac{1}{b_n^k}\left[1 + \frac{\binom{n-1}{n-k}}{2^{n-1}\binom{n}{n-k}}A_{n-1}^{(n)} + \ldots + \frac{\binom{n-k+1}{n-k}}{2^{n-1}\binom{n}{n-k}}A_{n-k+1}^{(n)} + \frac{1}{2^{n-1}\binom{n}{n-k}}A_{n-k}^{(n)}\right],$$

se tiene $a_n^k \underset{n}{\longrightarrow} 1$. Por el Lema 4.33 obtenemos finalmente

$$\|\widehat{D}^{(n-k)}P(x)\| \leq a_n^k T_n^{(n-k)}(1).$$

□

2.4. Desigualdades de Markov para polinomios homogéneos en espacios de Banach. En esta sección usaremos la notación $c_{n,k}$ para referirnos al valor máximo que puede alcanzar la norma de la derivada de un polinomio homogéneo de norma ≤ 1 definido en un espacio de Banach real arbitrario. Es decir,

$$c_{n,k} = \inf\{\|\widehat{D}^{(k)}P\| : \ P \in \mathcal{P}(^nP), \ E \text{ espacio de Banach real}\}.$$

Si se consideran polinomios de norma arbitraria en un espacio de Banach real E se tendría de forma evidente que

$$\|\widehat{D}^{(k)}P\| \leq c_{n,k}\|P\| \quad \forall P \in \mathcal{P}(^nE).$$

Para polinomios homogéneos se puede mejorar considerablemente el orden de la estimación para la norma de la derivada k-ésima. Efectivamente, Y. Sarantopoulos ha probado [**59**] que $c_{n,k}$ es $O(n^{3k/2})$, mientras que la mejor estimación en el problema de Markov para la derivada k-ésima no es mejor que $T_n^{(k)}(1) = O(n^{2k})$. En particular, la estimación que da Y. Sarantopoulos es la siguiente:

Proposición 4.54 (Y. Sarantopoulos). *Sea E un espacio de Banach real y sea $P \in \mathcal{P}(^nE)$ tal que $\|P\| \leq 1$. Entonces*

$$\|\widehat{D}^{(k)}P(x)\| \leq \binom{n}{k} \frac{n^{n/2}k!}{(n-k)^{(n-k)/2}k^{k/2}} \|x\|^{n-k} \quad \forall x \in \bar{B}_E. \tag{4.34}$$

L. A. Harris ha encontrado recientemente [**28**] con ayuda de un resultado de P. Nevai y V. Totik (véase [**50**, Theorem 3]) una estimación de $c_{n,k}$ que para valores altos de n es mejor que la presentada en (4.34). En particular se prueba lo siguiente:

Proposición 4.55 (L. A. Harris). *Sea E un espacio de Banach real y $P \in \mathcal{P}(^nE)$ tal que $\|P\| \leq 1$. Entonces existe una constante absoluta M tal que*

$$\|\widehat{D}^{(k)}P(x)\| \leq (Mn \log n)^k \|x\|^{n-k} \quad \forall x \in \bar{B}_E. \tag{4.35}$$

Nótese que la estimación (4.35) es $O((n \log n)^k)$, que es mejor que $O(n^{3/2k})$. Que el autor de esta disertación sepa, no existe ninguna forma sistemática, a saber una fórmula, para determinar el valor de $c_{n,k}$. No obstante, L. A. Harris ha desarrollado recientemente [**28**] un método numérico para encontrar el valor exacto de $c_{n,1}$ para cada $n \geq 1$. Además, L. A. Harris ha dado también [**28**] una demostración diferente de (4.34).

3. Desigualdades de polinomios con mayorantes funcionales.

En esta sección veremos que las estimaciones obtenidas en los resultados precedentes sobre la norma de las derivadas de un polinomio en un espacio de Banach real se pueden mejorar sensiblemente si se considera un conjunto de polinomios más restringido. En particular, dado un espacio de Banach real E, se estudian los polinomios $P \in \mathcal{P}_n(E)$ que verifican la condición $|P(x)| \leq \sqrt{1 - \|x\|^2}$ para cada $x \in \bar{B}_H$. Nos referiremos al conjunto de tales polinomios con la notación $\mathcal{P}_n^{\varphi}(E)$. Veremos que este problema sólo parece tener sentido para polinomios en espacios de Hilbert y que en éstos es posible generalizar las desigualdades encontradas por Q. I. Rahman en el caso clásico (véanse los Teoremas 4.14 y 4.15). Daremos también ejemplos que muestren que los resultados obtenidos en el caso clásico para la mayorante definida por $\psi(t) = |t|$, $\forall t \in [-1, 1]$ no se sostienen en el caso general.

Es evidente que los polinomios pertenecientes a la clase $\mathcal{P}_n^{\varphi}(\mathbb{R})$ tienen raíces en 1 y -1, o expresado de otra forma, son divisibles por el polinomio $1 - t^2$. Algo parecido les ocurre a los polinomios en la clase $\mathcal{P}_n^{\varphi}(H)$ para cada espacio de Hilbert real H.

Proposición 4.56. *Sea H un espacio de Hilbert real y sea P un polinomio $\mathcal{P}_n(H)$ tal que $P(x) = 0$ para cada x en S_H. Entonces existe un polinomio Q en $\mathcal{P}_{n-2}(E)$ tal que $P(x) = (1 - \|x\|^2)Q(x)$, para cada x en H.*

DEMOSTRACIÓN. Como $P(x) = \frac{1}{2}[P(x) + P(-x)] + \frac{1}{2}[P(x) - P(-x)]$ para cada $x \in H$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que para algún número natural m, o bien $P = \sum_{k=0}^{m} P_{2k}$ o $P = \sum_{k=0}^{m} P_{2k+1}$ con $P_j \in \mathcal{P}(^jH)$ $(1 \leq j \leq 2m+1)$, dependiendo de si n es par o impar respectivamente. Supongamos que n es par, es decir, $n = 2m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Entonces para cada $x \in H\backslash\{0\}$ se tiene

$$\begin{aligned}
P(x) =& P_{2m}(x) + P_{2m-2}(x) + \ldots + P_2(x) + P_0 \\
=& P_{2m}(x) + \|x\|^2 P_{2m-2}(x) + \ldots + \|x\|^{2m-2} P_2(x) + \|x\|^{2m} P_0 \\
& + (1 - \|x\|^2) P_{2m-2}(x) + \ldots + (1 - \|x\|^{2m-2}) P_2(x) + (1 - \|x\|^{2m}) P_0 \\
=& \|x\|^{2m} \left(P_{2m}(\frac{x}{\|x\|}) + P_{2m-2}(\frac{x}{\|x\|}) + \ldots + P_2(\frac{x}{\|x\|}) + P_0 \right) \\
& + (1 - \|x\|^2) P_{2m-2}(x) + \ldots + (1 - \|x\|^{2m-2}) P_2(x) + (1 - \|x\|^{2m}) P_0 \\
=& (1 - \|x\|^2) P_{2m-2}(x) + \ldots + (1 - \|x\|^{2m-2}) P_2(x) + (1 - \|x\|^{2m}) P_0.
\end{aligned}$$

Nótese que $\|\cdot\|^{2k}$ es un polinomio de grado $2k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y como

$$1 - \|x\|^{2k} = (1 - \|x\|^2)(1 + \|x\|^2 + \|x\|^4 + \ldots + \|x\|^{2k-2}),$$

entonces el resultado queda probado. La demostración es similar para el caso en que n es impar, es decir, $n = 2m + 1$ para algún $m \in \mathbb{N}$. $\square$

Una consecuencia inmediata de este resultado es que para todo espacio de Hilbert real H, los polinomios de la clase $\mathcal{P}_n^{\varphi}(H)$ son factorizables por el polinomio definido por $H \ni x \mapsto 1 - \|x\|^2$:

Corolario 4.57. *Sea H un espacio de Hilbert real y sea $P \in \mathcal{P}_n(H)$ tal que $|P(x)| \leq \sqrt{1 - \|x\|^2}$, $\forall x \in \bar{B}_H$. Entonces existe un polinomio Q de grado $\leq n-2$ tal que $P(x) = (1 - \|x\|^2)Q(x)$, para cada x en H.*

Observación 4.58. Si E es un espacio de Banach real cuya norma no procede de un producto interno, tenemos cierta evidencia de que la cantidad de polinomios no triviales en $\mathcal{P}_n(E)$ que satisfacen la condición $|P(x)| \leq \sqrt{1 - \|x\|^2}$ para todo

$x \in \bar{B}_E$ no es significativa. Por ejemplo, si $P \in \mathcal{P}_2(E)$ es uno de esos polinomios, entonces igual que en la demostración de la Proposición 4.56, se prueba que $P(x) = K(1 - \|x\|^2)$ para todo $x \in E$, donde K es una constante tal que $|K| \leq 1$. Si $P \neq 0$, entonces $\|\cdot\|^2$ debe ser un polinomio 2-homogéneo. Pero esto es una propiedad característica de los espacios cuya norma se deduce de un producto interno.

A partir de ahora nos centraremos en el estudio de polinomios sobre un espacio de Hilbert real dominados por la mayorante $\varphi(t) = \sqrt{1-t^2}$, $\forall \in [-1,1]$. Para empezar demostraremos la siguiente generalización del Teorema 4.14:

Proposición 4.59. *Sea H un espacio de Hilbert real y sea $P \in \mathcal{P}_n(H)$ tal que $|P(x)| \leq (1 - \|x\|^2)^{1/2}$, $\forall x \in \bar{B}_H$, entonces*

$$\|DP(x)\| \leq 2(n-1) \quad \forall x \in \bar{B}_H. \tag{4.36}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : B_H \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = P(x)(1 - \|x\|^2)^{-1/2}$, $\forall x \in B_H$. Como $\|\cdot\|^2$ es diferenciable Fréchet y $D(\|x\|^2)y = 2 < x, y >$, $\forall x, y \in H$ entonces para $x \in B_H \backslash \{0\}$ e $y \in S_H$ se tiene que

$$DP(x)y = \frac{- < x, y >}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} f(x) + \sqrt{1 - \|x\|^2} Df(x)y. \tag{4.37}$$

Siempre se puede escribir y como $y = r\frac{x}{\|x\|} + sw$, donde $w \in S_H$ es tal que $< x, w >= 0$ y $r^2 + s^2 = 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
|DP(x)y| &\leq |r| \left\{ \frac{\|x\| \cdot |f(x)|}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} + \frac{\sqrt{1 - \|x\|^2}}{\|x\|} |Df(x)x| \right\} + |s| \left\{ \sqrt{1 - \|x\|^2} |Df(x)w| \right\} \\
&\leq \left\{ \left[\frac{\|x\| \cdot |f(x)|}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} + \frac{\sqrt{1 - \|x\|^2}}{\|x\|} |Df(x)x| \right]^2 + (1 - \|x\|^2) \left[Df(x)w \right]^2 \right\}^{1/2} \\
&= \left\{ \left[\frac{\|x\| \cdot |P(x)|}{1 - \|x\|^2} + \frac{\sqrt{1 - \|x\|^2}}{\|x\|} |Df(x)x| \right]^2 + (1 - \|x\|^2) \left[Df(x)w \right]^2 \right\}^{1/2}.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Definamos ahora $T(\theta) = f(x \cos\theta + w \operatorname{sen}\theta)$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$. Por el corolario 4.57 existe un polinomio $Q \in \mathcal{P}_{n-2}(H)$ tal que $P(x) = (1 - \|x\|^2)Q(x)$ para cada $x \in H$. Esto implica que

$$\begin{aligned}
T(\theta) &= \sqrt{1 - \|x \cos\theta + w \operatorname{sen}\theta\|^2} Q(x \cos\theta + w \operatorname{sen}\theta) \\
&= \sqrt{1 - \|x\|^2} |\cos\theta| Q(x \cos\theta + w \operatorname{sen}\theta) \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Es decir, T es básicamente un polinomio trigonométrico de grado $\leqq n-1$. Además, como $\|x\cos\theta + w \operatorname{sen}\theta\| < 1$, $\forall\theta \in \mathbb{R}$, por la desigualdad de Bernstein para polinomios trigonométricos tenemos que

$$|T'(\theta)| \leq n-1 \quad \forall\theta \in \mathbb{R}.$$

En particular

$$|Df(x)w| = |T'(0)| \leq n-1. \tag{4.39}$$

Por el Corolario 4.57 la aplicación definida por $S(\theta) = f(\cos\theta\frac{x}{\|x\|})$, $\forall\theta \in \mathbb{R}$ es esencialmente un polinomio trigonométrico de grado $\leqq n-1$ tal que $|S(\theta)| \leq 1$, $\forall\theta \in \mathbb{R}$. Así, aplicando una vez más la desigualdad de Bernstein para polinomios trigonométricos obtenemos

$$|S'(\theta)| = \sqrt{1-\cos^2\theta}\left|Df\left(\cos\theta\frac{x}{\|x\|}\right)\frac{x}{\|x\|}\right| \leq n-1 \quad \forall\theta \in \mathbb{R}.$$

Si elegimos $\theta \in \mathbb{R}$ con la condición $\cos\theta = \|x\|$, entonces

$$\sqrt{1-\|x\|^2}\left|Df(x)\frac{x}{\|x\|}\right| \leq n-1. \tag{4.40}$$

Por otro lado, como $P(x) \leq (1-\|x\|^2)^{1/2}$, $\forall x \in \bar{B}_H$, entonces $|Q(x)| \leq (1-\|x\|^2)^{-1/2}$, $\forall x \in B_H$. Así, usando el Teorema 4.9 se puede probar que

$$\left|\frac{P(x)}{1-\|x\|^2}\right| \leq n-1 \quad \forall x \in B_H. \tag{4.41}$$

Finalmente, se sigue de (4.38), usando (4.39), (4.40) y (4.41) que

$$|DP(x)y| \leq (n-1)\{2\|x\|+2\}^{1/2} \leq 2(n-1), \tag{4.42}$$

para $x \in B_H\backslash\{0\}$ e $y \in S_H$. Por lo tanto

$$\|DP(x)\| \leqq 2(n-1) \quad \forall x \in B_H\backslash\{0\}.$$

Por continuidad de DP, podemos extender el resultado previo a toda la bola unidad cerrada $\bar{B}_H$, lo que completa la demostración. $\square$

Si p_n es el polinomio definido por $p_n(t) = (1-t^2)U_{n-2}(t) = 1/2(T_{n-2}(t) - T_n(t))$ para cada $t \in [-1,1]$, donde U_{n-2} es el polinomio de Chebyshev de grado $(n-2)$ de la segunda especie, ya apuntamos justo después del Teorema 4.14 que $|p_n(t)| \leq \sqrt{1-t^2}$ para todo $t \in [-1,1]$ y que $p'(\pm 1) = 2(n-1)$, es decir, p_n representa el caso extremal en (4.7) con igualdad para los extremos del intervalo $[-1,1]$. Se puede encontrar un ejemplo semejante para polinomios de grado par en un espacio de Hilbert real arbitrario:

Ejemplo 4.60. *Sea H un espacio de Hilbert real. Si n es un número natural par y $P_n : H \to \mathbb{R}$ es la aplicación definida por $P_n(x) = p_n(\|x\|)$ para cada $x \in H$, entonces P_n es un polinomio de grado n en H tal que $|P_n(x)| \leq \sqrt{1 - \|x\|^2}$, $\forall x \in \bar{B}_H$ y $|P_n(x)| = 2(n-1)$, $\forall x \in S_H$.*

Demostración. Como $p_n = 1/2(T_{n-2} - T_n)$, de la definición de T_{n-2} y T_n se sigue que p_n es una función par siempre que n también lo sea. Por tanto, p_n no tiene potencias impares. Pero todas las potencias pares de $\|\cdot\|$ son siempre polinomios homogéneos al ser H un espacio de Hilbert. Esto demuestra que P_n es un polinomio de grado n en H. La condición $|P_n(x)| \leq \sqrt{1 - \|x\|^2}$, para cada x en $\bar{B}_H$ se obtiene de forma inmediata. Por otro lado, sabemos que $\|\cdot\|$ es derivable Fréchet en todos los puntos excepto el origen y además

$$D\|x\|y = \frac{< x, y >}{\|x\|} \quad \forall x \in H \backslash \{0\}, \quad \forall y \in H.$$

Si $x \in H\backslash\{0\}$, entonces $DP(x)y = p'(\|x\|) < x, y > /\|x\|$ para cada $y \in H$. En particular si $\|x\| = 1$, entonces $DP(x)y = p(1) < x, y >$, de donde $\|DP(x)\| = 2(n-1)$. □

La estimación puntual (4.42) obtenida en la demostración de la proposición anterior puede mejorarse considerablemente en los puntos de la bola unidad $\bar{B}_H$ que están suficientemente alejados de la frontera. De hecho podemos generalizar el Teorema 4.15 para el caso de polinomios definidos en un espacio de Hilbert real. Antes necesitamos el siguiente resultado:

Lema 4.61. *Sea H un espacio de Hilbert real y sea $P \in \mathcal{P}_n(H)$ tal que $|P(x)| \leq \sqrt{1 - \|x\|^2}$ para todo $x \in \bar{B}_H$. Si se define $f : B_H \to \mathbb{R}$ mediante*

$$f(x) := \frac{P(x)}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} \quad \forall x \in B_H,$$

entonces

$$\|Df(x)\| \leq \frac{(n-1)\sqrt{1 - f(x)^2}}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} \quad \forall x \in B_H. \tag{4.43}$$

Demostración. Por el Corolario 4.57 existe un polinomio $Q \in \mathcal{P}_{n-2}(H)$ tal que $P(x) = (1 - \|x\|^2)Q(x)$, $\forall x \in H$. Esto prueba que $f(x) = \sqrt{1 - \|x\|^2}Q(x)$, $\forall x \in B_H$. Como además $|f(x)| \leq 1$, $\forall x \in B_H$, la función f satisface las condiciones de la Proposición 4.25. En consecuencia (4.43) se sigue. □

Proposición 4.62. *Sea H un espacio de Hilbert real y sea P un polinomio en $\mathcal{P}_n(H)$ tal que $|P(x)| \leq (1-\|x\|^2)^{1/2}$, $\forall x \in \bar{B}_H$. Entonces*

$$\|DP(x)\| \leq \left\{ \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|^2} + (n-1)^2 \right\}^{1/2} \qquad \forall x \in B_H.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in B_H$ e $y \in S_H$. Si definimos f como en el lema anterior, por (4.37) se tiene que

$$DP(x)y = \frac{-<x,y>}{\sqrt{1-\|x\|^2}} f(x) + \sqrt{1-\|x\|^2} Df(x)y.$$

Ahora, teniendo en cuenta (4.43), la desigualdad de Schwarz y el hecho de que $(\sqrt{1-f(x)^2})^2 + f(x)^2 = 1$, $\forall x \in B_H$, obtenemos

$$\begin{aligned} |DP(x)y| &\leq \frac{|<x,y>|}{\sqrt{1-\|x\|^2}} |f(x)| + (n-1)\sqrt{1-\|x\|^2} |Df(x)y| \\ &\leq \frac{\|x\|}{\sqrt{1-\|x\|^2}} |f(x)| + (n-1)\sqrt{1-f(x)^2} \\ &\leq \left\{ \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|^2} + (n-1)^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Como $y \in S_H$ era arbitrario, esto demuestra lo que buscábamos. □

Si H es un espacio de Hilbert real y $P = \sum_{k=0}^n P_k$ con $P_k \in \mathcal{P}(^kE)$ $(1 \leq k \leq n)$ es tal que $|P_n(x)| \leq \sqrt{1-\|x\|^2}$, $\forall x \in \bar{B}_H$, entonces las desigualdades (3.21) y (3.22) se pueden mejorar. De hecho, es fácil ver que el Teorema 4.16 se puede generalizar con las mismas constantes para todos los polinomios en la clase $\mathcal{P}_n^{\varphi}(H)$:

Proposición 4.63. *Sea H un espacio de Hilbert real y sea P un polinomio en $\mathcal{P}_n(H)$ tal que $|P(x)| \leq (1-\|x\|^2)^{1/2}$, $\forall x \in \bar{B}_H$. Si $P = \sum_{k=0}^n P_k$, con $P_k \in \mathcal{P}(^kE)$ $(1 \leq k \leq n)$, entonces $\|P_k\|$ $(1 \leq k \leq n)$ está acotado por el valor absoluto del coeficiente de t^k en $p_n(t) = (1-t^2)U_{n-2}(t)$ o $p_{n-1}(t) = (1-t^2)U_{n-3}(t)$ $t \in [-1,1]$, dependiendo de si la diferencia $n-k$ es par o impar, respectivamente. En particular, se tiene que si $n \geq 2$, entonces $\|P_1\| \leq n-1$ y $\|P_2\| \leq \{(n-1)^2+1\}/2$. Igualmente, si $n \geq 3$, entonces $\|P_n\| \leq 2^{n-2}$ y $\|P_{n-1}\| \leq 2^{n-3}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in \bar{B}_H$ y definamos $p(t) = P(tx) = \sum_{k=0}^n P_k(x)t^k$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces p es un polinomio en una variable tal que $|p(t)| \leq \sqrt{1-t^2}$ para todo $t \in [-1,1]$. La demostración se sigue inmediatamente aplicando el Teorema 4.16 a los coeficientes del polinomio p. □

Para terminar demostramos por medio de un ejemplo que el Teorema 4.9 para polinomios p en $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ con la condición $|p(t)| \leq |t|$, para todo $t \in [-1, 1]$, no se cumple en espacios de Banach en general:

Ejemplo 4.64. *Sea $E = \ell_\infty^2(\mathbb{R})$ y definamos $P \in \mathcal{P}(^2\ell_\infty^2)$ mediante $P(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$. Entonces $|P(x)| \leq \|x\|_\infty$ para $x \in \bar{B}_{\ell_\infty^2}$, pero $DP(x) = 4$.*

Bibliografía

[1] A. Alexiewicz and W. Orlicz. Analytic operations in real Banach spaces. *Studia Math.*, **14**(1953), 57-78.

[2] A. V. Andrianov. Analogs of the Markov and Bernstein inequalities for polynomials in Banach spaces. *Math. Notes.* **52**(1993), 5-6.

[3] R. Aron, B. Beauzamy and P. Enflo. Polynomials in many variables: Real vs complex norms. *J. Approx. Theory,* **74**(1993), 181-198.

[4] R. Aron and J. Globevnik. Analytic functions on c_0. *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid,* **2**(1989), 27-33.

[5] R. Aron, M. Lacruz, R. Ryan and A. Tonge. The generalized Rademacher functions. *Note di Matematica,* **12**(1992), 15-25.

[6] S. Banach. Über homogene Polinome in L^2. *Studia Math.* **7**(1838), 36-44.

[7] M. Baran. Bernstein type theorems for compact sets in $\mathbb{R}^n$. *J. Approx. Th.* **79**(1994), 190-198.

[8] C. Benítez, Y. Sarantopoulos and A. Tonge. Lower bounds for norms of products of polynomials. *To appear in Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* (1998).

[9] S. N. Bernstein. Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné. *Mémoires publiés par la Classe des Sciences de l'Académie de Belgique,* **4**(1912).

[10] ———. Collected works: Vol. I. Constr. theory of functions (1905-1939). English translation. *Atomic Energy Commission, Springfield, VA,* 1958.

[11] L. Bialas-Cieẑ and P. Goetgheluck. Constants in Markov's inequality on convex sets. *East J. Approx.* **1**(1995), 379-389.

[12] R. P. Boas. Some theorems on Fourier transforms and conjugate trigonometric integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.* **40**(1936), 287-308.

[13] ———. Inequalities for the derivatives of polynomials. *Math. Mag.* **42**(1969), 165-174.

[14] J. Bochnak. Analytic functions in Banach spaces. *Studia Math.*, **35**(1970), 273-292.

[15] J. Bochnak and J. Siciak. Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces. *Studia Math.*, 39(1971), 59-76.

[16] C. Coatmelec. Approximation et interpolation des foctions différentiables de plusieurs variables. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, Ser. 3, **83**(1966), 271-341.

[17] J. G. van der Corput and G. Schaake. Ungleichungen für Polynome und trigonometrische Polynome. *Compositio Math.* **2**(1935), 321-361.

[18] M. M. Day. Normed linear spaces (3rd edition). *Ergebnisse der Mathematik, Band 21, Springer,* 1973.

[19] A. Defant and K. Floret. Tensor norms and operator ideals. *North Holland,* **176**(1993).

[20] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge. Absolutely summing operators. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics 43, Cambridge Univ. Press*, 1995.

[21] S. DINEEN. Complex analysis on infinite dimensional spaces. *Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin*, 1999.

[22] R. DUFFIN AND A. C. SHAEFFER. On some inequalities of S. Bernstein and W. Markoff. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44**(1938), 289-297.

[23] R. DUFFIN AND A. C. SHAEFFER. A refinement of an inequality of the brothers Markov. *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, **50**(1941), 517-528.

[24] P. ERDÖS. Some remarks on polynomials. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53**(1947), 1169-1176.

[25] A. GROTHENDIECK. Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques. *Bol. Soc. Mat. São Paulo*, **8**(1953/56), 1-79.

[26] V. A. GUSEV. Functionals of derivatives of an algebraic polynomial and V. A. Markov's theorem (Russian). *Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Mat.* **25**(1961), 367-384.

[27] L. A. HARRIS. Bounds on the derivatives of holomorphic functions of vectors. *Colloque D'Analyse, Rio de Janeiro*, 1972, *ed. L. Nachbin, Act. Sc. et Ind.* **1367**, 145-163, *Herman, Paris*, 1975.

[28] ———. A Bernstein-Markov theorem for normed spaces. *J. of Math. An. and App.* **208**(1997), 476-486.

[29] E. HILLE AND R.S. PHILIPS, *Functional analysis and semigroups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 31, rev. ed., Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1957.

[30] L. HÖRMANDER, *On a theorem of Grace*, Math. Scand. **2**(1954), 55-64.

[31] D. H. HYERS. Polynomial operators. "Topics in Mathematical Analysis" (pp. 410-444), *ed. Th. M. Rassias, World Scientific Publ. Co.*, 1989.

[32] N. J. KALTON. An elementary example of a Banach space not isomorphic to its complex conjugate. *Canad. Math. Bull. Vol.* **38**(1995), 218-222.

[33] N. J. KALTON AND N. T. PECK. Twisted sums of sequence spaces and the three space property. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **255**(1979), 1-30.

[34] O. D. KELLOGG. On bounded polynomials in several variables. *Math. Zeit.* **27**(1928), 55-64.

[35] P. KIRWAN. Complexifications of multilinear and polynomial mappings, *Ph.D. thesis, National University of Ireland, Galway*, 1997.

[36] P. KIRWAN, Y. SARANTOPOULOS AND A. TONGE. Extremal homogeneous polynomials on real normed spaces. *J. Approx. Theory*, **97**(1999), 201-213.

[37] A. KROÓ AND S. RÉVÉSZ. On Bernstein and Markov type inequalities for multivariate polynomials on convex bodies. *Preprint.*

[38] M. LACRUZ. Four aspects of modern analysis, Ph.D. thesis, *Kent State University*, 1991.

[39] J. LINDENSTRAUSS AND L. TZAFRIRI. Classical Banach spaces I. *Springer-Verlag*, 1977.

[40] G. G. LORENTZ. Approximation of Functions. *Holt, Rinehart and winston*, 1966.

[41] G. G. LORENTZ. Approximation of functions. *Chelsea Publ. Co., New York, N.Y.*, 1986.

[42] A. MARKOV. On a problem of D. I. Mendeleev. *Zap. Im. Akad. Nauk.* **62**(1889), 1-24.

[43] V. MARKOV. Über Polynome, die in einen gegebenen Intervalle möglichst wenig von Null abweichen. *Math. Ann.* **77**(1916), 213-258.

[44] R. D. MAULDIN (ed.), The Scottish Book. Mathematics from the Scottish Café, *Birkhäuser*, 1981.

[45] A.D. MICHAL AND M. WYMAN. Characterization of complex couple spaces. *Ann. of Math.*, **42**(1941), 247-250.

[46] G. MUÑOZ. Complexifications of polynomials and multilinear maps on real Banach spaces. Proceedings of Function spaces V.

[47] G. MUÑOZ AND Y. SARANTOPOULOS. Polynomial inequalities in real Banach spaces. *Preprint.*

[48] G. MUÑOZ, Y. SARANTOPOULOS AND A. TONGE. Complexifications of real Banach spaces, polynomials and multilinear maps. *Studia Math.*, **134**(1999), 1-33.

[49] I. P. NATANSON, Constructive Function Theorey. *Vol I, Ungar, New York*, 1964.

[50] P. NEVAI AND V. TOTIK, Weighted polynomial inequalities. *Constr. Approx.* **2**(1986), 113-127.

[51] H.-J. RACK. A generalization of an inequality of V. Markov to multivariate polynomials. *J. Approx. Theory,* **35**(1982), 94-97.

[52] ———. A generalization of an inequality of V. Markov to multivariate polynomials, II. *J. Approx. Theory,* **40**(1984), 129-133.

[53] Q. I. RAHMAN. On a problem of Turán about polynomials with curved majorants. *Trans. Amer. Math. Soc.* **163**(1972), 447-455.

[54] ———. Addendum to "On a problem of Turán about polynomials with curved majorants". *Trans. Amer. Math. Soc.* **168**(1972), 517-518.

[55] M. REIMER. On multivariate polynomials of least deviation from zero on the unit cube. *J. Approx. Theory,* **23**(1978), 65-69.

[56] T. J. RIVLIN. Chebyshev Polynomials. *A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, inc.* Second edition, 1990.

[57] Y. SARANTOPOULOS. Estimates for polynomial norms on $L^p(\mu)$-spaces. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **99**(1986), 263-271.

[58] ———. Extremal multilinear forms on Banach spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* **99**(1987), 340-346.

[59] ———. Bounds on the derivatives of polynomials on Banach spaces. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **110**(1991), 307-312.

[60] R. SCHATTEN. On the direct product of Banach spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **53**(1943), 195-217.

[61] ———. A theory of cross-spaces. *Princeton University Press,* 1950.

[62] J. SICIAK. Wiener's type sufficient conditions in $\mathbb{C}^N$. *Univ. Iagell. Acta Math.* **35**(1997), 47-74.

[63] V. I. SKALYGA. Analogs of an inequality due to the Markov brothers for polynomials on a cube in $\mathbb{R}^n$. *Math. Notes.* **60**(1996), 589-593.

[64] ———. Markov and Benstein inequalities in Banach spaces. *Doklady Math.* **58**(1998), 18-21.

[65] G. SZEGÖ. Über einen Satz des Herrn Serge Berstein. *Schr. Königsberg Gel. Ges.* **5**(1928), 59-70.

[66] A. E. TAYLOR. Additions to the theory of polynomials in normed linear spaces. *Tôhoku Math. J.*, **44**(1938), 302-318.

[67] ———. Analysis in complex Banach spaces. *Bull. of Am. Math. Soc.*, **49**(1943), 652-659.

[68] N. TOMCZAK-JAEGERMANN. Banach-Mazur distances and finite dimensional operator ideals. *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Appl. Math.*, **38**(1989).

[69] A. TONGE. Polarization and the two-dimensional Grothendieck inequality. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **95**(1984), 313-318.

[70] I. E. VERBITSKII. Some relations between the norm of an operator and that of its complex extension. *Mat. Issled Vyp.* **42** (1976), 3-12.

[71] C. VISSER. A generalization of Chebyshev's inequality to polynomials in more than one variable. *Indag. Math.*, **8**(1946), 310-311.

[72] E. V. VORONOVSKAJA. The Method of Functional Calculus and its Applications.

[73] D. R. WILHELMSEN. A Markov inequality in several dimensions. *J. Approx. Theory* **11**(1974), 216-220.

Índice de Materias