UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y
EMPRESARIALES

Departamento de Economía de Economía Aplicada III

TEORÍA DE SUBASTAS Y PRIVATIZACIONES: UN MODELO DE REPUTACIÓN DEL VENDEDOR

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR PRESENTADA POR

Pedro Durá Juez

Bajo la dirección del Doctor:

Luis Gámir

Madrid, 2003

ISBN: 84-669-2252-0

Departamento de Economía Aplicada III (Política Económica)
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad Complutense de Madrid

TEORÍA DE SUBASTAS Y PRIVATIZACIONES: UN MODELO DE REPUTACIÓN DEL VENDEDOR

Pedro Durá Juez

Proyecto de tesis doctoral

2002

Director: *Luis Gámir Casares*

Índice

PARTE I: INTRODUCCIÓN Y ESQUEMA HISTÓRICO DE LAS SUBASTAS

CAPÍTULO 1.- INTRODUCCIÓN **3**

1.1.- OBJETO DE LA TESIS 3

1.2.- CÓMO SURGE LA IDEA 4

1.3.- CONTENIDO DE LA TESIS 7

CAPÍTULO 2.- RESUMEN DESCRIPTIVO DE LA EVOLUCIÓN DE LAS SUBASTAS **13**

2.1.- TIPOS BÁSICOS DE SUBASTAS 13

2.2.- EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LAS SUBASTAS 18

2.3.- IMPORTANCIA DE LAS SUBASTAS EN LA ACTUALIDAD 23

PARTE II: REVISIÓN DE LA TEORÍA DE SUBASTAS

CAPÍTULO 3.- **TEORÍA DE SUBASTAS Y MODELO DE REFERENCIA 31**

3.1.- INTRODUCCIÓN Y MODELOS CON COMPETIDORES NO ESTRÁTEGICOS 31

3.2.- SUBASTAS ESTÁTICAS CON INFORMACIÓN COMPLETA 36

3.3.- SUBASTAS CON VALORACIONES PRIVADAS: "MODELO DE REFERENCIA" 51

3.3.1.- Descripción 51

3.3.2.- Funciones de Puja de equilibrio. 58

a) Subasta inglesa (o ascendente). 59

b) Subasta con sobre cerrado al segundo precio.. 59

c) Subasta holandesa 63

d) Subasta con sobre cerrado al primer precio 63

3.3.3.- Teorema del Ingreso Equivalente y Subastas Óptimas 72

APÉNDICE 3.1. 83

CAPÍTULO 4.- **VARIACIONES SOBRE EL MODELO DE REFERENCIA Y SUBASTAS COMO JUEGOS DINÁMICOS. 87**

4.1.- INTRODUCCIÓN Y ASPECTOS GENERALES... 87

4.2.- VARIACIONES SOBRE EL MODELO DE REFERENCIA 89

4.2.1.- Aversión al riesgo 89

4.2.2.- Modelo con valor común y modelo general.. 94

4.2.3.- Asimetrías entre los compradores.. 100

4.2.4.- Colusión 107

4.3.- TEORÍA DE SUBASTAS Y VENTA DE EMPRESAS... 111

4.4.- SUBASTAS MULTIDIMENSIONALES 119

4.5.- SUBASTAS COMO JUEGO CON DOS ETAPAS DE DECISIÓN.. 125

4.6.- SUBASTAS SECUENCIALES 134

PARTE III: UN MODELO DE REPUTACIÓN DEL VENDEDOR

CAPÍTULO 5.- SUBASTAS CON TRES ETAPAS DE DECISIÓN ... 147

5.1.- INTRODUCCIÓN ... 147

5.2.- DESCRIPCIÓN DEL MODELO ... 155

5.3.- ESPECIFICACIÓN DE LA DETERMINACIÓN DEL PRECIO ... 167

5.3.1.- Subasta al primer precio ... 172

5.3.2.- Subasta al segundo precio ... 182

5.4.- COSTES NULOS DE INCUMPLIR ... 183

5.5.- COSTES DE INCUMPLIR SUPERIORES A LA VALORACIÓN MÁXIMA. ... 191

5.6.- OTROS VALORES DE K ... 193

a) Caso $K \geq (V^{max} - V_{min})/4$ ... 198

b) Caso $K \cong 0$ ... 199

APÉNDICE 5.1 ... 207

CAPÍTULO 6.- SUBASTAS REPETIDAS CON UN VENDEDOR DE "VIDA LARGA" (Y COMPRADORES DE VIDA "CORTA") ... 213

6.1.- INTRODUCCIÓN ... 213

6.2.- NÚMERO DE VENTAS DETERMINADO ... 217

6.3.- JUEGO CON UN NÚMERO INFINITO (O INDEFINIDO) DE VENTAS ... 223

6.3.1.- Caso: K=0 ... 226

6.3.2.- Caso: $K \geq (V^{max} - V_{min})/4$ ... 231

a) Cuando *K* se mantiene igual en todas las ventas ... 232

b) Cuando *K* se soporta sólo la primera vez que se incumple ... 233

6.3.3.- Caso $K \rightarrow 0$ ... 237

APÉNDICE 6.1. ... 245

CAPÍTULO 7.- INFORMACIÓN INCOMPLETA SOBRE LOS "TIPOS" DEL VENDEDOR: UN MODELO DE REPUTACIÓN DEL VENDEDOR ... 251

7.1.- INTRODUCCIÓN 251

7.2.- EL MODELO 253

7.3.- JUEGO CON UNA ÚNICA VENTA 256

7.4.- INFINITAS (O INDETERMINADAS) VENTAS SUCESIVAS. 269

7.5.- CONSIDERACIONES SOBRE UN EQUILIBRIO DE AGRUPACIÓN CUANDO EL NÚMERO DE VENTAS ES FINITO 284

PARTE IV: CONSIDERACIONES FINALES

CAPÍTULO 8.- **RESUMEN Y CONCLUSIONES 297**

BIBLIOGRAFÍA 319

ÍNDICE DE ECUACIONES 333

Agradecimientos

Copiando la expresión al uso: esta parte es la más agradable de la tesis ya que significa que ha llegado a su fin. También lo es, naturalmente, debido a que permite mencionar a todos aquellos que me han ayudado y, sobre todo, animado para desarrollar un trabajo que se ha prolongado durante un periodo de tiempo tan dilatado.

Mencionar el apoyo del Departamento de Economía Aplicada III (Política Económica) en el que se ha desarrollado esta tesis. Dentro del Departamento citar a aquellos compañeros, que ya son Doctores o están a punto de serlo, como Inés Pérez-Soba, Ana Martínez y Víctor Martín, con los que he coincidido en el período de elaboración de nuestras respectivas tesis, y con los que he intercambiando apoyo moral de diferentes tipos (por ejemplo, el de evitar la tan recurrida pregunta y ¿qué tal tu tesis? sobre todo después de las vacaciones veraniegas). Citar también al Director de Departamento, Javier Casares, por su ánimo constante y por el interés que pone en facilitar la tarea en aquello que de él depende.

También quisiera agradecer a aquellos a los que he “torturado” haciéndoles leer diferentes partes de la tesis. Sus comentarios y sugerencias han sido de gran utilidad en diferentes momentos de la elaboración de este trabajo. Entre ellos, quisiera no olvidarme de alguno, José Martínez, Jorge Sainz, Marta Carrillo, Benjamín Serrano y muy especialmente a Susana.

Por otra parte, también quiero agradecer el apoyo prestado por diversas personas en diferentes campos de la elaboración de la tesis, como Gorka Sarachu, Pedro Alcón o Susana López.

Finalmente, mis agradecimientos al Director de esta tesis por toda la labor que ha realizado y el apoyo y ánimo que me ha prestado.

PARTE I:

INTRODUCCIÓN Y

ESQUEMA HISTÓRICO DE LAS SUBASTAS

CAPÍTULO 1.- INTRODUCCIÓN

1.1.- OBJETO DE LA TESIS

La política de privatizaciones supone un proceso de venta de empresas en el que, entre otras, podemos destacar las siguientes características: a) un mismo vendedor – el Estado – realiza diversas ventas; b) el proceso se desarrolla de una manera sucesiva a lo largo de un periodo de tiempo; y c) no es muy frecuente que un mismo comprador se presente a más de una venta (posiblemente debido a la heterogeneidad de las empresas a privatizar). Los desarrollos de la literatura teórica se centran principalmente en modelos con una única venta. Los modelos con ventas sucesivas son menos abundantes y, en su mayor parte, estudian situaciones en las que son los mismos competidores los que se presentan repetidamente a los sucesivos procesos. Por tanto, en estos modelos la "reputación" relevante sería la de los oferentes que son los jugadores que tienen "vida larga". Por su parte, son mucho menos frecuentes aquellos modelos en los que es el vendedor el que repite y, consecuentemente, en los que es la reputación del vendedor la que "importa" en el desarrollo del juego. El objeto de esta tesis es construir un modelo teórico de reputación del vendedor en el que, precisamente para centrarnos en este jugador, supondremos que los compradores sólo se presenten a una de las ventas, aunque conocen cual ha sido la historia de las ventas anteriores.

Por tanto, no tratamos de analizar las causas, los objetivos, ni los efectos de la política de privatizaciones, temas sobre los que existen importantes publicaciones y tesis doctorales[1]. Tampoco constituye el ámbito de esta tesis la aplicabilidad del modelo, aunque a lo largo de su construcción realizaremos diversos comentarios.

1.2.- CÓMO SURGE LA IDEA

La idea de esta tesis surge del análisis y estudio de los procesos de privatizaciones realizado tanto en mis actividades académicas como profesionales.

Durante la última década del siglo XX (aunque con algunos importantes precedentes, como el conocido caso británico) la política de privatizaciones va a alcanzar un importante desarrollo, tanto por el número de países que la ponen en práctica, como por la intensidad que alcanza en alguno de ellos. Durante los procesos de privatización, en ocasiones, es posible detectar algunas preocupaciones (en principio complejas de modelizar y, en algunos casos, siquiera de racionalizar) referentes a como el desenvolvimiento de la "próxima" venta podría llegar a afectar a las siguientes operaciones.

Este tipo de preocupaciones fueron especialmente intensas en las opiniones y recomendaciones que los técnicos del Banco Mundial expresaban en un seminario, celebrado en 1998, destinado a técnicos gubernamentales que trabajan en procesos de privatizaciones en diferentes países de América Latina. Una de sus preocupaciones hacía referencia a determinadas prácticas que, aunque quizás fueran provechosas en una venta, pudieran hacer menos atractivas las siguientes operaciones, con el consiguiente efecto desincentivador de la concurrencia. Naturalmente, este tipo de preocupaciones no tendría sentido si el vendedor intenta realizar una única venta.

---

[1] Veáse, por ejemplo, Vickers y Yarrow (1988). En relación con España, véase, entre otros, Cuervo (1997), Gámir (1999) y Villalonga (2000).

Por otra parte, también se podría encontrar (aunque esto puede ser más difícil de captar) como los compradores (incluso los que se presentan por primera vez a un proceso de privatizaciones) suelen tener estudiado y analizado el comportamiento del vendedor en procesos anteriores.

En la literatura teórica de subastas esta relativamente poco tratado la problemática a la que se enfrenta un vendedor que no posee capacidad de auto-comprometerse por adelantado y que realiza varias ventas.

Así, por ejemplo, en el trabajo de McAfee y McMillan (1987) se dedica un apartado a sugerir una agenda para futuras líneas de investigación. Una de ellas se basaba en la relajación de uno de los supuestos que, normalmente, se asume en la Teoría de Subastas. Estos autores se preguntaban:

> "¿Qué sucedería si eliminamos el supuesto de que el vendedor tiene la capacidad de comprometerse?"[2].

Previamente, habían tratado la cuestión de cómo la Teoría de Subastas consigue esquivar la indeterminación que suele aparecer en los problemas de negociación considerando que el vendedor (que actúa como monopolista) posee todo el poder de negociación. De una manera más precisa, se asume que el organizador de la subasta tiene la capacidad de auto-comprometerse, de una manera previa, a cumplir con el conjunto de reglas que regirán el proceso de venta[3]. Esto implica, por ejemplo, que los compradores se comportan con la certeza de que el vendedor no intentará, una vez que han presentado las pujas, modificar las normas e iniciar una renegociación. Los autores mencionados también resaltan las posibles ventajas que le puede reportar al vendedor el tener esta capacidad de comprometerse de una manera creíble.

---

[2] "What happens if we drop the assumption that the seller is able to commit himself?", McAfee y McMillan (1987a pp.732).

[3] "Auction Theory sidesteps such bargaining problems by presuming that, in a sense, the monopolist (or monopsonist) has all of the bargaining power. More precisely, it is assumed that the organizer of the auction has the ability to commit himself in advance to a set of policies", McAfee y McMillan (1987a pp.701)

Al plantearse la pregunta anterior, McAfee y McMillan realizan varias reflexiones que reproducimos a continuación:

> "...Un monopolista racional encontrará la manera de lograr el compromiso. Sin embargo, no se entiende bien la manera en que esto se puede realizar. Una forma de racionalizarlo es que el vendedor juegue el juego repetidamente, mientras los compradores lo juegan solamente una vez. Entonces podría ir en interés del vendedor el cumplir con su mecanismo, debido a que una desviación podría destruir su capacidad de compromiso en el futuro. Sin embargo, aunque este argumento parece admisible, queda pendiente de formalizar y de establecer su coherencia lógica." [4]

Después de leer esta "recomendación" comencé a buscar los trabajos que, sin duda, suponía que habrían desarrollado esta idea expuesta en al año 1987. Sin embargo, y aunque existen muchos desarrollos interesantes sobre la venta secuencial de empresas, no encontré desarrollos teóricos que incluyeran un modelo en la línea de lo comentado por McAfee y McMillan.

De esta manera, y bajo la influencia de trabajos como los de Bikhchandani (1986) o Sobel (1985), decidí abordar la tarea proponiéndole a mi Director centrar la tesis en desarrollar un modelo teórico de este tipo. En principio la idea era realizar un modelo con el que poder abarcar la mayor parte de los aspectos de los procesos de ventas repetidas de empresas. Sin embargo, durante el desarrollo de la tarea modelizadora, y debido a las complejidades que iban apareciendo, decidimos centrar y "especializar" el modelo en uno de los aspectos que consideramos relevante en la venta repetida de empresas: la posible incertidumbre a la que se enfrentan los compradores en relación con las reglas del proceso de venta que serán finalmente aplicadas.

En los procesos de venta de empresas, es frecuente encontrarnos con vendedores que, con anterioridad al comienzo de la venta, no fijen claramente unas normas o reglas. En su lugar, según va avanzando el proceso, el vendedor iría comunicando a los compradores instrucciones parciales sobre los siguientes pasos que tienen que adoptar o sobre las siguientes fases que se van a desarrollar. En estos casos, son muy importantes

[4] "A rational monopolist will find some way to achieve commitment. However, it is not well understood how this can be done. One way of rationalizing this is that the seller plays the game repeatedly, while the buyers play it only once. Then it might be in seller´s interest to adhere to his mechanism, for a deviation might destroy his commitment ability for the future. However plausible this argument appears, it remains to be formalized and its logical coherence remains to be established", Mcafee y McMillan (1987a pp.732).

las expectativas que los compradores realicen sobre el posible comportamiento del vendedor. Naturalmente, en procesos en los que el vendedor repita, los compradores analizarán atentamente cuál ha sido su comportamiento en el pasado.

Como ejemplo de este tipo de situaciones, que influyen en el comportamiento de los participantes en la subasta, podríamos citar la incertidumbre que pueden tener los compradores sobre si, con posterioridad a la presentación de sus pujas, van a poder disponer de otra posibilidad para introducir mejoras adicionales en su oferta.

Las situaciones que nos podemos encontrar pueden ser muy diversas y, como se comenta en el capítulo 5, la manera de modelizarlas también. En nuestro modelo, intentamos captar esta idea añadiendo, en un juego de subasta, una fase de decisión adicional. En esta fase, después de que los compradores presentan las pujas, el vendedor tiene que optar entre aceptar la puja ganadora o iniciar una fase de "renegociación" con el ganador.

1.3.- <u>CONTENIDO DE LA TESIS</u>

La tesis consta de cuatro partes.

La primera, además de este capítulo introductorio, incluye el capítulo 2 en el que, después de describir brevemente los principales tipos de subastas, se realiza un resumen de la importancia de este método de venta en diferentes períodos históricos. Se destacan algunas prácticas que, a la vista de la teoría, se podrían racionalizar como un intento por parte de los organizadores de incrementar los ingresos esperados (como ejemplo, dentro de estas prácticas, podríamos citar: la "cláusula" que establece la guardia pretoriana cuando subasta el cargo de Emperador, por la cual se trataba de impedir que el ganador tomara represalias contra sus competidores; la posibilidad de que en las subastas de mujeres, que se celebraban en la antigua Babilonia, pudieran pujar hombres venidos de otros pueblos; o la fijación de un tiempo límite para presentar pujas en las subastas ascendentes que venía determinado por la consumición de una vela).

En la parte II se realiza una revisión de la literatura teórica de subastas. El capítulo 3 comienza resumiendo el enfoque de “pujas competitivas”, en el que no se utiliza la Teoría de Juegos para el análisis del comportamiento de los compradores debido a que sólo asumen la existencia de un comprador estratégico. A continuación se revisa la aplicación de la Teoría de Juegos a las subastas pero cuando se asume que las valoraciones que los competidores tienen sobre el objeto en venta son de dominio público. Ninguno de estos dos enfoques constituyen la principal línea de la Teoría de Subastas, ya que esta aplica la Teoría de Juegos, pero lo realiza en modelos donde los compradores no conocen como sus competidores valoran el objeto en venta (o, en su caso, no conocen sus señales sobre el valor).

De este modo, el capítulo 3 se dedica principalmente al llamado “modelo de referencia”, en el que las valoraciones de los competidores son privadas e independientes. Se describe las estrategias de equilibrio de los pujadores, en cada uno de los cuatro tipos de subastas básicas, y a continuación se establece que, desde el punto de vista del vendedor, los ingresos esperados en los cuatro casos son iguales. La generalización de esta conclusión origina uno de los principales resultados de la Teoría de Subastas: el Teorema del Ingreso Equivalente. Este teorema establece que en el “modelo de referencia” todos los tipos de subastas que cumplan con unos requisitos generan los mismos ingresos esperados. También se resume la literatura de subastas óptimas, que establece que, siempre que se cumplan los supuestos del modelo de referencia, los cuatro tipos de subastas básicas constituyen mecanismos de venta óptimos.

A la vista de este resultado, es interesante observar como en una primera aproximación podría parecer que, desde el punto de vista de los ingresos esperados del vendedor, los diseños de subastas pueden tener escasa importancia. Sin embargo, en cuanto se profundiza en la teoría y relajamos los supuestos del “modelo de referencia”, vamos a obtener unos resultados bastante diferentes y llenos de matices. Klemperer (2000 a) expresó esta idea en la siguiente frase: “Auction design is a matter of ‘horses for courses’, not ‘one sizes fits all’ ”.

Precisamente, el capítulo 4 se encarga de revisar la literatura que plantea modificaciones al modelo de referencia. Así, se analiza el funcionamiento del modelo en presencia de compradores adversos al riesgo, en presencia de elementos de valoración común y con valoraciones correlacionadas, cuando existen asimetrías entre los compradores y cuando existe riesgo de colusión. En general, se obtiene que el Teorema del Ingreso Equivalente ya no se sostiene y que las subastas básicas pierden su optimalidad. De esta manera, dependiendo del contexto, unas subastas se van a comportar mejor que otras. Por ejemplo, en presencia de valoraciones correlacionadas, los ingresos esperados de la subasta ascendente superan a los de la subasta al primer precio mientras que cuando los compradores presentan aversión al riesgo el resultado se invierte.

En este capítulo también se revisa la literatura que analiza, e intenta racionalizar, las prácticas específicas que se observan en los procesos de venta de empresas, así como las subastas multidimensionales o concursos, donde al vendedor le interesan otros aspectos además del precio. Para finalizar este capítulo se analizan algunos modelos de subastas secuenciales resaltando las diferencias con el modelo que desarrollamos en la siguiente parte de la tesis.

La Parte III desarrolla, en tres capítulos, el modelo que constituye la aportación principal de esta tesis.

. En los capítulos 5 y 6 el “tipo” del vendedor es de dominio público mientras que en el capítulo 7 suponemos que es información privada del propio vendedor.

El capítulo 5 empieza describiendo y construyendo el modelo. Como el vendedor no tiene capacidad de auto-compromiso por adelantado, uno de los pasos esenciales sería la manera en que se modeliza el resultado esperado en caso de que se produzca una modificación de las reglas. Esta es la principal tarea de este capítulo que también analizar el comportamiento del vendedor y de los compradores cuando sólo se realiza un única venta. Para ello, se consideran diferentes “tipos” de vendedores y obtenemos que, a pesar de que se producen variaciones en el comportamiento de los jugadores, el precio esperado no varía. Este resultado es previsible ya que, como aplicamos los supuestos del modelo de referencia, es aplicable el “Teorema del Ingreso Equivalente”. Sin embargo, a pesar de que el precio esperado sea el mismo, en ocasiones los ingresos netos del vendedor son inferiores a los que obtendría si tuviera la capacidad previa de auto-compromiso. En estos casos, se presenta un problema de "inconsistencia temporal" en la estrategia del vendedor que se origina por una falta de credibilidad de su estrategia óptima "ex ante" (es decir, antes de que los compradores hayan realizado su movimiento).

Este capítulo se cierra con unos comentarios sobre algunas prácticas, utilizadas en el sector público, que se pueden considerar, desde este punto de vista, como "mecanismos" para ganar credibilidad. La creación del Consejo Consultivo de Privatizaciones (CCP) en España podría constituir un ejemplo de este tipo de mecanismos.

En el capítulo 6 se extiende el análisis a la situación en la que el vendedor realiza varias ventas. Suponemos que aunque los compradores son jugadores de "vida corta" (se presentan solamente a una venta), conocen la historia pasada del vendedor. Esta situación podría asemejarse a la que se produce cuando un Estado decide poner en práctica un programa de privatizaciones, ya que en estos casos, como se comentó al comienzo de este capítulo, podemos mantener que se cumplen estas tres condiciones.: a) el vendedor (normalmente algún organismo o sociedad del Estado — en España actualmente la SEPI —) realiza varios procesos de venta de empresas; b) los compradores no suelen repetir en varias ventas[5]; y c) suelen ser públicos tanto el sistema genérico de venta como su aplicación práctica[6] (esto normalmente se debe a las exigencias de transparencia de los procesos de venta públicos) lo cual permite a los compradores conocer la historia.

En el capítulo 7 se hace más interesante el modelo ya que introduce incertidumbre entre los compradores sobre el tipo de vendedor al que se enfrentan. Es, por tanto, en este contexto donde surgen, propiamente, las consideraciones sobre la reputación del vendedor. En este capítulo se analizan los posibles incentivos existentes a que, algunos tipos de vendedor intenten imitar el comportamiento de otros, con el objetivo de extraer

---

[5] En España, en alguna ocasión, un mismo comprador se ha presentado a varios procesos de privatización, pero han sido casos muy poco frecuentes.

[6] Aunque, evidentemente, no en todos sus detalles (lo cual también, en ocasiones, puede ser relevante)

ventajas en futuras ventas, así como los contextos en que es más probable que aparezca este comportamiento.

La tesis finaliza con la parte IV que incluye el capítulo de resumen, recapitulación de resultados y de conclusiones.

CAPÍTULO 2.- RESUMEN DESCRIPTIVO DE LA EVOLUCIÓN DE LAS SUBASTAS

2.1.- TIPOS BÁSICOS DE SUBASTAS

McAfee and McMillan (1987) definen una subasta como una institución de mercado que cuenta con un conjunto explícito de reglas que determinan la asignación de recursos y los precios basándose en las pujas presentadas por los participantes[7].

Podemos hablar de subastas tanto en los casos en que se trata de vender un bien (en cuyo caso el subastador será el vendedor y los postores o los que presentan pujas serán los potenciales compradores) como cuando el objetivo sea la adquisición de un bien o un servicio, como la ejecución de una obra o el suministro de provisiones (en cuyo caso el subastador sería el comprador mientras que los postores serían los suministradores). A lo largo de esta tesis, salvo que se especifique lo contrario, nos referiremos al primero de los casos.

Por su parte, en las subastas dobles varios vendedores y varios compradores presentan pujas simultáneamente. Las subastas dobles se pueden considerar como una

[7] McAfee and McMillan (1987, pp 701), "An auction is a market institution with an explicit set of rules determining resource allocation and prices on the basis of bid form the market participants".

representación estilizada de mercados organizados (tales como las Bolsas y numerosos mercados de bienes). Las subastas dobles no serán el objeto de esta tesis.

Desde el trabajo de Vickrey (1961) se han considerado básicamente cuatro tipos de subastas primarias. A continuación realizamos una breve descripción de cada uno de estos tipos (en principio nos centraremos cuando se subasta una única unidad).

➢ **Subasta ascendente o inglesa.** Este es el tipo de subasta más utilizado. La característica que la define es el hecho de que el precio se va incrementando sucesivamente hasta que queda un único comprador, que es el que se adjudica el bien al precio final. Pueden existir diferentes maneras de incrementar los precios. Quizás la más conocida sea aquella en que los propios postores van "cantando" sus pujas (bien oralmente o bien a través de su introducción en un mecanismo electrónico). Los compradores pueden presentar cuantas pujas deseen mientras que cumplan con la condición de superar a la puja más alta en vigor.

Normalmente cuando los teóricos de subastas analizan este tipo de subasta, implícita o explícitamente, se están refiriendo a una variante de la subasta ascendente en la que el precio es continuamente elevado (bien por el vendedor o de una manera automatizada) y los compradores se van retirando sucesivamente cuando el precio alcanza niveles que no están dispuestos a pagar (una vez que alguien se retira no se permite que se vuelva a incorporar). Cuando un comprador se retira, el resto de candidatos observa el precio al que se ha producido su salida, y el proceso continúa hasta que permanezca activo un único comprador, que se adjudica el bien al precio en que abandonó el último candidato. Este procedimiento, a veces, se pone en práctica utilizando un mecanismo electrónico que va marcando el precio actual y en el que cada comprador dispone de un pulsador que lo utilizará cuando desea abandonar[8]. Cuando nos refiramos a la subasta inglesa en esta tesis nos estaremos refiriendo, a menos que se indique lo contrario, a la variante descrita en este párrafo.

En cualquier caso, una característica básica de la subasta inglesa es que los potenciales compradores siempre conocen cual es el nivel actual de la puja máxima.

[8] A esta variante de la subasta inglesa a veces se le denomina subasta japonesa. Nosotros utilizaremos la denominación genérica, es decir subasta inglesa o ascendente.

Algunos ejemplos de bienes típicamente vendidos mediante una subasta inglesa son las antigüedades y las obras de arte, entre otros muchos[9].

- **Subasta holandesa o subasta descendente.** Sería el mecanismo inverso al anterior. En este caso el subastador comienza con un precio muy alto que va disminuyendo sucesivamente hasta que algún comprador lo acepta. Este tipo de subastas, menos conocida que la anterior, recibe su nombre por ser el mecanismo utilizado tradicionalmente para la venta de flores en Holanda. Otros ejemplos son el tabaco en Canadá o el pescado recién capturado en países como España, Reino Unido o Israel.

Las subastas ascendente y descendente son conocidas también como subastas abiertas u orales.

- **Subasta con sobre cerrado al primer precio**. Los potenciales compradores presentan las pujas en sobre cerrado, el bien se adjudica al mejor postor y el precio coincide con la mejor puja. En este tipo de subastas destacan dos características que contrastan con lo que ocurría en la subasta inglesa: en el momento de presentar sus pujas los potenciales compradores no conocen cuales son las pujas de los demás y cada comprador sólo puede presentar una única puja (es decir, no existen rondas adicionales de mejora).

Este tipo de subastas es muy utilizado cuando el subastador es el comprador de un servicio o suministro (en este caso se elegiría la puja más baja). También es utilizado para la venta de bienes, como derechos de exploración o explotación de minerales, o en algunas ventas de empresas.

[9] Como se mencionará en el siguiente apartado, el propio Imperio Romano fue subastado utilizando una subasta de este tipo.

➢ **Subasta con sobre cerrado al segundo precio (o subasta de Vickrey**). Esta subasta sería igual a la anterior pero con la diferencia de que el precio a pagar no sería igual a la puja del ganador sino que se igualaría a la segunda puja más alta presentada. De esta manera, el precio sería independiente de la puja presentada por el ganador. De esta manera, cuando un comprador esta preparando su oferta conoce que en caso de ganar no va a influir en el precio y, por tanto, desde su punto de vista, la única función que cumpliría su puja sería la de seleccionar al ganador.

Esta subasta, propuesta por Vickrey (1961), presenta, como veremos, importantes propiedades teóricas aunque ha sido poco utilizada. Según se recoge en Kemplerer (1999) este tipo de subastas se utiliza en la venta de sellos por correo en el Reino Unido (aunque se trata de un modelo mixto donde también se permiten pujas orales ascendentes). En Rothhkopf y otros (1990) se dan algunas razones que podrían explicar su relativa poca utilización. Sin embargo, recientemente con el importante desarrollo que han tenido las subastas en Internet, han adquirido un importante protagonismo (así las dos casas de subastas más grandes en Internet en el año 2000 – eBay y Amazon - habían optado, cada una con diferentes matices, por utilizar subastas al segundo precio)[10].

Estas cuatro formas básicas de subastas admiten muchas variantes. Así, por ejemplo, podrían incluir un precio mínimo que podría ser anunciado o no; sería posible imponer tasas por el derecho a pujar; el tiempo límite para presentar las pujas podría ser fijo o se podría prorrogar en un intervalo determinado después de presentada la última puja; los pagos se podrían correlacionar no sólo con la pujas sino con alguna variable cuya realización se conoce solo con carácter “ex – post” (por ejemplo, con los beneficios obtenidos en el caso de subastar un monopolio, o con el mineral extraído en el caso de subastar el derecho de una explotación minera); en las subastas inglesas se puede establecer un incremento mínimo sobre la puja más alta existente; etc.

También se podrían subastar **múltiples unidades** que en ocasiones constituirían partes de un mismo bien (como por ejemplo acciones de una empresa) y en otras serían

[10] Véase, por ejemplo, Roth y Ockenfel (2000).

bienes independientes que pueden ser homogéneos o no. En términos de valor, uno de los ejemplos más importantes serían las subastas de títulos de deuda del Tesoro o las subastas de los diferentes préstamos de regulación monetaria realizados por los bancos centrales. Un ejemplo reciente en España, referido a una empresa, sería la subasta realizada para la venta de las acciones de COMESA (Compañía Operadora del Mercado Eléctrico). En realidad, las subastas que dan nombre a la subasta holandesa serían de este tipo, ya que se intenta adjudicar múltiples lotes de flores[11].

En el caso de las subastas de múltiples unidades (por ejemplo de N unidades), la llamada **subasta discriminatoria** sería equivalente a la subasta al primer precio ya que las N unidades se adjudicarían a las pujas más altas por esas N unidades y cada uno pagaría un precio igual a su puja. Por su parte, las **subastas con precio uniforme** (también llamadas competitivas), serían equivalentes a la subasta al segundo precio ya que se adjudicaría a las pujas más altas pero todos pagarían el mismo precio, el cual sería igual a la *puja más alta de las rechazadas*. Es importante que el precio se determine de esta manera para que mantenga las propiedades de la subasta al segundo precio ya que, así, el precio finalmente pagado será independiente de las pujas presentadas por cualquiera de los ganadores. En muchas ocasiones el precio de adjudicación, en lugar de ser igual a la puja más alta entre las rechazadas, es igual a la puja más baja entre las aceptadas. Aunque, en ocasiones, también se le suele denominar de la misma manera, esta variante ya no sería equivalente desde el punto de vista estratégico a las subastas al segundo precio. Esto se debe a que, en este caso, cuando los compradores presentan sus pujas conocen que existe una probabilidad positiva de que, en caso de ganar, su puja sea la que determine el precio.

Habría que añadir que a la subasta de precio uniforme se le conoce en la literatura financiera como “subasta holandesa” [12]. En esta tesis utilizaremos la nomenclatura que se corresponde con la literatura económica de la Teoría de Ssubastas que es la que hemos descrito anteriormente.

---

[11] Así en el caso de que el primer candidato que acepte el precio no adquiera el conjunto de lotes, el resto se vuelve a subastar.

[12] Según el trabajo de Smith, (1987), que se recoge en la entrada “Auction” en *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, esto sería inapropiado debido a que el sistema seguido en la subasta holandesa (descrito más arriba para el caso de una única unidad) daría lugar en el caso de múltiples unidades a un procedimiento para fijar el precio “discriminatorio” y no uniforme.

Ambos tipos de subastas (discriminatorias y de precio uniforme) se han utilizado, por ejemplo, para las subastas de títulos del Tesoro de Estados Unidos originando un interesante debate sobre sus propiedades.

En las subastas con múltiples unidades (o lotes) aparecen otras posibles variaciones en relación con las subastas básicas que no aparecían en el caso de subastas de un único objeto. Así, habría que determinar la forma en que se asignan las acciones en relación con el adquirente marginal en caso de empate, si se permite presentar ofertas sin precio y, en el caso de respuesta afirmativa, a que precio se entiende que se han presentado (podría ser al precio marginal, al precio medio –ponderado o no- de las ofertas aceptadas, al precio mayor, etc.), también habría que decidir si se realiza una única subasta en la que se adjudiquen todas las unidades o si se realizan varias subastas sucesivas, etc.

Con lo comentado en este apartado la pregunta que nos podemos realizar sería ¿como influye el diseño de las subastas en la eficiencia de la asignación y en los ingresos esperados?. La Teoría de Subastas (que se revisa en los capítulos 3 y 4) intenta dar respuesta a estas preguntas.

2.2.- <u>EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LAS SUBASTAS</u>

Tanto en este apartado como en el siguiente, no se persigue realizar una relación exhaustiva[13] sino que el objetivo es intentar mostrar la importancia que históricamente han ido teniendo las subastas.

---

[13] Para lo cual la mejor referencia es la de Cassady (1967).

Para Shubik (1983), las subastas como método de venta sólo aparecen en sociedades comparativamente avanzadas después de que se cumplan al menos dos condiciones necesarias para su existencia: a) una adecuada concentración de población que proporcione un adecuado número de compradores y vendedores; y b) la existencia de una moneda, de modo que las pujas realizadas puedan ser valoradas rápidamente. De esta manera, señala Shubik, que antes del siglo XVII existieron pocos ejemplos regulares de ventas por subastas. En cualquier caso, los ejemplos conocidos, se remontan principalmente a la antigüedad, y ya en la época de la Roma antigua alcanzaron una cierta difusión.

Así, siguiendo a Shubik (1983) la referencia más temprana que se conoce sobre subastas organizadas realizadas de una manera regular, se refieren a la antigua Babilonia, en la que en cada pueblo se celebraba un mercado anual de esposas. No se permitía que los padres dieran a sus hijas en matrimonio al hombre de su elección pero, sin embargo, cada año las doncellas en edad de casarse eran reunidas todas juntas en una plaza, en la que se encontraban los hombres formando un círculo, y se procedía a su asignación mediante subasta. Debido a tratarse del primer ejemplo de subasta organizada del que se tiene constancia le dedicaremos unas líneas[14].

La venta se realizaba de una manera sucesiva empezando por la doncella considerada más “guapa” que se asignaba a la mejor oferta económica recibida. Por tanto, aunque en la cita de Herodoto contenida en Shubik (1983) no se dice textualmente, se entiende que se trata de una subasta inglesa. Además, como hemos mencionado, existirán diversas subastas sucesivas en las que las mujeres vendidas, indudablemente, no se podrían considerar iguales. De esta manera estaríamos en el caso de subastas inglesas sucesivas de “bienes”[15] no homogéneos.

En el texto citado se recoge que los hombres más ricos pujarían por obtener las mujeres más guapas mientras que los más humildes estarían menos interesados por la belleza y se preocuparían, en mayor grado, por la dote asociada a cada mujer. De esta

[14] Intentamos centrarnos en aquellos aspectos descriptivos que nos dan la caracterización desde un punto de vista técnico, sin entrar en los aspectos morales que implica la subasta de seres humanos.

[15] Se insiste en lo dicho en la nota anterior sobre la “abstracción” (difícil en este caso) de los aspectos morales de esta descripción.

manera, las doncellas más feas no serían adjudicadas a los hombres que pagaran más sino a los que aceptaran una dote menor. Por tanto, la no homogeneidad del bien antes mencionado se podría resumir en la belleza, y de la cita se deduce que existía un precio positivo para las mujeres más guapas y un precio negativo para las mujeres menos agraciadas fisicamente. Adicionalmente, existía una fianza para intentar asegurar que efectivamente se celebraba la boda.

Por tanto, existían unas normas para realizar la asignación, para la fijación de los precios, para asegurar el cumplimiento de las obligaciones contraídas e incluso para incrementar la concurrencia tanto de compradores (se permitía que pudieran pujar hombres venidos de otros pueblos aunque fuesen lejanos) como de mujeres en venta (ya que se impedía que se asignaran con acuerdos "externos" a estos mercados organizados).

Los siguientes ejemplos que cita Shubik (1983) se refieren a la Grecia antigua en la que se utilizaban las subastas para la concesión de minas. Pero es con los romanos cuando la subasta como método de venta alcanza una amplia difusión y son utilizadas con cierta regularidad. El tipo de subasta utilizado era la subasta inglesa o ascendente y se utilizaba este método para vender los bienes confiscados (por ejemplo cuando se eliminaban a enemigos políticos), los botines procedentes de las campañas militares y los esclavos. Del latín proceden tanto la palabra castellana "subasta" como su traducción inglesa "auction". La primera se deriva del hecho de que para indicar el lugar donde se iba a subastar el botín de guerra se clavaban unas lanzas ("hasta" en latín) en el terreno alrededor de las cuales se congregaba la multitud. De esta manera la subasta se celebraba debajo de las lanzas ("sub hasta"). La costumbre se extiende y en los foros las subastas de esclavos se celebraban bajo el signo de una lanza. La palabra inglesa para subasta tiene su origen en los incrementos ("auctio") de precios sucesivos a los que da lugar la subasta inglesa.

Quizás una de las subastas más famosas de esta época[16] es la venta en pública subasta del propio Imperio Romano en el año 193 por parte de la guardia pretoriana. El ganador fue Didius Juliannus que consecuentemente fue nombrado Emperador. El cargo

---

[16] Recreada en varias películas.

sólo le duró dos meses hasta que fue despojado del título y ejecutado por Septimio Severo. Para Klemperer, (1999) se puede considerar como un triste y temprano caso de la “maldición del ganador” (que describiremos en el capítulo 4). En cualquier caso, si es interesante observar como los pretorianos tomaron algunas medidas pensadas para incrementar los ingresos. Por ejemplo, establecieron que el ganador no podía tomar represalias sobre ninguno de sus competidores. Esta medida (aunque podría disminuir los ingresos si los participantes fueran fijos) tendería a incentivar la participación de candidatos (ya que se eliminaba uno de los potenciales costes más importantes de su participación) y, por tanto, a elevar los ingresos a través de una mayor competencia.

Con la caída del Imperio Romano, y hasta el siglo XVII, la importancia de las subastas disminuye. Según Shubik (1983) las subastas no eran muy aceptadas en oriente, donde existía una gran tradición en la negociación, mientras que en la edad media de occidente predominaba la regla de la autosuficiencia dentro del señorío, y, para los escasos intercambios, el trueque se encontraba muy extendido, con lo que la mayor parte de la población utilizaba relativamente poco el dinero. Por tanto, en esta época, las escasas concentraciones de población y la poca circulación de la moneda dificultaban, (shubik, 1983) la celebración de subastas de una manera regular. Aun así, se celebraban subastas para la venta de bienes que principalmente provenían de la muerte o ejecución de sus propietarios.

A partir del siglo XVII las subastas vuelven a tener importancia y se empiezan a utilizar nuevos métodos y a diversificar los bienes subastados (por ejemplo tienen alguna importancia la venta de barcos). Entre los nuevos métodos, se empieza a utilizar la subasta holandesa y, en las subastas ascendentes, se introduce la utilización del típico martillo que adjudica el bien e incluso se utilizan subastas con límite de tiempo para presentar las pujas (un método era el de la consumición de una vela). Estos últimos sistemas plantean otras cuestiones estratégicas en relación con el momento oportuno para presentar la puja y la aparición de una pequeña incertidumbre sobre si se podrá realizar la puja cuando se espera hasta el último segundo[17].

[17] Estos temas han sido objeto de estudio, por ejemplo, por Roth y Ockenfels (2000) para las diferentes sistemas existente para fijar el tiempo límite en las subastas por Internet.

A partir de esta época la profesión de subastador va a tener un importante desarrollo y, debido a la mala reputación que habían adquirido por la realización de prácticas deshonestas, en Inglaterra, ya en 1799, se forma una asociación ("Select Society of Auctioneers") con el objeto de formar a los subastadores y hacer la profesión respetable.

Las casas de subastas también adquieren un importante desarrollo en Inglaterra y algunas se especializaran en determinados bienes (como, por ejemplo, caballos) y otras se dedicarán a subastar previa cita aquellos bienes que les propongan sus clientes.

En Francia las subastas van a tener pautas parecidas pero estaban más intervenidas ya que los lugares para llevarlas a cabo estaban limitados y tenían un número fijado por lo que debían ser adquiridos o heredados. Según Shubik (1983) en Francia, los precios que se obtenían estaban en función de la hora en la que se producía la subasta. Así se podía obtener beneficio comprando a las 14 horas, que era cuando abrían las casas de subastas, y vendiendo a las 16 horas que era cuando acudía más gente.

Para vender bienes raíces los franceses introducen una novedad en relación con la fijación del tiempo límite para presentar las pujas. Establecen que las subastas no se cerraban hasta que se consumieran tres velas (con un determinado tamaño) encendidas sucesivamente después de que se hubiese adjudicado a la mayor puja presentada. Si en ese tiempo se presentaban nuevas pujas superiores entonces el tiempo se prorrogaba en dos velas más. En Escocia también se utilizaba un sistema similar pero sin prolongar el tiempo. (Los argumentos que llevan a establecer este tipo de mecanismos son relevantes en la actualidad. Por ejemplo, en el contexto de las subastas de Internet, en el año 2000, mientras que eBay establecía un límite temporal fijo de cierre, en Amazon el límite era variable y se establece que al menos tienen que haber pasado diez minutos desde la presentación de la última puja).

A finales del siglo XIX parece que la reputación de los subastadores, al menos en Inglaterra, había mejorado.

Con este apartado simplemente queríamos destacar que las subastas tienen unos orígenes remotos en el tiempo y han alcanzado cierta importancia en las transacciones económicas en determinados momentos de la historia. Esto contrasta con el escaso análisis teórico que han recibido que, como veremos en el capítulo siguiente, empieza en fechas relativamente cercanas (los primeros trabajos tienen su origen en la década de los 50 y sesenta). Si nos referimos al desarrollo de esta literatura utilizando la Teoría de Juegos (y aunque el trabajo que inaugura esta tradición es el ya citado de Vickrey, 1961), no es hasta finales de los setenta y principios de los ochenta cuando se produce su consolidación.

2.3.- IMPORTANCIA DE LAS SUBASTAS EN LA ACTUALIDAD

En el siglo XX la importancia de las transacciones realizadas por subastas ha sido muy significativa. Además su uso se ha ido extendiendo a nuevos bienes y servicios y se ha incrementado de manera notable el número de participantes tanto desde el lado de la oferta como del de la demanda. En este apartado se ofrecen algunas pinceladas sobre el desarrollo de las subastas en el siglo XX.

A mediados de siglo (1960) según indica Cassady (1967) sólo en Estados Unidos existían entre 20.000 y 35.000 subastadores; las ventas de 1.900 casas de subastas al por mayor ascendieron a 3.400 millones de dólares y las comisiones ingresadas por alrededor de 1.600 empresas de subastas al por menor se situaron en el entorno de los 220 millones de dólares. Los bienes vendidos principalmente eran: tabaco, madera, frutas y vegetales, coches usados, pieles, bienes usados, antigüedades y bienes inmobiliarios.

Estas subastas, que principalmente serían subastas ascendentes o inglesas, no agotarían este medio como método de intercambio de bienes. Para Shubik (1983) las subastas con sobre cerrado (que, normalmente, no utilizan intermediario) pueden ser, incluso, más importantes para la economía de los Estados Unidos. Así, estas subastas son usadas para la compra de bienes de elevado valor por parte de las industrias, como turbinas o transformadores, y también por parte del Estado, por ejemplo, para muchos contratos militares. En estos casos, además del precio se valoran otros aspectos por lo que hablaríamos de subastas multidimensionales o concursos (ver apartado 4.4.-).

El Estado es uno de los agentes más importantes en el desarrollo de las subastas, y actúa tanto de comprador como de vendedor. De hecho una parte importante de sus compras (por ejemplo, adjudicación de obras, suministro de electricidad a sus edificios, compra de papel para sus publicaciones...) las suele realizar a través de mecanismos de subastas, principalmente con sobre cerrado. Así, según McAfee y McMillan (1987), en una moderna economía de mercado, las compras del Gobierno a empresas privadas normalmente se sitúan por encima del 10% del PIB.

También es muy importante la utilización de las subastas por parte del Estado cuando éste actúa como vendedor. Así, los gobiernos utilizan este medio (aunque no de manera exclusiva) para la venta, entre otros, de: títulos de deuda pública, reservas de divisas o de oro, derechos de exploración y de explotación de minerales, venta de empresas públicas. Algunas de estas subastas, como las de deuda pública o las de préstamos de regulación monetaria realizados por los Bancos Centrales, tienen una gran importancia cuantitativa. En otros casos (como son el de la subasta de derechos de exploración y explotación de petróleo en las costas de Estados Unidos y los derechos de extracción de madera también en los Estados Unidos) han tenido una importancia especial para los estudios empíricos sobre subastas. Esto es debido a que cumplen unos requisitos que normalmente no están presentes en el sector privado. Así, en los casos citados el número de subastas que se han ido celebrando es elevado y al mismo tiempo la obligación existente de hacer públicas todas las pujas presentadas (en la mayoría de las subastas privadas estas cifras son confidenciales) permite tener un número elevado de observaciones. De hecho, un importante número de estudios empíricos se basan precisamente en las subastas de derechos petrolíferos y madereros realizados por el Gobierno de los Estados Unidos.

Las subastas del espacio radioeléctrico, principalmente para telefonía móvil, realizadas en Estados Unidos a mediados de la década de los noventa así como las de las licencias de UMTS (la telefonía móvil de tercera generación) realizadas en el año 2000 en los principales países de Europa, han supuesto un final de siglo brillante para las subastas tanto desde un punto de vista teórico como práctico[18]. Desde el punto de vista práctico, los ingresos generados, tanto en Europa como en los Estados Unidos, ascienden a unas cifras especialmente elevadas ("la mayor subasta de la historia" según un artículo del *New York Times* referido a las subastas realizadas en los Estados Unidos).

Desde el punto de vista teórico, también van a tener gran importancia ya que se utilizó un nuevo sistema cuyo diseño se debe a economistas especializados en Teoría de Subastas. Por tanto, se puede decir que, desde el punto de vista de su influencia en las prácticas utilizadas, la Teoría de Subastas alcanza su mayoría de edad. Hay que tener en cuenta que en el año 1994 la Teoría de Juegos (de la cual la Teoría de Subastas se puede considerar una aplicación) había visto reconocido el importante papel que "juega" en la teoría económica al concederse el premio Nobel a John Nash, John Harsanyi y Reinhard Selten.

Aunque el diseño de los (importantes) detalles fue diferente, tanto en Estados Unidos como en los principales países europeos, se utilizó una *subasta simultanea ascendente*, en la que múltiples licencias se ponen a la venta a la vez y, todas ellas, permanecen abiertas en sucesivas rondas mientras que exista alguna puja nueva en alguna de ellas. Las pujas se van presentando en rondas en las que el resultado de cada una supone el punto de partida para la siguiente. En el diseño de este tipo de subastas, se exige fijar las reglas de una importante cantidad de detalles de gran importancia que, en buena medida, decidirán el éxito de la subasta.

McAfee y McMillan (1996) refiriéndose al caso de los Estados Unidos se preguntaron las razones para no utilizar otros sistemas ya ensayados, como una subasta secuencial en la que simplemente las licencias se ofrecieran una tras otra, o el método más rápido de ofrecer todas las licencias simultáneamente en una única ronda con pujas en sobre cerrado. En este caso la respuesta se basó en la interdependencia de las

---

[18] Estas subastas también han sido criticadas por otras causas.

licencias y en que la Federal Communications Comisión (FCC) no sabía (debido a la novedad de la tecnología) "a priori" cual sería la agregación óptima de las licencias. Por tanto en Estados Unidos la subasta también sirvió para dejar que el mercado estableciera no sólo los precios y los adjudicatarios sino la forma en que se agregaban las licencias. En este caso, los desarrollos teóricos sobre subastas apuntaban a que tanto la *simultaneidad* como el carácter *ascendente* de la subasta ayudaban a la eficiencia en la asignación.

También el final del siglo XX ha visto como las subastas se desarrollaban a través de un nuevo medio: Internet. La utilización de las posibilidades de la red para la realización de subastas ha supuesto la extensión de este sistema como medio de venta a un importante número tanto de compradores como de vendedores así como a la venta de los artículos más variados. Al mismo tiempo, como se mencionó anteriormente, ha implicado una amplia utilización de las subastas al segundo precio que hasta ese momento había tenido un escaso desarrollo práctico. Por poner un ejemplo, en el año 2001 eBay (el lider de las subastas por Internet) contaba con 42 millones de usuarios en los 22 países en que estaba presente y sacaba a subasta un millón de artículos cada día (300 millones al año). Entre los bienes subastados se pueden encontrar los objetos más diversos, por ejemplo, desde un castillo en Marruecos hasta una panadería, pasando por las máquinas de votación que crearon la confusión en Florida en las elecciones presidenciales de 2000, sin hablar de las pertenencias de todo tipo que quieren vender los particulares.

Por tanto, podemos decir que Internet ha supuesto la "democratización" del uso de la subasta como método de venta al ponerlo a disposición de todos aquellos que cuenten con ordenador personal y un acceso a Internet.

Adicionalmente, la importancia de las llamadas subastas dobles también están adquiriendo cada vez mayor importancia ya que además de sus usos "tradicionales" en los mercados de valores y en los mercados organizados de materias primas, en la última década se han empezado a utilizar en otro tipo de mercados como puede ser el mercado de electricidad al por mayor en determinados países, como es el caso de España.

Para acabar este apartado añadir que también existen otros sistemas que no son llamados subastas aunque técnicamente los podamos catalogar como tales. Un ejemplo sería de los procesos para hacerse con el control de una empresa cotizada a través de una OPA.

PARTE II:

REVISIÓN DE LA TEORÍA DE SUBASTAS

CAPÍTULO 3.- TEORÍA DE SUBASTAS Y MODELO DE REFERENCIA

3.1.- INTRODUCCIÓN Y MODELOS CON COMPETIDORES NO ESTRÁTEGICOS

En el capítulo 2 hemos descrito como las subastas se han utilizado desde la antigüedad. Sin embargo, llama la atención que el estudio teórico de las subastas no entra en la literatura económica hasta fechas relativamente recientes.

No es hasta 1956 cuando nos encontramos con el que se puede considerar el primer trabajo académico sobre la estrategia óptima a seguir para presentar las pujas[19], el de Friedman (1956). Sin embargo, en este trabajo todavía no se utiliza la Teoría de Juegos ya que se considera que existe un único jugador "estratégico". Habrá que esperar al trabajo pionero de Vickrey (1961) para que el enfoque de equilibrio de la Teoría de Juegos se empiece a utilizar en el análisis de las subastas y de las estrategias para la presentación de pujas.

Hasta comienzos de la década de los ochenta (o finales de los setenta) el desarrollo de la literatura de subastas es relativamente lento. Así, a principios de los

19 Si bien puede existir algún precedente como el de Emblen (1944).

setenta Stark (1971) contabilizo alrededor de 100 referencias entre la literatura de investigación sobre subastas, estando la mitad de ellas fechadas con posterioridad a 1966. A finales de la década los setenta, Stark y Rothkopf (1979) identificaban alrededor del medio millar de referencias. Además del limitado desarrollo cuantitativo de la literatura, hasta comienzos de los ochenta escaseaban los trabajos que utilizaban la Teoría de Juegos[20] mientras que podríamos decir que predominaba el enfoque comenzado por Friedman (1956).

Sin embargo, a partir de este momento al mismo tiempo que el enfoque de la Teoría de Juegos pasa a ser preponderante se produce una “explosión” de las publicaciones de investigación (tanto teórica como empírica) sobre subastas. Para Laffont (1997) dentro de la Teoría de Juegos, la Teoría de Subastas ha estudiado tres principales modelos: el modelo de valores independientes privados (‘independent common values model’) con origen en Vickrey (1961), el modelo de valores comunes simétrico (‘symmetric common values model’) debido a Rothkopf (1969) y a Wilson (1969 y 1977) y el modelo de valores comunes asimétrico (‘‘asymmetric common values model’) con orígenes en Wilson (1967 y 1969). En su mayor parte, todos estos modelos se podrían considerar casos particulares del modelo más general desarrollado por Milgrom y Weber (1982).

Tanto este capítulo, como el conjunto de la tesis, se centra en la aplicación de la Teoría de Juegos en el análisis de las subastas. No obstante, a continuación realizamos una breve descripción del enfoque iniciado por Friedman (1956) en el que los competidores no tienen un comportamiento estratégico, intentando incidir en aquellos aspectos que pueden tener relación con nuestros desarrollos posteriores.

Con anterioridad a la publicación de este trabajo, necesariamente se habían desarrollado ampliamente modelos para calcular las estrategias de puja por parte de las diferentes empresas que participan en las subastas para la asignación de contratos de compra, de licencias, de concesiones, etc. Sin embargo, como señala Friedman (1956)[21],

[20] Aunque existen importantes excepciones entre las que podríamos mencionar Vickrey (1962), Griesmer y otros (1967), Ortega-Reichert (1968), Wilson (1967, 1969) Rothkopf (1969) y Vickrey (1976).

[21] Según se reproduce en Laffont (1997).

"details of the successful applications of operations research to the development of bidding strategies cannot be made public for reasons of industrial security".

Friedman en su publicación presenta un método para determinar las pujas óptimas en una subasta con sobre cerrado al primer precio. En su modelo una de las claves es el análisis de las pautas ("fijas") que siguen los competidores para presentar las pujas ya que de ellas dependerán las probabilidades de ganar. Así, si una empresa tiene una valoración esperada (v) del objeto que será vendido y presenta una puja (b)[22] que resulta ganadora entonces su beneficio será la diferencia ($v - b$). Sin embargo, este sería su beneficio sólo en caso de ganar. Por tanto el beneficio *esperado* (U^e) vendría dado por,

$$U^e = (v - b)\,P(b),$$

donde $P(b)$ serían las probabilidades de que b sea la puja más alta. Por tanto, en este modelo las dificultades de calcular la puja óptima (que maximizaría la anterior expresión) proviene de las dificultades de estimar $P(b)$. Friedman sugiere que para estimar esta probabilidad habría que observar los datos de las pujas presentadas en subastas anteriores para obtener las pautas de comportamiento de cada uno de los potenciales competidores. Una vez que se haya estimado la distribución que caracteriza el proceso de presentación de pujas de cada uno de los potenciales compradores, $P(b)$ sería simplemente el producto de las probabilidades de derrotar a cada uno de los competidores conocidos.

Friedman realiza diversas extensiones de su modelo, como por ejemplo, cuando existe un número desconocido de competidores, cuando existen subastas simultáneas y cuando los compradores se enfrentan a restricciones presupuestarias.

Este trabajo de Friedman fue el punto de partida de una inmensa literatura (denominada de pujas competitivas – "competitive bidding[23]" -) desarrollada

---

[22] La utilización de la letra b para representar las pujas deriva de la palabra inglesa "bid" y se encuentra relativamente extendida en la literatura de subastas, por la que será la convención que utilizaremos en esta tesis.

[23] Según el propio Laffont (1997) este nombre puede tener su origen en que Friedman (1956) "estaba interesado en situaciones donde el número de pujadores era grande". Esta nomenclatura puede ser confusa debido a que también es utilizada por diversos trabajos que

principalmente en publicaciones periódicas de carácter técnico-sectorial[24]. Aunque esta literatura va haciendo progresivamente más compleja la manera en que se calcula la función $P(b)$, tiene la misma característica básica que el trabajo de Friedman: intenta buscar buenas estrategias de puja, tomando el punto de vista de una empresa, mientras que se considera estable el comportamiento de los competidores, en el sentido de que estos seguirían las mismas pautas que lo han hecho en el pasado. Este enfoque, por tanto, va a realizar un importante esfuerzo en el análisis estadístico de las pujas presentadas por los competidores para identificar la función $P(b)$ relevante en cada contexto.

Por tanto, esta literatura considera que existe un único competidor "estratégico" mientras que se puede considerar el comportamiento de los demás como "dado". De esta manera, no se analiza la cuestión de si el resultado obtenido podría formar parte de algún concepto de equilibrio. Es decir, dada la puja óptima que finalmente obtenemos para la empresa considerada, ¿a las demás empresas competidoras les interesaría continuar con el comportamiento que se les ha asignado como dado? o por el contrario ¿les compensaría utilizar otras pautas de comportamiento para el cálculo de su puja?. Si la respuesta a esta última pregunta fuera afirmativa entonces seguramente la puja que habíamos calculado inicialmente para la empresa que estábamos considerando dejaría de ser óptima.

En consecuencia, el párrafo anterior nos plantea el interesante interrogante que surge de esta literatura: si asumimos que una empresa es estratégica y calcula su puja en función de cómo espera que se comporten las demás ¿cuáles son las razones para asumir que las demás empresas no son estratégicas?. Este es el principal cambio que introduce la Teoría de Juegos, ya que considera que todos los competidores se comportan estratégicamente y, por tanto, persigue encontrar aquellas estrategias que puedan formar parte de algún concepto de equilibrio teniendo en cuenta que los demás competidores se encuentran en la misma situación[25].

---

utilizan el enfoque de la Teoría de Juegos.

[24] Como por ejemplo, *Journal of Construction División* o *Journal of Petroleum Technology*.

[25] En Friedman (1956) se recoge una frase (que Laffont, 1997 califica como de "misteriosa") por la que podríamos deducir que el enfoque de la Teoría de Juegos estaba latente en esta literatura desde sus orígenes: "Some of the simpler bidding problems can be solved by game-theory techniques". Hay que destacar que esta frase se publica cinco años antes de la

Precisamente la Teoría de Juegos analiza, en general, la interdependencia estratégica, es decir analiza situaciones en las que un determinado número de agentes interaccionan de tal manera que el bienestar de cada uno de los individuos no sólo depende de sus propias acciones sino también de las acciones de los demás. Expresado con otras palabras, la estrategia óptima de un individuo (la que maximiza su bienestar), normalmente, dependerá de las estrategias que adopten el resto de los participantes en el "juego".

Adicionalmente, la literatura de pujas competitivas plantea otras limitaciones que siguiendo a Laffont (1997) podríamos agrupar en los siguientes puntos:

Por un lado, se refiere al hecho de que al tomar el punto de vista de una empresa que participa en una subasta este enfoque se limita a la búsqueda de una estrategia de puja óptima pero dentro de un entorno determinado. De esta manera, este enfoque no se podría enfrentar a cuestiones referentes a la optimalidad de las subastas como método de venta, al comportamiento relativo de métodos de subastas alternativos, el análisis de las oportunidades de comportamientos de colusión entre los participantes, etc.

Por otro lado, esta literatura no sería capaz de reconocer totalmente la complejidad del problema optimizador de la empresa. Así, para Laffont (1997) este enfoque podría ser válido para la especificación del problema en un modelo de valores independientes privados aunque sería incapaz de especificarlo en contextos más generales. Uno de estos contextos podría ser cuando las pujas son estocásticamente dependientes debido a que las señales que reciben los competidores sobre el valor del objeto en venta son dependientes.

Y finalmente, este enfoque sería incapaz de dar alguna pista de cómo comportarse en entornos nuevos, como por ejemplo los entornos que se crean cuando el vendedor pone en práctica un nuevo diseño de subasta.

---

publicación del trabajo de Vickrey (1961) en el que, como se ha dicho, se utiliza por primera vez el enfoque de la Teoría de Juegos aplicado a las subastas.

3.2.- SUBASTAS ESTÁTICAS CON INFORMACIÓN COMPLETA

Dentro de la Teoría de Juegos, son los *juegos con información incompleta* los más utilizados para concebir las subastas. Por tanto, a lo largo de esta tesis estaremos tratando con diferentes tipos de juegos con información incompleta. Sin embargo, la única excepción será el presente apartado 3.2.- donde presentaremos las subastas como *juegos con información completa*.

La información es completa cuando las funciones de ganancias[26] de los jugadores son del dominio público. Esto no sólo implica que la función de ganancias de cada jugador es conocida por todos los demás sino que adicionalmente todos los jugadores saben que el resto conocen todas las funciones. La cadena no quedaría aquí sino que se extendería al infinito, es decir, todos saben que los demás conocen que todos conocen estas funciones, etc. En el caso concreto de las subastas, las funciones de ganancias van a depender de cómo valore el bien cada jugador (que sería la cantidad máxima que estaría dispuesto a pagar o la cantidad máxima con la que no obtendría una utilidad negativa si adquiriera el bien). Esto implicaría que para que la subasta sea un juego de información completa, las valoraciones que cada uno de los potenciales compradores tiene del bien que se subasta tendrían que ser de dominio público[27]. Es decir, todos los potenciales compradores conocerían cuales son las cantidades máximas que sus competidores están dispuestos a pagar por la empresa en venta.

---

[26] Que son las funciones que, para cada jugador, determinan sus ganancias tomando como argumentos las estrategias elegidas por todos los jugadores.

[27] El modelo que desarrollaremos a partir del capítulo 5 los bienes que se subastan serán empresas, por eso a menudo intercambiaremos la palabra "bien" u "objeto" por "empresa" (aunque en la mayoría de los contextos sería igual de aplicable el sustantivo genérico).

Sin embargo, en la literatura de subastas se suele asumir que los potenciales compradores sólo conocen su propia valoración del bien (ya veremos que en algunos modelos, con gran difusión, incluso no conocen exactamente como ellos mismos lo valoran) pero desconocen las valoraciones de sus competidores. De esta manera, como comentábamos, se modelan las subastas como juegos con información incompleta. (La información es incompleta cuando al menos uno de los jugadores no está seguro de la función de ganancias de otro jugador —o incluso de la suya propia—).

A su vez dentro de ambas categorías se puede diferenciar entre *juegos estáticos* y *dinámicos*. En los primeros los jugadores realizan un único movimiento de una manera simultánea (esto último no es esencial y sería equivalente a suponer que los jugadores mueven de manera sucesiva siempre y cuando no conozcan cual ha sido el movimiento de los demás). Aplicado a las subastas, equivale a que los participantes presenten sus pujas el mismo día a la misma hora o bien que las presenten en momentos diferentes pero en un sobre cerrado de tal manera que la apertura de los sobres se realice de modo simultáneo (o alternativamente que el vendedor establezca mecanismos eficaces y creíbles[28] para que, aunque los sobres se abran en diferentes momentos de tiempo, se impida que la información sea conocida por el resto de participantes en la subasta).

En los *juegos dinámicos* los jugadores mueven de manera sucesiva y/o un mismo jugador puede tener que mover en varias etapas del juego[29]. También un juego estático se podría convertir en dinámico cuando el mismo juego se repite a lo largo del tiempo (en este caso el juego que se repite se conocería como juego de etapa). Naturalmente un juego con varias etapas también se podría repetir.

Podríamos decir que, mayoritariamente, la literatura de subastas se ha centrado en modelos estáticos[30]. Sin embargo, de acuerdo a la interpretación que realizaremos en

---

[28] Si estos no fueran eficaces y/o creíbles es posible que a los participantes les resulte “rentable” dedicar recursos y esfuerzos a intentar incrementar su nivel de información sobre las propuestas que sus competidores hayan ido presentando y, por tanto, variaría la manera de modelizar las pujas debido a la diferente información con la que puedan contar.

[29] A su vez, en los juegos dinámicos se distingue entre *información perfecta*, lo que supone que en cada momento del juego el jugador al que le toca actuar conoce toda la historia de las decisiones tomadas con anterioridad, e *información imperfecta*, cuando en algún momento del juego algún jugador tiene que tomar una decisión desconociendo alguna parte de la historia del juego (es decir desconociendo cual ha sido el movimiento de algún jugador).

[30] Aunque no de manera exclusiva ya que, por ejemplo, tiene cierta importancia la

el apartado 4.5.- implícitamente tendrían un carácter dinámico debido a que el movimiento de los compradores siempre va precedido por el del vendedor en el que se fijaría el tipo de subasta elegido. En cualquier caso, en el mencionado apartado veremos que esto no tendría efectos en los métodos de resolución de los modelos. En este capítulo todos los modelos que recogemos serán estáticos. En el capítulo 4 se incluirán algunos dinámicos. Por otra parte, el modelo que desarrollamos a partir del capítulo 5 será un modelo dinámico debido tanto a que cuenta con varias etapas de decisión como a que se trata de un juego que se repite (el vendedor subastará varias empresas).

Para cada uno de estos tipos de juegos se han ido desarrollando distintas nociones de equilibrio tomando como punto de partida el conocido *Equilibrio de Nash* que se utiliza en los juegos más sencillos: los juegos estáticos con información completa. Un Equilibrio de Nash está constituido por una combinación de estrategias que cumplen con la condición de que para cada jugador su estrategia constituye su mejor respuesta dadas las estrategias que están jugando el resto de los jugadores. De esta manera, en un Equilibrio de Nash ningún jugador tiene un incentivo a desviarse de la estrategia que está jugando ya que en ninguna de las situaciones posibles experimentaría una mejora (en el mejor de los casos se quedaría igual). Dicho de otra manera, un resultado en el que, dado el comportamiento de los demás, un jugador tuviera un incentivo a jugar una estrategia diferente no sería un Equilibrio de Nash[31].

El concepto de Equilibrio de Nash como predicción al resultado de un juego, aunque no está exento de problemas[32], es el tipo de solución más ampliamente utilizada por la Teoría de Juegos. Para Kreps (1990a) el Equilibrio de Nash proporcionaría una condición necesaria, aunque no suficiente, para que una combinación de estrategias se pueda considerar como la "solución" de un determinado juego. (Desde un punto de vista práctico uno de los principales problemas que plantea el concepto de Equilibrio de Nash

---

literatura sobre subastas repetidas.

[31] Una estrategia está constituida por un plan de acción completo. Es decir, una estrategia incluiría una acción factible para cada contingencia en la que al jugador le podría corresponder actuar. En los juegos estáticos con información completa la estrategia de cada jugador está constituida simplemente por una única acción (por tanto en estos juegos – y únicamente en ellos - se podría hablar de acciones y estrategias indistintamente).

[32] Para una reflexión sobre el concepto de equilibrio de Nash y sus problemas, véase entre otros muchos ejemplos, Kreps (1990 a y b), Fudenberg y Tirole (1991a) o Mas-Colell y otros (1995).

como predicción teórica de la solución de un juego es el hecho de que en un mismo juego pueden existir más de un equilibrio).

Según se van complicando los tipos de juegos, la noción de equilibrio que se considera más apropiada va a ir incluyendo diversos refinamientos al Equilibrio de Nash, como veremos en los siguientes apartados (en los que las estrategias, el desarrollo temporal y la información de la que dispone cada jugador cuando adopta su decisión se van a ir sofisticando). El objetivo de estos refinamientos sería la eliminación de equilibrios que pueden ser poco razonables (que normalmente estarían basados en amenazas o promesas no "creíbles").

Como hemos comentado, aunque nos alejemos de la línea mayoritaria en lo que a subastas se refiere, en este apartado empezaremos introduciendo las subastas como un juego estático de información completa. Esto nos servirá para empezar a introducir la aplicación de las técnicas de la Teoría de Juegos a las subastas en contextos más sencillos.

Nos centraremos en primer lugar en una **subasta al segundo precio con sobre cerrado**. El desarrollo temporal de los juegos estáticos con información completa se podría describir de la siguiente manera: **1)** los jugadores adoptan sus acciones simultáneamente y **2)** cada uno recibe sus ganancias en función de las acciones tomadas por todos los jugadores. En el caso de una subasta con sobre cerrado al segundo precio en **1)** los potenciales compradores presentan sus pujas y en **2)** el ganador recibe el bien y paga el precio incluido en la segunda puja más alta.

Para tener bien especificado el juego tendríamos que definir que es lo que "saben" los jugadores en el momento que toman su decisión, cuales son sus acciones factibles y cuales serían sus funciones de ganancias. En lo que se refiere a lo primero, suponemos que los potenciales compradores conocen las reglas de la subasta y que tienen certeza acerca de su estricta aplicación (veremos que el levantamiento de este supuesto será uno de los puntos de partida de nuestro modelo desarrollado a partir del capítulo 5). Asumimos que estas normas establecen que el ganador será el que presente la puja más alta (a la puja del jugador i la denominaremos b_i)[33]. Adicionalmente, los pujadores tienen certeza de cómo ellos valoran el objeto que se está subastando. Esta valoración (a la que llamaremos v_i para el jugador i) será el máximo precio que estaría dispuesto a pagar[34] y, en general, será diferente para cada participante. Por último, el supuesto de la información completa implica que todos los jugadores conocen exactamente como sus competidores valoran la empresa (o el bien) en venta.

En relación con sus acciones factibles vamos a suponer que sólo pueden presentar pujas no negativas[35] en unidades monetarias enteras. Por tanto, el espacio de sus estrategias serían los números enteros no negativos.

Las ganancias del jugador i, si gana la subasta, vendrían determinadas por la diferencia entre el valor que para él tiene la empresa (v_i) y lo que paga por ella (b_i). Si no gana la subasta su beneficio será cero. Si suponemos que sólo hay dos potenciales compradores tendríamos que la función de ganancias esperadas del jugador i en una subasta al segundo precio será:

(3.1.) *función de ganancias* de i: $$U^i = \begin{cases} v_i - b_j & \text{si } b_i > b_j \\ 0 & \text{si } b_i < b_j \\ \tfrac{1}{2}(v_i - b_i) & \text{si } b_i = b_j \end{cases}$$

Se puede observar (como hizo Vickrey, 1961) que en este tipo de subastas los compradores disponen de una estrategia dominante que consiste en presentar una puja igual a su valoración[36]. Por tanto, las subastas al segundo precio presentan la interesante

[33] Para tener previstas todas las opciones supondremos que en caso de empate se realizará un sorteo con igualdad de probabilidades para los candidatos que hayan presentado las pujas mayores.

[34] Dicho de otra manera, los compradores serían indiferentes entre adquirir el bien a un precio igual a su valoración y no adquirir el bien. Si pagaran un precio superior obtendrían una utilidad negativa.

[35] En algunas ocasiones, como cuando se trata de empresas deficitarias, puede ocurrir que las pujas sean negativas (normalmente se oferta un precio positivo pero con la condición de que el vendedor tenga que hacerse cargo de un volumen de deuda que puede superar el precio). En nuestro caso descartaremos las pujas negativas.

[36] Las *estrategias dominantes* tienen la característica de que es la mejor opción para un jugador con independencia de cual sea la estrategia elegida por los otros jugadores. Es decir, ante cualquier combinación de estrategias que jueguen el resto de jugadores las ganancias que obtenga jugando esta estrategia siempre serán mayores que las que obtendría jugando cualquiera

propiedad teórica de tener un equilibrio en estrategias dominantes[37] consistente en "decir la verdad", es decir, que cada jugador puja por su valor real (lo cual veremos que no sucede en las subastas al primer precio).

Este resultado descansa en que un determinado comprador cuando presenta su oferta sabe que en caso de ganar el precio que pagará será independiente de su puja. Por tanto, la puja sólo determina sus probabilidades de ganar además de acotar superiormente el precio que podría llegar a pagar. Desde este punto de vista es fácil demostrar que la presentación de una puja igual a su valoración es una estrategia dominante. Siguiendo a Vickrey (1961), que fue el primero en analizar este tipo de subastas[38], el comprador no lograría, en ningún caso, incrementar sus ganancias presentando una oferta distinta (ya sea inferior o superior) a la de su valoración.

Así, si presenta una puja inferior disminuirían sus probabilidades de obtener el bien (dentro de los precios que le reportarían una ganancia neta positiva) y, en todo caso, si consiguiera el bien no lograría rebajar el precio pagado por él. Por tanto, rebajando su

---

de las otras estrategias de las que dispone. En el caso de que un jugador disponga de una estrategia dominante esperaríamos que jugara esa opción. En este caso, por tanto, su estrategia óptima no depende de las estrategias que jueguen el resto de jugadores. Sin embargo, estas si serán necesarias para determinar las ganancias que el individuo percibe del juego.

A las estrategias dominantes también se les denomina estrategia estrictamente dominantes para diferenciarlas de las *estrategias débilmente dominantes*. Estas últimas suponen que el jugador estará al menos igual que eligiendo cualquier otra estrategia a su disposición con independencia de cual sea la estrategia adoptada por el resto de los jugadores. A diferencia de las estrategias estrictamente dominantes (de las cuales cada jugador sólo podría disponer de una) pueden existir más de una estrategia débilmente dominante (en cuyo caso las ganancias de las dos estrategias serían iguales ante cualquier combinación de estrategias que elijan el resto de los participantes). Si sólo existiera una única estrategia débilmente dominante también esperaríamos que esta sea la estrategia adoptada por nuestro jugador (aunque en este caso habría que suponer como condición suficiente, aunque no necesaria, que el jugador considere que exista una probabilidad positiva, aunque fuera muy pequeña, de que cualquier estrategia de sus rivales pueda ser elegida).

Esta distinción es relevante ya que en las subastas al segundo precio las estrategias a las que nos estamos refiriendo son estrategias débilmente dominante (aunque, en ocasiones, omitiremos el adjetivo débilmente).

[37] Los equilibrios en estrategias dominantes son Equilibrios de Nash aunque el inverso no es cierto. De hecho, mientras que la mayoría de los juegos no tienen estrategias dominantes, bajo determinados supuestos, se puede demostrar que todos los juegos poseen al menos un Equilibrio de Nash (véase, por ejemplo, Mas-Colell y otros (1995) o Fundemberg y Tirole, (1991a) y para una explicación intuitiva véase Gibbons (1992))

[38] En Vickrey (1961) se realiza el razonamiento para un contexto en el que los compradores no conocen como sus competidores valoran el bien, es decir, en un contexto de información incompleta. En todo caso, el razonamiento es también válido para un contexto como el de este apartado de información completa.

puja estaría en algunos casos peor y en otros igual pero nunca mejor que presentando la puja por su valoración.

Si por el contrario presentara una puja superior conseguiría incrementar las probabilidades de ganar. Pero si nos fijamos esto sólo ocurría en situaciones en las que no le interesa ganar, es decir, cuando la segunda puja más alta, que sería el precio a pagar, se situara por encima de su valoración. En estos casos ganar la subasta no sería beneficioso ya que tendría que pagar un precio por encima de su valoración del bien por lo que las ganancias netas serían negativas. En aquellos otros casos en que gane la subasta y la segunda puja se sitúe por debajo de su valoración el resultado sería el mismo que cuando presentaba la puja igual a su valoración. Por tanto, elevando su puja también nos encontramos en que en ninguna situación sería posible incrementar sus ganancias.

Adicionalmente, se puede comprobar que la presentación de una puja igual a su valoración no sólo es una estrategia débilmente dominante sino que es la única. De esta manera, la "resolución" del juego se simplifica ya que cada jugador se limitaría a utilizar su estrategia dominante. Por tanto, en equilibrio cada comprador presentaría una puja igual a su valoración[39]. Si todos los compradores utilizaran estas estrategias, en equilibrio, la empresa se asignará de una manera eficiente (es decir, a la persona que tiene una valoración más alta) por lo que se maximizaría la utilidad desde el punto de vista social. El ganador pagaría un precio igual a la segunda puja más alta que, a su vez, iguala la segunda valoración más alta. Este resultado se mantiene con independencia del número de participantes. (Además sigue siendo igualmente válido cuando los potenciales compradores no conozcan las valoraciones de sus rivales).

Por tanto, en este tipo de subasta el vendedor no extraería todo el excedente del ganador que obtendría unas ganancias netas igual a la diferencia entre su valoración y la segunda valoración más elevada, es decir v_1-v_2.

---

[39] Podríamos construir otros Equilibrios de Nash aunque nos encontramos con que alguno de los jugadores tendría que estar jugando estrategias débilmente dominadas. Si aceptamos, este refinamiento al Equilibrio de Nash (es decir, el imponer la condición de que las estrategias que formen parte del equilibrio no estén débilmente dominadas) descartaríamos todos esos otros equilibrios. Este será el criterio que seguiremos.

Si consideramos una **subasta inglesa** también podemos deducir fácilmente cual sería la estrategia dominante de los participantes. Estos permanecerían en la subasta hasta que el precio igualara su valoración. En ese momento se retirarían. Si todos los participantes siguieran estas estrategias, nos encontraríamos con un resultado similar al que obteníamos en el caso de la subasta al segundo precio. Esto es debido a que cuando se retira el penúltimo pujador, el que queda se adjudica el bien al precio en que ha finalizado la subasta que coincide con la segunda valoración más alta (es decir, el precio en que se ha retirado el penúltimo candidato en liza). De este modo, la subasta también es eficiente ya que el adjudicatario es el que más valora el bien y el precio a pagar sería el mismo que en la subasta al segundo precio (la segunda valoración más alta). Por tanto, la subasta inglesa y la subasta al segundo precio obtendrían exactamente el mismo resultado tanto desde el punto de vista del vendedor como del comprador. Además, en ambos casos el resultado se obtiene en estrategias dominantes. (Veremos que esta equivalencia se va a mantener cuando cada comprador conozca su propia valoración pero no las valoraciones de sus competidores – apartado 3.3.- . Sin embargo, no se mantendrá cuando el valor del objeto a subastar “ex ante” sea desconocido – apartado 4.2.2.--).

En el caso de la **subasta al primer precio** el desarrollo temporal del juego sería igual que en el caso de la subasta al segundo precio. La única diferencia en la descripción del juego afectaría a la función de ganancias ya que en este caso el ganador pagaría un precio igual a su propia puja. De esta manera, en el caso de que existieran dos jugadores, la función de ganancias esperadas en la subasta al primer precio vendría dada por:

(3.2.) *función de ganancias* de i: $$U^i = \begin{cases} v_i - b_i & \text{si } b_i > b_j \\ 0 & \text{si } b_i < b_j \\ \frac{1}{2}(v_i - b_i) & \text{si } b_i = b_j \end{cases}$$

(La única diferencia de esta función en relación con la contenida en (3.1.) estaría en el caso de que $b_i > b_j$ en el que se incluye b_i en lugar de b_j).

Desde el punto de vista de los compradores, la diferencia esencial con respecto a la subasta al segundo precio, tendría su origen en que ahora su puja no sólo va a influir en sus probabilidades de ganar sino que también va a determinar el precio a pagar en caso de obtener la empresa. Por tanto, se plantea un claro dilema para los compradores:

a mayor puja mayores probabilidades de ganar pero menores ganancia netas en caso de resultar vencedores.

Además, en las subastas al primer precio ya no existen estrategias dominantes. Es decir, desde el punto de vista del jugador i no existiría una puja (b_i) con la que obtuviera un resultado mejor (o al menos igual) ante todas las posibles pujas que pudiera realizar el jugador j.

Por ejemplo, si el jugador i hiciera una oferta igual que la cantidad en que él valora la empresa ($b_i = v_i$) obtendría siempre un beneficio igual a cero ya que si el jugador j realiza un oferta mayor el jugador i no consigue la empresa (y, por tanto, su beneficio es cero) pero si el jugador j realiza una oferta menor el jugador i consigue la empresa pero paga exactamente lo que la valora y, consiguientemente, su ganancia también es cero. Como existen algunas pujas con las que, en algunas ocasiones, se obtienen ganancias positivas realizar una oferta por la cantidad en que valora la empresa ($b_i=v_i$) no es una estrategia dominante. Así, con una puja $b_i=v_i–x$ (siendo x un valor entero positivo e inferior a v_i para evitar pujas negativas) cuando la puja del jugador j sea inferior podría obtener una ganancia positiva (igual a x).

Adicionalmente, en las subastas al primer precio podemos decir que la estrategia $b_i=v_i$ es una estrategia dominada (débilmente) debido a que existe alguna estrategia (por ejemplo, la mencionada $b_i=v_i–x$) con la cual el jugador i (ante cualquier estrategia del jugador j) al menos está igual y en algún caso esta mejor. Por ejemplo, con la mencionada puja $b_i=v_i–x$, ya hemos comentado que en algunos casos (cuando consigue la empresa) obtiene un beneficio positivo y se puede observar que nunca obtendría unas ganancias negativas. Por tanto, la estrategia $b_i=v_i$ está dominada por $b_i=v_i–x$.

De igual modo, las estrategias que suponen que $b_i >v_i$ también serían estrategias dominadas (débilmente) ya que en el mejor de los casos (cuando no gana la subasta) las ganancias serían cero y cuando se adjudica la empresa obtendría unas ganancias negativas. Por lo tanto, en una subasta al primer precio, al eliminar los equilibrios donde se jueguen estrategias dominadas estaríamos descartando la posibilidad de que los compradores presenten pujas iguales o superiores a su valoración. De esta manera, en subastas al primer precio nunca esperaremos que los compradores presenten pujas ofreciendo lo máximo que estén dispuestos a pagar sino cifras inferiores (veremos que aquí puede residir el incentivo del vendedor para que, una vez que la pujas estén presentadas, "renegocie" el precio con el vendedor).

Hasta ahora sólo hemos podido descartar algunas de las estrategias a disposición de los jugadores como candidatas a formar parte de la "solución"[40] pero, basándose únicamente en el concepto de estrategias dominantes o en la eliminación iterativa de estrategias dominadas, no se podría (como en el caso de las subastas al segundo precio) encontrar una combinación de estrategias de equilibrio. Para ello habría que aplicar el concepto de Equilibrio de Nash. Cuando lo hacemos, nos encontramos que en este modelo con pujas discretas y con información completa, nos podemos encontrar con la existencia de múltiples equilibrios (incluso cuando eliminamos los equilibrios en los que se incluyan estrategias débilmente dominadas, lo que descarta un buen número de equilibrios). También podríamos apuntar algunas consideraciones.

A modo de ejemplo, vamos a analizar los equilibrios de Nash en varios casos. Pero antes construiremos, a partir de la función de ganancias (3.2.), la función[41] de reacción que recogería la mejor respuesta del jugador i ante las diferentes pujas que pueda presentar el jugador j. Dejaremos fuera de esta relación las estrategias débilmente dominadas. A esta mejor respuesta la expresaremos por R_i (b_j) y en ella podemos distinguir dos casos principales y otros dos que dependen del supuesto que hemos realizado de que la pujas se tienen que realizar en unidades enteras no permitiendo fracciones. Así, para todo i=1,2 y j=1,2 siempre que $i \neq j$ entonces:

[40] Incluso mediante un proceso de eliminación iterativa de estrategias débilmente dominadas podríamos (al descartar que el contrario vaya a jugar sus estrategias débilmente dominadas) eliminar estrategias adicionales. Así, para el candidato con una valoración más alta (v_1) podríamos eliminar en una segunda ronda aquellas pujas que se encuentren por debajo de su valoración pero por encima de la valoración del otro candidato (v_2). Es decir, para el candidato con valoración más alta las pujas que se encontraran por encima de la valoración de su competidor ($v_1 > b_1 > v_2$) también estarían dominadas (una vez que se hubieran eliminado para su competidor las estrategias por encima de su valoración).

[41] O más correctamente deberíamos hablar de relación ya que puede ocurrir que para alguna puja del otro comprador la "mejor respuesta" pueda incluir un conjunto de un elemento.

$$(3.3.) \quad R_i(b_j) = \begin{cases} \{b_j+1\}, & \text{si } b_j<v_i-2 \\ \{b_j, b_j+1\} & \text{si } b_j=v_i-2 \\ \{b_j\} & \text{si } b_j=v_i-1 \\ \{0,1,2,...,v_i-1\} & \text{si } b_j\geq v_i \end{cases}$$

En (3.3.) podemos observar que los casos más generales serían el primero y el último. Así, siempre que la puja del jugador j (b_j) se encuentre por debajo de la valoración que realice el jugador i en al menos dos unidades ($b_j<v_i$-2) entonces la mejor respuesta del jugador i será b_j +1, ya que de este modo obtendría la empresa pagando la menor cantidad posible dada la puja del jugador j. Por otra parte, si la puja del jugador j es igual o superior a la valoración que realiza el jugador i entonces la única manera de ganar sería incurriendo en unas ganancias negativas (o en el mejor de los caso cero) por lo que cualquier puja inferior a su valoración es una mejor respuesta, debido a que en este caso las ganancias siempre serían cero (las pujas iguales o superiores se han eliminado por estar dominadas).

Los otros dos serían casos intermedios que se derivan del supuesto de que las pujas sean discretas (y sólo se pueda realizar en unidades monetarias enteras). Si el jugador j presenta una puja que es en una unidad inferior a la valoración del jugador i, entonces la mejor respuesta es replicar con la misma puja ya que sería la única opción que permite unas ganancias esperadas positivas[42]. Esto se puede observar fácilmente ya que con una puja menor que b_j no se obtiene la empresa y la ganancia es cero, y con una puja igual a b_j+1 se obtiene la empresa pero la ganancia es cero debido a que realizamos una puja igual que nuestra propia valoración (con pujas superiores la ganancia es negativa).

Por último, cuando la puja del jugador j es inferior en dos unidades a la valoración de i. En este caso, existen dos opciones para obtener unas ganancias esperadas positivas (presentar una puja igual a b_j o superarla en una unidad) y en ambos casos la

[42] Así, al producirse un empate se realiza un sorteo en el que con posibilidad ½ el jugador i gana. Según (3.2.) en caso de obtener el bien las ganancias serían igual a 1 y en el caso de no obtener la empresa sería de cero. Por tanto, las ganancias *esperadas* serían la media ponderada por la probabilidad de ambas posibilidades lo que nos daría un valor de ½, que es una cantidad mayor que cero.

ganancia esperada es igual a 1. Es decir, si i supera la puja de su rival en una unidad, gana la empresa y su utilidad es 1 ya que paga una unidad menos de lo que él lo valora. Si presenta una puja igual a b_j entonces se produce un empate y, en caso, de resultar ganador (con una probabilidad de ½) entonces su ganancia sería de 2. Por tanto, la ganancia esperada sería el resultado de multiplicar 2 por ½ [43]. Es fácil comprobar que con cualquier otra opción las ganancias son cero o negativas.

Tomando como base la función de reacción recogida en (3.3.) un Equilibrio de Nash sería un par de estrategias (b_i^*, b_j^*) tal que simultáneamente $b_i^* \in R_i(b_j^*)$ y $b_j^* \in R_j(b_i^*)$. Como en (3.3.) no hemos incluido las estrategias débilmente dominadas estos Equilibrios de Nash no incluirían este tipo de estrategias[44].

Como ejemplos de equilibrios en este modelo (con pujas discretas y únicamente dos posibles compradores) consideraremos tres casos: **a)** el comprador i valora la empresa en venta en una unidad más que el comprador j (es decir, $v_i = v_j+1$); **b)** los dos compradores tienen la misma valoración ($v_i = v_j$); y **c)** el comprador i tiene una valoración superior al comprador j en al menos 2 unidades ($v_i \geq v_j+2$).

- En el caso **a)**, si los dos jugadores realizan una puja una unidad inferior a sus respectivas valoraciones (es decir, $b_i^* = v_i-1 = v_j$ y $b_j^* = v_j-1$) la combinación de ambas estrategias (b_i^*, b_j^*) es un Equilibrio de Nash. Para comprobarlo habría que mostrar que, dado el comportamiento de su competidor, ninguno de los dos puede mejorar realizando otra oferta. Por un lado, el jugador i obtiene la empresa, ya que su puja es mayor, y obtiene una ganancia igual a una unidad monetaria (es decir, la diferencia entre lo que valora la empresa, v_i, y lo que paga por ella, $b_i^* = v_i-1$) y con ninguna otra estrategia obtendría un beneficio superior a uno. Si ofrece más que v_i-1 sigue obteniendo la empresa pero lógicamente su beneficio será menor ya que el precio pagado será mayor. Si presenta una puja menor tampoco obtiene unas ganancias superiores a 1: si ofrece $b_i=$

[43] Aunque no lo haremos explícito hasta el siguiente apartado estamos asumiendo que los compradores son neutrales al riesgo. En este caso esto es necesario para mantener que presentar tanto una puja igual b_j como a b_j+1 son equivalentes para el jugador i.

[44] Si hubiéramos incluido en la función de reacción (3.3.) las estrategias débilmente dominadas entonces con la misma definición de Equilibrio de Nash, pero refiriéndonos a la nueva función así definida, estaríamos refiriéndonos también a aquellos equilibrios en los que se utilizaran este tipo de estrategias.

v_i–2 empataría con el jugador 2 y habría que sortear la empresa, siendo su beneficio esperado igual a 1[45]; y si ofrece una cantidad inferior a v_i–2 no obtendría la empresa y su beneficio sería cero. Por lo tanto, el jugador i no tendrá incentivos para desviarse de este equilibrio ya que, dada la estrategia del jugador j, en ningún caso obtendría una mejora. Del mismo modo podemos observar que el jugador j tampoco puede mejorar sus ganancias (que son iguales a cero al no conseguir la empresa). Así, si ofrece menos sus ganancias serían igualmente cero ya que obviamente seguiría sin conseguir la empresa, y si ofrece más podría conseguir la empresa pero el beneficio nunca sería positivo porque se vería obligado a pagar la cantidad en que valora la empresa v_j (en cuyo caso no hay excedente y el beneficio sigue siendo cero) o una cantidad mayor que v_j en cuyo caso sus ganancias serán negativas.

Hemos visto que la combinación de estrategias (v_i–1, v_j–1) en el caso a) es un Equilibrio de Nash aunque no es el único. Por ejemplo, con el razonamiento anterior se podría demostrar que la combinación de pujas $b_i = v_i - 2 = v_j - 1$ para el jugador i y $b_j = v_j - 1$ para el jugador j también forman un Equilibrio de Nash.

Podríamos, también, destacar la *atracción* que tiene la segunda valoración más alta (en este caso v_j) para la puja del candidato con una valoración más elevada. Una consecuencia es que el precio final del intercambio (al igual que ocurría en la subasta al segundo precio y en la subasta inglesa) tendería a situarse en la proximidad de esa segunda valoración más alta (de hecho en el primero de los equilibrios anteriores el precio coincidía con ella mientras que en el segundo, el precio se situaría una unidad por debajo[46]).

➢ En el caso **b)** — cuando $v_i = v_j$ — se puede mostrar que tanto la combinación de estrategias ($b_i = v_i - 1$, $b_j = v_j - 1$) como ($b_i = v_i - 2$, $b_j = v_j - 2$) constituyen sendos Equilibrios de Nash. Podemos destacar que este sería el único caso en el que los dos candidatos son iguales y que en cada uno de los equilibrios las estrategias de los jugadores son simétricas. Hay que tener en cuenta que, en general, este modelo es un modelo

[45] En este caso el beneficio podría ser de dos si gana el sorteo y de cero si no la gana. De esta manera, el beneficio esperado sería de uno, que se corresponde a la media de ambos resultados ponderados por sus probabilidades que, en este caso, son iguales.

[46] Naturalmente este último resultado es sensible a los intervalos en que se permitan realizar las pujas.

asimétrico ya que “ex ante” es conocido que los jugadores son distintos (cada uno tiene su propia valoración) con la única excepción de este caso b) en el que las valoraciones de todos coincidan. (En el apartado siguiente veremos que aunque “ex –post” los jugadores sean diferentes, normalmente, se realizan formulaciones en las que “ex –ante” son simétricos).

- Por último, en el caso **c)** — en el que ocurría que ($v_i \geq v_j+2$) — podemos observar que, también, la estrategia para el jugador con una valoración más alta (en este caso el i) con la que presenta una puja igual a la valoración de su rival forma parte de un Equilibrio. En concreto, el par de estrategias ($b_i^*=v_j$, $b_j^*=v_j$-1) constituyen una mejor respuesta para cada jugador dada la estrategia del contrario y, por tanto, forman parte de un Equilibrio de Nash.

DEMOSTRACIÓN: Para el jugador j es fácil ver, con los argumentos ya expuestos en los casos anteriores, que no puede mejorar con ninguna otra estrategia dado el comportamiento de su competidor (es decir, con $b_j^*=v_j-1$ obtiene unas ganancias de cero ya que no consigue la empresa, resultado que no puede ser mejorado ni disminuyendo ni aumentando la puja). Para el jugador i podemos observar que si utiliza la puja $b_i^*=v_j$ obtiene unas ganancias positivas (en concreto, $U_i^*=v_i-b_i=v_i-v_j \geq 2$). Si incrementa la puja sigue obteniendo la empresa pero paga más por ella, con lo que las ganancias son menores. Si disminuye la puja, en dos o más unidades, pierde la subasta y las ganancias pasan a ser cero, y en consecuencia también empeora. La última de las alternativas que nos quedaría sería cuando reduce su puja en una unidad. Con esta alternativa ocurren dos efectos: por un lado, en caso de ganar paga un precio inferior en una unidad con lo que obtendría unas ganancias mayores ($U_i^{**}=v_i-v_j-1$), pero, por otro lado, disminuyen las probabilidades de obtener la empresa ya que al empatar con el jugador j se produce un sorteo (es decir, de tener una probabilidad, en equilibrio, de ganar igual a 1 se pasa a ½). De esta manera, la utilidad esperada sería ½ de U_i^{**} que es lo que habría que comparar con las ganancias de seguir la estrategia prescrita (que venían dadas por U_i^*). Fácilmente se observa que $U_i^*>1/2\ U_i^{**}$ [47] lo que implica que tampoco le compensaría reducir su puja en una unidad. De esta manera, queda demostrado que la mencionada combinación de estrategias forman un Equilibrio de Nash. ■

---

[47] Es decir, $U_i^*-U_i^{**}=(v_i-v_j-1)/2$; y siempre que $v_i-v_j \geq 2 \Rightarrow U_i^*-U_i^{**}>0 \Rightarrow U_i^*>U_i^{**}$.

Por tanto, en este caso c) (que se podría considerar el más general de los tres analizados) el precio a pagar por el ganador también coincidiría con la segunda valoración más alta[48].

Podríamos resumir este apartado en los comentarios siguientes. Nos hemos basado en el supuesto de que es de dominio público como cada potencial comprador valora la empresa en venta (o en general, el objeto que se subasta). Este es un supuesto poco utilizado en la literatura de subastas y no lo vamos a utilizar en el resto de la tesis. Sin embargo, nos ha servido para empezar a introducir la aplicación de las técnicas de la Teoría de Juegos a las subastas, en contextos más sencillos, y para empezar a extraer algunos resultados sobre las pujas de los potenciales compradores (que en los siguientes apartados iremos matizando en relación con las diferentes situaciones que se puedan plantear). Así, por un lado, hemos encontrado que en ocasiones nos enfrentamos a la aparición de equilibrios múltiples lo que origina algunos problemas (esta es una de las debilidades de la Teoría de Juegos). Por otra parte, hemos observado que aunque el desenvolvimiento de la subasta al segundo precio y de la subasta inglesa sean diferentes (en la primera se presenta una única puja en sobre cerrado mientras que en la otra se van realizando pujas sucesivas hasta que queda un único candidato activo) el resultado final, en equilibrio, es similar: gana el que tiene una valoración más elevada y paga una cantidad que iguala la segunda valoración más alta. Además, en ambos casos los compradores disponen de una estrategia dominante (débilmente) que es la que juegan en equilibrio.

Por su parte, en la subasta al primer precio no existían estrategias dominantes y nos aparecen múltiples equilibrios. A diferencia de lo que ocurría en la subasta al segundo precio, la estrategia de presentar una puja por la cantidad en que valora la empresa (es decir la cantidad máxima que esté dispuesto a pagar) no es una estrategia dominante sino que por el contrario es una es una estrategia dominada (débilmente). Esto implica que en

[48] Podríamos observar que no existen más Equilibrio de Nash con estrategias puras en este modelo discreto con sólo dos jugadores en el que no se incluyera alguna estrategia débilmente dominadas —en el caso de que permitiéramos el uso de este tipo de estrategias entonces si nos aparecería múltiples equilibrios, en concreto la combinaciones ($b_i=v_i-x$, $b_j=v_i-x-1$) serían todas Equilibrios de Nash (siempre que $1\leq x \leq v_i-v_j$) —

una subasta al primer precio los potenciales compradores, en equilibrio, no van a utilizar esta estrategia sino que presentarán pujas inferiores a la cantidad máxima que están dispuestos a pagar. También observamos que en este tipo de subastas existe lo que hemos llamado una "atracción" por la que el comprador con la valoración más alta presenta una puja próxima a la segunda valoración más alta.

3.3.- SUBASTAS CON VALORACIONES PRIVADAS: "MODELO DE REFERENCIA"

3.3.1.- Descripción

En el apartado anterior hemos asumido que las valoraciones, que cada potencial comprador tiene de la empresa en venta, son de dominio público. Este supuesto implica que el vendedor también conoce estas valoraciones. En estas condiciones cabe preguntarse las razones por las que el vendedor organizaría una subasta. Es decir, si el vendedor es capaz de observar las valoraciones de los compradores, entonces simplemente podría realizar una oferta a aquel que tuviera una valoración más alta a un precio ligeramente inferior a su valoración, acompañada por una "amenaza" de no vender la empresa en el caso de que la rechazara (este tipo de ofertas se conocen como "take-it or leave-it"). Si dotamos al vendedor de capacidad de "autocompromiso" [49] entonces la amenaza del vendedor sería creíble y la mejor opción para el comprador sería aceptar la oferta. De esta manera, el vendedor, sin necesidad de celebrar una subasta, lograría

[49] Supuesto que es utilizado, en general y al menos de una manera implícita, en la Teoría de Subastas y que sería equivalente a dotar al vendedor de todo el poder de negociación.

asignar la empresa al comprador que más la valora extrayéndole – prácticamente — todos las ganancias del intercambio[50].

Por tanto, si estas valoraciones fueran conocidas, la celebración de una subasta no estaría justificada desde el punto de vista del comprador. En realidad es el hecho de que exista información asimétrica (lo que ocurre cuando las valoraciones de cada vendedor sean información privada) una de las razones por las que el vendedor puede estar interesado en vender la empresa mediante una subasta. Es decir, (McAfee y McMillan, 1987) cuando el vendedor no conoce como los compradores valoran la empresa, su capacidad para extraer el excedente del intercambio se encuentra más limitada (incluso en el caso de que siga manteniendo todo el poder de negociación). El vendedor puede explotar la competencia entre los compradores a través de una subasta para elevar el precio aunque, normalmente, no se conseguirá que el precio alcance el nivel de la valoración más alta entre los compradores (la cual no es conocida por el vendedor).

Por tanto, la mayor parte de la literatura de subasta parte del supuesto de que las valoraciones de los compradores no son de dominio público sino que únicamente son conocidas por cada uno. Como veíamos en el apartado anterior, esto implica que las funciones de ganancias de los vendedores tampoco son de dominio público y, por tanto, nos encontremos ante un juego con información incompleta (llamados también juegos bayesianos). Dentro de estos juegos, las subastas normalmente se plantean en la literatura como un juego estático en el que los únicos jugadores son los potenciales compradores que realizan un único movimiento simultáneo (en el que presentan sus

[50] Evidentemente, si el vendedor no dispusiera de capacidad de autocompromiso entonces la situación no sería tan sencilla ya que la amenaza de no vender no sería creíble. En este caso, el comprador podría rechazar la oferta y se podría iniciar una negociación bilateral que teóricamente podría concluir con cualquier resultado intermedio entre la valoración del comprador y del vendedor o, en su caso, la valoración del comprador alternativo, es decir, el segundo con una valoración más alta. (Tenemos un ejemplo de un problema de "inconsistencia temporal" en la estrategia del vendedor y, por lo tanto, de la existencia de una "amenaza" no creíble. Así, desde el punto de vista del vendedor "ex-ante" la estrategia planteada parece adecuada, pero en el caso de que el potencial comprador rechace la oferta, el cumplimiento "ex post" de la amenaza ya no sería la estrategia óptima para el vendedor debido a que dejaría de realizar una venta que, aunque ejecutada a un precio inferior, seguiría siendo beneficiosa. Evidentemente esto es conocido por el comprador que intentará aprovecharlo rechazando la oferta con la expectativa de iniciar una renegociación).

pujas)[51]. Por tanto, se trataría de juegos con una única etapa de decisión en la que los jugadores presentarían sus pujas sin conocer las de los demás.

Cuando presentan sus ofertas, los potenciales compradores van a tener en cuenta diferentes factores como el tipo de juego (subasta) que se les plantee, su valoración del bien subastado o el número de competidores. Pero también tendrán que realizar conjeturas sobre como sus rivales valoran el bien y sobre como pujarán en función de esa valoración y, además, tendrán que conjeturar sobre las previsiones que los otros jugadores realicen sobre como él mismo va a pujar. Estos cálculos en los juegos con información incompleta podrían ser excesivamente complicados de modelizar.

Afortunadamente, la propuesta de Harsanyi (1967), que ha sido ampliamente utilizada, simplifica esta cuestión y permite una modelización manejable. Harsanyi propone que a los juegos estáticos con información incompleta se les añada una etapa inicial "ficticia" en la que el azar o la naturaleza determina el "tipo" de los jugadores. Este tipo, normalmente, sólo le va a ser revelado a cada uno, con lo que sería información privada. El resto de jugadores sólo conocería la distribución objetiva de probabilidades de la que se ha derivado. Un supuesto importante, por tanto, sería que todos los jugadores tienen las mismas creencias sobre la distribución de probabilidades de los movimientos "realizados" por la naturaleza, lo que además es de domino público[52].

Por tanto, el desarrollo temporal se sofistica con relación al comentado con anterioridad para los juegos estáticos con información completa. El nuevo desarrollo temporal sería el siguiente: **1)** La naturaleza o el azar realiza el primer movimiento asignando a cada jugador una realización concreta de la variable aleatoria que determina sus ganancias (es decir, en esta etapa se decide el "tipo" o la clase de cada jugador de entre el conjunto de tipos posibles[53]). La naturaleza revela a cada jugador su propia

---

[51] Refiriéndonos a las subastas con sobre cerrado.

[52] Este supuesto no se encuentra libre de controversias (véase, por ejemplo, Kreps, 1990a). Esto es relevante en el caso de las subastas ya que, por ejemplo para Fudenberg y Tirole, (1991a) este supuesto "estándar" de la Teoría de Juegos puede ser más convincente cuando los movimientos de la naturaleza representan acontecimientos públicos que cuando los movimientos de la naturaleza modelizan la determinación de las ganancias de los jugadores u otras características privadas. El "juego" de las subastas se encontraría en este segundo caso.

[53] En el "tipo" de cada jugador no sólo se puede incluir aquella información privada que afecta a su función de ganancias sino también otra informacón privada que sea relevante para la adopción de sus decisiones como, por ejemplo, sus creencias sobre las funciones de ganancias

realización y no la de los demás, es decir, cada jugador sólo conoce su propio tipo. **2)** Los jugadores toman sus decisiones simultáneamente conociendo su tipo y la distribución de probabilidades de la que se han derivado los tipos de los demás. Y **3)** cada jugador recibe sus ganancias, que estarán en función de su tipo[54] y de las estrategias adoptadas tanto por él como por el resto de jugadores.

En el juego concreto de las subastas (con valoraciones privadas), el desarrollo temporal sería: **1)** la **naturaleza** asigna a cada comprador una valoración del bien subastado que se deriva de la realización concreta de una variable aleatoria cuya distribución de probabilidades es de dominio público (de esta manera el “tipo” de cada jugador viene determinado por su valoración del bien). Esta variable aleatoria se distribuye en un determinado intervalo que denominaremos $[V_{min}, V^{max}]$[55]. Cada comprador es informado de su propia valoración pero no de la de los demás competidores de la que únicamente conocerá la distribución de la que se ha derivado. **2)** Con esta información los **compradores** presentan sus pujas. Y **3)** el ganador recibe el bien y paga el precio que le corresponde según las normas de la subasta.

El juego sigue siendo estático debido a que los jugadores realizan un único movimiento simultáneo. Sin embargo, al añadirle la etapa inicial y suponer que el resultado de esa etapa no es del domino público se está reinterpretando un juego con información incompleta como un juego de información imperfecta (estos, como ya se comentó con anterioridad, eran aquellos en los que al jugador que le toca decidir no conoce toda la historia anterior). En las subastas, cuando los potenciales compradores realizan sus pujas no han observado el movimiento de la naturaleza (en lo que se refiere al resto de jugadores) con lo que desconocen los tipos de sus competidores. De esta manera, al desconocer los tipos desconocen las funciones de ganancias del resto de los jugadores (que era lo que definía los juegos con información incompleta).

---

de los otros jugadores, sus creencias sobre lo que los otros jugadores creen sobre cuales son sus creencias, etc.

[54] En ocasiones también pueden estar en función del tipo de los demás. Un ejemplo en el caso de las subastas se podría dar en algunos modelos de “valoración común” (que se describirán en el capítulo 4).

[55] En principio tanto la distribución de probabilidades como los intervalos pueden ser diferentes para cada comprador.

La noción de equilibrio que se utiliza para estos juegos es el de *Equilibrio Bayesiano de Nash* (EBN) que incorpora un refinamiento en relación con el Equilibrio de Nash. La idea intuitiva es la misma que la del Equilibrio de Nash pero aplicado a un concepto de estrategias más sofisticado que en los juegos con información completa.

La definición de estrategia es la misma para todos los juegos (véase por ejemplo, Gibbons, 1992): la estrategia de un jugador es un plan completo de acción, es decir, especifica una acción factible del jugador en cada contingencia en la que le pudiera corresponder actuar. Esta definición aplicada a los juegos con información completa implica, como ya vimos, que una estrategia es simplemente una acción (en las subastas la estrategia de cada jugador consiste en una puja).

Sin embargo, en los juegos con información incompleta una estrategia consiste en una acción para cada uno de los posibles tipos que el jugador podría llegar a tener. Si nos fijamos en las subastas, una estrategia, para cada jugador, sería una determinada puja para cada una de las posibles valoraciones de la empresa que ese jugador podría haber tenido. Es decir, la estrategia no sería una única puja (b_i) sino que estaría constituida por una función en la que la puja depende de la valoración ($b_i=B_i(v_i)$). Dada esta función de puja y, una vez que cada jugador conozca su valoración, entonces el jugador obtendría su puja concreta. Este es un artificio teórico ya que en la práctica lo único que se observa es la puja que cada jugador ha presentado en un sobre cerrado y no la función de la que teóricamente se ha derivado.

Llegados a este punto, una de las preguntas típicas que se suele realizar sería que una vez que el azar ha revelado al comprador i cual es su tipo (o su valoración de la empresa) entonces ¿para que sería necesario tener un plan completo que incluyera lo que hubiera hecho ese jugador, es decir las pujas que hubiera presentado, para cada una de las posibles valoraciones que podría haber tenido?. Parecería que sería suficiente con concentrarse en la puja a presentar considerando únicamente el conocimiento que ya tiene sobre cual es su valoración concreta. Una primera explicación se basaría en que es necesario para poder aplicar el concepto del Equilibrio Bayesiano de Nash, lo cual no sería posible si las estrategias no especificaran todas las acciones que el jugador elegiría en cada uno de sus tipos. Esta explicación no parecería por si sola muy convincente aunque se podría expresar en términos más intuitivos.

Cuando un jugador (por ejemplo el i) esta decidiendo cual es su puja óptima necesitará realizar una previsión o una conjetura sobre cual será el comportamiento del resto de jugadores. Simultáneamente, los demás participantes para calcular su mejor acción realizarán, asimismo, una predicción de cual será la manera en que se comporten los otros jugadores entre los que se encuentra el propio jugador i. Por ello, para poder conjeturar cual será el comportamiento previsible de los demás, el jugador i, necesitará analizar como los demás jugadores conjeturan sobre su propio comportamiento dada la información de la que disponen (consistente únicamente en la distribución de su valoración). De esta manera, para realizar su elección, cada jugador tendrá que pensar como hubiera actuado en cada una de las otras posibles alternativas en las que se podría haber encontrado ya que esto será necesario para analizar cuales serán las previsiones de los demás sobre nuestro comportamiento. El resultado práctico para nuestro propósito es que cuando hablemos de estrategia no nos estaremos refiriendo a una puja concreta sino a una función cuya variable independiente es la valoración.

Definidas así las estrategias, el Equilibrio Bayesiano de Nash (EBN) estaría constituido por una combinación de estrategias en el que la de cada jugador sería una mejor respuesta a las estrategias de los restantes jugadores. Es decir, esta definición implica que aunque un jugador pudiera cambiar su tipo (en nuestro ejemplo, ello supone que cambie su valoración del bien subastado), ningún jugador estará interesado en cambiar la estrategia jugada (aunque indudablemente puede cambiar la puja óptima concreta).

En el siguiente apartado (3.3.2.-) describiremos los EBN para los tipos básicos de subastas pero antes vamos a enumerar los principales supuestos que definen el que se podría denominar “Modelo de Referencia” (‘Benchmark Model’) en la Teoría de Subastas. Este ha sido el modelo más ampliamente utilizado y un buen número de conocidos resultados se han basado en él (el Terorema del Ingreso Equivalente, por ejemplo). Adicionalmente, el estudio de este modelo resulta especialmente útil ya que buena parte de los desarrollos en la Teoría de Subastas se han basado en ir levantando uno o varios de estos supuestos básicos, lo que ha dado lugar, en cada caso, a una rama importante de la teoría así como a la comparación de los nuevos resultados obtenidos en relación con el modelo de referencia. Los supuestos básicos del modelo de referencia son esencialmente cuatro:

a) Valoraciones independientes privadas ('independent-private-values'): Este supuesto en realidad comprende dos. Por un lado, implica que cada comprador conoce con exactitud en cuanto valora el bien objeto de subasta y esto sólo es conocido por él. Esto supone que no existe información relevante (es decir, que pueda afectar a la valoración) sobre el objeto en venta que sea desconocida por los compradores, ya que, en ese caso, los compradores no podrían conocer con total exactitud en cuanto valoran el bien (indudablemente en algunos contextos, como la venta de empresas, este supuesto puede ser poco convincente).

En segundo lugar, implica que las variables aleatorias de las que se derivan son independientes y, por tanto, las valoraciones de los compradores no tienen ningún tipo de correlación. Es decir, si el comprador i tiene una valoración "elevada" ello no afectaría a las probabilidades de que la valoración del comprador j fuera también "elevada". Es decir, un jugador no puede extraer, de su propia valoración, ninguna información sobre las de los demás compradores.

b) Compradores simétricos: Evidentemente este supuesto no implica que las valoraciones "ex post" de todos los compradores sean iguales. La simetría se refiere a que las valoraciones de los compradores se derivan de la misma distribución de probabilidad, es decir, los compradores serían iguales "ex ante". Por tanto, antes de realizar la subasta, el vendedor percibiría de manera similar a todos los compradores.

c) Compradores neutrales al riesgo: Este supuesto implica que los compradores tienen funciones de utilidad del dinero lineales y, por tanto, maximizar su utilidad esperada sería equivalente a maximizar sus ganancias (monetarias) esperadas.

d) Los pagos son una función únicamente de las pujas: Se asume que el vendedor al diseñar las subastas sólo puede hacer depender los posibles pagos realizados por los compradores de las pujas presentadas. Por ejemplo, se excluye que se puedan establecer pagos en función de variables que con posterioridad a la celebración de la subasta aporten indicios sobre el valor del bien para el comprador (por ejemplo, nivel de beneficios en los años siguientes en el caso de una empresa, o nivel de petróleo extraído en el caso de una subasta de derechos de extracción, etc).

El modelo de referencia también asume otros supuestos adicionales entre los que se encuentran los siguientes: no existen costes de preparación de las pujas por parte de los compradores ni de análisis de las ofertas por parte del vendedor; no hay comportamientos colusivos entre los compradores y, por tanto, se comportan de una manera no cooperativa; el número de compradores es de domino público y, también, son de dominio público las actitudes hacia el riesgo y las distribuciones de probabilidad de las valoraciones de todos los compradores. Asimismo, el vendedor tiene capacidad de auto-compromiso con lo que los vendedores tienen certeza sobre el cumplimiento de las normas.

3.3.2.- Funciones de puja de equilibrio.

En el apartado 3.2.- habíamos señalado que, en el modelo en el que las valoraciones de los compradores eran conocidas, la subasta con sobre cerrado al segundo precio y la subasta inglesa daban lugar a un resultado similar en equilibrio.

Vamos a ver que este resultado se mantiene en el “modelo de referencia” en el que las valoraciones son privadas. Adicionalmente, el cambio del supuesto sobre la privacidad de las valoraciones no afecta a las estrategias de equilibrio de los jugadores en estos dos tipos de subastas (con la única matización que en el caso anterior la estrategia representada por una única acción y ahora tendrá que especificar una acción para cada valor posible que pudiera tener su valoración).

Sin embargo, si existirán cambios en la subasta al primer precio y en la subasta holandesa (esta última no había sido analizada en el mencionado apartado 3.2.-).

a) Subasta inglesa (o ascendente).

En este tipo de subasta, la estrategia dominante para los compradores seguiría siendo permanecer en la subasta hasta que el precio iguale o supere su valoración. Con los mismos argumentos utilizados en el caso de que las valoraciones fueran conocidas se podría mostrar que, cualquiera que sea el tipo del comprador (es decir, en este modelo, cualquiera que sea su valoración), y con independencia de las valoraciones que tengan sus competidores, en ningún caso podría obtener un resultado mejor desviándose de la estrategia mencionada.

Por tanto, la situación en que todos los jugadores utilicen esta estrategia sería un equilibrio (en este caso un Equilibrio Bayesiano de Nash, - EBN-). De esta manera, como hemos dicho, con este tipo de subasta seguiría siendo válido lo comentado en el apartado 3.2.-. Así, la subasta sería eficiente ya que la empresa la obtendría el comprador con una valoración más alta y el precio igualaría a la segunda valoración más elevada.

b) Subasta con sobre cerrado al segundo precio

Igualmente en este caso seguiría siendo válido lo comentado cuando las valoraciones de los compradores eran conocidas. Con los mismos argumentos que los utilizados en 3.2.- podemos mostrar que, para cualquier valoración que pudiera tener un comprador, la única estrategia (débilmente) dominante sería la de presentar una puja igual a su valoración. Por tanto, en equilibrio los compradores utilizarán la estrategia de "revelar la verdad" (es decir, presentar una puja igual a su valoración). Esto se puede expresar diciendo que la combinación de estrategias

$b_i=B_i(v_i)=v_i$, $\forall v_i$ siendo $i=1, \ldots ,N$, donde N es el número total de compradores,

constituye un EBN.

Con estos resultados, en el "modelo de referencia", en equilibrio el resultado de ambos tipos de subastas (inglesa y al segundo precio) sería idéntico, tanto desde el punto de vista del vendedor como de los compradores: gana el comprador con la valoración más alta (con lo que se consigue la eficiencia económica) y el precio coincide con la segunda valoración más alta. Además, en ambos casos los compradores disponen de una única estrategia (débilmente) dominante que consecuentemente es la que utilizan en equilibrio. Esta equivalencia depende de alguno de los supuestos básicos del "modelo de referencia" (en el apartado 3.4. veremos que se seguirá manteniendo incluso si suavizamos algún supuesto, como el de neutralidad al riesgo, pero estos dos tipos de subastas dejarían de ser equivalentes cuando levantamos el supuesto de valoraciones independientes privadas).

Adicionalmente, el hecho de que las estrategias utilizadas en ambos casos no son sólo estrategias de equilibrio sino que son estrategias dominantes (débilmente) implica que para los pujadores será óptimo utilizar estas estrategias incluso en el caso de que asignaran probabilidades positivas a que el resto de participantes se puedan desviar de sus estrategias de equilibrio (lo que no sucedería en Equilibrios de Nash sin estrategias dominantes).

Otra ventaja de este tipo de subastas sería la simplificación de la preparación de las pujas. Para los compradores este proceso sería muy sencillo no teniendo que analizar la información de la que disponen sus competidores ni conjeturar sobre cual sería su comportamiento. Es decir, con la simple información de su propia valoración le bastaría para calcular su puja óptima[56].

Por tanto, con este tipo de subasta el vendedor no ingresaría menos que con, la más utilizada, subasta inglesa (en el apartado 3.3.3.- veremos que en media los ingresos de este tipo de subasta tampoco son inferiores a los obtenidos con la subasta al primer

[56] En todo caso, recuérdese que en el "modelo de referencia" se asume que los costes de preparación de las pujas son nulos en todos los casos.

precio y con la subasta holandesa). Además, como hemos visto, presentan algunas ventajas como por ejemplo el que los compradores revelan sus verdaderas preferencias. Sin embargo, tal como se comentó en el apartado 2.1.-, este tipo de subasta se ha utilizado en muy contadas ocasiones (al menos hasta la proliferación de las subastas por Internet). En el trabajo de Rothkopf y Otros (1990) se analizan las posibles causas que pueden explicar este hecho. Tras descartar algunas razones como posibles explicaciones se centran en dos puntos.

Una de las explicaciones se basaría en la elevada sensibilidad que, en este tipo de subasta, puede tener el comportamiento de los compradores a la posibilidad de que el vendedor pueda poner en práctica tácticas tendentes a elevar el precio por encima de la segunda valoración más alta. En concreto en este tipo de subasta sería relativamente fácil (y además no tendría ningún coste) para el vendedor introducir una puja ficticia por encima de la segunda más alta. Esta puja se situaría muy cercana a la primera puja más alta extrayendo de esta manera la mayor parte del excedente. El simple miedo a que esto suceda (incluso aunque el vendedor no realice este tipo de prácticas) puede provocar que los compradores se comporten estratégicamente presentando pujas por debajo de sus valoraciones. Si esto sucede así y el vendedor se comporta honestamente el resultado sería que los ingresos esperados serían menores que los obtenidos con una subasta ascendente[57]. En Rothkopf y Otros (1990) se comenta que también en la subasta inglesa el vendedor podría intentar poner en práctica algún tipo de prácticas de este tipo aunque en este caso los compradores van observando como se desenvuelve la subasta y en el caso de que tuvieran sospechas podría retirarse en cualquier momento (lo que no sucede en el caso de las subastas al segundo precio).

---

[57] Una de las posibles maneras de enfrentarse a este problema sería que las pujas se presentaran en sobre cerrado y que fueran abiertas simultáneamente siendo el proceso de apertura “certificado” por una tercera parte. Sin embargo, Rothkopf y Otros (1990) comentan que incluso aunque el vendedor se comporte de una manera escrupulosa en la apertura de las ofertas podría incitar a una persona de su confianza que presentara una puja relativamente alta. Si esta puja no resultara ganadora no existiría ningún coste y podría servir para que el ganador pagara un precio mayor. En el caso de que esta puja resultara la ganadora entonces, según los autores mencionados, el vendedor podría encontrar algunos fundamentos para rechazarla o podría acordar con el ganador alguna compensación de alguna manera. De nuevo no haría falta que este comportamiento tuviera lugar. El simple temor de los compradores a que el vendedor pudiera utilizar este tipo de tácticas les haría presentar pujas por debajo de su verdadera valoración.

La otra posible explicación, que estos autores ofrecen sobre la poca utilización de las subastas al segundo precio, se basa en las reticencias que, en algunos contextos, pueden tener los compradores para revelar sus verdaderas valoraciones (recordamos que cuando se trata de subastas no para vender sino para comprar un bien o un servicio entonces los pujadores no serían los compradores sino los vendedores y, en este caso, lo que las pujas podrían revelar serían sus verdaderos costes de producción lo que es una información muy sensible para las empresas). Para Rothkopf y Otros (1990) la clave reside en que normalmente la literatura considera a las subastas como un acontecimiento aislado. Sin embargo, ellos consideran que raramente se pueden considerar como sucesos completamente aislados especialmente cuando se trata en contextos empresariales. Así, en el caso de presentar una puja de acuerdo a su verdadera valoración (o a sus verdaderos costes, según el caso) se podría revelar a los competidores importante información sobre la tecnología de la que dispone la empresa. También podría ocurrir que terceros con los que la empresa tenga que negociar con posterioridad (trabajadores, suministradores, subcontratas, financiadores, etc.) obtengan una información que les otorgue ventaja en dichas negociaciones. De esta manera, los pujadores tendrían incentivos para proteger su información sensible lo que provocaría que, aun en el caso que supongan que el vendedor se va a comportar honestamente, presenten pujas por debajo de su valoración (o por encima de sus costes en el caso para adquirir un bien o servicio). Esto provocaría que, en media, los ingresos serían inferiores que en el caso de la subasta al primer precio[58].

En el trabajo citado se desarrolla un modelo en el que terceros que negocian con la empresa son capaces de apropiarse de un determinado porcentaje de la diferencia entre la puja que presenta el ganador y del precio que realmente paga. El resultado final es que los pujadores consiguen traspasar al vendedor (a través de pujas de equilibrio menores) el coste que le supone esa negociación con terceros.

---

[58] Mantener en secreto las pujas podría constituir una manera para evitar estos efectos aunque, para Rothkopf y Otros (1990), al menos existen dos problemas. Primero, el secreto podría ir en contra de que la transparencia necesaria para asegurar a los pujadores (o al público en general) que el proceso se ha hecho con honestidad y justicia. En segundo lugar, el secreto nunca es completo. Las pujas tienen que ser conocidas por los que evalúan las ofertas y precisamente la privacidad da un elevado poder al que posee la información, que pueden tener elevados incentivos a filtrarla. De esta manera, aunque la posibilidad de que se hagan públicas las ofertas sea pequeña sería suficiente para que los pujadores se desviaran de las estrategias de revelar la verdad.

Sin embargo, la elevada proliferación que las subastas al segundo precio han tenido a finales de los noventa en internet necesitaría de alguna explicación en la que no vamos a entrar[59].

c) Subasta holandesa

En lo que se refiere a la subasta holandesa (en la que se recuerda que el vendedor iba disminuyendo el precio hasta que algún comprador lo aceptara) la situación a la que se enfrentan los potenciales compradores es exactamente la misma que en una subasta con sobre cerrado al primer precio. Es decir, el comprador deberá elegir su puja sin conocer las decisiones de los demás competidores y, en caso de ganar, pagaría una cantidad exactamente igual a su propia puja. Por tanto, la información con la que cuenta a la hora de adoptar su decisión es idéntica en ambos casos y el resultado de su decisión también será idéntico. Además, este resultado es independiente de las aptitudes ante el riesgo y del supuesto que se adopte sobre las correlaciones de las valoraciones de los compradores. Esto nos permite centrarnos únicamente en las subastas al primer precio.

d) Subasta con sobre cerrado al primer precio

---

[59] Podríamos avanzar que debido a los bienes subastados y al tipo mayoritario de participantes la segunda causa antes aducida tendría una importancia menor (es decir un particular que puja por unas botas de esquiar tiene poco que perder del hecho de revelar sus verdaderas preferencias). En relación con la primera de las causas, la del miedo a que el vendedor pudiera introducir pujas falsas, podríamos encontrar razones que incrementaran ese miedo (en internet sería relativamente cómodo para el vendedor introducir este tipo de pujas) pero también que lo disminuyen (como se realizan muchas subastas a través de la misma empresa de internet está tendrá fuertes incentivos a mantener su "reputación"). En cualquier caso, también podríamos aducir desventajas relativas de los otros tipos de subastas. Por ejemplo en el caso de la subasta inglesa, por su naturaleza, implica que cada pujador pueda llegar a presentar numerosas pujas antes de que se cierre la subasta. En internet las subastas suelen estar abiertas varios días por lo que puede implicar un elevado coste para los pujadores el estar pendiente de la evolución de las pujas. Sin embargo, en una subasta al segundo precio, si los pujadores presentan su puja de equilibrio únicamente tendrían que presentar una única puja y "olvidarse" hasta el cierre (aunque también hay evidencia de que en subastas al segundo precio en Internet, al menos al principio, los pujadores no sueles hacer uso de su puja de equilibrio, véase por ejemplo, Roth y Ockenfels (2000)).

En las **subastas al primer precio**, al no existir estrategias dominantes, la tarea de encontrar una combinación de estrategias de equilibrio es más laboriosa. Además se necesitan realizar más precisiones sobre los supuestos del modelo. Así,

• El número (conocido) de participantes lo llamaremos N. De esta manera, con el subíndice $i=1,...,N$, designaremos un comprador genérico.

• Las valoraciones de los compradores (v_i) se distribuyen (como ya se ha dicho) en el mismo intervalo $[V_{min}, V^{max}]$ y comparten la misma Función de Distribución ($F(v_i)$). Vamos a suponer que esta función de distribución es *continua* y *diferenciable* en dicho intervalo con una función de densidad $f(v_i)$. Así, $v_i \in [V_{min}, V^{max}]$; siendo $F(V_{min})=0$ y $F(V^{max})=1$.

• Las pujas de los candidatos ya no las vamos a considerar discretas (como en el apartado 3.2.-). En su lugar supondremos que son continuas perteneciendo al conjunto de los números reales no negativos, es decir: $b_i \in [0,\infty)$.

• Al vector que contiene las pujas de todos los candidatos a excepción del candidato i le llamaremos b_{-i} y a la puja más alta de las incluidas en b_{-i} la llamaremos b_j. Es decir, $b_j = max\, [b_{-i}]$, será la puja más alta sin tener en cuenta a b_i.

• La ganancia del comprador i vendrá dada por la siguiente función de ganancias:

$$U_i = \begin{cases} v_i - b_i & si\ b_i > b_j \\ 0 & si\ b_i < b_j \end{cases}$$

De la que podemos deducir la siguiente función de utilidad esperada (recordamos que estamos suponiendo que los candidatos son neutrales al riesgo):

(3.4.) $$U_i^e = (v_i - b_i)\ Prob(b_i > b_j) + 0\ [1 - Prob(b_i > b_j)],$$

donde $Prob(b_i > b_j)$ es la probabilidad de que la puja del jugador i sea la más alta. Evidentemente, el segundo sumando se anula pero es interesente recogerlo ya que en el caso de suponer que los compradores tienen un coste al preparar y presentar sus pujas entonces el cero se transformaría en una cantidad negativa y el sumando mencionado si sería relevante (especialmente para la decisión del candidato de presentarse o no — en ese caso esos costes también habría que tenerlos en cuenta en el primer sumando ya que se soportan tanto si se pierde como si se gana —). Si eliminamos el segundo sumando nos queda que ,

(3.5.) *Utilidad esperada del comprador i*: $U_i^e = (v_i - b_i)\, Prob(b_i > b_j)$

Los compradores cuando presentan sus pujas intentarán maximizar su utilidad esperada teniendo en cuenta la información de que disponen y sus conjeturas de cómo se comporten los demás compradores. Con la ecuación de la utilidad esperada (3.5.) es fácil observar el dilema al que se enfrentan los compradores en una subasta al primer precio que se origina en que su puja (b_i) va a tener dos efectos en sentido contrario. Así, si el comprador i se plantea aumentar su puja: a) por un lado, la utilidad esperada tenderá a aumentar debido a que se incrementan las probabilidades de ganar (es decir, aumenta $Prob(b_i > b_j)$); pero b) por otro lado, el excedente en caso de ganar ($v_i - b_i$) será menor, y ello tenderá a disminuir la utilidad esperada. (En el caso de las subastas al segundo precio este dilema no existía debido a que la cantidad a pagar en caso de ganar es independiente de la puja presentada).

Por tanto, para maximizar la utilidad esperada se elegirá la puja que iguale marginalmente estos costes y beneficios. Pero para ello, el jugador i tendrá que realizar alguna conjetura sobre las probabilidades de que su puja resulte superior a la de sus competidores lo cual supone, a su vez, conjeturar sobre como se comportarán el resto de compradores.

- Vamos a suponer que el comprador i realiza la conjetura de que todos sus competidores van a presentar sus pujas de acuerdo a una regla de decisión arbitraria,

(3.6.) $b_h = B(v_h)\ \forall h \neq i.$

Es decir, si su valoración (que es desconocida para i) fuera v_h entonces presentaría una puja igual a $B(v_h)$. Esta regla de decisión sería arbitraria pero cumpliría dos requisitos: ser continúa $\forall\ v_h \in [V_{min}, V^{max}]$ y ser monótona creciente en v_h ($dB/dv_h>0$) en dicho intervalo[60]. Estas propiedades son importantes ya que podemos asegurar sin ambigüedad que a mayor valoración mayor será la puja presentada. Adicionalmente, al ser monótona creciente nos aseguramos la existencia de la función inversa en todo el intervalo factible para las valoraciones. Es decir, esta función inversa nos representaría la valoración en función de la puja presentada. Así,

$$v_h=B^{-1}(b_h)\ \forall h\neq i\ ,$$

es decir, $B^{-1}(b_h)$ sería la valoración que da lugar a la presentación de una puja igual a b_h .

Ya habíamos comentado que la mayor puja entre todas la competidoras de i la llamamos b_j y, por tanto, según (3.6.) $b_j=B(v_j)$.

En función de este supuesto sobre los competidores podríamos reformular la expresión $Prob.(b_i>b_j)$ de la ecuación (3.5.) de la siguiente manera,

$$Prob(b_i>b_j) = Prob\ [b_i>B(v_j)]$$

Si llamamos v_j^* a la valoración que haría que el jugador j presentará una puja igual a la del jugador i (b_i), entonces $v_j^*= B^{-1}(b_i)$. Expresado de esta manera, la probabilidad de ganar que el jugador i tiene con la puja b_i será igual (dada la conjetura de que todos sus competidores siguen la regla $B(.)$) a la probabilidad de que todas las valoraciones del resto de jugadores se sitúen por debajo de la mencionada v_j^*. A su vez, la probabilidad de que la valoración de un jugador se sitúe por debajo de v_j^* vendría dada precisamente por la función de distribución de las valoraciones, es decir sería $F(v_j^*)$. Como existen $N–1$ competidores del jugador i, para obtener las probabilidades de que todas las valoraciones se encuentren por debajo de ese valor, tendríamos que multiplicar $F(v_j^*)$, $N–1$ veces por si misma. Por tanto,

[60] Dados los supuestos realizados se podría mostrar que estos supuestos se derivarían de la racionalidad de los compradores.

$$Prob.(b_i > b_j) = Prob\,[b_i > B(v_j)] = F\,(v_j^*)^{\,N-1} = F\,[\,B^{-1}(b_i)\,]^{\,N-1}$$

Sustituyendo este valor en (3.5.) podríamos expresar el problema de encontrar la mejor respuesta del jugador i, dada la regla de decisión arbitraria $B(.)$ utilizada por sus competidores, como:

(3.7.) $$\underset{b_i}{Max}\; U_i^e = (v_i - b_i)\,F\,[\,B^{-1}(b_i)\,]^{\,N-1}$$

En esta expresión se ha eliminado las referencias a la máxima puja de sus competidores (b_j en (3.5)) o a sus valoraciones, datos ambos no conocidos por el comprador i cuando presenta su puja. De esta manera, en (3.7.) sólo aparecen variables conocidas como el número de participantes (N), la función de distribución de las valoraciones de los otros jugadores ($F(.)$) y su propia valoración (v_i). También aparece la conjetura del jugador i sobre la regla de decisión de sus competidores (en este caso su inversa $B^{-1}(.)$) y, naturalmente, la variable para la cual se quiere encontrar solución, la propia puja (b_i).

Por tanto, con esta formulación de la utilidad esperada ya podríamos afrontar el problema de su maximización en el contexto de los requisitos exigidos por el EBN. Para ello seguiremos la exposición de McAfee y McMillan (1987a). Para maximizar U_i^e habrá que elegir b_i tal que se cumpla la condición de primer orden $\partial U_i^e/\partial b_i=0$. Si diferenciamos U_i^e con respecto a v_i e introducimos la condición de primer orden obtenemos:

$$dU_i^e/dv_i = \partial U_i^e/\partial v_i + (\partial U_i^e/\partial b_i)(\,db_i/\partial dv_i) = \partial U_i^e/\partial v_i$$

Por tanto, la puja óptima b_i debe satisfacer,

(3.8.) $$dU_i^e\,/\,dv_i = \partial U_i^e/\partial v_i = F\,[\,B^{-1}(b_i)\,]^{\,N-1}$$

Hasta ahora nos hemos fijado en el comprador i y hemos supuesto una regla de decisión arbitraria ($B(.)$) que utilizarían sus rivales. No obstante en un Equilibrio Bayesiano de Nash todos los N compradores deben estar maximizando simultáneamente y, por tanto, el uso de la función $B(.)$ por parte de los competidores de i debe ser consistente con que ellos mismos estén actuando racionalmente. Si a este hecho le añadimos el supuesto de simetría entre los compradores (que en nuestro caso implicaría que si dos pujadores tuvieran la misma valoración presentarían la misma puja) entonces la puja óptima del comprador i (b_i) que satisfaga (3.8.) debería ser la que determine la propia regla de decisión $B(.)$ para la valoración v_i. Es decir, para que una puja, b_i, que satisfaga (3.8.) pueda formar parte de un Equilibrio de Nash[61] entonces tiene que cumplir que

$$b_i = B(v_i).$$

Sustituyendo esta expresión (derivada del requisito de Nash) en (3.8.) obtenemos

$$dU_i^e/dv_i = F\,[\,B^{-1}(B(v_i))\,]^{\,N-1} = F\,[\,v_i\,]^{\,N-1} \qquad (3.9.)$$

En equilibrio esta ecuación se debe cumplir para todos los N compradores. Resolviendo la ecuación diferencial (3.9.) simplemente integrando ambos miembros,

$$U_i^e(v_i) = A + \int_{V\,\min}^{v_i} [F(v_i)]^{N-1}\,dv_i \qquad (3.10.)$$

Donde A sería la constante arbitraria de integración que habría que determinar. Para ello, recurrimos a la condición límite de que el tipo de comprador que le correspondería la valoración más baja entre las posibles (es decir, V_{min}) tendría una utilidad esperada por participar en la subasta de cero. Es decir, U_i^e (V_{min}) = 0. Esta condición, que juega un papel relevante en el modelo de referencia, también se podría deducir de la racionalidad de los supuestos realizados, y equivale a que la puja que realiza un comprador con la valoración más baja sería igual a esa valoración, $B(V_{min})= V_{min}$. De esta manera, este tipo de comprador, gane o pierda la subasta, siempre recibiría una

61 Podemos utilizar aquí Equilibrio de Nash en lugar de EBN dado que todo EBN es un Equilibrio de Nash (aunque el inverso no es cierto).

ganancia igual a cero. Utilizando esta condición se observa que el valor de la constante A en la ecuación anterior es cero ya que la integral se anula cuando $v_i=V_{min}$.

Por tanto, después de eliminar la constante A, la ecuación (3.10.) nos representa la utilidad esperada del comprador i en función de su valoración. Dado que $F(.)$ es una función de distribución de probabilidad podemos observar que la utilidad esperada para un vendedor es una función creciente de su valoración (v_i) y decreciente en el número de compradores (N). Así, aunque el precio esperado también sea mayor cuanto mayor sea la valoración de un comprador, mayor será su utilidad esperada de participar en dicha subasta. Al mismo tiempo, para una misma valoración a mayor número de participantes menor utilidad esperada.

Si sustituimos (3.10) y la condición de Nash ($b_i=B(v_i)$) en la ecuación de la utilidad esperada que se recoge en (3.7) nos quedaría

$$\int_{V\min}^{v_i} [F(v_i)]^{N-1} dv_i = (v_i - B(vi))F(v_i)^{N-1}$$

De donde operando y despejando obtenemos la función de puja buscada,

$$\boxed{b_i = B(v_i) = v_i - \frac{\int_{V\min}^{v_i} [F(v_i)]^{N-1} dv_i}{F(v_i)^{N-1}}} \qquad (\ 3.11.)$$

Es decir, en una subasta al primer precio (y también en una subasta holandesa) la combinación de estrategias que consiste en que todos los compradores utilizan la función de puja $B(v_i)$ recogida en (3.11.) constituye un EBN.

Esta función de puja, como esperábamos, es creciente en v_i.[62] Por tanto, en el contexto del “modelo de referencia”, en equilibrio, la subasta al primer precio (y también la

[62] La única excepción sería cuando existe un único comprador ($N=1$) en cuyo caso se puede observar en (3.11.) que la función de puja sería igual a, V_{min}, con independencia del valor de v_i (es decir $B(v_i)=V_{min}$, $\forall$ v_i factible). Por tanto, en el caso de que no existiera competencia el comprador ofrecería la mínima cantidad que aceptaría el comprador (que en este caso estamos suponiendo que es V_{min}).

subasta holandesa) sería eficiente ya que el ganador será el comprador con una valoración más alta.

También podemos observar en (3.11.) que en una subasta al primer precio las pujas (b_i) van a ser inferiores a las valoraciones (v_i) y, por tanto, la estrategia de "revelar la verdad" ya no van a constituir estrategias de equilibrio. La magnitud en que se "afeita"[63] la puja viene dada por el cociente de la derecha en (3.11.) que depende del número de compradores (N) así como de la función de distribución de la que se derivan las valoraciones de todos los compradores. De esta manera, destaca el relevante papel que en este modelo juegan los supuestos que se realicen sobre estas distribuciones.

También hemos comentado que la magnitud en que se reduce la puja con relación a la valoración depende del número de compradores (N). Así (dado que $F(v_i)$ es menor o igual que 1 para todo el intervalo factible de v_i) el "afeitado" de la puja será menor cuanto mayor sea el número de compradores. Dicho de otra manera, la función de puja $B(v_i)$ es una función creciente del número de participantes en una subasta, lo que implica que para una misma valoración, la puja será mayor cuanto mayor sea el número de competidores. De esta manera, se entiende el resultado comentado anteriormente sobre que la utilidad esperada de los compradores derivada de participar en la subasta era una función decreciente del número de participantes. Del mismo modo, dadas las reglas de la subasta al primer precio, los ingresos esperados para el vendedor serán una función creciente del número de compradores participantes en la subasta[64].

A modo de ejemplo vamos a suponer que las valoraciones de los compradores se distribuyen uniformemente[65] en el intervalo (V_{min}, V^{max}) con lo que la Función de Distribución genérica de (3.11.) se transformaría en $F(v_i) = (v_i - V_{min}) / (V^{max} - V_{min})$. Si introducimos esta función de distribución en (3.11.) y operamos, obtendríamos la siguiente función de puja

---

[63] Esta expresión se refiere a la cantidad en que se disminuye la puja por debajo de la valoración y proviene de la traducción literal del término utilizado en inglés ("shave")

[64] Si bien en el caso de que el vendedor tenga que incurrir en costes para analizar las ofertas o comprobar las credenciales de los potenciales compradores, podrían existir situaciones en las que no aumentaran los ingresos esperados netos del vendedor (en el modelo de referencia se asume que estos costes son cero).

[65] La distribución uniforme simplifica en gran medida los cálculos y, por ello, va a ser la distribución que utilicemos en el modelo que desarrollamos a partir del capítulo 5.

(3.12.) $b_i = B(v_i) = v_i - [(v_i - V_{min})/N]$,

que también se puede expresar como

(3.13.) $b_i = B(v_i) = [(N-1)/N]v_i + V_{min}/N$

En esta función se pueden observar de manera más intuitiva todas las características comentadas para la función de puja genérica recogida en (3.11.). En la formulación recogida en (3.12.) la expresión entre paréntesis representa la cantidad en que se reduce la puja en relación con v_i, observándose como esta cantidad se va reduciendo según se incrementa N. Además, el límite de la expresión entre paréntesis cuando N tiende a infinito sería cero, con lo que cuando el número de competidores es muy elevado la puja tiende a igualar a la valoración (es decir, $\lim_{N\to\infty} B(v_i) = v_i$). Por tanto, en este caso el beneficio esperado para los compradores por participar en la subasta tiende a cero cuando el número de competidores es muy elevado, con lo que el vendedor obtendría todo el excedente de la transacción. Este resultado es coherente con el resultado de modelos de competencia perfecta (uno de sus supuestos es la existencia de un número elevado de agentes) en los que los beneficios económicos (o extraordinarios) serían nulos.

También podemos observar que aunque a mayor N mayor puja ($\partial B(.)/\partial N>0$) la magnitud del incremento va a ser cada vez menor según nos situamos en niveles más altos de participantes ($\partial^2 B(.)/\partial N^2<0$). Esto se puede observar directamente en la función de puja expresada en la forma de (3.13.). Dejando de lado el segundo sumando, en el primer sumando el término $(N\text{-}1)/N$ (que es positivo y menor que 1) se recoge la fracción que las pujas representan de las valoraciones. Se puede observar como esta fracción tiende a 1 según N tiende a infinito (es decir, $\lim_{N\to\infty} (N-1)/N = 1$). En términos cuantitativos podemos observar que cuando N es pequeño los incrementos de esa fracción son importantes (si existen dos participantes esa fracción sería sólo ½, si aumentan a tres ascendería a 2/3 de las valoraciones y en el caso de 4 participante las pujas igualarían ¾ de las valoraciones) pero cuando N es elevado esos incrementos son pequeños (así, para que ese primer sumando alcance el 90% de la valoración se necesitarían 10 participantes, mientras que con otros 10 más, es decir con 20, sólo se subiría otros 5 puntos hasta alcanzar el 95%). Por tanto, desde el punto de vista del comprador la "utilidad marginal" de un competidor más (aunque positiva) es decreciente y puede llegar a ser pequeña a partir de determinados niveles (los cuales van a depender del modelo concreto que estemos considerando)[66].

En nuestro modelo de los capítulos 5, 6 y 7 vamos a suponer que las valoraciones de los compradores se derivan de una distribución uniforme y que el número de compradores en cada venta va a ser igual a dos (N=2). Con este supuesto es fácil deducir a partir de (3.12.) o (3.13.) que la función de puja sería:

(3.14.) $$\boxed{b_i = B(v_i) = (v_i + V_{min})/2}$$

No obstante, en al apéndice a este capítulo deducimos esta misma función de puja pero utilizando un sistema diferente al descrito con anterioridad. El interés reside en que será el sistema que, aplicado a otros entornos, utilizaremos en el modelo desarrollado en los capítulos 5, 6 y 7.

3.3.3.- Teorema del Ingreso Equivalente y Subastas Óptimas

En el apartado anterior hemos visto que los cuatro tipos de subastas analizados podríamos agruparlas en dos grupos en función de los resultados que se obtenían. Así, por un lado, dadas las respectivas estrategias de equilibrio, en la *subasta inglesa* y en la *subasta al segundo precio* se obtenía el mismo resultado. Por otro lado, habíamos argumentado que en la *subasta al primer precio* y en la *subasta holandesa* existía, desde el punto de vista de los compradores, una equivalencia estratégica por lo que asumíamos

[66] Es interesante observar que algunos organismos, como el Consejo Consultivo de Privatizaciones, han recomendado que en los concursos para la selección de asesores el número de convocados se sitúe en un entorno próximo a los diez competidores.

que la puja que presentaban en la subasta al primer precio y el precio al que aceptaban el bien en la subasta holandesa eran iguales y, por tanto, el resultado de estas dos subastas también sería similar.

En el artículo de Vickrey (1961) se va más allá de este resultado ya que establece que, en el modelo de referencia, el ingreso esperado por el vendedor de los cuatro tipos de subasta, en media, es el mismo. Por tanto, aunque no lo denomina de esta manera, en este trabajo pionero tendríamos recogido por primera vez el Teorema del Ingreso Equivalente[67]. Desde este punto de vista, el vendedor sería indiferente ante cualquiera de los cuatro tipos de subastas analizados[68]. Antes del trabajo de Myerson (1981) — en el que ya se recoge el nombre de Teorema de Ingreso equivalente y que comentaremos más adelante — otros autores obtienen también este resultado como, por ejemplo, Ortega-Reichert (1968) y Holt (1980).

- En esta versión, el **Teorema del Ingreso Equivalente** lo podríamos enunciar como: *En el "modelo de referencia" la subasta inglesa, la subasta holandesa, la subasta con sobre cerrado al primer precio y la subasta con sobre cerrado al segundo precio proporcionan, en media, los mismos ingresos esperados.*

Para mostrar intuitivamente este Teorema bastaría únicamente con comparar los resultados esperados de la subasta al primer y de la subasta al segundo precio (dado que el resultado de una subasta al primer precio es similar al de una subasta holandesa y que una subasta al segundo precio equivalía a una subasta ascendente) y comprobar que, en media, conduciría a los mismos ingresos esperados. A continuación realizamos un esquema intuitivo de la prueba (y utilizaremos como ejemplo ilustrativo el caso sencillo de la distribución uniforme).

En la subasta al segundo precio el ganador paga el precio contenido en la segunda puja más alta. En equilibrio cada uno presentaba una puja igual a su valoración. Por tanto, el precio pagado por el ganador igualará exactamente a la segunda valoración

---

[67] Aunque Vickrey utiliza algunos supuestos que le restan generalidad al resultado como puede ser el de la distribución uniforme en el intervalo [0,1].

[68] Se recuerda que se está suponiendo neutralidad al riesgo. Sin embargo, como las varianzas de precio son diferentes si el vendedor no fuera neutral al riesgo dejaría de ser indiferente "ex ante" entre los cuatro sistemas de subasta mencionados.

más alta. Si ordenamos las valoraciones empezando por la más alta (y las llamámos, v_1, v_2, ..., v_N) podremos expresar este resultado como que el precio pagado será igual a v_2. Como "ex ante" el vendedor desconoce las valoraciones de los compradores, el precio esperado será la esperanza de v_2, es decir $P^e=E[v_2]$. Este valor se podría calcular si las distribuciones de las que se derivan las valoraciones son conocidas (lo cual se asume en el modelo de referencia). Por ejemplo, si las distribuciones son uniformes en el intervalo $[V_{min}, V^{max}]$ el cálculo es muy sencillo a partir de la formula (3.15.). En esa fórmula N sería el número posible de realización (en nuestro caso el número de compradores). La fórmula nos calcula el valor esperado del k valor más alto entre N posibles realizaciones (es decir si estamos interesados en el mayor valor esperado cuando participan 4 compradores entonces k=1 y N=4).

(3.15.) $$V_{min}+[(N+1-k)/(N+1)]\ (V^{max} - V_{min})$$

Así, como para nuestros fines estamos interesados en calcular el segundo valor esperado más alto, es decir $E[v_2]$, entonces k=2 y nos quedaría la siguiente expresión en la que todos son valores conocidos,

$$P^e=E[v_2]= V_{min}+[(N-1)/(N+1)]\ (V^{max} - V_{min})$$

Por su parte en la subasta al primer precio el ganador pagaba un precio igual a su puja. En equilibrio presentaba sus pujas de acuerdo a la función $B(v_i)$ recogida en la ecuación (3.11.). Se puede mostrar que $B(v_i)$ es igual a la esperanza de la segunda valoración más alta pero condicionada a que v_i fuera la valoración más alta. Es decir, es como si los compradores, en el momento de presentar sus pujas, asumen que la suya es la valoración más alta (por tanto, para ellos es como si su valoración, v_i, fuera igual a v_1)[69] y, entonces, igualan su puja a la esperanza de la segunda valoración más alta dado la información de que disponen (que es su propia valoración). Por tanto, en la subasta al primer precio,

$$b_i=B(v_i) = E[v_2|v_i=v_1].$$

[69] Hay que tener en cuenta que en caso de error este supuesto no tiene coste ya que en caso de perder las ganancias son nulas.

Como ejemplo, mostramos como, utilizando la distribución uniforme, $B(v_i)$ es igual $E[v_2|v_i=v_1]$. Con esta distribución ya vimos como la función de puja (3.11.) se simplifica a la ecuación (3.13.) que volvemos a reproducir a continuación,

$$(3.13.) \qquad b_i = B(v_i)=[(N-1)/N]v_i+V_{min} /N$$

Por su parte, para calcular $E[v_2|v_i=v_1]$ aplicamos la formula (3.15.) con tres precisiones. La primera es que como el comprador asume que v_i es la puja más alta, entonces las demás se situarían por debajo de v_i con lo que el intervalo de la distribución uniforme se reduciría a $[V_{min} ,v_i)$. La segunda es que entre el número de realizaciones posibles no se incluiría la valoración del propio jugador i con lo que, en este caso, su número sería $N-1$. Y la tercera sería que, teniendo en cuenta lo anterior, estaríamos buscando la realización más alta (y por tanto, en la mencionada fórmula $k=1$), es decir, desde el punto de vista del comprador i la segunda valoración más alta sería la primera más alta entre las restantes. Teniendo en cuenta esta precisiones,

$$E[v_2|v_i=v_1] = V_{min} +[(N-1)/N](v_i- V_{min}),$$

que es igual $B(v_i)$ tal como se expresa en (3.13.) con lo que se muestra para el caso de la distribución uniforme que $B(v_i) = E[v_2|v_i=v_1]$.

Sin embargo, el vendedor no conoce las valoraciones y, desde su punto de vista, el precio esperado sería la esperanza de $B(v_1)$. A su vez es fácil mostrar que esta esperanza es precisamente la esperanza de v_2. (Es decir, $E[B(v_1)] = E[v_2|v_1=v_1] = E[v_2]$).

Con lo que hemos visto que tanto en la subasta al primer precio como en la subasta al segundo precio el precio esperado por el vendedor es, en ambos casos, el valor esperado de la segunda valoración más alta (es decir, $P^e= E[v_2]$). De esta manera, quedaría demostrado que, en media, los ingresos esperados por el vendedor serían los mismos en los cuatro tipos de subastas[70].

---

[70] Esto no implica que el resultado “ex post” sea el mismo. Así, para una v_1 y v_2 concretas, sólo por casualidad los precios obtenidos en una subasta al primer y segundo precio serán iguales, pero sin embargo, dadas las distribuciones de las valoraciones, las esperanzas del

Por otra parte, como cuanto mayor sea el número de competidores mayor será, en media, la segunda valoración más alta, esta sería otra manera de obtener el resultado anterior de que un incremento en el número de potenciales compradores provoca un incremento en el precio esperado[71]. También habíamos comentado que, en el caso de la subasta al primer precio, si el número de compradores tendía a infinito las pujas se aproximaban a las verdaderas valoraciones de los candidatos. Esto puede ser visto ahora como que cuanto mayor sea el número de competidores, desde el punto de vista de cada comprador, la esperanza de que la segunda valoración más alta (condicionada a que su valoración sea la más elevada, es decir $E[v_2|v_i=v_1]$) se encuentra cada vez más próxima a su propia valoración.

En este apartado, hasta el momento, sólo nos hemos referido a la igualdad en los ingresos esperados proporcionados por los cuatro tipos de subastas que más atención han recibido desde el mencionado trabajo de Vickrey (1961). Sin embargo, podríamos imaginar, al menos desde el punto de vista teórico, otros diseños diferentes de subastas (incluso cumpliendo los requisitos del "modelo de referencia") como subastas al tercer precio o subastas en las que todos los participantes paguen alguna cantidad o variantes de las subastas de referencia como, por ejemplo, establecer precios mínimos. La pregunta que nos podríamos hacer es sí cumpliendo con los supuestos del modelo de referencia sería posible incrementar los ingresos esperados que se obtienen con las cuatro subastas mencionadas. Al fin y al cabo el vendedor es un monopolista (estamos suponiendo que el bien que vende es único aunque puedan existir otros sustitutivos más o

precio si serán las mismas (es decir los precios esperados "ex ante" serán iguales). Desde este punto de vista, como ya se señaló, si el vendedor es neutral al riesgo sería indiferente ante ambos tipos de subastas.

[71] Por otro lado, aunque desde el punto de vista de los ingresos el vendedor sea indiferente es posible que desde otros puntos de vista no suceda lo mismo. Por ejemplo, la subasta al segundo precio presenta la ventaja de que el vendedor consigue que los participantes le revelen sus verdaderas preferencias, es decir sus verdaderas valoraciones. Además, esto se produce sin coste ya que los ingresos esperados serían los mismos. Sin embargo, el vendedor no podrá aprovecharse de este conocimiento porque se ha comprometido desde el principio a que adjudicará la empresa a un precio igual a la segunda puja más alta y, por lo tanto, una vez realizadas las ofertas no podría inicia una renegociación del precio con el ganador. Si los potenciales compradores supieran, o tuvieran la expectativa de que existen unas probabilidades positivas, que va a existir renegociación después de presentadas las ofertas, no actuaría de esa manera y cambiarían la cantidad incluida en su puja por otra que normalmente sería más baja y que ya no recogería sus preferencias (a partir del capítulo 5 analizaremos este tema).

menos cercanos) y podría elegir el sistema de venta que más se adecuara a sus intereses.

Con la literatura de las subastas óptimas se persigue precisamente obtener unos resultados con un mayor grado de generalización. Los trabajos de Riley y Samuelson (1981) y de Myerson (1981) se puede decir que inician esta tarea. Así, por ejemplo en el segundo de los trabajos citados se generaliza el Teorema del Ingreso Equivalente derivando el resultado siguiente:

- *El vendedor debe obtener los mismos ingresos esperados de cualquier mecanismo de subastas que tenga las siguientes dos propiedades, (1) que el objeto siempre se asigne al pujador con una valoración más alta*[72] *y (2) que todo comprador cuya valoración se situara en el nivel más bajo posible tendrá una utilidad esperada igual a cero.*

Con los supuestos del modelo de referencia, los cuatro tipos de subastas analizados cumplirían, si lo jugadores siguen las estrategias de equilibrio mencionadas, estos dos requisitos y, por lo tanto, los ingresos esperados para el comprador serían los mismos. Por tanto, esta formulación se puede entender como una generalización de la anterior.

Pero, además, la utilidad de este resultado se extiende para comparar los resultados de otros diseños de subastas. Por ejemplo, la subasta al tercer precio consistiría en una subasta similar a la subasta al primer precio con la diferencia de que el ganador pagaría el precio contenido en la tercera puja más alta. Este tipo subasta podemos decir que es una ficción teórica ya que, al menos en lo que alcanza nuestro conocimiento, no se ha utilizado en la práctica fuera de “laboratorios” en subastas en las que se venda una única unidad. En este tipo de subasta la función de puja de equilibrio, si asumimos distribuciones uniforme, sería[73],

$$b_i=B(v_i)=V_{min}+[(N-1)/(N-2)](v_i-V_{min})$$

[72] Siempre que este valor se sitúe por encima del precio de reserva del vendedor (que por simplificar la exposición hemos estado suponiendo implícitamente que se sitúa en cero).

[73] Véase, por ejemplo, Kagel (1995).

Con esta función de puja podemos observar que, en equilibrio, la subasta al tercer precio también cumple los dos requisitos anteriores y, por tanto, los ingresos esperados para el comprador serían los mismos que con los cuatro tipos de subastas mencionados. En concreto, al ser la función de puja creciente en v_i se cumpliría el requisito (1) ya que, en equilibrio, siempre obtendría el objeto el comprador con la máxima valoración. El segundo requisito también se cumple ya que se puede observar como con la función de puja anterior $B(V_{min})=V_{min}$, y, en consecuencia, la utilidad esperada del comprador con la valoración más baja de las posibles sería igual a cero[74]. Por tanto, a partir del teorema enunciado podríamos inferir que en la subasta al tercer precio el precio esperado para el vendedor también será la esperanza de la segunda valoración más alta (es decir, $P^e=E[v_2]$) al igual que ocurría en los otros tipos de subastas analizadas.

Hasta ahora únicamente hemos señalado que las subastas que cumplan unos requisitos proporcionan los mismos ingresos esperados al vendedor pero no hemos indicado nada sobre si existe alguna manera en la que el vendedor puede mejorar su resultado mediante otros mecanismos u otros diseños de subastas. El encontrar el diseño óptimo de las subastas (entendido en este contexto como aquel que maximiza los ingresos esperados) será el principal objetivo de la literatura de subastas óptimas. Este objetivo puede parecer demasiado tedioso debido al enorme número de diseños de mecanismos de venta que se podrían imaginar. Por ello, uno de los instrumentos utilizados ha sido el de limitar la búsqueda de subastas óptimas a aquellas que constituyan un *mecanismo directo de incentivos compatibles*[75]. La lógica de este

---

[74] En las subastas al tercer precio también podemos observar una serie de características de la función de puja de equilibrio que pueden tener un carácter anti-intuitivo. Por ejemplo, las pujas que presentan los compradores serán superiores a sus valoraciones ($B(v_i)>v_i$ $\forall v_i>V_{min}$) y, además, las pujas son una función negativa del número de competidores (es decir, para una misma valoración la puja será más pequeña cuantos mas compradores se presenten). Esto resalta la importancia que tienen las normas de las subastas para el comportamiento de los compradores, es decir las normas "importan" (este último comentario, que parece una obviedad, no ha sido tenido en cuenta en alguna ocasión por alguno de los bancos de inversión que se presentan a los concursos para privatizar empresas y, así, en su análisis de los ingresos para el vendedor sobre diferentes subasta alternativas utilizan el supuesto de que el comportamiento de los compradores iba a ser el mismo).

[75] En nuestro caso entendemos por "mecanismo" cualquier proceso que tome como inputs las pujas de los compradores y produzca como output la decisión sobre a quien se asigna el bien y que pagos serán requeridos a todos los participantes. En un "mecanismo directo" a cada pujador simplemente se le pide que revele su valoración sobre el bien (naturalmente podría no decir la verdad). Y un mecanismo directo es de "incentivos compatibles" si está diseñado de tal

comportamiento reside en el llamado "*Principio de Revelación*" que establece que para cualquier mecanismo existe otro mecanismo que es directo y de incentivos compatibles que proporciona el mismo resultado[76]. Utilizando este principio, el mecanismo de venta óptimo se encontraría como solución a un problema de programación matemática con dos tipos de restricciones: la que establece que el comprador no estaría mejor si decide no participar (restricción de racionalidad individual) y la que establece que el comprador no podría mejorar no revelando sus verdaderas preferencias (restricción de incentivos compatibles).

• De esta manera, se puede demostrar que *en el modelo de referencia, los cuatro tipos de subastas básicas son un mecanismo de venta óptimo (desde el punto de vista del vendedor, es decir maximizan los ingresos esperados) siempre que sean complementadas por la imposición de un precio mínimo calculado óptimamente*.

Este resultado es bastante interesante debido a que para maximizar sus ingresos un vendedor no tendría que recurrir a diseñar sistemas complejos ya que con las subastas sencillas bastaría para obtener su propósito. Así, McAfee y McMillan (1987a pp. 714) señalan que:

> "Este es un resultado poderoso. Ninguna restricción se ha impuesto en los tipos de políticas que el vendedor podría haber utilizado. El vendedor, por ejemplo, podría establecer diferentes rondas para las pujas, o establecer un pago por participar, o implantar subsidios a los compradores, o requerir que los perdedores paguen una cantidad en función de sus pujas, o permitir sólo la presentación de pujas durante un tiempo limitado. Pero ninguna de estas estrategias más complicadas incrementaría el precio esperado: Las formas simples de subastas son las mejores entre un enorme conjunto de mecanismos de venta posibles".

Habría que recordar que para alcanzar este resultado estamos suponiendo que el vendedor tiene capacidad de auto-compromiso lo que implica que los compradores no tienen dudas sobre el posible incumplimiento "ex post" de las normas. Así, por ejemplo, en

---

manera que los participante encuentran que la mejor opción es la de revelar la verdad (es decir, va en su propio interés informar sobre sus valoraciones reales).

[76] De una manera más general este principio establece que cualquier Equilibrio Bayesiano de Nash en juego con información incompleta puede representarse mediante un mecanismo directo de incentivos compatibles.

las subastas al primer precio los compradores asignarían una probabilidad nula a la posibilidad de que el vendedor pueda poner en práctica, con posterioridad a la presentación de las pujas, una ronda de mejora de las ofertas. Si esto no fuera así evidentemente los compradores modificarían sus normas de puja y ya no se alcanzaría el resultado anterior.

También habría que señalar que para que las subastas simples resulten mecanismos óptimos de venta deben ir acompañadas de una adecuada política de fijación de precios mínimos, sobre la que, hasta ahora, no habíamos realizado comentarios. Esta política óptima implica que para maximizar su ingreso esperado el vendedor tendría que establecer un precio mínimo (r) superior a su precio de reserva[77], al que llamaremos v_0. De una manera intuitiva, a la hora de fijar el precio mínimo el vendedor (que actúa como un monopolista) se enfrenta a un dilema (o “trade-off”). Si nos referimos a una subasta al primer precio, las ventajas del precio mínimo se obtendrían en aquellos casos en los que (en su ausencia) la puja del comprador con valoración más alta se sitúe por debajo del precio mínimo a establecer, al mismo tiempo que su valoración se situara por encima de dicho precio mínimo. En estos casos, el precio mínimo generaría un incremento del ingreso ya que se fuerza al comprador a ofrecer el precio mínimo. Por el contrario, las desventajas se presentan en aquellos casos en que la valoración más alta entre los compradores se situara por debajo del precio mínimo pero por encima del precio de reserva del vendedor. En este último caso la transacción se dejaría de realizar aun siendo beneficiosa para ambas partes (y, por tanto, dejando de ejecutar una acción que hubiera dado lugar a una mejora paretiana).

Por tanto, en estos casos, la política de fijación de precios mínimos (con la que, en media, se conseguiría elevar el precio obtenido por el vendedor) provoca que el resultado de la subasta sería ineficiente. Este resultado no es extrañar en el contexto de la teoría del monopolio (con la que la Teoría de Subastas presenta bastantes similitudes como se comentará con posterioridad) en la que, es conocido, que el monopolista para maximizar sus beneficios encuentra provechoso distorsionar el resultado alejándolo de un óptimo paretiano.

---

[77] El precio de reserva del vendedor equivaldría a la valoración del vendedor, es decir, el precio de venta mínimo con el que no obtendría una utilidad negativa de la transacción.

La política de precios mínimos exige también que el vendedor tenga poder de auto-compromiso ya que si no fuera así esta política sería inconsistente temporalmente y carecería de credibilidad (sobre este punto recuérdese lo dicho en la nota al pie número 50 en la página 52 que es especialmente aplicable al caso de la fijación de los precios mínimos)[78].

Este apartado trasmite la idea que diseñar una subasta puede ser una tarea relativamente sencilla debido a la optimalidad y equivalencia de los diseños de subastas más simples. (Desde este punto, algún autor ha señalado que el "trabajo" de los teóricos de subastas parecería limitado). Sin embargo, en el próximo capítulo analizaremos los cambios que se producen cuando se van levantando los supuestos básicos del "modelo de referencia". La situación con la que nos encontraremos casi es la opuesta a la comentada, debido a la gran cantidad de matizaciones que cada contexto introduce. En concreto, los dos resultados comentados (la equivalencia y la optimalidad de las subastas básicas), en general, no se sostienen fuera de los supuestos mencionados. Es decir, nos encontraremos situaciones en que con los diferentes tipos de subastas los ingresos esperados serán diferentes y en que la subasta óptima ya no se correspondería con ninguno de los cuatro sistemas mencionados[79].

[78] Cuando no existe esa credibilidad el resultado práctico suele ser que los compradores tengan la expectativa de que el vendedor, en caso de no vender, repita la subasta con un precio de salida inferior. En este caso, en algunas circunstancias les puede convenir no presentar pujas por encima del precio mínimo aun cuando su valoración sea superior.

[79] En ocasiones la subasta óptima se instrumentará mediante complejos pagos y subvenciones a los diferentes compradores en función de las pujas presentadas que, prácticamente, las descartan como posibilidad real de aplicación.

APÉNDICE 3.1.

En este apéndice vamos a obtener la función de puja de equilibrio cuando existen únicamente dos potenciales compradores basándose en el método que más tarde utilizaremos y que difiere ligeramente del empleado más arriba. Los supuestos serán los mismos que los utilizados en el llamado "modelo de referencia" descrito en el apartado 3.3.-.

La razón de este apéndice es servir de base al modelo que se desarrollará a partir del capítulo 5 en el que supondremos que un vendedor puede realizar varias ventas. Para aislar el efecto que se pueda derivar de que en las sucesivas ventas el número de compradores pueda ser muy diferente asumiremos que el número de compradores que se presentan en todas ellas es el mismo y, en concreto, este número lo fijaremos en dos.

Partimos de la ecuación (3.7.) que reproducimos a continuación, y que expresa el problema al que se enfrentaba un comprador genérico i para calcular su puja óptima.

(3.7.) $$\underset{b_i}{Max}\ U_i^e = (v_i - b_i)\, F\,[\,B^{-1}(b_i)\,]^{\,N-1}$$

Recordamos que, como se argumentó en el apartado 3.3.2.-d) , la expresión $F[B^{-1}(b_i)\,]^{\,N-1}$ era equivalente a la probabilidad de que el jugador i ganara la subasta ($Prob\,(b_i > b_j)$) dada la conjetura de que todos los demás competidores presentan sus pujas de acuerdo a la función de puja arbitraria $B(.)$.

Si en esta ecuación introducimos el supuesto de que N=2 y sustituimos la función de distribución genérica $F(.)$ por la función de distribución uniforme, el problema nos quedaría

$$\underset{b_i}{Max} \quad U_i^e = (v_i - b_i)\,[(B^{-1}(b_i) - V_{min})/(V^{max} - V_{min})]$$

La condición de primer orden ($\partial U_i^e / \partial b_i = 0$) da lugar a la siguiente ecuación,

(3.16.) $$f.o.c. \quad [(B^{-1}(b_i) - V_{min})/(V^{max} - V_{min})] = (v_i - b_i)\,[(dB^{-1}(b_i)/db_i)/(V^{max} - V_{min})]$$

Utilizando la regla de la derivada de la función inversa, $dB^{-1}(b_i)/db_i = 1/B'(v_i)$, (donde $B'(v_i) = dB(v_i)/dv_i$) obtenemos que,

$$[(B^{-1}(b_i) - V_{min})/(V^{max} - V_{min})] = (v_i - b_i)\,[1/(V^{max} - V_{min})\,B'(v_i)]$$

Como argumentamos en el apartado 3.3.2.-d) al imponer el requisito de Nash (que implica que la función de puja $B(v_j)$ usada por los rivales del jugador i sea consistente con el comportamiento racional de estos), unido al supuesto de simetría, tenemos que la función de puja de equilibrio del jugador i tiene que coincidir con $B(v_i)$. Por tanto, $b_i = B(v_i)$, y sustituyendo este resultado en la ecuación anterior,

$$[(B^{-1}(B(v_i)) - V_{min})/(V^{max} - V_{min})] = (v_i - B(v_i))\,[1/(V^{max} - V_{min})\,B'(v_i)]$$

$$[(v_i - V_{min})/(V^{max} - V_{min})] = [(v_i - B(v_i)) / (V^{max} - V_{min})\,B'(v_i)]$$

Multiplicando por $(V^{max} - V_{min})B'(v_i)$ y operando obtendríamos la siguiente ecuación,

(3.17.) $$B'(v_i) - B(v_i)/(V_{min} - v_i) = -v_i / (V_{min} - v_i)$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden del tipo $dy/dt + u(t)\,y = w(t)$; cuya solución viene dada por $y(t) = e^{-\int u dt}\left(A + \int w e^{\int u dt} dt\right)$. En (3.17.) $y = B(v_i)$, $t = v_i$, $u(t) = -1/(V_{min} - v_i)$ y $w(t) = -v_i / (V_{min} - v_i)$. Por tanto,

$$B(v_i) = e^{-\int \frac{-1}{\underline{V}-v_i} dv_i} \left(A + \int \frac{-v_i}{\underline{V}-v_i} e^{\int \frac{-1}{\underline{V}-v_i} dv_i} dv_i \right)$$

$$B(v_i) = [A + \int (-v_i\ (v_i - V_{min}))/\ (V_{min} - v_i) dv_i\ ]/\ (v_i - V_{min})$$

(3.18.) $$B(v_i) = (A + v_i^2/2)/\ (v_i - V_{min}) = A/(v_i - V_{min}) - (v_i^2/2(V_{min} - v_i))$$

Para obtener la función de puja buscada tenemos que determinar el valor de la constante de la integración A, para lo cual primero la despejamos en (3.18.),

$$A = [-(2B(v_i)(V_{min} - v_i) + v_i^2]/2$$

y a continuación utilizamos la condición límite $B(V_{min})=V_{min}$ (que en el apartado 3.3.2.-d) habíamos visto que era equivalente a que la utilidad esperada de participar en la subasta del tipo de comprador con la valoración más baja posible, V_{min}, fuera igual a cero). Introduciendo esta condición ($B(V_{min})=V_{min}$) en la ecuación anterior, conseguimos determinar el valor de la constante, $A= -\underline{V}^2/2$. Y, finalmente, sustituyendo este valor de A en (3.18.) y operando obtenemos la siguiente función de puja, que coincide con la que habíamos calculado en (3.14.)

(3.19.) $$\boxed{b_i = B(v_i) = (v_i + V_{min})/2}$$

CAPÍTULO 4.- VARIACIONES SOBRE EL MODELO DE REFERENCIA Y SUBASTAS COMO JUEGOS DINÁMICOS.

4.1.- INTRODUCCIÓN Y ASPECTOS GENERALES

El capítulo 3 puede trasmitir la idea que diseñar una sistema de venta para una empresa puede ser una tarea relativamente sencilla debido a la optimalidad y equivalencia (desde el punto de vista del vendedor) de los tipos de subastas básicos. Sin embargo, ya hemos comentado que para que estos resultados se mantengan tenemos que asumir los supuestos del modelo de referencia.

Cuando relajamos estos supuestos nos vamos a encontrar con que el Teorema del Ingreso Equivalente, en general, no se mantiene. Esto provoca que en unos contextos unos tipos de subastas serán más ventajosos que otros.

La relajación y/o sustitución de cada uno de los supuestos básicos del modelo de referencia ha dado lugar a una extensa literatura que analiza, entre otros aspectos, los cambios experimentados en el comportamiento de los compradores, la ordenación de los tipos de subastas básicas según sus ingresos esperados y cual sería, en cada caso, el diseño óptimo.

En el apartado 4.2. realizaremos una revisión de las principales líneas que ha seguido la literatura de subastas derivado del levantando de algunos de los supuestos del modelo de referencia. Dada su extensión seremos selectivos.

En el apartado 4.3. se tratarán algunas de las especificidades de las ventas de empresas y su relación con la literatura de subastas. Por ejemplo, se aborda la racionalidad de la existencia de fases de presentación de ofertas no vinculantes o del descarte de candidatos que acceden a la fase de ofertas vinculantes.

El apartado 4.4. aborda un aspecto especialmente aplicable a las privatizaciones: las subastas multidimensionales o concursos en las que al vendedor le interesan otros elementos de la oferta de los candidatos además del precio.

Hasta ese apartado habremos considerado a las subastas como un juego estático en las que existe una única fase de decisión y en las que el vendedor realiza una única venta. En los apartado 4.5 y 4.6 abordaremos la "dinamización" de las subastas. En el 4.5. se introduce una fase adicional de decisión por parte del vendedor. No obstante en este apartado concluiremos que esa nueva fase se encuentra implícita en los modelos "estáticos" de subastas y que, en todo caso, no afectaría al comportamiento de los compradores cuando presentan sus pujas. Su utilidad hay que encontrarla en que supone un primer escalón para construir el modelo que desarrollamos a partir del próximo capítulo.

Por último, en el apartado 4.6. la dinamización no viene por introducir varias fases de decisión en la misma venta sino por analizar procesos en los que se realizan varias ventas de una manera sucesiva. En este apartado realizamos una revisión de la literatura de subastas repetidas analizando las características de los modelos propuestos en este campo. Su utilidad servirá para destacar las diferencias y coincidencias con el modelo contenido en los capítulos 5 al 7, aportación principal de esta tesis.

4.2.- VARIACIONES SOBRE EL MODELO DE REFERENCIA

4.2.1.- Aversión al riesgo

En este subapartado levantamos el supuesto de que los compradores son neutrales al riesgo para asumir que tienen aversión al riesgo. Al mismo tiempo mantenemos el resto de los supuestos del modelo de referencia.

En lo que se refiere a la subasta inglesa o ascendente este cambio de supuesto no afectaría a las estrategias de equilibrio de los compradores. En este caso los compradores seguirían realizando pujas mientras que el precio no superara su valoración y se retirarían en ese momento. Por tanto, el resultado que se obtiene con la subasta ascendente es independiente del supuesto que hagamos sobre la actitud de los compradores ante el riesgo. Esto también se puede mantener para la subasta al segundo precio en la que los compradores adversos al riesgo tampoco modificarían sus estrategias descritas en el capítulo anterior y, por tanto, seguirían presentando pujas iguales a su valoración (los mismos argumentos esgrimidos en el capítulo anterior se aplicarían igualmente a este caso). Por tanto, los ingresos esperados tanto de la subasta ascendente como de la subasta al segundo precio no se modifican cuando los compradores son adversos al riesgo.

Sin embargo, la situación es diferente cuando nos referimos a la subasta al primer precio. Hay que decir que se mantiene la equivalencia estratégica con la subasta holandesa por lo que el razonamiento que realizamos a continuación se aplicaría a estos dos tipos de subastas.

Recordamos que con la subasta al primer precio los compradores se enfrentaban a un dilema en el momento de presentar sus pujas: pujas mayores suponen un menor excedente en caso de ganar pero incrementan las posibilidades de ganar. La puja óptima resultaba de la resolución del problema de maximización de la utilidad esperada de los compradores.

Cuando los compradores son adversos al riesgo la esencia de este planteamiento no cambia y la única modificación, en relación con el problema que se plantea en el caso de neutralidad al riesgo, es la diferente forma de las funciones de utilidad que de ser lineales pasan a ser cóncavas[80]. Esto supone que se altera la puja óptima (la que maximiza la utilidad esperada de los compradores) y se puede demostrar que esta nueva puja será superior que la que se obtenía cuando los compradores son neutrales al riesgo. Este resultado ha sido establecido para algunos casos particulares, por ejemplo, en Mathews (1979), Holt (1980), Harris and Ravis (1981) y Riley and Samuelson (1981), y de una forma más general en Maskin and Riley (1984).

De una manera intuitiva podemos observar que en caso de perder el comprador obtiene una utilidad de cero mientras que esta es positiva en caso de ganar. Así, los compradores adversos al riesgo cuando se enfrentan al dilema antes mencionado van a ponderar más (con relación al caso en que son neutrales al riesgo) las probabilidades de ganar que el excedente que obtienen en caso de ganar, es decir, en equilibrio valorarán relativamente menos el obtener una ganancia mayor en detrimento de tener más probabilidades de ganar. Con este comportamiento estarían intentando “alejarse” del riesgo de resultar perdedores. En equilibrio, aunque presentas pujas más agresivas, no lograrían incrementar las probabilidades de ganar. En todo caso, la aversión al riesgo de los compradores jugaría a favor del vendedor ya que aumentarían los ingresos esperados.

Como ya hemos comentado que los ingresos esperados en las subastas ascendentes no varían podemos deducir que, *cuando los compradores presentan aversión al riesgo, los ingresos esperados de las subastas al primer precio serían superiores que los de las subastas ascendentes*. Adicionalmente, en este contexto se sigue manteniendo la equivalencia por una parte, entre la subasta al primer precio y la subasta holandesa, y, por otra, entre la subasta ascendente y la subasta al segundo precio. Por tanto, podríamos ordenar los cuatro tipos de subastas básicos, según las preferencias del vendedor, de la siguiente manera: primero situaríamos a las subastas al

[80] Suponemos que los compradores tiene funciones de utilidad esperada del tipo Von-Neumann Morgenstern.

primer precio junto con la subasta holandesa y después a la subasta inglesa igualada con la subasta al segundo precio.

Para llegar a este resultado se ha supuesto que el vendedor continua siendo neutral al riesgo. Si asumimos que el vendedor, al igual que los compradores, también es adverso al riesgo entonces sus preferencias por la subasta al primer precio se intensifican aun más — Maskin y Riley (1984) —.

En todo caso esta ordenación de las subastas se ha realizado en función de los intereses del vendedor. Parecería que si tenemos en cuenta el punto de vista de los compradores esta ordenación sería la opuesta. Sin embargo, esta comparación no es tan directa debido a que cuando son adversos al riesgo no sólo importaría el pago esperado sino también su varianza. Debido a la equivalencia comentada nos podemos centrar únicamente en las subastas al primer y segundo precio. Así, con la subasta al segundo precio la cantidad que los compradores esperan pagar, según lo comentado en los párrafos anteriores, es menor que con la subasta al primer precio. Sin embargo, desde el punto de vista de cada comprador la varianza del pago esperado es superior en la subasta al segundo precio que en las subastas al primer precio (Vickrey, 1961 y Maskin Riley, 1984). Por tanto, la ordenación de las subastas desde el punto de vista de las preferencias de los compradores no es tan clara, ya que habría tener en cuenta los dos efectos que actúan en sentido contrario, y va a depender del tipo de aversión al riesgo que presentan los compradores. Así, Matthews (1987) establece que cuando los compradores presentan una aversión al riesgo absoluta constante van a ser indiferentes entre ambos tipos de subastas, pero cuando la aversión al riesgo absoluta es creciente (decreciente) entonces prefieren las subastas al primer (segundo) precio. Por tanto, se da la paradoja de que cuando la aversión al riesgo en los compradores es creciente tanto los compradores como el vendedor preferirían el mismo tipo de subasta.

Adicionalmente, también se ha analizado como sería la subasta óptima en presencia de aversión al riesgo de los compradores. El resultado que se obtiene es que ninguna de las cuatro subastas básicas mencionadas lograr cumplir con los requisitos para ser una subasta óptima. Por tanto, aunque hemos visto que la subasta al primer precio logra un aumento en los ingresos esperados no consigue maximizarlos.

La subasta óptima, en este caso, sería algo compleja de instrumentar ya que, a diferencia de las subastas básicas, implicará un sistema de pagos y subsidios entre todos los potenciales compradores. Es decir, los diferentes participantes tendrían que realizar pagos (que podría ser negativos) aunque no ganaran la subasta. Asimismo, la cantidad a abonar por el ganador no tendría que coincidir con la puja presentada. En el diseño de la subasta óptima se tiene que buscar el equilibrio entre dos principios en conflicto (un problema muy común que nos encontramos en las relaciones de Agencia):

a) Por un lado, como hemos visto que la aversión al riesgo de los compradores juega a favor del vendedor, en principio, se podría pensar que los ingresos esperados del vendedor podrían aumentar si se logra incrementar el riesgo al que se enfrentan los compradores. Esto se podría realizar introduciendo pagos (positivos o negativos) aleatorios.

b) Sin embargo, por otro lado, en una distribución eficiente de los riesgos, la parte neutral al riesgo debe proveer de un seguro a la parte adversa al riesgo — véase, por ejemplo, Kreps (1990a) —. Es decir, el riesgo debe recaer sobre los agentes neutrales al riesgo, que en nuestro caso sería el vendedor. Por tanto, de este principio se deriva que el vendedor debería plantear una subasta en la que los compradores se encuentren plenamente asegurados lo que supone que estos serían indiferentes entre ganar y perder la subasta.

Como estas dos fuerzas están actuando conjuntamente, y sus implicaciones son contrarias, las subastas óptimas no van a incluir ninguna de estas dos prescripciones. Así, *las subastas óptimas se van a caracterizar por no incluir pagos aleatorios y por no incluir un seguro completo por parte del vendedor a los compradores* — Maskin y Riley (1984) — Por tanto, en una subasta óptima los pagos de los diferentes participantes estarán, de una manera determinista, en función de las pujas presentadas y los compradores se seguirán enfrentando al riesgo de no ganar la subasta, es decir, los compradores estarán estrictamente mejor en caso de ganar que en caso de perder.

En el trabajo citado anteriormente se demuestra que una subasta en la que el vendedor provee de un seguro total a los compradores, obtendría unos ingresos esperados que coinciden con la subasta al segundo precio por lo que no sólo no sería óptima sino que incluso obtendría unos resultados inferiores que la subasta al primer precio.

Pero, siguiendo el trabajo de Maskin y Riley (1984), podemos deducir más características importantes que debería incluir una subasta óptima bajo aversión al riesgo de los compradores. Así, el vendedor tendría que cubrir parcialmente el riesgo de los compradores con valoraciones altas que no resulten ganadores y penalizar a aquellos con valoraciones bajas. Si asumimos que las funciones de puja son crecientes en las valoraciones, esto implica que los compradores que presenten pujas "bajas" tendrá que realizar pagos[81] y los que pujen alto recibirán una compensación (incluso aunque no ganen). En cualquier caso, como se ha dicho, a pesar de esta compensación seguirían prefiriendo ganar a no hacerlo por lo que el seguro que ofrece el vendedor nunca es completo[82] .

La complejidad de las subastas óptimas en presencia de compradores adversos al riesgo, que suponen la realización de pagos por parte de unos compradores y subsidios a otros, las hacen difíciles de utilizar en la práctica. En Mathews (1983) se recoge que cuando la aversión al riesgo es reducida la subasta óptima se puede aproximar cobrando una tarifa por participar que sea decreciente con la puja presentada. McAfee y McMillan (1987a) aunque reconocen que este tipo de subasta no se utiliza citan algunos prácticas que podrían interpretarse como una aproximación a las subastas óptimas. Así, comentan que no es infrecuente el que existan tarifas por participar en una subasta y, aunque estas no suelen depender de la puja, en ocasiones se complementan con una recompensa de algún tipo a las pujas más altas entre las perdedoras (por ejemplo, con un trato favorable en otros contratos, o con un reconocimiento a los finalistas, etc).

[81] Estos pagos tendrían que permitir que se cumpla la restricción de participación de los candidatos, es decir, tendría que permitir que a pesar de ellos la utilidad esperada de participar fuera superior que la utilidad de quedarse fuera del proceso.

[82] La única excepción sería un posible comprador que posea la valoración más alta que se pueda tener, en cuyo caso el seguro en una subasta óptima sería total.

4.2.2.- Modelo con Valor Común y Modelo General

Uno de los supuestos cruciales del modelo de referencia era el de valoraciones independientes y privadas. Esto implica que las diferencias en las valoraciones se deben a que los compradores tienen preferencias distintas (en el contexto de la venta de empresas, entre los elementos que podrían explicar estas diferentes preferencias podríamos apuntar: las funciones tecnológicas utilizadas por los compradores, las capacidades técnicas y de gestión, sinergias específicas para cada comprador, diferentes situaciones en el mercado en que se desenvuelve la empresa en venta, etc). Este supuesto también implica que estas preferencias no se encuentran correlacionadas. La relajación de este supuesto ha dado lugar a uno de los campos más activos en la literatura de subastas.

El caso opuesto al modelo de valoraciones privadas independientes sería el llamado modelo de valoraciones comunes (‘common values model’). En estos modelos todos los compradores valoran igual el bien subastado aunque esta valoración es “ex ante” desconocida. Los compradores sólo conocen este valor una vez que han adquirido el bien (en el caso de las empresas, cuando han accedido al control de la gestión). En este modelo antes de presentar las pujas cada comprador recibe una “señal” que está correlacionada con el valor de la empresa en venta. Esta señal será diferente para cada comprador por lo que cada uno tiene una información diferente[83].

Estos modelos se empiezan a aplicar a las subastas de derechos de exploración petrolíferas, que se han utilizado ampliamente sobre todo en lo que se refiere a la plataforma continental de Estados Unidos en el Golfo de México. En este caso, “ex ante” cada empresa puede tener sus propias exploraciones geológicas (la señal) pero ninguna sabe si realmente existe petróleo y, en su caso, su cantidad y sus condiciones de extracción.

[83] Normalmente se presupone que el vendedor suministra la misma información a todos los compradores por lo que esta señal viene de fuentes diferentes que la del vendedor – por ejemplo de investigaciones propias, de relaciones previas que haya podido mantener con la empresa en venta, etc. —.

En los contextos de valoraciones comunes es cuando surge el conocido efecto de la “maldición del ganador”. En una primera aproximación, se puede explicar este fenómeno de la siguiente manera. Dada su señal, cada comprador realiza una *estimación* de la valoración de la empresa, en función de la cual calculará su puja óptima. Esto supone que, a diferencia del modelo de valoraciones privadas, su puja no se basa en su valoración sino en su estimación de la “verdadera” valoración. Si los compradores son simétricos, el ganador será el que haya realizado la estimación más alta, lo cual podría constituir una mala noticia para él ya que implica que todos los demás han estimado el valor de la empresa en una cantidad menor. Esto podría llevarle a pagar un porcentaje de la valoración superior a lo que había estimado e incluso a pagar un precio superior a lo que realmente vale.

Diversos trabajos — entre los que se encuentra el primero y muy conocido, Capen y otros (1971) — encuentran que las tasas de retorno que obtenían las empresas petroleras en la adquisición de derechos de exploración a través de las subastas eran muy reducidas y basaban la explicación de este hecho en que los pujadores no eran capaces de evitar el efecto de la maldición del ganador. Otros trabajos empíricos también han defendido la existencia de este efecto en otros mercados en los que se celebran subastas como, por ejemplo, en el mercado de jugadores de béisbol (Cassing y Douglas, 1980) o en los procesos para adjudicar contratos que tengan un elemento común de incertidumbre sobre aspectos tecnológicos (Quirk y Terasawa, 1984). Estos trabajos suelen basarse en la literatura de puja competitivas o de competidores no estratégicos resumida en el apartado 3.1.-.

Sin embargo, el hecho de que los pujadores se vean sistemáticamente sorprendidos negativamente por el resultado obtenido en estas subastas violaría las nociones básicas de racionalidad económica. De esta manera, con posterioridad al trabajo de Capen y otros (1971), otros trabajos empíricos conducen a resultados mixtos. Por ejemplo, Mead y otros (1983) encuentran que las tasas de retorno de los derechos de exploración que obtienen las empresas petrolíferas mediante subasta después de impuestos son prácticamente iguales que las tasas de retorno medio que consiguen las empresas industriales estadounidenses[84]. Otros trabajos como Gilley y Karels (1981)

[84] Incluso este resultado se interpreta de manera diferente. Para algunos autores, los derechos de exploración deberían llevar incorporada una prima de riesgo por la naturaleza de la

encuentran que los datos de los trabajos empíricos anteriores, que encontraban bajas tasas de retorno, están sesgados en las muestras debido a la mayor participación que se produce en los campos de exploración a priori más atractivos. Así, una vez que se adoptan las medidas para eliminarlos se encuentra evidencia a favor de que los pujadores toman medidas para evitar el efecto de la maldición del ganador. En todo caso la evidencia no es clara en este punto y los trabajos experimentales – véase por ejemplo, Kagel (1995) donde se revisa esta literatura y se hace referencia al resultado obtenido en Kagel y Levine (1986) — parecen mostrar que los pujadores (sobre todo los inexpertos) no lograrían evitar caer en la maldición del ganador.

Cuando aplicamos la Teoría de Juegos podemos observar como actuarían, teóricamente, los pujadores racionales para no ser víctimas de la maldición del ganador y evitar, por tanto, obtener sistemáticamente tasas de retorno inferiores a las "normales". Wilson (1977) es el primero en aplicar este enfoque a una subasta al primer precio con valoraciones comunes. De una manera intuitiva, en estos modelos los licitadores en el momento de presentar sus pujas tendrían que tener en cuenta que si ganan es debido a que su estimación de la valoración es la más elevada. El tomar en consideración este hecho origina una revisión a la baja de su estimación de valor de la empresa, lo que supondría adoptar una actitud más prudente presentando pujas más reducidas.

Formalmente, este comportamiento más conservador deriva del hecho de que la estimación del verdadero valor del bien es mayor cuando sólo se basa en la propia señal que cuando además también se tiene en cuenta que esta señal será la mayor entre las recibidas por todos los candidatos. Como en el caso de perder, su utilidad siempre va a ser cero, los compradores racionales, en el momento de presentar sus pujas, asumen que su señal es la más elevada. El resultado es que la estimación del valor (v) cuando se asume este último supuesto es menor que cuando sólo se tiene en cuenta la propia señal (x_i). Esto lo podemos expresar como que $E(v|x_i)\geq E(v|x_i\ ,\ x_i>x_j\ \forall j\neq i)$; es decir, la esperanza de v condicionado a x_i es mayor o igual que la esperanza de v condicionada a x_i y además condicionada a que x_i sea la mayor señal) [85].

actividad por lo que tasas de retorno similares sigue siendo evidencia favorable a que los pujadores no evitarían la maldición del ganador. Otros autores no opinan igual, ya que las grandes compañías de petróleo con acceso a los mercados de capitales y con una cartera de exploración diversificada no tendrían que esperarse una prima de riesgo por estas actividades.

[85] Para entender esto mejor podemos usar un sencillo ejemplo. Supongamos que

Adicionalmente, la intensidad de este efecto es creciente con el número de competidores. Por tanto, en los modelos con valoraciones comunes, según se incrementa el número de competidores se van a producir simultáneamente dos efectos que actúan en sentido contrario sobre las pujas: por un lado, se mantiene el efecto competitivo existente en el modelo con valoraciones privadas según el cual las pujas se aproximan a la cantidad máxima que están dispuestos a pagar los diferentes competidores pero, por otro lado, al mismo tiempo disminuye la estimación de valoración de la compañía (y, por tanto, la cantidad máxima que estarían dispuestos a pagar es menor). Así, puede ocurrir que a partir de un nivel de competidores suficientemente elevado un incremento en su número provoque pujas menores debido a que el efecto derivado de la maldición del ganador domina al que hemos llamado efecto competitivo.

A la vista de este resultado, uno de los objetivos del vendedor, en estos contextos, sería intentar reducir el efecto de la maldición del ganador entre los potenciales

---

existen tres potenciales compradores y que cada uno recibe una señal x_i sobre el verdadero valor v. Esta señal se distribuye uniformemente en el intervalo [0,10] y v sería igual a la suma de las señales recibidas por cada uno de los jugadores. Si un jugador no conoce ninguna señal podría realizar la estimación de v calculando su esperanza, $E[v]=E[x_1]+E[x_2]+E[x_3]$. Como la esperanza de una variable distribuida uniformemente es su punto medio $E[x_i]=5$ y por tanto $E[v]=5+5+5=\mathbf{15}$.

Sin embargo, un comprador conoce su propia señal y, por tanto, podría realizar una estimación de v con mayor información. Supongamos que el jugado 1 tiene una señal $x_1=4$. Si cuando va a calcular su puja no tiene en cuenta el efecto de la maldición del ganador, entonces en su estimación de v tendrá en cuenta sólo su propia señal x_1. De esta manera, la única diferencia con el cálculo anterior es que introducirá su propia señal en el cálculo de la esperanza de v. Así, la esperanza de v condicionada a conocer x_1 sería: $E[v|x_1]=x_1+E[x_2]+E[x_3]=4+5+5=\mathbf{14}$. Y este será el mejor cálculo que puede realizar sobre el valor de v dada su información. El problema se plantea debido a que si pierde es indiferente ante el cálculo que haya realizado ya que siempre obtendrá una utilidad de cero. Mientras que este cálculo sólo influiría en su utilidad en caso de ganar y en este caso, el jugador 1 habría calculado su puja sobreestimando claramente el valor de la empresa en venta.

Por tanto, a la hora de realizar su estimación tendría que asumir que va a resultar ganador de la subasta y utilizar la información adicional que se deriva de este hecho. Esta información adicional se refiere a que la estimación de las señales del resto de competidores (dado el supuesto de simetría) tendrían, en este caso, que ser inferiores a la señal del jugador 1. Por tanto, calcularía la esperanza de las señales de sus competidores condicionadas a ser inferiores a x_1. Como x_1 hemos supuesto que era igual a 4 las esperanzas condicionadas de las señales de los otros jugadores serían la media entre 4 y 0, y $E[x_2|x_1>x_2]=E[x_3|x_1>x_3]=2$.

Finalmente con estos valores podríamos calcular la esperanza de v condicionado tanto a la señal x_1 como a que x_1 es la mayor señal. Así, $E[v|x_1, x_1>x_j, \text{j}=2,3]=x_1+E[x_2|x_1>x_2]+E[x_3|x_1>x_3]=4+2+2=\mathbf{8}$.

Por tanto, en este sencillo ejemplo se puede observar la sobreestimación de v que realizaría el comprador 1 en el caso de no tener en cuenta el efecto de la maldición del ganador (en concreto, estimaría el valor del bien subastado en 14 cuando si se tuviera en cuenta este efecto esta estimación la situaría en 8). Por tanto, la sobreestimación de v daría lugar a unas pujas más elevadas del nivel óptimo que maximiza la utilidad esperada del comprador.

compradores para suavizar su reacción defensiva consistente en presentar pujas menores. Para este objetivo, veremos que la subasta ascendente presenta ventajas frente al resto de los tipos de subasta.

En la venta de empresas (y, aun en el caso de que el vendedor ofrezca una información amplia y exhaustiva) elementos tales como la capacitación y la motivación de la mano de obra, el nivel de relaciones con los clientes y proveedores (en los que influyen elementos tan complejos de evaluar como la reputación de la empresa), la capacidad organizativa y de dirección de la empresa en venta, entre otros muchos aspectos, serían difíciles de conocer con exactitud por los compradores antes de gestionar la empresa. De esta manera podemos argumentar que en la venta de empresas pueden existir elementos de valoración común[86]. En este caso, cada comprador puede tener señales sobre estos elementos que pueden provenir de las entrevistas que se suelen mantener con el equipo directivo, de sus propios estudios o de las relaciones que ha ido manteniendo con la empresa en venta bien como cliente, como proveedor o como competidor. Por otra parte, comenzamos este apartado argumentando que también existen elementos de valoración privada. Por tanto, nos encontraríamos (como ocurre frecuentemente) con un modelo mixto en el que existen simultáneamente elementos de valoración común y elementos de valoración privada.

En el importante trabajo de Milgrom y Weber (1982) se desarrolla un modelo general en el que los modelos extremos (el de valoraciones privadas independientes y el de valoraciones comunes) son casos particulares y en el que se permiten la correlación entre las valoraciones de los compradores. Introducen el concepto de afiliación de las valoraciones que, de una manera aproximada, recoge la idea de que cuando un comprador percibe que el valor de una empresa es “alto”, entonces será más probable que los otros compradores también tengan un valor alto de la misma y a la inversa (para una definición formal véase el trabajo mencionado).

En modelos en los que exista afiliación entre las valoraciones, a diferencia de lo que ocurría en el modelo con valoraciones independientes puras, el conocer (o tener señales) de cómo los demás valoran la empresa, puede influir en la propia estimación de

[86] Por ejemplo, en Roll (1986) se argumenta la posible existencia de la maldición de ganador en las competiciones por el control de empresas.

la valoración. Este hecho es relevante ya que introduce una diferencia entre aquellas subastas que permitan, en el proceso de presentación de pujas, ir extrayendo información sobre las señales del resto de participantes y aquellas en que esto no sea posible. Entre las cuatro subastas básicas que estamos considerando, la subasta ascendente es la única que permite a los participantes extraer información de sus competidores antes dar por cerrado el período de presentación de pujas. Esto introduce una diferencia importante entre esta subasta y el resto que va a implicar que, en este contexto, no se va a cumplir el teorema del ingreso equivalente. Por tanto, la equivalencia en los resultados entre la subasta ascendente y la subasta al segundo precio se rompe cuando las valoraciones se encuentran afiliadas.

La información que se va revelando en la subasta ascendente se deriva de que los participantes que todavía permanecen van observando los precios a los que los otros candidatos se van retirando, lo que les va proporcionando una información adicional a la que disponían al comienzo del proceso. Esta información “extra”, que no provocaba cambios en la conducta de los pujadores en el modelo de valoraciones privadas, si ocasiona modificaciones cuando nos encontramos en un modelo mixto en el que también existen elementos de valoración común y las valoraciones se encuentran afiliadas.

Milgrom y Weber (1982) demuestran que *cuando las valoraciones de los compradores se encuentran afiliados entonces la subasta ascendente o subasta inglesa conduce a unos mayores (o al menos iguales) ingresos esperados que las subastas al primer precio, al segundo precio y holandesa*[87].

De una manera intuitiva podríamos explicar este resultado en que la información adicional que obtienen los compradores en la subasta ascendente va a reducir el efecto de la maldición del ganador provocando que, *en media*, los jugadores que todavía no se han retirado procedan a realizar una elevación de sus estimaciones sobre la valoración de la empresa en venta. Relacionado con este argumento, Milgrom y Weber (1982) también llegan al interesante resultado de que si las valoraciones se encuentran afiliadas, en

[87] En el trabajo de Milgrom y Weber (1982) también se establece que, en este contexto, la subasta al segundo precio genera unos ingresos esperados al menos tan grandes como los de la subasta al primer precio. Por tanto, la ordenación de las subastas en función de los ingresos esperados quedaría de la siguiente manera: primero la subasta ascendente seguida de la subasta al segundo precio y finalmente las subastas al primer precio y holandesa.

media, el vendedor conseguiría incrementar los ingresos esperados si pone en práctica una política de revelar toda la información que disponga sobre el objeto en venta[88].

Por tanto, al levantar el supuesto de valoraciones independientes y privadas se producen modificaciones importantes en el comportamiento de los compradores y se abre un extenso campo de análisis. En todo caso hay que tener en cuenta que en este apartado estamos suponiendo que se cumplen todos los demás supuestos del modelo de referencia, entre ellos el de neutralidad al riesgo comentado anteriormente. Si levantamos los dos supuestos simultáneamente el resultado es menos claro ya que con aversión al riesgo el mejor resultado se obtenía con la subasta al primer precio, que es precisamente la que peor se comporta cuando levantamos el supuesto de valoraciones privadas independientes.

4.2.3.- Asimetrías entre los compradores

Otro de los supuestos del modelo de referencia es el de simetría entre los compradores. Este supuesto implica que todas las valoraciones de los compradores se derivan de una variable aleatoria con idéntica distribución. De esta manera, el supuesto de simetría implica que “ex ante” todos los compradores son iguales.

Sin embargo, podemos imaginar diversas situaciones en las que se puedan observar asimetrías entre los compradores que pueden tener efectos relevantes sobre las valoraciones de los candidatos. En el contexto de la compra de empresas podemos citar diversos casos en los que existen asimetrías. Un ejemplo, muy estudiado es cuando uno de los competidores ya posee un porcentaje del capital de la empresa en venta. Este control le proporciona una situación diferente (mayor información, conocimiento del funcionamiento interno del Consejo de Administración, al mismo tiempo es potencial comprador y vendedor, etc.) a la de otros potenciales compradores. Otro ejemplo, sería

[88] En el apartado 4.3.- realizaremos matizaremos este punto cuando el objeto en venta se trate de una empresa.

cuando la empresa en venta se encuentra en un sector en el que el número de sus competidores es muy reducido. En este caso, los potenciales compradores de otros sectores que (bien por motivos financieros, de diversificación o por interés de explotar sinergias) estuvieran interesados en la compra se encontrarían en una situación "asimétrica" en relación con los competidores de la empresa en venta que también estuvieran interesados en la compra. También nos encontramos con asimetrías cuando una empresa en venta posee concesiones administrativas (autopistas, líneas marítimas, transporte por carretera, etc.) entre aquellos potenciales interesadas que ya cuenten con otras concesiones en esos mismos campos y aquellos interesados que no las tuvieran y aspiren a conseguirlas a través de la compra de la empresa en venta. En las privatizaciones españolas podemos encontrar ejemplos de estos tres tipos de asimetrías.

Estas situaciones de asimetría se han tratado en la literatura de subastas de diversas maneras y, en general, dan lugar a modelos más complicados y con resultados no tan claros en relación con los obtenidos en los modelos simétricos. Una manera de modelizar estas situaciones es suponer que las valoraciones de cada tipo de comprador se derivan de distribuciones de probabilidad diferentes[89]. En este apartado, sin ánimo de ser exhaustivos, nos centraremos en algunos aspectos de los que se pueden derivar implicaciones en la venta de empresas. Con independencia del origen de las asimetrías, vamos a suponer que existe un comprador "fuerte" al que los demás le atribuyen mayores probabilidades de tener una valoración más alta de la empresa[90]. En este contexto también nos encontramos con diferencias importantes entre las subastas ascendentes y el resto.

---

[89] Por ejemplo, en el caso de las subastas de licencias de una nueva tecnología de telefonía móvil se podría asumir que la media de la variable aleatoria de la que se deriva la valoración de los operadores ya instalados sería superior a la del resto de aspirantes. Esto no implica que necesariamente la cantidad que estén dispuestos a pagar sea mayor, sino que "ex ante" las probabilidades de que esto ocurra son elevadas.

[90] Por ejemplo, podríamos suponer que mientras la valoración del resto de compradores se distribuye uniformemente en el intervalo [0 , 10] la valoración del jugador "fuerte" se distribuye también uniformemente pero en el intervalo [6 , 20] y que esto es conocido por todos. (Hay que hacer notar que, aunque su esperanza, 13, es mucho más elevada que la del resto, 5, en este ejemplo no siempre el comprador fuerte tendrá la valoración más alta). Por tanto, los jugadores no sólo serían distintos "ex post" sino que también serían distintos "ex ante". Otra alternativa es la utilizada en Bikhchandani (1988), que comentaremos en el apartado 4.6.-, en la que existe incertidumbre sobre el tipo de un comprador. Así, la valoración del comprador fuerte se podría derivar de la misma distribución de probabilidades que la de los demás o de otra con un media más elevada. Esto es desconocido para el resto de compradores los cuales únicamente conocen las probabilidades de que el comprador corresponda a cada tipo.

En las subastas ascendentes siempre va a ganar el jugador que tenga la valoración más alta ya que el resto se van a ir descartando según aumenta el precio. Por tanto, en este tipo de subastas cuando los jugadores perciben que un competidor tiene unas elevadas probabilidades de tener una valoración superior a la suya van a tener muy pocas esperanzas de ganar la subasta. Ante las escasas probabilidades de obtener la empresa (y si asumimos que el participar en el proceso ocasiona costes) los incentivos para presentarse al proceso van a ser muy reducidos. El resultado será una escasa participación y, en media, un menor precio a pagar por el ganador (recordamos que estaría próximo a la segunda valoración más alta y la esperanza de esta será menor cuanto menor sea el número de participantes).

En la subasta al primer precio, los efectos de la existencia de una asimetría de este tipo están algo más suavizados. Así, a diferencia de lo que ocurre en las subastas ascendentes, ya no es seguro que siempre gane el que tenga la valoración más alta. Como los compradores son asimétricos entonces pueden tener estrategias diferentes y estas pueden provocar que exista una probabilidad positiva de que pueda ganar un candidato con una valoración más baja[91]. Por tanto, aunque para los competidores “débiles” los incentivos a presentar puja disminuyen en relación con los existentes en el modelo simétrico, esta disminución no es tan acusada como ocurría en la subasta ascendente.

Para que se presente esta situación no es necesario asumir que uno o varios candidatos tenga “ex ante” mayores probabilidades de que su valoración sea más elevada que la del resto. Por ejemplo, también nos encontraríamos en una situación parecida si uno de ellos posee una participación en el capital de la empresa en venta (véase, por ejemplo, Bulow y otros, 1999). Este participante, si no resultase ganador en la subasta, se convertiría en vendedor (suponiendo un contexto de una oferta por el 100% del capital). Esto provoca que en una subasta ascendente el candidato que posee una parte del capital de la empresa en venta le interese seguir pujando incluso cuando el precio supere a su valoración. Es decir, en su utilidad esperada se introduce otro componente que sería

[91] Si suponemos que, a pesar de las asimetrías, todos utilizaran la misma función de puja entonces el ganador siempre resulta ser el que tiene la valoración más alta. Sin embargo, en modelos asimétricos, en general, las estrategias utilizadas por los distintos tipos de compradores, en equilibrio, no tienen que ser iguales.

el precio a recibir por las acciones que posee en caso de perder. Este nuevo componente puede provocar que su puja óptima (la que maximiza su utilidad esperada) se sitúe por encima de la cantidad máxima que esta dispuesto a pagar[92]. De esta manera, el resto de competidores esperarían que este competidor tuviera una estrategia de puja más agresiva, lo que provoca que tanto sus probabilidades de ganar como su excedente en caso de ganar sean menores. Por tanto, en las subastas ascendentes, y sin necesidad de asumir que las distribuciones de las valoraciones "ex ante" sean diferentes, si un candidato posee acciones de la empresa en venta también disminuye el atractivo del proceso de venta para el resto de candidatos.

Por su parte, en las subastas al primer precio, la situación se modifica debido a que el comprador que ya posee un porcentaje de capital no va a poder influir, con su puja, en la cantidad que él obtendría como vendedor en caso de no obtener la empresa (ya que, como se sabe, en este tipo de subastas el precio sólo depende de la puja ganadora). Por tanto, como su puja sólo determina la cantidad que él paga en caso de resultar ganador no existirían incentivos para poner en práctica una estrategia agresiva y, de esta manera, no se desincentivaría la participación de sus competidores en el proceso.

Como consecuencia podríamos predecir que, en situaciones asimétricas como las descritas, los incentivos para participar en las subastas al primer precio son superiores a los de las subastas ascendentes. De esta manera, la concurrencia será mayor y esto nos permite avanzar que los ingresos esperados serían superiores con las subastas al primer precio que con las subastas ascendentes. En todo caso, con igualdad de participantes se pueden construir ejemplos en los que el precio esperado en la subasta ascendente en ocasiones sea inferior y en otras superior a la de la subasta al primer precio.

Por otra parte, al igual que ocurría cuando los compradores eran adversos al riesgo, ninguno de los cuatro tipos de subastas básicas sería óptima. El diseño de subastas óptimas también va a ser complejo en presencia de asimetrías ya que implicaría

[92] Hay que observar que aunque esta estrategia (la de seguir pujando hasta un nivel que se encuentra algo por encima de su valoración) maximice "ex ante" los beneficios, puede, en algunos casos, ocasionar unas perdidas "ex post". Según se recoge en Bulow y otros (1999) esta podría ser una manera de explicar (sin necesidad de recurrir a argumentos basados en que los directivos persiguen sus propios objetivos a expensas de los accionistas) las razones por las que, en contextos de valoraciones privadas, en algunas ocasiones se sobrepuja.

discriminar a los teóricos pujadores “fuertes”. Con ello se conseguiría incentivar tanto la participación en la subasta de candidatos “débiles” como la elevación de las pujas por parte de los “fuertes”. Así, McAfee and McMillan (1989) encuentran que si las distribuciones de las valoraciones son idénticas excepto en las medias, entonces el tipo de pujadores que tiene una valoración media menor es favorecido en una subasta óptima. Se plantea un dilema ya que esta política incrementaría las probabilidades de asignar el bien a alguien que no sea el que más lo valora a un precio relativamente bajo, a cambio de incentivar a los candidatos con valoraciones superiores a pujar de una manera más agresiva. Si la discriminación se realiza de un modo óptimo lograría en media elevar el precio esperado. En todo caso, este tipo de subastas es difícil de llevar a la practica y, cuando se han realizado, el objetivo puede haber sido diferente al de maximizar los ingresos esperados (por ejemplo, apoyar a colectivos desfavorecidos, apoyar a productores nacionales, ...).

En el análisis realizado en este apartado sólo hemos levantado el supuesto de simetría entre los compradores. Si adicionalmente sustituimos el supuesto de valoraciones privadas independientes nos encontraríamos ante una extensa combinación de posibilidades. Así, en presencia del efecto de la maldición del ganador, la existencia de asimetría entre los compradores agrava el efecto comentado anteriormente ya que los compradores “débiles” acentuarían su precaución a la hora de pujar. Esto ocurre debido a que, en caso de ganar, las probabilidades para los pujadores “débiles” de haber realizado una sobrestimación se ven aumentadas de forma significativa en presencia de pujadores “fuertes”. El resultado es que los compradores “débiles” acentuarían su precaución a la hora de pujar y sus probabilidades de ganar, en equilibrio, se ven muy reducidas.

Además, en presencia del efecto de la maldición del ganador, los resultados obtenidos en el modelo simétrico presentan una elevada sensibilidad a la introducción de pequeñas asimetrías entre los compradores (o incluso la simple posibilidad de que existan). Normalmente nos encontramos con que tanto el vendedor como los compradores no catalogados de “fuertes” salen altamente perjudicados en relación con el modelo simétrico. En general, los compradores débiles verán como sus posibilidades de ganar se reducen y el excedente esperado que obtendrían, en caso de ganar, se incrementa mientras que el vendedor ve como sus ingresos esperados sufren una reducción drástica. Por su parte, el comprador “fuerte” logra aumentar sus probabilidades de ganar al mismo tiempo que ve reducido el precio en caso de ganar. Por eso, especialmente en estos contextos con elementos de valoración común y existencia de asimetrías, es muy importante para el vendedor poner en práctica medidas para reducir las asimetrías entre los compradores. De esta manera, (como veremos en el apartado 4.6.-) para los compradores puede ser muy rentable el crearse una reputación de pujadores agresivos cuando participan de una manera repetida en subastas.

En estos tres subapartados del epígrafe 4.2.- se han revisado algunas situaciones en las que en unas ocasiones las subastas ascendentes presentan ventajas frente a las descendentes y otras en las que sucede lo contrario. A continuación describimos un sistema mixto que tendría el objetivo de aprovechar las ventajas de ambos métodos.

La propuesta surge en el estudio del diseño de las subastas para la adjudicación de las licencias de los móviles de tercera generación. En este caso existía una clara asimetría entre las empresas que ya contaban con alguna licencia de telefonía móvil (aunque se tratara de otra tecnología) y el resto que aspiraban a entrar en el negocio. Esto puede plantear problemas parecidos a los comentados anteriormente. Por tanto, si el número de licencias a subastar fuera igual al número de empresas ya instaladas, los incentivos de terceros para participar serían muy pequeños, dadas las escasas probabilidades de obtener una licencia (hay que recordar que los costes de participar en estos proceso no pueden ser considerados como insignificantes). El resultado previsible sería que, ante la falta de concurrencia, las empresas que ya estaban prestando el servicio de telefonía móvil con una tecnología anterior se hicieran con las nuevas licencias al precio mínimo establecido. Por tanto, una de las primeras medidas sería la de intentar ofrecer al menos una licencia más que el número de empresas que ya estaban ejerciendo la actividad. Esta nueva licencia indudablemente incrementa el atractivo de participar en la subasta de nuevos entrantes aunque, en todo caso, este atractivo es menor que si se ofrecieran el mismo número de licencias sin que existieran “asimetrías” y todas las empresas partieran en igualdad de condiciones.

Adicionalmente, se propuso, tal y como se expone en Klemperer (1998) un nuevo diseño de subasta que resultaba de combinar la subasta ascendente con la subasta al primer precio. Este sistema estaría pensado para la adjudicación simultánea de varias licencias aunque en la exposición que vamos a realizar lo adaptaremos a una venta de un único objeto. El sistema propuesto (que luego se le ha llamado “anglo-ducht”) costaba de una proceso en dos etapas:

- **1º etapa**. Se pondría en práctica una subasta ascendente, que finalizaría cuando quedarán solamente dos finalistas. En este proceso inicialmente los candidatos presentan sus ofertas, posteriormente se da a conocer la oferta más elevada y se permite a los demás mejorarla. En caso de que algún candidato – diferente al que ha realizado la oferta más elevada - no presentara puja, quedaría descartado. El proceso continuaría hasta que se hubieran eliminado todos los candidatos menos dos (en el caso de que existieran K licencias para adjudicar, este proceso se detendría cuando quedaran K+1 candidatos).

- **2º etapa**. Los finalistas de la etapa anterior participarían en una subasta al primer precio en la que deben presentar, en sobre cerrado, una nueva oferta definitiva. Esta oferta no podría ser inferior al precio que había resultado al acabar la etapa anterior. Obtiene la empresa el que tiene la puja más alta y pagaría la cantidad incluida en su puja.

Al introducir esta segunda etapa se intentan añadir a la subasta ascendente las ventajas de la subasta al primer precio. Así, cuando existan asimetrías como las comentadas en este apartado, al incluir la segunda etapa se elevan los incentivos de los pujadores “débiles” a participar en la subasta. Es decir, la posibilidad de superar la primera etapa y llegar a participar en la subasta al primer precio suaviza el problema que planteaba la subasta ascendente pura en lo que se refiere a falta de incentivos para presentarse en presencia de un pujador “fuerte”. En opinión de Klemperer (1998) es posible que, en determinados contextos, la mayor concurrencia que fomenta este método provoque que el precio que se alcanza ya en la primera etapa pueda superar al que se obtendría en una subasta ascendente pura.

Por otra parte, la segunda etapa también sirve para incorporar a la subasta ascendente las ventajas de las subastas al primer precio cuando los potenciales compradores son adversos al riesgo.

Adicionalmente, esto se consigue sin renunciar a las ventajas de la subasta ascendente. Así, la existencia de la primera etapa permite aprovechar, en gran parte, la importante ventaja que proporcionaba la subasta ascendente en contextos donde las valoraciones se encontraban afiliadas. Es decir, permite que la información que los compradores puedan ir extrayendo de los candidatos que se van retirando suavice el efecto de la “maldición del ganador”.

4.2.4.- Colusión

Otro de los supuestos asumidos en el modelo de referencia se refiere al comportamiento no cooperativo entre los participantes en la subasta. Esto implica que los compradores actúan de manera independiente sin coordinar sus pujas.

Sin embargo, en cuanto relajamos este supuesto se plantea la posibilidad de que todos o parte de los compradores alcancen acuerdos entre ellos con el fin de no competir en la subasta y obtener el objeto subastado en mejores condiciones. La colusión podría realizarse mediante acuerdos explícitos o, en ocasiones, implícitos. La manera de actuar de estos cárteles podría tomar diversas formas en función tanto de las reglas de las subastas como de las características del objeto subastado. Por ejemplo, se podría elegir un miembro del cártel de forma aleatoria para que pujase por el bien y, posteriormente, este sería re-subastado entre los miembros del cartel. La diferencia entre ambos precios sería repartida entre todos los miembros. Alternativamente, en caso de subastas sucesivas los miembros del cartel se podrían ir turnando como candidatos para la obtención del objeto mientras el resto o no se presentan o presentan pujas “fantasmas” sin posibilidades de resultar ganadoras.

En todo caso la formación y el mantenimiento de estos carteles también tropiezan con diversas dificultades que son sensibles al diseño de las subastas. Hay que tener en cuenta que estas agrupaciones tienen una serie de costes de diferentes tipos (costes de coordinación, costes de sostenimiento entre los que se incluyen el coste esperado de llevar a cabo las “amenazas” cuando algún miembro se desvía de la estrategia conjunta, riesgos de ser acusado de comportamientos anticompetitivos, etc). De esta manera, para que los carteles sean estables los beneficios esperados de pertenecer a él para un pujador tendrían que ser superiores a los de actuar de manera independiente.

Robinson (1985) demuestra como, incluso, en una subasta repetida en una única ocasión un comportamiento colusivo podría ser alcanzado como un Equilibrio de Nash en una subasta ascendente (y también en una subasta al segundo precio). Sin embargo, esto no sería posible en una subasta al primer precio (ni en una subasta holandesa). Por tanto, desde el punto de vista de la prevención de los comportamientos anticompetitivos, cuando se trata de vender un único objeto, la subasta al primer precio presentaría ventajas frente a las subastas ascendentes.

Para llegar a estos resultados Robinson (1985) tiene que asumir que los miembros del cártel conocen como los demás miembros valoran la empresa (en concreto supone que los candidatos tienen a su alcance mecanismos creíbles para informar de su valoración o, en su caso, de su estimación de la valoración al resto), lo cual deja de lado uno de los principales aspectos del problema de las subastas. A partir de este supuesto su resultado se basa en los incentivos que tienen los miembros del cártel para no cumplir su disciplina.

En la subasta ascendente, los incentivos para no seguir la estrategia conjuntamente no existen debido a que si un comprador “engaña” al cártel y presenta una puja superior a la del candidato elegido, este puede reaccionar presentando pujas superiores. De esta manera, si el cártel ha elegido el candidato con una valoración más alta entre sus miembros entonces el comprador que se ha saltado la disciplina nunca conseguiría el objeto. Según este autor esto podría explicar la imposición, en este tipo de subastas, de un tiempo límite para presentar pujas (como por ejemplo, el de consumición de velas que se mencionó en el capítulo 2). El establecimiento de estos límites de tiempo proporcionaría una probabilidad positiva de obtener el objeto a los candidatos del cartel que esperen al último momento para presentar sus pujas ya que podría dejar sin tiempo de reacción al candidato elegido. En la subasta al segundo precio, la falta de incentivos para no acatar la disciplina del cártel no se derivaría de la capacidad de reacción (que en este caso no existiría) sino a la estrategia óptima utilizada por el candidato elegido (la de presentar una puja igual a su valoración). Si el candidato elegido es el que tiene la valoración más alta, esta estrategia impediría al resto de candidatos del cártel el ganar la subasta y obtener un beneficio positivo.

La situación es diferente en el caso de las subastas al primer precio (de la misma forma que en la subasta holandesa) en la que el resto de miembros del cartel tendrían un incentivo fuerte a no acatar la disciplina acordada debido a que, dada la estrategia a utilizar por el ganador (que, en este caso, consistiría en presentar una puja relativamente reducida) podrían obtener un elevado beneficio esperado (aprovechando que no existe capacidad de reacción) presentando pujas ligeramente superiores.

En todo caso, donde se abren mayores posibilidades para este tipo de comportamientos es cuando los mismos compradores compiten sucesivamente en subastas similares (por ejemplo, en la venta de derechos de exploración petrolíferos o de derechos de explotaciones de madera, o en el suministro de determinados equipos como turbinas de generación eléctrica o material militar, o en la adjudicación de obras públicas, etc)[93]. En este contexto se puede utilizar el análisis de los juegos repetidos que, por ejemplo, se ha aplicado extensamente en el caso de los mercados oligopólicos. A partir de dicho análisis se obtiene que un resultado colusivo en el que los participantes no optimicen en el corto plazo, se podría mantener en juegos repetidos como un equilibrio no cooperativo si se adoptan estrategias que contengan amenazas creíbles que castiguen al jugador que se desvíe del “acuerdo” colusivo. Es decir, que lo que antes no era posible en las subastas al primer precio si podría serlo cuando la subasta se repite.

Un aspecto clave para lograr sostener estos comportamiento cooperativos anticompetitivos reside en que es necesario la puesta en práctica de un “castigo” que se ejecute cuando un candidato se aparta de la disciplina del grupo. A su vez, para que ese

---

[93] Uno de los problemas importantes se presenta en la detección de este tipo de comportamientos debido a que, en ocasiones, comportamientos que se pueden derivar de practicas anticompetitivas también pueden tener su origen en otras causas que no impliquen coordinación entre los competidores. Un ejemplo es el de la rotación de candidatos. Este hecho se podría generar si existen, por ejemplo, deseconomías de escala debido a posibles restricciones de capacidad. En este contexto, puede ocurrir que un contratista que se haya adjudicado una gran obra que casi sature su capacidad vea como se incrementan sus costes en nuevas obras (esto también podría reflejar ineficiencias en el mercado de alquiler de equipo especializado). De esta manera, se podría observar que no se presente a nuevos concursos o que se presenta con pujas poco competitivas. Como comentamos anteriormente, esta forma de actuar coincide con unas de las posibles prácticas que adaptaría un cártel. De esta manera, serían practicas difíciles de detectar y sobre todo de probar.

castigo se ponga en marcha y, por lo tanto, surta efecto como mecanismo disuasorio es necesario que sea posible detectar con exactitud y rapidez cuando un jugador se desvía del acuerdo alcanzado. Por eso, uno de los problemas que se plantean a estos comportamientos colusivos es la falta de información y la incertidumbre sobre las actuaciones de sus miembros. Esto es un hecho fundamental para el diseño de subastas y para el análisis de las ventajas comparativas que presentan los diferentes tipos de subastas cuando se detecten riesgos de este tipo de comportamientos.

Por ejemplo, en las subastas ascendentes, en las que el cártel designa a un miembro que puje por el objeto sin competencia real por parte de los demás, es muy fácil detectar cuando un miembro se aparta de la estrategia conjunta. Por tanto, la subasta ascendente es un mecanismo muy expuesto a comportamientos no competitivos cuando se utiliza repetidamente para la venta de objetos similares (o para la provisión de servicios). En las subastas al primer precio, si se hacen públicas las ofertas y los nombres de todos los candidatos, también es sencillo el detectar cuando un miembro se ha apartado de la estrategia acordada. Por eso, la colusión será más efectiva cuanto más datos haga públicos el comprador.

De esta manera, cuando se utiliza una subasta al primer precio, un vendedor para dificultar este tipo de comportamientos podría no hacer públicas las pujas de los participantes revelando únicamente la identidad del ganador (este comportamiento en ventas privadas está muy extendido). Incluso se han planteado sistemas en los que, de forma aleatoria y sin anunciarlo, el vendedor no elija como ganador al que presenta la puja mayor (Hendricks y Porter, 1989). De esta forma, sería más complejo para el cártel el detectar cuando ha ocurrido una desviación por parte de sus miembros y sería más dificultoso y/o más costoso el eliminar los incentivos por parte de los miembros para que sigan la estrategia conjunta. La literatura de Teoría de Juegos muestra que el incrementar este tipo de incertidumbre puede ser crucial para entorpecer el comportamiento de un cártel.

En contextos públicos, el no hacer pública las puja ganadora plantea el problema de que entra en conflicto con el principio de transparencia y aporta incentivos para esquemas de corrupción. Además, si nos referimos a la puesta en práctica de programas de privatizaciones, nos encontramos con que, en general las empresas en venta suelen pertenecer a sectores diferentes y ser muy heterogéneas. Esto provoca que sea poco frecuente que un mismo comprador esté interesado en varias empresas y, por tanto, suaviza el problema de la aparición de comportamientos no competitivos basados en la existencia de subastas sucesivas.

Una medida que puede utilizar el vendedor para enfrentarse con los problemas de prácticas colusivas es la aplicación de una política de precios mínimos. Así, desde el punto de vista del vendedor, los precios mínimos óptimos serían superiores en presencia de comportamiento colusivos que cuando no hay riesgo de este tipo de comportamientos (McAfee y McMillan, 1987a). Estos precios mínimos óptimos serían una función creciente del número de miembros que forman parte del cartel. En McAfee y McMillan (1992) se demuestra que si se aplicara una política de precios mínimos óptimos se conseguiría reducir los beneficios esperados derivados del cártel. Además, en presencia de pocos pujadores, los beneficios de un comprador que participa en un cártel pueden se inferiores a los beneficios esperados cuando no participa de comportamientos colusivos si el vendedor aplica los precios óptimos mínimos en ambos casos (que, como se ha dicho, serían inferiores cuando no hay riesgo de que los compradores se coordinen).

En todo caso, la aparición de condiciones que hagan estable el comportamiento colusivos entre los compradores va a depender de una manera crucial de las características del objeto subastado y de las reglas específicas de la subasta.

4.3.- TEORÍA DE SUBASTAS Y VENTA DE EMPRESAS

Aunque en diversas ocasiones hemos hecho referencias concretas a la venta de empresas, los comentarios contenidos en los apartados y capítulos anteriores se refieren a subastas de cualquier tipo de objeto. En este apartado describiremos algunas de las características que revisten los procesos de venta de empresas destacando determinadas prácticas bastante extendidas en estos procesos. Algunas de estas prácticas, parece que puedan entrar en contradicción con determinados resultados que se derivan de la Teoría de Subastas. Por tanto, sería necesario presentar argumentos para explicar la racionalidad de estas prácticas. En este apartado resumiremos los argumentos ofrecidos por Hansen (2001) (aunque introduciremos alguna matización y algún añadido).

Los procesos de ventas de empresas han adquirido un gran desarrollo, especialmente desde los años ochenta: por ejemplo, entre 1989 y 1998, sólo en los Estados Unidos se produjeron casi 20.000 transacciones[94]. De este modo no es extraño que se hayan desarrollado una serie de prácticas que, sin llegar a estar totalmente estandarizadas, si se encuentran muy extendidas. Un proceso típico de venta de empresas se desarrollaría de la siguiente manera:

En primer lugar, el vendedor elegiría un asesor para ayudarle y asistirle en la venta. Evidentemente esto ha incentivado al desarrollo de una importante industria en este sector con lo que se facilita la disponibilidad en plazo muy cortos de este tipo de figura tanto para los vendedores como para los compradores.

El asesor, basado en sus conocimientos y estudios sobre el mercado, elaboraría una primera lista en la que se incluirían los potenciales compradores que pudieran tener interés en la empresa en venta. Normalmente se pueden incluir en esta lista a los competidores, los proveedores, los clientes, instituciones financieras, conglomerados interesados en la diversificación de actividades, etc. Suele ser frecuente que el asesor (de acuerdo, en su caso, con el vendedor) realice una primera valoración, sobre cada uno de estos posibles candidatos y si estima que algún candidato no tiene deseos o capacidad para completar la transacción, en unas condiciones “satisfactorias”, entonces se podría llegar a excluirle de esta primera lista.

A continuación el asesor contactaría con estos candidatos y les proporcionaría una breve y concisa descripción de la empresa que se tiene intención de vender (en ocasiones es posible que en esta fase todavía no se desvele el nombre de la empresa). Aquellos candidatos que muestren interés, deberán firmar un acuerdo de confidencialidad y entonces se les proporcionaría el cuaderno de venta. La información sobre la empresa

[94] Para una descripción de las importantes cifras que ha alcanzado este sector, véase, por ejemplo, Durá y Serrano (2001).

contenida en este cuaderno ya sería más exhaustiva, aunque normalmente no iría más allá de la información que es pública en el caso de empresas cotizadas o, en el caso de las empresas no cotizadas, se entregaría una información que se aproximaría a la que las empresas cotizadas tienen obligación de suministrar a la Comisión reguladora del mercado de valores. Indudablemente esta información es insuficiente para que los compradores realicen una adecuada valoración de la empresa. Aun así, los candidatos tendría que presentar una oferta no vinculante que contengan una primera aproximación de su puja (esta podría ser una cantidad o una banda).

Tras el análisis de estas ofertas por el asesor y el vendedor se podría proceder a eliminar algunos de los candidatos. En este paso pueden existir criterios dispares para realizar la selección pero, en general, las probabilidades de pasar a la siguiente fase son mayores si se presentan pujas elevadas (incluso aunque estas no sean vinculantes).

Con los candidatos que han superado la fase de ofertas no vinculantes se inicia el verdadero proceso de puja. Estos candidatos van a acceder a más información de la empresa en el proceso conocido como “due diligence” en el que visitan las instalaciones, mantienen reuniones con el equipo directivo y tienen acceso a una sala (“data room”) en la que se ha preparado información más exhaustiva (tanto financiera, legal, comercial y otra) sobre la empresa. En todo caso, la información que es más sensible (por diferentes causas como por ejemplo que pueda llegar a amenazar las relaciones con los proveedores o con los empleados o afectar a elementos especialmente sensibles cuyo conocimiento pueda proporcionar ventaja a los competidores, etc) no se suele suministrar. Por ello, los candidatos suelen tener la ocasión de realizar preguntas que pueden ser contestadas o no[95].

Con esta información los candidatos presentan las ofertas vinculantes para la compra de la empresa. Es frecuente que la elección de la mejor oferta necesite de un proceso de valoración por parte del vendedor y de su asesor. Esto es así debido a que a) en transacciones privadas suele ser frecuente que las pujas no se realicen

[95] En ocasiones, la información adicional solicitada por un candidato se entrega a todos los participantes. Esto se puede interpretar como un elemento que eleva la transparencia y la igualdad de oportunidades. También podría interpretarse como un medio para desincentivar a los candidatos a realizar preguntas para evitar dar pistas a sus competidores de lo que ellos consideran relevante.

exclusivamente en efectivo; y b) en las privatizaciones el vendedor puede estar interesado en otros aspectos además del precio (este tema se analizará en el subapartado siguiente).

Hansen (2001) se centra en los siguientes cuatro hechos estilizados, que según él entrarían en contradicción con algún resultado de la Teoría de Subastas:

#1) “Los vendedores restringen el número de pujadores”.

Esta practica entraría en conflicto con el resultado de que el precio esperado es una función creciente del número de competidores (véase el apartado 3.3.-). Cita dos casos en los que, según la teoría, se podrían incrementar los ingresos esperados con prácticas que tienden a disminuir el número de participantes. El primero se refiere a que en ocasiones el vendedor impone tasas por el derecho a pujar que pueden ocasionar que algún candidato no se presente. Sobre este hecho señala que esto no explicaría esta práctica en la venta de empresas ya que es poco frecuente la imposición de este tipo de tasas. El otro caso sería el de fijar un precio mínimo óptimo que implícitamente reduce el número de candidatos (aquellos cuya valoración se encuentre por debajo del precio mínimo). Sin embargo, en este caso, añade Hansen, la limitación es pasiva ya que son los compradores los que deciden no participar y no es el vendedor el que se lo impide. Finalmente concluye que, en ausencia de tasas de entrada, los modelos de subastas no dan racionalidad para excluir competidores[96].

#2) “Los vendedores restringen el flujo de información que suministra a los potenciales compradores”.

Esta práctica entraría en contradicción con el resultado de Milgrom y Weber (1982) — comentado en el apartado 4.2.2.- — por el que el vendedor, en media, puede

---

96 Esta última afirmación se podría matizar sustituyendo “los modelos” por “los modelos de valoraciones privadas independientes”, ya que como hemos visto en el apartado 4.2.2.- cuando nos encontramos en modelos de valoraciones comunes podrían existir situaciones en las que, a partir de un determinado nivel de participantes, las pujas sean decrecientes en el número de competidores. Esto era debido a que al aumentar el número de competidores se intensifica el efecto de la maldición del ganador lo que hace a los pujadores más cautos. Este efecto podría llegar a dominar al efecto competitivo derivado de una mayor presencia de competidores. En todo caso, de acuerdo con Hansen, en principio, parece no consistente con la teoría la restricción del número de participantes.

incrementar sus ingresos esperados haciendo pública cualquier información que disponga que pueda afectar a las valoraciones sobre la empresa.

Para Hansen (2001) el origen de la explicación de estos dos hechos sería el mismo. La explicación intuitiva es relativamente sencilla. Las empresas tienen una característica que, en general, no poseen otros objetos subastados: existe una relación negativa entre la cantidad de información que se hace pública[97], el número de participantes a los que se entrega y el valor de la empresa para cualquiera de los compradores. Es decir, cuanto más candidatos tengan acceso a la información sensible menor será el valor de la empresa para cualquiera de ellos.

La explicación de este hecho se puede basar en diferentes argumentos que normalmente descansan en modelos con competencia imperfecta. En estos modelos la revelación de determinados aspectos de la información sobre una empresa puede alterar las condiciones competitivas en perjuicio de la empresa en venta y, en favor, de los potenciales compradores (ya sea en su calidad de clientes, proveedores, financiadores o competidores) que tiene acceso a dicha información. Existen muchos modelos de Teoría de Juegos que podrían soportar, en diversos contextos, este resultado. Por ejemplo, si un cliente conoce con exactitud el coste del producto que le suministra la empresa podría obtener ventajas en la negociación de las condiciones de suministro. Otro ejemplo se puede encontrar en los modelos de entrada. En estos modelos un potencial entrante está analizando la posibilidad de instalarse en el mercado convirtiéndose en un competidor más. Esta decisión la va a basar en el análisis de la situación competitiva que se originaría una vez que ya hubiera efectuado la entrada. A su vez, en este análisis un elemento crucial son los costes con los que funcionan los ya instalados que, normalmente, se supone que son información privada. Por ello el tener acceso a la información sobre estos costes puede beneficiar a futuros competidores. Por su parte, no hace falta señalar las ventajas que podrían obtener las empresas que ya están compitiendo con la empresa en venta. Por ejemplo, el conocer la rentabilidad desglosada por sectores o zonas geográficas permitiría a los competidores ahorrarse costes en investigaciones de mercado y centrarse en aquellas zonas o sectores más beneficiosos;

[97] Se podría distinguir entre diferentes tipos de información.

el conocimiento de planes de desarrollo de nuevos productos o de expansión a nuevos zonas permitiría a los competidores anticipar una estrategia de respuesta; etc[98].

De esta manera, en el proceso de venta de empresas se intentaría encontrar el equilibrio entre los beneficios derivados de la participación de un mayor número competidores y de la revelación de la información, y los costes que también tiene el revelar determinados aspectos de la información sobre la empresa en venta (a los que Hansen, 2001, denomina como 'competitive information cost').

Así, el efecto de una mayor competencia provocaría que las pujas se encuentren más cercanas a la cantidad máxima que cada comprador está dispuesto a pagar. El revelar la información reduce las incertidumbres sobre la empresa y, en media, provocaría que aumentara la cantidad máxima que los compradores estarían dispuestos a pagar. Pero, debido a que esta información también puede ser usada por los potenciales compradores en sus papeles de competidores, proveedores, clientes, etc. esto ocasiona que, cuantos más candidatos tengan acceso a esta información relevante, menor será el valor de la empresa. Es decir, para cualquier comprador el obtener la empresa sin que nadie más haya tenido acceso a su información sensible tiene más valor que el obtener la empresa sabiendo que sus competidores conocen esa información. Este efecto será mayor cuanto mayor sea la información que se ponga a disposición de los candidatos a la compra.

Hansen (2001) modeliza esta situación y encuentra que esta idea bastaría para dar racionalidad a que el vendedor limite (en diversas fases del proceso) el número de competidores así como la cantidad de información que divulga. Es decir, el actuar de esta manera podría ser consistente con el objetivo de incrementar sus ingresos esperados. En todo caso, esto último ocurriría si en estas fases intermedias el vendedor limita los vendedores de tal manera que pueda separar los compradores con valoraciones bajas de los compradores con valoraciones altas para intentar ir descartando a los primeros. Este

[98] En todo caso habría que señalar que, precisamente en modelos de competencia imperfecta, también podríamos construir situaciones en las que el desvelar determinadas aspectos de la información de una empresa podría favorecerla e incluso perjudicar a aquellos que han tenido acceso a su conocimiento. Hansen (2001) no menciona estas posibilidades aunque, en todo caso, para que su argumentación sea válida bastaría con que, *en media*, la revelación de la información perjudique a la empresa en venta.

podría ser el objetivo (o uno de ellos) de la práctica que se recoge en el tercer hecho estilizado que destaca Hansen.

#3) "Los vendedores establecen una fase de ofertas no vinculantes en la que seleccionan los candidatos que finalmente pasarán a la última fase".

En este punto, esta consideración se refiere sólo a la utilización de la fase de ofertas no vinculantes como instrumento ya que las consideraciones sobre la reducción del número de competidores se incluirían en #1.

En la fase de ofertas no vinculantes no suele quedar claro las pautas de comportamiento del vendedor, aunque se suele admitir que las probabilidades de pasar a la siguiente fase serían superiores para los candidatos que se encuentren en la banda alta de las pujas no vinculantes presentadas. Sin embargo, si los compradores conocen esta manera de actuar presentarían pujas "elevadas" con independencia de cómo valoren la empresa para asegurarse, así, su presencia en la fase final. De esta manera, la fase de ofertas no vinculantes no tendría la utilidad antes comentada de ayudar al vendedor para discriminar entre participaciones con valoraciones altas y bajas y tendría casi la misma efectividad que si el vendedor realiza el descarte aleatoriamernte.

Algunos argumentos basados en los "efectos de la reputación" de los compradores se podrían utilizar para defender la idea de que, efectivamente, esta fase de ofertas no vinculantes refleja, de alguna manera, las valoraciones que (con la información de la que disponen) tienen de la empresa. Hansen, comenta sin embargo, que en la mayoría de las ventas de empresas los compradores participan en una única subasta, por lo que este efecto no sería relevante. Otro argumento que podríamos añadir, no utilizado por el autor mencionado, sería que los candidatos procuran no inflar mucho sus pujas para no aparentar ante sus competidores que su interés por la empresa es grande, induciendo así a que presenten pujas más reducidas en la fase de ofertas vinculantes.

Hansen (2001) desarrolla un modelo en el que las pujas no vinculantes si podrían reflejar las valoraciones de los compradores si el vendedor es capaz de poner en práctica una adecuada política de precios mínimos en la fase final. Estos precios mínimos tendrían que ser una función de las pujas presentadas. Así, en este caso los compradores, presentando unas pujas elevadas tendrían mayores posibilidades de acceder a la última fase pero al mismo tiempo el beneficio esperado de participar en esa fase sería menor (debido a la fijación de unos precios mínimos superiores). Con la elección adecuada de estas funciones para fijar el precio mínimo, el vendedor sería capaz de inducir a los compradores a presentar unas ofertas no vinculantes que reflejen sus respectivas valoraciones y, de esta manera, podría realizar un descarte racional. En todo caso, este argumento de utilizar las ofertas no vinculantes para la fijación de los precios mínimos parece más una idea normativa que una descripción de las prácticas habituales (aunque de una manera no explícita es posible que los vendedores se vean influenciados por las ofertas no vinculantes cuando, en su caso, fijen precios mínimos).

#4) "En ocasiones el vendedor acepta ofertas de negociación en exclusiva".

Hansen también añade esta práctica que consiste en que durante el transcurso de venta, normalmente con anterioridad al "due diligence", puede ocurrir que algún candidato presente una oferta de negociación en exclusiva con el vendedor basada en una banda de precios ... y el vendedor, en ocasiones, acepta. Es decir, a veces el desarrollo del proceso de venta se interrumpe en alguna de las fases para convertirse en una negociación exclusiva. En el desarrollo del Programa de Privatizaciones español, que comenzó en 1996, en España esto no ha sido frecuente, aunque si ha ocurrido en alguna ocasión[99].

Esta práctica también se podría explicar sobre la base de la existencia de los "costes de información competitivos" mencionados anteriormente. Es decir, si el coste de revelar la información a varios candidatos es elevado, al vendedor le podría resultar beneficioso aceptar una oferta "seria" de negociación en exclusiva. Al actuar así renunciaría a los beneficios de fijar el precio en una subasta a cambio de revelar la información a un único candidato. Adicionalmente, la cantidad óptima de información a revelar sería más elevada que en el caso de un proceso competitivo ya que no existiría el riesgo de que el único candidato redujera su valor de la empresa por el hecho de que otros conocieran información sensible. Por eso, es más frecuente que este tipo de ofertas

---

[99] Por ejemplo, en la fase de ofertas vinculantes de la venta de Babcock & Wilcox uno de los candidatos propuso iniciar un proceso de este tipo y el vendedor accedió.

se presenten en la fase de ofertas no vinculantes, cuando los candidatos todavía no han empezado el "due diligence" de la compañía y, por tanto, no han accedido a la información sensible.

Sin embargo, este tipo de ofertas de negociaciones en exclusiva presentan diversos problemas. La forma de estas ofertas suele consistir en la presentación, por parte de un candidato, de un rango de precio, dentro del cual se situaría el precio final, que dependería del análisis de la información a la que todavía no ha tenido acceso. Por tanto, la negociación posterior es necesaria y no queda claro que incentivos tendría el comprador, una vez que se ha librado de la presión competitiva, de aceptar una oferta que se sitúe por encima del límite inferior de la banda que había propuesto (por muy positiva que haya resultado la información recibida de la empresa). Incluso en el extremo puede poner en práctica un comportamiento oportunista "ex post" que le lleve a rebajar la oferta realizada inicialmente o incluso, una vez analizada la información, a retirarla. Por tanto, el vendedor debe analizar cuidadosamente las ventajas e inconvenientes de eliminar la presión competitiva aceptando una oferta de este tipo.

Para finalizar, comentar que los argumentos expuestos en este subapartado no tienen el objetivo de defender que el conjunto de las prácticas "comunes" utilizadas en los procesos de venta de empresas son el mejor mecanismo de venta sino, únicamente, que pueden ser racionalizadas como un intento de los vendedores de mejorar el resultado que se obtendría en subastas sin restricciones.

4.4.- SUBASTAS MULTIDIMENSIONALES

Si nos fijamos en las ventas de empresas que realiza el sector público observamos que frecuentemente el vendedor está interesado en otros criterios además del precio (por ejemplo, mantenimiento del empleo, plan de inversiones, proyecto empresarial, continuidad de la empresa, garantías sobre los compromisos asumidos, etc) [100]. Esto, en ocasiones, también puede ocurrir incluso en el caso de venta de empresas privadas (aunque quizás sean otros los aspectos en los que se pone el énfasis).

En otros procesos, diferentes a la venta de empresas, también nos encontramos con este tipo de situaciones. Por ejemplo, en el caso de la compra de un tanque o de un avión de combate además de su precio importa su maniobrabilidad, su coste de mantenimiento, su facilidad de manejo, etc. En otros casos, como la construcción de una planta eléctrica puede existir aspectos que también son de interés tales como la seguridad, la fiabilidad, el impacto medioambiental, etc..

Cuando en sus ofertas los competidores tienen que incluir otros conceptos que después van a ser valorados por el vendedor, entraríamos en el campo de las subastas multidimensionales o concursos. Para simplificar el análisis, en este subapartado todos aquellos aspectos diferentes al precio, los vamos a incluir dentro de un único concepto que se podría llamar “calidad” (o “plan industrial” en la venta de empresas). De esta manera, nos encontraríamos ante subastas bidimensionales.

Por tanto, las pujas de los potenciales compradores deben incluir un precio y un plan industrial. En estos casos, de una manera explícita o implícita se necesitaría la elaboración de una función para puntuar las ofertas en su conjunto. Así, lo relevante para proceder a la adjudicación sería la puntuación global obtenida por cada oferta. Esto plantea otra problemática nueva derivada de que las empresas pueden tener diferentes tasas “técnicas” de sustitución (o de intercambio) entre el precio y el plan industrial, que se pueden deber a sus diferentes estructuras de costes, a sus diferentes capacidades de gestión, a sus restricciones tecnológicas, etc.

La teoría se ha enfrentado a este tipo de subastas utilizando distintas vías. Una de ellas ha analizado y modelizado los resultados de diversos sistemas que convertirían esta subasta bidimensional en una unidimensional. Dentro de esta vía, se podría plantear una

[100] En el Acuerdo del Consejo de Ministros de 28 de junio de 1996, en el que se establecen los principios que rigen el actual Programa de Privatizaciones en España, se establece en su apartado sexto.3 que “ la maximización de ingresos para el Estado no será el único criterio a tener en cuenta para la privatización...” (para una descripción y análisis de este Programa véase, por ejemplo, Gámir, 1999).

subasta en que se fije el presupuesto para ese proyecto (o el precio para una determinada empresa) y no se valorara las posibles rebajas en el coste (o el aumento en el precio) produciéndose la competencia sólo en la calidad (o en el plan industrial). Thiel (1988) muestra que en una subasta de este tipo la problemática para encontrar un diseño óptimo sería la misma que en una subasta unidimensional por lo que se podrían aplicar sus desarrollos.

En cualquier caso, este planteamiento está afectado por algunas objeciones (véase, por ejemplo, Branco, 1997) ya que hay que fijar el presupuesto (o el precio) y limitar, por tanto, la competencia en este campo y, sobre todo, es difícil defender en la práctica el hecho de que no se valore las rebajas ofrecidas por los proveedores (o el aumento de precio ofrecido por los compradores de una empresa en venta).

Otra manera (más extendida en la práctica) de convertir la subasta en unidimensional sería plantear una fase previa donde se clasifiquen aquellas ofertas que cumplen con los requisitos exigidos de calidad (o de plan industrial) y a continuación iniciar una subasta convencional únicamente con los candidatos que han pasado el "test de calidad".

Por su parte, en Che (1993) se analiza el diseño óptimo de subastas propiamente bidimensionales. En estas subastas las ofertas, compuestas por el precio y calidad, se puntúan de acuerdo a una función. La puntuación total obtenida por cada oferta es la que se tiene en cuenta para la adjudicación. Una de las principales conclusiones que obtiene Che (1993) es que la regla o la función de puntuación que se deriva del mecanismo óptimo (desde el punto de vista del que organiza la subasta) sistemáticamente discriminaría en contra de la calidad. Es decir, el criterio "calidad" tendría que tener una ponderación menor que la que tiene en la función de utilidad del organizador. Este resultado tiene su origen en las asimetrías de información entre el vendedor y los participantes.

Después de encontrar la regla de puntuación óptima establece que tanto una subasta a la primera puntuación como una subasta a la segunda puntuación[101] (el

[101] Se ha traducido del original "first-score auction" y "second-score auction".

equivalente a la subasta al primer y al segundo precio respectivamente en el caso de subastas bidimensionales) podrían originar el mecanismo de asignación óptimo si se implementa esa regla de puntuación óptima[102].

En este mismo trabajo, Che también obtiene otros resultados interesantes. Así, por un lado, la regla óptima de ponderación presenta un problema de inconsistencia temporal ya que, una vez presentadas las ofertas, para el organizador sería óptimo aplicar la regla que contenga sus propias preferencias en lugar de una que subvalore la calidad deseada. Por ello, se tendría que establecer algún tipo de mecanismo creíble por el cual el subastador se comprometa a cumplir con la regla de puntuación establecida. Esto plantea diversos problemas y por ello Che considera que, en ausencia de una capacidad de auto-comprometerse, la única regla de puntuación creíble será la que contenga sus propias preferencias. Con esta regla, la calidad finalmente seleccionada, desde el punto de vista del subastador, estaría por encima de la óptima. Por otra parte, con este supuesto se consigue una consecuencia interesante: el resultado esperado para el subastador sería el mismo con las tres subastas que se analizan (las dos citadas en el texto y la citada en la nota 102). Esto se podría considerar, según Che, como una extensión del teorema del ingreso equivalente a las subastas bidimensionales.

En todo caso, el mecanismo óptimo que se deriva de este análisis no incluye ninguna fase de negociación posterior a la presentación de las ofertas. Por eso, este trabajo de Che supone un apoyo teórico a sistemas en los que, con posterioridad a la presentación de las ofertas, no se realiza esta negociación entre uno o varios candidatos y el vendedor. Sin embargo, en subastas multidimensionales podemos observar ambos sistemas con y sin fase de negociación (por ejemplo, en las privatizaciones españolas se encuentran ejemplos de ambos casos; por otra parte, uno de los casos más estudiado, las compras de armamento que realiza el Departamento de Defensa de los Estados Unidos, incluye una fase final de negociación). A veces se ha intentado explicar la existencia de

---

102 Sin embargo, el mecanismo óptimo no se podría implantar en otro tipo de subasta, que también analiza, consistente en una variante de la subasta a la segunda puntuación. Esta variante consistiría en que el ganador deba ejecutar un proyecto que (en lugar de tener el precio y la calidad incluidas en la segunda mejor oferta) podría tener cualquier combinación de precio y calidad –a su elección– con la restricción de que la combinación elegida obtenga al menos la misma puntuación que la obtenida por la segunda mejor oferta. De esta manera, se intentaría utilizar una subasta con las características de las subastas a la segunda puntuación pero que intente aprovechar las posibles diferencias en las tasas de intercambio entre precio y plan industrial de los candidatos.

esta fase (el propio Che, 1993, lo insinúa), como un intento de convertir una subasta con sobre cerrado en una subasta ascendente en la que el vendedor va pidiendo a los participantes que mejoren su oferta para superar a la de sus rivales. Sin embargo, en numerosas ocasiones no sólo se negocia el precio sino principalmente el plan industrial.

Branco (1997) parte del trabajo de Che (1993) pero sustituye el supuesto de costes independientes entre los competidores por el de costes correlacionados. Este trabajo se refiere al caso en el que se subaste la compra de un bien o un servicio pero se podría aplicar al caso de subasta para vender. Para ello, el supuesto análogo al de costes (de los suministradores) correlacionados sería el de valoraciones (de los compradores) correlacionadas. En el cálculo del excedente del adjudicatario, los costes de suministrar el bien o servicio jugarían similar papel que las valoraciones. Así, en el caso de una subasta para el suministro de un bien o servicio, este excedente se calcularía restando del precio obtenido el coste de producción, mientras que en una subasta para la venta de una empresa, para calcular el excedente del adjudicatario, habría que restar de la valoración el precio pagado.

Con este cambio de supuesto, Branco (1997) llega a un resultado diferente que podemos resumirlo en que, para implementar el mecanismo de adjudicación óptimo (a diferencia de lo que ocurría en el modelo de costes independientes), será necesario utilizar una subasta con dos etapas: en la primera se selecciona el adjudicatario así como el precio que tiene que pagar; y en la segunda, se negocia con el ganador para ajustar el nivel de "calidad" (o para ajustar el plan industrial).

La intuición del resultado radica en que en el modelo de costes independientes la calidad óptima para el que organiza la subasta dependía de la estructura de costes de la empresa ganadora. Sin embargo, en este modelo de costes correlacionados ese nivel óptimo de calidad no va a depender de la estructura de costes de una única empresa sino de la estructura de costes del conjunto de las empresas que presentan ofertas. De esta manera, para determinar cual es ese nivel óptimo se tendrá que esperar a que estén presentadas y se haya analizado todas las ofertas.

El modelo de Branco (1997) presenta la "debilidad" de no modelizar la fase de negociación ya que simplemente supone que en esta fase se lograría alcanzar el nivel óptimo de calidad (lo cual es un supuesto que indudablemente favorece la aparición de una fase de este tipo).

Este resultado se podría acercar a la práctica observada en algunas privatizaciones. Así, en ocasiones las entidades encargadas de realizar las privatizaciones negocian con el candidato ganador la inclusión en su plan industrial de elementos contenidos en los planes industriales presentados por otros candidatos (o al menos se buscaría una aproximación). Por otra parte, cuando en esta última fase se negocia con varios candidatos al mismo tiempo, es fácil observar como al final del proceso de negociación se ha producido cierta convergencia en los planes industriales de los diferentes candidatos. Estos pueden ser indicios del resultado teórico de que el plan industrial óptimo para el vendedor estará en función del conjunto de ofertas presentadas (por ejemplo, desde el punto de vista del vendedor un plan que se considere "bueno" cuando se trata de una empresa por la que se han recibido escasas muestras de interés puede resultar muy "poco ambicioso" en el caso de que se hayan presentado varias ofertas atractivas).

En todo caso habría que señalar que las privatizaciones se encuentran ejemplos de ambos sistemas. El sistema óptimo en cada caso dependería de la ponderación de elementos de valoración común y de valoración privada que puedan existir en cada venta concreta. Podríamos avanzar (aunque esto habría que formalizarlo) que en empresas relativamente conocidas y estudiadas predominarían los elementos de valoración privada, mientras que cuando se trate de empresas sobre la que existe poca información o incertidumbre sobre su situación, podrían ser más importantes los elementos de valoración común. Por lo tanto, se podría predecir que sería en estos últimos casos donde con relativa mayor frecuencia nos podríamos encontrar sistemas que tengan la fase de negociación.

Con este apartado queríamos resaltar que la realidad de las privatizaciones es más compleja de lo que se desprende de las subastas unidimensionales. Por ello, al añadir al objetivo de maximización de ingresos otros posibles objetivos, no sólo se dificulta el diseño del mecanismo óptimo para proceder a la venta sino que también, y en algún grado, la selección se hace menos objetiva. Por ello, uno de los problemas no tratados aquí es que se añade una mayor subjetividad y discrecionalidad por parte de los agentes gubernamentales en los procesos de selección por lo que a menudo resulta más complejo la explicación del proceso seguido a la opinión pública[103].

4.5.- SUBASTAS COMO JUEGO CON DOS ETAPAS DE DECISIÓN

Hasta este momento hemos considerado las subastas como un juego estático debido a que sólo existía una única etapa de decisión. En este apartado transformamos nuestra subasta en un juego dinámico añadiéndole (como paso intermedio para el modelo que desarrollaremos a partir del próximo capítulo) otra etapa de decisión (en lo demás y, a menos que se señale lo contrario, asumimos todos los supuestos del “modelo de referencia”). Esta nueva etapa se añade al principio del juego y consiste en la decisión por parte del vendedor del tipo de subasta por la que opta para vender el bien. Esta modificación supone incluir, de una manera explícita, al vendedor en el juego (en los modelos anteriores, los únicos jugadores eran los compradores que se enfrentaban a unas normas dadas).

En este apartado veremos que esta modificación no altera los resultados sobre el comportamiento de los compradores analizado anteriormente. Además, argumentamos que este tipo de esquema es el que mejor se adapta al desarrollo de las subastas que se encuentra implícito en la mayor parte de la literatura.

[103] Por eso, sobre todo en la última década del siglo (y en parte inspirados por las recomendaciones del Banco Mundial), en muchos países donde la corrupción es uno de los principales problemas de la administración (por ejemplo, en algunos países latinoamericanos) se ha preferido renunciar a las posibles ventajas que, en su caso, pudieran derivarse de estos tipos de sistemas y utilizar sistemas que limiten al máximo la discrecionalidad de los funcionarios gubernamentales. De esta manera, se renuncia a la discrecionalidad a cambio incrementar la dificultad para la corrupción, al mismo tiempo que se instrumentan sistemas en donde las decisiones tomadas sean fáciles de explicar y de entender por la opinión pública.

El desarrollo temporal del juego sería el mismo que el descrito para el modelo de referencia en el apartado 3.3.1.- pero añadiendo una primera etapa en la que el vendedor adopta su decisión. Así, este desarrollo temporal del juego de la subasta con dos etapas de decisión tendría las siguientes fases:

1) El **vendedor** realiza el primer movimiento eligiendo el tipo de subasta entre todos los diseños de subastas a su disposición (el tipo de subasta incluye las normas que recogen, entre otros aspectos, como se asigna el bien y como se determina el precio a pagar). **2)** la **naturaleza** "elige" los tipos de los compradores y sólo revela a cada comprador el suyo; **3)** los **compradores**, una vez observado el movimiento del vendedor, adoptan sus estrategias simultáneamente. **4)** Finalmente se asigna el bien y se realizan los pagos correspondientes según estaba establecido en las normas de la subasta.

Este sería un juego dinámico debido a que cuando los compradores eligen su estrategia saben cual ha sido el tipo de subasta elegido, es decir, han observado el movimiento del vendedor y, por lo tanto, las decisiones del vendedor y de los compradores se toman de una manera sucesiva[104]. En este juego, de nuevo, se está asumiendo que el vendedor tiene capacidad de auto-compromiso, lo que equivale a que los compradores confían plenamente en que las normas de la subasta (las que sean) van a ser cumplidas cuando llegue el momento. Una implicación importante es que el papel del vendedor se limitaría a elegir el sistema para la venta sin que participara para nada en ninguna fase posterior del juego. Por tanto, una vez que ha fijado el tipo de subasta los potenciales compradores se podrían "olvidar" del vendedor y, a partir de ese momento, el juego se plantearía únicamente entre los pujadores. De esta manera, podríamos considerar la subasta, como se ha hecho en los apartados anteriores, como un juego con una única etapa, es decir, este tipo de juegos permite el análisis por separado de la última etapa de decisión. En cualquier caso este resultado necesita de alguna formalización.

[104] En el caso de que los jugadores no sepan cuál ha sido el diseño de la subasta adoptado por el vendedor el juego se podría seguir considerando como estático o de decisión simultánea, ya que como se ha comentado, lo relevante no es cuando se toman las decisiones sino si los jugadores conocen cuales han sido las decisiones adoptadas por los demás jugadores. En este caso los compradores tendrían que conjeturar sobre el comportamiento del vendedor con lo que se trataría de un juego diferente.

En los juegos dinámicos surge un importante nuevo concepto: la credibilidad de las estrategias de los jugadores. El Equilibrio de Nash (o el Equilibrio Bayesiano de Nash en juegos con información incompleta) no va a ser suficiente para eliminar equilibrios que incluyan estrategias “no creíbles” y, por ello, se van a desarrollar nociones de equilibrios que incluyen refinamientos sobre el Equilibrio de Nash. Dicho en otras palabras, en los juegos dinámicos algunas estrategias que intuitivamente pueden no parecer razonables podrían, sin embargo, constituir un Equilibrio de Nash. Los nuevos conceptos de equilibrio establecerán alguna “prueba de credibilidad” (aunque no la llamen así) que deberán superar las estrategias para que puedan formar parte de un Equilibrio.

Antes de introducir estos nuevos conceptos de equilibrio vamos a intentar incrementar la intuición de lo que queremos explicar con un ejemplo aplicado a nuestro juego particular. Para simplificar, supondremos que en el juego de la subasta con dos etapas descrito en las líneas anteriores, el vendedor dispone sólo de dos acciones: a) elegir una subasta al primer precio y b) elegir una subasta al segundo precio. Asimismo, vamos a suponer que, por alguna razón, todos los compradores preferirían que el vendedor eligiera una subasta al segundo precio[105].

En este juego, como ya hemos comentado, el primer movimiento lo realiza el vendedor. Sin embargo, podríamos imaginar que los compradores tuvieran intención de influir en esa decisión. Con ese objetivo, podrían anunciar que van a poner en práctica una estrategia del siguiente tipo[106]: si el vendedor elige una subasta al segundo precio presentarán una puja igual a su valoración, $b_i=B(v_i)=v_i$ (es decir, la estrategia de equilibrio calculada en el apartado 3.3.2.-b) para las subastas al segundo precio) pero si el vendedor opta por una subasta al primer precio entonces, con independencia de la valoración que puedan tener, presentarán una puja igual a cero, $b_i=B(v_i)=0$, (lo que equivale a no presentarse).

---

[105] Esto podría ser debido, por ejemplo, a que con la subasta al segundo precio los compradores se ahorran tiempo y esfuerzo para calcular su puja (recuérdese que en este caso la puja de equilibrio coincidía con su propia valoración mientras que, en el caso de la subasta al primer precio, habría que realizar unos cálculos que implicaban algo más que la aritmética sencilla).

[106] De la definición de estrategia comentada en el capítulo anterior se deduce que una estrategia de los compradores en este juego incluiría una función de puja para cada tipo de subasta que el vendedor pudiera elegir.

Si el vendedor toma estas estrategias como dadas y en función de ellas calcula su mejor respuesta, indudablemente elegiría la subasta al segundo precio ya que, en caso contrario, se quedaría sin realizar la venta. De esta manera, la combinación de estrategias compuesta por la elección de la subasta al segundo precio por parte del vendedor y la comentada anteriormente para todos los compradores, constituirían un Equilibrio de Nash (y, en este caso, también un EBN). Esto es fácil de ver ya que todos y cada uno de los jugadores están adoptando una mejor respuesta dadas las estrategias de los demás.

Por tanto, si utilizáramos el concepto de Equilibrio de Nash entonces la "amenaza" realizada por los compradores para que el vendedor eligiera el tipo de subasta que les conviene habría tenido éxito. Pero al analizar las estrategias anunciadas por los compradores, ¿podríamos llegar a la conclusión de que son "creíbles"?. O planteado de otra forma, ¿debería el vendedor creerse y, por tanto, dejarse influir por el anuncio de una estrategia semejante?. Para responder a esta pregunta necesitamos concretar que se entiende por credibilidad y que tipos de "pruebas de credibilidad" se utilizan en Teoría de Juegos.

Para empezar a responder a esta pregunta podemos observar que los juegos dinámicos (a diferencia de lo que ocurre en los juegos estáticos) pueden estar constituidos por diferentes "subjuegos". En concreto, en el juego de la subasta con dos etapas de decisión, que estamos considerando en el presente apartado, después de cada una de las posibles decisiones del vendedor se iniciaría un subjuego, es decir existiría un subjuegos para cada uno de los tipos de subastas por las que el vendedor se podría decantar. Por tanto, en el caso que estamos considerando, en que el vendedor sólo dispone de dos opciones, entonces el juego contaría con dos subjuegos: uno que comenzaría inmediatamente después de que el vendedor ha adoptado la decisión de elegir una subasta al primer precio y, el otro, que comenzaría si el vendedor se decantase por una subasta al segundo precio.

Con la noción de equilibrio conocida como *Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos* (en adelante nos podremos referir a él como ENPS) la "prueba de credibilidad" consistiría en que para cada jugador su estrategia no sólo suponga una mejor respuesta a las estrategias que están jugando el resto de jugadores cuando consideramos el juego en su conjunto, sino también cuando consideramos por separado cada uno de los subjuegos que lo componen. De esta manera, un determinado conjunto de estrategias que forman un Equilibrio de Nash constituye un Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos si constituyen un Equilibrio de Nash en cada uno de los subjuegos que componen el juego[107]. Evidentemente, un ENPS es un Equilibrio de Nash pero además que cumple un requisito adicional. Al ser más exigente va a eliminar un mayor número de combinaciones de estrategias.

Continuando con nuestro ejemplo anterior, nos habíamos quedado preguntando qué requisitos tendría que cumplir la amenaza de los compradores para ser creíble. Si asumimos el criterio del ENPS este requisito estaría claro: la estrategia anunciada por los compradores tendría que constituir un Equilibrio de Nash en cada uno de los subjuegos. Esto implica que una vez que se hubiera producido el movimiento del vendedor, las acciones de los compradores incluidas en su estrategia anunciada tendrían que ser óptimas dado el comportamiento de los demás compradores. Y esto tiene que cumplirse para las dos decisiones que pudiera tomar el vendedor.

En nuestro ejemplo es fácil observar que en el subjuego que comienza tras la decisión del vendedor consistente en elegir una subasta al segundo precio, la estrategia anunciada si forma un Equilibrio de Nash en ese subjuego. En el momento en que el vendedor ya ha adoptado su decisión, el subjuego sería equivalente a una subasta al segundo precio estática, y ya vimos, en el apartado 3.3.2.-b) , que en este caso las estrategias de equilibrio consistían en que cada comprador presentara una puja igual a su valoración (que es justamente la acción incluida en la estrategia anunciada para este subjuego).

Sin embargo, en el caso del otro subjuego, es decir el que empieza después de la decisión del vendedor de elegir una subasta al primer precio, las acciones incluidas en la amenaza no formarían un Equilibrio de Nash. Así, una vez adoptada esa decisión por

---

[107] Hay que tener en cuenta que en esta definición se incluyen todos los subjuegos que forman un juego. De esta manera, las estrategias tienen que formar un Equilibrio de Nash tanto en los subjuegos que se encuentran en la “senda de equilibrio” como en aquellos subjuegos que se encuentran fuera de esta senda. Los subjuegos que se encuentran fuera de la senda de equilibrio son aquellos que se alcanzan con una probabilidad igual a cero si los jugadores no se desvían de sus estrategias. Por ejemplo, en el Equilibrio de Nash, descrito anteriormente, en el que la estrategia del vendedor consistía en elegir una subasta al segundo precio, el subjuego que se iniciaba con posterioridad a la acción de elegir una subasta al primer precio nunca se alcanzaría y, por tanto, se encontraría fuera de la senda de equilibrio.

parte del vendedor, la mejor respuesta de un comprador genérico i, si los demás presentan una puja igual a cero, no consiste en presentar también una puja igual a cero como prescribe la estrategia anunciada. Esto es fácil de observar ya que con presentar una puja positiva e inferior a su valoración obtendría la empresa con unas ganancias positivas (además, llegados a este punto, los incentivos existentes a incumplir con la estrategia anunciada son muy grandes ya que se podría quedar con la empresa por una pequeña cantidad).

Por tanto, la estrategia anunciada por los compradores no podría formar parte de una combinación de estrategias que constituyeran un ENPS ya que, en uno de los casos, no sería una mejor respuesta cuando el juego ha alcanzado la segunda etapa de decisión. Expresado de otro modo, una vez que el vendedor ha optado por la subasta al primer precio, a los compradores no les interesaría llevar a cabo la estrategia anunciada. De esta manera, si el vendedor ignora la “amenaza” y elige una subasta al primer precio, la mejor respuesta para los compradores en esa fase del juego ya no consistirá en presentar una puja igual a cero. Por ello, la estrategia anunciada no es creíble y el vendedor a la hora de tomar su decisión no la tendrá en cuenta (o no debería tenerla en cuenta según el criterio contenido en el ENPS).

En este caso, para encontrar un ENPS se puede utilizar la técnica conocida como “inducción hacia atrás” que implica que habría que empezar por encontrar el/los equilibrios/s de los últimos subjuegos y con el resultado obtenido ir “ascendiendo” hacia los subjuegos que empiecen en nodos de decisión anteriores. Esta técnica permite ignorar las amenazas no creíbles (es decir, aquellas que utilicen estrategias que no constituyen Equilibrios de Nash en algún subjuego considerado independientemente) y el resultado obtenido será un ENPS.

En nuestro juego de las subastas con dos etapas, este método de resolución supone que tendríamos que empezar resolviendo los subjuegos que comienzan con posterioridad a que el vendedor adopta su decisión. Una vez realizado este paso, la decisión del vendedor es casi trivial consistiendo en elegir la opción que le reporte una mayor utilidad esperada dado el resultado obtenido de la resolución de los subjuegos finales. Es decir, en el ejemplo en el que el vendedor sólo tiene dos opciones, antes de analizar cual sería la estrategia óptima del vendedor (que mueve en primer lugar), tendríamos que encontrar el resultado de los dos subjuegos a que dan lugar cada una de sus posibles acciones. Estos subjuegos coinciden con los modelos que describen las subastas como un juego estático, tal y como las habíamos descrito en los apartados anteriores. Por tanto, como se dijo en los párrafos iniciales de este apartado, el añadir de una manera explícita la fase inicial de decisión, por parte del vendedor, no altera los resultados descritos anteriormente sobre el comportamiento de los compradores.

Desde este punto de vista, parece lógico que una gran parte de la literatura de subastas se centre en el análisis de las subastas como un juego estático, en lugar de seguir el esquema dinámico del presente apartado, ya que en todo caso sería el primer paso para resolver el juego. Aun más, al analizar esta literatura se puede observar que en muchos casos se comparan los resultados obtenidos con diferentes tipos de subasta o se ocupan de cual sería el diseño óptimo de la subasta desde el punto de vista del vendedor. Por tanto, desde este punto de vista, se puede entender que de, una manera implícita, se están considerando modelos en los que existe esta primera fase de decisión por parte del vendedor (cuyo primer paso para adoptar su decisión sería precisamente empezar analizando el comportamiento de los compradores ante cada una de las posibles subastas alternativas que pueda plantear).

Si aplicamos la inducción hacia atrás a nuestro ejemplo, en el que el vendedor sólo tiene dos opciones entre las que elegir, tendríamos que empezar por tanto por los dos subjuegos. Los resultados de estos ya los hemos obtenido con anterioridad. Así, si asumimos que están vigentes los supuestos del modelo de referencia, entonces en el subjuego que empieza después de que el vendedor opte por una subasta al segundo precio, el resultado es que los compradores se comportan de acuerdo a la función de puja $b_i=B(v_i)=v_i$. Por su parte, en el subjuego que comienza con la decisión de elegir una subasta al primer precio los compradores presentarán sus pujas de acuerdo a la función $b_i=B(v_i)=v_i-((v_i-V_{min}/N))$ – ver apartado 3.3.2.-d) —. El siguiente paso sería analizar, a partir de este comportamiento de los compradores, cual sería el resultado de las dos subastas desde el punto del vendedor. En el apartado 3.3.3.- se comentó que en el modelo de referencia los ingresos esperados eran los mismos en ambos tipos de subastas y, por tanto, el vendedor sería indiferente entre ellas. Por tanto, cualquiera de sus dos opciones sería una mejor respuesta del vendedor. De esta manera, obtenemos que en este juego existen dos Equilibrios de Nash Perfectos en Subjuegos, formados por las siguientes combinaciones de estrategias,

(A) [**vendedor**: subasta al primer precio; **compradores**: $b_i=B(v_i)=v_i$; si el vendedor elige una subasta al segundo precio y $b_i=B(v_i)=v_i-((v_i-V_{min}/N))$ si el vendedor elige una subasta al primer precio].

(B) [**vendedor**: subasta al segundo precio; **compradores**: $b_i=B(v_i)=v_i$; si el vendedor elige una subasta al segundo precio y $b_i=B(v_i)=v_i-((v_i-V_{min}/N))$ si el vendedor elige una subasta al primer precio].

Se puede observar que en estos dos equilibrios la estrategia de los compradores es la misma ya que dado que estamos buscando ENPS cualquier otra estrategia que pudieran anunciar no sería “creible”.

Si alteramos alguno de los supuestos del modelo de referencia entonces este resultado puede cambiar. Por ejemplo, en el caso de que consideremos que los compradores son adversos al riesgo, entonces, de acuerdo a lo comentado en el apartado 4.2.1.-, los compradores seguiría presentando sus pujas de la misma manera en el caso de la subasta al segundo precio pero modificarían su comportamiento en la subasta al primer precio (presentando pujas mayores para cualquier nivel de v_i). Por tanto, los ingresos esperados serían superiores en este segundo caso, por lo que el vendedor ya no es indiferente prefiriendo estrictamente una subasta al primer precio. Así, en este caso sólo existiría un único ENPS que consistiría en el que el vendedor elige una subasta al primer precio y los compradores se comportan en cada subjuego de la manera descrita en el apartado 4.2.1.-.

Para finalizar este apartado realizaremos algunas precisiones teóricas. En este apartado hemos hablado de “subjuego” dando una descripción intuitiva, pero sin definirlo formalmente. Como este concepto no lo vamos a utilizar en el resto de la tesis, no daremos esa definición, para lo que se puede consultar por ejemplo, Fudenberg y Tirole (1991a), Kreps (1990a) o Mas-Colell y otros (1995). Si diremos que en muchos juegos dinámicos no existen subjuegos y, por tanto, el requisito del ENPS se cumpliría de forma trivial y este concepto de equilibrio no serviría, en estos juegos, para el objetivo comentado con anterioridad de eliminar aquellas estrategias basadas en amenazas o promesas no creíbles.

Esto ocurre, por ejemplo, en los juegos con información incompleta a partir de que la “naturaleza” realice su movimiento. Cuando ocurre esto, en los nodos que se sitúan con posterioridad ya no podría comenzar un subjuego. Esto es debido a que a partir de ese momento, como el movimiento realizado por la naturaleza no es de dominio público, los jugadores ya no conocen la historia completa del juego y este es uno de los requisitos exigidos para que pueda comenzar un subjuego[108].

En nuestro modelo de este apartado, los subjuegos comenzaban justamente detrás del movimiento del vendedor (que era de dominio público) pero antes de que la naturaleza (considerada como otro jugador más) realizara su movimiento. Es decir, en cada uno de nuestros dos subjuegos el primer movimiento que se realizaba era el ejecutado por el azar o la naturaleza. A partir de ese momento, se producía el movimiento simultáneo de los compradores. Por tanto, el añadir una fase de decisión de dominio público al principio del juego permitía que existieran subjuegos los cuales podían ser analizados de manera independiente.

Sin embargo, a partir del capítulo 5 añadiremos una fase decisión que se sitúa detrás de la decisión de los compradores. El efecto será que no se podrá analizar como un subjuego debido a que previamente se ha producido el movimiento de la naturaleza con lo que ya no estaríamos ante un conjunto de información con un único elemento.

Por tanto, para analizar este juego dinámico necesitaremos una noción de equilibrio diferente a la del ENPS. La Teoría de Juegos ha desarrollado varios conceptos de equilibrio como el Equilibrio Bayesiano de Nash y el Equilibrio Secuencial que, como veremos a partir del capítulo 5, permiten enfrentarse con este tipo de juegos.

---

[108] Un subjuego debe comenzar en un conjunto de información compuesto por un único nodo de decisión. Es decir, cada vez que un jugador le toque tirar se encuentra en un conjunto de información. Si el jugador conoce toda la historia del juego, entonces conoce exactamente a que nodo ha llegado y el conjunto de información estaría formado por un único nodo. Sin embargo, si el jugador al que le toca jugar desconoce alguna parte de la historia del juego entonces, existe la posibilidad de que pueda haber llegado a más de un nodo, y, por tanto no conoce con exactitud en que nodo de decisión se encuentra. En este caso, el conjunto de información estaría formado por todos aquellos nodos en los que se pudiera encontrar el jugador.

4.6.- SUBASTAS SECUENCIALES

El modelo que desarrollamos en los capítulos 5, 6 y 7 es dinámico tanto por incluir varias fases de decisión en la misma venta como por analizar la realización de varias ventas por parte del mismo vendedor. En el apartado anterior hemos comenzado a analizar la existencia de varias fases de decisión dentro de una misma venta, mientras que en el apartado actual revisaremos algunos modelos y resultados que ha desarrollado la literatura de subastas en relación con la realización de subastas de una manera secuencial.

En el campo de las subastas sucesivas se han desarrollado modelos muy diferentes y heterogéneos. Hasta el momento hemos considerado la venta de un único objeto (habría que mencionar que la Teoría de Subastas ha centrado gran parte de sus desarrollos en este caso). Cuando se trata de vender varios objetos (o contratar varios servicios o suministros) se tendría que tomar una primera decisión de si venderlos simultanea o sucesivamente.

Si se realiza una venta simultánea esta puede ser dependiente o independiente. En la primera, los pujadores tendrían que pujar como si participaran en una única subasta y a continuación los objetos serían distribuidos entre los participantes de acuerdo a las normas de las subastas realizándose los correspondientes pagos. Este tipo de subastas simultaneas y dependientes se tendrían que aplicar a la venta de bienes homogéneos como, por ejemplo, los títulos de deuda pública.

En las subastas simultáneas e independientes, se invita a los pujadores a participar en varias subastas que se celebran al mismo tiempo. Por tanto, cada candidato debe presentar pujas de una manera simultanea en aquellas subasta en la que se encuentre interesado. El resultado obtenido en cada subasta será independiente del obtenido en las demás. En este tipo de subastas podría ocurrir que una determinado participante se viera obligado a adquirir más unidades de las que desearía. Los objetos vendidos no tendrían que ser homogéneos, por ejemplo, la venta de derechos de exploración minera en Estados Unidos suelen realizarse por este sistema. Otro ejemplo pueden ser las subastas simultaneas de las licencias de telefonía móvil (aunque, en este caso, presentan la característica de que cada participante sólo puede adquirir una licencia).

Finalmente, los objetos también podrían ser vendidos de una manera secuencial o sucesivamente. Como su nombre indica, con este sistema se subastaría un objeto detrás de otro. En este caso se introduce un fenómeno nuevo y es que el desarrollo de las ventas anteriores puede ir proporcionando información relevante para las siguientes. Por tanto, va a ser importante la decisión del vendedor sobre que tipo de información hará pública sobre las rondas que van finalizando.

En este apartado nos centraremos principalmente en las subastas secuenciales, aunque también realizaremos referencias a las subastas simultáneas. El caso más sencillo (y más estudiado) ocurre cuando se trata de vender un número idéntico de objetos y los compradores sólo están interesados en adquirir una unidad. De esta manera, la valoración de los compradores sobre los objetos idénticos es la misma y no varía con el tiempo (en el caso de los modelos con valoraciones comunes la señal de los jugadores es la que permanece igual, aunque pueden producirse modificaciones en su valoración debido a la información que pueden ir obteniendo de las fases anteriores). En este caso se puede encontrar cierto paralelismo con los resultados obtenidos en las subastas de un único objeto.

En el capítulo 2 ya comentamos que en el caso de las subastas simultaneas de múltiples unidades (por ejemplo, de N unidades), la llamada subasta discriminatoria sería equivalente a la subasta al primer precio, ya que las N unidades se adjudicarían a las pujas más altas y cada uno pagaría el precio incluido en su puja. Por su parte, las subastas con precio uniforme (también llamadas competitivas), serían equivalentes a la subasta al segundo precio, ya que se adjudicarían las unidades a las pujas más altas pero todos pagarían el mismo precio que igualaría a la puja más alta entre las rechazadas.

Si consideramos los supuestos del "modelo de referencia", los resultados que obtenemos serían similares a los obtenidos en el modelo de una venta simple. Así, podríamos establecer el Teorema del ingreso equivalente en un contexto más amplio, ya que con ambos tipos de subastas (discriminatoria y con precio uniforme) los ingresos esperados para el vendedor serían iguales (del mismo modo, este resultado se podría extender a todas las subastas que cumplieran una serie de requisitos). Por su parte, las funciones de pujas de equilibrio también serían similares a las que se obtenían en las subastas de un único objeto. En las subastas con precio uniforme cada comprador presenta una puja igual a su valoración mientras que, en la subasta discriminatoria, cada comprador presenta una puja igual a la estimación que realiza sobre la valoración más alta entre los perdedores, asumiendo que él va a ser uno de los ganadores.

Si la venta es secuencial se complica la descripción de las estrategias de los compradores ya que debería incluir su acción para cada ronda condicionada a la información que vaya estando disponible. Sin embargo, con los supuestos del modelo de referencia se simplifica mucho el modelo ya que debido al supuesto de valoraciones independientes la información adicional no va a tener incidencia sobre el resultado de la subasta. Así, Weber (1983) muestra como, en este contexto, es indiferente que en cada venta el vendedor realice un anuncio del tipo "el objeto ha sido vendido" o, por el contrario, se informe de que "el objeto ha sido vendido al precio p".

Con los supuestos del modelo de referencia, la subasta secuencial cumpliría con las condiciones del Teorema de los Ingresos Equivalentes por lo que, tanto la subasta secuencial al segundo precio como la subasta secuencial al primer precio, proporcionarían al vendedor unos ingresos esperados iguales a los de las subastas simultaneas. Este resultado se refiere a los ingresos de la venta de todos los objetos aunque no hace referencia a cual sería la senda temporal del precio en las sucesivas subasta que se celebren. Con los supuestos del modelo de referencia el precio permanecería constante en las sucesivas subastas (hay que recordar que estamos suponiendo que los objetos son idénticos, que los compradores no alteran sus valoraciones sobre los objetos y que no existe descuento por obtener el objeto en una proceso posterior).

Al igual que ocurría en el modelo con una venta simple, cuando se alteran los supuestos del modelo de referencia el Teorema del Ingreso Equivalente no se mantiene. Así, cuando suponemos aversión al riesgo entre los compradores la subasta simultanea discriminatoria consigue mayores ingresos esperados que la subasta uniforme y lo contrario ocurre cuando relajamos el supuesto de valoraciones independientes y asumimos que están afiliadas.

Por otra parte, con valoraciones afiliadas ya comentamos que, en media, el vendedor se puede beneficiar de revelar la información de la que dispone sobre el objeto en venta. Esto también es aplicable a los métodos de venta que consigan transmitir mayor información a los pujadores. Esto último lo consigue la venta secuencial. Por tanto, con valoraciones afiliadas, y suponiendo simetría entre los compradores, la subasta secuencial al primer precio conduce a unos mayores ingresos esperados que las subastas simultáneas. Al relajar el supuesto de valoraciones independientes también se va a afectar a la senda de los precios en las subastas secuenciales. Con valoraciones afiliadas y simetría, ya no van a permanecer constantes a lo largo de todas las subastas sino que seguirán una senda ascendente (Weber, 1983).

En las consideraciones anteriores es básico el hecho de que cada pujador sólo esté interesado en la adquisición de una única unidad y, por tanto, que su valoración sea la misma para cualquier unidad. Al suponer que los compradores están interesados en la adquisición de varias unidades y que estas no son del todo homogéneas se va a abrir un amplio campo con múltiples posibilidades. En las subastas secuenciales nos encontramos con que los compradores (con su forma de pujar en una subasta) pueden intentar influir en el compartimiento de sus competidores en las siguientes subastas. Los modelos que nos podemos encontrar son muy diferentes y con implicaciones a veces contrarias en función de los supuestos que realicemos.

En general, en modelos con valoraciones privadas (en los que los pujadores conocen su valoración del bien) el interés de los compradores en las primeras subastas sería intentar crear la expectativa en sus rivales de que su valoración es baja para que esto les haga confiar en que pueden ganar las siguientes subastas con pujas reducidas. De esta manera, podrían obtener unos beneficios esperados elevados al poder ganar las siguientes subastas con pujas inferiores. En equilibrio no se conseguiría “engañar” a los competidores, pero este comportamiento puede originar unas pujas menores en las primeras subastas que las que se realizarían si sólo se celebrara una única subasta. En todo caso, este resultado es muy sensible a los diferentes supuestos que se realicen y en función de ellos podríamos construir modelos muy diferentes.

Un ejemplo en esta línea es el contenido en Ortega-Reichert (1968), en donde se considera una subasta secuencial de dos objetos con dos compradores con valoraciones privadas. Las valoraciones de los dos objetos para cada comprador se derivan de la misma variable aleatoria, la cual, a su vez, depende de una variable de estado que elige la naturaleza. Este movimiento de la naturaleza es desconocido pero tiene una distribución de probabilidades conocida. Cada comprador conoce su valoración en el momento de comenzar cada subasta. Lo interesante de este modelo es que, aunque privadas e independientes, las valoraciones dependen del nivel de la variable de estado de la naturaleza (la cual es constante en las dos subastas). De este modo, si el comprador 1 "convence" al 2 de que su valoración en la primera venta es baja, entonces las creencias del jugador 2 sobre la variable de estado serán más conservadoras. Esto provocaría que el comprador 2 pujara de una manera menos agresiva en la segunda venta con lo que el jugador 1 tendría una oportunidad de hacerse con el objeto de la segunda subasta a un precio reducido. Ortega-Reichert encuentra un equilibrio simétrico en el que los dos jugadores presentan en la primera etapa pujas inferiores de las que presentarían si solo se celebrara una subasta.

Sin embargo, en cuanto existen elementos de valoración común, la aparición de la maldición del ganador cambia de manera sustancial el resultado anterior. Esto es todavía más llamativo en presencia de potenciales asimetrías entre los compradores. En estos casos, el interés de los compradores en las primeras etapas es el opuesto que cuando las valoraciones eran privadas. En lugar de intentar aparentar valoraciones bajas estarían interesados en levantarse una reputación de que pertenecen al tipo de pujadores fuertes. Su objetivo sería intensificar el efecto de la maldición del ganador en sus competidores para que, de esta manera, tengan que incrementar su prudencia en la presentación de pujas. Recordamos que en presencia de pujadores fuertes las probabilidades de que un pujador "débil" haya sobreestimado el valor del bien en caso de ganar son más elevadas. Por ello, cuando un comprador se enfrenta a un pujador fuerte, o incluso cuando tiene expectativas de que se enfrenta a un pujador fuerte, tendría un comportamiento más conservador a la hora de presentar pujas. Por tanto, a diferencia de lo comentado anteriormente, en estos caso, los compradores podrían tener incentivos a pujar agresivamente en las primeras subastas para crearse la reputación de pujador fuerte.

➢ En esta línea, el trabajo de Bikhchandani (1988) es de especial interés dentro de esta literatura. Considera que los mismos pujadores toman parte a lo largo de un período de tiempo en una serie de subastas similares aunque independientes. En esta situación, cada comprador puede inferir información sobre los otros jugadores del comportamiento que han tenido en el pasado. La idea clave sería que cuando van a calcular la puja que presentan, los compradores no sólo van a tener en cuenta la historia de las subastas anteriores sino que también van a considerar el efecto de su estrategia en las estrategias de los demás en las siguientes subastas, incluso aunque estas sean independientes.

Para intentar captar alguno de estos efectos desarrolla un modelo de subastas repetidas con valoraciones comunes y al segundo precio. La principal cuestión a la que va a dedicar su atención es al análisis de si compensa el establecer y mantener una reputación de pujar agresivamente. Para ello, el contexto que ha elegido parece el indicado ya que, como hemos comentado, al existir valoraciones comunes, si algún jugador consigue tener esta reputación, puede provocar que se intensifique el efecto de la maldición del ganador y que, por tanto, los demás jugadores pujen de una manera mucho más cauta. Este efecto, en subastas al segundo precio, provocaría no sólo que el jugador con una reputación de agresivo ganara en más ocasiones sino, además, que el precio que tenga que pagar en las ocasiones que gane sea menor.

Bikhchandani (1988) demuestra esta intuición al menos para las subastas que se encuentran "suficientemente" alejadas de la última. Para ello construye un modelo con dos jugadores en el que existe información completa sobre el tipo del jugador 2. Así, las valoraciones, para el jugador 1, de los N objetos en venta en cada una de las N subastas a realizar, son independientes y, por simplicidad, se distribuyen idénticamente (las llamamos V^l, donde l es el subíndice para cada subasta). Como estamos en un contexto de valoraciones comunes, antes de celebrar la subasta, este valor es desconocido por el jugador 1 que sólo dispondría de una señal sobre dicho valor. Por su parte, el jugador 2 puede ser de dos tipos. El primer tipo (2a) sería idéntico al jugador 1, mientras que el segundo posible tipo (2b) tendría una valoración del objeto estrictamente mayor, kV^l, donde k es mayor que 1 y es de dominio público. El tipo del jugador 2 sólo es conocido por el propio jugador 2 mientras que el jugador 1 lo ignora y sólo conoce las probabilidades que la naturaleza asigna a cada uno de los dos tipos.

Cuando la subasta se repite una vez, Bikhchandani obtiene que, incluso, cuando la probabilidad de que el jugador 2 pueda corresponder al tipo 2b sea muy baja, se produce una disminución de los ingresos esperados del vendedor en relación con el modelo simétrico (cuando estas probabilidades son nulas). Hay que tener en cuenta que en este caso el número de candidatos es el mismo con lo que no se tiene en cuenta el efecto analizado en la sección 4.2.3.- en la que en presencia de asimetrías disminuían los incentivos a participar. Tampoco jugaría el efecto de generarse una reputación para el futuro ya que la subasta se repite una única vez. Por tanto, la explicación de esa disminución de los ingresos esperados habría que encontrarlo en el efecto de la maldición del ganador. Este resultado Bikhchandani lo obtiene en una subasta al segundo precio y lo explica de la siguiente manera.

En principio como el juego acaba después de esta subasta se podría pensar que el jugador 2 no tiene incentivos para ocultar el tipo al que pertenece. Por tanto, el tipo ordinario 2a pujaría igual que en el modelo simétrico. Sin embargo, aunque el efecto reputación no juegue en este caso si existiría un efecto indirecto derivado de la existencia de la maldición del ganador. Así, el jugador 1 se da cuenta de que si resultara ganador el valor esperado del objeto deber ser más pequeño que el que tendría en el modelo simétrico (en el que, como se ha comentado, las probabilidades del tipo 2b son nunlas). Esto es debido a que ahora existe la posibilidad añadida de resultar ganador incluso frente al tipo de valoración alta lo que implicaría que la señal que ha recibido el jugador 2 tiene que haber sido mucho menor. De esta manera, la maldición del ganador se intensifica para el jugador 1 lo que provoca que presente pujas más reducidas. A su vez este comportamiento menos agresivo del jugador 1 debilita la maldición del ganador para el tipo ordinario del jugador 2 lo que provoca que pueda presentar pujas más elevadas (a su vez esto intensificaría un poco más la maldición del ganador para el jugador por lo que pujaría algo menos lo que, a su vez, repite el ciclo hasta que se alcanza el equilibrio). Por tanto, así entendemos el resultado antes comentado. El jugador 1 (que resultará perdedor con mayor frecuencia y, por tanto, marcaría el precio en la mayoría de las ocasiones) presenta pujas inferiores mientras que el jugador 2a está mejor que en el modelo simétrico ya que tiene más probabilidades de ganar y, además cuando lo hace paga menos (el tipo 2b aunque puje más que el 2a pagaría lo mismo). Por su parte, el vendedor empeora su situación obteniendo un ingreso esperado menor.

Cuando el juego se repite un número finito de veces Bikhchandani demuestra que, mientras que el número de subastas que quede por jugar sea superior a un determinado número l^*, entonces el tipo 2a imitaría, en equilibrio, al tipo 2b con el objeto de no revelar su tipo. Es decir cuando el jugador 2 no es del tipo que tiene la valoración alta, le compensaría ocultar que pertenece al tipo inferior para generarse una reputación de que es del tipo con una valoración más alta. Para ello elevaría sus pujas hasta igualar la estrategia del tipo 2b. Este comportamiento provoca que el jugador 1, en equilibrio, presente, en estas subastas lo "suficientemente" alejadas de la última, unas pujas incluso inferiores por lo que los ingresos esperados del vendedor son incluso más bajos que los del modelo asimétrico repetido una única vez. El resultado que obtiene Bikhchandani (1988) es extremo ya que mientras queden por jugar más de l^* subastas el jugador 1 no tendría, en equilibrio, posibilidades de ganar. Este sólo tendría probabilidades positivas de ganar en la l^* últimas subastas y sólo cuando el tipo del jugador 2 fuera el ordinario, es decir el 2a.

Hemos visto que la literatura ha desarrollo diversos modelos en los que "importa" la reputación de los compradores. En estos modelos los compradores repiten en varias subastas y pueden tener incentivos para, con su comportamiento en las primeras subastas, influir (a su favor) en el comportamiento de sus competidores en las siguientes subastas. Sin embargo, existen muchos menos desarrollos que pongan el énfasis en la reputación del vendedor. Normalmente se asume que los vendedores tienen capacidad de auto-compromiso y, por lo tanto, una vez que ha fijado las reglas de las subastas que realizará no existe incertidumbre sobre su aplicación. Este contexto es consistente con la poca preocupación (desde un punto de vista teórico) por la reputación del vendedor.

Sin embargo, en los programas de privatizaciones, por ejemplo, se produce una situación en la que es el vendedor el que repite mientras que suele ser poco frecuente que un mismo comprador se presente a varias privatizaciones. Precisamente este va a ser el punto de partida para el modelo de reputación del vendedor que se plantea en los capítulos 5 a 7 en el que relajaremos el supuesto de que el vendedor tiene capacidad de autocompromiso. A diferencia del modelo de Bikhchandani, supondremos que existe incertidumbre no sobre el tipo de un comprador sino sobre el tipo del vendedor.

Modelos de este tipo no son muy abundantes en la literatura. Un ejemplo, aunque con un enfoque diferente, sería el modelo que desarrolla McAfee (1983) en el que el vendedor tiene un papel relevante.

- McAfee (1993) plantea un modelo en el que varios vendedores (cada uno de ellos con un único bien para vender) compiten por los compradores. En cada periodo, los compradores sólo pueden acudir al mecanismo de venta propuesto por uno de los vendedores. Por su parte los vendedores pueden elegir cualquier mecanismo para realizar la venta. Este modelo lo podemos incluir en este apartado de "subastas secuenciales" ya que al final de cada periodo los vendedores que no lograron vender el bien y los compradores que no consiguieron adquirirlo pasan a la siguiente fase en el que se repite el proceso.

El desarrollo temporal de este modelo sería el siguiente. Al principio de cada período existe un stock de compradores y vendedores heredados del periodo anterior. Los vendedores tienen valoraciones privadas sobre el objeto subastado. La primera acción de cada período consiste en que los vendedores simultáneamente eligen el tipo de mecanismo de venta que utilizarán. Este será del tipo conocido como mecanismo directo (véase el apartado 3.3.3.-). Esta elección de los vendedores es hecha pública de tal manera que todos los compradores conoce cual es el mecanismo elegido por cada uno de los vendedores. La siguiente fase de decisión consiste en que los compradores simultáneamente eligen el tipo de mecanismo en el que se presentarán, pudiendo elegir sólo un vendedor por periodo. Una vez elegido el mecanismo al que se presentan declaran sus valoraciones y el mecanismo asigna el bien y los pagos a realizar por los compradores.

Cuando los compradores eligen el mecanismo de venta no conocen el número de participantes en ese mecanismo aunque, en equilibrio, si conocerían la distribución de probabilidades del número de participantes. Si las reglas de cualquier mecanismo establecen que alguno de los compradores participantes en ese mecanismo se adjudica el bien entonces tanto el vendedor como el comprador elegido abandonan el juego. El resto de compradores y vendedores permanecen en el stock de jugadores. Antes de pasar a la siguiente fase, cada uno de los jugadores que permanece en el juego tiene una probabilidad determinada por el azar o la naturaleza de ser eliminados. Al mismo tiempo, también con una determinada probabilidad, se incorporan tanto al stock de compradores como de vendedores nuevos jugadores. Esto finaliza la fase actual y el siguiente período comenzara con el stock de jugadores así determinado.

Por tanto, los vendedores han dejado de ser monopolistas del bien que vende y tendrán que elegir un mecanismo de venta que proporcione un excedente esperado a los compradores suficiente para atraerles y que no opten por mecanismos de venta alternativos. En el modelo, este excedente es determinado endógenamente. Para hacer el problema manejable y tratable en McAfee (1993) se tiene que recurrir a varios supuestos simplificadores pero poco plausibles (según el propio autor reconoce) como, por ejemplo, que todos los agentes creen que el beneficio esperado asociado a futuros periodos no se encuentra afectado por la desviación del equilibrio de un vendedor en el periodo actual.

El resultado que obtiene el autor es que, en equilibrio, todos los vendedores usarán subastas idénticas y que los compradores elegirán aleatoriamente el vendedor con el que se presentaran en ese periodo. Para que los vendedores no tengan incentivos a desviarse, las condiciones de equilibrio fuerzan a que los vendedores fijen un precio de reserva eficiente. Este precio mínimo sería eficiente si se iguala al valor del bien para el vendedor, el cual a su vez consistiría en el valor presente descontado de ser un vendedor en el próximo periodo. Este precio de reserva contrasta con el precio de reserva óptimo para el vendedor cuando era un monopolista que excede el valor anterior. Es decir, cuando era un monopolista, el vendedor podía explotar su poder de monopolio fijando un precio máximo que no era eficiente (es decir, podía implicar que se dejaran de realizar intercambios que fueran beneficiosos para ambas partes), disminuyendo así el excedente esperado de los compradores. En el modelo de McAfee (1993) la competencia entre mecanismos de venta imposibilita este tipo de actuación por parte de los vendedores.

En este trabajo los compradores son anónimos. Es decir, los vendedores no podían distinguir entre compradores excepto por la puja presentada. Además, los compradores cuando se presentan en un mecanismo de venta no conocen con que compradores están compitiendo (ni siquiera conocen el número de compradores que se presentan con el mismo vendedor que él ha elegido). Esto implica que en este modelo la reputación de los compradores (aunque repiten) no juega ningún papel, lo que deja fuera los posibles comportamientos de los vendedores para generarse una reputación en el futuro. Por tanto, las pujas presentadas serán las que maximicen el beneficio esperado de los compradores en el momento que se presentan sin considerar su influencia en las siguientes subastas.

PARTE III:

UN MODELO DE REPUTACIÓN DEL VENDEDOR

CAPÍTULO 5.- SUBASTAS CON TRES ETAPAS DE DECISIÓN

5.1.- INTRODUCCIÓN

En este capítulo vamos a empezar a desarrollar un modelo en el que el vendedor pasa a tener un papel bastante más activo que el que tenía en los capítulos anteriores. Hasta ahora asumíamos que el vendedor tenía la capacidad de adquirir de una manera creíble un compromiso por adelantado. Esto implica que, una vez que anuncia cuáles serán las normas a las que se va a atener, los potenciales compradores no tienen ninguna incertidumbre sobre cual será el comportamiento futuro del vendedor. Los modelos desarrollados en este capítulo se van a derivar del levantamiento de este supuesto. Es decir, el vendedor ya no tendrá a su alcance la capacidad de auto-compromiso.

En concreto habíamos supuesto (bien de una manera implícita o explícita en el caso del apartado 4.5.-) que el vendedor fijaba las normas de la subasta con anterioridad a la presentación de las pujas y que, una vez que estas se habían aprobado y anunciado, el vendedor se limitaba a proceder según se había establecido en dichas normas. Es decir, una vez fijadas las normas se acababa el papel del vendedor en el juego y, en términos estratégicos, el resultado sería equivalente si encargara a un tercero la ejecución de dichas normas. Otro factor a tener en cuenta era que los potenciales compradores tenían la certeza de que se iban a aplicar las normas estrictamente. Es decir, los potenciales compradores asignaban una probabilidad nula al posible incumplimiento o modificación de las normas por parte del vendedor. De esta manera, los compradores una vez que conocían el tipo de subasta podrían actuar "olvidándose" del vendedor ya que no existía ninguna posibilidad de que este pueda cambiar su manera de actuar durante el transcurso de la subasta (es decir, sería equivalente a que una vez fijadas las reglas el vendedor encargara a un tercero su cumplimiento y él se retirara de la operación). Por tanto, estos supuestos implican, como hemos comentado, que dotamos al vendedor de la capacidad de auto-comprometerse y de auto-limitar su campo de actuación en el futuro (y además, de una manera creíble, sin ambigüedad y sin coste).

El disponer de este poder de auto-limitar la propia capacidad futura de actuación podría constituir "paradójicamente" una ventaja, como ya fue resaltado en Schelling (1960). Es decir, en contextos estratégicos, el disponer de un mayor margen de maniobra, en ocasiones, puede ir en perjuicio de los propios intereses del que lo "disfruta".

En algunos momentos, el poder eliminar la incertidumbre sobre la actuación futura puede ser una opción no disponible para el vendedor o, en su caso, implicar un elevado coste. La situación se podría agravar cuando nos encontramos en contextos en los que los intereses del comprador "ex ante" (es decir, previamente a la presentación de las pujas) no coincidan con sus intereses "ex post" (una vez abiertas y, por tanto, conocidas y analizadas las ofertas de los potenciales compradores).

El modelo que se desarrolla en este capítulo se basa precisamente en levantar este supuesto: es decir, el vendedor ya no tendrá esa capacidad de auto-comprometerse. Por ello, los potenciales compradores ya no tendrán la certeza sobre el cumplimiento de las normas. De esta manera, tendríamos que realizar una conjetura sobre la posibilidad de incumplimiento y sobre cual será el desarrollo de los acontecimientos en ese caso. Indudablemente estas conjeturas influirán sobre el movimiento de los potenciales compradores, es decir, sobre las pujas que presenten. Por ello, va a tener gran importancia, para el resultado del juego, la forma en que los potenciales compradores generen sus expectativas sobre la probabilidad de que finalmente durante el transcurso del proceso de venta se modifiquen las normas previamente aprobadas.

En Teoría de Juegos, en general, y en Teoría de Subastas, en particular, es esencial que las normas del juego estén bien especificadas. Por ello, adoptaremos la terminología de "cumplir" o "incumplir" las normas ya aprobadas y hechas públicas. Sin embargo, hay que tener en cuenta que, en muchas ocasiones, el vendedor empieza la subasta o el proceso de venta sin aprobar las normas o, aun habiéndolas aprobado, sin comunicarlas a los compradores. En este caso más que de expectativas de incumplimiento tendríamos que hablar sobre expectativas del tipo de normas que finalmente utilizará el vendedor. Es decir, en este caso no cabría hablar de incumplimiento aunque seguirán siendo inciertas para los compradores las reglas que finalmente serán aplicadas a sus ofertas. En este caso, los compradores realizarían conjeturas, no sobre el posible incumplimiento o modificación de las reglas, sino sobre cuáles serán las normas o criterios que el vendedor aplicará a lo largo del proceso de venta. Citemos un ejemplo concreto que en los procesos de venta de empresas puede jugar un papel importante. Una incertidumbre a la que se enfrenta un comprador cuando prepara su oferta para la compra de una empresa (y que puede ser determinante para el cálculo de la puja que finalmente presente) se refiere a si, con posterioridad, tendrá la posibilidad de mejorar su oferta. Es decir, si el vendedor abrirá o no una nueva ronda de mejoras de ofertas.

Por tanto, cuando se hable de "incumplimiento" por parte del vendedor, en muchos casos, no será aplicable el significado literal de esta palabra, debido sencillamente a que previamente el vendedor puede no haberse comprometido a cumplir con ninguna norma (en todo caso, lo esencial para el modelo es que los competidores tengan incertidumbre sobre las normas o criterios que finalmente se apliquen en el proceso de venta).

El hecho de que, una vez presentadas las pujas, el vendedor pueda incumplir las normas, abre numerosas posibilidades sobre cual sería su posible comportamiento en dicho caso y, sobre como sus decisiones afectarían al resultado final. Por ejemplo, puede ser sencillo modelizar el hecho de que los potenciales compradores pueden asignar una elevada probabilidad a la opción de que el vendedor intente abrir una negociación con el ganador de la subasta con el objetivo de incrementar el precio de venta. Sin embargo, es más complejo el tratar de prever o anticipar cual será el resultado de dicha "renegociación".

Por tanto, al introducir la posibilidad de incumplimiento de las normas, se abren numerosas (infinitas) posibilidades para el desarrollo de nuestro “juego”. Por ello, para intentar realizar una formalización que nos permita abordar un análisis teórico de esta situación vamos a introducir algunos supuestos simplificadores, intentando que no sean del todo arbitrarios. Por ello, abordaremos la tarea de intentar dotarles de una adecuada justificación microeconómica (especialmente al que se refiere a los posibles resultados que se originan cuando el vendedor “renegocia” con el comprador).

Para la formalización de esta nueva opción que se abre para el vendedor (la de modificar las normas), incluiremos una nueva etapa de decisión. Esta correspondería al vendedor y se situaría después de la etapa en la que los potenciales compradores presentan sus pujas (que deja de ser la última etapa del juego). Por tanto, en este modelo el vendedor pasaría a tener dos movimientos. Uno primero al inicio del juego, en el que elige el tipo de subastas entre las opciones que tiene disponibles. Y un segundo movimiento que se situaría al final del juego. Este segundo movimiento consistiría en elegir, una vez observadas las pujas presentadas, si cumple o no con las normas que el mismo había elegido (y hecho públicas en su primer movimiento).

Recordamos que en el modelo del apartado 4.5.- se planteaban las subastas como un juego con dos etapas de decisión (una para el vendedor y otra para los potenciales compradores). De esta manera, frente al planteamiento “convencional” que, normalmente, no asignaba explícitamente ningún papel al vendedor (ya que analiza las subastas como un juego con una única etapa de decisión en la que los potenciales compradores presentaban sus pujas) teníamos en cuenta una etapa adicional de decisión a cargo del vendedor. Así, de una manera explícita, en aquel apartado nos encontrábamos con que el vendedor realizaba su movimiento (la elección del sistema de subasta) con anterioridad a la presentación de las pujas. Este movimiento era observado por los potenciales compradores que, a continuación presentaban sus pujas. En todo caso, los compradores no tenían incertidumbre sobre las reglas ya que el vendedor no realizaba más movimientos en el juego.

Habíamos visto también que esta modificación (aunque suponía que las subastas pasaban, de ser un juego estático, a convertirse en uno dinámico) no afectaba a las estrategias de equilibrio de los potenciales compradores. Estos seguirían utilizando las mismas funciones de pujas que las que usaban cuando analizábamos las subastas como un juego estático.

Esto se debía a que cada opción disponible por el vendedor (es decir, cada tipo de subasta) da lugar a un subjuego definido apropiadamente (“proper subgame”). Por tanto, existirían tantos subjuegos como opciones dispusiera el vendedor. Esto implica que el primer paso consistiría en encontrar, de una manera independiente, la solución a cada uno de los posibles subjuegos finales. Como la “nueva” fase se añadía al principio del juego estos subjuegos finales equivaldrían a los juegos de subastas con una única etapa, no implicando, por tanto, cambios estratégicos sobre el análisis que trataba a las subastas como un juego de una única etapa de decisión.

Es decir, para “resolver” el juego había que empezar primero por la última fase para cada una de las posibles opciones del comprador. Por ello, al empezar a encontrar la solución por el final, la nueva fase que se ha introducido no afecta a los resultados de la última fase: la de presentación de las pujas por parte de los potenciales compradores en ese tipo concreto de subasta. De esta manera, interpretábamos los modelos que consideraban a las subastas como un juego estático como el primer paso para encontrar la solución al juego completo. Una vez solucionada la última fase para cada una de las opciones de subastas que tiene el vendedor a su disposición, el siguiente paso sería casi trivial. Consistiría en que el vendedor, a la vista de los resultados esperados por las diversas sistemas de venta a su disposición, elegirá aquel que maximice su utilidad esperada.

Adicionalmente, también habíamos comentado que en la literatura, de una manera general (en el caso de la teoría de las subastas óptimas) o de una manera parcial (al comparar los resultados de diferentes tipos concretos de subastas), se había dedicado especial interés, precisamente, a cual debería ser (al menos desde un punto de vista teórico) la decisión del vendedor sobre el tipo de subasta a utilizar en diferentes contextos.

Por todo ello, comentábamos que la introducción de esa fase no aportaba ninguna novedad al enfoque de las subastas como un juego estático y que se podía considerar incluido en este tipo de análisis.

Sin embargo, el paso que introducimos en este capítulo si va a implicar diferencias estratégicas en el juego. Al incluir una tercera etapa de decisión damos un paso más en la dinamización de nuestro modelo que, en este caso, si puede afectar al comportamiento de los potenciales compradores y, por lo tanto, a las pujas por ellos presentadas. Esto se debe a que la introducción de la nueva fase de decisión se realiza con posterioridad a que los potenciales compradores presenten sus pujas.

Por tanto, los potenciales compradores, antes de elaborar las pujas, tendrán que analizar y conjeturar cual será el posible resultado de esa última fase que tendrá lugar con posterioridad a su movimiento. Para analizar esa última fase habrá que realizar unos supuestos sobre cual sería el resultado en el caso de que el vendedor decida incumplir las normas y, sobre, como ese resultado afectaría a la función de ganancias tanto de los compradores como del propio vendedor (por ejemplo, esto supone analizar los posibles costes — tanto monetarios como en tiempo, en esfuerzo y en incertidumbre — que conlleva el proceso negociador que se abriría si se “incumple” y la necesidad, en su caso, de tener que actualizar los resultados obtenidos si la opción de incumplir implica un retraso significativo del momento de la culminación de la operación). También tendríamos que realizar supuestos sobre el conocimiento que los potenciales compradores tienen sobre la función de ganancias del vendedor, y sobre si las conjeturas que realizan en relación con el resultado, en caso de incumplimiento, son las mismas que las conjeturas que realiza el vendedor; y a su vez sobre lo que conoce el vendedor sobre las conjeturas que realizan los compradores, etc.

Para hacer manejable este análisis supondremos que en el caso de incumplir las normas se iniciaría una negociación y que el precio finalmente alcanzado en esa negociación sería “algo” superior al que se derivaría de aplicar las normas de la subasta a las pujas presentadas. En relación con el resto de los aspectos mencionados en el párrafo anterior plantearemos supuestos distintos que darán lugar a diferentes modelos.

En este capítulo 5, así como en el 6, partimos de que el “tipo” del vendedor es dominio público y, por tanto, conocido por los compradores. Plantearemos, asimismo, diferentes tipos de vendedores y analizaremos cual sería el resultado que podríamos esperar en cada caso. Para simplificar, las diferencias entre los posibles tipos de vendedores únicamente se basarán en los costes que soporten cuando decidan "incumplir" las normas.

En el capítulo 6 se analiza este mismo modelo cuando el vendedor realiza varias ventas de una manera sucesiva. De esta manera, nos introducimos en un campo no excesivamente desarrollado en la literatura. Es decir, normalmente, los modelos de subastas se centran en una única venta. A su vez, cuando analizan ventas sucesivas se suele centrar en el análisis del caso en que son los potenciales compradores los que se presentaban a las diferentes subastas, En este caso, la "reputación" relevante se refiere a los compradores y, por tanto, puede ser importante el análisis del comportamiento pasado de los potenciales compradores (ver apartado 4.6.- en el que se comenta, como ejemplo, el modelo de Bikhchandani, 1988). En contraste, en nuestro modelo, suponemos que los potenciales compradores se presentan a una única subasta y que, sin embargo, es el vendedor el que está presente en todas las ventas sucesivas. Los potenciales compradores, aunque sólo participen en una venta, van a tener disponible la información sobre cual ha sido el comportamiento del vendedor en las subastas anteriores. De este modo, el vendedor tendrá que tener en cuenta los efectos futuros de sus actuaciones presentes.

En el contexto de venta de empresas este modelo sería aplicable, por ejemplo, cuando una empresa o un holding decida desprenderse no de una sino de un conjunto de empresas. También para aquellas empresas o "holdings" en las que en el desarrollo de su actividad sea relativamente frecuente la compra y venta de diferentes empresas a lo largo del tiempo. Este sería el caso también de un Estado cuando decide emprender un programa de privatizaciones.

Sin embargo, no nos vamos a ocupar de aquellos casos en los que el encargado de ejecutar la venta lo realiza por encargo de su propietario, es decir de aquellas empresas (Bancos de Inversión, normalmente) cuya actividad consiste principalmente en la venta de empresas "por encargo" o en la ayuda y asistencia al vendedor en el proceso. En el caso de subastas de objetos que no son empresas el ejemplo claro de terceros no propietarios dedicados a la venta sería el de las Casas de Subastas o los portales de internet. Aunque en estas situaciones se presentan características comunes a las que encontraremos en nuestro análisis también existen características diferentes. Así, en cualquiera de estas situaciones los intereses de los encargados de realizar la venta, normalmente no tienen que coincidir exactamente con los intereses de los propietarios. Así, cobra especial importancia el sistema de remuneración y, en general, del sistema de incentivos que se establezcan entre ambas parte. Estos problemas son los analizados por la “Teoría de la Agencia”. En esta tesis no entraremos en esta problemática y por eso supondremos que el vendedor es al mismo tiempo el propietario.

Avanzamos que en el capítulo 7, complicaremos un poco más las cosas con el objetivo de hacer más interesante la interacción entre el vendedor y los sucesivos potenciales compradores. Consideraremos que los compradores no conocen el tipo del vendedor al que se enfrentan, es decir, desconocen el coste que tendrá el vendedor en caso de incumplir. Así, deberán realizar conjeturas sobre las probabilidades que asignan a que el vendedor sea de cada uno de los tipos posibles. Como el comportamiento del vendedor puede ser muy diferente según el tipo al que pertenezca, estas conjeturas jugarán un papel muy relevante en el modelo. Por eso, en esta clase de juego vamos a tener que definir que es lo que saben (y lo que no saben) los potenciales compradores sobre el vendedor, y que es lo que el vendedor sabe sobre lo que los vendedores saben, y lo que los compradores saben sobre lo que el vendedor sabe, etc.

Al modelizar esta situación introducimos información incompleta sobre el “tipo” del vendedor. De esta manera, los potenciales compradores tienen que actuar en un entorno de incertidumbre sobre dicha variable. Estos modelos son especialmente interesantes cuando consideramos juegos repetidos debido al papel que puede jugar la “reputación” de los jugadores. En nuestro caso la única reputación relevante sería la del vendedor ya que es el único que “repite” en el juego. La clave en nuestro modelo estaría en que el tipo del vendedor es fijado por la naturaleza con anterioridad a la primera venta, y que los potenciales compradores utilizarán la información que se deriva de las actuaciones del vendedor en las sucesivas ventas para ir actualizando sus conjeturas sobre el tipo del vendedor. De esta manera, el vendedor a la hora de tomar una decisión analizará no sólo sus efectos sobre los resultados del juego (venta) actual sino las posibles repercusiones sobre su reputación que, a su vez, puede tener efectos en las ventas futuras.

Llegados a este punto resaltamos que en los costes, ocasionados por la posible decisión de incumplir las normas (que hemos comentado que es la variable que utilizamos para definir los posibles tipos de vendedores), se incluyen los que se derivan de todas aquellas consecuencias negativas que se puedan producir en actividades diferentes a la de la venta sucesiva de empresas.

Se insiste en que la novedad consiste en el intento de desarrollar estos modelos en torno a la reputación del vendedor. En la literatura es más frecuente el desarrollo de modelos en los que los compradores se presentan de manera sucesiva en diferentes subastas y en los que, por tanto, se analiza la importancia que la reputación de los compradores tiene en el desarrollo del juego.

5.2.- DESCRIPCIÓN DEL MODELO

Como se ha planteado en el apartado 5.1.- anterior, en este capítulo, desarrollamos un modelo en el que el vendedor ya no tiene a su alcance la capacidad de auto-compromiso. Esto supone que los potenciales compradores tienen incertidumbre sobre las normas que finalmente aplica el vendedor. Para modelizar esta situación añadimos una tercera fase de decisión en la parte final del juego.

En esta nueva fase, el vendedor, después de observar las pujas presentadas, tiene que decidir si cumple o modifica las normas. Como suponemos que es un agente racional, para tomar esta decisión, el vendedor, analizará los costes y beneficios de cada una de las dos opciones y se decantará por la que maximice su utilidad. Por tanto, una variable relevante que se introduciría en este tipo de análisis sería el coste que le supone al vendedor el no cumplir con las normas. En este capítulo, al igual que en el siguiente, vamos a desarrollar un modelo con información completa sobre el tipo del vendedor. Esto implica que su función de ganancias es de dominio público, es decir, los costes y los beneficios esperados del vendedor (que se derivan tanto de la opción de cumplir como de la de incumplir) son conocidos con certeza por los potenciales compradores.

Aquí reside la diferencia básica con el modelo del capítulo 7, en el que elaboramos un modelo con información incompleta sobre el tipo del vendedor. Para ello, supondremos que los compradores no conocen cual es el coste que para el vendedor tendrá la opción de incumplir las normas.

En nuestro modelo utilizaremos los supuestos del “modelo de referencia” analizado en el apartado 3.3.-.

A continuación describimos el desarrollo temporal del juego al añadirle esta nueva fase:

1) El **vendedor** escoge un tipo de subasta entre el conjunto de subastas que tiene disponibles. El vendedor toma esta decisión sin tener conocimiento de las valoraciones que poseen los potenciales compradores y, naturalmente, sin conocer sus pujas. El vendedor hace público esta decisión. Por tanto, es un movimiento observado por los potenciales compradores. Como analizamos en el apartado 4.5.-, al colocar esta fase antes de la fase 2) en la que la naturaleza “elige” los tipos de los compradores, se posibilita que con posterioridad a cada posible decisión del vendedor se inicie un subjuego diferente que pueda ser analizado de forma independiente. Esto no sería posible si esta fase la colocásemos después de que la naturaleza eligiera los tipos, ya que en este caso existiría un único subjuego que coincidiría con el juego en su conjunto (para más detalles sobre esta cuestión nos remitimos al mencionado apartado 4.5.-). A efectos prácticos, esta fase no va a entrar en nuestro análisis, ya que este empezará a continuación de que el vendedor haya elegido el tipo de subasta. En concreto nos centraremos en la subasta al primer precio, aunque también realizaremos algún comentario sobre la subasta al segundo precio (se recuerda que, como se comentó en el apartado 3.3.-, asumiendo los supuestos del modelo de referencia estas subastas serían equivalentes, respectivamente, a la subasta holandesa y a la subasta inglesa respectivamente).

2) La **naturaleza** o el azar selecciona los “tipos” de los potenciales compradores. Los tipos vienen definidos por su valoración de la empresa (o cantidad máxima que pueden pagar sin incurrir en un excedente negativo). A la valoración del jugador i le denominamos v_i. Los tipos de los compradores se generan independientemente de la misma distribución de probabilidades, que supondremos – al igual que se hizo en el

Apéndice 3 — que es una distribución uniforme en el intervalo [V_{min}, V^{max}]. A cada vendedor se le revela su propio tipo pero no él de los demás. De esta manera, el tipo de cada jugador es una información privada. El resto de jugadores (incluido el comprador) sólo conoce la distribución de probabilidades de la que se han derivado[109]. Es decir, utilizamos un modelo simétrico con valoraciones privadas e independientes (“*independent-private-values model*”). En esta fase ningún jugador (aparte de la naturaleza) realiza ningún movimiento y, por tanto, en nuestra nomenclatura no sería una fase estricta de decisión. Es decir, sería una etapa ficticia introducida por motivos técnicos (modelizar la información privada sobre los tipos de los compradores), de acuerdo al modelo de Harsanyi (1967).

3) En esta fase **los potenciales compradores**, una vez observado la acción del vendedor y conocidas sus propias valoraciones, realizan su movimiento consistente en la presentación de sus pujas. De nuevo supondremos que, cuando se trata de subastas en sobre cerrado, los potenciales compradores presentan sus pujas de una manera simultanea (o, en cualquier caso, sin conocer caso las pujas de sus competidores). Hasta esta fase no existen modificaciones con el desarrollo temporal del modelo presentado en el apartado 4.5.-.

4) Después del movimiento de los compradores se le concede un nuevo el turno al **vendedor**. Este una vez conocido el resultado de la tercera fase, (es decir después de abrir los sobres que contienen las pujas) tendrá que elegir entre dos acciones que denominaremos “*C:Cumplir*” e “*I:Incumplir*”. La acción de “Cumplir” implicaría que el vendedor adjudicaría la empresa y determinaría el precio a pagar por el ganador de acuerdo a las normas que el mismo había establecido en la primera fase. Por el contrario, la acción de “Incumplir” supone que el vendedor procede a introducir variaciones en las normas y que esta modificación va a dar lugar a la apertura de una renegociación del precio con el ganador[110].

---

[109] De una manera implícita estamos suponiendo que la valoración del vendedor está por debajo de V_{min} (la cantidad mínima en que cualquier comprador podría valorar la empresa) ya que aceptará cualquier cantidad por encima de V_{min}. Adicionalmente, nuestro modelo funciona como si el precio mínimo se situara en V_{min}, con independencia de cual sea la valoración del vendedor. Recordamos que a lo largo de los capítulos 3 y 4 realizaron algunos comentarios sobre la política de precios mínimos óptimos desde el punto de vista del vendedor. En nuestro desarrollo no entraremos en estos aspectos.

[110] En este punto, evidentemente, existirían diversas alternativas. Por ejemplo, el

En la Teoría de Juegos normalmente se asume que todos los jugadores conocen la estructura del juego. En nuestro caso, esto implica que los potenciales compradores cuando presentan sus pujas conocen que el vendedor dispondrá de este último movimiento.

Para proceder al análisis de nuestro juego tendremos que construir las funciones de ganancias de los jugadores. Estas van a depender de las diferentes combinaciones de estrategias disponibles por los jugadores. De nuevo para simplificar los cálculos, supondremos que únicamente existen dos potenciales compradores, $N=2$, así como que esto es conocido por todos los jugadores.

El concepto de "estrategia" de los compradores no varía en relación con lo visto en los capítulos anteriores. Por ejemplo, en el caso de una subasta con sobre cerrado, la estrategia de los compradores consistiría en una puja para cada uno de los potenciales tipos que podría tener. Por tanto, la estrategia del comprador i consistiría en una función de puja $b_i=B_i(v_i)$, que está definida $\forall v_i \in [V_{min}, V_{max}]$. Como condición límite, supondremos que si el comprador es del tipo con la valoración mínima de la empresa V_{min}, entonces presentaría una puja igual a dicha valoración, es decir, $B_i(V_{min})=V_{min}$[111].

Por el contrario el concepto de "estrategia" para el vendedor se complica con la introducción de la última fase. Recordamos que toda estrategia debe incluir un plan de acción completa. Es decir debe especificar una acción para cada posible contingencia en que el jugador pueda verse involucrado. De esta manera, en el caso del vendedor una estrategia debería incluir: primero la elección de un tipo de subasta; y segundo, para cada combinación de pujas que los compradores pudieran presentar, una acción del espacio [*Cumplir*, *Incumplir*]. Es decir, la segunda acción del vendedor es contingente de las acciones de los compradores. Veamos varios ejemplos de estrategias del vendedor (supondremos que '*sp*' equivale a una *s*ubasta con sobre cerrado al *p*rimer precio y '*ss*' a una subasta con sobre cerrado al segundo precio):

"incumplimiento" podría dar lugar a una nueva ronda de mejoras de las ofertas.

[111] La justificación de esta condición la podemos basar en que, por un lado, tanto en una subasta al primer precio como en una subasta al segundo precio (que son las dos que vamos a considerar) el presentar una puja por encima de su valoración son estrategias dominadas y, por otro lado, en que el precio mínimo se fijaría precisamente en V_{min}.

a) Estrategia A: [sp , $Incumplir$ $\forall b_1,b_2$]. Es decir, elegiría una subasta al primer precio y después, una vez abiertas las pujas, incumpliría siempre con independencia de cuales hayan sido las pujas presentadas por los dos potenciales compradores.

b) Estrategia B: [ss , $Incumplir$ si $b_1>V_{max}/3$ y $Cumplir$ si $b_1\leq>V_{max}/3$]. En este caso la estrategia consistiría en elegir una subasta con sobre cerrado al segundo precio y después cumplir o incumplir en función del valor de la puja más alta (representada por b_1) sin importar cual sea el valor de la otra puja presentada. En concreto incumpliría si la puja más elevada es mayor que un tercio de la cantidad máxima que cualquier comprador pudiera estar dispuesto a pagar y cumpliría si la mencionada puja se sitúa en un nivel igual o inferior a un tercio del mismo valor.

En cualquier caso, al analizar el subjuego que se inicia con posterioridad a la primera acción del vendedor, nos centraremos únicamente en la segunda parte de la estrategia del vendedor y, normalmente, omitiremos la parte que se refiere a la elección del tipo de subasta.

Aunque hemos comentado que una estrategia del vendedor debería incluir una acción del espacio [*Cumplir, Incumplir*] para cada combinación posible de pujas que los compradores pudieran presentar, cuando nos referimos a una subasta al primer precio el vendedor sólo estaría interesado en la puja más elevada. Esto es debido a que (en un modelo con valoraciones independientes privadas) el resto de las pujas no tienen influencia en la valoración que el ganador realice de la empresa[112]. Esta valoración sería la relevante para la posible negociación del vendedor con el ganador. De este modo, podríamos olvidarnos de las pujas presentadas por el resto de participantes y expresar la estrategia del vendedor únicamente en función de la puja más alta (como se ha hecho en el caso de la estrategia B anterior).

Por lo que se refiere a la especificación de las funciones de ganancias de los jugadores (lo cual es necesario para tener bien especificado el juego) vamos a ver que el añadir la nueva fase incluye complicaciones. Recordamos que estas funciones ofrecen los

[112] Lo que si podría ocurrir, como vimos en el apartado 4.2.2.-, cuando nos encontramos con un modelo, al menos parcialmente, de “valor común”.

diversos niveles de utilidad alcanzados por los jugadores dependiendo de las posibles combinaciones de estrategias posibles. Como suponemos neutralidad al riesgo, las funciones de utilidad son lineales y las podemos expresar directamente en términos monetarios.

Así, en el caso de los potenciales compradores tendrán una utilidad cero en el caso de no conseguir la empresa (ya que suponemos que no incurren en costes de participación y sólo consideramos mecanismos de venta en que los perdedores no realizan ningún pago) mientras que si resultan ganadores su utilidad vendrá dada por la diferencia entre su valoración de la empresa y el precio pagado. Por tanto, hasta aquí sería similar a la situación de los capítulos anteriores. La diferencia proviene de que el precio pagado no sólo va a ser una función de las pujas presentadas sino que también dependerá de la decisión que el vendedor adopte en la última fase.

Utilidad Comprador i: $$U_i = \begin{cases} 0 & \text{si } b_i < b_j \\ (v_i - P) & \text{si } b_i > b_j \end{cases}$$

Para el vendedor, si suponemos que su precio de reserva (su valoración de la empresa) es cero, su utilidad vendría determinada por el precio obtenido en la venta (en el caso de que su precio de reserva tome otro valor simplemente habría que restarlo del precio obtenido). Sin embargo, en los párrafos siguientes vamos a introducir un nuevo parámetro que va a afectar a la función de ganancia del vendedor. Se trataría de los potenciales costes en los que podría incurrir en el caso de que optara por la opción de incumplir (a los que denominaremos K). Por tanto, K será igual a cero en el caso de "Cumplir" y mayores o igual a cero en el caso de "Incumplir". Asumiendo, que el vendedor está interesado por los ingresos netos de la venta entonces a su ingreso bruto (es decir, el precio obtenido) habría que restarle los posibles costes K. De esta manera su función de utilidad (asumiendo un precio de reserva igual a cero) sería:

Utilidad Vendedor: U_v= *Ingresos netos* = $P - K$

Asumimos que las preferencias de los jugadores cumplen los axiomas que permiten la utilización de funciones de utilidad del tipo de von Neumann-Morgenstern y que, por tanto, para elegir sus estrategias maximizarán su utilidad *esperada*. Por ejemplo, en el caso de los compradores en una subasta al primer precio, su estrategia no sólo va a influir en el precio que pagarían, en caso de ganar, sino también en las probabilidades de ganar (las que a su vez también influyen en la utilidad esperada). Este análisis no varía en relación con los capítulos anteriores.

Por su parte, a efectos prácticos la influencia de la última fase de decisión radica en que va a influir en la manera de calcular el precio a pagar por el ganador. De esta manera, el resultado de esta puja entraría tanto en las funciones de ganancias de los compradores como en la del vendedor.

Así, si el vendedor opta por la opción de "Cumplir" no cambia la manera de calcular el precio, que vendría determinado por las pujas presentadas y por las normas de la subasta escogida. Sin embargo, cuando el vendedor utiliza la acción de "Incumplir", se alteran las normas para fijar el precio. De esta manera, para las mismas pujas presentadas el precio resultante va a ser diferente. Como hemos comentado, para tener completamente especificado el modelo es necesario fijar como la opción de "Incumplir" afecta al precio. Empezaremos suponiendo que el precio esperado, en este caso, se situará por encima del que se obtendría si se aplicaran las normas de la subasta. Por tanto, tendríamos que los precios resultantes en una subasta al primer precio ($P_p(.)$) y en una subasta al segundo precio ($P_s(.)$) — los subíndices p y s se refieren a la subasta al primer precio y al segundo precio respectivamente, mientras que los superíndices C e I a las opciones de Cumplir e Incumplir — vendrían dados por:

$$(5.1.)\quad P_p(b_1, b_2)= \begin{cases} P_p^c(b_1, b_2) = b_1, & \text{si el vendedor “\textit{Cumple}”} \\ P_p^I(b_1, b_2) > b_1 & \text{si el vendedor “\textit{Incumple}”} \end{cases}$$

$$(5.2.)\quad P_s(b_1, b_2)= \begin{cases} P_s^c(b_1, b_2) = b_2, & \text{si el vendedor “\textit{Cumple}”} \\ P_s^I(b_1, b_2) > b_2 & \text{si el vendedor “\textit{Incumple}”} \end{cases}$$

Adicionalmente, en el caso de "Incumplir" el vendedor tendría que soportar los costes, K. Para intentar encontrar estrategias de equilibrio en este juego es necesario tener especificadas las funciones $P_p^I(.)$ y $P_p^S(.)$, en la subasta al primer y segundo precio respectivamente.

En el siguiente apartado se abordará esta tarea. En lo que queda del presente apartado se realizan unos comentarios genéricos tanto sobre este aspecto como sobre los costes en los que incurre el vendedor al incumplir.

El objetivo del vendedor cuando opta por incumplir es el de intentar elevar el precio de venta por encima del que se derivaría de aplicar las normas de la subasta. Cuando incumple, suponemos que se inicia una negociación con el ganador que será el que tenga una valoración más alta (ya que consideramos un modelo simétrico en el que los compradores se comportan de manera simétrica). Por tanto, para intentar encontrar un equilibrio a nuestro juego tendríamos que formalizar de alguna manera esta negociación. Una de las opciones sería adoptar algún modelo de negociación. Estos modelos plantean diversas problemáticas. Por un lado, pueden plantear problemas de indeterminación al ofrecer un intervalo continuo de posibles equilibrios. Por otro lado, en el caso, de que ofrezcan una "solución" bien determinada (por ejemplo, modelos tipo Rubinstein, 1982) necesitan tener especificados aspectos muy concretos del entorno. El problema de estos últimos reside en que son extremadamente sensibles (es decir, presentan poca consistencia) frente a ligeros y, en apariencia, poco significativos cambios en los supuestos que afectan al entorno institucional en que se desenvuelven. Es decir, el resultado del modelo está muy afectado por las decisiones que se adopten en su diseño.

Esta tesis no trata de enfrentarse a los modelos de negociación, sobre los que existe una amplia literatura. De esta manera, vamos a intentar simplificar esta última fase realizando diversos supuestos. Esto nos permitirá suponer un determinado resultado *esperado* de la renegociación que tendría lugar en el caso de que el vendedor elija la opción de Incumplir. Adicionalmente, supondremos que todos los jugadores (el vendedor y todos los potenciales compradores) asumen que (en media) este será el resultado de esta fase de negociación. Como se ha comentado, en el apartado siguiente describiremos que supuestos utilizamos para llegar a "nuestro" resultado esperado.

Recordamos que unos de los motivos que podrían justificar la adopción de un sistema de subasta por parte del vendedor era su desconocimiento de las valoraciones de la empresa de los potenciales compradores. Adicionalmente, esta información privada que dispone cada comprador era lo que impedía que el vendedor, aun cuando supusiéramos que poseía todo el poder de negociación, extrajera de una manera completa el excedente de la transacción. Precisamente, el conocimiento de las pujas proporciona una información al vendedor sobre la valoración que los compradores tienen de la empresa. Por tanto, esa información adicional va a dotar al vendedor, en una renegociación posterior, de una teórica ventaja en relación con la situación que se plantearía si el vendedor decidiera iniciar una negociación desde el principio sin realizar previamente una subasta.

Este argumento, basado en la información que contienen las pujas, va a ser esencial para sostener el supuesto de que, con la opción de "Incumplir", el vendedor conseguiría un precio "algo" superior al que se derivaría de aplicar las normas de la subasta a las pujas **ya** presentadas.

Hemos resaltado la palabra "ya" en la frase anterior porque una de las claves de nuestros modelos es que (de acuerdo a la hipótesis de expectativas racionales implícita en los modelos de Teoría de Juegos) los potenciales compradores conocen los incentivos del vendedor y, por tanto, reaccionan anticipándose a su posible comportamiento esperado. De esta manera, las pujas que presenten los potenciales compradores van a depender de sus expectativas sobre cual será el comportamiento del vendedor en esta última fase. Normalmente, cuanto mayor sea la probabilidad que los potenciales compradores asignen a que el vendedor elegirá la opción de "Incumplir" menores serán las pujas que presenten. Con estos comentarios intentamos explicar (de momento de una manera aproximada) la importancia de diferenciar la comparación entre el precio esperado antes de presentar las pujas y el precio que se puedan esperar (del cumplimiento o incumplimiento de las normas) una vez que las pujas ya han sido presentadas. El primero sería una función de las pujas esperadas las cuales a su vez dependerán de las expectativas de los compradores sobre el futuro comportamiento del vendedor. El segundo ya se basaría en los valores ciertos de las pujas efectivamente presentadas.

Mencionaremos, también que, en situaciones extremas, podrían ocurrir que los compradores no presentaran pujas para evitar revelar información que pueda ser utilizada en la fase posterior de negociación. En este caso, el resultado sería equivalente a que el vendedor iniciara las negociaciones directamente sin realizar la subasta previamente.

Por otra parte, al abrir una fase de negociación se pueden generar costes adicionales, de diversa naturaleza, tanto a los compradores como al vendedor. Por ejemplo, mientras está abierta una negociación se tiene que tener personal propio ocupado parcial o totalmente en las tareas derivadas de dicha negociación (que, por tanto, no se pueden dedicar a otras tareas o a otras negociaciones). Adicionalmente, es frecuente que en los casos de compra-venta de empresas se contrate a un asesor externo (normalmente un Banco de Inversión) para que ayude en las negociaciones por lo que la apertura de esta fase puede originar la necesidad de contratar, o de prolongar los contratos, a estos asesores.

Por otra parte, las negociaciones también necesitan de tiempo y, en ocasiones, el periodo de negociación llega a ser muy dilatado. Esto podría provocar que al resultado esperado de la negociación, para expresarlo en términos actuales (y poder compararlo con el precio obtenido en caso de Cumplir), se le tendría que aplicar una tasa de descuento. Para comparar alternativas habría que tener en cuenta también, los costes derivados de la incertidumbre que se generan al abrir la fase de renegociación debido al desconocimiento existente sobre su duración y sobre el resultado que finalmente se alcanzará.

La prolongación en el tiempo de la operación y la incertidumbre que genera, ocasionan otro tipo de costes más difíciles de medir pero que pueden ser significativos. Por ejemplo, puede provocar un deterioro de la empresa en venta debido a la dinámica que genera la sensación de transitoriedad. Esto puede tener efectos sobre la motivación del personal de la empresa en venta (también puede afectar a la empresa compradora sobre todo cuando el tamaño de la empresa a comprar es relativamente grande en relación con el suyo) o influir en las relaciones con clientes, proveedores, acreedores, financiadores, etc.

Se podrían citar, entre otros, dos ejemplos de las privatizaciones españolas en los que la prolongación en el tiempo del proceso de venta, puede haber sido una de las causas que originó el deterioro de la situación de la empresa: ENASA y Backock &

Wilcox. En ambos casos, el proceso de venta se dilató en exceso debido a que la primera opción de venta escogida se frustró y se reabrió un nuevo proceso de venta. Las causas fueron diferentes: en el primer caso se debió a una decisión contraria de las autoridades de la competencia europeas mientras que, en el segundo caso, el origen estuvo en los importantes problemas por los que atravesó el comprador elegido que (antes de haber llegado a un acuerdo definitivo) tuvo que enfrentarse a una fuerte reestructuración interna. En los dos ejemplos el valor de la empresa finalmente alcanzado en la segunda fase fue significativamente más reducido de lo que se desprendía de las condiciones pactadas en las primeras opciones frustradas.

También podrían existir otro tipo de costes indirectos para el vendedor. Así, el incumplimiento de las normas podría originar una mala imagen y una pérdida de “buena reputación” que podría tener efectos secundarios en el resto de las actividades desarrolladas por el vendedor, en la que podría sufrir algún tipo de penalización. Por ejemplo, si el vendedor es una empresa puede adquirir una imagen de poco fiable ante sus proveedores, sus clientes o incluso ante sus trabajadores y eso puede entorpecer (o encarecer) el desarrollo de muchas actividades en las que la confianza y la credibilidad juegan un papel importante. Si el vendedor es un Estado, aparte de otras repercusiones en la imagen pública, el incumplir sus compromisos podría afectar a la calificación de su deuda con lo que se elevaría la prima de riesgo exigida por los inversores.

En nuestro modelo resumiremos toda esta información en una variable (a la que llamaremos K) que recogería todos estos costes “extras” que tendría que soportar el vendedor si decide optar por la opción de “Incumplir”. Sin embargo, supondremos que los compradores no incurren en ningún coste adicional, aparte del que se deriva de tener que pagar un mayor precio, si el vendedor opta por “Incumplir”. Uno de los casos analizados será cuando K=0 que tendrá una especial importancia como caso de referencia. Como ya se ha dicho, en este capítulo y en el siguiente supondremos que K es de dominio público. Esto supone que, es conocido tanto por el propio vendedor como por los compradores; que el vendedor sabe que los compradores lo conocen; que lo compradores saben que el vendedor sabe que ellos conocen el valor de K; etc. Por su parte, en el capítulo 7 supondremos que K es información privada del vendedor y que, por tanto, es desconocido por los compradores que sólo conocen la distribución de probabilidad que ha generado dicho valor.

Por tanto, el "Incumplir" da lugar al inicio de una teórica fase de negociación en exclusiva con el teórico ganador. Indudablemente podríamos haber contemplado otras posibles alternativas algunas de ellas con alguna difusión en la práctica. La gama de opciones podría ser muy variada. Por ejemplo, se podrían iniciar negociaciones simultáneamente con varios de los potenciales compradores (normalmente se elegiría a los que mejor han quedado situados en la subasta). Es decir, en este caso se intentaría prolongar la "presión competitiva" entre los compradores en las negociaciones frente a la inexistencia de esta presión en las negociaciones en exclusiva que se deriva de nuestro supuesto. A su vez esta opción podría plantear numerosas alternativas según como el vendedor maneje la información que se va derivando de las negociaciones con los diferentes candidatos (esta información se podría ir suministrando a uno o varios de los compradores con el fin de incentivar mejoras en sus respectivas ofertas o mantenerse oculta a todos). También existirían otras alternativas en las que, en lugar de negociar, el vendedor permitiera (en contra de las normas de la subasta[113]) presentar sucesivas rondas para mejorar la oferta inicial. Es decir, si se diera este caso, lo que el vendedor estaría realizando sería un cambio de tipo de subasta (por ejemplo, desde una subasta al primer precio a una subasta inglesa o ascendente) pero este cambio lo realizaría una vez que se han presentado las primeras pujas.

Las opciones, por tanto, serían muy amplias. El objetivo de nuestro modelo, sin embargo, no es el estudio del posible desarrollo de esta fase adicional sino el análisis del efecto que la incertidumbre sobre cual será el comportamiento del vendedor origina en el comportamiento de los potenciales compradores, así como el papel que juega la "reputación[114]" del vendedor cuando el juego es repetido.

Para ello, realizaremos supuestos simplificadores que nos permitirán atribuir un determinado resultado "esperado" a la opción de "Incumplir". De esta manera, este resultado esperado será el que utilicen los distintos jugadores para analizar sus opciones.

---

[113] Podría ocurrir que las normas de la subasta lo permitieran desde un principio, con lo que lógicamente, no habría incumplimiento y los compradores lo tendrían en cuenta a la hora de presentar sus pujas.

[114] En ocasiones en Teoría de Juegos se utiliza esta palabra para referirse a diferentes situaciones. De una manera precisa, se necesitaría que existiera información incompleta sobre el jugador que repite, lo cual no será planteado hasta el capítulo 7, aunque en ocasiones este término se utiliza en contextos con información completa sobre los tipos de los vendedores.

5.3.- ESPECIFICACIÓN DE LA DETERMINACIÓN DEL PRECIO

Como se recoge en las expresiones (5.1.) y (5.2.), la determinación del precio en función de las pujas presentadas, esta especificado únicamente en el caso de que el vendedor utilizará su acción de “Cumplir”. Sin embargo, en el caso contrario el precio a pagar lo tenemos indeterminado. La única característica que hemos avanzado es que sería mayor o igual al precio que se alcanzaría con la opción de “Cumplir”. La tarea de este apartado, sería la de completar las mencionadas expresiones (5.1.) y (5.2.) asignando una forma funcional concreta al precio esperado que se alcanzaría si el vendedor opta por “Incumplir” (es decir, a las funciones $P_p^I(.)$ y $P_p^S(.)$). Pero antes de abordar esta tarea realizaremos algunos comentarios.

Hemos visto, en el apartado anterior, que cada una de las opciones del vendedor en la primera fase (en la que elegía el tipo de subasta) daba lugar a un subjuego independiente. Por tanto, siguiendo el sistema de resolución por “inducción hacia atrás” para encontrar una solución al juego en su conjunto, deberíamos resolver primero cada uno de esos subjuegos. Dicho de otra manera, podemos estudiar el resultado obtenido por cada tipo de subasta de una manera independiente. Nos vamos a centrar en la subasta con sobre cerrado al primer precio (aunque con alguna referencia a la subasta con sobre cerrado al segundo precio).

Por tanto, una vez que hemos asumido una hipotética acción del vendedor en esta primera fase nos podremos centrar en las fases restantes (que formarían un subjuego). Se puede constatar que este subjuego no incluye, a su vez, otros subjuegos. Esto se debe a que en la fase en que se inicia, es cuando la “naturaleza” realiza su movimiento generando los tipos de los compradores. Por tanto, a partir de ese momento, los jugadores ya no tienen toda la información sobre cual ha sido el resultado de los movimientos previos. De esta manera, sus conjuntos de información ya no estarán formadas por un único nodo (que era una de las condiciones para que se pudiera iniciar un nuevo subjuego, como vimos en el apartado 4.5.-). El nodo en el que la naturaleza toma su decisión es el último nodo del juego que cumple con esta condición y, por ello, el subjuego que comienza en ese nodo ya no puede incluir subjuegos adicionales.

Efectivamente los conjuntos de información siguientes (que se corresponderían con las fases en la que los potenciales compradores presentan sus pujas y en la que el vendedor opta por "Cumplir" o "Incumplir" las normas) estarían compuestos por más de un nodo ya que, teóricamente, a cada una de las posibles combinaciones de tipos de los diferentes jugadores que la naturaleza pudiera elegir[115], le correspondería un nodo diferente.

Por otra parte, si nos centramos en el subjuego (y lo tratamos como si fuera un juego en si mismo) al añadir una fase nueva de decisión después de que los compradores presentan las pujas estamos ante un juego dinámico (esto contrasta con lo que ocurría en el apartado 4.5.- en el que el juego en su conjunto era dinámico pero los subjuegos a que daban lugar cada decisión sobre el tipo de subasta eran estáticos). Como existen varias fases sucesivas de decisión nos encontremos con la necesidad de evitar que en nuestros equilibrios se introduzcan estrategias que incluyan "amenazas" o "promesas" no creíbles. Sin embargo, ante la inexistencia de subjuegos (adicionales) no podemos utilizar la perfeccionen subjuegos para eliminar las estrategias que incluyan acciones que carezcan de credibilidad. Expresado de otra manera, cualquier "Equilibrio de Nash" (o "Equilibrio Bayesiano de Nash") cumpliría trivialmente el requisito adicional requerido por el "Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos" debido a la inexistencia de subjuegos.

Por tanto, para enfrentarnos a los problemas de credibilidad que surgen en los juegos dinámicos (que en nuestro caso aparecen con la acción del vendedor en el último movimiento) tendríamos que recurrir a otro concepto de equilibrio. Para ilustrar donde reside el problema podemos recurrir a suponer que, si una vez que se alcanzase el nodo en el que el vendedor toma su decisión sobre si cumplir o no, se iniciara un subjuego

[115] En nuestro caso como el espacio de tipos es continuo, estas combinaciones sería infinitas.

entonces el requisito de perfección en subjuegos exigiría que la acción que tomara el vendedor constituyera un equilibrio de Nash en ese subjuego (además de serlo en el juego completo). Esto equivaldría a que “ex ante” el vendedor no podría prometer el llevar a cabo una acción que llegado ese momento no fuera óptima para él. Sin embargo, como el vendedor tiene información incompleta sobre los tipos de los vendedores su nodo de decisión no inicia un subjuego y consecuentemente no se puede aplicar este razonamiento.

Para estas situaciones la Teoría de Juegos ha desarrollado algunos conceptos de equilibrio como el llamado “*Equilibrio Bayesiano Perfecto*”, que será el que utilicemos en el resto de la tesis. Cuando aplicamos esta noción de equilibrio a nuestro modelo observaremos que, el concepto de “racionalidad sucesiva de las estrategias” jugará un papel parecido al de la perfección en subjuegos. En el apartado 5.5.- analizaremos este concepto de equilibrio y su aplicación a nuestro modelo pero antes, para tener totalmente especificado nuestro juego (en lo que se conoce como forma normal o estratégica), debemos especificar las funciones de ganancias que habían quedado indeterminadas cuando el vendedor optaba por Incumplir.

Para ello, empezaremos analizando el comportamiento del vendedor una vez que ya ha abierto las pujas presentadas. En un juego con una única venta, una vez que el vendedor conoce las ofertas presentadas, comparará la utilidad que le proporcionaría la opción de cumplir (a la que llamaremos, U_v^C) con la utilidad que le reporta la opción de incumplir (U_v^I). Lógicamente, se decanta por aquella acción que lleva asociada una mayor utilidad. En ambos casos, dados los supuestos que hemos realizado la utilidad vendrá dada por los ingresos netos (In) obtenidos.

Las pujas presentadas las ordenaremos en función de su cuantía llamando b_1 a la puja más alta (y b_2 a la segunda puja más alta). Recordemos que estamos considerando que sólo se presentan dos compradores y, por tanto, b_1 y b_2 constituirían todas las pujas presentadas.

Con la opción de “Cumplir”, el vendedor obtiene unos ingresos netos iguales al precio. Este a su vez, viene definido en las ecuaciones (5.1.) y (5.2.) como $P_p^c(b_1,b_2)= b_1$ y $P_s^c(b_1,b_2)= b_2$ para las subastas al primer y segundo precio respectivamente.

En el caso de "Incumplir" el ingreso neto del vendedor vendría determinado por dos componentes: a) el precio que, aunque también sería una función de las pujas presentadas, sería distinta a la que se deriva de las normas de la subasta (a estas funciones las hemos denominado $P_p^I(b_1,b_2)$ y $P_s^I(b_1,b_2)$, respectivamente para las subastas al primer y segundo precio, cuya especificación será nuestra tarea inmediata; y b) del coste que le ocasiona incumplir al que hemos denominado K.

Ya hemos comentado que el supuesto básico que haremos es que el precio esperado en el caso de que el vendedor decida "Incumplir" va a ser mayor que si opta por "Cumplir". Sin embargo, para calcular los ingresos netos a ese precio esperado mayor habría que restarle los costes recogidos en K. Es decir, hasta este momento, prácticamente, nos hemos limitado a argumentar que en la fase de negociación se produciría un incremento del precio sin ofrecer ninguna pista sobre cual podría ser la magnitud de este incremento. Pero ahora necesitamos cuantificar esa magnitud para introducirlo en la función de ganancias de los jugadores (tanto en la de los compradores como en la del vendedor).

Expresado de otra manera, para poder comparar las ganancias que se obtienen con "Incumplir" frente a sus costes necesitamos dar una forma específica a la función $P_p^I(b_1,b_2)$ en el caso de una subasta al primer precio, o a $P_s^I(b_1,b_2)$ en la subasta al segundo precio. Intentaremos que estas funciones no sean completamente arbitrarias sino que cumpla con unas características "razonables" que se deriven de un comportamiento optimizador de los jugadores. Para ello, seguiremos los pasos siguientes:

Paso 1: En primer lugar, calcularemos el intervalo factible en el que asumiremos que se debería situar el precio después de la negociación. Este intervalo quedaría definido al calcular sus límites inferior y superior. El primero es relativamente fácil de calcular. Supondremos que el límite inferior sería igual al precio que se deduciría de aplicar las normas de la subasta a las pujas presentadas. Por tanto, en la subasta al primer precio este límite sería la puja más alta (y en la subasta al segundo precio, la segunda puja más alta). Este supuesto lo podríamos soportar en el hecho de que el vendedor no aceptaría un resultado inferior del que ya tendría asegurado simplemente con cumplir las normas[116].

Para calcular el límite superior analizaremos la información de la que dispone el vendedor sobre la valoración del ganador. Así, el vendedor podría intentar extraer la información incluida en las pujas presentadas. Es decir, podría intentar deducir la valoración del ganador de la puja que ha presentado. Para ello, tendrá que asumir que los compradores están "jugando" algún equilibrio.

Este razonamiento nos permite situar el límite superior de la banda en la valoración del ganador que se deduce, en equilibrio, de su puja. La justificación de este supuesto se basa en que, dada la información de que dispone, esta sería la mejor estimación que el vendedor podría realizar de la cantidad máxima que el ganador esta dispuesto a pagar. Al mismo tiempo, los compradores conocen la información de la que dispone el vendedor y pueden anticipar que el vendedor realizará el razonamiento anterior.

Una vez "deducida" la valoración del comprador, a través de la inversa de la función de puja, quedaría definido el intervalo factible dentro del cual vamos a asumir que culminará la negociación[117]. Si consideramos que, en equilibrio, los compradores utilizan una determinada función de puja, por ejemplo $b_i=B(v_i)$, entonces la función inversa nos proporciona la valoración en función de la puja presentada, $v_i=B^{-1}(b_i)$. De esta manera, el vendedor al conocer las pujas presentadas podría deducir las valoraciones de las que se han derivado. Por tanto, por ejemplo, en la subasta al primer precio el intervalo que estamos buscando vendría dador por $[b_1,B^{-1}(b_1)]$. En el caso de las subasta al segundo precio este intervalo sería $[b_2,B^{-1}(b_1)]$, aunque evidentemente la función de puja de equilibrio $B(.)$ sería diferente.

---

[116] Sin embargo, podríamos imaginar situaciones en las que ante el incumplimiento del vendedor el comprador "retire" su puja.

[117] Como veremos en algunos casos este razonamiento no sería aplicable, ya que podría ocurrir que, en equilibrio, todos los compradores, con independencia de su tipo, presentaran una puja igual a la valoración mínima. En este caso, las pujas no serían informativas (cuando la valoración mínima es igual a cero podría equivaler a que los compradores no se presentan a la subasta, precisamente para no revelar información que pueda ser utilizada en la negociación posterior). Por tanto, el razonamiento anterior se aplicaría para aquellos casos que, en equilibrio, originen unas pujas mayores que la valoración mínima.

Paso 2: Una vez calculado el intervalo factible necesitamos precisar en que punto se situará el precio. Ya hemos comentado que no vamos a desarrollar un modelo de negociación. Simplemente asumiremos que el precio esperado (tanto por el vendedor como por los compradores) se situará en la mitad de dicho intervalo. Como razonamiento de este supuesto podemos esgrimir que, ante la falta de información, todos los resultados dentro de dicho intervalo serían igualmente probables. Es decir, el resultado de la negociación seguiría una distribución uniforme dentro del intervalo factible. De esta manera, el resultado esperado será la media o la esperanza matemática de dicha distribución que, en el caso de distribuciones uniformes, coincide con el punto medio. Otra posible línea argumental podría ser la de asumir que el punto medio del intervalo factible es un buen candidato para constituir un "punto focal", en el sentido de Schelling (1960), que permite la convergencia de expectativas de los participantes de la negociación.

A continuación, aplicaremos estos dos pasos para obtener la función que se utilizarían para fijar el precio en caso de que el vendedor opte por "Incumplir" en una subasta con sobre cerrado al primer precio (también haremos algún comentario sobre la subasta al segundo precio). Supondremos que tanto el vendedor como los potenciales compradores tienen las mismas expectativas sobre cual sería esta función (que determina el precio, en caso de que la opción de incumplir fuera la seleccionada). Este es un supuesto habitual en Teoría de Juegos aunque, en ocasiones, puede ser poco plausible.

5.3.1.- Subasta al primer precio

En la subasta al primer precio (y en un contexto de valoraciones privadas e independientes como el que estamos considerando) podemos sustituir el vector de las pujas presentadas $(b_1\ ,\ b_2)$ por la puja más alta b_1. Nos podemos permitir esta simplificación debido a que el precio sólo dependerá de la puja más alta tanto en la función $P_p^c(.)$ como en $P_p^I(.)$. Es decir, ya hemos visto que cuando se aplican las normas de la subasta el precio sólo depende de la puja más alta (de hecho coincide con ella).

Pero, cuando se "Incumple", de acuerdo a los pasos mencionados previamente, también ocurre el precio sólo estará en función de la puja más alta presentada[118].

Por tanto, la utilidad que le reporta al vendedor las dos opciones de las que dispone una vez que se han presentado las pujas, las podemos expresar de la siguiente manera:

(5.3.) *Utilidad del Vendedor*, U_v= $\begin{cases} U_v^C = In = P_p^C\,(b_1) = b_1 & \text{, si “\textit{Cumple}”} \\ U_v^I = In = P_p^I\,(b_1) - K & \text{, si “\textit{Incumple}”} \end{cases}$

También sabemos que el precio, en el caso de que el vendedor decida incumplir, va a ser mayor que si opta por cumplir. Por tanto,

(5.4.) $P_p^I(b_1) > P_p^C(b_1) \qquad \forall\ b_1 \in > (V_{min},\ V_{max})$

Dejamos el intervalo abierto debido a la especificidad que representan las pujas en alguno de los dos extremos[119].

El vendedor incumpliría cuando los beneficios de hacerlo superen a sus costes. Es decir, cuando el incremento del precio que espera conseguir en la negociación supere a

---

118 La segunda parte de esta afirmación quizás no es tan evidente como la primera. Si el conocimiento del el resto de las pujas afectara a la valoración que el ganador tiene de la empresa (lo que ocurriría en un modelo que tiene un componente de valor común) entonces sí podrían ser relevante estos datos para el vendedor. Sin embargo, en un modelo con valores independientes privados el conocimiento del resto de las pujas no afecta a la valoración que los compradores tienen de la empresa y, por ello, el vendedor no podría extraer, en nuestro caso, ninguna información útil para su propósito de estimar la valoración del ganador.

119 Así, en el caso de que la puja sea igual al valor más alto posible la desigualdad (5.4.) se transformaría en igualdad debido a que el comprador ya está ofreciendo la cantidad máxima que cualquier vendedor estaría dispuesto a pagar. Y, en el caso, de que la puja sea igual a la valoración mínima, podríamos realizar dos hipótesis. La primera, que el comprador efectivamente tiene dicha valoración de la empresa y, por tanto, no estaría dispuesto a pagar una cantidad mayor. La segunda que aunque tenga una valoración superior de la empresa ha presentado la puja mínima por razones estratégicas, es decir, para no revelar información al vendedor que podría utilizar en una posterior negociación. Por tanto, el precio podría superar a la puja si esta segunda razón fuera la correcta pero no lo podría hacer si la primera razón fuera la que explicara el comportamiento del comprador.

los costes que le origina el incumplimiento de las normas de la subasta. Así, de acuerdo a (5.3.) para adoptar la acción de incumplir se tendrá que verificar la siguiente condición:

(5.5.) *El vendedor incumple si* $U_v^I > U_v^C \Leftrightarrow P_p^I(b_1) - K > P_p^C(b_1) = b_1 \Leftrightarrow \boxed{P_p^I(b_1) - b_1 > K}$

Se puede observar que si conocemos $P_p^I(b_1)$ (una vez que se han presentado las pujas) una de las dos acciones que puede adoptar el vendedor dominará a la otra. Es decir, si se cumple la desigualdad (5.5.) la opción de "Incumplir" será la dominante y si se cumple la desigualdad inversa dominará la opción de "Cumplir". Esto implica que, aun en el caso de que pudiera mejorar "ex-ante" su ingreso neto esperado, el vendedor no podrá utilizar estrategias mixtas[120] ya que carecerían de credibilidad al otorgar una probabilidad mayor que cero a una estrategia estrictamente dominada[121]. Por tanto, podemos descartar las estrategias mixtas para esta fase.

Para el cálculo de $P_p^I(b_1)$ aplicaremos los dos pasos mencionados. En primer lugar, calcularemos el intervalo factible dentro del que se podría situar el precio de la negociación. El límite inferior sería el precio que se derivaría de aplicar las normas de la subasta, es decir, en el caso de la subasta al primer precio, b_1. Para el límite superior tendríamos que conocer la función de puja que están utilizando los compradores, para a través de su inversa, calcular la valoración del ganador[122].

En una primera aproximación (que podríamos denominar como de "racionalidad limitada" del vendedor) podríamos suponer que el vendedor conoce la "teoría básica de subastas" (presentada en el capítulo 3) y que asume que los compradores se comportaran jugando el conocido equilibrio simétrico de una subasta al primer precio, en la que se conoce con certeza que se van a cumplir las normas. Esta función de puja (a la que llamaremos $B^C(v_i)$) ya la hemos deducido por dos métodos distintos en el mencionado

---

[120] Estas estrategias implican que para adoptar su acción el jugador recurre a un mecanismo aleatorio que asigna determinadas probabilidades a sus opciones disponibles.

[121] Utilizando la noción del Equilibrio Secuencial o Equilibrio Bayesiano Perfecto, que se explicarán en el apartado (5.4.) deberíamos decir que no cumplen con el requisito de ser sucesivamente racionales.

[122] Para aplicar este razonamiento es necesario que exista la función inversa. Esto se cumpliría si las funciones de puja son monótonamente crecientes en las valoraciones tal y como estamos asumiendo.

capítulo 3, y aparece tanto en la ecuación (3.14.) como en la (3.19.). La reproducimos a continuación.

$$b_i = B^C(v_i) = (v_i+V_{min})/2$$

Por tanto, si el vendedor asume que esta es la función de puja que han utilizado los compradores, sería inmediato calcular la valoración que se deriva de la puja presentada. Así,

$$v_i = B^{C\ -1}(b_i) = 2\ b_i - V_{min}.$$

De esta manera, dado el razonamiento del vendedor, el límite superior del intervalo factible que estamos buscando, sería el doble de su puja ($2b_i$) menos el valor mínimo que cualquier potencial comprador pudiera tener de la empresa (V_{min}). Por tanto, este sería el límite máximo de la banda que estamos buscando.

Así, el intervalo factible quedaría,

$$[b_1\ ,\ B_C^{-1}(b_1)] = [b_1\ ,\ 2b_1 - V_{min}]$$

Calculado este intervalo el paso 2 sería inmediato ya que consistiría en calcular su punto medio. Por tanto, la función del precio en caso de incumplir, que estamos buscando sería:

$$P_p^I(b_1) = (b_1+2b_1 - V_{min})/2, \text{ de donde,}$$

$$\boxed{P_p^I(b_1) = 3b_1/2 - V_{min}/2} \quad (5.6.)$$

Evidentemente, el precio que se deriva de la función $P_p^I(b_1)$ de (5.6.) es mayor que el precio que se deriva de la función, $P_p^C(b_1)$, (que, simplemente sería la puja del ganador, b_1). Por tanto, (5.6.) cumple la condición (5.4.). En concreto $P_p^I(b_1) - P_p^C(b_1) = b_1/2\text{-}V_{min}/2 \geq 0$. Esta diferencia es siempre mayor que cero ya que $b_1 \geq V_{min}$, con la excepción del caso en que $b_1=V_{min}$. Es decir, en media, nuestros supuestos efectivamente implican que, con la negociación, el vendedor es capaz de elevar el precio (en una cantidad equivalente a ½ de la puja presentada menos la mitad de la valoración mínima).

De esta manera, para la subasta al primer precio, ya podríamos completar la función de precio que habíamos quedado incompleta en (5.1.).

(5.7.) $$P_p(b_1)= \begin{cases} P_p^{c}(b_1) = b_1 & \text{si el vendedor “}\textit{Cumple}\text{”} \\ P_p^{I}(b_1) = 3b_1/2 - V_{min}/2 & \text{si el vendedor “}\textit{Incumple}\text{”} \end{cases}$$

En el resto de la tesis, asumiremos que la función de precio recogida en (5.7.) será la que se aplica a las subastas al primer precio. Asimismo, asumiremos que todos los jugadores (tanto los compradores como el vendedor) la conocen y la tienen en cuenta en el momento de calcular sus respectivas utilidades esperadas. Sin embargo, anticipamos que el razonamiento utilizado para deducir dicha función presenta una debilidad importante que reside en la “racionalidad limitada” que le hemos supuesto al vendedor al estimar la función de puja que están utilizando los compradores.

Recordamos que cuando el vendedor infiere la valoración del comprador a través de las pujas que presenta razona como si los compradores se comportara igual que si tuvieran la certidumbre de que se van a cumplir las normas de la subasta. Sin embargo, como vamos a analizar inmediatamente, cuando los potenciales compradores anticipan que pueden existir probabilidades positivas de que el vendedor pueda modificar las normas, entonces a su vez, alterarían su comportamiento, utilizando otra función de puja (normalmente para la misma valoración presentarán pujas menores). De esta manera, no permitimos que el vendedor pueda anticipar estos cambios (de ahí la racionalidad limitada que mencionábamos) y su conjetura sobre la función de puja de los compradores provocaría una infravaloración de la valoración de los compradores.

El objetivo del apéndice 5.1. es enfrentarse a esta debilidad. En él obtenemos el mismo resultado para la función $P_p^{I}(b_1)$, pero permitiendo una racionalidad completa del vendedor. Sin embargo, para ello es necesario calcular la función de puja que utilizarían los compradores cuando anticipan que el vendedor va a incumplir y, por ello, antes de remitirnos a este apéndice calcularemos esta función asumiendo que el valor de $P_p^I(b_1)$ viene dado por (5.7.).

Para simplificar nuestro razonamiento partiremos de una situación en la que los compradores tengan la certeza de que el vendedor incumplirá con independencia de cual sea la puja del ganador. Para ello, podemos suponer que los costes de incumplir K son nulos (se recuerda que como se está suponiendo que K es de dominio público es, por tanto, conocido por los compradores). De esta manera, como la opción de "Incumplir" no tiene ninguna repercusión negativa para el vendedor, la condición (5.5.) se cumplirá siempre. Es decir, $P_p^I(b_1) - b_1 > K = 0$ para cualquier b_1. Dicho en otras palabras, desde el punto de vista del vendedor los beneficios adicionales de incumplir (en forma de un mayor precio) siguen existiendo mientras que desaparecen los costes.

Por tanto, con el supuesto de que $K = 0$, una vez que los compradores hayan presentado sus pujas, la opción de "Incumplir" constituye una estrategia dominante (el vendedor obtendrá una resultado mejor con esta opción sean cuales sean las estrategias que hayan seguido el resto de jugadores).

Esto posibilita una simplificación del juego ya que podríamos asumir que esta será la opción elegida por el vendedor y que, además, los potenciales compradores (que conocen que los costes de incumplir son nulos) anticipan que efectivamente esta será la acción del vendedor en esa fase. De esta manera, podríamos eliminar la última etapa del juego incorporando sus resultados a las funciones de ganancias de los compradores. Esto nos daría una estructura del juego similar a la del apartado 3.3.2.- aunque con una función de ganancias diferente. Es decir, volvemos a convertir nuestro juego (subjuego deberíamos decir) en un juego estático de decisión simultanea y, por tanto, podremos aplicarle la noción de Equilibrio Bayesiano de Nash descrito en el capítulo 3. Una vez que hayamos dado este paso la solución del juego la obtendríamos, de una manera similar a la utilizada en el apéndice al capítulo 3 [123].

---

[123] No obstante mencionamos aquí que (al asumir que el vendedor se comportará de una manera determinada y que los compradores lo anticiparán) estamos implícitamente realizando unos supuestos que quedan mejor formalizados en el contexto de un Equilibrio Bayesiano Perfecto. Por eso, en el apartado 5.4.- expresaremos la misma solución que obtenemos aquí, pero utilizando este concepto de equilibrio especialmente aplicable a juegos dinámicos como el que estamos considerando. (En cualquier caso, en ese apartado utilizaremos algunos de los resultados

Al “integrar” el resultado de la última fase en las funciones de ganancias de los jugadores, nuestra primera tarea, por tanto, es pasar a definir estas nuevas funciones, que serán las que tendrán en cuenta los compradores para presentar sus pujas. Recordamos que las funciones de ganancias de los compradores consisten en la diferencia entre su valoración de la empresa y el precio que pagan, en caso de resultar ganadores (en caso contrario serían igual a cero). Lo que cambia ahora es la nueva forma de calcular el precio que pagarán por la empresa en caso de resultar adjudicatarios. Si existía certidumbre de que las normas se iban a aplicar estrictamente, la función de ganancias para el comprador i venía representada por la expresión (3.4.), que reproducimos a continuación con la nomenclatura introducida en este capítulo,

$$U_i = \begin{cases} v_i - P_p^{c}(b_i) = v_i - b_i & \text{si } v_i > v_j \\ 0 & \text{si } v_i < v_j \end{cases} \qquad \forall j \neq i$$

En nuestro ejemplo actual (con K=0) como, hemos deducido que el vendedor “Incumplirá” siempre y que los compradores lo anticipan, entonces cambiaría la forma en que se fijaría el precio en caso de ganar. Así la función de ganancias “relevante” vendrá dada por:

$$U_i = \begin{cases} v_i - P_p^{I}(b_i) = v_i - (3b_i/2 - V_{min}/2) & \text{si } v_i > v_j \\ 0 & \text{si } v_i < v_j \end{cases} \qquad \forall j \neq I$$

Por tanto, la única diferencia reside en como se calcula el precio en caso de resultar ganador. Aplicando el mismo razonamiento que en el apartado 3.3.2.-d) los compradores presentarán la puja que maximice su utilidad esperada dados los supuestos que realizan sobre el resto de compradores. Recordamos la función de utilidad esperada para el comprador i consistía en el producto del excedente obtenido en caso de ganar (en

aquí obtenidos).

nuestro caso, $v_i - P_p^I(b_i)$) por la probabilidad de ganar (que siguiendo el razonamiento del mencionado apartado vendría dada por $Prob\ (b_i>b_j)=F[B^{-1}(b_i)]^{N-1}$). De esta manera, cada potencial comprador al presentar su puja resolvería el siguiente problema de maximización:

$$\underset{b_i}{Max} \qquad U_i^e = (\ v_i - P_p^I(b_i))\ F[B^{-1}(b_i)]^{N-1}$$

Esta ecuación es exactamente igual que la (3.7.) del apéndice del capítulo 3 con la única diferencia de que en el primer paréntesis se ha sustituido b_i por $P_p^I(b_i)$. Por tanto, a continuación seguiremos los mismos pasos para solucionar este problema. Como ya hemos visto, si $N=2$ y en el caso de una distribución uniforme,

$$(5.8.)\quad \underset{b_i}{Max} \qquad U_i^e = (\ v_i - P_p^I(b_i))\ [(B^{-1}(b_i) - V_{min}\ ) / (V^{max} - V_{min})]$$

La condición de primer orden daría lugar a la siguiente ecuación:

$$(5.9.)\quad (dP_p^I(b_i)/db_i)[(B^{-1}(b_i)-V_{min})/(\ V^{max}-V_{min})]=(v_i-P_p^I(b_i))[(dB^{-1}(b_i)/db_i)/(V^{max}-V_{min})]$$

Esta condición de primer orden es similar a la (3.16.), con las diferencias de que b_i es sustituido por $P_p^I(b_i)$ en el primer paréntesis a la derecha del signo igual, y de la aparición de $dP_p^I(b_i)/db_i$. Se puede observar que esta es una expresión más general. Efectivamente cuando los potenciales compradores tienen la certeza de que se van a cumplir las normas de la subasta la ecuación (5.9.) se transforma en la mencionada (3.16.), ya que en lugar de $P_p^I(b_i)$ utilizaríamos $P_p^C(b_i)=b_i$ y, por tanto, $dP_p^C(b_i)/db_i=1$.

Sustituyendo, los $dP_p^I(b_i)/db_i$ y $P_p^I(b_i)$ por sus expresiones y operando, la condición de primer orden nos quedaría:

$$(3/2)\ [(B^{-1}(b_i) - V_{min}\ ) / (V^{max} - V_{min})] = (\ v_i - 3b_i/2 + V_{min}/2) / ((V^{max} - V_{min})\ B'(v_i)\ )$$

Como ya habíamos argumentado al imponer el requisito de Nash (que requiere que la función de puja $B(v_i)$ usada por los rivales del jugador i sea consistente con el comportamiento racional de estos; es decir, que la puja que se derive de $B(v_i)$ sea la mejor respuesta para el resto de jugadores cuando el jugador i juegue b_i) unido al supuesto de simetría implica que la función de puja óptima del jugador i será precisamente la que determina la regla de decisión $B(vi)$. Es decir, $b_i=B(v_i)$. Sustituyendo este resultado en la ecuación anterior:

$$(3/2)\,[v_i - V_{min}\,)\,/\,(V^{max} - V_{min})] = (\,v_i - 3\,B(v_i)\,/2 + V_{min}/2)\,/\,((V^{max} - V_{min})\,B'\,(v_i)\,)$$

Operando obtendríamos la siguiente ecuación diferencial de primer orden:

$$(5.10.) \qquad B'\,(v_i) - [B(v_i)\,/\,(V_{min} - v_i)] = (-\,V_{min} - 2v_i)\,/\,3(V_{min} - v_i)$$

Resolviéndola igual que hicimos en el apéndice al capítulo 3 obtenemos la función de puja que estamos buscando (a la que llamaremos $B^I(v_i)$ para referirnos a que sería la función de puja utilizada por los compradores en una subasta al primer precio cuando anticipan que el vendedor incumplirá con certeza)[124]:

$$(5.11.) \qquad \boxed{b_i= B^I\,(v_i)=v_i/3+2\underline{V}/3}$$

Es decir, cuando sólo existen dos potenciales compradores en el caso de que anticipen que el vendedor va incumplir presentarán una puja equivalente a un tercio de la valoración que tienen de la empresa más 2/3 de la valoración mínima. Esta puja es significativamente inferior a la que presentarían cuando tienen la certeza de que se van a aplicar las normas. Es decir,

---

[124] La ecuación (5.10.) es un ecuación diferencial de primer orden del tipo: $dy/dt+u(t)y=w(t)$; cuya solución es: $y(t) = e^{-\int u dt}\left(A + \int we^{\int u dt} dt\right)$. Por tanto, $B(v_i) = e^{-\int \frac{-1}{Vmin - v_i} dv_i}\left(A + \int \frac{-Vmin - 2v_i}{3(Vmin - v_i)} e^{\int \frac{-1}{Vmin - v_i} dv_i} dv_i\right)$ = $[A+(v_i^2+v_i\underline{V})/3]/(v_i-V_{min})$. Utilizando la condición límite de que $B(V_{min})=V_{min}$ tenemos que $A=-2\underline{V}^2\,/3$ e introduciendo este valor en la ecuación anterior obtenemos que $b_i=B(v_i)= v_i/3+2\underline{V}/3$, tal y como se recoge en (5.11.).

$$B^I (v_i) > B^C (v_i) \quad \forall\, v_i > V_{min}$$

Podemos observar también que, aunque las pujas presentadas sean inferiores, el precio a pagar por el ganador será el mismo. Es decir, el ingreso del vendedor (y dado que los costes de negociación son cero, también los ingresos netos) será idéntico que cuando los compradores actúan con la certeza de que el vendedor iba a cumplir (y este efectivamente cumplía). En este último caso habíamos visto que $P_p^C(b_1)=b_1=B^C(v_1)=v_1/2+V_{min}/2$; mientras que cuando los comparadores anticipan que el vendedor incumplirá tenemos que $P_p^I(b_1)=3b_1/2\text{-}V_{min}/2=3\ B^I(v_1)/2\text{-}V_{min}/2=v_1/2+V_{min}/2$. De esta manera,

$$P_p^C\ (B^C\ (v_1))= P_p^I\ (B^I\ (v_1)).$$

Por tanto, la anticipación por parte de los compradores, de la estrategia que seguirá el vendedor en la última fase, provoca el efecto de anular la ventaja de la renegociación a través de la presentación de unas pujas lo suficientemente más reducidas para que el precio esperado sea el mismo. Así, en el caso de que el vendedor pudiera elegir, sería indiferente entre las dos opciones (hay que recordar que de momento habíamos supuesto que K=0; esto último no se mantiene, en general, cuando sustituyamos este supuesto). Hay que tener en cuenta que la opción de que los compradores tengan la certeza de que se van a cumplir las normas implica que el vendedor dispone de algún mecanismo creíble para auto-comprometerse a no negociar, lo cual puede ser difícil de instrumentar en algunos casos. En este capítulo, habíamos descartado que el vendedor tenga disponible esta opción.

Este no es un resultado que debería extrañarnos debido al ya comentado Teorema del Ingreso Equivalente, cuyos supuestos de aplicación son cumplidos por el modelo desarrollado en este capítulo.

Ya habíamos mencionado la debilidad que arrastrábamos en este apartado derivada de asumir que el vendedor tenía una racionalidad limitada. Este hecho lo podemos observar ahora ya que la función de puja que hemos calculado para los compradores, $B^I(v_i)$, no coincide con la que se utilizaría con la certeza del cumplimiento de las normas. El objetivo del apéndice a este capítulo 5 es intentar superar esta debilidad obteniendo los mismos resultados sobre la función de precio P_p^I (b_1) (lo que a su vez provoca que la función de puja $B^I(v_i)$ sea la misma a la calculada en este apartado) pero permitiendo que el vendedor tenga racionalidad completa.

5.3.2.- Subasta al segundo precio

Antes de continuar realizaremos un comentario que afecta a las subastas al segundo precio en caso de que exista incertidumbre sobre el cumplimientos de las normas.

Cuando el vendedor incumple el precio a pagar por el ganador va a depender de la puja que ha presentado. Esto implica que se rompe la principal característica de las subastas al segundo precio que consistía, precisamente, en la independencia entre la puja del ganador y la cantidad que pagaba. De esta manera, cuando existe incertidumbre sobre el cumplimiento de las normas, la opción óptima de los compradores deja de ser presentar una puja igual a su valoración. Esto supone que van a tener un comportamiento más similar del que tienen los compradores cuando participan en una subasta al primer precio, presentando pujas por debajo de su valoración.

Sin embargo, se puede comprobar que el precio esperado por el vendedor no varía (es decir, sigue actuando el Teorema del Ingreso Equivalente). Así, con técnicas similares a las utilizadas en el apéndice 5.1. se pude obtener el resultado de que la función de precios en caso de incumplir en una subasta al segundo precio viene dada por,

(5.12.) $$P_s^I(b_1) = (3/4)b_1+(17/40)V_{min}$$

Mientras que la función de puja de equilibrio, cuando los compradores anticipan con certeza que el vendedor incumplirá, sería,

(5.13.) $B_s^I(v_i) = (2/3)v_i+V_{min}/2$

Por tanto, es interesante que la introducción de incertidumbre sobre el cumplimiento de las normas, introduce el mismo dilema para los participantes en una subasta al segundo precio que el que se enfrentaban los compradores que participan en una subasta al primer precio: a mayor puja mayores probabilidades de ganar pero menor excedente en caso de ganar. El resultado se observa en (5.13.) y es que la pujas presentadas son inferiores a su valoración.

También, se puede observar que, con la función de precio (5.12.), si los compradores utilizan la función de puja (5.13.), el precio que finalmente pagarían sería el mismo que en la subasta al primer precio (y también al que esperarían pagar en una subasta al segundo precio cuando tenía la certeza de que iba a "Cumplir").

$$P_s^I(B_s^I(v_i)) = (v_i+V_{min})/2$$

Con (5.12.) ya podríamos completar la función de precio de la subasta al segundo precio que había quedado indeterminada en su segunda parte en (5.2.). Así,

(5.14) $P_s(b_1, b_2)= \begin{cases} P_s^c(b_1, b_2) = b_2, & \text{si el vendedor "}\textit{Cumple}\text{"} \\ P_s^I(b_1, b_2) = (3/4)b_1+(17/40)V_{min} & \text{si el vendedor} \end{cases}$

5.4.- <u>COSTES NULOS DE INCUMPLIR</u>

En el apartado 5.3.- hemos deducido cuál era la función de precio, en caso de que el vendedor se decantara por "Incumplir", que se derivaban de los supuestos que habíamos realizado. De esta manera, obteníamos la función de precio completas $P_p(b_1, b_2)$ — recogida en (5.7.) — . Este paso era necesario para tener especificado el juego en la llamada *forma normal o estratégica*.

En este apartado (al igual que en el apartado 5.3.-) suponemos que el comprador tiene costes nulos de incumplir, es decir, K=0. La combinación de este supuesto, con el de que la renegociación con el ganador eleva el precio por encima de la puja presentada, provoca que “Incumplir” sea la estrategia dominante para el vendedor en la última fase. Es decir, sean cuales sean las pujas presentadas y sean cuales sean las combinaciones de tipos de los compradores, el vendedor siempre obtendrá una utilidad estrictamente mayor Incumpliendo que Cumpliendo. Hay que tener en cuenta que cuando se alcanza este nodo de decisión del vendedor las pujas ya han sido presentadas (y además son conocidas por el vendedor). Por ello, la decisión que tome el vendedor no va a tener ninguna influencia posterior sobre las acciones que adopten los compradores. Adicionalmente, como estamos suponiendo que el juego se repite una única vez el vendedor tampoco se tendrá que preocupar sobre las repercusiones de su actuación en ventas futuras.

Debido a este hecho, en los apartados 5.3.1.- y 5.3.2.-, habíamos integrado el resultado de esta fase en la función de ganancias de los compradores y habíamos resuelto el juego de la misma manera que lo habíamos efectuado en el apéndice al capítulo 3. Esto era posible debido a que en la práctica estábamos eliminando la última fase de decisión y, por tanto, la estructura del juego era la misma que el del modelo de referencia descrito en 3.3.-. De esta manera, volvíamos a convertir la subasta en un juego estático y podíamos recurrir a la noción de Equilibrio Bayesiano de Nash.

Si no actuáramos de esta manera, el juego tendría varas fases sucesivas de decisión y, por ello, sería un juego dinámico en el que de alguna manera necesitaríamos tener un instrumento para descartar equilibrios que contengan estrategias no creibles. Este instrumento, como comentamos, no podía ser el Equilibrio Perfecto en Subjuegos, debido a que al no existir subjuegos cualquier Equilibrio de Nash de una manera trivial cumpliría con el requisito adicional que impone el EPS.

Para enfrentarse a esta situación, una de las nociones de equilibrio que se utiliza en Teoría de Juegos es el llamado “*Equilibrio Bayesiano Perfecto*” (en adelanta nos podremos referir a él como EBP). Aunque estrictamente, en este caso, no lo necesitamos, resolveremos el juego construyendo un EBP. En este ejemplo su aplicación es simple, pero nos servirá como introducción a las complicaciones que seguirán en los siguientes apartados y en los capítulos 6 y 7.

Para empezar un EBP no sólo está compuesto por una combinación de estrategias (una para cada uno de los jugadores), como ocurría con las nociones de equilibrio que hemos utilizado hasta ahora, sino que además necesita de un “sistema de conjeturas”. Así, el jugador que tenga que realizar un movimiento deberá construir una distribución de probabilidades sobre los nodos (pertenecientes al conjunto de información en el que se encuentra) a los que podría haber llegado. Evidentemente, si el jugador conoce toda la historia anterior del juego hasta ese momento, el conjunto de información al que ha llegado estará formado por un único nodo y la conjetura sería simplemente asignar probabilidad uno a ese nodo. Por tanto, este concepto de equilibrio tiene sentido en juegos con varias fases de decisión en los que la información sea imperfecta o incompleta.

Tanto las estrategias, como el sistema de conjeturas o de creencias, deben cumplir una serie de requisitos para formar parte de un EBP. Así, por un lado, dadas sus conjeturas, las estrategias de los jugadores deben ser sucesivamente racionales. Esto implica que cuando a un jugador le toca mover (por ejemplo, cuando un potencial comprador va a presentar su puja) su acción elegida debe ser óptima (dada su conjetura) y las subsiguientes estrategias de los demás jugadores (en nuestro modelo los demás jugadores serían el resto de potenciales compradores y el vendedor). Por otro lado, el sistema de conjeturas también debe cumplir una serie de requisitos ya que si no podría ocurrir que conjeturas “absurdas” podrían hacer sucesivamente racional casi cualquier estrategia. Aquí se suele diferenciar entre los conjuntos de información sobre la trayectoria de equilibrio[125] y fuera de ella. De una manera esquemática, en los conjuntos de información que se sitúan en la trayectoria de equilibrio, las conjeturas tienen que estar determinadas de acuerdo con la regla de Bayes y las estrategias de equilibrio de los jugadores. Cuando estemos fuera de la trayectoria de equilibrio este requisito se aplicará *cuando sea posible*. Diferentes autores pueden establecer requisitos adicionales sobre las

[125] Los conjuntos de información situados en la trayectoria de equilibrio son todos aquellos que se alcanzarían con unas probabilidades mayores que cero si los jugadores siguieran sus estrategias de equilibrio. Para los que se encuentran fuera de la trayectoria de equilibrio, estas probabilidades serían cero.

conjeturas en los conjuntos de información fuera de la trayectoria de equilibrio[126]. Para una definición formal del EBP véase Fudenberg y Tirole (1991 a o b).

En modelos sencillos el EBP es equivalente al denominado "*Equilibrio Secuencial*" de Kreps y Wilson (1982b). Sin embargo, este último es más restrictivo y es más complicado de definir (principalmente añade más requisitos para que las conjeturas sean consistentes). Por eso, en la mayoría de las aplicaciones económicas se utiliza el EBP (incluso en algunas ocasiones en que, imprecisamente, se utiliza la expresión Equilibrio Secuencial). En Fudenberg y Tirole (1991a, b) se comparan ambos equilibrios y se recoge bajo que condiciones son equivalentes[127].

Cuando nos centramos en nuestro juego de este capítulo, la principal consecuencia que extraemos de lo anterior, es el concepto de racionalidad secuencial de las estrategias. Este concepto implica que las estrategias deben de constituir un Equilibrio Bayesiano en el "juego de continuación" (que de una manera informal podríamos definir como lo que resta del juego desde el momento en que el jugador, que estemos considerando, tiene que mover). En nuestro caso este juego de continuación no constituye un subjuego y, de esta manera, en estas situaciones el concepto de racionalidad secuencial viene a desempeñar un papel parecido al que jugaba el de perfección en subjuegos cuando si existían subjuegos.

Por tanto, la diferencia que se deriva de la incorporación de la última fase de decisión por parte del vendedor es que, para formar parte de un EBP, la estrategia de los compradores debe ser óptima dada la estrategia del vendedor. Esto formalizaría la idea que hemos venido reflejando en los apartados anteriores que se refiere a que los potenciales compradores además de preocuparse por cual será el comportamiento de sus competidores también tendrán que interesarse en cual será el movimiento que realice el vendedor en el siguiente turno. Al mismo tiempo, los requisitos comentados anteriormente implican que, cuando le llegue el turno final al vendedor, escogerá la acción que sea óptima para él dado su conjetura sobre lo sucedido en todas las fases anteriores del juego. Por tanto, el vendedor deberá escoger la acción óptima para él en lo que queda de

---

[126] Para juegos "simples" esta cuestiones no se llegan a plantear: Por ello, sólo describiremos aquellos aspectos que podamos ir necesitando.

[127] Por ejemplo, si cada jugador tiene como máximo dos posibles tipos, el conjunto de EBP y de Equilibrios Secuenciales coinciden.

juego (aquí se ve la analogía con la idea que introducía la perfección en subjuegos, aunque técnicamente en ese nodo de decisión no comience un subjuego).

En nuestro caso la estrategia de los compradores consiste en una función que estableciera para cada posible tipo, que pudiera tener, una acción a adoptar. Es decir, una forma concreta de lo que hemos llamado función de puja, $b_i=B(v_i)$. Para el vendedor su estrategia vendría dada por una acción para cada posible combinación de estrategias y de tipos de los vendedores. Como esto podría ser muy engorroso de manejar, y dado que la combinación de tipos y de estrategias originan una combinación de pujas que son conocidas por el vendedor en el momento de adoptar su acción, podemos expresar la estrategia del vendedor en función de la combinación de pujas presentadas. Más aun, como ya se hemos visto, en una subasta al primer precio, dados los supuestos de nuestro modelo, la única puja relevante para el vendedor sería la del ganador, por lo que podemos describir su estrategia sólo en función de la puja ganadora.

Por otra parte, los compradores en este modelo conocen cual es el valor de K para el vendedor (en el capítulo 7 tendrán incertidumbre sobre este parámetro y la situación cambia en relación con lo que se comentará a continuación) y además, en caso de ganar, también conocen la puja más alta. Esto implica que conoce toda la información relevante para anticipar cual será la actuación del vendedor, en caso de que se adjudiquen la empresa (en caso de que pierdan les es indiferente la actuación del vendedor ya que siempre obtendrían una utilidad de cero). Dicho con otras palabras, los compradores conocen todos los datos contenidos en la expresión (5.5.) que recogía la condición que se tenía que cumplir para que al vendedor le interesara "Incumplir" (que se recuerda, $P_p^I(b_1)-b_1>K$). De esta manera, las conjeturas, *de momento*, juegan un papel trivial en nuestro modelo.

Por tanto, con los resultados obtenidos en el apartado 5.3.- y con los comentarios anteriores es relativamente sencillo mostrar que la siguiente combinación de estrategias constituyen un EBP cuando $K=0$:

$$\begin{cases} \bullet \textit{Estrategia del comprador } i,\ \forall i:\ b_i = B^I(v_i).^{128} \\ \bullet \textit{Estrategia del vendedor}:\ \forall b_1,\ \text{“}\textit{Incumplir}\text{”} \end{cases}$$

Así, se puede comprobar que esta combinación de estrategias es secuencialmente racional. Por un lado, dada la estrategia de incumplir del vendedor la estrategia de los compradores ($B_p^I(v_i)$) coincide con su estrategia óptima, tal y como vimos deducido en el apartado 5.3.- anterior. Por otro lado, la estrategia de "incumplir siempre" es secuencialmente racional, desde el punto de vista del vendedor, dado el incremento de precio que consigue sobre las pujas ya presentadas y los costes nulos que le ocasiona.

Como resultado de estas estrategias, en equilibrio, como el vendedor Incumplirá siempre la función de precio que se aplicará será, $P_p^I(b_1)=3b_1/2-V_{min}/2$. El precio se obtiene sustituyendo en esta ecuación la pujas presentada por el ganador que estará de acuerdo a $b_1=B^I(v_1)$. De esta manera,

$$P_p^I(B^I(v_1))= (v_1+V_{min})/2 \tag{5.15.}$$

Este precio coincide con los ingresos netos para el vendedor dado que a pesar de que "Incumple" no incurre en costes adicionales debido al supuesto de que $K=0$. Adicionalmente, como ya comentamos, este sería el mismo precio que obtendría el vendedor si se cumplieran las normas y los compradores anticiparan que esto iba a ser así. Es decir, $P_p^I(B_p^I(v_1))= P_p^C(B_p^C(v_1))$.

El resultado (5.15.) lo hemos expresado en términos de v_1, que es un valor desconocido para el vendedor antes de realizar la subasta. Si queremos expresar cual sería el precio esperado "ex ante" por el vendedor tendríamos que sustituir v_1 por su esperanza. Esta dependerá de la distribución de probabilidades de las valoraciones y del número de compradores. Con una distribución uniforme y con dos potenciales compradores el valor de esta esperanza se puede calcular de acuerdo a la fórmula (3.15.), obteniendo que,

---

[128] Esta función se había obtenido en (5.11.).

(5.16.) $E[v_1|N=2]=V_{min}+2(V^{max}-V_{min})/3$

Sustituyendo en (5.15.) v_1 por $E[v_1|N=2]$ obtendríamos el precio esperado "ex ante", P^e, para el vendedor[129],

(5.17.) $P^e=V_{min}+(V^{max}-V_{min})/3$

Esta expresión es igual a la esperanza de la segunda valoración más alta, que también puede ser calculado a través de la mencionada fórmula (3.15.). Así, $P^e=E[v_2|N=2]$, lo que coincide con el resultado del apartado 3.3.3.-. Esta es otra forma de ver que el vendedor con la estrategia de incumplir (anticipada por los compradores), no consigue incrementar sus ingresos esperados.

A efectos ilustrativos del funcionamiento del EBP y como contraste con los modelos que analizaremos más adelante, terminaremos este apartado mencionando distintos ejemplos de combinaciones de estrategias que no cumplen alguno de los requisitos exigidos y que, por tanto, no serían un EBP.

- En primer lugar supongamos la combinación de estrategias en la que los compradores, en lugar de utilizar $B^I(v_i)$, presentan sus pujas de acuerdo a la función $B^C(v_i)$ $\forall i$; mientras que el vendedor "Cumple siempre". Se puede observar que la estrategia de los compradores es sucesivamente racional ya que, dado la estrategia de "Cumplir", adoptada por el comprador, $B^C(v_i)$ es su función de puja óptima. Sin embargo, es la estrategia del vendedor la que no cumple el requisito de ser secuencialmente racional ya que no es óptima (el vendedor mejoraría si, dada la estrategia que están jugando los compradores, "Incumple" en lugar de "Cumplir"). Por tanto, esta combinación de estrategias no puede formar parte de un EBP. Este ejemplo es interesante ya que incluye una "promesa" que no es creíble. Es decir, se podría interpretar que el vendedor "promete" cumplir si los vendedores presentan las pujas de acuerdo a la función $B^C(v_i)$ (que da lugar a pujas más elevadas que la que se derivaban de la función $B^I(v_i)$). Esta combinación de estrategias ni siquiera es un equilibrio de Nash pero ofrece unas

[129] En términos más generales (5.17.) vendría representado por la expresión, un poco engorrosa, $P^e=P_p^I(B_p^I(E[v_1|N=2]))$.

ganancias al vendedor similares a las que obtiene en equilibrio (cuando cambiemos el supuesto sobre los costes nulos obtendría unas ganancias que son incluso superiores). Sin embargo, el concepto de racionalidad secuencial pone de manifiesto su falta de credibilidad (es decir, según este criterio y con los supuestos aquí utilizados, principalmente K=0, los compradores deberían ignorar esa promesa por no ser creíble y, por tanto, comportarse igual que si no hubiese sido realizada).

- Otro ejemplo podría ser, que los compradores se comportaran igual que en el caso anterior (utilicen $B^C(v_i)$) pero que el vendedor “Incumpla siempre”. Tendríamos el caso contrario: la estrategia del vendedor sería secuencialmente racional pero no la de los compradores. Esta última no sería óptima dada la estrategia empleada por el vendedor. Efectivamente, como hemos visto cuando el vendedor incumple $B^C(v_i)$ deja de ser la función puja óptima de los compradores.

- Podríamos analizar otros ejemplos que incluyeran incluso estrategias mixtas para el vendedor. Sin embargo, debido a que la acción de “incumplir” es dominante cualquier estrategia que asigne una probabilidad positiva a la acción de “cumplir” no puede formar parte de un EBP. También podríamos intentar que el vendedor utilizara una acción diferente en función del valor de la puja presentada. En este caso, dado el supuesto de K=0, tampoco sería óptima. Sin embargo, veremos que cuando los costes de incumplir son mayores que cero existirán situaciones en las que se necesite recurrir a este tipo de estrategias.

En este apartado hemos encontrado un EBP a este juego, que recordamos que es un subjuego del juego original. En concreto se originaba cuando la primera decisión del vendedor consistía en elegir una subasta con sobre cerrado al primer precio como método de venta. En el juego original existirían tanto subjuegos como métodos de venta tenga a su alcance el vendedor. Para saber cual sería su opción óptima habría que resolver todos los subjuegos y observar cual sería el que, en equilibrio, le ofreciera “ex ante” unos mayores ingresos netos esperados.

5.5.- COSTES DE INCUMPLIR SUPERIORES A LA VALORACIÓN MÁXIMA.

En este apartado analizaremos el caso opuesto al del apartado 5.4.-. En concreto, vamos a suponer que cuando el vendedor "Incumple" tendrá que asumir unos "costes elevados". No concretaremos el valor de la variables K pero suponemos que será mayor que la valoración máxima que cualquier potencial comprador pudiera tener de la empresa. Es decir, $K > V^{max}$.

Este supuesto va implicar que la condición (5.5.) no se cumpliría para ningún valor posible de las pujas. Es decir,

(5.18.) $P_p^I(b_1) - b_1 < K$ para cualquier $b_1 \in [\, V_{min}, V^{max}]$

Esto es así ya que estamos suponiendo que, en equilibrio, la función $P_p^I(b_1)$ nunca origina un precio superior a la cantidad máxima (v_1) que el comprador estaría dispuesto a pagar. Esta a su vez es inferior, o igual, a V^{max}. Por tanto, $P_p^I(b_1) \leq V^{max}$ y teniendo en cuenta el supuesto sobre K llegamos a la desigualdad (5.18.).

En otras palabras, los costes de "incumplir" para el vendedor siempre serían mayores que los beneficios que pueda obtener. Y esto será así, con independencia de la pujas presentadas. Por tanto, en este caso la acción dominante del vendedor para cualquier estrategia de los compradores sería la de "Cumplir" o, lo que es lo mismo, la estrategia "Cumplir $\forall b_1$" es la estrategia dominante para el vendedor. Obsérvese que para llegar a este resultado no hace falta dar una forma funcional concreta a la función $P_p^I(b_1)$. Por lo tanto, para el supuesto, $K > V^{max}$**,** el anterior resultado sería válido para cualquier expresión de esta función. En cualquier caso, asumimos que tiene la misma forma que derivamos en el apartado 5.3.- recogido en (5.7.).

Como la estrategia de "cumplir" es una estrategia estrictamente dominante será la única que cumpla el requisito que exige la racionalidad sucesiva o secuencial. Por tanto, los compradores elegirán su estrategia óptima teniendo en cuenta que el vendedor va a utilizar la estrategia de "cumplir siempre". Ya hemos visto que si el vendedor "cumple" la estrategia que maximiza la utilidad esperada de los compradores viene dada por la función de puja $b_i=B_p^C(v_i)=(V_{min}+v_i)/2$.

Por tanto, en esta ocasión la siguiente combinación de estrategias constituyen un EBP cuando $K> V^{max}$

$$\begin{cases} \bullet \textit{Estrategia del comprador i, } \forall i\text{: } b_i=B^C(v_i)\text{''.} \\ \bullet \textit{Estrategia del vendedor}\text{: } \forall b_1 \text{ ``Cumplir''} \end{cases}$$

Como resultado de estas estrategias, en equilibrio, el vendedor cumplirá siempre Y la función de precio que se aplicará será, $P_p^C(b_1)=b_1$. Al sustituir en esta función la puja presentada por el ganador, de acuerdo a su estrategia de equilibrio, obtenemos el resultado ya conocido de que,

$$P_p^C(B_p^C(v_1))= (v_1+V_{min})/2$$

Este precio coincide con los ingresos netos para el vendedor ya que al "cumplir" no incurre en los costes K. Se puede comprobar que, en términos de ingresos, este resultado es el mismo que el obtenido en el apartado anterior cuando $K=0$. También podríamos hacer el mismo cálculo en términos de precio esperado "ex ante" que lógicamente nos daría el mismo resultado. Por tanto, podemos observar que, en equilibrio, el vendedor (y también los compradores) es indiferente entre los dos casos extremos, es decir, entre no tener ningún coste por incumplir las normas y entre tener unos coste muy elevados (de tal modo que superen la valoración máxima que cualquier vendedor pudiera tener de la empresa).

Para que este resultado se mantenga es esencial que K sea de dominio público ya que esto es lo que permite que los compradores, actuando racionalmente, anticipen (en estos ejemplos sin ambigüedad) el comportamiento del vendedor y, por tanto, adapten sus pujas a este comportamiento.

5.6.- OTROS VALORES DE K

Como en todo este capítulo seguiremos suponiendo que los compradores conocen cuales son los costes de Incumplir para el vendedor, es decir conocen el valor de K. Sin embargo, en esta ocasión consideraremos que K puede tomar valores intermedios entre los extremos considerados en los apartados 5.4.- y 5.5.-.

Asumiremos que, de acuerdo al resultado obtenido en el apartado 5.3.-, cuando el vendedor opte por incumplir, el precio se situará por encima de la puja presentada de acuerdo a la función $P_p^I(b_1)$. Una vez que ya hemos calculado esta expresión podemos dar una forma más concreta a la condición necesaria para que el vendedor incumpla que venía dada en (5.5.). Para ello, primero calculamos las ganancias adicionales que obtiene el vendedor si decide incumplir:

(5.19.) $$P_p^I(b_1)-P_p^C(b_1)=3b_1/2-V_{min}/2-b_1=(b_1-V_{min})/2.$$

Estas ganancias habría que contrastarlas con K para ver si la opción de incumplir es rentable para el vendedor. Así, la estrategia óptima del vendedor, una vez que se han presentado las pujas, la podemos expresar como:

Estrategia del vendedor : $\begin{cases} \textit{Incumplir} & \text{si } P_p^I(b_1)-P_p^C(b_1)>K \\ \textit{Cumplir} & \text{si } P_p^I(b_1)-P_p^C(b_1)\leq K \end{cases}$

Que, teniendo en cuenta (5.19.), se transforma en:

$$(\ 5.20.)\qquad \textit{Estrategia del vendedor}: \begin{cases} \textit{Incumplir} & \text{si } b_1 > 2K+V_{min} \\ \textit{Cumplir} & \text{si } b_1 \leq 2K+V_{min} \end{cases}$$

Por tanto, la decisión del vendedor (en su último turno de decisión) va a ser adoptada en función de la puja máxima presentada b_1 y de los parámetros K y V_{min}. Como el supuesto de este capítulo es que K es de domino público un comprador cuando presenta su puja (como ya hemos mencionado) conoce los valores de las tres variables mencionadas y, por tanto, puede deducir cual será la acción que adoptará el vendedor en el caso de que su puja resultara ser la ganadora. En los anteriores apartados derivamos cuales eran las funciones de puja óptima, tanto cuando los vendedores anticipaba que el vendedor iba a "Cumplir siempre", $B^C(v_i)$, como cuando anticipaban que iba a "Incumplir siempre" $B^I(v_i)$.

La novedad del caso actual es que, a diferencia de lo que ocurría en los apartados 5.4.- y 5.5.-, la decisión del vendedor puede dejar de ser independiente de las pujas presentadas (como se puede observar en (5.20.). Por tanto, se plantean ocasiones en las que ya no tiene una estrategia que sea mejor, con independencia de cuales sean las actuaciones de los otros jugadores, sino que por el contrario va a depender de ellas.

A su vez, dado los supuestos que estamos utilizando, este comportamiento es previsto por los compradores ya que conocen el valor de todos los parámetros que intervienen en (5.20.). De esta manera, el comprador i puede deducir que si resulta ganador con una puja b_i inferior a $2K+V_{min}$ cumplirá (si por el contrario supera esta cantidad el vendedor incumpliría).

Teniendo en cuenta $B^C(v_i)$, y recordando que es una función estrictamente creciente, podríamos encontrar el valor de v_i (al que llamaremos v^*) para el cual $b_i=B^C(v^*)=2K+V_{min}$. De esta manera, *en el caso* de que el comprador siguiera esta función de puja, podría anticipar que cuando ganara la subasta teniendo valoraciones inferiores (superiores) a v^* el vendedor cumpliría (incumpliria). Podemos calcular fácilmente ese valor de la siguiente manera:

(5.21.) $B^C(v^*)=2K+V_{min} \Rightarrow (v^*+V_{min})/2=2K+V_{min}$, de donde obtenemos que $v^*=4K+V_{min}$

En cualquier caso este razonamiento solo sería válido si $B^C(v_i)$ fuera una estrategia de equilibrio. Sin embargo, dado que para valores de v_i superiores a v^* el vendedor incumple esta función de puja dejaría de ser óptima. En una rápida (y errónea) aproximación podríamos estar tentados a proponer como estrategia a seguir por los vendedores una estrategia que combinara el uso de $B^C(v_i)$ para valores de v_i inferiores a v^*, y de $B^I(v_i)$ para valores superiores a v^*. Se puede demostrar que esta estrategia, definida por tramos, no formaría parte de un equilibrio de Nash. Esto es debido a que suponiendo que fuera utilizada por uno de los jugadores existirían situaciones en que el otro jugador obtendría una mayor utilidad esperada utilizando una estrategia alternativa.

Adicionalmente, esta estrategia no cumpliría con el requisito de ser no decreciente en v_i debido a que en un intervalo de valores de v_i superiores pero cercanos a v^*, $B^C(v^*)$ sería mayor que $B^I(v_i)$. Es decir, en un determinado intervalo valoraciones mayores originan pujas más pequeñas.

Podríamos proponer otras estrategias que incluyeran tramos adicionales para lograr que la función de puja fuera no decreciente. Por ejemplo, podríamos suponer que, como antes, se use $B^C(v_i)$ para valores de v_i inferiores a v^*, pero que sólo se empezara a utilizar $B^I(v_i)$ cuando originara una puja superior a $B^C(v^*)$. Es decir, dado los supuestos utilizados, existirá un valor de v_i (al que llamaremos v^{**}) superior a v^* en el que $B^I(v^{**})=B^C(v^*)$. De esta manera, para valores de v_i superiores a v^{**}, $B^I(v_i)$ será superior a $B^C(v^*)$. (Del mismo modo que hicimos para v^* podríamos calcular el valor de v^{**} que sería igual a $v^{**}=6K+V_{min}$). Para tener definida la función de puja en el conjunto del intervalo factible nos quedaría analizar cual podría ser el valor en el intervalo intermedio (v^* , v^{**}). Con los comentarios anteriores se puede deducir que la única posible solución (en la que la función de puja resultante sea no decreciente) es que en este intervalo la función de puja sea una constante que coincida con $B^C(v^*)$ (o con $B^I(v^{**})$, dado que tienen el mismo valor). Es decir, si en algún punto de dicho intervalo la puja resultante fuera inferior nos encontraríamos con que para un valor de v_i superior tendríamos una puja inferior de la que se presentaría con una valoración de inferior v^*; y si fuera superior nos encontraríamos con que valores de v_i inferiores a v^{**} originaría pujas superiores. Por tanto, la única opción para que la función de puja sea no decreciente en las valoraciones sería que fuera constante en el intervalo [v^*, v^{**}].

Sin embargo, es fácil demostrar que si esta fuera la función de puja adoptada por el jugador i, al jugador j le convendría utilizar una estrategia diferente. Y que para esta estrategia del jugado j, el jugador i ya no estaría maximizando utilizando la función de puja propuesta. Por tanto, esta estrategia formada por una función de puja en tres tramos tampoco podría formar parte de un equilibrio de Nash.

Otra alternativa[130] podría surgir si solucionamos dos problemas de maximización por separado (cada uno de ellos daría lugar a una ecuación de diferencial diferente) utilizando las adecuadas condiciones iniciales para asegurar la continuidad de la función de puja. El primero sería el que se refiere a valoras de v_i inferiores a v^*. En este caso la función de precio relevante sería $P_p^C(.)$ y la condición inicial la que siempre hemos utilizado $B(V_{min})=V_{min}$. Naturalmente el resultado de este problema es que la función de puja en el intervalo [V_{min}, v^*] es $B^C(.)$. La novedad reside en el segundo problema de optimización para valores de v_i pertenecientes al intervalo [v^*, V^{max}]. En este caso, supondríamos que la función de precios es $P_p^I(.)$ y como condición inicial utilizaríamos $B(v^*)=BC(v^*)$. De esta manera, aseguramos la continuidad aunque en v^* se origina un pico que hace no diferenciable la función de puja en ese punto. Como resultado obtenemos una función de puja compleja pero basada en la función $B^I(.)$[131].

No obstante, también se demuestra que, si el jugados j está utilizando esta función, existen algunas situaciones en las que el jugador i maximiza su utilidad presentando una puja diferente a la prescrita por esta función de puja en dos tramos. Por tanto, tampoco formaría un equilibrio (ni siquiera de Nash).

De los comentarios anteriores se pueden deducir los problemas que se plantean cuando tratamos de encontrar una función de puja general que nos pudiera servir para cualquier valor de K. Estos problemas se derivan de que un comprador, cuando presenta su puja, para maximizar su utilidad esperada no sólo debe tener en cuenta cual será el

[130] Basada en los problemas de control óptimos, en los que cambios discontinuos en la variable de control originan que la senda temporal óptima de la variable de estado tenga “picos” (que la hacen no diferenciable en ese punto) pero mantenga su continuidad.

[131] En concreto esta función sería: $B(v_i)=B^I(v_i)+8K^2/3(v_i-V_{min})$, para $v_i\in$ [v^*, V^{max}].

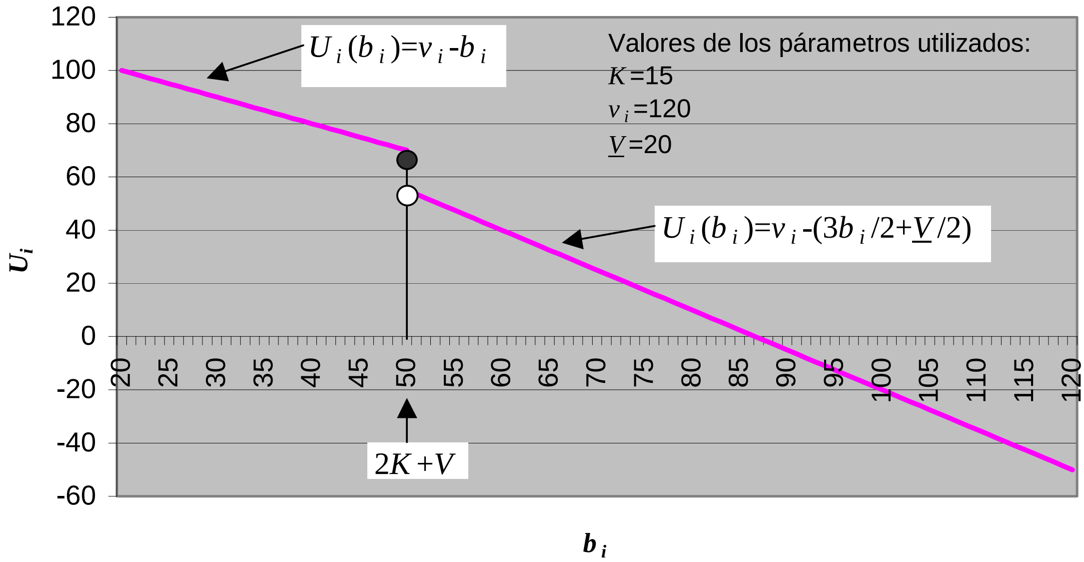
comportamiento vendedor, sino también de cual será el comportamiento del resto de potenciales compradores. Es decir, tendría que prever el comportamiento de un jugador que mueve simultáneamente y, de otro jugador, que realiza su movimiento con posterioridad (conociendo cual ha sido el movimiento de los demás incluido el suyo propio).

Los problemas planteados se deben a la discontinuidad en la función de pagos de los compradores que se produce en el punto $b_i=2K+V_{min}$. Ya hemos visto que para valores iguales inferiores de la puja ganadora a ese nivel el vendedor cumpliría (en cuyo caso la función de pagos del comprador i en caso de ganar vendría dada por $U_i(b_i)=v_i-P_p^C(b_i)=v_i-b_i$) y para valores superiores a ese nivel el vendedor incumpliría (y, por tanto, la función de pagos del comprador i en caso de ganar vendría dada por $U_i(b_i)=v_i-P_p^I(b_i)=v_i-3b_i/2-V_{min}/2$). En el Gráfico 5-1 se ha representado una función de ganancias (para unos valores determinados de los parámetros K, v_i y V_{min}) para el jugador i, en el caso de que la puja del jugador j sea igual a cero. En él se puede observar claramente la discontinuidad de la función en el citado punto $b_i=2K+V_{min}$.

La discontinuidad de la función de pagos de los compradores da lugar a que no se cumpla uno de los requisitos del teorema de suficiencia para la existencia de un Equilibrio de Nash (Debreu, 1952; Glicksberg, 1952; Fan, 1952)[132]. (Este teorema señala condiciones suficientes, aunque no necesarias, por lo que su no cumplimiento no implica que necesariamente no exista un Equilibrio de Nash).

[132] Para una descripción de este teorema véase, por ejemplo, Fundenberg y Tirole, (1991).

Gráfico 5-1.- Utilidad del comprador i (en caso de que b_j=0)



a) Caso $K \geq (V^{max} - V_{min})/4$

Sin embargo, de los comentarios anteriores si podemos extraer algunos resultados que utilizaremos posteriormente. Veíamos que si los compradores utilizarán la estrategia $B^C(v_i)$ y la valoración del ganador fuera inferior a v^* entonces al vendedor no le compensaría "Incumplir". Adicionalmente, en (5.21.) habíamos calculado el valor de v^*. El problema que se nos planteaba es que debido a que para valoraciones del ganador superiores a v^* el vendedor incumplía $B^C(v_i)$ no era una función de puja de equilibrio. Sin embargo, si V^{max} fuera inferior o igual a v^* ningún comprador podría tener una valoración superior a este último valor. En este caso, si los compradores usarán $B^C(v_i)$, para cualquier valor factible de v_i, el vendedor siempre cumpliría. Por tanto, $B^C(v_i)$ sería la estrategia de equilibrio ya que dado el comportamiento del vendedor, si el jugador j esta utilizando $B^C(v_j)$, el jugador i maximizará su utilidad esperada utilizando también la función $B^C(v_i)$.

Teniendo en cuenta que $v^{*}=4K+V_{min}$, la condición $V^{max} \leq v^{*}$ se transforma en $V^{max} \leq 4K+V_{min}$. De donde,

$$K \geq (V^{max} - V_{min})/4.$$

Es decir, siempre que los costes de incumplir fueran superiores a ¼ de la diferencia entre los valores máximos y mínimos, nos encontraríamos en el mismo caso que el analizado en el apartado 5.5.-. Recordamos que en aquel apartado el comprador siempre "cumplía" y los compradores lo anticipaban presentando sus pujas de acuerdo a $B^{C}(v_i)$. La diferencia se encuentra en que mientras en aquel apartado teníamos que suponer que $K> V^{max}$, en esta ocasión para obtener el mismo resultado, necesitamos un supuesto mucho menos exigente. (Como el vendedor no Incumple el ingreso neto del vendedor sigue coincidiendo con el precio pagado por el comprador).

b) Caso $K \cong 0$

En los capítulos siguientes, también utilizaremos otro caso especial en el que se supondremos que K es positivo pero se encuentra muy próximo a cero. Es decir, $K \cong 0$ (aunque $K>0$). Este puede ser un caso interesante. Haremos el supuesto de que para cualquier puja que se encuentre estrictamente por encima de V_{min} al vendedor le compensará "incumplir". Por tanto, si el vendedor va a "incumplir" para cualquier puja estrictamente mayor que V_{min} los compradores maximizarían su utilidad esperada utilizando la función de puja $B^{I}(v_i)$. El problema se plantea cuando la puja del ganador es igual a V_{min}. En ese caso el vendedor estaría estrictamente mejor cumpliendo. Esto es debido a que se ahorraría los costes de incumplir (por pequeños que sean) mientras que obtendría el mismo precio. Esto último es debido a que si $b_1=V_{min} \Rightarrow P_p^{I}(b_1)=b_1$. Es decir aunque incumpla no logra un incremento de precio. Sin embargo, aun en ese caso (en el que el comprador cumple) se puede mantener que la estrategia $B^{I}(v_i)$ es óptima ya que $B^{I}(V_{min})=B^{C}(V_{min})=V_{min}$ (dado los supuestos utilizados con cualquier otra función de puja también obtendríamos el mismo resultado en ese punto extremo).

Por tanto, cuando $K \cong 0$ la combinación de estrategias [“$B^I(v_i)$” $\forall$ i=1,2; “*Incumplir*” $\forall$ $b_1 > V_{min}$ y “*Cumplir*” si $b_1 = V_{min}$] constituirían un equilibrio. Con la excepción de la estrategia del vendedor cuando $b_1 = V_{min}$, este caso sería igual, en lo que a estrategias se refiere, al analizado en el apartado 5.3.1 en el que K=0. En relación con las ganancias netas esperadas no habría cambios en relación con los potenciales compradores aunque si con el vendedor. Sus ingresos esperados serían iguales pero no así sus ingresos netos que son inferiores, ya que ahora habría que restar los costes de incumplir K.

Es decir, cuando K=0 la combinación de la decisión de “Incumplir” con la presentación de unas pujas de acuerdo a $B^I(.)$ daba como resultado unos ingreso netos esperados para el vendedor, similar que cuando “Cumplía” (y los compradores tenían la certeza de que iba a cumplir). Por tanto, las combinaciones “Incumplir”-$B^I(v_i)$ y “Cumplir”-$B^C(v_i)$ originaban los mismo ingresos esperados para el vendedor.

La intuición es que los potenciales compradores anticipan el incumplimiento del vendedor e incorporan esas expectativas a su comportamiento presentando unas pujas lo suficientemente más bajas para que el proceso de la renegociación posterior de lugar a un precio esperado similar al que se originaría en una subasta en la que se cumplan las normas y en la que los compradores asumen sin incertidumbre que se van a cumplir. Por tanto, el vendedor era indiferente entre ambas alternativas.

Sin embargo, cuando introducimos el supuesto de que K es muy pequeña pero positiva entonces (la propia incertidumbre sobre cuando y como acabará ese período de renegociación podría ser un coste) la situación cambia. Aunque en términos de ingresos esperados el análisis sería el mismo que en el párrafo anterior, no ocurre lo mismo cuando tenemos en cuenta los ingresos netos que sería la variable relevante para el vendedor. En este caso, los ingresos netos esperados de la combinación “Cumplir”-$B^C(v_i)$ superarían a los ingresos netos esperados de la combinación “Incumplir”-$B^I(v_i)$. Sin embargo, si como hemos supuesto, una vez presentadas la pujas, el vendedor prefiere Incumplir a Cumplir, la combinación “Cumplir”-$B^C(v_i)$ no sería secuencialmente racional y no podría formar parte de un EBP. Por tanto, con $K \cong 0$ nos encontraríamos en el mismo caso que con K=0 y el equilibrio estaría formado por la combinación “Incumplir”-$B^I(v_i)$. Por tanto, la misma combinación de estrategias de equilibrio provoca una situación peor para el vendedor de la que se obtenía tanto cuando K=0 como cuando $K > (V^{max} - V_{min})/4$.

Insistiendo en esta idea observamos que la aparición de algún pequeño coste en el periodo de negociación puede ocasionar la aparición de lo que se conoce como “inconsistencia temporal” de la estrategia del comprador. Esto se origina debido a que existe un conflicto entre los intereses “ex ante” y “ex post” del vendedor. Así, “ex ante”, es decir, con anterioridad a la presentación de las ofertas, al vendedor le interesará que los compradores tengan la certeza de que no va a existir una fase adicional de negociación (de esta manera, consigue que los compradores presenten las pujas más altas que se derivan de $B^C(.)$ con lo que se maximizarían los ingresos esperados “ex ante”). Sin embargo, una vez que ya han sido presentadas las ofertas (y conociendo, que los compradores presentan pujas inferiores a la cantidad máxima que están dispuestos a pagar) iría en interés del vendedor el “incumplir” las reglas y abrir esa nueva fase de negociación. Por tanto, en este caso, “ex ante” al vendedor le interesaría “Cumplir siempre”, pero “ex post”, le convendría “Incumplir siempre”, ya que esta estrategia seguiría siendo una estrategia dominante (aquí influye el supuesto de que los costes de la negociación son muy pequeños –próximos a cero—[133]). Naturalmente, compradores racionales anticipan este comportamiento y el resultado sería el mismo que cuando no existen costes con la única diferencia de que el excedente o la utilidad del vendedor se vera reducida en los costes de la negociación (K). De esta manera el vendedor estaría peor que en la situación en la que tuviera a su disposición algún mecanismo que le permitiera adquirir un compromiso “ex ante”[134].

Indudablemente en este juego el mero anuncio por parte del vendedor de que va a cumplir las normas no pasaría la prueba de la credibilidad (en nuestro caso esta prueba consistiría en que la estrategia anunciara fuera secuencialmente racional dadas las conjeturas realizadas sobre lo sucedido hasta ese momento) y, por ello, sería necesario el utilizar algún mecanismo que permita dar credibilidad al auto-compromiso (lo cual estamos asumiendo que no esta disponible para el vendedor). Por tanto, en este juego la estrategia de Cumplir no podría formar parte de un equilibrio bayesiano perfecto. Además,

---

[133] La debilidad de este razonamiento puede descansar en que para pujas muy cercanas a V_{min} al vendedor no le puede compensar el incumplimiento.

[134] La opción de auto comprometerse también podría llevar aparejada algún coste como, por ejemplo, la remuneración de un hipotético tercero que se encargará de realizar la adjudicación. Si suponemos que estos costes, en caso de existir, son menores que los que se derivan de la negociación los resultados no variarían.

cuando $K \cong 0$ obtenemos un resultado que no es eficiente en el sentido de Pareto. Esto se puede observar ya que si se lograra que exista certeza sobre el cumplimiento de las normas (y finalmente el vendedor las cumple) se conseguiría que el vendedor estuviera mejor (ya que obtendría el mismo precio evitándose los costes de incumplir) al mismo tiempo que los compradores no empeorarían (es decir, obtendrían la misma utilidad). Por tanto, este último resultado sería preferido desde el punto de vista social pero no es alcanzable en nuestro juego por la existencia de "Inconsistencia temporal".

Esta es una de las situaciones en las que Schelling (1960) explicaba las ventajas que se podían derivar si teníamos capacidad para limitar nuestra propia discrecionalidad. De esta manera surge la paradoja por la que el poder de limitar al adversario podría depender del poder de autolimitarnos[135].

En el sector público se han utilizado algunos mecanismos que, en algún grado, contribuyen al objetivo de hacer creíble la estrategia anunciada. Es clásico en la literatura el caso de la política monetaria donde se puede producir un problema de inconsistencia temporal que resta credibilidad al anunció del objetivo de inflación por parte del Gobierno. Así, si en un contexto estático, si consideramos que el Gobierno persigue otros objetivos además del control de la inflación se plantea la posibilidad de que "ex-ante" la estrategia óptima para el Gobierno sea anunciar que se va a realizar una política monetaria restrictiva para alcanzar un determinado objetivo de inflación. Sin embargo, una vez que los agentes económicos se han "creído" este anuncio y lo han incorporado a sus expectativas la estrategia óptima para el Gobierno sería realizar una política monetaria algo más expansiva que la anunciada para que la inflación supere las expectativas y de esta manera incentivar el incremento de la actividad y el empleo (estamos suponiendo que la economía se comporta de acuerdo con el modelo de una Curva de Phillips con expectativas). Sin embargo, si los agentes económicos son racionales se dan cuenta del problema de inconsistencia temporal y predicen que la estrategia óptima para el Gobierno una vez que ellos han fijado sus expectativas (y actuado de acuerdo a ellas) no será la de cumplir con su anuncio sino que tendrá incentivos a incumplirlo (en terminología de Teoría de Juegos, la estrategia anunciada del gobierno no pasaría la prueba de la credibilidad). De esta manera, agentes racionales, no darían credibilidad al anuncio del Gobierno y no

---

[135] "The paradox that the power to constraint an adversary may depend on the power to bind oneself" (Schelling 1960, p.24).

van a incorporar a sus expectativas el objetivo de dicho anuncio. El resultado sería que el Gobierno no conseguiría incrementar la actividad y el empleo y además tampoco conseguiría cumplir su objetivo de inflación.

Esta falta de credibilidad es uno de los problemas a los que se enfrenta la política discrecional. Algunas de las posibles soluciones que se han apuntado sería el sustituir la discrecionalidad por normas (esta recomendación no ha tenido mucho éxito práctico en el campo de la política monetaria aunque si en otros campos) o encargar el diseño y la ejecución de la política monetaria a una entidad independiente dotada de autonomía y cuyo único objetivo sea el de la estabilidad de precios.

De esta manera, se conseguiría dotar de credibilidad a los objetivos de inflación al evitarse el problema de inconsistencia temporal. La entidad que dirige la política monetaria (si de verdad es independiente) en su función de utilidad incluirá únicamente los niveles de inflación, por lo que no tendría incentivos en manipular la política monetaria para obtener beneficios temporales en el nivel de actividad o de empleo. Por tanto, su estrategia óptima “ex-post” coincidiría con el anuncio realizado, con lo que se cumpliría el requisito de la credibilidad.

En el sector público se han utilizado algunos mecanismos que, en algún grado, contribuyen al objetivo de autoimponerse limitaciones y, por tanto, aumentan la capacidad de comprometerse y hacer más creíble que se vayan a cumplir las normas establecidas (aunque puedan tener otros costes como son los de incrementar la rigidez del proceso). Entre ellos, por ejemplo (y también con otro tipo de objetivos), estaría la separación del organismo que subasta el bien (o el servicio a realizar, por ejemplo, una obra pública) del encargado de adjudicarlo (que lo llevaría a cabo, por ejemplo, una mesa de contratación) de acuerdo con las normas establecidas por el primero (la primera fase de privatización de RETEVISION, es un ejemplo de las privatizaciones españoles de este caso);

Otra vía aplicable sería el incrementar el coste de incumplir (en nuestro modelo equivaldría a situar K por encima de $(V^{max}–V_{min})/4$). Un posible mecanismo sería la aprobación de una normativa específica (con independencia del rango que tengan) de obligado cumplimiento por parte de los agentes gubernamentales. En esas normas se establecería el procedimiento a seguir (por ejemplo en el caso de licitaciones de obra pública) y el incumplimiento de las normas sería recurrible. De esta manera, se incrementan de manera importante los potenciales costes del incumplimiento tanto para el funcionario público como para el organismo.

Esta última opción, en el caso de ventas de empresas, podría implicar excesivas rigidices ante procesos de venta de naturaleza muy distinta entre si y se necesita cierta capacidad de adaptación a lo largo del proceso. Por ello, en ocasiones se aprueban principios y normas generales que serán de aplicación en todos los procesos. Este es el caso, por ejemplo, del actual Programa de Privatizaciones en España aprobado en 1996, que incluye los principios a los que tendrán que atenerse los proceso de privatización[136]. Es decir, el Gobierno se auto-impone una serie de limitaciones en sus actuaciones. Sin embargo, dado su carácter general y relativamente flexible este mecanismo puede ser poco eficaz a la hora de generar expectativas en los agentes. Por ello, esta manera de actuar más flexible puede necesitar de algún mecanismo adicional para dotar de credibilidad la aplicación de estos principios generales.
[137]

Siguiendo con el caso español, este es uno de los posibles objetivos que se podía pretender perseguir con la creación del Consejo Consultivo de Privatizaciones (CCP) en 1996. Este Consejo elabora un dictamen (no vinculante) sobre cada operación de privatización y se hace público con anterioridad a que el Consejo de Ministros apruebe la operación. En la práctica, el CCP no tiene capacidad de impedir que las operaciones se aparten de los principios contenidos en el Programa de Privatizaciones aunque si pueden tener el efecto de incrementar el "coste" de su incumplimiento. Por tanto, desde este punto de vista, se podría entender como una "tecnología" para incrementar la credibilidad.

Sin embargo, en muchas ocasiones tanto en el sector privado como en el propio sector público se puede observar que, al menos aparentemente, no se recurre a ningún mecanismo para adquirir credibilidad y se cumplen con las normas informales establecidas. También a menudo se siguen procedimientos que no están formalizados y en los que el vendedor no anuncia cual será el sistema que elegirá y se reserva una elevada discrecionalidad a lo largo del proceso de venta. En estos últimos casos no se

[136] Sobre las características generales de este Programa y las novedades que implicó se puede consultar, por ejemplo, Gámir (1999).
[137] Sobre la actuación del CCP se puede consultar sus informes anuales, CCP (1999, 2000, 2001 y 2002).

podría hablar de incumplimiento de las normas porque de hecho estas no existen. También nos encontramos con que en algunos procesos se producen varias fases de negociación o de presentación de ofertas incluso cuando no se había anunciado que existiría esta fase adicional. En cualquiera de estas situaciones los vendedores tendrían que realizar conjeturas sobre cual sería el posible comportamiento futuro del vendedor.

Una de las maneras de abordar estos temas es la de analizar las consecuencias de las interacciones que ocurren cuando los procesos se repiten, que pueden llegar a alterar de manera significativa los resultados obtenidos cuando analizamos proceso que sólo se realizan una única vez.

APÉNDICE 5.1

En el apartado 5.3.1.- calculamos la función de precio P^I (b_1) con el supuesto de que el vendedor asumía que los vendedores se comportarían igual que si existiera certeza sobre el cumplimiento de las normas. A continuación, utilizando la función de precio así obtenida, procedimos al cálculo de la función de puja.

En este apéndice supondremos que el vendedor, tiene una racionalidad completa en este campo, y que podrá anticipar que los compradores van a modificar su estrategia cuando conocen que la acción de "Incumplir" es una estrategia dominante. Por ello, en este caso, el cálculo de obtener el límite superior del intervalo factible (es decir, el estimar la valoración del ganador a partir de su puja) va a ser un poco más complejo.

El límite inferior de ese intervalo factible para la negociación seguirá siendo b_1 (es decir, la puja presentada por el ganador) ya que este sería el precio que el vendedor tendría asegurado si eligiese la opción de "Cumplir".

Sin embargo, para calcular el límite superior tendríamos que conocer cual es la función de puja que, en equilibrio, estarían utilizando los compradores. Conociendo dicha función podríamos calcular, a partir de la puja presentada, la valoración que el comprador tiene de la empresa mediante la inversa de la función de puja. En el caso anterior, desde el punto de vista del vendedor (y dada su racionalidad limitada) la función de puja era "fija". El problema en este caso es que esta función varia si los compradores anticipan que el vendedor incumplirá. Por tanto, la función de precio influye en la función de puja pero a su vez esta influye en la primera. Por tanto, necesitaremos resolver el problema de maximización al que se enfrentan los compradores para obtener simultáneamente ambas funciones.

En cualquier caso el límite superior del intervalo factible sería igual que antes: la valoración del ganador que se desprenda de su puja presentada. Sin embargo, en este caso nos tenemos que conformar, de momento, con expresarlo de una manera genérica como $v_1=B^{-1}(b_1)$, es decir como una función que depende de su puja. Por tanto, el intervalo dentro del cual se podría culminar la negociación sería $[b_1, B^{-1}(b_1)]$.

Por tanto, todavía no podríamos dar una forma concreta a la función del precio cuando el vendedor decide incumplir tal y como habíamos hecho en la ecuación (5.6.). De momento, tomaremos una función genérica en la que el precio podrá tomar cualquier valor dentro de ese intervalo. Por eso supondremos que el precio será:

(5.22.) $P_p^I(b_1) = \alpha b_1+(1\text{-}\alpha)B^{-1}(b_1)$, donde $\alpha \in [0,1]$.

Cuando $\alpha=1$ nos encontramos con que $P_p^I(b_1)=b_1=P_p^C(b_1)$. Es decir, el precio en caso de "Incumplir" coincidiría con el precio que se obtendría en el caso de "Cumplir".

Por tanto, para un comprador, i, el precio a pagar, en caso de resultar ganador, vendría dado por la ecuación anterior ya que en este caso su puja sería la que hemos denominado b_1. Para razonar en términos de un comprador genérico sustituiremos el subíndice 1 por el subíndice i. De esta manera de la ecuación (5.22.) obtenemos que la derivada de la función del precio respecto a la puja sería:

(5.23.) $dP_p^I(b_i)/db_i=\alpha+(1\text{-}\alpha)/B'(v_i)$

Con estos cambios los compradores tendrán que seguir maximizando sus beneficios esperados, tal y como se encuentra expresados en la ecuación (5.8.) con el único cambio de que $P_p^I(b_i)$ viene expresada ahora por la forma genérica (5.22.), en lugar, de estar determinada por en la ecuación (5.6.). Por tanto, teniendo en cuenta este hecho la condición de primer orden sería la misma que la contenida en (5.9.).

Si en esta condición de primer orden, introducimos las ecuaciones (5.22.) y (5.23.), llegaríamos a:

$[\alpha+(1-\alpha)/B'(v_i)][(B^{-1}(b_i)-V_{min})/(V^{max}-V_{min})]=[v_i-(\alpha b_i+(1-\alpha)B^{-1}(b_i)][(dB^{-1}(b_i)/db_i)/(V^{max}-V_{min})]$

Introduciendo la condición $b_i=B(v_i)\ \forall i$,

$$[\alpha+(1-\alpha)/B'(v_i)][v_i-V_{min})/(V^{max}-V_{min})]=[v_i-\alpha B(v_i)-(1-\alpha) v_i]/[(V^{max}-V_{min}) B'(v_i)]$$

Ordenando términos y operando tenemos que

$$B'(v_i)-[B(v_i)/(V_{min}-v_i)] = [\alpha(V_{min}-2v_i)-\underline{V}_{min}+v_i]/\alpha(V_{min}-v_i)$$

Esta ecuación diferencial de primer grado es similar que (5.10.), con la excepción del término a la derecha del signo igual. Resolviéndola de la misma manera (teniendo en cuenta que ahora $w=[\alpha(V_{min}-2v_i)-\underline{V}_{min}+v_i]/\alpha(V_{min}-v_i)$, ver nota al pie número 124 de la página 174 o el apéndice 3.1. obtenemos la siguiente función de puja,

$B(v_i)=[2A-\alpha v_i(2\alpha(V_{min}-v_i)-2\underline{V}+v_i]/[2(v_i-V_{min})]$, siendo A la constante de la integración.

Utilizando la condición límite de que $B(V_{min})=V_{min}$ obtenemos que $A=-V_{min}^2/2\alpha$. Sustituyendo este valor en la ecuación anterior obtendríamos la función de puja que estábamos buscando.

(5.24.) $\quad b_i=B(v_i)=[(2\alpha-1)/2\alpha]\,v_i+V_{min}/2\alpha$

Es decir, llegamos a una expresión en que la puja, además de ser una función de la valoración, depende del coeficiente α (que es el que nos determinaba en que punto del intervalo factible se situaría la renegociación). De esta manera, tendríamos diferentes posibilidades según cual sea el valor que los jugadores creen que tomará α (recordamos que en nuestro modelo estamos suponiendo que tanto el vendedor como todos los potenciales compradores tienen la mismas expectativa o la misma conjetura sobre cual será el valor más probable para este coeficiente).

➢ Cuando α=**1** nos encontramos en el caso de que con certeza el precio se situaría en el mismo sitio que si se cumplieran las normas (es decir, aunque exista negociación el vendedor no será capaz de elevar el precio). Efectivamente, si nos fijamos en la ecuación (5.22.) deducimos directamente que el precio será igual a la puja presentada ($P_i^I(b_i)=b_i$). Por tanto, la función de puja de los vendedores sería la misma que cuando el vendedor cumple las normas. Esto también lo podríamos ver a partir de (5.24.) ya que :

si $\alpha=1 \Rightarrow b_i=B(v_i)=(v_i+V_{min})/2=B^C(v_i)$, y según (5.22.) $P(b_i)=b_i= P_p^C(b_i)$. Es decir, los mismo resultados que obteníamos cuando suponemos que se iban a cumplir las normas con certeza.

➢ Cuando α=**1/2** el precio se situaría justo en medio del intervalo factible, es decir, a igual distancia de la puja presentada que de la valoración que, en equilibrio, se deduciría de dicha puja. Este sería el valor de α que, al menos, en principio podríamos postular como candidato para ser utilizado como supuesto. Sin embargo, observamos que si introducimos este valora en la función de puja (5.24.) obtenemos que esta se transforma en una constante que coincide con el valor mínimo de la valoración que cualquier comprador podría tener. Es decir,

si $\alpha=1/2 \Rightarrow b_i=B(v_i)=V_{min}$

De esta manera, la puja de los potenciales compradores ya no dependería de su valoración ya que presentarían la misma puja con independencia de cual fuera esta. Por tanto, en este caso no sería posible deducir la valoración a través de las pujas presentadas debido a que todas las valoraciones dan lugar a la misma puja. Esto implica que las pujas no son informativas para el vendedor. Además, recordemos que dados nuestros supuestos V_{min} era la mínima puja aceptable. Interpretando este resultado podríamos decir que los compradores se comportan estratégicamente intentando no desvelar información que posteriormente sería utilizada de manera “desmedida” por el vendedor en su contra. Por ello, al utilizar, en equilibrio, esta función de puja constante provocan que el vendedor no obtenga ninguna información relevante de las pujas presentadas. De esta manera, el vendedor no obtendría ninguna utilidad de realizar la subasta y para él este caso sería equivalente a no realizar la subasta e iniciar la negociación directamente desde el principio.

- Si **α<½**, se puede comprobar, analizando la ecuación (5.24.) obtendríamos pujas inferiores a V_{min}, (lo que equivaldría a no presentarse).

Con estos resultados podríamos concluir que si el vendedor decide plantear la subasta es porque espera que el coeficiente α tome un valor superior a ½, es decir espera que α pertenezca al intervalo semiabierto (½ , 1]. Como los potenciales compradores son racionales anticiparán cual será la expectativa del vendedor y, por tanto, realizarán la misma conjetura. Este será el nuevo intervalo factible para el parámetro α. De nuevo, una vez definido el intervalo en el que se podría situar ese parámetro supondremos que sigue una distribución uniforme y que esa es la expectativa que tienen todos los jugadores. De esta manera, como la esperanza de una variable distribuida uniformemente coincide con la mitad del intervalo, el valor esperado para α se situaría a mitad de camino entre los extremos del intervalo mencionado anteriormente, es decir sería la media de ½ y 1. Por tanto, α sería igual a ¾.

- Si **α=3/4**, entonces podríamos calcular cuáles son las pujas que, en equilibrio, presentarían los compradores cuando anticipan que el vendedor incumplirá. Según la ecuación (5.24.):

(5.25.) si $\alpha=3/4 \Rightarrow b_i=B(v_i)=v_i/3+2\underline{V}/3= B^I(v_i)$

Esta función de puja es la misma que $B^I(v_i)$ tal y como se calculó en (5.11.). Una vez que tenemos la función de puja, así como el valor esperado de α, ya podemos calcular cual será el precio en función de la puja presentada por el ganador, en el caso de que el vendedor incumpla. Teniendo en cuenta que a partir de (5.25.) $v_i=B^{-1}(b_1)= 3b_1-2\underline{V}$ y utilizando la ecuación (5.22.):

$P_p^I(b_1) = \alpha b_1+(1-\alpha)B^{-1}(b_1)=3/4b_1+1/4(3b_1-2\underline{V})$, de donde, (5.26.) $P_p^I(b_1)=3b_1/2-V_{min}/2$,

Esta ecuación, como habíamos anticipado, coincide con la ecuación (5.6.), deducida en el apartado 5.3.1.-. En ambos casos el vendedor conseguiría elevar el precio por encima de la puja más alta presentada y situarlo en 3/2 de dicha puja menos la mitad de V_{min}. Por tanto, en este apéndice dotando de racionalidad completa al vendedor deducimos los mismos resultados que cuando le suponíamos una racionalidad limitada. La razón de esta coincidencia se debe al supuesto adicional de recalcular el intervalo factible para aquellos valores de α que originaran unas pujas superiores a cero.

Podemos comprobar, también, que el precio que finalmente pagaría el ganador sería exactamente el mismo que el que pagaba tanto cuando existía certeza sobre el cumplimiento de las normas como cuando anticipaba que un vendedor con racionalidad limitada incumpliría. Así, al introducir la función de puja en la ecuación (5.26.) obtenemos que el precio alcanzaría finalmente la mitad de la suma de V_{min} y de la valoración del ganador (es decir, $(v_1+V_{min})/2$). De esta manera, de nuevo nos encontramos con que los compradores al tener expectativas racionales se anticipen al comportamiento futuro del vendedor presentado unas pujas inferiores compensando, de esta manera, el resultado esperado de la posterior negociación (para este razonamiento es fundamental que las características del vendedor sean de dominio público como estamos suponiendo en los capítulos 5 y 6).

CAPÍTULO 6.- SUBASTAS REPETIDAS CON UN VENDEDOR DE "VIDA LARGA" (Y COMPRADORES DE VIDA "CORTA")

6.1.- INTRODUCCIÓN

En el capítulo 5 hemos analizado el "juego" suponiendo que únicamente se repite en una ocasión (lo que en nuestro caso equivaldría a que el vendedor sólo subasta una única empresa). Como no van a existir otras ventas posteriores, los jugadores (tanto el vendedor como los potenciales compradores) sólo se preocupaban de las consecuencias e interacciones que sus acciones ocasionen en la venta actual.

En este capítulo empezamos a analizar la mayor riqueza y complejidad de las estrategias que se le presentan al vendedor cuando realiza varias ventas. Como nos queremos centrar en el papel del vendedor supondremos que los potenciales compradores se presentan en una única operación. Es decir, en nuestro modelo el vendedor realizará diversas subastas a las que se van a ir presentando *diferentes* potenciales compradores. Por tanto, el vendedor será el único jugador que "repite". Esto lo podemos expresar como que el vendedor sería el único jugador que tiene una vida larga ("long lived player") ya que participa en todas las subastas mientras que los compradores son jugadores de vida corta ("short-lived or short-run players") ya que participan en una única venta.

Una posible "historia" que puede soportar este supuesto (aplicable, por ejemplo, a los procesos de privatización) la podríamos basar en la heterogeneidad de las empresas vendidas. El vendedor, en los procesos de privatización, sería el Departamento o el "holding" que poseen las empresas públicas (en el caso español, el actual Programa de Privatizaciones fijaba tres agentes gestores, AIE, SEPPa y SEPI, pero estos se han ido fusionando y la actualidad solo queda el último). Normalmente, las empresas vendidas por este holding pertenecen a sectores muy diferentes y presentan unas características y unas situaciones financieras muy dispares[138]. De esta manera, nuestro supuesto equivaldría a que los compradores interesados en comprar un astillero no serán los mismos interesados en comprar una empresa de producción de aluminio o una empresa de transporte de viajeros por carretera, por citar algunos ejemplos[139].

Por tanto, en este modelo los compradores no tienen ningún tipo de comportamiento estratégico relacionado con el objetivo de labrarse una reputación de cara a futuras operaciones. Por ello, este "juego" que estamos describiendo sería diferente al de los modelos en los cuales los mismos compradores se presentan en diversas ocasiones en subastas sucesivas, como por ejemplo en la licitación de obra pública, en los concursos para contratar Coordinador Global para una OPV o en las subastas para adjudicar derechos de exploración petrolíferos. En estos casos la reputación de los potenciales oferentes puede tener importantes repercusiones en el desarrollo del juego — como, por ejemplo, el caso de Bikhchandani (1988) —. Es decir, para los oferentes el generarse una reputación podría servir para obtener ventajas en las

[138] No suele ser corriente que el Estado posea varias empresas pertenecientes al mismo sector. Cuando esto ocurre suele existir una tendencia a fusionarlas con anterioridad a la venta. Por tanto, esto implicaría que sólo realizaría una venta de empresas pertenecientes a una misma rama de actividad. Sin embargo, también existen casos en el sentido contrario, es decir, que se vendan varias empresas pertenecientes a un mismo sector que, incluso, puedan proceder de una división realizada con carácter previo a la venta. El argumento principal para actuar de esta manera es la de fomentar la competencia en ese sector. Sin embargo, esta forma de actuar ha sido quizás menos frecuente de lo "deseable" desde el punto de vista teórico y las explicaciones pueden ser diversas (fuerte oposición de los gestores a que se divida "su" empresa, necesidad de evitar el retraso que supondría la reestructuración de la empresa, mayor preocupación por los ingresos a obtener que por las futuras condiciones competitivas, etc.) cuyo estudio queda fuera del alcance de esta tesis.

[139] De hecho, en el caso español, sólo en muy contadas ocasiones un mismo comprador se ha presentado en más de un operación de privatización.

siguientes operaciones y, por ello, podría ocurrir que no optimicen en el corto plazo. En nuestro caso, como los compradores se presentan una única vez su reputación no "importaría" y, por tanto, su único interés residiría en la venta a la que se presentan. Este es precisamente el efecto buscado con la introducción del supuesto por el que los compradores sólo se presentan en una ocasión. De esta manera, nos podemos centrar en el análisis de la reputación del vendedor.

El vendedor sería, por tanto, el único jugador que podría estar interesado en los posibles efectos que puedan tener sus acciones presentes en el futuro. Para que esto sea así, no basta con que el vendedor realice varias ventas, sino que además los potenciales compradores, presentes y futuros, tendrán que tener acceso a la información sobre el comportamiento pasado del vendedor. En caso de que este comportamiento no pueda ser conocido, el comportamiento presente del vendedor no podría tener efectos en las ventas futuras. Por ello, vamos a suponer que aunque los potenciales compradores participen en una única operación, conocen cual ha sido el comportamiento del vendedor en el pasado. En concreto asumiremos que cuando el vendedor está realizando la venta numero m es de dominio público (y, por tanto, conocido por todos los potenciales compradores) cuales han sido las decisiones adoptadas por el vendedor en las m-1 ventas realizadas con anterioridad. Esta información podrá ser utilizada por los compradores cuando realizan sus expectativas sobre como se podría comportar el vendedor en la operación en la que se presentan. En el capítulo 7 esto se complica ya que introducimos información incompleta sobre los tipos del vendedor y, por eso, el conjunto de este capítulo se puede considerar como un paso para la presentación de ese modelo.

Con el juego repetido, se introduce una mayor riqueza en el comportamiento del vendedor, ya que con su actuación en la venta actual podría llegar a influir, a través de sus expectativas, en las pujas que los potenciales compradores presenten en las siguientes ventas.

Este tipo de modelos donde existen jugadores de corta vida o de corto plazo ("short-lived or short-run players") tienen su origen en Simon (1951). En ese trabajo se planteaba un modelo en el que el jugador que repetía era una empresa que permanecía durante varias generaciones y los jugadores de vida corta eran los trabajadores. El modelo planteaba que una vez firmado el contrato laboral, el empleador tenía una amplia discrecionalidad para asignar las funciones a los trabajadores. Por su lado, los trabajadores conocían como se había comportado el empleador con anterioridad y solo estarían dispuestos a establecer una relación salarial con él si en los casos anteriores se había comportado de una manera “razonable”. El equilibrio estaría basado en la “reputación” del empleador que permitiría a los trabajadores anticipar que este no los iba a “explotar” y, por tanto, esa reputación es lo que mantendría unidos a los trabajadores y a la empresa. Precisamente la conservación de esa reputación era lo que permitía que la empresa renunciara a las ganancias que, en el corto plazo, podría extraer de la “explotación” de sus trabajadores actuales.

Con posterioridad al modelo de Simon se han desarrollado diversos modelos de este tipo aplicados a diferentes campos. A finales de los ochenta se formaliza la aplicación del Teorema de tradición oral (“Folk Theorem”) a esta situación (Fundemberg y otros (1989), Fundemberg y Levine (1989)). En este apartado y en el siguiente se intentará desarrollar un modelo de este tipo aplicado a la venta de empresas en el que, como se ha comentado, el vendedor sea el jugador de vida larga y los potenciales compradores sean los jugadores de corta vida.

Por otra parte, por simplicidad, asumiremos, que todas las valoraciones de los compradores *sobre todas las empresas* que se ponen en venta son independientes y se derivan de la misma función de distribución de probabilidades. En concreto supondremos que se distribuyen uniformemente en el intervalo $[V_{min}, V^{max}]$. Este supuesto implica que (asumiendo que los jugadores utilizan la mismas estrategias) el precio esperado “ex ante” por el vendedor será el mismo para todas las empresas (naturalmente los precios “ex post” serán diferentes en función de las realizaciones concretas de la variable aleatoria de la que se extraen las valoraciones de los potenciales compradores).

También, supondremos que el vendedor no puede cambiar de tipo de subasta. De esta manera, una vez que ha elegido un tipo de subasta para la primera venta lo mantendrá en las restantes. Supondremos que elige una subasta al primer precio y nos centraremos en el subjuego que comenzaría con posterioridad que comprendería todas las ventas (y al cual denominaremos juego para simplificar).

Hasta ahora hemos usado el término reputación sin definir que entendemos por él. Veremos, en los siguientes apartados, que en Teoría de Juegos el mismo término se puede utilizar para referirse a aspectos ligeramente diferentes.

6.2.- NÚMERO DE VENTAS DETERMINADO

En este apartado vamos a suponer que el vendedor tiene el encargo o la función de vender un número finito de empresas, que es conocido por todos los jugadores. Por tanto, descartamos que exista incertidumbre sobre, por ejemplo, si una determinada empresa se va a privatizar o se va a mantener en el sector público; o sobre si en el futuro se puedan adscribir nuevas empresas adicionales al holding privatizador para su posterior venta.

Llamaremos M al número finito de empresas que el holding tiene que vender y supondremos, que es información de dominio público. Esto implica que todos los potenciales compradores conocen que el vendedor va a vender M empresas, que este sabe que los compradores conocen este dato, que los compradores conocen que el vendedor sabe que ellos lo conocen, etc.

Por tanto, el juego en su conjunto comprendería las M ventas. Como las valoraciones de los compradores son privadas, nos encontramos con un juego con información incompleta y no podríamos hablar, apropiadamente, de subjuegos. En su lugar, tendríamos que hablar de "juegos de continuación" que incluyen, como se comentó en el capítulo anterior, lo que resta de juego desde el nodo en que el jugador que estemos analizando le toca mover.

Cada vez que los compradores de una fase tienen que presentar sus pujas se iniciaría un juego de continuación que tendría una historia determinada. Si nos encontramos en la venta m, a la historia hasta ese momento la llamaremos h_{m-1}. En nuestro modelo la historia en la venta m simplemente recoge las acciones adoptadas por el vendedor en las m-1 ventas anteriores. A la acción del vendedor en la venta m la llamaremos a_m^v. El conjunto de acciones factibles (A^V) del vendedor sólo tiene dos elementos ("*cumplir*", "*incumplir*"). Por tanto, la historia h_{m-1} consistirá en una sucesión de $m-1$ elementos $a_m^v \in A^V$. Es decir, $h_{m-1} = \{ a_1^v , a_2^v ,..., a_{m-1}^v \}$, donde cada a_m^v puede ser "*cumplir*" o "*incumplir*". De esta manera, h_{m-1} es un conjunto de $m-1$ elementos (la historia de la primera venta será el conjunto vacío — es decir, cuando m=1, h_{m-1}=h_0=$\varnothing$ — ya que no existe historia anterior).

Hay que tener en cuenta que, en cada inicio de una nueva venta, comenzaría un juego de continuación diferente para cada posible "historia" de las ventas anteriores. Es decir, al iniciar la venta de la empresa m podrían comenzar tantos juegos de continuación como posibles historias pudieran existir en las m-1 ventas anteriores. En nuestro caso, por ejemplo, en el nodo que inicia la venta de la segunda empresa podrían existir dos tipos de historias diferentes: h_1^* = {"*cumplir*"}, y h_1^{**}= {"*incumplir*"}. Según se avanza en las ventas el número posible de historias anteriores va siendo cada vez más numeroso. Así, en la tercera venta tendríamos cuatro posibles historias: a) C,C; b) C,I; c) I,I; y d) I,C (las dos letras se refieren a las acciones adoptadas por el vendedor en la primera y segunda venta respectivamente). En general, en la venta m tendríamos $2^{(m-1)}$ posibles historias y, por tanto, podrían comenzar $2^{(m-1)}$ posibles juegos de continuación en función de la combinación de acciones adoptadas por el vendedor en las m-1 ventas anteriores.

De esta manera una estrategia para un comprador i que se presenta a la compra de la empresa número m estaría compuesta por una función de puja para cada una de los $2^{(m-1)}$ posible historias que podrían haber ocurrido. Por su parte, como el vendedor participa en todas las ventas, su estrategia sería aun más inmanejable debido a que tendría que incluir, en cada una de las ventas, una acción para cada una de las posibles historias que podrían haber ocurrido hasta ese momento (en concreto la estrategia del vendedor tendría que incluir una acción para un total de $\sum_{m=1}^{M} 2^{m-1}$ contingencias en las que se podría llegar a encontrar).

En el EBP el concepto de racionalidad secuencial viene a desempeñar un papel parecido al que jugaba el de perfección en subjuegos. La racionalidad secuencial se define con relación a un sistema de conjeturas, las cuales a su vez tienen que ser consistentes con las estrategias. Esto provoca una circularidad que hace que, en general, no sea posible aplicar la técnica de la "inducción hacia atrás" para encontrar un EBP. Esta será la situación que nos encontremos en el próximo capítulo. Sin embargo, en este caso podremos utilizar esta técnica debido a la trivialidad de las conjeturas. Esto se origina debido a que, por un lado, el vendedor, cuando le toca decidir, conoce las acciones de los compradores (que son los jugadores sobre los que existe información incompleta) mientras que los compradores aunque no conocen cual será la acción que adoptará el vendedor si conocen cual es su tipo y, por tanto, su función de ganancias.

Así, en el juego repetido el único jugador que puede tener consideraciones de futuro es el vendedor. Los compradores como sólo se presentan a una única venta presentarán la puja que maximiza su utilidad esperada en esa venta. En la última ($m=M$) ni siquiera al vendedor le preocupará lo que pueda suceder una vez finalizada esa venta. Por tanto, en esta última ocasión nos encontraríamos con la situación estudiada en el capítulo 5. Así, los vendedores K=0 y $K\to 0$ "incumplirían" $\forall b_1$ mientras que el vendedor con $K\geq(V^{max}-V_{min})/4$ "cumpliría" $\forall b_1$. Los compradores que se presentan en la última venta, como conoce K, anticiparían este comportamiento y presentarían unas pujas conforme a $B^I(.)$ en los dos primeros casos y de acuerdo a $B^C(.)$ en el último. Dicho en otras palabras en la última venta del juego no va a ser relevante la historia de las $M-1$ ventas anteriores.

Conociendo este resultado en la última venta podríamos realizar un análisis parecido para la penúltima venta ($m=M-1$). Así, nos encontramos con que los jugadores (tanto el vendedor como los potenciales compradores activos en esa operación) anticiparán que (pase lo que pase en la presente operación) en la siguiente venta (que será la última) el vendedor adoptará la acción de Incumplir y que los compradores que estén activos en la siguiente venta se comportarían como si efectivamente fueran a Incumplir. Por ello, el vendedor conoce que nada de lo que realice en la actual operación tendría influencia en la siguiente. Como resultado al adoptar su decisión tendrá en cuenta sólo los efectos que le ocasionarían en la venta presente. A su vez los compradores conocerán estos incentivos para el vendedor y anticiparán su comportamiento. De este modo en la penúltima venta se repite el resultado de la última.

Si analizáramos la antepenúltima venta (m=M-2) nos encontramos en la misma situación, es decir, como pase lo que pase en la actual operación el comprador no va a influir en el comportamiento de los potenciales compradores en las dos siguientes ventas optimizaría adoptando la acción que maximiza su utilidad a corto plazo. Este argumento lo podríamos repetir para las ventas anteriores hasta que llegáramos a la primera operación (m=1) obteniendo en todas ellas el mismo resultado.

Por tanto, cuando existe información sobre el tipo de vendedor y cuando el número de ventas es finito y conocido, el resultado de cada uno de las ventas sería similar al que obtenemos cuando el vendedor realiza una única venta.

Este razonamiento, que desde el punto de vista teórico es muy claro y directo, en ocasiones, puede resultar poco convincente sobre todo cuando el número de repeticiones se va haciendo mayor (aunque M continúe siendo finito y determinado). Es decir, la argumentación anterior soportaría mejor este resultado cuando M=5 que cuando M=50[140]. Por otra parte, nos puede parecer poco satisfactorio el resultado de que en un juego, de estas características, el vendedor (cuando K=0 o $K \rightarrow 0$) siempre va a incumplir (especialmente, en el segundo de los casos mencionados, ya que, como analizamos en el capítulo anterior, el vendedor obtiene una utilidad menor que si lograra hacer creíble la acción de "cumplir") y, además, que todos los compradores lo saben y lo asumen.

Como se ha comentado, este resultado se basa en la lógica de la "inducción hacia atrás" que, estrictamente, se aplicaría al concepto de perfección en subjuegos. Aunque, este no sea el concepto de equilibrio que teóricamente estamos utilizando en este capítulo (debido a la no existencia de subjuegos) el "espíritu" del razonamiento que hay detrás si sería aplicable a lo que hemos comentado en este apartado (un caso distinto será la que nos encontremos en el capítulo 7). Por tanto, en los siguientes párrafos realizaremos unos comentarios sobre el Equilibrio Perfecto en Subjuegos que serían aplicables al modelo analizado en este apartado. El EPS se ha utilizado extensamente en la "resolución" de multitud de juegos económicos con cierto éxito aunque no está exento de problemas y, alguno de ellos, ha originado una amplia literatura.

---

[140] Este último, no es un número escogido enteramente al azar ya que se aproxima bastante al número de empresas privatizadas en España (por el Gobierno Central) desde que comienza el actual Programa de Privatizaciones.

De hecho, ha recibido diversas críticas que se agudizan cuando el número de repeticiones (o el número de movimientos que se realizan dentro del mismo juego) es "elevado"[141]. La lógica en que se basa el concepto de "Inducción hacia atrás" (que se aplica en juegos en forma extensiva) sería equivalente a la de la "eliminación sucesiva de estrategias débilmente dominadas" aplicada a juegos representados en su forma normal o estratégica[142] (quizás habría que matizar que la lógica es algo más convincente en el primero de los casos). Ambas situaciones se basan en la certeza que tienen los jugadores sobre la racionalidad de los demás. Pero para obtener el resultado de cada ronda adicional (en nuestro caso para obtener los resultados en las ventas sucesivas según nos vamos alejando de la última) o en cada eliminación de estrategias débilmente dominadas, se requiere ir dando un paso más en relación con las creencias de los jugadores sobre la racionalidad de los demás.

Pongamos como ejemplo un juego con dos jugadores en que los dos sean racionales. Para aplicar la lógica de la eliminación iterativa de estrategias débilmente dominadas no es suficiente con suponer que ambos sean racionales: además tenemos que suponer que cada jugador está seguro de que el otro jugador es racional; y, además, que cada jugador está seguro de que el otro, a su vez, está seguro de que él es racional y que ... etc. Podría darse el caso de que los dos jugadores sean racionales y que uno de ellos supiera que su rival también es racional pero que el otro tuviera alguna duda sobre la racionalidad del primero. O que los dos estuvieran seguros de que el otro es racional pero uno de ellos tuviera dudas sobre si el otro no tuviera la certeza sobre si él es racional.

En nuestro modelo, nos encontramos que en la última venta ($m=M$) para llegar al resultado de que el vendedor incumplirá asumimos que los potenciales compradores están seguros sobre la racionalidad del vendedor (y, por lo tanto, que se comportará de tal manera que maximice su utilidad dada la información de la que dispone en el momento de tomar su decisión). Sin embargo, cuando pasamos a la penúltima venta ($m=M-1$) el análisis se complica y las cadenas de suposiciones necesarias para llegar a la solución se alargan. Así, además de asumir que los compradores están seguros de la racionalidad del

[141] Una de ellas la popularizó Rosenthal (1981) a través del "juego del ciempiés" que ha alcanzado gran difusión e importancia en la Teoría de Juegos.

[142] Sobre este punto véase Kreps (1990a) en el que está basado el esquema de los párrafos que quedan antes de finalizar este apartado.

vendedor necesitamos asumir que el vendedor está seguro: a) de la racionalidad de los compradores y b) de que los compradores están seguros de que él es racional. Adicionalmente, necesitaríamos asumir que los compradores están seguros de que el vendedor está seguro de lo anterior. Cuando analizamos la antepenúltima venta (m=M-2), esta cadena de suposiciones sería excesivamente larga y si siguiéramos dando pasos adicionales se convertiría en inmanejable.

Por tanto, con cada repetición necesitamos añadir un eslabón más en la cadena de conjeturas de cada jugador sobre la racionalidad de los demás y sobre la conjetura que cada jugador realice sobre la creencia de los demás en su propia racionalidad. De esta manera, este tipo de solución se basa en unos supuestos que son más difíciles de asumir cuando se va incrementando el número de repeticiones del juego. Por ello, desde este punto de vista, este concepto de solución parece “debilitarse” según se eleva el número de repeticiones. El juego del ciempiés, Rosenthal (1981), es un extendido ejemplo de un juego que tiene un único Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos y en el que esta “solución” no parece corresponderse ni con la intuición ni con la evidencia empírica recogida (hay que tener en cuenta que, aunque, este no se trata, como en nuestro caso, de un juego repetido, la lógica es la misma ya que cada jugador podría llegar a tener que mover un número elevado de veces hasta que se alcanzara el final del juego).

Existe otro problema con este tipo de solución. Supongamos que se cumple lo anterior, es decir, que todos los jugadores están seguros de la racionalidad de los demás y que todos están seguros de que los demás están seguros de la racionalidad de los demás, etc. Situémonos en la situación en la que se encontrarían los potenciales compradores cuando tienen que presentar sus pujas en la segunda. Dados nuestros razonamientos anteriores, los compradores habrían deducido que el vendedor incumpliría desde la primera venta hasta la última. Sin embargo, ¿cuál sería su situación si a pesar de su deducción, basada en la racionalidad del vendedor, observan que en la primera venta el vendedor ha cumplido?. ¿Seguirían actuando como si estuviera vigente su teoría anterior a la observación del comportamiento del vendedor en la primera venta o tendría que tomar la decisión del vendedor como una clara evidencia de que sus suposiciones eran erróneas?. Si este último camino es el adecuado ¿sería óptimo presentar las pujas como si el vendedor fuera a incumplir con certeza (como se deduciría del razonamiento anterior)? o ¿habría que cambiar de estrategia y asignar probabilidades positivas a la opción de que el vendedor vuelva a cumplir?. Si ocurre esto último y, el vendedor anticipa que esta puede ser la reacción, ¿le podría compensar no comportarse como se supone que lo va ha hacer para aprovechar la incertidumbre que crea en los compradores sobre su propia racionalidad e intentar así influir en sus pujas?.

El modelo desarrollado en el capítulo 7 intenta tener en cuenta algunas de estas cuestiones pero antes vamos a analizar como funciona el modelo cuando, en lugar de suponer que el número de ventas es finito y está determinado, asumimos que es infinito (o que existe incertidumbre sobre cual será el número exacto de ventas que realice el vendedor).

6.3.- JUEGO CON UN NÚMERO INFINITO (O INDEFINIDO) DE VENTAS

En el apartado anterior tanto los compradores potenciales como el vendedor conocían cual era el número exacto de empresas en venta. Así, cuando se realizaba una venta eran conocidos cuantas operaciones le quedaban a ese vendedor por realizar. Esto nos permitía que, para intentar encontrar la "solución" al juego, pudiéramos utilizar la "inducción hacia atrás", y empezar a analizar cual será el comportamiento de los jugadores en la última venta.

Sin embargo, si suponemos que el número de ventas es infinito ya no será posible aplicar la inducción hacia atrás debido a que como el juego se repite indefinidamente nunca alcanzaríamos la "última" venta. Por tanto, la situación va a ser diferente y podría permitir otras posibilidades.

El supuesto de que el número de ventas es infinito lo podíamos soportar con una "historia" como que el vendedor se dedica a la compra de empresas para posteriormente venderlas (entre ambos momentos se podría suponer que hay una reestructuración). Por tanto, como esa es su actividad la ejercerá de una manera indefinida (recordamos aquí que para no entrar en los posibles problemas de Agencia no consideramos el caso de aquellas empresas que se encargan de asesorar o gestionar la compra-venta de empresas por cuenta de terceros, como puede ser el caso de los Bancos de Inversión en la venta de empresas o las Casas de Subastas y los portales de internet en la venta de objetos).

En el caso de un organismo público encargado de ejecutar un programa de privatizaciones podríamos suponer que pueden ir recibiendo transferencias de empresas para su venta procedentes de otros organismos o de otros departamentos ministeriales. Adicionalmente, su número de ventas también podría aumentar cuando se decanta por vender de manera independiente filiales de las empresas públicas. No obstante en el caso del sector público sería menos convincente el supuesto de un número infinito de ventas, a no ser que el Estado se dedique también de una manera continúa a la compra de empresas para su venta posterior. Esto último puede no ser coherente con la puesta en práctica de un plan de privatizaciones y, por ello, podría ser más difícil de asumir.

Sin embargo, el supuesto de un número infinito de ventas se puede relajar y podemos obtener resultado similar al utilizar el supuesto de un número de ventas “elevado” y, sobre todo, indeterminado. Este supuesto si podría ser más aplicable al sector público. Es decir, en este caso los potenciales compradores no conocerán (y frecuentemente, tampoco, el propio vendedor) cual es el número exacto de empresas que se van a vender. Esto se puede modelizar asignando una probabilidad (que normalmente será reducida) a la opción de que la venta siguiente ya no tenga lugar y que, por lo tanto, la actual sea la última. De esta manera, situaciones en las que: a) el número de empresas que queden por vender sea “elevado”; b) en las que exista incertidumbre sobre si determinadas empresas finalmente se venderán y/o c) en las que se puedan producir futuras incorporaciones de empresas; se podrían asemejar a esta situación teórica. Por ejemplo, para el caso del “holding” público español SEPI podríamos mantener que, en los últimos años de la década de los noventa y primeros años del siglo actual, se encontraba en una situación próxima a la descrita.

En estos modelos va a ser necesario actualizar las ganancias que se esperan obtener en el futuro para trabajar, de esta manera, con valores presentes, que puedan ser comparables. El factor de descuento, al que llamaremos δ, podría incluir no sólo la actualización de las ganancias obtenidas en periodos futuros sino también la posibilidad de que la próxima venta ya no tenga lugar. Así, si suponemos que el tipo de interés por período es r el factor descuento será $\delta=1/(1+r)$. De esta manera, δ^n será el valor actual de una unidad monetaria obtenida dentro de n períodos. Si consideramos que existe una probabilidad p de que el juego finalice en la venta actual, entonces $(1-p)$ sería la probabilidad de que se realice una venta adicional. De esta manera, el valor de una unidad monetaria a obtener en la siguiente venta (antes de saber si se llega a celebrar o no) tendría un valor de $(1-p)/(1+r)$. Así, el factor de descuento que tuviera en cuenta tanto la actualización de las ganancias como la posibilidad de que el juego finaliza sería $\delta=(1-p)/(1+r)$ y δ^n seguiría siendo el valor actual de una unidad monetaria obtenida dentro de n periodos.

En el modelo que vamos a desarrollar supondremos que entre cada operación transcurre un periodo y, por tanto, el beneficio (π) obtenido en la venta número m tendría un valor al principio del juego de $\delta^{m-1}\pi$ (dado que suponemos que la primera venta en que $m=1$ se realiza en el período actual). Por tanto, el valor presente de una sucesión infinita de pagos que viene dada por π_t sería igual a: $\pi_1+\delta\pi_2+\delta^2\pi_3+...=\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}\pi_t$. Si todos los π_t fueran iguales (y dado que $0<\delta<1$) la conocida formula de la progresión geométrica indefinida nos simplifica la expresión. De esta manera, una sucesión infinitas de una cantidad constante de ganancias π se podría expresar de la siguiente manera:

(6.1.) $\pi+\delta\pi+\delta^2\pi+...=\pi/(1-\delta)$.

En los sub-apartados siguientes analizaremos el juego en el que el vendedor realiza un número infinito de ventas en tres casos diferentes: $K=0$; $K\geq(V^{max}-V_{min})/4$ y $K\to 0$.

6.3.1.- Caso: K=0

Cuando analizamos juegos que se repiten indefinidamente (o en los que no existe certeza de cuando se pueden acabar), desde el punto de vista teórico surge el problema de que, aun en los casos donde el juego de etapa[143] tenga un único equilibrio, aparece la posibilidad de que aparezcan múltiples equilibrios en los que no se reproduzcan el equilibrio del juego de etapa.

Vamos a observar, sin embargo, que en el caso concreto de K=0 no ocurre así ya que no encontramos, en el juego repetido indefinidamente, un conjunto de estrategias que constituyan un EBP con las que, en la senda de equilibrio, *no* se reproduzca el equilibrio del juego de etapa.

Vamos a comenzar suponiendo la siguiente combinación de estrategias

(6.2.)
- Estrategia para todos los compradores que se van presentando en las sucesivas ventas: $B^I(v_i)\ \forall m$.
- Estrategia para el vendedor: "*Incumplir siempre*" $\forall m$.

Es decir, tanto los compradores como el vendedor no tienen en cuenta la historia de ventas anteriores y con independencia de esta siempre adoptan la misma acción.

Para formar parte de un EBN necesitaríamos un sistema de conjeturas. Ya hemos argumentado que este sería trivial y por eso no vamos a considerarlo. La combinación de estrategias (6.2.) constituye un EBN que reproduce en todas las ventas el resultado obtenido en el apartado 5.4.- cuando sólo se consideraba una única venta.

---

143 En Teoría de Juegos se denomina así al juego cuya repetición da lugar al juego repetido. Por ejemplo, si llamáramos G al juego de etapa, G(T) sería el juego repetido finitamente en el que G se juega T veces.

De una manera descriptiva, se observa que en ninguna venta, a los compradores, dada la estrategia del vendedor, les compensa desviarse de $B^I(.)$ siempre y cuando los demás compradores también utilicen esa estrategia. Por su parte, el vendedor si se apartara de su estrategia en alguna etapa obtendrá unos ingresos netos menores en esa venta y, dada la estrategia que están utilizando los compradores, no será capaz de incrementar sus ingresos esperados en las siguientes. Es decir, el cumplir en una o varias ventas no le serviría para "convencer" a los compradores a que presenten pujas mayores en las siguientes etapas. Por tanto, ante la existencia de un coste y la inexistencia de un beneficio al vendedor tampoco le compensa desviarse de la estrategia mencionada. Además, este razonamiento es aplicable a cualquier venta del juego ya que, dadas las estrategias, la historia no importa y, como la distancia al final es siempre la misma, todos los juegos de continuación serían siempre iguales.

De este modo, las ganancias esperadas ("ex ante") del vendedor en una venta concreta coincidirían con las obtenidas en el apartado 5.4.-:

$$U_V^{(M=1)} = P^e – K^e = V_{min} + (V^{max} – V_{min})/3$$

Como este resultado se repetiría en todas las ventas, podemos calcular en términos actualizados el valor esperado del juego repetido infinitamente para el vendedor. Así, aplicando (6.1.), obtenemos:

$$\text{(6.3.)} \qquad U_V^{(M=\infty)} = U_V^{(M=1)}/(1\text{-}\delta) = [3V_{min} + (V^{max} - V_{min})]/3(1\text{-}\delta)$$

Por tanto, este sería un equilibrio. Sin embargo, como ya hemos mencionado, en juegos repetidos indefinidamente, podrían aparecer otros equilibrios adicionales. A continuación mostramos un intento de construir uno equilibrio diferente. Avanzamos que cuando K=0 el resultado que obtenemos es negativo.

Vamos a suponer que en cada venta el vendedor sólo puede utilizar estrategias puras (eligiendo entre "Cumplir" o "Incumplir") y no tiene la posibilidad de optar por una estrategia mixta[144] (en el apéndice 6.1 se muestra como este tipo de estrategias nunca

[144] Este tipo de estrategias implican que el jugador para elegir su opción opta por un

serían utilizadas por este vendedor). De esta forma, los compradores optimizan utilizando $B^C(.)$ o $B^I(.)$. Hipotéticamente, en un juego repetido indefinidamente, en cada venta se podrían plantear cuatro combinaciones:

i) "*Cumplir*"– $B^C(.)$. En este caso los ingresos netos del vendedor en la etapa ya los hemos calculado y serían $In(B^C,C)= P_p^C(B^C(E[v_1])=V_{min}+(V^{max}-V_{min})/3$.

ii) "*Incumplir*"– $B^I(.)$. También, tenemos ya calculados los ingresos netos del vendedor, y coincidirían con el caso anterior $In(B^I,I)=P_p^I(B^I(E[v_1])–K=V_{min}+(V^{max}-V_{min})/3$.

iii) "*Incumplir*"– $B^C(.)$. Indudablemente este será el caso más favorable para el vendedor. Los ingresos netos vendran dados por: $In(B^C,I)=P_p^I(B^C(E[v_1])–K=V_{min}+(V^{max}–V_{min})/2$.

iv) "*Cumplir*"– $B^I(.)$. Esta sería la peor de las cuatro desde el punto de vista del vendedor. Así, $In(B^I,C)= P_p^C(B^I(E[v_1])==(7\underline{V}+2V^{max})/9$.

En el equilibrio descrito por la estrategias contenidas en (6.2.) el vendedor tendría garantizado el conseguir indefinidamente el caso ii) anterior. Sin embargo, como hemos visto con el caso iii) sus ganancias esperadas son mayores. Por ello, una de las posibilidades para el vendedor sería intentar conseguir otro resultado en el que se lograra (al menos en alguna venta) el resultado iii). Esta es una posibilidad que no podría obtener si el juego tiene una única venta o si el número de empresas es finito y determinado. Pero cuando el juego se repite indefinidamente se abren las posibilidades (al menos teóricamente). Vamos a ver que incluso en este caso (K=0), el conseguir el resultado iii) no es posible para el vendedor. El caso iii) en el que los compradores presentan sus pujas como si el comprador fuera a cumplir y después este incumple lo podríamos describir como el caso en el que el vendedor logra "engañar" a los compradores. Evidentemente esta situación no se podría lograr consecutivamente debido a que las expectativas de los compradores les haría cambiar rápidamente la manera de pujar. Vamos a suponer que los compradores que se presentan en cada compra pasarían a utilizar inmediatamente B^I (.) en cuanto observan que el vendedor ha incumplido en la venta anterior.

---

mecanismo aleatorio que asigne unas determinada probabilidades a cada una de sus acciones.

De esta manera, el vendedor sólo podría cumplir su objetivo de forma consecutiva en una sola venta. Los beneficios para el vendedor si consigue la situación iii) vendría dado por el incremento de sus ganancias sobre la situación ii). En concreto: $In(B^C,I)–In(B^I,I) = (V^{max}–V_{min})/6$. Después de esta ronda los compradores volverían a presentar B^I y lo mejor que podría hacer el comprador es incumplir con lo que se volvería a la situación ii) y a partir de esa ronda nada cambiaría en relación con el equilibrio comentado antes. Sin embargo, para lograr que los compradores presenten sus pujas de acuerdo a B^C el vendedor tendría que "convencerles" de alguna manera de que va a Cumplir. Para ello, el vendedor tendría que incurrir en el coste de Cumplir (mientras que los compradores presentan o están presentando sus pujas de acuerdo a B^I) durante una o varias ventas. El coste incurrido en cada etapa al actuar de esta manera lo podemos calcular como la diferencia entre $In(B^I,I)$ - $In(B^I,C) = (V^{max}–V_{min})/9$. Es decir, la diferencia entre lo que dejaría de obtener con la situación ii) y lo que obtiene con la situación iv).

Comparando estos costes y beneficios se deduce que como máximo el vendedor estaría dispuesto a incurrir una sola vez en el coste ocasionado por cumplir con las normas $[(V^{max}–V_{min})/9]$ para obtener el beneficio $[(V^{max}–V_{min})/6]$ derivado de incumplir en la siguiente ronda mientras que los compradores están actuando como si fuera a cumplir (es decir, $2/9$ es mayor que $1/6$, y por tanto si tuviera que soportar el mencionado coste durante más de una venta ya no le compensaría). Adicionalmente, como el vendedor tiene que incurrir en los costes con anterioridad de la obtención de los beneficios, estos últimos tendrían que ser actualizados con la tasa de descuento, δ. Por ello, podría suceder que (para valores de δ lo suficientemente cerca de cero) incluso no le resultara rentable tener que incurrir en dicho coste ni siquiera una sola vez. Supondremos que δ esta lo suficientemente cerca de uno para que $\delta(V^{max}–V_{min})/6>(V^{max}–V_{min})/9$. De esta manera, el vendedor sólo estaría dispuesto a cumplir durante una venta si con eso consigue que en la siguiente los compradores incrementen sus pujas presentándolas de acuerdo a B^C. Esto se cumpliría si, por ejemplo, los compradores actuaran de acuerdo a la siguiente estrategia:

(6.4.) Si $m=1$, $B^I(.)$ y

$$\text{si } m>1, \quad \begin{cases} B^I(.) \text{ si } a_{m-1}^v = \text{"}\textit{Incumplir}\text{"} \\ B^C(.) \text{ si } a_{m-1}^v = \text{"}\textit{Cumplir}\text{"} \end{cases}$$

Es decir, con esta estrategia los compradores empiezan incumpliendo en la primera venta y en las siguientes presentan sus pujas de acuerdo a B^C (.) o B^I (.) en función de si en la venta anterior el vendedor Cumplió o Incumplió. Si los compradores utilizan esta estrategia entonces al vendedor le compensaría incurrir en los costes de cumplir en una venta para a continuación incumplir en la siguiente. Es decir, el vendedor podría utilizar una estrategia como:

$$\begin{cases} \text{Si } m \text{ es impar, } & \text{“\textit{Cumplir}”} \\ \text{Si } m \text{ es par, } & \text{“\textit{Incumplir}”} \end{cases}$$

Si todos los jugadores se atuvieran a estas estrategias, el juego comenzaría con la presentación de las pujas de acuerdo a B^I(.) y el Cumplimiento del vendedor. Este comportamiento del vendedor “convencería” a los siguientes compradores que presentarían sus pujas de acuerdo a B^C (.) mientras que en esta ocasión el vendedor Incumpliría. De este modo en la siguiente venta los compradores volverían a utilizar B^I (.) debido al incumplimiento mientras que el vendedor para convencer a futuros compradores volvería a Cumplir. Así se iniciaría un nuevo ciclo.

Con esta estrategia de los compradores la estrategia del vendedor sería secuencialmente racional. Sin embargo, dada la estrategia del vendedor, la estrategia de los compradores no cumpliría con este requisito y, por tanto, no podría formar parte de un EBN. Esto es fácil de mostrar ya que los compradores que se presenten a cualquier venta podrían aumentar su utilidad “desviándose” de la mencionada estrategia[145].

[145] Una de las razones que explican la no optimalidad de la estrategia (6.4.), es que los compradores actúan con una racionalidad “limitada” (se podría decir, que tomán sus decisiones como si tuvieran expectativas adaptativas). De esta manera, el vendedor podría “engañarles” de una manera continuada. Si los compradores son racionales y utilizan, por tanto, toda la información que disponen sobre el vendedor, serían capaces de anticipar este comportamiento adaptando su estrategia a esta situación.

6.3.2.- Caso: $K \geq (V^{max} - V_{min})/4$

En el apartado 6.2.- se describió que cuando el vendedor realiza un número finito y determinado de ventas (que fuera de domino público) entonces, debido al razonamiento implicado por el concepto de "inducción hacia atrás", el resultado obtenido en el juego con una única venta se reproducía en cada uno de los juegos de etapa del juego repetido M veces. Es decir, en equilibrio, en todas las ventas se reproduce la repetición del resultado obtenido cuando el juego se repite una única vez (el vendedor "cumple para cualquier puja ganadora" y los compradores presentan sus pujas de acuerdo a $B^C(.)$).

En el presente apartado analizamos si el suponer que, el número de ventas realizada por un mismo vendedor es infinita, podría alterar este resultado. Es decir, si en la senda de un equilibrio pueden existir ventas en que no se reproduzcan las acciones comentadas. Adelantamos, que (de la misma manera que ocurría en el caso en que K =0) la realización de un número infinito de ventas tampoco nos permite encontrar un equilibrio de esta naturaleza. Además obtenemos este resultado en dos situaciones diferentes. En la primera, el vendedor incurriría en los mismos costes de incumplir (es decir, en K) en cada venta en la que opta por esta opción. En la segunda situación el vendedor sólo incurriría en dichos costes en la primera venta en que decide incumplir mientras que en las sucesivas ventas en que optara por esta opción K sería igual a cero.

En la primera situación, los costes de incumplir podrían ser los que se derivan del proceso de negociación, del mayor tiempo que lleva la ejecución de la venta así como los que lleva aparejada la mayor incertidumbre. De esta manera, como cada vez que se incumple se inicia una renegociación siempre se incurriría en los mencionados costes y K sería igual en todas las ventas.

Por el contrario en la segunda situación los costes de incumplir se relacionarían no con los costes de la negociación en la propia venta sino con aquellos otros costes "extras" que mencionábamos en el apartado 5.1.-. Estos podían tener su origen en la imagen que se deriva del incumplimiento del vendedor, que podría tener efectos negativos en el resto de actividades desarrolladas por el vendedor (con sus proveedores, con las instituciones financieras, etc). En este caso suponemos que los efectos relevantes tendrían lugar la primera vez que se incumple que es cuando el vendedor genera su imagen de incumplidor. Por tanto, asumimos que los siguientes incumplimientos no tendrían ya efectos adicionales a su imagen y de esta manera el coste "marginal" de incumplir, cuando ya se ha incumplido al menos una vez, es cero[146].

a) Cuando K se mantiene igual en todas las ventas

En este caso se puede observar directamente que en equilibrio se reproduciría en todas las ventas el resultado del juego con una única venta. Es decir, la combinación de estrategias:

(6.5.)
$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Todos los compradores: } \quad B^{C}(v_i)\ \forall m. \\ \bullet \text{ Vendedor: "}\textit{Cumplir siempre}\text{" } \forall m. \end{array} \right.$$

constituye un equilibrio. Es decir, estas estrategias serían secuencialmente racionales y, por tanto, ninguno de los jugadores tendría incentivos para desviarse en ninguna de las ventas. Por un lado, parece claro que el vendedor no encontraría ninguna ventaja en desviarse de esta estrategia en ningun momento. Esto es así debido a que en, cualquier venta, si el vendedor "Incumple" tendría que incurrir en unos costes adicionales mayores que el incremento de precio que obtendría en la renegociación. Por tanto, en cuanto se desvíe incurre en una menor utilidad inmediata y, a cambio, no existe ninguna posibilidad de mejorarla en el futuro.

[146] Naturalmente entre estos dos casos podrían plantearse situaciones intermedias en las que simultáneamente estuvieran presente los dos tipos de costes o en que, en la segunda situación, los costes de incumplir fueran decrecientes (en lugar de ser cero a partir de la segunda ocasión).

Por su parte los compradores, dada la estrategia del vendedor, lo mejor que podrían hacer es seguir la estrategia mencionada y presentar sus pujas de acuerdo siempre a $B^C(.)$.

De este modo, con el supuesto de que $K \geq (V^{max} - V_{min})/4$ para todas las ventas el resultado que obtenemos (de nuevo) es una reproducción hasta el infinito del equilibrio del juego en el que el vendedor sólo realiza una venta.

b) Cuando K se soporta sólo la primera vez que se incumple

Este caso puede parecer, en principio, más propicio para construir un equilibrio en el conjunto del juego que se desvíe (al menos, en algunas de sus ventas) del equilibrio de etapa. Sin embargo, vamos a ver que incluso en el caso de que los costes K sólo se incurran en la primera vez que se incumpla, el resultado que obtendremos "en equilibrio" será la reproducción en todos los subjuegos del mencionado equilibrio del juego con una venta. Es decir, el vendedor no llegaría a incumplir nunca. Sin embargo, veremos que para obtener este resultado, en la senda de equilibrio, la especificación de las estrategias de los jugadores tiene que ser diferentes a las del caso a) anterior.

En primer lugar vamos a observar que las estrategias (6.5.) del apartado a) anterior ya no podrían formar parte de un equilibrio. En un juego de estas características para mostrar que las estrategias no constituyen un EBP bastaría demostrar que, para alguna historia posible y en algún momento del juego, a cualquiera de los jugadores le interesa "desviarse". En este caso, para calcular la utilidad de desviarse habría que suponer cuales serían las acciones una vez que el jugador se ha desviado. Basado en el "principio de la optimalidad" de la programación dinámica bastaría con suponer que a continuación del movimiento en que se ha desviado el jugador regresaría a las acciones prescritas en su estrategia.

En una primera aproximación podríamos concluir que si pueden ser estrategias de equilibrio. Esto es debido a que como el vendedor empieza "cumpliendo" y después “cumple” en todas las ventas, en la senda de equilibrio, siempre nos encontraríamos con el vendedor cumpliendo. En esta situación, si aplicamos el principio anterior llegamos a la conclusión de que no le compensa desviarse en una venta, para en las siguientes regresar a la estrategia contenida en (6.5.). Esto es fácil de ver ya que, si “incumple” incurre en los costes K de incumplir, que en esta ocasión son muy elevados, con lo que en la venta que se desvía obtiene una utilidad menor. En las ventas siguientes regresa a su estrategia de “cumplir siempre” y, dadas las estrategias de los compradores, obtiene el mismo resultado que si no se hubiese desviado. De este modo, al desviarse pierde y después permanece igual con lo que le compensa la utilización de la estrategia de “cumplir siempre”.

No obstante este razonamiento es incompleto ya que la secuencialidad racional que exige el EBP, no se refiere sólo a los nodos de los conjuntos de información que se encuentre en la senda de equilibrio sino también a los que se encuentren fuera de ella. Es decir, en cada conjunto de información al que se podría llegar (con independencia de que se encuentre o no en la senda de equilibrio) la acción que adopte el jugador al que le toca tirar y su estrategia subsiguiente deben ser óptimas (por estrategia subsiguiente se entiende el plan de acción completo que cubre cada contingencia que se podría dar después de haber alcanzado el conjunto de información).

Por tanto, cuando anteriormente comentábamos que se debía comprobar si “para alguna historia posible” a algún jugador le interesaría desviarse también nos estábamos refiriendo a las historias fuera de la senda de equilibrio como a la que no lo están. Es decir, en nuestro caso podríamos elegir una venta en la que previamente el vendedor ya hubiera incumplido al menos una vez (que como mencionábamos antes no se encuentra en la trayectoria de equilibrio). En este caso, es fácil observar que la combinación de estas estrategias (6.5.) no serían secuencialmente racionales.

Así, si suponemos que nos encontramos en la venta m y que en la historia $h_{m\text{-}1}$ existe alguna acción igual a incumplir entonces el vendedor tendría unos costes K=0. Si analizamos el resultado que obtendría el vendedor si se desvía de la estrategia (6.5.) en una venta y después vuelve a seguir utilizando dicha estrategia el resultado sería directo: dada la estrategia de los compradores contenida (6.5.) el vendedor obtiene una utilidad mayor de la venta en que se desvía mientras que mantiene el resultado en las siguientes ventas. Es decir, le compensa desviarse y, por tanto, la combinación de estrategias (6.5.) no podría constituir un EBN.

Por tanto, cuando sólo se incurre en los costes K la primera vez que se incumple, la especificación de las estrategias de los jugadores debe ser diferente de (6.5.). En concreto tendríamos que reformularlas de la siguiente manera:

(6.6.) ***Estrategia del vendedor***:

$$\begin{cases} \text{si } m=1,\ a_m^v = \text{"}\textit{Cumplir } \forall b_1\text{"} \\ \text{si } m>1, \quad \begin{cases} a_m^v=\text{"}\textit{Cumplir } \forall b_1\text{" si } \forall j<m,\ a_j^v=\text{"}\textit{Cumplir}\text{"} \\ a_m^v=\text{"}\textit{Incumplir } \forall b_1\text{" si para } j<m\ \exists \text{ un } a_j^v=\text{"}\textit{Incumplir}\text{"} \end{cases} \end{cases}$$

Es decir, el vendedor empezaría cumpliendo y en las siguientes ventas condiciona su acción a la historia pasada. En concreto considera dos tipos de historias: a) cuando en todas las ventas anteriores todas sus acciones han sido iguales a "cumplir"; y b) cuando en todas las ventas anteriores existe al menos una ocasión en la que utilizó la acción de "incumplir". Así, si se ha producido la historia a) entonces "Cumple siempre" y en caso contrario "incumple siempre".

Al modificar de esta manera la estrategia del vendedor no cambiaría la senda de equilibrio ya que empezaría cumpliendo y seguiría utilizando esta acción. Por su parte, si suponemos que los compradores van a seguir utilizando "presentar las pujas siempre de acuerdo a $B^C(v_i)$" estarían optimizando "en la senda de equilibrio". El problema se plantea ahora en la estrategia de equilibrio de los compradores en el hipotético caso que se encontraran en un conjunto de información en el que hubiera sucedido que en alguna de las ventas anteriores el vendedor hubiera incumplido. En esta situación la acción dispuesta por la estrategia de los compradores claramente no sería óptima dada la nueva estrategia (6.6.) del vendedor. Es decir con esta estrategia el vendedor, una vez que ya ha incumplido, pasaría a incumplir en las siguientes ventas y, por tanto, en ese caso la acción óptima de los compradores sería la de presentar sus pujas de acuerdo a función de puja $B^I(.)$ en lugar de $B^C(.)$. Por tanto, la combinación de estrategias (6.6.) para el vendedor y "utilizar siempre la función de puja $B^C(v_i)$" para los compradores no formaría parte de un EBN.

Por tanto, deberíamos proceder también a modificar la especificación de la estrategia de los compradores en la misma línea de lo que hicimos con la estrategia del vendedor.

(6.7.) ***Estrategia de los compradores***:

$$\begin{cases} \text{si } m=1, & B^C(v_i) \\ \text{si } m>1, & \begin{cases} B^C(v_i) \text{ si } \forall j<m,\ a_j^v=\text{"}Cumplir\text{"} \\ B^I(v_i) \text{ si para } j<m\ \exists \text{ un } a_j^v=\text{"}Incumplir\text{"} \end{cases} \end{cases}$$

Es decir, los compradores comienzan utilizando $B^C(.)$ y, después, condicionan sus acciones a los mismos dos tipos de historias comentadas en el caso del vendedor. Si ha ocurrido la historia a) — ningún incumplimiento por parte del vendedor — utiliza $B^C(.)$ y si por el contrario ha sucedido la historia b) — en la que el vendedor, al menos, ha incumplido en una ocasión — entonces pasa a utilizar $B^I(.)$.

Se puede mostrar que la combinación de estrategias (6.6.) y (6.7.) son secuencialmente racionales y, por tanto, en este modelo constituyen un EBP.

Es interesante observar que, aunque la especificación de estas estrategias sea diferentes que las utilizadas en (6.5.) el resultado observable del juego sería el mismo. Es decir, en las respectivas sendas de equilibrio de ambos casos se reproduciría el resultado de que en todas las ventas el vendedor cumple y los compradores presentan las pujas de acuerdo a la función de puja $B^C(.)$. Por tanto, desde este punto de vista el suponer a) que el vendedor tenga que soportar los mismos costes de incumplir en todas las ventas que elija esta acción; o b) que sólo incurrirá en dichos costes la primera vez que incumpla, no alteraría el resultado (aunque si las estrategias) del juego.

En este segundo caso, la intuición reside en que, una vez que los compradores han observado que el vendedor ha incurrido en los costes de "incumplir", anticipan que a partir de ese momento (dado que K=0) incumplirá siempre. Es decir, el vendedor sólo sorprenderá a los compradores la primera vez que incumple y precisamente en esa ocasión obtendría una utilidad menor. Por tanto, cuando le es rentable "sorprender" a los compradores (es decir cuando K=0) ya no podría hacerlo. De esta manera, el vendedor no incurriría nunca en los costes de incumplir.

6.3.3.- Caso $K \rightarrow 0$

En los dos subapartados anteriores hemos visto que, tanto cuando K=0 como cuando $K>(V^{max} - V_{min})/4$, con la repetición indefinida del juego, tampoco conseguíamos especificar un equilibrio en el que no se repitiera el resultado que obteníamos cuando sólo se efectuaba una venta.

En este apartado la situación podría ser diferente. Desde el punto de vista del vendedor, esto puede ser interesante ya que recordamos que este tipo de vendedor obtenía un resultado inferior al que obtendría si se pudiera comprometer a cumplir. Es decir, con la combinación "*Incumplir*"-$B^I(v_i)$ que obtenía en equilibrio obtiene una utilidad inferior a la de la combinación "*Cumplir*"-$B^C(v_i)$. Esta última situación no la podría conseguir ni cuando se realiza una venta ni cuando el número de ventas era finito y conocido. Esto era debido a la falta de credibilidad de la acción "*Cumplir*" ya que "expost", es decir, una vez presentadas las pujas, "*Incumplir*" es una estrategia dominante. Por tanto, ante la incapacidad de auto-comprometerse por adelantado el vendedor sería incapaz de conseguir un equilibrio donde se jugarán las acciones "*Cumplir*"-$B^C(v_i)$.

Cuando el juego se repite de manera indefinida la situación podría modificarse bajo ciertas condiciones. En este apartado vamos a construir un equilibrio en el que, en cada una de las ventas, se reprodujeran las acciones "*Cumplir*"-$B^C(v_i)$. Para ello, consideramos las mismas estrategias para el vendedor y los compradores contenidas en el subapartado anterior, que se recogen en (6.6.) y (6.7.), respectivamente, y deducimos bajo que condiciones podría formar un EBP. Evidentemente, si constituyen un equilibrio el resultado que se obtendría sería, como ya comentamos, la repetición indefinida de la combinación de acciones “*Cumplir*”-$B^C(v_i)$, con lo que el vendedor tipo $K \rightarrow 0$ lograría incrementar su utilidad con relación al resultado en el que se obtienen la combinación de acciones “*Incumplir*”-$B^I(v_i)$

Para demostrar que (6.6.) y (6.7.) pueden constituir un EBP tendríamos que comprobar que a ninguno de los jugadores le compensaría “desviarse” de su estrategia en ninguno de los conjuntos de información a los que se pudiera llegar. Como ya comentamos, esto implica que habría que analizar todas las situaciones que se podrían producir ante cualquiera de las historias posibles para las ventas anteriores. En nuestro juego, y dadas las estrategias que estamos analizando, esto se simplifica debido a que todas las historias posibles las podríamos agrupar dentro de uno de los dos tipos que ya hemos descrito: a) cuando el vendedor ha cumplido siempre; y b) cuando el vendedor ha incumplido al menos una vez.

De los apartados anteriores podemos deducir que, si el vendedor sigue la estrategia propuesta en (6.6.), los compradores no tienen incentivos a desviarse en ninguno de los dos tipos de historias. Es decir, cuando siempre ha cumplido, el vendedor seguirá utilizando la acción de “*cumplir*” por lo que los compradores optimizan utilizando $B^C(.)$. Y si el vendedor ha incumplido una vez, el vendedor, a partir de ese momento, seguiría incumpliendo con lo que, en este caso, los compradores optimizarían utilizando $B^I(.)$. Por tanto, la estrategia (6.7.) es, dada la estrategia del vendedor, secuencialmente racional en todas la posibles historias en que los compradores se podrían encontrar.

Por tanto, la clave reside en determinar si en este contexto, la estrategia (6.6.) del vendedor es secuencialemente racional dada la estrategia de los compradores. Para mostrarlo, tendríamos que analizar si al vendedor le interesa desviarse cuando se enfrenta a alguna de los dos tipos de historia posibles.

Si nos situamos en un conjunto de información del vendedor, que corresponda a una historia en que haya incumplido al menos una vez, es fácil ver que lo óptimo para el vendedor sería a partir de ahí seguir incumpliendo. Esto es debido a que la estrategia de los compradores prescribe, en este caso, pasar a utilizar siempre $B^I(.)$. En este caso, el vendedor ya no podría cambiar este hecho y, por ello, lo mejor que podría realizar es utilizar su acción que le maximiza sus ganancias en la venta actual sin importarles las siguientes. Por tanto, es como si sólo existiera una venta y ya vimos en el apartado 5.6.-b) que, en este caso, lo mejor que podría hacer el vendedor era "*incumplir*" con independencia de cual fuera la puja del ganador. Expresado en otras palabras como, dada la estrategia de los compradores, sus actuaciones en el presente ya no pueden influir en el comportamiento de los compradores en el futuro entonces en el momento de adoptar sus acciones sólo le va a importar la utilidad de la venta actual. Por tanto, si ha incumplido una vez, optimizaría siguiendo la estrategia (6.6.).

Por tanto, el caso más interesante de analizar sería aquel en el que los conjuntos de información del vendedor se corresponden a una historia en la que no se ha producido ningún incumplimiento (incluyendo aquí la venta número uno, que dadas las estrategias y la estructura del juego, se encontraría en la misma situación).

En este caso, no podemos obtener un resultado tan directamente como en los casos anteriores. Primero calculamos la utilidad que el vendedor obtendría si, en esta situación, utiliza su estrategia. En segundo lugar, hallamos la utilidad del vendedor si se desvía en una ocasión y posteriormente retorna a la estrategia que estamos analizando. Finalmente, compararemos ambos resultados para obtener la condición bajo la cual la combinación de estrategias que estamos considerando constituye un EBN.

Si el vendedor sigue la estrategia (6.6.) obtendría la siguiente utilidad esperada:

$$U_V^{(M=\infty)} = b_1 + \delta \sum_{m=2}^{\infty} \delta^{m-2} \; E[B^C(v_1)]$$

El primer sumando es el ingreso neto que obtendría en la primera venta (hay que tener en cuenta que cuando le toca decidir ya conoce la puja ganadora, b_1). El sumatorio del segundo sumando recoge la corriente infinita de ingresos esperado de las siguientes ventas. Ese sumatorio va precedido del coeficiente de actualización ya que se empezaría a obtener a partir de la segunda venta e incluye —debidamente actualizada— la esperanza de la puja ganadora en cada venta. Operando, obtenemos que la esperanza de la puja ganadora se corresponde a la puja de la esperanza de la valoración más alta (teniendo en cuenta que estamos suponiendo dos jugadores, N=2) por lo que la expresión anterior quedaría,

$$U_V^{(M=\infty)} = b_1+\delta \sum_{m=2}^{\infty}\delta^{m-2} \ B^C(\mathrm{E}[v_1|N=2])$$

La expresión $\mathrm{E}[v_1|N=2]$ ya la hemos calculado anteriormente. Introduciendo su valor en la función de puja y utilizando la fórmula de la capitalización de un flujo infinito de una cantidad constante (6.1.),

$$U_V^{(M=\infty)} = b_1+\delta\ [(V^{max}-V_{min})+3V_{min}]/[3(1-\delta)]$$

Ahora bien queremos comparar esta utilidad con la que obtendría el vendedor si se desvía de la estrategia e “incumple”. Queremos encontrar que condición es necesaria cumplir para que al vendedor no le interese desviarse en ningún caso. Si se desvía e incumple va a obtener unos mayores ingresos en la primera venta pero inferiores en las siguientes. El beneficio de incumplir será mayor cuanto mayor sea la puja presentada en la primera venta (y conocida por él en el momento de tomar la decisión). Por tanto, si queremos deducir las condiciones por las que en *todos* los casos le interesará cumplir (dadas las estrategias que estamos considerando) entonces tendríamos que utilizar la hipótesis más favorable para el incumplimiento: que la puja presentada en la primera venta sea la más alta posible. Esto último se produce cuando la valoración del ganador es la valoración más alta (V^{max}). Por tanto, en la ecuación anterior sustituimos la puja ganadora de la primera venta, b_1, por la puja que presentaría un comprador con una valoración V^{max} (que sería $B^C(V^{max})$).

$$U_V^{(M=\infty)} = B^C(V^{max})+\delta\ [(V^{max}-V_{min})+3V_{min}]/[3(1-\delta)]$$

Sustituyendo $B^C(V^{max})$ por su valor:

$$U_V^{(M=\infty)} = [(V^{max}-V_{min}+2\ V_{min})/2]+\delta\ [(V^{max}-V_{min})+3V_{min}]/3(1-\delta)$$

(6.8.) $U_V^{(M=\infty)} = (V^{max} – V_{min})/6 – [(V^{max} – V_{min})+3V_{min}]/3(\delta–1),$

Esta sería la utilidad esperada del vendedor a partir de la primera venta en que se desvía cuando utiliza la estrategia contenida en (6.6.), si la puja ganadora en esa venta la realiza un comprador que tiene la valoración máxima.

Pasamos a realizar los mismos cálculos para obtener la utilidad del vendedor en caso de que se desvíe.

$$U_V\ (desviación)^{(M=\infty)} = (P_p^I(b_1) – K) + \delta \sum_{m=2}^{\infty} \delta^{m-2}\ E[P_p^I(B^I(v_1) – K]$$

Es decir, el primer paréntesis representa los ingresos netos que obtendría en la primera venta que se desvíe. En ese primer paréntesis, se incluye la aplicación a la puja presentada por el ganador la función que determina el precio en caso de incumplir. Al resultado le deducimos los costes de incumplir, K. Por su parte, en el sumatorio se recoge la corriente de ingresos netos esperados en el resto de las ventas. En este caso, el vendedor volvería a su estrategia contenida en (6.6.) y los compradores se atendrían a (6.7.). De acuerdo a estas estrategias el vendedor incumpliría y los compradores presentarían sus pujas de acuerdo a $B^I(.)$ para el resto de las ventas, que es lo que se recoge en la expresión de la esperanza del sumatorio. Si operamos de manera similar a lo realizado anteriormente,

$$U_V\ (desviación)^{(M=\infty)} = (P_p^I(b_1) – K) + \delta \sum_{m=2}^{\infty} [\delta^{m-2}\ P_p^I(B^I(\mathrm{E}[v_1|N{=}2]) – K]$$

Introduciendo la expresión de la función $P_p^I(.)$ en los dos lugares que aparece, y sustiuyendo $\mathrm{E}[v_1|N{=}2]$ por su valor,

$$U_V\ (desviación)^{(M=\infty)} = [(3b_1 – V_{min})/2– K] + \delta \sum_{m=2}^{\infty} \delta^{m-2}\ (V^{max} –3K+2V_{min})/3$$

$$U_V\ (desviación)_{VI}^{(M=\infty)} = [(3b_1 – V_{min})/2– K] + \delta\ [3(K – V_{min}) – (V^{max} –V_{min})]/[3(\delta–1)]$$

Como comentamos anteriormente nos interesa comparar la situación más favorable al incumplimiento. Para ello, sustituimos en la última ecuación b_1 por $B^C(V^{max})$ [147].

$$U_V\,(desviación)^{(M=\infty)} = [(3B^C(V^{max})-V_{min})/2-K]+\delta[3(K-V_{min})-(V^{max}-V_{min})]/[3(\delta-1)]$$

Introduciendo la expresión de $B^C(V^{max})$ y operando:

$$U_V\,(desviación)^{(M=\infty)} = (3V^{max}+V_{min}-4K)/4+\delta[3(K-V_{min})-(V^{max}-V_{min})]/[3(\delta-1)]$$

(6.9.) $$U_V(desviación)^{(M=\infty)} = [3(K-V_{min}) - (V^{max}-V_{min})]/[3(\delta-1)]+5(V^{max}-V_{min})/12$$

Así, esta sería la utilidad esperada del vendedor en el juego repetido indefinidamente a partir de la primera venta en que se desvíe (y el ganador de la primera venta tenía la valoración máxima).

De esta manera, para que al vendedor no le compense desviarse y, por tanto, para que las estrategias contenidas en (6.6.) y (6.7.) constituyan un EBP tendría que verificarse que la utilidad del vendedor que se contiene en (6.8.) sea mayor que la que viene expresada en (6.9). Es decir que:

$$U_V^{(M=\infty)} \geq U(desviación)_V^{(M=\infty)},$$ o que

$$(V^{max}-V_{min})/6-[(V^{max}-V_{min})+3V_{min}]/3(\delta-1) \geq$$
$$[3(K-V_{min})-(V^{max}-V_{min})]/[3(\delta-1)]+5(V^{max}-V_{min})/12$$

Simplificando llegaríamos a

$$-K/(\delta-1) - (V^{max}-V_{min})/4 \geq 0$$

Y despejando el coeficiente de descuento obtendríamos,

147 En este caso utilizamos $B^C(.)$ debido a que el vendedor todavía no ha incumplido.

(6.10.) $\delta \geq [(V^{max} - V_{min}) - 4K] / (V^{max} - V_{min})$

De esta manera, al vendedor no le compensará desviarse si se cumple esta última condición. Por tanto, podríamos concluir que siempre que la tasa de descuento δ cumpla con (6.10.) la combinación de estrategias formarían un EBN. Es decir, para valores de δ lo suficientemente cercanos a uno, con la combinación de estrategias (6.6.) y (6.7.) conseguiríamos que cuando el juego se repite indefinidamente el resultado esperado de cada venta sea diferente al resultado que obtuvimos en el apartado 5.6.-b) en el que el vendedor sólo realizaba una única venta.

Sin embargo, al analizar la condición (6.10.) también podemos observar que es muy exigente puesto que como $K \rightarrow 0$ implica que δ está muy cercano a uno. Es decir, nuestro vendedor valoraría casi igual un ingreso obtenido en el futuro que el mismo ingreso obtenido en el presente. Así, si los tipos de interés influyen negativamente en la tasa de descuento, δ, entonces cuanto más reducidos sean los tipos de interés más probabilidades existirán de que se cumpla la mencionada condición (6.10.). Adicionalmente, cuanto más próximas en el tiempo se encuentren las ventas mayor será la tasa de descuento y más probable sería que se cumpliera la condición mencionada. En el capítulo siguiente nos volvemos a encontrar con esta condición.

APÉNDICE 6.1.

En este apéndice se muestra como un vendedor tipo K=0 no optimiza utilizando estrategias mixtas, ni cuando realiza una venta ni cuando realiza un número finito o infinito. El argumento sería similar para un comprador $K \geq (V^{max} - V_{min})/4$. Para el comprador $K \to 0$, tendríamos que utilizar otro razonamiento en el caso de infinitas ventas, pero el resultado sería el mismo.

Así, supondremos que en cada venta el vendedor utiliza la opción de cumplir con una probabilidad de β y la opción de incumplir con una probabilidad de 1-β. Un supuesto adicional será que utiliza la misma estrategia mixta en todas las ventas, es decir β es igual en todas las ventas. De esta manera, cuando le toque decidir pondría en marcha públicamente un mecanismo aleatorio (que atribuirá esas probabilidades a cada una de sus dos opciones) que será el que determine la acción del vendedor en esa venta.

Si esa fuera la estrategia utilizada por el vendedor podríamos calcular cual es la estrategia óptima (es decir la función de puja) de los vendedores si el juego se repitiera una única vez.

Así, el precio esperado sería la media, ponderada por la probabilidad, entre el precio resultante cuando el vendedor cumpliera y el que resultaría cuando el vendedor incumpliera.

(6.11.) $$P = \beta\, b_1 + (1-\beta\,)(3b_1/2 - V_{min}\,/2) = (3-\beta\,)b_1/2 + (\beta\,-1)V_{min}/2$$

De lo anterior se deduce que:

(6.12.) $dP/db_1 = (3-\beta)/2$

Sustituyendo (6.11.) y (6.12.) en la condición de primer orden que viene expresada en la ecuación (5.9.), introduciendo la condición de simetría y operando llegamos a la siguiente ecuación diferencial de primer orden:

$$B'(v_i)-B(v_i)/(V_{min}-v_i)=(\beta V_{min}-V_{min}-2v_i)/(\beta-3)(V_{min}-v_i)$$

Resolviendo esta ecuación al igual que hicimos en el apartado 5.4.- y utilizando la condición límite $B(V_{min})=V_{min}$ obtendríamos la función de puja:

(6.13.) $B(v_i)=v_i/(3-\beta)+V_{min}(\beta-2)/(\beta-3)$ (a esta función la llamaremos $B^{\beta}(v_i)$)

Se puede observar directamente que cuando $\beta=0$ (lo que implica que el vendedor estaría utilizando la estrategia pura de "*Incumplir*") entonces la anterior función de puja se transforma en $B^I(v_i)$. Del mismo modo, cuando $\beta=1$ (el vendedor estaría utilizando la estrategia pura de "*cumplir*") entonces tendríamos que la función de puja se transforma en $B^C(v_i)$.

Si sustituimos la función de puja que hemos obtenido, en la función de precio (6.11.) obtenemos que el precio esperado sería el mismo que cuando el vendedor utilizaba estrategias puras: $P=(v_1+V_{min})/2$. Sustituyendo el valor esperado "ex ante" para v_1 obtenemos el resultado $P^e=V_{min}+(V^{max}-V_{min})/3$, de nuevo el mismo que cuando el vendedor utilizaba estrategias puras. Este resultado es coherente con el teorema del ingreso equivalente. De esta manera, ante la nueva estrategia adoptada por el vendedor los compradores adoptan sus funciones de puja para que el resultado esperado "ex-ante" no se modifique. Por tanto, cuando el juego se repite una vez el precio esperado será el mismo con las tres combinaciones: "*cumplir*- $B^C(v_i)$"; "*incumplir*-$B^I(v_i)$" ; y "β - $B^{\beta}(v_i)$".

Por tanto, si utiliza una estrategia mixta el vendedor tampoco lograría incrementar el precio esperado si el juego se repite una única vez, ya que utilizando cualquier estrategia mixta, en equilibrio, se igualaría el resultado "ex ante" que si usara estrategias puras. No obstante el resultado "ex post" sería diferente.

En cualquier caso, podemos deducir fácilmente que cualquier estrategia mixta no pasaría la prueba de ser sucesivamente racionales y, por tanto, no podrían formar parte de una combinación de estrategias de equilibrio. Y esto va a ocurrir tanto cuando el juego se repite una única vez como cuando se realizan un número finito o infinito de ventas.

Para mostrarlo, sólo tenemos que situarnos en el lado del vendedor una vez que las pujas ya se han presentado. En el caso de que se realice una única venta, cuando ya se conocen las pujas, la estrategia dominante del vendedor (recordamos que K=0) es incumplir con independencia de la puja ganadora. Por tanto, en ese momento el vendedor obtendría su mejor resultado "incumpliendo" con probabilidad uno, que jugando cualquier estrategia mixta que otorgue una probabilidad menor que uno a la acción de "incumplir".

Cuando se realizan un número finito de ventas, utilizando el razonamiento de inducción hacia atrás, se obtendría este mismo resultado si nos situamos en la última venta y, a partir de esta, lo mismo ocurriría con todas las anteriores hasta la primera.

A la misma conclusión llegamos cuando se realizan un número infinito de ventas aunque el razonamiento para llegar a él tiene que ser diferente. Vamos a plantear una combinación de estrategias que en la senda de equilibrio generen el resultado de que el vendedor utiliza una estrategia mixta (que asigne probabilidades positivas a las dos acciones del vendedor). Estas estrategias las especificamos de tal manera que sean secuencialmente racionales fuera de la senda de equilibrio. Una vez realizado esto mostraremos que no forman parte de un EBP. La estrategia mixta vendrá representada por β (la probabilidad que se asigna a la acción "cumplir".

(6.14.) ***Estrategia del vendedor***:

$$\begin{cases} \text{si } m=1,\ a_m^v = \text{“}\beta\ \forall b_1\text{”} \\ \text{si } m>1, \quad \begin{cases} a_m^v = \text{”}\beta\ \forall b_1\text{” si } \forall j<m,\ a_j^v = \text{”}\beta\text{”} \\ a_m^v = \text{”}\textit{Incumplir}\ \forall b_1\text{” si para } j<m\ \exists \text{ un } a_j^v \neq \text{”}\beta\text{”} \end{cases} \end{cases}$$

Es decir, mediante esta estrategia el vendedor empezaría utilizando una acción mixta definida por β, y en las siguientes ventas se mantendría utilizando esa misma acción. Por tanto, si no se desvía de esa estrategia siempre utilizará la acción mixta que viene determinada por β. (Solamente en el caso de que en alguna venta se hubiera apartado de esa estrategia entonces a partir de la siguiente venta utilizaría siempre la acción de "incumplir").

(6.15.) ***Estrategia de los compradores***:

$$\begin{cases} \text{si } m=1, & B^{\beta}(v_i) \\ \text{si } m>1, & \begin{cases} B^{\beta}(v_i) \text{ si } \forall j<m,\ a_j^{v}=\text{"}\beta\text{"} \\ B^{I}(v_i) \text{ si para } j<m\ \exists \text{ un } a_j^{v}\neq\text{"}\beta\text{"} \end{cases} \end{cases}$$

Con esta estrategia los compradores de cada una de las ventas observan el comportamiento del vendedor en las ventas anteriores. Si siempre ha utilizado la acción mixta β, utilizarán la función $B^{\beta}(v_i)$. Si observan que en el pasado en alguna ocasión el comprador no ha utilizado la acción mixta determinada por β entonces actúan como si perdieran su confianza en el vendedor anticipando que va a "incumplir" y presentando sus pujas de acuerdo a la función de puja $B^{I}(v_i)$.

Es fácil comprobar que estas estrategias no forman parte de un EBP. Para ello, bastaría mostrar que al vendedor le interesaría desviarse en al menos una venta y en las siguientes seguir utilizando la estrategia (6.14.). Para ello, nos situamos en cualquier venta, por ejemplo, la primera (aunque la situación sería idéntica en cualquier venta en la que previamente el vendedor siempre hubiera utilizado la estrategia mixta β).

En esa venta observamos que si el vendedor se desvía y en lugar de utilizar β utiliza la acción pura de "incumplir" aumentaría sus ganancias en esa venta. Para ver si le interesa o no "incumplir" habría que analizar el resultado en el resto del juego. En el caso de no desviarse obtendría la utilidad que corresponde a la combinación "β - $B^{\beta}(v_i)$" en las siguientes infintas ventas. Si se desvía, de acuerdo a las estrategias(6.14.) y (6.15.), obtendría las ganancias que se corresponden a la combinación "incumplir- $B^I(v_i)$". En este mismo apartado ya obtuvimos el resultado de que los ingresos esperados de estas dos combinaciones son las mismas. De este modo, queda demostrado que al vendedor le interesa desviarse ya que obtendría un beneficio en la venta en que se desvía mientras que sus ganancias futuras no se alteran.

Por tanto, tampoco en el caso de ventas infinitas, las estrategias mixtas podrían formar parte de un EBP.

CAPÍTULO 7.- INFORMACIÓN INCOMPLETA SOBRE LOS “TIPOS” DEL VENDEDOR: UN MODELO DE REPUTACIÓN DEL VENDEDOR

7.1.- INTRODUCCIÓN

En los capítulos 5 y 6 hemos analizado modelos con “tipos” distintos de vendedores. En nuestro caso, el “tipo” de vendedor viene determinado por la variable K, que recoge los costes en los que el vendedor incurre si opta por la opción de “Inclumplir”. En todo caso, lo que caracterizaba a nuestros modelos en los capítulos mencionados, era que el valor de K es de dominio público y, por tanto, conocido por los compradores en el momento de realizar sus pujas.

En el presente capítulo introduciremos el supuesto de que existe información incompleta sobre el tipo del vendedor. De esta manera, K será información privada del vendedor y los potenciales compradores no conocerán el valor de este parámetro, del que sólo tendrán la información de la distribución de probabilidades de la que se ha derivado.

En los capítulos 5 y 6 también existía información incompleta, pero sobre los compradores. La diferencia estriba en que los compradores no repiten ya que suponemos que se presentan a una única venta. Sin embargo, el vendedor, sobre el que ahora introducimos información incompleta, si repite en nuestro juego. La introducción de la información incompleta sobre jugadores que "repiten" origina la aparición de los modelos de "reputación"[148]. Estos fueron desarrollados principalmente a partir de los primeros años de la década de los ochenta — véase por ejemplo, Kreps y otros (1982) y Sobel (1985) — y formalizan la idea de que los jugadores pueden explotar la incertidumbre existente sobre ellos para construirse una reputación con la que obtener beneficios en el futuro (aunque para ello tengan que incurrir en pérdidas o realizar menores ganancias a corto plazo).

De esta manera, bajo determinadas circunstancias, en los modelos de reputación podrían existir equilibrios que incluyeran resultados que no constituyen un equilibrio en el juego de etapa incluso cuando las repeticiones son finitas. Es decir, esto, en teoría, se podría obtener sin la necesidad de recurrir a repeticiones infinitas, aunque, en cualquier caso, se suele exigir que el número de repeticiones sea "suficientemente" alto y, aun así, sólo se conseguiría en las etapas que se encontraran "suficientemente" alejadas de la última.

En la teoría de subasta este tipo de resultados se ha formalizado para los casos en que son los pujadores los que se presentan en sucesivas ventas (véase, por ejemplo, el trabajo de Bikhchandani, (1988) que fue resumido en el apartado 4.6.-). Sin embargo, al menos hasta lo que alcanza nuestro conocimiento, esto no se ha realizado utilizando un modelo en el que la reputación "relevante" no sería la de los compradores sino la del vendedor.

En este capítulo vamos a intentar aplicar estas ideas genéricas a nuestro modelo de ventas repetidas de empresas.

Para modelizar este juego de reputación del vendedor, en la línea de Kreps y otros (1982) o Sobel (1985), y hacerlo manejable realizaremos una serie de supuestos simplificadores que serán descritos en el siguiente apartado y que, principalmente, se refieren a limitar los tipos factibles del vendedor.

---

[148] En ocasiones, también se utiliza este término para referirse a juegos repetidos como los desarrollados en el capítulo 6.

Uno de nuestros objetivos es intentar mostrar que existe la posibilidad de que el cumplimiento de las normas vaya en el propio interés del vendedor, aun cuando no existan normativas ni otros mecanismos destinado a imposibilitar el incumplimiento. Aun más, esto podía ser factible incluso sin recurrir a la repetición infinita del juego (como era necesario en el capítulo 6).

7.2.- EL MODELO

El modelo será similar al desarrollado en el capítulo 6 con la excepción mencionada de que el "tipo" del vendedor es información privada, sólo conocida por el propio vendedor. Por tanto, en este apartado nos ahorraremos muchas de las explicaciones, sobre los supuestos del modelo, expuestas en los capítulos 5 y 6.

Para incluir la privacidad del tipo del vendedor añadimos al principio del juego una nueva fase en la que la naturaleza elige el tipo de vendedor. Como el tipo del vendedor va a ser el mismo en todas las ventas este movimiento ocurre una única vez (antes de comenzar la primera venta). Es decir, los costes de incumplir, K, van a permanecer constantes en las diferentes ventas. Además, asumiremos que el vendedor va a incurrir en esos costes *cada vez* que incumpla.

Al igual que en el capítulo anterior, también supondremos que una vez elegido el tipo de subasta, no podrá modificarse en las futuras ventas. De esta manera, el movimiento en el que el vendedor elige el tipo de subasta también se sitúa antes de comenzar la primera venta y se repite una única vez. Así, cada elección de un posible tipo de subasta le seguirá el comienzo de un "juego de continuación" diferente consistente en los movimientos correspondientes a todas las ventas del juego.

Con estas precisiones se puede sintetizar el desarrollo temporal del juego de la siguiente manera:

1) La **naturaleza** o el azar define el tipo de vendedor. Suponemos que sólo pueden existir dos tipos de vendedores. Al primero lo llamaremos V_I , y vendría definido por tener unos costes de incumplir positivos pero próximos a cero, $K \rightarrow 0$. La probabilidad de que la naturaleza elija este tipo es igual a φ. El segundo tipo de vendedor (al que llamaremos V_C) tendría unas probabilidades de ser elegido iguales a $1-\varphi$. Este segundo tipo tendría unos costes de incumplir "elevados". En concreto supondremos que para el tipo V_C, $K \geq (V^{max} - V_{min})/4$. El resultado de este movimiento sólo es revelado al vendedor. Los compradores conocen únicamente la distribución de probabilidades, es decir en este caso el valor de φ.

2) El **vendedor** elige el tipo de subasta.

Estos dos primeros movimientos, como se ha comentado, sólo se producen una única vez. Nosotros asumiremos que el vendedor se ha decantado por un determinado tipo de subasta y analizaremos el "subjuego de continuación" a partir de ese movimiento. Las fases que enumeramos a continuación se repetirán tantas veces como empresas se pongan en venta.

3) La **naturaleza** elige los tipos de los dos compradores que asumimos que se presentan en cada venta. Estos compradores sólo se presentan en una ocasión. Al igual que en el capítulo 5 y 6 los tipos de los compradores son independientes y se derivan de una distribución uniforme en el intervalo $[V_{min}, V^{max}]$. También asumimos que la distribución de los tipos de los compradores en todas las ventas es la misma. Por último, a cada comprador sólo se le revela su propio tipo y no él de lo demás del que sólo conocen la distribución de probabilidades.

4) Los **compradores** presentan sus pujas con la información de la que disponen: su propia valoración, la distribución de la que se deriva el tipo de su competidor, el comportamiento del comprador en las ventas anteriores, la distribución por la que el azar o la naturaleza elige el tipo del vendedor (es decir, el valor de φ) y la estructura del juego completo.

5) El **vendedor** conociendo las pujas presentadas decide: "cumplir" o "incumplir".

6) Se asigna el bien al ganador y se realizan los pagos correspondientes.

A continuación se iniciaría la siguiente venta por lo que se repetiría el proceso a partir del punto **3)** anterior.

Se resalta la importancia que tiene en este modelo el hecho de que los compradores que se vayan presentando en las diferentes ventas conocen cual ha sido el comportamiento del vendedor en el pasado. Esto es relevante ya que cuando presentan sus pujas tienen que realizar conjeturas sobre cual será el comportamiento del vendedor, una vez que conozca las pujas presentadas en esa venta. Estas conjeturas, a su vez, dependerá de las probabilidades que los compradores asignen a que el vendedor corresponda a cada uno de los tipos posibles. Los compradores basaran estas conjeturas, no sólo en la distribución "objetiva" (que viene dada por el valor de φ) sino también en el comportamiento pasado del vendedor. Es decir, del comportamiento del vendedor se podría extraer, en algunos casos, información que permitiera ir actualizando las conjeturas sobre a que tipo podría pertenecer. A los compradores sólo les interesa el resultado de la venta en la que se presentan, y de lo comentado anteriormente se podría deducir que a los compradores les bastaría para realizar sus conjeturas el comportamiento pasado del vendedor. Esto no es así, ya que el comportamiento del vendedor también puede estar influenciado por lo que le queda por jugar. Por tanto, los compradores, para realizar sus conjeturas referidas a la venta en que se presentan, analizarán no sólo el comportamiento pasado del vendedor sino también su posible comportamiento en las ventas futuras.

En este punto seguiremos el supuesto usado extensamente en Teoría de Juegos de que si dos jugadores (los dos vendedores) comparten la misma información relevante (en nuestro caso la historia del comportamiento pasado del vendedor, la distribución inicial por la que el azar elige el tipo del vendedor y la estructura completa del juego) tendrán las mismas conjeturas sobre el tipo de un tercer jugador (el vendedor). Este supuesto estándar, normalmente, se defiende como parte del espíritu del análisis del equilibrio ya que este también supone que los jugadores tienen las mismas creencias sobre las estrategias de los demás. Sin embargo, no está libre de polémica y, por ejemplo, Fudenberg y Tirole (1991a) consideran que es el menos convincente de los requisitos que se exigen para que un sistema de conjeturas pueda formas parte de un EBP.

(Por tanto, si el comportamiento del vendedor, en ventas anteriores, permaneciera en secreto entonces estas conjeturas sólo se podrían basar en la distribución inicial del tipo de vendedor y en la estructura del juego. De esta manera, el vendedor se encontraría con que su comportamiento en una operación determinada no afectaría a las operaciones futuras debido a que no tendría influencia en las conjeturas de los compradores. Como ya hemos comentado esta no será la situación que analiza nuestro modelo).

7.3.- <u>JUEGO CON UNA ÚNICA VENTA</u>

Empezaremos especificando un Equilibrio Bayesiano Perfecto cuando el vendedor realiza una única venta. Por tanto, en el desarrollo temporal expuesto en el apartado anterior, los apartados del **3)** al **6)** sólo se juegan una vez.

Supondremos que el vendedor opta por una subasta al primer precio. En este caso, el precio vendría determinado por la siguiente función, que tiene como argumentos las pujas presentadas,

$$(7.1.)\quad P_p(b_1) = \begin{cases} P_p^{c}(b_1) = b_1, & \text{si el vendedor "cumple"} \\ P_p^{I}(b_1) = 3b_1/2 - V_{min}/2 & \text{si el vendedor "incumple"} \end{cases}$$

La función $P_p^I(.)$ es la misma que se utilizó en los capítulos anteriores. Se recuerda que $P_p^I(.) > P_p^c(.) \quad \forall b_1 > V_{min}$. Asimismo, como estamos hablando de una subasta al primer precio, nuestra función de precio sólo depende de b_1 y, por ello, hemos procedido a eliminar , la segunda puja más alta (b_2) como argumento de esta función.

Para encontrar un EBP vamos a seguir varias pasos.

- **Paso primero.- Estrategia del vendedor.** Empezamos colocándonos en la situación del vendedor una vez que ya se han presentado las pujas. Según lo comentado en el capítulo 5, cada tipo de vendedor tiene una estrategia estrictamente dominante. Además, estas estrategias son diferentes para cada tipo (tendríamos, por tanto, una estrategia de separación en la que cada tipo optaría por una acción diferente).

Así, para el tipo V_I (el que tiene costes de incumplir muy pequeños) la estrategia dominante sería "Incumplir siempre" (es decir, "Incumplir $\forall$ b_1"). Por el contrario, el tipo V_C (aquel que hemos definido con los costes de incumplir elevados) tendría como estrategia dominante la de "Cumplir siempre" ("Cumplir, $\forall$ b_1").

La estrategia del vendedor (que como siempre incluiría una acción para cualquier contingencia en que se pudiera encontrar) la podríamos expresar de la siguiente manera:

$$(\ 7.2.)\quad \textit{Estrategia del vendedor}, \quad \begin{cases} \text{Si } V_I \text{ entonces} & \text{“}\textit{Incumplir}, \forall\, b_1\text{”} \\ \text{Si } V_C \text{ entonces} & \text{“}\textit{Cumplir}, \forall\, b_1\text{”} \end{cases}$$

- **Paso segundo.- Precio esperado de los compradores en caso de ganar.** Los compradores en el momento de realizar sus pujas tendrán que analizar cual será el comportamiento esperado del vendedor. Desde el punto de vista del comprador i, lo que le interesa es realizar una conjetura sobre cual sería la probabilidad de que el vendedor "incumpla", asumiendo que la puja que él presenta (b_i) fuera la puja ganadora (b_1). Esta conjetura podría ser una función de la propia puja (b_i) pero, dada la estrategia del vendedor recogida en (7.2.), asumiremos que es independiente de esta.

Llamaremos $\mu(Incumplir)$ o simplemente μ a la probabilidad que el comprador i asigna a que el vendedor "incumpla". (Por tanto, la probabilidad asignada a que cumpla será $\mu(Cumplir) = 1-\mu$).

Como estamos considerando simetría, estas conjeturas son iguales para todos los compradores que se presenten a una misma venta. En el paso cuarto abordaremos la tarea de deducir esta μ, teniendo en cuenta la información de la que disponen los vendedores y los requisitos exigidos por el EBP.

Dada esta conjetura y la función de precio recogida en la ecuación (7.1.), los compradores podrán calcular el precio esperado, en caso de ganar, como función de su puja. Como por (7.1.) el precio va a depender de la acción que adopte el vendedor, el precio esperado también va a depender de la conjetura que hagan los compradores sobre este comportamiento. Así, tendríamos que el precio esperado del comprador i en caso de ganar, $P_i^e(b_i , \mu)$, sería la media (ponderada por su probabilidad) del precio en el caso de que el vendedor cumpla, ($P_p^c (b_i)$), y del precio en el caso de que el vendedor incumpla, ($P_p^I (b_i)$). Es decir,

$$P_i^e(b_i , \mu) = (1-\mu)\, P_p^c(b_i)+\mu\, P_p^I(b_i)$$

Sustituyendo las funciones de precio por sus expresiones,

(7.3.) $$P_i^e(b_i , \mu) = (1-\mu)\, b_i+\mu\, [3b_i /2-V_{min}/2] = b_i\, (\mu+2)/2- V_{min}\mu/2$$

Por tanto, como habíamos avanzado, el precio esperado (en caso de ganar) por parte del comprador además de ser una función de la puja también lo va a ser de la conjetura (μ) que realice sobre el comportamiento del vendedor.

Con esta función del precio esperado, la función de utilidad esperada del comprador i nos quedaría de la siguiente manera:

(7.4.) *Utilidad esperada del comprador i*: $$U_i^e= (v_i- P_i^e(b_i , \mu))\, Prob(b_i>b_j)$$

La única diferencia de (7.4) con la expresión de la utilidad esperada del comprador i contenida en la ecuación (3.5.) es que, como en caso de ganar, el comprador ya no va a estar seguro de pagar b_i, entonces la cantidad que se resta de v_i no va a ser la propia puja, b_i, sino la función del precio esperado $P_i^e(.)$.

➢ **Paso tercero.-Función de puja de los compradores.** Con la expresión de la utilidad esperada calculada en el paso anterior ya podríamos abordar el cálculo de la función de puja de los compradores. Como la utilidad esperada depende de la conjetura, μ, esta también estará presente en su función de puja (que representamos por $B(v_i, \mu)$). Para calcular la función de puja, el comprador i, maximizará la expresión (7.4.) asumiendo que los demás compradores también se están comportando de una manera similar. Utilizaremos el mismo sistema empleado en el apéndice al capítulo 3 para solucionar este problema y encontrar la expresión para la función de puja de los compradores.

$$\underset{b_i}{Max}\ U_i^e = (v_i - P_i^e(b_i\ ,\ \mu))\ Prob(b_i > b_j)$$

En el apartado 3.3.2.-d) ya explicamos como la probabilidad que aparece en la expresión anterior se puede expresar utilizando la función de distribución de las valoraciones, $F(.)$, y la función inversa de la función de puja que se supone que están utilizando el resto de compradores. De esta manera, igual que se hizo en el mencionado apartado, la expresión anterior la podríamos representar de la siguiente manera:

$$\underset{b_i}{Max}\ U_i^e = (v_i - P_i^e(b_i\ ,\ \mu))\ F\ [\ B^{-1}(b_i, \mu)\ ]^{\ N-1}$$

A partir de aquí, teniendo en cuenta la modificación que supone la aparición de $P_i^e(.)$, podríamos seguir los mismos pasos del apéndice al capítulo 3. Considerando una distribución uniforme así como el supuesto de que concurren dos compradores (N=2), obtenemos

$$\underset{b_i}{Max}\ U_i^e = (v_i - P_i^e(b_i\ ,\ \mu))\ \ [(\ B^{-1}(b_i, \mu) - V_{min})/(V^{max} - V_{min})]$$

La condición de primer orden origina que,

(7.5) $-[(B^{-1}(b_i,\mu)-V_{min})/(V^{max}-V_{min})](\partial P_i^e(b_i,\mu)/\partial b_i)+(v_i-P_i^e(b_i,\mu))[(dB^{-1}(b_i,\mu)/db_i)/(V^{max}-V_{min})]=0$

Esta condición sería similar a la ecuación (3.16.) con las siguientes diferencias: en el primer sumando aparece la expresión $\partial P_i^e / \partial b_i$ (que sería igual a 1 cuando el precio es igual a la puja ganadora); y en el segundo sumando se introduce el mencionado cambio de b_i por la expresión del precio esperado. Adicionalmente en las funciones de puja aparece μ.

De la ecuación (7.3.) se puede deducir que $\partial P_i^e / \partial b_i = (\mu+2)/2$. Así, si en (7.5.) sustituimos esta expresión así como el valor de $P_i^e(.)$,

$$[(B^{-1}(b_i,\mu)-V_{min})/(V^{max}-V_{min})] / [(\mu+2)/2] = [(v_i-(b_i(\mu+2)-\mu V_{min})/2] [(dB^{-1}(b_i,\mu)/db_i) / (V^{max}-V_{min})]$$

Utilizando la regla de la derivada de la función inversa e introduciendo el requisito de Nash y simetría,

$$[(v_i-V_{min})/(V^{max}-V_{min})] / [(\mu+2)/2] = [(v_i-(B(v_i,\mu)(\mu+2)-\mu V_{min})/2] [(1 / B'(v_i,\mu) (V^{max}-V_{min})]$$

Operando en esta ecuación, tras varios pasos llegamos a la siguiente expresión,

(7.6.) $$B'(v_i,\mu) + B(v_i,\mu) / (v_i - V_{min}) = (\mu V_{min} + 2v_i) / [(v_i-V_{min})(\mu+2)]$$

que es una ecuación diferencial de primer orden del tipo de la que resolvimos en el apéndice al capítulo 3. En concreto podemos observar que la única diferencia (además de que la función de puja depende de μ) con la ecuación (3.17.) reside en el término a la derecha del signo igual (para simplificar lo representaremos por W, es decir, $W= (\mu V_{min} +2v_i) / [(v_i-V_{min})(\mu+2)]$). Aplicando a la ecuación (7.6.) el mismo método de resolución que el empleado en el mencionado apéndice obtenemos,

$$B(v_i, \mu) = e^{-\int \frac{1}{v_i - V_{\min}} dv_i} \left(A + \int W e^{\int \frac{1}{v_i - V_{\min}} dv_i} dv_i \right)$$

Donde A es una constante arbitraria.

$$B(v_i, \mu) = e^{-\ln(v_i - V_{\min})} \left(A + \int W e^{\ln(v_i - V_{\min})} dv_i \right)$$

$$B\ (v_i, \mu) = (1/(v_i - V_{min}))(A + \int W(v_i - V_{min})\ dv_i)$$

Si sustituimos W por su valor,

$$B\ (v_i, \mu) = (1/(v_i - V_{min}))(A + \int (\mu V_{min} + 2v_i) / (\mu + 2)\ dv_i)$$

(7.7.) $$B\ (v_i, \mu) = (1/(v_i - V_{min}))[A + (v_i(\mu V_{min} + v_i)) / (\mu + 2)]$$

Para obtener el resultado buscado tendríamos que determinar la constante A. Para ello, la despejamos,

$$A = [(V_{min} - v_i)\ (\mu + 2)\ B\ (v_i, \mu) + v_i(\mu V_{min} + v_i)] / (\mu + 2)$$

e introducimos la condición límite consistente en que cuando $v_i = V_{min}$ entonces $B(V_{min}, \mu) = V_{min}\ \forall \mu$, obteniendo,

$$A = V_{min}^2 (\mu + 1) / (\mu + 2)$$

Introduciendo este valor en (7.7.) y operando obtenemos la función de puja que estábamos buscando, y que llamaremos $B^{\mu}(.)$.

$$B\ (v_i, \mu) = (1/(v_i - V_{min}))[(V_{min}^2 (\mu + 1) / (\mu + 2)) + (v_i(\mu V_{min} + v_i)) / (\mu + 2)]$$

(7.8.) $\boxed{b_i = B^{\mu}(v_i, \mu) = [V_{min}(\mu+1)+v_i] / (\mu+2)}$

Por tanto, las pujas de los compradores dependerán, además de su valoración, de la conjetura que realicen sobre cual será el comportamiento del vendedor. Se puede observar que esta función de puja es una función más general que las obtenidas en los capítulos anteriores ya que incluye como casos particulares tanto a la función de puja $B^C(.)$ como a $B^I(.)$.

Así, en caso de que los compradores asuman que el vendedor cumplirá con certeza (es decir, las probabilidades de incumplir serán cero, $\mu=0$), entonces

si $\mu=0$, $B^{\mu}(v_i, 0) = [V_{min}+v_i] / 2 = B^C(v_i)$

Y si los compradores asignan a la opción de que el vendedor incumpla unas probabilidades igual a 1 ($\mu=1$) entonces

si $\mu=1$, $B^{\mu}(v_i, 1) = (2\ V_{min}+v_i) / 3 = B^I(v_i)$

➢ **Paso cuarto.- Conjetura de los compradores.** Hemos visto que las conjeturas juegan un papel fundamental para los compradores pero todavía no abordado la tarea de construir unas conjeturas que puedan formar parte de un Equilibrio Bayesiano Perfecto.

Para formarse sus conjeturas, los compradores utilizarán la información de la que disponen sobre el vendedor. Ya hemos dicho que no conocen el tipo del vendedor, aunque si la distribución de la que se ha derivado (que vendría resumida en el parámetro φ que representa la probabilidad con que la naturaliza elige al tipo V_I). Además, para que las conjeturas puedan formar un EBP recordamos que tienen que ser consistentes con la regla de Bayes y con las estrategias de los jugadores.

Desde el punto de vista de los compradores lo que les interesa es realizar una conjetura sobre cual sería la posibilidad de que el vendedor incumpla (a la que hemos llamado μ), asumiendo que la puja que él presenta, b_i, fuera la puja ganadora b_1. Esto es debido a que, como hemos deducido en el paso tercero, la función de puja va a depender de μ. Para calcular μ los compradores tendrán que realizar conjeturas sobre cuales serían las probabilidades de incumplir de cada uno de los posibles tipos del vendedor (V_I y V_C). Una vez que obtenidas estas conjeturas, podríamos obtener μ como la media de las probabilidades de que cada tipo incumpla, ponderada por la conjetura que el vendedor hace sobre las probabilidades de que el vendedor pueda ser de cada uno de los posibles tipos. Así, podríamos escribir

(7.9.) $$\mu \equiv \mu(Incumplir) = \theta(V_I)\ \mu(Incumplir \mid V_I) + \theta(V_C)\ \mu(Incumplir \mid V_C)$$

Donde $\theta(V_I)$ y $\theta(V_C)$ son las conjeturas de los compradores sobre las probabilidades de que el vendedor pueda ser del tipo V_I y V_C respectivamente. Mientras que $\mu(Incumplir \mid V_I)$ sería la conjetura que los compradores realizan sobre la probabilidad de que un vendedor del tipo V_I incumpla y $\mu(Incumplir \mid V_C)$ lo mismo, en el caso de que el vendedor fuera del tipo V_C.

En este modelo con una única venta, los cálculos para obtener estos valores cumpliendo con los requisitos del EBP son sencillos. En primer lugar, para obtener $\theta(V_I)$ y $\theta(V_C)$ sólo se contaría con las probabilidades "a priori", (es decir, φ y $1-\varphi$ respectivamente para los tipos V_I y V_C). Esto es debido a que, al no haberse celebrado ninguna compra previa, los compradores no poseen ninguna información adicional sobre el vendedor[149]. Por tanto,

(7.10.) $$\theta(V_I) = \varphi \qquad \text{y} \qquad \theta(V_C) = 1-\varphi$$

$\theta(V_C)$ será igual $(1-\theta(V_I))$ por lo que en adelante podríamos sustituir la primer expresión por la segunda.

Por otra parte, $\mu(Incumplir \mid V_I)$ y $\mu(Incumplir \mid V_C)$ se calcularían directamente a partir de la estrategia, en equilibrio, del vendedor. En este caso hemos visto que cada tipo

[149] Ya veremos que cuando el juego conste de varias ventas los siguientes compradores tendrían que actualizar estas conjeturas, utilizando para ello la Regla de Bayes y las estrategias de los jugadores.

de vendedor tiene una estrategia dominante y que además estas son diferentes. Así, en (7.2.) se recoge que el tipo V_I "Incumple siempre" y el V_C "Cumple siempre". De esta manera, las únicas conjeturas consistentes con esta estrategia serían:

$$\mu(Incumplir \mid V_I)=1 \quad \text{y} \quad \mu(Incumplir \mid V_C)=0$$

Llevando estos valores junto a los contenidos en (7.10.) a la fórmula (7.9.) obtenemos

$$\mu \equiv \mu(Incumplir) = \varphi \; 1 + (1-\varphi)\; 0$$

De donde se deduce que, la probabilidad que los compradores asignen a que el vendedor incumpla (μ) tendrá que ser igual a la probabilidad (φ) con que la naturaleza elige el tipo de vendedor V_I. Por tanto, la única conjetura de los compradores que podría formar parte de un EBP en el juego con una venta sería simplemente,

$$(\ 7.11.) \qquad \mu \equiv \mu(Incumplir) = \varphi$$

Por tanto, hemos visto que la conjetura $\mu(Incumplir)$ necesaria para la función de puja (7.8.) se puede calcular a partir de $\theta\,(V_I)$ y de $\theta\,(V_C)$ utilizando la fórmula (7.9.) y la estrategia de equilibrio del vendedor. Por tanto, una vez realizadas las conjeturas $\theta\,(V_I)$ y $\theta\,(V_C)$ los compradores ya estarían en condiciones de proceder a calcular sus pujas óptimas de acuerdo a (7.8.).

Con estos cuatro pasos ya tenemos especificado el EBP de este juego. De esta manera,

(7.12.) *la estrategia del vendedor (* 7.2.*), la estrategia de los compradores que viene dada por la función de puja (7.8.) y la ecuación (* 7.9.*) junto con la conjeturas (* 7.10.*) y (* 7.11.*) constituyen un Equilibrio Bayesiano Perfecto.*

En este equilibrio observamos que "ex ante" el precio esperado por los compradores, en caso de ganar, va a ser diferente del precio esperado por cada uno de los dos tipos posibles de vendedor. A su vez, los precios esperados por los diferentes tipos de vendedor difieren entre si. Es decir, los ingresos brutos esperados del vendedor van a estar en función de su tipo. Si comparamos estos resultados con los obtenidos en el capítulo 5 (en el que asumíamos que los compradores no tenían incertidumbre sobre la clase de vendedor al que se enfrentaban) observamos que el precio esperado por los compradores va a ser el mismo. Sin embargo, no ocurre igual con el vendedor cuando ya conoce su tipo. En concreto si es V_C va a obtener un precio esperado inferior mientras que si es del tipo V_I entonces su precio esperado va a ser superior.

Si nos centramos en el comprador i recordamos que, en el modelo sin incertidumbre sobre el tipo del vendedor (tanto para los casos en que $K=0$, $K\to 0$, y $K\geq(V^{max}-V_{min})/4$), su precio esperado en caso de ganar (al que llamaremos $P^e_{(\text{certeza})}$ para hacer referencia al modelo con certeza sobre el tipo del vendedor) venía dado por

$$P^e_{(\text{certeza})} = (v_i+V_{min}) / 2$$

En el caso del modelo desarrollado en este apartado para calcular este precio esperado (al que hemos llamado P_i^e, el subíndice hace referencia al comprador i) partimos de la ecuación (7.3.) que reproducimos a continuación

$$P_i^e = b_i\,(\mu+2)/2 - V_{min}\mu/2$$

en la que sustituimos b_i por la función de puja B^{μ} (.) calculada en la ecuación (7.8.)

$$P_i^e = B^{\mu}\,(v_i,\,\mu)\,(\mu+2)/2 - V_{min}\mu/2$$

$$P_i^e = [(V_{min}(\mu+1)+v_i) / (\mu+2)]\,(\mu+2)/2 - V_{min}\mu/2 = [(V_{min}(\mu+1)+v_i)/2] - V_{min}\mu/2$$

Y al simplificar esta expresión nos quedaría que $P_i^e = P^e_{(\text{certeza})}$ es decir,

(7.13.) *Precio esperado por el comprador i* $P_i^e = (V_{min}+v_i)/2 = P^e_{(\text{certeza})}$

Por tanto, de nuevo nos encontramos que cuando los compradores conocen la estructura del modelo reaccionan de tal manera que consiguen dejar inalterado su resultado esperado. De esta manera, desde el punto de vista de los compradores, la incertidumbre sobre el tipo de vendedor, en equilibrio, no altera su precio esperado en caso de ganar. Dicho de otra manera, en esta última expresión, P_i^e no es una función de la conjetura μ. Esta independencia no va a ocurrir en el caso del vendedor, al menos, una vez que ya conoce su tipo.

Dada la función de puja de los compradores B^μ (.), las estrategias de los dos tipos de vendedor, recogidas en (7.2.), así como la manera en que se determina el precio en la subasta al primer precio, que viene expresado en (7.1.), podríamos calcular el precio esperado para cada tipo de vendedor.

Así, comenzando por el tipo V_C de vendedor, su precio esperado (al que llamaremos P^e_{VC}) coincidirá con la esperanza de la puja más alta de las presentadas.

(7.14.) $P^e_{VC} = E[B^\mu(v_1,\mu)] = E[(V_{min}(\mu+1)+v_1) / (\mu+2)] = (V_{min}(\mu+1)+E[v_1]) / (\mu+2)$

Ya hemos visto que, para la distribución uniforme que estamos considerando y suponiendo que existen dos compradores, $E[v_1]=E[v_1|N=2]= V_{min}+2(V^{max}-V_{min})/3$. Introduciendo este valor,

$$P^e_{\text{VC}} = [V_{min}(\mu+1)+V_{min}+2(V^{max}-V_{min})/3] / (\mu+2)$$

(7.15.) $P^e_{\text{VC}} = [\, V_{min}\,(3\mu+4)+2\,V^{max}] / 3(\mu+2)$

Como habíamos anticipado el precio esperado por el vendedor no es independiente de μ. Calculando $\partial P^e_{VC} /\partial\mu$ podemos observar que el precio esperado para el tipo de vendedor V_C tiene una relación negativa con la conjetura μ. Así,

$$\partial P^e_{\text{VC}} /\partial\mu = 2(V_{min}- V^{max}) / 3(\mu+2)^2 <0, \text{ [dado que } V_{min} < V^{max}]$$

Por tanto, cuanto menor sea μ mayor será P^e_{VC} . De esta manera, si el vendedor fuera del tipo V_C estaría interesado en que, cuando los compradores se formen sus conjeturas, asignen probabilidades muy pequeñas a que el vendedor vaya a incumplir (ya que de esta manera sus pujas serán más elevadas). Vamos a observar que el tipo V_I también va a estar interesado en lo mismo.

Según (7.2.) el tipo V_I siempre incumpliría con lo que por (7.1.) el precio se fijaría de acuerdo a la expresión $P_p^I(.)$. Teniendo en cuenta la función de puja de equilibrio $B^\mu(.)$ el precio esperado del vendedor tipo V_I (al que llamaremos P^e_{VI}) vendría dado por,

$$P^e_{VI} = P_p^I(\mathrm{E}[B^\mu(v_1,\mu)]) = 3\ \mathrm{E}[B^\mu(v_1,\mu)]/2\text{-}V_{min}/2$$

Según (7.14.) $\mathrm{E}[B^\mu(v_1,\mu)]$ coincide con P^e_{VC} cuyo valor viene dado por (7.15.). Al sustituir este valor en la ecuación anterior obtenemos,

$$P^e_{VI} = 3\ [(V_{min}\ (3\mu+4)+2\ V^{max})\ /\ 3(\mu+2)]/2 - V_{min}/2$$

Y finalmente, operando llegamos a,

$$P^e_{VI} = (V_{min}\ (\mu+1) + V^{max})\ /\ (\mu+2) \qquad (7.16.)$$

Al igual que ocurría con el tipo V_C, en este caso la derivada parcial con respecto a μ también es negativa lo que implica que este tipo de vendedor también está interesado en que la conjetura μ de los compradores sea lo más reducida posible. Esto lo podemos comprobar ya que

$$\partial P^e_{VI}\ /\partial\mu = (V_{min} - V^{max})\ /\ (\mu+2)^2 < 0,\ [\text{dado que } V_{min} < V^{max}]$$

Por tanto, el precio esperado por ambos tipos de vendedores aumentaría si se redujeran las probabilidades que los compradores asignan a que el vendedor vaya a incumplir (que en este modelo coinciden con las posibilidades que asignen a que el vendedor sea del tipo V_I). De esta manera, antes de comenzar la subasta ambos tipos de vendedores estarían interesados en hacer creer que pertenecen al tipo V_C. Evidentemente, los compradores verían con escepticismo los posibles intentos por parte del vendedor para convencerles de que pertenece al tipo V_C si no fueran acompañados por mecanismos que le dieran credibilidad (ya dijimos en el capítulo 5 que íbamos a suponer que este tipo de mecanismos no estaban disponibles). Dicho con otras palabras, un vendedor que es del tipo V_C tendría problemas para convencer a los vendedores de que realmente pertenece a este tipo ya que aunque no lo fuera también tendría incentivos para actuar igual.

El resultado va a ser que el precio esperado para el tipo V_C sea menor que el precio esperado por V_I . Esto se comprueba al restar ambos precios esperados,

$$P^e_{\mathrm{VI}} - P^e_{\mathrm{VC}} = (V^{max} - V_{min}) / 3(\mu+2) > 0 \;\Rightarrow P^e_{\mathrm{VI}} > P^e_{\mathrm{VC}}$$

Como hemos visto que el comprador, en media, espera pagar lo mismo que cuando existía certeza este resultado implica que la introducción de incertidumbre origina un "traspaso" de ingresos esperados desde el tipo de vendedor V_C (el que siempre "cumple") al tipo de vendedor V_I (el que siempre "incumple"). Habría que recordar que para analizar el excedente neto o la utilidad del vendedor V_I, habría que restar de su precio esperado los costes de incumplir K (aunque en este caso como suponemos que $K \rightarrow 0$ podemos seguir manteniendo que la utilidad esperada del tipo V_I en equilibrio es mayor que la del tipo V_C).

Por otra parte, este juego de subasta (en el que estamos asumiendo los supuestos del "modelo de referencia") cumpliría con los dos requisitos del Teorema del Ingreso Equivalente. Así, en equilibrio, la empresa la obtiene el comprador con una mayor valoración; y un hipotético comprador que tuviera la valoración mínima obtendría una utilidad esperada igual a cero. Por tanto, de acuerdo con el Teorema del Ingreso Equivalente (véase apartado 3.3.3.-), los ingresos esperados deberían ser los mismos que en la misma subasta cuando suponíamos que no existía incertidumbre sobre el tipo de vendedor.

Efectivamente este resultado se cumple para un vendedor que todavía no conoce su tipo, es decir, antes de que la "naturaleza" realice el movimiento en el que asigna un tipo al vendedor. En ese momento el vendedor tendría un precio esperado "ex ante" que sería la media entre el precio esperado en caso de que resultara ser del tipo V_I y el precio esperado si finalmente fuera del tipo V_C, ponderado por las respectivas probabilidades de pertenecer a cada uno de los dos tipos. Es decir,

$$P^e_{\text{ex-ante}} = \varphi\, P^e_{VI} + (1-\varphi)\, P^e_{VC}$$

Teniendo en cuenta que, como hemos visto, $\varphi=\mu$, al sustituir en esta ecuación los valores obtenidos en (7.15.) y (7.16.) llegamos a la siguiente expresión,

$$P^e_{\text{ex-ante}} = V_{min} + (V^{max} - V_{min}) / 3$$

Este valor para el precio esperado es exactamente el mismo que el que correspondía al modelo sin incertidumbre sobre el vendedor, tal y como vimos, en el capítulo 5.

7.4.- INFINITAS (O INDETERMINADAS) VENTAS SUCESIVAS.

En este apartado, el vendedor realiza un número infinito de ventas. Por tanto, el esquema temporal expuesto en el apartado 7.2.- se repite indefinidamente en lo que se refiere a las fases 3) a 6). Al igual que en el apartado 6.3.-, las ganancias del vendedor en este juego serían la suma descontada de las ganancias obtenidas en las sucesivas ventas. La tasa de descuento, δ, con la que se actualizan las ganancias entre una venta y la siguiente, además de recoger la preferencia temporal podía incluir la posible existencia de incertidumbre relativa a que no se celebren más ventas. Por tanto, podría incorporar la probabilidad de que la venta actual sea la última. Por ello, aunque razonaremos como si las subastas se siguieran realizando de una manera indefinida, lo esencial para este apartado no es que las ventas sean infinitas (M=∞) sino que el número exacto de ventas (además de "elevado") sea desconocido para todos los jugadores (incluido el vendedor). Es decir, que el número de empresas que finalmente subaste el vendedor sea indeterminado.

Antes de proceder a construir un EBP realizaremos algunos comentarios genéricos e introduciremos algunos elementos de notación que también nos servirán para el apartado siguiente.

- Como el vendedor realiza varias ventas, los compradores que se presentan a cada una de ellas, pueden actualizar sus conjeturas de acuerdo al comportamiento pasado del vendedor. Por tanto, en cada venta, m, podrán existir unas conjeturas diferentes actualizadas en función de la historia del juego hasta la venta anterior. Al igual que hicimos en el capítulo anterior, a esta historia la llamaremos $h_{m-1.}$ En nuestro modelo la historia en la venta m simplemente recoge las acciones adoptadas por el vendedor en las m-1 ventas anteriores. A la acción del vendedor en la venta m la llamaremos a_m^v y el conjunto de acciones factibles (A^V) sólo incluye las acciones puras[150], es decir, A^V={"cumplir", "incumplir"}. Por tanto, la historia h_{m-1} consistirá en un conjunto de $m-1$ elementos $a_j^v \in A^V$, $j<m$.

- De esta manera, habría que añadir un subíndice, m, a las conjeturas e introducir la idea de que estas dependen de cual haya sido la historia. Como en este apartado existen infinitas ventas, este subíndice m pertenece a los números enteros en el intervalo [1,∞). Así, tendríamos una ecuación similar a la (7.9.) para cada venta. Esta ecuación que recoge la relación entre μ y las conjeturas θ (V$_I$) y θ (V$_C$) la podríamos expresar de la siguiente manera:

(7.17.) $$\mu_m \equiv \mu_\mathrm{m}(Incumplir|h_{m-1}) = \theta_\mathrm{m}(\mathrm{V_I}|h_{m-1})\mu_\mathrm{m}(Incumplir|\mathrm{V_I}) + \\ + \theta_\mathrm{m}(\mathrm{V_C}|h_{m-1})\mu_m(Incumplir|\mathrm{V_C})$$

[150] También se incluirían las estrategias mixtas, en caso, de que las consideremos (véase el apéndice 6.1).

Donde $\theta_m(V_I|h_{m-1})$ y $\theta_m(V_C|h_{m-1})$ son las conjeturas de los compradores sobre las probabilidades de que en la venta m, dada la historia h_{m-1}, el vendedor sea del tipo V_I y V_C respectivamente. Evidentemente la ecuación anterior la podríamos expresar sólo en función de $\theta_m(V_I|h_{m-1})$ sustituyendo $\theta_m(V_C|h_{m-1})$ por $(1-\theta_m(V_I|h_{m-1}))$.

$\mu_m(Incumplir \mid V_I)$ y $\mu_m(Incumplir \mid V_C)$ se calcularía de nuevo en función de la estrategia del vendedor la cual, a su vez, podría estar en función de la historia del juego.

- Con lo anterior lo que se está recogiendo es que los vendedores, que se presenten a una determinada venta, actualizan sus conjeturas sobre el tipo del vendedor en función de cual haya sido el comportamiento de este en las ventas pasadas. El EBP impone unos requisitos que tendrían que cumplir esas actualizaciones de las conjeturas. En concreto establece que esta actualización tendrá que realizarse de acuerdo con la Regla de Bayes y ser consistentes con las estrategias de equilibrio de los jugadores, en este caso del vendedor. Por tanto, los compradores que se presentan a partir de la segunda venta (m>1), para construir su conjetura sobre el tipo al que pertenece al vendedor cuentan, además de con la probabilidad "a priori" (φ), con la información adicional contenida en la historia h_{m-1}. Por tanto, aplicando la Regla de Bayes su conjetura debería ser:

(7.18.) $$\theta_m(V_I|h_{m-1})=[\varphi\, Prob(h_{m-1}|V_I)] / [\varphi\, Prob(h_{m-1}|V_I)+(1-\varphi)\, (Prob(h_{m-1}|V_C)]$$

Donde las probabilidades que aparecen en esta fórmula ($Prob(h_{m-1}|V_I)$ y ($Prob(h_{m-1}|V_C)$) se obtienen de las estrategias de los diferente tipos de vendedor en equilibrio. $Prob(h_{m-1}|V_I)$ recoge la probabilidad de que se hubiera producido la historia h_{m-1} si el vendedor fuera del tipo V_I (y si se hubieran seguido las acciones que la estrategia de equilibrio prescribe en cada una de las $m-1$ ventas anteriores). $Prob(h_{m-1}|V_C)$ recogería lo mismo para el caso del tipo V_C.

Por ejemplo, se puede observar que en el caso concreto de que ambos tipos jueguen, en equilibrio, una estrategia que prescriba para las $m-1$ ventas las mismas acciones entonces $Prob(h_{m-1}|V_I)$ = ($Prob(h_{m-1}|V_C)$. En este caso la fórmula anterior quedaría reducida a $\theta_m(V_I|h_{m-1})=\varphi$. Esto implica que, dado que los dos tipos de vendedores se hubieran comportado igual en las ventas transcurridas, los compradores no pueden extraer información relevante sobre el tipo de vendedor cuando analizan su comportamiento pasado. Es decir, la historia de las ventas anteriores no es informativa para actualizar las conjeturas sobre el tipo al que pertenece el vendedor. De esta manera, la mejor conjetura seguiría siendo el adjudicar unas probabilidades iguales a las probabilidades "ex ante". Por tanto, para actualizar las conjeturas es necesario que las estrategias de equilibrio prescriban acciones diferentes, al menos, en alguna de las m-1 ventas anteriores para los dos tipos de vendedor.

El razonamiento anterior también es aplicable si permitimos estrategias mixtas. Por su parte, en cuanto las estrategias incluyan en una venta pasada, acciones puras diferentes para los dos tipos de vendedores, entonces los compradores de las siguientes ventas ya podrían deducir a que tipo pertenece el vendedor asignando un valor de 0 o 1 a $\theta_m(\mathrm{V_I}|h_{m-1})$.

- Este último comentario lo vamos a poder aplicar en nuestro caso, lo que simplifica la actualización de las conjeturas. Así, la estrategia dominante del tipo de vendedor $\mathrm{V_C}$ en el juego con una venta era "cumplir $\forall$ $\mathrm{b_1}$". Cuando el juego se repite, a este tipo de comprador no le va a interesar "ocultar" su tipo (intentando crear expectativas en los compradores de que pertenece al tipo $\mathrm{V_I}$), ya que de ello no obtendría ninguna ganancia ni en el presente ni en el futuro (ya señalamos que las pujas de los compradores serán mayores cuanto mayores sean las probabilidades que adjudican a que el vendedor sea del tipo $\mathrm{V_C}$). Por tanto, por un lado, no obtiene ninguna ganancia pero por otro incurriría en el coste K de incumplir (que recordamos que para este tipo de vendedor eran elevados). Como consecuencia, con este argumento podemos avanzar que para el tipo $\mathrm{V_C}$ (al igual que ocurría en el juego de etapa) la estrategia "cumplir siempre" será una estrategia dominante en el juego repetido. Cuando existen varias ventas "cumplir siempre" implica cumplir en todas las ventas con independencia de la puja ganadoras (es decir, cumplir $\forall$ $\mathrm{b_1}$ y $\forall m$").

Este hecho es interesante ya que si los compradores observan que en alguna de las ventas anteriores el vendedor ha incumplido entonces pueden deducir que el tipo del vendedor es $\mathrm{V_I}$. Por tanto, si en h_{m-1} $\exists$ algún a_j^v = "*incumplir*" $j<m \Rightarrow \theta_m(\mathrm{V_I} \mid h_{m-1}) = 1$.

Es decir, si en la historia h_{m-1} se incluye alguna acción anterior del vendedor igual que no sea la estrategia pura de "cumplir", entonces se revela el tipo del vendedor y las probabilidades que los compradores asignan al tipo $\mathrm{V_I}$ son iguales a uno.

• A diferencia del tipo $\mathrm{V_C}$, el tipo $\mathrm{V_I}$ potencialmente si podría estar interesado en ocultar su tipo imitando el comportamiento del tipo $\mathrm{V_C}$. Esto podría ocurrir, a pesar de que en el juego con una única venta su estrategia dominante era "incumplir $\forall b_1$ ". La intuición reside en que si consigue hacerse pasar por $\mathrm{V_C}$ (o aumentar las posibilidades de serlo), renunciaría a las ganancias inmediatas que puede obtener "incumpliendo", pero puede aspirar a mejorar sus resultados en las ventas siguientes.

Hay que tener en cuenta que el tipo $\mathrm{V_I}$ obtiene unas ganancias netas (una vez que se ha descontado K) superiores cuando a) "cumple" y los compradores se comporten como si fuera a cumplir; que cuando b) "incumple" y los compradores se comportan como si fuera a incumplir. Ya hemos visto en capítulos anteriores que en los dos casos obtiene el mismo precio pero en el caso b) tendría que restar los costes K de incumplir, por lo que sus ingresos netos son inferiores. Por tanto, la combinación [*Cumplir*, $B^{\mu}(v_i,0)=B^C(v_i)$] ofrece unos ingresos netos esperados superiores a la combinación [*Incumplir*, $B^{\mu}(v_i,1)=B^I(v_i)$]. Sin embargo, ya sabemos que, a pesar de este resultado, si el juego se repite una única vez, "incumplir" siempre será una estrategia dominante para el tipo $\mathrm{V_I}$, debido a que el vendedor adopta su decisión una vez presentadas las pujas (y, por lo tanto, ya no puede afectar al comportamiento de los compradores). En todo caso, evidentemente, la mejor combinación para el vendedor sería incumplir mientras que los compradores presentan las pujas como si fuera a cumplir (es decir, [*Incumplir*, $B^{\mu}(v_i,0)=B^C(v_i)$]).

Por tanto, de este comentario podemos deducir que potencialmente podría existir la posibilidad de que el vendedor pueda obtener ventajas en las ventas siguientes si en la venta actual "oculta" su tipo. Para ello, tendría que imitar el comportamiento del tipo $\mathrm{V_C}$. En todo caso, para comprobar que puede lograr este objetivo, al menos en algún grado, tendremos que mostrar que un comportamiento de este tipo puede formar parte de un equilibrio. Esta será la tarea que abordamos a continuación. Pero antes, realizaremos un comentario que se deriva de lo expuesto más arriba y que debería ser tenido en cuenta en cualquier equilibrio.

Ya hemos comentado que la primera vez que el vendedor incumple revela que su tipo es $\mathrm{V_I}$ y la conjetura de los compradores pasaría a ser $\theta_m(\mathrm{V_I} \mid h_{m-1}) = 1$ para el resto de las ventas. El vendedor conoce la información de la que disponen los compradores y, por tanto, puede anticipar como los compradores se forman sus conjeturas. De este modo, una vez que el vendedor haya incumplido una vez, ya no podría cambiar su "imagen" (o su "reputación") entre los compradores. Por tanto, a partir de ese momento ya no tendría incentivos para intentar imitar el comportamiento del tipo $\mathrm{V_C}$ y actuará maximizando sus ganancias a corto plazo sin preocuparse de su reputación en las ventas futuras. Esto implica que cuando el vendedor del tipo $\mathrm{V_I}$ incumple una vez, continuará incumpliendo en el resto de las ventas. Por tanto, cualquier estrategia que pretenda formar parte de un equilibrio tiene que tener en cuenta este hecho. Es decir,

(7.19.) si en h_{m-1} $\exists$ alguna a_j^v="incumplir" entonces a_m^v="incumplir" $\forall m>j$.

Este comportamiento será anticipado por compradores racionales que lo incorporarán a sus conjeturas. Así, una vez que se ha revelado que el tipo es $\mathrm{V_I}$ los compradores (además de fijar $\theta_m(\mathrm{V_I} \mid h_{m-1})=1$ como se comentó anteriormente) adjudicaran una probabilidad de uno a la acción de incumplir condicionado a que el tipo sea $\mathrm{V_I}$ (es decir, μ_m(*Incumplir* | $\mathrm{V_I}$)=1). De esta manera, introduciendo estos valores en la ecuación (7.17.) obtenemos que, desde el momento que se el vendedor ha incumplido una vez, el sistema de conjeturas de los compradores tendría que adjudicar una probabilidad de uno a la acción de incumplir para el resto de las ventas. Esto lo podríamos expresar como que,

si en h_{m-1} $\exists$ alguna a_j^v="incumplir" entonces μ_m=(*Incumplir* | h_{m-1})=1 $\forall m>j$.

Equilibrio en el que $\mathrm{V_I}$ imita a $\mathrm{V_C}$:

Cuando el juego es repetido indefinidamente, si el vendedor V_I tuviera que elegir entre a) un equilibrio en el que se repitiera indefinidamente la combinación ["*Cumplir*", $B^u(v_i,0)=B^C(v_i)$]; y b) otro en el que se repitiera la combinación ["*Incumplir*", $B^u(v_i,1)=B^I(v_i)$]; elegiría el primero. La pregunta es si puede existir una combinación de estrategia y de conjeturas que soporte este resultado como un EBN. El dilema para el vendedor reside en que si "incumple" en una venta logra incrementar su ingreso neto en esa venta, pero a cambio revela su tipo. Esto último supone que todos los compradores futuros presentarán sus pujas como si el vendedor fuera a "incumplir siempre", lo que le llevará a menores ingresos netos en el futuro.

Vamos a derivar las condiciones que son necesarias para que tanto el tipo V_C como también el V_I "cumplan", al menos, en la senda de equilibrio de un EBN. Empezamos especificando la estrategia del vendedor, que podría ser de este tipo:

(7.20.) ***Estrategia del vendedor*:**

Tipo V_C: $\forall m$, a_m^v="*Cumplir* $\forall b_1$"

Tipo V_I:

$$\begin{cases} \text{si } m=1,\ a_m^v = \text{"}\textit{Cumplir}\ \forall b_1\text{"} \\ \text{si } m>1, \begin{cases} a_m^v=\text{"}\textit{Cumplir}\ \forall b_1\text{" si } \forall j<m,\ a_j^v=\text{"}\textit{Cumplir}\text{"} \\ a_m^v=\text{"}\textit{Incumplir}\ \forall b_1\text{" si para } j<m\ \exists \text{ un } a_j^v=\text{"}\textit{Incumplir}\text{"} \end{cases} \end{cases}$$

Es decir, el tipo V_C utilizaría en todas las etapas la acción de cumplir con independencia de la historia anterior. Sin embargo, en la estrategia del tipo V_I (que queremos que imite al tipo V_C) tenemos que incluir alguna matización. Así, en la primera venta (m=1) empezaría cumpliendo, mientras que en las siguientes (m>1) existirían dos posibilidades. Si en todas las ventas anteriores ha cumplido seguiría cumpliendo; y si en al menos una ocasión ha incumplido entonces seguiría incumpliendo. Naturalmente, si el vendedor V_I siguiera esta estrategia, como en la primera venta empieza cumpliendo, siempre seguiría cumpliendo y, en la senda de equilibrio, nunca se daría la posibilidad de que en la historia anterior apareciera un incumplimiento. Sin embargo, es necesario especificar este comportamiento debido a que las estrategias deben incluir las acciones a adoptar para cualquier historia que pudiera llegar a ocurrir (aunque las posibilidades de que suceda en equilibrio sean nulas). Por tanto, es necesario especificar como actuaría si en el pasado hubiera incumplido en alguna ocasión, y de acuerdo a (7.19.) esta sería la única posibilidad.

Por su parte, los compradores, como sólo se presentan, una vez optimizarían sin tener en cuenta consideraciones de futuro. Por tanto, presentarían sus pujas óptimas teniendo en cuenta sus conjeturas sobre la posibilidad de que el vendedor incumpla. Es decir, utilizaría la función de puja (7.8.) que reproducimos a continuación:

(7.21.) $b_i = B^{\mu}(v_i, \mu) = [V_{min}(\mu+1)+v_i] / (\mu+2)$

El otro elemento de un EBN sería el sistema de conjeturas. En la primera venta, como no hay historia, las conjeturas sobre el tipo del vendedor se tendría que basar únicamente en las probabilidades que la naturaleza asigna a cada tipo. Por tanto, $\theta_m(\mathrm{V_I}|h_o)=\varphi$ (y, naturalmente, $\theta_m(\mathrm{V_C}|h_o)=1-\varphi$). Como según la estrategia (7.20.), en la primera etapa las acciones de los dos tipos de vendedor son iguales (los dos cumplen), cuando comienza la segunda etapa los compradores no podrían extraer información relevante de la historia. Por tanto, sus conjeturas sobre los tipos no variarían. Esto seguiría igual mientras que el vendedor siguiera cumpliendo. La primera vez que llegue a incumplir entonces las conjeturas cambiarían y $\theta_m(\mathrm{V_I}|h_o)=1$. Sin embargo, lo relevante para los compradores no es la conjetura sobre el tipo del vendedor sino la conjetura sobre las probabilidades de que el vendedor incumpla (ya que es el parámetro, μ, el que entra en su función de puja). Esta conjetura la podemos obtener a partir de las anteriores con la ecuación (7.17.). Para ello, adicionalmente necesitaríamos otra conjetura: las probabilidades que se asignan a que cada tipo de vendedor incumpla. Estas conjeturas también tienen que ser consistentes con las estrategias de los tipos del vendedor recogidas en (7.20.). Así, dada la estrategia del vendedor, la probabilidad de incumplir condicionada a ser el tipo $\mathrm{V_C}$, tiene a ser siempre nula ($\mu_m(Incumplir|\mathrm{V_C})=0,\ \forall m$). Por su parte, la probabilidad de incumplir en la primera venta condicionado a que el vendedor sea $\mathrm{V_I}$ también será nula ($\mu_1(Incumplir|\mathrm{V_I})$). En las ventas siguientes esta probabilidad seguirá siendo nula siempre que el vendedor haya cumplido en todas las ventas anteriores ($\mu_m(Incumplir|V_I)=0$, $\forall m>1$ si a_j^v="cumplir" $\forall j<m$), mientras que será igual a 1 si en alguna ocasión se ha producido un incumplimiento ($\mu_m(Incumplir|V_I)=1$, si $\exists$ algún a_j^v="*incumplir*", $j<m$). De esta manera, a partir de la fórmula (7.17.) se obtendría que las conjeturas sobre la probabilidad de incumplir, condicionada a la historia, adaptarían la siguiente sencilla forma:

(7.22.) ***Conjeturas de los compradores:***

m=1: $\mu_1=\mu_1(Incumplir|h_0)=0$

m>1: $\mu_m=\mu_m(Incumplir|h_{m-1})=0$, si $\forall j<m$, a_j^v="*cumplir*"

$\mu_m=\mu_m(Incumplir|h_{m-1})=1$, si $\exists$ algún a_j^v="*incumplir*", $j<m$

Es decir, dada la estrategia de los dos tipos de vendedor, los compradores simplemente van a conjeturar que no existe posibilidad de que el vendedor incumpla, a menos que hayan observado un incumplimiento (en cuyo caso la probabilidad que adjudicaría a la acción de incumplir, a partir de ese momento y para siempre, sería de uno).

Por tanto, se trataría de mostrar si la estrategia del vendedor (7.20.), la estrategia de los compradores (7.21.) y las conjeturas (7.22.) pueden constituir un EBN. Para ello, tenemos que analizar si las estrategias son sucesivamente racionales en todos los nodos decisión dadas las conjeturas de los jugadores, y si las conjeturas cumplen con los requisitos que impone el EBN.

En primer lugar, las conjeturas cumplen estos requisitos ya que las hemos construido teniendo en cuenta las estrategias de los jugadores y utilizando la regla de Bayes donde era posible (tanto en la senda de equilibrio – cuando el vendedor siempre cumple – como en la senda fuera del equilibrio – cuando se produce algún incumplimiento-).

En segundo lugar, dadas las conjeturas, los compradores también están optimizando ya que utilizan la función de puja que maximiza su utilidad en la única subasta que participan.

Por lo que se refiere a la estrategia del vendedor tendríamos que analizar las estrategias para cada uno de los dos tipos. Por un lado, no existirían problemas con el tipo V_C, ya que hemos comentado que cumplir siempre es su estrategia dominante tanto en el juego repetido una única vez como cuando este se repite. Por tanto, no obtendría ningún beneficio de incumplir.

No ocurre lo mismo con el tipo V_I, que es donde va a residir el problema interesante. Este tipo de vendedor utilizaría en la senda de equilibrio la acción de "cumplir siempre". En el apartado anterior ya hemos visto que no era su estrategia de equilibrio en el juego de etapa (es más era una acción que estaba dominada por la de incumplir). Por tanto, tendremos que mostrar bajo que condiciones esta estrategia puede ser secuencialmente racional y, por tanto, formar parte de un EBN.

Para ello, habría que mostrar que en cualquier venta y para cualquier historia posible del juego, las acciones contenidas en la estrategia (7.20.) son óptimas para el vendedor V_I, dadas las estrategias y las conjeturas de todos los jugadores. En nuestro caso las historias relevantes las podríamos agrupar en dos: cuando el vendedor siempre ha cumplido; y cuando el vendedor ha incumplido, al menos, en una ocasión. En este segundo caso, la acción incluida en la estrategia de V_I es pasar a "incumplir siempre" lo cual ya hemos comentado que sería la estrategia óptima para ese tipo de vendedor una vez que ha revelado su tipo.

Por tanto, nos quedaría por analizar que las acciones prescritas en (7.20.), cuando la historia del juego ha sido la de "cumplir siempre", son secuencialmente racionales en cada una de las ventas. Esta tarea se simplifica ya que, con una historia sin incumplimientos, el "juego de continuación" que se inicia en cada venta es siempre igual. Esto es debido a que el juego se repite infinitamente y, por tanto, siempre estamos a igual distancia del final[151]. De este modo, bastaría analizar cualquier venta que cumpla con el requisito de que no se haya observado ningún incumplimiento (por ejemplo, la primera)

Nos centraremos en la primera venta y derivaremos las condiciones que son necesarias para que la acción de "cumplir" para el tipo V_I sea secuencialmente racional, dada las estrategias y las conjeturas del resto de jugadores. Para ello, (como comentamos en el capítulo anterior) es suficiente comprobar que el vendedor V_I no puede obtener unas ganancias superiores en el conjunto del juego si se desvía en una venta mientras que en las siguientes regresa a las acciones prescritas en la estrategia (7.20.). Para realizar este cálculo se asume que los compradores se comportan de acuerdo a su estrategia y a su sistema de conjeturas.

De manera similar a como hicimos en el apartado 6.3.3.-, en primer lugar, calcularemos cual sería la utilidad esperada para un vendedor tipo V_I, en el juego repetido indefinidamente, si siguiera la estrategia (7.20.). A continuación realizaremos el mismo cálculo asumiendo que se desvía de acuerdo a las pautas comentadas en el párrafo anterior. Finalmente realizamos la comparación para observar en que casos no le compensaría desviarse.

Así, con la estrategia (7.20.) el vendedor V_I obtendría la siguiente utilidad esperada en el juego repetido indefinidamente:

$$(7.23.) \qquad U_{VI}^{(M=\infty)} = b_1 + \delta \sum_{m=2}^{\infty} \delta^{m-2} \; E[B^{\mu}(v_1, \mu=0)]$$

El primer sumando es el ingreso neto que obtendría en la primera venta (hay que tener en cuenta que cuando le toca decidir ya conoce la puja ganadora, b_1). El sumatario del segundo sumando recoge la corriente infinita de ingresos esperados de las siguientes ventas debidamente actualizados. En el sumatorio, la esperanza de la puja incluye la conjetura $\mu=0$ que, como hemos visto, es la que correspondería en la senda de equilibrio. Operando, la expresión anterior nos queda,

---

151 Aquí reside la principal diferencia con el apartado 7.5.-.

$$U_{VI}^{(M=\infty)} = b_1+\delta \sum_{m=2}^{\infty} \delta^{m-2} \; B^{\mu}(\mathrm{E}[v_1|N=2],\ \mu=0)$$

La expresión $\mathrm{E}[v_1|N=2]$ ya la hemos utilizado en diversas ocasiones. Introduciendo su valor en la fórmula de la puja y utilizando la fórmula de la capitalización de un flujo infinito de una cantidad constante,

$$U_{VI}^{(M=\infty)} = b_1+\delta\ [(V^{max}-V_{min})+3V_{min}]/[3(1-\delta)]$$

Del mismo modo que en el apartado 6.3.3.- nos interesa obtener un resultado en el que al vendedor tipo $\mathrm{V_I}$ no le interese desviarse en ningún caso. Por eso, utilizamos la hipótesis más favorable para el incumplimiento, que se produce cuando la puja presentada en la primera venta sea la más alta posible, lo que ocurre cuando la valoración del ganador es la valoración más alta (V^{max}). Por tanto, si en la ecuación anterior sustituimos la puja ganadora de la primera venta, b_1, por la puja que presentaría un comprador con una valoración V^{max}, obtenemos:

$$U_{VI}^{(M=\infty)} = B^{\mu}(V^{max},\mu=0)+\delta\ [(V^{max}-V_{min})+3V_{min}]/[3(1-\delta)]$$

Sustituyendo $B^{\mu}(V^{max},\mu=0)$ por su valor:

$$U_{VI}^{(M=\infty)} = [(V^{max}-V_{min}+2\ V_{min})/2]+\delta\ [(V^{max}-V_{min})+3V_{min}]/3(1-\delta)$$

(7.24.) $$U_{VI}^{(M=\infty)} = (V^{max}-V_{min})/6 - [(V^{max}-V_{min})+3V_{min}]/3(\delta-1),$$

Esta expresión contiene la utilidad esperada del vendedor tipo $\mathrm{V_I}$ cuando sigue la estrategia contenida en (7.20.) y cuando la puja ganadora en la primera venta la realiza un comprador que tiene la valoración máxima.

Pasamos ahora a realizar el mismo cálculo cuando el vendedor tipo $\mathrm{V_I}$ se desvía e incumple en la primera venta. En este caso, la utilidad esperada vendría dada por,

(7.25.) $$U(desviación)_{VI}^{(M=\infty)} = (P_p^I(b_1) - K) + \delta \sum_{m=2}^{\infty} \delta^{m-2} \; E[P_p^I(B^{\mu}(v_1,\mu=1) - K]$$

Es decir, el primer paréntesis representa los ingresos netos que obtendría en la primera venta. En ese primer paréntesis, se incluye la aplicación a la puja presentada por el ganador de la función que determina el precio en caso de incumplir y se le restan los costes de incumplir, K, del tipo de vendedor V_I [152]. Por su parte, en el sumatorio se recoge la corriente de ingresos netos esperados en el resto de las ventas. En este caso, el vendedor ya habría revelado su tipo con su comportamiento en la primera venta, con lo que a partir de ese momento los compradores asumirán que $\mu=1$. Por su parte, el vendedor seguirá incumpliendo con lo que para calcular el ingreso esperado neto se aplica la función de precio P_p^I (.) a la puja esperada del ganador y se le resta el coste de incumplir. Operando de manera similar a lo realizado anteriormente obtenemos,

$$U(desviación)_{VI}^{(M=\infty)} = (P_p^I(b_1) - K) + \delta \sum_{m=2}^{\infty}[\delta^{m-2} \; P_p^I(B^{\mu}(\mathrm{E}[v_1|N=2],\mu=1) - K]$$

Introduciendo la expresión de la función $P_p^I(.)$ en los dos lugares que aparece, y sustituyendo $\mathrm{E}[v_1|N=2]$ por su valor,

$$U(desviación)_{VI}^{(M=\infty)} = [(3b_1 - V_{min})/2 - K] + \delta \sum_{m=2}^{\infty} \delta^{m-2} \; (V^{max} - 3K + 2V_{min})/3$$

$$U(desviación)_{VI}^{(M=\infty)} = [(3b_1 - V_{min})/2 - K] + \delta \; [3(K - V_{min}) - (V^{max} - V_{min})]/[3(\delta - 1)]$$

Como hicimos anteriormente queremos encontrar que condición es necesaria para que no exista ocasión en la que el vendedor tenga interés en desviarse. Por ello, utilizamos la hipótesis más favorable para la opción de incumplir en la primera venta y sustituimos b_1 por $B^{\mu}(V^{max},\mu=0)$[153].

---

[152] Como el vendedor V_C siempre va a cumplir esto supone que nunca va a incurrir en sus costes de incumplir. Por tanto, de ahora en adelante cuando aparezca K, sin especificar el tipo de vendedor, nos estaremos refiriendo a los costes de incumplir del tipo V_I (que recordemos que eran positivos pero se encontraban próximos a cero).

[153] En este caso $\mu=0$, debido a que el vendedor todavía no ha incumplido.

$$U(desviación)_{VI}^{(M=\infty)} = [(3B^{\mu}(V^{max},\mu=0)-V_{min})/2-K]+\delta[3(K-V_{min})-(V^{max}-V_{min})]/[3(\delta-1)]$$

Introduciendo la expresión de $B^{\mu}(V^{max},\mu=0)$ y operando:

$$U(desviación)_{VI}^{(M=\infty)} = (3V^{max}+V_{min}-4K)/4+\delta[3(K-V_{min})-(V^{max}-V_{min})]/[3(\delta-1)]$$

(7.26.) $$U(desviación)_{VI}^{(M=\infty)} = [3(K-V_{min}) - (V^{max}-V_{min})]/[3(\delta-1)]+5(V^{max}-V_{min})/12$$

De esta manera, al vendedor no le interesaría desviarse de la estrategia (7.20.) si la utilidad esperada cuando utiliza esta estrategia ($U_{VI}^{(M=\infty)}$) es mayor que la utilidad esperada que obtiene cuando se desvía ($U(desviación)_{VI}^{(M=\infty)}$). Es decir, se tiene que cumplir que

$$U_{VI}^{(M=\infty)} \geq U(desviación)_{VI}^{(M=\infty)}$$

$$(V^{max}-V_{min})/6-[(V^{max}-V_{min})+3V_{min}]/3(\delta-1) \geq [3(K-V_{min})-(V^{max}-V_{min})]/[3(\delta-1)]+5(V^{max}-V_{min})/12$$

Simplificando llegaríamos a

$$-K/(\delta-1) - (V^{max}-V_{min})/4 \geq 0$$

Y despejando el coeficiente de descuento obtendríamos,

(7.27.) $$\delta \geq [(V^{max}-V_{min}) - 4K]/ (V^{max}-V_{min})$$

Por tanto, llegamos al resultado siguiente:

Siempre que se cumpla la condición (7.27.)*, la estrategia del vendedor expresada en* (7.20.)*, la estrategia de los compradores* (7.21.) *junto con sus conjeturas recogidas en* (7.22.) *constituyen un EBN en el juego repetido infinitmente.*

La condición (7.27.) es la misma que obtuvimos en el apartado 6.3.3.- y juega un papel esencial para poder construir este EBN, donde el tipo de vendedor V_I cumple siempre (al menos en la senda de equilibrio). Por un lado, se observa que siempre que K>0 esta tasa es menor que uno (como, por otra parte, era de esperar). También podemos observar que, según va disminuyendo K, δ va a estar más próxima a 1. Así, si K tiende cero, δ va a tender a uno (es decir, si $K \to 0 \Rightarrow \delta \to 1$). En este capítulo estamos suponiendo que los costes de incumplir del tipo de vendedor V_I son positivos pero están próximos a cero ($K \to 0$). Esto implica que la condición (7.27.) es difícil de cumplir ya que, las tasas de descuento que podrían sostener este equilibrio tendrían que encontrar muy próximas a uno.

Adicionalmente, podríamos repetir los comentarios realizados en el apartado 6.3.3.- adaptándolos a este caso. Así, en un contexto en el que los compradores tengan incertidumbre sobre los tipos del vendedor, será más probable encontrarnos a un vendedor tipo V_I "cumpliendo" si el vendedor valora los ingresos netos de las ventas futuras casi tanto como los de la venta presente. Esto es más fácil que ocurra si el período de tiempo entre una venta y la siguiente es reducido. Es decir, este resultado apoyaría la idea, de que un vendedor tipo V_I podría aumentar su utilidad, si cuando va a ejecutar un número "elevado" e indefinido de ventas realiza un proceso "acelerado" en el que transcurra poco tiempo entre la ejecución de las diferentes ventas. Esta manera de actuar, en este contexto, le permitiría ganar "credibilidad" en relación con la alternativa de realizar un proceso pausado en el que las ventas estén muy alejadas en el tiempo. Ya comentamos en el apartado 6.3.3.- que este resultado también es más probable que ocurra en escenarios con tipos de interés muy bajos.

Por otra parte, también se puede observar (que a diferencia de lo que ocurría cuando el juego con información incompleta incluía sólo una venta) cuando el vendedor realiza infinitas ventas, la utilidad esperada por los dos tipos de compradores es la misma (siempre que se cumpla (7.27.))

7.5.- CONSIDERACIONES SOBRE UN EQUILIBRIO DE AGRUPACIÓN CUANDO EL NÚMERO DE VENTAS ES FINITO

Con el supuesto de que las ventas eran infinitas se producía una simplificación importante ya que (siempre que la historia del juego no incluyera ningún incumplimiento) todos los juegos de continuación que comenzaban al principio de cada venta eran iguales. Esto era debido a que el supuesto de infinitas ventas provocaba que siempre estuviéramos a la misma distancia del final del juego. Esto último ya no va a ocurrir cuando el número de ventas es finito y conocido por todos los jugadores. Por tanto, en este caso, se complica la tarea de comprobar si una determinada combinación de estrategias constituyen un equilibrio.

En este apartado realizaremos algunas consideraciones sobre un posible equilibrio en el que el tipo de vendedor V_I optara por "cumplir" en las máximas ventas posibles. Cuando el número de ventas es conocido, ninguna estrategia de este tipo de vendedor podría incluir la acción de "cumplir" en la última venta (ya que en ese momento han perdido relevancia las consideraciones de futuro y. por ello, el vendedor utilizará la acción que maximice sus ganancias en el corto plazo). Por tanto, cualquier estrategia tendría que incluir el incumplimiento del tipo V_I en la última venta. En el modelo del apartado 6.2.- (en el que era conocido el tipo del vendedor) esto suponía que en la venta $M{-}1$ también incumpliría, lo que a su vez implicaba el incumplimiento en la venta $M{-}2$, y, así, hasta primera venta. Sin embargo, en el modelo de este capítulo, como el tipo del vendedor no es conocido por los compradores, este razonamiento no tiene necesariamente que reproducirse si se ha llegado a la penúltima venta sin que en las anteriores se haya revelado el tipo de vendedor (es decir, si no ha habido ningún incumplimiento).

Vamos a considerar una estrategia para el vendedor que adopte la siguiente forma:

(7.28.) ***Estrategia del vendedor***:

Tipo V_C: $\forall m$, a_m^v="*Cumplir* $\forall b_1$"

$$\textbf{Tipo } V_I: \begin{cases} \text{si } m=1,\ a_m^v = \text{"}\textit{Cumplir } \forall b_1\text{"} \\ \text{si } 1<m<M, \begin{cases} a_m^v = \text{"}\textit{Cumplir } \forall b_1\text{" si } \forall j<m,\ a_j^v = \text{"}\textit{Cumplir}\text{"} \\ a_m^v = \text{"}\textit{Incumplir } \forall b_1\text{" si para } j<m\ \exists \text{ un } a_j^v = \text{"}\textit{Incumplir}\text{"} \end{cases} \\ \text{si } m=M,\ a_m^v = \text{"}\textit{Incumplir } \forall b_1\text{"} \end{cases}$$

Es decir, la única diferencia que se introduce en relación con la estrategia contenida en (7.20.) es lo que se refiere a la acción del vendedor V_I en la última venta ($m=M$). En la línea de lo comentado anteriormente en esta última venta, con independencia de la historia del juego, el tipo V_I siempre incumplirá. También podríamos plantear que el primer incumplimiento sucediera antes de la última venta (lo que con frecuencia se analiza en modelos de reputación). Sin embargo, en nuestro modelo (y permitiendo sólo estrategias puras) la situación que tendríamos que analizar en el caso de que el incumplimiento ocurriera antes sería similar a la planteada en la estrategia (7.20.). Esto ocurre debido a que en las ventas siguientes al incumplimiento nos encontraríamos en la misma situación tanto en la estrategia a analizar como en el resultado que obtendríamos si analizamos una desviación a esa estrategia. Consiguientemente no influiría en la comparación para comprobar si al vendedor V_I le conviene desviarse.

Por su parte, los compradores, como siempre hemos supuesto maximizarán su utilidad esperada teniendo en cuenta sólo consideraciones de corto plazo por lo que utilizarán su función de puja calculada en (7.8.) y que reproducimos a continuación.

$$(7.29.) \qquad b_i = B^{\mu}(v_i, \mu) = [V_{min}(\mu+1)+v_i] / (\mu+2)$$

Esta función incluye las conjeturas, μ, de los compradores sobre la probabilidad de incumplimiento del vendedor. Finalmente, tendríamos que adaptar el sistema de conjeturas de los compradores a la estrategia del vendedor contenida en (7.28.).

(7.30.) ***Conjeturas de los compradores:***

- m=1: $\mu_1=\mu_1(Incumplir|h_0)=0$

- 1<m<M: $\begin{cases} \mu_m=\mu_m(Incumplir|h_{m-1})=0, \text{ si } \forall j<m,\ a_j^v=\text{"}cumplir\text{"} \\ \mu_m=\mu_m(Incumplir|h_{m-1})=1, \text{ si } \exists \text{ algún } a_j^v=\text{"}incumplir\text{"},\ j<m \end{cases}$

- $m=M$ $\begin{cases} \mu_M=\mu_M(Incumplir|h_{M-1})=\varphi, \text{ si } \forall j<M,\ a_j^v=\text{"}cumplir\text{"} \\ \mu_M=\mu_M(Incumplir|h_{M-1})=1, \text{ si } \exists \text{ algún } a_j^v=\text{"}incumplir\text{"},\ j<M \end{cases}$

De nuevo la diferencia con el sistema de conjeturas contenido en (7.22.) radica en la última venta. Dadas las estrategias de los compradores, si en la historia del juego no se incluye ningún incumplimiento, los compradores no habrán podido extraer ninguna información relevante que afecte a sus conjeturas sobre el tipo del vendedor. Por otra parte, de acuerdo a la estrategia (7.28.), el tipo V_C cumpliría en la última venta mientras que el tipo V_I incumpliría. De esta manera, la conjetura sobre la probabilidad de incumplir tendría que coincidir con la conjetura sobre los tipos del vendedor. Ya se ha argumentado que si la historia no ofrece información relevante la mejor conjetura sobre los tipos del vendedor es la distribución de probabilidad "ex ante". Por tanto, en (7.30.) se incluye que en este caso $\mu_M(Incumplir|h_{M-1})=\varphi$. Por su parte, cuando se llega a esa última venta con una historia que incluya al menos un incumplimiento, entonces se ha revelado el tipo de vendedor V_I, y lógicamente la conjetura sobre el incumplimiento sería igual a uno.

Si las estrategias y las conjeturas formaran un equilibrio, el resultado sería que en todas las ventas, con la excepción de la última, el vendedor cumpliría y los compradores se comportan como si fuera a cumplir (μ_m=0). En la última venta el vendedor V_C cumpliría y el V_I incumpliría mientras que los compradores presentan sus pujas con la conjetura $\mu_M=\varphi$. Es decir, en la senda de equilibrio los compradores nunca consiguen saber el tipo al que pertenece el vendedor (lo que sólo se revelerá al finalizar la última venta). Por tanto, el tipo V_I conseguiría ocultar su tipo durante todo el juego y lograría que los compradores nunca utilizaran la conjetura, μ =1 (que es con la que presentarían unas pujas más reducidas).

Vamos a analizar si esta combinación de estrategias y el sistema de conjeturas cumplen con los requisitos necesarios para formar un equilibrio. Al igual que ocurría en el apartado anterior, el sistema de conjeturas lo hemos construido precisamente teniendo en cuenta las estrategias de los jugadores y la Regla de Bayes; la estrategia de los compradores sería óptima dadas sus conjeturas; del mismo modo que lo sería la estrategia del vendedor tipo V_C. Por tanto, nos quedaría por analizar la estrategia del vendedor tipo V_I.

Del mismo modo que hicimos en el apartado anterior, primero vamos a calcular, en la primera venta, la utilidad esperada del vendedor tipo V_I con la estrategia (7.28.), en el juego repetido M veces ($U_{VI}^{(M)}$).

$$U_{VI}^{(M)} = b_1+\delta \sum_{m=2}^{M-1} \delta^{m-2} \ E[B^{\mu}(v_1,\mu=0)]+\delta^{M-1} P_p^{I}(E[B^{\mu}(v_1,\mu=\varphi)])$$

Esta ecuación es igual a (7.23.) con dos diferencias. La primera se refiere al límite superior del sumatorio que, en lugar de infinito, pasa a ser $M–1$ (la penúltima venta). La otra diferencia consiste a la inclusión del último sumando, que se refiere al resultado esperado de la última venta. Así, en esta venta el resultado se obtendría de aplicar la fórmula de fijación del precio en caso de incumplir a la esperanza de la puja ganadora (actualizando debidamente el resultado). Para el calculo de esta puja se tiene en cuenta que, como ya hemos comentado, la conjetura de los compradores es $\mu=\varphi$. Operando de manera similar que en el apartado anterior obtenemos,

$$U_{VI}^{(M)} = b_1+\delta \sum_{m=2}^{M-1} \delta^{m-2} \ B^{\mu}(\mathrm{E}[v_1|N=2],\mu=0)+\delta^{M-1} P_p^{I}(B^{\mu}(\mathrm{E}[v_1|N=2],\mu=\varphi))$$

$$U_{VI}^{(M)} = b_1+\delta \sum_{m=2}^{M-1} \delta^{m-2} \ (V^{max}+2V_{min})/3+\delta^{M-1} [V^{max}-V_{min} - (K- V_{min})(\varphi+2)]/(\varphi+2)$$

$$U_{VI}^{(M)} = b_1+(V^{max}+2V_{min})(\delta^{M}-\delta^{2})/3\delta(\delta-1)+\delta^{M-1} [V^{max}-V_{min} - (K- V_{min})(\varphi+2)]/(\varphi+2)$$

Para analizar el caso más favorable al incumplimiento sustituimos b_1 por el valor máximo que puede alcanzar en equilibrio (que era $B^{\mu}(V^{max},\mu=0)$).

$$U_{VI}^{(M)} = B^{\mu}(V^{max},\mu=0)+(V^{max}+2V_{min})(\delta^M-\delta^2)/3\delta(\delta-1)+\delta^{M-1}[V^{max}-V_{min}-(K-V_{min})(\varphi+2)]/(\varphi+2)$$

(7.31.) $$U_{VI}^{(M)} = [(V^{max}-V_{min}+2V_{min})/2]+(V^{max}+2V_{min})(\delta^M-\delta^2)/3\delta(\delta-1)+ +\delta^{M-1}[V^{max}-V_{min}-(K-V_{min})(\varphi+2)]/(\varphi+2)$$

A continuación calculamos la utilidad esperada por el tipo V_I cuando se desvía en la primera venta.

$$U(desviación)_{VI}^{(M)} = (P_p^I(b_1) - K) + \delta \sum_{m=2}^{M} \delta^{m-2}\ E[P_p^I(B^{\mu}(v_1,\mu=1) - K]$$

La única diferencia con la ecuación (7.25.) radica en el límite superior del sumatorio en el que se sustituye ∞ por M. Operando de similar manera que en el apartado anterior.

$$U(desviación)_{VI}^{(M)} = (P_p^I(b_1) - K) + \delta \sum_{m=2}^{M} [\delta^{m-2}\ P_p^I(B^{\mu}(\mathrm{E}[v_1|N=2],\mu=1) - K]$$

$$U(desviación)_{VI}^{(M)} = [(3b_1 - V_{min})/2- K]+ \delta \sum_{m=2}^{M} \delta^{m-2}\ (V^{max}-3K+2V_{min})/3$$

$$U(desviación)_{VI}^{(M)} = [(3b_1 - V_{min})/2- K]+ [V^{max} -3K+2V_{min})](\delta^M-\delta)/3(\delta-1)$$

De nuevo sustituimos b_1 por el máximo valor que tendría si el ganador de la primera venta tuviera la valoración máxima.

$$U(desviación)_{VI}^{(M)} = [(3\ B^{\mu}(V^{max},\mu=0)-V_{min})/2-K]+[V^{max} -3K+2V_{min})](\delta^M-\delta)/3(\delta-1)$$

(7.32.) $U(desviación)_{VI}^{(M)} = (3V^{max}+V_{min}-4K)/4+[V^{max}-3K+2V_{min})](\delta^M-\delta)/3(\delta-1)$

La condición para que al vendedor tipo V_I no le interesara desviarse, la podemos expresar como,

$$U_{VI}^{(M)} \geq U(desviación)_{VI}^{(M)}$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas en (7.31.) y (7.32.), obtendríamos,

$$[(V^{max}-V_{min}+2V_{min})/2]+(V^{max}+2V_{min})(\delta^M-\delta^2)/3\delta(\delta-1)+$$
$$+\delta^{M-1}[V^{max}-V_{min}-(K-V_{min})(\varphi+2)]/(\varphi+2) \geq$$
$$(3V^{max}+V_{min}-4K)/4+[V^{max}-3K+2V_{min})](\delta^M-\delta)/3(\delta-1)$$

Para simplificar esta desigualdad hemos utilizado el programa para PC, DERIVE versión 5.0, que ha obteniendo el resultado:

(7.33.) $K \geq [(V^{max}-V_{min})(\delta-1)(4\delta^M(\varphi-1)+3\delta(\varphi+2))]/[12(\varphi+2)(\delta^M-\delta)]$

Por tanto, si se cumple (7.33.), al vendedor tipo V_I no le interesaría desviarse, en la primera venta, de la estrategia descrita en (7.28.). Esta condición es suficiente para que la combinación de estrategias comentadas junto con sus conjeturas constituyan un Equilibrio de Nash y un Equilibrio Bayesiano de Nash. Adicionalmente, como habíamos comentado que no existían verdaderos subjuegos se cumple, de una manera trivial, el requisito para ser un Equilibrio Perfecto en Subjuegos. Sin embargo, aunque necesaria, la condición (7.33.) no es una condición suficiente para que la combinación de estrategias (7.28.) y (7.29) y el sistema de conjeturas (7.30.) forme un EBP. Esto es debido a que, además, tendríamos que comprobar que al vendedor V_I no le compensa desviarse en ninguna de las ocasiones que le toque mover.

En todo caso, podemos extraer algunas reflexiones de la condición (7.33.). Así, el valor menor de K que soportaría este equilibrio sería:

(7.34.) $K_{min} = [(V^{max}-V_{min})\ (\delta-1)(4\delta^{M}(\varphi-1)+3\delta(\varphi+2))]/[12(\varphi+2)(\delta^{M}-\delta)]$

En esta expresión podemos calcular la derivada parciales de K_{min} respecto al número de ventas M utilizando el mencionado programa DERIVE 5.0.

$$\partial K_{min}/\partial M = [(V^{max}-V_{min})\ \delta^{(E+1)}\ (1-\delta)(7\varphi+2)\ \mathrm{LN}(\delta)]\ /\ [12(\varphi+2)(\delta^{E}-\delta)^{2}] < 0$$

El signo de la derivada se observa que es negativo debido a que en el numerador todos los múltiplos son positivos a excepción del $\mathrm{LN}(\delta)$ (que es negativo debido a que δ es menor que uno), mientras que, en el denominador, todos sus múltiplos son positivos incluso el último paréntesis ya que está elevado al cuadrado.

Por tanto, esto significa que según aumenta el número de ventas, menor es el K mínimo que soporta el equilibrio[154] y, por tanto, más fácil es cumplir la condición (7.33.). Conociendo esta relación podemos despejar M en la ecuación (7.34.) para intentar obtener la expresión para el mínimo número de ventas que podrían soportar el equilibrio. El DERIVE da tres soluciones para M, dos de ellas con una parte imaginaria. Seleccionando la única solución real nos quedaría que:

(7.35.) $$\begin{aligned} M_{min} = {} & [\mathrm{LN}(-\delta(V^{max}-V_{min})+(V^{max}-V_{min})-4\ K_{min})]/\mathrm{LN}(\delta)\ - \\ & -\mathrm{LN}(\delta(V^{max}-V_{min})(\varphi-1)+(V^{max}-V_{min})(1-\varphi)-3\ K_{min}(\varphi+2))/\mathrm{LN}(\delta)+ \\ & +\mathrm{LN}(3(\varphi+2)/4)/\ \mathrm{LN}(\delta) + 1 \end{aligned}$$

Esta compleja expresión no nos dice mucho. Podemos calcular el signo de su derivada parcial respecto a δ y obtenemos,

$$\begin{aligned} \partial M_{min}/\partial\delta = {} & -\mathrm{LN}[-\delta\ (V^{max}-V_{min})+\ (V^{max}-V_{min})\ -4\ K_{min}]/\delta\mathrm{LN}(\delta)^{2}\ + \\ & +\ \mathrm{LN}[\delta(V^{max}-V_{min})(\varphi-1)+\ (V^{max}-V_{min})\ (1-\varphi)-3\ K_{min}(\varphi+2)]/\ \delta\mathrm{LN}(\delta)^{2}- \\ & -(V^{max}-V_{min})K_{min}(7\varphi+2)/[(\delta(V^{max}-V_{min})-(V^{max}-V_{min})+4K_{min})(\delta(V^{max}-V_{min})(\varphi-1)+ \\ & +(V^{max}-V_{min})(1-\varphi)-3K_{min}(\varphi+2))\mathrm{LN}(\delta)]-\mathrm{LN}[3(\varphi+2)/4]/\ \delta\mathrm{LN}(\delta)^{2} \end{aligned}$$

---

[154] No un EBP sino los otros conceptos de equilibrio comentados más arriba.

Como estamos suponiendo que los costes de incumplir son positivos pero próximos a cero, podemos calcular el límite cuando K tiende a cero, lo que nos simplifica la expresión.

$$\lim_{k \to 0} (\partial M_{min}/\partial \delta) = \mathrm{LN}(4(1-\varphi)/3(\varphi+2)) \ / \ \delta \mathrm{LN}(\delta)^2 < 0$$

El signo es negativo debido a que el denominador es positivo (ya que el logaritmo está elevado al cuadrado) mientras que el numerador es negativo al ser un logaritmo de una fracción inferior a la unidad. Este signo implica que cuanto mayor sea la tasa de descuento (δ) menor será el número de ventas necesario para sostener el equilibrio. Es decir, cuanto más cercano a uno se encuentre la tasa de descuento, menos exigente será la condición (7.33.), con lo que será más probable el poder encontrarnos equilibrios en el que el vendedor tipo V_I cumpla en la mayoría de las ventas. Este resultado parece coherente con el que deducimos al final del apartado 7.4.-.

En todo caso, para analizar si la combinación de estrategias y conjeturas propuesta constituye un EBP tendríamos que realizar un cálculo similar al anterior para cada ocasión en que le toque jugar al vendedor V_I. El resultado que obtenemos va a ser negativo ya que cuando se encuentra en la penúltima venta la ganancia inmediata que obtiene con desviarse va a ser superior que la pérdida descontada que experimente en la siguiente venta (para niveles de K próximos a cero). Por tanto, como, en al menos una venta, al vendedor le compensa desviarse esto implica que la combinación de estrategias (7.28.) y (7.29.) y las conjeturas (7.30.) no constituyen un EBP (aunque, como hemos comentado, si formarían un Equilibrio de Nash y un EBN si se cumple la condición (7.33)). Ya comentamos que si consideramos una estrategia del vendedor (con la consiguiente adaptación de las conjeturas de los compradores) en la que el incumplimiento se produce antes de la última venta nos encontraríamos en esta misma situación y, por tanto, tampoco constituiría un EBP.

De esta manera, en el modelo con incertidumbre sobre los tipos del vendedor, tampoco conseguimos construir un EBP, al igual que nos ocurría en el capítulo 6. Así, en situaciones en las que es público el número de ventas a realizar, las estrategias, que contengan la acción de "cumplir" por parte del tipo de vendedor V_I, no conseguirían resultar creíbles, a diferencia de lo que ocurría cuando el número de ventas era infinito o indeterminado. Esto podría sugerir que este tipo de vendedores se mostrara reacio a revelar el número de ventas que finalmente ejecutaría.

Por otra parte, tanto en este apartado como en el apartado 6.2.-, hemos considerado sólo estrategias puras por parte del vendedor. Adicionalmente, en el capítulo 6 mostramos que la situación no cambiaría si permitiéramos utilizar estrategias mixtas. No obstante, en el modelo con incertidumbre sobre los tipos del vendedor de este capítulo, potencialmente podría aparecer la posibilidad de construir un EBP en el que el vendedor V_I cumpliera en "muchas" de las ventas, sobre todo si se encuentran alejada del final.

Así, si nos fijamos en el sistema de conjeturas (7.30.) podemos observar algo que nos permitiría evitar el uso de estrategia mixtas por parte de V_I. Con ese sistema de conjeturas no se admiten posibilidades intermedias en las probabilidades de que el vendedor sea del tipo V_I: mientras que no exista incumplimiento serán φ; en cuanto se observe un incumplimiento, pasan a ser igual a uno. Naturalmente, esto se debe a que estas conjeturas tienen que ser consistentes con la estrategia del vendedor y en esta no hemos incluido estrategias mixtas.

Si redefinimos la estrategia del tipo V_I e incluimos una probabilidad positiva pero muy pequeña de que, en cada venta, pueda utilizar la acción de "incumplir", la situación en relación con las conjeturas cambia. En este caso, la aplicación de la Regla de Bayes origina que ante cada venta en la que se haya observado que el vendedor "cumple" aumenten las probabilidades que los compradores adjudicarían a que el comprador fuera del tipo V_C. Esto implica que sus pujas determinadas por $B^{\mu}(.)$ irían siendo superiores (ya que iría diminuyendo μ). De esta manera, potencialmente cabría la posibilidad de soportar un equilibrio de este tipo, ya que al comprador V_I le interesaría "cumplir" con una probabilidad cercana a uno, para que según vaya aumentando la confianza de los compradores vayan aumentando sus pujas en las siguientes ventas. De esta manera, en la primera venta en que incumple (que no tendría que ser la última) las ganancias inmediatas serían superiores. Es decir, en este caso la mayor confianza generada en los compradores por la repetición de muchas ventas "cumpliendo" favorecería, en equilibrio, tanto al tipo V_C como también al V_I.

En todo caso, habría que formalizar este tipo de equilibrio que presenta otro tipo de problemas. Por un lado, parece difícil imaginar al vendedor (sobre todo si es público) decidiendo su actuación mediante un mecanismo aleatorio[155]. Pero otro problema más importante reside en como se lograría dotar de credibilidad a este mecanismo aleatorio. Es decir, para que el esquema anterior funcione, tiene que ser asumido por los compradores con certeza que efectivamente el tipo de vendedor fuera V_I actúa de esta manera.

Esto es complicado ya que (aunque "ex ante" al vendedor le interesaría atenerse al mecanismo aleatorio) si "ex post" el resultado ha sido que tiene que "incumplir" (a pesar de que las probabilidades asignadas a esta opción sean muy pequeñas) puede tener incentivos a ignorar el resultado del mecanismo aleatorio (sobre todo en las primeras ventas). Adicionalmente, los compradores no pueden conocer el resultado determinado por el mecanismo aleatorio ya que, en caso contrario, sus conjeturas no variarían cuando el vendedor cumple. Esto ocurre debido a que si conocen que el mecanismo aleatorio ha indicado en las anteriores ventas que, si el vendedor fuera V_I, tendría que cumplir, entonces estaríamos ante el resultado comentado en este apartado de que las estrategias prescriben para los dos tipos de vendedor la misma estrategia pura. Por tanto, al no poder ser público es todavía más difícil que sea creíble para los compradores.

[155] Lo que si puede ocurrir en otro tipo de actividades, incluso realizadas por el sector público (como, por ejemplo, la selección de los contribuyentes para una inspección fiscal o la selección de empresas para una inspección de trabajo).

PARTE IV:

CONSIDERACIONES FINALES

CAPÍTULO 8.- RESUMEN Y CONCLUSIONES

Es conocido que, especialmente en la década de los noventa, la política de privatizaciones ha alcanzado una gran importancia. El objetivo de esta tesis no es el de analizar sus causas, sus objetivos ni sus efectos. Nos centramos en determinados aspectos de la ejecución de esta política. Empezamos identificando algunas características relativas a la instrumentación de los procesos de privatización, que recogemos como "hechos estilizados":

a) "El mismo vendedor realiza, de una manera sucesiva, varios procesos de venta de empresas". En ocasiones dentro del Estado existen varios Departamentos, Organismos o cabeceras de "holdings", encargados de llevar a la práctica estas políticas. Esto puede ser relevante ya que cada uno de ellos puede generarse su propia "reputación". Sin embargo, consideramos que es un único organismo el que gestiona y ejecuta las privatizaciones. En España se ha pasado por ambas etapas: al principio del actual Programa de Privatizaciones existían tres Agentes Gestores que realizaban privatizaciones (AIE, SEPPa y SEPI), mientras que en la actualidad se encuentran fusionados en uno (SEPI).

b) "Los compradores se suelen presentar a un único proceso de privatización". De nuevo, podemos encontrar ejemplos en los que un comprador se presenta a varias ventas aunque son situaciones relativamente poco frecuentes (en España sólo ha ocurrido en contadas ocasiones[156]). El origen de este comportamiento podría encontrarse en la

[156] Otro tema distinto serían los concursos que se realizan en las operaciones de privatización para seleccionar Asesores y Coordinadores Globales. En estos casos, si es frecuente

elevada heterogeneidad de las empresas en venta, tanto en lo que se refiere a su situación económica-financiera, como al sector al que pertenecen.

c) "Los compradores conocen el comportamiento del vendedor en las anteriores ventas". Este hecho estilizado también merece ser matizado debido a que existen detalles de los procesos de venta que no se hacen públicos. Sin embargo, dadas las exigencias de transparencia que tienen que cumplir los procesos ejecutados por el sector público, las principales características de la operación (como el mecanismo de venta genérico así como las sucesivas fases por la que los candidatos tienen que ir pasando) son públicas. De esta manera, los compradores, aunque sólo se presenten a una venta conocen como se ha comportado el vendedor en el pasado.

La principal aportación de esta tesis consiste en desarrollar, a partir de estos hechos estilizados, un modelo teórico con el que poder analizar el comportamiento de un vendedor sin capacidad de "auto-compromiso" y unos compradores que se enfrentan a la incertidumbre de no conocer cuales serán las reglas finalmente aplicadas. Con este modelo se intentan captar las interacciones entre los jugadores cuando el proceso se repite.

En este capítulo vamos a realizar una breve descripción de la construcción de este modelo así como de los principales resultados que de él se derivan (capítulos 5, 6 y 7). Pero, de una manera previa, realizamos un breve comentario sobre el esquema de la evolución histórica de las subastas, contenido en el capítulo 2, así como un resumen de la revisión de la literatura sobre la Teoría de Subastas (incluida en los capítulos 3 y 4).

En el resumen histórico se ponen ejemplos que van desde las primeras subastas de las que se tienen referencias escritas, celebradas en la antigua Babilonia, hasta el gran auge que han experimentado en años recientes las subastas por Internet. Aunque, no es hasta una época tan reciente como la década de los noventa cuando se puede decir que la Teoría de Subastas empieza a alcanzar su "madurez" (en lo que se refiere a su influencia práctica en el diseño de las subastas), en el recorrido histórico que se realiza se citan diversas prácticas utilizadas que podrían ser racionalizadas a través de esta

---

que un mismo oferente compita en los sucesivos concursos.

literatura teórica. Un ejemplo, sería la imposición de un tiempo límite a la presentación de pujas, en las subastas ascendentes, determinado por la consumición de una vela. Esta práctica se podría considerar que dificulta las actividades colusorias entre los compradores ya que posibilita que algún miembro del cártel obtenga una utilidad esperada positiva si no cumple la disciplina de grupo (haciendo, por tanto, estos acuerdos menos estables).

En los capítulos 3 y 4 se revisa la literatura teórica de subastas. Se empieza por dos corrientes que no constituyen su cuerpo central.

Por un lado, se encuentra el enfoque de pujas competitivas ("competitive bidding") en el que sólo existe un comprador estratégico. Su origen se encuentra en Friedman (1956), donde se presenta un método para determinar las pujas óptimas en una subasta con sobre cerrado al primer precio. Una de las claves del modelo es que para calcular la puja óptima es necesario analizar las pautas de comportamiento que han seguido los competidores en procesos anteriores. Por tanto, se asume que los competidores tienen un comportamiento "dado" contenido en las reglas que, supuestamente, han utilizado en el pasado para presentar sus pujas.

Aunque en desarrollos posteriores esta literatura se va haciendo progresivamente más compleja, presenta la misma característica básica que el trabajo de Friedman: intenta buscar buenas estrategias de puja (teniendo en cuenta el punto de vista de una empresa) mientras que se considera estable el comportamiento de los competidores en lo que se refiere a las reglas para presentar sus pujas.

Por tanto, esta literatura considera que existe un único competidor "estratégico": el que analiza el comportamiento de los demás. De esta manera, no se analiza la cuestión de si el resultado obtenido podría formar parte de algún concepto de equilibrio. Es decir, dada la puja óptima que finalmente obtenemos para la empresa considerada, ¿les interesa a las demás empresas competidoras continuar con el comportamiento que se les ha asignado como dado?. Si la respuesta es negativa y los competidores cambian sus estrategias entonces, casi con seguridad, la puja que habíamos calculado inicialmente para la empresa que estábamos considerando dejaría de ser óptima.

En consecuencia, el párrafo anterior nos plantea el interesante interrogante que surge de esta literatura: si asumimos que una empresa es estratégica y calcula su puja en función de cómo espera que se comporten las demás ¿cuáles son las razones para asumir que las demás empresas no son también estratégicas?. Este es el principal cambio que introduce la Teoría de Juegos.

El otro enfoque no principal sería el que, utilizando la Teoría de Juegos, asume que las valoraciones de los compradores (o las cantidades máximas que están dispuestos a pagar) son de dominio público. Por tanto, en estos modelos, un comprador, cuando calcula su puja óptima no sólo conoce su valoración sino también la de sus competidores. Este supuesto es poco convincente en la mayoría de contextos. Además, sería precisamente el desconocimiento por parte del vendedor de las valoraciones de los compradores lo que, desde un punto de vista teórico, justificaría la realización de una subasta.

Es decir, si las valoraciones de los compradores son de dominio público, el vendedor simplemente podría realizar una oferta a aquel que tuviera una valoración más alta, a un precio ligeramente inferior a su valoración, acompañada por una “amenaza” de no vender la empresa en el caso de que la rechazara (estas ofertas reciben el nombre de “take-it or leave-it”). Si el vendedor tiene capacidad de “autocompromiso” — tal y como supone, en general, la Teoría de Subastas — entonces la amenaza es “creíble” y el vendedor conseguiría extraer, prácticamente, todas las ganancias del intercambio. Por tanto, en este caso, no necesitaría organizar una subasta.

Por tanto, el cuerpo central de la Teoría de Subastas va a utilizar la Teoría de Juegos pero asumiendo que las valoraciones (o la señal sobre el valor, en los modelos con valoraciones comunes) de los compradores son información privada de cada uno de ellos. En este caso, la capacidad del vendedor de extraer el excedente se encuentra más limitada. El contexto más extendido en Teoría de Subastas es el del llamado “modelo de referencia”. En el apartado 3.3.1.-, se describen los principales supuestos del “modelo de referencia” entre los que podemos mencionar: valoraciones privadas e independientes, compradores simétricos y neutralidad al riesgo de todos los jugadores. Estos supuestos serán los que utilicemos al desarrollar nuestro modelo en los capítulos 5, 6 y 7.

Con estos supuestos, en el capítulo 3, se obtienen las pujas de equilibrio en los cuatro tipos de subastas básicas. En la subasta inglesa o ascendente (en la que el precio se va incrementando hasta que queda un único comprador), los compradores permanecerían pujando hasta que el precio superara su valoración. En equilibrio, el ganador sería el que posea una valoración más elevada y pagaría un precio igual a la segunda valoración más alta (que sería justamente el precio en el que se ha retirado su último rival). En la subasta con sobre cerrado al segundo precio (son aquellas en las que los compradores presentan sus pujas sin conocer las de los demás y obtiene el bien el que presenta la más elevada aunque paga el precio incluido en la segunda más alta), debido a que la cantidad que finalmente paga el ganador no depende de su puja, la estrategia de presentar una puja igual a su valoración es una estrategia dominante. En equilibrio el ganador es el que tiene la valoración más alta y el precio es igual al incluido en la segunda puja (que a su vez igualaría a la segunda valoración más alta). Por tanto, el resultado con estos dos tipos de subastas es el mismo tanto “ex ante” como “ex post”. Si nos fijamos en el precio esperado por el vendedor, antes del comienzo de las subastas, observamos que sería igual a la esperanza de la segunda valoración más alta.

Por su parte, tanto la subasta con sobre cerrado al primer precio (esta subasta es igual que la subasta al segundo precio pero el ganador paga el precio incluido en su propia puja) como en la subasta holandesa (aquella subasta en que el precio se va disminuyendo hasta que alguien lo acepta) presentan las misma características estratégicas para los compradores: cuando deciden la puja que presentan (en la subasta al primer precio) o el precio al que aceptan el bien (en la subasta holandesa) tienen que adoptar su decisión con la misma información y sin conocer el comportamiento de sus competidores. Por tanto, podemos analizar solo las subasta al primer precio. En este caso, la tarea de encontrar una combinación de estrategias de equilibrio es más laboriosa. El problema reside en el dilema que se les presenta a los compradores: pujas mayores provocan mayores probabilidades de ganar pero al mismo tiempo reducen el excedente en caso de ganar.

Para encontrar la combinación de funciones de puja de equilibrio (ver apartado 3.3.2.-d)) habría que maximizar la utilidad esperada del comprador i, asumir simetría entre los compradores e imponer el requisito de Nash. De esta manera, se obtiene una ecuación diferencial de primer orden que al resolverla e introducir la condición inicial obtenemos la siguiente función de puja (en la que v_i es la valoración del comprador i, $F(.)$ es la distribución de las valoraciones y N es el número de competidores).

$$b_i = B(v_i) = v_i - \frac{\int_{Vmin}^{v_i} [F(v_i)]^{N-1} dv_i}{F(v_i)^{N-1}}$$

Se puede observar que esta función es creciente en el número de compradores y, que tiende a la valoración de cada comprador cuando los competidores tienden a infinito. En todo caso la puja es inferior a la valoración (en una cantidad que viene medida por el cociente contenido a la derecha del signo menos) por lo que la estrategia de "revelar la verdad", a diferencia de lo que ocurría en las subastas al segundo precio, no forma parte de un equilibrio.

En nuestro modelo, planteamos una subasta al primer precio y, por tanto, utilizaremos esta función aunque con dos supuestos simplificadores: asumiremos distribuciones uniformes para las valoraciones y supondremos que $N=2$. De esta manera, la función de puja anterior se simplifica a la siguiente expresión:

(8.1.) $b_i = B^C(v_i) = (v_i+V_{min})/2$

Por otra parte, se puede mostrar que la función de puja de equilibrio en la subasta al primer precio, coincide con la esperanza de la segunda valoración más alta condicionada a que la valoración del comprador i sea la más elevada. Es decir, es como si los compradores cuando van a presentar sus pujas asumieran que su valoración es la más alta y entonces presentaran una puja igual a la esperanza de la siguiente valoración más alta, condicionada a ese supuesto. El interés de este resultado radica en que esto implica que "ex ante" los ingresos esperados para el vendedor serían iguales que los de la subasta ascendente y al segundo precio (aunque en este caso no coincidirían "ex post"). Por tanto, los cuatro tipos de subastas contemplados generan los mismos ingresos esperados para el vendedor.

Este resultado se generaliza con el Teorema del Ingreso Equivalente, que establece que, si se cumplen los supuestos del modelo de referencia, los ingresos esperados por el vendedor son iguales en cualquier mecanismo de venta que cumpla con los siguientes dos propiedades: (1) que el objeto siempre se asigne al pujador con una valoración más alta, y (2) que todo comprador cuya valoración se situara en el nivel más bajo posible tendrá una utilidad esperada igual a cero.

Otra característica importante del modelo de referencia es que los cuatro tipos simples de subastas, siempre que se complementen con una “adecuada” política de precios mínimos, cumplen con los requisitos para constituir una subasta óptima desde el punto de vista del vendedor.

De lo anterior se deduce que el vendedor es indiferente entre cualquier mecanismo de venta que cumpla con las condiciones mencionadas. Sin embargo, si se modifican los supuestos del modelo de referencia la situación cambia ya que el comportamiento de los diferentes tipos de subastas va a ser sensible al contexto. Así, en general, el Teorema del Ingreso Equivalente no se sostiene y las características de la subasta óptima (desde el punto de vista del vendedor) van a ser más complejas que las que se deducen de cualquiera de los cuatro tipos de subastas comentadas. Una gran parte de la literatura de subastas se ha ido desarrollando a partir de la relajación o sustitución de alguno de los supuestos del modelo de referencia. En el capítulo 4 se revisan estas líneas de desarrollo alguna de las cuales se resume a continuación.

La relajación del supuesto de valoraciones privadas e independientes origina una importante rama de la Teoría de Subastas. El caso extremo de este supuesto sería el de valoraciones comunes. El trabajo de Milgrom y Weber (1982a) desarrolla un modelo más general ya que contiene tanto elementos de valoración común como de valoración privada, e incluye los casos extremos como casos particulares. Las valoraciones van a dejar de ser independientes para encontrarse correlacionadas. En estos casos aparece el fenómeno de la “maldición del ganador” que, en equilibrio, provoca que los pujadores tengan un comportamiento más conservador. En este contexto las subastas ascendentes van a tener ventajas sobre las otras tres. Esto se debe a que en esta subasta, durante el proceso de presentación de ofertas, se va proporcionando una información “extra” a los candidatos en relación con la información que poseen al comienzo de la subasta. Esta información adicional se deriva del nivel de precios en el que se van retirando sus competidores y, en media, supone que los candidatos revisen sus estimaciones de valor al alza debido a que se suaviza el efecto de la "maldición del ganador". Este efecto no se produce cuando las valoraciones eran independientes. Milgrom y Weber también obtienen el resultado de que si las valoraciones se encuentran afiliadas (una forma de correlación) el vendedor conseguiría incrementar los ingresos esperados si pone en práctica una política de revelar toda la información que disponga sobre el objeto en venta

Otro cambio de supuesto del modelo de referencia que ha originado importantes desarrollos es el de considerar compradores adversos al riesgo. En este caso, es la subasta al primer precio (junto con la subasta holandesa) la que presenta ventajas respecto a las demás. Así, la aversión al riesgo no afecta a las estrategias de pujas ni en las subastas ascendentes ni en las subastas al segundo precio. Sin embargo, va a provocar que los compradores presenten pujas más agresivas en las subastas al primer precio. Para entender la intuición de este resultado hay que recordar que, en caso de perder, la utilidad de los compradores es cero, mientras que esta es positiva en caso de obtener la empresa. Así, los compradores adversos al riesgo, ante el dilema que les presentaban las subastas al primer precio, van a ponderar más (con relación al caso en que son neutrales al riesgo) las probabilidades de ganar que el excedente que obtienen en caso de ganar. Es decir, en equilibrio, valorarán relativamente menos el obtener una ganancia mayor, en detrimento de tener más probabilidades de ganar. Con este comportamiento estarían intentando "alejarse" del riesgo de resultar perdedores. Por tanto, con aversión al riesgo de los compradores, los ingresos esperados de la subasta al primer precio (así como los de la subasta holandesa) superan a los que se obtienen con las subastas ascendentes y con las subastas al segundo precio. En cualquier caso, ni siquiera la subasta al primer precio cumpliría con los requisitos para ser una subasta óptima ya que para ello debería adoptar una compleja estructura que incluye pagos y transferencia entre todos los pujadores. Así, el vendedor (que es neutral al riesgo) tendría que cubrir parcialmente el riesgo de los compradores con valoraciones altas que no resulten ganadores y penalizar a aquellos con valoraciones bajas.

La relajación del supuesto de simetría ha originado el desarrollo de una extensa literatura muy activa en la actualidad. Así, cuando se permite que existan asimetrías entre los compradores se abren múltiples posibilidades con una gran diversidad de modelos. Podemos mencionar que la existencia de asimetrías hace mucho menos atractiva la participación en las subastas para los competidores "débiles", y esto es especialmente significativo en las subastas ascendentes. En el resto de las subastas mencionadas también se produce este efecto aunque con una intensidad algo menor. Cuando la asimetría de los compradores se combina con la “maldición del ganador” el efecto desincentivador de la concurrencia puede ser mucho más acusado. Como consecuencia de la menor concurrencia, los ingresos esperados para el vendedor disminuyen de manera importante, mientras que los compradores “fuertes” ven incrementada su utilidad por dos vías: por un lado, sus probabilidades de ganar la subasta son superiores y, por otro, se incrementa su excedente en caso de ganar.

Debido a estas ventajas e inconvenientes que ofrecen los diferentes tipos de subastas se ha propuesto, Klemperer (1998), un sistema de venta con dos fases. Una primera con forma de subasta ascendente hasta que quedarán dos candidato. Y una segunda fase, en la que se celebra una subasta al primer precio, únicamente, entre los finalistas en la que no pueden presentar pujas inferiores con las que se finalizó la primera fase. Con este sistema se intentaría combinar las ventajas de las subastas ascendentes con los de la subasta al primer precio.

El modelo de referencia también asume que no existen comportamientos cooperativos entre los compradores. Si relajamos este supuesto, se plantea la posibilidad de que se formen cárteles entre los compradores con el fin de no competir entre ellos. La literatura de subastas también estudia en que situaciones es más probable que se produzcan este tipo de comportamientos y las posibles medidas a adoptar para dificultarlas. Por ejemplo, se destaca que para que los carteles sean estables, necesitan conocer con rapidez y con exactitud cuando alguno de los miembros ha incumplido la disciplina del grupo. Por ello, las subastas ascendentes, en las que se va conociendo quien va presentando las pujas así como su cuantía, proporcionan un marco de actuación favorable, desde este punto de vista, para comportamientos cooperativos. Del mismo modo, si en las subastas al primer precio se oculta la cuantía de las pujas presentadas (incluida la del ganador) se podría dificultar este tipo de comportamientos (no obstante esta manera entraría en conflicto con el principio de transparencia). En todo caso, este es un tema muy amplio del que en el capítulo 4 se realizan comentarios adicionales.

En este capítulo 4 también se analizan otros aspectos que interrelacionan la Teoría de Subastas y las privatizaciones, que resumimos a continuación.

En la venta de empresas aparecen una serie de prácticas que parecen no ser consistentes con algunos resultados de la Teoría de Subastas. Entre estas podríamos citar, que los vendedores suelen restringir el número de compradores así como la información que suministran a lo largo del proceso. Adicionalmente, a menudo se observa, como algún comprador puede realizar una oferta de negociación en exclusiva con el vendedor y este, en ocasiones, la acepta. En el modelo de Hansen (2001) la explicación última de estos hechos podría tener su origen en que, en la venta de empresas (a diferencia de lo que sucede con otros objetos en venta), surgen lo que él llama "costes de información competitiva". Estos costes se derivan de la existencia de una relación negativa entre la cantidad de información que se hace pública y el número de participantes a los que se entrega, y el valor de la empresa para cualquiera de los compradores. Es decir, cuanto más candidatos tengan acceso a la información sensible menor será el valor de la empresa para cualquiera de ellos. De esta manera, en el proceso de venta de empresas se intentaría encontrar el equilibrio entre los beneficios derivados de la participación de un mayor número de competidores y los costes de revelar determinados aspectos de la información a un número mayor de candidatos. En esta línea Hansen intenta explicar la aparición de la fase de ofertas no vinculantes (que es muy frecuente en los procesos de venta de empresas) como un intento del vendedor de discriminar entre vendedores con bajas y altas valoraciones, para poder hacer un descarte racional de candidatos que verdaderamente contribuya a elevar el precio de venta.

Por otra parte, en la venta de empresas públicas el vendedor puede estar interesado en otros aspectos adicionales al del precio. En este caso nos encontraríamos ante las llamadas subastas multidimensionales o concursos, que presentan la complejidad de que los compradores puedan tener diferentes "tasas de transformación" entre precio y plan industrial, con lo que la regla de ponderación reviste gran importancia. En caso de subastas bidimensionales con valoraciones independientes Che (1993) obtiene el resultado de que la regla o la función de puntuación que se deriva del mecanismo óptimo de venta (desde el punto de vista del que organiza la subasta) sistemáticamente tendría que discriminar en contra de la calidad. Es decir, el criterio "calidad" tendría que tener una ponderación menor que la que posee en la función de utilidad del organizador de la subasta. El origen de este resultado reside en las asimetrías de información entre el vendedor y los participantes. Una vez calculada la regla de puntuación óptima establece que tanto la subasta a la “primera puntuación” como la subasta a la “segunda puntuación” (el equivalente a la subasta al primer y al segundo precio respectivamente en el caso de subastas bidimensionales) podrían originar un mecanismo de asignación óptimo siempre que se implementa dicha regla de puntuación.

Branco (1997) también analiza las subastas bidimensionales pero asumiendo valoraciones correlacionadas. Con este cambio de supuesto obtiene que, para implementar el mecanismo de adjudicación óptimo, sería necesario utilizar una subasta con dos etapas: en la primera se selecciona el adjudicatario así como el precio que tiene que pagar; y en la segunda se negocia con el ganador para ajustar el “plan industrial”. La intuición del resultado radica en que en el modelo de costes independientes la calidad óptima para el que organiza la subasta dependía de la estructura de costes de la empresa ganadora. Sin embargo, en este modelo de costes correlacionados, ese nivel óptimo de calidad, no va a depender de la estructura de costes de una única empresa sino de la estructura de costes del conjunto de las empresas que presentan ofertas. De esta manera, para determinar cual es ese nivel óptimo se tendrá que esperar a que estén presentadas y se hayan analizado todas las ofertas.

La revisión de la literatura se finaliza con el análisis de las subastas secuenciales. En este campo la literatura se ha centrado, principalmente, en modelos en los que los compradores se presentan a las sucesivas subastas con la certeza de que las normas establecidas se van aplicar. Estos modelos son de especial interés ya que se analizan las posibilidades que se presentan a los compradores para influir, con sus actuaciones presentes, en el comportamiento futuro de sus competidores. Los modelos son muy diversos pero es interesante la diferencia que se plantea en modelos con valoraciones privadas independientes y con valoraciones correlacionadas.

Un ejemplo con valoraciones privadas es el de Ortega-Reichert (1968), en el que los compradores puede encontrar atractivo presentar pujas reducidas en la primera venta para inducir a su competidor a que utilice una estrategia conservadora en la siguiente venta. Es decir, el crearse una “reputación” de pujador débil le podría reportar beneficios en el futuro si con ello consigue que sus competidores presenten pujas reducidas.

Por el contrario, cuando asumimos valoraciones comunes, la aparición de la maldición del ganador, provoca que los compradores tengan el interés contrario. Así, por ejemplo, en el modelo de Bikhchandani (1988) el comprador con el "tipo" débil tendría incentivos a simular el comportamiento del vendedor con tipo fuerte. Con este comportamiento, conseguiría intensificar el efecto de la maldición del ganador entre sus competidores "débiles", provocando que presenten pujas más reducidas. De esta manera, con valoraciones comunes, pueden existir incentivos para crearse una reputación de pujador agresivo.

En estos últimos modelos hemos observado que la reputación relevante es la de los compradores. La aportación de esta tesis reside en el desarrollo de un modelo, en el que a diferencia de los comentados anteriormente, es la reputación del vendedor y no la de los compradores la que "importa". Por tanto, en esta tesis se construye un modelo que cambia el énfasis, pasando del análisis de la "reputación" de los compradores al análisis de la "reputación" del vendedor.

A continuación resumimos los pasos que hemos dado en la construcción del modelo así como los principales resultados que de él se derivan.

En el capítulo 5 se define el modelo cuando el vendedor realiza una venta. Utilizamos un modelo de subasta al primer precio en el que los compradores presentan de forma simultanea sus pujas. Para modelizar la carencia, por parte del vendedor, de capacidad de auto-comprometerse por adelantado le otorgamos dos movimientos. El primero, en él que elige las normas de la subasta, lo realiza al comienzo del juego (es decir, con anterioridad a que los compradores presenten sus pujas). A continuación mueven los compradores y, finalmente, el vendedor tiene un turno adicional. En este segundo movimiento tiene que decidir si se adapta a las reglas por él aprobadas ("Cumple") o si opta por iniciar una renegociación del precio con el ganador ("Incumple").

El objetivo de plantear así el modelo sería intentar captar aquellas situaciones en las que los compradores tienen incertidumbres sobre cuales serían las reglas finalmente aplicadas. Es decir, el esquema anterior también podría incluir aquellas situaciones en la que el comprador no aprueba ninguna norma (o la aprueba pero no la hace pública) y los compradores presentan sus pujas sin certeza sobre las normas que finalmente aplicará.

El vendedor adoptá esta decisión con posterioridad a la presentación de las pujas. En esta situación no cabría hablar de incumplimiento pero, en todo caso, los compradores no tendrían la certeza de cuales serán las reglas de la subasta.

El siguiente paso para especificar el modelo sería formalizar el escenario en que nos encontraríamos cuando nuestro vendedor opta por “incumplir” (en el caso de que “cumpla” se aplicarían las normas de la subasta al primer precio). Para obtener la función que definiría el precio esperado en caso de “incumplir” seguimos dos pasos:

En primer lugar, calcularemos el intervalo factible en el que asumiremos que se podría situar el precio después de la negociación. El límite inferior de este intervalo sería el precio que se deduciría de aplicar las normas de la subasta a las pujas presentadas. Este supuesto lo podríamos soportar en el hecho de que el vendedor no aceptaría un resultado inferior al que ya tendría asegurado simplemente con aceptar la oferta vinculante del ganador. El límite superior sería la valoración del ganador que se podría deducir, en equilibrio, de su puja[157]. La justificación de este supuesto se basa en que, dada la información de que dispone, esta sería la mejor estimación que el vendedor podría realizar de la cantidad máxima que el ganador esta dispuesto a pagar. Al mismo tiempo, los compradores conocen la información de la que dispone el vendedor y pueden anticipar que el vendedor realizará el razonamiento anterior.

En segundo lugar necesitamos precisar en que punto del intervalo factible se esperaría que se situase el precio. Una alternativa sería incluir un modelo de negociación en este momento. Sin embargo, dado que el objetivo de esta tesis no es analizar los modelo de negociación, realizamos un supuesto que nos simplifica la tarea: asumiremos que el precio esperado (tanto por el vendedor como por los compradores) se sitúa en la mitad de dicho intervalo. Como justificación de este supuesto podemos esgrimir que, ante la falta de información, todos los resultados dentro de dicho intervalo serían igualmente probables. De esta manera, el resultado esperado será la media o la esperanza matemática de una distribución uniforme que, como se sabe, coincide con el punto medio. Otra posible línea argumental podría ser la de asumir que el punto medio del intervalo

[157] Para ello es necesario que la función de puja posea una función inversa. Esto quedaría asegurado si se cumplen los supuestos del modelo de referencia y las valoraciones se derivan de una distribución continua. En este caso, las funciones de puja serían estrictamente crecientes.

factible es un buen candidato para constituir un "punto focal", en el sentido de Schelling (1960), que permite la convergencia de expectativas de los participantes de la negociación.

De estos dos pasos obtenemos que en caso de "incumplir" el vendedor obtiene un mayor precio que si opta por aplicar las normas de la subasta. Por otra parte, supondremos que, cuando el vendedor incumple, también incurre en unos costes, K . Estos pueden tener un origen muy diferente (tal y como se recoge en el apartado 5.1.-) y juegan un papel crucial en nuestro modelo ya que van a definir el "tipo" de vendedor. De esta manera, el vendedor, para adoptar su decisión, tendrá que tener en cuenta los ingresos netos de sus dos opciones. Teniendo esto en cuenta, y aplicando los dos pasos anteriores, en el apartado 5.3.1.- (y también en el Apéndice 5.1) se calcula cual sería la función de fijación de precios que se derivaría de los supuestos anteriores, que reproducimos, a continuación,

$$P_p(b_1, b_2)= \begin{cases} P_p^c(b_1, b_2) = b_1, & \text{si el vendedor "}\textit{Cumple}\text{"} \\ P_p^I(b_1, b_2) = 3b_1/2 - V_{min}/2\ b_1 & \text{si el vendedor "}\textit{Incumple}\text{"} \end{cases}$$

En el resto del capítulo 5 se resuelve el juego con una única venta para diferentes valores de K asumiendo que el tipo del vendedor es de dominio público. De esta manera, se obtendrían estos resultados:

- Si K=0 el vendedor siempre "incumplirá" con independencia de la puja ganadora. En este caso los compradores, en equilibrio, utilizarían (ver apartado 5.4.-) la función de puja $B^I(v_i)=v_i/3+2\underline{V}/3$. Las pujas que se derivan de esta función son significativamente inferiores que las que se presentarían cuando los compradores tenían la certeza de que el vendedor iba a cumplir (es decir, $B^I(v_i) > B^C(v_i) \quad \forall\ v_i > V_{min}$, donde $B^C(.)$ es la función citada anteriormente en (8.1.) cuando describíamos el modelo de referencia).

Sin embargo, aunque las pujas presentadas sean inferiores, el precio a pagar por el ganador será el mismo, es decir, $P_p^C(B^C(v_1))= P_p^I(B^I(v_1))$. Por tanto, la anticipación por parte de los compradores, de la estrategia que seguirá el vendedor en la última fase, provoca el efecto de anular la ventaja de la renegociación a través de la presentación de unas pujas lo suficientemente más reducidas para que el precio esperado sea el mismo.

De esta manera, el vendedor sería indiferente entre las combinaciones de estrategias: a) “Incumplir siempre”- B^I (.) , y b) “Cumplir siempre- B^C (.)[158].

• Cuando $K>0$ pero $K\to 0$, la situación es similar a la anterior, en el sentido de que al vendedor le interesará incumplir siempre[159]. Por tanto, los compradores usarán la función de puja $B^I(.)$ y el precio sería el mismo. Sin embargo, en esta ocasión el precio no coincide con el ingreso neto del vendedor. Esto es debido a que al precio obtenido habría que descontarle el coste, K, incurrido al “Incumplir”. De esta manera, el vendedor ya no sería indiferente entre las alternativas a) y b) comentadas en el párrafo anterior sino que preferiría estrictamente la b). Sin embargo, en ausencia de capacidad de auto-compromiso esta no puede ser alcanzada en este contexto. De esta manera, los vendedores que se encuentren en esta situación intentarían encontrar mecanismos para dotarse de credibilidad. A continuación del caso siguiente se comenta un posible ejemplo.

• Si $K\geq(V^{max}-V_{min})/4$ entonces se demuestra (ver apartado 5.6.-a) que el vendedor siempre va a “Cumplir” con independencia de la puja ganadora. En este caso, los compradores utilizarían la estrategia $B^C(.)$, que sería igual a la que se obtuvo en el capítulo 3 cuando se analizaba el modelo de referencia. Por tanto, cuando los costes del vendedor son lo “suficientemente” altos los compradores tienen la certeza que va a cumplir y presentan las mismas pujas que en el contexto en el que el vendedor tiene el poder de auto-comprometerse en el cumplimiento de las normas.

Por tanto, los vendedores que se encuentren con unos costes de incumplir positivos pero muy pequeños, intentarán adquirir la credibilidad necesaria para evitar el equilibrio en el que incumplen siempre, que como hemos mencionado les reporta una utilidad inferior. En el apartado 5.6.-b) se incluyen algunas de las posibles vías, utilizadas por el sector público, que pueden intentar perseguir este objetivo. Una de estas vías es la de intentar incrementar sus costes de “incumplir”. En el caso del actual Programa de Privatizaciones en España se fijan unos criterios generales a los que tendrán que atenerse las operaciones de privatización. Estos principios actúan a modo de auto-limitación para el Gobierno. Adicionalmente, en dicho Programa de Privatizaciones se

[158] En todo caso hay que recordar que el vendedor no tiene disponible la opción b) debido a que carece de capacidad de auto-compromiso y que, en este contexto, la “promesa” de cumplir no es creíble.

[159] Con la excepción comentada en el apartado 5.6.-b) .

crea el Consejo Consultivo de Privatizaciones (CCP) con el objetivo de velar por esos principios. Este Consejo no tiene poder vinculante pero emite un dictamen que se hace público con anterioridad a la decisión definitiva del Consejo de Ministros. De este modo se puede entender al CCP como una "tecnología" de compromiso para ganar credibilidad a través de elevar el coste del incumplimiento (con nuestra terminología se podría decir que se trataría de situar los costes por encima de $K\geq (V^{max}-V_{min})/4$).

En todo caso, además de este tipo de mecanismos, es conocido que (cuando el juego se repite) la Teoría de Juegos nos sugiere otras posibilidades basadas en la reputación. En los capítulos 6 y 7 se formaliza esta idea aplicada a la venta de empresas y se analiza las posibilidades que ofrece nuestro modelo para que puedan surgir equilibrios basados en la reputación del vendedor y que tipo de requisitos, en su caso, serían necesarios cumplir.

En el capítulo 6 se sigue asumiendo que el tipo del vendedor es de dominio público y se analiza un vendedor que realiza varias ventas de una manera sucesiva. Como ya se ha comentado, los compradores se presentan en una única ocasión, conociendo la historia de la actuación del vendedor hasta la venta anterior (h_{m-1} , si nos encontrásemos en la venta m). A continuación se resumen los resultados obtenidos:

- Si el número de ventas a realizar por el vendedor (del que, como hemos comentado, se conoce su tipo) es finito y conocido por todos los jugadores, entonces obtenemos el resultado de que, en todas las ventas, se reproduce el equilibrio del juego de etapa. Así, los tipos de vendedor $K=0$ y $K\rightarrow 0$ "incumplirían" en todas las ventas mientras que el tipo de vendedor $K\geq(V^{max}-V_{min})/4$) "cumpliría" en todas las ocasiones. Por su parte, los compradores anticipan este comportamiento (presentando sus pujas de acuerdo a $B^I(.)$ y $B^C(.)$, en los dos primeros casos y en el último, respectivamente) y como resultado el precio esperado es el mismo. De esta manera, al igual que ocurría en el juego de etapa, los vendedores $K=0$ y $K\geq (V^{max}-V_{min})/4$ tendrán la misma utilidad que sería superior a la que obtendría el tipo de vendedor $K\rightarrow 0$. Por tanto, para este tipo de vendedor, incluso cuando el juego se repite, necesitaría adoptar algún mecanismo de los antes mencionados si quiere mejorar sus resultados. Es decir, en este caso, la carencia de capacidad de auto-compromiso sigue empeorando el resultado.

Por otro lado, el tipo de resultado en el párrafo anterior, que es muy conocido en Teoría de Juegos[160], necesita asumir que no exista incertidumbre sobre el número exacto de ventas que va a realizar el vendedor y que además sea conocido por todos los jugadores. En los Programas de Privatizaciones es raro conocer, sin incertidumbre, este dato. En ocasiones se aprueban listas de empresas a privatizar pero pueden ser ampliadas en el futuro o, incluso, algunas de las previstas no llevarse a cabo. En el caso de España, SEPI tiene un número determinado de empresas, pero no todas están destinadas a la privatización. Además, el número puede aumentar cuando se le incorporan empresas procedentes de otros Departamentos o cuando se decide vender por separado filiales de sus empresas.

- Si el número de ventas que realiza el vendedor es infinita (o indefinida) nos seguimos encontrando en la misma situación que la comentada en el caso anterior para los tipos de vendedor K=0 y $K \geq (V^{max}–V_{min})/4$: en todas las ventas se repite el resultado del juego de etapa. Además, es de destacar que para el segundo tipo de vendedor mencionado, este resultado se mantiene tanto si asumimos que los costes K se soportan todas las veces en que se incumple, como si asumimos que el vendedor sólo incurre en estos costes la primera ocasión que se aparta de las normas.

- Sin embargo, cuando el número de ventas es indefinido la situación puede variar para el tipo $K \rightarrow 0$. En este caso, en el apartado 6.3.3.- se construye un equilibrio en el que este tipo de comprador “cumple siempre” y los compradores presenten sus pujas de acuerdo a $B^C(.)$. Por tanto, este tipo de vendedor conseguiría sostener un equilibrio en el que no necesite incurrir en los costes de “incumplir” para obtener el mismo precio esperado. En todo caso, para sostener este equilibrio es necesario que se cumpla la condición (6.10.) que reproducimos a continuación:

$$\delta \geq [(V^{max}–V_{min}) – 4K]/ (V^{max}–V_{min})$$

En la que δ es la tasa con la que el vendedor descuenta las ganancias obtenidas en la siguiente venta. Como se observa esta es una condición muy exigente ya que (como $K \rightarrow 0$) la tasa de descuento tendría que situarse en un entorno muy cercano a 1. Por

160 Y que, también, presenta algunas debilidades como se recoge en el apartado 6.2.-.

tanto, el vendedor tiene que valorar las ganancias futuras casi tanto como las actuales. Esto puede ser más probable que ocurra en contextos con tipos de interés muy bajos o/y cuando el tiempo que transcurre entre una venta y la siguiente es muy breve. Recordamos que estamos sosteniendo un equilibrio en el que un vendedor, con unos costes de incumplir casi insignificantes, "cumpliría" en todas las ventas.

Finalmente en el capítulo 7 asumimos que el tipo del vendedor es desconocido para los compradores. Así, el vendedor podría pertenecer a dos tipos: el tipo "V_I" que cuenta con una probabilidad de φ para el que $K\to 0$; y el tipo "V_C" con unos costes $K\geq(V^{max}-V_{min})/4$ y una probalidad de 1-φ. El vendedor conoce su tipo mientras que los compradores sólo conocen su distribución de probabilidad (que viene dada por φ y que suponemos objetiva). En este tipo de modelos, el equilibrio, además de una combinación de estrategias, necesita de un sistema de conjeturas que ya no serían triviales como ocurría cuando asumíamos que el tipo de vendedor era conocido. En el apartado 7.3.- obtenemos el equilibrio en el juego de etapa.

• En este equilibrio el vendedor V_I "incumple" y el V_C "cumple" con independencia de las pujas ganadoras. Por su parte, los compradores presentan sus pujas de acuerdo a la función de puja (7.8.) que se reproduce a continuación:

$$b_i=B^{\mu}(v_i\,,\mu) = [V_{min}(\mu+1)+v_i] \;/\; (\mu+2)$$

Esta función depende de μ que es la conjetura de los compradores sobre la posibilidad de incumplimiento del vendedor. Con una única venta, $\mu=\varphi$, con lo que tendríamos especificado un Equilibrio Bayesiano Perfecto. (Se puede observar que esta función de puja es una función más general que las mencionadas anteriormente ya que incluye como casos particulares tanto a la función de puja $B^C(.)$ como a $B^I(.)$).

• Como características de este equilibrio podemos destacar que "ex ante" el precio esperado por los compradores, en caso de ganar, va a ser el mismo que cuando existía certidumbre sobre el tipo del vendedor. Sin embargo, no ocurre lo mismo con el vendedor cuando ya conoce su tipo: si es V_C va a obtener un precio esperado inferior mientras que si es del tipo V_I entonces su precio esperado va a ser superior. Por tanto, como el comprador en media espera pagar lo mismo que cuando existía certeza este resultado implica que la introducción de incertidumbre origina un "traspaso" de ingresos esperados desde el tipo de vendedor V_C (el que siempre "cumple") al tipo de vendedor V_I (el que siempre "incumple").

- Adicionalmente, el precio esperado por ambos tipos de vendedores tiene una relación negativa con el valor de la conjetura de los compradores, μ, lo q implica que ambos tipos verían incrementado sus ingresos si se redujera la probabilidad que los compradores asignan a que el vendedor vaya a incumplir. De esta manera, antes de comenzar la subasta ambos tipos de vendedores estarían interesados en hacer creer que pertenecen al tipo V_C. Evidentemente, los compradores verían con escepticismo los posibles intentos por parte del vendedor para convencerles de que pertenece al tipo V_C si no fueran acompañados por mecanismos que los dotaran de credibilidad.

- En todo caso, el juego de etapa cumple con los requisitos del Teorema del Ingreso Equivalente (en equilibrio, gana siempre el comprador con una mayor valoración; y un hipotético comprador que tuviera la valoración mínima obtendría una utilidad igual a cero). Por tanto, de acuerdo con este teorema los ingresos esperados deberían ser los mismos que cuando suponíamos que no existía incertidumbre sobre el tipo de vendedor. Esto se cumple para un vendedor que todavía no conoce su tipo (es decir, antes de que la naturaleza haya realizado el movimiento en el que asigna tipo al vendedor, ver apartado 7.3.-).

No obstante lo interesante de este modelo es analizar las interacciones que se pueden producir cuando el juego se repite. En concreto los compradores que se presentan a cada venta podrían elaborar sus conjeturas, no sólo con la distribución objetiva inicial, sino también con la información que se deriva del comportamiento del vendedor en las ventas anteriores. En este contexto tanto la especificación de las estrategias como el sistema de conjeturas se hace más complejo. Los apartado 7.4.- y 7.5.- se centran en analizar los posibles equilibrios de agrupación, es decir, aquellos en lo que, en la senda de equilibrio, los dos tipos de vendedor ejecutan la misma acción. En concreto, cuando el tipo V_I imite al tipo V_C y, por tanto, ambos tipos "cumplan".

- Un resultado previo en este modelo es que cuando el tipo V_I "incumple" revela su tipo. Por tanto, sólo tendría la oportunidad de sorprender en una ocasión al mercado.

• Cuando el juego se repite indefinidamente, en el apartado 7.4.- se especifica una combinación de estrategias y un sistema de conjeturas que, en la senda de equilibrio, generan el resultado de que ambos tipos de vendedor "cumplen". Para que esta combinación forme parte de un Equilibrio Bayesiano Perfecto se tendría que cumplir la misma condición (6.10.) reproducida más arriba. Por tanto, en este caso el vendedor V_I conseguiría ocultar su tipo imitando indefinidamente al tipo V_C. La mencionada condición sugeriría que el tipo de vendedor V_I, cuando va a ejecutar un número "elevado" e indefinido de ventas, estaría interesado en un proceso de venta "intenso" en el que el espacio de tiempo transcurrido entre venta y venta fuera reducido. Esta manera de actuar, en este contexto, le permitiría ganar "credibilidad" en relación con la alternativa de realizar un proceso pausado

• En el modelo con incertidumbre sobre los tipos del vendedor es especialmente interesante analizar si, cuando el juego se repite un número de veces finito y conocido, se puede sostener un equilibrio en el que el tipo V_I "cumpla" (al menos en un número importante de ventas). Obtenemos una condición que es suficiente para sostener un Equilibrio de Nash y un Equilibrio Bayesiano de Nash (y también de manera trivial un Equilibrio Perfecto en subjuegos). Del análisis de esa condición obtenemos que cuanto mayor sea el número de ventas más probable será su cumplimiento.

Sin embargo, la noción de equilibrio más aplicable a nuestro modelo no sería ninguna de las anteriores sino la de Equilibrio Bayesiano Perfecto. El resultado que obtenemos es que en el modelo con incertidumbre sobre el vendedor cuando el número de ventas es finito y conocido no conseguimos soportar un EBP en el que los vendedores utilicen estrategias puras.

Este resultado sugiere que el vendedor tipo V_I estaría interesado en generar incertidumbre sobre el número total de operaciones que pueda finalmente ejecutar ya que ello le permitiría aspirar al equilibrio en el que siempre cumple y los compradores presentan pujas altas, que como hemos mencionado le reporta mayor utilidad.

Un último comentario sobre las posibles futuras extensiones del modelo. Con ánimo de simplificar los desarrollos matemáticos se han utilizado diversos supuestos que limitan la generalidad del modelo. Por tanto, como futuras líneas de investigación se pueden plantear el desarrollar el modelo en contextos más generales. De esta manera, como sus extensiones naturales surgen: la utilización de distribuciones de probabilidad genéricas para las valoraciones de los compradores; la ampliación de la concurrencia a N compradores (pudiendo este número ser conocido o no); el suponer que el vendedor puede adoptar más de dos tipos (tanto en un contexto discreto como continuo); el analizar varios tipos de diseños de subastas; la inclusión en las valoraciones de los compradores tanto elementos de valoración privada como de valoración común; y permitir, en el modelo con incertidumbre sobre el tipo de vendedor, el uso de estrategias mixtas en la línea de lo comentado en el apartado 7.5.-.

Una extensión que podría ofrecer resultados interesante, combinada con la última de las comentadas, sería la de relajar el supuesto de que las distribuciones de probabilidad de los compradores que se presentan a las diferentes ventas es la misma. De este modo se podría analizar el orden temporal óptimo de la venta de empresas según las valoraciones que los compradores puedan tener de ellas.

Otras posibles extensiones que, en este caso, implicarían modificaciones sustanciales de la estructura del modelo podrían ser: la búsqueda de los requisitos que debería cumplir una subasta óptima en este contexto; permitir a los compradores tener diferentes distribuciones de probabilidad sobre el tipo de vendedor; o la introducción de compradores que también repiten con lo que tendríamos que considerar la reputación de todos los jugadores y, no sólo, la del vendedor.

BIBLIOGRAFÍA

Asherfelter, O. (1989), "How Auctions Work for Wine and Art", *Journal of Economic Perspectives*, *3*(3), 23-36.

Athey, S., & Levin, J. , (1999),*Information and Competition in U.S. Forest Service Timber Auctions*, (7185),NBER Working Paper Series, National Bureau of Economic Research, Cambridge

Bikhchandani, S. (1988), "Reputation in Repeated Second-Price Auctions", *Journal of Economic Theory*, *46*, 97-119.

Bikhchandani, S. (1999), "Auctions of Heterogeneous Objects", *Games and Economic Behaviour*, *26*(2), 193-220.

Bikhchandani, S., Haile P. A., & Riley, J. (2000), *Symmetric Separating Equilibria in English Auctions*, Mimeo.

Branco, F. (1997), "The Design of Multidimensional Auctions", *The RAND Journal of Economics*, *28*(1), 63-81.

Brusco, S., & Lopomo, G. , (1999),*Collusion Via Siganlling in Open Ascending Auctions With Multiple Objects and Complementarities*, (99-30),Working Paper, Universidad Carlos III de Madrid

Bulow, J., Huang, M., & Klemperer, P. (1999), "Toeholds and Takeovers", *Journal of*

Political Economy, *107*(3), 427-454.

Bulow, J., & Klemperer, P. (1996), "Auctions Versus Negotiations", *The American Economic Review*, *86*(1), 180-196.

Bulow, J., & Roberts, J. (1989), "The Simple Economics of Optimal Auctions", *Journal of Political Economy*, *97*(5), 1060-1090.

Cantillon, E., (2000), *The Effect of Bidders' Asymmetries on Expected Revenue in Auctions*.

Capen, E. C., Clapp, R. V., & Campbell, W. M. (1971), "Competitive Bidding in High-Risk Situations", *Journal of Petroleum Technology*, *23*, 641-653.

Cassady, R. (1967), *Auction an Auctioneering*, University of California Press, Berkeley.

Cassing, J., & Douglas, R. W. (1980), "Implications of the Auction Mechanism in Baseball's Free Agent Draft", *Southern Economic Journal*, *47*(1), 110-121.

CCP, (1999),*Informe de Actividades-1998*., Consejo Consultivo de Privatizaciones

CCP, (2000),*Informe de Actividades-1999*., Consejo Consultivo de Privatizaciones

CCP, (2001),*Informe de Actividades-2000*., Consejo Consultivo de Privatizaciones, Madrid

CCP, (2002),*Informe 2001. Cinco Años de Actividades*., Consejo Consultivo de Privatizaciones, Madrid

Che, Y. (1993), "Design Competition Trough Multidimensional Auctions", *The RAND Journal of Economics*, *24*(4), 668-680.

Cramton, P., & Schwartz, A. (1991), "Using Auction Theory to Inform Takeover Regulation", *The Journal of Law, Economics, & Organization*, *7*(1), 27-53.

Cuervo, A. (1997), *La Privatización de la Empresa Pública*, Ediciones Encuentro, Madrid.

Cuervo, A., & Villalonga, B. (2000), "Explaining the Variance in the Perfomance Effects of Privatization", *Academy of Managemente Review*, *25*(3), 581-590.

Das, S., & Sundaran, R. , (1997),*Auction Theory: A Summary with Applications to treasury Markets*, (5873),NBER Working Paper Series, National Bureau of Economic Research

Debreu, D. (1952), "A Social Equilibrium Existence Theorem", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *38*, 886-893.

Durá, P., & Serrano, B. (2002), "Consecuencias del 11-S sobre las operaciones de fusión y adquisición de empresas (M&A)". In A. L. López Roa (Ed.), *La Crisis del 11 de septiembre ¿Qué cambiará?*, Esic y Universidad Rey Juan Carlos, Madrid.

Emblen, D., (1944), *Competitive Bidding for Corporate Securities*, Ph.D Dissertation, Columbia University.

Engelbrecht-Wiggans, R. (1980), "Auctions and Bidding Models: A Survey", *Managemente Sciencie*, *26*(2), 119-142.

Engelbrecht-Wiggans, R. (1983), "An Introduction to the Theory of Bidding for a Single Object". In R. Engelbrecht-Wigganns, M. Shubik, & J. Stark (Eds.), *Auctions, Bidding, and Contracting: Uses and Therory* (pp. 53-103) , New York Universitiy Press, New York.

Fan, K. (1952), "Fixed Point and Minimax Theorems in Locally Convex Topological Linear Spaces", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *38*, 121-126.

Ferreira, J. L., & Moreno, D. , (1995),*Cooperación y renegociación en juegos no cooperativos*, (95-09),Documento de Trabajo. Serie de Economía 07, Universidad Carlos III, Madrid

Fluck, Z., John, K., & Ravid, A. , (1998),*Privatization with Political constraint: Auctions versus Private Negotiations*, (Fin-98-034),Departent of Finance Working Paper Series 1998, New York Universitiy School of Business

Forder, J. (2001), "The Theory of Credibility and the Reputation-Bias of Policy", *Review of Political Economy*, *13*(1)

Friedman, J. (1986), *Game Theory with Applications to Economics*, Oxford University Press,

Friedman, L. (1956), "A Competitive Bidding Strategy", *Operations Research*, *4*, 104-112.

Fudenberg, D., Kreps, D., & Maskin, E. (1989), *Repeated Games with Long-run and Short-run Players*, Mimeo, Massachussetts Institute of Technology.

Fudenberg, D., & Tirole, J. (1991a), *Game Theory*, The MIT Press,

Fudenberg, D., & Tirole, J. (1991b), "Perfect Bayesian Equilibrium and Sequential Equilibrium", *Journal of Economic Theory*, *53*, 236-260.

Gámir, L. (1999), *Las Privatizaciones en España*, Pirámide, Madrid.

Gibbons, R. (1992), *Game Theory for Applied Economist*, Princeton University Press, Princenton.

Glicksberg, I. L. (1952), "A Further Generalization Od the Kakutani Fixed Point Theorem with Application to Nash Equilibrium Points", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *38*, 170-174.

Goeree, J. K., (2000),*Bidding for the Future*.,Virginia Economics Online Papers, University of Virginia

Griesmer, J. H., Levitan, R. E., & Shubik, M. (1967), "Towards a Study of Bidding Processes Part IV - Games with Unknown Costs", *Navall Research Logistics*

Quartely, *14*(4), 415-433.

Harris, M., & Raviv, A. (1981), "Allocation Mechanisms and the Design of Auction", *Econometrica*, *49*(6), 1477-1499.

Harsanyi, J. (1967), "Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players. Parts I - III", *Managament Sciencie*, *14*(3), 159-182, 320-334, 486-502.

Hausch, D. (1988), " A Model of Sequential Auctions", *Economics Letters*, *26*(3), 227-233.

Hendricks, K., & Porter, R. (1989), "Collusion in Auctions", *Annales D'Économie Et de Statistique*, *15/16*, 217-230.

Hendricks, K., Porter, R., & Boudreau, B. (1987), "Information, Returns, and Bidding Behavior in OCS Auctions: 1954-1969", *Journal of Industrial Economics*, *35*, 517-542.

Holt, C. (1980), "Competitive Bidding for Contracts Under Alternative Auction Procedures", *Journal of Political Economy*, *88*(3), 433-445.

Kagel, J. H. (1995), "Auctions: A Survey of Experimental Research". In J. H. Kagel, & A. Roth (Eds.), *Handbook of Experimental Economics* (pp. 501-585) , The Princeton University Press

Kagel, J. H., & Levin, D. (1986), "The Winner's Curse and Public Information in Common Value Action", *The American Economic Review*, *76*, 894-920.

Klemperer, P. (1998), "Auctions with Almost Common Values: The 'Wallet Games' and Its Applications", *The European Economic Review*, *42*(3-5), 757-769.

Klemperer, P. (1999), "Auction Theory: A Guide to the Literature", *Journal of Economic Surveys*, *13*(3), 227-286.

Klemperer, P., (2000a), *What really matters in auction design*, (In INTERNET).

Klemperer, P., (2000b), *Why Every Economist Should Learn Some Auction Theory*, (In INTERNET).

Klemperer, P., (2002), *How (Not) to Run Auctions: the European 3G Telecom Auctions*, (In INTERNET).

Kreps, D. (1990a), *A Course in Microeconomic Theory*, Princeton University Press,

Kreps, D. (1990b), *Game Theory and Economic Modelling*, Clarendon Press, Oxford.

Kreps, D., Milgrom, P., Roberts, J., & Wilson, R. (1982), "Rational Cooperation in the Finitely Repeated Prisioners Dilemma", *Journal of Economic Theory*, *27*(2), 245-252.

Kreps, D., & Wilson, R. (1982a), "Reputation and Imperfect Information", *Journal of Economic Theory*, *27*(2), 253-279.

Kreps, D., & Wilson, R. (1982b), "Sequential Equilibria", *Econometrica*, *50*(4), 863-894.

Krishna, K., & Tranaes, T. , (1999),*Efficient Competition with Small Numbers --with applications to Privatization and Mergers*, (6952),NBER Working Paper Series, National Bureau of Economic Research

Laffont, J. (1997), "Game Theory an Empirical Economics: The Case of Auction Data", *The European Economic Review*, *41*, 1-35.

Laffont, J., & Maskin, E. (1980), "Optimal Reservation Price in the Vickrey Auction", *Economics Letters*, *6*(4), 309-313.

Levin, D., & Smith, J. L. (1994), "Equilibrium in Auctions with Entry", *The American Economic Review*, *84*(3), 585-599.

Levin, D., & Smith, J. L. (1996), "Optimal Reservation Prices in Auctions", *Economic*

Journal, *106*, 1271-1283.

López-de-Silanes, F., (1996),*Determinants of Privatization Prices*, (5494),NBER Working Paper Series, National Bureau of Economic Research

Mas-Colell, A., Whinston Michael D., & Green, J. R. (1995), *Microeconomic Theory*, Oxford University Press,

Maskin, E. (1992), "Auction and Privatization". In H. Siebert (Ed.), *Privatization* (pp. 115-136) .

Maskin, E. (2000), "Auctions, Development, and Privatization: Efficient Auctions with Liquidity-Constrained Buyers", *The European Economic Review*, *44*, 667-681.

Maskin, E., & Riley, J. (1983), "The Gains to Making Losers Pay in High-Bid Acutions". In R. Engelbrecht-Wiggans, M. Shubik, & J. Stark (Eds.), *Auctions, Bidding, and Contracting: Uses and Therory* (pp. 205-229) , New York Universitiy Press, New York.

Maskin, E., & Riley, J. (1984), "Optimal Auctions with Risk Averse Buyers", *Econometrica*, *52*(6), 1473-1518.

Maskin, E., & Riley, J. (1985), "Auction Theory with Private Values", *The American Economic Review*, *75*(2), 150-155.

Maskin, E., & Riley, J. (1989), "Optimal Multi-unit Auctions". In F. Hahn (Ed.), *The Economics of Missing Markets, Information, an Games* (pp. 312-335) , Clarendon Press, Oxford.

Maskin, E., & Riley, J. (1998), "Asymmetric Auctions", *Review of Economic Studies*, *forthcoming*

Matthews, S., (1979),*Risk Aversion and the Efficiency of First and Second Price Auctions*.,Working Papers, Dept. of Economics, University of Illinois

Matthews, S. (1983), "Selling to Risk Averse Buyers with Unobservable Tastes", *Journal of Economic Theory*, *30*(2), 370-400.

Matthews, S. (1984). Information Acquisition in Discriminatory Auctions. In . M. Boyer, & R. E. Kihlstrom (Eds.)*Vol. 5. Bayesian Models in Economic Theory* (pp. 181-207)Elsevier Science.

Matthews, S. (1987), "Comparing Auctions for Risk-Averse Buyers: A Buyer's Point of View", *Econometrica*, *55*(3), 633-646.

McAfee, P. (1993), "Mechanism Design by Competing Sellers", *Econometrica*, *61*(6), 1281-1312.

McAfee, P., & McMillan, J. (1987a), "Auctions and Bidding", *Journal of Economic Literature*, *XXV*(2), 699-738.

McAfee, P., & McMillan, J. (1987b), "Auctions with a Stochastic Number of Bidders", *Journal of Economic Theory*, *43*, 1-19.

McAfee, P., & McMillan, J. (1989), "Government Procuremente and International Trade", *Journal of International Economics*, *26*, 291-308.

McAfee, P., & McMillan, J. (1992), "Bidding Rings", *The American Economic Review*, *82*(3), 579-599.

McAfee, P., & McMillan, J. (1996), "Analysing the Airwaves Auction", *Journal of Economic Perspectives*, *10*(1), 159-175.

McAfee, P., & Vincent, D. (1993), "The Declining Price Anomaly", *Journal of Economic Theory*, *60*, 191-212.

Mead, W. J., Moseidjord, A., & Sorensen, P. E. (1984), "Competitive Bidding Under Asymmetrical Information: Behaviour and Perfomance in Gulf of Mexico Drainage

Lease Sales, 1959-1969", *Review of Economics and Statistics*, *66*, 505-508.

Milgrom, P. (1981), "Rational Expectations, Information Acquisition and Competitive Bidding", *Econometrica*, *49*(4), 921-943.

Milgrom, P. (1986), "Auction Theory". In Truman Bewley (Ed.), *Advances in Economic Theory 1985*, Cambridge University Press

Milgrom, P. (1989), "Auctions and Bidding: A Primer", *Economic Perspectives*, *3*(3), 3-33.

Milgrom, P. (2000), "Putting Auction Theory to Work: The Simultaneous Ascending Acution", *Journal of Political Economy*, *108*(2), 245-272.

Milgrom, P., & Weber, R. J. (1982a), "A Theory of Auctions and Competitive Bidding", *Econometrica*, *50*(5), 1089-1122.

Milgrom, P., & Weber, R. J. (1982b), "The Value of Information in a Sealed-Bid-Auction", *Journal of Mathematical Economic*, *10*(1), 105-114.

Myerson, R. B. (1981), "Optimal Auction Design", *Mathematics of Operation Research*, *6*(1), 58-73.

Myerson, R. B. (1983), "The Basic Theory of Optimal Auctions". In R. Engelbrecht-Wigganns, M. Shubik, & J. Stark (Eds.), *Auctions, Bidding, and Contracting: Uses and Theory* (pp. 149-163) , New York Universitiy Press, New York.

Myerson, R. B. (1991), *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press, Massachuset.

Ortega-Reichert, A., (1968), *Models for Competitive Bidding under Uncertainty*, PhD thesis, Stanford University.

Pampillón, R. (2002), "Las Privatización de las Empresas Estatales en 2001 en España y Sus Perspectivas Futuras", *Cuaderno de Información Económica*, *166*

Porter, R., & Zona, J. D. , (1992),*Detection of Bid Rigging in Procurement Auctions*, (4013),NBER Working Papers Series, National Bureau of Economic Research, Cambridge

Quirk, J., & Terasawa, K. , (1984),*The Winer's Curse and Cost Estimation Bias in Pioneer Projects*, (512),Working Paper, California Institute of Technology

Requeijo, J. (1999), "Privatización de Empresas Públicas y Convergencia Real", *Economía Industrial*, *328*, 71-76.

Ribas, E. (1999), "Análisis Del Valor de las Empresas Privatizadas", *Economía Industrial*, *328*, 63-70.

Riley, J. (1988), "Ex-Post Information in Auctions", *Review of Economic Studies*, *55*(3), 409-429.

Riley, J. (1989), "Expected Revenue From Open an Sealed Bid Acutions", *Journal of Economic Perspectives*, *3*, 41-50.

Riley, J., & Samuelson, W. (1981), "Opitmal Auctions", *The American Economic Review*, *71*(3), 381-392.

Robinson, M. S. (1985), "Collusion and the Choice of Auctions", *The RAND Journal of Economics*, *16*(1), 141-145.

Roll, R. (1986), "The Hubris Hypothesis of Corporate Takeovers", *Journal of Business*, *59*, 197-216.

Rosenthal, R. (1981), "Games of Perfect Information, Predatory Pricing, an the Chain-Store Paradox", *Econometrica*, *52*, 1029-1050.

Roth, A. (1988), "Laboratory Experimentation in Economics: A Methodological Overview", *Economic Journal*, *98*, 974-1031.

Roth, E., & Ockenfels, A. , (2000),*Last Minute Bidding and the Rules for Ending Second-Price Auctions: Theory and Evidence form a Natural Experimente on the Internet*, (7729),NBER Working Paper Series, National Bureau of Economic Research

Rothkopf, M. (1969), "A Model of Rational Competitive Bidding", *Managament Sciencie*, *15*, 774-777.

Rothkopf, M. (1983), "Bidding Theory: The Phenomena to Be Modeled". In R. Engelbrecht-Wigganns, M. Shubik, & J. Stark (Eds.), *Auctions, Bidding, and Contracting: Uses and Therory* (pp. 105-120) , New York Universitiy Press, New York.

Rothkopf, M., Teisberg, T., & Kahn, P. (1990), "Why Are Vickrey Auctions Rare?", *Journal of Political Economy*, *98*, 94-109.

Rubinstein, A. (1982), "Perfect Equilibrium in a Bargaining Model", *Econometrica*, *50*, 97-109.

Schelling, T. (1960), *The Strategy of the Conflict*, Harvard University Press, Cambridge.

Shubik, M. (1983a), "Auctions, Bidding, and Market: An Historical Sketch". In R. Engelbrecht-Wigganns, M. Shubik, & J. Stark (Eds.), *Auctions, Bidding, and Contracting: Uses and Therory* (pp. 33-52) , New York Universitiy Press, New York.

Shubik, M. (1983b), "On Auctions, Bidding, and Contracting". In R. Engelbrecht-Wigganns, M. Shubik, & J. Stark (Eds.), *Auctions, Bidding, and Contracting: Uses and Theory* (pp. 3-31) , New York Universitiy Press, New York.

Simon, H. (1951), "A Formal Theory of the Employment Relationship", *Econometrica*, *19*, 293-305.

Smith, V. (1987), "Auctions". In J. Eatwell, M. Milgate, & P. Newman (Eds.), *The New Palgrave: A dictionary of economics*, The Macmillan Press Ltd.

Sobel , J. (1985), "A Theory of Credibility", *The Review of Economic Studies*, *LII*(4), 557-573.

Stark, R. M. (1971), "Competitive Bidding Strategy", *Operations Research*, *19*, 484-490.

Stark, R. M., & Rothkopf, M. (1979), "Competitve Bidding: A Comprehensive Bibliography", *Operations Research*, *27*, 364-390.

Thiel, S. (1988), "Multidimensional Auctions", *Economics Letters*, *28*, 37-40.

Vickers, J., & Yarrow, G. (1988), *Privatization: An Economic Analysis*, The MIT Press,

Vickrey, W. (1961), "Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders", *Journal of Finance*, *16*(1), 8-37.

Vickrey, W. (1962), "Auctions and Bidding Games". In *Recent Advances in Game Theory* (pp. 15-27) , The Princeton University Press, Princeton.

Vickrey, W. (1976), "Auctions Markets and Optimum Allocations". In Y. Amihud (Ed.), *Bidding an Auctioning for Procurement and Allocation* (pp. 13-20) , New York Universitiy Press, New York.

Villalonga, B., (2000), *Privatización y Eficiencia en España: Un Análisis Empírico y un Modelo Teórico*, Tesis Doctoral, Universidad Complutense Madrid.

Vincent, D. (1990), "Dynamic Auctions", *Review of Economic Studies*, *57*, 49-62.

Von Der Fehr, N. M. (1994), "Predatory Bidding in Sequential Auctions", *Oxford Economic Papers*, *46*, 345-356.

Weber, R. J. (1983), "Multiple-Object Auctions". In R. Engelbrecht-Wiggans, M. Shubik, & R. M. Stark (Eds.), *Auctions, Bidding and Contracting: Uses and Theory* (pp. 165-191) , New York Universitiy Press, New York.

Wilson, R. (1967), "Competitive Bidding with Asymetric Information", *Managament Sciencie*, *13*, 816-820.

Wilson, R. (1969), "Competitive Bidding with Disparate Information", *Managament Sciencie*, *15*(7), 446-448.

Wilson, R. (1977), "A Bidding Model of Perfect Competition", *Review of Economic Studies*, *XLIV*(3), 511-518.

Wilson, R. (1979), "Auction of Shares", *Quartely Journal of Economics*, *93*(4), 675-689.

Wilson, R. (1985), "Reputation in Game and Markets". In A. Roth (Ed.), *Game Theoretic Models of Bargaining*, Cambridge University Press

Wilson, R. (1987), "Bidding". In J. Eatwell, M. Milgate, & P. Newman (Eds.), *The New Palgrave: A dictionary of economics*, The Macmillan Press Ltd., London.

Wilson, R. (1992), "Strategic analysis of auction". In R. J. Auman, & Hart. S. (Eds.), *Handbook of Game Theory, Volume 1* (pp. 227-279) , Elsevier Science Publishers

ÍNDICE DE ECUACIONES

(3.1.) función de ganancias de i: U^i = ... 40

(3.2.) función de ganancias de i: U^i = ... 43

(3.3.) $R_i\ (b_j)$ = ... 46

(3.4.) $U_i^e = (v_i - b_i)\ Prob(b_i > b_j) + 0\ [1 - Prob(b_i > b_j)],$ 64

(3.5.) Utilidad esperada del comprador i: $U_i^e = (v_i - b_i)\ Prob(b_i > b_j)$ 65

(3.6.) $b_h = B(v_h)\ \ \forall h \neq i.$ 65

(3.7.) $Max\ U_i^e = (v_i - b_i)\ F\ [\ B^{-1}(b_i)\ ]^{\ N-1}$ 67

(3.8.) $dU_i^e\ /\ dv_i = \ \partial U_i^e / \partial v_i = F\ [\ B^{-1}(b_i)\ ]^{\ N-1}$ 67

(3.9.) $dU_i^e / dv_i = F\ [\ B^{-1}(B(v_i))\ ]^{\ N-1} = F\ [\ v_i\ ]^{\ N-1}$ 68

(3.10.) $U_i^e(v_i) = A + \int_{V\min}^{v_i} [F(v_i)]^{N-1} dv_i$ 68

(3.11.) $\boxed{b_i = B(v_i) = v_i - \frac{\int_{V\min}^{v_i} [F(v_i)]^{N-1} dv_i}{F(v_i)^{N-1}}}$ 69

(3.12.) $b_i = B(v_i) = v_i - [(v_i - V_{min})/N],$ 71

(3.13.) $b_i = B(v_i) = [(N-1)/N] v_i + V_{min}\ /N$ 71

(3.14.) $\boxed{b_i = B(v_i) = (v_i + V_{min})/2}$ 72

(3.15.) $V_{min} + [(N+1-k)/(N+1)]\ (V^{max} - V_{min})$ 74

(3.16.) f.o.c. $[(\ B^{-1}(b_i) - V_{min})/(\ V^{max} - V_{min})\ ] = (v_i - b_i)\ [(\ dB^{-1}(b_i)/db_i)/(\ V^{max} - V_{min})\ ]$ 84

(3.17.) $B'(v_i) - B(v_i)/(\ V_{min} - v_i) = -v_i\ /\ (V_{min} - v_i)$ 84

(3.18.) $B(v_i) = (A + v_i^2/2)\ /\ (\ v_i - V_{min}) = A / (\ v_i - V_{min}) - (\ v_i^2/2(V_{min} - v_i))$ 85

(3.19.) $\boxed{b_i = B(v_i) = (v_i + V_{min})/2}$ 85

(5.1.) $P_p(b_1, b_2)$= 161

(5.2.) $P_s(b_1, b_2)=$ 161

(5.3.) Utilidad del Vendedor, $U_v=$ 173

(5.4.) $P_p^I(b_1) > P_p^C(b_1) \quad \forall b_1 \in > (V_{min}, V_{max})$ 173

(5.5.) El vendedor incumple si $U_v^I > U_v^C \Leftrightarrow P_p^I(b_1) - K > P_p^C(b_1) = b_1 \Leftrightarrow \boxed{P_p^I(b_1) - b_1 > K}$ 174

(5.6.) $\boxed{P_p^I(b_1) = 3b_1/2 - V_{min}/2}$ 175

(5.7.) $P_p(b_1)=$ 176

(5.8.) $Max\ U_i^e = (v_i - P_p^I(b_i))\ [(B^{-1}(b_i) - V_{min}) / (V^{max} - V_{min})]$ 179

(5.9.) $(dP_p^I(b_i)/db_i)[(B^{-1}(b_i) - V_{min})/(V^{max} - V_{min})] = (v_i - P_p^I(b_i))[(dB^{-1}(b_i)/db_i)/(V^{max} - V_{min})]$ 179

(5.10.) $B'(v_i) - [B(v_i) / (V_{min} - v_i)] = (-V_{min} - 2v_i) / 3(V_{min} - v_i)$ 180

(5.11.) $\boxed{b_i = B^I(v_i) = v_i/3 + 2V/3}$ 180

(5.12.) $P_s^I(b_1) = (3/4)b_1 + (17/40)V_{min}$ 182

(5.13.) $B_s^I(v_i) = (2/3)v_i + V_{min}/2$ 183

(5.14) $P_s(b_1, b_2)=$ 183

(5.15.) $P_p^I(B^I(v_1)) = (v_1 + V_{min})/2$ 188

(5.16.) $E[v_1|N=2] = V_{min} + 2(V^{max} - V_{min})/3$ 189

(5.17.) $P^e = V_{min} + (V^{max} - V_{min})/3$ 189

(5.18.) $P_p^I(b_1) - b_1 < K$ para cualquier $b_1 \in [V_{min}, V^{max}]$ 191

(5.19.) $P_p^I(b_1) - P_p^C(b_1) = 3b_1/2 - V_{min}/2 - b_1 = (b_1 - V_{min})/2.$ 193

(5.20.) Estrategia del vendedor : 194

(5.21.) $B^C(v^*) = 2K + V_{min} \Rightarrow (v^* + V_{min})/2 = 2K + V_{min}$, de donde obtenemos que $v^* = 4K + V_{min}$ 195

(5.22.) $P_p^I(b_1) = \alpha b_1 + (1-\alpha)B^{-1}(b_1)$, donde $\alpha \in [0,1]$ 208

(5.23.) $dP_p^I(b_i)/db_i = \alpha + (1-\alpha)/B'(v_i)$ 208

(5.24.) $b_i = B(v_i) = [(2\alpha - 1)/2\alpha]\ v_i + V_{min}/2\alpha$ 209

(5.25.) si $\alpha = 3/4 \Rightarrow b_i = B(v_i) = v_i/3 + 2V/3 = B^I(v_i)$ 211

(5.26.) $P_p^I(b_1) = 3b_1/2 - V_{min}/2,$ 212

(6.1.) $\pi + \delta\pi + \delta^2\pi + ... = \pi/(1-\delta).$ 225

(6.2.) • Estrategia para todos los compradores que se van presentando en las sucesivas ventas: $B^I(v_i)\ \forall m.$ 226

(6.3.) $U_V^{(M=\infty)} = U_V^{(M=1)} / (1-\delta) = [3V_{min} + (V^{max} - V_{min})] / 3(1-\delta)$ 227

(6.4.) Si $m=1$, $B^I(.)$ y 229

(6.5.) 232

(6.6.) **Estrategia del vendedor**: 235

(6.7.) **Estrategia de los compradores**: 236

(6.8.) $U_V^{(M=\infty)} = (V^{max}-V_{min})/6 - [(V^{max}-V_{min})+3V_{min}]/3(\delta-1)$, ... 241

(6.9.) $U_V(desviación)^{(M=\infty)} = [3(K-V_{min}) - (V^{max}-V_{min})]/[3(\delta-1)]+5(V^{max}-V_{min})/12$........ 242

(6.10.) $\delta \geq [(V^{max}-V_{min}) - 4K]/(V^{max}-V_{min})$........ 243

(6.11.) $P = \beta b_1+(1-\beta)(3b_1/2 - V_{min}/2) = (3-\beta)b_1/2+(\beta-1)V_{min}/2$........ 245

(6.12.) $dP/db_1 = (3-\beta)/2$........ 246

(6.13.) $B(v_i)=v_i/(3-\beta)+V_{min}(\beta-2)/(\beta-3)$ (a esta función la llamaremos $B^{\beta}(v_i)$)........ 246

(6.14.) **Estrategia del vendedor**:........ 247

(6.15.) **Estrategia de los compradores**: 248

(7.1.) $P_p(b_1) =$ 256

(7.2.) Estrategia del vendedor, ... 257

(7.3.) $P_i^e(b_i, \mu) = (1-\mu)\, b_i+\mu\, [3b_i/2-V_{min}/2] = b_i\,(\mu+2)/2 - V_{min}\mu/2$ 258

(7.4.) Utilidad esperada del comprador i: $U_i^e = (v_i - P_i^e(b_i, \mu))\, Prob(b_i>b_j)$ 258

(7.5) $-[(B^{-1}(b_i,\mu)-V_{min})/(V^{max}-V_{min})](\partial P_i^e(b_i,\mu)/\partial b_i)+ (v_i-P_i^e(b_i,\mu))[(dB^{-1}(b_i,\mu)/db_i)/(V^{max}-V_{min})]=0$........ 260

(7.6.) $B'(v_i,\mu) + B(v_i,\mu)/(v_i - V_{min}) = (\mu V_{min}+2v_i)/[(v_i-V_{min})(\mu+2)]$ 260

(7.7.) $B(v_i,\mu) = (1/(v_i-V_{min}))[A+(v_i(\mu V_{min}+v_i))/(\mu+2)]$ 261

(7.8.) $\boxed{b_i = B^{\mu}(v_i,\mu) = [V_{min}(\mu+1)+v_i]/(\mu+2)}$........ 262

(7.9.) $\mu \equiv \mu(Incumplir) = \theta(V_I)\, \mu(Incumplir \mid V_I) + \theta(V_C)\, \mu(Incumplir \mid V_C)$ 263

(7.10.) $\theta(V_I) = \varphi$ y $\theta(V_C) = 1-\varphi$........ 263

(7.11.) $\mu \equiv \mu(Incumplir) = \varphi$ 264

(7.12.)........ 264

(7.13.) Precio esperado por el comprador i $P_i^e = (V_{min}+v_i)/2 = P^e_{(certeza)}$........ 266

(7.14.) $P^e_{VC} = E[B^{\mu}(v_1,\mu)] = E[(V_{min}(\mu+1)+v_1)/(\mu+2)] = (V_{min}(\mu+1)+E[v_1])/(\mu+2)$........ 266

(7.15.) $P^e_{VC} = [V_{min}(3\mu+4)+2V^{max}]/3(\mu+2)$ 266

(7.16.) $P^e_{VI} = (V_{min}(\mu+1)+V^{max})/(\mu+2)$ 267

(7.17.) $\mu_m \equiv \mu_m(Incumplir|h_{m-1}) = \theta_m(V_I|h_{m-1})\mu_m(Incumplir|V_I) +$ 270

(7.18.) $\theta_m(V_I|h_{m-1})=[\varphi\, Prob(h_{m-1}|V_I)] / [\varphi\, Prob(h_{m-1}|V_I)+(1-\varphi)(Prob(h_{m-1}|V_C)]$........ 271

(7.19.) si en h_{m-1} $\exists$ alguna a_j^v="incumplir" entonces a_m^v="incumplir" $\forall m>j$. 274

(7.20.) **Estrategia del vendedor:**........ 275

(7.21.) $b_i = B^{\mu}(v_i,\mu) = [V_{min}(\mu+1)+v_i]/(\mu+2)$........ 276

(7.22.) **Conjeturas de los compradores:**........ 277

(7.23.) $U_{VI}^{(M=\infty)} = b_1+\delta \sum_{m=2}^{\infty} \delta^{m-2}\ E[B^{\mu}(v_1,\mu=0)]$ 279

(7.24.) $U_{VI}^{(M=\infty)} = (V^{max}–V_{min})/6 – [(V^{max}–V_{min})+3V_{min}]/3(\delta–1)$, ... 280

(7.25.) $U(desviación)_{VI}^{(M=\infty)} = (P_p^{I}(b_1) – K) + \delta \sum_{m=2}^{\infty} \delta^{m-2}\ E[P_p^{I}(B^{\mu}(v_1,\mu=1) – K]$ 281

(7.26.) $U(desviación)_{VI}^{(M=\infty)} = [3(K–V_{min}) – (V^{max} –V_{min})]/[3(\delta–1)]+5(V^{max} –V_{min})/12$ 282

(7.27.) $\delta \geq [(V^{max}–V_{min}) – 4K]/ (V^{max}–V_{min})$ 282

(7.28.) **Estrategia del vendedor**: 285

(7.29.) $b_i = B^{\mu}(v_i ,\mu) = [V_{min}(\mu+1)+v_i] / (\mu+2)$ 285

(7.30.) **Conjeturas de los compradores:** 286

(7.31.) $U_{VI}^{(M)}= [(V^{max}–V_{min}+2V_{min})/2]+(V^{max}+2V_{min})(\delta^{M}–\delta^{2})/3\delta(\delta–1)+$ 288

(7.32.) $U(desviación)_{VI}^{(M)} =(3V^{max}+V_{min}–4K)/4+[V^{max} –3K+2V_{min})](\delta^{M}–\delta)/3(\delta–1)$ 289

(7.33.) $K \geq [(V^{max}–V_{min}) (\delta–1)(4\delta^{M}(\varphi–1)+3\delta(\varphi+2))]/[12(\varphi+2)(\delta^{M} –\delta)]$ 289

(7.34.) $K_{min} = [(V^{max}–V_{min}) (\delta–1)(4\delta^{M}(\varphi–1)+3\delta(\varphi+2))]/[12(\varphi+2)(\delta^{M} –\delta)]$ 290

(7.35.) $M_{min}= [LN(–\delta(V^{max}–V_{min})+(V^{max}–V_{min})–4 K_{min})]/LN(\delta)$ – 290

(8.1.) $b_i= B^{C}(v_i) = (v_i+V_{min})/2$ 302