UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

Departamento de Economía Aplicada I

ECONOMÍA Y MATEMÁTICAS: PRODUCTIVIDAD, TRABAJO Y DISTRIBUCIÓN DE LA RENTA: UN ESTUDIO CRÍTICO

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR PRESENTADA POR

Manuel Barragán Moriana

Bajo la dirección del Doctor:

Carlos Berzosa Alonso-Martínez

Madrid, 2003

ISBN: 84-669-2245-8

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

DEPARTAMENTO: ECONOMÍA APLICADA I

ECONOMÍA Y MATEMÁTICAS; PRODUCTIVIDAD, TRABAJO Y DISTRIBUCIÓN DE LA RENTA. UN ESTUDIO CRÍTICO

(MADRID, 2002)

DIRECTOR: CARLOS BERZOSA ALONSO-MARTINEZ

DOCTORANDO: MANUEL BARRAGÁN MORIANA

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

DEPARTAMENTO: ECONOMÍA APLICADA I

ECONOMÍA Y MATEMÁTICAS; PRODUCTIVIDAD, TRABAJO Y DISTRIBUCIÓN DE LA RENTA. UN ESTUDIO CRÍTICO

Tesis para la obtención del grado de Doctor, presentada por

MANUEL BARRAGÁN MORIANA
Licenciado en Ciencias Físicas, Universidad Complutense de Madrid
Licenciado en Ciencias Económicas, Universidad Complutense de Madrid
Catedrático de Matemáticas de Enseñanza Secundaria
Profesor Asociado de Economía (Economía Aplicada V)

Dirigida por

Dr. D. CARLOS BERZOSA ALONSO-MARTINEZ
Catedrático de Economía Aplicada
Director del Departamento Economía Aplicada I (Economía Internacional y Desarrollo)

INTRODUCCIÓN

El objeto de estudio de nuestra tesis está constituido, fundamentalmente, por el conjunto de aplicaciones del análisis matemático - análisis de funciones reales - en el desarrollo y formulación de la teoría económica neoclásica, las condiciones que caracterizan dichas aplicaciones y las consecuencias de carácter matemático y, sobre todo, económico que se pueden derivar de las mismas.

En el capítulo cuarto y el apéndice matemático, sin desviarnos de la línea seguida a lo largo de todo el trabajo, se considera ampliamente el modelo de cámbio técnico y productividad procedente de la función de producción neoclásica y desarrollado por R. Solow en 1957 para la economía estadounidense. A partir de su análisis se sugiere una crítica específica y *propia* de dicho modelo, vinculada al incumplimiento de los requisitos formales del Cálculo diferencial y a la ausencia de distinción entre relaciones para incrementos finitos e infinitesimales. Debemos hacer constar, por tanto, que la segunda parte del título de esta tesis responde más al análisis crítico de una concepción teórica determinada que al diseño de un modelo práctico de cálculo de determinadas magnitudes.

Nuestra inicial formación como físico y posteriores estudios de economía y matemáticas, pueden explicar el interés que nos acercó a esta investigación y que nos ha animado, con un razonable temor por la envergadura de los temas a analizar, a afrontar las dificultades que una tesis de este tipo conlleva. La aproximación a los contenidos de este trabajo tuvo que ver con la perplejidad que nos supuso comprobar la *ligereza*, pensamos, con la cual se utiliza el cálculo diferencial en los programas académicos de teoría económica de nuestras facultades, y la progresiva percepción de que determinados enfoques parecían tener su origen en la física clásica (formalización matemática diferencial, estudio del equilibrio..).

Sin duda, desde los comienzos de la formalización del conocimiento económico, debió parecer muy sugerente la consideración de la economía como ciencia de la sociedad (*física social)*, por similitud con la física como ciencia de la naturaleza por antonomasia. Resulta por tanto natural que nuestro estudio lo vinculemos a la relación que las matemáticas establecen con la física, como referencia histórica y metodológica. Utilizaremos la denominación análisis de funciones reales en sentido restringido, como la parte del análisis matemático que comprende el cálculo infinitesimal, ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales, excluyendo la teoría de variable compleja y el análisis funcional.

El cúmulo de temas implicados en este trabajo, desde el cálculo diferencial y otros métodos matemáticos, hasta la historia del pensamiento económico, pasando por la teoría económica y la física clásica (fundamentalmente), ha obligado a que las fuentes consultadas y analizadas hayan sido muy dispares y heterogéneas (en los contenidos, en los enfoques y en la forma). Existen, de todos modos, excelentes estudios que plantean algunas de las cuestiones vinculadas, de forma central o tangencial, y que por su relevancia y utilidad en la elaboración de esta tesis debemos mencionar de manera especial, independientemente de su inclusión en la bibliografía final y para mejor situar el marco en el que se ha desenvuelto nuestro trabajo. Citaremos en primer lugar la enciclopédica *Historia del Análisis Económico* de Schumpeter, donde, a pesar de su relativo desorden, se encuentran exhaustivas referencias, ideas y reflexiones en torno a muchos de los aspectos estudiados. El libro de J.M. Naredo *La economía en evolución. Historia y perspectivas de las categorías básicas del pensamiento económico* ha suscitado nuestro mayor interés, en la medida en que aborda de forma rigurosa algunos de los temas analizados en este trabajo.

La obra de Philip Mirowski *More heat than light. Economics as social physics: Physics as nature's economics,* conecta en gran medida con el ámbito de nuestro estudio, con los contenidos de carácter *más físico,* y desde unos planteamientos más amplios y complejos consideramos que representa una investigación del mayor interés en este campo. Dos libros de Mark Blaug *La metodología de la economía y Teoría económica en retrospección,* nos han aportado una determinada aplicación al ámbito económico de la filosofia de la ciencia, y una importante visión de la teoría económica. Nos ha resultado, asimismo, muy sugerente el agudo enfoque sobre el papel de las matemáticas en las elaboraciones económicas que se incluye en la obra de H. Katuzian *Ideología y método en economia.* Los *Fundamentos del análisis económico* de P. Samuelson y *La Teoría del Valor* de G. Debreu, constituyen dos obras fundamentales del pensamiento económico neoclásico, que por su relevancia en el ámbito de la teoría del equilibrio, de la producción y de la distribución, son ampliamente consideradas en nuestro trabajo. Muy relevante es el artículo de R. Solow, *Thechnical Change and the Aggregate Productions Function,* que será analizado extensamente. Igualmente significativos, pero desde enfoques diferentes, debemos de mencionar los artículos de J. Robinson, *The Productions Functions and the Theory of Capital* y de N. Kaldor *Alternative Theories of Distribution,* entre otros de los mismos autores. Sin ánimo de exhaustividad y para terminar esta breve relación de textos, que nos han servido de base y reflexión, *conformando* en alguna medida nuestra tesis, mencionaremos por su importancia en el amplio campo de las matemáticas el libro de M. Kline: *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros dias.*

En el proceso de elaboración de esta tesis han ido apareciendo, como es lógico, nuevos temas vinculados al argumento central de nuestro trabajo. Estos temas, entre los cuales se podría citar una discusión profunda sobre el carácter científico de la economía, o bien, un análisis exhaustivo de las aplicaciones matemáticas en la teoría económica (no solo del cálculo infinitesimal), han recibido un tratamiento incompleto, a veces marginal. Ello ha sido así, tanto por la necesidad de centrarnos en el objeto de nuestro estudio, ya de por sí suficientemente complejo, como por nuestras propias limitaciones con relación a los nuevos temas. No obstante se ha procurado que el texto final presente la mayor coherencia que nos ha sido posible y asuma, decorosamente, sus carencias.

Con relación a algunos aspectos formales, habría que señalar la inclusión en el texto de los razonamientos de carácter matemático, a veces con una cierta profusión de fórmulas y relaciones de tipo diverso. Ello es debido a la creencia, quizás equivocada, de una mayor facilidad en la comprensión global de las ideas expresadas; pensamos que la formalización matemática posee, en si misma, propiedades que permiten poner en evidencia objetos y relaciones difíciles de captar mediante una exposición puramente literaria, en oposición a la *reclusión* en apéndices de los razonamientos matemáticos. No seguimos, en este caso, la afirmación de Marshall en el sentido de que "*el lugar adecuado para las matemáticas en un tratado sobre Economía Política es donde menos se vean*" (cit. por Spiegel 1973, p. 643), aunque compartimos, desde luego, su consciencia de los abusos a que podría prestarse la economía matemática. Sólo incluimos un apéndice cuyos contenidos consideramos que alterarían notablemente el hilo de la exposición.

Con relación a las notas a pié de página creemos que la exposición será más fluida, en la medida que su contenido pueda ser incluido en el texto. Por último, debemos señalar que la bibliografía final recoge, de forma exclusiva, los libros o articulos mencionados o **citados** a lo largo del texto.

El método que hemos adoptado en este trabajo se puede resumir en los siguientes puntos:

a) Un estudio comparado de la relación entre Matemáticas (en especial, Cálculo diferencial) Física y Economía, a partir de la especial relación que se establece entre las dos primeras y que caracterizamos mediante tres propiedades específicas, propiedades cuyo cumplimiento tratamos de verificar para la relación Matemáticas-Economía. A ello se dedica, especialmente, el capítulo primero.

b) Análisis de la solidez teórica de las aplicaciones del Cálculo Infinitesimal, a las variables y funciones económicas, con la referencia de las *similares* aplicaciones en la física clásica. Se tratarán en los capítulos segundo (física), y tercero, en especial.

c) Indagación sobre las consecuencias que se puedan derivar de la *falta de realismo* de los supuestos matemáticos en la teoría económica, y de la aplicación *impropia* de algunas propiedades y teoremas. Se estudiarán en los capítulos tercero y cuarto.

d) Valoración del papel de las aplicaciones matemáticas en economía, más allá de lo estrictamente formal. Se realiza en el capítulo primero y en las conclusiones, en particular.

La tesis que tratamos de probar a lo largo de este trabajo, se podría exponer de forma simplificada, del siguiente modo:

1) La relación entre la matemática y la economía es de naturaleza diferente a la que constituye con la física.
2) La falta de realismo de los supuestos matemáticos utilizados en la teoría económica neoclásica, puede condicionar los resultados.
3) Algunas propiedades y teoremas matemáticos pueden ser *instrumentalizados* en favor de la demostración de ciertos resultados económicos.
4) Las matemáticas, en general, y en particular el Cálculo diferencial, contribuyen a la *legitimación* de la teoría económica neoclásica como supuesta *física social.*

En definitiva, esta tesis pretende ser una modesta contribución al análisis crítico de la utilización de las matemáticas en economía, tanto de sus defectos formales, como, sobre todo, de las implicaciones económicas que conlleva. El hilo conductor de la misma sería el papel del Cálculo diferencial, sus aplicaciones y consecuencias.

Finalmente, deseo manifestar mi más profundo agradecimiento al profesor Dr. D. Carlos Berzosa Alonso-Martinez, director de esta tesis, por la confianza que depositó inicialmente en nuestras posibilidades de llevar adelante este trabajo, por su orientación y pertinentes observaciones, y por su paciencia, de la que ha hecho gala a lo largo de varios años.

CAPITULO PRIMERO. LA NATURALEZA DE LAS RELACIONES ENTRE MATEMÁTICAS-FÍSICA Y MATEMÁTICAS-ECONOMÍA.

En éste capitulo se pretende realizar un análisis comparativo de la relación existente entre, por un lado, las matemáticas y la física, y por otro, las matemáticas y la economía. Partiremos para ello del estudio de la especial relación que se establece entre Física y Matemáticas, de las singulares, creemos, características de ésta relación. Trataremos de extender estas propiedades al campo de las relaciones de las matemáticas con la economía y se estudiarán las consecuencias que se deriven de esta generalización.

1. LAS MATEMÁTICAS EN EL DESARROLLO DE LA CIENCIA.

Es universalmente aceptada la idea de que las matemáticas constituyen el lenguaje de las Ciencias. En la medida que una rama del conocimiento humano se desarrolla, se va estructurando, adopta el lenguaje preciso de las matemáticas.

La última y definitiva etapa en el desarrollo de cualquier ciencia sería, por tanto, la matematización de la misma, es decir la expresión en términos matemáticamente precisos de leyes contrastadas empiricamente o mediante observación. En efecto, desde la célebre afirmación de Galileo de que el libro de la naturaleza "*está escrito en lenguaje matemático*" (Galileo Galilei 1623, p. 232), hasta Heisenberg " *la Matemática es, por así decir, el lenguaje en que la ciencia plantea sus problemas y puede formular sus soluciones* " (Heisenberg W.1955, p. 46), es general su aceptación.

Sin embargo, consideramos que esta concepción de la matemática, y en particular de la teoria de funciones y del cálculo infinitesimal, como lenguaje, es radicalmente insuficiente para describir la especial relación existente con la fisica, relación que como veremos es mucho más profunda e importante, y por otro lado, no es aplicable de igual modo, con similar eficiencia, al resto de las ciencias de la naturaleza y a la economía y demás ciencias sociales.

Esta idea, de la matemática como lenguaje de las ciencias, sería, en parte, la manifestación de una relación instrumental (estadística, econometría, álgebra matricial, programación lineal, análisis infinitesimal etc,); las matemáticas intervendrían como un instrumento técnico en situación de exterioridad respecto del objeto de su intervención. Asimismo actuarían como forma precisa de expresar relaciones de dependencia entre magnitudes cuantificables (variables). H. Poincaré describe estas ideas con claridad *"Todas las leyes se extraen de la experiencia, pero, para enunciarlas, se precisa de una lengua especial; el lenguaje ordinario es demasiado pobre, y además demasiado vago, para expresar relaciones tan delicadas, tan ricas, y tan precisas"* (Poincaré H. 1910, ed. esp.1946).

Ambas intervenciones, como instrumento exterior y como forma de expresión, configurarían, de forma conjunta, la relación que podríamos llamar habitual o normal entre la matemática y el resto de las ramas del conocimiento: relación instrumental y de lenguaje.

Sin embargo, la relación que mantiene con la física es de distinta naturaleza, no es explicable sólo en términos de aplicación instrumental o de forma de expresión rigurosa. Los conceptos e hipótesis físicas no son independientes de las matemáticas, están indisolublemente ligados a ellas.

Las hipótesis físicas resultan inseparables de su forma matemática, (considérese el caso simple de la velocidad instantánea, resulta indisoluble del concepto de derivada respecto del tiempo); Lévy-Leblond, caracteriza ésta relación especial mediante dos propiedades, que a nuestro juicio, explican de forma clara ésta singular situación, (Apéry R. y otros 1982, ed. esp.1988, p.80). Se trata de la **plurivalencia fisica de las matemáticas** y del **polimorfismo matemático de la fisica**.

La primera propiedad se refiere a la capacidad de un mismo modelo matemático para expresar relaciones o propiedades físicas muy diferentes, mientras que la segunda nos indica como una sola relación física puede ser expresada, matemáticamente, con diversos modelos de diferente grado de complejidad. En ambas jugarán un papel protagonista las funciones y el cálculo diferencial, dada la especial adecuación de las variables físicas a los requerimientos del cálculo infinitesimal y la teoría de funciones. Trataremos de exponer estas propiedades con una formulación propia, así como de indagar sobre su naturaleza, en los apartados siguientes.

Por el contrario, entendemos que la relación con el resto de las ciencias (incluida la economia) será, fundamentalmente, de **aplicación instrumental**, en la medida en que se puedan definir variables cuantificables, matematizables, y de aportación de una **forma** precisa y rigurosa de **expresar relaciones** hipotéticas u observables entre las mismas.

Después de ésta primera aproximación a la relación entre matemática y el resto de las ciencias, se puede entender que sea la física el dominio donde más fértil ha sido la colaboración de ambas ramas del conocimiento.

En efecto, desde el siglo diecisiete al diecinueve, las dos ciencias han progresado al unísono. Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Gauss, Maxwell, entre otros, hicieron importantes contribuciones en física (mecánica y electromagnetismo, fundamentalmente) y matemáticas (análisis de funciones, calculo diferencial e integral). Las dos grandes teorías fisicas del siglo veinte, relatividad y mecánica cuántica, han ido ligadas al calculo tensorial y espacios de Hilbert. En cuanto a los desarrollos más recientes, cabría mencionar la nueva interrelación que se produce con la teorías cuánticas de campos topológicas, en la búsqueda de un marco adecuado para establecer los fundamentos de la Teoria de cuerdas (Jaffe, A. y Quinn, F. 1993), y por otro lado, la nueva matemática del caos, que trata de explicar el comportamiento dinámico de ciertos sistemas complejos nó lineales (Stewart, I. 1989).

En el dominio de la economía, tanto los modelos de equilibrio general, como la teoria neoclásica de la producción o los modelos macroeconómicos de crecimiento utilizan en su formulación el cálculo diferencial y (ó) la teoria de ecuaciones diferenciales, en clara similitud con el proceso seguido en la física clásica. Es en la medida en que éstas técnicas ó herramientas matemáticas han sido diseñadas para el estudio cuantitativo de los procesos continuos, en la que cabe cuestionarse la fiabilidad de éstos planteamientos en el ámbito de la teoría económica. No sería extensible, sin embargo, este cuestionamiento a las aplicaciones econométricas ligadas a la estadística y al cálculo matricial (modelos input-output), ni a la aplicación de los métodos de programación lineal, por su naturaleza matemática absolutamente diferente.

Cuando miramos el terreno del resto de las ciencias sociales, y de la biología, podemos apreciar la incapacidad de construir modelos similares a los de la física, que nos permitieran aplicar los mismos métodos del cálculo diferencial. Gran parte de los procesos más relevantes presentan discontinuidades en el tiempo, o en el espacio (desde la división celular, a la frontera entre dos clases de tejido orgánico). Además las observaciones, necesarias para el trabajo teórico, rara vez son de la misma precisión en éste ámbito, que las que se realizan en física.

En éste sentido, la teoría de las catástrofes, desarrollada inicialmente por René Thom (1975), ha abierto nuevas posibilidades para el estudio de éstos procesos. En efecto, dado que se trata de una teoría que estudia singularidades, cuando se aplica a ciertos problemas del campo de la biología o incluso de la economía, trata específicamente de las propiedades de las discontinuidades, sin referirse a ningún mecanismo específico subyacente. Ello la hace especialmente apropiada para el estudio de sistemas cuyos mecanismos internos no se conocen, y para situaciones en que las únicas observaciones fiables se refieren a sus discontinuidades. En éste sentido se ha llegado a afirmar que esta teoría sería una parte de la biología teórica (Saunders P.T. 1980, ed esp. 1983, p. XI).

Son igualmente sugerentes las posibilidades de aplicación de esta teoría en economía; Zeeman E.C. (1974) y Balasko Y. (1978), han estudiado desde ésta óptica el comportamiento inestable de ciertos mercados y el equilibrio económico, respectivamente. También en Mas-Colell A. (1985), se estudian problemas ligados a singularidades y existencia de equilibrio, aunque estos trabajos están aún en sus inicios.

2. FÍSICA Y ECONOMÍA. UNA VISIÓN GENERAL.

La opción que hemos realizado, de tomar como referencia la relación con la física, para el estudio del empleo que de las matemáticas se hace en economía y en particular en la teoría económica neoclásica, se puede justificar por la indudable influencia que los métodos aplicados en el desarrollo de la mecánica clásica, de la física del movimiento y de sus causas, tuvieron en gran parte de los economistas a lo largo del siglo XIX y comienzos del XX. Como indica Naredo " *La creencia en la universalidad de las elaboraciones de la física newtoniana,..encontraba su justificación en el carácter absoluto y universal que por aquel entonces se atribuía a las categorías intuitivas de espacio, tiempo, sustancia o fuerza* (categorías, que por otro lado, han visto su carácter absoluto y universal puesto en cuestión por la física cuántica y relativista),..*Los economistas neoclásicos trataron de elevar el nivel de su ciencia por este camino, siguiendo las enseñanzas metodológicas de las ciencias físico-matemáticas..*" (Naredo J.M. 1987, pp.186-187). Teóricos como J.B. Say (1803) y J.S.Mill (1848) representan bien esta corriente. Shumpeter afirma que exageraron la analogía con las ciencias físicas, que Mill consideró como " *verdaderos modelos* " para la teoría económica (Shumpeter J. A., 1954, ed. esp. 1971, p. 599). Naturalmente no fueron los únicos, a ellos habría que añadir, entre otros, a Cournot, Jevons, Walras, Marshall, Pareto, Fisher.., y ya en nuestra época, y de forma destacada a P. Samuelson.

Cournot (1838), propuso el uso de funciones matemáticas para describir aspectos relativos a la demanda, la oferta y los precios, así como el empleo de la estadística para comprobar sus hipótesis. Para este economista la metodología matemática constituiría un instrumento fundamental para la contrastación empírica del resto de las disciplinas. En este marco Cournot establece la *ley de recurrencia* relativa a la posibilidad de trasladar los mismos elementos metodológicos de una ciencia a otra, en particular de la física a la economía.

Estos planteamientos llevaron necesariamente a las teorías del equilibrio económico en claro paralelismo con el equilibrio físico, si se suponen dadas todas las variables del problema, haciendo abstracción de sus variaciones en el tiempo, y al posterior estudio de la dinámica del sistema y la estabilidad del equilibrio si se consideran las variaciones temporales.

Así, por ejemplo, Jevons no sólo precisa el estrecho paralelismo metodológico existente entre las formulaciones económicas marginalistas y aquellas de la mecánica, que le llevan a describir su teoría: "*como la mecánica de la utilidad y del interés propio*", sino que considera que" *su método es tan seguro y demostrativo como aquel de la Cinemática o de la Estática, e incluso, casi tan evidente como lo son los elementos de Euclídes"* (Jevons, W. S. The theory of political economy, 1871 p. 21). Debido, quizás, a su superior formación en matemáticas, Marshall practicó con más precaución la economía matemática, fue mucho más escéptico en cuanto a sus posibilidades y más consciente de los abusos a que podía prestarse.

De este modo a lo largo del siglo XIX se comienza a adoptar una metodología formalista para elaborar las teorías económicas, basada en la utilización del análisis matemático clásico para la formulación de los modelos. Con un creciente grado de consistencia se van aplicando a la economía las herramientas del cálculo diferencial e integral. Se asumen, de forma implícita o explícita, la hipótesis restrictiva de operar con **funciones continuas y suaves para representar funciones de utilidad o de producción**, con la finalidad de que las técnicas del cálculo diferencial sean aplicables. Las **derivadas totales y parciales** son empleadas para desarrollar cálculos de **maximización y minimización.**

Basándose en estas herramientas teóricas y de cálculo se desarrollan, a pesar de sus limitaciones, los fundamentos matemáticos de las teorías de la producción, del consumo y del equilibrio general.

Como señala Pasinetti: “ *A partir de este punto comenzó un vasto movimiento teórico cuya tarea resultó ser la de ampliar las mismas elegantes herramientas del análisis de la utilidad marginal a todas las ramas del análisis económico.”* Entre estas herramientas, señala de modo relevante la utilizada por Samuelson (1947), una función matemática a maximizar bajo ciertas restricciones. ”*Este es el fundamento del análisis económico. Para Samuelson y los marginalistas, toda la Economía puede reducirse a ese principio (y herramienta matemática)”*. (Pasinetti, L. L. 1981, p. 25).

Es de enorme interés, en cuanto a la relación que consideramos (entre física y economía), la obra de Philip Mirowski: More heat than light (1989), donde el autor trata de descubrir el papel y la influencia de las ciencias de la naturaleza y en particular de la física, sobre los contenidos y estructura de la tradición ortodoxa en la teoría económica. A partir de la historia de la ciencia expone como los principios de conservación (de la energía, de la cantidad de movimiento) y los conceptos de substancia y campo de fuerzas influyeron en el desarrollo de la física y la economía, planteándose la controversia sobre si la teoría económica ortodoxa (neoclásica), se puede considerar o nó comprometida con un planteamiento científico.

Evidentemente, la relación entre la elaboración neoclásica o marginalista y la física clásica (mecánica, termodinámica y electromagnetismo del siglo XIX), va mucho más lejos de la simple **traslación** de los métodos matemáticos que se habían desarrollado de forma paralela a la física y habían probado su éxito en la misma (Cálculo infinitesimal, fundamentalmente), y que constituye uno de los temas de estudio preferente en este trabajo. La relación ó **inspiración** de la física a la economía ha ido más allá de las matemáticas e incluye la **identificación** entre conceptos y *leyes*, de supuesta vigencia en ambos campos, es decir, la **transferencia** desde el ámbito de la física al de la economía de conceptos y relaciones entre los mismos.

Los economistas neoclásicos trataron de subir el nivel de su *ciencia* por esta via, siguiendo las elaboraciones de la física y de las matemáticas y pretendiendo configurarla a imagen y semejanza de ellas. Ello exigía encontrar los principios elementales que aportaran una base universal a las construcciones deductivas posteriores. Además era necesario que todos estos principios se pudieran expresar en lenguaje matemático, para que la *precisión y coherencia* de las elaboraciones teóricas construidas, pudieran ser garantizadas por el prestigio de las matemáticas.

Como principios se tomaron las nociones, ya establecidas por los clásicos, de riqueza, producción, consumo, capital, sitema económico junto a las dos *leyes* supuestamente generales del comportamiento económico (J.S.Mill, A System of Logic, 1843), la tendencia a preferir *una ganancia grande a otra más pequeña* y la propensión a buscar *la máxima cantidad de riqueza con un mínimo de trabajo y abnegación.* A estas dos leyes los marginalistas añadieron el principio del decrecimiento de la utilidad marginal y el de los rendimientos decrecientes.

Irving Fisher, cuya investigación doctoral *Mathematical Investigations in the Theory of Value and Prices* (1892), fue dirigida por el gran físico J.W. Gibbs (sus contribuciones en termodinámica fueron fundamentales, en especial sobre el equilibrio en substancias heterogéneas), diseñó un detallado paralelismo entre mecánica y economía.

Paul A. Samuelson, casi ochenta años después, expresa su confianza en los mismos fundamentos físicos de la economía cuando afirma: “ *En tanto continúen vigentes las leyes de la termodinámica, seguiré relacionando los insumos con la producción; es decir, creyendo en las funciones de la producción.”* (prefacio a Ferguson, C.E. “The Neoclassical Theory of Production and Distribution” 1969).

Fisher, llevando la concordancia entre relaciones y conceptos físicos y económicos hasta sus últimas consecuencias, elaboró la siguiente tabla de analogías:

MECANICA	ECONOMÍA
Partícula*	Individuo*
espacio	Mercancías o bienes
fuerza	utilidad o desutilidad marginal
trabajo*	desutilidad*ó (utilidad negativa)
energía	utilidad
trabajo o energía* = (fuerza)x(espacio)	utilidad*=(utilidad marginal)x(mercancía)
fuerza vectorial	utilidad marginal, vectorial
fuerzas representadas mediante suma de vectores	utilidades marginales, representadas por suma de vectores
trabajo y energia son escalares	desutilidad y utilidad son escalares
La energia total puede ser definida como la integral con respecto a las fuerzas aplicadas.	La utilidad total disfrutada por el individuo es la integral con respecto a su utilidad marginal.
El equilibrio estará donde la energia neta (energia menos trabajo), es máxima.	El equlibrio estará donde la ganancia (utilidad menos desutilidad) es máxima.
Si la energia total es restada del trabajo total, la diferencia es “potencial” y es un mínimo.	Si la utilidad total es restada de la desutilidad total, la diferencia representa las “pérdidas” y es un mínimo.
(*) Señala las analogías que podrían ser cuestionables, en algún caso.	

La tabla anterior ilustra el grado de paralelismo concepual al que se llegó; en un ejercicio de asimilación conceptual y formal de los conceptos y leyes físicas, que pasa por alto la diferente naturaleza de tales conceptos y relaciones, intervinientes en los procesos físicos y económicos. Diferente naturaleza en relación a su grado de matematización, de cumplir como variables y funciones las exigencias formales del análisis matemático, a pesar de las evidentes dificultades para las variables de carácter económico. Por ejemplo, la formulación de las características de la función de demanda realizada por Cournot resultaban insuficientes, dado que nó distinguía entre funciones en general y funciones continuas, ni su definición de infinitésimo era muy clara.

También es instructiva, a este respecto, la polémica entre Poincaré y Walras sobre la medida de la utilidad. Según expone Schumpeter en su Historia del Análisis Económico (página 1147, edición en castellano 1971), el gran matemático H. Poincaré llegó a convencer a Walras de que la utilidad, pese a ser una cantidad, no es medible. Pero eso no le impulsó a eliminar en la edición definitiva de sus *Êléments* enunciados o implicaciones que afirman lo contrario. Por ejemplo, en la página 103 de dicha edición (1926), define la *rareté* (utilidad marginal) como la derivada de la utilidad total respecto de la cantidad poseída de un determinado bien, tomando del campo de la física la analogía con la velocidad (que es la derivada del desplazamiento respecto del tiempo). Probablemente, Walras, encantado por su impresionante formalización, trató de mantenerla, obviando las razones que originariamente le habían impulsado a construirla y haciendo caso omiso a las limitaciones formales que presentaban sus presupuestos.

De este modo se asumen aventuradas y restrictivas hipótesis para operar con funciones continuas y derivables, que representarían funciones de utilidad o de producción, con la finalidad de que las técnicas del cálculo diferencial fuesen aplicables. Las derivadas totales y parciales, como ya hemos señalado, serían empleadas para desarrollar cálculos de maximización y minimización.

La asimilación a la economía del concepto de campo de fuerzas, hizo posible la utilización de poderosas herramientas matemáticas tales como las ecuaciones de Hamilton o las de Lagrange, al costo de una considerable dificultad en la exacta determinación (comprensión) de lo que es realmente conservado (leyes de conservación), es decir, del *contenido* de la formulación.

Por otro lado, ante el grandioso empeño de hacer que la ciencia económica se construyera a imagen y semejanza de las ciencias fisico-matemáticas, a partir de ciertos conceptos y princios elementales, se obvió que la supuesta generalidad de tales principios era mucho más vulnerable que la de aquellos (que servían de modelo), y que constituían la base de la física newtoniana. Además los nuevos conocimientos de la física moderna (teoría de la relatividad restringida y generalizada y mecánica cuántica), desde los inicios del siglo XX, fueron cuestionando el carácter absoluto y universal de las categorías de espacio, tiempo, masa, fuerza y en general los principios en que se basaban las pretensiones de universalidad de la mecánica y la geometría de su época, y que como hemos visto servían de referencia para las elaboraciones teóricas de los marginalistas y de sus continuadores. En este sentido resultan reveladoras las reflexiones de Mirowski en su obra citada (1989), sobre como relevantes economistas neoclásicos de nuestra época, Samuelson y Friedman, lo que en realidad hicieron fue imitar en los sesenta del siglo XX (economía), los sesenta del XIX (física clásica).

¿Porqué el proceso de **traslación** de la física hacia la elaboración de la teoría económica se ha limitado a la física clásica?. No consideramos, por entenderla fuera del ámbito de esta reflexión y sin relación con la pregunta que nos hacemos, la llamada *econofísica* que trata de aplicar nuevas herramientas o procedimientos, de carácter matemático, como **la teoría de las catástrofes** (Thom, R. 1972), para resolver problemas complejos referidos a la bolsa, al mundo de los negocios o incluso de la teoría del equilibrio.

La respuesta a la pregunta anterior se podría buscar, entonces, en el propio proceso de elaboración de la teoría marginalista. Por un lado el *procedimiento* de **imitación** de conceptos y *leyes,* en especial las de conservación, experimentaría problemas difícilmente superables cuando aparecen nuevos conceptos y desarrollos de la física, como el incremento de la entropía ligado al segundo principio de la termodinámica, o más importante aún: la teorías especial y general de la relatividad, la mecánica cuántica y el principio de incertidumbre.... . Estos desarrollos alteraron el significado de las leyes de conservación y el carácter de las categorías básicas que fundamentaban la física newtoniana; H. Poincaré (1952), muestra que sólo bajo condiciones muy limitadas los métodos matemáticos señalados anteriormente podrían ser usados, desarrollándose nuevos instrumentos adecuados a la nueva física. Mirowski, en su obra citada (1989), va más lejos y sugiere que los físicos han ido abandonado las leyes de conservación, aferrándose a algunas metáforas anticuadas.

Es, además, evidente, como la irrupción de la teoría de la relatividad alteró el carácter absoluto y universal del **tiempo**, del **espacio** y de la relación entre **masa** y **energía;** la teoría cuántica modificó nuestra concepción de la **naturaleza de la materia**. De éste modo las referencias fundamentales que servían de base a la física de Newton se conmueven y el edificio de la física clásica ve restringida su validez por las elevadas velocidades y las escalas dimensionales muy pequeñas (o de otro modo: mantiene su vigencia para velocidades lejanas a la de la luz y escalas superiores a la atómica y subatómica). Si la transferencia de estas categorías, desde la física **clásica** a la teoría económica, se puede considerar una cuestionable *aventura metodológica* susceptible de crítica desde diversos enfoques; la renovada e hipotética **traslación** hacia los conceptos económicos supuestamente relacionados con la **nueva concepción** del tiempo, espacio, masa, fuerza, trabajo, energía etc., (una vez perdido su *antiguo* carácter universal y absoluto), supondría un auténtico **desmantelamiento** del edificio teórico neoclásico tal y como fue concebido.

Si a pesar de lo expuesto, sigue gozando de toda consideración la creencia en la universalidad y validez de los principios que sustentan a la teoría económica neoclásica, y de la *cientificidad* de sus elaboraciones, no será por sus cualidades intrínsecas ni por la coherencia de sus desarrollos.

Sobre la caracterización de la economía neoclásica como *física social*, en cuanto a sus principios y estructuración matemática interna, por un lado, y su capacidad de análisis y *predicción* de la realidad económica, por otro, habría que añadir a las reflexiones anteriores un estudio sobre la coherencia y el rigor de la aplicación del análisis matemático clásico (Cálculo infinitesimal) a las elaboraciones teóricas de la economía ortodoxa, estudio que se intentará en este trabajo, en el convencimiento de que la utilización de técnicas matemáticas o la mera matematización de una disciplina no es garantía del carácter científico de la misma.

En cuanto al carácter analítico y predictivo de la realidad economica, atribuible a la teoría neoclásica, pensamos con Sanchez Ron: “ ***No hay ciencia sin capacidad predictiva***. *Una capacidad que* ***habitualmente*** *se manifiesta mediante leyes matemáticas, universales dentro de su dominio de aplicabilidad.....No creo que las disciplinas sociales....hayan llegado todavía, ni que esté claro que lo hagan algún día a semejante situación.”* (el subrayado es nuestro).(Sánchez Ron 1996, pp. 61-62).

3. LA NATURALEZA DE LA RELACIÓN ENTRE MATEMÁTICAS Y FISICA

En este tercer apartado vamos a tratar de profundizar en la especificidad de las relaciones entre matemáticas y física. Esta singular relación resulta difícil de captar desde la óptica que de simple lenguaje de la naturaleza, pues desde esta concepción nos veríamos obligados a considerar este lenguaje como universal, es decir, como susceptible de ser aplicado a todas las ramas del conocimiento. Este punto de vista obligaría a considerar la física, donde de manera empíricamente evidente las matemáticas "funcionan mejor", como diferente de las demás ciencias sólo cuantitativamente. Adoptaremos el procedimiento de analizar esta relación a partir de las propiedades que creemos le son propias y que hemos mencionado en el primer apartado de éste capitulo, nos referimos a la polivalencia ó plurivalencia física de las matemáticas y al polimorfismo matemático de la física.

A partir de éstas propiedades y de la naturaleza de las variables y procesos físicos, se irá marcando la frontera que diferenciará esta relación, que podríamos considerar privilegiada, de la existente con la economía.

3.1. El polimorfismo matemático de la física.

Los conceptos e hipótesis físicas no son independientes de las matemáticas, están inevitablemente ligados a ellas. Las hipótesis físicas resultan inseparables de su forma matemática, sería difícil encontrar un sólo concepto físico no asociado a uno o varios conceptos matemáticos. Así pues la física interioriza las matemáticas, guarda con ella una relación de constitución. Ello no significaría que cada concepto físico posea una constitución matemática absoluta que fuese su esencia definitiva. Esta relación tendría un carácter dinámico, que se manifiesta en su polimorfismo matemático. Denominaremos de este modo la propiedad que poseen las leyes y conceptos físicos de poseer varias matematizaciones posibles, de ser expresados matemáticamente con diversos modelos de diferente grado de complejidad.

El ejemplo mas sencillo de esta propiedad podría ser la cinemática del movimiento rectilíneo uniforme, que puede concebirse de modo geométrico: espacios iguales recorridos en tiempos iguales; de modo funcional: dependencia lineal de la distancia cubierta con relación al tiempo: S = v t, o analíticamente: velocidad constante o aceleración nula.

Un ejemplo más interesante, lo proporcionaría la dinámica del punto material en un campo de fuerzas conservativo. Las ecuaciones que describen el movimiento de la partícula, se pueden expresar mediante ecuaciones diferenciales (formulación Newtoniana), mediante ecuaciones en derivadas parciales (formulación Lagrangiana), o por medio de principios variacionales (principio de mínima acción de Hamilton). En efecto, en el primer caso tendríamos:

$$F = m\frac{d^2r}{dt^2},$$

siendo F la fuerza generadora del movimiento, igual a la derivada segunda respecto del tiempo del vector de posición **r**, de la partícula de masa m.

Esta expresión, que constituye la ley fundamental de la dinámica de Newton, estaría incluida en la formulación Lagrangiana, más general, que se expresaría mediante un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, como describimos a continuación.

Este sistema de i ecuaciones, en derivadas parciales, serían la forma más extendida de las Ecuaciones de Lagrange, que describen la dinámica del punto material y constituyen las ecuaciones generales de la mecánica de Newton. Engloban a la formulación anterior y vienen dadas por las expresiones: $\frac{d}{dt} p_i = \frac{\partial}{\partial q_i} L$, que nos dicen que la derivada o variación temporal de los momentos conjugados p, es igual a la derivada parcial respecto de la coordenada generalizada q, de la función de Lagrange L, o Lagrangiana, definida como la diferencia entre las energías cinética y potencial de la partícula.

La tercera formulación ó modelo matemático que vamos a considerar para describir la misma situación física, estaría basada en el principio de Hamilton, que previamente nos exige definir la función acción de Jacobi: $V = \int_0^t L dt$, siendo L la función Lagrangiana, y que nos dice que esta integral será máxima o mínima cuando es calculada a lo largo de la trayectoria real, en comparacíon con las calculadas a lo largo de las trayectorias virtuales, (Bru L. 63, p. 348). Este planteamiento es más general que los anteriores y se puede demostrar fácilmente que implica a las ecuaciones de Lagrange.

Consideramos relevante para el estudio comparativo con la economía que pretendemos realizar, la exposición de un tercer ejemplo del polimorfismo matemático de la física, siquiera sea de forma somera. Nos referimos a las distintas formulaciones o modelos matemáticos que pueden describir las leyes que regulan el electromagnetismo. En este caso veremos dos planteamientos, dos niveles de exposición. El primero estará basado en tres leyes clásicas: la de Coulomb, que describe la fuerza de interacción electrostática entre partículas cargadas electricamente, la de Faraday, que nos explica la fuerza electromotriz inducida en un circuito atravesado por un flujo magnético variable, y la de Ampére, que nos relaciona la intensidad de corriente eléctrica que circula por un circuito con la intensidad del campo magnético asociado.

El segundo planteamiento, consiste en el conjunto de ecuaciones en derivadas parciales, conocido como ecuaciones de Maxwell (Reitz, J.R. y Milford, F.J. 67 ed. cast.1969, p. 320). Cada una de ellas representa la generalización de algunas observaciones experimentales, a su vez expresadas por las leyes citadas en el primer nivel. De este modo tendríamos en éste primer nivel:

Ley de Coulomb : $F = k\frac{Q_1 Q_2}{d^2}$, denominando por Q a las cargas eléctricas y por d a la distancia entre ambas.

Ley de Faraday : $\varepsilon = L\frac{d\Phi}{dt}$, siendo L el coeficiente de inducción, que multiplica a la derivada temporal del flujo magnético que atraviesa el circuito.

Ley circuital de Ampére: $\oint_C Hdl = I$, nos da la intensidad de corriente I que recorre un circuito C sometido a una intensidad de campo magnético H.

Las ecuaciones de Maxwell, conjuntamente, describen cualquier fenómeno electromagnético. Son expresiones matemáticas de leyes experimentales, que mediante ecuaciones en derivadas parciales, nos relacionan todas las variables físicas que aparecen en éste ámbito. Representan una generalización de las leyes anteriormente reseñadas, que conforman el primer nivel de modelización, y sin duda constituyen uno de los ejemplos mas acabados de la fuerte relación entre matemáticas y física que estamos estudiando. Se pueden expresar del siguiente modo:

$\frac{\partial}{\partial x}D_x + \frac{\partial}{\partial y}D_y + \frac{\partial}{\partial z}D_z = \rho$, o sea la divergencia de la función vectorial **D**, desplazamiento eléctrico, es igual a la densidad de carga que crea el campo. Es una forma de la ley de Gauss, que a su vez se deduce de la ley de Coulomb.

El segundo grupo de ecuaciones se podría expresar:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}E_z - \frac{\partial}{\partial z}Ey\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}E_x - \frac{\partial}{\partial x}E_z\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}E_y - \frac{\partial}{\partial y}E_x\right)\vec{k} = -\left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial t}B_x + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial t}B_Y + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial t}B_z\right)$$

El operador rotacional del vector campo eléctrico **E,** es igual a la derivada temporal del vector inducción magnética **B,** cambiada de signo. Esta sería la forma generalizada (diferencial), de la ley de inducción electromagnética de Faraday.

El tercer grupo de ecuaciones, nos dice que el rotacional de la función vectorial intensidad de campo magnético **H**, es igual a la función densidad de corriente eléctrica **J**, más la derivada temporal de la función desplazamiento eléctrico **D.**

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}H_z - \frac{\partial}{\partial z}H_y\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}H_x - \frac{\partial}{\partial x}H_Z\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}H_y - \frac{\partial}{\partial y}H_x\right)\vec{k} = \vec{J} + \left(\frac{\partial}{\partial t}D_x\vec{i} + \frac{\partial}{\partial t}D_y\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}D_z\vec{k}\right)$$

Estas ecuaciones representan una extensión diferencial de la ley circuital de Ampére, ya considerada anteriormente.

Por último tendríamos la ecuación que manifiesta la no observación de polos magnéticos simples : (4) $\frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y + \frac{\partial}{\partial z} B_z = 0$, Es decir la divergencia de la función vectorial **B,** inducción magnética, es nula.

En los tres casos de polimorfismo matemático de la fisica que hemos descrito (movimiento uniforme, dinámica del punto material y electromagnetismo), se verifica que las diversas formulaciones de una misma ley son rigurosamente equivalentes, en sentido matemático. No lo son necesariamente en sentido físico, donde lo que ocurre es que cada formulación mas elevada, mas sofisticada matemáticamente, incluye los contenidos de la anterior, será mas general, incluirá nuevas relaciones y propiedades producto de nuevas observaciones experimentales y desarrollos teóricos; en un proceso de experimentación y elaboración a lo largo del tiempo.

Debemos de hacer notar algo esencial para las conclusiones posteriores. Nos referimos a la naturaleza continua de los procesos cinemáticos, dinámicos y electromagnéticos que se han considerado, y la pertinencia de la utilización de derivadas espaciales y temporales para funciones que describen procesos de dicha índole. No será esta la situación en los procesos económicos que veremos mas adelante.

3.2. Plurivalencia física de las matemáticas.

El hecho de que un mismo modelo matemático pueda representar muy diferentes relaciones físicas (de forma claramente simétrica a la situación que acabamos de exponer, donde un mismo sistema físico podía ser expresado por diferentes modelos matemáticos), es en si mismo ilustrativo de la especial relación que se establece entre ambas ciencias. Esta plurivalencia o polivalencia de un sólo instrumento matemático para expresar fenómenos o procesos físicos muy distintos la vamos a ilustrar mediante dos ejemplos relevantes. El primero vendrá dado por la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes y homogénea. En efecto, esta ecuación puede representar, entre otros procesos, las oscilaciones eléctricas en un circuito R-L-C: $L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=0$, donde L sería la inductancia, C la capacidad, R la resistencia e i la intensidad de corriente eléctrica que recorre el circuito considerado.

Asimismo podría representar (la misma ecuación diferencial), las oscilaciones mecánicas de un muelle sometido a una deformación inicial: $m\frac{d^2x}{dt^2}+r\frac{dx}{dt}+kx=0$, siendo m la masa del muelle, r la resistencia del medio donde se sitúa el movimiento, k la constante del muelle, y x el desplazamiento producido. En ambos casos el fenómeno es transitorio, y la resolución de la ecuación diferencial nos conduce a expresiones formales o funciones, idénticas, que nos relacionan la intensidad de corriente i que circula por el circuito ó el desplazamiento x de un punto del muelle, con el tiempo y los parámetros correspondientes (Puig Adam P. 1967, p. 105-106).

La igualdad funcional en ambos casos ilustra con claridad la polivalencia del modelo matemático considerado.

$$i = i_0 e^{-\frac{R}{2L}t} sen(\omega t + \varphi)$$
$$x = x_0 e^{-\frac{r}{2m}t} sen(\omega t + \varphi)$$

El segundo ejemplo que vamos a exponer, se refiere a la ecuación en derivadas parciales de Poisson, que representa algunos procesos físicos, diferentes en su significación, pero cuya identidad formal es evidente. Por ejemplo la teoría electrostática puede ser expresada por la siguiente ecuación:

$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$; siendo U el potencial electrostático, creado por la densidad de carga ρ, en un medio con constante dieléctrica ε_0. De modo similar, el campo gravitatorio creado por una masa de densidad ρ, puede ser expresado por una ecuación en derivadas parciales matemáticamente idéntica a la anterior: $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi\rho$, donde, como es lógico, U representa el potencial gravitatorio.

La ilusión de una armonía preestablecida de forma, podríamos llamar, biyectiva, entre conceptos físicos y matemáticos, se disipa al contemplar la plurivalencia ó polivalencia física de los instrumentos matemáticos; réplica de las matemáticas al polimorfismo matemático de la física antes analizado. Feynman (1969), analiza estas identidades formales considerando que las ecuaciones no son verdaderamente idénticas sino aproximaciones; un mismo modelo matemático expresa de forma más o menos precisa, *aproxima* la realidad física mejor o peor en cada caso.

En efecto, la ecuación en derivadas parciales de Poisson, por ejemplo, explica tanto la electrostática como la teoría (estática) de la gravitación, la difusión del calor y el flujo laminar de un fluido en dos dimensiones, etc.

Sin embargo, una observación más profunda de estos variados casos pone de manifiesto que las ecuaciones, en cada uno de ellos, aunque formalmente idénticas, no representan con igual grado de “fidelidad” cada fenómeno descrito por las mismas. La ecuación que se ha adoptado para la difusión de un conjunto de corpúsculos (distribución uniforme de los mismos en un medio físico), es solamente una aproximación válida para distancias grandes frente al recorrido libre medio (estadístico), de dichas partículas. Si se miran las cosas mas de cerca, veríamos que los corpúsculos individuales se desplazan en diferentes direcciones, de modo que la ecuación diferencial será una aproximación de la realidad.

Mientras los fenómenos transcurran en el espacio de modo razonablemente suave, lo relevante serán las variaciones de las magnitudes con la posición en dicho espacio. Por ello aparecen las derivadas en forma de gradiente o de divergencia, lo que tipifica a todos los casos de aplicación de un mismo modelo matemático es que interviene el espacio y se simplifica y representa la complejidad del problema estudiado mediante la utilización de ecuaciones diferenciales o en derivadas parciales.

De este modo el espacio sería lo común, las derivadas expresarían las variaciones de las magnitudes con la posición, en dicho espacio, además de las variaciones temporales en fenómenos dinámicos.

3.3. Las matemáticas y la especificidad de la física.

Es así, a través de un proceso de aproximación y abstracción, como diversos fenómenos físicos llevan a matemáticas análogas. Es importante observar como éstas convergencias hacia similares modelos matemáticos, conducen a la construcción de nuevos conceptos físicos comunes a campos diversos. Así, por ejemplo, los conceptos de impedancia y resonancia, desempeñan un papel fundamental en todos los fenómenos oscilatorios (eléctricos, mecánicos, acústicos, etc), puesto que están regidos por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Esta importante consecuencia de la plurivalencia de las matemáticas argumenta en favor de la tesis de que lo que fundamenta y constituye a los conceptos físicos es su matematización específica.

De forma recíproca, este fenómeno de plurivalencia no deja de tener su efecto sobre las propias matemáticas, en un desarrollo paralelo de las dos ciencias. La idea de una preexistencia de las estructuras matemáticas respecto de los conceptos físicos que permite constituir, no tiene fundamento histórico. Podría bastar para advertirlo el estudio de la emergencia simultánea y estrechamente interconectada del cálculo diferencial e integral y de la dinámica de Newton, Gandt (1982). Desde el siglo diecisiete al diecinueve, las dos ciencias progresaron al unísono. Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Gauss, Maxwell, entre otros, realizaron importantes contribuciones en física (mecánica y electromagnetismo, fundamentalmente) y en matemáticas (análisis de funciones, calculo diferencial e integral). De igual modo, como hemos señalado con anterioridad, las dos grandes teoría físicas del siglo veinte, relatividad y mecánica cuántica han ido ligadas al cálculo tensorial y los espacios de Hilbert, respectivamente.

En realidad ha existido un doble movimiento contradictorio en el interior de las matemáticas, tendentes por un lado a convertirse en totalmente autónomas mediante la instalación de mecanismos propios de desarrollo, y persistiendo, por otro lado, en encontrar motivaciones y apoyos en la física.

Esta tendencia contradictoria, independencia- interdependencia, se mantiene en la actualidad en casos especialmente interesantes: relación entre la teoría de las representaciones de grupos compactos y la utilización de los principios de simetría en física cuántica, o bien la relación entre las teorías cuánticas de campos topológicas y la búsqueda de los fundamentos de la teoría de cuerdas (Jaffe A. y Quinn F. 1993).

Por otro lado, la singularidad de la física en su relación con las matemáticas resulta difícil de captar, desde una óptica de simple lenguaje de la naturaleza. En efecto, desde esta concepción, nos veríamos obligados a pensar este lenguaje como universal, es decir, como susceptible de ser aplicado todas las disciplinas científicas. Este punto de vista obligaría, como señala Lévy-Leblond (1982), a considerar la física, donde, de manera empíricamente evidente, las matemáticas “funcionan mejor”, como diferente de las demás ciencias sólo cuantitativamente. Desde éste planteamiento, a nuestro juicio erróneo, la diferencia se podría justificar históricamente, de modo que la física estaría “mas adelantada” que las demás ciencias, y ello explicaría su grado de matematización mas avanzado. Las implicaciones de esta concepción, no se nos deben ocultar, pues nos pueden llevar a justificar la aplicación (de forma mimética y acrítica) a otras ramas del conocimiento, supuestamente mas atrasadas, entre ellas la economía, los modelos y métodos matemáticos, que tan buen resultado habrían dado en su aplicación a la física.

Otra concepción, incompleta a nuestro juicio, de la especificidad de la relación estudiada, situaría la singularidad de la física en el objeto de su práctica, más que en su situación histórica. Desde ésta óptica, la física, al emprender el estudio de las estructuras más profundas de la naturaleza, pondría de manifiesto sus leyes mas generales, más “simples” en sentido ontológico, y por tanto más matematizables.

En ambos casos, llegamos a una estructura jerarquizada de las ciencias. La matemáticidad adquiere entonces un carácter normativo y se convierte en criterio de cientificidad. Sin embargo el propio desarrollo histórico de las diferentes ramas del conocimiento contradice este punto de vista, tanto si se trata de la persistencia como disciplinas autónomas de ciencias tales como la química y la geología, o de la aparición de nuevas disciplinas como por ejemplo, la biología molecular, en el ámbito de las ciencias de la naturaleza y de la vida, o de la economía en las ciencias sociales.

Estas ciencias disponen de sus propios conceptos y relaciones, que pueden estar matematizados o no, pero cuya coherencia mutua y su relación con las practicas experimentales específicas de su dominio, o la contrastación con la realidad social, les bastarían para garantizar su cientificidad. **No serían las aportaciones que progresivamente les pudieran realizar las matemáticas las que, necesariamente, les confirieran carácter científico.** Dichas aportaciones tendrían la forma de **aplicación**, es decir, las matemáticas actuarían como un instrumento técnico, en situación de exterioridad respecto al objeto de su intervención. También podrían actuar como forma precisa de expresar relaciones de dependencia entre magnitudes cuantificables. Es ésta doble actuación de las matemáticas sobre las ciencias de la naturaleza o de la sociedad, que, como es lógico, no reviste en todas las mismas características ni similar profundidad, y que en lo se refiere a la economía será objeto de posteriores análisis, la que podemos considerar relación tipo o normal.

Consideramos, sin embargo, que en lo que se refiere a la física la relación que se establece, además de incluir las anteriores características, tiene aspectos propios que le confieren la singularidad que tratamos de establecer. Será el **polimorfismo matemático de la física**, con sus progresivas formulaciones de relaciones y propiedades a crecientes niveles de complejidad, y su propiedad simétrica: **la plurivalencia física de las matemáticas**, la polivalencia de un mismo modelo matemático para expresar diferentes realidades físicas; junto **con la naturaleza continua de los procesos dinámicos y electromagnéticos** considerados, y por lo tanto la especial adecuación de las derivadas espaciales y temporales para las funciones que describen procesos de dicha índole; lo que en su conjunto, configura una relación de naturaleza mas profunda y le otorga unas características diferentes y superiores a las que definen la que hemos denominado relación de aplicación**.**

Esta singular relación podríamos denominarla de **constitución**, es decir la matemática construye o constituye a la física; los conceptos y relaciones físicas son inseparables de su forma matemática, en un proceso mutuamente constructivo, y conjuntamente se desarrollan y enriquecen.

4. LAS MATEMÁTICAS Y LA ECONOMIA.

En este apartado analizaremos la relación existente entre ambos campos del conocimiento tratando de aproximarnos a su naturaleza, y realizando algunas comparaciones con la establecida con la física, analizada anteriormente. No obstante el empleo de las matemáticas por la economía tiene su propia historia, y conviene realizar una breve descripción de la misma.

4.1. Evolución histórica de la introducción de métodos matemáticos en la economía

Desde la "Political Arithmetick" de Sir William Petty (1690), hasta los relativamente recientes intentos de introducir la teoría de las catástrofes (Zeeman, E. C. 1974) o la Lógica Borrosa (Kosko B. Y Satoru I. 1993) en economía, han transcurrido tres siglos de relaciones más o menos explícitas y no siempre con igual fortuna, entre las Matemáticas y la Economía.

A lo largo de éste periodo, se ha producido un proceso acumulativo de incorporación de los métodos matemáticos, hasta el punto que hoy sería difícilmente concebible algún estudio o desarrollo económico, teórico o práctico, que prescindiera de la utilización de algún tipo de instrumento o método matemático. Podríamos decir que existe un consenso muy amplio, desde nuestro punto de vista bastante acrítico, sobre la bondad del uso de cualquier procedimiento matemático en la teoría o en la práctica económica.

Es generalmente asumido que la línea metodológica diferenciadora en cuanto a la utilización sistemática de métodos matemáticos a la economía fué trazada por A. Cournot, quien sería el padre de la economía matemática (entendiendo por tal, en sentido amplio, aquel dominio de conocimientos que comprende las diversas aplicaciones de conceptos y técnicas matemáticas a la economía, en particular, a la teoría económica) .

Cournot, con la publicación de sus "Investigaciones acerca de los principios matemáticos de la teoria de las riquezas" en 1838, utilizó de forma sistemática los principios generales del cálculo diferencial, captando el proceso económico en términos de relaciones funcionales, y obteniendo, en el marco del equilibrio parcial, el núcleo de la teoría estática de la formación del precio.

Podríamos dividir la historia de la utilización de métodos y procedimientos matemáticos en economia en tres periodos: el periodo marginalista, basado en el análisis matemático clásico y que abarcaría desde 1838 hasta 1947 (publicación de los Fundamentos del análisis económico de P. Samuelson), el periodo conjuntista/ lineal-modelizador, 1948-1959 (publicación de la Teoría del Valor de G. Debreu), y el periodo de integración que parte en 1960 y continua en nuestros días (Arrow K. e Intrilligator M. 1981). Es obvio que existe un solapamiento entre los diferentes periodos, se trataría de distinguir los tiempos donde el entramado matemático preeminente fue el indicado (cálculo diferencial, teoría de conjuntos, etc.).

4.1.a) **Periodo marginalista**. En este periodo comienza a adoptarse una metodología formalista para elaborar las teorías económicas, basada en la utilización del análisis matemático clásico para la formulación de los modelos. Se puede caracterizar, en el aspecto formal, por ser un periodo en que, con un creciente grado de consistencia, se van aplicando a la economía las herramientas del cálculo diferencial e integral. Se asumen, de forma implícita o explícita, la hipótesis restrictiva de operar con funciones continuas y suaves para representar funciones de utilidad o de producción, con la finalidad de que las técnicas del cálculo diferencial sean aplicables. Las derivadas totales y parciales son empleadas para desarrollar cálculos de maximización y minimización.

Basándose en estas herramientas teóricas y de cálculo se desarrollan, a pesar de sus limitaciones, los fundamentos matemáticos de las teorías de la producción, del consumo y del equilibrio general.

No es extraño que el marginalismo en sus comienzos buscase en la lógica del cálculo infinitesimal, particularmente en la teoría de los extremos locales de una función, el método básico y técnicamente adecuado para el planteamiento y solución de los problemas que se iban abordando, dada la eficacia que tales instrumentos habían demostrado en la mecánica racional, en el estudio y formalización de la física del movimiento y de sus causas.

Este segundo aspecto del marginalismo, el tomar como punto de referencia y como paradigma a la física (como ya hemos visto), tratando de trasladar los conceptos y formulaciones de la mecánica teórica al lenguaje de la economía (Jevons Walras, Edgeworth, Fisher, Pareto, etc..) incluye al aspecto anterior- uso del cálculo infinitesimal- y explica lo esencial de la relación entre matemáticas y economía en este periodo.

De forma paradójica, como, asimismo, hemos tenido ocasión de estudiar en el apartado segundo, cuando se va consolidando el perfil mecanicista de la ciencia económica (finales del siglo XIX y comienzos del XX), se produce un progresivo agrietamiento de la física clásica (newtoniana). Pocos años después de que Jevons (1871), se congratulara de haber construido una ciencia económica concebida como *la mecánica de la utilidad y del interés propio* se produce el experimento de Michelson y Morley sobre la medición de la velocidad de la luz, con sus resultados contradictorios en el marco de la física clásica y que encontrarían explicación, bajo unos supuestos muy diferentes, en el nuevo marco teórico de la teoría de la relatividad formulada por Einstein a partir de 1905.

Hay que señalar, por último, que los modelos económicos que se inician y desarrollan en esta etapa que llamamos marginalismo, están íntimamente asociados con una determinada concepción del proceso económico, ni la única, ni necesariamente la mejor. Esta concepción se podría ilustrar con la definición de Robbins, por la que el objeto de la teoría económica sería la explicación de la asignación de recursos escasos susceptibles de usos alternativos (Robbins, 1932).

4.1.b) **Periodo conjuntista/ lineal-modelizador**. Este periodo se caracteriza, desde el punto de vista matemático, fundamentalmente por dos aspectos. Por un lado se produce un cambio en las técnicas matemáticas utilizadas en la elaboración del discurso marginalista. Se utiliza la teoria de conjuntos y la topología para conseguir un mayor grado de generalidad en el dominio de funciones posibles.

Por otro lado, cabe incluir en éste periodo el surgimiento de los modelos de análisis de las dependencias intersectoriales, modelos input-output, gracias a W. Leontief (1941) y de los modelos basados en la programación lineal (Dantzig, 1949), ambos tributarios a su vez del análisis econométrico.

Se hace sistemático el uso de modelos lineales para el tratamiento de fenómenos no representables por medio de funciones regulares. Los sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales sustituyen, en alguna medida, a la utilización de las derivadas parciales.

Con relación al primer aspecto considerado, cabría distinguir entre dos generaciones de economistas: los marginalistas del periodo anterior, vinculados al cálculo diferencial y ocupados en el análisis del equilibrio parcial, y los neoclásicos de éste periodo, que podemos situar a partir de Hicks (1939), y de Koopmans (1958), en el aspecto matemático.

A pesar de que la teoría económica que se estudia es la misma (fundamentalmente la teoría del equilibrio general), esta última generación de autores que en cierto modo culmina con Debreu (1959), utiliza de forma profusa la Topologia, rama de la matemática que junto con los teoremas del punto fijo de Brouwer y Kakutani (1941) permiten una nueva formulación de la teoría económica neoclásica y que liberó, en parte, a esta teoría, de su dependencia del cálculo diferencial.

Se podría, en este sentido, afirmar, que el enfoque topológico-conjuntista sería más adecuado para resolver el problema de la existencia del equilibrio, mientras que el enfoque basado en la teoría de funciones y el cálculo diferencial (del tipo de Samuelson, 1947 y de Arrow, 1959), podría serlo para el análisis de la estabilidad del equilibrio.

Otro campo en el cual tiene lugar una notable difusión del instrumental matemático en la economia, durante este periodo, es el de los modelos de crecimiento, tanto de inspiración keynesiana (Harrod-Domar, 1949 y 1946) como de carácter neoclásico (Solow, 1956).

En las diferentes formulaciones de éste tipo de modelos dinámicos aparecen, de forma extensa, las ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales como herramientas para la representación de relaciones entre variables económicas -sus cambios o variaciones- y de determinación de magnitudes desconocidas como funciones del tiempo. Tales funciones actuarían como leyes que *regulan* la evolución temporal de las magnitudes en cuestión.

Asimismo se desarrolla el concepto de función de producción macroeconómica en la tradición neoclásica (Cobb y Douglas 1928 y Solow 1957, fundamentalmente), tratando este último de recoger las variaciones producidas por el cambio técnico. Es de señalar que dicha función se *define*, en principio, como continua para todos los valores de trabajo y capital, hipótesis a todas luces irreal y con las importantes consecuencias que se considerarán.

Se podría incluir también en este periodo (por consideraciones cronológicas) la aparición de la Teoría de Juegos, que analiza las relaciones económicas y sociales de producción bajo el enfoque de los juegos de estrategia, Von Neumann (1944) y J. Nash (1951) estarían entre sus principales iniciadores.

Finalmente, habría que subrayar, que análogamente a lo que sucede en la teoría del equilibrio económico general, también en los modelos de crecimiento la utilización de las matemáticas no tiene una función simplemente expositiva ó de lenguaje formal, sino que constituyen una herramienta sin la cual no sería posible llegar a todas las conclusiones que abarca la teoría considerada. Esta idea será objeto de continua reflexión a lo largo de este trabajo.

4.1.c**. Periodo de integración.** Desde los años sesenta hasta nuestros dias la utilización de métodos e instrumentos matemáticos en economía se ha generalizado de modo que, prácticamente, todas las ramas de la Matemática han penetrado en algún campo de la Economía, lo que podría justificar la denominación de este periodo. Topología, Geometría, Análisis clásico y funcional, Ecuaciones dinámicas (diferenciales, en diferencias, en derivadas parciales, etc.), intervienen en variados razonamientos económicos.

Las aplicaciones de la Topología a los estudios sobre existencia del equilibrio general son fundamentales. La extensión del concepto de función al de correspondencia, del de continuidad a la hemicontinuidad, junto con la consideración de conjuntos de preferencias y de producción convexos y de los teoremas de existencia de puntos fijos, han desempeñado un papel esencial en la teoría del equilibrio general (Debreu, G. 1959).

Asimismo, desarrollos matemáticos recientes como la Teoria de las Catástrofes, la Teoria de Conjuntos Borrosos ó Lógica Borrosa y la Teoria del Caos, han sido utilizados en algunos campos de la economia aplicada.

La Teoría de las Catástrofes, como se ha mencionado en el apartado I.1, se ha mostrado apropiada para el estudio de sistemas cuyos mecanismos internos no se conocen y tales que las únicas observaciones fiables se refieren a sus discontinuidades. Zeeman E. C. (1974) y Balasko I. (1978), han estudiado desde esta óptica el comportamiento inestable de ciertos mercados y el equilibrio económico respectivamente. También en los trabajos de Mas-Colell (1985), se encuentran estudios sobre singularidades y existencia de equilibrio.

La Teoría matemática del Caos, que considera el comportamiento de sistemas dinámicos no lineales, se ha tratado de utilizar, desarrollando el concepto de *mecanismos de autorrefuerzo* (Arthur W.B. 1988), para explicar la cristalización de un determinado equilibrio en competencia, con exclusión de los demás, cuando diferentes tecnologías compiten por ganarse el favor de los usuarios.

La llamada Lógica Borrosa ó teoría de Conjuntos Borrosos (Kosko, B. Satoru, I..1993), basada en la superación de la lógica binaria ó negación del principio del tercio excluso, desarrolla el concepto de ”*grado de pertenencia*” a un conjunto y se está tratando de aplicar, por ejemplo, a métodos de clasificación de conjuntos ó clases de clientes para posible concesión de créditos por entidades financieras.

Asimismo se desarrollan en este periodo algoritmos computacionales para problemas de programación no lineal en los trabajos de Abadie(1967), Bazaraa y Shetty (1979), a la vez que se potencian los desarrollos teóricos sobre este tema en los trabajos de Intriligator (1973), Beavis y Dobbs (1990), entre otros.

Se podría afirmar que a partir de los años cincuenta del siglo pasado los diferentes métodos matemáticos se sitúan en una posición de preponderancia en el ámbito de lo que podríamos llamar la economía académica, reflejándose esta afirmación en los trabajos de los ganadores de los premios de Ciencias Económicas que en recuerdo de Alfred Nóbel concede el Banco de Suecia desde 1969; trabajos caracterizados por tener dependencias matemáticas muy fuertes (en su mayor parte en la tradición *ortodoxa*). De hecho de los 49 galardonados hasta la fecha, la abrumadora mayoría son neoclásicos y 21 de ellos vinculados a la Universidad de Chicago, lo que parece apuntar hacia la discriminación de otras corrientes (ver Feldman, B. 2000: The Nobel Prize...).

4.2. Características de la relación Matemáticas-Teoría económica.

Este apartado trataremos de caracterizar la relación entre métodos matemáticos y teoría económica a partir de la observación de posibles propiedades simétricas a las consideradas en el apartado I. 2, en el estudio de los rasgos fundamentales de la relación entre matemáticas y física. Se trataría de ver si en el ámbito de la teoría económica tienen lugar propiedades similares a las anteriores, que podamos denominar como polimorfismo matemático de la economía, y plurivalencia económica de las matemáticas; lo que nos llevaría a considerar, si así fuese, que la matemática establece con la economía un tipo de relación similar al que le une a la física, al menos en lo que determinen estas propiedades.

En el primer caso estudiaremos la formulación del equilibrio general, que admite diferentes matematizaciones, y en el segundo consideramos algún caso de polivalencia de un modelo matemático válido para distintas situaciones en teoría económica, en concreto el método de Lyapunov para el estudio de la estabilidad del equilibrio en diferentes sistemas.

El propósito de este apartado no consiste en una crítica a los contenidos conceptuales ni a las hipótesis de los modelos económicos que se consideran, sino que se trata de estudiar los aspectos formales, la que podemos llamar expresión matemática de cada modelo, con el objeto de analizar las propiedades señaladas tomando como referencia lo ya visto para la física. De igual modo, tampoco se hará hincapié en la crítica de las hipótesis de continuidad o derivabilidad de las funciones que aparecen, tema que será tratado en los capitulos siguientes.

4.2.a. El polimomorfismo matemático de la economía.

Denominaremos de este modo la propiedad, de algunas teorías ó paradigmas económicos, que consiste en admitir varias matematizaciones distintas, de poder ser expresadas con diversos modelos matemáticos de diferente grado de complejidad. Aunque lo esencial de los contenidos en cada formulación pueda ser igual, sin embargo la más sofisticada matemáticamente será mas general, incluirá lo relevante de la anterior, además de nuevas relaciones y propiedades que el más sencillo no podría recoger.

Vamos a considerar, como ejemplo del polimorfismo en economía, la teoría del equilibrio general neoclásico, tanto por su relevancia en el marco de una determinada concepción del pensamiento económico, como en la historia de las aplicaciones matemáticas a la economía. En particular, estudiaremos la existencia del equilibrio con dos formulaciones matemáticas diferentes.

León Walras (1874) fue quien expuso, en primer lugar, que el comportamiento maximizador de productores y de consumidores puede generar una situación de equilibrio entre las cantidades ofertadas y demandadas de cada producto y de cada factor de la economía. Consideraremos de forma esquemática sus planteamientos y la formulación de los mismos.

Todos los mercados se consideran de competencia perfecta; se supone que los consumidores intentan hacer máxima su utilidad, con la renta de que disponen, que tienen información completa sobre los precios, que los bienes de consumo son indefinidamente divisibles, asimismo se entiende que la utilidad de cada bien depende únicamente de la cantidad del mismo (no existen bienes complementarios ni sustitutivos).

El precio de una mercancía se expresa por la cantidad de otra que se cambia por una unidad de ella. Se elige una mercancía para expresar en relación con ella los precios de todas las demás (numerario). De este modo si hay en el mercado m mercancías sus precios quedarán determinados por los (m-1), en términos de una sola de ellas.

En lo que a la producción se refiere, se supone que los empresarios están informados sobre los precios en todos los mercados y sobre todas las técnicas de producción. Los coeficientes de producción se consideran fijos, es decir las relaciones entre los factores productivos están rígidamente determinadas.

En éstas condiciones la competencia perfecta obliga a vender los productos a precios equivalentes a los costes de producción. El beneficio del empresario sería nulo, sus ingresos retribuirán su trabajo personal y los servicios de los factores productivos que posea.

Nos interesa, ahora, la determinación del equilibrio que realiza Walras. Las incógnitas del sistema serán los precios y cantidades de bienes consumidos más los precios de los factores productivos utilizados, que nos dará 2n+m-1, incógnitas pues la utilización del numerario (precios relativos), las reduce en una unidad. Hemos de encontrar igual número de ecuaciones independientes, que nos permitan encontrar un conjunto de soluciones que determinen una situación de equilibrio general.

El sistema de ecuaciones que utiliza se podría expresar del modo siguiente:

Para <u>cada consumidor</u> se consideran <u>n</u> bienes, cuyas cantidades se expresan por $x_1, x_2, ...x_n;$

sus precios respectivos se designan por $p_1, p_{2,} ....p_n;$ y sus utilidades marginales por

$$UM_1, UM_2, ...UM_n;$$

Los factores productivos disponibles serán m, y serán denominados $y_1, y_2, ...y_m$; siendo sus precios $w_1, w_2, ...w_m$. El bien x_1 se considera como numerario, de modo que todos los precios, tanto de bienes de consumo como de los factores productivos se miden con relación a él, su precio será: $p_1 = 1$.

Para hacer máxima la utilidad, con la renta disponible, los consumidores comprarán tanta cantidad de cada bien como sea precisa para que las utilidades marginales ponderadas por los precios sean iguales: $UM_1 = \frac{UM_2}{p_2} = \frac{UM_3}{p_3} = ...\frac{UM_n}{p_n}$, dado que el precio del primer bien es1.

Esta relación nos da n-1 ecuaciones, que conjuntamente con la ecuación presupuestaria o de balance: $\sum_i^n x_i p_i = \sum_j^m y_j w_j$ (nos indica que los gastos de cada consumidor en bienes de consumo son iguales a los ingresos obtenidos por la venta de sus servicios productivos), hacen n ecuaciones que nos permitirían determinar las n cantidades compradas en función de los precios de los bienes y de los factores, obteniéndose las **n ecuaciones de demanda** individuales:

$$x_1 = \sum_j^m y_j w_j - x_2 p_2 - x_3 p_3 - ......x_n p_n \quad \text{(ecuación presupuestaria)}$$

$$x_2 = f_2(p_2, p_3, ...p_n, w_1, w_2, ...w_m)$$

....

$$x_n = f_n(p_2, p_3, ...p_n, w_1, w_2, ...w_n)$$

Sumando las funciones de demanda individuales se pueden obtener, en el plano de la teoría**,** las n **funciones de demanda del mercado:**

$X_1 = \sum Y_j w_j - X_2 p_2 - X_3 p_3 .... - X_n p_n$ (ecuación del presupuesto para todo el mercado)

$$X_2 = F_2(p_2, p_3 ... p_n, w_1, w_2, ... w_m) \qquad (1)$$

....

$$X_n = F_n(p_2, p_3 ... p_n, w_1, w_2, ... w_m)$$

siendo X_i, la cantidad total demandada del bien i, e Y_j la cantidad total del factor j empleada en producir todo tipo de bienes de consumo.

Como en competencia perfecta el costo de producción de cada bien equivale a su precio, podemos expresar el precio unitario de cada bien como la suma de los productos de las cantidades de cada factor precisas para la producción de una unidad del bien considerado, por sus precios.

Obtenemos de este modo un nuevo conjunto de n ecuaciones (ecuaciones de coste de Walras):

$$\sum_1^m y_{1j} w_j = p_1 = 1$$

$$\sum_1^m y_{2j} w_j = p_2 \qquad (2)$$

....

$$\sum_1^m y_{nj} w_j = p_n$$

Siendo los coeficientes y_{ij} la cantidad del factor j precisa para producir una unidad del bien i, es decir los coeficientes técnicos de producción, considerados fijos.

Para que exista equilibrio en los mercados de factores productivos, será preciso que las magnitudes de los mismos ofertadas sean iguales a las demandadas. Ello implica que tales cantidades las podemos expresar como suma de las utilizadas en la producción de cada bien. A su vez cada sumando será el producto de la cantidad de factor o servicio necesario para producir una unidad de dicho bien (coeficiente técnico), por la totalidad del mismo generada.

De este modo se obtiene el siguiente conjunto de m ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^{n} y_{i1} X_i = Y_1$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_{i2} X_i = Y_2 \qquad (3)$$

....

$$\sum_{i=1}^{n} y_{im} X_i = Y_m$$

Siendo y_{ij} los coeficientes de producción e Y_j X_i las cantidades totales de factores y bienes, respectivamente.

Mediante combinaciones lineales de las colecciones de ecuaciones (2) y (3) se puede obtener la ecuación primera del conjunto (1): $X_1 + \sum_{i=2}^{n} X_i p_i = \sum_{i=1}^{m} Y_i w_i$, es decir la ecuación presupuestaria para todo el mercado, lo cual indica que los conjuntos de ecuaciones (1), (2) y (3) son dependientes, una de las relaciones no aporta información que no esté incluida ya en las demás, y se podrá excluir.

El número de ecuaciones independientes de los tres conjuntos considerados sería 2n+m-1, igual al número de incógnitas, con lo que se puede considerar, con todas las condiciones asumidas, que el sistema de ecuaciones global determinará una solución de equilibrio general. Esta solución puede tener sentido algebraico, pero nada asegura que sea económicamente significativa, lo que requiere nuevas condiciones que se incorporarían al modelo mucho mas tarde (Wald, 1936).

La otra formulación del equilibrio general que vamos a considerar, en este estudio sobre el polimorfismo matemático en el ámbito de la economía, es la de Debreu (1959), que hace uso de forma rigurosa de la Topología en su análisis de la existencia del equilibrio.

Trataremos de explicar de forma esquemática las ideas fundamentales de esta formulación. La estrategia de la demostración consiste en probar que existe algún conjunto de precios tal que para ese conjunto los consumidores y productores, al escoger distribuciones de bienes de consumo y vectores input-output de entre sus respectivos conjuntos de consumo y producción, darán lugar a un estado de la economía en el que los mercados quedarán vacíos. Para ello habrá que enunciar y probar un determinado teorema de existencia (adecuado a la formulación conjuntista y topológica adoptada, y cuya prueba utiliza el teorema del punto fijo de Kakutani) y mostrar, asimismo, que el modelo de economía empleado satisface la hipótesis del teorema. Adoptaremos, en lo que sigue, la notación de Quirk y Saposnik (1968), con algunas modificaciones.

Consideramos una economía donde existen n mercancías, l empresas y m consumidores. Cada consumidor tiene asociado un conjunto de consumo: $\overline{X}_j, (j = 1,2,.....m)$ y cada productor un conjunto de producción: $\overline{Y}_k\,(k = 1,2,.....l)$, siendo ambos conjuntos del espacio euclídeo n- dimensional.

Admitimos que en la economía hay un volumen de recursos disponibles que denominamos **r,** representado por un punto en el espacio euclídeo n-dimensional, **r**: $(r_1, r_2, ...r_n)$ siendo r_i la cantidad de la i-ésima mercancía en la cantidad de recursos dada.

Se supone que un estado de la economía, caracterizado por x^j, y^k; es realizable si se verifican: $x^j \in \overline{X_j}$, $y^k \in \overline{Y_k}$, y también $\sum_{j=1}^{m} x^j - \sum_{k=1}^{l} y^k - r = O$. La realización de un estado queda definida por la elección que cada agente económico hace, a partir de su respectivos conjuntos de consumo o de producción, y por que el exceso de demanda agregada, incluyendo la dotación de recursos disponibles, es igual a cero, lo que significa que todos los mercados han quedado vacíos.

Se considera también que los recursos de la economía están distribuidos entre los consumidores, siendo r^j la representación de las tenencias del j-ésimo consumidor de modo que $r^j = (r_{1j,} r_{2j,....} r_{nj})$ y $\sum_{j=1}^{m} r^j = r$. Asimismo los consumidores serán accionistas de las empresas, por lo que sus beneficios se distribuirán entre los mismos. Si cada consumidor tiene una cartera de valores $s^j = (s_{j1,} s_{j2,} .....s_{jl})$, se tiene que $\sum_{j=1}^{m} s_{jk} = 1$, para $k = 1,2,....l$; siendo s_{jk} la participación de los beneficios que recibe el j-ésimo consumidor de la k-ésima empresa.

Los precios se representan mediante puntos situados en el subconjunto no negativo del espacio euclídeo n-dimensional, lo que permite expresar la maximización del beneficio para la k-ésima empresa mediante el cumplimiento de la relación: $p \bullet \hat{y}^k \geq p \bullet y^k$ (para todo $y^k \in \overline{Y_k}$), elegido un determinado vector $\hat{y}^k \in \overline{Y_k}$, que posea dicha propiedad, y dado un vector de precios p. De forma análoga el consumidor j-ésimo escogerá un vector de consumo $\hat{x}^j$ que tenga la propiedad de que: $\hat{x}^j R_j x^j$ (primer vector de consumo tan preferible al menos como el segundo), para todo $x^j \in \overline{X_j}$, y que satisfaga su ecuación de balance. Si el total de la riqueza del j-ésimo consumidor es igual al valor de los recursos que posee más la participación que le corresponde en los beneficios distribuidos por las empresas, se puede expresar del siguiente modo: $w^j = p \bullet r^j + \sum_{k=1}^{l} s_{jk} p \bullet \hat{y}^k$.

La ecuación de balance del j-ésimo consumidor se puede escribir:

$p \bullet x^j \leq p \bullet r^j + \sum_{k=1}^{l} s_{jk} p \bullet \hat{y}^k$ El equilibrio competitivo se puede definir, en estas condiciones, como una colección de (m+l+1) puntos del espacio euclídeo n-dimensional: $(\overline{x^1}, \overline{x^2}, ...\overline{x^m}; \overline{y^1}, \overline{y^2}, ...\overline{y^l}; \overline{p})$. (m vectores de consumo, l de producción y un vector de precios).

Resumiendo lo anterior, se puede afirmar que una colección: $((\overline{x^j}), (\overline{y^k}), \overline{p})$ constituye un equilibrio, si se verifican las siguientes propiedades:

a) $\overline{x^j} R_j x^j$ para todo $x^j \in \overline{X_j}$, tal que $\overline{p} \bullet x^j \leq p \bullet r^j + \sum_{k=1}^{l} s_{jk} \overline{p} \bullet \overline{y^k}$; (j =1,2,........m)

b) $\overline{p} \bullet \overline{y^k} \geq \overline{p} \bullet y^k$ para cada $y^k \in \overline{Y_k}$; (k = 1,2,.... l)

c) $\sum_{j=1}^{m} \overline{x^j} - \sum_{k=1}^{l} \overline{y^k} \leq r$. (en el caso más general)

Estas propiedades nos representan un estado realizable de la economía en el que cada consumidor maximiza su utilidad y cada productor elige un vector de producción que maximiza el beneficio.

Se define la relación de exceso de demanda como una **correspondencia** del conjunto de los precios en el conjunto de Z = X-Y-r donde X es el conjunto de consumo agregado, Y es el conjunto de producción agregado y r es la cantidad de recursos disponibles, representada por un punto del espacio euclídeo n-dimensional. La correspondencia: $E(p)=\sum_{j=1}^{m} D_j(p)-\sum_{k=1}^{l} S_k(p)$, asocia a un vector de precios dado, un determinado subconjunto de Z generado por la conducta maximizadora del consumidor y del productor, dado que $D_j(p)$ es el conjunto de los consumos que comprenden los puntos más preferidos para el j-ésimo consumidor con relación al vector de precios p, y $S_k(p)$ el conjunto de vectores de producción que contienen los puntos de maximización del beneficio para el k-ésimo productor, relativos a un vector precio p.

Esta correspondencia agregada es homogénea de grado cero: $E(tp)=E(p)$, dado que se verifica en las demandas y ofertas individuales que $D_j(p)=D_j(tp)$, para $j=1,2,...m$; $S_k(p)=S(tp)$, $k=1,2,..l$; y t una constante arbitraria mayor que cero. Esta propiedad de homogeneidad junto con la siguiente relación, derivada de las ecuaciones de balance de los consumidores individuales: $p \bullet z \leq 0$, y en alguna propiedad geométrica del producto escalar de vectores, nos permite restringir el ámbito de búsqueda de los posibles vectores-precios de equilibrio p, al conjunto de los puntos situados en el ortante positivo del espacio euclídeo n- dimensional, excluido el origen : $p \geq 0_n$; y tales que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Por lo tanto, para encontrar un vector $p \geq 0_n$ tal que se verifique que $E(p) \leq 0_n$ (precio de equilibrio), solo se precisa estudiar el conjunto de vectores de precios, intersección de los no negativos y de aquellos que satisfacen la relación anterior: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

La demostración de la existencia del equilibrio competitivo la realiza Debreu mediante el siguiente **Teorema**: Sea $\overline{Z}$ un conjunto cerrado y limitado en el espacio euclídeo n-dimensional. Si $\overline{E}(p)$ es una correspondencia semicontinua superiormente $\overline{E}: P \rightarrow \overline{Z}$ que aplica cada $p \in P$ en un conjunto convexo no vacío, de modo tal que se verifique $p \bullet \overline{E}(p) \leq 0$ entonces existe un vector $\hat{p} \in P$ tal que la intersección de $\overline{E}(\hat{p})$ con el ortante negativo del espacio euclídeo n-dimensional es un conjunto no vacío.

Es decir, en las condiciones del teorema, existirá un vector de precios $\hat{p}$ para el cual los mercados se vaciarán, el exceso de demanda $\overline{E}(\hat{p}) \leq 0_n$. Un esbozo de la demostración se puede resumir como sigue.

El conjunto P es el de los vectores de precios normalizados y situados en el ortante positivo, arriba considerados: $P = \left\{ p \geq 0_n \mid \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}$. P será cerrado, limitado y convexo.

Elegimos en un espacio euclídeo n-dimensional un conjunto Z' de modo que sea cerrado, limitado , convexo y tal que contenga a $\overline{Z}$, $\overline{Z} \subset Z'$. Como P no es un conjunto vacío, por hipótesis, nó lo serán tampoco $\overline{Z}$ y Z'.

Definimos $M(z)$ como el conjunto de valores de P que maximizan la función (real y continua en P), $z \bullet p = \sum_{i=1}^{n} z_i p_i$ para cada z particular. Este conjunto no es vacío (por ser la función $z \bullet p$ real y continua) y además, por el carácter cerrado y limitado de P, $M(z)$ es semicontinuo superiormente.

Se construye, ahora, la correspondencia $\Phi : P \times Z' \to P \times Z'$ del modo siguiente: $\Phi(p,z) = M(z) \times \overline{E}(p)$. El producto cartesiano de los conjuntos P y Z', es un conjunto no vacío, cerrado, limitado y convexo del espacio 2n-dimensional, por serlo los dos conjuntos que le generan. Por otro lado, la correspondencia Φ es semicontinua superiormente. Con ello se satisface la hipótesis del **teorema del punto fijo de Kakutani** y existe un par de vectores $(\hat{p}, \hat{z})$, tales que se verifica: $\hat{p} \in M(\hat{z})$ y $\hat{z} \in \overline{E}(\hat{p})$.

La primera relación de pertenencia implica que para cada $p \in P$, se tiene que $p \bullet \hat{z} \leq \hat{p} \bullet \hat{z}$, dada la naturaleza del conjunto $M(z)$. La segunda $\hat{z} \in \overline{E}(\hat{p})$, implica que $\hat{p} \bullet \hat{z} \leq 0$. Combinando estas dos implicaciones se sigue que $p \bullet \hat{z} \leq 0$, para todo $p \in P$.

Dado que $p \bullet \hat{z} = \sum_{i=1}^{n} p_i \hat{z}_i$ considerando sucesivamente los vectores precio unitarios de la forma (1,0,...0)......(0,0.....1), se tiene que $\hat{z}_i \leq 0$, para $i = 1,....n$. De este modo se prueba que el vector $\hat{z}$ está en el ortante negativo del espacio euclídeo n-dimensional, y como $\hat{z} \in \overline{E}(\hat{p})$ se verifica para $\hat{p}$ la conclusión del teorema formulado por Debreu, es decir la existencia de un vector de precios que anula o hace negativo el exceso de demanda.

Habría que hacer algunas consideraciones sobre la aplicabilidad del teorema al modelo de economía empleado, sobre si dicho modelo satisface las hipótesis del teorema. Se puede aceptar que los supuestos realizados sobre los conjuntos de consumo y de producción son compatibles con dichas hipótesis. En cuanto al conjunto utilizado $Z = X - Y - r$, y la correspondencia de exceso de demanda $E(p)$ hay que señalar que, si bien ésta se puede considerar como semicontinua superiormente (requisito exigido por el T. de Kakutani), es más dudosa la afirmación de Z como conjunto cerrado y limitado (ya que X no está limitado superiormente), lo que exige algunos razonamientos adicionales que llevan, finalmente, al cumplimiento de las hipótesis y al establecimiento formal de la existencia del equilibrio competitivo.

Dos cuestiones **diferenciadoras** habría que resaltar, con relación a nuestro ejemplo de polimorfismo matemático de la economía. En la física las diversas **formulaciones** de una misma ley o conjunto de relaciones son **rigurosamente equivalentes en sentido matemático**, cada formulación mas elevada, mas sofisticada matemáticamente, implica a la anterior, la contiene y de ella se puede deducir la primera enunciación matemática, a la vez que los contenidos físicos son mas generales incluyen nuevas relaciones y propiedades, producto de nuevas observaciones experimentales. Sin embargo en el caso de la economía, ocurre que los **contenidos** de las dos formulaciones estudiadas son **esencialmente iguales**: la existencia de un sistema de precios para el cual el sistema económico esté en equilibrio, mientras que la segunda formulación estudiada, la topológica de Debreu, no equivale matemáticamente ni incluye a la primera, de Walras, que no se podría deducir de ella por los fundamentos matemáticos tan diferentes de ambas formulaciones.

La segunda cuestión hace referencia al elevado nivel de abstracción y la frecuente debilidad de los supuestos en las formulaciones matemáticas de la economía, frente al elevado grado de precisión y solidez de las hipótesis de los teoremas específicos, con orientación empírica, de las ciencias físicas. En efecto, en cuanto a la debilidad de los supuestos en las formulaciones del equilibrio que hemos considerado, se podría afirmar que la coherencia matemática de la primera (Walras), depende fundamentalmente de la existencia de funciones lineales de demanda; en cuanto al segundo modelo (Debreu), la coherencia formal dependería en gran medida de la convexidad de los conjuntos de producción y de consumo. En lo concerniente al elevado grado de abstracción del último planteamiento del problema de la existencia del equilibrio general que hemos estudiado, consideramos que está más próximo a la lógica formal que a la economía; podríamos aplicar en este punto las afirmaciones de Joan Robinson (prólogo a Walsh y Gram, 1980), sobre como el uso de formulaciones matemáticas en la teoría económica y su aparente precisión ha degenerado en vaguedad.

4.2.b. La plurivalencia económica de las matemáticas.

En este apartado estudiaremos las circunstancias que rodean la representación, mediante un mismo modelo matemático, de diferentes desarrollos teóricos de la economía. Se trata de analizar, con la ayuda de algún ejemplo, si en el ámbito de la economía se puede reproducir esta propiedad ya estudiada para la física, y que como vimos, contribuye a configurar la que consideramos especial relación con la matemática.

Esta propiedad, se puede considerar simétrica de la anteriormente estudiada, donde una misma teoría económica viene representado por distintos modelos matemáticos.

Partimos, como ejemplo de la situación que queremos analizar, del estudio de la estabilidad o inestabilidad del equilibrio de un sistema, expresado en términos diferenciales. Para ello utilizaremos el método “directo” de Lyapunov (1907), que nos aclara lo fundamental sobre dicha estabilidad sin que sea necesario resolver el sistema. Consideraremos la aplicación de dicho procedimiento al análisis de la estabilidad del equilibrio general walrasiano, realizada por Arrow, Block y Hurwicz (1959). Posteriormente analizaremos la aplicación del mismo método de Lyapunov, al estudio que Baumol y Quandt (1964) han realizado sobre las llamadas reglas de experiencia en la gestión de empresas. En ambos casos veremos que es posible, en principio, la aplicación del mismo modelo matemático en casos tan diferentes; sin embargo, la similitud con la polivalencia matemática en la física será cuestionable.

La adecuación del método de Lyapunov, desarrollado originalmente para el estudio de la estabilidad de la posición de equilibrio en sistemas mecánicos, al estudio de la estabilidad en modelos económicos, reside en la capacidad de dicho método de suministrar información valiosa sobre problemas planteados mediante sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales, cuya solución suele ser imposible de encontrar; o sistemas que contienen funciones especificadas solo **cualitativamente**, tan frecuentes en modelos económicos.

El método está basado en la llamada" función de Lyapunov", que ha de satisfacer las hipótesis de un determinado teorema, cuya verificación implicará que el estado de equilibrio vinculado es globalmente estable. Se podría exponer, esquemáticamente, del modo siguiente:

Teorema. Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dy_i}{dt} = F_i(y_1, y_2, ..., y_n), \qquad i = 1,2,...,n$$

donde $F_i = 0$ para $y_i = y_i^e$,

Supongamos que existe una función escalar $V(y_1 - y_1^e, y_2 - y_2^e, ..., y_n - y_n^e)$; (función de Lyapunov), cuyas primeras derivadas parciales con respecto a $y_i - y_i^e$, para todo i, sean continuas, y además se verifique:

a) $V > 0$, si al menos una de las cantidades $y_i - y_i^e$ es distinta de cero, y $V = 0$, sólo si se tiene $y_i - y_i^e = 0$, para todo i.

b) $V \to +\infty$ cuando la función **distancia**: $\left\| y - y^e \right\| \to +\infty$

c) $\dfrac{dV}{dt} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial (y_i - y_i^e)} \frac{d(y_i - y_i^e)}{dt}$ será negativa, si al menos una de las cantidades $(y_i - y_i^e)$ es distinta de cero, y $\dfrac{dV}{dt} = 0$, solo si $y_i - y_i^e = 0$, para todo i.

Cumplidas estas condiciones el estado de equilibrio dado por $(y_1^e, y_2^e, ..., y_n^e)$ será globalmente estable. Es de señalar que la proposición inversa de la del teorema considerado también es correcta; es decir si el estado de equilibrio es globalmente estable, entonces existirá una función de Lyapunov, que cumplirá todas las hipótesis del mismo. Por ello la existencia de dicha función es una condición necesaria y suficiente de estabilidad global. Una demostración rigurosa del teorema se puede encontrar en Kalman y Bertram (1960). Vamos a considerar, en primer lugar, la aplicación del método directo de Lyapunov al estudio del equilibrio general walrasiano realizada por Arrow, Block y Hurwicz (1959). Adoptamos la hipótesis de comportamiento de que el precio de cada bien variará en relación a su exceso de demanda, es decir que su precio subirá (bajará) cuando su exceso de demanda sea positivo (negativo). Esta hipótesis refleja el mecanismo concebido por Walras, el proceso de "tâtonnement", y se puede expresar analíticamente mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dp_i}{dt} = k_i E_i(p_1, p_2, ..., p_n), \qquad \text{para} \quad i = 1,2,....., n,$$

representando p_i los precios, E_i las funciones agregadas de exceso de demanda, y k_i constantes positivas.

Se elige como función de Lyapunov, el cuadrado de la distancia euclídea *modificada*: $V(p_1 - p_1^e, p_2 - p_2^e, ..., p_n - p_n^e) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}(p_i - p_i^e)^2$

Derivando respecto del tiempo (k_i y p_i^e, constantes), se tiene: $\frac{dV}{dt} = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}(p_i - p_i^e)\frac{dp_i}{dt}$, sustituyendo las derivadas temporales de los precios por las expresiones analíticas que definen el sistema de ecuaciones diferenciales, la variación con el tiempo de la función considerada será:

$$\frac{dV}{dt} = 2\sum_{i=1}^{n}(p_i - p_i^e)E_i(p_1, p_2, ..., p_n) = 2\sum_{i=1}^{n} p_i E_i(p_i, p_2, ...p_n) - 2\sum_{i=1}^{n} p_i^e E_i(p_i, p_2, ..., p_n)$$

Teniendo en cuenta que en el equilibrio se ha de verificar : $\sum_{i=1}^{n} p_i E_i = 0$, se obtiene la expresión: $\frac{dV}{dt} = -2\sum_{i=1}^{n} p_i^e E_i(p_1, p_2,..., p_n)$, para la variación temporal de la función de Lyapunov.

Por ser las funciones **exceso de demanda** homogéneas de grado cero $E_i(\lambda p_1, \lambda p_2,..\lambda p_n) = E_i(p_1, p_2.., p_n)$, los precios de equilibrio p_i^e todos positivos, y si se verifica la sustituibilidad bruta ($\frac{\partial E_i}{\partial p_j} > 0$ para todo $i, j; i \neq j$); se puede probar que las funciones $E_i(p_1, p_2,..p_n)$ tienen valor positivo y en consecuencia, la variación temporal considerada: $\frac{dV}{dt} = -2\sum_{i=1}^{n} p_i^e E_i(p_1, p_2,..p_n)$, será siempre negativa para cualquier vector de precios $(p_1, p_2,...p_n)$, positivo y no de equilibrio.

Es decir, $\frac{dV}{dt}$ será negativa fuera del equilibrio, anulándose sólo para $p_i = p_i^e$ pues por definición en el equilibrio $E_i(p_1^e,....p_n^e) = 0$. De este modo, la estabilidad global del equilibrio general vendrá garantizada por el cumplimiento, para las funciones E_i de la sustituibilidad bruta.

Aplicaremos, ahora, el método directo de Lyapunov a una segunda situación de estabilidad o inestabilidad del equilibrio en otro ámbito económico. Se trata del estudio de las **reglas de experiencia** en la gestión de empresas. En la medida en que nunca se dispone de toda la información precisa para hallar con exactitud el punto óptimo de funcionamiento de una empresa, tal como indica la teoría económica, procede estudiar reglas de experiencia, que orienten sobre las decisiones a tomar, en la gestión de las mismas.

Beaumol y Quandt (1964), han desarrollado un tipo de regla empírica que se podría esquematizar del siguiente modo: se modifica un precio y se observa el sentido de la variación de beneficios resultante, si es positiva se insiste en el cambio de precios en igual sentido, si fuese negativa el precio se altera en sentido inverso, y si los beneficios se mantienen constantes, no se vuelve a modificar el precio. Se puede probar que esta **regla** converge globalmente hacia el punto de equilibrio, si este existe, y si no se producen desplazamientos de la función de beneficios. En lo que continúa adoptamos, con alguna variación, el procedimiento seguido por Gandolfo (1971).

Esta regla se puede expresar analíticamente como se indica: $\frac{dp}{dt} = g(\frac{\dot{\pi}}{\dot{p}})$, si $\dot{p} \neq 0$, y $\dot{p} = 0$ en otro caso; ecuación que nos liga la variación temporal del precio con la del beneficio. La función g es de signo invariante, es decir, g será mayor, igual o menor que cero, según lo sea $(\frac{\dot{\pi}}{\dot{p}})$. Se supone que la función de beneficios (desconocida), es una función de p, cóncava hacia abajo, derivable y con un máximo relativo. Ello implica que: $\pi = f(p)$, $f'(p) = 0$ para $p = p_e$ y $f'' < 0$, para todo p.

Como $\dot{\pi} = f'(p)\dot{p}$, la ecuación dinámica que describe el proceso, se puede escribir (sustituyendo), $\dot{p} = g\left[f'(p)\right]$.

Como función de Lyapunov, se elige el cuadrado de la distancia euclídea: $V = (p - p_e)^2$.

Su variación con el tiempo vendrá dada por $\frac{dV}{dt} = 2(p - p_e)\dot{p} = 2(p - p_e)g\left[f'(p)\right]$.Como la función de beneficios $f(p)$ es cóncava hacia abajo y tiene un máximo relativo en $p = p_e$, su derivada será positiva para $p < p_e$, y negativa para $p > p_e$; por lo tanto $\frac{dV}{dt}$ tiene signo negativo para cualquier valor de p fuera del equilibrio, donde valdría cero, lo que demuestra la estabilidad global.

Si comparamos la propiedad que podemos llamar " plurivalencia económica de las matemáticas" con su equivalente en la física, encontramos algunas diferencias notables. En primer lugar podemos apreciar que frente al **espacio físico común** , que configura la polivalencia de un mismo modelo matemático para distintos fenómenos físicos, tenemos diferentes espacios formales donde se definen las variables económicas (espacio de precios, espacios de *output*, etc.). En cuanto a la dinámica de los procesos habría que señalar las diferentes concepciones del tiempo: *histórico* en la física, frente al tiempo *lógico* o *intertemporal* adoptado por Arrow-Debreu y la escuela moderna del equilibrio general, en el pensamiento neoclásico, como indica, por ejemplo, Ahijado M. (1985).

Las diferencias señaladas no son triviales, pues desaparece el espacio común, la referencia que, se podría decir, conformaba la capacidad de un modelo matemático para representar distintas *realidades*.

En cuanto al grado de fidelidad de las diferentes aproximaciones a la economia suministradas por un mismo modelo matemático, se puede afirmar que vendrá dado, en gran medida, por la precisión (como ocurría en física) con la que las variables económicas y sus relaciones se ajusten a los movimientos reales (en el tiempo y en espacio) del *contenido* de dichas variables. Ello nos conduce, de modo inevitable, a la reflexión sobre el carácter continuo o no, de los procesos económicos que se consideren y de las variables que los representan, de sus implicaciones sobre la derivabilidad de las funciones que se definen sobre ellas, y sobre la coherencia formal de las ecuaciones diferenciales que relacionan dichas derivadas, pero este es otro tema que merece una consideración más detenida.

4.3. Algunas conclusiones. Las matemáticas como legitimación del discurso económico.

En el apartado tercero de este capítulo, al estudiar la relación entre matemáticas y física, llegamos al resultado de que tal relación viene caracterizada por tres propiedades que denominamos:

a) Polimorfismo matemático de la física
b) Plurivalencia física de las matemáticas
c) Adecuada integración de las variables y funciones representativas de fenómenos físicos (mecánica y electromagnetismo clásicos), en la formalización del análisis matemático (cálculo, ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales), debido a la continuidad y derivabilidad de tales variables y funciones.

Estas tres propiedades definen o conforman la que denominamos especial relación entre matemáticas y física (clásica).

Al intentar trasladar estas propiedades al ámbito de la relación entre matemáticas y teoría económica (neoclásica), nos encontramos con una aparente verificación formal de las dos primeras. Sin embargo un análisis más preciso nos señalaba la existencia de notables diferencias entre propiedades supuestamente equivalentes. En relación con la plurivalencia económica de las matemáticas, tenemos que frente al espacio físico común, **marco** de referencia de los modelos matemáticos aplicados a diferentes fenómenos físicos, se observa la utilización de espacios abstractos como campo de definición de las variables económicas. De modo similar se aprecia la diferencia entre el tiempo físico y el tiempo lógico de la teoría neoclásica, en la formulación de los procesos dinámicos.

En cuanto a la propiedad que denominamos polimorfismo matemático de la economía, se ha visto que los modelos matemáticos que representan una misma teoría económica no se incluyen el más simple en el más complejo, ni este se puede obtener a partir del primero, a pesar de la identidad de los contenidos económicos, dada la naturaleza tan diferente de los modelos utilizados (todo ello con las limitaciones del caso estudiado), a diferencia de lo que ocurre con la física.

Más importante parece la diferencia que se manifiesta entre el elevado nivel de abstracción y la debilidad de los supuestos de los modelos económicos, frente a la precisión y solidez de las hipótesis de los modelos matemáticos que representan un mismo fenómeno físico.

Con relación al grado de **fidelidad** con el que un mismo modelo matemático represente diferentes teorías o conjuntos de relaciones en economía, consideramos que vendrá dado, fundamentalmente, por la precisión con que las variables y funciones económicas se ajusten a los movimientos reales de tales variables-de los *contenidos que representan*-(como ocurre en física). Ello, como ya hemos mencionado, está relacionado con el carácter continuo o discontinuo de tales procesos y de las variables y funciones que los representan.

Esta dudosa continuidad de las variables representativas de los procesos económicos (factores productivos, precios, outputs) cuestiona, en principio, la similitud o paralelismo con los procesos y variables físicas (tiempo, espacio, masa, carga electrica, etc.) e impide que podamos trasladar, sin fuertes reservas, la tercera de las propiedades citadas al comienzo, al ámbito de la economía.

De este modo se podría afirmar que la relación que se establece entre matemáticas y economía no es de similar naturaleza a la que liga a aquella con la física, relación que denominábamos de **constitución**, es decir, la matemática construye o constituye a la física, los conceptos y relaciones físicas son inseparables de su forma matemática, en un proceso mutuamente constructivo, y conjuntamente se desarrollan y enriquecen. La relación con la economía será, sin duda, de carácter más modesto; actuará como instrumento técnico en situación de exterioridad respecto a los conceptos y relaciones económicas, aportando claridad y rigor en la expresión de los mismos, además de contribuir a expresar de forma precisa relaciones de dependencia entre magnitudes cuantificables.

Sin embargo, el problema de la relación entre matemáticas y economía no se agota con el estudio de la similitud con la física. Las cuestiones vinculadas al enfoque matemático del análisis económico, superan el ámbito de la polémica sobre el uso de técnicas matemáticas en teoría económica. La controversia adquiere unas proporciones mucho mayores al considerar las implicaciones sobre los métodos y proyectos de la ciencia económica. Como señala Katouzian, lo que estaría en juego sería nada menos que la naturaleza y significación de la economía misma (Katouzian H. 1980, ed. esp. 1982, p. 204). A ello podríamos añadir el papel **legitimador** que la formulación en términos matemáticos, junto con la utilización de este tipo de modelos para la exposición de las teorías económicas, confiere a los enfoques que se *recubren* de este modo.

En efecto, por un lado, el uso acrítico y exhaustivo de técnicas matemáticas puede conducir a concentrar los análisis teóricos en problemas lejanos o imaginarios, si son susceptibles de tratar con estas técnicas; mientras se puede tender a la exclusión de importantes cuestiones que no sean fácilmente manejables matemáticamente. Es decir, las matemáticas se erigen en criterio "orientador" de la investigación teórica. Por otro lado, dada la casi ilimitada capacidad de aplicación de algunas técnicas y conceptos de la matemática pura a ciertos problemas (la estabilidad del equilibrio, la maximización de la utilidad de un individuo..) parece evidente el riesgo de que las formas y técnicas consideradas, determinen los contenidos del conocimiento económico.

En la misma dirección opina Georgescu-Roegen; este planteamiento "*...ha llevado a una proliferación de ejercicios de lápiz y papel y a modelos econométricos cada vez mas complicados que a menudo sólo sirven para ocultar los problemas económicos fundamentales.*" (Georgescu-Roegen N., 1971, pp. 318-319). En definitiva, el uso de las matemáticas, cuando deja de ser un instrumento y se convierte en un fin en si mismo, nos conduciría hacia una *esquizofrenia* respecto del mundo real.

Habría que enfatizar, además, que otra consecuencia de tal matematización *excesiva* sería la consideración explícita o implícita, de que las teorías económicas -cuando se presentan revestidas con el "adecuado" formalismo matemático- son universalmente válidas, independientemente de que sean contrastables o hayan sido sometidas a algún tipo de validación. En tal marco, la teoría económica ortodoxa, producto, tanto, de sus hipótesis muy restrictivas y ausentes de realismo, como de su extremada matematización, parece reducirse a la búsqueda de conjeturas para demostrar que el mercado conduce a un estado óptimo y estable.

Dos últimas cuestiones se nos plantean, ahora. La primera iría en el sentido de preguntarnos si todos los **usos** de las matemáticas en economía desempeñan una función parecida y serían por tanto susceptibles de una misma crítica. La segunda haría alusión al papel de las matemáticas en las **diferentes** corrientes (concepciones), del pensamiento económico. Aunque el propósito de este trabajo es, fundamentalmente, el estudio del papel del cálculo diferencial en la teoría económica neoclásica, parece pertinente realizar algunas consideraciones sobre las cuestiones indicadas.

En relación con la primera, consideramos que el uso de las técnicas y modelos matemáticos es **legítimo**, cuando ayuda al análisis, a la exposición o a la precisión de una determinada teoría. Las formulaciones matemáticas de las teorías económicas pueden ayudar a conseguir una claridad y ahorro expresivo que siempre es deseable. Como hemos señalado más arriba, creemos que las matemáticas deben actuar como instrumento técnico en situación de exterioridad respecto a los conceptos y relaciones económicas, aportando claridad y rigor en la expresión de los mismos, además de contribuir a expresar de forma precisa relaciones de dependencia entre magnitudes cuantificables. En este sentido, la *revolución* en las técnicas de la economía aplicada (a partir de la segunda mitad del siglo XX), es decir: la estadística económica, la econometría, el análisis input-output, la planificación económica, etc., constituye una amplia muestra de notables aplicaciones que, en general, pueden ser útiles, en la medida en que sus hipótesis no se alejen de la realidad y las *formas* no oculten el *fondo* de los problemas (los *excesos* en la representación no anulen la *identidad económica* de los modelos).

En cuanto a la segunda cuestión, sobre el papel y la relación de las matemáticas con las distintas corrientes o tradiciones, se podría pensar en una primera aproximación al tema, que no existen divisiones ideológicas *formales* sobre ésta cuestión. Nos referimos a que hay economistas matemáticos tanto de tradición neoclásica (Samuelson, Solow..), keynesiana- con un carácter mas instrumental- (Robinson, Kaldor) o marxista (Morishima o el propio Marx); así como pueden encontrarse, igualmente, críticos a los *excesos matemáticos*, en diversos ámbitos ideológicos.

Sin embargo pensamos que es en la tradición neoclásica donde el papel y la relación con las matemáticas (y en particular con el análisis matemático clásico o cálculo infinitesimal), adquiere una función distinta y más relevante, que podemos caracterizar como pretendidamente **legitimadora del discurso económico**. *Legitimación* que tendría su origen en el mimetismo inicial respecto de la física clásica (paradigma científico por excelencia), y ligada tanto a las demostraciones de la existencia de equilibrio general (que permiten a Debreu la afirmación triunfal: *He demostrado matemáticamente la superioridad del liberalismo,* Figaro-Magazine, 10-3-1984), como a la distribución de la renta que se *deduce* de la función de producción neoclásica (homogénea de primer grado, continua, derivable etc.) y al predomínio de los desarrollos hipermatematizados en la producción teórica dominante en la vida académica.

El marxismo también pudo caer en la tentación de usar las matemáticas como medio de legitimación. Marx insinuó varias veces su intención de *matematizar* El Capital. Durante su vejez realizó un serio estudio de las matemáticas y en particular del cálculo diferencial (véase Alcouffe, 1985).

Posiblemente no fueron, sólo, la falta de tiempo ni las propias dificultades matemáticas, las causas que le impidieron hacerlo, sino también su fidelidad al método dialéctico. Pretender explicar los procesos sociales (o aspectos de ellos) a través de fórmulas o desarrollos matemáticos, implicaría la aceptación de la existencia de un orden preestablecido, atemporal y bastante lejano, creemos, de la lógica que inspiró su obra. De todos modos es muy probable, que, por muchos desarrollos y teoremas que acompañasen a la teoría marxista, no sería por ello, más respetada ni aceptada por el pensamiento académico establecido.

En los capítulos siguientes se tratará de profundizar en algunos de los aspectos considerados, en particular en el papel que desempeña el análisis matemático y el cálculo diferencial dentro de estos métodos y las condiciones que limitarían su aplicabilidad a la formalización del conocimiento económico.

CAPITULO SEGUNDO. LAS FUNCIONES Y SU APLICABILIDAD

Estudiaremos en este capítulo las condiciones que determinan las aplicaciones del instrumental del análisis de funciones a la formalización matemática de un cierto desarrollo teórico. Se trataría de analizar lo que consideramos en el capítulo primero, tercer aspecto diferenciador de la relación entre Matemáticas-Física y Matemáticas-Economía, aquel que afecta a la continuidad y derivabilidad de las variables y funciones representativas de los procesos económicos, propiedades y relaciones de (entre) tales funciones y sus derivadas.

Para ello partiremos de una breve descripción de los conceptos y resultados del análisis de funciones de variable real, que consideramos más relevantes en lo que atañe a nuestro enfoque. Seguiremos con algunas consideraciones sobre el papel que las funciones desempeñan en la física, que de nuevo servirá de referencia por la especial *adecuación* de las variables y funciones representativas de los fenómenos físicos al Cálculo infinitesimal. Entendemos que, contra de lo afirmado por algunos autores, el desarrollo del análisis infinitesimal no se hizo pensando en su posible usos para variaciones discontinuas " *No hay exageración si se afirma que el análisis infinitesimal ha sido desarrollado teniendo precisamente en vista aplicaciones finitas"* (Samuelson, P.A. 1947, p. 76, traducción al castellano 1957).

1. ALGUNOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES DEL ANÁLISIS DE FUNCIONES.

1.1.**Las Funciones y el Cálculo Infinitesimal**. En lo que sigue se van a considerar, fundamentalmente, conceptos y resultados referidos a funciones reales de una o varias variables reales, temas incluidos dentro del cálculo infinitesimal y del análisis matemático. El concepto de función, sin duda una de creaciones fundamentales de la cultura, cuyo origen podemos situar a finales del siglo XVII junto con el cálculo diferencial e integral y posteriormente la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y el cálculo de variaciones, aparece y se desarrolla conjuntamente con la mecánica clásica.

En efecto el cálculo de diferencias (que hoy llamamos cálculo diferencial) fue publicado por Leibniz en 1684, y el cálculo de sumas (o integral), lo fue dos años después. La formulación paralela de lo que Newton llamó cálculo de fluxiones, apareció en sus *Principios matemáticos de la filosofía natural* en 1686. La importancia de las funciones como expresión rigurosa de la relación entre variables, como *núcleo* del cálculo, viene dada por el hecho de que el método infinitesimal es el instrumento matemático para describir las cosas que cambian, y los procesos naturales son esencialmente cambiantes.

En épocas anteriores la matemática era una ciencia estática. La geometría se ocupaba, desde los griegos, de las propiedades de las figuras fijas, y el álgebra, introducida por los árabes, se ocupaba (en gran medida) de determinar el valor de una variable desconocida (incógnita), pero fija (resolución de ecuaciones).

El cálculo infinitesimal, al contrario, permitió establecer la relación entre los cambios de magnitudes variables, que **dependen** unas de otras. Es decir apoyándose en la expresión de la relación de dependencia entre magnitudes variables (**funciones**), obtiene la expresión de las relaciones entre los **cambios** de dichas magnitudes, que enuncian en muchas ocasiones leyes naturales de carácter general.

La maravillosa idea que hizo posible la matemática de lo cambiante consistió en reducir el tratamiento a los cambios *pequeñísimos* de las variables. Cambios infinitamente pequeños, que posteriormente fueron llamados infinitesimales, y que nos conducen de modo natural al concepto de derivada de una función.

1.2 **La Derivada y la Continuidad**. El concepto matemático de derivada es una de las creaciones más fecundas del análisis y del conocimiento humano en general. Sin él no existirían la idea precisa de velocidad ni de aceleración, ni de densidad de masa o de carga eléctrica, ni de gradiente de un potencial y, por tanto ningún concepto de potencial en ninguna rama de la física; no habría ecuación de ondas, ni mecánica, ni tecnología....

La descripción que de la derivada hace Newton en su Principia Mathematica, como *razón última*, es un ejemplo de rigor y claridad expresado sólo con palabras, sin símbolo matemático alguno, que no nos resistimos a reproducir *“ Pues aquellas razones últimas con las que las cantidades se desvanecen, no son realmente las razones de las cantidades últimas, sino límites hacia los que las razones de las cantidades, disminuyendo indefinidamente, convergen siempre, y a los que se aproximan en menos de cualquier diferencia dada, pero nunca los superan, ni siquiera los llegan a alcanzar de manera efectiva hasta que las cantidades han disminuido in infinitum .”* (Sir Isaac Newton, 1686, traducción inglesa 1934, p. 39). La descripción incluye el concepto de límite, de elementos diferenciales (infinitésimos) y precisa que la derivada es el límite de la razón incremental.

La definición formal de la derivada que hoy utilizamos, tardó todavía mas de cien años en desarrollarse, pero como se puede apreciar lo esencial del concepto viene recogido en la descripción de Newton.

Un requisito necesario, pero no suficiente, para que una función tenga derivada consiste en que tal función sea continua. Las funciones continuas constituyen la clase básica de funciones para las operaciones del análisis matemático, y proporcionan la expresión matemática de situaciones que aparecen con frecuencia en las ciencias de la naturaleza: el hecho de que **a un pequeño crecimiento de la variable independiente corresponda un pequeño incremento de la variable dependiente** o función. El ejemplo mas claro de este tipo de funciones podría ser las que rigen el movimiento de los cuerpos $s = f(t)$, y que expresan la dependencia de la distancia s respecto del tiempo t. Como el tiempo y la distancia son *infinitamente* divisibles, son continuos, una ecuación del movimiento de un cuerpo define entre ellos una relación continua, caracterizada por el hecho de que un pequeño incremento en el tiempo se traduce en un incremento también pequeño en la distancia.

De forma mas general diremos que, dada una función arbitraria $y = f(x)$ y un valor particular de la variable independiente x_0, si la función representa un proceso continuo, entonces a valores x que difieran sólo ligeramente de x_0 corresponderán valores de la función $f(x)$ que difieren sólo ligeramente del valor $f(x_0)$ en el punto x_0. Así, si el incremento $x - x_0$ de la variable independiente es pequeño, el incremento correspondiente $f(x) - f(x_0)$ de la función será también pequeño. En otras palabras, si el incremento de la variable independiente $(x - x_0)$ tiende a cero, entonces el incremento $f(x) - f(x_0)$ de la función debe de aproximase a cero, hecho que se puede expresar del modo siguiente:

$$\lim_{(x-x_0)\to 0}\left[f(x) - f(x_0)\right] = 0$$

La relación anterior constituye la definición de función continua en un punto x_0.

Será continua en un intervalo dado, si es continua en todos los puntos de este intervalo, es decir, si se verifica la relación anterior en cada uno de sus puntos. La imagen gráfica de la función, su curva representativa, será entonces continua no tendrá *rupturas* o discontinuidades.

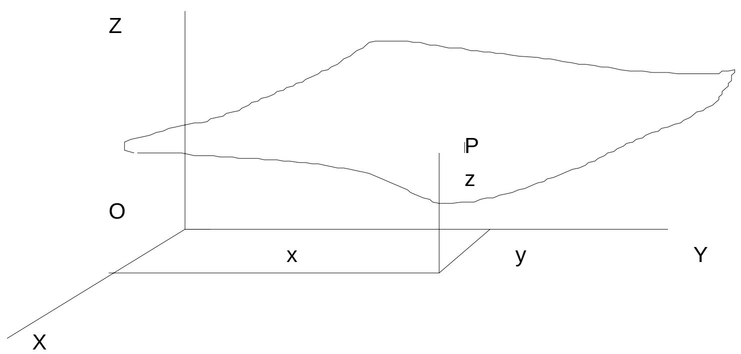
De modo que si una función es continua, podrá ser derivable (lo contrario será siempre cierto), en cada uno de sus puntos. La *razón última* de Newton se expresa formalmente: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \left[\frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} \right]$, en el punto x_0. Esto es, como el límite del cociente o razón de los incrementos de la función y de la variable independiente, cuando este último incremento se hace infinitamente pequeño o tiende a cero.

La función $f(x)$ será derivable en intervalo determinado, si existe el límite anterior en cada uno de los puntos que constituyen dicho intervalo. La función derivada $f'(x)$ nos da la variación de $f(x)$ por unidad de x, ante un cambio infinitesimal de x ($\Delta x \to 0$), en cada punto. Observese **la necesaria divisibilidad infinita de la variable x**. Es decir $f'(x)$ mide la variación instantánea de $f(x)$ por unidad de x. Es por tanto un concepto muy distinto de la variación media: $\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \right)$, y de la variación de $f(x)$ cuando la x se incrementa en una unidad: $[f(x+1) - f(x)]$, conceptos con los que a veces se les confunde. El ejemplo que mejor ilustra el concepto de derivada de una función se puede considerar que es el de velocidad instantánea de un móvil cuya posición viene dada por una función $s(t)$ dependiente del tiempo. Representar el tiempo por medio del conjunto continuo de los números reales permite ver el concepto de **velocidad instantánea** como un límite de velocidades promedio en minúsculos periodos de tiempo; he ahí la derivada.

El significado geométrico de la derivada es de extraordinario interés por sus aplicaciones al estudio de las propiedades o del comportamiento gráfico de la función de la que procede. La derivada en cada punto nos da el valor de la pendiente (o inclinación) de la recta tangente a la curva representativa de la función, en dicho punto. Conocer el signo de dicho valor (positivo o negativo), nos permitirá conocer si la gráfica es creciente o decreciente en cada punto. En los puntos donde la gráfica de la función no admita tangente no existirá derivada. Puede ocurrir, por tanto, que la función sea continua en un punto (no tenga *rupturas*), y sin embargo no tenga derivada en el mismo (en general, por presentar la gráfica un punto anguloso).

1.3. **Funciones de varias variables** .En lo que sigue incluiremos los conceptos y relaciones básicas, que consideramos útiles para el objeto de nuestro estudio, referidas a funciones reales de varias variables reales.

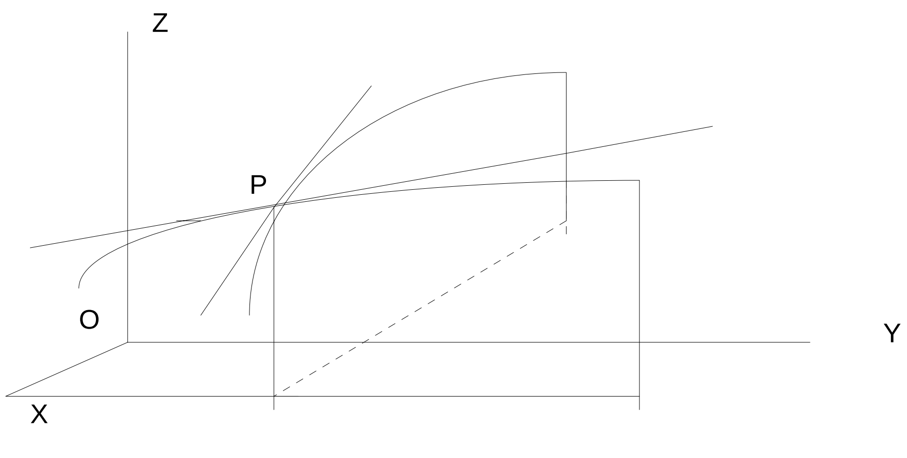
Las funciones de dos variables pueden siempre visualizarse como superficies en un sistema de coordenadas espaciales. De este modo la función $z = F(x, y)$ representa en un sistema de coordenadas rectangulares tridimensional una superficie, que es el lugar geométrico de los puntos P cuyas coordenadas x, y, z satisfacen la ecuación que define la función.



Si fijamos el valor de y, esto es, si consideramos que la y no varía, F se convierte en función de una única variable x. La derivada de ésta función con respecto a x, si existe, es la **derivada parcial** con respecto a x: $\frac{\partial z}{\partial x}$, o bién: $\frac{\partial F}{\partial x}$, o $F_x\,(x, y)$. De modo similar se definiría la derivada parcial con respecto a y.

Como sabemos, en las funciones de una sola variable la existencia de la derivada en un punto garantiza la continuidad en el mismo. En las funciones de varias variables, la existencia de derivadas parciales con respecto a cada una de las variables implica la continuidad con relación a cada variable separadamente, pero no supone la continuidad respecto a todas las variables simultáneamente (Apostol T.M. 1957, ed. esp. 1960, p.103).

Las derivadas parciales nos dan una medida de la variación de una función en la dirección de cada eje de coordenadas. En efecto, como la función F con y fijo, representa una curva plana obtenida por la intersección de la superficie con un plano paralelo al OXZ a una distancia y de él, la derivada parcial $\partial F / \partial x$ será la pendiente o inclinación de la recta tangente a la curva intersección en el punto P de coordenadas (x, y). El mismo proceso se puede seguir fijando la variable x en la función F .



Como se puede apreciar en la figura las derivadas parciales $\partial z / \partial x$ $\partial z / \partial y$ miden los coeficientes angulares o pendientes de las rectas tangentes a la superficie $z = F(x, y)$ en el punto P, trazadas en las dos direcciones ortogonales correspondientes a los ejes OY y OX respectivamente, por tanto serán asimismo tangentes a las curvas obtenidas mediante la intersección de la superficie considerada y los planos paralelos a los ejes citados y perpendiculares al plano OXY.

A veces es necesario considerar las derivadas parciales de estas derivadas parciales; es decir las derivadas parciales de segundo orden. Para funciones de dos variables pueden existir cuatro: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Se puede probar que, si estas derivadas son funciones continuas, las segunda y tercera (las llamadas derivadas cruzadas), coinciden. (Aleksandrov A. D. y otros, ed. esp. 1973, p.184, tomo 1).

Como ya hemos considerado, la existencia de las derivadas parciales respecto a cada una de las variables implica la continuidad de la función con relación a cada variable por separado, pero no garantiza la continuidad respecto a todas las variables simultáneamente.

La generalización más conveniente, que supone la continuidad de una función de varias variables y al propio tiempo permite la extensión a estas funciones de los principales teoremas de la teoría de la derivada unidimensional, es la **diferencial.** Se define del siguiente modo:

Si todas las derivadas parciales de una función $z = F(x_1, x_2..x_n)$ son continuas (condición suficiente), entonces existe la diferencial de z:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + ... \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_i} dx_i$$

Toda función diferenciable será continua y derivable. Sin embargo la condición recíproca no se verifica, la continuidad y derivabilidad de una función no implica la existencia de diferencial, la garantía de su existencia vendrá dada por la continuidad de las derivadas parciales. Para una función de dos variables se tiene una condición geométrica, de existencia, sencilla. Si la superficie representativa de la función admite plano tangente en un punto, será diferenciable en él.

En el capítulo primero hemos visto diferentes ejemplos de aplicación-correcta- de las derivadas parciales de una función, al estudiar la plurivalencia de las matemáticas y el polimorfismo de la física. En el ámbito de la teoría económica neoclásica el uso de éste concepto matemático ha sido, como sabemos, de gran importancia en la formulación de conceptos como la utilidad marginal de un bien, la productividad marginal de un factor productivo, o la elasticidad de la demanda de un determinado bien respecto de su precio.

¿Se ha actuado con el suficiente rigor en el cumplimiento de las condiciones exigidas?.Creemos que no ha sido así, pero aún es preciso recordar otros importantes resultados sobre las propiedades de estas funciones.

1.4 **Funciones homogéneas y Teorema de Euler.** Al aumentar (o disminuir) las variables $x_1, x_2, ...x_n$ en una determinada proporción, el valor de la función $z = F(x_1, x_2, ...x_n)$ puede aumentar (o disminuir) en mayor, igual o menor proporción. En el caso en el que el valor de z cambie en la misma proporción que las variables será una función homogénea de primer grado o lineal-homogénea:

$$F(\lambda x_1 \lambda x_2 ... \lambda x_n) = \lambda F(x_1, x_2, ... x_n)$$

Estas funciones tienen la importante propiedad de verificar el teorema de Euler, teorema de relevantes consecuencias, utilizado en la teoría neoclásica de la producción.

La cualidad de homogénea se puede generalizar del modo siguiente: Dada una función $z = F(x_1, x_2, .. x_n)$, será homogénea de grado r, si se verifica la relación: $F(\lambda x_1, \lambda x_2, ... \lambda x_n) = \lambda^r F(x_1, x_2, ... x_n)$.

Algunas propiedades de las funciones homogéneas. Si $z = F(x, y)$ es una función lineal homogénea de primer grado (Allen R.G.D., 1938, ed. esp. 1966, p.308), se puede demostrar:

1) La función se puede expresar en las formas: $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ o $z = y\phi\left(\frac{x}{y}\right)$
2) Las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$, son funciones dependientes únicamente de la razón $\left(\frac{x}{y}\right)$.
3) Las derivadas parciales directas de segundo orden se pueden expresar en función de las derivadas cruzadas :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y}{x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x}{y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)$$

Teorema de Euler (para dos variables). Si la función $z = F(x, y)$ es homogénea de primer grado se puede expresar: $z = x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$.

1.5. **Multiplicadores de Lagrange.** En relación a las funciones de varias variables se pueden plantear diversos problemas sobre máximos y mínimos. Una clase de problemas con notables aplicaciones en física y en la teoría económica neoclásica, son aquellos en los que es necesario encontrar el máximo (o mínimo) de una función, para valores de x e y (simplificamos para dos variables), que satisfagan una cierta relación (**máximos y mínimos condicionados**). Para resolver estos problemas, de modo sencillo, se ha desarrollado un procedimiento analítico, el método de los multiplicadores de Lagrange.

Se trata de hallar el máximo o mínimo de $z = f(x,y)$ condicionado a que las variables (x,y) verifiquen la condición $\phi(x,y)=0$. Supongamos que las funciones f y ϕ son diferenciables. Se considera una nueva función $F(x,y) = f(x,y) + \lambda\phi(x,y)$ obtenida a partir de las anteriores, donde λ es un número positivo. Para los pares (x,y) que satisfagan $\phi(x,y)=0$, evidentemente las funciones F y f coincidirán.

Si tratamos de obtener los extremos de la función $F(x,y)$, en ellos se deberán cumplir las condiciones: $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$, que aplicadas a la expresión de F nos da el siguiente sistema de dos ecuaciones: $\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$, que nos permitirá encontrar las posibles soluciones (x,y) en función del coeficiente λ. Hallado el valor de λ, tal que se verifique la condición $\phi(x,y)=0$, tendremos el valor de (x,y) correspondiente al extremo relativo buscado. De forma alternativa, podemos encontrar una condición suficiente de extremo relativo condicionado, a partir de las ecuaciones que componen el sistema: $\frac{\partial f/\partial x}{\partial \phi/\partial x} = \frac{\partial f/\partial y}{\partial \phi/\partial y}$.

En términos geométricos, el problema de los extremos relativos condicionados se concreta en la búsqueda de las *crestas* y *depresiones* de la superficie $z = f(x, y)$ sólo a lo largo de una curva determinada de la misma; curva definida por la ecuación de condición: $\phi(x, y) = 0$.

II.2. LAS FUNCIONES Y LA FÍSICA CLÁSICA

2.1. **Las funciones y los modelos matemáticos de la física.**

2.1.a. **Continuidad, derivabilidad y modelos matemáticos.** Si un modelo pretende interpretar la realidad física, económica o en cualquier otro campo del conocimiento, no cabe duda de que deberá incluir todas las manifestaciones esenciales de la realidad que trata de explicar, o al menos, tales manifestaciones no deben estar en contradicción con el mismo; en caso contrario el propio modelo no sería teóricamente aceptable.

En el ámbito de la física, los modelos matemáticos no serían, únicamente, un conjunto de formulaciones y ecuaciones que describiesen alguna rama de la misma, sino que se podrían considerar en gran medida, parte integrante de ella misma, dada la relación (que denominábamos de **constitución**) que se establece entre matemática y física, ya analizada en el capítulo primero. No obstante resultará esclarecedor comprobar hasta que punto esas manifestaciones esenciales de la realidad física se recogen en los modelos matemáticos basados en el análisis de funciones y el cálculo infinitesimal. Nos referimos, en particular, a la continuidad de los procesos estudiados en la mecánica y electromagnetismo clásicos, y de las variables y funciones que los describen.

Las funciones de una o varias variables utilizadas en los modelos físicos han de estar definidas en un subconjunto de los números reales, han de ser continuas, y han de existir las derivadas de una variable o las parciales si se trata de funciones de varias variables, así como la diferenciales en su caso. También aparecen vinculadas al análisis vectorial, dado el carácter vectorial de la mayor parte de los conceptos físicos, en los operadores: gradiente, divergencia, rotacional y laplaciana.

Las variables: masa, carga eléctrica, longitud, área, volumen, tiempo (variables fundamentales), tienen en común (en el campo de la física clásica, es decir no relativista ni cuántica), su naturaleza divisible en magnitudes asimilables a *infinitésimos* y su capacidad, por tanto, de ser representados por subconjuntos *continuos* de números reales, (con las propiedades de *ordenación* y *completitud*). (Aleksandrov A. D. y otros, 1973, p.33, tomo 3).

Las magnitudes físicas que dependan de alguna(s) de las variables anteriores (espacio velocidad, fuerza, energía, campo eléctrico, campo magnético, potencial,...) estarán **definidas** de forma unívoca, sobre algún subconjunto de los números reales y se tendrá verificada la primera condición de continuidad en cada punto: la existencia de la función en dicho punto.

En la sección II.1.2, caracterizábamos la continuidad de una función en un punto como el hecho de que a un incremento infinitesimal de la variable independiente corresponda un incremento infinitesimal de la función; que gráficamente se manifiesta como una curva sin rupturas o *discontinuidades.* Es la traducción matemática de lo que llamábamos buen ajuste entre el movimiento *real* de las magnitudes físicas y los cambios de las variables y funciones que las representan.

Las funciones representativas de las magnitudes físicas mencionadas arriba son, en general, de tipo polinómico, racionales (cociente de polinomios), trigonométricas, exponenciales o suma y producto de las anteriores. Dado que estas funciones son continuas (con las salvedades oportunas, relativas a puntos concretos, aislados, de posibles discontinuidades), se puede afirmar que siempre existen subconjuntos de R (números reales) en los cuales las funciones representativas de las magnitudes físicas más relevantes son continuas. Lo anterior se podría extender a subconjuntos de R^2 o R^n para funciones de dos o n variables. Consideremos algún ejemplo de tales funciones:

En el movimiento rectilíneo con aceleración constante el espacio recorrido en función del tiempo viene dado por una expresión polinómica de segundo grado: $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$. El desplazamiento de un muelle sometido a una deformación inicial, o la intensidad de corriente eléctrica que recorre un circuito R-L-C en régimen transitorio, en función del tiempo, vienen dados por el producto de una expresión exponencial y otra trigonométrica:

$$i = i_0 e^{-\frac{R}{2L}t} sen(\omega t + \varphi)$$

$$x = x_0 e^{-\frac{r}{2m}t} sen(\omega t + \varphi)$$

como vimos en la sección I.3.2.

Las funciones representativas de magnitudes físicas continuas serán derivables si existe el límite del cociente o razón de los incrementos de cada función y de su variable (considerada como independiente), cuando esta última se haga infinitamente pequeña. Ello ocurre en general, salvo en los puntos angulosos, donde la gráfica de la función no admite tangente. Desde un punto de vista puramente teórico sería posible definir mediante una fórmula una función continua no derivable en ningún punto, pero esta función no representaría ninguna relación física y queda fuera de nuestras consideraciones. La *razón última* de Newton tiene pleno sentido y significado para las magnitudes de la física clásica. No se debe olvidar que el concepto de derivada nació ligado al concepto de velocidad instantánea y de la aceleración de un móvil: $v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$; $a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$. Cabe insistir en la necesaria divisibilidad en infinitésimos de tales variables como requisito previo, también para la existencia de la derivada. Ello manifiesta el hecho de que la *derivabilidad* de una función en un punto, garantiza la continuidad en él.

Las funciones representativas de relaciones entre magnitudes físicas, de los tipos que hemos considerado mas arriba, en esta sección, (polinómicas, racionales, trigonométricas, exponenciales.....), se puede demostrar que son derivables, es decir que existe el límite de la razón incremental), de modo relativamente sencillo (Aleksandrov A. D. y otros, 1973, pp.132 y ss. tomo 1), siempre con las salvedades señaladas. Ello no significa otra cosa que el hecho de que a partir de la expresión de la relación entre magnitudes físicas implicadas (**la función**), podemos encontrar una expresión para la razón entre los cambios de dichas magnitudes, una expresión para la variación de una de ellas (la dependiente), por unidad de la otra (independiente), cuando los incrementos de la segunda se vuelven infinitamente pequeños o infinitesimales; que sería la **derivada.**

2.1.b. **Ecuaciones diferenciales y condiciones de existencia.** Diversos problemas físicos pueden ser descritos mediante relaciones entre una función desconocida y sus derivadas, (el enfriamiento de un cuerpo, la desintegración de una substancia radioactiva, el movimiento de un péndulo), serían ejemplos sencillos de este tipo de relaciones que constituyen las ecuaciones diferenciales, ecuaciones donde la incógnita es la función y que son utilizadas también en ciertos modelos matemáticos de la economía (en particular en la teoría del crecimiento).

Consideramos pertinente una descripción breve de las condiciones matemáticas de existencia de solución , en este tipo de ecuaciones, y de algún ejemplo de aplicación en algún ámbito de la física. De forma rigurosa:

Toda relación de la forma $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ... \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$, que liga una variable independiente x con una función y de ella , y las n primeras derivadas, se llama ecuación diferencial ordinaria de orden n. La solución general de esta ecuación vendrá dada, si existe, por un haz de curvas $y = F(x,C)$, que satisface la ecuación , siendo C un parámetro que diferencia entre distintas soluciones particulares.

Para ecuaciones diferenciales de primer orden: $y' = f(x, y)$, en forma normal, la existencia se plantea sen los términos siguientes: ¿ existirá una región del plano tal que, para cada punto de coordenadas $x_0 y_0$, sea posible hallar una curva y sólo una que pase por él y satisfaga la ecuación diferencial dada?. La respuesta será afirmativa si $f(x, y)$, es analítica, es decir desarrollable en serie de Taylor. Esto constituye **el *teorema de existencia de Cauchy:*** Si $f(x, y)$ es analítica (derivable cuantas veces se desee), en un cierto dominio al que pertenece el punto x_0, y_0 **existe** una función analítica y sólo una $y(x)$ que verifica la ecuación diferencial y tal que se verifique: $y(x_0) = y_0$.

Unas condiciones menos restrictivas para la existencia de solución, vienen dadas por el método de aproximaciones sucesivas de Picard, y consisten en:

1) La función $f(x,y)$ es uniformemente continua en una región del plano D.
2) $f(x,y)$ verifica la condición de Lipschitz; es decir, existe un número positivo L tal que, para cualquier par de puntos (x,y_1) (x,y_2), de una misma vertical, tomados en D, se verifica: $\left|\frac{f(x,y_2)-f(x,y_1)}{y_2-y_1}\right|<L$. Es decir el incremento relativo medio de la función $f(x,y)$ entre dos puntos cualesquiera de una misma abscisa está acotado, (Puig Adam P. 1967, p. 6-7).

Las funciones que representan alguna relación entre magnitudes mecánicas o electromagnéticas, no tienen dificultad para satisfacer estas condiciones de existencia en la medida en que sean derivables, en general. Será aceptable bajo cualquier criterio de contrastación teórica, la utilización de este procedimiento matemático en el ámbito de la física clásica.

Un ejemplo de aplicación de ecuaciones lineales de primer orden a la física sería el estudio de un circuito con resistencia R, y autoinducción L, alimentado con un generador de corriente alterna cuya fuerza electromotriz (f.e.m.), viene dada por: $Esen\omega t$. La ecuación diferencial que relaciona la intensidad de corriente que circula por el circuito y la variación temporal de esta corriente viene dada por: $L\frac{di}{dt}+Ri=Esen\omega t$. La función que hemos denominado $f(x,y)$ en los teoremas de existencia se expresará en este caso como: $\frac{di}{dt}=\frac{Esen\omega t-Ri}{L}$ combinación de función trigonométrica y lineal, con cualquier número de derivadas sucesivas; lo que asegura la existencia de solución o integral general de dicha ecuación, que convenientemente resuelta nos dará la siguiente expresión para la intensidad de corriente que recorre el circuito, en función del tiempo:

$i(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} sen(\omega t - \varphi)$, suma de un primer término transitorio y otro permanente.

2.1.c. **Las funciones de varias variables y su aplicación a la física**. En cuanto a la continuidad y derivabilidad de las funciones de varias variables $F(x_1, x_2, ... x_n)$ en física, cabe señalar los siguientes aspectos:

a) La existencia de las derivadas parciales con respecto a cada una de las variables, implica la continuidad de la función con relación a cada variable separadamente, pero nó supone la continuidad respecto a todas las variables simultáneamente.

b) Si todas las derivadas parciales de una función son continuas, entonces existe la diferencial de dicha función: $dF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i$

c) Toda función diferenciable es continua y derivable.

Vamos a centrar la cuestión de la derivabilidad de estas funciones en física, en un tipo determinado de función, la función potencial, por su relevancia y la generalidad de las conclusiones obtenidas.

Un concepto físico fundamental, expresable mediante una función de varias variables (sus coordenadas de posición), es el de potencial gravitatorio o el electrostático. Esta magnitud está ligada a las fuerzas conservativas. Esto quiere decir (para el caso electrostático), que el trabajo que realiza una fuerza para llevar una carga eléctrica de un punto a otro, puede escribirse como la diferencia entre los valores que toma una función en dichos puntos (función **potencial**) y por lo tanto es independiente del camino concreto utilizado y nuestro potencial dependerá por tanto sólo de la posición.

El potencial electrostático en un punto cualquiera, se podría definir como el trabajo necesario para traer una unidad de carga positiva desde el infinito (potencial nulo) hasta el punto considerado. Tanto las fuerzas gravitatorias como las electrostáticas son conservativas generando, por tanto, las funciones potenciales correspondientes.

Es razonable aceptar que si estos potenciales $U(x,y,z,)$ o $V(x,y,z)$ manifiestan las propiedades gravitatorias o electrostáticas de cada punto del espacio físico, expresándolas mediante un escalar, se puedan considerar funciones continuas, dado, por un lado, el carácter **infinitamente** divisible de las coordenadas espaciales que constituyen los dominios o campos de definición de estas funciones (subconjuntos del espacio R^3), y por otro, la **proximidad** entre los valores del potencial para puntos situados suficientemente cercanos entre si. Es decir, a un crecimiento infinitesimal de las variables independientes (coordenadas de cada punto), le corresponderá un incremento infinitesimal del potencial.

Las derivadas parciales nos darán, en este caso, las *variaciones unitarias del potencial,* al desplazarnos en la dirección de cada eje, *cuando el desplazamiento se hace infinitamente pequeño.* Estas variaciones se pueden interpretar como las componentes de una función vectorial, gradiente de U: $\nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z} \right)$, siendo su dirección aquella en la que la función escalar experimenta la variación máxima. Es muy significativo ver la íntima ligazón que existe entre el concepto matemático de derivada (parcial, en este caso), y el concepto físico de gradiente de un potencial escalar (que no sería posible sin el concepto matemático).

La existencia del *límite de la razón incremental* (variaciones del potencial por unidad de medida en cada dirección), que en definitiva es lo que garantiza la derivabilidad de la función, está asegurada por la naturaleza del concepto de potencial: propiedad asociada a cada punto del espacio físico, y generada por la presencia de una masa determinada (gravitatorio), o algún tipo de carga eléctrica (electrostático). Es lógico suponer la existencia de las variaciones unitarias de esa propiedad, al moverse de un punto a otro muy próximo (salvo en algún caso singular).

Desde un punto de vista más formalizado, hay que señalar que las funciones potenciales vienen representadas por expresiones matemáticas de tipo racional, irracional o trascendente , pero en cualquier caso derivables formalmente, mediante el cálculo del límite del cociente incremental en cada tipo, y la aplicación de las reglas correspondientes. Por ejemplo, para potenciales electrostáticos tenemos:

$V = KQ\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$; Potencial creado por un dipolo eléctrico en un punto situado a distancias r_1 y r_2, respectivamente de las cargas del dipolo.

$V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\sqrt{\left(a^2 + R^2\right)} - \sqrt{\left(a^2 + r^2\right)}}{R^2 - r^2}\right)$; Potencial creado por una carga Q repartida uniformemente sobre una corona circular de radios r y R, en un punto de su eje situado a una distancia a del plano de la corona.

Por razones idénticas a las consideradas para el potencial podemos aceptar, en general, como continuas y derivables de nuevo las funciones obtenidas a partir del potencial.

En efecto, como sabemos, la función vectorial gradiente de un potencial, cuyas componentes son las derivadas parciales respecto a cada una de las variables, nos da las variaciones unitarias del potencial a lo largo de cada eje en posiciones extremadamente próximas, y equivale este gradiente (cambiado de signo), al concepto físico de campo eléctrico (en este caso). Esta función vectorial: $E = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}; \frac{\partial V}{\partial y}; \frac{\partial V}{\partial z} \right)$ nos expresa la fuerza eléctrica por unidad de carga y es, de nuevo, *una propiedad de cada punto del espacio físico* explicitada mediante un vector. Esta propiedad inducida por la presencia de una distribución de carga eléctrica (o de masas en el campo gravitatorio), tiene las características precisas para que las funciones que la manifiestan, sean a su vez continuas y derivables, en los subconjuntos de R^3 donde se definen.

Características que se podrían resumir como: infinita divisibilidad de las variables donde se define la función, y de las magnitudes que dependen de dichas variables, *variación conjunta* de ambas, existencia de los *límites de las razones incrementales* ó variaciones unitarias de las magnitudes consideradas, por unidad de las variables consideradas independientes en cada caso, cuando tales variables cambian de modo infinitesimal. Asimismo, se tiene que las funciones representativas de las componentes de la función vectorial gradiente de un potencial, se pueden expresar mediante fórmulas que representan transformaciones continuas y derivables. La diferencial de una función potencial tiene igualmente sentido matemático, en la medida en que se verifica la condición suficiente de existencia, que consiste en la continuidad de las derivadas parciales.

Un ejemplo ilustrativo de la derivación de segundo orden de la función potencial y su inserción en una relación de primordial importancia en la teoría del campo electromagnético viene dada por la ecuación de Laplace. Nos da una condición que ha de cumplir el potencial en regiones del espacio físico libres de la presencia de cargas eléctricas. Expresada en coordenadas rectangulares resulta: $\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$, ecuación en derivadas parciales de segundo orden que relaciona la *rapidez* (primera derivada) del *cambio* (segunda derivada), del potencial en las direcciones de las tres componentes.

Un ejemplo relevante de aplicación del concepto matemático de diferencial de una función de varias variables a la física lo tenemos (también para el potencial electrostático), en la expresión integral que nos da la energía electrostática asociada a una determinada densidad de carga $\rho(r)$, en una región del espacio donde el potencial viene dado por $V(r)$

$$W = \iiint_V \rho(r) V(r) dV \text{ , siendo } dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz .$$

(Jordan E. C. y Balmain K. G. 1968, ed. esp. 1973, p. 79-80).

2.2. El papel de las funciones y los paradigmas de la física clásica.

Para comprender en su globalidad la relación de las funciones con la física creemos conveniente **separar** (de forma claramente artificial), los distintos aspectos de esta relación. De ello se trata en lo que sigue, para después terminar este análisis del papel de las funciones y del cálculo diferencial en la física, con una breve exposición de la formulación funcional de las dos grandes teorías que constituyen, en gran medida, la física clásica.

2.2.a. El triple papel de las funciones. Consideramos que la relación de las funciones reales de variable real con la física se podría descomponer, a efectos de análisis, en un triple cometido o tarea. Un primer papel que las funciones desempeñan sería el de **lenguaje,** las funciones constituyen la expresión rigurosa de relaciones de dependencia entre variables físicas, no es solo una manipulación de lo cuantitativo, ni una actuación instrumental desde el exterior de la física (como podría ser la estadística), diríamos que son la parte mas sofisticada del **lenguaje matemático** en el sentido que atribuyó Galileo en su famosa frase (ya citada)”..*el libro de la naturaleza esta escrito en lenguaje matemático..”*

Un segundo papel de las funciones sería el de **núcleo** de las leyes físicas. En efecto las relaciones fundamentales entre magnitudes físicas que manifiestan leyes de la naturaleza, se expresan formalmente mediante funciones, a las que lógicamente hay que añadir los supuestos o hipótesis adecuadas. Este cometido de las funciones (contenido en el anterior, el lenguaje), iría mas allá, en el sentido de la afirmación de Poincaré,”*...Todas las leyes se extraen de la experiencia, pero, para enunciarlas, se precisa de una lengua especial; el lenguaje ordinario es demasiado pobre, y es además demasiado vago, para expresar relaciones tan delicadas, tan ricas y tan precisas..”*(Poincaré H. 1910).

Los ejemplos de esta situación son extraordinariamente abundantes, abarcarían desde las leyes del movimiento, la dinámica de Newton, las leyes del electromagnetismo..., etc.

El tercer papel de las funciones lo podemos definir como **soporte** de la relación de **constitución,** que la matemática establece con la física y que estudiamos en el capitulo I. En efecto, esta relación estaba caracterizada por el polimorfismo matemático de la física, la plurivalencia física de las matemáticas y por el carácter continuo y derivable de los procesos físicos, susceptible de ser representado correctamente por el análisis matemático.

Este último aspecto ha sido tratado en las páginas anteriores y no hay que insistir en el papel central de las funciones. En cuanto a las dos primeras características mencionadas, recordemos que estaban basadas en los diferentes modelos matemáticos de un mismo proceso físico (polimorfismo), modelos en los que con mayor o menor grado de complejidad intervienen de forma esencial las funciones; y en relación a la plurivalencia física de las matemáticas, cabe subrayar la necesidad de las funciones y sus derivadas en la construcción de cualquier modelo plurivalente para diversos procesos físicos. De este modo las funciones se constituyen en el **soporte** fundamental de la relación Matemática.-Física.

2.2.b **Las funciones y los paradigmas de la física clásica.** El análisis con funciones desempeña un cierto protagonismo en la conformación de los paradigmas (en el sentido de Kuhn), de la física clásica (Kuhn T. S. 1962, ed. esp. 1977). Un paradigma estaría constituido por los supuestos teóricos generales, las leyes y las técnicas para su aplicación. La *ciencia normal* articulará y desarrollará el paradigma en su empeño por explicar y acomodar algunos aspectos del comportamiento del mundo físico real, tal y como se revelan a través de la investigación.

Podemos considerar las leyes del movimiento de Newton como parte del paradigma newtoniano y las ecuaciones de Maxwell formarían parte del paradigma que constituye la teoría electromagnética clásica. En la medida en que las funciones expresan formalmente tales ecuaciones y leyes, reside su protagonismo en la conformación del paradigma.

En éste sentido, tanto la ecuación fundamental de la dinámica Newtoniana, expresada mediante las ecuaciones de Lagrange: $\frac{d}{dt} p_i = \frac{\partial}{\partial q_i} L$; (que nos dicen que la derivada o variación temporal de los momentos conjugados p, es igual a la derivada parcial respecto de la coordenada generalizada q, de la función de Lagrange L o Lagrangiana, definida como la diferencia entre las energías cinética y potencial del sistema cuyo movimiento se estudia); como las ecuaciones de Maxwell:

$$\frac{\partial}{\partial x} D_x + \frac{\partial}{\partial y} D_y + \frac{\partial}{\partial z} D_z = \rho$$ Ley de Gauss

$$\frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y + \frac{\partial}{\partial z} B_z = 0$$ Expresa la no-existencia de polos magnéticos aislados

$$\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$ Ley de inducción electromagnética de Faraday

$$\nabla \times H - \frac{\partial D}{\partial t} = J$$ Ley circuital de Ampere

donde las funciones vectoriales (dependientes, en general, de las coordenadas espaciales y del tiempo): **D**, **B**, **E**, **H** y **J** representan respectivamente, al desplazamiento eléctrico**,** a la inducción magnética, al campo eléctrico, al campo magnético y a la densidad de corriente eléctrica; se podría decir que están formuladas sobre la base de funciones de varias variables continuas y derivables y son el producto de una **reformulación** de los paradigmas originales.

Matemáticos como Bernouilli, Euler, Lagrange, Laplace y Gauss, en los últimos años del siglo XVIII y comienzos del XIX, y más tarde otros como Hamilton y Jacobi se ocuparon en problemas destinados a mejorar la conexión entre los paradigmas de la física clásica y la naturaleza. Elaboraron desarrollos matemáticos necesarios para aplicaciones que sólo implícitamente se encontraban en los *Principia* de Newton. De este modo se produce una reformulación de los planteamientos anteriores, equivalente, pero más general y a la vez más eficaz.

Las consideraciones anteriores nos permiten un nuevo enfoque sobre dos de las características (ya estudiadas), que definen la relación entre matemática y física. Nos referiremos en primer lugar al polimorfismo matemático de la física. Como sabemos, esta propiedad consiste en la capacidad de un fenómeno o ley física de admitir diferentes formalizaciones matemáticas. A la luz de lo visto en esta sección, se puede apreciar que tales matematizaciones no serían otra cosa que las sucesivas **reformulaciones** de los paradigmas originales, en un proceso histórico, cada una de ellas más general y más eficaz en las aplicaciones. Los ejemplos considerados, en el capítulo primero y anteriormente sobre la dinámica newtoniana y el electromagnetismo clásico, ilustran suficientemente la cuestión.

La segunda característica de la relación matemática-física, que consideramos de nuevo es la, que podemos llamar, **fidelidad** del *ajuste* del análisis de funciones para la representación de las leyes y fenómenos físicos, basada en la continuidad y derivabilidad de tales funciones.

La elaboración, por parte de los físicos y matemáticos mencionados, de las nuevas reformulaciones formales, de los nuevos desarrollos de los paradigmas clásicos se realizaron “ pegándose al terreno”, buscando las formas adecuadas a los fenómenos que se querían representar (fenómenos que en su esencia tenían las propiedades de continuidad y derivabilidad). Como señala Khun *“..Los Bernouilli, Euler, Lagrange, Laplace, y Gauss realizaron todos ellos parte de sus trabajos mas brillantes en problemas destinados a mejorar la* ***concordancia*** *entre el paradigma de Newton y la naturaleza.”* (Kuhn T. S. 1962, ed. esp. 1977). Esta cita ilustra de modo conveniente sobre el desarrollo íntimamente ligado de los contenidos físicos y el formalismo matemático que tuvo lugar; el estrecho paralelismo que se dió en el estudio de la matemática y la física clásica. De modo que la especial **adecuación** del análisis matemático a la descripción de la física no es una característica ligada sólo a la naturaleza de los procesos físico-naturales, sino que tiene mucho que ver con la génesis de este cuerpo de la matemática.

CAPITULO TERCERO. MODELOS ECONÓMICOS Y CÁLCULO DIFERENCIAL

En este capítulo se continuará con el estudio de las condiciones y consecuencias que rodean la inclusión de los instrumentos matemáticos propios del análisis de funciones en los modelos económicos, considerando algunos casos paradigmáticos. En particular se considerarán la *función* de utilidad, la existencia de funciones de demanda y algunas cuestiones en torno a la estabilidad del equilibrio y el cálculo diferencial. Dedicaremos el próximo capítulo al estudio de la función de producción neoclásica y de las condiciones que la envuelven, bajo la óptica de la utilización del cálculo infinitesimal.

1. MODELOS ECONÓMICOS Y CÁLCULO DIFERENCIAL

1.1. Las funciones y los modelos económicos. Consideramos el concepto de modelo económico en sentido amplio, como una representación simplificada mediante una formulación matemática de un cierto conjunto de relaciones económicas (Sampedro J. L. 1959). Los modelos han de tratar de representar un fenómeno económico real mediante un conjunto de relaciones, y lo han de hacer en términos matemáticos. El modelo puede *describir* una **teoría** (modelo de equilibrio general, por ejemplo) o bien un grupo de relaciones mas simple, o una parte de la teoría en cuestión (estabilidad del equilibrio), en cualquier caso serían modelos descriptivos o explicativos en la medida en que pretenden representar la realidad.

Las funciones y en general el análisis infinitesimal desempeñan un papel primordial en la formulación de éstos modelos (no así en los diseñados para la contrastación empírica de una teoría económica, que serían modelos econométricos), bien por la *definición* de ciertos conceptos económicos en forma funcional (funciones de utilidad, de producción, de exceso de demanda...), bien por la utilización de la derivada de tales *funciones* para definir y expresar los conceptos marginales (utilidad marginal, productividad marginal...).

Además de lo anterior, en los modelos dinámicos, es decir aquellos que representan fenómenos cuyo comportamiento temporal viene descrito por ecuaciones funcionales (cuya incógnita es una función) y en los que las variables económicas dependen del tiempo, se plantea la cuestión de encontrar dicha función desconocida que satisfaga la ecuación funcional idénticamente; por ejemplo, el modelo agregado de crecimiento neoclásico de Solow (1956) . Nos encontramos ante el problema de la existencia, continuidad y derivabilidad de estas funciones, cuestión que estudiaremos en los siguientes apartados.

1.2. La controversia sobre el realismo de los supuestos. Una importante discusión metodológica en economía se origina en torno al problema del realismo de los supuestos de los modelos y teorías. Es decir, sobre la necesidad o el grado de realismo exigible a los supuestos e hipótesis que conducen a la representación matemática (o por medio de otros instrumentos) de una teoría. Consideramos relevante para nuestro estudio realizar una reflexión sobre esta significativa polémica. La discusión se puede interpretar, en gran medida, como un enfrentamiento entre los partidarios del método deductivo y los que lo repudian, asumiendo alguna forma de inducción lógica o estadística, basada en la contrastación empírica.

El argumento sobre la falta de realismo de las hipótesis de la teoría neoclásica se remonta a los comentarios realizados en 1901 por Henri Poincaré a Walras, sobre la medida de la utilidad (cit. por Jaffe, W.1977); aunque se puede considerar que la controversia adquiere con Robbins unos caracteres más definidos al plantear: "*..cuando se ha comprendido la naturaleza de los postulados básicos de la teoría del valor o de la producción o de la teoría dinámica, no caben extensas disputas sobre su* ***realismo..****basta con enunciarlos para reconocerlos como obvios."* (Robbins, L. 1932, edición en castellano 1944, pág 79).

Esta postura es objetada por Hutchison, para quien los postulados o supuestos en que se basa la teoría económica ortodoxa, por no haber sido verificados ni verificables, son poco realistas y por tanto el sistema teórico (hipotético deductivo), construido sobre tales supuestos irreales es condenable (Hutchison, T. W. 1960).

La polémica adquiere una mayor dimensión con la publicación de la obra de Friedman *La metodología de la economía positiva* (1953), donde el representante más notable de la escuela de Chicago, sostiene que las teorías son abstracciones y, por lo tanto, no pueden juzgarse en función del realismo de sus supuestos; una teoría económica sólo podría evaluarse en función de la exactitud de sus predicciones, “ *Se supone que las hipótesis...poseen supuestos y que la conformidad de tales supuestos con la realidad es la prueba de la validez de las hipótesis...Esta opinión, ampliamente defendida, está fundamentalmente equivocada y es origen de muchos errores.”* (Friedman, M. 1953, traducción española 1958, pág 367).

En definitiva, el pensamiento de Friedman va en la dirección de que no es necesario plantearse si los supuestos en se basa la teoría económica son realistas o no. La validez de una teoría vendría dada por el grado de precisión de las predicciones que de la misma se obtengan. Machlup va aún mas lejos, en la misma línea, al señalar que la verificación de las hipótesis fundamentales de una teoría no es precisa, ya que incluso los supuestos básicos de la física **no exigen dicha verificación**, llegando a afirmar que las tres leyes de la dinámica de Newton son postulados o reglas de procedimiento en los que no es posible, ni se exige, una comprobación experimental (Machlup, F. 1955, traducción española 1958, pág. 412). En definitiva Machlup sostuvo, de manera convenientemente pragmática, que aun cuando los supuestos fundamentales de una teoría fueran falsos, esta no debería considerarse desacreditada mientras una nueva no la desplace. Mientras tanto, los falsos supuestos pueden ser aceptados como postulados heurísticos.

Samuelson discrepa de estas opiniones, al plantear que los supuestos de una teoría económica, dicha teoría y las consecuencias implicadas por la misma (o que se deducen de ella) constituyen un todo integrado; de modo que si los supuestos son realistas, la teoría y sus implicaciones exhibirán el mismo grado de realismo, o bien el sistema formado por el conjunto será lógicamente incoherente (Samuelson, P. A. 1963).

En el mismo orden de ideas, Gunnar Myrdal al estudiar las causas de los desequilibrios económicos y los orígenes de la pobreza en las regiones menos desarrolladas, constata las insuficiencias de la teoría económica del desarrollo, y considera que lo inadecuado del enfoque teórico que hemos heredado radica en **los supuestos, carentes de realismo,** en que se ha basado la teoría. En este sentido, reclama que como condición previa y exigible a la elaboración de políticas económicas operativas, con el apoyo de la teoría económica, es preciso que los supuestos sobre los que esta se construya sean realistas. (Myrdal, G. 1964)

Se podría considerar que esta polémica está motivada, al menos en parte, por la ambigüedad del concepto de *supuesto*, aunque creemos que al margen de la misma lo esencial del debate permanece. Así el profesor L. A. Rojo distingue hasta cuatro tipos de supuestos diferentes: a) Los supuestos de *motivación*. b) Los supuestos que afirman regularidades en la realidad económica. c) Supuestos sobre factores constantes. d) Supuestos especificadores del espacio social sobre el que se propone la teoría.

En una posición que se podría considerar ecléctica, Rojo opina que a los supuestos que expresan regularidades en la realidad económica (que consideramos susceptibles de formulación matemática), se les debe exigir la contrastación empírica; así como también a los del tercer y cuarto tipo (Rojo, L. A. 1970).

No termina con esta breve exposición la discusión en torno a la necesidad de incrementar el realismo de las teorías económicas y de sus supuestos básicos. Creemos que existen fundadas razones para considerar esta falta de realismo como una de las principales causas de la incapacidad de la **teoría** para afrontar con éxito los problemas y las crisis de la economía, recientes y pasadas.

A ello parece referirse Keynes cuando en el prefacio de su Teoría General señala: *"...si la economía ortodoxa está en desgracia, la razón debe buscarse no en la superestructura, que ha sido elaborada con gran cuidado por lo que respecta a su consistencia lógica, sino en la falta de claridad y generalidad de sus premisas."* (Keynes, J.M. 1936, edición en castellano 1943, pág. 9) Mas adelante, en el capítulo primero de la citada obra insiste: "**...***Las características* **...***.no son las de la sociedad económica en que hoy vivimos, razón por la que sus enseñanzas engañan y son desastrosas si intentamos aplicarlas a los hechos reales."* (pág. 15 op. cit.)

1.3. Los supuestos de naturaleza matemática en los modelos económicos. Entendemos que los supuestos de una teoría económica se deben formular a partir de la observación del proceso económico real; serían los resultados de la inducción basados en la evidencia empírica disponible, conjeturas acerca de la realidad económica basadas en la información y el examen de la misma. En este sentido, consideramos supuestos de *naturaleza matemática* aquellas observaciones y conjeturas sobre la realidad económica, formuladas en términos del análisis de funciones o del cálculo infinitesimal, que incluirían tanto los supuestos sobre dicha realidad, precisos para hacer viable la formulación inicial (por ejemplo, supuestos sobre continuidad de una función), como aquellos otros incorporados en el proceso de construcción del *edificio* matemático que constituye el modelo completo de la teoría en cuestión.

Consideramos que en el proceso de elaboración de tales modelos se suele *forzar* la realidad de los procesos económicos para *adecuarla* o *adaptarla* a las exigencias formales del análisis matemático. Al forzar la realidad para adaptarla a tales exigencias, creemos que se podría incurrir en una notable ausencia de realismo en los supuestos así construidos o incorporados.

Pensamos que esto puede ocurrir en la propia definición de algunas funciones, en su continuidad, su derivabilidad, en la existencia de funciones solución de ecuaciones diferenciales en algunos modelos que las incluyen, y en el conjunto de relaciones basadas en los conceptos anteriores.

Las consecuencias para las teorías, que se derivarían de esta ausencia de realismo de los supuestos (que hemos denominado) de naturaleza matemática, creemos que no serían desdeñables en ningún caso, pudiendo llegar al extremo de desvirtuarlas en gran medida, y no hacerlas aceptables. Es pertinente a este respecto citar la opinión de Leontieff, que critica esta forma de economía matemática "*....por levantar una superestructura ostentosa sobre unas débiles bases empíricas e hipótesis o supuestos no comprobados y, de esta manera, perdiendo el contacto con el mundo real.* " (Leontieff, W. 1971)

1.4. Existencia, continuidad y derivabilidad de las funciones en la teoría económica. Las funciones de una o varias variables definidas y utilizadas en los modelos económicos han de estar definidas en el correspondiente subconjunto de R o de R^n, han de ser continuas y han de existir las derivadas de una variable o las derivadas parciales y diferenciales, si se trata de funciones de varias variables. Todo ello si se pretende que las hipótesis y supuestos expresados mediante tales funciones, reflejen la realidad económica que el modelo en el que están incluidas pretende describir.

Las variables: precio de un conjunto de bienes, cantidades ofrecidas o demandadas de dichos bienes o servicios, factores productivos capital y trabajo, producto..., no se caracterizan por ser divisibles en magnitudes infinitamente pequeñas (en mayor o menor medida cambiarían su *cualidad* o significado económico), asimilables a *infinitésimos* y tampoco serían susceptibles de formar conjuntos *continuos* de números reales, con las propiedades (ya consideradas en el estudio de las variables físicas) de *ordenación* y *complitud.* La ausencia de esta cualidad, dificulta o hace imposible la definición rigurosa, en conjuntos formados por valores de dichas variables, de funciones de una o varias variables reales.

Admitiendo que se pudiese definir una trasformación inyectiva o unívoca de un conjunto de valores reales de una o varias variables (dominio), en otro conjunto que sería el recorrido de esta función, nos encontraríamos con el problema de su continuidad.

En la sección II.1.2, se caracterizaba la continuidad de una función en un punto como el hecho de que a un incremento infinitesimal de la variable independiente, corresponda un incremento infinitesimal de la función. En términos más rigurosos, lo anterior implica que existe o está definida la función en cada punto del dominio, que existe el límite en el mismo, y que ambos, valor de definición y límite coinciden. Pues bien, parece poco ajustado a la realidad de muchos procesos económicos que las variables se puedan considerar que cambian o *se mueven* en términos infinitesimales (pensemos en una función de producción $F(k,l)$, dependiente de las variables capital y trabajo, o una función de utilidad $U(x_1, x_2, ...x_n)$ dependiente de las cantidades consumidas de distintos bienes). Es razonable preguntarse que sentido económico pueden tener **incrementos infinitesimales de capital o de trabajo**, variables que cambiarían su *cualidad* o significado al ser infinitamente divididas, o de cantidades consumidas de distintos bienes. No parece tener mucha concordancia con la realidad la consideración como continuas de tales funciones.

Las funciones, de una o varias variables, *representativas* de relaciones entre magnitudes económicas, serán derivables (para cada variable, consideradas las demás constantes), si existe en cada punto del conjunto que se considere, el límite del cociente de los incrementos de la función y de la variable estimada, cuando el valor de ésta se hace infinitamente pequeño. En realidad sabemos que tal límite mide la *proporción* con la que varía la función al cambiar la variable en términos infinitesimales. La existencia de esta *variación unitaria e infinitesimal* que es la derivada, exige además, la continuidad de la función.

Esta situación afectaría, en particular, a los *conceptos marginales* definidos mediante derivadas simples o parciales Se podría afirmar que este fundamental concepto físico, la derivada, ha sido adoptado por la teoría económica sin demasiados escrúpulos.

Conceptos como productividad marginal de los factores productivos capital y trabajo: $\frac{\partial F}{\partial k};\frac{\partial F}{\partial l}$, o utilidad marginal de un bien $\frac{\partial U}{\partial x_i}$, han sido definidos mediante derivadas parciales de funciones de dudosa existencia y continuidad:

$PM_l = límite_{\Delta l \to 0} \frac{F(k,l+\Delta l)-F(k,l)}{\Delta l} = \frac{\partial F}{\partial l}$, productividad marginal del trabajo, o bien

$UM_{x_i} = límite_{\Delta x_i \to 0} \frac{U(x_1,..x_i+\Delta x_i,..x_n)-U(x_1,...x_i..x_n)}{\Delta x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i}$, utilidad marginal del bien x_i, siendo $F(k,l)$ y $U(x_1,...x_n)$ *funciones* de producción y de utilidad respectivamente.

De nuevo habría que subrayar la falta de realismo o de acercamiento a la realidad de los procesos económicos, que subyace bajo la consideración como derivables de tales funciones. De modo parecido, la existencia de la diferencial de alguna función de varias variables de significado económico exige (como vimos en la sección II.1.3), la continuidad de todas las derivadas parciales de dicha función, no sólo su existencia, lo cual hace aún más problemático la consideración rigurosa de éste concepto en la teoría económica.

2. ALGUNAS CONSECUENCIAS DE LA UTILIZACIÓN DEL CÁLCULO DIFERENCIAL EN LA TEORÍA ECONÓMICA

En esta sección tratamos de describir como el uso del análisis matemático en la teoría económica, contribuye de modo substancial a la formulación de diversas relaciones de capital importancia en dicha teoría. Algunas de estas relaciones podrían ser obtenidas por procedimientos más elementales (generalmente de carácter grafico), pero que suponen al menos, la existencia de la función cuya curva se considera (curvas de indiferencia, isocuantas...) y de tangentes a la misma en cada punto, lo que implícitamente implica la existencia de derivadas.

2.1. **La función de utilidad y el comportamiento del consumidor.** Se considera que el comportamiento del consumidor puede tratarse como si su motivación fuese la maximización de una función de utilidad $U(x,y)$ para cantidades x e y de dos bienes (el razonamiento se podría extender a n), limitado por una restricción presupuestaria dada por la ecuación: $p_x x + p_y y = M$, siendo p_x y p_y respectivamente, los precios de los bienes. Las condiciones necesarias de máxima utilidad pueden ser obtenidas mediante el método de los multiplicadores de Lagrange (sección 1.5 del cap.II). Consideremos para ello la función auxiliar: $F(x,y) = U(x,y) + \lambda(p_x x + p_y y - M)$, a la que aplicamos las condiciones precisas de extremo: $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$, obteniendo las ecuaciones: $\frac{\partial U}{\partial x} + \lambda p_x = 0$ $\frac{\partial U}{\partial y} + \lambda p_y = 0$.

Eliminando el coeficiente λ entre ambas ecuaciones llegamos a la relación que expresa la condición necesaria para que el individuo obtenga, según el análisis neoclásico, su máxima utilidad : $\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{p_x} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{p_y}$, o bien:

$\frac{UM_x}{p_x} = \frac{UM_y}{p_y}$, es decir: las utilidades marginales de las diferentes mercancías ponderadas por sus precios han de ser iguales entre si.

En la obtención de esta relación se ha aceptado la existencia, continuidad y derivabilidad de la *función de utilidad*, que junto con las condiciones de extremos condicionados para funciones de varias variables y el uso del método de los multiplicadores de Lagrange, permite la expresión de la citada relación con el *supuesto* rigor del razonamiento matemático. Es de señalar la *artificiosidad* del concepto matemático de utilidad marginal de un bien (derivada parcial de U respecto de la cantidad del mismo), como incremento unitario de la satisfacción vinculada al consumo adicional de una *cantidad infinitesimal* de dicho bien, manteniendo constante el de los demás. Además, como menciona Blaug en su *Economic Theory in retrospect* (1985), en referencia al concepto económico de utilidad marginal en la obra de Jevons (The theory of political economy 1871), "...*la utilidad marginal no es la derivada de la utilidad con respecto a la cantidad , sino* ***el incremento diferencial de la utilidad***" (pág, 426).

Es decir, además del carácter artificioso que hemos atribuido al concepto de utilidad y de la supuesta capacidad de tal función para ser derivable, consideramos que no está bien definido **diferencialmente** el concepto de utilidad marginal, pues se debería distinguir entre: $UM_x = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{U(x+\Delta x)-U(x)}{\Delta x}$, expresión de la utilidad marginal en forma de derivada y $[U(x+\Delta x)-U(x)]$, incremento de utilidad incorporado al consumo de la última unidad de un bien. Continúa Blaug: " *El grado final de utilidad de Jevons es nuestra utilidad marginal dividida por el incremento marginal....como si se tratara de la utilidad de la unidad marginal, esto puede dar lugar a errores, la utilidad marginal de la última unidad es la utilidad de cada unidad, puesto que cualquiera de ellas puede ser la última*" (Blaug, 1985 pág. 426). También Stigler (1956), señala problemas metodológicos - en Jevons- al utilizar el cálculo diferencial. A lo anterior habría que añadir la confusión que se produce a veces, como explica Bunge (1982), entre conceptos económicos, entre ellos la utilidad, y las variables matemáticas mediante las cuales son representados. Esto último sería extensible a otras nociones de la teoría económica.

2.2. La existencia de las funciones de demanda. Vamos a considerar en este apartado las condiciones matemáticas que rodean el proceso de obtención de las funciones de demanda del consumidor, en el marco del análisis neoclásico (según el enfoque de Samuelson, 1947 y de Hicks, 1946). Con ello se pretende subrayar la debilidad de los supuestos en que se basa la existencia de tales funciones; sobre las cuales descansa, en gran medida, la coherencia de las formulaciones de la teoría del equilibrio neoclásica.

Se parte de la suposición de cada el consumidor individual tiene asociada una función de utilidad dependiente de las cantidades consumidas de n bienes, que se puede derivar dos veces; además dicha función podrá ser maximizada con la condición impuesta por su ecuación de balance (restricción presupuestaria). En efecto se considera que el j-ésimo consumidor, estará caracterizado por una función de utilidad: $u^j(x_1,..x_n)$ y un ingreso M, y tratará de escoger las cantidades de mercancías. $\overline{x_1},.....,\overline{x_n}$, tales que $u^j(\overline{x_1},.....\overline{x_n}) \geq u^j(x_1,...x_n)$, para toda colección de $x_1,...,x_n$ que satisfaga la ecuación: $x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = M$. Para la obtención del máximo de la función de utilidad, se generalizará el procedimiento del apartado anterior para n-variables.

Si construimos la función de Lagrange para este caso (suprimiendo el superíndice j), tendremos para cada consumidor:

$L = u(x_1, x_2,..., x_n) + \lambda(x_1 p_1 + x_2 p_2 ... + x_n p_n - M)$; siendo las condiciones

necesarias de máximo: $L_i = \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$; $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$; $(i = 1,2,...., n)$; las condiciones

suficientes vienen dadas por la relación: $(-1)^n \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12}... & L_{1n} & r_1 \\ L_{21} & L_{22}... & L_{2n} & r_2 \\ L_{n1} & L_{n2}... & L_{nn} & r_n \\ r_1 & r_2... & r_n & 0 \end{vmatrix} > 0$,

significando L_{ij} las derivadas parciales de segundo orden de la función de Lagrange, y r_i las derivadas de la función restricción presupuestaria:

$r = (x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n - M)$; en nuestro caso: $(-1)^n \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12}... & u_{1n} & p_1 \\ u_{21} & u_{22}... & u_{2n} & p_2 \\ u_{n1} & u_{n2}... & u_{nn} & p_n \\ p_1 & p_2 & p_n & 0 \end{vmatrix} > 0$

Las condiciones de primer orden (necesarias), constituyen el siguiente sistema de ecuaciones: $\dfrac{\partial u(x_1,..,x_n)}{\partial x_i} + \lambda p_i = 0$; $\equiv u_i(x_1,...,x_n) + \lambda p_i = 0$, $(i = 1,2,....,n)$

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n - M = 0 .$$

Este sistema de n+1 ecuaciones junto con la condición suficiente, adaptada a nuestra función de Lagrange posibilitan la aplicación del teorema de la función implícita, lo cual permitirá la **existencia** de *funciones* en las que las cantidades demandadas se hallen expresadas en dependencia de los precios y del ingreso del consumidor; estas serían las funciones de demanda buscadas. El teorema exige que las funciones de partida $u_i(x_1,..,x_n)$ tengan derivadas parciales continuas en todas sus variables, lo cual fue un fuerte **supuesto** inicial que exigimos a las funciones de utilidad de cada consumidor.

Asimismo el teorema de la función implícita nos requiere que el determinante de orden n+1 formado por las derivadas de las funciones *explícitas* (u_i y r), sea distinto de cero en el punto considerado. En efecto, si el consumidor se encuentra en una situación en la que maximiza la utilidad, en el punto caracterizado por las cantidades $(\overline{x_1}, \overline{x_2},..., \overline{x_n})$ se verificará dentro de las condiciones de segundo orden (suficientes), el segundo requisito del teorema considerado:

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12}\cdots & u_{1n} & p_1 \\ u_{21} & u_{22}\cdots & u_{2n} & p_2 \\ u_{n1} & u_{n2}\cdots & u_{nn} & p_n \\ p_1 & p_2\cdots & p_n & 0 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Entonces, en un entorno suficientemente pequeño del punto de maximización de la utilidad, se verificará el mismo y existirá por tanto una colección de funciones o función vectorial:

$$x_i = h_i(p_1, p_2, \ldots p_n, M) \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

$$\lambda = h_0(p_1, p_2, \ldots p_n, M)$$

que constituirán formalmente las funciones de demanda del consumidor.

Consideramos que la consistencia matemática del proceso seguido y la solidez de la conclusión, nada menos que la existencia de funciones de demanda, depende de una serie de supuestos de muy dudosa cercanía con la realidad del proceso económico. Se parte de la **existencia** de funciones de utilidad para cada consumidor. Se supone asimismo que son **continuas y derivables dos veces**, con derivadas continuas, respecto de cada variable. Se utiliza en el proceso de búsqueda de la función de demanda el método de los multiplicadores de Lagrange y las condiciones asociadas a sus criterios de maximización de la utilidad. La coherencia del proceso seguido descansa, en gran medida, en la existencia de un punto en el cual la función utilidad es máxima.

Si este punto de máxima utilidad **existe,** entonces tiene (al menos formalmente) sentido el proceso de obtención de la función implícita, dado que el cumplimiento de las hipótesis del teorema se basa en la observancia de las condiciones de primer y segundo orden (necesarias y suficientes) para la obtención de extremos condicionados.

Pero estas condiciones, a su vez, están sustentadas sobre los supuestos matemáticos iniciales, tan ausentes de realismo, ya mencionados: existencia continuidad y doble derivabilidad de la función de utilidad.

Habría que añadir, por último, algunas consideraciones sobre los trabajos de H. Sonnenschein (1972 y 1973), de R. Mantel (1974) y de G. Debreu (1974), con relación a la existencia de funciones de exceso de demanda agregada de una economía. El tema común de estos trabajos se podría sintetizar en los siguientes términos; sabiendo que las funciones de exceso de demanda agregadas son continuas, homogéneas de grado cero y que cumplen la ley de Walras (Para cualquier elección del vector de precios **p**, las funciones exceso de demanda z_i han de satisfacer la siguiente igualdad: $\sum_{i=0}^{n} p_i z_i = 0$); el problema radica en demostrar el resultado recíproco, es decir funciones arbitrarias continuas y homogéneas y que verifican dicha ley, podían ser consideradas funciones exceso de demanda de alguna economía, en las que esas funciones se dedujeran de los comportamientos habitualmente aceptados para consumidores y productores.

H. Sonnenschein muestra la posibilidad de que **cualquier función continua y con derivada continua**, en el dominio de definición de los precios relativos, pueda representar la función de exceso de demanda de alguna economía. Rof Mantel (1974), respondió con una elegante prueba a la conjetura de Sonnenschein, que en sus propias palabras significó: "..*el último paso que faltaba para que el teorema de Uzawa permitiera concluir que el problema matemático de Kakutani y el económico de Walras son equivalentes desde el punto de vista puramente lógico*" (Mantel 1985). Las consecuencias de estos trabajos son muy significativas: la consistencia del modelo walrasiano es un resultado necesario de la equivalencia lógica entre el modelo de equilibrio general de Walras y los teoremas de punto fijo. La teoría de Walras del equilibrio general- fundada a partir de datos básicos sobre preferencias, dotaciones y tecnologías- resulta ser de naturaleza **más matemática que económica.**

La demostración de Mantel superó a la de Sonnenschein porque no se restringió a formas polinómicas en los precios, utilizando, en cambio, especificaciones que se desviaban poco de funciones convexas. Posteriormente Debreu, en el marco de los resultados anteriores, destacó la imposibilidad de demostrar que el equilibrio económico general fuese único y estable, a menos que se recurra a hipótesis extremadamente restrictivas y muy alejadas de la realidad; resultado al que algunos autores se refieren como “ Sonnenschein-Mantel-Debreu Theorem ” (por ejemplo Mas-Colell, Whinston, y Green 1995).

Los sofisticados procedimientos matemáticos que sostienen los trabajos anteriores, con un elevado grado de abstracción, tienen, sin embargo, una notable dependencia del cálculo diferencial. Los supuestos sobre continuidad, derivación, derivada continua etc., de las funciones de exceso de demanda, tan discutibles en su vinculación con la realidad económica como en casos anteriores, son parte fundamental de los desarrollos formales y condicionan en mayor o menor medida los resultados.

2.3. El Equilibrio neoclásico y el Cálculo diferencial.

a) Existencia. Si bien el estudio de la existencia del equilibrio en el análisis neoclásico se pudo sustraer del cálculo (análisis topológico a lo Arrow-Debreu, ya considerado en el cap. I), los estudios más recientes sobre la teoría del equilibrio han supuesto un retorno al uso del análisis matemático infinitesimal, junto con otras sofisticadas herramientas. Es de destacar, en este ámbito, la obra de Mas-Colell (1985 y 1995 especialmente), quien ha utilizado el cálculo diferencial para explorar las condiciones precisas para la existencia de equilibrio en una gran variedad de contextos.

Estos nuevos desarrollos emplean la llamada **función exceso de utilidad**, en lugar de la función exceso de demanda, que no es posible definir en todos los casos. El origen de la función exceso de utilidad como instrumento para obtener equilibrios walrasianos se remonta a Negishi (1960), aunque la mayor difusión de este concepto es debida a los mencionados trabajos de Mas-Colell, en particular a *The Theory of General Economic Equilibrium: A Differentiable Approach* (1985)

Esta **Función Exceso de Utilidad** se podría expresar del modo siguiente: $e_i(\lambda) = \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial u_i(x_i(\lambda))}{\partial x_{ij}} (x_{ij}(\lambda) - w_{ij})$, son los componentes de la función vectorial exceso de utilidad : $e(\lambda) = (e_1(\lambda), e_2(\lambda), ..., e_n(\lambda))$, que transforma un cierto dominio de valores de $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \Delta$, en el espacio real n-dimensional, $e : \Delta \to R^n$; donde: λ_i representa el peso del agente *i* en la economía, w_{ij} representa la dotación inicial del agente *i* en el bien *j*, y $x_i(\lambda)$ es la *cesta* proveniente de la asignación de recursos $x(\lambda)$ que maximiza la función de bienestar social $W_\lambda(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x_i)$.

Todo ello para una economía de intercambio puro con un número finito de bienes *l* y de agentes *n*, cuyas preferencias vienen representadas por funciones de utilidad u_i cóncavas estrictamente crecientes y **derivables con continuidad hasta el segundo orden al menos**. Hemos considerado pertinente incluir la definición de la función anterior para mostrar, aunque sea de modo somero, la presencia y doble implicación del análisis diferencial en estos nuevos estudios de la teoría del equilibrio. Doble implicación en el sentido de exigencia de las hipótesis de continuidad y derivadas continuas a las funciones de utilidad, e inclusión en la propia definición de las derivadas parciales de tales funciones, es decir participación del cálculo diferencial en el desarrollo de los procesos conducentes a la determinación de las condiciones de equilibrio.

b) Estabilidad. El estudio de la estabilidad **dinámica** de las posiciones de equilibrio se basa en un mecanismo de ajuste explícito, que dirige el modo en que los precios y las cantidades demandadas y ofrecidas cambian a lo largo del tiempo, en respuesta a una perturbación del equilibrio.

Conceptualmente el problema de la **estabilidad** se concreta en conocer si la trayectoria temporal de los precios resulta convergente o no hacia el equilibrio. En un primer momento se distinguió entre estabilidad global y estabilidad local (convergencia con condiciones iniciales suficientemente próximas al equilibrio). Pero tal distinción deja de tener relevancia cuando se muestra que las conclusiones más interesantes sirven para ambos casos de estabilidad. En su esencial articulo: " *On the Stability of the Competitive Equilibrium, II* " Arrow, Block y Hurwicz (1959), establecen algunos procedimientos premisas y resultados fundamentales, en relación con las condiciones de estabilidad del equilibrio general walrasiano. Una de las premisas o supuestos que se consideran en este trabajo se refiere a la no exigencia de diferenciabilidad de la función exceso de demanda agregada, bajo el supuesto de sustituibilidad bruta en la forma de incrementos finitos.

La dificultad que entraña el manejo de funciones de demanda agregada no diferenciables ha llevado a añadir el supuesto adicional de **diferenciabilidad** para tales **funciones**, aunque ello suponga restringir el objeto del estudio. En este contexto más limitado, se ha elaborado una demostración sobre la existencia de estabilidad bajo el ajuste de precios convencional, basada en las condiciones de mínimo para una función y utilizando, por tanto, el análisis diferencial (ver por ejemplo, Segura J. *Análisis microeconómico,* 1994).

Otra aportación relevante del trabajo de Arrow, Block y Hurwicz, fué la aplicación del segundo método de Lyapunov al estudio de la estabilidad del equilibrio general, -ya considerada con algún detalle en el apartado 3.2.b del capítulo primero- y que con la inclusión de la hipótesis de sustituibilidad bruta (expresada en términos de derivadas parciales) recordemos que consistía, básicamente, en la definición de la correspondiente función de Lyapunov, que ha de satisfacer las hipótesis de un determinado teorema, cuya verificación implicará que el estado de equilibrio vinculado es globalmente estable.

Las condiciones matemáticas exigidas por la aplicación del teorema tienen que ver, básicamente, con la derivación respecto del tiempo de la función de Lyapunov: $V(p_1,....p_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i}(p_i-p_i^e)^2$, dependiente de los precios, además de la consideración del sistema de ecuaciones diferenciales no lineales: $\frac{dp_i}{dt}=k_iE_i(p_1,p_2,..p_n)$, que relacionan de modo proporcional las variaciones temporales (**infinitesimales**), de los precios con las correspondientes funciones de exceso de demanda.

La condición de estabilidad del equilibrio, expresada por el teorema : $\frac{dV}{dt}<0$ exige, como vimos, que se verifique la *sustituibilidad bruta*, es decir:($\frac{\partial E_i}{\partial p_j}>0$ para todo $i, j; i\neq j$). Es de destacar (por su ausencia de realismo o de proximidad con los procesos económicos reales) el uso de la derivada temporal de los precios, que en rigor significa la variación de los mismos *en cada instante*, y de la derivada de las funciones de exceso de demanda (supuestas continuas) respecto de cada precio, cuya existencia (de la derivada parcial), implicaría **incrementos infinitesimales del precio correspondiente**.

Si consideramos el enfoque de la estabilidad del equilibrio de Hicks (1946) -que supuso una generalización del concepto de estabilidad estática de Walras al caso de multimercado- y según el cual una posición de equilibrio competitivo es *perfectamente estable* (o estable en el sentido de Hicks), si el exceso de demanda para cualquier mercancía es negativo cuando su precio está por encima del nivel de equilibrio (y positivo cuando su precio está por debajo de su nivel de equilibrio); también se hace uso del cálculo infinitesimal, incorporando el concepto de diferencial total de cada función de exceso de demanda (lo que obliga a la existencia de derivadas parciales continuas respecto de cada precio).

Hicks estableció las condiciones necesarias y suficientes, para la existencia de la estabilidad perfecta, para el caso en las funciones de exceso de demanda sean **continuas y diferenciables**. Este procedimiento vincula la estabilidad al estudio de un sistema de ecuaciones diferenciales, cuya solución dará la evolución en el tiempo de las desviaciones respecto del equilibrio: $\overline{p_i}(t) = (p_i - p_i^e)$, siendo p_i^e los precios de equilibrio. Las condiciones de estabilidad dinámica del equilibrio se pueden indicar, en este enfoque, mediante $\lim_{t\to\infty} \overline{p_i}(t) = 0$, expresión que manifiesta el sentido tan diferente del tiempo lógico (el tiempo del análisis neoclásico) y el tiempo histórico. En cualquier caso, de nuevo nos encontramos con supuestos poco acordes con los fenómenos económicos reales.

Se puede observar como se da, en mayor o menor grado, una dependencia formal del estudio riguroso de la existencia y estabilidad del equilibrio respecto del cálculo diferencial, no habiendo sido posible en algunos casos, soslayarlo.

A modo de conclusión de esta parte, cabría decir que pareciera como si se definiesen funciones especificándolas solo cualitativamente; a tales funciones se les atribuirían (de forma gratuita en muchos casos) las propiedades de existencia (buena definición), continuidad, derivabilidad...etc., que les permitirían la aplicación de los convenientes teoremas y de este modo obtener (de forma *supuestamente* precisa y elegante), las conclusiones que previamente se buscaban.

CAPITULO CUARTO. LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN NEOCLÁSICA Y EL PROGRESO TÉCNICO

En este capítulo se trata de analizar críticamente desde un enfoque formal (pero sin duda ligado a los contenidos), basado en el estudio de su formulación diferencial, la coherencia de este importante concepto- la función de producción- uno de los pilares de la teoría económica neoclásica, y de su relación con la productividad, el cambio técnico y la distribución de la renta.

1. LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN Y EL CÁLCULO DIFERENCIAL.

1.1. Productividad marginal y distribución del ingreso. En el ámbito del análisis neoclásico se considera la existencia de una función $z = F(x_1, x_2, ...x_n)$ que nos expresa la cantidad máxima de producto z, que se puede obtener de un conjunto de factores productivos $(x_1...x_n)$, para un nivel de tecnología dado. El concepto de función de producción se suele generalizar, sin excesivas dificultades en este ámbito teórico, desde el plano microeconómico (empresa), al macroeconómico de toda una economía.

Esta función, que se define sobre un conjunto de variables, que son a su vez cantidades físicas concretas de factores productivos, se considera real, de varias variables reales, continua y dos veces derivable (con derivadas parciales de segundo orden, incluyendo las cruzadas). Sobre estos supuestos o hipótesis, tan discutibles, se construyen propiedades y relaciones de capital importancia en el análisis neoclásico. Samuelson, en sus *Fundamentos del análisis económico* (1947), considera que no es necesaria la continuidad de la función de producción para la obtención de las principales relaciones vinculadas a la misma; en igual sentido argumenta Segura en *Función de producción macrodistribución y desarrollo* (1969), basándose en el anterior. Estudiaremos este aspecto con alguna profundidad más adelante.

Nos interesa, ahora, observar como mediante la aplicación de las técnicas del análisis diferencial, sin especial preocupación por el rigor de tal empleo, se alcanzan resultados notables en el campo de la teoría económica neoclásica.

En efecto si recordamos el concepto de productividad marginal de un factor $\frac{\partial F}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{F(x_1,..x_i + \Delta x_i,..x_n) - F(x_1,..x_i..x_n)}{\Delta x_i}$, como el incremento de producto por unidad de factor, cuando la cantidad utilizada del mismo se incrementa de forma infinitesimal, no podemos dejar de observar que para que la definición tenga sentido sería preciso que el factor en cuestión fuese infinitamente divisible y su aplicación al proceso productivo se pudiera ***dosificar*** en elementos infinitesimales.

Pues bien, **si obviamos** las consideraciones anteriores y se **admite** que la función de producción $F(l,k)$ es rigurosamente derivable, se podría aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange (ya utilizado con la función de utilidad), para obtener el máximo de producción para cantidades limitadas de factores productivos. De modo que, para dos factores productivos capital y trabajo, la correspondiente restricción presupuestaria: $p_l l + p_k k = A$, y la función auxiliar: $V(l,k) = F(l,k) + \lambda(p_l l + p_k k - A)$ tendremos aplicando las condiciones necesarias de extremo: $\frac{\partial V}{\partial k} = \frac{\partial V}{\partial l} = 0$, las ecuaciones: $\frac{\partial F}{\partial l} + \lambda p_l = 0$, $\frac{\partial F}{\partial k} + \lambda p_k = 0$. Eliminando el coeficiente λ entre ambas se obtiene la relación que, según el análisis neoclásico, expresa la condición de máxima producción : $\frac{\partial F / \partial l}{p_l} = \frac{\partial F / \partial k}{p_k}$ o bien: $\frac{PM_l}{p_l} = \frac{PM_k}{p_k}$. Las productividades marginales de los factores o servicios productivos ponderadas por sus precios serán iguales entre si.

La elegancia formal de la obtención de esta relación, como de otras similares, está vinculada a la aceptación ciega de la existencia, continuidad y derivabilidad de la función de producción.

Todavía más importante, desde el punto de vista que nos ocupa, es la determinación de la distribución de la renta entre trabajo y capital a partir de la utilización de funciones homogéneas de primer grado, como representación de la función de producción. Esta hipótesis de homogeneidad lineal para tales funciones, fue establecida por vez primera por Wicksteed en su *Essay on the coordination of the laws of distribution* en 1894 (aunque generalmente se considera a a J. B. Clark en 1899, como el fundador de la teoría neoclásica de la distribución de la renta); hipótesis que nos conduce a las siguientes conclusiones:

Si la función $z = F(k,l)$ fuese homogénea de primer grado o linealmente homogénea, $F(rk,rl) = rz$ (lo que implica rendimientos constantes a escala) verificaría el teorema de Euler (apartado 1.4 del capítulo II), y se podría expresar: $z = \left(\frac{\partial F}{\partial k}\right)k + \left(\frac{\partial F}{\partial l}\right)l$, o bien : $z = PM_k k + PM_l l$; el producto total se agota cuando cada factor se paga según su productividad marginal, o lo que es equivalente, la remuneración de los factores trabajo y capital y por tanto la distribución de la renta, viene dada por las respectivas productividades marginales. Un concepto de tan escaso rigor como la productividad marginal determinaría nada menos que la distribución de la renta, que quedaría validada o justificada con toda la autoridad que (supuestamente) le puede conferir el formalismo matemático (mal) utilizado. Desde otros supuestos matemáticos, Shaikh (1990) ha criticado la falta de correspondencia con la realidad de las distribuciones del ingreso estimadas a partir de funciones de producción del tipo que consideramos (funciones agregadas de Cobb-Douglas).

En resumen, hemos visto como la **aceptación** de la existencia de derivadas parciales de una función de producción y por tanto de las productividades marginales, nos lleva a dos relaciones de fundamental importancia en la teoría neoclásica: igualdad de las productividades marginales ponderadas por los precios de los factores, en el equilibrio productivo, y paralelismo entre las remuneraciones de trabajo y de capital con las respectivas productividades marginales, si la función *se comporta adecuadamente*. En lo siguiente se tratará de profundizar algo más sobre las características de tales funciones y sus variables.

Sobre los contenidos económicos implícitos en estas consideraciones y su relación con la formalización matemática que reciben, escribe Pasinetti: "*La teoría de la productividad marginal no surgió de un examen de los problemas a los que quería aplicarse: los problemas de la producción. Vino artificialmente de una* ***ampliación*** *a estos problemas de un conjunto de herramientas analíticas ya hechas, desarrolladas para propósitos completamente diferentes... La misma función convexa suavemente diferenciable- llamándola función de producción en vez de función de utilidad-consideraba las mismas derivadas parciales, llamadas ahora productividades marginales en vez de utilidades marginales.... La producción (a diferencia de la utilidad) debe ser mensurable, lo que implica que* ***las productividades marginales deben, de hecho, ser iguales (y no solo proporcionales) a los precios de los factores****. Y dado que el producto neto total al ser siempre apropiado por alguien puede también escribirse siempre como la suma de las diversas cantidades de factores multiplicadas por los correspondientes precios de los factores, las productividades marginales tienen que ser tales que se podrían sustituir libremente por los precios de los factores sin afectar al total......* ***Existe un solo tipo de función matemática que da este resultado: una función lineal y homogénea; por ello, se supuso que las funciones de producción eran lineales y homogéneas"*** (Pasinetti L. L. 1981, pp. 29-30, edición española).

1.2. La función de producción y el análisis diferencial. Consideremos de nuevo una función de producción dependiente de varios factores: $z = F(x_1, x_2,...x_n)$. En el marco del análisis neoclásico se supone que se verifica:

1) Que todos los factores y el producto se pueden medir en términos físicos, lo que implica que son perfectamente (infinitamente divisibles).

2) Que la función es continua y , al menos, dos veces derivable. Ello asegura que la sustituibilidad entre los factores es continua y que, por tanto, todos son perfectamente maleables, se puede pasar de una intensidad de factores a otra.

3) Que tales derivadas parciales respecto de cada factor (de primer y segundo orden), verifican: $F_i > 0,\ F_{ii} < 0$; $\quad i = 1,.....n$. Estas desigualdades indican que la relación marginal de transformación técnica entre factores: $RMT_{1,2} = -\frac{F_1}{F_2}$, es continuamente decreciente.

4) Que es estrictamente cóncava, es decir que se verifican las siguientes desigualdades: $F_{11} < 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad ; \quad (-1)^n \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & . & . & F_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ F_{n1} & F_{n2} & . & . & F_{nn} \end{vmatrix} < 0$. Esta condición entraña que las productividades marginales $F_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$, de todos los factores, son positivas y decrecientes.

Consideramos que la validez de las anteriores propiedades económicas, atribuidas a la función de producción, está ligada en gran medida a la formulación diferencial con la que se presentan y por tanto a la veracidad de las hipótesis matemáticas que subyacen bajo tal enunciación.

Estas hipótesis son evidentemente la existencia, continuidad y derivación de tales funciones. Consideramos que la hipótesis de **continuidad** de la función de producción para los valores de los factores productivos, y en particular para el capital y el trabajo, es **irreal** tanto a nivel microeconómico como macroeconómico, debido a la **indivisibilidad** de tales factores. Entendemos, asimismo, que desde el análisis matemático la indivisibilidad anula las condiciones de derivabilidad de las funciones, y en consecuencia, la posibilidad de determinar la productividades marginales.

La propia existencia de la función de producción, como tal aplicación *uniforme* definida sobre un subconjunto de R^n, formado por infinitas colecciones de valores $(x_1, x_2,..x_n)$ de los factores productivos que constituyan un conjunto *continuo* de puntos en dicho espacio, consideramos que es discutible. Pero como hemos señalado arriba, es la indivisibilidad de las variables la que hace imposible que a un incremento infinitesimal de los factores corresponda un incremento infinitesimal del producto, o lo que es igual impide la continuidad de la función. Asimismo habría que hacer notar, que esta falta de divisibilidad de los factores hace poco rigurosa la consideración de funciones homogéneas de primer grado (rendimientos constantes a escala), de tan relevante importancia en el análisis neoclásico. A este respecto señala Shumpeter, en su Historia del Análisis económico, "*....los partidarios de la homogeneidad de primer orden reconocen sin excepción el obstáculo que opone a ésta la indivisibilidad o carácter* **macizo** *de algún factor o algunos factores, como la gestión, las vias férreas, los trenes de laminación. Factores así no se pueden alterar en cantidades pequeñas......Sería absurdo negar la importancia de tales indivisibilidades....*" (página 1131, edición española).

Cabría añadir, en lo que se refiere a la derivación de estas funciones, que las derivadas parciales respecto de cada variable (productividades marginales) existirían, de forma rigurosa, en la medida en que tuviese sentido y fuera calculable el límite del cociente de los incrementos de la función y de la variable considerada, cuando el valor de la misma se hace infinitamente pequeño (manteniéndose constantes el resto de las variables). Como es evidente la existencia de esta variación unitaria e infinitesimal, que es la derivada, exige la continuidad de la función.

1.3. La función de producción y la escuela de Cambridge. Naturalmente, aunque se admitiese las hipótesis formales de continuidad y derivabilidad de la función de producción, ello no eximiría a la teoría neoclásica y al propio concepto de productividad marginal de otro tipo de críticas con mucho mayor contenido económico y con la que, consideramos, nuestro enfoque se halla relacionado en alguna medida. Nos referimos a crítica desarrollada en la universidad de Cambridge en relación con la teoría de la productividad marginal, ligada a la dificultad de **medir** la modificación en la cantidad de capital cuando el stock de bienes del mismo se altera, independientemente de las formas concretas en las que el capital se incorpora en cualquier momento, y que no permitirían atribuirle una productividad marginal propia. o la imposibilidad de especificar relaciones tecnológicas puras agregadas sin incluir de alguna forma a los precios (Robinson J. 1955). En relación a lo primero señala dicha autora "*Al estudiante de teoría económica se le enseña a escribir* $x = f(L, K)$ *.....Se le alecciona a suponer que todos los trabajadores son iguales y a medir L en hombres-hora de trabajo; se le menciona la existencia de un problema de números índice en cuanto a la elección de una unidad de output; y luego se le apremia a pasar al problema siguiente, con la esperanza de que se olvidará preguntar* ***en que unidades se mide K****. Antes de que llegue a preguntárselo, ya será profesor y de este modo se van transmitiendo de generación en generación unos hábitos de pensamiento poco rigurosos.*" (Robinson J. 1965, página 85 edición española).

Desde el mismo ámbito se critica la posibilidad de que las productividades marginales calculadas a partir de esa supuesta función de producción, sirvan para explicar el valor de los salarios y de los beneficios, así como las fracciones relativas del producto repartidas al trabajo y al capital (por ejemplo, Kaldor N. 1955-56).

Las críticas anteriores están inmersas en la que posiblemente ha sido la polémica más importante entre economistas del siglo XX. Nos referimos a las *capital controversies* entre los dos Cambridge (Inglaterra y Massachussets), que enfrentaron a Joan Robinson y Paul Samuelson. Parece pertinente una breve descripción de sus aspectos más significativos, en la medida en que pueda existir alguna relación con las hipótesis de nuestro trabajo. En este sentido y desde el lado neoclásico Ferguson (1969), expone la controversia en los siguientes términos: " *El problema esencial puede plantearse en la siguiente forma.* ***Si las funciones de producción son uniformemente continuas y continuamente diferenciables*** *en todo lugar, los resultados neoclásicos valen (posiblemente en forma un tanto atenuados, si se toman en cuenta los bienes heterogéneos de capital). Pero si no hay lugar para la sustitución de los factores, salvo al cambiar de un proceso de proporciones fijas a otro, lo cual implica la existencia de bienes heterogéneos de capital, no pueden tener vigencia las parábolas neoclásicas simples.* (Ferguson C. E. The Neoclassical Theory of Production and Distribution, pág. 292-293 ed. en castellano).

J. Robinson (1954) y en parte también N Kaldor y R. Khan, abrieron la discusión atacando la concepción misma de la función neoclásica de producción, concentrando la crítica sobre el concepto de **capital** como factor de producción, y su **medida**, como hemos señalado más arriba. P. Sraffa en 1960 mostró que la medida del capital no es independiente de la **distribución.**

Un tema importante del debate fue el de tratar de esclarecer cuáles son las condiciones que podrían ser satisfechas para que los bienes de capital heterogéneos se puedan agregar en una única cantidad física, siendo relevantes a éste respecto las propuestas de Samuelson sobre la función de producción substituta o subrogada (1962), y la de Champernowne (1953-54) sobre la construcción de un índice en cadena como indicador o medida del capital. Las conclusiones alcanzadas (ver también Fisher, 1971) se podrían resumir en que las condiciones que deben ser satisfechas, para la agregación de bienes de capital heterogéneos, son tan extraordinariamente restrictivas que excluirían, en la práctica, que una medida física agregada de los bienes capitales se pudiera construir. Sobre este asunto Garegnani (1970), muestra como **una función de producción neoclásica de buen comportamiento descansa en supuestos y restricciones demasiado exigentes e irreales.**

Otro aspecto relevante de la polémica es el relacionado con el **retorno o reversión de las técnicas**. Los críticos de Cambridge (Inglaterra), argumentan que no es posible demostrar que una disminución del tipo de interés, necesariamente, vaya a alterar la ordenación de las técnicas disponibles según su rentabilidad en sentido unidireccional, de forma que se produzca un aumento de la intensidad de capital en la economía. Ello sería así a causa del retorno de las técnicas y su fenómeno asociado de reversión del capital (relaciones capital-trabajo más bajas, en lugar de más altas, a medida que el tipo de interés baja), que podría producirse incluso bajo unas condiciones estrictamente neoclásicas de competencia perfecta, perfecta información, **funciones de producción microeconómicas continuamente diferenciables** y comportamiento maximizador. Se podría afirmar que el fenómeno del retorno de las técnicas destruye la coherencia lógica de la teoría neoclásica de la distribución

En efecto, si no existe una relación estrictamente monótona entre las variaciones del tipo de interés y la relación capital-trabajo, se debe abandonar la idea de explicar el tipo de interés en términos de la escasez relativa del capital en la economía. Ello constituye, a fin de cuentas, la esencia de la teoría del interés basada en la productividad marginal, habría que abandonar la idea de formular la demanda de capital como función inversa del tipo de interés.

Sraffa (1960), Morishima (1964), Garegnani (1966), e incluso Samuelson (1966) con posterioridad a Robinson (1956), demostraron definitivamente que puede haber una reversión de técnicas. Constituirían un "hecho tecnológico" en el que puedan existir estructuras productivas, para las cuales no tiene vigencia la relación neoclásica, entre la esfera de la producción y el mercado. Más específicamente pueden darse proyectos productivos para los cuales no existe una correspondencia entre el coeficiente capital-trabajo y el cociente de interés-tasa de salarios. Si esto es así, no es cierto, por ejemplo, que la productividad se incremente de acuerdo con la tasa real de salarios, o que el producto nacional aumentase en la medida en que descienda el tipo de interés.

Samuelson sintetiza del siguiente modo la reflexión que le produce la irrupción del fenómeno de la reversión de las técnicas en el pensamiento neoclásico: " *el fenómeno del retorno...de la técnica...muestra la simple fábula narrada de Jevons, Böhm-Bawerk, Wicksell y otros escritores neoclásicos, y también que, a medida que la tasa de interés disminuye a consecuencia de abstinencia del consumo presente a favor del consumo futuro, la tecnología debe cambiar en cualquier sentido más indirecta, mas mecanizada, y más productiva, no puede ser válida universalmente....Resulta que no hay modo ambiguo de caracterizar diversos procesos productivos como más intensos en capital....Si todo esto causa dolores de cabeza a los nostálgicos de las viejas parábolas de la literatura neoclásica, deberíamos convencernos a nosotros mismos que los estudiosos no han nacido para vivir una existencia fácil. Deberíamos respetar y valorar los hechos de la vida."* (Samuelson, 1966, pág.568 y ss.).

Aceptada la reversión de las técnicas de modo amplio, el debate se sitúa en relación a si son fenómenos extremadamente probables, como piensan los economistas de Cambridge - desarrollando teoremas analíticos que expresan las condiciones necesarias para que el retorno de las técnicas no pueda producirse, y concluyendo que tales condiciones son tan estrictas que difícilmente se producirán en el mundo real, hasta el punto de que, en realidad el retorno constituya la norma (Harcourt, 1972) - o si, por el contrario, son altamente improbables (Eltis, 1973); y sobre como medir la significación empírica de tal retorno en las economías reales.

Mark Blaug, en su obra The Methodology of Economics (1980), señala que la conclusión principal de la controversia sobre el problema de la reversión, sería que la medición de la probabilidad del retorno, depende de la medida del grado de sustituibilidad de los factores en una economía real dada.

Además de la reflexión de Samuelson, citada mas arriba, consideramos interesante incluir, desde el lado neoclásico, la significativa opinión de Charles Ferguson expresada en su libro ya mencionado: “ *La crítica que viene de Cambridge muestra definitivamente, que puede haber estructuras de producción en las cuales las parábolas de Clark, pueden no valer. El meollo de la cuestión es que los economistas pueden ser incapaces de hacer cualesquiera afirmación relativa a la relación de producción con los insumos competitivos y los mercados de producto.* ***Creo que pueden hacerlo; pero esta es una expresión de fé..”***(Ferguson C. E. 1969, pág. 308 ed. en castellano).

Thomas Kuhn (1962), ha enseñado que no es extraño en la historia de la ciencia obtener resultados que contradicen la teoría o paradigma dominante. La actitud más común en estos casos (hasta que un nuevo y más satisfactorio paradigma sea encontrado), es simplemente ignorar los resultados *anómalos*. Seguramente es lo que se ha hecho.

1.4. La función de producción discontinua. En el apartado 4.1 de este capítulo aludimos a las consideraciones de Samuelson (1955), en relación al cumplimiento de las principales relaciones sobre determinación del equilibrio en la empresa (existencia de al menos una combinación de factores productivos y de sus correspondientes precios, donde la función alcance el coste mínimo de producción y el beneficio máximo), para funciones no necesariamente continuas.

A lo largo de este trabajo hemos tratado de exponer que la formalización diferencial de la teoría económica está basada en supuestos o hipótesis no verosímiles (entre ellos la continuidad de la función de producción). Consideramos que la credibilidad o realismo de tales supuestos es relevante, es necesaria, para la coherencia de los resultados obtenidos mediante dicha formulación diferencial. Dentro de la frecuentemente artificiosa distinción entre forma y contenidos, se puede afirmar que nuestro tratamiento ha sido predominantemente formal, y por tanto no hemos entrado a discutir tales contenidos- esencialmente del análisis neoclásico- bajo otro enfoque. Valgan estas reflexiones para afirmar que es posible, tanto intentar la **demostración** de determinados resultados mediante el uso de otras técnicas matemáticas, no diferenciales, por no ser aplicables en determinados casos como el que nos ocupa (discontinuidad de la función de producción); como cuestionar tales resultados mediante enfoques diferentes (de carácter neokeynesiano o marxista, por ejemplo) del aquí utilizado.

Samuelson plantea, en su citado libro, un procedimiento distinto al diferencial basado en el análisis de incrementos finitos, para probar la existencia de los citados equilibrios. Tal procedimiento, según afirma el propio autor (pág. 83, ed. en castellano) está tomado del que sustenta el principio de Le Chatelier en física (para el estudio del equilibrio térmico de cuerpos en procesos relacionados con la absorción de calor o el enfriamiento; ver por ejemplo Landau L. y otros, Mecánica y Física molecular 1973). De nuevo aparece la física como referencia, nos encontramos con métodos matemáticos que teniendo éxito en la física se trasladan al campo de la teoría económica.

No obstante creemos que el procedimiento utilizado por el citado profesor, para demostrar que a partir de una función de producción discontinua se pueden obtener los mismos resultados que si fuese continua y con derivadas parciales continuas en todo punto, adolece de algunas contradicciones y en cualquier caso su validez se limitaría al plano microeconómico (función de producción para una empresa).

El método considerado se podría sintetizar para dos factores productivos (capital y trabajo), sin merma de generalidad, del siguiente modo: Se trabaja con una función $z = F(k,l)$, que a lo largo de cada línea de nivel no contiene sino un número **finito** (limitación muy importante, a nuestro juicio) de puntos de discontinuidad. Se admite que en cada punto de discontinuidad existen derivadas parciales por la izquierda y por la derecha -esta hipótesis totalmente necesaria para el desarrollo del procedimiento que utiliza, pensamos que genera una situación contradictoria-. Gráficamente la propiedad anterior se podría manifestar mediante la existencia de tangentes laterales de pendiente finita, a las curvas isocuantas, en cada punto de discontinuidad (se excluyen discontinuidades infinitas).

En tales condiciones se supone que existe (veremos después la condición de existencia) una pareja de precios (w_k^0, w_l^0), a los que corresponde una combinación de factores (k^0, l^0), que reducen al mínimo el costo total de un volumen de producción dado: $\Delta C \geq 0$, para $\Delta z = 0$ y variaciones en la cantidad de factores utilizados de cualquier signo o incluso nulas; es decir se verifica que para cualquier punto (k,l) a lo largo de una misma curva isocuanta, se debe tener $(w_k^0 k + w_l^0 l) \geq (w_k^0 k^0 + w_l^0 l^0)$ que equivale a $(w_k^0 \Delta k + w_l^0 \Delta l) \geq 0$ (1) , para valores constantes de la función de producción: $F(k^0, l^0) = F(k^0 + \Delta k, l^0 + \Delta l)$.

Señala Samuelson, siguiendo el método adoptado (pág. 74 op. cit., ed. en castellano), que las condiciones necesarias y suficientes que ha de verificar el conjunto de precios (w_k^0, w_l^0), para que la relación (1) sea válida, es decir para que constituyan precios de equilibrio (mínimo coste de producción), vienen dadas por el cumplimiento de las desigualdades siguientes:

$$\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial k}\right)^m}{\left(\frac{\partial F}{\partial k}\right)^M} \leq \frac{w_k^0}{w_k^0} \leq \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial k}\right)^M}{\left(\frac{\partial F}{\partial k}\right)^m}; \qquad \text{y} \qquad \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial l}\right)^m}{\left(\frac{\partial F}{\partial k}\right)^M} \leq \frac{w_l^0}{w_k^0} \leq \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial l}\right)^M}{\left(\frac{\partial F}{\partial k}\right)^m} \qquad (2)$$

indicando los superíndices M y m, respectivamente, la mayor y la menor de las derivadas parciales, por la derecha y por la izquierda en el punto considerado. El razonamiento anterior matemáticamente no es otra cosa que una elaboración precisa de concavidad, sin mayor contenido económico.

Si en tal punto no hubiese discontinuidad, las derivadas laterales coincidirían y las desigualdades anteriores convergerían hacia la igualdad: $\frac{w_l^0}{w_k^0} = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial l}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial k}\right)}$, que nos lleva a la igualdad de las productividades marginales ponderadas por los precios de los factores, como condición de equilibrio ya obtenida para las funciones continuas y derivables *sin problemas.*

Sin embargo, lo que ahora nos ocupa es el caso en el cual el punto caracterizado por (k^0, l^0) sea de discontinuidad. Pues bien, las condiciones expresadas arriba (2), precisas para que tal punto sea de equilibrio, es decir se verifique: $w_k^0 \Delta k + w_l^0 \Delta l \geq 0$ incluyen e implican la existencia de derivadas parciales por la derecha e izquierda de tal punto de discontinuidad; es decir han de existir los límites del tipo: $\lim_{\Delta k \to 0^+} \left(\frac{F(k + \Delta k \ \ , l) - F(k,l)}{\Delta k} \right)$, lo que de nuevo exige la infinita divisibilidad del capital o del trabajo a la izquierda o derecha de punto de discontinuidad, y la propia existencia de las variaciones infinitesimales y unitarias de la función de producción, ante la variación (en este caso **unidireccional** además de infinitesimal) de cada factor, que en esencia constituye la derivada parcial lateral.

Nos encontraríamos ante la que consideramos contradictoria situación de que, para demostrar que no es necesaria la continuidad ni la derivabilidad de una función de producción en la obtención de determinadas relaciones, precisamos de la existencia de derivadas parciales laterales; en cierto sentido se estaría utilizando (y por tanto afirmando) aquello que se quiere negar.

Una vez establecido el *lugar* de las combinaciones de factores que proporcionan el mínimo coste, Samuelson estudia (pág. 77 y ss. op. cit.) también para el caso discontinuo, las condiciones que determinarían el máximo beneficio. Para ello establece una función $\pi = R(z) - A - V(z, w_k, w_l)$ diferencia entre ingresos y costes, que dependerá del nivel de producción y de los precios de los factores productivos. La producción será óptima cuando el beneficio es máximo, y se prueba que ello ocurrirá para un conjunto de precios (w_k^0, w_l^0) y de correspondientes factores (k^0, l^0), que verifican la siguiente relación: $\Delta w_k \Delta k + \Delta w_l \Delta l \leq 0$ (3), para variaciones en torno de tales valores.

La relación (3) se puede deducir de la considerada anteriormente para costes mínimos: $w_k^0 \Delta k + w_l^0 \Delta l \geq 0$, y por lo tanto su cumplimiento viene determinado por la misma relación de acotación (2), del cociente de precios entre las razones de las derivadas laterales superior e inferior. Nos encontraríamos ante una situación similar a la anterior (coste mínimo), en tanto que sería precisa la existencia de dichas derivadas parciales laterales, para la coherencia plena del planteamiento discontinuo.

En definitiva el planteamiento de Samuelson se puede resumir en los siguientes términos: a partir de una función de producción microeconómica con un número **finito** de discontinuidades **finitas**, a lo largo de una misma curva de nivel, puntos que admiten derivadas parciales laterales, se desarrolla un procedimiento basado en incrementos finitos de las variables factores productivos, mediante el cual se llega a unas condiciones de acotación para el cociente de los precios de *equilibrio* de los factores que implican a tales derivadas parciales laterales (2).

La verificación de dichas condiciones de acotación determina el cumplimiento de las desigualdades que expresan el *equilibrio* (condiciones de coste mínimo y de máximo beneficio, (1) y (3)). En el procedimiento así diseñado, si el equilibrio se produce en un punto donde la función es continua, nos aparece la *tradicional* relación entre las productividades marginales y la remuneración de los factores productivos, pero si el de *equilibrio* se sitúa en algún punto de discontinuidad (algo aún mas difícil de imaginar, creemos), el método en cuestión nos conduce a las nuevas relaciones en forma de desigualdades ya conocidas.

En alguna medida la pretensión de *ignorar* el Cálculo diferencial, y la exigencia de continuidad para la función de producción, no se consigue, porque se precisa usar el concepto de derivada parcial lateral y por tanto el de límite, divisibilidad infinita etc,. No obstante, Samuelson admite (pag. 77 op. cit.) que "*....las discontinuidades de la función de producción pueden introducir algunas dificultades en el problema del* ***equilibrio general****.....Las discontinuidades pueden, en efecto, dar origen en ciertos dominios a inelasticidades perfectas de demanda; surge así la posibilidad...de que las inelasticidades coincidentes conduzcan a* ***la indeterminación del precio*** *dentro de ciertos límites."* **.** Valga esta cita para situar las cosas en unos términos más justos.

2. LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN Y EL PROGRESO TÉCNICO

El estudio de la productividad y del cambio técnico a partir de la función de producción neoclásica, con el uso intensivo del cálculo infinitesimal, nos conduce a unos resultados aparentemente satisfactorios en cuanto a su supuesta solidez empírica y por tanto, su vinculación a la realidad. Trataremos de mostrar, sin embargo, que el análisis neoclásico de la productividad no está bien fundamentado. Lo que se entiende por productividad total o multifactorial es un residuo que queda después de ajustar en un modelo, la producción el capital y el trabajo; posteriormente se utiliza dicho residuo como variable en el proceso de contrastación.

Veremos que es el propio cálculo diferencial y las relaciones entre tasas de variación unitarias obtenidas a través del mismo, el que nos lleva al error de confundir una relación algebraica entre las variables producto trabajo y capital, con una ley de producción expresada mediante funciones derivables (del tipo Cobb-Douglas), con rendimientos a escala constantes, productividades marginales iguales a las retribuciones de los factores y progreso técnico neutral. Esta confusión está en el origen de la supuesta fuerza empírica del modelo de función de producción neoclásica, que no sería otra cosa que una imagen estadística de la constancia de una determinada relación.

La conclusión irá en la dirección de que no sólo la base teórica de las funciones agregadas de producción es débil, sino que la contrastación empírica, a pesar de su aparente vigor, no aporta razones relevantes que apoyen su validez. La "teoría" de la irrelevancia de los supuestos de Friedman, no se vería confirmada en este caso; supuestos (matemáticos o no) poco acordes con la realidad económica, conducirían a resultados igualmente distantes de la misma.

2.1. Productividad y función de producción. El planteamiento neoclásico de la productividad desarrolla los conceptos de productividad multifactorial y productividad del trabajo. La primera aborda la eficacia en la utilización de los recursos y se podría entender como la relación entre el producto de un país, un sector o una industria y los insumos necesarios para su producción. El cambio en la productividad multifactorial se puede manifestar como una comparación entre el crecimiento del producto y los de todos los insumos que intervienen y podría ser un indicador del progreso técnico. De modo ideal, si se considerasen todos los insumos, se podría hablar de productividad *total* o *global* de los factores; no obstante se suelen considerar tales términos como sinónimos. En lo que se refiere a la productividad del trabajo, nos mide la producción por unidad física de trabajo (número de trabajadores, horas de trabajo..) y como veremos, su relación con la anterior es relevante en el análisis neoclásico del cambio técnico.

A partir de los años cincuenta del pasado siglo, en la literatura neoclásica se ha utilizado el concepto de función de producción en el estudio de la productividad y el cambio técnico. En un relevante artículo Phelps Brown (1957), aborda algunos de los problemas relativos a la capacidad de dichas funciones para la representación de la economía real: " *Una función de producción muestra que cantidad de un cierto producto resultará de la utilización de los factores productivos disponibles, y sus derivadas muestran la productividad marginal de esos factores. ¿Nos ha provisto la función de producción de Cobb-Douglas estimada estadísticamente de los coeficientes de dicha función en el mundo real?*

Hemos discutido que en la medida de que los ajustes estadísticos se hagan con datos históricos, cualesquier coeficientes que se encuentren correspondan con las participaciones en el ingreso, lo harán por coincidencia."

En un trabajo estimado como esencial *Technical Change and the Agregate Production Function* (1957), R. Solow diseñó un nuevo método de medida de la contribución del cambio técnico al crecimiento económico mediante la introducción de un término, en la función de producción, que explicaría dicho cambio. Si consideramos una función de producción agregada, que vendría dada por una expresión: $Q(t) = F[K(t), L(t), A(t))]$, Solow supone que el progreso técnico A es exógeno, independiente de los valores tomados por las variables del modelo (producto, capital y trabajo), y además creciente por lo que se constituye en motor del crecimiento. Se le denominará *neutral* en el sentido de Hicks y nuestra función adoptará ahora, la forma: $Q(t) = A(t)F[K(t), L(t)]$. El efecto del progreso técnico puede ser aislado hallando la diferencia entre la tasa de variación instantánea y unitaria del producto y una suma ponderada de tasas de crecimiento equivalentes, de los factores capital y trabajo.

En efecto, **si suponemos la función de producción continua y derivable respecto de todas sus variables**, y la derivamos respecto del tiempo obtenemos: $\frac{dQ}{dt} = \dot{A}F(K,L) + A\left[\frac{\partial F}{\partial K}\dot{K} + \frac{\partial F}{\partial L}\dot{L}\right]$; dividiendo esta expresión entre el producto Y=$Q = AF(K,L)$ se tiene: $\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{A\partial F/\partial K}{Y}\dot{K} + \frac{A\partial F/\partial L}{Y}\dot{L}$, o como los numeradores son las productividades marginales del capital y del trabajo:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + \frac{PM_k}{Y}\dot{K} + \frac{PM_l}{Y}\dot{L}$$

Aceptando la igualdad **entre las productividades marginales y los precios de los factores** (con todas sus implicaciones matemáticas y económicas), se llegaría a la expresión: $\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + s\frac{\dot{K}}{K} + (1-s)\frac{\dot{L}}{L}$, donde $s = \frac{PM_k K}{Y}$ y $(1-s) = \frac{PM_l L}{Y}$, son respectivamente las participaciones del capital y el trabajo en el producto.

De este modo el cambio técnico quedará como un residuo, que en si mismo no explicaría nada, sería la parte de crecimiento que queda cuando se han eliminado lo que se consideran efectos conocidos: $\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \left(s\frac{\dot{K}}{K} + (1-s)\frac{\dot{L}}{L} \right)$

Todavía será conveniente alguna transformación de la igualdad anterior para adecuarla a la forma que adopta Solow en el trabajo citado. Si introducimos la productividad del trabajo $P = \frac{Y}{L}$ y la relación capital-trabajo $R = \frac{K}{L}$ a través de sus expresiones en tasas de variación unitarias: $\frac{\dot{P}}{P} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L}$ y $\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}$ (*) en la fórmula del cambio técnico, tendremos finalmente la relación que ahora nos interesa.

En efecto, $\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{P}}{P} + \frac{\dot{L}}{L} - \left[s\left(\frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{L}}{L} \right) + (1-s)\frac{\dot{L}}{L} \right]$, simplificando y despejando la tasa de variación de la productividad, se obtiene: $\frac{\dot{P}}{P} = \frac{\dot{A}}{A} + s\frac{\dot{R}}{R}$ (1)

expresión que *explica* los incrementos unitarios de la productividad del trabajo como suma de las tasas de variación del progreso técnico (o productividad multifactorial), y de la relación capital-trabajo ponderada por la participación del capital en el producto.

(*)Estas relaciones, exactas para variaciones infinitesimales, son sin embargo sólo aproximadas para incrementos finitos de las variables, que son los realmente objeto de medida y cálculo en economía. Puede ser un ejemplo de las diferencias entre los tratamientos infinitesimal y finito de determinadas relaciones y de los resultados también distintos a los que conducen. Parece adecuado exponerlo con algún detalle en un apéndice.

Conviene no olvidar que la ecuación anterior se deduce de los supuestos de una función de producción agregada con rendimientos a escala constantes y con la distribución de la renta determinada por las *reglas* de la productividad marginal.

En el trabajo mencionado Solow ajusta datos de capital, trabajo, rentas y producto de Estados Unidos para el periodo 1909-1949, para distintas funciones, una de ellas del tipo Cobb-Douglas. Estos datos le permiten calcular series para las tasas de variación de la productividad del trabajo y del coeficiente capital-trabajo, además de la participación del capital en el producto; obteniendo a partir de ellas las series de $\frac{\dot{A}}{A}$ utilizando la ecuación (1), ya que supone que no está correlacionado con R. Con la tasa de crecimiento de A(t), Solow obtuvo esta variable como un índice de progreso técnico. Con éste indice realizó varias regresiones, obteniendo para el caso de la función de Cobb-Douglas un altísimo coeficiente de correlación (0.9996), coeficiente que indicaría un casi *perfecto* ajuste entre los datos empíricos y este tipo de función de producción.

Veremos enseguida que este ajuste tiene más que ver con una propiedad matemática (la constancia de una determinada relación), y las consecuencias analíticas que se derivan de ella, que con una concordancia entre la realidad económica y el modelo de producción considerado.

F. Fisher (1971), indica que los supuestos *" bajo los que las posibilidades de producción de una economía técnicamente diferenciada se pueden representar por una función de producción agregada, son demasiado limitativos para ser verosímiles".* Investiga sobre la sorprendente uniformidad de los resultados empíricos, observando que cuando la participación de los salarios es por casualidad constante, una función de producción Cobb-Douglas se ajusta a los datos, sugiriendo:"*....El aparente éxito de la función Cobb-Douglas se debe a la constancia relativa de la participación del trabajo."*

2.2. El cambio técnico como media ponderada de los incrementos de salarios y beneficios. En este apartado vamos a considerar como a partir de la contabilidad social, se puede llegar a un modelo similar al de la función de producción agregada de Solow, de modo que un mismo modelo matemático y económico se podría deducir de consideraciones teóricas diferentes; ello tiene unas implicaciones notables.

En efecto, como demostró Shaikh (*Laws of Production and Laws of Algebra.., 1974*), partimos de la identidad entre el producto total y la suma de las participaciones absolutas de trabajo y capital en el mismo: $Q(t) = \omega(t)L + c(t)K$ donde ω y c representan, respectivamente, salario y beneficio medio. Derivando los dos términos de esta identidad respecto del tiempo se tendría: $\frac{dQ}{dt} = \omega\dot{L} + \dot{\omega}L + c\dot{K} + \dot{c}K$, dividiendo ambos términos de la identidad entre Q y agrupando sumandos se llegaría a la expresión siguiente: $\frac{\dot{Q}}{Q} \equiv \frac{\dot{Y}}{Y} = \left(\frac{\omega L}{Y}\right)\frac{\dot{L}}{L} + \left(\frac{cK}{Y}\right)\frac{\dot{K}}{K} + \left[\left(\frac{\omega L}{Y}\right)\frac{\dot{\omega}}{\omega} + \left(\frac{cK}{Y}\right)\frac{\dot{c}}{c}\right]$, llamando $s = \frac{cK}{Y}$, $(1-s) = \frac{\omega L}{Y}$ a las participaciones relativas del capital y trabajo en el producto, obtenemos la igualdad:

$\frac{\dot{Y}}{Y} = (1-s)\frac{\dot{L}}{L} + s\frac{\dot{K}}{K} + \left[(1-s)\frac{\dot{\omega}}{\omega} + s\frac{\dot{c}}{c}\right]$. Esta identidad se puede interpretar como una descomposición de la tasa de variación del producto en tres sumandos, las tasas de variación (ponderadas) de trabajo y capital, y el corchete, que nos representaría la parte de crecimiento no explicada por la variación de los factores y que se podría considerar, con el mismo criterio del apartado anterior, indicador de la contribución del progreso técnico al crecimiento de la economía.

De este modo se tendría una tasa de cambio técnico: $\frac{\dot{A}}{A} = (1-s)\frac{\dot{\omega}}{\omega} + s\frac{\dot{c}}{c}$, que aparece como media ponderada de las tasas de variación de salarios y beneficios.

Si en la identidad que expresa el crecimiento del producto como suma ponderada, introducimos la productividad del trabajo P y el coeficiente capital-producto R, a través de sus expresiones incrementales $\frac{\dot{P}}{P} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L}$ y $\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}$, se obtiene simplificando y despejando la tasa de variación unitaria de la productividad del trabajo, la identidad equivalente: $\frac{\dot{P}}{P} = \frac{\dot{A}}{A} + s\frac{\dot{R}}{R}$, idéntica a la expresión obtenida en el apartado anterior (Solow), pero con la tasa de progreso técnico señalada arriba.

Se han obtenido expresiones formalmente idénticas para el crecimiento unitario e infinitesimal del producto y de la productividad del trabajo, a partir en el primer caso de una función de producción teórica con progreso técnico neutral y tal que verificase el T. de Euler, y en el segundo tomando como base la identidad contable entre el producto y su distribución. Es decir se tendrían las mismas relaciones económico-matemáticas a partir de supuestos de partida diferentes. Se podría pensar que estamos ante un ejemplo de plurivalencia económica de las matemáticas (paralelo a la plurivalencia física de las matemáticas estudiada en el capítulo primero), pero no sería así, dado que las expresiones matemáticas comunes (para el producto y la productividad) relacionan las mismas variables económicas, no se trataría, en este caso, de un mismo modelo formal matemático que relacionase conjuntos de variables diferentes y que, por tanto, representara fenómenos económicos distintos. La importancia y origen de estas similitudes formales trataremos de analizarlas a continuación.

2.3. Cálculo infinitesimal y leyes de producción.

Las relaciones:

$\frac{\dot{Y}}{Y}=\frac{\dot{A}}{A}+(1-s)\frac{\dot{L}}{L}+s\frac{\dot{K}}{K}$ (1) , y $\frac{\dot{P}}{P}=\frac{\dot{A}}{A}+s\frac{\dot{R}}{R}$ (2), con $\frac{\dot{A}}{A}=(1-s)\frac{\dot{\omega}}{\omega}+s\frac{\dot{c}}{c}$ (3), por haber sido obtenidas a partir de la identidad contable inicial: $Y=\omega L+cK$, se verificarán siempre para cualquier conjunto de datos agregados que satisfagan dicha identidad (la verificación sería exacta para tasas de variación infinitesimales, para incrementos finitos se cometerá un ligero error, como hemos señalado en el apartado 2.1, pero no relevante para lo que nos ocupa). En particular lo harán para conjuntos de datos de producto, capital, trabajo, salarios y beneficios que, verificando la identidad de origen, presenten constancia de las participaciones relativas de los factores en el producto, es decir que sean tales que $s=cte=\beta$.

Pues bien, para estos conjuntos de datos se deducen resultados muy interesantes, ya que, integrando la identidad (2) considerada como ecuación diferencial en P (seguimos aceptando el cumplimiento de las condiciones matemáticas precisas, obviando el significado económico de las variables), se llega a: $Ln(P)=Ln(C_1A)+Ln(C_2R^s)=Ln(AC_0R^s)$, de donde se obtiene para la productividad: $P=A(t)\left[C_0R^s\right]$ (4), siendo C_1, C_2, C_0 constantes de integración.

Si en la relación (4) multiplicamos ambos miembros por L, se tendrá la siguiente expresión para el producto: $Q(t)\equiv Y(t)=A(t)\left[C_0K^{\beta}L^{1-\beta}\right]$ (5)

La expresión (5) nos sugiere las siguientes consideraciones. En primer lugar hay que aceptar que su deducción (el proceso de integración), ha sido posible gracias a que hemos supuesto la **constancia** de $s=\beta$.

En segundo lugar se observa que la fórmula que expresa la relación obtenida es homogénea de primer grado en K y en L, verificará por tanto el teorema de Euler y las conclusiones que del mismo se obtienen. Es decir, las derivadas parciales $\frac{\partial Y}{\partial K};\frac{\partial Y}{\partial L}$, productividades marginales del capital y trabajo serán iguales a las remuneraciones c y ω, por tanto $s=\beta=\frac{cK}{Y}$, $(1-s)=\frac{\omega L}{Y}$, serán las participaciones de los factores en el producto.

Por último, el efecto del tiempo es neutral, vendría incorporado en el factor de desplazamiento $A(t)$. Dado que el término $\frac{\dot{A}}{A}$ es una media ponderada de las tasas de variación de los salarios y beneficios (3), parece lógico esperar que muchas mediciones de K y de L dieran, empíricamente, una relación capital-trabajo muy poco correlacionada con la tasa de variación de A. Si aceptamos la consideración anterior, $\frac{\dot{A}}{A}$ se podría considerar una función dependiente únicamente del tiempo, e igualmente le ocurriría a A. En efecto $\frac{\dot{A}}{A}= f(t) \Rightarrow LnA = e^{\int f(t)dt} \Rightarrow A = e^{F(t)} = g(t)$; con lo que tendríamos plenamente justificada la expresión (5), con la separación del factor de progreso técnico.

En realidad la función obtenida es, de modo quizás sorprendente, matemáticamente idéntica a una función de producción Cobb-Douglas, con rendimientos a escala constantes, progreso técnico neutral, y que verificase la *regla* de la productividad marginal. Veremos, sin embargo, que no puede interpretarse como una función de producción, ni siquiera como una forma de relación de producción.

Si rehacemos el camino recorrido vemos que, a partir de una identidad contable entre producto y rentas de los factores se obtuvo, derivando respecto del tiempo, una relación entre tasas de variación unitarias e infinitesimales, de obligado cumplimiento para colecciones de datos de producto, capital, trabajo, salarios y beneficios que verifiquen la identidad inicial. Integrando dicha relación entre derivadas, **con la condición fundamental,** de la constancia de las participaciones en el producto, obtenemos una " *auténtica*" función de producción del tipo señalado que será satisfecha por todas las colecciones de datos que cumplan la identidad contable inicial, la constancia de las participaciones relativas y la ausencia de correlación significativa entre las tasa de variación del coeficiente capital-trabajo y el progreso técnico.

Estas tres condiciones pueden ser satisfechas por colecciones muy variadas de datos asociados con participaciones constantes, sin que ello signifique que todas ellas procedan de series de producción históricas de algún pais. Desde luego, los datos de la economía de E.E.U.U. tomados por Solow, al cumplirse las condiciones señaladas arriba, verifican una función de éste tipo con un elevado grado de correlación; pero igualmente se pueden construir colecciones de datos ficticios, que cumpliendo los requisitos señalados, también satisfarán un modelo de supuesta función de producción agregada de Cobb-Douglas. Un ejemplo de esto último lo constituye la función de producción falsa, que elaboró Shaikh (1974) mediante un modelo numérico con datos falsos para la productividad y la razón capital-trabajo, pero respetando la constancia de la participación relativa de los factores en el producto; llegando a construir una serie para $A(t)$ y una "función de producción" para dichos datos (del tipo *omnipresente*, Cobb-Douglas), y que se ajusta muy bien a los mismos. Con datos reales de la economía mejicana Valle Baeza (1991), ha realizado un estudio similar (manteniéndose las constancia de las participaciones relativas) y obteniendo, asimismo, un ajuste con un altísimo coeficiente de determinación.

En realidad en el ajuste realizado por Solow se pueden considerar dos críticas diferentes, que trataremos de distinguir. Por un lado tendríamos el planteamiento que se puede resumir del siguiente modo, colecciones de datos de indicadores de producción, capital, trabajo, salarios y beneficios, que satisfagan la identidad de rentas agregadas, y que sean compatibles con la constancia de las participaciones relativas y la ausencia de correlación significativa entre las tasas de capital-trabajo y de progreso técnico, **conducen de forma obligada** (por que **subyace a dichos datos una relación matemática** de tipo exponencial, que hemos tratado de exponer en el anterior apartado), a una supuesta función de producción del tipo Cobb-Douglas, que no se debería considerar **ley de producción** sino **relación matemática** implícita a datos como los que se consideran, y que en cualquier caso adquiriría pleno significado si las variables ligadas representasen contenidos medibles de forma homogénea e infinitamente divisibles, es decir si se pudiesen considerar variables continuas y derivables, lo que, como venimos considerando a lo largo de este trabajo, entendemos que no se verifica para las variables económicas en juego. Hay que recordar, a este respecto, que en el proceso de deducción de Solow (2.1), desempeña un papel fundamental el cumplimiento del teorema de Euler, sus requerimientos formales y sus consecuencias en cuanto a la **distribución** del producto.

Por otro lado consideramos que en el estudio (estadístico), para comprobar el modelo de función de producción, incluido en el trabajo analizado, se actúa con una considerable *ligereza estadística* que no es trivial en cuanto a sus consecuencias. Recordemos que a partir de los datos de la economía de Estados Unidos en el periodo 1909-1945, Solow construye series de la productividad del trabajo P, del coeficiente capital-trabajo R, y de la participación de los beneficios en el producto s.

Con estas series elabora las tasas de variación unitarias de la productividad y de la razón capital-producto para introducirlas, junto con s, en la relación: $\frac{\dot{P}}{P} = \frac{\dot{A}}{A} + s\frac{\dot{R}}{R}$ (1), y de ella obtener la serie para el cambio tecnológico $\frac{\dot{A}}{A}$. Considerando que el cambio técnico es esencialmente neutral e igualando $A(0) = 1$, se puede obtener la serie de , parámetro del cambio técnico neutral.

El modelo de función de Cobb-Douglas que se desea validar se puede expresar del siguiente modo: $P = A(t)f(R) = A(t)C_0R^{\beta}$, dividiendo entre A ambos miembros de la igualdad, $P^* = \frac{P}{A} = f(R)$, (donde f representaría los movimientos a lo largo de la función de producción y A los desplazamientos de la misma), o bien $P^* = C_0R^{\beta}$.

Tomando logaritmos se tiene: $LogP^* = \alpha + \beta LogR$ (2), siendo $\alpha = LogC_0$ y $\beta = s$. Posteriormente se estudió el coeficiente de correlación entre las variables logarítmicas relacionadas en (2), encontrándose un valor extremadamente alto: 0.9996.

La proximidad a la unidad de dicho valor ya sería indicio de algo extraño, los propios errores de medida de las variables implicadas y las aproximaciones de las operaciones necesarias podrían ser mayores que la diferencia entre el valor obtenido y la unidad, cuatro diezmilésimas. Estaríamos en presencia de una correlación **perfecta,** es decir la función de producción estimada reflejaría de forma ideal el proceso productivo agregado de una economía, incluyendo las connotaciones de nuestra función en cuanto a productividades marginales y distribución del producto, dada la verificación **formal** por dicha función de las propiedades de ser diferenciable y homogénea de primer grado.

En realidad lo que explica un coeficiente de correlación tan elevado es lo que consideramos un error metodológico en el proceso seguido para validar el modelo. Como hemos expuesto los valores de la variable A fueron obtenidos a partir de la relación (1) $\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{P}}{P} - s\frac{\dot{R}}{R}$, es decir de una diferencia de tasas de las variables implicadas en el modelo, en la *función de producción* a considerar, donde aparecen la productividad y la razón capital-trabajo como variables dependiente e independiente. Se introduce, con A, una relación implícita entre ambas variables (P y R) que es la que origina el elevado coeficiente de correlación. Además, en este caso, se estima una variable A, y se realiza un análisis estadístico con ella en el **mismo** modelo con el cual fue calculada, dado que la expresión (1) nos conduce, como se ha probado, a una función de tipo exponencial como la que se pretende validar. No parece admisible que una variable calculada con un modelo se emplee para comprobar el mismo modelo y ello, sin embargo, es lo que se hace.

De este modo, por un lado se obtiene teóricamente un modelo de función de producción agregada acorde con los planteamientos económicos deseados (rendimientos a escala constantes, distribución determinada por las productividades marginales y progreso técnico neutral), y por otro se "valida empíricamente" dicho modelo mediante el procedimiento señalado, que permite obtener tan elevados coeficiente de correlación entre las variables. Se puede pensar, sin embargo, que el modelo en cuestión es una construcción *a priori,* sin una sólida validación empírica.

Habría que agregar, por tanto, que en contra de la supuesta solvencia empírica del modelo considerado, el concepto de función de producción neoclásico añade a sus serias insuficiencias teóricas, la ausencia de una comprobación conveniente, de una contrastación empírica rigurosa.

Por último, parece conveniente preguntarse por la intervención del cálculo infinitesimal en las deducciones anteriores, en el análisis de la función de producción y del cambio técnico en la perpectiva neoclásica, y de su contrastación con los procesos económicos reales. Se podría afirmar que el Cálculo desempeña un doble papel en estos procesos; por un lado, en el desarrollo del cambio técnico y función agregada de producción de Solow, a partir de una función del tipo $Y = A(t)f(R)$ hasta llegar a las **relaciones** entre tasas de variación unitarias del producto, capital y trabajo, o sus equivalentes entre la productividad y el coeficiente capital-trabajo (relaciones que están en el origen de la definición de A como progreso técnico *residual*), se incurre en la misma **ausencia de rigor y asunción de hipótesis irreales** que hemos venido señalando a lo largo de este trabajo (de nuevo habría que subrayar el protagonismo-ahora matemático- de las productividades marginales y del teorema de Euler en estos desarrollos, sin cuyo concurso no sería posible la obtención de los resultados anteriores. Obsérvese, por ejemplo, la necesidad de la igualdad entre productividad marginal y remuneración de los factores, para elaborar las participaciones relativas de los mismos en el producto, uno de los conceptos clave que conducen a la función de Cobb-Douglas).

El anterior sería el papel que podemos llamar tradicional o convencional, pero junto al mismo se puede apreciar otro uso, vinculado a los desarrollos a partir de la identidad contable entre producto y rentas del capital y trabajo (Shaikh); aquí se trata de la obtención de relaciones entre variaciones temporales de algunas variables, a partir de la identidad inicial y sin que el significado de las variables determine el resultado. En el proceso de integración de la relación: $\frac{\dot{P}}{P} = \frac{\dot{A}}{A} + s\frac{\dot{R}}{R}$, lo esencial era la constancia de s.

Admitiendo que las derivadas temporales implicarían relaciones (funciones) continuas respecto del tiempo, consideramos que el error cometido al utilizar el cálculo infinitesimal en el tratamiento de estas variaciones temporales no introduce alteraciones substanciales o conceptuales en los resultados donde intervienen. En este sentido se podría aceptar como diferente del anterior, el empleo que de las matemáticas diferenciales se hace en esta última parte; diferente y clarificador por la contribución de las mismas a poner de manifiesto a la función de producción de Cobb-Douglas, como una ley del Cálculo más que como una ley de Producción.

Para terminar este capítulo quizás sea adecuado reproducir unas palabras críticas del propio R. Solow, relativas al uso de las funciones neoclásicas, y que constituyen todo un ejemplo de flexibilidad y pragmatismo: “ *Nunca he pensado en las funciones de producción macroeconómicas como un concepto rigurosamente justificable. A mi modo de ver, son, o bien una parábola ilustrativa, o, de lo contrario, un simple instrumento para manejar datos, para utilizarlo en tanto dé buenos resultados empíricos y abandonarlo tan pronto como ocurra lo contrario o como aparezca algo mejor”* (Solow R., 1967).

CONCLUSIONES

A lo largo de esta tesis, junto a los temas vinculados al objeto fundamental de estudio: la aplicación del cálculo infinitesimal a la teoría económica neoclásica, las condiciones que rodearon dicha aplicación desde sus comienzos y las posibles consecuencias que se derivan de la misma, han aparecido otros sobre los que se ha pasado de puntillas, o simplemente se han ignorado. Ello ha sido motivado tanto por la necesidad de centrarnos sobre los problemas que inicialmente nos planteamos, como por nuestras propias limitaciones en relación con estos temas *asociados*. No se ha pretendido, como señalamos en el inicio de esta tesis, un estudio integral sobre el carácter científico de la economía, ni tampoco un análisis exhaustivo de las aplicaciones matemáticas en la economía, por citar dos de las cuestiones más importantes que han estado *presentes* de forma permanente y que han sido tratadas sólo de manera parcial. Sin embargo, del estudio efectuado en el ámbito de la relación teoría económica-análisis matemático clásico, consideramos que se pueden extraer algunas **conclusiones** de interés. Estando dichas conclusiones muy interrelacionadas las dividiremos, para una mayor claridad expositiva, del siguiente modo:

a) **La relación que establece la matemática con la economía es de naturaleza diferente a la que constituye con la física.**
b) **La ausencia de realismo de los supuestos matemáticos, en las teorías económicas, puede condicionar los resultados o conclusiones de dichas teorías.**
c) **Algunas propiedades y teoremas, estrictamente matemáticos, son i*nstrumentalizados* en favor de una *hipotética demostración* de ciertos resultados económicos.**
d) **La matemática y en particular el Cálculo diferencial, contribuye a la *supuesta* legitimación de la teoría económica neoclásica como *física social.***

a) La relación que establece la matemática con la economía es de naturaleza diferente a la que constituye con la física. A pesar de la adopción, a lo largo del siglo XIX, de una metodología formal para la elaboración de la teoría economica marginalista, basada en el uso del análisis matemático clásico para la formulación de los modelos, a semejanza de los desarrollos de la física clásica (como estudiamos en el primer capítulo), veíamos en el apartado 4.3 del mismo, que el paralelismo entre las relaciones de la matemática con la física y la economía, no pasaba de ser un espejismo.

En dicha ocasión y partiendo del estudio de tres propiedades que denominábamos: polimorfismo matemático de la física o economía, plurivalencia física o económica de las matemáticas y adecuada integración de las funciones y variables representativas (de física y economía)**,** en la formalización del análisis matemático; concluíamos que existían profundas discrepancias entre propiedades supuestamente equivalentes. Disimilitudes que se podrían sintetizar en las diferencias entre el espacio físico, **marco** de referencia de los modelos matemáticos de la física y los espacios abstractos que se usan como dominio de definición de las variables económicas, o entre el tiempo físico y el tiempo lógico de la teoría neoclásica; todo ello en lo que se refiere a la supuesta **plurivalencia** común de las matemáticas.

En lo referente al polimorfismo matemático de la física o economía se observó que los modelos matemáticos de una misma teoría económica no interrelacionan como lo hacen los modelos supuestamente equivalentes de la física. Más importante parecía la diferencia entre el elevado nivel de abstracción y la debilidad de los supuestos de los modelos económicos frente a la precisión y solidez de las hipótesis de los modelos matemáticos que representan un mismo fenómeno físico.

Con relación al grado de **fidelidad** con el que un mismo modelo matemático representa diferentes teorías o conjuntos de relaciones en economía considerábamos que venía dado, fundamentalmente, por la precisión con que las variables y funciones económicas se ajustan a los movimientos reales de tales variables (como ocurre en física). Ello, veíamos, está relacionado con el carácter **continuo** de tales procesos y de las variables y funciones que los representan. La dudosa continuidad de las variables representativas de los procesos econónomicos cuestionan la similitud o paralelismo con los procesos y variables físicas, e impide que se pueda trasladar, sin fuertes reservas, el cálculo infinitesimal al ámbito de la teoría económica.

De éste modo se podría afirmar que la relación que se establece entre matemáticas y economía **no es** de naturaleza similar a la que une matemáticas y física, relación, ésta última, que denominábamos de constitución, en el sentido de que la matemática construye o constituye a la física, los conceptos y relaciones físicas se consideran inseparables de su forma matemática, en un proceso mutuamente constructivo, desarrollándose y enriqueciéndose de forma conjunta.

La relación de la matemática con la economía será, sin duda, de carácter más modesto, pero no dejará de ser muy importante. Debería actuar, pensamos, como instrumento técnico, en situación de exterioridad respecto a los conceptos y relaciones económicas, aportando rigor y claridad en la expresión de los mismos, además de contribuir a expresar de forma precisa relaciones de dependencia entre magnitudes cuantificables.

b) La ausencia de realismo de los supuestos matemáticos, en las teorías económicas, puede condicionar los resultados o conclusiones de dichas teorías. Como señalábamos en el capítulo tercero, los argumentos sobre la falta de realismo de las hipótesis de la teoría neoclásica se pueden remontar a los comentarios realizados en 1901 por H. Poincaré a Walras, sobre la medida de la utilidad (cit. por Jaffe, W. 1977). Una extensa lista de notables autores se han ocupado del tema, de una forma u otra, a lo largo del siglo XX. Desde la *irrelevancia de los supuestos* de M. Friedman a los comentarios de Keynes en su Teoría general, sobre la ausencia de generalidad de sus premisas y las razones por las que considera que *la economía ortodoxa está en desgracia*, estudiamos en dicho capítulo diversos puntos de vista sobre la cuestión del papel de los supuestos en las teorías y en particular en la teoría neoclásica.

Considerábamos **supuestos de naturaleza matemática** aquellas observaciones o conjeturas sobre la realidad económica formuladas en términos del análisis matemático clásico o cálculo infinitesimal, que incluirían tanto los supuestos sobre dicha realidad, precisos para hacer viable la formulación inicial (por ejemplo, supuestos sobre la continuidad de una función), como aquellos otros incorporados en el proceso de construcción del *edificio* matemático que constituye el modelo completo de la teoría en cuestión. Observábamos la dificultad de **adecuar** las variables y procesos económicos **a las exigencias formales del análisis matemático**, por la naturaleza no infinitesimal ni continua de las variables y funciones económicas, y por tanto el obstáculo que se interpone para la consideración de propiedades matemáticas más avanzadas, como la existencia de derivadas o diferenciales de las funciones definidas en los modelos desarrollados en la economía neoclásica. Al **forzar** la realidad económica, para adaptarla a los requisitos formales del cálculo, advertíamos que se podría incurrir en una notable ausencia de realismo en los supuestos así construidos o incorporados.

En las conclusiones siguientes que, de modo un tanto artificial, hemos separado de la que aquí consideramos, trataremos de la contribución del Cálculo a la construcción del edificio teórico neoclásico y de algunos casos muy significativos de instrumentalización del análisis a favor de algunos resultados concretos. Aquí nos interesan las consecuencias para las teorías, que se derivarían de esta ausencia de realismo en los supuestos de naturaleza matemática. Hasta que punto la **falta de conexión con la realidad** de las propiedades que suponemos verifican las variables y funciones económicas, determinan negativamente o distorsionan los resultados.

Creemos que las consecuencias no serían desdeñables en ningún caso, pudiendo llegar al extremo de desvirtuar en gran medida, y hacer dudosamente aceptables los resultados obtenidos de tal modo. Pero no podemos pensar que todas las aplicaciones del cálculo infinitesimal a la teoría económica tienen el mismo alcance, los mismos efectos, sobre los resultados. Consideramos que se podría distinguir entre dos tipos de *aplicaciones*. Aquellas que por tener un carácter estrictamente instrumental, permitirían una aproximación mejor o peor, pero en todo caso no alterarían lo esencial de los resultados. En éste tipo se podrían catalogar los modelos de cálculo de relaciones incrementales (variaciones finitas tratadas como infinitesimales), que se analizan en el apéndice. De otro carácter y alcance extraordinariamente diferente serían las *aplicaciones* del cálculo que a partir de la asunción de unos supuestos irreales (propiedades que no se verifican: continuidad, derivabilidad etc.) y mediante la aplicación de los *adecuados* teoremas, conducen a resultados de extraordinaria relevancia en el ámbito de la teoría económica neoclásica. En éstos casos la matemática es *interiorizada* por la economía, afectando a lo esencial de los resultados obtenidos, como veremos enseguida con más detenimiento.

A esta clase pertenecería, por ejemplo, el modelo de función de producción neoclásica, supuesta diferenciable, homogénea de primer grado y que permite la aplicación del Teorema de Euler, con las conocidas consecuencias sobre la obtención de supuestos *criterios objetivos* de distribución de la renta. A estos casos parece pertinente aplicarles la crítica, ya citada, de Leontieff "*...por levantar una superestructura ostentosa sobre unas débiles bases empíricas e hipótesis o supuestos no comprobados y, de esta manera, perdiendo el contacto con el mundo real.*" (Leontieff, W. 1971).

En un lugar intermedio se podrían situar procedimientos o métodos (que consideramos instrumentales), como el de los *multiplicadores de Lagrange*, que si bién desempeña un papel importante en la deducción de ciertas condiciones de optimización de la utilidad o la producción - papel importante, pero no exclusivo, en la medida en que mediante otros procedimientos se puede llegar a las mismas condiciones - no llegan a adquirir el protagonismo ni el carácter determinante de las *aplicaciones* del tipo anterior y que nos enlazan con la tercera conclusión.

c) Algunas propiedades y teoremas, estrictamente matemáticos, son *instrumentalizados* a favor de la *supuesta demostración* de ciertos resultados económicos.

En el marco de esta tesis hemos tratado con algún detalle varias situaciones en las cuales el protagonismo de ciertas propiedades y (o) teoremas matemáticos, en particular del ámbito del cálculo diferencial, llega al punto de convertirse en la *esencia* de la demostración, en el *núcleo* de la prueba, de algunos resultados económicos. De éste modo lo que en principio era un teorema o propiedad matemática formal, abstracta, se convierte en el eje de la argumentación a favor de unos determinados resultados económicos.

No se aplican, las matemáticas, como una herramienta que permita conceptuar o relacionar mejor determinadas ideas económicas, sino que adquieren un papel determinante en la obtención de éstos resultados, se podría decir que el procedimiento *configura* las consecuencias ó conclusiones, la *forma* matemática *establece* el *fondo* económico. Entendemos que, en estos casos, las matemáticas son **instrumentalizadas** o utilizadas de modo impropio y objetivamente falaz.

Vamos a considerar tres casos que manifiestan, de forma clara, la situación que acabamos de describir. El primer caso, enlazando con el apartado b) de estas conclusiones, hace referencia al **Teorema de Euler para funciones linealmente homogéneas** y el papel que desempeña en la teoría neoclásica de la distribución de la renta. Efectivamente, la ***suposición*** de $z = F(k,l)$ como función contínua, con derivadas parciales y homogénea de primer grado, permite que le **sea aplicable** dicho teorema y en consecuencia se pueda expresar como suma de productos: $z = \left(\frac{\partial F}{\partial k}\right)k + \left(\frac{\partial F}{\partial l}\right)l$ de las *cantidades* de capital y trabajo por las correspondientes derivadas parciales. Es decir el producto total se agota cuando cada *factor* se paga según su productividad marginal, o lo que es equivalente, la remuneración de los factores trabajo y capital y por tanto la distribución de la renta, vendría dada por las respectivas productivides marginales. Lo que nos interesa subrayar, ahora, es el papel central y **determinante del resultado**, que protagoniza el citado teorema y el tipo de función al que se puede aplicar. Como señala Pasinetti: " *Existe un solo tipo de función matemática que da este resultado: una función lineal y homogénea; por ello, se supuso que las funciones de producción eran lineales y homogéneas*" (Pasinetti L. L. 1981, pág. 30, edición española).

El segundo caso de *instrumentalización* que vamos a considerar está relacionado, también, con la función de producción neoclásica (de tipo Cobb-Douglas) pero bajo el prisma de las relaciones que subyacen a las variables relacionadas por la misma, y de como tales relaciones pueden ser satisfechas por variadas colecciones de datos, que nada tienen que ver con datos de producción, y sí con el cumplimiento de ciertas propiedades matemáticas.

En efecto, como vimos en los apartados 2.2 y 2.3 del capítulo cuarto, la relación entre tasas de variación unitarias de la productividad, cambio técnico y coeficiente capital-trabajo: $\frac{\dot{P}}{P} = \frac{\dot{A}}{A} + s\frac{\dot{R}}{R}$ (1) , se podía obtener a partir de la identidad contable entre rentas: $Y = \omega L + cK$ (2), siendo, respectivamente, ω y c el salario medio y el tipo medio de remuneración del capital, mediante el cálculo diferencial y algunas útiles simplificaciones. La igualdad (1) se verificará para variados conjuntos de datos de producto, capital, salarios y beneficios que satisfagan la identidad contable aludida. En particular lo hará para colecciones que además de satisfacer (2) presenten constancia de las participaciones relativas de los factores en el producto, es decir que sean tales que $s = cte = \beta$. De estos conjuntos de datos se deducían resultados muy interesantes, ya que integrando la relación (1), considerada como ecuación diferencial en P, se obtenía, después de un sencillo proceso, la función: $P = A(t)\left[C_0 R^s\right]$, multiplicando, finalmente los dos miembros de la igualdad por L, se llegaba a la siguiente expresión para el producto: $Q(t) \equiv Y(t) = A(t)\left[C_0 K^\beta L^{1-\beta}\right]$ (3), donde $A(t)$ representa el progreso técnico exógeno.

La función obtenida es matemáticamente idéntica a una función de producción Cobb-Douglas, homogénea de primer grado en K y L, con rendimientos a escala constantes, por tanto, y que verifica la *regla* de la *productividad marginal.*

De lo anterior se puede concluir que colecciones de datos de indicadores de producción,capital, trabajo, salarios y beneficios que satisfagan la identidad de rentas agregadas (2), y que sean compatibles con la constancia de la participaciones relativas de las rentas de capital y trabajo, **conducen de forma obligada** a una supuesta función de producción de tipo Cobb-Douglas, porque **subyace a dichos datos una relación matemática de tipo exponencial** (como se expuso en el apartado 2.3 del capítulo cuarto y aquí se ha indicado de forma somera). Dicha función no se debería, por tanto, considerar una auténtica *ley de producción* sino una relación matemática *implícita* a colecciones de datos del tipo que indicamos. Interesa destacar que una fórmula que relaciona datos obtenidos a partir de una identidad, y con la propiedad de la constancia antes indicada (y que puede ser satisfecha por muy variadas colecciones de valores), no puede ser considerada, de ninguna manera, una *auténtica* función de producción, que a partir de los datos sobre inputs nos diese el producto agregado. Como es lógico, las colecciones de valores para la economía estadounidense que utilizó R. Solow en su trabajo *Technical Change and the Agregate Production Function* (1957), al verificar la identidad de rentas y la constancia relativa *confirmaron* la fórmula de tipo Cobb-Douglas, como no podia ser de otra manera, al verificar los datos de dicha economía las propiedades matemáticas precisas para ello (además de alguna ligereza estadística en el proceso de contrastación, como vimos en el capítulo mencionado). Pero igualmente se pueden construir series de valores ficticios, que cumpliendo las condiciones de identidad contable y constancia de las participaciones, satisfagan la fórmula de la *supuesta* función de producción. En definitiva, ciertas propiedades matemáticas de algunas series de valores, de fácil cumplimiento, se ha pretendido que ***generen*** una ley de producción, en lo que parece una utilización interesada de dichas propiedades o un caso claro de instrumentalización del cálculo diferencial por parte de la teoría económica.

Un último caso, de lo que venimos denominando **instrumentalización** del cálculo diferencial, consideraremos brevemente; nos referimos al resultado expuesto por H. Sonnenschein (1972), que muestra la posibilidad de que **cualquier función continua y con derivada continua**, en el dominio de definición de los precios relativos, pueda representar la **función exceso de demanda agregada de *alguna* economía**. En efecto, como se estudió en el apartado 2.2 del capítulo tercero, se puede demostrar que las funciones que cumplan los requisitos anteriores, utilizando, entre otros recursos, la propiedad de acotación de las pendientes de las funciones de Lipschitz (cálculo diferencial), cumple todas las condiciones para considerar a tal función como exceso de demanda. Lo relevante, desde el punto de vista que nos ocupa, es el hecho de que el **concepto de función** y el cumplimiento de unas **propiedades formales estrictamente matemáticas**, sean **suficientes** para considerar a las funciones que las verifiquen, componentes de un modelo que se integra, a su vez, en una determinada concepción del proceso económico, en la teoría económica neoclásica.

d)* La matemática y en particular el Cálculo diferencial, contribuye a la *supuesta* legitimación de la teoría económica neoclásica como *física social.

Como considerábamos en el apartado 4.3 del capítulo primero, se podría atribuir a las matemáticas, y dentro de ellas al Cálculo diferencial, una función legitimadora del discurso económico neoclásico. ***Legitimación*** que tendría su origen en en mimetismo inicial respecto de la física clásica. La relación entre la elaboración marginalista y la física clásica (la física del movimiento y sus causas, del electromagnetismo y la termodinámica del siglo XIX), fue mucho más allá de la simple **traslación** a la economía de los métodos matemáticos que habian probado su éxito en la misma; esta relación incluiría la **identificación** entre conceptos y **leyes**, de supuesta vigencia en ambos campos. Se trataba, además, de que los principios económicos se pudieran expresar en lenguaje matemático y sus relaciones adoptasen formas funcionales, para que la *precisión y coherencia* de las elaboraciones teóricas pudieran ser garantizadas por el prestigio de las matemáticas. Con los métodos matemáticos se intentaría acreditar la credibilidad de las elaboraciones teóricas, en la convicción de que las teorías económicas cuando se presentan revestidas con el *adecuado formalismo matemático* son **universalmente válidas**. De este modo la teoría económica neoclásica se constituiría como una especie de **física** de la sociedad o **física social** que asumiría el carácter de verdad absoluta en el marco de la economía. Los **contenidos económicos esenciales** que constituyen el *núcleo* de ésta legitimación girarían en torno a las demostraciones de existencia y estabilidad del equilibrio general, por un lado, y a la teoría neoclásica de la producción y distribución, por otro.

Habría que añadir que en la medida en que el proceso de incorporación de matemáticas a la economía continuó con la Topología, Programación lineal y Estadística, Teoría de juegos etc., también estas ramas del conocimiento desempeñan un relevante papel en el proceso *legitimador* que tratamos de describir, proceso, que aunque ha podido extenderse a otros enfoques de la teoría económica, creemos que no con la intensidad, ni el carácter cualitativamente diferente, que ha adquirido en la teoría neoclásica. Cálculo diferencial e hipermatematización del discurso económico, junto con supuestos alejados de la realidad, serían los rasgos formales, que de forma simplificada, caracterizarían desde sus comienzos el proceso de legitimación considerado.

Para terminar, permítasenos una metáfora un tanto abusiva, pero representativa de algunas de las ideas desarrolladas en esta tesis. Si bien podríamos aceptar, con Oscar Wilde, que la naturaleza imite al arte -el **desarrollo paralelo** de la **física** (tanto clásica como moderna) y de los **procedimientos matemáticos** precisos para tal desarrollo (de una indudable belleza formal: cálculo diferencial, al principio, cálculo tensorial, espacios de Hilbert, teorias cuánticas de campos topológicas..., posteriormente) iría, al menos, en esa ***dirección***- parece a todas luces **excesivo**, que la economía neoclásica (supuesta física social) se aproxime, siquiera, al arte.

APÉNDICE. SOBRE ALGUNAS RELACIONES INCREMENTALES EN ECONOMÍA

En algunos estudios de teoría económica, en particular sobre la función de producción neoclásica, aparecen con alguna frecuencia relaciones entre variables de tipo cociente: $z = \frac{y}{x}$, o bien: $z = \frac{w}{xy}$. Al considerar, tanto en el plano teórico como especialmente en aplicaciones prácticas, las relaciones entre las tasas de variación temporal (unitarias) de estas variables, se suele utilizar el cálculo diferencial para su obtención.

En este apéndice veremos que la fórmula que relaciona dichas tasas de crecimiento, difiere según se utilice para su obtención el cálculo diferencial o bien simples cálculos de variaciones finitas; (que consideramos sería lo adecuado para medir incrementos interanuales unitarios de cualquier variable macroeconómica: producto, empleo, productividad etc.). Las diferencias en los resultados obtenidos al medir variaciones finitas, mediante el procedimiento *diferencial* y el basado en incrementos finitos, creemos que en ocasiones pueden no ser despreciables, y explicar en parte ciertas desviaciones en los resultados de estudios sobre funciones de producción macroconómicas con datos de economías reales, considerados en el capítulo cuarto. Tratareremos de evaluar, asimismo, la cuantía del *error* cometido al intercambiar ambos procedimientos.

Veamos, en primer lugar, la obtención de la relación entre tasas de variación por el método *diferencial*. Para ello utilizaremos la relación que define la productividad del trabajo: $P = \frac{Y}{L}$ (1), si se consideran las tres variables dependientes del tiempo con una dependencia *funcional, continua* y *derivable*, se tiene derivando respecto del tiempo, como si de un cociente de funciones se tratase: $\frac{dP}{dt} = \dot{P} = \frac{L\dot{Y} - Y\dot{L}}{L^2}$ (2).

Si dividimos los dos miembros de la relación (2) entre (1) y simplificamos, obtendremos la fórmula habitualmente considerada para la relación entre las tasas de variación temporal y unitarias de un cociente: $\frac{\dot{P}}{P} = \frac{\left(\frac{\dot{Y}}{L}\right) - \left(\frac{\dot{L}}{L}\right)\left(\frac{Y}{L}\right)}{\left(\frac{Y}{L}\right)} = \left(\frac{\dot{Y}}{Y}\right) - \left(\frac{\dot{L}}{L}\right)$, (3)

Esta relación entre las tasas de varición de la productividad, producto y empleo sería exacta para variaciones ***infinitesimales*** de tales macromagnitudes, para variaciones finitas será sólo aproximada, como veremos a continuación.

En efecto, si partimos de nuevo de $P = \frac{Y}{L}$, y denotamos con los subíndices 1 y 2, los valores inicial y final, respectivamente, del periodo considerado y medido para cada variable, tendremos:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{P_2 - P_1}{P_1} = \frac{\left(\frac{Y_2}{L_2}\right) - \left(\frac{Y_1}{L_1}\right)}{\left(\frac{Y_1}{L_1}\right)} = \frac{\left(\frac{Y_2}{L_2}\right)}{\left(\frac{Y_1}{L_1}\right)} - 1 = \frac{Y_2 L_1}{Y_1 L_2} - 1 = \frac{Y_2 L_1}{Y_1 L_2} - \frac{Y_1 L_2}{Y_1 L_2}$$

Sumando y restando en la relación anterior la expresión: $\frac{Y_1 L_1}{Y_1 L_2}$, y agrupando adecuadamente los sumandos se obtiene:

$\frac{\Delta P}{P} = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)\left(\frac{Y_2 - Y_1}{Y_1}\right) - \left(\frac{L_1}{L_2}\right)\left(\frac{L_2 - L_1}{L_1}\right) = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)\left[\left(\frac{\Delta Y}{Y}\right) - \left(\frac{\Delta L}{L}\right)\right]$; como, por otro lado se verifica que el cociente: $\left(\frac{L_1}{L_2}\right) = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{L_2 - L_1}{L_1}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{\Delta L}{L}\right)^{-1}$, tenemos finalmente la siguiente relación, entre los incrementos unitarios y **finitos**, de la productividad del trabajo, del producto y del empleo:

$$\left(\frac{\Delta P}{P}\right) = \left(1 + \frac{\Delta L}{L}\right)^{-1}\left(\frac{\Delta Y}{Y} - \frac{\Delta L}{L}\right) = \frac{\left(\frac{\Delta Y}{Y}\right) - \left(\frac{\Delta L}{L}\right)}{1 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)}, \quad (4)$$

Podemos apreciar una diferencia entre las fórmulas *infinitesimal* (3) y *finita* (4), concretada en el factor: $\left(1+\frac{\Delta L}{L}\right)^{-1}$. La magnitud del error relativo, cometido al utilizar la fórmula (3) con variaciones finitas, cuyo valor absoluto se puede determinar fácilmente:

$$\left|\frac{\left(\frac{\dot{P}}{P}\right)-\left(\frac{\Delta P}{P}\right)}{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)}\right| = \left|\frac{\left(\frac{\Delta Y}{Y}-\frac{\Delta L}{L}\right)-\left(\frac{\frac{\Delta Y}{Y}-\frac{\Delta L}{L}}{1+\frac{\Delta L}{L}}\right)}{\left(\frac{\frac{\Delta Y}{Y}-\frac{\Delta L}{L}}{1+\frac{\Delta L}{L}}\right)}\right| = \left|\left(1+\frac{\Delta L}{L}\right)-1\right| = \left|\frac{\Delta L}{L}\right|,$$

coincide con el incremento unitario y finito del empleo en los mismos términos. Es obvio que las consideraciones anteriores se pueden extender a cualquier relación, de tipo cociente, entre variables económicas. Por ejemplo en el capítulo cuarto, al considerar el estudio de la economía estadounidense realizado por Solow, a partir del modelo de progreso técnico derivado de la función de producción neoclásica, se utilizan la relaciones: $R=\frac{K}{L}$ y $\frac{\dot{R}}{R}=\frac{\dot{K}}{K}-\frac{\dot{L}}{L}$, para el coeficiente capital-trabajo y su tasa de variación. A las reflexiones sobre dicho estudio ya hechas, habría que añadir la vinculada a la utilización de una relación *infinitesimal* con datos de variación interanuales (claramente finitos) . El *error* de tal aproximación, sería otro factor a tener en cuenta con relación a las conclusiones obtenidas en tal estudio, aunque, en este caso, con un papel secundario respecto a las consideraciones ya realizadas y que atañen a la **forma** de la función y el tipo de estudio estadístico que se efectuó.

Otro tipo de relación, entre variables económicas, que consideramos importante por su frecuente aparición en problemas de distinta naturaleza, y que conduce a expresiones diferentes para las tasas de crecimiento unitarias de dichas variables, según se siga el procedimiento *diferencial* o *finito*, es el que viene dado por la fórmula siguiente: $Z = \frac{Y}{LH}$; donde Z podría representar la productividad media por hora de trabajo, en un determinado sector económico, cuya producción vendría indicada por Y, siendo L y H el número de ocupados en dicho sector y la jornada laboral media, respectivamente.

Las expresiones que relacionan las tasas de incremento de las variables implicadas, se pueden obtener de modo similar al caso anteriormente considerado:

$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{H}}{H}$, (para variaciones infinitesimales)

$\frac{\Delta Z}{Z} = \left[1 + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta H}{H} + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)\left(\frac{\Delta H}{H}\right)\right]^{-1} \left(\frac{\Delta Y}{Y} - \frac{\Delta H}{H}\right) - \left(1 + \frac{\Delta L}{L}\right)^{-1} \left(\frac{\Delta L}{L}\right)$, (incrementos finitos).

Una conclusión clara se desprende del contenido de éste apéndice. El uso de relaciones obtenidas para variaciones infinitesimales con incrementos finitos (generalmente interanuales), no parece conceptualmente correcto ni cuantitativamente conduce a resultados del todo precisos, aunque sí aproximados. Estaríamos, de nuevo, en presencia de una aplicación poco rigurosa de relaciones *infinitesimales*, ahora con un carácter más práctico que teórico.

BIBLIOGRAFIA

Abadie, J. (1967): Non Linear programming. North-Holland, Amsterdan.

Ahijado, M. (1985): Economía de mercado y equilibrio general. Pirámide, Madrid.

Alcouffe, A. (1985): Les manuscrits mathématiques de Marx. Ed. Economica, Paris.

Aleksandrov A. D., Kolmogorov A.N., Laurentiev M.A. y otros (1956):Mathematics: Its Content, Methods, and Meaning (versión en lengua inglesa del M.I.T.). Edición española 1973, La matemática: su contenido, métodos y significado. Alianza Universidad, Madrid.

Allen, R. G. D. (1938): Mathematical Analysis for Economists, Macmillan. Edición española 1946, Análisis matemático para economistas. Aguilar, Madrid.

Apostol, T.M.(1957): Mathematical Analysis, Addison-Wesley. Edición española 1960, Análisis matemático. Reverté, Barcelona.

Apéry, R. y otros (1982) : Penser les mathémathiques, Editions du Seuil. Edición española 1988 (2ª ed.), Pensar la matemática. Tusquets, Barcelona.

Arrow, K. J., Block, H. D. y Hurwicz, L. (1959): On the Stability of the Competitive Equilibrium II, Econometrica, vol. 27, pp. 82-109.

Arrow, K. J., Intriligator M. (1981): Handbook of Mathematical Economics, North-Holland. Amsterdan.

Balasko, I.. (1978) : Economic equilibrium and catastrophe theory: An introduction, Econometrica Vol. 46.

Baumol, W. J. y Quandt, R. E.(1964): Rules of Thumb and Optimally Imperfect Decisions, Am. Econ. Rev. 54.

Bazaraa, M., Shetty, C. (1976): Mathematical Programming. Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems. Springer-Verlag.

Beavis, B., Dobbs I. (1990): Optimization and stability theory for economic analysis. Cambridge University Press.

Blaug, M. (1980): The Methodology of Economics. The Press Syndicate of the University of Cambridge. Edición española 1985, La metodología de la economía. Alianza Editorial, Madrid.

Blaug, M. (1985): Economic Theory in retrospect, Fourth Edition. Cambridge University Press.

Bru Villaseca, L. (1961): Mecánica física. Librería internacional de Romo, Madrid.

Bunge, M. (1982): Economía y filosofía. Tecnos, Madrid.

Champernowne, D. G. (1953): The Production Function and the Theory of Capital: A comment, Review of Economic Studies 21, págs. 118-130.

Clark, J.B. (1899): The Distribution of Wealth: A Theory of Wages, Interest and Profits. Augustus M. Kelley, Nueva York, 1965.

Cournot, A. (1838): Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses. Edición española 1969, Investigaciones acerca de los principios matemáticos de la teoría de la riqueza. Alianza Editorial, Madrid.

Dantzig, G. B. (1949) : Programming of Interdipendent Activities : mathematical model; en Econometrica Julio-Octubre 1949.

Debreu, G. (1959): Theory of Value. An axiomatic analysis of economic Equilibrium, John Wiley & Sons Inc., New York.

Debreu, G. (1974): Excess Demand Functions, Journal of Mathematical Economics, nº 1, pp. 15-23.

Eltis, W. A. (1973): Growth and Distribution. Macmillan, Londres.

Feldman, B. (2000): The Nobel Prize. A History of Genius, Controversy and Prestige. Arcade Publishing, New York.

Ferguson C. E. (1969): The Neoclassical Theory of Production and Distribution. Cambridge University Press, Cambridge. Edición en castellano 1985, Teoría neoclásica de la producción y la distribución. Editorial Trillas, México.

Feynman, R. (1980): La nature de la physique. Seuil, Paris.

Fisher, I. (1892) : Mathematical Investigations into the Theory of Value and Prices. Yale University Press, New Haven.

Fisher, F.M. (1971): Aggregate Production Functions and The Explanation of Wages: A simulation Experiment. The Review of Economics and Statistics, vol. LIII, noviembre 1971, pp. 305-325.

Friedman, M. (1953) : The Methodology of Positive Economics, en Essays in Positive Economics. University of Chicago Press, Chicago. Edición española 1967, Ensayos sobre economía positiva. Editorial Gredos.

Galileo Galilei (1623): Il Saggiatore. Edición en castellano, El ensayador. Editorial Aguilar, Madrid.

Gandolfo, G. (1971) : Mathematical Methods and Models in Economic Dinamics, North-Holland. Edición española 1976, Métodos y modelos matemáticos de la dinámica económica. Tecnos, Madrid.

Garegnani, P. (1966): Switching of Techniques, Quarterly Journal of Economics, LXXX, págs. 555-567.

Garegnani, P. (1970): Heterogeneous Capital, the Production Function and the Theory of Distribution, Review of Economic Studies 37, págs. 407-436.

Georgescu-Roegen, N. (1971): The Entropy Law and the Economic Process, Harvard University Press.

Gibbs, J.W. (1875-77): On the Equilibrium of Heterogeneous Substances, Connecticut Academy Transactions, 3 pp. 108-248 y 343-524.

Harcourt, G. C. (1972): Some Cambridge Controversies in the Theory of Capital. Cambridge University Press.

Heisenberg, W. (1955): Das Naturbild der heutigen Physik, Rowohlt Verlag, Hamburgo. Edición en castellano 1967, La imagen de la naturaleza en la física actual. Ed. Seix Barral, Barcelona.

Hicks, J. R. (1939): Value and Capital, Oxford University Press, London. 2ªed.1946. Edición en castellano 1954, Valor y capital. Fondo de Cultura Económica, Méjico.

Hutchison, T.W.(1938): The significance and Basics Postulates of Economic Theory. Kelley, New York.

Intriligator, M. (1973): Optimización matemática y Teoría económica. Prentice Hall Internacional, Bogotá.

Jaffe, W. (1977) : The Walras-Poincaré Correspondence on the Cardinal Measurability of Utility. Canadian Journal of Economics, vol. 110, pág. 300-307.

Jevons, W. S. (1871) : The Theory of Political Economy. Edición en castellano, Teoría de la Economía Política. Fondo de Cultura Económica, México.

Jordan, E. C. y Balmain, K. G.(1968): Electromagnetic Waves and Radiating Systems, Prentice-Hall. Edición española 1973, Ondas electromagnéticas y sistemas radiantes. Paraninfo, Madrid.

Kakutani, S. (1941): A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem. Duke Math., nº 8, pp. 457-459. Reimpreso en Newman, 1968, Vol. 1, pp. 33-35.

Kaldor N. (1955-56): Alternative Theories of Distribution, Review of Economic Studies, Volumen XXIII, 2, núm. 61.

Kalman, R. E. y Bertram, J. E. (1960): Control System Análisis and Design Via The "Second Method" of Lyapunov, I y II, J. of Basic Eng., págs 371-400.

Kantorovich, L.V.(1959): Asignación óptima de los recursos económicos. Edición en castellano 1968. Editorial Ariel, Barcelona.

Katouzian, H. (1980) : Ideology and Method in Economics, Macmillan. Edición española 1982, Ideologia y método en economía. H. Blume, Madrid.

Keynes, J.M. (1936): The General Theory of Employment, Interest and Money. Edición en castellano 1943, Teoría general de la ocupación, el interés y el dinero. Fondo de Cultura Económica, México.

Kline, M. (1972): Mathematical throught from ancient to modern times. Oxford University Press. Edición en castellano1992, El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros dias. Alianza Editorial, Madrid.

Kosko B. Isaka S.(1993): Lógica borrosa. Investigación y Ciencia, nº 206 págs 60-65.

Kuhn, T. S.(1962): The Structure of Scientific Revolutions, University of Chicago Press. Edición española 1971, La estructura de las revoluciones cientificas. F.C.E., Madrid.

Landau L., Ajiezer A., Lifshitz E. (1973): Mecánica y Física molecular. Editorial MIR, Moscú.

Leontieff, W. (1941): The Structure of American Economy. Edición española 1958, La estructura de la economía americana. Bosch, Barcelona.

Leontieff, W. (1971): Theoretical Assumptions and Nonobserved Facts, en American Economic Review, marzo 1971, págs. 1-7.

Lévy-Leblond, J.-M.(1982) : Physique et mathématique, en Penser les mathémathiques. Seuil, Paris.

Lyapunov, A. M. (1893): Traducción francesa 1907, Probléme general de la stabilité du mouvement. Annales de la Faculté de Sciencies de Toulouse.

Machlup, F.(1955): The Problem of Verification in Economics, The Southern Economic Journal, Julio 1955.

Mantel, R.R.(1974): On the Characterization of Aggregate Excess Demand, Journal of Economic Theory, nº 7, pp. 348-353.

Mantel, R. R.(1985): El Papel de la Matemática en la Economía Contemporánea, Serie Documentos de Trabajo, nº 50, Centro de Estudios Macroeconómicos de Argentina.

Marshall, A.(1890): Principles of Economics. Edición española 1963, Principios de Economía. Ed. Aguilar, Madrid.

Mas-Colell, A. (1985): The Theory of General Economic Equilibrium: A Differentiable Approach. Cambridge University Press, Cambridge.

Mas-Colell, A., Whiston, M.D. y Green, J.R. (1995): Microeconomic Theory. Oxford University Press, New York.

Morishima, M.(1964): Equilibrium, Stability and Growth. Clarendon Press, Oxford.

Morishima, M.(1966): Refutation of the Nonswitching Theorem, Quarterly Journal of Economics, LXXX págs. 520-525.

Myrdal, G. (1964): Teoría económica y regiones subdesarrolladas. Fondo de Cultura Económica, México.

Mill, J.S. (1843) : A System of Logic. Ed. española 1853, Sistema de la Lógica. Tipografía de Rivadeneyra, Madrid.

Mill, J. S. (1848): Principles of Political Economy with Some of Their Applications to Social Philosophy. Edición en castellano 1951, Principios de economía política con algunas de sus aplicaciones a la filosofía social. Fondo de Cultura Económica, México.

Mirowski, P. (1989): More heat than light, Economics as social physics: Physics as nature’s economics. Cambridge University Press, New York.

Nash, J. (1951): Non-Cooperative games, Annals of Mathematics, 54. pp. 286-295.

Negishi, T. (1960): Welfare Economics and Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. Metroeconomica 12, 1960.

Newton, I. S. (1686): Philosophiae Naturalis, Principia Matemática. Edición en inglés: Principia Matemática, University of California Press, 1934. Principios matemáticos de filosofia natural, traducción al castellano de J.D. Garcia Bacca. Fundación J.G.D.B. Caracas.

Naredo, J. M.(1987): La economía en evolución. Historia y perpectivas de las categorías básicas del pensamiento económico. Siglo XXI de España, Madrid.

Pareto, V. (1896-1897): Cours d’economie politique, Lausanne.

Pasinetti, L. L.(1981): Structural Change and Economic Growth. Edición española 1985. Ediciones Pirámide, Madrid.

Phelps Brown, E.H. (1957): The Meaning of Fitted Cobb-Douglas Functions. Quarterly Journal of Economics, vol. 71, noviembre 1957, pp. 546-560.

Poincaré, H. (1910): La valeur de la sciencie, Flammarion. Edición española 1946, El valor de la ciencia. Espasa-Calpe, Madrid.

Poincaré, H. (1952): Sciencie and Hipótesis. Dover, New York.

Puig Adam, P. (1950): Curso de ecuaciones diferenciales aplicado a la física y técnica. Nuevas Gráficas, Madrid.

Quirk, J., y Saposnik, R. (1968): Introduction to General Equilibrium and Welfare Economics, McGraw-Hill. Edición española 1972, Introducción a la teoría del equilibrio general y a la economía del bienestar. Bosch, Barcelona.

Reitz, J.R., y Milford, F. J. (1959): Foundations of Electromagnetic Theory, Addison-Wesley. Edición en castellano 1967, Fundamentos de la teoría electromagnética. UTEHA, Méjico

Robbins, L. (1932): An Essay on the Nature and Significance of Economic Sciencie, Macmillan.

Robinson, J. (1953-54): The Productions Function and the Theory of Capital. Review of Economic Studies, 1953-54, págs. 81 y ss.

Robinson, J. (1956): The Accumulation of Capital. Macmillan, Londres.

Robinson, J. (1965): Collected Economic Papers, Basil Blackwell, Oxford. Edición española 1984, Ensayos críticos (selección e introducción de A. Argandoña). Ediciones Orbis, Barcelona.

Rojo, L.A. (1970): El método empírico y el conocimiento económico, en Ensayos de Filosofia de la Ciencia. Tecnos, Madrid.

Sampedro, J.L. (1959): Realidad económica y análisis estructural. Editorial Aguilar, Madrid.

Sánchez Ron, J.M. (1996): Diccionario de la Ciencia. Planeta, Barcelona.

Samuelson, P.A. (1947): The Foundation of Economic Analysis, Harvard University Press, Cambridge, Mass. Traducción al castellano 1957, Fundamentos del análisis económico. El Ateneo, Buenos Aires.

Samuelson, P.A. (1962): Parable and Realism in Capital Theory: The Surrogate Production Function, Review of Economic Studies 29, págs. 193-206.

Samuelson, P.A. (1963): Comment on Ernest Nagel´s Assumptions in Economic Theory, American Economic Review, Vol. 53, nº 2, págs. 231-236.

Samuelson, P. A. (1966) : A summing up, Quarterly Journal of Economics, LXXX, págs. 568-583.

Saunders, P. T.(1980): An Introduction to Catastrophe Theory, Cambridge University Press. Edición española 1983, Una introducción a la teoría de las catástrofes. Siglo veintiuno de España, Madrid.

Say, J. B.(1803): Traité d'economie politique. Edición española 1839, Tratado de Economía Política. Imp. y Lib. de V. Oliva, Gerona.

Schumpeter J. A. (1954) : History of Economic Analysis, Oxford University Press. Edición española 1971, Historia del análisis económico. Ariel, Barcelona.

Segura J. (1969) : Función de producción, macrodistribución y desarrollo. Editorial Tecnos, Madrid.

Segura, J. (1994): Análisis microeconómico (3ª ed.). Alianza Universidad, Madrid.

Shaikh, A. (1974): Laws of Production and Laws of Algebra: The Humbug Production Function. The Review of Economic and Statistics, vol.LVI, Febrero de 1974, pp. 115-120.

Shaikh, A. (1990): Valor, acumulación y crisis. Ensayos de economía política. Tercer mundo editores, Bogotá.

Solow, R. (1956): A contribution to the theory of economics growth. Quarterly Journal of Economics, vol.70, pp. 65-94.

Solow, R. (1957): Thechnical Change and the Aggregate Productions Function. Review of Economics and Statistics, vol. 39, Agosto de 1957, pp. 312-320.

Solow, R. (1967): Crítica a “ Capital and Growth” (Hicks, J.R.). Información Comercial Española, núm. 412, pág. 91.

Sonnenschein, H (1972): Market Excess Demand Functions. Econométrica, vol. 40, pp. 549-563.

Sonnenschein, H.(1973): Do Walras’ Identity and Continuity Characterize the Class of Community Excess Demand Functions ? . Journal of Economic Theory, nº 6, pp. 345-354.

Spiegel, H.W. (1973): El desarrollo del Pensamiento Económico. Ediciones Omega, Barcelona.

Sraffa, P. (1960): Production of Commodities by Means of Commodities, Cambridge University Press, Cambridge.

Stewart, I. (1989) : The new Mathematics of Chaos, Penguin Books. Edición española 1991, La nueva matemática del caos. Crítica, Barcelona.

Stigler, G. (1965) : Essays in the history of economics. University of Chicago Press.

Thom, R. (1972): Stabilité structurelle et morphogènese. Edisciencie, Paris.

Thom, R. (1974) : Modèles mathématiques de la morphogenèse. Union générale d'editions, Paris.

Valle Baeza, A. (1991): Productividad: Las visiones neoclásica y marxista. Investigación Económica, núm. 198, pp. 45-69.

Von Neumann, J. y Morgenstern, O. (1944) : Theory of Games and Economics Behavior, Princenton Univ. Press. Princenton N.J.

Wald, A. (1936): Über einige Gleichungssysteme der mathematische okonomie. Traducción inglesa 1951, On some systems of equations in mathematical economics. Econometrica, Octubre 1951.

Walras, L. (1874-1877) : Elements d'economie politique pure, Lausanne. Edición española, Elementos de economía política pura. Alianza Editorial, Madrid.

Walsh, V., y Gram, H. (1980): The Classical and Neoclassical Theories of General Equilibrium. Historical and Matematical Structure (prólogo de J. Robinson), Oxford University Press.

Weintraub, E.R. (1993): General Equilibrium Analysis. University of Michigan Press.

Wicksteed, P. H. (1894): Essay on the Coordination of the Laws of Distribution. Reedición: The London School of Economics 1932 , Londres.

Zeeman, E. C. (1974) : On the Unstable Behaviour of Stock Echanges, Journal of Mathematical Economics, Vol. 1, págs. 39-49.