

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**

**Departamento de Óptica**



**FUNDAMENTOS GEOMÉTRICOS DE LA ÓPTICA DE  
MULTICAPAS**

**MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR**

**PRESENTADA POR**

Teresa Yonte Sanchidrián

Bajo la dirección de los doctores

Luis Lorenzo Sánchez Soto

Juan José Monzón Serrano

**Madrid, 2005**

**ISBN: 84-669-2791-3**



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE  
Departamento de Óptica

# Fundamentos geométricos de la óptica de multicapas

Tesis Doctoral

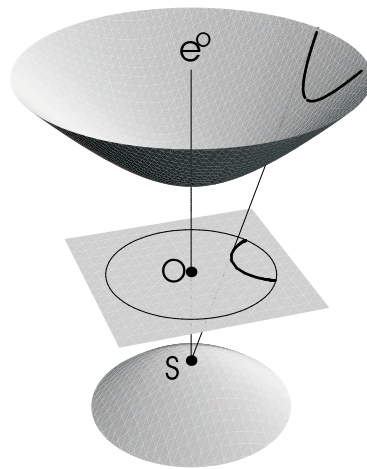
Teresa Yonte Sanchidrián

Madrid, diciembre 2004



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE  
Departamento de Óptica

# Fundamentos geométricos de la óptica de multicapas



Tesis Doctoral

Teresa Yonte Sanchidrián

Madrid, diciembre 2004

## Agradecimientos

Esta memoria ha sido desarrollada en el Departamento de Óptica de la Facultad de Ciencias Físicas de la Universidad Complutense de Madrid, bajo la dirección de los profesores Luis Lorenzo Sánchez Soto y Juan José Monzón Serrano.

Desde aquí, quiero expresar mi gratitud y reconocimiento a los profesores Sánchez Soto y Monzón Serrano, tanto por la elección del problema objeto de esta tesis, como por su dedicación a la dirección de este trabajo durante todas sus etapas. Ciertamente, sus ideas y consejos para la redacción de esta memoria han sido fundamentales en la determinación de su forma final. Esta tesis no hubiera sido posible sin su apoyo y contribuciones.

También fueron esenciales las aportaciones del profesor José Francisco Cariñena para la preparación de varios de los artículos publicados. Asimismo deseo agradecer al profesor Angel Felipe su desarrollo del algoritmo de optimización de los espejos omnidireccionales. Por último, debo mencionar al profesor Jesús Zoido por su generosa ayuda en la elaboración de las figuras de los hiperboloides.



# Índice

Agradecimientos .....	v
Índice .....	vii
<b>Introducción</b> .....	ix
<b>1 La matriz de transferencia</b> .....	1
1.1 Ondas electromagnéticas planas .....	1
1.2 Reflexión y refracción en una frontera plana .....	3
1.2.1 Coeficientes de Fresnel y relaciones de Stokes .....	4
1.3 Expresión matricial de las condiciones de contorno: matriz de frontera .....	7
1.4 Matriz de propagación en una lámina .....	12
1.5 Reflexión y transmisión en una multicapa óptica.....	13
1.6 Matriz de transferencia de una multicapa transparente .....	17
<b>2 Formulación relativista de la óptica de multicapas</b> .....	21
2.1 El grupo de Lorentz en (3+1) dimensiones .....	21
2.2 Transformación de Lorentz asociada a una multicapa.....	23
2.3 Transformación de Lorentz asociada a una multicapa transparente ...	26
<b>3 Interpretación geométrica de la acción de una multicapa transparente</b> .....	31
3.1 Función de transferencia en el círculo unidad .....	31
3.2 Puntos fijos y traza: clasificación y órbitas de las matrices .....	33
3.3 La descomposición de Iwasawa .....	39
3.4 Ejemplos y aplicaciones .....	44
3.4.1 Algunos sistemas sencillos .....	44
3.4.2 Estabilidad de la condición de reflectancia nula.....	46
<b>4 Sistemas periódicos</b> .....	49
4.1 Tres tipos canónicos de reflectancia .....	50
4.2 Reflectancia de estructuras periódicas .....	52

4.3 Optimización de espejos dieléctricos omnidireccionales .....	54
<b>5 Sistemas cuasi-periódicos .....</b>	<b>63</b>
5.1 Secuencias de Fibonacci .....	64
5.2 Una forma alternativa para la matriz de transferencia .....	66
5.3 Fórmulas de recurrencia para la traza y la antitrazas .....	68
<b>Conclusiones .....</b>	<b>71</b>
<b>Referencias .....</b>	<b>73</b>

## Introducción

Se puede situar el inicio de la óptica de láminas delgadas en el descubrimiento, realizado de modo independiente en el siglo XVII por Robert Boyle y Robert Hooke, del fenómeno que hoy denominamos “anillos de Newton”. La formación de dichos anillos está originada por las interferencias que se producen en una lámina de espesor variable. Sin embargo, en aquella época la teoría ondulatoria de la luz no estaba suficientemente asentada y la adecuada explicación de ésta y otras observaciones realizadas en la misma época por Sir Isaac Newton se retrasó durante unos 150 años.

Hubo que esperar hasta 1801 para que, en una Bakerian Lecture en la Royal Society, Thomas Young enunciara el principio de interferencia de la luz y diera una primera explicación satisfactoria del fenómeno.

La teoría de Young estuvo lejos de tener una aceptación universal. El reconocimiento se produjo lentamente y dependió mucho del trabajo de Augustin J. Fresnel, que, de forma independiente, también llegó a la teoría ondulatoria de la luz. Fresnel combinó el principio de interferencia de Young y las ideas sobre la propagación de la luz de Huygens en una elegante teoría de la difracción, dando un sólido fundamento a la teoría ondulatoria de la luz.

En el estudio del comportamiento de la luz en láminas delgadas son fundamentales las leyes de Fresnel que gobiernan la amplitud y la fase de la luz reflejada y transmitida en una frontera entre dos medios. Fue Fresnel quien sumó por primera vez una serie infinita de rayos para determinar la transmitancia de un conjunto de láminas de vidrio superpuestas. Simeon D. Poisson, en correspondencia con Fresnel, incluyó los efectos de la interferencia en dicha suma. Así se llegó al importante resultado de que una lámina de media onda no modifica la reflectancia en una frontera y una lámina de cuarto de onda de índice de refracción  $(n_0 n_s)^{1/2}$  reduce a cero la reflectancia en la frontera entre dos medios de índices  $n_0$  y  $n_s$ .

En 1873 se publicó el fundamental trabajo de James Clerk Maxwell *A Treatise on Electricity and Magnetism*. En sus célebres ecuaciones se tiene la formulación de la teoría electromagnética de la luz. La unificación teórica de los fenómenos eléctricos con los magnéticos y con la óptica se puede considerar, sin temor a exagerar, un hito en la historia del pensamiento. Por otra parte, se puede asegurar que las aplicaciones



prácticas de la teoría, que han ido teniendo lugar a lo largo de los años, han cambiado la vida diaria de la humanidad.

Durante el siglo XIX fue notable el progreso de la interferometría, siendo significativo el desarrollo del interferómetro de Fabry-Perot, de grandísima importancia para la espectroscopía. La construcción y mejora de dicho dispositivo provocó los primeros estudios de sistemas ópticos que involucraban láminas delgadas.

Ya en el siglo XX, en torno a la década de 1930, el desarrollo de este tipo de filtros interferenciales experimenta un gran avance, tomándose este periodo como el principio de los modernos recubrimientos ópticos con láminas delgadas. El factor más importante en la rápida expansión de estos recubrimientos fue el éxito en el proceso de fabricación, una vez solventados los problemas en las técnicas de evaporación al vacío.

Es incuestionable, por omnipresente, la importancia de la tecnología actual de las multicapas ópticas. Los recubrimientos interferenciales se utilizan en prácticamente todos los sistemas ópticos que se diseñan: en sistemas antirreflejantes para determinadas longitudes de onda o, por el contrario, en el diseño de espejos “perfectos”. También en la obtención de sistemas que absorben toda la radiación incidente sobre ellos y, en concreto, en el diseño de estructuras ópticas para detectores de infrarrojo, bolómetros, etc.

Como hoy es bien conocido, para hacer una evaluación precisa del comportamiento de la luz en estos filtros, se deben tener en cuenta los efectos de las reflexiones múltiples y las propagaciones en cada una de las láminas que los componen. Esto puede conllevar cálculos extremadamente complejos si aumenta el número de láminas que componen el sistema. No es de extrañar, por tanto, que el diseño de multicapas en el visible y fuera de él haya experimentado un desarrollo extraordinario a partir de los procedimientos de cálculo numérico que realizan los ordenadores.

Intimamente relacionado con lo anterior está la introducción de métodos matriciales. Fue Florin Abelès quien propuso, por primera vez, en su tesis doctoral, defendida en 1950, la descripción de una multicapa como un elegante producto de matrices  $2 \times 2$ , cada una de las cuales representa a una lámina.

En otro orden de cosas, y muy alejado del tema que venimos tratando, la teoría de la relatividad de Albert Einstein ha llegado a convertirse, desde su publicación en 1905, en uno de los lugares comunes de la física, tan firmemente asentada como las leyes de Newton de la mecánica clásica, las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo o la ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica.

Los orígenes de la teoría de la relatividad especial yacen en el electromagnetismo. De hecho, puede decirse que el desarrollo de las ecuaciones de Maxwell forzó la aparición de la relatividad especial. El hecho de que la forma de la ecuación de ondas no es invariante frente a transformaciones galileanas y las complicaciones sucesivas a que fue dando lugar la hipótesis del éter, junto a la demostración (por Lorentz y Poincaré) de que las ecuaciones de Maxwell son invariantes frente a lo que hoy cono-

ceamos como transformaciones de Lorentz, condujeron a Einstein a formular su teoría, basada exclusivamente en dos postulados. El postulado de relatividad que asegura que las leyes de la física y los resultados de los experimentos tienen que ser independientes del sistema de referencia inercial utilizado y el postulado de la constancia de la velocidad de la luz, que es independiente del movimiento de la fuente.

El punto de partida del trabajo que se expone en esta memoria reside precisamente en la *analogía formal* que se puede establecer entre el grupo de transformaciones de Lorentz y el de matrices de transferencia que describen las propiedades de las multicapas ópticas.

La memoria está estructurada como se detalla a continuación. Por razones de completitud y para introducir la notación empleada, en el primer capítulo se incluye una recapitulación del formalismo de la matriz de transferencia para un sistema lineal con dos entradas y dos salidas. Este formalismo es el que se utiliza a lo largo de toda la memoria para describir la acción de una multicapa sobre una onda electromagnética plana. En concreto, se demuestra que la matriz de transferencia para una multicapa transparente pertenece al grupo de Lie  $SU(1,1)$ .

En el capítulo 2 se estudia con detalle el homomorfismo entre el citado grupo  $SU(1,1)$  y el de las transformaciones de Lorentz de la relatividad especial en dos dimensiones espaciales, llamado habitualmente  $SO(2,1)$ .

En el capítulo 3 se incluye la interpretación de la acción de una multicapa en el marco de la geometría hiperbólica. Por proyección estereográfica del hiperboloide unidad de dos hojas asociado a  $SO(2,1)$ , la acción de una matriz de  $SU(1,1)$  es interpretada como una transformación bilineal entre puntos del círculo unidad.

Por otra parte, el isomorfismo con el grupo  $SL(2, \mathbb{R})$  –que es el grupo natural de la óptica geométrica de rayos– permite trasladar la estructura geométrica definida en el círculo unidad al semiplano complejo superior. El valor de la traza de la matriz de transferencia nos permitirá clasificar el grupo  $SU(1,1)$  en tres tipos diferentes de matrices. Cada uno de ellos presenta órbitas bien definidas en el círculo unidad. Se establece, asimismo, una correspondencia con las órbitas en el hiperboloide unidad y también en el semiplano complejo y se realiza una interpretación física de la acción de los tres tipos de matrices en cada uno de los grupos mencionados. Para terminar el capítulo, se estudian algunos ejemplos concretos de multicapas ópticas y se establece un criterio de la condición de estabilidad de reflectancia nula para sistemas simétricos.

En las últimas décadas se ha dedicado un trabajo ingente al estudio de los sistemas periódicos, principalmente en la física del estado sólido. El origen de estas investigaciones se centra en el comportamiento de los electrones en cristales perfectos. Es evidente la importancia tanto teórica como aplicada de este problema.

El formalismo descrito en los capítulos anteriores proporciona una nueva y poderosa técnica para el estudio de sistemas periódicos. Así, en el capítulo 4, se caracterizan los tres tipos básicos de la reflectancia de estos sistemas en relación con el valor de la traza de la matriz de transferencia del periodo básico. Se obtienen expre-

siones exactas de la reflectancia en función del número de periodos y se establece un criterio novedoso para su optimización en espejos “perfectos” para todos los ángulos de incidencia, que han sido llamados reflectores omnidireccionales.

En el capítulo 5 se presenta una forma alternativa de la matriz de transferencia para determinar la reflectancia en sistemas cuasi-periódicos, tipo Fibonacci, en función de la traza y la antitrazo de dicha matriz. Estos sistemas formados por secuencias de Fibonacci han recibido mucha atención en la literatura en los últimos años. Como continuación del trabajo realizado se propone un proyecto para el futuro: la comparación entre la eficiencia, en orden a máxima reflectancia omnidireccional, entre sistemas periódicos o sistemas cuasi-periódicos con el mismo, o parecido, número de capas.

Por último, se incluyen las principales conclusiones de los resultados originales obtenidos a lo largo de este trabajo.

Finalmente, aunque el estudio realizado nos ha permitido formular los dos criterios mencionados (estabilidad de la condición de reflectancia nula y, por otra parte, reflectancia omnidireccional máxima) que pueden tener importancia práctica, nos parece importante señalar aquí que, por encima de estos resultados, el formalismo que se presenta es muy general y básico y, en nuestra opinión, constituye un elegante marco para analizar las prestaciones de las multicapas ópticas relacionándolo con otros campos de la física, en particular con la teoría especial de la relatividad y la óptica geométrica paraxial, que nos parece algo más que una simple curiosidad.

# 1 La matriz de transferencia

La importancia de la matriz de transferencia es incuestionable en todos los campos de la física y de la ingeniería. Las referencias que se pueden encontrar sobre este asunto en la literatura son abundantísimas.

Desde el trabajo pionero de Abelès, el empleo de matrices  $2 \times 2$  es lugar común en el estudio de la reflexión y transmisión de la luz por estructuras estratificadas. La base de este tratamiento es el hecho de que las ecuaciones que gobiernan la propagación de la luz en medios homogéneos e isotropos son lineales.

En este capítulo resumimos el formalismo de la matriz de transferencia que representa las propiedades de cualquier estructura estratificada. Como veremos, si se conocen a priori los elementos que forman la estructura, la matriz de transferencia puede obtenerse como un producto ordenado de las matrices que describen los efectos individuales de las fronteras y las de propagación dentro de las láminas que componen la multicapa.

Parece importante mencionar que nuestro formalismo no es idéntico al de Abelès sino que nos basaremos en el de Hyfield y White que se recoge en el libro de R. M. A. Azzam y N. M. Bashara *Ellipsometry and Polarized Light*, incluido en las referencias.

Demostraremos que cuando los medios ambiente y sustrato que rodean a una multicapa son idénticos, su matriz de transferencia tiene determinante unidad. Para el caso más específico de las multicapas transparentes la matriz de transferencia es un elemento del grupo  $SU(1,1)$ . Por último realizamos unas observaciones comparando la matriz de transferencia con la de *scattering*, de tan amplia utilización en mecánica cuántica.

## 1.1 Ondas electromagnéticas planas

El campo electromagnético más simple que se puede considerar es una onda plana. En este caso la dependencia espacial y temporal del vector campo eléctrico viene dada por una función en la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (1.1)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular y  $\mathbf{k}$ , vector de ondas, da la dirección y sentido de propagación. Si la onda es armónica, la dependencia temporal viene dada por la función  $\cos \omega t$  y, usando la notación exponencial compleja habitual, el vector campo puede escribirse

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}. \quad (1.2)$$

Fijado  $\mathbf{k}$ , se define una base formada por tres vectores reales  $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_y$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_z = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ , tales que

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_j = \delta_{ij}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_i \times \boldsymbol{\varepsilon}_j = \boldsymbol{\varepsilon}_l, \quad (1.3)$$

donde los subíndices recorren los valores  $x, y, z$ . Estos vectores forman, por tanto, un triedro ortonormal de orientación positiva. Si se supone que la onda se propaga en la dirección positiva del eje  $Z$  de un sistema de coordenadas cartesiano, el vector campo eléctrico puede expresarse como

$$\mathbf{E}(z, t) = [\mathcal{E}_x e^{i(kz + \delta_x)} \boldsymbol{\varepsilon}_x + \mathcal{E}_y e^{i(kz + \delta_y)} \boldsymbol{\varepsilon}_y] e^{-i\omega t}, \quad (1.4)$$

donde  $\mathcal{E}_{x,y}$  y  $\delta_{x,y}$  representan, respectivamente, la amplitud y la fase de la vibración a lo largo de cada uno de los ejes coordenados. El hecho de que haya únicamente dos amplitudes independientes para cada valor de  $\mathbf{k}$  corresponde a la bien conocida propiedad de que la luz sólo tiene dos polarizaciones independientes.

El campo magnético de la onda puede escribirse, en analogía con (1.2), como

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad (1.5)$$

y la condición de transversalidad en las ondas planas se traduce en que

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mu\omega\mathbf{H}. \quad (1.6)$$

Puesto que las componentes de una onda monocromática vibran de forma sinusoidal con el tiempo, a la misma frecuencia en todos los puntos del espacio, puede suprimirse esta información temporal y, una vez fijadas como  $x$  e  $y$  las direcciones de las componentes linealmente polarizadas de la onda, se la puede representar por un vector columna de la forma

$$\mathbf{E}(z) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x e^{i\delta_x} \\ \mathcal{E}_y e^{i\delta_y} \end{pmatrix} e^{ikz}. \quad (1.7)$$

Si se considera el campo en un plano fijo transversal al vector de ondas, por ejemplo el plano  $z = 0$ , se tiene que

$$\mathbf{E}(0) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x e^{i\delta_x} \\ \mathcal{E}_y e^{i\delta_y} \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

El vector  $\mathbf{E}(0)$  contiene toda la información acerca de la amplitud y la fase de la onda plana monocromática. La dependencia con  $z$  puede escribirse como

$$\mathbf{E}(z) = e^{ikz} \mathbf{E}(0). \quad (1.9)$$

A partir de (1.9), el campo completo (1.4) se obtiene como

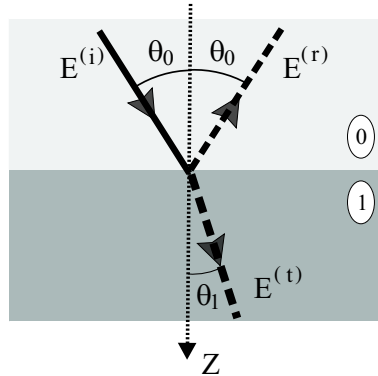
$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}(0) e^{-i(\omega t - kz)}. \quad (1.10)$$

## 1.2 Reflexión y refracción en una frontera plana

Consideremos la reflexión y la refracción de una onda plana armónica cuyo vector de ondas forma un ángulo  $\theta_0$  con la normal a la frontera plana entre dos medios semi-infinitos, lineales, homogéneos e isótropos (lo que será supuesto durante toda esta memoria), que llamaremos medios 0 y 1, con índices de refracción, en general complejos,  $N_0$  y  $N_1$ , respectivamente. El índice de refracción complejo puede expresarse en la forma

$$N = n + i\kappa, \quad (1.11)$$

donde  $n$  es el índice de refracción y  $\kappa$  el índice de extinción. Se supondrá que el cambio de índices en la frontera es abrupto (una función escalón) y se escogerá el eje  $Z$  perpendicular a la frontera, es decir, a la superficie de separación.



**Figura 1.1.** Reflexión y refracción de una onda plana en la frontera entre dos medios.

La onda incidente desde el medio 0 da lugar a una onda reflejada en el mismo medio y a una transmitida en el medio 1 (Figura 1.1). Los ángulos de incidencia,  $\theta_0$ , y

de refracción,  $\theta_1$ , se miden desde la normal a la frontera. El campo total en los medios 0 y 1 obedece a las ecuaciones de Maxwell y cumple las condiciones de contorno en la frontera [AB87, BW99], lo que implica que:

- 1.- Las direcciones de propagación de las ondas incidente, reflejada y transmitida están en el mismo plano, llamado de incidencia, perpendicular al plano de la frontera.
- 2.- El ángulo de reflexión es igual al de incidencia.
- 3.- Los ángulos de incidencia y de refracción satisfacen la ley de Snell

$$N_0 \sen \theta_0 = N_1 \sen \theta_1. \quad (1.12)$$

Si los medios 0 y 1 son transparentes y no hay reflexión total interna, los índices  $N_0$  y  $N_1$  y los ángulos  $\theta_0$  y  $\theta_1$  son reales. En este caso, la representación de la Figura 1.1 se ajusta perfectamente a la física del problema. Si hay reflexión total interna o si uno (o los dos) medios son absorbentes, los ángulos  $\theta_0$  y  $\theta_1$  son, en general, complejos. En este caso, la discusión continúa teniendo sentido formalmente, pero la representación gráfica del campo se complicaría enormemente [Sto63].

Para una onda incidente de amplitud y polarización dadas, la amplitud y polarización de las ondas reflejada y transmitida se determinan imponiendo la continuidad de las componentes tangenciales de los vectores campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y campo magnético  $\mathbf{H}$  a través de la frontera. Puede demostrarse que, cuando los dos medios son homogéneos e isotrópicos, como estamos suponiendo, si la onda incidente está linealmente polarizada con el vector campo eléctrico vibrando paralelo al plano de incidencia (polarización  $p$ ), las ondas reflejada y transmitida tienen la misma polarización, con sus vectores eléctricos vibrando también paralelos al plano de incidencia. Cuando la onda incidente está linealmente polarizada con el vector eléctrico oscilando perpendicularmente al plano de incidencia (polarización  $s$ ), las ondas reflejada y la transmitida tienen también polarización  $s$ .

Como una onda plana siempre está totalmente polarizada, las ondas incidente, reflejada y transmitida, pueden descomponerse en sus componentes  $p$  y  $s$ , tratarse separadamente cada una de ellas, y finalmente combinar los resultados obtenidos. Por eso, en lo sucesivo, sólo trabajaremos con las polarizaciones básicas  $p$  y  $s$ .

### 1.2.1 Coeficientes de Fresnel y relaciones de Stokes

Sean  $E_p^{(i)}$ ,  $E_p^{(r)}$  y  $E_p^{(t)}$  las amplitudes, para polarización  $p$ , de los campos incidente, reflejado y transmitido, respectivamente, en los puntos situados inmediatamente antes y después de la frontera. Similarmente denotaremos por  $E_s^{(i)}$ ,  $E_s^{(r)}$  y  $E_s^{(t)}$  las correspondientes amplitudes para polarización  $s$ . Teniendo en cuenta la continuidad de la componente tangencial de los campos a través de la frontera, y con independencia de si los medios son transparentes o absorbentes, se obtiene el conocido e importante resultado [AB87, BW99]

$$\frac{E_p^{(r)}}{E_p^{(i)}} = r_{01}(p) = \frac{N_1 \cos \theta_0 - N_0 \cos \theta_1}{N_1 \cos \theta_0 + N_0 \cos \theta_1}, \quad (1.13a)$$

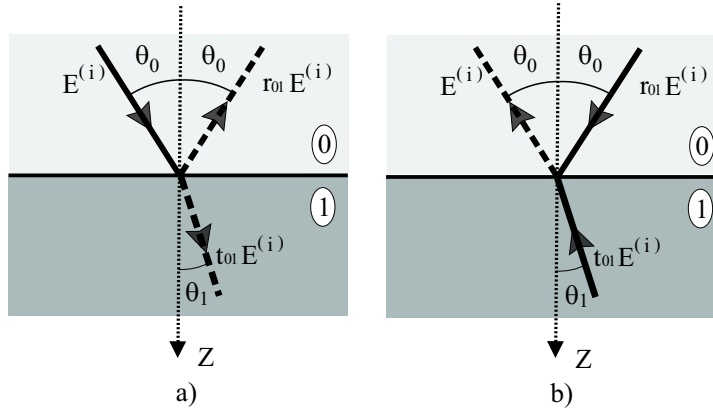
$$\frac{E_p^{(t)}}{E_p^{(i)}} = t_{01}(p) = \frac{2N_0 \cos \theta_0}{N_1 \cos \theta_0 + N_0 \cos \theta_1}, \quad (1.13b)$$

$$\frac{E_s^{(r)}}{E_s^{(i)}} = r_{01}(s) = \frac{N_0 \cos \theta_0 - N_1 \cos \theta_1}{N_0 \cos \theta_0 + N_1 \cos \theta_1}, \quad (1.13c)$$

$$\frac{E_s^{(t)}}{E_s^{(i)}} = t_{01}(s) = \frac{2N_0 \cos \theta_0}{N_0 \cos \theta_0 + N_1 \cos \theta_1}, \quad (1.13d)$$

que son los coeficientes de Fresnel de reflexión y transmisión, en la frontera 01, para cada una de las polarizaciones básicas.

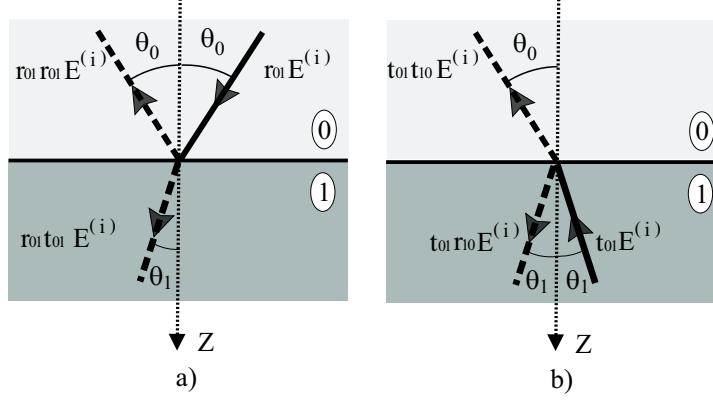
Cuando una onda con polarización  $p$  incide en la frontera entre dos medios transparentes, para el ángulo de incidencia dado por  $\tan \theta_B = n_1/n_0$ , se obtiene  $r_p = 0$  y, por tanto, no hay luz reflejada. Este fenómeno fue descubierto experimentalmente por Brewster en 1815 y el ángulo  $\theta_B$  se conoce como ángulo de Brewster.



**Figura 1.2.** a) Se representa el vector de ondas de una onda plana de amplitud  $E^{(i)}$  incidiendo desde el medio 0 y los correspondientes para las ondas reflejada y transmitida, de amplitudes  $r_{01}E^{(i)}$  y  $t_{01}E^{(i)}$ , respectivamente. b) Teniendo en cuenta el principio de reversibilidad de la luz, se ha invertido el sentido de los vectores en a).

En la Figura 1.2. a se representa el vector de ondas de una onda plana incidiendo desde el medio 0 al medio 1, con ángulo  $\theta_0$ . La amplitud de la onda reflejada vendrá dada por  $r_{01}E^{(i)}$ , donde  $r_{01}$  es el coeficiente de reflexión del medio 0 al 1 y la amplitud





**Figura 1.3.** a) Se representa el vector de ondas de una onda incidente desde el medio 0 con amplitud  $r_{01} E^{(i)}$  y los correspondientes para la reflejada y la transmitida a que da lugar. b) Lo mismo que en a) con una onda incidente desde el medio 1, con amplitud  $t_{01} E^{(i)}$ .

de la onda transmitida será  $t_{01} E^{(i)}$ , donde  $t_{01}$  es el coeficiente de transmisión para la misma frontera.

Teniendo en cuenta el principio de reversibilidad de la luz, la situación representada en la Figura 1.2. b, donde se han invertido los sentidos de todos los vectores de onda, debe ser físicamente admisible.

Es decir, si se incide desde el medio 0 con una onda de amplitud  $r_{01} E^{(i)}$ , tal como se indica en la Figura 1.3. a, se obtendrá una nueva onda reflejada de amplitud  $r_{01} r_{01} E^{(i)}$  y otra transmitida de amplitud  $r_{01} t_{01} E^{(i)}$ .

De igual modo, una onda incidente desde el medio 1 con amplitud  $t_{01} E^{(i)}$ , como se indica en la Figura 1.3. b, da lugar a dos nuevas ondas reflejada y transmitida de amplitudes  $t_{01} r_{10} E^{(i)}$  y  $t_{01} t_{10} E^{(i)}$ , respectivamente. La composición de estas dos situaciones debe ser idéntica a la representada en la Figura 1.2. b, por lo que deben verificarse simultáneamente

$$\begin{aligned}
 0 &= r_{01} t_{01} E^{(i)} + t_{01} r_{10} E^{(i)}, \\
 E^{(i)} &= r_{01} r_{01} E^{(i)} + t_{01} t_{10} E^{(i)},
 \end{aligned}
 \tag{1.14}$$

de lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
 r_{10} &= -r_{01}, \\
 t_{01} t_{10} &= 1 - r_{01}^2,
 \end{aligned}
 \tag{1.15}$$

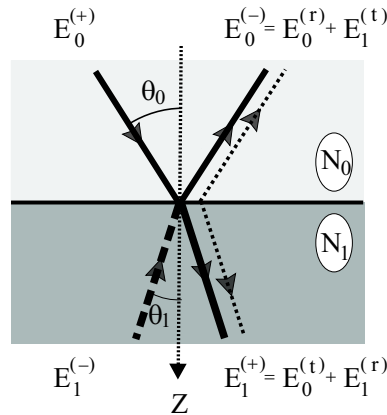
importantes ecuaciones que se conocen con el nombre de relaciones de Stokes [BW99, Har85].

### 1.3 Expresión matricial de las condiciones de contorno: matriz de frontera

En orden al formalismo de la matriz de transferencia que se pretende utilizar en lo sucesivo, nuestro propósito en esta sección es representar la acción de una frontera entre dos medios de forma matricial [AB87, Mac86]. El desarrollo siguiente también nos permitirá introducir la notación que seguiremos a lo largo de toda esta memoria.

Con tal fin, consideremos de nuevo la frontera entre dos medios semi-infinitos, de índices de refracción complejos  $N_0$  y  $N_1$ . Una onda plana monocromática, linealmente polarizada (con cualquiera de las dos polarizaciones básicas) incide desde el medio 0 con un ángulo  $\theta_0$  y su amplitud es  $E_0^{(+)}$ . Esta onda da lugar a una onda reflejada en el medio 0, de amplitud  $E_0^{(r)}$ , y a otra onda transmitida en el medio 1, con amplitud  $E_0^{(t)}$ , cuyo vector de ondas forma un ángulo  $\theta_1$  con el eje  $Z$ .

Consideremos otra onda plana de igual frecuencia y polarización y de amplitud  $E_1^{(-)}$ , incidiendo desde el medio 1 precisamente con el ángulo  $\theta_1$ , como indica la Figura 1.4. De igual forma, denotaremos por  $E_1^{(r)}$  y  $E_1^{(t)}$  las amplitudes de las correspondientes ondas reflejada y transmitida.



**Figura 1.4.** Vectores de ondas de los campos incidente, reflejado y transmitido en la frontera 01.

Las amplitudes complejas de los campos de salida totales en los puntos inmediatamente a un lado y a otro de la frontera serán denotados  $E_0^{(-)}$  y  $E_1^{(+)}$ , respectivamente. Por tanto, la amplitud  $E_1^{(+)}$  es

$$E_1^{(+)} = E_0^{(t)} + E_1^{(r)} = t_{01}E_0^{(+)} + r_{10}E_1^{(-)}, \quad (1.16)$$

mientras que, para la  $E_0^{(-)}$ , se tiene

$$E_0^{(-)} = E_0^{(r)} + E_1^{(t)} = r_{01}E_0^{(+)} + t_{10}E_1^{(-)}, \quad (1.17)$$

donde  $r_{01}$  y  $t_{01}$  son los coeficientes de reflexión y transmisión de Fresnel para la frontera 01 y  $r_{10}$  y  $t_{10}$  los correspondientes para la frontera 10.

Teniendo presente el objetivo mencionado, observemos que, para polarización  $p$ , las condiciones de contorno en la frontera 01 pueden expresarse como [MS00]

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_0 E_0^{(+)} \\ N_0 E_0^{(+)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & \cos \theta_1 \\ -N_0 & N_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0^{(r)} \\ E_0^{(t)} \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

De forma similar, para el campo incidente desde el medio 1, tenemos

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_1 E_1^{(-)} \\ N_1 E_1^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \cos \theta_0 \\ -N_1 & N_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^{(r)} \\ E_1^{(t)} \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Usando las ecuaciones (1.16) y (1.17), se llega a

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_0 & -\cos \theta_0 \\ N_0 & N_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0^{(+)} \\ E_0^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\cos \theta_1 \\ N_1 & N_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^{(+)} \\ E_1^{(-)} \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Esta fórmula, para polarización  $p$ , que es una simple expresión de las condiciones de contorno, introduce una notable sencillez y simetría. En componentes, se reduce a

$$\cos \theta_0 [E_0^{(+)} - E_0^{(-)}] = \cos \theta_1 [E_1^{(+)} - E_1^{(-)}], \quad (1.21)$$

$$N_0 [E_0^{(+)} + E_0^{(-)}] = N_1 [E_1^{(+)} + E_1^{(-)}],$$

que son las condiciones de contorno expresadas en forma de invariante. El producto miembro a miembro de estas dos ecuaciones proporciona un invariante fundamental

$$N_0 \cos \theta_0 [E_0^{(+)^2} - E_0^{(-)^2}] = N_1 \cos \theta_1 [E_1^{(+)^2} - E_1^{(-)^2}], \quad (1.22)$$

que fue propuesto por Vigoureux y Gossel como un axioma básico [VG93]. Conviene mencionar expresamente que este invariante es, en general, un número complejo y no se reduce a la ley de conservación de la energía en la frontera, puesto que en él aparecen términos  $E_i^{(\pm)2}$  en lugar de  $|E_i^{(\pm)}|^2$ .

Un procedimiento completamente similar permite obtener, para polarización  $s$ ,

$$\begin{pmatrix} N_0 \cos \theta_0 & -N_0 \cos \theta_0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0^{(+)} \\ E_0^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 \cos \theta_1 & -N_1 \cos \theta_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^{(+)} \\ E_1^{(-)} \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

y en componentes

$$N_0 \cos \theta_0 [E_0^{(+)} - E_0^{(-)}] = N_1 \cos \theta_1 [E_1^{(+)} - E_1^{(-)}], \quad (1.24)$$

$$E_0^{(+)} + E_0^{(-)} = E_1^{(+)} + E_1^{(-)}.$$

El producto de estas ecuaciones es de nuevo el invariante fundamental (1.22) que es, por tanto, independiente del estado de polarización.

Por otra parte, para polarización  $p$ , cada una de las dos matrices que aparecen en (1.20) puede factorizarse en la forma

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_i - \cos \theta_i \\ N_i & N_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & 0 \\ 0 & N_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_i(p) \sqrt{2} \mathbf{R}(\pi/4), \quad (1.25)$$

donde  $i = 0, 1$ . La matriz diagonal  $\mathbf{T}_i(p)$  incluye sólo las variables físicas en cada medio –ángulo de propagación e índice de refracción–, mientras que  $\mathbf{R}(\pi/4)$  es la matriz de una rotación de ángulo  $\pi/4$ . En consecuencia, la ecuación (1.20) puede escribirse como

$$\mathbf{T}_0(p) \mathbf{R}(\pi/4) \begin{pmatrix} E_0^{(+)} \\ E_0^{(-)} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_1(p) \mathbf{R}(\pi/4) \begin{pmatrix} E_1^{(+)} \\ E_1^{(-)} \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

De forma análoga, para polarización  $s$ , la ecuación (1.23) puede expresarse en la forma

$$\mathbf{T}_0(s) \mathbf{R}(\pi/4) \begin{pmatrix} E_0^{(+)} \\ E_0^{(-)} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_1(s) \mathbf{R}(\pi/4) \begin{pmatrix} E_1^{(+)} \\ E_1^{(-)} \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

donde ahora

$$\begin{pmatrix} N_i \cos \theta_i - N_i \cos \theta_i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_i \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_i(s) \sqrt{2} \mathbf{R}(\pi/4). \quad (1.28)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta las ecuaciones (1.25) y (1.28) es fácil obtener que

$$\mathbf{T}_i(s) = \begin{pmatrix} N_i & 0 \\ 0 & 1/N_i \end{pmatrix} \mathbf{T}_i(p). \quad (1.29)$$

Hemos comprobado, por tanto, que esta formulación matricial de las condiciones de contorno proporciona propiedades invariantes a través de la frontera y unas relaciones, particularmente compactas y sencillas, para cada una de las polarizaciones básicas.

Estamos particularmente interesados en relacionar las amplitudes del campo a cada lado de la frontera. Esta relación se puede expresar en la forma

$$\begin{pmatrix} E_0^{(+)} \\ E_0^{(-)} \end{pmatrix} = \mathbf{F}_{01} \begin{pmatrix} E_1^{(+)} \\ E_1^{(-)} \end{pmatrix}, \quad (1.30)$$

donde  $\mathbf{F}_{01}$  recibe el nombre de matriz de frontera [AB87]. A partir del sistema de ecuaciones (1.16) y (1.17), se puede escribir

$$\mathbf{F}_{01} = \frac{1}{t_{01}} \begin{pmatrix} 1 & -r_{10} \\ r_{01} & t_{01}t_{10} - r_{01}r_{10} \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

Además, por otro lado, de (1.26) y (1.27), la matriz  $\mathbf{F}_{01}$  se puede expresar en forma compacta para cada una de las polarizaciones básicas como

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{01}(p) &= \mathbf{R}^{-1}(\pi/4) \mathbf{T}_0^{-1}(p) \mathbf{T}_1(p) \mathbf{R}(\pi/4) \\ &= \mathbf{R}^{-1}(\pi/4) \begin{pmatrix} \cos \theta_1 / \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & N_1 / N_0 \end{pmatrix} \mathbf{R}(\pi/4), \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{01}(s) &= \mathbf{R}^{-1}(\pi/4) \mathbf{T}_0^{-1}(s) \mathbf{T}_1(s) \mathbf{R}(\pi/4) \\ &= \mathbf{R}^{-1}(\pi/4) \begin{pmatrix} (N_1 \cos \theta_1) / (N_0 \cos \theta_0) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}(\pi/4). \end{aligned}$$

Esta factorización se basa exclusivamente en las condiciones de contorno y permite concluir que la matriz de frontera debe tener la forma

$$\mathbf{F}_{01} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

siendo  $a$  y  $b$ , en general, números complejos. Este resultado implica que en la ecuación (1.31) se deben cumplir las siguientes relaciones

$$r_{10} = -r_{01}, \quad (1.34)$$

$$1 + r_{01}r_{10} = t_{01}t_{10}.$$

Lo anterior constituye una sencilla demostración algebraica de las relaciones de Stokes (1.15) sin recurrir al argumento de reversibilidad habitual empleado en el apartado 1.2.1. En consecuencia, para cada polarización básica, podemos escribir

$$\mathbf{F}_{01} = \frac{1}{t_{01}} \begin{pmatrix} 1 & r_{01} \\ r_{01} & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

Por otra parte, para todo lo que sigue, es importante tener en cuenta que si consideramos las fronteras entre los medios 0 y 1 y entre los medios 1 y 2 y denotamos las matrices que las representan por  $\mathbf{F}_{01}$  y  $\mathbf{F}_{12}$ , respectivamente, podemos conocer de un modo rápido y directo la matriz que representa a la frontera 02. En efecto, es fácil comprobar que

$$\mathbf{F}_{02} = \mathbf{F}_{01}\mathbf{F}_{12}, \quad (1.36)$$

y teniendo en cuenta (1.35), se obtiene de modo directo que

$$r_{02} = \frac{r_{01} + r_{12}}{1 + r_{01}r_{12}}, \quad (1.37)$$

$$t_{02} = \frac{t_{01}t_{12}}{1 + r_{01}r_{12}}.$$

Conviene resaltar que esta ley para el producto de las matrices de frontera conlleva que la composición de los coeficientes de reflexión para las amplitudes sea formalmente igual a la de las velocidades en la relatividad especial formulada por Einstein: así como la suma de dos velocidades nunca puede exceder a la velocidad de la luz  $c$ , la composición de dos coeficientes de reflexión nunca puede ser mayor que la unidad. Esta analogía fue puesta de manifiesto, por primera vez, por Vigoureux [VG93, Vig92]. Nótese también el diferente comportamiento de los coeficientes de transmisión.

Desde el punto de vista matemático es fácil comprobar que el conjunto de las matrices de la forma (1.33) es un grupo abeliano respecto a la multiplicación. Sin embargo, es importante resaltar que el producto de dos matrices de frontera sólo tiene sentido físico si el segundo medio de la primera frontera coincide con el primer medio de la segunda, por lo que, desde este punto de vista, el producto no es conmutativo. La identidad del grupo corresponde a la matriz que representa la frontera entre dos medios de igual índice de refracción (lo que supone trivialmente que no hay reflexión

para ningún ángulo de incidencia y, por tanto,  $r = 0$  y  $t = 1$ ). La matriz inversa de una dada describe la frontera tomada en orden invertido, es decir,  $\mathbf{F}_{01}^{-1} = \mathbf{F}_{10}$ .

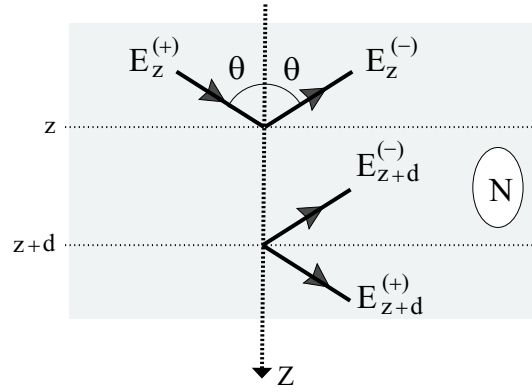
Por último conviene mencionar que, para ambas polarizaciones, se tiene

$$\det \mathbf{F}_{01}(p) = \det \mathbf{F}_{01}(s) = \frac{t_{10}}{t_{01}} = \frac{N_1 \cos \theta_1}{N_0 \cos \theta_0} \neq 1, \quad (1.38)$$

resultado que será utilizado posteriormente.

#### 1.4 Matriz de propagación en una lámina

Consideremos ahora la propagación de una onda plana dentro de una lámina plano-paralela de índice de refracción  $N$  (Figura 1.5).



**Figura 1.5.** Vectores de onda propagándose dentro de un medio de índice de refracción  $N$  en los puntos  $z$  y  $z + d$ .

Los campos en los puntos  $z$  y  $z + d$ , dentro de la lámina, serán denotados por

$$\mathbf{E}_{(z)} = \begin{pmatrix} E_{(z)}^{(+)} \\ E_{(z)}^{(-)} \end{pmatrix}, \quad (1.39)$$

$$\mathbf{E}_{(z+d)} = \begin{pmatrix} E_{(z+d)}^{(+)} \\ E_{(z+d)}^{(-)} \end{pmatrix},$$

respectivamente.

Ambos vectores campo están relacionados por una matriz diagonal  $2 \times 2$  de la forma [AB87]

$$\begin{pmatrix} E_{(z)}^{(+)} \\ E_{(z)}^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\beta} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{(z+d)}^{(+)} \\ E_{(z+d)}^{(-)} \end{pmatrix}, \quad (1.40)$$

donde

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} N d \cos \theta, \quad (1.41)$$

y  $\theta$  es el ángulo de propagación dentro de la lámina. El parámetro  $\beta$  se suele denominar espesor en fase de la lámina, porque representa el cambio de fase de la onda al propagarse dentro de ella.

En consecuencia, la matriz que relaciona los campos en los puntos  $z$  y  $z + d$  es

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} e^{i\beta} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta} \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

y describe la propagación de la onda a través de una distancia  $d$  dentro de la lámina. Si la lámina es transparente  $\beta$  es un número real y  $e^{i\beta}$  tiene módulo unidad. Si el índice de refracción de la lámina  $N$  es complejo, también lo será el espesor en fase. En este caso, expresando  $\beta = \text{Re } \beta + i \text{Im } \beta$  se tiene que

$$E_{(z)}^{(+)} = e^{\text{Im } \beta} E_{(z+d)}^{(+)} e^{i \text{Re } \beta}, \quad (1.43)$$

$$E_{(z)}^{(-)} = e^{-\text{Im } \beta} E_{(z+d)}^{(-)} e^{-i \text{Re } \beta},$$

donde el factor  $e^{-\text{Im } \beta}$  indica cómo disminuye la amplitud según la onda se propaga en el interior de la lámina.

En cualquier caso es importante notar que, haya absorción o no, siempre se verifica

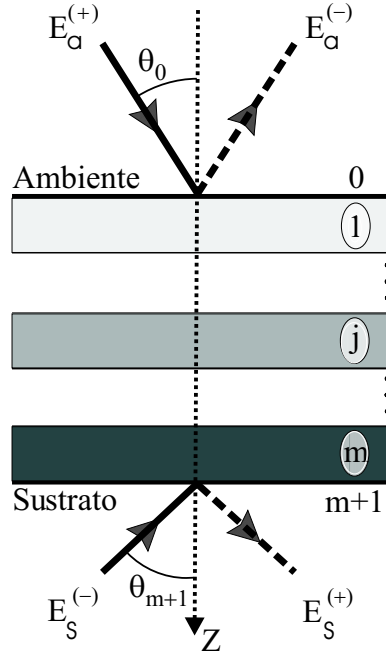
$$\det \mathbf{P} = 1, \quad (1.44)$$

resultado que será utilizado posteriormente.

## 1.5 Reflexión y transmisión en una multicapa óptica

En todo lo que sigue entenderemos por multicapa un conjunto de láminas plano-paralelas, denotadas sucesivamente por el índice  $1, 2, \dots, j, \dots, m$ , entre dos medios semi-infinitos: el ambiente (medio 0) y el sustrato (medio  $m + 1$ ).





**Figura 1.6.** Vectores de ondas de los campos de entrada [ $E_a^{(+)}$  y  $E_s^{(-)}$ ] y de salida [ $E_a^{(-)}$  y  $E_s^{(+)}$ ] en una multicapa entre dos medios semi-infinitos el ambiente (medio 0) y el sustrato (medio  $m + 1$ ).

El índice de refracción, el espesor y el ángulo de propagación en la lámina  $j$ -ésima serán denotados, respectivamente, por  $N_j$ ,  $d_j$  y  $\theta_j$ . Los ángulos de propagación dentro de cada medio están relacionados entre sí por la Ley de Snell

$$N_0 \sin \theta_0 = \dots = N_j \sin \theta_j = \dots = N_{m+1} \sin \theta_{m+1}. \quad (1.45)$$

Supongamos una onda plana monocromática linealmente polarizada (con polarización  $p$  o  $s$ ), de amplitud  $E_a^{(+)}$ , que incide desde el ambiente formando un ángulo  $\theta_0$  con la normal a la primera frontera y otra onda plana de igual frecuencia y polarización, con amplitud  $E_s^{(-)}$ , incidente desde el sustrato precisamente con ángulo  $\theta_{m+1}$ , como se indica en la Figura 1.6.

Como resultado de la superposición de todas las ondas que experimentan reflexiones múltiples en cada una de las fronteras, se obtiene una onda plana que viaja hacia atrás en el medio ambiente,  $E_a^{(-)}$ , y otra onda plana que viaja hacia adelante en el sustrato,  $E_s^{(+)}$ .

Puesto que las ecuaciones que gobiernan la propagación de la luz son lineales, las amplitudes de los campos de salida pueden expresarse en función de las de los campos de entrada en la forma

$$\begin{aligned} E_a^{(-)} &= R_{as}E_a^{(+)} + T_{sa}E_s^{(-)}, \\ E_s^{(+)} &= T_{as}E_a^{(+)} + R_{sa}E_s^{(-)}, \end{aligned} \quad (1.46)$$

donde  $R_{as}$  y  $T_{as}$  son, respectivamente, los coeficientes de reflexión y transmisión para la amplitud de la onda incidente desde el ambiente y  $R_{sa}$  y  $T_{sa}$  los correspondientes para la onda incidente desde el sustrato.

En consecuencia, las amplitudes de los campos a cada lado de la multicapa pueden relacionarse por una matriz compleja  $2 \times 2$  que se denomina matriz de transferencia de la multicapa,  $\mathbf{M}_{as}$ . Resolviendo el sistema (1.46) se obtiene que

$$\begin{pmatrix} E_a^{(+)} \\ E_a^{(-)} \end{pmatrix} = \frac{1}{T_{as}} \begin{pmatrix} 1 & -R_{sa} \\ R_{as} & \mathcal{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_s^{(+)} \\ E_s^{(-)} \end{pmatrix}, \quad (1.47)$$

donde

$$\mathcal{Y} = T_{as}T_{sa} - R_{as}R_{sa}. \quad (1.48)$$

La matriz de transferencia de la multicapa puede obtenerse como el producto de las matrices que describen los efectos individuales de cada una de las fronteras y de las propagaciones en las láminas que componen la estructura, tomadas en el orden apropiado; es decir, [AB87]

$$\mathbf{M}_{as} = \mathbf{F}_{01}\mathbf{P}_1\mathbf{F}_{12}\mathbf{P}_2\cdots\mathbf{F}_{(j-1)j}\mathbf{P}_j\cdots\mathbf{P}_m\mathbf{F}_{m(m+1)}. \quad (1.49)$$

Otra forma de llegar a este resultado es componiendo las matrices de transferencia de cada lámina de la estructura. Para comprobar esto, téngase en cuenta que la matriz de transferencia del sistema formado por una lámina plano-paralela (medio  $j$ ), inmersa entre dos medios semi-infinitos, ambiente ( $a$ ) y sustrato ( $s$ ), viene dada por el producto

$$\mathbf{M}_j = \mathbf{F}_{aj}\mathbf{P}_j\mathbf{F}_{js}, \quad (1.50)$$

donde  $\mathbf{F}_{aj}$  y  $\mathbf{F}_{js}$  son las matrices que representan las fronteras  $aj$  y  $js$ , respectivamente, y  $\mathbf{P}_j$  la matriz de propagación dentro de la lámina. Como se ha mencionado anteriormente, si el sustrato de la lámina  $j$  es idéntico al ambiente de la lámina  $j+1$ , teniendo en cuenta (1.36), la matriz de transferencia del sistema formado por dos láminas puede escribirse como

$$\mathbf{M}_{j(j+1)} = \mathbf{M}_j\mathbf{M}_{(j+1)} = \mathbf{F}_{aj}\mathbf{P}_j\mathbf{F}_{j(j+1)}\mathbf{P}_{(j+1)}\mathbf{F}_{(j+1)s}. \quad (1.51)$$

Extendiendo este resultado a toda la estructura, se llega a la ecuación (1.49). Por tanto, la multicapa total puede verse como una composición de láminas individuales en las que el medio sustrato de cada lámina es idéntico al ambiente de la siguiente. Así se puede escribir

$$\mathbf{M}_{as} = \prod_{j=1}^{j=m} \mathbf{M}_j, \quad (1.52)$$

Calculando el determinante en la ecuación (1.49) y teniendo en cuenta (1.38) y (1.44) se obtiene el importante resultado

$$\det \mathbf{M}_{as} = \frac{N_{m+1} \cos \theta_{m+1}}{N_0 \cos \theta_0} = \frac{T_{sa}}{T_{as}}. \quad (1.53)$$

En consecuencia, conviene resaltar que cuando el ambiente y el sustrato son idénticos el determinante de la matriz  $\mathbf{M}_{as}$  es +1. En este caso también obtenemos como resultado adicional que los coeficientes de transmisión son iguales para ambos sentidos de incidencia, es decir,  $T_{sa} = T_{as}$ , que ya fue demostrado por Abelès [Abe48, Abe63].

Si el ambiente y el sustrato son diferentes, podemos obtener un resultado equivalente, pero es necesario introducir una notación ligeramente distinta. Para simplificar el cálculo supondremos que el ambiente y el sustrato son transparentes. En esta situación, si expresamos los coeficientes de reflexión y transmisión de la multicapa por

$$\begin{aligned} R_{as} &= |R_{as}| e^{i\rho}, \\ T_{as} &= |T_{as}| e^{i\tau}, \end{aligned} \quad (1.54)$$

y la reflectancia y la transmitancia se definen del modo habitual

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{as} &= |R_{as}|^2, \\ \mathcal{T}_{as} &= \frac{n_{m+1} \cos \theta_{m+1}}{n_0 \cos \theta_0} |T_{as}|^2, \end{aligned} \quad (1.55)$$

podemos renormalizar las amplitudes del campo en la siguiente forma

$$\begin{aligned} E_a^{(\pm)} &= \frac{1}{\sqrt{n_0 \cos \theta_0}} \mathfrak{E}_a^{(\pm)}, \\ E_s^{(\pm)} &= \frac{1}{\sqrt{n_{m+1} \cos \theta_{m+1}}} \mathfrak{E}_s^{(\pm)}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Entonces la acción de la multicapa se puede expresar como [MS99b]

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{E}_a^{(+)} \\ \mathfrak{E}_a^{(-)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{T}_{as}}} \begin{pmatrix} e^{-i\tau} & e^{-i(\rho-\tau)\sqrt{\mathcal{R}_{as}}} \\ e^{i(\rho-\tau)\sqrt{\mathcal{R}_{as}}} & e^{i\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{E}_s^{(+)} \\ \mathfrak{E}_s^{(-)} \end{pmatrix}, \quad (1.57)$$

y es fácil comprobar que ahora la matriz

$$\mathfrak{M}_{as} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{T}_{as}}} \begin{pmatrix} e^{-i\tau} & e^{-i(\rho-\tau)\sqrt{\mathcal{R}_{as}}} \\ e^{i(\rho-\tau)\sqrt{\mathcal{R}_{as}}} & e^{i\tau} \end{pmatrix}, \quad (1.58)$$

se relaciona con la original  $\mathbf{M}_{as}$  en la forma

$$\mathfrak{M}_{as} = \frac{\mathbf{M}_{as}}{[\det \mathbf{M}_{as}]^{1/2}}, \quad (1.59)$$

y, en estas nuevas variables, se tiene que  $\det \mathfrak{M}_{as} = 1$ .

En consecuencia, en todo lo que sigue supondremos que los medios ambiente y sustrato son idénticos. Esto no supone ninguna restricción importante, pues corresponde a una situación experimental muy habitual y, en definitiva, siempre podemos considerar que el determinante de la matriz de transferencia de cualquier multicapa es la unidad.

En conclusión, la matriz que describe una multicapa (absorbente o no) es un elemento del grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  de matrices complejas  $2 \times 2$  unimodulares, lo cual, como veremos en el capítulo siguiente, es la base para una identificación formal de las multicapas ópticas con las transformaciones de Lorentz de la relatividad especial.

## 1.6 Matriz de transferencia de una multicapa transparente

Según se ha comentado con anterioridad, cuando todos los medios son transparentes y no hay reflexión total interna en ninguna frontera, los coeficientes de Fresnel y el cambio de fase en cada propagación son números reales. En este caso la matriz de la multicapa puede escribirse en la forma general

$$\mathbf{M}_{as} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^* & \mathbf{a}^* \end{pmatrix}, \quad (1.60)$$

donde el símbolo \* indica conjugación compleja y los coeficientes  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  dependen, lógicamente, de las características de la multicapa.

Para demostrar esta afirmación consideremos el caso de una lámina transparente (medio 1) entre dos medios semi-infinitos ambiente (0) y sustrato (2). De la ecuación (1.49) se tiene

$$\mathbf{M}_{02} = \mathbf{F}_{01} \mathbf{P}_1 \mathbf{F}_{12} = \frac{1}{t_{01} t_{12}} \begin{pmatrix} e^{i\beta_1} + r_{01} r_{12} e^{-i\beta_1} & r_{01} e^{-i\beta_1} + r_{12} e^{i\beta_1} \\ r_{01} e^{i\beta_1} + r_{12} e^{-i\beta_1} & e^{-i\beta_1} + r_{01} r_{12} e^{i\beta_1} \end{pmatrix}, \quad (1.61)$$

que, obviamente, es de la forma (1.60). A continuación, consideremos el caso de dos láminas (medios 1 y 2) entre el ambiente (0) y el sustrato (3). En este caso la matriz de la multicapa será

$$\mathbf{M}_{03} = \mathbf{M}_{02} \mathbf{P}_2 \mathbf{F}_{23} = \mathbf{M}_{02} \frac{1}{t_{23}} \begin{pmatrix} e^{i\beta_2} & r_{23} e^{i\beta_2} \\ r_{23} e^{-i\beta_2} & e^{-i\beta_2} \end{pmatrix}, \quad (1.62)$$

que, de nuevo, es de la forma (1.60). Repitiendo el procedimiento para un número arbitrario de medios se llega, por inducción, a la conclusión deseada.

La matriz identidad corresponde a  $T_{as} = 1$  y  $R_{as} = 0$ , y, por tanto, representa un sistema antirreflejante sin cambio de fase por transmisión. Además, dada una multicapa transparente con matriz  $\mathbf{M}_{as}$ , se puede asegurar que es físicamente admisible la obtención de  $\mathbf{M}_{as}^{-1}$  de tal modo que la composición de ambas sea la identidad, es decir, la composición de  $\mathbf{M}_{as}$  con su inversa da un sistema antirreflejante. Por tanto, el conjunto de las matrices de las multicapas transparentes es grupo respecto a la multiplicación de matrices.

Identificando las matrices (1.47) y (1.60), se obtiene, para este importante caso particular

$$R_{sa} = -R_{as}^* e^{i2\tau}, \quad (1.63)$$

$$T_{as} T_{sa} - R_{as} R_{sa} = e^{i2\tau},$$

lo que constituye una generalización de las relaciones de Stokes (1.15) para las multicapas transparentes. En consecuencia, podemos reescribir la matriz de la multicapa como

$$\mathbf{M}_{as} = \begin{pmatrix} 1/T_{as} & R_{as}^*/T_{as}^* \\ R_{as}/T_{as} & 1/T_{as}^* \end{pmatrix}. \quad (1.64)$$

En definitiva [MS99a, MS99b], el conjunto de las matrices de las multicapas transparentes, con ambiente idéntico al sustrato, se reduce al grupo de Lie  $SU(1,1)$  de las matrices complejas  $2 \times 2$  de la forma (1.60) con  $\det \mathbf{M}_{as} = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = 1$ , que es equivalente a

$$|R_{as}|^2 + |T_{as}|^2 = 1. \quad (1.65)$$

Esta ecuación representa precisamente la conservación del flujo de energía en medios transparentes. Este importante resultado constituye el principal punto de partida del trabajo que se recoge en esta memoria.

Conviene mencionar otras propiedades de las multicapas transparentes. En particular, dada una multicapa de matriz de transferencia  $\mathbf{M}_{as}$ , es fácil obtener la multicapa  $\mathbf{M}_{sa}$  en la que todos los elementos van en orden invertido. Su matriz de transferencia vendrá dada por

$$\mathbf{M}_{sa} = \begin{pmatrix} 1/T_{sa} & R_{sa}^*/T_{sa}^* \\ R_{sa}/T_{sa} & 1/T_{sa}^* \end{pmatrix}. \quad (1.66)$$

Teniendo en cuenta las relaciones de Stokes generalizadas (1.63), se llega a

$$\mathbf{M}_{sa} = \begin{pmatrix} 1/T_{as} & -R_{as}/T_{as} \\ -R_{as}^*/T_{as}^* & 1/T_{as}^* \end{pmatrix}, \quad (1.67)$$

y se puede comprobar inmediatamente que  $\mathbf{M}_{as}^{-1} = \mathbf{M}_{sa}^*$ .

Por tanto, la composición de dos multicapas en las que los medios vayan en orden invertido, es decir,  $\mathbf{M}_{as}\mathbf{M}_{sa} = \mathbf{M}_{aa}$  o bien,  $\mathbf{M}_{sa}\mathbf{M}_{as} = \mathbf{M}_{ss}$  produce, lógicamente, un sistema simétrico. Para estos sistemas, el elemento  $\mathbf{b}$  de la matriz es imaginario puro. Un sistema físico que responde a esta situación sería un Fabry-Perot formado por dos láminas idénticas, separadas entre sí por otro medio. Para estos sistemas simétricos se tiene, entonces [Deg80, OM89, Zei81]

$$\tau - \rho = \pm\pi/2. \quad (1.68)$$

Para terminar el presente capítulo, nos parece importante hacer notar que la matriz de transferencia aquí definida difiere de la matriz de *scattering* que relaciona los campos de entrada y salida en la multicapa.

Si los medios ambiente y sustrato son idénticos se verifica –como acabamos de mencionar– que  $T_{as} = T_{sa}$ , pero los coeficientes de reflexión  $R_{as}$  y  $R_{sa}$  serán, en general, distintos. Si los medios son transparentes, teniendo en cuenta (1.46) puede escribirse

$$\begin{pmatrix} E_s^{(+)} \\ E_a^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{as} & R_{sa} \\ R_{as} & T_{as} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_s^{(-)} \\ E_a^{(+)} \end{pmatrix}, \quad (1.69)$$

siendo la matriz de *scattering*

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} T_{as} & R_{sa} \\ R_{as} & T_{as} \end{pmatrix}. \quad (1.70)$$

Para este caso a partir de (1.63) se verifica que

$$\mathbf{S} = e^{i\tau} \begin{pmatrix} |T_{as}| & R_{as}e^{-i\tau} \\ -R_{as}^*e^{i\tau} & |T_{as}| \end{pmatrix}. \quad (1.71)$$

Esto permite asegurar que salvo una fase global,  $e^{i\tau}$ , la matriz  $\mathbf{S}$  es hermítica y pertenece a un subconjunto de  $SU(2)$ , que es el grupo de las matrices complejas  $2 \times 2$  unitarias y unimodulares. Se verifica asimismo que  $\det \mathbf{S} = |T_{as}|^2 + |R_{as}|^2 = 1$ .

Es necesario resaltar que si se considera una multicapa transparente compuesta a su vez por dos multicapas de las que se conocen sus matrices de transferencia  $\mathbf{M}_1$  y  $\mathbf{M}_2$  y sus matrices de *scattering*  $\mathbf{S}_1$  y  $\mathbf{S}_2$ , la matriz de transferencia del sistema compuesto viene dada por el producto  $\mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ , mientras que esto no es cierto para la matrices de *scattering*,  $\mathbf{S}_{12} \neq \mathbf{S}_1\mathbf{S}_2$ .

Por tanto, ambas matrices describen el mismo fenómeno físico, pero pertenecen a grupos distintos y es notable la diferencia en la descripción de la composición de sistemas: las matrices de transferencia se pueden componer, pero las de *scattering* no.

## 2 Formulación relativista de la óptica de multicapas

Es indudable que el grupo de transformaciones de Lorentz desempeña un papel fundamental no sólo en relatividad especial, sino también en muchas ramas de la física. En particular, es difícil sobreestimar su importancia en la óptica moderna.

Como hemos mencionado, Vigoureux y Grossel fueron los primeros en poner de manifiesto la analogía formal entre las amplitudes del campo en una multicapa y las coordenadas espacio-temporales en una dimensión espacial. Así, resaltaron la similitud entre la ley de composición de las amplitudes reflejadas y la ley de Einstein de composición de velocidades paralelas. No obstante, al ser las velocidades números reales y las amplitudes del campo complejos se vieron abocados a introducir (de manera intuitiva, pero poco correcta) una generalización al campo complejo de la ley de Einstein.

Como posteriormente fue puesto de manifiesto por nuestro grupo, la base de esta analogía reside en que la matriz que describe la acción de una multicapa es un elemento del grupo  $SL(2, \mathbb{C})$ , que es localmente isomorfo al grupo de Lorentz  $SO(3,1)$ . Según se ha explicado en el capítulo anterior, en el caso especial de las multicapas transparentes, la matriz de transferencia pertenece al grupo  $SU(1,1)$  que es un subgrupo de  $SL(2, \mathbb{C})$ . Surge de aquí una identificación natural de los coeficientes de reflexión y transmisión de una multicapa con los parámetros de la transformación de Lorentz, que será estudiada con detalle en este capítulo.

### 2.1 El grupo de Lorentz en (3+1) dimensiones

Como paso previo a nuestro propósito, recordaremos algunas propiedades bien conocidas de las transformaciones de Lorentz en tres dimensiones espaciales [TW96]. En el espacio de Minkowski consideremos el cuadvectores

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$



donde  $x^0 = ct$ . La transformación  $\Lambda$  entre dos cuadvectores

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad (2.2)$$

(los índices griegos van de 0 a 3) es una transformación de Lorentz cuando preserva la norma pseudo-Euclídea

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \quad (2.3)$$

Esto implica, inmediatamente, que

$$\det \Lambda = \pm 1. \quad (2.4)$$

De este modo las transformaciones de Lorentz se dividen en dos clases: transformaciones propias, para las que  $\det \Lambda = +1$ , y transformaciones impropias, con  $\det \Lambda = -1$ . Las transformaciones de Lorentz propias forman un subgrupo, las impropias no.

Por otro lado, es tradicional clasificar las transformaciones de Lorentz de acuerdo con el signo de  $\Lambda^0_0$ : las transformaciones ortocronas, para las que  $\Lambda^0_0 \geq 1$ , forman un subgrupo, mientras que las anticronas, con  $\Lambda^0_0 \leq 1$ , no.

Trabajaremos en todo momento con el grupo de Lorentz restringido; es decir, el grupo de las transformaciones ortocronas propias, que es un grupo de Lie de seis parámetros denominado  $\text{SO}(3,1)$ .

En particular, estamos interesados en el homomorfismo entre  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  y  $\text{SO}(3,1)$ . Sea  $\sigma_{\mu}$  el conjunto de las cuatro matrices hermíticas  $\sigma_0 = \mathbf{1}$  (la identidad) y  $\sigma_k$  (las matrices de Pauli). A cada cuadvector  $x^{\mu}$  le asociamos la matriz hermítica  $2 \times 2$  [BR77]

$$\mathbf{X} = x^{\mu} \sigma_{\mu} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

de manera que las coordenadas  $x^{\mu}$  pueden obtenerse como

$$x^{\mu} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{X} \sigma^{\mu}). \quad (2.6)$$

Si  $\mathbf{M}$  denota una matriz de  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ , la transformación

$$\mathbf{X}' = \mathbf{M} \mathbf{X} \mathbf{M}^{\dagger}, \quad (2.7)$$

donde el símbolo  $\dagger$  indica conjugación hermítica, induce una transformación de Lorentz en los coeficientes  $x^{\mu}$ . De hecho, es fácil encontrar esta transformación explícitamente a partir de (2.7) como [Bar80]

$$\Lambda^{\mu}_{\nu}(\mathbf{M}) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma^{\mu} \mathbf{M} \sigma_{\nu} \mathbf{M}^{\dagger}). \quad (2.8)$$

Inversamente, esta ecuación se puede resolver para obtener  $\mathbf{M}$  a partir de  $\Lambda$ . Claramente las matrices  $\mathbf{M}$  y  $-\mathbf{M}$  generan la misma  $\Lambda$ , por tanto es un homomorfismo dos a uno. Las matrices  $\mathbf{M}$  son una representación bidimensional espinorial del grupo restringido de Lorentz  $\text{SO}(3,1)$ ; esto es,  $\Lambda_1\Lambda_2 \mapsto \mathbf{M}(\Lambda_1)\mathbf{M}(\Lambda_2) = \mathbf{M}(\Lambda_1\Lambda_2)$ .

## 2.2 Transformación de Lorentz asociada a una multicapa

Explicitemos un poco más la equivalencia entre las matrices de transferencia de una multicapa y las transformaciones restringidas de Lorentz. Como se vio en el capítulo anterior, la matriz de transferencia de una multicapa (en general, absorbente) viene dada por (1.47)

$$\mathbf{M} = \frac{1}{T_{as}} \begin{pmatrix} 1 & -R_{sa} \\ R_{as} & \Upsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Si los medios extremos son iguales se verifica que  $\det \mathbf{M} = ad - bc = 1$ , es decir,  $\mathbf{M} \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ .

Es conocido que una transformación restringida de Lorentz siempre se puede descomponer como producto de una rotación tridimensional en el espacio,  $\mathbf{R}$ , y una transformación de Lorentz pura (o *boost*)  $\mathbf{L}$ , a lo largo de una dirección arbitraria [Bar80]

$$\Lambda = \mathbf{L}\mathbf{R}. \quad (2.10)$$

La factorización equivalente en  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  viene dada por la llamada descomposición polar, que asegura que cualquier matriz  $\mathbf{M} \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  puede expresarse de forma única como

$$\mathbf{M} = \mathbf{H}\mathbf{U}, \quad (2.11)$$

donde  $\mathbf{H}$  es hermítica definida positiva y  $\mathbf{U}$  es unitaria. Nótese que esta factorización es la análoga, expresada matricialmente, a la descomposición de un número complejo en módulo y argumento. Bajo el homomorfismo discutido previamente la componente hermítica  $\mathbf{H}$  equivale a un *boost* y la unitaria  $\mathbf{U}$  a una rotación. Puede comprobarse que sus formas explícitas son

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{(2 + |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} 1 + |a|^2 + |b|^2 & ac^* + bd^* \\ a^*c + b^*c & 1 + |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} \\ &\equiv \frac{1}{\Gamma} \begin{pmatrix} h_1 & \varsigma \\ \varsigma^* & h_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{(2 + |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} a + d^* & b - c^* \\ -b^* + c & a^* + d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ -u_2^* & u_1^* \end{pmatrix}.$$

Cuando  $\mathbf{M}$  se reduce a  $\mathbf{U}$ , se tiene

$$\mathbf{X}' = \mathbf{U} \mathbf{X} \mathbf{U}^{-1}, \quad (2.13)$$

y la transformación de Lorentz inducida es la rotación espacial

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{Re}(u_1^2 - u_2^2) & \operatorname{Im}(u_1^2 + u_2^2) & -2 \operatorname{Re}(u_1 u_2) \\ 0 & -\operatorname{Im}(u_1^2 - u_2^2) & \operatorname{Re}(u_1^2 + u_2^2) & 2 \operatorname{Im}(u_1 u_2) \\ 0 & 2 \operatorname{Re}(u_1 u_2^*) & 2 \operatorname{Im}(u_1 u_2^*) & |u_1|^2 - |u_2|^2 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Por otra parte, la matriz que representa una rotación tridimensional en función de los ángulos de Euler  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$ , viene dada por [GP89]

$$\begin{pmatrix} \cos \hat{\alpha} \cos \hat{\beta} \cos \hat{\gamma} - \operatorname{sen} \hat{\alpha} \operatorname{sen} \hat{\gamma} & -\cos \hat{\alpha} \cos \hat{\beta} \operatorname{sen} \hat{\gamma} - \operatorname{sen} \hat{\alpha} \cos \hat{\gamma} & \cos \hat{\alpha} \operatorname{sen} \hat{\beta} \\ \operatorname{sen} \hat{\alpha} \cos \hat{\beta} \cos \hat{\gamma} + \cos \hat{\alpha} \operatorname{sen} \hat{\gamma} & -\operatorname{sen} \hat{\alpha} \cos \hat{\beta} \operatorname{sen} \hat{\gamma} + \cos \hat{\alpha} \cos \hat{\gamma} & \operatorname{sen} \hat{\alpha} \operatorname{sen} \hat{\beta} \\ -\operatorname{sen} \hat{\beta} \cos \hat{\gamma} & \operatorname{sen} \hat{\beta} \operatorname{sen} \hat{\gamma} & \cos \hat{\beta} \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Identificando los elementos de las matrices (2.14) y (2.15) puede comprobarse que los ángulos de Euler vienen dados, en función de los parámetros de la matriz unitaria  $\mathbf{U}$ , por

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= -\arg(u_1 u_2), \\ \hat{\beta} &= \arccos(|u_1|^2 - |u_2|^2), \\ \hat{\gamma} &= -\arg(u_1 u_2^*). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Por el contrario, cuando  $\mathbf{M}$  se reduce a la componente hermítica  $\mathbf{H}$ , se tiene

$$\mathbf{X}' = \mathbf{H} \mathbf{X} \mathbf{H}, \quad (2.17)$$

y la transformación de Lorentz inducida es un *boost* de la forma

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \Gamma^2/2 - 1 & \operatorname{Re}(\varsigma) & -\operatorname{Im}(\varsigma) & \Gamma'/2 \\ \operatorname{Re}(\varsigma) & 1 + 2[\operatorname{Re}(\varsigma)]^2/\Gamma^2 & -2 \operatorname{Re}(\varsigma) \operatorname{Im}(\varsigma)/\Gamma^2 & \Gamma' \operatorname{Re}(\varsigma)/\Gamma^2 \\ -\operatorname{Im}(\varsigma) & -2 \operatorname{Re}(\varsigma) \operatorname{Im}(\varsigma)/\Gamma^2 & 1 + 2[\operatorname{Im}(\varsigma)]^2/\Gamma^2 & -\Gamma' \operatorname{Im}(\varsigma)/\Gamma^2 \\ \Gamma'/2 & \Gamma' \operatorname{Re}(\varsigma)/\Gamma^2 & -\Gamma' \operatorname{Im}(\varsigma)/\Gamma^2 & 1 + \Gamma'^2/2\Gamma^2 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

donde

$$\Gamma' = |a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2. \quad (2.19)$$

Ahora bien, la matriz que representa un *boost* que relaciona dos sistemas moviéndose uno respecto al otro, en una dirección arbitraria, con velocidad constante  $\vec{\beta} = \vec{v}/c$  es [Jac80]

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1 + A\beta_1^2 & A\beta_1\beta_2 & A\beta_1\beta_3 \\ -\gamma\beta_2 & A\beta_2\beta_1 & 1 + A\beta_2^2 & A\beta_2\beta_3 \\ -\gamma\beta_3 & A\beta_3\beta_1 & A\beta_3\beta_2 & 1 + A\beta_3^2 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (2.21)$$

$$A = \frac{\gamma - 1}{\beta^2}.$$

No debe producirse ninguna confusión entre el módulo de la velocidad  $\beta$  y el espesor en fase de una lámina  $\beta$ .

Identificando los elementos de las matrices (2.18) y (2.20), se obtiene

$$\gamma = \Gamma^2/2 - 1 = (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2)/2,$$

$$\gamma\beta_1 = \text{Re}(\varsigma), \quad (2.22)$$

$$\gamma\beta_2 = -\text{Im}(\varsigma),$$

$$\gamma\beta_3 = -\Gamma'/2.$$

Las ecuaciones (2.16) y (2.22) establecen la identificación buscada entre los parámetros de la matriz  $\mathbf{M}$  y los correspondientes de la transformación de Lorentz [MS99a, MS99d].

A partir de las variables básicas del campo

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} E^{(+)} \\ E^{(-)} \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

tanto para el ambiente como para el sustrato, se puede construir la matriz de coherencia asociada, definida como [BW99]

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}^\dagger \otimes \mathbf{e} = \begin{pmatrix} |E^{(+)}|^2 & E^{(+)}E^{(-)*} \\ E^{(+)*}E^{(-)} & |E^{(-)}|^2 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

que se transforma como

$$\mathbf{E}_a = \mathbf{M}_{as} \mathbf{E}_s \mathbf{M}_{as}^\dagger, \quad (2.25)$$

es decir, con la misma ley que las coordenadas espacio-temporales en la ecuación (2.7). En consecuencia, podemos obtener las correspondientes coordenadas espacio-tiempo a partir de las variables del campo como

$$e^\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{E} \sigma^\mu), \quad (2.26)$$

esto es

$$\begin{pmatrix} e^0 \\ e^1 \\ e^2 \\ e^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [|E^{(+)}|^2 + |E^{(-)}|^2]/2 \\ \text{Re}[E^{(+)*}E^{(-)}] \\ \text{Im}[E^{(+)*}E^{(-)}] \\ (|E^{(+)}|^2 - |E^{(-)}|^2)/2 \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

para los campos tanto en el medio ambiente, como en el sustrato. La coordenada temporal ( $e^0$ ) es la semisuma de los flujos a cada lado de la multicapa, mientras que la tercera coordenada espacial ( $e^3$ ) es la semidiferencia de los flujos. Es fácil comprobar que el intervalo permanece invariante

$$(e^0)^2 - (e^1)^2 - (e^2)^2 - (e^3)^2 = (e'^0)^2 - (e'^1)^2 - (e'^2)^2 - (e'^3)^2 = 0, \quad (2.28)$$

y, por tanto, se puede concluir que el cuadrivector asociado al campo es de género luz.

### 2.3 Transformación de Lorentz asociada a una multicapa transparente

Como ya se vio en el capítulo anterior, las matrices de transferencia de las multicapas transparentes se reducen al grupo  $SU(1,1)$ , que es un subgrupo de  $SL(2, \mathbb{C})$ . Este subgrupo  $SU(1,1)$  es de gran importancia en el ámbito de la óptica cuántica, especialmente en conexión con el estudio de estados comprimidos de luz [Cav81, HHK89,

HK98, HKN88, HKN97, Per86, RW85, YMK86]. Para nosotros, su interés reside en que es localmente isomorfo al de Lorentz en dos dimensiones espaciales, denotado habitualmente como  $SO(2,1)$  [KN86]. Es importante resaltar que para las multicapas transparentes se conserva el flujo

$$|E_a^{(+)}|^2 + |E_s^{(-)}|^2 = |E_a^{(-)}|^2 + |E_s^{(+)}|^2. \quad (2.29)$$

Esta conservación implica que la coordenada espacial  $e^3$  permanece invariante y la igualdad (2.28) se reduce, en este caso, a

$$(e^0)^2 - (e^1)^2 - (e^2)^2 = (e^3)^2 = \text{constante}, \quad (2.30)$$

que define un hiperboloide de dos hojas. Esta ecuación permite interpretaciones adicionales si las variables básicas del campo (2.23) se escriben en términos de módulo y fase en la forma

$$E^{(\pm)} = a^{(\pm)} \exp[i\varphi^{(\pm)}]. \quad (2.31)$$

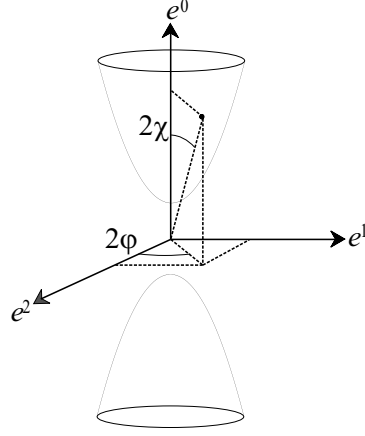
Denotando  $2\varphi = \varphi^{(+)} - \varphi^{(-)}$  e introduciendo el ángulo  $2\chi$  del sistema de coordenadas pseudoesféricas (ver Figura 2.1), la ecuación (2.30) se convierte en

$$\begin{aligned} e^0 &= \varrho \cosh(2\chi), \\ e^1 &= \varrho \sinh(2\chi) \sin(2\varphi), \\ e^2 &= \varrho \sinh(2\chi) \cos(2\varphi), \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde  $\varrho = |e^3|$  es el radio del hiperboloide, que, sin pérdida de generalidad, se puede tomar de aquí en adelante igual a la unidad. En consecuencia, una rotación espacial o un *boost* pueden interpretarse de una forma similar a lo que ocurre en la esfera de Poincaré para la descripción de los estados de polarización total de la luz. De hecho, el grupo de Lorentz constituye también una herramienta básica en este campo. En tal caso, los vectores de Jones se asocian a los vectores (2.23), que se transforman con  $SU(1,1)$ ; mientras que los parámetros de Stokes se comportan como un cuadvivector de la forma (2.27) que se transforman con  $SO(3,1)$ . La acción de los diversos elementos ópticos puede obtenerse a lo largo de estas líneas. El lector interesado puede consultar la literatura pertinente [Bar63, HKN97, OP93, Pel91, Pel92, PR60].

Para nuestra multicapa, una rotación de ángulo  $2\varphi$  alrededor del eje  $e^0$  corresponde a un desfase entre las ondas que viajan hacia adelante y hacia atrás sin cambio en sus amplitudes relativas, como sucede, por ejemplo, en la propagación dentro de una lámina. Análogamente, un *boost* viene representado por una rotación hiperbólica de ángulo  $2\chi$  y corresponde a un cambio de amplitud entre las ondas que viajan hacia adelante y hacia atrás, como acontece en la frontera entre dos medios con índices de refracción distintos [BYM02, GV02, MS00].

Por otro lado, es fácil comprobar que la descomposición polar para la matriz  $\mathbf{M}_{as}$  es ahora



**Figura 2.1.** Coordenadas pseudoesféricas del hiperboloide de dos hojas asociado a  $SO(2,1)$  y a una multicapa transparente.

$$\mathbf{M}_{as} = \mathbf{H}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1/|T_{as}| & R_{as}^*/|T_{as}| \\ R_{as}/|T_{as}| & 1/|T_{as}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-i\tau) & 0 \\ 0 & \exp(i\tau) \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

La componente unitaria  $\mathbf{U}$  es equivalente, bajo el homomorfismo discutido en la sección anterior, a la rotación

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\tau) & -\text{sen}(2\tau) & 0 \\ 0 & \text{sen}(2\tau) & \cos(2\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

esto es, una rotación en el plano  $e^1$ - $e^2$  de ángulo el doble de la fase del coeficiente de transmisión,  $\tau$ .

La componente hermítica  $\mathbf{H}$  es equivalente al *boost*

$$\mathbf{L}(\mathbf{H}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \cos \rho & -\gamma\beta \text{sen} \rho & 0 \\ -\gamma\beta \cos \rho & 1 + (\gamma - 1) \cos^2 \rho & (\gamma - 1) \cos \rho \text{sen} \rho & 0 \\ -\gamma\beta \text{sen} \rho & (\gamma - 1) \cos \rho \text{sen} \rho & 1 + (\gamma - 1) \text{sen}^2 \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

donde el módulo de la velocidad  $\beta$  y el factor relativista  $\gamma$  de este *boost* vienen dados por

$$\beta = \frac{2|R_{as}|}{1 + |R_{as}|^2}, \quad (2.36)$$

$$\gamma = \frac{1 + |R_{as}|^2}{1 - |R_{as}|^2}.$$

La matriz  $\mathbf{L}(\mathbf{H})$  corresponde a un *boost* a un sistema de referencia que se mueve con velocidad constante  $\vec{\beta}$  en el plano  $e^1$ - $e^2$ , en una dirección que forma un ángulo  $\rho$  (fase del coeficiente de reflexión), en sentido antihorario, con el eje  $e^1$ .

Si, como es habitual, se introduce la rapidez  $\zeta$  en la forma

$$\beta = \tanh \zeta, \quad (2.37)$$

$$\gamma = \cosh \zeta,$$

se obtiene una notable identificación entre los coeficientes de reflexión y transmisión de la multicapa y los parámetros de la transformación de Lorentz [MS99b]:

$$R_{as} = \tanh(\zeta/2) \exp(i\rho), \quad (2.38)$$

$$T_{as} = \operatorname{sech}(\zeta/2) \exp(i\tau).$$

Por tanto, el módulo del coeficiente de reflexión  $|R_{as}| = \tanh(\zeta/2)$  [Kha79] se comporta como una velocidad, mientras que el de transmisión  $|T_{as}|$  lo hace como el factor  $1/\gamma$ .





### 3 Interpretación geométrica de la acción de una multicapa transparente

Como se ha explicado anteriormente, la base matemática para nuestro estudio de los medios estratificados es el hecho de que la matriz que representa a una multicapa transparente pertenece al grupo  $SU(1,1)$ , que es localmente isomorfo al grupo  $SO(2,1)$  de las transformaciones de Lorentz en dos dimensiones espaciales. Este enunciado es de índole puramente algebraica, pero tiene también una interesante y profunda interpretación geométrica. El grupo  $SU(1,1)$  es el grupo básico de la geometría hiperbólica en el círculo unidad. En consecuencia, en este capítulo, procederemos a interpretar la acción de una multicapa como una transformación bilineal en el círculo unidad, obtenido por proyección estereográfica del hiperboloide unidad asociado a  $SO(2,1)$ .

Además, el isomorfismo de  $SU(1,1)$  con el grupo  $SL(2, \mathbb{R})$  permite trasladar la estructura geométrica definida en el círculo unidad al semiplano complejo superior. De este modo, se obtiene un modelo alternativo de la geometría hiperbólica que puede ser interesante para relacionar, al menos formalmente, la óptica de multicapas con la óptica geométrica paraxial.

#### 3.1 Función de transferencia en el círculo unidad

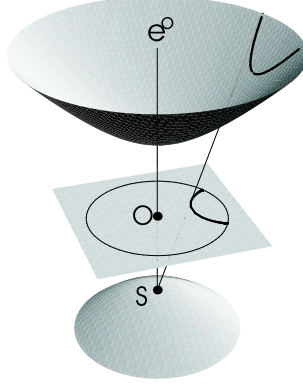
Es fácil comprobar que mediante una proyección estereográfica, tomando el polo sur, de coordenadas  $(-1, 0, 0)$  como centro de proyección, la hoja superior del hiperboloide unidad dado por (2.30), se proyecta en el círculo unidad. La hoja inferior se proyecta en la región externa al círculo unidad y los puntos del infinito sobre la circunferencia unidad, ver Figura 3.1.

En efecto, esta proyección lleva un punto genérico de la hoja superior del hiperboloide de coordenadas  $(e^0, e^1, e^2)$  a un punto  $z$  del círculo unidad dado por

$$z = \frac{e^1 + ie^2}{e^0 + 1}, \quad (3.1)$$

de manera que, teniendo en cuenta (2.27), se cumple

$$z = \frac{E^{(+)*} E^{(-)}}{[|E^{(+)}|^2 + |E^{(-)}|^2]/2 + 1}. \quad (3.2)$$



**Figura 3.1.** Proyección estereográfica de la hoja superior del hiperboloide unidad sobre el círculo unidad.

Ya que, sin pérdida de generalidad, hemos supuesto

$$e^3 = \frac{1}{2}[|E^{(+)}|^2 - |E^{(-)}|^2] = 1, \quad (3.3)$$

se verifica

$$z = \frac{E^{(+)*} E^{(-)}}{[|E^{(+)}|^2 + |E^{(-)}|^2]/2 + [|E^{(+)}|^2 - |E^{(-)}|^2]/2}, \quad (3.4)$$

y finalmente

$$z = \frac{E^{(-)}}{E^{(+)}} , \quad (3.5)$$

que es válido tanto para el ambiente como para el sustrato. Por tanto, esta expresión relaciona de forma directa los puntos del círculo unidad con el cociente de las amplitudes del campo hacia atrás y hacia delante a cada lado de la multicapa.

Teniendo en cuenta esta correspondencia, la acción de una multicapa se puede describir como una transformación bilineal en el plano complejo que lleva un punto en el sustrato  $z_s = E_s^{(-)}/E_s^{(+)}$  a un punto en el ambiente  $z_a = E_a^{(-)}/E_a^{(+)}$  mediante

$$z_a = \Phi[\mathbf{M}_{as}, z_s] = \frac{\mathbf{b}^* + \mathbf{a}^* z_s}{\mathbf{a} + \mathbf{b} z_s} . \quad (3.6)$$

En consecuencia, esta función  $\Phi[\mathbf{M}_{as}, z_s]$  puede llamarse, con toda propiedad, función de transferencia de la multicapa [BYM02, OF00, YMS02].

El punto del infinito viene caracterizado por

$$\Phi[\mathbf{M}_{as}, -\mathbf{a}/\mathbf{b}] = \infty, \quad \Phi[\mathbf{M}_{as}, \infty] = \mathbf{a}^*/\mathbf{b}. \quad (3.7)$$

Nótese que la circunferencia unidad corresponde a la proyección del punto del infinito. En este caso  $|z_a| = |z_s| = 1$  y, por tanto, la circunferencia unidad puede identificarse con la acción de los espejos perfectos; es decir, con los sistemas cuyo coeficiente de transmisión es nulo,  $T_{as} = 0$ .

Esta transformación bilineal define una acción del grupo  $SU(1,1)$  en el plano complejo  $\mathbb{C}$ . Dicho plano aparece descompuesto en tres regiones que permanecen invariantes bajo la acción del grupo: el círculo unidad, su frontera y la región externa. En efecto, se puede comprobar que

$$|z_a|^2 = \frac{|\mathbf{a}|^2 |z_s|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2 \operatorname{Re}(\mathbf{b}\mathbf{a}^* z_s)}{|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 |z_s|^2 + 2 \operatorname{Re}(\mathbf{b}\mathbf{a}^* z_s)}. \quad (3.8)$$

En esta ecuación la diferencia entre el numerador y el denominador es

$$(|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2)(|z_s|^2 - 1) = |z_s|^2 - 1, \quad (3.9)$$

lo que demuestra la invariancia de las regiones mencionadas.

### 3.2 Puntos fijos y traza: clasificación y órbitas de las matrices

Hablando en sentido amplio, siempre que tenemos una transformación entre puntos de un determinado espacio es interesante estudiar los puntos que dicha transformación deja invariantes, si los hay. En nuestro caso, los puntos fijos  $z_f$  de la función de transferencia serán los puntos del plano complejo que, bajo la acción de  $\mathbf{M}_{as}$ , verifiquen

$$z_f = \Phi[\mathbf{M}_{as}, z_f]. \quad (3.10)$$

A partir de (3.6) es fácil comprobar que las soluciones de esta ecuación son

$$z_f = \frac{-i2 \operatorname{Im}(\mathbf{a}) \pm \sqrt{[\operatorname{Tr}(\mathbf{M}_{as})]^2 - 4}}{2\mathbf{b}}, \quad (3.11)$$

donde  $\operatorname{Tr}$  denota la traza de la matriz

$$\operatorname{Tr}(\mathbf{M}_{as}) = 2 \operatorname{Re}(\mathbf{a}) = \frac{2 \cos \tau}{|T_{as}|}. \quad (3.12)$$

Por tanto, la traza lleva de modo natural a la siguiente clasificación: diremos que una matriz es de tipo  $K$  cuando  $[\operatorname{Tr}(\mathbf{M}_{as})]^2 < 4$ , es de tipo  $A$  cuando  $[\operatorname{Tr}(\mathbf{M}_{as})]^2 > 4$  y es de tipo  $N$  cuando  $[\operatorname{Tr}(\mathbf{M}_{as})]^2 = 4$ . Como se estudiará más adelante las matrices de cada una de estas clases dan lugar a distintos movimientos en el círculo unidad.

Puede comprobarse fácilmente que las matrices de tipo  $K$  tienen dos puntos fijos, uno dentro y otro fuera del círculo unidad, relacionados entre sí por una inversión.

Las matrices de tipo  $A$  tienen, también, dos puntos fijos, ambos en el borde del círculo unidad y, finalmente, las matrices de tipo  $N$  tienen un solo punto fijo (doble) en el borde del círculo unidad. Las matrices que llamaremos representantes canónicas de cada una de estas clases vienen dadas por [BYM02, MYS01]

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(\phi) &= \begin{pmatrix} \exp(i\phi/2) & 0 \\ 0 & \exp(-i\phi/2) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}(\xi) &= \begin{pmatrix} \cosh(\xi/2) & i \sinh(\xi/2) \\ -i \sinh(\xi/2) & \cosh(\xi/2) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{N}(\nu) &= \begin{pmatrix} 1 - i\nu/2 & \nu/2 \\ \nu/2 & 1 + i\nu/2 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{3.13}$$

siendo los rangos de los parámetros:  $-2\pi \leq \phi \leq 2\pi$  y  $\xi, \nu \in \mathbb{R}$ .

La matriz  $\mathbf{K}(\phi)$  representa un sistema antirreflejante, es decir, con coeficiente de reflexión  $R_{\mathbf{K}} = 0$ . El mismo sistema también puede ser considerado como la propagación libre del campo  $\mathbf{E}$ , en un medio transparente, a través de un espesor en fase  $\phi/2$ . Obviamente, esto se reduce a una mera traslación del origen de fases.

La segunda matriz,  $\mathbf{A}(\xi)$ , representa una multicapa simétrica, con desfases por transmisión y reflexión  $\tau_{\mathbf{A}} = 0$  y  $\rho_{\mathbf{A}} = \pm\pi/2$ , y coeficiente de transmisión  $T_{\mathbf{A}} = \text{sech}(\xi/2)$ . Esta situación puede obtenerse de diversas formas, quizá la más simple es un sistema Fabry-Perot formado por dos láminas idénticas separadas por un medio transparente. Ajustando los índices de refracción y el espesor de los medios siempre pueden obtenerse los valores deseados.

La última matriz,  $\mathbf{N}(\nu)$ , representa un sistema con el mismo cambio de fase por reflexión y transmisión, puesto que el elemento  $\mathbf{b}$  de la matriz de transferencia es un número real ( $\tau - \rho = 0$  ó  $\pi$ ). Sus coeficientes de transmisión y reflexión verifican  $T_{\mathbf{N}} = \cos(\tau_{\mathbf{N}}) \exp(i\tau_{\mathbf{N}})$  y  $R_{\mathbf{N}} = \text{sen}(\tau_{\mathbf{N}}) \exp(i\tau_{\mathbf{N}})$ , de forma que  $\tan(\tau_{\mathbf{N}}) = \nu/2$ . La forma más simple de conseguir una matriz de este tipo es con un sistema no simétrico formado por dos láminas.

Los puntos fijos de las matrices de tipo  $K$  vienen dados por

$$z_f = \frac{i \left( -\text{Im}(\mathbf{a}) \pm \sqrt{1 - [\text{Re}(\mathbf{a})]^2} \right)}{\mathbf{b}},\tag{3.14}$$

como se ha mencionado, uno de ellos está fuera y el otro dentro del círculo unidad. Es inmediato comprobar que el punto fijo, dentro del círculo unidad, de la matriz canónica  $\mathbf{K}(\phi)$  es el origen.

Por otra parte, los puntos fijos de las matrices de tipo  $A$  son

$$z_f = \frac{-i \operatorname{Im}(\mathbf{a}) \pm \sqrt{[\operatorname{Re}(\mathbf{a})]^2 - 1}}{\mathbf{b}}, \quad (3.15)$$

cuyos módulos verifican

$$|z_f|^2 = \frac{[\operatorname{Im}(\mathbf{a})]^2 + [\operatorname{Re}(\mathbf{a})]^2 - 1}{|\mathbf{b}|^2} = 1. \quad (3.16)$$

Los puntos fijos de la matriz canónica  $\mathbf{A}(\xi)$  son  $+i$  y  $-i$ .

Finalmente, el punto fijo (doble) de las matrices de tipo  $N$  está dado por

$$z_f = \frac{-i \operatorname{Im}(\mathbf{a})}{\mathbf{b}}, \quad (3.17)$$

que también está sobre la circunferencia unidad, ya que  $|z_f| = 1$ . Para la matriz canónica  $\mathbf{N}(\nu)$  el punto fijo es el  $+i$ .

Para el grupo de Lorentz,  $\text{SO}(2,1)$ , se puede establecer una clasificación en todo equivalente a la anterior que explicamos a continuación. Teniendo en cuenta el homomorfismo  $\text{SU}(1,1)$  y este grupo y, empleando la ecuación (2.8), se obtienen directamente las expresiones para las matrices canónicas en  $\text{SO}(2,1)$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{K}}(\phi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \operatorname{sen} \phi \\ 0 & -\operatorname{sen} \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_{\mathbf{A}}(\xi) &= \begin{pmatrix} \cosh \xi & 0 & -\operatorname{senh} \xi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{senh} \xi & 0 & \cosh \xi \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_{\mathbf{N}}(\nu) &= \begin{pmatrix} 1 + (\nu^2/2) & \nu & -\nu^2/2 \\ \nu & 1 & -\nu \\ \nu^2/2 & \nu & 1 - (\nu^2/2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

La acción de cada una de estas matrices tiene una interpretación física clara:  $\mathbf{A}_{\mathbf{K}}(\phi)$  es una rotación espacial de ángulo  $\phi$  en el plano  $e^1$ - $e^2$ . La matriz  $\mathbf{A}_{\mathbf{A}}(\xi)$  está asociada a un *boost* en la dirección del eje  $e^2$  con velocidad de módulo  $\beta = \tanh \xi$  y, por último,  $\mathbf{A}_{\mathbf{N}}(\nu)$  representa una rotación espacial de ángulo  $\tau_{\mathbf{N}}$  y un *boost* de velocidad  $\beta = \tanh(\nu/2)$  ambos en el plano  $e^1$ - $e^2$ .

En lo sucesivo llamaremos matriz conjugada de una dada a la que se obtiene al multiplicarla a cada lado por otra matriz del grupo y su inversa. A partir de las infinitas posibles conjugaciones de cada una de las matrices canónicas  $\mathbf{K}(\phi)$ ,  $\mathbf{A}(\xi)$  y  $\mathbf{N}(\nu)$  obtenemos todas las matrices en cada clase. El conjunto formado por la unión de todas ellas es precisamente el grupo  $SU(1,1)$ .

Nótese que conjugando una matriz determinada  $\mathbf{M}_{as}$  con cualquier otra  $\mathbf{C} \in SU(1,1)$  se obtiene de nuevo una matriz de multicapa, es decir,

$$\widehat{\mathbf{M}}_{as} = \mathbf{C} \mathbf{M}_{as} \mathbf{C}^{-1}. \quad (3.19)$$

La conjugación conserva el valor de la traza y, por supuesto, el del determinante. Por consiguiente, los puntos fijos de la nueva matriz  $\widehat{\mathbf{M}}_{as}$  son los transformados de los puntos fijos de  $\mathbf{M}_{as}$  obtenidos mediante la acción de la matriz  $\mathbf{C}$ .

Si escribimos la matriz  $\mathbf{C}$  como

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_2^* & \mathbf{c}_1^* \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

la relación entre los elementos de  $\widehat{\mathbf{M}}_{as}$  y los de  $\mathbf{M}_{as}$  viene dada por

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{a}} &= \mathbf{a}|\mathbf{c}_1|^2 - \mathbf{a}^*|\mathbf{c}_2|^2 - 2i \operatorname{Im}(\mathbf{b}\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2^*), \\ \widehat{\mathbf{b}} &= \mathbf{b}\mathbf{c}_1^2 - \mathbf{b}^*\mathbf{c}_2^2 - 2i\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 \operatorname{Im}(\mathbf{a}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Desde el punto de vista de nuestra clasificación es esencial hacer notar que si una multicapa tiene una matriz de transferencia de tipo  $K$ ,  $A$  o  $N$ , siempre se puede encontrar una familia de matrices  $\mathbf{C}$  tal que  $\widehat{\mathbf{M}}_{as}$  en la ecuación (3.19) sea precisamente una matriz canónica  $\mathbf{K}(\phi)$ ,  $\mathbf{A}(\xi)$  o  $\mathbf{N}(\nu)$ , respectivamente. La construcción explícita de esta familia de matrices es sencilla: es suficiente imponer que  $\mathbf{C}$  transforme los puntos fijos de  $\mathbf{M}_{as}$  en los correspondientes puntos fijos de  $\mathbf{K}(\phi)$ ,  $\mathbf{A}(\xi)$  o  $\mathbf{N}(\nu)$ .

Como primer caso, consideremos que  $\mathbf{M}_{as}$  es de tipo  $K$  y su punto fijo dentro del círculo unidad es  $z_f$ . Entonces se tiene que

$$\Phi[\mathbf{C}\mathbf{M}_{as}\mathbf{C}^{-1}, 0] = \Phi[\mathbf{C}\mathbf{M}_{as}, z_f] = \Phi[\mathbf{C}, z_f] = 0, \quad (3.22)$$

es decir,

$$\frac{\mathbf{c}_2^* + \mathbf{c}_1^* z_f}{\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 z_f} = 0, \quad (3.23)$$

con lo que

$$\mathbf{c}_2^* = -\mathbf{c}_1^* z_f. \quad (3.24)$$

Igualando en esta última ecuación los módulos y teniendo en cuenta que  $|\mathbf{c}_1|^2 - |\mathbf{c}_2|^2 = 1$ , se llega a

$$|\mathbf{c}_1| = \frac{1}{\sqrt{1 - |z_f|^2}}, \quad (3.25)$$

obteniéndose finalmente

$$\mathbf{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - |z_f|^2}} \exp(i\epsilon), \quad (3.26)$$

$$\mathbf{c}_2 = -\mathbf{c}_1 z_f^*,$$

donde  $\epsilon$  es un parámetro real libre. Por tanto, se obtiene una familia uniparamétrica de soluciones para la matriz  $\mathbf{C}$  que satisface la ecuación (3.19).

Por otra parte, si  $\mathbf{M}_{as}$  es de tipo  $A$  y  $z_{f1} = e^{i\Delta_1}$  y  $z_{f2} = e^{i\Delta_2}$ , son sus puntos fijos en el borde del círculo unidad, se tendrá que

$$\Phi[\mathbf{C}\mathbf{M}_{as}\mathbf{C}^{-1}, i] = \Phi[\mathbf{C}\mathbf{M}_{as}, z_{f1}] = \Phi[\mathbf{C}, z_{f1}] = i, \quad (3.27)$$

$$\Phi[\mathbf{C}\mathbf{M}_{as}\mathbf{C}^{-1}, -i] = \Phi[\mathbf{C}\mathbf{M}_{as}, z_{f2}] = \Phi[\mathbf{C}, z_{f2}] = -i,$$

y resolviendo estas ecuaciones obtenemos

$$\mathbf{c}_1 = \frac{1}{2} \left\{ \epsilon e^{i\alpha_1} + \frac{e^{i\alpha_2}}{\epsilon \operatorname{sen}[\frac{1}{2}(\Delta_1 - \Delta_2)]} \right\}, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{c}_2 = \frac{i}{2} \left\{ \epsilon e^{-i\alpha_1} - \frac{e^{-i\alpha_2}}{\epsilon \operatorname{sen}[\frac{1}{2}(\Delta_1 - \Delta_2)]} \right\},$$

donde

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{2} - \frac{\pi}{4}, \quad \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad (3.29)$$

siendo  $\epsilon$  es un parámetro real,  $\epsilon \geq 0$ . En resumen, también se vuelve a obtener otra familia uniparamétrica de soluciones para la matriz  $\mathbf{C}$ .

Por último, en el caso en que  $\mathbf{M}_{as}$  sea de tipo  $N$  y  $z_f = e^{i\Delta}$  su punto fijo (doble) en el borde del círculo unidad, se tiene que

$$\Phi[\mathbf{C}\mathbf{M}_{as}\mathbf{C}^{-1}, i] = \Phi[\mathbf{C}\mathbf{M}_{as}, z_f] = \Phi[\mathbf{C}, z_f] = i, \quad (3.30)$$

y resolviendo esta ecuación

$$\mathbf{c}_1 = |\mathbf{c}_1| \exp [i(\epsilon + \Delta/2 - \pi/4)], \quad (3.31)$$

$$\mathbf{c}_2 = (|\mathbf{c}_1| - 1) \exp [i(\gamma - \Delta/2 - \pi/4)],$$



siendo

$$\gamma = \arcsen \left( \frac{|\mathbf{c}_1|}{1 - |\mathbf{c}_1|} \sen \epsilon \right). \quad (3.32)$$

Los dos parámetros libres  $|\mathbf{c}_1|$  y  $\epsilon$  están ligados por la condición

$$\left| \frac{|\mathbf{c}_1|}{1 - |\mathbf{c}_1|} \sen \epsilon \right| \leq 1. \quad (3.33)$$

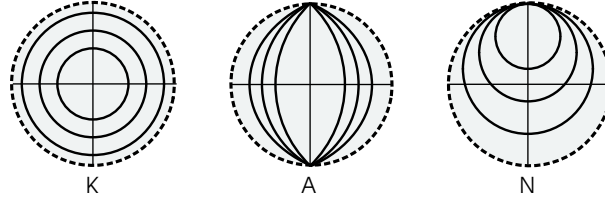
Después de caracterizar los puntos fijos de las funciones de transferencia  $\Phi$  parece lógico preguntarse cómo se transforman los otros puntos del círculo unidad que no son fijos. Para obtener una idea gráfica e intuitiva de la acción geométrica correspondiente a cada matriz es especialmente apropiado el concepto de órbita [Cox68]. Dado un punto  $z$  su órbita está formada por el conjunto de puntos  $z'$  obtenidos, a partir de  $z$ , por la acción de todos los elementos del grupo. Por tanto, para las matrices canónicas de  $SU(1,1)$  las órbitas de un punto,  $z$ , vienen determinadas por

$$\begin{aligned} z' &= \Phi[\mathbf{K}(\phi), z] = z \exp(-i\phi), \\ z' &= \Phi[\mathbf{A}(\xi), z] = \frac{z - i \tanh(\xi/2)}{1 + i z \tanh(\xi/2)}, \\ z' &= \Phi[\mathbf{N}(\nu), z] = \frac{z + (1 + iz)\nu/2}{1 + (z - i)\nu/2}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

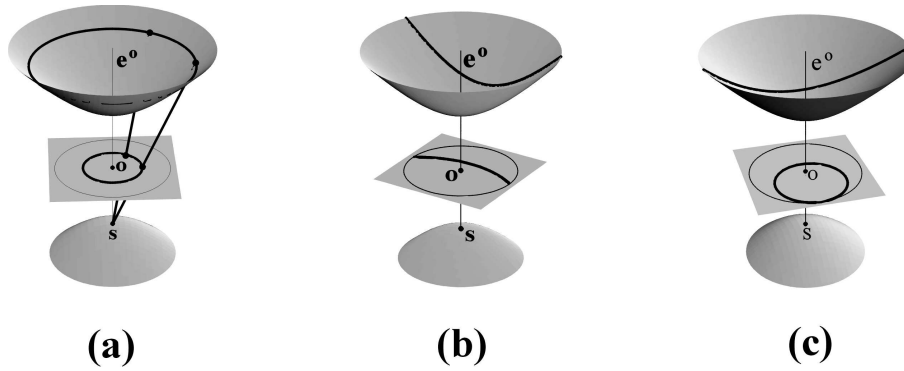
donde los parámetros  $\phi$ ,  $\xi$  y  $\nu$  toman todos los valores de su rango indicados anteriormente.

Como se observa en la Figura 3.2, para las matrices  $\mathbf{K}(\phi)$  las órbitas son circunferencias, con centro en el origen, que pasan por  $z$ . Para estas matrices  $R_{as} = 0$ , y en consecuencia, la acción de cualquier sistema antirreflejante puede representarse como una de estas circunferencias. Para las matrices  $\mathbf{A}(\xi)$ , las órbitas son arcos de circunferencia que unen los puntos  $+i$  y  $-i$  pasando por  $z$ . Finalmente, para las matrices  $\mathbf{N}(\nu)$  las órbitas son circunferencias que pasan por los puntos  $i$ ,  $z$  y  $-z^*$ .

En la Figura 3.3 se representan las correspondientes órbitas sobre el hiperboloide de  $SO(2,1)$  para cada uno de los subgrupos de matrices canónicas  $\mathbf{A}_{\mathbf{K}}(\phi)$ ,  $\mathbf{A}_{\mathbf{A}}(\xi)$  y  $\mathbf{A}_{\mathbf{N}}(\nu)$ . Para  $\mathbf{A}_{\mathbf{K}}(\phi)$  las órbitas son la intersección del hiperboloide con planos  $e^0 = \text{constante}$ ; por tanto, son circunferencias en planos horizontales. Para  $\mathbf{A}_{\mathbf{A}}(\xi)$  las órbitas se obtienen cortando el hiperboloide con planos  $e^1 = \text{constante}$ , es decir, son hipérbolas. Para  $\mathbf{A}_{\mathbf{N}}(\nu)$  corresponden a cortes del hiperboloide con planos  $e^0 - e^2 = \text{constante}$ . Por proyección estereográfica, se obtienen las correspondientes órbitas para las matrices de  $SU(1,1)$  en el círculo unidad.



**Figura 3.2.** Ejemplos de las órbitas de las matrices canónicas  $\mathbf{K}(\phi)$ ,  $\mathbf{A}(\xi)$  y  $\mathbf{N}(\nu)$  del grupo  $SU(1,1)$  en el círculo unidad.



**Figura 3.3.** Hiperboloide unidad sobre el que se ha dibujado una órbita típica para cada una de las matrices: a)  $\mathbf{K}$ , b)  $\mathbf{A}$  y c)  $\mathbf{N}$  del grupo  $SO(2,1)$ . En cada figura se efectúa la proyección estereográfica sobre el polo sur del hiperboloide, para obtener el círculo unidad en el plano  $e^0 = 0$  y las correspondientes órbitas, las cuales representan las acciones de las matrices canónicas de  $SU(1,1)$ .

### 3.3 La descomposición de Iwasawa

En la teoría matemática de las transformaciones lineales se estudian distintas descomposiciones de una matriz como producto de otras más básicas y de interpretación más sencilla [BR77]. Como es lógico, estas técnicas también han sido utilizadas en óptica [AM83, AS94, HKN99, SC95].

Particularmente, dada la importancia de la descomposición de Iwasawa, hemos estudiado su significado en el grupo  $SU(1,1)$  para aplicarlo a nuestra descripción de las propiedades de las multicapas transparentes.

Esta descomposición puede formularse como sigue: todo elemento  $g$  de un grupo de Lie (no compacto, semi-simple) puede expresarse como un producto ordenado de tres elementos, tomados el primero de un subgrupo maximal compacto  $\{K\}$ , el siguiente del subgrupo maximal abeliano  $\{A\}$  y el tercero de un subgrupo maximal nilpotente  $\{N\}$ . Además, esta descomposición es global, en el sentido de que se aplica a cada

uno de los elementos del grupo, y es única, en el sentido de que los elementos de la factorización son únicos y están determinados exclusivamente por  $g$ .

En el caso de las matrices  $\mathbf{M}_{as}$  de multicapas transparentes, cuya acción venimos denotando por

$$\begin{pmatrix} E_a^{(+)} \\ E_a^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^* & \mathbf{a}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_s^{(+)} \\ E_s^{(-)} \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

la descomposición de Iwasawa se expresa en la forma

$$\mathbf{M}_{as} = \mathbf{K}(\phi) \mathbf{A}(\xi) \mathbf{N}(\nu), \quad (3.36)$$

donde  $\mathbf{K}(\phi)$ ,  $\mathbf{A}(\xi)$  y  $\mathbf{N}(\nu)$  son precisamente las matrices canónicas introducidas en (3.13).

Los parámetros  $\phi$ ,  $\xi$  y  $\nu$  vienen dados, en función de los elementos de la matriz de transferencia  $\mathbf{M}_{as}$ , por

$$\begin{aligned} \phi/2 &= \arg(\mathbf{a} + i\mathbf{b}), \\ \xi/2 &= \ln \left( \frac{1}{|\mathbf{a} + i\mathbf{b}|} \right), \\ \nu/2 &= \frac{\operatorname{Re}(\mathbf{a}\mathbf{b}^*)}{|\mathbf{a} + i\mathbf{b}|^2}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Por tanto, dados a priori ciertos límites para  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  (es decir, para los coeficientes de transmisión y reflexión,  $T_{as}$  y  $R_{as}$ ), es posible establecer los correspondientes límites en los parámetros  $\phi$ ,  $\xi$  y  $\nu$ . Teniendo en cuenta esto, la acción de cualquier multicapa puede interpretarse como la composición de las tres acciones básicas dadas por las matrices  $\mathbf{K}(\phi)$ ,  $\mathbf{A}(\xi)$  y  $\mathbf{N}(\nu)$ .

Para nuestro caso particular del grupo  $SU(1,1)$ , que depende de tres parámetros reales, es fácil comprobar que cada uno de los conjuntos  $\{\mathbf{K}(\phi)\}$ ,  $\{\mathbf{A}(\xi)\}$  y  $\{\mathbf{N}(\nu)\}$  es un subgrupo uniparamétrico y abeliano en el que se verifica

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\phi_1)\mathbf{K}(\phi_2) &= \mathbf{K}(\phi_2)\mathbf{K}(\phi_1) = \mathbf{K}(\phi_1 + \phi_2), \\ \mathbf{A}(\xi_1)\mathbf{A}(\xi_2) &= \mathbf{A}(\xi_2)\mathbf{A}(\xi_1) = \mathbf{A}(\xi_1 + \xi_2), \\ \mathbf{N}(\nu_1)\mathbf{N}(\nu_2) &= \mathbf{N}(\nu_2)\mathbf{N}(\nu_1) = \mathbf{N}(\nu_1 + \nu_2). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Esta propiedad será utilizada en el siguiente capítulo para una obtención sencilla y directa de la matriz de transferencia de cualquier sistema periódico.

Todas las matrices de la ecuación (3.36) pertenecen a  $SU(1,1)$  y, por tanto, dejan invariante el flujo, es decir, la expresión  $|E^{(+)}|^2 - |E^{(-)}|^2$  en cada punto interior de

la multicapa y, en particular, en su extremo superior (el ambiente) y en el inferior (el sustrato). Además, se puede comprobar con facilidad que la matriz  $\mathbf{K}(\phi)$  conserva el producto  $E^{(+)}E^{(-)}$ , la matriz  $\mathbf{A}(\xi)$  conserva la forma cuadrática  $E^{(+)^2} + E^{(-)^2}$  y la matriz  $\mathbf{N}(\nu)$  conserva la suma  $E^{(+)} + iE^{(-)}$ .

Similarmente, y en relación con lo mencionado anteriormente para  $\text{SO}(2,1)$ , cualquier transformación de Lorentz en dos dimensiones espaciales puede expresarse como un producto único de las tres matrices canónicas  $\mathbf{A}_{\mathbf{K}}(\phi)$ ,  $\mathbf{A}_{\mathbf{A}}(\xi)$  y  $\mathbf{A}_{\mathbf{N}}(\nu)$  dadas en (3.18).

Por otra parte, y como fue anticipado en la introducción, es interesante señalar aquí la notable correspondencia –un isomorfismo– entre  $\text{SU}(1,1)$  y el grupo  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  de la óptica geométrica paraxial. Con este fin, aplicando la matriz unitaria

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

en ambos miembros de la ecuación (3.35) se obtiene

$$\mathcal{E}_a = \mathcal{M}_{as} \mathcal{E}_s, \quad (3.40)$$

donde los nuevos vectores asociados al campo vienen dados por

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}^{(+)} \\ \mathcal{E}^{(-)} \end{pmatrix} = \mathbf{U} \mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} E^{(+)} + iE^{(-)} \\ E^{(-)} + iE^{(+)} \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

y la matriz de la multicapa conjugada por  $\mathbf{U}$  es

$$\mathcal{M}_{as} = \mathbf{U} \mathbf{M}_{as} \mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Evidentemente, esta conjugación por  $\mathbf{U}$  conserva el valor del determinante y también el de la traza. Los elementos de la matriz  $\mathcal{M}_{as}$  son números reales dados por

$$a = \text{Re}(\mathbf{a}) + \text{Im}(\mathbf{b}), \quad b = \text{Im}(\mathbf{a}) + \text{Re}(\mathbf{b}), \quad (3.43)$$

$$c = -\text{Im}(\mathbf{a}) + \text{Re}(\mathbf{b}), \quad d = \text{Re}(\mathbf{a}) - \text{Im}(\mathbf{b}).$$

En otras palabras, las matrices  $\mathcal{M}_{as}$  pertenecen al grupo  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  de las matrices reales  $2 \times 2$  unimodulares, que es el grupo de matrices ABCD típicas de la óptica geométrica [Dra82, SW86, Wol86]. Por tanto, la transformación por  $\mathbf{U}$  establece una correspondencia uno a uno entre el grupo  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  –de matrices  $\mathcal{M}_{as}$ – y el grupo  $\text{SU}(1,1)$  –de matrices  $\mathbf{M}_{as}$ – que nos permitirá hacer una traducción directa de las propiedades de un grupo al otro [MYS01, SMY01].

De este modo, por conjugación de la descomposición de Iwasawa expresada en (3.36) con la matriz unitaria  $\mathbf{U}$  dada en (3.39), se obtiene la descomposición para  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  [SSM84]

$$\mathcal{M}_{as} = \mathcal{K}(\phi) \mathcal{A}(\xi) \mathcal{N}(\nu), \quad (3.44)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos(\phi/2) & \text{sen}(\phi/2) \\ -\text{sen}(\phi/2) & \cos(\phi/2) \end{pmatrix}, \\ \mathcal{A}(\xi) &= \begin{pmatrix} \exp(\xi/2) & 0 \\ 0 & \exp(-\xi/2) \end{pmatrix}, \\ \mathcal{N}(\nu) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \nu & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

En el presente caso del grupo  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ , tengamos en cuenta que las matrices ABCD de la óptica geométrica actúan sobre las coordenadas posición  $\mathbf{x}$  y momento  $\mathbf{p}$  (dirección que forma la intersección de un rayo con un plano perpendicular al eje óptico del sistema), que son las variables naturales de la óptica de rayos.

Lo que indica, entonces, la ecuación (3.44) es que la matriz de cualquier sistema óptico paraxial puede factorizarse como producto de otras tres matrices de interpretación más sencilla. La matriz  $\mathcal{K}(\phi)$  representa una rotación de ángulo  $\phi/2$  en el espacio de fases  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ .  $\mathcal{A}(\xi)$  realiza un cambio de escala de factor  $m = \exp(\xi/2)$  para  $\mathbf{x}$  y  $1/m$  para  $\mathbf{p}$ . Este sistema se conoce como una transformación de escala. Finalmente, la matriz  $\mathcal{N}(\nu)$  representa la acción de una lente delgada de potencia  $\nu$  [SMS85].

Como antes, la clave de este resultado es que, cuando la matriz de transferencia de un sistema óptico tiene  $[\text{Tr}(\mathcal{M}_{as})]^2$  menor, mayor o igual a 4, siempre se puede encontrar otra familia de matrices referida a una nueva base de vectores, tal que la acción del sistema óptico, en esa base, es equivalente a una rotación, a una transformación de escala o a una lente, respectivamente [SMY01].

En completa equivalencia con los invariantes encontrados para la descomposición de Iwasawa de  $\text{SU}(1,1)$ , es directo obtener que el grupo  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  preserva  $\text{Im}[\mathcal{E}^{(+)}\mathcal{E}^{(-)*}]$ , la matriz  $\mathcal{K}(\phi)$  conserva la suma  $\mathcal{E}^{(+)^2} + \mathcal{E}^{(-)^2}$ , la matriz  $\mathcal{A}(\xi)$  conserva el producto  $\mathcal{E}^{(+)}\mathcal{E}^{(-)}$  y, finalmente, la matriz  $\mathcal{N}(\nu)$  preserva  $\mathcal{E}^{(+)}$ .

Desde el punto de vista geométrico la conjugación por la matriz  $\mathbf{U}$  traslada la estructura del círculo unidad al semiplano complejo superior  $\mathbb{H}$ . La correspondencia entre un punto  $z$  del círculo unidad y el complejo  $\omega \in \mathbb{H}$  viene expresada por la ecuación

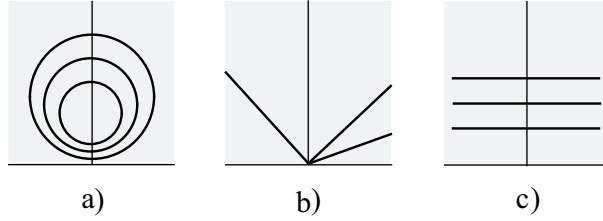
$$\omega = \Phi[\mathcal{U}, z] = \frac{z + i}{1 + iz}. \quad (3.46)$$

Es fácil comprobar que, bajo esta acción, el interior del círculo unidad se transforma en el semiplano complejo superior  $\mathbb{H}$ , el borde del círculo unidad en el eje real (ambos corresponden a los puntos de infinito) y el exterior del círculo unidad se transforma en el semiplano complejo inferior.

El isomorfismo entre  $SU(1,1)$  y  $SL(2, \mathbb{R})$  permite también transformar la función de transferencia  $\Phi$  de  $SU(1,1)$  en otra función de transferencia  $\Psi$  para las matrices de  $SL(2, \mathbb{R})$  actuando sobre  $\mathbb{H}$ , y determinar las órbitas asociadas a cada una de las matrices canónicas de este grupo [YMS02].

Es sencillo comprobar que estas órbitas vienen dadas por

$$\begin{aligned} \omega' &= \Psi[\mathcal{K}, \omega] = \frac{\omega - \tan(\phi/2)}{1 + \omega \tan(\phi/2)}, \\ \omega' &= \Psi[\mathcal{A}, \omega] = \omega \exp(-\xi), \\ \omega' &= \Psi[\mathcal{N}, \omega] = \omega + \nu. \end{aligned} \quad (3.47)$$



**Figura 3.4.** Ejemplos de las órbitas de las matrices canónicas del grupo  $SL(2, \mathbb{R})$  en el semiplano complejo superior  $\mathbb{H}$ : a) matrices  $\mathcal{K}(\phi)$ , b) matrices  $\mathcal{A}(\xi)$  y c) matrices  $\mathcal{N}(\nu)$ .

Para un punto  $\omega$  las órbitas correspondientes a las matrices  $\mathcal{K}(\phi)$  son circunferencias con centro en el eje imaginario que pasan por los puntos  $\omega$  y  $-1/\omega$ . Las asociadas a las matrices  $\mathcal{A}(\xi)$  son líneas rectas que pasan por el origen y el punto  $\omega$ . Finalmente, las órbitas de las matrices  $\mathcal{N}(\nu)$  son rectas paralelas al eje real que pasan por el punto  $\omega$  (ver Figura 3.4).

## 3.4 Ejemplos y aplicaciones

### 3.4.1 Algunos sistemas sencillos

En esta sección pretendemos explicar el significado del formalismo anterior, aplicándolo al estudio de algunos sistemas concretos. En el contexto de las multicapas ópticas, el sistema más simple que se puede considerar es, ciertamente, una lámina planoparalela situada entre dos medios, ambiente y sustrato, iguales. A pesar de su sencillez la lámina contiene toda la física esencial de una multicapa, es decir, las reflexiones múltiples en cada frontera.

Consideremos, por tanto, una lámina transparente (medio 1) de índice de refracción  $n_1$  y espesor  $d_1$  inmersa en aire (medio 0). Para este sistema se tiene la conocida solución [AB87]

$$T_{as} = T_{010} = \frac{(1 - r_{01}^2) \exp(-i\beta_1)}{1 - r_{01}^2 \exp(-i2\beta_1)}, \quad (3.48)$$

donde  $r_{01}$  es el coeficiente de reflexión de Fresnel en la frontera 01 y  $\beta_1$  el espesor en fase de la lámina definido en (1.41). Si  $\mathbf{M}_{010}$  es la matriz de transferencia de esta lámina, es fácil comprobar que

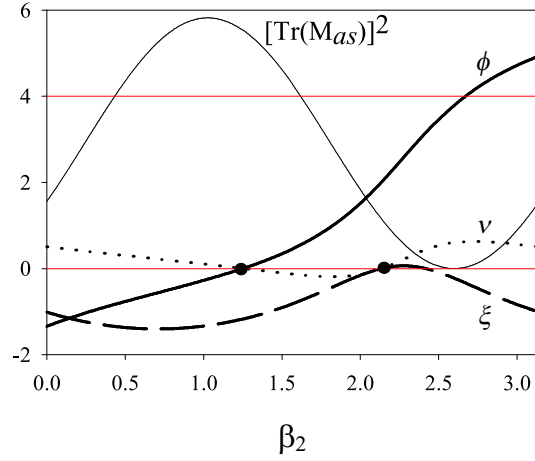
$$[\text{Tr}(\mathbf{M}_{010})]^2 = 4 \cos^2(\beta_1) \leq 4, \quad (3.49)$$

donde la igualdad se da en condiciones de resonancia, es decir, cuando  $|T_{010}| = 1$ . En otras palabras, la matriz del sistema formado por una sola lámina es siempre de tipo  $K$ .

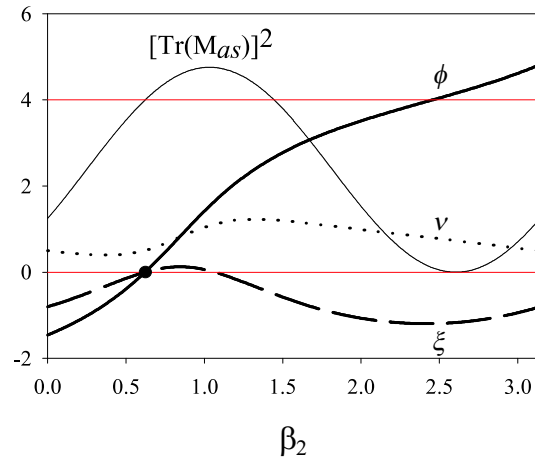
Consideremos ahora dos láminas (1 y 2) descritas por las matrices  $\mathbf{M}_{010}$  y  $\mathbf{M}_{020}$ , respectivamente. El sistema obtenido cuando se las superpone viene descrito, como se mencionó al final del capítulo 1, por el producto de matrices  $\mathbf{M}_{010}\mathbf{M}_{020}$  [MS99c]. Puesto que cualquier sistema estratificado puede ser siempre considerado como una composición de simples láminas, podemos concluir que toda matriz de multicapa se obtiene como un producto de matrices de tipo  $K$ .

Estudieemos a continuación el caso de un Fabry-Perot formado por dos láminas idénticas, cada una de ellas con espesor en fase  $\beta_1$ , separadas –para mayor sencillez– por una lámina de aire de espesor en fase  $\beta_2$ . Después de la lámina inmersa en aire, este ejemplo es el más simple, pero no trivial, de sistema simétrico.

En la Figura 3.5 se representan, para este Fabry-Perot, los valores de  $[\text{Tr}(\mathbf{M}_{as})]^2$  y de los parámetros  $\phi$ ,  $\xi$  y  $\nu$  cuando  $\beta_2$  varía entre 0 y  $\pi$ . Es evidente que el sistema es de diferente tipo  $K$ ,  $A$  o  $N$  dependiendo del valor de  $\beta_2$ . En los dos puntos marcados se anulan dos de los tres parámetros  $\phi$ ,  $\xi$  o  $\nu$  y representan comportamientos especiales para los sistemas simétricos. En el punto de la izquierda tenemos el caso  $\phi = \nu = 0$  que corresponde a un sistema cuya matriz de transferencia es precisamente la canónica  $\mathbf{A}(\xi)$ . En dicho punto el sistema presenta cambio de fase por transmisión nulo,  $\tau = 0$ , y



**Figura 3.5.** Valores de  $[\text{Tr}(\mathbf{M}_{as})]^2$  y de los parámetros  $\phi$ ,  $\xi$  y  $\nu$  de la descomposición de Iwasawa para un Fabry-Perot simétrico formado por dos láminas idénticas ( $n_1 = 1.7$ ,  $d_1 = 1$  mm),  $\theta_0 = \pi/4$ ,  $\lambda = 0.6888$   $\mu\text{m}$  y luz polarizada  $s$ , en función del espesor en fase que las separa,  $\beta_2$ , en radianes.



**Figura 3.6.** Se representan los mismos parámetros que en la figura anterior pero para un sistema no simétrico formado por una lámina de vidrio ( $n_1 = 1.5$  y  $\beta_1 = 5.50$  radianes) con un recubrimiento de sulfuro de zinc ( $n_2 = 2.3$ ), en función de su espesor en fase,  $\beta_2$ .



por reflexión  $\rho = \pm\pi/2$ . El punto de la derecha para el que  $\xi = \nu = 0$  representa un sistema con matriz de transferencia  $\mathbf{K}(\phi)$ , es decir, un sistema antirreflejante con  $T_{as} = \exp(-i\phi/2)$ . Debido a que este Fabry-Perot es simétrico nunca puede ser representado exclusivamente por una matriz canónica  $\mathbf{N}(\nu)$ .

Para describir, dentro del formalismo que venimos utilizando, las propiedades características de una multicapa no simétrica, consideremos el sistema formado por dos láminas, una de vidrio (con espesor en fase  $\beta_1$ ) recubierta en su cara posterior con una película de sulfuro de zinc (con espesor en fase  $\beta_2$ ). En la Figura 3.6 se representan los valores de  $\phi$ ,  $\xi$  y  $\nu$  para un valor fijo de  $\beta_1 = 5.50$  radianes y  $\beta_2$  variando entre 0 y  $\pi$ . En el único punto que ahora aparece marcado se tiene  $\phi = \xi = 0$  y  $[\text{Tr}(\mathbf{M}_{as})]^2 = 4$ , por tanto, en dicho punto la matriz de transferencia de este sistema es la canónica de tipo  $\mathbf{N}(\nu)$ . El elemento  $\mathfrak{b}$  de la matriz de transferencia es un número real y el sistema presenta el mismo cambio de fase por transmisión que por reflexión (salvo  $\pi$ ). Al contrario que en el ejemplo anterior, este caso nunca se puede representar exclusivamente por una matriz  $\mathbf{A}(\xi)$ , puesto que es no simétrico.

### 3.4.2 Estabilidad de la condición de reflectancia nula

Lekner ha estudiado, con particular detalle, la condición de reflectancia nula de multicapas simétricas [Lek89, Lek90]. Comprobaremos ahora que la descomposición de Iwasawa proporciona una buena herramienta para tratar este problema [MYS02].

Como ya hemos mencionado en el capítulo 1, para una multicapa simétrica y transparente  $\tau - \rho = \pm\pi/2$ . Esto implica que el elemento  $\mathfrak{b}$  de la matriz de transferencia es un número imaginario puro. Por tanto, la matriz  $\mathbf{M}_{as}$  depende sólo de dos parámetros reales, un módulo y una fase, lo que supone que  $\phi$ ,  $\xi$  y  $\nu$  no son independientes –ver (3.37)–. De hecho, es fácil comprobar que, en este caso

$$\nu = (e^\xi - 1) \tan(\phi/2), \quad (3.50)$$

y, por tanto,  $R_{as}$  puede escribirse como

$$R_{as} = e^{-i\phi} \frac{\tanh(\xi/2)[\tan(\phi/2) - i]}{1 - i \tanh(\xi/2) \tan(\phi/2)}. \quad (3.51)$$

Con esta expresión para el coeficiente de reflexión pensamos que nuestro formalismo complementa y amplía los resultados de Lekner en la caracterización de sistemas simétricos antirreflejantes frente a pequeñas variaciones en sus parámetros constructivos.

A partir de la ecuación (3.51) se puede obtener reflectancia nula ( $R_{as} = 0$ ) con la simple condición

$$\xi = 0. \quad (3.52)$$

Teniendo en cuenta (3.50), esto implica directamente  $\nu = 0$  y, por tanto, en este caso,  $\mathbf{M}_{as}$  se reduce trivialmente a una matriz  $\mathbf{K}(\phi)$ , es decir, precisamente a un sistema antirreflejante.

Partiendo de un argumento de continuidad, Lekner demostró que “*almost all partial reflectors with symmetric profiles which are close in parameter space to a profile which has reflectivity zeros, will also have reflectivity zeros*” (Ref. [Lek90], pág. 319).

A continuación explicamos cómo nuestro formalismo permite dar un criterio analíticamente más preciso. Supongamos una multicapa simétrica que satisface la condición (3.52) y en la que se varía algún parámetro (índice de refracción, espesor, ángulo de incidencia, etc.) que designamos genéricamente por  $\ell$ . Obviamente, estamos refiriéndonos exclusivamente al caso en el que todas las variaciones admisibles preservan la simetría del sistema. La variación del parámetro  $\ell$  induce cambios en  $R_{as}$  y, por tanto, en  $\phi$  y  $\xi$ . En la nueva multicapa el coeficiente de reflexión,  $R_{as}$ , seguirá siendo nulo si se satisface la condición  $dR_{as}/d\ell = 0$ ; esto es

$$\frac{dR_{as}}{d\ell} = \left. \frac{\partial R_{as}}{\partial \phi} \right|_{\xi=0} \frac{d\phi}{d\ell} + \left. \frac{\partial R_{as}}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} \frac{d\xi}{d\ell} = 0. \quad (3.53)$$

De la ecuación (3.51), se obtiene directamente que  $\partial R_{as}/\partial \phi|_{\xi=0}$  es idénticamente nula, mientras que  $\partial R_{as}/\partial \xi|_{\xi=0}$  nunca se anula. Por tanto, la condición de estabilidad que estamos buscando se puede expresar sencillamente como

$$\frac{d\xi}{d\ell} = 0. \quad (3.54)$$

En consecuencia, nuestro formalismo podría tener importancia práctica en el diseño y caracterización de sistemas simétricos antirreflejantes.



## 4 Sistemas periódicos

La propagación de la luz en las multicapas periódicas está gobernada por ecuaciones muy similares a las que describen el movimiento de los electrones en los sólidos cristalinos. Por este motivo dichas estructuras han sido denominadas como cristales fotónicos.

La teoría habitual considera la estructura periódica como una red unidimensional invariante bajo traslaciones, lo que requiere que, estrictamente, el sistema sea de tamaño infinito. Evidentemente, esta situación no es posible en la práctica. En física del estado sólido se soslaya esta dificultad considerando que la red se cierra formando un anillo; es decir, imponiendo condiciones de contorno periódicas. Mientras que esto parece razonable para una red de átomos, obviamente es imposible de conseguir con un medio estratificado.

El tratamiento estándar que se puede encontrar en la literatura conduce a una ecuación de autovalores para el factor de Bloch suponiendo estructuras periódicas infinitas. Se obtiene que hay una elevada reflexión (bandas prohibidas) cuando el valor absoluto de la traza de la matriz que describe el periodo básico es mayor que 2.

Por otra parte, es conocido que en la práctica no son necesarios muchos periodos para tener bandas prohibidas. Por este motivo parece interesante considerar agrupamientos de  $N$  periodos que llamaremos, más apropiadamente, estructuras periódicas “finitas”. La matriz que describe estas estructuras puede obtenerse como la potencia  $N$ -ésima de la del periodo que se repite, en términos de los polinomios de Chebyshev. Este procedimiento proporciona expresiones exactas para la reflectancia, pero son tan complicadas que es difícil tener, a primera vista, una idea intuitiva del comportamiento del sistema. Además, ha de obtenerse numéricamente la distinción entre bandas prohibidas y permitidas.

El propósito de este capítulo es mostrar un nuevo marco para la formulación de las propiedades de estas estructuras periódicas: el valor de la traza de la matriz del periodo básico nos llevará, en primer lugar, a clasificarlas en tres tipos, con propiedades caracterizadas por las matrices canónicas que se han descrito en el capítulo anterior. Posteriormente calcularemos la reflectancia de cualquier sistema periódico y, para finalizar, analizaremos las condiciones para obtener reflectancia máxima para todos los ángulos de incidencia.

En nuestra opinión, la ventaja del tratamiento que se presenta es doble: por un lado, se deducen de forma natural las diferentes leyes para las bandas prohibidas y las permitidas y, por otro, se obtienen, sin realizar ninguna aproximación, expresiones sencillas y exactas para las correspondientes reflectancias de estos sistemas periódicos “finitos”.

#### 4.1 Tres tipos canónicos de reflectancia

Consideremos un sistema periódico cuyo periodo base es una multicapa transparente con los medios ambiente y sustrato idénticos. La matriz  $\mathbf{M}_{as}$  que representa este periodo básico viene dada por la ecuación (1.64) que ya ha sido estudiada con detalle. La condición de estricta periodicidad exige que el vector de los campos en la celda  $n$ -ésima verifique la ecuación

$$\mathbf{E}_{n-1} = \mathbf{M}_{as}\mathbf{E}_n. \quad (4.1)$$

En una estructura infinita el teorema de Floquet [Lek94, Yeh88] asegura que estas celdas que ocupan los lugares  $n-1$  y  $n$  son equivalentes y, por tanto, los dos vectores de la ecuación (4.1) deben ser proporcionales

$$\mathbf{E}_{n-1} = \lambda\mathbf{E}_n, \quad (4.2)$$

donde  $\lambda$  es el denominado factor de Bloch. A partir de estas dos ecuaciones se tiene la de valores propios

$$(\mathbf{M}_{as} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{E}_n = 0, \quad (4.3)$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad  $2 \times 2$ . Resulta así que el factor de Bloch,  $\lambda$ , se determina como autovalor de la matriz de transferencia del periodo básico,  $\mathbf{M}_{as}$ , es decir,

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{Tr}(\mathbf{M}_{as}) + 1 = 0, \quad (4.4)$$

cuyas soluciones son

$$\lambda = \frac{1}{2}[\operatorname{Tr}(\mathbf{M}_{as}) \pm \sqrt{\operatorname{Tr}(\mathbf{M}_{as})^2 - 4}]. \quad (4.5)$$

Si  $[\operatorname{Tr}(\mathbf{M}_{as})]^2 < 4$ , los dos valores de  $\lambda$  son complejos conjugados y tienen módulo unidad, por lo que la amplitud del campo oscila en la estructura y es posible la propagación de ondas, es decir, se tiene una banda permitida.

Por el contrario, si  $[\operatorname{Tr}(\mathbf{M}_{as})]^2 > 4$  las soluciones son reales y distintas a la unidad con lo que la amplitud del campo crecerá o decrecerá en cada periodo, es decir, no es posible la propagación de ondas: se tiene una banda prohibida. En este caso se produce una muy elevada reflexión de la luz incidente y, si el fenómeno ocurre para todos los ángulos de incidencia, se habla de reflectores omnidireccionales o “espejos dieléctricos perfectos” [Dow98, FWF98, Joa95, Lek00, Yab98, YYH77].

Los límites entre las bandas permitidas y prohibidas se obtienen, precisamente, en la situación en que  $[\text{Tr}(\mathbf{M}_{as})]^2 = 4$ .

Estas estructuras periódicas producen, para la reflexión, resonancias análogas a las que se obtienen en la difracción de rayos X por redes cristalinas, por lo que habitualmente se han llamado reflectores de Bragg [Yeh88]. El diseño apropiado del periodo básico permite obtener una reflectancia extremadamente alta para una región espectral seleccionada [Sou99].

Acabamos de explicar, brevemente, el tratamiento estándar de estos sistemas estrictamente periódicos que supone, de hecho, que el sistema sea de tamaño infinito. Como ya se ha mencionado, esta situación es físicamente impracticable, porque en nuestro contexto de las multicapas ópticas sólo se pueden confeccionar estructuras finitas de  $N$  periodos. En consecuencia, hemos hecho notar [MYS03] que el tratamiento anterior no es completamente satisfactorio [BDS96, Coj01].

La matriz de transferencia para una estructura de  $N$  periodos es igual a  $(\mathbf{M}_{as})^N$ . Existen fórmulas explícitas para los correspondientes elementos de la potencia de una matriz [BW99, Lek87], aunque son complicadas. Además, esas ecuaciones no dan expresiones analíticas para las bandas prohibidas y, en la práctica, son difíciles de analizar.

En el capítulo anterior hemos estudiado los tres tipos canónicos de matrices  $\mathbf{K}(\phi)$ ,  $\mathbf{A}(\xi)$  y  $\mathbf{N}(\nu)$  del grupo  $\text{SU}(1,1)$ . Para nuestros propósitos actuales es esencial tener en cuenta que es muy fácil obtener, a partir de (3.13), la reflectancia  $\mathcal{R} = |R_{as}|^2$  asociada con cada una de esas tres matrices [MYS03]

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\mathbf{K}} &= 0, \\ \mathcal{R}_{\mathbf{A}} &= \tanh^2(\xi/2), \\ \mathcal{R}_{\mathbf{N}} &= \frac{(\nu/2)^2}{[1 + (\nu/2)^2]}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Mientras que  $\mathcal{R}_{\mathbf{K}}$  es idénticamente nula –las matrices  $\mathbf{K}(\phi)$  representan sistemas antirreflejantes–  $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}$  y  $\mathcal{R}_{\mathbf{N}}$  tienden a la unidad cuando crecen  $\xi$  y  $\nu$ . Es decir, las matrices  $\mathbf{A}(\xi)$  son las representantes canónicas de las bandas prohibidas y las matrices  $\mathbf{N}(\nu)$  representan canónicamente los límites de las bandas. Sin embargo, hay una diferencia entre estos dos últimos casos puesto que  $\mathcal{R}_{\mathbf{A}}$  tiende a la unidad exponencialmente y  $\mathcal{R}_{\mathbf{N}}$  lo hace como  $O(\nu^{-2})$ .

Para fundamentar el cálculo posterior conviene recordar aquí que, si la matriz de transferencia de una multicapa es de tipo  $K$ ,  $A$  o  $N$ , siempre se puede encontrar una familia de matrices  $\mathbf{C}$  tal que

$$\widehat{\mathbf{M}}_{as} = \mathbf{C} \mathbf{M}_{as} \mathbf{C}^{-1}\tag{4.7}$$

es justo una de las mencionadas matrices canónicas. Por ello, la ecuación (4.7) nos permite describir la acción de la multicapa en la forma

$$\widehat{\mathbf{E}}_a = \widehat{\mathbf{M}}_{as} \widehat{\mathbf{E}}_s, \quad (4.8)$$

donde los nuevos vectores asociados al campo son

$$\widehat{\mathbf{E}} = \mathbf{C} \mathbf{E}. \quad (4.9)$$

En conclusión, esta matriz  $\mathbf{C}$  que transforma, por conjugación, a cualquier  $\mathbf{M}_{as}$  en su forma canónica, proporciona una nueva base de vectores en la que el periodo básico del sistema tiene, precisamente, una de las reflectancias dadas en las ecuaciones (4.6).

## 4.2 Reflectancia de estructuras periódicas

En esta sección explicitamos con detalle el cálculo de la reflectancia correspondiente a cualquier sistema periódico. Para el estudio y caracterización de estos sistemas es importante tener en cuenta que, como se ha mencionado en las ecuaciones (3.38) del capítulo anterior, cada uno de los subgrupos  $\mathbf{K}(\phi)$ ,  $\mathbf{A}(\xi)$  o  $\mathbf{N}(\nu)$  de la descomposición de Iwasawa es abeliano y uniparamétrico; es decir, si  $\widehat{\mathbf{M}}_{as}$  es una de las matrices canónicas

$$\widehat{\mathbf{M}}_{as}(\mu_1) \widehat{\mathbf{M}}_{as}(\mu_2) = \widehat{\mathbf{M}}_{as}(\mu_1 + \mu_2), \quad (4.10)$$

donde  $\mu$  es el parámetro  $\phi$ ,  $\xi$  o  $\nu$ , según el caso.

En consecuencia, a partir de (4.7) y (4.10), para un sistema de  $N$  periodos la matriz de transferencia global verifica

$$\mathbf{M}_{as}^{(N)} = (\mathbf{M}_{as})^N = \mathbf{C}^{-1} [\widehat{\mathbf{M}}_{as}(\mu)]^N \mathbf{C} = \mathbf{C}^{-1} \widehat{\mathbf{M}}_{as}(N\mu) \mathbf{C}, \quad (4.11)$$

importante ecuación que no depende explícitamente del periodo básico.

A partir de esta expresión se pueden prever, para cualquier sistema periódico, tres comportamientos universales de la reflectancia, dependiendo de la traza de la matriz del periodo básico.

Parece importante hacer notar que aunque la matriz de transferencia de una multicapa de  $N$  periodos es la potencia  $N$ -ésima de la matriz del periodo básico, esto no es cierto para la reflectancia. La reflectancia del sistema periódico no es igual a la potencia  $N$ -ésima de la del periodo, es decir,  $\mathcal{R}^{(N)} \neq (\mathcal{R})^N$ .

Consideraremos primero las bandas prohibidas que vienen dadas por la condición  $[\text{Tr}(\mathbf{M}_{as})]^2 > 4$ , es decir, cuando el periodo está representado por una matriz de tipo A. En este caso la ecuación (4.7) queda

$$\mathbf{M}_{as} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}(\chi) \mathbf{C}, \quad (4.12)$$

donde

$$\text{Re}(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{M}_{as}) = \cosh(\chi) > 1. \quad (4.13)$$

Sólo se han tenido en cuenta los valores positivos de  $\text{Re}(\mathbf{a})$ ; es inmediato un tratamiento similar para los valores negativos.

Si denotamos

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_2^* & \mathbf{c}_1^* \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

una solución para la matriz  $\mathbf{C}$  de la ecuación (4.12) es

$$\mathbf{c}_1 = F(\mathbf{b}^* + i \sinh \chi), \quad \mathbf{c}_2 = -iF \text{Im}(\mathbf{a}), \quad (4.15)$$

donde  $F$  vale

$$F = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh \chi [\sinh \chi - \text{Im}(\mathbf{b})]}}. \quad (4.16)$$

Realizando el producto de matrices indicado en la ecuación (4.11) se obtiene, finalmente, la reflectancia de un sistema formado por  $N$  periodos como

$$\mathcal{R}_A^{(N)} = \frac{|\mathbf{b}|^2}{|\mathbf{b}|^2 + [\sinh \chi / \sinh(N\chi)]^2}. \quad (4.17)$$

Conviene resaltar que esta expresión es exacta para cualquier valor de  $N$ . Cuando  $N$  crece  $\mathcal{R}_A^{(N)}$  se aproxima exponencialmente a la unidad, tal como se espera para una banda prohibida.

Los límites de estas bandas prohibidas vienen determinados por la condición  $[\text{Tr}(\mathbf{M}_{as})]^2 = 4$ , es decir, cuando la matriz de transferencia del periodo es de tipo  $N$ . Un cálculo similar al anterior muestra que ahora

$$\mathcal{R}_N^{(N)} = \frac{|\mathbf{b}|^2}{|\mathbf{b}|^2 + (1/N)^2}, \quad (4.18)$$

que presenta un comportamiento típico  $\mathcal{R}_N^{(N)} \sim 1 - O(N^{-2})$ , que es universal en la física de la reflexión. Los resultados generales (4.17) y (4.18) habían sido obtenidos anteriormente, en el marco de otras formulaciones diferentes, por Lekner y Yeh [Lek87, Yeh88].

Por último, en las bandas permitidas se tiene  $[\text{Tr}(\mathbf{M}_{as})]^2 < 4$ , es decir, cuando  $\mathbf{M}_{as}$  es una matriz de tipo  $K$ . Para este caso, el cálculo proporciona el resultado

$$\mathcal{R}_K^{(N)} = \frac{Q^2 - 2Q \cos(2N\Omega)}{1 + Q^2 - 2Q \cos(2N\Omega)}, \quad (4.19)$$

donde

$$Q = \frac{|\mathbf{b}|^2}{|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} - e^{i\Omega}|^2}, \quad (4.20)$$

y la fase  $\Omega$  viene determinada por



$$e^{i\Omega} = (\operatorname{Re} \mathbf{a}) + i\sqrt{1 - (\operatorname{Re} \mathbf{a})^2}. \quad (4.21)$$

En consecuencia, la reflectancia varía, con  $N$ , entre los valores  $(\mathcal{Q}^2 - 2\mathcal{Q})/(\mathcal{Q} - 1)^2$  y  $(\mathcal{Q}^2 + 2\mathcal{Q})/(\mathcal{Q} + 1)^2$ .

En resumen, las ecuaciones (4.17), (4.18) y (4.19) proporcionan, para cualquier sistema periódico, los tres tipos básicos de reflectancia que buscábamos.

### 4.3 Optimización de espejos dieléctricos omnidireccionales

Los resultados obtenidos en la sección anterior nos van a permitir proponer un criterio de optimización para la obtención de espejos dieléctricos “perfectos” para todos los ángulos de incidencia.

En la práctica, es muy habitual que el periodo básico de estos sistemas consista exclusivamente en dos láminas dieléctricas con índices de refracción  $n_\ell$  y  $n_h$  (bajo y alto, respectivamente), cuyos espesores serán denotados por  $d_\ell$  y  $d_h$ . Estas estructuras de Bragg se denominan también en la forma  $[\text{LH}]^N$ , donde  $N$  es el número de periodos que se repiten.

Para este importante caso la condición  $[\operatorname{Tr}(\mathbf{M}_{as})]^2 > 4$ , necesaria y suficiente para tener una banda prohibida, puede escribirse en la forma [Lek00]

$$|\operatorname{Re}(\mathbf{a})| = |\cos \beta_\ell \cos \beta_h - A_{\ell h} \operatorname{sen} \beta_\ell \operatorname{sen} \beta_h| > 1, \quad (4.22)$$

donde  $\beta_i = (2\pi/\lambda)\Delta_i$  es el espesor en fase de la lámina (el subíndice  $i = \ell, h$  especifica cada una de ellas) y  $\Delta_i$  es el correspondiente camino óptico

$$\Delta_i = n_i d_i \cos \theta_i = d_i \sqrt{n_i^2 - \operatorname{sen}^2 \theta_0}, \quad (4.23)$$

siendo  $\theta_0$  el ángulo de incidencia. Para simplificar, se ha supuesto que el sistema está inmerso en aire.

La función  $A_{\ell h}$  viene dada por

$$A_{\ell h} = \frac{1 + r_{\ell h}^2}{1 - r_{\ell h}^2}, \quad (4.24)$$

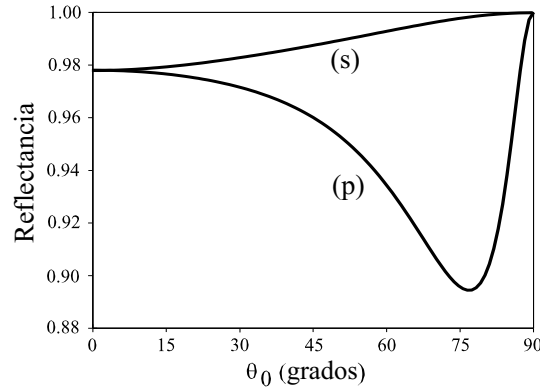
donde  $r_{\ell h}$  es el coeficiente de reflexión de Fresnel para la frontera  $\ell h$ . Si se consideran, como es habitual, medios no dispersivos, esta función  $A_{\ell h}$  es independiente de la frecuencia de la radiación, pero es diferente para las polarizaciones  $p$  y  $s$ . Sin embargo, puede comprobarse que, cualquiera que sea el ángulo de incidencia, la relación entre estas funciones, para ambas polarizaciones, vale

$$\frac{A_{\ell h}(p)}{A_{\ell h}(s)} = \frac{n_h^2 + n_\ell^2 - \mathbf{n} \operatorname{sen}^2 \theta_0}{n_\ell^2 + n_h^2 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta_0} \leq 1, \quad (4.25)$$

donde

$$\mathbf{n} = \frac{n_h^4 + n_\ell^4}{n_h^2 n_\ell^2}. \quad (4.26)$$

Debido a la restricción (4.25) se puede asegurar que cuando la ecuación (4.22) se cumple para polarización  $p$ , también se cumple para polarización  $s$ . En consecuencia, las bandas prohibidas para polarización  $p$  son más restrictivas que las correspondientes para polarización  $s$ . En otras palabras, para este sistema [LH] la reflectancia para polarización  $s$  es siempre mayor o igual que para polarización  $p$ , en las mismas condiciones; como es bien conocido la igualdad se consigue para las incidencias normal y rasante (véase Figura 4.1). En esta figura se observa que la reflectancia para polarización  $s$  es monótonamente creciente con el ángulo de incidencia. Sin embargo, para polarización  $p$  presenta, típicamente, un mínimo.



**Figura 4.1.** Reflectancia para una estructura de Bragg [LH]<sup>N</sup> con láminas de espesor cuarto de onda para  $\lambda = 10 \mu\text{m}$  y  $N = 4$  periodos, para las polarizaciones  $p$  y  $s$ , en función del ángulo de incidencia. Los índices de refracción son  $n_\ell = 1.75$  y  $n_h = 3.35$ .

Quizás por razones históricas, el diseño típico de estos espejos dieléctricos se ha restringido al uso de espesores  $\lambda/4$  para incidencia normal, es decir,

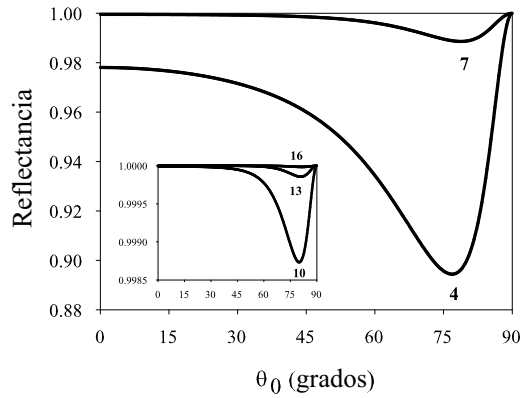
$$d_\ell = \frac{\lambda_\ell}{4} = \frac{\lambda}{4n_\ell}, \quad d_h = \frac{\lambda_h}{4} = \frac{\lambda}{4n_h}, \quad (4.27)$$

donde  $\lambda$  indica la longitud de onda en el vacío. Cuando sucede esto los caminos ópticos son iguales para cada una de las láminas y la reflectancia máxima se obtiene a la frecuencia

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} \frac{c}{n_\ell d_\ell} = \frac{\pi}{2} \frac{c}{n_h d_h}, \quad (4.28)$$

que es el centro de la banda prohibida.

En la Figura 4.2 se ha representado la reflectancia  $\mathcal{R}^{(N)}$  de una de estas estructuras de Bragg  $[\text{LH}]^N$ , en función del ángulo de incidencia, para diversos valores del número de periodos  $N$  y para polarización  $p$ . El espesor de cada lámina se ha elegido según la ecuación (4.27), como es habitual en la literatura.



**Figura 4.2.** Reflectancia para estructuras de Bragg  $[\text{LH}]^N$  con láminas de espesor cuarto de onda para  $\lambda = 10 \mu\text{m}$  y polarización  $p$ , en función del ángulo de incidencia. Los índices de refracción son  $n_\ell = 1.75$  y  $n_h = 3.35$ . En cada curva se señala el correspondiente número de periodos  $N$ .

En esta figura se observa que el ángulo de incidencia en el que la reflectancia tiene el mínimo depende del número de periodos  $N$ . Además, es evidente que para estos sistemas la reflectancia tiende a la unidad, cuando aumenta  $N$ , para todos los valores del ángulo de incidencia.

Nos ha parecido sorprendente que los diseños habituales que se presentan en la literatura utilicen sistemáticamente espesores cuarto de onda a incidencia normal, sin plantear ninguna duda acerca de esta elección. En la práctica, en la región del visible, el número de periodos no es muy elevado –del orden de 10– y podemos plantearnos la importancia que pueda tener el valor del espesor de las láminas en el diseño óptimo de la estructura.

Se asegura en diversos artículos que, con la información que a priori se tiene de que la situación óptima está próxima a la estructura de cuarto de onda, no es necesario un programa de cálculo numérico de excesivo tamaño para obtener soluciones razonables [CD00, DSM02, LMY02, VM02]. Sin embargo, nuestro propósito es proporcionar un método más sistemático para optimizar el diseño de estos espejos “perfectos” para todos los valores del ángulo de incidencia.

A la vista de las curvas de reflectancia mostradas en la Figura 4.2, una opción razonable para optimizar el sistema sería que, cuando el ángulo de incidencia  $\theta_0$  varía de 0 a  $\pi/2$ , el área bajo la curva  $\mathcal{R}^{(N)}$  fuera lo mayor posible. Evidentemente, esto es equivalente a que el área bajo la curva  $1 - \mathcal{R}^{(N)}$ , que es la transmitancia del sistema, sea lo más pequeña posible. Por tanto, si se fijan los índices de refracción de los materiales y la longitud de onda, proponemos calcular los dos espesores  $d_\ell$  y  $d_h$  que permiten obtener el mínimo de la función

$$\mathcal{A}(d_\ell, d_h) = \int_0^{\pi/2} [1 - \mathcal{R}^{(N)}(d_\ell, d_h, \theta_0)] d\theta_0. \quad (4.29)$$

Este criterio proporciona una primera figura de mérito para la optimización de la reflectancia de la estructura periódica [YMF04]. En nuestro caso hemos optado por el criterio de transmitancia mínima porque el programa de optimización utilizado es más estable calculando el mínimo de una función que el máximo de otra.

Alternativamente, puesto que en todas las curvas aparece el mínimo característico de la reflectancia para la polarización  $p$ , se podría imponer que el valor de este mínimo fuera lo mayor posible. Hemos comprobado, numéricamente, que ambos criterios dan esencialmente los mismos resultados.

Como hemos mencionado, para un sistema dado, la reflectancia para polarización  $s$  es mayor que para polarización  $p$  para cualquier ángulo de incidencia; por tanto, parece sensato suponer que una vez que el valor del área  $\mathcal{A}(d_\ell, d_h)$  se ha optimizado para polarización  $p$ , también se ha optimizado para polarización  $s$ .

$N$	$d_\ell/\lambda_\ell$	$d_h/\lambda_h$	$\mathcal{A}_{\text{opt}}$	$\mathcal{A}(1/4)$	Mejora
4	0.2567160	0.2583615	$0.6277996 \times 10^{-1}$	$0.7539873 \times 10^{-1}$	20 %
5	0.2578014	0.2596847	$0.2107099 \times 10^{-1}$	$0.2961738 \times 10^{-1}$	41 %
6	0.2582820	0.2604825	$0.7195052 \times 10^{-2}$	$0.1199775 \times 10^{-1}$	67 %
7	0.2582544	0.2610819	$0.2508925 \times 10^{-2}$	$0.5007563 \times 10^{-2}$	100 %
8	0.2578614	0.2616020	$0.8916341 \times 10^{-3}$	$0.2144915 \times 10^{-2}$	141 %
9	0.2572066	0.2620937	$0.3219379 \times 10^{-3}$	$0.9386422 \times 10^{-3}$	192 %
10	0.2563618	0.2625808	$0.1177155 \times 10^{-3}$	$0.4179370 \times 10^{-3}$	255 %
11	0.2553779	0.2630740	$0.4347006 \times 10^{-4}$	$0.1886905 \times 10^{-3}$	334 %
12	0.2542927	0.2635773	$0.1617585 \times 10^{-4}$	$0.8614448 \times 10^{-4}$	433 %
13	0.2531341	0.2640914	$0.6055056 \times 10^{-5}$	$0.3968423 \times 10^{-4}$	555 %
14	0.2519235	0.2646149	$0.2277057 \times 10^{-5}$	$0.1841661 \times 10^{-4}$	709 %

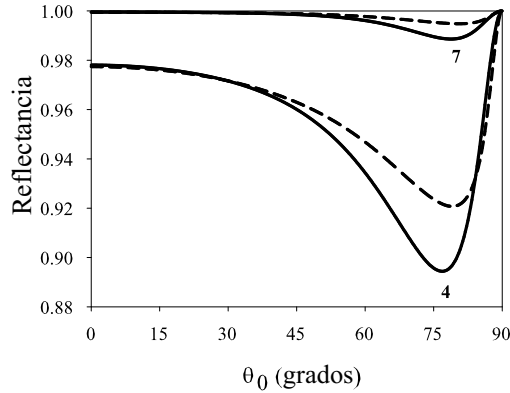
**Tabla 4.1.** Espesores dimensionales  $d_\ell/\lambda_\ell$  y  $d_h/\lambda_h$  que minimizan el área bajo la transmitancia, para cada valor  $N$  del número de periodos.  $\mathcal{A}_{\text{opt}}$  es el valor óptimo del área, mientras que  $\mathcal{A}(1/4)$  representa el valor para el diseño habitual con espesores  $\lambda/4$ . La última columna muestra el porcentaje de mejora de  $\mathcal{A}_{\text{opt}}$  calculado como  $[\mathcal{A}(1/4) - \mathcal{A}_{\text{opt}}] \times 100/\mathcal{A}_{\text{opt}}$ . Datos:  $n_\ell = 1.75$ ,  $n_h = 3.35$  y  $\lambda = 10 \mu\text{m}$ .

Hemos estudiado numéricamente el comportamiento de la función  $\mathcal{A}(d_\ell, d_h)$ . Para encontrar el mínimo de la función (4.29) se ha empleado un algoritmo cuasi-Newton, con valores para los espesores sujetos a las condiciones físicas  $0 < d_\ell/\lambda_\ell \leq 1$  y  $0 < d_h/\lambda_h \leq 1$ , debido al carácter periódico de las soluciones.

En la Tabla 4.1 se muestran los resultados de esta optimización para los índices de refracción  $n_\ell = 1.75$  y  $n_h = 3.35$ . El uso de espesores adimensionales  $d_\ell/\lambda_\ell$  y  $d_h/\lambda_h$  simplifica, sin pérdida de generalidad, la presentación de los resultados. En este ejemplo se ha tomado una longitud de onda en el vacío de  $10 \mu\text{m}$  y no se ha considerado dispersión en los índices de refracción. Téngase en cuenta que la estrategia de optimización propuesta es completamente general puesto que el criterio introducido, basado en la ecuación (4.29), es independiente del ejemplo particular que se estudie.

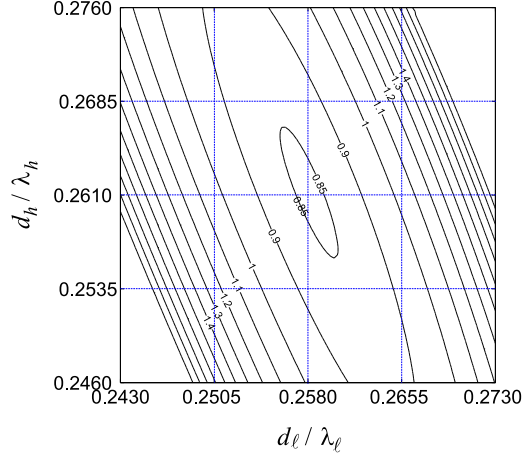
Es importante resaltar que los espesores óptimos calculados se apartan más o menos significativamente (sobre todo para el índice de refracción alto) del valor  $d_\ell/\lambda_\ell = d_h/\lambda_h = 0.25$ , es decir, de los espesores  $\lambda/4$  propuestos habitualmente en la literatura.

Para facilitar la comparación, en la Figura 4.3 se representa la reflectancia  $\mathcal{R}^{(N)}$ , para polarización  $p$ , con  $N = 4$  y  $N = 7$  periodos para espesores cuarto de onda y para el valor óptimo de los espesores según la Tabla 4.1. La mejora es notable: el área aumenta en un 20% y en un 100%, respectivamente.



**Figura 4.3.** Reflectancia para estructuras de Bragg  $[\text{LH}]^N$  con los mismos datos que en la Tabla 4.1. y número de periodos  $N = 4$  y  $N = 7$ . Las curvas continuas corresponden a espesores cuarto de onda para cada una de las láminas y las de trazos a los espesores óptimos de la Tabla 4.1.

También hemos comprobado la tolerancia de los espesores óptimos obtenidos frente a pequeñas desviaciones en sus valores experimentales. En la Figura 4.4 se han repre-

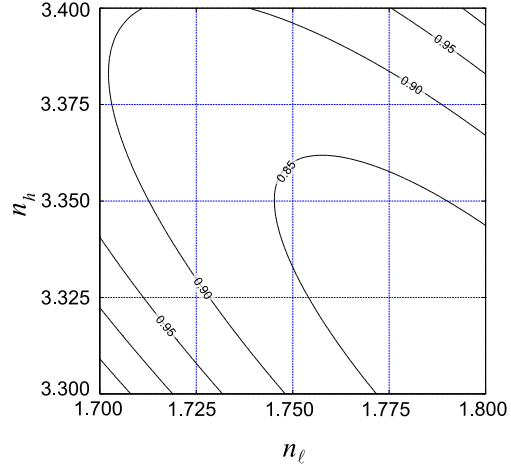


**Figura 4.4.** Contornos de valor constante para  $\mathcal{A}(d_\ell, d_h)$  en función de los espesores adimensionales  $d_\ell/\lambda_\ell$  y  $d_h/\lambda_h$  para un reflector de Bragg [LH]<sup>N</sup> con  $n_\ell = 1.75$ ,  $n_h = 3.35$ ,  $\lambda = 10 \mu\text{m}$  y  $N = 7$ . Los valores de las líneas de contorno son los del área (salvo un factor  $10^{-2}$ ). El punto óptimo de trabajo corresponde al centro de la malla.

sentado los contornos de la función  $\mathcal{A}(d_\ell, d_h)$ , en función de los espesores adimensionales  $d_\ell/\lambda_\ell$  y  $d_h/\lambda_h$ , para la misma estructura de la Figura 4.3 con  $N = 7$  periodos. Cada uno de los contornos de apariencia elíptica delimita el rango de espesores que proporciona un valor determinado del área. Si se efectúa la proyección del eje mayor de la elipse sobre los ejes de coordenadas como medida cualitativa de la tolerancia para un área dada, puede concluirse a partir de la Figura 4.4, que se debe ser más cuidadoso en el control del espesor  $d_\ell$  (correspondiente al medio de índice de refracción bajo), que en el del espesor  $d_h$  (correspondiente al medio de índice de refracción alto).

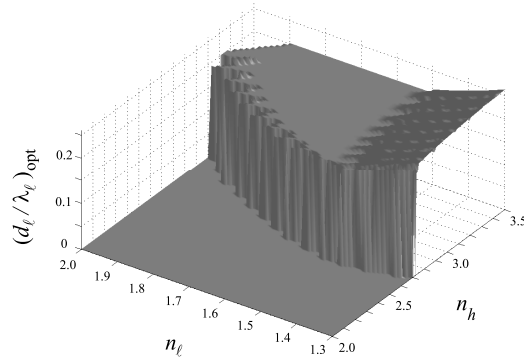
Complementariamente, hemos estudiado el comportamiento del área frente a posibles variaciones en los valores de los índices de refracción. En la Figura 4.5 se representan, de nuevo, los contornos del valor del área como función de los índices  $n_\ell$  y  $n_h$ , para los espesores óptimos  $d_\ell$  y  $d_h$  dados en la Tabla 4.1 y para  $N = 7$ . Encontramos, como en el caso precedente, contornos de aspecto elíptico, pero ahora la variación es mucho más suave que en la figura anterior, lo que indica que el papel de los índices de refracción no es tan crucial como el de los espesores.

Obviamente si  $N$  crece, el valor del área bajo la curva  $\mathcal{R}^{(N)}$  también lo hace. De hecho, la Tabla 4.1 muestra una considerable mejora porcentual en la minimización de la transmitancia del sistema. Sin embargo, los valores porcentuales del aumento para el área bajo la reflectancia son, lógicamente, menores. En cualquier caso, nos parece importante resaltar que dicha mejora ocurre para ángulos de incidencia próximos a

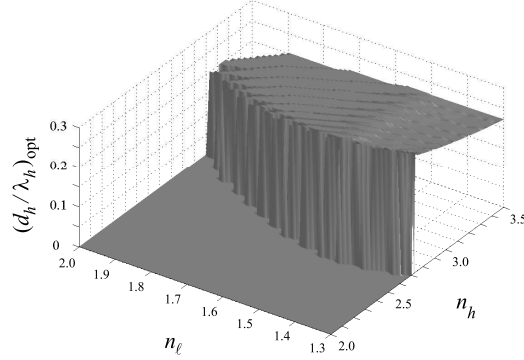


**Figura 4.5.** Contornos de valor constante para el área, en función de los índices de refracción  $n_\ell$  y  $n_h$  para una estructura  $[\text{LH}]^N$  con  $N = 7$ . Los espesores son los óptimos  $d_\ell$  y  $d_h$  dados en la Tabla 4.1. Los valores indicados en las líneas de contorno son los del área (salvo por un factor  $10^{-2}$ ).

aquellos en los que la reflectancia tiene su mínimo. En definitiva, podemos concluir que el método es especialmente apropiado para valores moderados de  $N$ , que corresponde a valores típicos de situaciones experimentales.



**Figura 4.6.** Valor del espesor óptimo  $(d_\ell / \lambda_\ell)_{\text{opt}}$  en función de los índices de refracción  $n_\ell$  y  $n_h$  para una estructura  $[\text{LH}]^N$  con  $N = 7$ ,  $\lambda = 10 \mu\text{m}$  y polarización  $p$ .



**Figura 4.7.** Igual que en la figura anterior, pero para el espesor óptimo  $(d_h/\lambda_h)_{\text{opt}}$ , correspondiente al medio de índice de refracción más alto.

Finalmente, en las Figuras 4.6 y 4.7 se representan, respectivamente, los espesores óptimos adimensionales  $(d_\ell/\lambda_\ell)_{\text{opt}}$  y  $(d_h/\lambda_h)_{\text{opt}}$  en función de los índices de refracción  $n_\ell$  y  $n_h$  para  $N = 7$ . Es importante señalar que se ha asignado el valor cero a los espesores para los que, en algún ángulo de incidencia, no se cumple la condición  $[\text{Tr}(\mathbf{M}_{as})]^2 \geq 4$  requerida para tener una banda prohibida. En las dos figuras el escalón abrupto es el mismo y marca la frontera entre los valores de los índices de refracción  $(n_\ell, n_h)$  que permiten obtener reflectancia omnidireccional. El perfil de estas curvas en el plano  $(n_\ell, n_h)$  coincide con el obtenido previamente por Lekner [Lek00] por métodos aproximados.

Para terminar puede resaltarse que, como hecho general, el valor de  $(d_\ell/\lambda_\ell)_{\text{opt}}$  es menor que el de  $(d_h/\lambda_h)_{\text{opt}}$  para cada pareja de índices de refracción escogidos. En la Figura 4.6 el espesor óptimo varía pronunciadamente con  $n_\ell$  hasta  $n_\ell \simeq 1.5$  y a partir de ahí es bastante constante, mientras decrece suavemente con  $n_h$  en la región de interés.

En la Figura 4.7 observamos que el espesor óptimo decrece para un valor fijo de  $n_\ell$  (respectivamente,  $n_h$ ) cuando  $n_h$  (respectivamente,  $n_\ell$ ) aumenta y la variación da un resultado casi constante para  $(d_h/\lambda_h)_{\text{opt}}$ . También se ha observado este mismo comportamiento para otros valores del número de periodos  $N$ .





## 5 Sistemas cuasi-periódicos

La serie de Fibonacci fue descubierta en el siglo XII por Leonardo Pisano, también conocido como Fibonacci. En esta serie numérica cada término se obtiene como la suma de los dos precedentes. Entre otras múltiples y curiosas propiedades intrínsecas, estas secuencias tienen una notable relación con formas naturales y artificiales. En otras palabras, la secuencia numérica, como las razones entre sus elementos, aparecen constantemente en la naturaleza como, por ejemplo, en la distribución del lugar que ocupan las hojas en el tallo de las plantas o en el crecimiento de la concha de los caracoles.

En el siglo XVIII, Robert Simpson de la universidad de Glasgow descubrió que, cuando los números de la serie aumentan, la razón entre un número y el inmediatamente anterior se aproxima al número de oro, ya conocido en la Grecia clásica, que se encuentra frecuentemente en la geometría y es ubicuo en el arte. En la actualidad, estas secuencias tienen también importantes aplicaciones en el estudio de la economía de mercado y en la elaboración de algoritmos de programación.

La expresión “orden cuasi-periódico” se ha ido introduciendo progresivamente en diferentes círculos de la comunidad científica, no sólo para clasificar ordenamientos que aparecen de forma natural en la naturaleza, sino también, porque este tipo de configuraciones ofrecen prometedoras posibilidades tanto a nivel teórico como en aplicaciones tecnológicas.

En este capítulo consideraremos estructuras cuasi-periódicas artificiales, dejando a un lado los campos de los cuasi-cristales y biopolímeros, en los que la cuasi-periodicidad espontánea proviene de las interacciones físico-químicas entre los elementos básicos que constituyen estos sistemas.

Estudiaremos las propiedades de las multicapas cuasi-periódicas que, desde la primera fabricación de estructuras de Fibonacci con semiconductores por Merlin y colaboradores, han recibido una gran atención, tanto teórica como experimental.

En resumen, nuestro propósito ahora es estudiar la propagación de la luz en multicapas dieléctricas basadas en la serie de Fibonacci más sencilla y plantear el siguiente problema: en orden a conseguir reflectancia omnidireccional máxima con un sistema que tiene fijado el número de capas, ¿qué configuración es la más eficiente? ¿el sistema periódico  $[LH]^N$  estudiado en el capítulo anterior? ¿otro sistema periódico cuyo pe-

riodo básico sean las primeras secuencias de la serie de Fibonacci? o bien ¿un sistema no periódico formado por la secuencia de Fibonacci que tiene ese mismo número de láminas?

## 5.1 Secuencias de Fibonacci

Como hemos considerado en el capítulo anterior, los principales resultados en reflectores omnidireccionales se han fundamentado, casi exclusivamente, en estructuras periódicas. Sin embargo, recientemente se ha empezado a considerar la reflexión omnidireccional en estructuras basadas en secuencias de Cantor y de Fibonacci [Mac01, WGS00].

Hay muchas clases de secuencias de Fibonacci generalizadas,  $FS(m, n)$ , donde  $m$  y  $n$  son números enteros positivos. Las secuencias de dos “letras”  $a$  y  $b$  se generan con las reglas de sustitución

$$b \rightarrow a, \quad a \rightarrow a^m b^n, \quad (5.1)$$

o, equivalentemente, siguiendo el esquema

$$S_0 = b, \quad S_1 = a, \quad S_{k+1} = S_k^m S_{k-1}^n. \quad (5.2)$$

El número total de “letras”  $a$  y  $b$  en la secuencia  $S_k$  se denota por  $F_k$  y satisface la siguiente relación de recurrencia

$$F_{k+1} = mF_k + nF_{k-1}, \quad F_0 = F_1 = 1. \quad (5.3)$$

Por otra parte, el límite de la razón entre el número de “letras” de dos secuencias consecutivas cuando  $k$  tiende a infinito viene dado por

$$\sigma = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F_{k+1}}{F_k} = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4n}}{2}. \quad (5.4)$$

Algunos valores de  $\sigma$  coinciden con los llamados “números metálicos”

$$\begin{aligned} FS(1, 1) : \sigma_g &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} && \text{número de oro,} \\ FS(2, 1) : \sigma_s &= 1 + \sqrt{2} && \text{número de plata,} \\ FS(3, 1) : \sigma_b &= \frac{3 + \sqrt{13}}{2} && \text{número de bronce,} \\ FS(1, 2) : \sigma_c &= 2 && \text{número de cobre,} \\ FS(1, 3) : \sigma_n &= \frac{1 + \sqrt{13}}{2} && \text{número de níquel.} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Es conocido que las secuencias  $FS(m, n)$  con  $n = 1$  son cuasi-periódicas y las que tienen  $n \geq 2$  son siempre no periódicas.

Aquí nos restringiremos al caso más simple, es decir, a las estructuras de Fibonacci en las  $m = n = 1$  y, además, para simplificar, supondremos que el sistema está inmerso en aire. Estas estructuras cuasi-periódicas de Fibonacci (1,1) se basan en la relación de recurrencia

$$S_{k+1} = S_k S_{k-1}, \quad (5.6)$$

para  $k \geq 1$  con

$$S_0 = \{H\}, S_1 = \{L\}, \quad (5.7)$$

donde  $S_k$  es la secuencia de Fibonacci de orden  $k$  y H y L representan láminas de medios dieléctricos de índices de refracción  $n_h$  (alto) y  $n_\ell$  (bajo), respectivamente. El número de láminas de la secuencia  $S_{k+1}$  es la suma del número de láminas de las dos secuencias anteriores,  $S_k$  y  $S_{k-1}$ .

Como ejemplo concreto, en la Tabla 5.1 se recogen las seis primeras secuencias con la disposición de las láminas de dieléctrico y el número de ellas que configuran las sucesivas multicapas.

Término	Secuencia de los materiales	Número de láminas
$S_0$	H	1
$S_1$	L	1
$S_2$	LH	2
$S_3$	LHL	3
$S_4$	LHLLH	5
$S_5$	LHLLHLHL	8
$S_6$	LHLLHLHLHLH	13

**Tabla 5.1.** Secuencia de las láminas de los materiales H, con índice de refracción  $n_h$ , y L, con índice de refracción  $n_\ell$ , en las multicapas formadas por los seis primeros términos de la serie SF(1,1). En la última columna se especifica el número de láminas que componen cada multicapa.

Es evidente que la matriz de transferencia para la multicapa representada por la secuencia  $S_{k+1}$  viene dada por el producto de las matrices correspondientes a las secuencias  $S_k$  y  $S_{k-1}$  y en ese orden

$$\mathbf{M}_{k+1} = \mathbf{M}_k \mathbf{M}_{k-1}. \quad (5.8)$$

## 5.2 Una forma alternativa para la matriz de transferencia

Se comprende claramente, a la vista de la Tabla 5.1, que cuando el orden de la secuencia empieza a ser elevado (por ejemplo a partir de  $S_8$ ) la configuración de la multicapa se va complicando enormemente.

Nuestro propósito es estudiar la reflectancia de estos sistemas del modo más sencillo posible. En el presente caso la matriz de transferencia  $\mathbf{M}_{as}$  que hemos venido empleando durante toda la memoria y la ley de composición (5.8) no resultan adecuadas. En esta sección recopilamos un formalismo obtenido a partir de una conjugación de las matrices de  $SU(1,1)$  que lleva de nuevo al grupo  $SL(2, \mathbb{R})$ , es decir, a una forma alternativa de la matriz de transferencia para la que se han obtenido unas fórmulas de recurrencia que simplifican notablemente la resolución del problema [KKT83, WGS00].

El punto de partida es que la transmitancia de cualquier sistema se puede calcular directamente a partir de la matriz  $\mathbf{M}_{as}$  en la forma

$$|T_{as}|^2 = \frac{4}{\sum |m_{ij}|^2 + 2}, \quad (5.9)$$

donde  $\sum |m_{ij}|^2$  ( $i, j = 1, 2$ ) es la suma de los cuadrados de los módulos de los cuatro elementos de la matriz.

Para presentar este formalismo comenzaremos estudiando el caso de una simple lámina (que corresponde a las secuencias de Fibonacci  $S_0$  y  $S_1$ ), de índice de refracción y espesor  $n_1$  y  $d_1$ , respectivamente, inmersa en aire (cuyo índice se representa por  $n_0$ ). Para esta lámina

$$\mathbf{M}_{010} = \frac{1}{1 - r_{01}^2} \begin{pmatrix} e^{i\beta_1} - r_{01}^2 e^{-i\beta_1} & r_{01}(e^{-i\beta_1} - e^{i\beta_1}) \\ r_{01}(e^{i\beta_1} - e^{-i\beta_1}) & e^{-i\beta_1} - r_{01}^2 e^{i\beta_1} \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

y su coeficiente de transmisión viene dado por (3.48)

$$T_{010} = \frac{(1 - r_{01}^2) \exp(-i\beta_1)}{1 - r_{01}^2 \exp(-i2\beta_1)}. \quad (5.11)$$

Puede comprobarse fácilmente que por conjugación de esta matriz con

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/i & -1/i \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

se obtiene una nueva matriz que representa la acción de la lámina

$$\mathbf{W}_{010} = \begin{pmatrix} \cos \beta_1 & -q_1 \operatorname{sen} \beta_1 \\ \frac{1}{q_1} \operatorname{sen} \beta_1 & \cos \beta_1 \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

La sencillez de esta matriz  $\mathbf{W}_{010}$  es verdaderamente resaltable [KSI87]. Para cada una de las polarizaciones, el parámetro  $\mathbf{q}_1$  –que contiene toda la información sobre la frontera 01– vale

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1(p) &= \frac{n_0 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_0}, \\ \mathbf{q}_1(s) &= \frac{n_1 \cos \theta_1}{n_0 \cos \theta_0}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Esta matriz  $\mathbf{W}_{010}$  pertenece al grupo  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  y, por supuesto, tiene determinante unidad y la misma traza que  $\mathbf{M}_{010}$ .

Es fácil calcular la matriz de transferencia de la secuencia  $S_2 = [\text{LH}]$  y conjugándola con la matriz  $\mathbf{X}$  se obtiene

$$\mathbf{W}_{0\ell h 0} = \begin{pmatrix} \cos \beta_\ell \cos \beta_h - \frac{\mathbf{q}_\ell}{\mathbf{q}_h} \sin \beta_\ell \sin \beta_h & -\mathbf{q}_h \cos \beta_\ell \sin \beta_h - \mathbf{q}_\ell \sin \beta_\ell \cos \beta_h \\ \frac{1}{\mathbf{q}_\ell} \sin \beta_\ell \cos \beta_h + \frac{1}{\mathbf{q}_h} \cos \beta_\ell \sin \beta_h & \cos \beta_\ell \cos \beta_h - \frac{\mathbf{q}_h}{\mathbf{q}_\ell} \sin \beta_\ell \sin \beta_h \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

donde  $\mathbf{q}_\ell$  y  $\mathbf{q}_h$  son los parámetros que describen, respectivamente, las fronteras  $0\ell$  y  $0h$ .

Generalizando este resultado, para cualquier multicapa con matriz de transferencia  $\mathbf{M}_{as}$ , se obtiene la nueva matriz  $\mathbf{W}_{as}$

$$\mathbf{W}_{as} = \mathbf{X} \mathbf{M}_{as} \mathbf{X}^{-1} = \begin{pmatrix} \text{Re}(\mathbf{a}) + \text{Re}(\mathbf{b}) & -\text{Im}(\mathbf{a}) + \text{Im}(\mathbf{b}) \\ \text{Im}(\mathbf{a}) + \text{Im}(\mathbf{b}) & \text{Re}(\mathbf{a}) - \text{Re}(\mathbf{b}) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

De forma análoga a (5.9) es inmediato obtener, otra vez, para la transmitancia

$$|T_{as}|^2 = \frac{4}{\sum w_{ij}^2 + 2}, \quad (5.17)$$

donde  $\sum w_{ij}^2$  es la suma de los cuadrados de los elementos de la matriz  $\mathbf{W}_{as}$ .

De modo similar a lo comentado en el capítulo 3 podemos concluir que la conjugación por  $\mathbf{X}$  induce que los nuevos vectores asociados al campo, tanto para el ambiente como para el sustrato, vengan dados ahora por

$$\mathbf{x} \begin{pmatrix} E^{(+)} \\ E^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^{(+)} + E^{(-)} \\ (E^{(+)} - E^{(-)})/i \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

### 5.3 Fórmulas de recurrencia para la traza y la antitrazo

Para caracterizar la reflectancia de estos sistemas de Fibonacci es importante poder determinar con facilidad la traza de la matriz asociada a cada secuencia de la serie, así como la suma de los cuadrados de sus elementos.

Teniendo en cuenta que la matriz  $\mathbf{W}_{as}$  es unimodular, es fácil comprobar que la ecuación (5.17) también puede expresarse en la forma

$$|T_{as}|^2 = \frac{4}{[\text{Tr}(\mathbf{W}_{as})]^2 + [\text{Antr}(\mathbf{W}_{as})]^2}, \quad (5.19)$$

donde  $\text{Antr}(\mathbf{W}_{as})$  denota la llamada antitrazo de la matriz, que se define como la diferencia de los elementos de la diagonal secundaria [DSR90],

$$\text{Antr}(\mathbf{W}_{as}) = w_{21} - w_{12}. \quad (5.20)$$

En consecuencia, la transmitancia y, por tanto, la reflectancia, de cualquier multicapa quedarán determinadas con facilidad si se conocen la traza y la antitrazo de la matriz  $\mathbf{W}_{as}$ .

Precisamente para el caso de estas estructuras de Fibonacci más sencillas, SF(1,1), la traza y la antitrazo de la matriz correspondiente a cualquier secuencia puede obtenerse por las conocidas leyes de recurrencia [KKT83]

$$\text{Tr}(\mathbf{W}_{k+1}) = \text{Tr}(\mathbf{W}_k) \text{Tr}(\mathbf{W}_{k-1}) - \text{Tr}(\mathbf{W}_{k-2}), \quad (5.21)$$

$$\text{Antr}(\mathbf{W}_{k+1}) = \text{Tr}(\mathbf{W}_k) \text{Antr}(\mathbf{W}_{k-1}) + \text{Antr}(\mathbf{W}_{k-2}),$$

donde  $\mathbf{W}_k$  es la matriz que representa la acción de la multicapa asociada a la secuencia  $S_k$ .

En resumen, conviene resaltar el importante resultado de que estas estructuras SF(1,1) verifican simultáneamente las ecuaciones (5.19) y (5.21), que resuelven con la mayor sencillez posible el cálculo de la transmitancia de cada uno de estos sistemas si se conocen la traza y la antitrazo de las tres multicapas anteriores.

Teniendo en cuenta lo anterior, explicitamos los valores de la traza y la antitrazo de las matrices  $\mathbf{W}_k$  de las cuatro primeras secuencias de Fibonacci

$$\text{Tr}(\mathbf{W}_0) = 2 \cos \beta_h, \quad \text{Antr}(\mathbf{W}_0) = 2\Lambda_{0h} \sin \beta_h, \quad (5.22a)$$

$$\text{Tr}(\mathbf{W}_1) = 2 \cos \beta_\ell, \quad \text{Antr}(\mathbf{W}_1) = 2\Lambda_{0\ell} \sin \beta_\ell, \quad (5.22b)$$

$$\text{Tr}(\mathbf{W}_2) = 2(\cos \beta_\ell \cos \beta_h - \Lambda_{\ell h} \sin \beta_\ell \sin \beta_h), \quad (5.22c)$$

$$\text{Antr}(\mathbf{W}_2) = 2(\Lambda_{0\ell} \text{sen } \beta_\ell \cos \beta_h + \Lambda_{0h} \text{sen } \beta_h \cos \beta_\ell), \quad (5.22d)$$

$$\text{Tr}(\mathbf{W}_3) = 2(\cos 2\beta_\ell \cos \beta_h - \Lambda_{\ell h} \text{sen } 2\beta_\ell \text{sen } \beta_h), \quad (5.22e)$$

$$\begin{aligned} \text{Antr}(\mathbf{W}_3) &= 2\Lambda_{0\ell}(\text{sen } 2\beta_\ell \cos \beta_h + \Lambda_{\ell h} \cos 2\beta_\ell \text{sen } \beta_h) + \\ &+ 2(\Lambda_{0h} - \Lambda_{0\ell}\Lambda_{\ell h}) \text{sen } \beta_h. \end{aligned} \quad (5.22f)$$

Las funciones  $\Lambda_{ij}$ ,  $\mathbf{q}_i$  y  $\mathbf{q}_j$  que aparecen en diversas ecuaciones de este capítulo están relacionadas por

$$\Lambda_{ij} = \frac{\mathbf{q}_i}{\mathbf{q}_j} + \frac{\mathbf{q}_j}{\mathbf{q}_i}, \quad (5.23)$$

donde el subíndice  $ij$  indica la correspondiente frontera.

Como continuación del criterio de optimización para la reflectancia omnidireccional expuesto en el capítulo anterior, nuestro propósito actual es estudiar comparativamente la reflectancia de las diferentes multicapas  $[S_k]^N$ , que se pueden obtener fijado un número determinado de láminas.

A modo de ejemplo, se proponen cuatro valores para un número total de láminas del sistema que pueden proporcionar una comparación muy interesante.

Para comenzar, encontramos hasta cinco configuraciones distintas con un número de láminas próximo a 9. Los sistemas  $[S_2]^4$  y  $[S_5]$  con 8 láminas;  $[S_3]^3$  con 9 y  $[S_2]^5$  y  $[S_4]^2$  con 10.

Sistemas con aproximadamente 15 láminas encontramos cinco:  $[S_2]^7$  con 14,  $[S_3]^5$  y  $[S_4]^3$  cada uno de ellos con 15 y  $[S_2]^8$  y  $[S_5]^2$  con 16.

Una multicapa con 24 láminas se puede configurar como  $[S_2]^{12}$ ,  $[S_3]^8$  y  $[S_5]^3$ . Muy próximas a ellas en número de láminas se encuentran las estructuras  $[S_4]^5$  con 25 y  $[S_2]^{13}$  y  $[S_6]^2$  con 26.

Finalmente, con un número de láminas cercano a 40 se encuentran, de nuevo, hasta seis sistemas:  $[S_2]^{20}$ ,  $[S_4]^8$  y  $[S_5]^5$  con 40 láminas cada uno,  $[S_3]^{13}$  y  $[S_6]^3$  con 39 y  $[S_7]^2$  con 42.

Nos parece que el problema presentado puede tener importancia práctica y, hasta donde sabemos, no ha sido planteado hasta ahora. Puesto que lo que se pretende es, en principio, una comparación, con objeto de simplificar el cálculo se podría partir de espesores  $\lambda/4$  a incidencia normal, con índices de refracción fijados y adecuados.

Se trata de comprobar numéricamente si, para cada una de las matrices de los periodos básicos de los distintos sistemas que hemos mencionado, se verifica la condición  $[\text{Tr}(\mathbf{W}_{as})]^2 > 4$  para todo ángulo de incidencia. Para aquellos sistemas que lo cumplan se calculará el área bajo la curva de transmitancia dada por la ecuación (4.29) y el que proporcione el menor valor para dicha área será el sistema óptimo.





## Conclusiones

El trabajo presentado en esta memoria de tesis doctoral se ha centrado en el estudio de las propiedades geométricas de las matrices de transferencia de multicapas ópticas constituidas por medios lineales, homogéneos, isotropos y transparentes.

En el capítulo 1 se ha resumido el formalismo de la matriz de transferencia de una multicapa que permite obtenerla como un producto ordenado de las matrices de frontera entre cada dos medios y de las que describen la propagación en cada lámina. Se ha demostrado que, para estas multicapas, la matriz de transferencia pertenece al grupo  $SU(1,1)$ , que es el grupo de la geometría hiperbólica en el círculo unidad.

En el capítulo 2 hemos presentado el homomorfismo entre el grupo  $SU(1,1)$  y el de las transformaciones de Lorentz en dos dimensiones espaciales,  $SO(2,1)$ , obteniéndose la relación entre los coeficientes de reflexión y transmisión de una multicapa y los parámetros de la transformación de Lorentz.

A partir de los resultados anteriores comienzan las aportaciones originales de esta tesis, que se pueden resumir de la siguiente manera:

1. Se ha interpretado geoméricamente la acción de una multicapa como una transformación bilineal en el círculo unidad. Hemos efectuado una clasificación (en tres tipos) de dichas matrices en función del valor de su traza. A continuación, se han determinado los puntos fijos y se han caracterizado las órbitas que inducen en el círculo unidad las matrices de cada clase.
2. Las matrices canónicas correspondientes a cada uno de los tres tipos anteriores son las de la descomposición de Iwasawa para este grupo. El homomorfismo entre  $SO(2,1)$  y  $SU(1,1)$ , que a su vez es isomorfo a  $SL(2, \mathbb{R})$ , de las transformaciones de la óptica geométrica, ha permitido trasladar la clasificación introducida en  $SU(1,1)$  a los otros dos grupos, estableciéndose una interpretación física de la acción de las matrices canónicas en cada uno de ellos.
3. Se ha aplicado el formalismo anterior a sistemas simétricos lo que ha permitido caracterizar la estabilidad de la condición de reflectancia nula frente a pequeñas variaciones de los parámetros constructivos en sistemas antirreflejantes.
4. A continuación, desde el mismo formalismo se ha obtenido la expresión exacta de la reflectancia para cada uno de los tres posibles tipos de multicapas periódicas y

también se ha propuesto un criterio de optimización de los espesores para obtener una reflectancia omnidireccional máxima.

5. Por último, a partir de una formulación alternativa de la matriz de transferencia para estudiar la reflectancia de sistemas cuasi-periódicos de Fibonacci, se propone un estudio comparativo de la reflectancia omnidireccional para diferentes configuraciones de multicapas que constan de un número similar de láminas.

## Referencias

- [Abe48] F. Abelès, “Sur la propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux stratifiés”, *Ann. Phys. (Paris)* **3**, 504-20 (1948).
- [Abe63] F. Abelès, “Methods for determining optical parameters of thin films”, *Prog. Opt.* **2**, 249-88 (1963).
- [AB87] R. M. A. Azzam y N. M. Bashara, *Ellipsometry and Polarized Light* (North-Holland, Amsterdam, 1987).
- [AM83] H. H. Arsenault y B. Macukow, “Factorization of the transfer matrix for symmetrical optical systems”, *J. Opt. Soc. Am.* **73**, 1350-9 (1983).
- [AS94] S. Abe y J. T. Sheridan, “Optical operations on wave functions as the Abelian subgroups of the special affine Fourier transformation”, *Opt. Lett.* **19**, 1801-3 (1994).
- [Bar63] R. Barakat, “Theory of the coherence matrix for light of arbitrary spectral bandwidth”, *J. Opt. Soc. Am.* **53**, 317-23 (1963).
- [Bar80] A. O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles* (Dover, Nueva York, 1980).
- [BDS96] J. M. Bendickson, J. P. Dowling y M. Scalora, “Analytic expressions for the electromagnetic mode density in finite, one-dimensional, photonic band-gap structures”, *Phys. Rev. E* **53**, 4107-21 (1996).
- [BR77] A. O. Barut y R. Rączka, *Theory of Group Representations and Applications* (PWN, Varsovia, 1977).
- [BW99] M. Born y E. Wolf, *Principles of Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [BYM02] A. G. Barriuso, T. Yonte, J. J. Monzón, L. L. Sánchez-Soto y J. F. Cariñena, “Geometrical approach to multilayer optics”, *Recent Research Developments in Optics* **2**, 565-96 (2002).
- [Cav81] C. M. Caves, “Quantum-mechanical noise in an interferometer”, *Phys. Rev. D* **23**, 1693-708 (1981).
- [CD00] S. J. Cox y D.C. Dobson “Band structure optimization of two-dimensional photonic crystals in H-polarization”, *J. Comput. Phys.* **158**, 214-24 (2000).
- [Coj01] E. Cojocar, “Forbidden gaps in finite periodic and quasi-periodic Cantor-like dielectric multilayers at normal incidence”, *Appl. Opt.* **40**, 6319-26 (2001).
- [Cox68] H. S. M. Coxeter, *Non-Euclidean Geometry* (University of Toronto Press, Toronto, 1968).
- [Deg80] V. Degiorgio, “Phase shift between the transmitted and reflected optical fields of a semireflecting lossless mirror is  $\pi/2$ ”, *Am. J. Phys.* **48**, 81-2 (1980).

- [Dow98] J. P. Dowling, “Mirror on the wall: you’re omnidirectional after all?”, *Science* **282**, 1841-2 (1998).
- [Dra82] A. J. Dragt, “Lie algebraic theory of geometrical optics and optical aberrations”, *J. Opt. Soc. Am. A* **72**, 372-9 (1982).
- [DSM02] M. J. A. De Dood, E. Snoeks, A. Moroz y A. Polman, “Design and optimization of 2D photonic crystal waveguides based on silicon”, *Opt. Quantum Electron.* **34**, 145-59 (2002).
- [DSR90] M. Dulea, M. Severin y R. Riklund, “Transmission of light through deterministic aperiodic non-Fibonacci multilayers”, *Phys. Rev. B.* **42**, 3680-9 (1990).
- [FWF98] Y. Fink, J. N. Winn, S. Fan, C. Chen, J. Michel, J. D. Joannopoulos y E. L. Thomas, “A dielectric omnidirectional reflector”, *Science* **282**, 1679-82 (1998).
- [GP89] A. Galindo y P. Pascual, *Mecánica cuántica* (EUDEMA, Madrid, 1989).
- [GS84] V. Guillemin y S. Sternberg, *Symplectic Techniques in Physics* (Cambridge University Press, Londres, 1984).
- [GV02] R. Guist y J. M. Vigoureux, “Hyperbolic representation of light propagation in a multilayer medium”, *J. Opt. Soc. Am A* **19**, 378-84 (2002).
- [Har85] P. Hariharan, *Optical Interferometry* (Academic, Sydney, 1985).
- [HHK89] D. Han, E. E. Hardekopf y Y. S. Kim, “Thomas precession and squeezed states of light”, *Phys. Rev. A* **39**, 1269-76 (1989).
- [HK98] D. Han y Y. S. Kim, “Special relativity and interferometers”, *Phys. Rev. A* **37**, 4494-6 (1998).
- [HKN88] D. Han, Y. S. Kim y M. E. Noz, “Linear canonical transformations of coherent and squeezed states in the Wigner phase space”, *Phys. Rev. E* **37**, 807-14 (1988).
- [HKN97] D. Han, Y. S. Kim y M. E. Noz, “Stokes parameters as a Minkowskian four-vector”, *Phys. Rev. E* **56**, 6065-76 (1997).
- [HKN99] D. Han, Y. S. Kim y M. E. Noz, “Wigner rotations and Iwasawa decompositions in polarization optics”, *Phys. Rev. E* **60**, 1036-41 (1999).
- [Jac80] J. D. Jackson, *Electrodinámica clásica* (Alhambra, Madrid, 1980).
- [Joa95] J. D. Joannopoulos, R. D. Meade y J. N. Winn, *Photonic Crystals* (Princeton University Press, Princeton, 1995).
- [Kha79] M. A. Khashan, “A Fresnel formula for dielectric multilayer mirrors”, *Optik* **54**, 363-71 (1979).
- [KKT83] M. Kohmoto, L. P. Kadanoff y C. Tang, “Localization Problem in One Dimension: Mapping and Escape”, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1870-2 (1983).
- [KN86] Y. S. Kim y M. E. Noz, *Theory and Applications of the Poincaré Group* (Reidel, Dordrecht, 1986).
- [KSI87] M. Kohmoto, B. Sutherland y K. Iguchi, “Localization in optics: Quasiperiodic media”, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2436-8 (1987).
- [Lek87] J. Lekner, *Theory of Reflection* (Kluwer, Dordrecht, 1987).
- [Lek89] J. Lekner, “Nonreflecting stratifications”, *Can. J. Phys.* **68**, 738-42 (1989).
- [Lek90] J. Lekner, “The phase relation between reflected and transmitted waves, and some consequences”, *Am. J. Phys.* **58**, 317-20 (1990).
- [Lek94] J. Lekner, “Light in periodically stratified media”, *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, 2892-9 (1994).
- [Lek00] J. Lekner, “Omnidirectional reflection by multilayer dielectric mirrors”, *J. Opt. A* **2**, 349-52 (2000).

- [LMY02] H. Y. Lee, H. Makino, T. Yao y A. Tanaka, “Si-based omnidirectional reflector and transmission filter optimized at a wavelength of  $1.55 \mu\text{m}$ ”, *Appl. Phys. Lett.* **81**, 4502-4 (2002).
- [Mac86] H. A. Macleod, *Thin-film Optical Filters* (Adam Hilger, Bristol, 1986).
- [Mac01] E. Maciá, “Exploiting quasiperiodic order in the design of optical devices”, *Phys. Rev. B* **63**, 205421 (2001).
- [MS99a] J. J. Monzón y L. L. Sánchez-Soto, “Fully relativisticlike formulation of multilayer optics”, *J. Opt. Soc. Am. A* **16**, 2013-8 (1999).
- [MS99b] J. J. Monzón y L. L. Sánchez-Soto, “Lossless multilayers and Lorentz transformations: more than an analogy”, *Opt. Commun.* **162**, 1-6 (1999).
- [MS99c] J. J. Monzón y L. L. Sánchez-Soto, “Origin of the Thomas rotation that arises in lossless multilayers”, *J. Opt. Soc. Am. A* **16**, 2786-92 (1999).
- [MS99d] J. J. Monzón y L. L. Sánchez-Soto, “Multilayer optics as an analog computer for testing special relativity”, *Phys. Lett. A* **262**, 18-26 (1999).
- [MS00] J. J. Monzón y L. L. Sánchez-Soto, “Fresnel formulas as Lorentz transformations”, *J. Opt. Soc. Am. A* **17**, 1475-81 (2000).
- [MYS01] J. J. Monzón, T. Yonte y L. L. Sánchez-Soto, “Basic factorization for multilayers”, *Opt. Lett.* **26**, 370-2 (2001).
- [MYS02] J. J. Monzón, T. Yonte, L. L. Sánchez-Soto y J. F. Cariñena, “Geometrical setting for the classification of multilayers”, *J. Opt. Soc. Am. A* **19**, 985-91 (2002).
- [MYS03] J. J. Monzón, T. Yonte y L. L. Sánchez-Soto, “Characterizing the reflectance of periodic layered media”, *Opt. Commun.* **218**, 43-7 (2003).
- [OF00] I. Ohlídal y D. Franta, “Ellipsometry of thin film systems”, *Prog. Opt.* **49**, 181-202 (2000).
- [OM89] Z. Y. Ou y L. Mandel, “Derivation of reciprocity relations for a beam splitter from energy balance”, *Am. J. Phys.* **57**, 66-7 (1989).
- [OP93] T. Opatrný y J. Peřina, “Non-image forming polarization optical devices and Lorentz transformations—an analogy” *Phys. Lett. A* **181**, 199-202 (1989).
- [Pel91] P. Pellat-Finet, “Geometrical approach to polarization optics: I-Geometrical structure of polarized light”, *Optik* **87**, 27-33 (1991).
- [Pel92] P. Pellat-Finet y M. Bausset, “What is common to both polarization optics and relativistic kinematics?”, *Optik* **90**, 101-6 (1992).
- [Per86] A. Perelomov, *Generalized Coherent States and their Applications* (Springer, Berlín, 1986).
- [PR60] G. P. Parent y P. Roman, “On the matrix formulation of the theory of partial polarization in terms of observables”, *Nuovo Cimento* **15**, 370-88 (1960).
- [RW85] M. D. Reid y D. F. Walls, “Generation of squeezed states in degenerate four-wave mixing”, *Phys. Rev. A* **31**, 1622-35 (1985).
- [SC95] J. Shamir y N. Cohen “Root and power transformations in optics”, *J. Opt. Soc. Am. A* **12**, 2415-23 (1995).
- [SMS85] E. C. G. Sudarshan, N. Mukunda y R. Simon, “Realization of first order optical systems using thin lenses”, *Opt. Acta* **32**, 855-72 (1985).
- [SMY01] L. L. Sánchez-Soto, J. J. Monzón, T. Yonte y J. F. Cariñena, “Simple trace criterion for classification of multilayers”, *Opt. Lett.* **26**, 1400-02 (2001).
- [Sou99] W. H. Southwell, “Omnidirectional mirror design with quarter-wave dielectric stacks”, *Appl. Opt.* **38**, 5464-7 (1999).

- [SSM84] R. Simon, E. C. G. Sudarshan y N. Mukunda, “Generalized rays in first order optics: transformation properties of gaussian Schell-model fields”, *Phys. Rev. A* **29**, 3273-9 (1984).
- [Sto63] J. M. Stone, *Radiation and Optics* (McGraw-Hill, Nueva York, 1963).
- [SW86] J. Sánchez-Mondragón y K. B. Wolf, *Lie Methods in Optics*, Lecture Notes in Physics **250** (Springer, Berlín, 1986).
- [TW96] E. F. Taylor y J. A. Wheeler, *Spacetime Physics: Introduction to Special Relativity* (Freeman, Nueva York, 1996).
- [VG93] J. M. Vigoureux y Ph. Gossel, “A relativistic-like presentation of optics in stratified planar media”, *Am. J. Phys.* **61**, 707-12 (1993).
- [Vig92] J. M. Vigoureux, “Use of Einstein’s addition law in studies of reflection by stratified planar structures”, *J. Opt. Soc. Am. A* **9**, 1313-9 (1992).
- [VM02] I. Y. Vorgul y M. D. Marciniak, “Design and optimisation of multimode 1D photonic band gap waveguide”, *Opt. Quant. Electron.* **34** 493-503 (2002).
- [WGS00] X. Wang, U. Grimm y M. Schreiber, “Trace and antitrace maps for aperiodic sequences: Extensions and applications”, *Phys. Rev. B* **62** 14020-31 (2000)
- [Wol86] K. B. Wolf, “Symmetry in Lie optics” *Ann. Phys., (NY)* **172**, 1-25 (1986).
- [Yab98] E. Yablonovitch, “Engineered omnidirectional external-reflectivity spectra from one-dimensional layered interference filters”, *Opt. Lett.* **23**, 1648-9 (1998).
- [Yeh88] P. Yeh, *Optical Waves in Layered Media* (Wiley, Nueva York, 1988).
- [YMF04] T. Yonte, J. J. Monzón, A. Felipe y L. L. Sánchez-Soto, “Optimizing omnidirectional reflection by multilayer mirrors”, *J. Opt. A* **6**, 127-31 (2004).
- [YMK86] B. Yurke, S. L. McCall y J. R. Klauder, “SU(2) and SU(1,1) interferometers”, *Phys. Rev. A* **33**, 4033-54 (1986).
- [YMS02] T. Yonte, J. J. Monzón, L. L. Sánchez-Soto, J. F. Cariñena y C. López-Lacasta, “Understanding multilayers from a geometrical viewpoint”, *J. Opt. Soc. Am. A* **19**, 603-9 (2002).
- [YYH77] P. Yeh, A. Yariv y C. S. Hong, “Electromagnetic propagation in periodic stratified media. I. General theory”, *J. Opt. Soc. Am.* **67**, 423-38 (1977).
- [Zei81] A. Zeilinger, “General properties of lossless beam splitters in interferometry”, *Am. J. Phys.* **49**, 882-3 (1981).