

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I



**MODELADOS DE REGISTROS DE GEO-RADAR EN DOS
Y TRES DIMENSIONES: DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN
DE ALGORITMOS PARA LA RESOLUCIÓN DE LOS
PROBLEMAS DIRECTO E INVERSO**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Raúl Corraliza Nieto

Bajo la dirección de la doctora:
M. Carmen Hernández Lucendo

Madrid, 2006

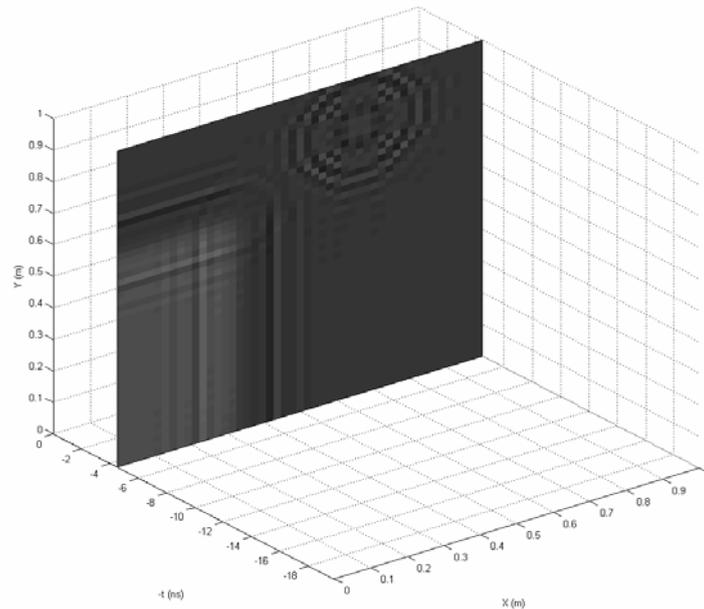
- **ISBN: 978-84-669-2921-9**



*Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I
(Geofísica y Meteorología) (Astronomía y Geodesia)
Facultad de Ciencias Físicas
Universidad Complutense de Madrid*



Modelado de registros de geo-radar en dos y tres dimensiones: Diseño e implementación de algoritmos para la resolución de los problemas directo e inverso



Raúl Corraliza Nieto

*Tesis Doctoral
dirigida por la Dra. M.Carmen Hernández Lucendo*

Noviembre de 2005

*Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I
(Geofísica y Meteorología) (Astronomía y Geodesia)
Facultad de Ciencias Físicas
Universidad Complutense de Madrid*

Modelado de registros de geo-radar en dos y tres dimensiones: Diseño e implementación de algoritmos para la resolución de los problemas directo e inverso.

Tesis Doctoral dirigida por la Dra. M.Carmen Hernández Lucendo,
Profesora Titular del Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I
de la Universidad Complutense de Madrid.

Madrid, Noviembre de 2005

Doctorando

Vº Bº de la Directora

Fdo.: Raúl Corraliza Nieto

Fdo.: Dra. M.Carmen Hernández Lucendo

Agradecimientos

Deseo expresar mi agradecimiento a todos aquellos que, de una u otra forma, han estado junto a mí a lo largo de todos estos años de trabajo, especialmente:

A la Directora de esta Tesis Doctoral, la Dra. M.Carmen Hernández Lucendo. Para ella mi más profundo cariño, respeto y admiración, por despertar en mí desde el primer día de clase en la Licenciatura el interés y la pasión por la Prospección Geofísica, por su constante estímulo y ayuda todo este tiempo, por su confianza en mí y su paciencia infinita.

Al Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I (Geofísica y Meteorología) (Astronomía y Geodesia) de la Universidad Complutense de Madrid, por brindarme la oportunidad de realizar esta Tesis Doctoral. También a cada uno de sus miembros, por su paciencia y enseñanzas a lo largo de todos estos años de estudio, primero en las asignaturas de la especialidad en la Licenciatura y luego en el Tercer Ciclo.

Al Dr. Enrique Lorenzo Cimadevila (Departamento de Ingeniería de Recursos Naturales y Medio Ambiente de la Universidad de Vigo) y la Dra. Vega Pérez Gracia (Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras a la Ingeniería), por sus repetidos ofrecimientos de ayuda para cualquier problema, duda o cuestión que me pudiera surgir. Sus Tesis Doctorales han sido una continua referencia en mi trabajo, un ideal de calidad a alcanzar.

A mis compañeros del café en el Departamento: Luismi, Paco, Isabel (actualmente en el Departamento de Ingeniería Geodésica, Fotogrametría y Cartografía de la Universidad Politécnica de Valencia)... Sin ellos el día a día en el Departamento no habría sido igual. Ellos me han ayudado a desconectar a media mañana, o a media tarde, o cuando hiciera falta, de los líos físico-matemático-informáticos en los que iba metiendo yo solito.

No he de olvidar a mis amigos de toda la vida, y en la Licenciatura de Ciencias y Técnicas Estadísticas: Susi, Laura, Dani, Aitor, Patricia, Amanda, Carmen, Ana, Pili, David, Juan... Gracias a que nunca les ha interesado lo más mínimo la Física, me han mantenido apartado del trabajo en los momentos en que tocaba descansar.

También quisiera mencionar aquí al Claustro de Profesores y la Junta Directiva del I.E.S. Príncipe Felipe (Madrid), muy especialmente a mis compañeros del Departamento de Matemáticas y las profesoras Tonia Bartle y M.Emilia Martínez-Fresneda, por su acogida, su compañerismo y apoyo a lo largo de este curso. Cuánto les echaré de menos...

Por último aunque no por ello menos importante, a mi familia: mis padres Juan Luis y Candelaria, mi hermana Sara, mi abuela María, mi novia Ana... ellos son los que más han tenido que soportar y soportarme. ¡Y lo que les queda!

A todos, nuevamente, gracias.

A Ana, por... todo.

Índice

AGRADECIMIENTOS

ÍNDICE..... i

ÍNDICE DE FIGURAS ix

ÍNDICE DE TABLAS xxi

ÍNDICE DE SÍMBOLOS Y NOTACIONES xxv

RESUMEN..... 1

INTRODUCCIÓN..... 3

CAPÍTULO 1 FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA..... 9

INTRODUCCIÓN 11

1.1. ECUACIONES DE MAXWELL..... 13

1.1.1. ECUACIONES DE MAXWELL EN EL DOMINIO NATURAL..... 13

1.1.2. ECUACIONES DE MAXWELL EN EL DOMINIO FRECUENCIAL 14

1.2. PROPAGACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS..... 17

1.2.1. PROPAGACIÓN DE ONDAS PLANAS MONOCROMÁTICAS 17

1.2.1.1. *Ondas planas en medios dieléctricos* 17

1.2.1.2. *Ondas planas en dieléctricos perfectos* 21

1.2.1.3. *Ondas planas en el vacío*..... 21

1.2.1.4. *Ondas planas en conductores perfectos* 22

1.2.2. REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN DE ONDAS PLANAS MONOCROMÁTICAS EN EL CASO DE INCIDENCIA NORMAL 23

1.2.2.1. *Estudio de las amplitudes de los campos: Coeficientes de reflexión y transmisión* 23

1.2.2.2. *Estudio de la energía: Reflectancia y transmitancia*..... 26

1.2.3.	ATENUACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS.....	27
1.2.3.1.	<i>Dispersión de frecuencias</i>	28
1.2.3.2.	<i>Dispersión geométrica</i>	28
1.2.3.3.	<i>Enfoque y dispersión en las interfaces</i>	28
1.2.3.4.	<i>Absorción</i>	30
1.2.3.5.	<i>Dispersión (Scattering)</i>	30
1.3.	PARÁMETROS ELECTROMAGNÉTICOS.....	31
CAPÍTULO 2	PROSPECCIÓN GEOFÍSICA CON GEO-RADAR.....	33
	INTRODUCCIÓN	35
2.1.	COMPONENTES DEL GEO-RADAR.....	37
2.2.	BREVE DESCRIPCIÓN DEL FUNCIONAMIENTO DEL GEO-RADAR.....	39
2.3.	ANTENAS.....	41
2.3.1.	TIPOS DE ANTENAS.....	41
2.3.2.	CARACTERÍSTICAS FÍSICAS	42
2.3.2.1.	<i>Impedancia y eficiencia</i>	42
2.3.2.2.	<i>Intensidad de radiación y potencia total radiada</i>	43
2.3.2.3.	<i>Diagrama de radiación</i>	45
2.3.2.4.	<i>Directividad y ganancia</i>	46
2.3.2.5.	<i>Polarización</i>	46
2.3.2.6.	<i>Ancho de banda y frecuencia nominal</i>	47
2.3.2.7.	<i>Área efectiva</i>	47
2.3.3.	ECUACIÓN DE PROPAGACIÓN: ECUACIÓN DEL RADAR.....	48
2.3.4.	CAPACIDAD DE RESOLUCIÓN.....	49
2.3.4.1.	<i>Resolución vertical</i>	50
2.3.4.2.	<i>Resolución horizontal</i>	53
2.4.	TÉCNICAS DE PROCESADO DE LOS DATOS DE CAMPO.....	55
2.4.1.	VISUALIZACIÓN DE LOS REGISTROS	55
2.4.2.	REMUESTREO O INTERPOLACIÓN EN EL EJE ESPACIAL	56
2.4.3.	FILTROS ESPACIALES.....	56
2.4.4.	FILTROS TEMPORALES.....	57
2.4.5.	CORRECCIÓN ESTÁTICA	57
2.4.6.	DECONVOLUCIÓN	58
2.4.7.	MIGRACIÓN.....	58
2.4.8.	SUPERPOSICIÓN DE TRAZAS (STACKING).....	58
2.4.9.	CORRECCIÓN DEL NORMAL MOVEOUT (NMO).....	59
2.5.	CONVERSIÓN TIEMPO DOBLE DE RECORRIDO–PROFUNDIDAD	61
2.5.1.	MÉTODOS DE ONDA REFLEJADA (REFLECTED-WAVE METHODS).....	61
2.5.2.	MÉTODOS DE ONDA DIRECTA (DIRECT-WAVE METHODS)	62
2.5.3.	ENSAYOS DE LABORATORIO.....	62
CAPÍTULO 3	DISEÑO DE ALGORITMOS BASADOS EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER PARA LA INVERSIÓN Y SÍNTESIS DE RADARGRAMAS.....	63
	INTRODUCCIÓN	65
3.1.	PROPAGACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO: ECUACIÓN DE ONDAS	67
3.2.	RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO	69
3.2.1.	PLANTEAMIENTO Y NOTACIÓN.....	69

3.2.2.	CAMBIOS DE VARIABLE Y TRANSFORMACIONES DE LA ECUACIÓN DE ONDA EN EL DOMINIO NATURAL.....	70
3.2.2.1.	<i>Primera transformación</i>	71
3.2.2.2.	<i>Segunda transformación</i>	74
3.2.2.3.	<i>Tercera transformación</i>	76
3.2.3.	RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ONDAS EN EL DOMINIO FRECUENCIAL.....	80
3.2.3.1.	<i>Generalización de la SECCIÓN MEDIDA en función de su transformada de Fourier</i>	81
3.2.3.2.	<i>Obtención de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD</i>	82
3.3.	RECAPITULACIÓN	85
3.3.1.	APROXIMACIONES EFECTUADAS	85
3.3.2.	RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO TRAS LA TERCERA TRANSFORMACIÓN: DETERMINACIÓN DE LA SECCIÓN MEDIDA A PARTIR DE LA DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD.....	87
3.3.3.	RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DIRECTO TRAS LA TERCERA TRANSFORMACIÓN: DETERMINACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD A PARTIR DE LA SECCIÓN MEDIDA	89
3.A.	ANEXO A: ELEMENTOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL	91
3.B.	ANEXO B: RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ONDAS EN EL DOMINIO FRECUENCIAL PARA LA MODALIDAD MONOSTÁTICA	93
3.B.1.	GENERALIZACIÓN DE LA SECCIÓN MEDIDA EN FUNCIÓN DE SU TRANSFORMADA DE FOURIER.....	93
3.B.2.	OBTENCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD	95
CAPÍTULO 4	FORMALISMO MATEMÁTICO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNCIONES MUESTREADAS CON SOPORTE ACOTADO	97
	INTRODUCCIÓN	99
4.1.	TRANSFORMADA INTEGRAL DE FOURIER	101
4.1.1.	TRANSFORMADAS DE FOURIER DIRECTA E INVERSA. TEOREMA INTEGRAL DE FOURIER.....	101
4.1.2.	HACIA LA DISCRETIZACIÓN DEL TEOREMA INTEGRAL DE FOURIER. SERIES DE FOURIER.....	103
4.1.2.1.	<i>Serie de Fourier de funciones en el dominio natural</i>	103
4.1.2.2.	<i>Serie de Fourier de funciones en el dominio frecuencial</i>	104
4.1.2.3.	<i>Discretizaciones del Teorema Integral de Fourier</i>	105
4.2.	MUESTREO DE FUNCIONES Y ACOTACIÓN DEL SOPORTE	107
4.2.1.	MUESTREO DE FUNCIONES	107
4.2.2.	ACOTACIÓN DEL SOPORTE DE FUNCIONES. VENTANAS	112
4.2.3.	FUNCIONES MUESTREADAS CON SOPORTE ACOTADO	116
4.3.	TRANSFORMADAS DE FOURIER DE FUNCIONES MUESTREADAS CON SOPORTE ACOTADO	121
4.3.1.	TRANSFORMADA DE FOURIER DIRECTA	121
4.3.2.	TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA	126
4.3.3.	RELACIONES ENTRE LAS MAGNITUDES DE LOS DOMINIOS NATURAL Y FRECUENCIAL .	130
4.4.	INTERPOLACIÓN EN LAS TRANSFORMADAS DE FOURIER	131
4.4.1.	INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER DIRECTA	132
4.4.1.1.	<i>Generalización del Teorema del Muestreo para la transformada directa</i>	132
4.4.1.2.	<i>Interpolación en la transformada directa</i>	139

4.4.2.	INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA	144
4.4.2.1.	<i>Generalización del Teorema del Muestreo para la transformada inversa</i>	144
4.4.2.2.	<i>Interpolación en la transformada inversa</i>	151
4.5.	RELACIONES ENTRE LAS TRANSFORMADAS DIRECTA E INVERSA Y LA FUNCIÓN ORIGINAL	157
4.5.1.	RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA Y LA FUNCIÓN ORIGINAL	158
4.5.2.	RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA Y LA FUNCIÓN ORIGINAL	164
4.5.3.	RELACIÓN ENTRE LA INTERPOLACIÓN DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA Y LA FUNCIÓN ORIGINAL.....	172
4.6.	RECAPITULACIÓN	181
4.6.1.	TRANSFORMADAS DE FOURIER DIRECTA E INVERSA	181
4.6.2.	INTERPOLACIÓN EN LAS TRANSFORMADAS DE FOURIER	182
4.6.3.	RELACIONES ENTRE LAS TRANSFORMADAS DIRECTA E INVERSA Y LA FUNCIÓN ORIGINAL	184
4.A.	ANEXO: DEMOSTRACIONES DE LOS RESULTADOS MATEMÁTICOS	187
4.A.1.	TRANSFORMADAS DE FOURIER DE FUNCIONES MUESTREADAS CON SOPORTE ACOTADO	187
4.A.1.1.	<i>Transformada de Fourier directa</i>	187
4.A.1.2.	<i>Transformada de Fourier inversa</i>	189
4.A.2.	INTERPOLACIÓN EN LAS TRANSFORMADAS DE FOURIER	192
4.A.2.1.	<i>Generalización del Teorema del Muestreo para la transformada directa</i>	192
4.A.2.2.	<i>Consistencia de la transformada directa interpolada</i>	194
4.A.2.3.	<i>Generalización del Teorema del Muestreo para la transformada inversa</i>	196
4.A.2.4.	<i>Consistencia de la transformada inversa interpolada</i>	198
4.A.3.	RELACIONES ENTRE LAS TRANSFORMADAS DIRECTA E INVERSA Y LA FUNCIÓN ORIGINAL	199
4.A.3.1.	<i>Relación entre la transformada inversa de la transformada directa y la función original</i>	199
4.A.3.2.	<i>Relación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada y la función original</i>	201
4.A.3.3.	<i>Relación entre la interpolación de la transformada inversa de la transformada directa interpolada y la función original</i>	203
CAPÍTULO 5	INTERPOLACIÓN EN LAS TRANSFORMADAS DE FOURIER MEDIANTE MÉTODOS ALTERNATIVOS AL TEOREMA DEL MUESTREO GENERALIZADO	207
	INTRODUCCIÓN	209
5.1.	TRANSFORMADAS RÁPIDAS DE FOURIER NO UNIFORMES (NUFFT Y NUIFFT)	211
5.1.1.	METODOLOGÍA	212
5.1.1.1.	<i>Teoría para la transformada directa unidimensional</i>	212
5.1.1.2.	<i>Determinación del filtro óptimo</i>	215
5.1.2.	RESULTADOS NUMÉRICOS	219
5.1.2.1.	<i>Error relativo máximo y valor óptimo del parámetro</i>	219
5.1.2.2.	<i>Tiempo de cálculo medio</i>	223

5.1.3.	ALGORITMO PARA LAS TRANSFORMADAS DIRECTA E INVERSA D -DIMENSIONALES.....	225
5.1.3.1.	<i>Datos de entrada</i>	225
5.1.3.2.	<i>Parámetros prefijados</i>	226
5.1.3.3.	<i>Parámetros calculados</i>	226
5.1.3.4.	<i>Algoritmo</i>	226
5.2.	INTERPOLACIÓN EN LAS TRANSFORMADAS DE FOURIER MEDIANTE TÉCNICAS GENERALES	233
5.2.1.	INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER DIRECTA	233
5.2.2.	INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA	245
5.3.	RELACIONES ENTRE LAS TRANSFORMADAS DIRECTA E INVERSA INTERPOLADAS Y LA FUNCIÓN ORIGINAL	257
5.3.1.	RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA MEDIANTE TÉCNICAS GENERALES Y LA FUNCIÓN ORIGINAL	257
5.3.2.	RELACIÓN ENTRE LA INTERPOLACIÓN MEDIANTE TÉCNICAS GENERALES DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA Y LA FUNCIÓN ORIGINAL	269
5.3.3.	RELACIÓN ENTRE LA NUIFFT DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA Y LA FUNCIÓN ORIGINAL	281
5.4.	ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS: ELECCIÓN DEL MÉTODO DE INTERPOLACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER	287
CAPÍTULO 6	IMPLEMENTACIÓN DE LOS ALGORITMOS	289
	INTRODUCCIÓN	291
6.1.	DESCRIPCIÓN TÉCNICA DEL ALGORITMO IMPLEMENTADO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DIRECTO EN DOS DIMENSIONES	293
6.1.1.	MÓDULO PERFIL_PD.....	294
6.1.2.	MÓDULOS COORDENADAS, NATURAL2FRECUENCIAL1, NATURAL2FRECUENCIAL2 Y FRECUENCIAL2NATURAL.....	298
6.1.2.1.	<i>Módulo coordenadas</i>	298
6.1.2.2.	<i>Módulo natural2frecuencial1</i>	299
6.1.2.3.	<i>Módulo natural2frecuencial2</i>	300
6.1.2.4.	<i>Módulo frecuencial2natural</i>	301
6.1.3.	MÓDULO INDICES2SECCION_PERFIL	302
6.1.4.	MÓDULO INDICES_Z2D_PERFIL	307
6.1.5.	MÓDULOS cZ_LZ_PERFIL Y CM_LD_PERFIL	309
6.1.5.1.	<i>Módulo cZ_LZ_perfil</i>	309
6.1.5.2.	<i>Módulo cm_LD_perfil</i>	311
6.1.6.	MÓDULO MEDIA_PERFIL.....	312
6.1.7.	MÓDULO INDICES2DISTRIBUCION_PERFIL.....	313
6.1.8.	MÓDULO MULTIPLES_PD.....	315
6.1.9.	MÓDULOS AMPLIAR_PERFIL Y REDUCIR_PERFIL	316
6.1.9.1.	<i>Módulo ampliar_perfil</i>	316
6.1.9.2.	<i>Módulo reducir_perfil</i>	318
6.1.10.	MÓDULO FILTRAR_FFT2_PD.....	320
6.1.11.	MÓDULOS QPERFIL, KPERFIL Y DKDQPERFIL	322
6.1.11.1.	<i>Módulo Qperfil</i>	322
6.1.11.2.	<i>Módulo Kperfil</i>	323
6.1.11.3.	<i>Módulo dKdQperfil</i>	324

6.1.12.	MÓDULO SPLINE3INTERP	325
6.2.	DESCRIPCIÓN TÉCNICA DEL ALGORITMO IMPLEMENTADO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO EN DOS DIMENSIONES	327
6.2.1.	MÓDULO PERFIL_PI.....	328
6.2.2.	MÓDULO SECCION2DISTRIBUCION_PERFIL.....	330
6.2.3.	MÓDULO FILTRAR_FFT2_PI.....	334
6.2.4.	MÓDULO DQDKPERFIL	336
6.3.	DESCRIPCIÓN TÉCNICA DE LOS ALGORITMOS IMPLEMENTADOS PARA LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS DIRECTO E INVERSO EN TRES DIMENSIONES	337
6.A.	ANEXO A: DETERMINACIÓN DE LA VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN PROMEDIO EN EL PROBLEMA DIRECTO.....	339
6.B.	ANEXO B: DETERMINACIÓN DE LAS ONDAS REFLEJADAS MÚLTIPLES ...	343
6.B.1.	PROBLEMA DIRECTO.....	343
6.B.2.	PROBLEMA INVERSO	345
CAPÍTULO 7	APLICACIÓN DE LOS ALGORITMOS A DATOS SINTÉTICOS	347
	INTRODUCCIÓN	349
7.1.	APLICACIÓN DEL ALGORITMO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DIRECTO EN DOS DIMENSIONES.....	351
7.1.1.	UN DIFRACTOR PUNTUAL	351
7.1.2.	SUPERPOSICIÓN DE CAPAS PLANO-PARALELAS SOBRE UN SEMIESPACIO INFINITO	360
7.1.3.	MODELO REALISTA	368
7.2.	APLICACIÓN DEL ALGORITMO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DIRECTO EN TRES DIMENSIONES	377
7.2.1.	UN DIFRACTOR PUNTUAL	377
7.2.2.	SUPERPOSICIÓN DE CAPAS PLANO-PARALELAS SOBRE UN SEMIESPACIO INFINITO	388
7.2.3.	MODELO REALISTA	396
7.3.	APLICACIÓN DEL ALGORITMO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO EN DOS DIMENSIONES	415
7.3.1.	UN DIFRACTOR PUNTUAL	417
7.3.2.	SUPERPOSICIÓN DE CAPAS PLANO-PARALELAS SOBRE UN SEMIESPACIO INFINITO	423
7.3.3.	MODELO REALISTA	429
7.4.	APLICACIÓN DEL ALGORITMO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO EN TRES DIMENSIONES.....	435
7.4.1.	UN DIFRACTOR PUNTUAL	435
7.4.2.	SUPERPOSICIÓN DE CAPAS PLANO-PARALELAS SOBRE UN SEMIESPACIO INFINITO	443
7.4.3.	MODELO REALISTA	448
7.5.	RECAPITULACIÓN	455
7.A.	ANEXO: RESOLUCIÓN ANALÍTICA DEL PROBLEMA DIRECTO EN DOS DIMENSIONES.....	459
7.A.1.	UN DIFRACTOR PUNTUAL	460
7.A.2.	SUPERPOSICIÓN DE CAPAS PLANO-PARALELAS SOBRE UN SEMIESPACIO INFINITO	462

CAPÍTULO 8	APLICACIÓN DE LOS ALGORITMOS A DATOS DE CAMPO	465
	INTRODUCCIÓN	467
8.1.	CARACTERÍSTICAS DE LOS REGISTROS	469
8.1.1.	NATURALEZA DE LA REGIÓN SUBSUPERFICIAL	470
8.1.2.	MODALIDAD DE OPERACIÓN	470
8.1.3.	NATURALEZA DE LA RADIACIÓN	471
8.1.4.	TRAZAS Y MUESTRAS EQUIESPACIADAS	471
8.1.5.	ONDAS MÚLTIPLES	472
8.2.	PROCESADO DE LOS REGISTROS	473
8.2.1.	SUPERFICIE NO HORIZONTAL	474
8.2.2.	ESTRATIFICACIONES CON REFLECTORES PLANOS NO HORIZONTALES O CURVADOS	474
8.2.3.	EMISOR Y RECEPTOR NO COINCIDENTES	474
8.2.4.	EMISOR NO MONOCROMÁTICO	475
8.2.5.	TRAZAS NO EQUIESPACIADAS	475
8.2.6.	ONDAS MÚLTIPLES. CLUTTER	475
8.3.	APLICACIÓN A DATOS DE CAMPO	479
8.3.1.	DESCRIPCIÓN DEL EQUIPO DE GEO-RADAR	479
8.3.2.	APLICACIÓN EN LA HUERTA DEL MONASTERIO DE EL PAULAR (RASCAFRÍA, MADRID)	480
8.3.2.1.	<i>Localización del emplazamiento de estudio</i>	480
8.3.2.2.	<i>Perfil estudiado</i>	481
8.3.2.3.	<i>Procesado</i>	483
8.3.2.4.	<i>Resolución del Problema Inverso</i>	490
8.3.3.	APLICACIÓN EN EL CASTRO DE EL CEREMEÑO (HERRERÍA, GUADALAJARA)	492
8.3.3.1.	<i>Localización del emplazamiento de estudio</i>	492
8.3.3.2.	<i>Perfil estudiado</i>	494
8.3.3.3.	<i>Procesado</i>	496
8.3.3.4.	<i>Resolución del Problema Inverso</i>	502
8.3.4.	CARACTERIZACIÓN DE LOS RESULTADOS	505
CAPÍTULO 9	DISCUSIÓN GENERAL Y CONCLUSIONES	507
	INTRODUCCIÓN	509
9.1.	CARACTERÍSTICAS DE DISEÑO	511
9.1.1.	ANÁLISIS INDIVIDUAL DE LAS APROXIMACIONES	512
9.1.2.	EMISOR Y RECEPTOR COINCIDENTES	513
9.1.3.	MODELOS CONSTITUIDOS POR ESTRATIFICACIONES HORIZONTALES QUE INCLUYAN REFLECTORES PUNTUALES	513
9.1.4.	ANTENAS	514
9.2.	CARACTERÍSTICAS EN LA IMPLEMENTACIÓN	517
9.2.1.	DEFINICIÓN DE LAS SECCIONES	517
9.2.2.	ELIMINACIÓN DE ONDAS MÚLTIPLES EN EL PROBLEMA INVERSO	518
9.3.	CARACTERÍSTICAS DE CARÁCTER NUMÉRICO	519
9.3.1.	RESOLUCIÓN ESPACIAL DE LAS SEÑALES	520
9.3.2.	AMPLITUD Y FASE DE LAS SEÑALES	520

9.3.3.	OTRAS CONSIDERACIONES	521
9.3.3.1.	<i>Reflexiones múltiples entre la antena y la superficie en la resolución del Problema Directo en modelos sintéticos</i>	<i>521</i>
9.3.3.2.	<i>Frecuencia empleada en la resolución del Problema Directo en modelos sintéticos.....</i>	<i>521</i>
9.4.	PROCESADO DE LOS REGISTROS	523
9.5.	CONCLUSIONES FINALES.....	525
9.6.	FUTUROS TRABAJOS: LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN ABIERTAS	527
	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	529

Índice de figuras

En la lista siguiente se muestran las figuras presentes en el texto, junto con la página (o páginas) en que se muestran. Si el título de una figura se encuentra en una página diferente, se indica ésta en primer lugar.

FIGURA 1–2–1: ONDAS PLANAS INCIDENTE (SUBÍNDICE i), REFLEJADA (SUBÍNDICE r) Y TRANSMITIDA (SUBÍNDICE t) EN LA INTERFAZ QUE SEPARA LOS MEDIOS 1 Y 2. EL SÍMBOLO \odot (VS. \otimes) REPRESENTA UN VECTOR NORMAL AL PLANO DE LA HOJA DIRIGIDO HACIA EL EXTERIOR (VS. INTERIOR).	24
FIGURA 1–2–2: SECCIÓN TRANSVERSAL DE UNA INTERFAZ SUBSUPERFICIAL, ILUSTRANDO EL ENFOQUE Y DISPERSIÓN EN DIFERENTES POSICIONES DE LA ANTENA (CONYERS Y GOODMAN, 1997).	29
FIGURA 2–1–1: ELEMENTOS DE UN GEO-RADAR. FOTOGRAFÍAS PROCEDENTES DEL SITIO WEB DE RADAR SYSTEMS, INC. (http://www.radsys.lv)	38
FIGURA 2–2–1: ESTRUCTURA ESQUEMÁTICA DE UN GEO-RADAR (GRIGORIEV Y ZELENKOV, 2004).	39
FIGURA 2–2–2: FORMA DE LA ONDA ELECTROMAGNÉTICA RADIADA (GRIGORIEV Y ZELENKOV, 2004).	39
FIGURA 2–2–3: EJEMPLO DE LA SEÑAL DE SALIDA. EL PULSO TRANSMITIDO SE PUEDE OBSERVAR CLARAMENTE EN EL EXTREMO IZQUIERDO DEL REGISTRO (GRIGORIEV Y ZELENKOV, 2004).	40
FIGURA 2–3–1: ESQUEMA DE UNA ANTENA DE 100 MHz DE “GSSI” (PÉREZ GRACIA, 2001). LA ESPIRA ES DEL TIPO MARIPOSA.	42
FIGURA 2–3–2: SISTEMA DE COORDENADAS CON PUNTOS FUENTE Y PUNTOS CAMPO.	44
FIGURA 2–3–3: DIAGRAMA PARA LA DETERMINACIÓN DE LA ECUACIÓN DEL RADAR.	48
FIGURA 2–3–4: REPRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA DEL REGISTRO OBTENIDO EN UN MODELO DE TRES CAPAS (LORENZO, 1994). A PARTIR DE UN CIERTO ESPESOR DE LA CAPA INTERMEDIA PUEDEN DIFERENCIARSE DOS EVENTOS DIFERENTES.	50
FIGURA 2–3–5: RESOLUCIÓN VERTICAL VS. DURACIÓN DEL PULSO PARA DIFERENTES VALORES DE LA VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN (PÉREZ GRACIA, 2001).	51
FIGURA 2–3–6: RELACIÓN ENTRE LA LONGITUD DEL PULSO Y EL ANCHO DE BANDA (LORENZO, 1994).	52
FIGURA 2–3–7: PULSO TRANSMITIDO Y DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS CORRESPONDIENTE A UNA ANTENA DE 500 MHz (CONYERS Y GOODMAN, 1997).	52
FIGURA 2–3–8: CONO DE RADIACIÓN DE UN GEO-RADAR (CONYERS Y GOODMAN, 1997), DONDE A REPRESENTA EL SEMIEJE MAYOR DE LA HUELLA ELÍPTICA Y z LA PROFUNDIDAD DESDE LA SUPERFICIE.	53

FIGURA 3–2–1: SISTEMA DE COORDENADAS. LOS VECTORES \mathbf{r}^e Y \mathbf{r}^r DENOTAN, RESPECTIVAMENTE, LA POSICIÓN DEL EMISOR Y EL RECEPTOR; \mathbf{r} DENOTA LA POSICIÓN DE UN PUNTO GENÉRICO DE LA SUBSUPERFICIE.....	69
FIGURA 3–2–2: EJEMPLO PARA LA RELACIÓN ENTRE LOS TIEMPOS DOBLES DE RECORRIDO CALCULADOS MEDIANTE LAS COORDENADAS Z Y D	78
FIGURA 3–3–1: REPRESENTACIÓN DE LAS SITUACIONES A QUE HACE REFERENCIA LA §3.3.1.....	86
FIGURA 4–2–1: MUESTREO DE FUNCIONES, EJEMPLO I.....	109
FIGURA 4–2–2: MUESTREO DE FUNCIONES, EJEMPLO II.....	110
FIGURA 4–2–3: MUESTREO DE FUNCIONES, EJEMPLO III.....	111
FIGURA 4–2–4: ACOTACIÓN DEL SOPORTE DE FUNCIONES MEDIANTE LA APLICACIÓN DE VENTANAS, EJEMPLO I.....	113
FIGURA 4–2–5: ACOTACIÓN DEL SOPORTE DE FUNCIONES MEDIANTE LA APLICACIÓN DE VENTANAS, EJEMPLO II.....	114
FIGURA 4–2–6: ACOTACIÓN DEL SOPORTE DE FUNCIONES MEDIANTE LA APLICACIÓN DE VENTANAS, EJEMPLO III.....	115
FIGURA 4–2–7: FUNCIONES MUESTREADAS CON SOPORTE ACOTADO, EJEMPLO I.....	117
FIGURA 4–2–8: FUNCIONES MUESTREADAS CON SOPORTE ACOTADO, EJEMPLO II.....	118
FIGURA 4–2–9: FUNCIONES MUESTREADAS CON SOPORTE ACOTADO, EJEMPLO III.....	119
FIGURA 4–2–10: ELECCIÓN DE χ Y DETERMINACIÓN DE LX , VX Y LOS ÍNDICES n	120
FIGURA 4–3–1: TRANSFORMADA DE FOURIER DIRECTA DE FUNCIONES MUESTREADAS CON SOPORTE ACOTADO, EJEMPLO I.....	123
FIGURA 4–3–2: TRANSFORMADA DE FOURIER DIRECTA DE FUNCIONES MUESTREADAS CON SOPORTE ACOTADO, EJEMPLO II.....	124
FIGURA 4–3–3: TRANSFORMADA DE FOURIER DIRECTA DE FUNCIONES MUESTREADAS CON SOPORTE ACOTADO, EJEMPLO III.....	125
FIGURA 4–3–4: TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA DE FUNCIONES MUESTREADAS CON SOPORTE ACOTADO, EJEMPLO I.....	128
FIGURA 4–3–5: TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA DE FUNCIONES MUESTREADAS CON SOPORTE ACOTADO, EJEMPLO II.....	129
FIGURA 4–3–6: TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA DE FUNCIONES MUESTREADAS CON SOPORTE ACOTADO, EJEMPLO III.....	129
FIGURA 4–4–1: INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER DIRECTA MEDIANTE EL TEOREMA DEL MUESTREO GENERALIZADO (I), EJEMPLO I.....	134, 135
FIGURA 4–4–2: INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER DIRECTA MEDIANTE EL TEOREMA DEL MUESTREO GENERALIZADO (I), EJEMPLO II.....	134, 136
FIGURA 4–4–3: INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER DIRECTA MEDIANTE EL TEOREMA DEL MUESTREO GENERALIZADO (I), EJEMPLO III.....	134, 137

FIGURA 4-4-4: INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER DIRECTA MEDIANTE EL TEOREMA DEL MUESTREO GENERALIZADO (Y II), EJEMPLO I.	141
FIGURA 4-4-5: INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER DIRECTA MEDIANTE EL TEOREMA DEL MUESTREO GENERALIZADO (Y II), EJEMPLO II.	142
FIGURA 4-4-6: INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER DIRECTA MEDIANTE EL TEOREMA DEL MUESTREO GENERALIZADO (Y II), EJEMPLO III.	143
FIGURA 4-4-7: INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA MEDIANTE EL TEOREMA DEL MUESTREO GENERALIZADO (I), EJEMPLO I.	146, 147
FIGURA 4-4-8: INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA MEDIANTE EL TEOREMA DEL MUESTREO GENERALIZADO (I), EJEMPLO II.	146, 148
FIGURA 4-4-9: INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA MEDIANTE EL TEOREMA DEL MUESTREO GENERALIZADO (I), EJEMPLO III.	146, 149
FIGURA 4-4-10: INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA MEDIANTE EL TEOREMA DEL MUESTREO GENERALIZADO (Y II), EJEMPLO I.	153
FIGURA 4-4-11: INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA MEDIANTE EL TEOREMA DEL MUESTREO GENERALIZADO (Y II), EJEMPLO II.	154
FIGURA 4-4-12: INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA MEDIANTE EL TEOREMA DEL MUESTREO GENERALIZADO (Y II), EJEMPLO III.	155
FIGURA 4-5-1: RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA Y LA FUNCIÓN ORIGINAL, EJEMPLO I.	161
FIGURA 4-5-2: RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA Y LA FUNCIÓN ORIGINAL, EJEMPLO II.	162
FIGURA 4-5-3: RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA Y LA FUNCIÓN ORIGINAL, EJEMPLO III.	163
FIGURA 4-5-4: RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA MEDIANTE EL TEOREMA DEL MUESTREO GENERALIZADO Y LA FUNCIÓN ORIGINAL (I), EJEMPLO I.	165
FIGURA 4-5-5: RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA MEDIANTE EL TEOREMA DEL MUESTREO GENERALIZADO Y LA FUNCIÓN ORIGINAL (I), EJEMPLO II.	166
FIGURA 4-5-6: RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA MEDIANTE EL TEOREMA DEL MUESTREO GENERALIZADO Y LA FUNCIÓN ORIGINAL (I), EJEMPLO III.	167
FIGURA 4-5-7: RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA MEDIANTE EL TEOREMA DEL MUESTREO GENERALIZADO Y LA FUNCIÓN ORIGINAL (Y II), EJEMPLO II.	170
FIGURA 4-5-8: RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA MEDIANTE EL TEOREMA DEL MUESTREO GENERALIZADO Y LA FUNCIÓN ORIGINAL (Y II), EJEMPLO III.	171
FIGURA 4-5-9: RELACIÓN ENTRE LA INTERPOLACIÓN DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA MEDIANTE EL TEOREMA DEL MUESTREO GENERALIZADO Y LA FUNCIÓN ORIGINAL (I), EJEMPLO I.	173

FIGURA 4-5-10: RELACIÓN ENTRE LA INTERPOLACIÓN DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA MEDIANTE EL TEOREMA DEL MUESTREO GENERALIZADO Y LA FUNCIÓN ORIGINAL (I), EJEMPLO II.	174
FIGURA 4-5-11: RELACIÓN ENTRE LA INTERPOLACIÓN DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA MEDIANTE EL TEOREMA DEL MUESTREO GENERALIZADO Y LA FUNCIÓN ORIGINAL (I), EJEMPLO III.	175
FIGURA 4-5-12: RELACIÓN ENTRE LA INTERPOLACIÓN DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA MEDIANTE EL TEOREMA DEL MUESTREO GENERALIZADO Y LA FUNCIÓN ORIGINAL (Y II), EJEMPLO II.	178
FIGURA 4-5-13: RELACIÓN ENTRE LA INTERPOLACIÓN DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA MEDIANTE EL TEOREMA DEL MUESTREO GENERALIZADO Y LA FUNCIÓN ORIGINAL (Y II), EJEMPLO III.	179
FIGURA 5-1-1: VARIACIÓN DE (A) EU'/EU Y (B) PE'_0/PE VS. lf PARA ALGUNOS VALORES DEL NÚMERO DE PUNTOS PE . EN AMBOS CASOS $tsm = 2$	213
FIGURA 5-1-2: VARIACIÓN DEL (A) E_2 MEDIO Y (B) E_∞ MEDIO VS. lf PARA LOS FILTROS MOSTRADOS EN LA TABLA 5-1-1. EN AQUELLOS FILTROS QUE DEPENDEN DEL PARÁMETRO c , SE ESTUDIAN LOS VALORES $c \in \{1,995; 1,999; 2,2,001; 2,005\}$. EN TODOS LOS CASOS SE COMPARA LA TRANSFORMADA DIRECTA, $PE = 512$ Y $tsm = 2$. SE DISTINGUEN CINCO CASOS: FILTRO GAUSSIANO (LÍNEAS PUNTEADAS) CON LA APLICACIÓN DE LA VENTANA DE HANNING (IZQUIERDA) Y LA VENTANA CUADRADA (DERECHA), EL FILTRO B-SPLINE (LÍNEAS A TRAZOS) CON APLICACIÓN DE LA VENTANA DE HANNING Y LA VENTANA CUADRADA (IZQUIERDA, AMBAS COINCIDENTES) Y LA VENTANA TRIANGULAR (DERECHA).	218
FIGURA 5-1-3: (A) VARIACIÓN DEL E_2 MEDIO VS. lf PARA $tsm \in \{2, 4, 6\}$. (B) VARIACIÓN DEL TIEMPO MEDIO DE CÁLCULO VS. tsm . EN TODOS LOS CASOS SE COMPARA LA TRANSFORMADA DIRECTA, $PE = 512$ Y SE CONSIDERA EL FILTRO GAUSSIANO CON LA APLICACIÓN DE LA VENTANA DE HANNING.	218
FIGURA 5-1-4: VARIACIÓN DEL E_2 MEDIO VS. lf . LOS RESULTADOS PARA LOS VALORES DE PE CONSIDERADOS SE MUESTRAN PARA (A) LA TRANSFORMADA DIRECTA Y (B) LA TRANSFORMADA INVERSA. LAS LÍNEAS PUNTEADAS SE INCLUYEN PARA FACILITAR LA OBSERVACIÓN DE LAS TENDENCIAS.	220
FIGURA 5-1-5: (A) VARIACIÓN DEL VALOR ÓPTIMO DE b VS. lf PARA (A) LA TRANSFORMADA DIRECTA Y (B) LA TRANSFORMADA INVERSA. LOS RESULTADOS SE ENCUENTRAN ORDENADOS, DE TAL FORMA QUE LA CURVA SUPERIOR CORRESPONDE AL VALOR MAYOR DE LOS VALORES DE PE CONSIDERADOS, LA INFERIOR AL MENOR. LAS LÍNEAS PUNTEADAS SE INCLUYEN PARA FACILITAR LA OBSERVACIÓN DE LAS TENDENCIAS.	221
FIGURA 5-1-6: MODELO AJUSTADO PARA EL VALOR ÓPTIMO DE b VS. lf EN EL RANGO $5 \leq lf \leq 25$ PARA (A) LA TRANSFORMADA DIRECTA Y (B) LA TRANSFORMADA INVERSA. SE MUESTRAN LOS DATOS ORIGINALES (PUNTOS) Y EL MODELO AJUSTADO (LÍNEA CONTINUA). LOS INTERVALOS DE CONFIANZA AL 95% PARA LOS MODELOS AJUSTADOS SON INDISTINGUIBLES DE ÉSTOS. LOS RESULTADOS SE ENCUENTRAN ORDENADOS, DE TAL FORMA QUE LA CURVA SUPERIOR CORRESPONDE AL VALOR MAYOR DE LOS VALORES DE PE CONSIDERADOS, LA INFERIOR AL MENOR.	222
FIGURA 5-1-7: RESIDUOS RELATIVOS CORRESPONDIENTES AL MODELO DEL VALOR ÓPTIMO DE b VS. lf . LOS RESULTADOS PARA LOS VALORES DE PE CONSIDERADOS SE ENCUENTRAN SUPERPUESTOS PARA (A) LA TRANSFORMADA DIRECTA Y (B) LA TRANSFORMADA INVERSA. LAS LÍNEAS PUNTEADAS SE INCLUYEN PARA FACILITAR LA OBSERVACIÓN DE LAS TENDENCIAS.	222

FIGURA 5-1-8: MODELO AJUSTADO PARA EL TIEMPO DE CÁLCULO MEDIO VS. lf EN EL RANGO $5 \leq lf \leq 25$ PARA (A) LA TRANSFORMADA DIRECTA Y (B) LA TRANSFORMADA INVERSA. SE MUESTRAN LOS DATOS ORIGINALES (PUNTOS, TIEMPO DE LA EVALUACIÓN DIRECTA; ASTERISCOS, TIEMPO DEL ALGORITMO DE LA CONVOLUCIÓN), MODELOS AJUSTADOS (LÍNEA CONTINUA) Y LOS INTERVALOS DE CONFIANZA AL 95% PARA LOS MODELOS AJUSTADOS (LÍNEAS PUNTEADAS, EXCEPTO AQUELLAS QUE SON INDISTINGUIBLES DE ÉSTOS). LOS RESULTADOS SE ENCUENTRAN ORDENADOS, DE TAL FORMA QUE LA CURVA SUPERIOR CORRESPONDE AL TIEMPO DE CÁLCULO MEDIO DE LA EVALUACIÓN DIRECTA DE LA NDFFT, LA INFERIOR AL TIEMPO DE CÁLCULO MEDIO DEL ALGORITMO DE LA NUFFT.....	224
FIGURA 5-1-9: RESIDUOS RELATIVOS CORRESPONDIENTES AL MODELO AJUSTADO PARA EL TIEMPO DE CÁLCULO ÓPTIMO VS. lf . SE MUESTRAN LOS RESULTADOS CORRESPONDIENTES A LA EVALUACIÓN DIRECTA (PUNTOS) Y EL ALGORITMO DE LA CONVOLUCIÓN (ASTERISCOS) PARA (A) LA TRANSFORMADA DIRECTA Y (B) LA TRANSFORMADA INVERSA. LAS LÍNEAS PUNTEADAS SE INCLUYEN PARA FACILITAR LA OBSERVACIÓN DE LAS TENDENCIAS.....	224
FIGURA 5-1-10: EJEMPLO DE LA APLICACIÓN DEL ALGORITMO DE LA NUFFT.....	230, 231
FIGURA 5-2-1: INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER DIRECTA MEDIANTE EL MÉTODO DE VECINOS MÁS PRÓXIMOS, EJEMPLO I.....	234, 236
FIGURA 5-2-2: INTERPOLACIÓN EN LAS TRANSFORMADA DE FOURIER DIRECTA MEDIANTE EL MÉTODO DE VECINOS MÁS PRÓXIMOS, EJEMPLOS II Y III.....	235, 237
FIGURA 5-2-3: INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER DIRECTA MEDIANTE INTERPOLACIÓN LINEAL, EJEMPLO I.....	234, 238
FIGURA 5-2-4: INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER DIRECTA MEDIANTE INTERPOLACIÓN LINEAL, EJEMPLOS II Y III.....	235, 239
FIGURA 5-2-5: INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER DIRECTA MEDIANTE SPLINES CÚBICOS, EJEMPLO I.....	234, 240
FIGURA 5-2-6: INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER DIRECTA MEDIANTE SPLINES CÚBICOS, EJEMPLOS II Y III.....	235, 241
FIGURA 5-2-7: INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER DIRECTA MEDIANTE INTERPOLACIÓN POR POLINOMIOS DE HERMITE CÚBICOS, EJEMPLO I.....	234, 242
FIGURA 5-2-8: INTERPOLACIÓN EN LAS TRANSFORMADA DE FOURIER DIRECTA MEDIANTE INTERPOLACIÓN POR POLINOMIOS DE HERMITE CÚBICOS, EJEMPLOS II Y III.....	235, 243
FIGURA 5-2-9: INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA MEDIANTE EL MÉTODO DE VECINOS MÁS PRÓXIMOS, EJEMPLO I.....	246, 248
FIGURA 5-2-10: INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA MEDIANTE EL MÉTODO DE VECINOS MÁS PRÓXIMOS, EJEMPLOS II Y III.....	247, 249
FIGURA 5-2-11: INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA MEDIANTE INTERPOLACIÓN LINEAL, EJEMPLO I.....	246, 250
FIGURA 5-2-12: INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA MEDIANTE INTERPOLACIÓN LINEAL, EJEMPLOS II Y III.....	247, 251
FIGURA 5-2-13: INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA MEDIANTE SPLINES CÚBICOS, EJEMPLO I.....	246, 252
FIGURA 5-2-14: INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA MEDIANTE SPLINES CÚBICOS, EJEMPLOS II Y III.....	247, 253

FIGURA 5-2-15: INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA MEDIANTE INTERPOLACIÓN POR POLINOMIOS DE HERMITE CÚBICOS, EJEMPLO I.....	246, 254
FIGURA 5-2-16: INTERPOLACIÓN EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA MEDIANTE INTERPOLACIÓN POR POLINOMIOS DE HERMITE CÚBICOS, EJEMPLOS II Y III.	247, 255
FIGURA 5-3-1: RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA MEDIANTE EL MÉTODO DE VECINOS MÁS PRÓXIMOS Y LA FUNCIÓN ORIGINAL, EJEMPLO I.	258, 260
FIGURA 5-3-2: RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA MEDIANTE EL MÉTODO DE VECINOS MÁS PRÓXIMOS Y LA FUNCIÓN ORIGINAL, EJEMPLOS II Y III.	259, 261
FIGURA 5-3-3: RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA MEDIANTE INTERPOLACIÓN LINEAL Y LA FUNCIÓN ORIGINAL, EJEMPLO I.	258, 262
FIGURA 5-3-4: RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA MEDIANTE INTERPOLACIÓN LINEAL Y LA FUNCIÓN ORIGINAL, EJEMPLOS II Y III.	259, 263
FIGURA 5-3-5: RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA MEDIANTE SPLINES CÚBICOS Y LA FUNCIÓN ORIGINAL, EJEMPLO I.	258, 264
FIGURA 5-3-6: RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA MEDIANTE SPLINES CÚBICOS Y LA FUNCIÓN ORIGINAL, EJEMPLOS II Y III.	259, 265
FIGURA 5-3-7: RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA POR POLINOMIOS DE HERMITE CÚBICOS Y LA FUNCIÓN ORIGINAL, EJEMPLO I.	258, 266
FIGURA 5-3-8: RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA POR POLINOMIOS DE HERMITE CÚBICOS Y LA FUNCIÓN ORIGINAL, EJEMPLOS II Y III.	259, 267
FIGURA 5-3-9: RELACIÓN ENTRE LA INTERPOLACIÓN DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA MEDIANTE EL MÉTODO DE VECINOS MÁS PRÓXIMOS Y LA FUNCIÓN ORIGINAL, EJEMPLO I.	270, 272
FIGURA 5-3-10: RELACIÓN ENTRE LA INTERPOLACIÓN DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA MEDIANTE EL MÉTODO DE VECINOS MÁS PRÓXIMOS Y LA FUNCIÓN ORIGINAL, EJEMPLOS II Y III.	271, 273
FIGURA 5-3-11: RELACIÓN ENTRE LA INTERPOLACIÓN DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA MEDIANTE INTERPOLACIÓN LINEAL Y LA FUNCIÓN ORIGINAL, EJEMPLO I.	270, 274
FIGURA 5-3-12: RELACIÓN ENTRE LA INTERPOLACIÓN DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA MEDIANTE INTERPOLACIÓN LINEAL Y LA FUNCIÓN ORIGINAL, EJEMPLOS II Y III.	271, 275
FIGURA 5-3-13: RELACIÓN ENTRE LA INTERPOLACIÓN DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA MEDIANTE SPLINES CÚBICOS Y LA FUNCIÓN ORIGINAL, EJEMPLO I.	270, 276
FIGURA 5-3-14: RELACIÓN ENTRE LA INTERPOLACIÓN DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA MEDIANTE SPLINES CÚBICOS Y LA FUNCIÓN ORIGINAL, EJEMPLOS II Y III.	271, 277
FIGURA 5-3-15: RELACIÓN ENTRE LA INTERPOLACIÓN DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA POR POLINOMIOS DE HERMITE CÚBICOS Y LA FUNCIÓN ORIGINAL, EJEMPLO I.	270, 278

FIGURA 5-3-16: RELACIÓN ENTRE LA INTERPOLACIÓN DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA POR POLINOMIOS DE HERMITE CÚBICOS Y LA FUNCIÓN ORIGINAL, EJEMPLOS II Y III.....	271, 279
FIGURA 5-3-17: RELACIÓN ENTRE LA NUIFFT DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA Y LA FUNCIÓN ORIGINAL, EJEMPLO I.....	282, 284
FIGURA 5-3-18: RELACIÓN ENTRE LA NUIFFT DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA Y LA FUNCIÓN ORIGINAL, EJEMPLOS II Y III.....	283, 285
FIGURA 6-1-1: AMPLIACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD. TÉNGASE EN CUENTA QUE, POR DEFINICIÓN, SE CUMPLEN LAS RELACIONES $NPED \equiv 3 \cdot PED$ Y $NPEX \equiv 2 \cdot PEX$	317
FIGURA 6-1-2: REDUCCIÓN DE LA SECCIÓN MEDIDA. TÉNGASE EN CUENTA QUE, POR DEFINICIÓN, SE CUMPLEN LAS RELACIONES $NPED \equiv 3 \cdot PED$ Y $NPEX \equiv 2 \cdot PEX$	319
FIGURA 6-B-1: EJEMPLO DE DETERMINACIÓN ONDAS REFLEJADAS MÚLTIPLES EN EL PROBLEMA DIRECTO. .	344
FIGURA 7-1-1: SECCIÓN DE ÍNDICES CORRESPONDIENTE AL MODELO BIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR UN ÚNICO DIFRACTOR PUNTUAL.....	353
FIGURA 7-1-2: DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD CORRESPONDIENTE AL MODELO BIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR UN ÚNICO DIFRACTOR PUNTUAL. LA REFLECTIVIDAD APARENTE DEL PUNTO ES $r = 0,6805 + 0,0387i$	354
FIGURA 7-1-3: COMPARACIÓN ENTRE LA SECCIÓN MEDIDA Y LA SECCIÓN ESPERADA CORRESPONDIENTES AL MODELO BIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR UN ÚNICO DIFRACTOR PUNTUAL.....	355, 356-357
FIGURA 7-1-4: TRAZAS REPRESENTATIVAS DE LA SECCIÓN MEDIDA Y LA SECCIÓN ESPERADA CORRESPONDIENTES AL MODELO BIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR UN ÚNICO DIFRACTOR PUNTUAL.....	355, 358
FIGURA 7-1-5: SECCIÓN DE ÍNDICES CORRESPONDIENTE AL MODELO BIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR DOS CAPAS PLANO-PARALELAS SOBRE UN SEMIESPACIO INFINITO. JUNTO A CADA REFLECTOR SE MUESTRA EL ÍNDICE ASOCIADO.	362
FIGURA 7-1-6: DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD CORRESPONDIENTE AL MODELO BIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR DOS CAPAS PLANO-PARALELAS SOBRE UN SEMIESPACIO INFINITO. JUNTO A CADA REFLECTOR SE MUESTRA LA REFLECTIVIDAD APARENTE.....	363
FIGURA 7-1-7: COMPARACIÓN ENTRE LA SECCIÓN MEDIDA Y LA SECCIÓN ESPERADA CORRESPONDIENTES AL MODELO BIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR DOS CAPAS PLANO-PARALELAS SOBRE UN SEMIESPACIO INFINITO.....	364, 365
FIGURA 7-1-8: TRAZAS REPRESENTATIVAS DE LA SECCIÓN MEDIDA Y LA SECCIÓN ESPERADA CORRESPONDIENTES AL MODELO BIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR DOS CAPAS PLANO-PARALELAS SOBRE UN SEMIESPACIO INFINITO.....	364, 365
FIGURA 7-1-9: SECCIÓN DE ÍNDICES CORRESPONDIENTE AL MODELO BIDIMENSIONAL REALISTA. JUNTO A CADA REFLECTOR SE MUESTRA EL ÍNDICE ASOCIADO.....	371
FIGURA 7-1-10: DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD CORRESPONDIENTE AL MODELO BIDIMENSIONAL REALISTA. JUNTO A CADA REFLECTOR SE MUESTRA LA REFLECTIVIDAD APARENTE, EN EL CASO EN QUE LAS PARTES REAL O IMAGINARIA SEAN APRECIABLES.....	372
FIGURA 7-1-11: SECCIÓN MEDIDA CORRESPONDIENTE AL MODELO BIDIMENSIONAL REALISTA.....	373, 374
FIGURA 7-1-12: TRAZAS REPRESENTATIVAS DE LA SECCIÓN MEDIDA CORRESPONDIENTE AL MODELO BIDIMENSIONAL REALISTA.....	375

FIGURA 7-2-1: SECCIÓN DE ÍNDICES CORRESPONDIENTE AL MODELO TRIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR UN ÚNICO DIFRACTOR PUNTUAL.....	379
FIGURA 7-2-2: DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD CORRESPONDIENTE AL MODELO TRIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR UN ÚNICO DIFRACTOR PUNTUAL. LA REFLECTIVIDAD APARENTE DEL PUNTO ES $r = -0,0196 + 0,6905i$	380
FIGURA 7-2-3: COMPARACIÓN ENTRE LA SECCIÓN MEDIDA Y LA SECCIÓN ESPERADA CORRESPONDIENTE AL MODELO TRIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR UN ÚNICO DIFRACTOR PUNTUAL.	381, 382-385
FIGURA 7-2-4: TRAZAS REPRESENTATIVAS DE LA SECCIÓN MEDIDA Y LA SECCIÓN ESPERADA CORRESPONDIENTE AL MODELO TRIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR UN ÚNICO DIFRACTOR PUNTUAL. .	386
FIGURA 7-2-5: SECCIÓN DE ÍNDICES CORRESPONDIENTE AL MODELO TRIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR DOS CAPAS PLANO-PARALELAS SOBRE UN SEMIESPACIO INFINITO. JUNTO A CADA REFLECTOR SE MUESTRA EL ÍNDICE ASOCIADO.	390
FIGURA 7-2-6: DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD CORRESPONDIENTE AL MODELO TRIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR DOS CAPAS PLANO-PARALELAS SOBRE UN SEMIESPACIO INFINITO. JUNTO A CADA REFLECTOR SE MUESTRA LA REFLECTIVIDAD APARENTE.....	391
FIGURA 7-2-7: COMPARACIÓN ENTRE LA SECCIÓN MEDIDA Y LA SECCIÓN ESPERADA CORRESPONDIENTE AL MODELO TRIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR DOS CAPAS PLANO-PARALELAS SOBRE UN SEMIESPACIO INFINITO.	392, 393
FIGURA 7-2-8: TRAZAS REPRESENTATIVAS DE LA SECCIÓN MEDIDA Y LA SECCIÓN ESPERADA CORRESPONDIENTE AL MODELO TRIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR DOS CAPAS PLANO-PARALELAS SOBRE UN SEMIESPACIO INFINITO.....	394
FIGURA 7-2-9: SECCIÓN DE ÍNDICES CORRESPONDIENTE AL MODELO TRIDIMENSIONAL REALISTA. JUNTO A CADA REFLECTOR SE MUESTRA EL ÍNDICE ASOCIADO.....	399
FIGURA 7-2-10: DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD CORRESPONDIENTE AL MODELO TRIDIMENSIONAL REALISTA. JUNTO A CADA REFLECTOR SE MUESTRA LA REFLECTIVIDAD APARENTE, EN EL CASO EN QUE LAS PARTES REAL O IMAGINARIA SEAN APRECIABLES.....	400
FIGURA 7-2-11: SECCIÓN MEDIDA OBTENIDA MEDIANTE LA APLICACIÓN DEL ALGORITMO CORRESPONDIENTE AL MODELO TRIDIMENSIONAL REALISTA.	402, 403-411
FIGURA 7-2-12: TRAZAS REPRESENTATIVAS DE LA SECCIÓN MEDIDA OBTENIDA MEDIANTE LA APLICACIÓN DEL ALGORITMO CORRESPONDIENTE AL MODELO TRIDIMENSIONAL REALISTA.	412
FIGURA 7-3-1: COMPARACIÓN ENTRE LA DISTRIBUCIÓN MEDIDA Y LA DISTRIBUCIÓN ESPERADA CON LA DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD CORRESPONDIENTES AL MODELO BIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR UN ÚNICO DIFRACTOR PUNTUAL.....	418-419
FIGURA 7-3-2: TRAZA REPRESENTATIVA DE LA DISTRIBUCIÓN MEDIDA, DISTRIBUCIÓN ESPERADA Y DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD CORRESPONDIENTES AL MODELO BIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR UN ÚNICO DIFRACTOR PUNTUAL.....	420
FIGURA 7-3-3: COMPARACIÓN ENTRE LA DISTRIBUCIÓN MEDIDA Y LA DISTRIBUCIÓN ESPERADA CON LA DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD CORRESPONDIENTES AL MODELO BIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR DOS CAPAS PLANO-PARALELAS SOBRE UN SEMIESPACIO INFINITO.....	424-425
FIGURA 7-3-4: TRAZA REPRESENTATIVA DE LA DISTRIBUCIÓN MEDIDA, DISTRIBUCIÓN ESPERADA Y DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD CORRESPONDIENTES AL MODELO BIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR DOS CAPAS PLANO-PARALELAS SOBRE UN SEMIESPACIO INFINITO.....	426
FIGURA 7-3-5: COMPARACIÓN ENTRE LA DISTRIBUCIÓN MEDIDA CON LA DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD CORRESPONDIENTES AL MODELO BIDIMENSIONAL REALISTA.....	429, 430-431

FIGURA 7-3-6: TRAZAS REPRESENTATIVAS DE LA DISTRIBUCIÓN MEDIDA Y DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD CORRESPONDIENTES AL MODELO BIDIMENSIONAL REALISTA.....	432
FIGURA 7-4-1: COMPARACIÓN ENTRE LA DISTRIBUCIÓN MEDIDA Y LA DISTRIBUCIÓN ESPERADA CON LA DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD CORRESPONDIENTES AL MODELO TRIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR UN ÚNICO DIFRACTOR PUNTUAL.....	436, 437-439
FIGURA 7-4-2: TRAZA REPRESENTATIVA DE LA DISTRIBUCIÓN MEDIDA, DISTRIBUCIÓN ESPERADA Y DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD CORRESPONDIENTES AL MODELO TRIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR UN ÚNICO DIFRACTOR PUNTUAL.....	440
FIGURA 7-4-3: COMPARACIÓN ENTRE LA DISTRIBUCIÓN MEDIDA Y LA DISTRIBUCIÓN ESPERADA CON LA DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD CORRESPONDIENTES AL MODELO TRIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR DOS CAPAS PLANO-PARALELAS SOBRE UN SEMIESPACIO INFINITO.....	444-445
FIGURA 7-4-4: TRAZA REPRESENTATIVA DE LA DISTRIBUCIÓN MEDIDA, DISTRIBUCIÓN ESPERADA Y DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD CORRESPONDIENTES AL MODELO TRIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR DOS CAPAS PLANO-PARALELAS SOBRE UN SEMIESPACIO INFINITO.....	446
FIGURA 7-4-5: COMPARACIÓN ENTRE LA DISTRIBUCIÓN MEDIDA CON LA DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD CORRESPONDIENTES AL MODELO TRIDIMENSIONAL REALISTA.....	449, 450-452
FIGURA 7-4-6: TRAZAS REPRESENTATIVAS DE LA DISTRIBUCIÓN MEDIDA Y DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD CORRESPONDIENTES AL MODELO TRIDIMENSIONAL REALISTA.....	453
FIGURA 7-A-1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DIRECTO PARA EL MODELO CONSTITUIDO POR UN DIFRACTOR PUNTUAL.....	460
FIGURA 7-A-2: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DIRECTO PARA EL MODELO CONSTITUIDO POR DOS CAPAS PLANO-PARALELAS SOBRE UN SEMIESPACIO INFINITO.....	462
FIGURA 8-3-1: VISTA LATERAL DEL MONASTERIO DE EL PAULAR.....	481
FIGURA 8-3-2: MAPA DE COLOR EN TONOS DE GRIS DEL REGISTRO BRUTO CORRESPONDIENTE A LA HUERTA DEL MONASTERIO DE EL PAULAR (EL BLANCO CORRESPONDE AL VALOR MÍNIMO, EL NEGRO AL MÁXIMO). EL EJE DE ORDENADAS EXPRESA EL TIEMPO DOBLE DE RECORRIDO, EN NANOSEGUNDOS, Y EL EJE DE ABCISAS EL NÚMERO DE TRAZA. LAS LÍNEAS VERTICALES MUESTRAN LA DISTANCIA DESDE EL INICIO DEL PERFIL, EN METROS. EN AMARILLO SE INDICA LA SEÑAL A ANALIZAR.....	482
FIGURA 8-3-3: CODO DE MURO (CORTESÍA DE JUAN JOSÉ CANO). LAS SEÑALES MARCADAS EN LA FIGURA 8-3-2 Y SS. ESTÁN ORIGINADAS POR LA DIFRACCIÓN EN LOS BORDES DE LA PROLONGACIÓN DEL MURO.....	483
FIGURA 8-3-4: MAPA DE COLOR EN TONOS DE GRIS DEL REGISTRO CORRESPONDIENTE A LA HUERTA DEL MONASTERIO DE EL PAULAR TRAS LA INTERPOLACIÓN EN EL EJE ESPACIAL (EL BLANCO CORRESPONDE AL VALOR MÍNIMO, EL NEGRO AL MÁXIMO). EL EJE DE ORDENADAS EXPRESA EL TIEMPO DOBLE DE RECORRIDO, EN NANOSEGUNDOS, Y EL EJE DE ABCISAS EL NÚMERO DE TRAZA. LAS LÍNEAS VERTICALES MUESTRAN LA DISTANCIA DESDE EL INICIO DEL PERFIL, EN METROS. EN AMARILLO SE INDICA LA SEÑAL A ANALIZAR.....	485
FIGURA 8-3-5: MAPA DE COLOR EN TONOS DE GRIS DEL REGISTRO CORRESPONDIENTE A LA HUERTA DEL MONASTERIO DE EL PAULAR TRAS EL FILTRADO ESPACIAL PASA BAJA (EL BLANCO CORRESPONDE AL VALOR MÍNIMO, EL NEGRO AL MÁXIMO). EL EJE DE ORDENADAS EXPRESA EL TIEMPO DOBLE DE RECORRIDO, EN NANOSEGUNDOS, Y EL EJE DE ABCISAS EL NÚMERO DE TRAZA. LAS LÍNEAS VERTICALES MUESTRAN LA DISTANCIA DESDE EL INICIO DEL PERFIL, EN METROS. EN AMARILLO SE INDICA LA SEÑAL A ANALIZAR.....	486
FIGURA 8-3-6: ESPECTRO DE POTENCIA NORMALIZADO DE LA REGIÓN DEL REGISTRO CORRESPONDIENTE A LA HUERTA DEL MONASTERIO DE EL PAULAR QUE CONTIENE LA SEÑAL OBJETO DE ESTUDIO, PREVIO AL FILTRADO TEMPORAL. EL EJE DE ABCISAS EXPRESA LA FRECUENCIA, EN MHZ.....	487

FIGURA 8-3-7: RESPUESTA EN FRECUENCIAS DEL FILTRO TEMPORAL CORRESPONDIENTE A LA HUERTA DEL MONASTERIO DE EL PAULAR. EL EJE DE ABCISAS EXPRESA LA FRECUENCIA, EN MHZ.	488
FIGURA 8-3-8: MAPA DE COLOR EN TONOS DE GRIS DEL REGISTRO CORRESPONDIENTE A LA HUERTA DEL MONASTERIO DE EL PAULAR TRAS EL FILTRADO TEMPORAL PASA BANDA (EL BLANCO CORRESPONDE AL VALOR MÍNIMO, EL NEGRO AL MÁXIMO). EL EJE DE ORDENADAS EXPRESA EL TIEMPO DOBLE DE RECORRIDO, EN NANOSEGUNDOS, Y EL EJE DE ABCISAS EL NÚMERO DE TRAZA. LAS LÍNEAS VERTICALES MUESTRAN LA DISTANCIA DESDE EL INICIO DEL PERFIL, EN METROS. EN AMARILLO SE INDICA LA SEÑAL A ANALIZAR.	489
FIGURA 8-3-9: ESPECTRO DE POTENCIA NORMALIZADO DE LA REGIÓN DEL REGISTRO CORRESPONDIENTE A LA HUERTA DEL MONASTERIO DE EL PAULAR QUE CONTIENE LA SEÑAL OBJETO DE ESTUDIO, TRAS EL FILTRADO TEMPORAL. EL EJE DE ABCISAS EXPRESA LA FRECUENCIA, EN MHZ.....	489
FIGURA 8-3-10: MAPA DE COLOR EN TONOS DE GRIS DE LA DISTRIBUCIÓN MEDIDA CORRESPONDIENTE A LA HUERTA DEL MONASTERIO DE EL PAULAR (EL BLANCO CORRESPONDE AL VALOR MÍNIMO, EL NEGRO AL MÁXIMO). EL EJE DE ORDENADAS EXPRESA LA COORDENADA <i>D</i> Y EL EJE DE ABCISAS LA DISTANCIA AL ORIGEN, AMBAS EN METROS. EN AMARILLO SE INDICA LA SEÑAL ANALIZADA.	491
FIGURA 8-3-11: VISTA AÉREA Y DETALLES DEL CASTRO DE “EL CEREMEÑO” (HERRERÍA, GUADALAJARA). PANEL SUPERIOR, VISTA AÉREA CORTESÍA DE M.LUISA CERDEÑO; PANEL INFERIOR, VISTAS DE DETALLE, EXTRAÍDAS DE LAS URL: HTTP://WWW.MOLINA-ARAGON.COM/HISTORIA/CELTIBERIA/VISTA.HTM Y HTTP://WWW.MOLINA-ARAGON.COM/HISTORIA/CEREMENO/CEREMENO.HTM).	493
FIGURA 8-3-12: MAPA DE COLOR EN TONOS DE GRIS DEL REGISTRO BRUTO CORRESPONDIENTE AL CASTRO DE EL CEREMEÑO (EL BLANCO CORRESPONDE AL VALOR MÍNIMO, EL NEGRO AL MÁXIMO). EL EJE DE ORDENADAS EXPRESA EL TIEMPO DOBLE DE RECORRIDO, EN NANOSEGUNDOS, Y EL EJE DE ABCISAS EL NÚMERO DE TRAZA. LAS LÍNEAS VERTICALES MUESTRAN LA DISTANCIA DESDE EL INICIO DEL PERFIL, EN METROS. EN AMARILLO SE INDICAN LAS SEÑALES A ANALIZAR.	495
FIGURA 8-3-13: PROCESO DE ADQUISICIÓN DE DATOS. EL PERFIL MOSTRADO EN LA FIGURA 8-3 12 ES PARALELO A LA CINTA MÉTRICA, POR LA DERECHA.....	496
FIGURA 8-3-14: MAPA DE COLOR EN TONOS DE GRIS DEL REGISTRO CORRESPONDIENTE AL CASTRO DE EL CEREMEÑO TRAS LA INTERPOLACIÓN EN EL EJE ESPACIAL (EL BLANCO CORRESPONDE AL VALOR MÍNIMO, EL NEGRO AL MÁXIMO). EL EJE DE ORDENADAS EXPRESA EL TIEMPO DOBLE DE RECORRIDO, EN NANOSEGUNDOS, Y EL EJE DE ABCISAS EL NÚMERO DE TRAZA. LAS LÍNEAS VERTICALES MUESTRAN LA DISTANCIA DESDE EL INICIO DEL PERFIL, EN METROS. EN AMARILLO SE INDICAN LAS SEÑALES A ANALIZAR.....	497
FIGURA 8-3-15: MAPA DE COLOR EN TONOS DE GRIS DEL REGISTRO CORRESPONDIENTE AL CASTRO DE EL CEREMEÑO TRAS EL FILTRADO ESPACIAL PASA BAJA (EL BLANCO CORRESPONDE AL VALOR MÍNIMO, EL NEGRO AL MÁXIMO). EL EJE DE ORDENADAS EXPRESA EL TIEMPO DOBLE DE RECORRIDO, EN NANOSEGUNDOS, Y EL EJE DE ABCISAS EL NÚMERO DE TRAZA. LAS LÍNEAS VERTICALES MUESTRAN LA DISTANCIA DESDE EL INICIO DEL PERFIL, EN METROS. EN AMARILLO SE INDICAN LAS SEÑALES A ANALIZAR.	499
FIGURA 8-3-16: ESPECTRO DE POTENCIA NORMALIZADO DE LA REGIÓN DEL REGISTRO CORRESPONDIENTE AL CASTRO DE EL CEREMEÑO QUE CONTIENE LA SEÑAL OBJETO DE ESTUDIO, PREVIO AL FILTRADO TEMPORAL. EL EJE DE ABCISAS EXPRESA LA FRECUENCIA, EN MHZ.....	500
FIGURA 8-3-17: RESPUESTA EN FRECUENCIAS DEL FILTRO TEMPORAL CORRESPONDIENTE AL CASTRO DE EL CEREMEÑO. EL EJE DE ABCISAS EXPRESA LA FRECUENCIA, EN MHZ.....	500
FIGURA 8-3-18: MAPA DE COLOR EN TONOS DE GRIS DEL REGISTRO CORRESPONDIENTE AL CASTRO DE EL CEREMEÑO TRAS EL FILTRADO TEMPORAL PASA BANDA (EL BLANCO CORRESPONDE AL VALOR MÍNIMO, EL NEGRO AL MÁXIMO). EL EJE DE ORDENADAS EXPRESA EL TIEMPO DOBLE DE RECORRIDO, EN NANOSEGUNDOS, Y EL EJE DE ABCISAS EL NÚMERO DE TRAZA. LAS LÍNEAS VERTICALES MUESTRAN LA DISTANCIA DESDE EL INICIO DEL PERFIL, EN METROS. EN AMARILLO SE INDICAN LAS SEÑALES A ANALIZAR.....	501

- FIGURA 8-3-19: ESPECTRO DE POTENCIA NORMALIZADO DE LA REGIÓN DEL REGISTRO CORRESPONDIENTE AL CASTRO DE EL CEREMEÑO QUE CONTIENE LA SEÑAL OBJETO DE ESTUDIO, TRAS EL FILTRADO TEMPORAL. EL EJE DE ABCISAS EXPRESA LA FRECUENCIA, EN MHZ..... 502
- FIGURA 8-3-20: MAPA DE COLOR EN TONOS DE GRIS DE LA DISTRIBUCIÓN MEDIDA CORRESPONDIENTE AL CASTRO DE EL CEREMEÑO (EL BLANCO CORRESPONDE AL VALOR MÍNIMO, EL NEGRO AL MÁXIMO) Y DETALLE. EL EJE DE ORDENADAS EXPRESA LA COORDENADA D Y EL EJE DE ABCISAS LA DISTANCIA AL ORIGEN, AMBAS EN METROS. EN AMARILLO SE INDICAN LAS SEÑALES ANALIZADAS. 504
- FIGURA 9-1-1: CONVOLUCIÓN DE LA SECCIÓN MEDIDA CORRESPONDIENTE AL MODELO BIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR DOS CAPAS PLANO-PARALELAS SOBRE UN SEMIESPACIO INFINITO, Y LA FORMA DE LA ONDA ELECTROMAGNÉTICA RADIADA. 517

Índice de tablas

TABLA 2-3-1: DENOMINACIÓN DE LAS BANDAS DE FRECUENCIAS POR DÉCADAS (CARDAMA ET AL., 1998). ...	47
TABLA 4-3-1: RELACIONES ENTRE LAS MAGNITUDES FUNDAMENTALES EN LOS DOMINIOS NATURAL Y FRECUENCIAL. EN TODOS LOS CASOS PE INDICA EL NÚMERO DE PUNTOS EN EL EJE.	130
TABLA 5-1-1: FUNCIONES FILTRO TESTADAS. SOBRE TODAS ELLAS HAN SIDO APLICADAS LAS VENTANAS DE HANNING, TRIANGULAR Y CUADRADA. LA FUNCIÓN $I_A(x)$ REPRESENTA LA FUNCIÓN INDICATRIZ DE A ($I_A(x) = 1$ SI $x \in A$, $I_A(x) = 0$ EN OTRO CASO).....	216
TABLA 5-1-2: VALOR MÍNIMO DE lf COMO FUNCIÓN DEL MÁXIMO ERROR RELATIVO E_2 ADMISIBLE PARA LAS TRANSFORMADAS DIRECTA E INVERSA.....	220
TABLA 5-1-3: RESULTADOS DE LOS ANÁLISIS DE REGRESIÓN PARA LOS VALORES ÓPTIMOS DE b	221
TABLA 5-1-4: RESULTADOS DE LOS ANÁLISIS DE REGRESIÓN PARA EL TIEMPO DE CÁLCULO.	223
TABLA 5-4-1: TIEMPOS DE CÁLCULO MEDIO DE LAS INTERPOLACIONES EXPUESTAS EN LAS FIGURAS DEL PRESENTE CAPÍTULO PARA CADA MÉTODO DE INTERPOLACIÓN.	288
TABLA 6-1-1: RELACIÓN DE MÓDULOS DE QUE CONSTA EL ALGORITMO IMPLEMENTADO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DIRECTO EN DOS DIMENSIONES. LAS FLECHAS INDICAN LLAMADAS A LOS MÓDULOS CORRESPONDIENTES.	293
TABLA 6-1-2: LLAMADA AL MÓDULO <code>coordenadas</code>	298
TABLA 6-1-3: LLAMADA AL MÓDULO <code>natural2frecuencial1</code>	299
TABLA 6-1-4: LLAMADA AL MÓDULO <code>natural2frecuencial2</code>	300
TABLA 6-1-5: LLAMADA AL MÓDULO <code>frecuencial2natural</code>	301
TABLA 6-1-6: LLAMADA AL MÓDULO <code>indices2seccion_PERFIL</code>	302
TABLA 6-1-7: LLAMADA AL MÓDULO <code>indices_z2D_perfil</code>	307
TABLA 6-1-8: LLAMADA AL MÓDULO <code>cZ_LZ_perfil</code>	309
TABLA 6-1-9: LLAMADA AL MÓDULO <code>cm_LD_perfil</code>	311
TABLA 6-1-10: LLAMADA AL MÓDULO <code>media_perfil</code>	312
TABLA 6-1-11: LLAMADA AL MÓDULO <code>indices2distribucion_perfil</code>	313
TABLA 6-1-12: LLAMADA AL MÓDULO <code>multiples_pd</code>	315

TABLA 6-1-13: LLAMADA AL MÓDULO <code>ampliar_perfil</code>	316
TABLA 6-1-14: LLAMADA AL MÓDULO <code>reducir_perfil</code>	318
TABLA 6-1-15: LLAMADA AL MÓDULO <code>filtrar_FFT2_pd</code>	320
TABLA 6-1-16: LLAMADA AL MÓDULO <code>Qperfil</code>	322
TABLA 6-1-17: LLAMADA AL MÓDULO <code>Kperfil</code>	323
TABLA 6-1-18: LLAMADA AL MÓDULO <code>dKdQperfil</code>	324
TABLA 6-1-19: LLAMADA AL MÓDULO <code>spline3interp</code>	325
TABLA 6-2-1: RELACIÓN DE MÓDULOS DE QUE CONSTA EL ALGORITMO IMPLEMENTADO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO EN DOS DIMENSIONES. LAS FLECHAS INDICAN LLAMADAS A LOS MÓDULOS CORRESPONDIENTES.	327
TABLA 6-2-2: LLAMADA AL MÓDULO <code>seccion2distribucion_perfil</code>	330
TABLA 6-2-3: LLAMADA AL MÓDULO <code>filtrar_FFT2_pi</code>	334
TABLA 6-2-4: LLAMADA AL MÓDULO <code>dQdKperfil</code>	336
TABLA 6-3-1: RELACIÓN DE MÓDULOS DE QUE CONSTA EL ALGORITMO IMPLEMENTADO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DIRECTO EN TRES DIMENSIONES. LAS FLECHAS INDICAN LLAMADAS A LOS MÓDULOS CORRESPONDIENTES.	337
TABLA 6-3-2: RELACIÓN DE MÓDULOS DE QUE CONSTA EL ALGORITMO IMPLEMENTADO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA INVERSO EN TRES DIMENSIONES. LAS FLECHAS INDICAN LLAMADAS A LOS MÓDULOS CORRESPONDIENTES.	337
TABLA 6-B-1: EJEMPLO DEL CÁLCULO DE LA REFLECTIVIDAD APARENTE Y LA COORDENADA D ASOCIADA A CADA ONDA, CORRESPONDIENTE AL CASO MOSTRADO EN LA FIGURA 6-B-1.	344
TABLA 7-1-1: DESCRIPCIÓN DEL MODELO BIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR UN ÚNICO DIFRACTOR PUNTUAL.....	352
TABLA 7-1-2: DESCRIPCIÓN DE LA SECCIÓN MEDIDA CORRESPONDIENTE AL MODELO BIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR UN ÚNICO DIFRACTOR PUNTUAL.....	355
TABLA 7-1-3: DESCRIPCIÓN DEL MODELO BIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR DOS CAPAS PLANO-PARALELAS SOBRE UN SEMIESPACIO INFINITO.....	360-361
TABLA 7-1-4: DESCRIPCIÓN DE LA SECCIÓN MEDIDA CORRESPONDIENTE AL MODELO BIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR DOS CAPAS PLANO-PARALELAS SOBRE UN SEMIESPACIO INFINITO.....	364
TABLA 7-1-5: DESCRIPCIÓN DEL MODELO BIDIMENSIONAL REALISTA.....	368-370
TABLA 7-1-6: DESCRIPCIÓN DE LA SECCIÓN MEDIDA CORRESPONDIENTE AL MODELO BIDIMENSIONAL REALISTA.	373
TABLA 7-2-1: DESCRIPCIÓN DEL MODELO TRIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR UN ÚNICO DIFRACTOR PUNTUAL.....	378
TABLA 7-2-2: DESCRIPCIÓN DE LA SECCIÓN MEDIDA CORRESPONDIENTE AL MODELO TRIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR UN ÚNICO DIFRACTOR PUNTUAL.....	381
TABLA 7-2-3: DESCRIPCIÓN DEL MODELO TRIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR DOS CAPAS PLANO-PARALELAS SOBRE UN SEMIESPACIO INFINITO.....	388-389

TABLA 7-2-4: DESCRIPCIÓN DE LA SECCIÓN MEDIDA CORRESPONDIENTE AL MODELO TRIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR DOS CAPAS PLANO-PARALELAS SOBRE UN SEMIESPACIO INFINITO.....	392
TABLA 7-2-5: DESCRIPCIÓN DEL MODELO TRIDIMENSIONAL REALISTA.....	396-398
TABLA 7-2-6: DESCRIPCIÓN DE LA SECCIÓN MEDIDA CORRESPONDIENTE AL MODELO TRIDIMENSIONAL REALISTA.	401
TABLA 7-3-1: DESCRIPCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN MEDIDA CORRESPONDIENTE AL MODELO BIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR UN ÚNICO DIFRACTOR PUNTUAL.....	417
TABLA 7-3-2: DESCRIPCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN MEDIDA CORRESPONDIENTE AL MODELO BIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR DOS CAPAS PLANO-PARALELAS SOBRE UN SEMIESPACIO INFINITO....	423
TABLA 7-3-3: DESCRIPCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN MEDIDA CORRESPONDIENTE AL MODELO BIDIMENSIONAL REALISTA.	429
TABLA 7-4-1: DESCRIPCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN MEDIDA CORRESPONDIENTE AL MODELO TRIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR UN ÚNICO DIFRACTOR PUNTUAL.....	436
TABLA 7-4-2: DESCRIPCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN MEDIDA CORRESPONDIENTE AL MODELO TRIDIMENSIONAL CONSTITUIDO POR DOS CAPAS PLANO-PARALELAS SOBRE UN SEMIESPACIO INFINITO.....	443
TABLA 7-4-3: DESCRIPCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN MEDIDA CORRESPONDIENTE AL MODELO TRIDIMENSIONAL REALISTA.	448
TABLA 7-5-1: TIEMPOS MEDIOS DE CÓMPUTO PARA LOS MODELOS EXPUESTOS EN EL PRESENTE CAPÍTULO.	456
TABLA 7-A-1: DESCRIPCIÓN DEL MODELO CONSTITUIDO POR UN DIFRACTOR PUNTUAL.....	460
TABLA 7-A-2: DESCRIPCIÓN DEL MODELO CONSTITUIDO POR DOS CAPAS PLANO-PARALELAS SOBRE UN SEMIESPACIO INFINITO.	462
TABLA 8-3-1: CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DEL REGISTRO BRUTO CORRESPONDIENTE A LA HUERTA DEL MONASTERIO DE EL PAULAR.	481
TABLA 8-3-2: CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DEL REGISTRO CORRESPONDIENTE A LA HUERTA DEL MONASTERIO DE EL PAULAR TRAS LA INTERPOLACIÓN EN EL EJE ESPACIAL.	484
TABLA 8 3-3: CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DEL REGISTRO CORRESPONDIENTE A LA HUERTA DEL MONASTERIO DE EL PAULAR TRAS EL FILTRADO ESPACIAL PASA BAJA.	486
TABLA 8-3-4: RASGOS CARACTERÍSTICOS DEL ESPECTRO DEL REGISTRO CORRESPONDIENTE A LA HUERTA DEL MONASTERIO DE EL PAULAR.	487
TABLA 8-3-5: CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DEL REGISTRO CORRESPONDIENTE A LA HUERTA DEL MONASTERIO DE EL PAULAR TRAS EL FILTRADO TEMPORAL PASA BAJA.	488
TABLA 8-3-6: DESCRIPCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN MEDIDA CORRESPONDIENTE A LA HUERTA DEL MONASTERIO DE EL PAULAR.	490
TABLA 8-3-7: CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DEL REGISTRO BRUTO CORRESPONDIENTE AL CASTRO DE EL CEREMEÑO.....	494
TABLA 8-3-8: CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DEL REGISTRO CORRESPONDIENTE AL CASTRO DE EL CEREMEÑO TRAS LA INTERPOLACIÓN EN EL EJE ESPACIAL.	497
TABLA 8-3-9: CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DEL REGISTRO CORRESPONDIENTE AL CASTRO DE EL CEREMEÑO TRAS EL FILTRADO ESPACIAL PASA BAJA.	498

TABLA 8-3-10: RASGOS CARACTERÍSTICOS DEL ESPECTRO DEL REGISTRO CORRESPONDIENTE AL CASTRO DE EL CEREMEÑO.....	500
TABLA 8-3-11: CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DEL REGISTRO CORRESPONDIENTE AL CASTRO DE EL CEREMEÑO TRAS EL FILTRADO TEMPORAL PASA BAJA.	501
TABLA 8-3-12: DESCRIPCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN MEDIDA CORRESPONDIENTE AL CASTRO DE EL CEREMEÑO.....	503

Índice de símbolos y notaciones

En la lista siguiente se muestran los símbolos y notaciones especiales utilizadas en el texto, junto con la página en la que se definen o hacen acto de presencia por primera vez. Si a algún símbolo le han sido adjudicados varios significados, el contexto dejará claro de cuál de ellos se trata en cada momento.

Símbolos latinos

A	Semieje mayor de la huella elíptica de una antena de geo-radar.....	53
A, B	Abiertos de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$	91
A, B, C	Agrupaciones de frecuencias y parámetros electromagnéticos	95
$A(U, V, Q)$	Transformada de Fourier de la Sección Medida $\phi^{SM}(X, Y, 0, D)$	81
$A(U, V, u, v, \omega)$	Transformada de Fourier de la Sección Medida $\chi^{SM}(X, Y, 0; x^{re}, y^{re}, 0; t)$	93
A_{ef}	Área efectiva	47
\mathbf{B}	Inducción magnética	13
\mathbf{B}_a	Inducción magnética en el medio a	14
\mathbf{B}_e	Parte espacial de la inducción magnética	14

$B(U, V, K)$	Transformada de Fourier de la Distribución de Reflectividad	
	$\phi^{DR}(X, Y, D, D)$	83
b, c	Parámetros de las funciones filtro	215
c	Velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas.....	20
	Vector con los valores de la velocidad de propagación para cada medio	295
c_0	Velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío: $c_0 = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	22
c_a	Velocidad de propagación en el medio a	78
c_m	Velocidad de propagación constante de las ondas electromagnéticas.....	74
	Velocidad de propagación promedio de las ondas electromagnéticas (velocidad cuadrática media espacial determinada sobre la SECCIÓN DE ÍNDICES definida en las coordenadas D)	77, 80, 311, 341
c_z	Velocidad de propagación promedio de las ondas electromagnéticas (velocidad media espacial determinada sobre la SECCIÓN DE ÍNDICES definida en las coordenadas Z)	310, 339
D	Desplazamiento eléctrico	13
D_a	Desplazamiento eléctrico en el medio a	14
D_e	Parte espacial del desplazamiento eléctrico	14
D	Directividad en la dirección de máxima radiación.....	46
	Coordenada tras la segunda transformación: $D \equiv \frac{c_m \cdot t}{2} + d = \frac{c_m \cdot t}{2} + Z$	74
	Coordenada tras la tercera transformación: $D \equiv \frac{c_m \cdot t}{2} + d = \frac{c_m \cdot t}{2} + \int_0^Z \frac{c_m}{c} dZ$	77
	Vector de coordenadas D	304, 308, 331
$D, D(\theta, \phi)$	Directividad	46
D_2	Vector de coordenadas D tras la interpolación del espectro	306, 329, 333
D_{ab}	Coordenada D correspondiente al reflector ab	78, 457
$D_{\text{múltiples}}$	Vector de coordenadas D correspondientes a los reflectores ficticios.....	316
D^*	Coordenada D en la resolución analítica del Problema Directo	463

d	Coordenada tras la segunda transformación: $d \equiv Z$	74
	Coordenada tras la tercera transformación: $d \equiv \int_0^Z \frac{c_m}{c} dZ$	77
dS	Elemento diferencial de superficie.....	43
dV	Elemento diferencial de volumen.....	44
dZ	Elemento diferencial de profundidad.....	77
dz	Elemento diferencial de altura	77
$d\Omega$	Elemento diferencial de ángulo sólido: $d\Omega = dS/r^2 = \text{sen } \phi d\phi d\theta$	43
dK/dQ	Matriz que contiene por columnas los valores de la derivada asociados a las frecuencias K para cada valor de la frecuencia U	324
dQ/dK	Matriz que contiene por columnas los valores de la derivada asociados a las frecuencias K para cada valor de la frecuencia U	336
E	Intensidad del campo eléctrico.....	13
E_a	Campo eléctrico en el medio a	14
E_e	Parte espacial del campo eléctrico	14
E_i, E_r, E_t	Campo eléctrico de la onda plana incidente, reflejada y transmitida en una interfaz	24
E_{ie}, E_{te}, E_{te}	Parte espacial del campo eléctrico de la onda plana incidente, reflejada y transmitida en una interfaz.....	24
E/R	Par Emisor–Receptor	86
E_0	Constante de amplitud del campo eléctrico.....	18
E_2, E_∞	Errores relativos.....	217
E_{i0}, E_{r0}, E_{t0}	Constante de amplitud del campo eléctrico de la onda plana incidente, reflejada y transmitida en una interfaz.....	24
$E_x(z)$	Componente x del campo eléctrico, dependiente de la coordenada z	18
ED	Espaciado de las muestras en el eje de coordenadas D	308, 331
$ED2$	Espaciado de las muestras en el eje de coordenadas D tras la interpolación del espectro	306, 329, 333

EK	Espaciado de las muestras en el eje de frecuencias K 304
$EK2$	Espaciado de las muestras en el eje de frecuencias K tras la interpolación del espectro 333
EQ	Espaciado de las muestras en el eje de frecuencias Q 331
$EQ2$	Espaciado de las muestras en el eje de frecuencias Q tras la interpolación del espectro 306
ET	Espaciado de las muestras en el eje de tiempos dobles de recorrido..... 329
$ET2$	Espaciado de las muestras en el eje de tiempos dobles de recorrido del perfil sintético 297
EU, EU'	Espaciado que caracteriza la discretización en el dominio frecuencial..... 121
EU, EV	Espaciado en los ejes de frecuencias conjugadas de las coordenadas X, Y 305, 332, 338
EU'	Nuevo espaciado en el dominio frecuencial..... 212
EX, EX'	Espaciado que caracteriza la discretización en el dominio natural 127
EX, EY	Espaciado en los ejes de coordenadas de distancia horizontal 296, 329, 338
EX'	Nuevo espaciado en el dominio natural 212
F	Función definida en el dominio frecuencial..... 101
F_p^{EU}	Extensión periódica de la función F^{EU} 189
	Transformada de Fourier de la función f_p^{EX} 187
$F_{\nu, VU}^{EU}$	Función en el dominio frecuencial muestreada con periodo EU y con soporte acotado por aplicación de la ventana V_{VU} desplazada una cantidad ν , en el intervalo $[\nu, VU + \nu]$ 126
$\tilde{F}_{\chi, \nu_{\chi}}^{EX}$	Transformada de Fourier discreta determinada computacionalmente..... 122
$(F_{\chi, \nu_{\chi}}^{EX})(u)$	Transformada de Fourier de la función $f_{\chi, \nu_{\chi}}^{EX}$ obtenida mediante la generalización del Teorema del Muestreo 133
$(F_{\chi, \nu_{\chi}}^{*EX})(u)$	Expresión acotada de la transformada de Fourier $(F_{\chi, \nu_{\chi}}^{EX})(u)$ 133
$(F_{\chi, \nu_{\chi}}^{*EX})'(u)$	Función interpoladora de la transformada de Fourier, análoga a $(F_{\chi, \nu_{\chi}}^{*EX})(u)$, obtenida mediante un método alternativo a la generalización del Teorema del Muestreo 234

$(F_{\chi, \nu_{VX}}^{EX})^{EU}$	Transformada de Fourier de la función $f_{\chi, \nu_{VX}}^{EX}$	121
$(F_{\chi, \nu_{VX}}^{EX})_{\nu, I_{VU}}^{EU}$	Transformada de Fourier de la función $f_{\chi, \nu_{VX}}^{EX}$ acotada por la aplicación de una ventana cuadrada	121
$(F_{\chi, \nu_{VX}}^{EX})_{\nu, I_{VU}}'^{EU}$	Transformada de Fourier interpolada en la función $(F_{\chi, \nu_{VX}}^{*EX})'(u)$, obtenida mediante un método alternativo a la generalización del Teorema del Muestreo	234
$(F_{\chi, \nu_{VX}}^{EX})_{\nu', I_{VU}'}^{EU'}$	Transformada de Fourier de la función $f_{\chi, \nu_{VX}}^{EX}$, interpolada mediante la aplicación del Teorema del Muestreo	139
$(F_{\chi, \nu_{VX}}^{*EX})_{\nu', I_{VU}'}^{EU'}$	Expresión acotada de la transformada de Fourier interpolada mediante la aplicación del Teorema del Muestreo $(F_{\chi, \nu_{VX}}^{EX})_{\nu', I_{VU}'}^{EU'}$	140
<i>FFT2</i>	Espectro de la Distribución de Reflectividad correspondiente a un perfil.....	305, 332
<i>FFT2</i> _{filtrada}	Espectro filtrado de la Distribución de Reflectividad correspondiente a un perfil.....	305, 321, 332, 335
<i>f</i>	Frecuencia.....	14
<i>f, g, h</i>	Funciones definidas en el dominio natural.....	91
<i>f(x)</i>	Función correspondiente al Ejemplo I	109
<i>f(ω)</i>	Agrupación de constantes electromagnéticas y la frecuencia	76
<i>f_n</i>	Muestras de la función <i>f</i>	131
<i>f^{EX}</i>	Función en el dominio natural muestreada con periodo <i>EX</i>	107
<i>f_{χ, ν_{VX}}</i>	Función en el dominio natural con soporte acotado por aplicación de la ventana ν_{VX} desplazada una cantidad χ , en el intervalo $[\chi, VX + \chi]$	112
<i>f_p^{EX}</i>	Extensión periódica de la función <i>f^{EX}</i>	187
	Transformada de Fourier inversa de la función F_p^{EU}	189
<i>f_{χ, ν_{VX}}</i> ^{EX}	Función en el dominio natural muestreada con periodo <i>EX</i> y con soporte acotado por aplicación de la ventana ν_{VX} desplazada una cantidad χ , en el intervalo $[\chi, VX + \chi]$	112

$\tilde{f}_{\chi, 1_{VX}}^{EX}$	Transformada de Fourier discreta inversa determinada computacionalmente.....	127
$(f_{\nu, V_{VU}}^{EU})(x)$	Transformada de Fourier inversa de la función $F_{\nu, V_{VU}}^{EU}$ obtenida mediante la generalización del Teorema del Muestreo.....	145
$(f_{\nu, V_{VU}}^{*EU})(x)$	Expresión acotada de la transformada de Fourier inversa $(f_{\nu, V_{VU}}^{EU})(x)$	145
$(f_{\nu, V_{VU}}^{EU})^{EX}$	Transformada de Fourier inversa de la función $F_{\nu, V_{VU}}^{EU}$	127
$(f_{\nu, V_{VU}}^{EU})_{\chi, 1_{VX}}^{EX}$	Transformada de Fourier inversa de la función $F_{\nu, V_{VU}}^{EU}$ acotada por la aplicación de una ventana cuadrada.....	127
$(f_{\nu, V_{VU}}^{EU})_{\chi', 1_{VX'}}^{EX'}$	Transformada de Fourier inversa de la función $F_{\nu, V_{VU}}^{EU}$, interpolada mediante la aplicación del Teorema del Muestreo.....	151
$(f_{\nu, V_{VU}}^{*EU})_{\chi', 1_{VX'}}^{EX'}$	Expresión acotada de la transformada de Fourier inversa interpolada mediante la aplicación del Teorema del Muestreo $(f_{\nu, V_{VU}}^{EU})_{\chi', 1_{VX'}}^{EX'}$	152
$\left((f_{\nu, V_{VU}}^{*EU})_{\chi, 1_{VX}}^{EX} \right)'(x)$	Función interpoladora de la transformada de Fourier inversa, análoga a $\left((f_{\nu, V_{VU}}^{*EU})_{\chi, 1_{VX}}^{EX} \right)(x)$ (expresión acotada de la transformada de Fourier inversa de la función $F_{\nu, V_{VU}}^{EU}$), obtenida mediante un método alternativo a la generalización del Teorema del Muestreo.....	246
$\left((f_{\chi, \nu_{VX}}^{EX})^{EU} \right)_{\chi, 1_{VX}}^{EX}$	Transformada de Fourier inversa de la función $(F_{\chi, \nu_{VX}}^{EX})^{EU}$ (Transformada de Fourier inversa de la transformada de Fourier de la función $f_{\chi, \nu_{VX}}^{EX}$).....	158
$\left((f_{\chi, \nu_{VX}}^{EX})^{EU'} \right)_{\chi', 1_{VX'}}^{EX'}$	Transformada de Fourier inversa de la función $(F_{\chi, \nu_{VX}}^{EX})^{EU'}$ (Transformada de Fourier inversa de la transformada de Fourier de la función $f_{\chi, \nu_{VX}}^{EX}$, interpolada mediante la aplicación del Teorema del Muestreo).....	164
$\left((f_{\chi, \nu_{VX}}^{EX})^{EU'} \right)_{\chi, 1_{VX}}^{EX}$	Transformada de Fourier inversa de la función $(F_{\chi, \nu_{VX}}^{EX})^{EU'}$, interpolada mediante la aplicación del Teorema del Muestreo (Transformada de Fourier inversa, interpolada mediante la aplicación del Teorema del Muestreo, de la transformada de Fourier de la función $f_{\chi, \nu_{VX}}^{EX}$, interpolada mediante la aplicación del Teorema del Muestreo).....	172

$\left(\left(f_{\nu, \nu_{VU}}^{*EU} \right)_{\chi, 1_{VX}}^{EX} \right)_{\nu', \nu_{VU'}}^{EU'}$	Transformada de Fourier inversa interpolada en la función $\left(\left(f_{\nu, \nu_{VU}}^{*EU} \right)_{\chi, 1_{VX}}^{EX} \right)'(x)$ mediante un método alternativo a la generalización del Teorema del Muestreo.....	246
$\left(\left(f_{\chi, \nu_{VX}}^{*EX} \right)_{\nu', 1_{VU'}}^{EU'} \right)_{\chi, 1_{VX}}^{EX}$	Transformada de Fourier inversa de la función $\left(f_{\nu, \nu_{VU}}^{*EU} \right)_{\chi', 1_{VX'}}^{EX'}$, interpolada mediante la aplicación del Teorema del Muestreo (Transformada de Fourier inversa, interpolada mediante la aplicación del Teorema del Muestreo, de la expresión acotada de la transformada de Fourier de la función $f_{\chi, \nu_{VX}}^{EX}$, interpolada mediante la aplicación del Teorema del Muestreo).....	172
$\left(\left(f_{\chi, \nu_{VX}}^{*EX} \right)_{\nu', 1_{VU'}}^{EU'} \right)_{\chi', 1_{VX'}}^{EX'}$	Transformada de Fourier inversa de la función $\left(f_{\nu, \nu_{VU}}^{*EU} \right)_{\chi', 1_{VX'}}^{EX'}$ (Transformada de Fourier inversa de la expresión acotada de la transformada de Fourier de la función $f_{\chi, \nu_{VX}}^{EX}$, interpolada mediante la aplicación del Teorema del Muestreo).....	164
$G, G(\theta, \phi)$	Ganancia de una antena.....	46
G	Transformada de Fourier de la función filtro.....	213
G_e, G_r	Ganancia de la antena emisora, receptora.....	48, 49
g	Agrupación de constantes electromagnéticas.....	76
	Aceleración de la gravedad.....	77
	Función filtro (ventana).....	213
$g(x)$	Función correspondiente al Ejemplo II.....	110
g_0	Valor medio de la aceleración de la gravedad en el nivel medio del mar.....	77
\mathbf{H}	Intensidad del campo magnético.....	13
\mathbf{H}_a	Campo magnético en el medio a	14
\mathbf{H}_e	Parte espacial del campo magnético.....	14
$\mathbf{H}_i, \mathbf{H}_r, \mathbf{H}_t$	Campo magnético de la onda plana incidente, reflejada y transmitida en una interfaz.....	24
$\mathbf{H}_{ie}, \mathbf{H}_{re}, \mathbf{H}_{te}$	Parte espacial del campo magnético de la onda plana incidente, reflejada y transmitida en una interfaz.....	24

H	Agrupación de frecuencias.....	83
	Transformada de Fourier de la función convolución h	213
H_0	Constante de amplitud del campo magnético.....	18
H_{i0}, H_{r0}, H_{t0}	Constante de amplitud del campo magnético de la onda plana incidente, reflejada y transmitida en una interfaz	25
h_{VX}	Ventana de Hamming con soporte en el intervalo $[0, VX]$	112
h	Convolución de la función f y la función filtro g	213
$I_A(x)$	Función indicatriz de A	216
i	Unidad imaginaria: $i^2 \equiv -1$	14
J	Densidad de corriente.....	13
J _{de}	Parte espacial de la densidad de corriente de desplazamiento	20
J _e	Parte espacial de la densidad de corriente.....	14
J ^f	Densidad de corriente asociada a la fuente del campo electromagnético.....	14
J _e ^f	Parte espacial de la densidad de corriente asociada a la fuente del campo electromagnético	14
K	Densidad de corriente en una interfaz.....	14
K	Frecuencia conjugada de la coordenada D	82
	Vector de frecuencias K	304
	Matriz de frecuencias K	323
$K, K(\theta, \phi)$	Intensidad de radiación	43
$K_{\text{interpolada}}$	Matriz de frecuencias K interpoladas	321
	Vector de frecuencias K interpoladas	335
K_{max}	Valor de la intensidad de radiación en la dirección de máxima radiación	45
K_2	Vector de frecuencias K tras la interpolación del espectro.....	333
k	Número de onda	44
$k(x)$	Función correspondiente al Ejemplo III.....	110

\bar{k}	Límite superior de los índices que caracterizan el recorrido de una variable en el dominio frecuencial.....	126
\underline{k}	Límite inferior de los índices que caracterizan el recorrido de una variable en el dominio frecuencial.....	126
lf	Longitud de la función filtro en unidades del nuevo espaciado	211
LD	Longitud del intervalo muestreado en el eje de coordenadas D	311, 331, 339
$LD2$	Longitud del intervalo muestreado en el eje de coordenadas D tras la interpolación del espectro	306, 333
LK	Longitud del intervalo muestreado en el eje de frecuencias K	304
$LK2$	Longitud del intervalo muestreado en el eje de frecuencias K tras la interpolación del espectro	333
LQ	Longitud del intervalo muestreado en el eje de frecuencias Q	331
$LQ2$	Longitud del intervalo muestreado en el eje de frecuencias Q tras la interpolación del espectro	305
LT	Longitud del intervalo muestreado en el eje de tiempos dobles de recorrido.....	296, 328
$LT2$	Longitud del intervalo muestreado en el eje de tiempos dobles de recorrido del perfil sintético	306, 305
LU, LU'	Longitud del eje muestreado en el dominio frecuencial.....	126
LU, LV	Longitud del intervalo muestreado en los ejes de frecuencias conjugadas de las coordenadas X, Y	305, 332, 338
LX, LX'	Longitud del eje muestreado en el dominio natural	120
LX, LY	Longitud del intervalo muestreado en los ejes de coordenadas de distancia horizontal	296, 329, 338
LZ	Longitud del intervalo muestreado en el eje de coordenadas de profundidad.....	296
\mathbf{N}	Vector de radiación	43
N_r, N_θ, N_ϕ	Componentes radial, cenital y acimutal del vector de radiación	43
NLD	Nueva longitud del intervalo muestreado en el eje de coordenadas D ..	304, 331
NLX, NLY	Nuevas longitudes del intervalo muestreado en los ejes de coordenadas de distancia horizontal	304, 331, 338
$NPED$	Nuevo número de puntos en el eje de coordenadas D	304, 331
$NPEX, NPEY$	Nuevos números de puntos en los ejes de coordenadas de distancia horizontal	304, 331, 338

$\hat{\mathbf{n}}_{12}$	Vector unitario en la dirección normal a una interfaz, con sentido del medio 1 al medio 2.....	14
\bar{n}	Límite superior de los índices que caracterizan el recorrido de una variable en el dominio natural	116
\underline{n}	Límite inferior de los índices que caracterizan el recorrido de una variable en el dominio natural	116
nt	Número de trazas que alcanzan un elemento de dimensiones finitas.....	53
O	Origen del sistema de referencia.....	59
$\mathbf{P}, \mathbf{P}(\theta, \phi)$	Vector de Poynting	26, 43
$\bar{\mathbf{P}}$	Vector de Poynting promedio	27
$\bar{\mathbf{P}}_i, \bar{\mathbf{P}}_r, \bar{\mathbf{P}}_t$	Vector de Poynting promedio de la onda plana incidente, reflejada y transmitida en una interfaz.....	27
P	Presión	31
$P, P(\theta, \phi)$	Flujo de potencia radiada	43
P_L	Potencia recibida por el receptor.....	49
P_r	Potencia total radiada.....	43
PE	Número de puntos en el eje.....	116
PE'	Nuevo número de puntos en el eje	212
PED	Número de puntos en el eje de coordenadas D	303, 330
$PED2$	Número de puntos en el eje de coordenadas D tras la interpolación del espectro	333
PET	Número de puntos en el eje de tiempos dobles de recorrido (número de muestras por traza).....	296, 328
$PET2$	Número de puntos en el eje de tiempos dobles de recorrido (número de muestras por traza) del perfil sintético	307
PEX, PEY	Número de puntos en los ejes de coordenadas de distancia horizontal (número de trazas por perfil).....	296, 329, 338
PEZ	Número de puntos en el eje de coordenadas de profundidad	296
Q	Frecuencia conjugada de la coordenada D	81
	Matriz de frecuencias Q	322
	Vector de frecuencias Q	331

$Q_{\text{interpolada}}$	Vector de frecuencias Q interpoladas	321
$Q2$	Vector de frecuencias Q tras la interpolación del espectro	306
q	Frecuencia conjugada de la coordenada d	81
q^r, q^e	Frecuencias conjugadas de las coordenadas z^r y z^e	94
R	Vector distancia	44
	Vector de posición del centro del dispositivo	72
R	Reflectancia	44
	Distancia	69
	Distribución de reflectividad.....	86
	Receptor	86
R_e, R_r	Distancia al emisor y receptor.....	48
R_r	Resistencia de radiación.....	42
R_Ω	Resistencia de pérdidas.....	42
Rv	Resolución vertical.....	50
r	Vector de posición de un punto genérico	44, 69
$\mathbf{r}^e, \mathbf{r}^r$	Vector de posición del emisor y receptor de ondas electromagnéticas	69
\mathbf{r}^{re}	Vector de posición relativa receptor-emisor.....	72
$\hat{\mathbf{r}}$	Vector unitario en la dirección radial.....	43
r	Coefficiente de reflexión	25
	Coordenada radial. Distancia al origen	43
	Vector de coeficientes de reflexión.....	295
	Reflectividad aparente.....	344
r_{ab}	Coefficiente de reflexión para las ondas que se propagan desde el medio a hacia el medio b	26
r_{minima}	Condición de reflectividad mínima para el cálculo de ondas múltiples..	294, 343
$r_{\text{múltiples}}$	Vector de reflectividades aparentes correspondientes a los reflectores ficticios.....	316

$r_{0a0}, r_{0a(ba)^n 0}, \dots$	Reflectividades aparentes correspondientes a ondas reflejadas múltiples en la resolución analítica del Problema Directo.....	463
r^*	Coefficiente de reflexión en la resolución analítica del Problema Directo.....	461
S	Superficie.....	43
T	Periodo.....	27
	Transmitancia.....	27
	Temperatura.....	31
	Vector de coordenadas de las muestras en el eje de tiempos dobles de recorrido.....	329
$T2$	Vector de coordenadas de las muestras en el eje de tiempos dobles de recorrido del perfil sintético.....	297, 306
t	Tiempo.....	13
	Coefficiente de transmisión.....	25
$t, t(\theta, \phi)$	Diagrama de radiación normalizado.....	45
t_D	Tiempo doble de recorrido calculado mediante la coordenada D	78
t_Z	Tiempo doble de recorrido calculado mediante la coordenada Z	78
t_a	Vector de coeficientes de transmisión ascendente.....	295
t_d	Vector de coeficientes de transmisión descendente.....	295
t_{ab}	Coefficiente de transmisión para las ondas que se propagan desde el medio a hacia el medio b	26
$t_{0aba}, t_{0a(ba)^n 0}, \dots$	Tiempos dobles de recorrido correspondientes a ondas reflejadas múltiples en la resolución analítica del Problema Directo.....	463
t^*	Tiempo doble de recorrido en la resolución analítica del Problema Directo ..	461
t_{sm}	Tasa de sobremuestreo.....	211
U	Vector de coordenadas de las muestras en el dominio frecuencial	81, 305, 332
U, V	Frecuencias conjugadas de las coordenadas X, Y	81, 305, 332
(u, v, w)	Números de onda de un punto genérico en el dominio frecuencial.....	13
u, v	Frecuencias conjugadas de las coordenadas x^{re}, y^{re}	93
u^e, u^r	Frecuencias conjugadas de las coordenadas x^e, x^r	94

V	Volumen.....	44
V_{VU}	Ventana en el dominio frecuencial con soporte en el intervalo $[0, VU]$	126
VD	Longitud de la ventana en el eje de coordenadas D	304, 331
$VD2$	Longitud de la ventana en el eje de coordenadas D tras la interpolación del espectro	306, 333
VK	Longitud de la ventana en el eje de frecuencias K	304
	Vector de longitudes de la ventana en el eje de frecuencias K	334
$VK2$	Longitud de la ventana en el eje de frecuencias K tras la interpolación del espectro	333
VQ	Vector de longitudes de la ventana en el eje de frecuencias Q	320
	Longitud de la ventana en el eje de frecuencias Q	331
$VQ2$	Longitud de la ventana en el eje de frecuencias Q tras la interpolación del espectro	306
VU, VU'	Longitud de una ventana en el dominio frecuencial.....	126
VU, VV	Longitud de la ventana en los ejes de frecuencia conjugados de las coordenadas X, Y	305, 332, 338
VU'	Nueva longitud de la ventana en el dominio frecuencial	212
VX, VX'	Longitud de una ventana en el dominio natural	120
VX, VY	Longitud de la ventana en los ejes de coordenadas de distancia horizontal	305, 332, 338
VX'	Nueva longitud de la ventana en el dominio natural.....	212
$\hat{V}^m(u v, VU)$	Nueva ventana en el dominio frecuencial desplazada.....	197
$\left(\hat{V}_{\chi, v_{\chi}}^q \right)^{EX}$	Transformada de Fourier de la nueva ventana $\hat{v}^q(x \chi, VX)$ muestreada	194
v	Velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas.....	50
v_a	Velocidad de arrastre de la antena sobre la superficie	53
v_{VX}	Ventana en el dominio natural con soporte en el intervalo $[0, VX]$	112
v^e, v^r	Frecuencias conjugadas de las coordenadas y^e, y^r	94

$\hat{v}^g(x \chi, VX)$	Nueva ventana en el dominio natural desplazada	193
$\left(\hat{v}_{\nu, V\nu}^{mEU}\right)(x \nu, VU)$	Transformada de Fourier inversa de la nueva ventana $\hat{V}^m(u \nu, VU)$ muestreada	198
$\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$	Vectores unitarios en las direcciones y sentidos de los ejes \overline{OX} , \overline{OY} y \overline{OZ} positivos	69
X	Vector de coordenadas de las muestras en el dominio natural	296
X, Y	Vectores de coordenadas de las muestras en los ejes de coordenadas de distancia horizontal	305, 329, 333, 338
(X, Y, Z)	Coordenadas del vector de posición del centro del dispositivo	72
(x, y, z)	Coordenadas del vector de posición de un punto genérico en el dominio espacial	13
(x^e, y^e, z^e)	Coordenadas del vector de posición del emisor de ondas electromagnéticas ...	69
(x^r, y^r, z^r)	Coordenadas del vector de posición del receptor de ondas electromagnéticas	69
(x^{re}, y^{re}, z^{re})	Coordenadas del vector de posición relativa receptor-emisor	72
Z	Altura geopotencial	77
	Vector de coordenadas de las muestras en el eje de profundidad	296
Z	Profundidad	77
Z_{ab}	Coordenada Z correspondiente al reflector ab	84, 462
Z^*	Coordenada de profundidad en la resolución analítica del Problema Directo	461
z	Profundidad	53
	Altura	77

Símbolos griegos

α	Constante de atenuación: $\alpha \equiv \text{Re}\{\gamma\}$	18
α_e	Parámetro para describir la dependencia de la permitividad eléctrica con la frecuencia de la fuente	32
β	Constante de fase: $\beta \equiv \text{Im}\{\gamma\}$	18
γ	Constante de propagación	18
	Vector con los valores de la constante de propagación para cada medio	295
γ_a	Constante de propagación del medio a	24
Δ^{EX}	Serie infinita de impulsos unitarios equiespaciados un intervalo EX	107
Δf	Ancho de banda del haz	51
Δt	Duración del pulso	50
δ	Profundidad de penetración superficial	19
$\delta(x)$	Impulso unitario en $x = 0$	107
ε	Permitividad eléctrica	13
	Vector con los valores de la permitividad eléctrica para cada medio	295
ε_0	Permitividad eléctrica del vacío: $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$	21
ε_a	Permitividad eléctrica del medio a	23
$\varepsilon_l, \varepsilon_\infty$	Parámetros para describir la dependencia de la permitividad eléctrica con la frecuencia de la fuente	32
ε_m	Permitividad eléctrica constante	74
	Permitividad eléctrica promedio	80, 303, 328
ε_r	Permitividad eléctrica relativa	21
ε_{rm}	Permitividad eléctrica relativa promedio de los materiales presentes entre la superficie y un reflector	53
$\tilde{\varepsilon}$	Tensor permitividad eléctrica	31
$\varepsilon', \varepsilon''$	Partes real e imaginaria de la permitividad eléctrica	31

η	Impedancia intrínseca	18
η_0	Impedancia intrínseca del vacío: $\eta_0 = 377 \text{ ohm}$	22
η_a	Impedancia intrínseca del medio a	24
η_e, η_r	Eficiencias de la antena emisora y receptora	48, 49
η_t	Eficiencia de una antena	43
θ	Ángulo de pérdidas	20
$\hat{\theta}, \hat{\phi}$	Vectores unitarios en las direcciones cenital y acimutal	43
(θ, ϕ)	Ángulos cenital y acimutal	43
θ_η	Fase de la impedancia intrínseca	18
λ	Longitud de onda	20
μ	Permeabilidad magnética	13
	Vector con los valores de la permeabilidad magnética para cada medio	295
μ_0	Permeabilidad magnética del vacío: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$	21
μ_a	Permeabilidad magnética del medio a	23
μ_m	Permeabilidad magnética constante	74
	Permeabilidad magnética promedio	303, 328
μ_r	Permeabilidad magnética relativa	21
$\tilde{\mu}$	Tensor permeabilidad magnética	31
ρ_s	Densidad superficial de carga libre	14
ρ_v	Densidad volúmica de carga libre	13
σ	Conductividad eléctrica	13
	Vector con los valores de la conductividad eléctrica para cada medio	295
σ_A	Sección radar equivalente	48
σ_{CC}	Conductividad eléctrica de corriente continua	32
σ_a	Conductividad eléctrica del medio a	23

σ_m	Conductividad eléctrica constante.....	74
	Conductividad eléctrica promedio	80, 303, 328
$\tilde{\sigma}$	Tensor conductividad eléctrica	31
σ', σ''	Partes real e imaginaria de la conductividad eléctrica.....	31
ν, ν'	Desplazamiento de una ventana en el dominio frecuencial.....	126
$\Phi(U, V, q, Q)$	Transformada de Fourier de $\phi(X, Y, d, D)$	81
Φ_n	Coefficientes de una serie de Fourier en el dominio frecuencial.....	105
ϕ	Número de trazas registradas por un geo-radar en la unidad de tiempo.....	53
	Componente no nula del campo eléctrico o del campo magnético, en la Ecuación de Ondas escalar expresada en el sistema de referencia (X, Y, d, D)	75, 78
ϕ_k	Coefficientes de una serie de Fourier en el dominio natural	104
ϕ^{DR}	Distribución de Reflectividad en el sistema de referencia (X, Y, d, D) ..	75, 79
ϕ^{SM}	Sección Medida en el sistema de referencia (X, Y, d, D)	75, 79
χ	Componente no nula del campo eléctrico o del campo magnético, en la Ecuación de Ondas escalar expresada en el sistema de referencia $(X, Y, Z; x^{re}, y^{re}, z^{re}; t)$	72
χ, χ'	Desplazamiento de una ventana en el dominio natural	120
χ^{DR}	Distribución de Reflectividad en el sistema de referencia $(X, Y, Z; x^{re}, y^{re}, z^{re}; t)$	72
χ^{SM}	Sección Medida en el sistema de referencia $(X, Y, Z; x^{re}, y^{re}, z^{re}; t)$	72
ψ	Componente no nula del campo eléctrico o del campo magnético, en la Ecuación de Ondas escalar expresada en el sistema de referencia $(x^e, y^e, z^e; x^r, y^r, z^r; t)$	69
ψ^{DR}	Distribución de Reflectividad en el sistema de referencia $(x^e, y^e, z^e; x^r, y^r, z^r; t)$	70
ψ^{SM}	Sección Medida en el sistema de referencia $(x^e, y^e, z^e; x^r, y^r, z^r; t)$	70
$\Omega,$	Ángulo sólido.....	43

ω	Frecuencia angular, conjugada de la coordenada t	13
	Pulsación	14
	Frecuencia de la antena	294, 336
ω_e	Parámetro para describir la dependencia de la permitividad eléctrica con la frecuencia de la fuente	32

Otros símbolos

∇	Operador Nabra: $\nabla \equiv \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}$	13
\cdot	Operador de producto escalar	13
\wedge	Operador de producto vectorial	13
\circ	Operador de composición de funciones: $(g \circ f)(x) \equiv g[f(x)]$	91
$*$	Operador de convolución de funciones	187
\equiv	Igual por definición	18
\approx	Aproximadamente igual, asintóticamente igual	21
\gg, \ll	Mucho mayor, mucho menor	20

Notaciones

\odot	Vector normal al plano de la hoja dirigido hacia el exterior	24
\otimes	Vector normal al plano de la hoja dirigido hacia el interior	24
$\blacktriangleright, \blacktriangleleft$	Delimitadores de las definiciones y resultados matemáticos más importantes	16
\blacksquare	Delimitador de las demostraciones matemáticas	16

$\mathbb{1}_{vX}$	Ventana cuadrada en el dominio natural	127
$\mathbb{1}_{vU}$	Ventana cuadrada en el dominio frecuencial	122
$0a0, 0a(ba)^n 0, \dots$	Denominaciones de ondas reflejadas múltiples	344
ψ_t	Derivada parcial: $\psi_t \equiv \frac{\partial \psi}{\partial t}$	67
$\lfloor x \rfloor$	Mayor entero menor o igual que x	116
$\lceil x \rceil$	Menor entero mayor o igual que x	116
$ \cdot $	Módulo del argumento	19
	Valor absoluto del argumento	101
$\ \cdot\ $	Norma del argumento	20
$\text{card}\{\cdot\}$	Cardinal de los argumentos.....	116
$E[\cdot]$	Esperanza matemática.....	79
$\max\{\cdot\}, \min\{\cdot\}$	Máximo valor, mínimo valor de los argumentos	339
$\text{Re}\{\cdot\}, \text{Im}\{\cdot\}$	Parte real, parte imaginaria del argumento.....	18
$TF[\cdot]$	Transformada de Fourier del argumento: $TF[f(x)](u) \equiv F(u)$	101
$TF^{-1}[\cdot]$	Transformada de Fourier inversa del argumento: $TF^{-1}[F(u)](x) \equiv f(x)$	102

Resumen

El objetivo de esta Tesis Doctoral consiste en el diseño de una metodología para el modelado de registros de geo-radar eficiente en términos de potencia y tiempo de cálculo. Ésta metodología es completa, en el sentido en que incluye tanto el efecto de la difracción como la presencia de reflexiones múltiples, así como efectos laterales en problemas tridimensionales.

Para el desarrollo de estos algoritmos se emplea una novedosa metodología híbrida del filtrado de Fourier y el trazado de rayos, implementándose algoritmos para la resolución numérica del Problema Directo y el Problema Inverso en dos y tres dimensiones, proponiéndose una metodología para el adecuado tratamiento de los datos de campo.

Para el desarrollo de estos algoritmos se busca relacionar el perfil que se mediría en la superficie con la distribución de reflectividad en la subsuperficie, mediante la aplicación de un filtro en el dominio frecuencial.

Dada la necesidad de trabajar con transformadas de Fourier e interpolar los espectros, se estudia la forma apropiada de realizar ésta, desarrollándose la técnica para la interpolación en el espectro mediante la generalización del Teorema de Shannon. Ésta es una técnica muy costosa computacionalmente, por lo que tras un exhaustivo estudio se elige como alternativa la interpolación mediante splines cúbicos.

Dadas las características de la técnica empleada, la difracción aparece en forma natural. Las reflexiones múltiples se obtienen en el Problema Directo mediante la introducción, previo al filtrado en el dominio frecuencial, de una colección de reflectores ficticios asociados a cada reflexión múltiple, que son determinados mediante un procedimiento análogo al trazado de rayos.

Estos algoritmos se implementan en el lenguaje de programación de MATLAB, y se diseñan para ser ensamblados fácilmente en un programa más completo de modelado y análisis de radargramas.

En la aplicación de los algoritmos a datos sintéticos y datos de campo se aprecia cómo, aunque no son apropiados para la extracción de conclusiones de carácter cuantitativo en lo que refiere a las amplitudes y fases, sí lo son para realizar análisis cuantitativos en lo que refiere a la geometría de las señales y tiempos dobles de recorrido, en el Problema Directo, y profundidades en el Problema Inverso.

En todos los casos los tiempos de cómputo son suficientemente cortos como para que la metodología resulte operacionalmente eficiente en un PC portátil o de sobremesa.

Introducción

El geo-radar es un método de Prospección Geofísica de alta resolución basado en la emisión y propagación de ondas electromagnéticas en forma de pulsos de corta duración y en el rango de frecuencias de 10–3000 MHz, y la posterior recepción de las reflexiones en discontinuidades, hábil para el estudio no destructivo de la estructura de la región subsuperficial y la localización de objetos enterrados, que empieza a desarrollarse en la segunda mitad del siglo XX.

El geo-radar consiste esencialmente en una unidad central, que sirve para coordinar el funcionamiento del resto de componentes, una serie de antenas encargadas de emitir impulsos electromagnéticos de corta duración (entre 1 y 10 ns) y captar sus reflexiones en el subsuelo (cuyo diagrama de radiación se considera, en general, contenido en un cono dirigido hacia el subsuelo), así como un soporte para visualizar los resultados y un sistema de grabación de señales que facilite el almacenamiento de los datos para su posterior análisis o reproducción (en la actualidad se emplea un ordenador portátil como medio de almacenamiento y visualización).

Las primeras contribuciones en la literatura científica en relación a este método se centran en la metodología que lo caracteriza. Se hace hincapié en la necesidad de determinar convenientemente los parámetros de adquisición y efectuar una buena caracterización del equipo (se realizan estudios sobre la base de experimentos de campo, en que se analizan diferentes frecuencias y potencias de emisión), y se resuelve el Problema Directo, aunque únicamente en modelos simplificados.

Una vez conocidas las bases físicas del método aparecen contribuciones relacionadas con el tratamiento e interpretación de los datos, haciéndose uso de las técnicas tradicionalmente empleadas en la Prospección sísmica de reflexión para la migración, la interpolación, etc., para conseguir una interpretación cuantitativa más fiable.¹

En la década de los 90 se produce un aumento en la aparición de colaboraciones sobre aplicaciones del geo-radar, alcanzando suficiente importancia como para ser protagonista de sesiones propias en los congresos internacionales. Existe, incluso, un congreso dedicado exclusivamente al geo-radar (International Conference on Ground-Penetrating Radar) iniciado a finales de los 80, que se realiza cada dos años.

¹ En ambos métodos se estudia la propagación de ondas en la subsuperficie, existiendo una mayor analogía entre las ondas S y las ondas electromagnéticas, dadas las características de polarización de estas últimas. Mientras que en la Prospección sísmica son las propiedades elásticas de los materiales las que rigen la propagación de las ondas, en el caso de la Prospección con geo-radar las propiedades determinantes son las electromagnéticas. Así mismo, el geo-radar emplea ondas de frecuencias mucho mayores en órdenes de magnitud que las utilizadas en sísmica: 10–1000 MHz frente a 10–1000 Hz (Pérez Gracia, 2001).

Así mismo, se incrementan y diversifican los campos de aplicación, por ejemplo:

- Antenas (Carcione, 1998; Jiao et al., 2000; Lampe y Holliger, 2003; Lee et al., 2004a; Uduwawala et al., 2004; Yarovoy, 2004; Ellefsen y Wright, 2005).
- Aplicaciones forensicas (Hammon et al., 2000; Bugaev et al., 2004; Instanes et al., 2004; Koppenjan et al., 2004; Modroo y Olhoeft, 2004).
- Arqueología (Pérez Gracia et al., 2002a; Cerdeño et al., 2004; Radzevicius et al., 2004; Whiting y Orvald, 2004; Whiting y Hackenberger, 2004; Lorenzo y Arias, 2005; Vafidis et al., 2005).
- Caracterización de medios (Sénéchal et al., 2000; Pérez Gracia et al., 2002b; Pipan et al., 2003; Paniagua et al., 2004).
- Contaminación y medio ambiente (Lorenzo et al., 2001; Orlando y Marchesi, 2001; Teixeira et al., 2002; Lopes y Gomes, 2003; Chang et al., 2004; Jol et al., 2004; Lorenzo et al., 2004).
- Detección (Sun y Young, 1995; Zeng y McMechan, 1997; O'Neill, 1997 y 2000; Beres et al., 2001; Allred et al., 2004; Utsi, 2004).
- Detección de minas y otro armamento (Gader et al., 2001; O'Neill, 2001; Zhan et al., 2001; Aubry et al., 2002; Fischer et al., 2003; Perrin et al., 2004).
- Estratigrafía (Carreón et al., 2003; Aspiron et al., 2004; Cunningham, 2004; Jordan et al., 2004; Xia et al., 2004; Pedersen y Clemmensen, 2005).
- Exploración planetaria (Leuschen et al., 2001 y 2002; Ciarletti et al., 2003; Pettinelli et al., 2003; Rey et al., 2003; Markus et al., 2004).
- Geodinámica (Busby y Merritt, 1999; Bano et al., 2000; Anderson et al., 2003; Slater y Niemi, 2003; Bennet et al., 2004; Grasmueck et al., 2005).
- Geomorfología (Antunes et al., 2002; McMechan et al., 2002; Skelly et al., 2003; Young et al., 2003; Blumberg et al., 2004; Kjaer et al., 2004; Pelpola y Hickin, 2004).
- Geotecnia (Audru et al., 2001; Osorio et al., 2002b; Giang, 2004; Giroux et al., 2004; Hugenschmidt, 2004; Park et al., 2004).
- Glaciología (Arcone, 1996; Ékes y Hickin, 2001; Legarsky et al., 2001; Jakobsen y Overgaard, 2002; Bennet et al., 2004; Navarro et al., 2005).
- Hidrología (Huisman et al., 2002; Scmalz et al., 2002; Kowlasky et al., 2004; Travassos y Menezes, 2004; Comas et al., 2005; Doolittle et al., 2005; Turesson, 2005).
- Ingeniería civil (Lorenzo y Cuéllar, 1995; Ékes y Friele, 2004; Grivas et al., 2004; Lee et al., 2004b; Szykiewicz y Grabowski, 2004; Benedetto et al., 2005; Grote et al., 2005).
- Localización de biomasa enterrada (Niltawach et al., 2003 y 2004).
- Minería (Francké y Yelf, 2003; Jha et al., 2004; Trilitzsch et al., 2004; Strange et al., 2005).

- Paleontología (Main y Hammon, 2003).
- Patrimonio (Pérez Gracia, 2001; Binda et al., 2003; Nuzzo, 2004; Pieraccini et al., 2004; Ranalli et al., 2004; Tallini et al., 2004).
- Producción agrícola (Freeland et al., 1998).
- Recursos naturales (Carcione y Seriani, 2000; Fullagar et al., 2000; Osorio et al., 2002a; Tronice et al., 2002; Elkhetai, 2003b; Liu y Sato, 2004).
- Radar aplicado a sondeos (Bellefleur y Chouteau, 2001; Giroux et al., 2004; Kim et al., 2004).
- Vulcanología (Rust y Russell, 2000; Cagnoli y Ulrych, 2001).

Este auge en el desarrollo de la técnica del geo-radar da idea de la importancia adquirida por este método de estudio en la última década. Esto es debido, en gran medida, a que se trata de un método no destructivo y a la relativa simplicidad del proceso de adquisición de datos, lo que lo hace un método de Prospección rápido, barato en comparación con otros métodos, eficiente y el de mayor resolución dadas las altas frecuencias que emplea.

En Geofísica Aplicada los métodos numéricos juegan un papel fundamental, ya que al conocimiento directo del subsuelo no puede accederse sin un enorme costo en excavaciones o en perforaciones; que son, además, métodos destructivos. Al contrario de lo que ocurre en otras disciplinas, en las que se pueden construir prototipos para chequear un nuevo concepto o procedimiento, en Geofísica sólo se dispone de simulaciones numéricas para examinar la efectividad de un método en la búsqueda de un objetivo en la subsuperficie.

Existen diversas metodologías para el modelado de registros de geo-radar, encontrándose referidas en la literatura:

- Diferencias finitas (Grinin, 1997; Chen y Huang, 1998; Teixeira et al., 1998; Gürel y Oguz, 2000; Oguz y Gürel, 2000; Wang y Oristaglio, 2000a; Kumar et al., 2003; Oguz y Gürel, 2003; Klysz et al., 2004; Liu y Sato, 2004).
- Elementos finitos (Di y Wang, 2004; Zdunek y Rachowicz, 2004; Ledger et al., 2005).
- Filtrado de Fourier (Stolt, 1978; Stolt y Weglein, 1985; Haizhong y Xiaojian, 1997; Bitri y Grandjean, 1998; Grandjean et al., 2000; Grasmueck et al., 2005).
- Pseudo espectral (Liu, 1997; Yang et al., 1999; Carcione et al., 1999; Liu y Fan, 1999 a-b; Fan et al., 2002; Arcone et al., 2003).
- Redes neuronales (Brooks et al, 1997; Elkhetai, 2003a; Caorsi y Cevini, 2004).
- Transformada de Radon (Rüter, 1987; Wang y Oristaglio, 2000b; Leparoux et al., 2001; Trad, 2003; Nuzzo y Quarta, 2004; Sava y Guitton, 2005).

- Trazado de rayos (Cai y McMechan, 1995; Bohidar y Hermance, 2002; Baradello et al., 2004; Gloaguen et al., 2004; Goodman, 2004; Malcolm et al., 2005).
- Otros métodos (Bancroft et al., 1998; Shrestha et al., 2001; Guangyou y Pipan, 2003; Kurk et al., 2003; Moran et al., 2003; Kim y Kim, 2004; Rubio et al., 2004; Lu et al., 2005).

Estas metodologías pueden englobarse, en general, en dos familias bien diferenciadas (Zeng et al, 1995):

- Basadas en la resolución de la Ecuación de Ondas en el dominio natural:² diferencias finitas, trazado de rayos...

Se supone la existencia de capas, con geometría más o menos complicada, dentro de las cuales los parámetros electromagnéticos permanecen constantes. Los algoritmos basados en estas técnicas permiten determinar las amplitudes debidas a la reflexión, incluidas las reflexiones múltiples, pero no incluyen efectos típicamente ondulatorios tales como la difracción.

- Basadas en la resolución de la Ecuación de Ondas en el dominio frecuencial: filtrado de Fourier, transformada de Radon...

Se supone que los reflectores se encuentran constituidos por la superposición de puntos difractores en una matriz caracterizada por parámetros electromagnéticos constantes. Los algoritmos basados en estas técnicas permiten determinar los efectos ondulatorios (difracción), pero no permiten tener en cuenta el patrón de emisión de la antena ni la existencia de reflexiones múltiples.

En general puede afirmarse que, así como las metodologías pertenecientes a la primera familia producen resultados más ajustados numéricamente, también llevan asociado un elevado tiempo de cómputo, mayor que el correspondiente a las metodologías pertenecientes a la segunda familia.

En la bibliografía consultada, en sólo 30 de 95 publicaciones se trata el problema tridimensional y, de éstas, en 9 en 2,5 dimensiones y en 21 con efectos laterales. En éstas últimas se desarrollan metodologías que, salvo en una, pueden enmarcarse en la primera familia anteriormente expuesta, que son complejas y requieren gran potencia y tiempo de cálculo (desde los 40 minutos de ejecución indicados por Bourgeois y Smith, 1994, hasta las 4 horas indicadas por Klysz et al., 2004).

² A los efectos de esta Introducción, se entiende por DOMINIO NATURAL el conjunto de valores (x, y, z, t) en los que se busca la solución de la Ecuación de Ondas. Así mismo, se entiende por DOMINIO FRECUENCIAL el conjunto de valores de las frecuencias (u, v, w, ω) asignadas por la Transformada de Fourier a los valores que definen el dominio natural (Cf. §4.1.1).

Los tiempos de cálculo referidos resultan prohibitivamente elevados en la práctica. Como ejemplo cabe señalar que durante el proceso de adquisición de datos, tras cada jornada de trabajo, resulta interesante revisar los perfiles obtenidos, con objeto de redirigir el estudio en el caso en que fuera pertinente. Dado el volumen de datos que se obtiene diariamente,³ se requiere una metodología rápida y que pueda ser implementada para su ejecución en el campo (en un ordenador portátil). En la literatura consultada no aparece referida ninguna metodología que cumpla con estas características que la validen como herramienta de carácter práctico.

El objetivo de esta Tesis Doctoral consiste en el diseño de una metodología para el modelado de registros de geo-radar eficiente en términos de potencia y tiempo de cálculo. Ésta metodología ha de ser completa, en el sentido en que ha de incluir tanto el efecto de la difracción como la presencia de reflexiones múltiples, así como efectos laterales en problemas tridimensionales.

Para el desarrollo de estos algoritmos se empleará una novedosa metodología híbrida del filtrado de Fourier y el trazado de rayos, implementándose algoritmos para la resolución numérica del Problema Directo y el Problema Inverso en dos y tres dimensiones, proponiéndose una metodología para el adecuado tratamiento de los datos de campo. El filtrado de Fourier es una metodología basada en la resolución de la Ecuación de Ondas en el dominio frecuencial, por lo que la difracción será tratada en forma natural. Las reflexiones múltiples serán obtenidas en la resolución del Problema Directo mediante la introducción, previa a la resolución de la Ecuación de Ondas, de una colección de reflectores ficticios asociados a cada reflexión múltiple, que serán determinados mediante un procedimiento análogo al trazado de rayos.

Ésta es una metodología novedosa, que permite aprovechar los aspectos positivos de las técnicas que la constituyen: la aparición de la difracción y los efectos laterales en los problemas tridimensionales, del filtrado de Fourier; las reflexiones múltiples, del trazado de rayos; todo ello sin que se requiera una gran potencia de cómputo y con un razonablemente pequeño tiempo de cálculo, lo que le hace ser válida como herramienta de carácter práctico.

Esta Tesis Doctoral se encuentra estructurada en nueve Capítulos. Los dos primeros están dedicados a la exposición de los fundamentos que serán precisos en los desarrollos posteriores.

En el Capítulo 1 se exponen los fundamentos de la teoría que rige la propagación de las ondas electromagnéticas.

En el Capítulo 2 se describe el equipo de geo-radar, su funcionamiento en la fase de adquisición de los datos de campo, y se describen algunas de las técnicas de procesado de los mismos y de conversión del tiempo doble de recorrido en profundidad.

Los cuatro capítulos siguientes están dedicados al desarrollo de la metodología, al diseño de los algoritmos y su implementación.

En el Capítulo 3 se efectúa el desarrollo de algoritmos para la síntesis numérica e inversión de radargramas, tanto en dos dimensiones (perfiles) como en tres dimensiones (cubos). Para ello se resuelve el Problema Inverso, empleándose una metodología paralela a la expuesta por Stolt (1978) para la migración de perfiles sísmicos, mediante la resolución de la Ecuación de Ondas escalar en el dominio frecuencial. Este desarrollo se particulariza y amplía para la propagación de ondas electromagnéticas, discutiéndose las simplificaciones necesarias para la obtención de un algoritmo operativo. La resolución del Problema Directo se logra mediante la inversión de los algoritmos correspondientes al Problema Inverso.

³ En la campaña de Prospección con geo-radar en el Castro de El Ceremeño y la Necrópolis de Herrería (Guadalajara) que se refiere en el Capítulo 9, se obtuvieron en 3 días de trabajo 227 perfiles de entre 4 y 26 m de longitud, lo que da una media de 76 perfiles diarios.

Dada la importancia de una apropiada determinación numérica de las transformadas de Fourier directa e inversa, y la necesidad de efectuar interpolación en los dominios frecuencial y natural, en el Capítulo 4 se desarrolla el formalismo matemático de estas transformaciones en su aplicación a las funciones muestreadas con soporte acotado, efectuándose particularizaciones para las funciones constituidas por suma de impulsos, que son las tratadas en la presente Tesis Doctoral.

Las metodologías de interpolación en las transformadas de Fourier expuestas en el Capítulo anterior son muy costosas en términos de potencia y tiempo de cálculo, estudiándose en el Capítulo 5 metodologías alternativas a éstas.

En el Capítulo 6 se expone la estructuración de los algoritmos para la resolución de los problemas directo e inverso, en dos y tres dimensiones, en sus módulos constituyentes. Estos algoritmos se implementan en el lenguaje de MATLAB® Version 6.5.0.180913a (R13), desarrollado por la compañía The MathWorks, Inc. (Hanselman y Littlefield, 2001).

Los dos capítulos siguientes están dedicados a la aplicación de los algoritmos y sus resultados numéricos, tanto en modelos sintéticos como a datos de campo.

En el Capítulo 7 se aplican los algoritmos a diversos modelos sintéticos sencillos.

En el Capítulo 8 se discute la aplicación de los algoritmos a datos de campo, atendiendo a los resultados descritos en el Capítulo anterior.

El último Capítulo está dedicado a la discusión general y la exposición de las conclusiones. En él se recopilan y discuten los principales resultados obtenidos en los capítulos precedentes. Se incluye la discusión general de las cuatro vertientes fundamentales que se tratan en este Trabajo: diseño, implementación, resultados numéricos y tratamiento de datos de campo; la exposición de las conclusiones finales y las futuras líneas de investigación.

A continuación de las referencias bibliográficas citadas en la memoria, con la finalidad de completar la bibliografía sobre geo-radar, se adjunta un compendio de referencias clasificadas por materias que incluyen las que, habiendo sido consultadas, no han sido citadas en ella.

En los capítulos 3 y 4, las definiciones y resultados matemáticos más importantes se delimitan mediante los símbolos ► y ◄. Las demostraciones matemáticas que se desarrollan en el Capítulo 4 son omitidas del texto con el objeto de facilitar su lectura y comprensión, y se exponen en el Anexo 4.A delimitadas mediante símbolos ■.

Capítulo 1

*Fundamentos de la
teoría electromagnética*

Introducción

En este primer Capítulo se exponen los fundamentos de la teoría que rige la propagación de las ondas electromagnéticas.

Se encuentra dividido en tres Secciones dedicadas, respectivamente:

- A la exposición de las Ecuaciones de Maxwell.
- Al estudio de la propagación de las ondas electromagnéticas, derivándose la Ecuación de Ondas, estudiándose la reflexión y transmisión de ondas planas monocromáticas y la atenuación de las ondas electromagnéticas.
- Al estudio de los parámetros de los medios que caracterizan su comportamiento electromagnético.

1.1. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell representan el compendio de las leyes del electromagnetismo (Ward y Hohmann, 1987; Sadiku, 1994; Reitz et al., 1996). Esta Sección está dedicada a su presentación y estudio en los dominios natural y frecuencial.¹

1.1.1. Ecuaciones de Maxwell en el dominio natural

La propagación del campo electromagnético (EM) está descrita por las ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \wedge \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_v \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

Donde \mathbf{E} denota la intensidad de campo eléctrico ($\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$), \mathbf{H} la intensidad de campo magnético ($\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$), \mathbf{D} el desplazamiento eléctrico ($\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$), \mathbf{B} la inducción magnética (T ó $\text{Wb}\cdot\text{m}^{-2}$), y \mathbf{J} la densidad de corriente ($\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$).² Así mismo, ρ_v denota la densidad volúmica de carga libre en el medio ($\text{C}\cdot\text{m}^{-3}$).

Las relaciones entre estos campos en el interior de medios lineales, homogéneos e isótropos vienen dadas por las relaciones constitutivas:

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}^f\end{aligned}\tag{1.1.2}$$

La última de las relaciones constitutivas expresa la densidad de corriente \mathbf{J} como suma de las densidades de corriente de conducción, $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, y la asociada a la fuente del campo EM, \mathbf{J}^f . En estas relaciones ε denota la permitividad eléctrica ($\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$), μ la permeabilidad magnética ($\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$) y σ la conductividad eléctrica ($\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$) del medio.

¹ El **dominio natural** hace referencia a las coordenadas de posición x , y , z y al tiempo t , mientras que el **dominio frecuencial** hace referencia a los números de onda u , v , w y la frecuencia angular ω . Ambos dominios se denominan conjugados, tal como se expone en la §4.1.

² Hay autores que, en determinadas disciplinas, se refieren a \mathbf{B} como campo magnético y \mathbf{H} como poder imanador.

De las ecuaciones de Maxwell (1.1.1) y las relaciones constitutivas (1.1.2) se deducen las condiciones que los campos deben satisfacer en una zona interfacial entre dos medios 1 y 2:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \wedge \hat{\mathbf{n}}_{12} &= 0 \\
 (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \wedge \hat{\mathbf{n}}_{12} &= \mathbf{K} \\
 (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12} &= \rho_s \\
 (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{12} &= 0
 \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Donde \mathbf{K} denota la densidad de corriente en la interfaz ($A \cdot m^{-1}$), ρ_s la densidad superficial de carga libre en la misma ($C \cdot m^{-2}$), y $\hat{\mathbf{n}}_{12}$ el vector unitario en la dirección normal a la interfaz, con sentido del medio 1 al medio 2.

Como casos particulares de las condiciones en la frontera (1.1.3) puede citarse el caso de un conductor perfecto, $\sigma \approx \infty$, en el interior del cual la componente normal de la inducción magnética y la componente transversal del campo eléctrico son nulas, así como el caso de un dieléctrico perfecto, $\sigma \approx 0$, en cuyo caso la densidad de corriente en la interfaz es nula.

En los desarrollos subsiguientes se asume que los campos vectoriales son dependientes de la posición y el tiempo, mientras que las magnitudes escalares son independientes del tiempo, temperatura y presión, pero pueden depender de la posición.

1.1.2. Ecuaciones de Maxwell en el dominio frecuencial

Si se efectúa una transformación de Fourier unidimensional³ de las ecuaciones de Maxwell (1.1.1) respecto del tiempo,⁴ se obtienen las ecuaciones de Maxwell en el dominio frecuencial:

$$\begin{aligned}
 \nabla \wedge \mathbf{E}_e &= -i\omega \mathbf{B}_e \\
 \nabla \wedge \mathbf{H}_e &= \mathbf{J}_e + i\omega \mathbf{D}_e \\
 \nabla \cdot \mathbf{D}_e &= \rho_v \\
 \nabla \cdot \mathbf{B}_e &= 0
 \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Donde \mathbf{E}_e , \mathbf{H}_e , \mathbf{D}_e , \mathbf{B}_e y \mathbf{J}_e , denotan las partes espaciales de \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} , \mathbf{B} y \mathbf{J} , respectivamente y, a su vez, $\omega = 2\pi f$ representa la frecuencia angular, o pulsación, de las ondas electromagnéticas ($rad \cdot s^{-1}$).

³ Un estudio detallado del análisis de Fourier se expone en el Capítulo 4.

⁴ Lo cual equivale a asumir que la dependencia temporal de los campos EM es armónica.

Así mismo, las relaciones constitutivas (1.1.2) se reescriben de la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_e &= \varepsilon \mathbf{E}_e \\ \mathbf{B}_e &= \mu \mathbf{H}_e \\ \mathbf{J}_e &= \sigma \mathbf{E}_e + \mathbf{J}_e^f\end{aligned}\tag{1.1.5}$$

1.2. Propagación de ondas electromagnéticas

En esta Sección se estudia la propagación de ondas EM, tanto en el interior de medios materiales como en las interfaces entre medios distintos.

1.2.1. Propagación de ondas planas monocromáticas

En esta primera Subsección se estudia la propagación de ondas planas monocromáticas en diversos medios.⁵ Para ello, en primer lugar se consideran medios dieléctricos generales y, posteriormente, se particularizan las expresiones obtenidas para dieléctricos perfectos, el vacío y conductores perfectos.

1.2.1.1. Ondas planas en medios dieléctricos

En medios dieléctricos en los que no hay presentes cargas ni corrientes libres ($\rho_v = 0$, $\mathbf{J}^f = 0$), las ecuaciones de Maxwell (1.1.4) pueden escribirse, teniendo en cuenta las relaciones constitutivas (1.1.5), de la forma:

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \mathbf{E}_e &= -i\omega\mu\mathbf{H}_e \\ \nabla \wedge \mathbf{H}_e &= (\sigma + i\omega\varepsilon)\mathbf{E}_e \\ \nabla \cdot \mathbf{E}_e &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H}_e &= 0\end{aligned}\tag{1.2.1}$$

Tomando nuevamente rotacionales a ambos lados de las dos primeras ecuaciones (1.2.1), se obtiene:

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E}_e &= -i\omega\mu\nabla \wedge \mathbf{H}_e \\ \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{H}_e &= (\sigma + i\omega\varepsilon)\nabla \wedge \mathbf{E}_e\end{aligned}\tag{1.2.2}$$

⁵ Se asume la propagación de ondas planas pues, en el rango de longitudes de onda en que trabaja el geo-radar, es válida la aproximación de grandes distancias para los campos radiados (Cf. §2.3.2.2).

Aplicando en las ecuaciones anteriores la identidad vectorial en coordenadas cartesianas (Harris y Stocker, 1998):

$$\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{V} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V} \quad (1.2.3)$$

Y teniendo en cuenta las dos últimas ecuaciones de Maxwell (1.2.1), se obtienen las Ecuaciones de Ondas:^{6,7}

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E}_e &= \gamma^2 \mathbf{E}_e \\ \nabla^2 \mathbf{H}_e &= \gamma^2 \mathbf{H}_e \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Donde γ denota la **constante de propagación** dada por:

$$\gamma^2 = i\omega\mu(\sigma + i\omega\varepsilon) \quad (1.2.5)$$

Al ser γ una magnitud compleja, es posible descomponerla en forma binómica:

$$\gamma = \alpha + i\beta \quad (1.2.6)$$

Donde las partes real e imaginaria de γ vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left(1 + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2 - 1} \right)} \\ \beta &= \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left(1 + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2 + 1} \right)} \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Sin pérdida de generalidad, se supone que las ondas EM se propagan en la dirección y sentido del eje \overline{OZ} positivo, y que el campo eléctrico únicamente tiene componente no nula en la dirección del eje \overline{OX} . En este caso es posible escribir:

$$\mathbf{E}_e = E_x(z) \cdot \hat{\mathbf{x}} \quad (1.2.8)$$

Donde $E_x(z)$ denota la componente x del campo eléctrico, dependiente de la coordenada z , y $\hat{\mathbf{x}}$ el vector unitario en la dirección y sentido del eje \overline{OX} positivo.

En este caso la solución físicamente aceptable de la Ecuación de Ondas (1.2.4) viene dada por:

$$\mathbf{E}(z, t) = \text{Re} \left[E_x(z) \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{-\gamma z} \cdot \hat{\mathbf{x}} \right] = E_0 \cdot e^{-\alpha z} \cdot \cos(\omega t - \beta z) \cdot \hat{\mathbf{x}} \quad (1.2.9)$$

⁶ Las Ecuaciones de Ondas se deducen como corolario de las Ecuaciones de Maxwell y las relaciones constitutivas de los medios. No todas las soluciones de las Ecuaciones de Onda verifican las Ecuaciones de Maxwell, no siendo éstas últimas físicamente admisibles como solución del problema.

⁷ Estas Ecuaciones de Ondas están definidas en el dominio frecuencial. En la §3.1 se exponen las Ecuaciones de Onda en el dominio natural.

Considerando la expresión para el campo eléctrico \mathbf{E} dada por (1.2.9) y las ecuaciones de Maxwell (1.2.1), se obtiene para el campo magnético \mathbf{H} :

$$\mathbf{H}(z, t) = \text{Re} \left[H_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{-\gamma z} \cdot \hat{\mathbf{y}} \right] \quad (1.2.10)$$

Donde:

$$H_0 = \frac{E_0}{\eta} \quad (1.2.11)$$

Y η denota una cantidad compleja denominada **impedancia intrínseca** del medio (ohm), dada por:

$$\eta = \sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma + i\omega\varepsilon}} \quad (1.2.12)$$

Al ser η una magnitud compleja, es posible descomponerla en forma polar:

$$\eta = |\eta| \cdot e^{i\theta_\eta} \quad (1.2.13)$$

Donde el módulo y la fase de η vienen dados por:

$$|\eta| = \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}} \quad (1.2.14)$$

$$\tan 2\theta_\eta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}, \quad 0 \leq \theta_\eta \leq \frac{\pi}{2}$$

Sustituyendo (1.2.11) y (1.2.13) en (1.2.10) se obtiene para el campo magnético \mathbf{H} :

$$\mathbf{H}(z, t) = \text{Re} \left[\frac{E_0}{|\eta| \cdot e^{i\theta_\eta}} \cdot e^{i\omega t} \cdot e^{-\gamma z} \cdot \hat{\mathbf{y}} \right] = \frac{E_0}{|\eta|} \cdot e^{-\alpha z} \cdot \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) \cdot \hat{\mathbf{y}} \quad (1.2.15)$$

En las expresiones (1.2.9) y (1.2.15) puede apreciarse que, conforme la onda se propaga en la dirección y sentido del eje \overline{OZ} positivo, su amplitud decrece de acuerdo con el factor $e^{-\alpha z}$. Por ello, el parámetro α se denomina **constante de atenuación** del medio ($\text{Np} \cdot \text{m}^{-1}$ ó $\text{dB} \cdot \text{m}^{-1}$)⁸, y es una medida de la tasa espacial de decaimiento de la onda en el medio.

La distancia δ a la cual la amplitud se reduce en un factor e^{-1} , se denomina **penetración nominal** del medio o **efecto superficial**, y viene dada por:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \quad (1.2.16)$$

⁸ Una atenuación de 1 Np equivale a una reducción de e^{-1} el valor original (aproximadamente un 37%). La equivalencia entre nepers y decibelios viene dada por $1 \text{ Np} = 20 \cdot \log_{10} e = 8,686 \text{ dB}$.

Así mismo, el parámetro β es una medida del desplazamiento de la fase por unidad de longitud, y se denomina **constante de fase** (m^{-1}). En términos de β , la velocidad de propagación c y la longitud de onda λ vienen dadas por:

$$c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} \right)}} \quad (1.2.17)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi/\omega}{\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} \right)}}$$

Comparando las expresiones (1.2.9) y (1.2.15) puede apreciarse que, en cualquier instante de tiempo, los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} están desfasados una cantidad θ_η debido a la impedancia intrínseca del medio.

Es posible expresar la tasa entre las magnitudes de las densidades de corriente de conducción y de desplazamiento de la forma:

$$\frac{\|\mathbf{J}_e\|}{\|\mathbf{J}_{de}\|} = \frac{\|\sigma\mathbf{E}_e\|}{\|i\omega\epsilon\mathbf{E}_e\|} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \tan\theta \quad (1.2.18)$$

Donde $\tan\theta$ se denomina **tangente de pérdidas** y θ **ángulo de pérdidas** del medio. De la comparación de (1.2.14) y (1.2.18) se deduce:

$$\theta = 2\theta_\eta \quad (1.2.19)$$

Estos parámetros $\tan\theta$ y θ permiten caracterizar si un medio es o no un buen conductor. Un medio será un dieléctrico perfecto si $\tan\theta$ es muy pequeña o, equivalentemente, $\sigma \ll \omega\epsilon$, y un conductor perfecto si $\tan\theta$ es muy grande o, equivalentemente, $\sigma \gg \omega\epsilon$. Así pues, desde el punto de vista de la propagación de las ondas, el comportamiento de un medio depende no sólo de sus parámetros constitutivos, sino también de la frecuencia de operación.

1.2.1.2. Ondas planas en dieléctricos perfectos

Como ha sido mencionado en la §1.2.1.1, un medio será un dieléctrico perfecto si $\tan \theta$ es muy pequeña o, equivalentemente, $\sigma \ll \omega \varepsilon$. Éste es un caso particular del considerado en dicha Subsección, donde:

$$\begin{aligned}\sigma &\approx 0 \\ \varepsilon &= \varepsilon_r \varepsilon_0 \\ \mu &= \mu_r \mu_0\end{aligned}\tag{1.2.20}$$

Los parámetros adimensionales ε_r y μ_r denotan, respectivamente, la permitividad relativa y permeabilidad relativa del medio, y expresan la permitividad eléctrica y permeabilidad magnética del medio en relación a la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética del vacío, ε_0 y μ_0 respectivamente, cuyos valores se exponen más abajo.

Teniendo en cuenta estos valores, las expresiones obtenidas en la §1.2.1.1 para las constantes de atenuación y fase (1.2.7), el módulo y la fase de la impedancia intrínseca del medio (1.2.14) y la velocidad de propagación y la longitud de onda en el medio (1.2.17), se reescriben de la forma:

$$\alpha = 0, \quad \beta = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}\tag{1.2.21}$$

$$\theta_\eta = 0, \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\tag{1.2.22}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}\tag{1.2.23}$$

1.2.1.3. Ondas planas en el vacío

Éste es un caso particular del considerado en la Subsección anterior, donde $\sigma = 0$ y $\varepsilon_r = \mu_r = 1$, de tal forma que:

$$\begin{aligned}\sigma &= 0 \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1} \\ \mu &= \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}\end{aligned}\tag{1.2.24}$$

Teniendo en cuenta estos valores, las expresiones obtenidas en la §1.2.1.2 para las constantes de atenuación y fase (1.2.21), el módulo y la fase de la impedancia intrínseca del medio (1.2.22) y la velocidad de propagación y la longitud de onda en el medio (1.2.23), se reescriben de la forma:

$$\alpha = 0, \quad \beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{\omega}{c_0} \quad (1.2.25)$$

$$\theta_\eta = 0, \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \eta_0 \quad (1.2.26)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c_0, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (1.2.27)$$

Donde $\eta_0 = 377$ ohm denota la impedancia intrínseca del vacío y $c_0 = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ la velocidad de la luz en el vacío. El hecho de que las ondas EM viajen en el espacio a la velocidad de la luz es significativo, pues muestra que la luz es una manifestación de una onda EM.

1.2.1.4. Ondas planas en conductores perfectos

Como ha sido mencionado en la §1.2.1.1, un medio será un conductor perfecto si $\tan \theta$ es muy grande o, equivalentemente, $\sigma \gg \omega \epsilon$. Éste es un caso particular del considerado en la §1.2.1.1, donde:

$$\begin{aligned} \sigma &\approx \infty \\ \epsilon &= \epsilon_r \epsilon_0 \\ \mu &= \mu_r \mu_0 \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

Teniendo en cuenta estos valores, las expresiones obtenidas en la §1.2.1.1 para las constantes de atenuación y fase (1.2.7), el módulo y la fase de la impedancia intrínseca del medio (1.2.14) y la velocidad de propagación y la longitud de onda en el medio (1.2.17), se reescriben de la forma:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} \quad (1.2.29)$$

$$\theta_\eta = \frac{\pi}{2}, \quad |\eta| = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}} \quad (1.2.30)$$

$$c = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu \sigma}}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (1.2.31)$$

1.2.2. Reflexión y transmisión de ondas planas monocromáticas en el caso de incidencia normal

Cuando una onda plana atraviesa la interfaz que separa dos medios diferentes, es parcialmente reflejada y parcialmente transmitida. La proporción de la onda incidente que es reflejada o transmitida depende de los parámetros constitutivos de ambos medios.

En la presente Subsección, atendiendo a las consideraciones que serán efectuadas en los capítulos siguientes, puesto que el trabajo está referido a observaciones realizadas en la modalidad monoestática (emisor y receptor coincidentes), se asume que la onda plana incidente es normal a la interfaz que limita ambos medios.

Es posible realizar un desarrollo análogo para el estudio de la reflexión y transmisión de ondas planas en incidencia oblicua, teniendo en cuenta en este caso los ángulos de incidencia, reflexión y transmisión. Este desarrollo conduce a la ley de Snell para los ángulos y las leyes de Fresnel para los coeficientes de reflexión y transmisión, y puede consultarse en la §10.9 de Sadiku (1994) y la §18.2 de Reitz et al. (1996), entre otros.

1.2.2.1. Estudio de las amplitudes de los campos: Coeficientes de reflexión y transmisión

Sea una onda plana monocromática que se propaga a lo largo de la dirección y sentido del eje \overline{OZ} positivo, incidente normalmente en la interfaz dada por el plano $z = 0$ que separa el medio 1 ($z < 0$), caracterizado por los parámetros σ_1 , ϵ_1 y μ_1 , y el medio 2 ($z > 0$), caracterizado por los parámetros σ_2 , ϵ_2 y μ_2 , tal como se muestra en la Figura 1-2-1.

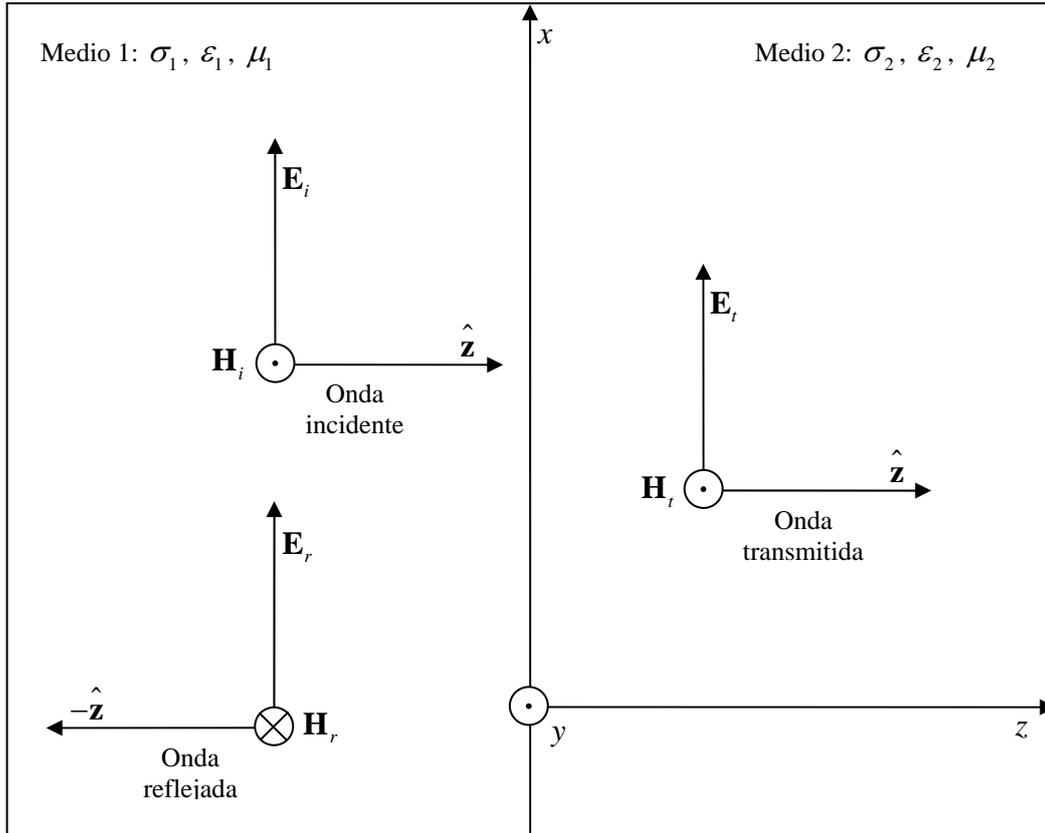


Figura 1-2-1: Ondas planas incidente (subíndice i), reflejada (subíndice r) y transmitida (subíndice t) en la interfaz que separa los medios 1 y 2. El símbolo \odot (vs. \otimes) representa un vector normal al plano de la hoja dirigido hacia el exterior (vs. interior).

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la §1.2.1, la parte espacial del campo eléctrico incidente viene dada por:

$$\mathbf{E}_{ie}(z) = E_{i0} \cdot e^{-\gamma_1 z} \cdot \hat{\mathbf{x}} \quad (1.2.32)$$

De tal forma que la parte espacial del campo magnético incidente viene dada por:

$$\mathbf{H}_{ie}(z) = H_{i0} \cdot e^{-\gamma_1 z} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \frac{E_{i0}}{\eta_1} \cdot e^{-\gamma_1 z} \cdot \hat{\mathbf{y}} \quad (1.2.33)$$

La onda reflejada se propaga en el medio 1, a lo largo de la dirección y sentido del eje \overline{OZ} negativo. Si la parte espacial del campo eléctrico reflejado viene dada por:⁹

$$\mathbf{E}_{re}(z) = E_{r0} \cdot e^{\gamma_1 z} \cdot \hat{\mathbf{x}} \quad (1.2.34)$$

⁹ Se asume que \mathbf{E}_{ei} y \mathbf{E}_{er} tienen la misma dirección y sentido, lo cual equivale a que \mathbf{E}_{ei} , \mathbf{E}_{er} y \mathbf{E}_{et} tengan la misma polarización.

La parte espacial del campo magnético reflejado viene dada por:

$$\mathbf{H}_{re}(z) = -H_{r0} \cdot e^{\gamma_1 z} \cdot \hat{\mathbf{y}} = -\frac{E_{r0}}{\eta_1} \cdot e^{\gamma_1 z} \cdot \hat{\mathbf{y}} \quad (1.2.35)$$

La onda transmitida se propaga en el medio 2, a lo largo de la dirección y sentido del eje \overline{OZ} positivo. Si la parte espacial del campo eléctrico reflejado viene dada por:

$$\mathbf{E}_{te}(z) = E_{t0} \cdot e^{-\gamma_2 z} \cdot \hat{\mathbf{x}} \quad (1.2.36)$$

La parte espacial del campo magnético reflejado viene dada por:

$$\mathbf{H}_{te}(z) = H_{t0} \cdot e^{-\gamma_2 z} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \frac{E_{t0}}{\eta_2} \cdot e^{-\gamma_2 z} \cdot \hat{\mathbf{y}} \quad (1.2.37)$$

Las condiciones en la frontera (1.1.3) implican en este caso que las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético se conservan en la interfaz $z = 0$, luego:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i(0) + \mathbf{E}_r(0) &= \mathbf{E}_t(0) \\ \mathbf{H}_i(0) + \mathbf{H}_r(0) &= \mathbf{H}_t(0) \end{aligned} \quad (1.2.38)$$

Teniendo en cuenta las expresiones para los campos (1.2.32) a (1.2.37), las expresiones anteriores se reescriben de la forma:

$$\begin{aligned} E_{i0} + E_{r0} &= E_{t0} \\ \frac{1}{\eta_1}(E_{i0} - E_{r0}) &= \frac{1}{\eta_2} E_{t0} \end{aligned} \quad (1.2.39)$$

De tal forma que es posible escribir:

$$\begin{aligned} E_{r0} &= \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_{i0} \\ E_{t0} &= \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_{i0} \end{aligned} \quad (1.2.40)$$

Se definen los **coeficientes de reflexión r y de transmisión t** mediante los cocientes:

$$\begin{aligned} r &\equiv \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \\ t &\equiv \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \end{aligned} \quad (1.2.41)$$

Obsérvese que ambos coeficientes son adimensionales, y pueden ser complejos, cumpliendo las propiedades:

$$\begin{aligned} 1 + r &= t \\ 0 \leq |r| &\leq 1 \end{aligned} \quad (1.2.42)$$

En el caso particular en que el medio 2 es un conductor perfecto, $\sigma_2 \approx \infty$ y, por (1.2.30), $\eta_2 \approx 0$. En este caso $r = -1$ y $t = 0$, siendo la onda incidente completamente reflejada.

En la presente Tesis Doctoral se estará interesado en determinar los coeficientes de reflexión y transmisión tanto para ondas que se propagan desde el medio 1 hacia el medio 2, como para ondas que se propagan en sentido contrario, desde el medio 2 hacia el medio 1. Teniendo en cuenta las expresiones (1.2.41), es posible determinar los coeficientes de reflexión y transmisión para el primer caso, que se denotarán como r_{12} y t_{12} , y para el segundo caso, que se denotarán como r_{21} y t_{21} , de la forma:

$$\begin{aligned} r_{12} &= \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} & r_{21} &= \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \\ t_{12} &= \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} & t_{21} &= \frac{2\eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \end{aligned} \quad (1.2.43)$$

Es posible reescribir las expresiones anteriores en términos del coeficiente de reflexión r_{12} , de la forma:

$$\begin{aligned} r_{12} &= \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} & r_{21} &= -r_{12} \\ t_{12} &= 1 + r_{12} & t_{21} &= 1 - r_{12} \end{aligned} \quad (1.2.44)$$

En este desarrollo se han determinado los coeficientes de reflexión y transmisión para el campo eléctrico. Es inmediato obtener los coeficientes correspondientes para el campo magnético, sin más que expresar los campos eléctricos en (1.2.41) en función de los magnéticos, a través de las impedancias, haciendo uso de los resultados obtenidos en la §1.2.1 (Lorenzo, 1994).

1.2.2.2. Estudio de la energía: Reflectancia y transmitancia

En el caso en que no se desee estudiar las amplitudes de los campos, sino la transferencia de la energía asociada a los campos, es posible determinar unas expresiones análogas a (1.2.41), empleándose en lugar de los campos eléctrico y magnético el vector de Poynting ($\mathbf{W} \cdot \text{m}^{-2}$), definido por:

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} \quad (1.2.45)$$

Cuyo módulo representa el flujo de potencia en cada punto asociada al campo EM, en la dirección de propagación del campo. Sustituyendo en la expresión anterior los campos eléctrico y magnético dados respectivamente por (1.2.9) y (1.2.15), haciendo uso de la identidad trigonométrica (Harris y Stocker, 1998):

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)] \quad (1.2.46)$$

Se obtiene para el vector de Poynting la expresión:

$$\mathbf{P} = \frac{E_0^2}{2|\eta|} e^{-2\alpha z} [\cos \theta_\eta + \cos(2\omega t - 2\beta z - \theta_\eta)] \cdot \hat{\mathbf{z}} \quad (1.2.47)$$

El vector de Poynting promedio $\bar{\mathbf{P}}$ es una magnitud de mayor utilidad práctica, y se determina integrando (1.2.47) en el tiempo, a lo largo del periodo $T = 2\pi/\omega$, obteniéndose la expresión (Sadiku, 1994):

$$\bar{\mathbf{P}} = \frac{E_0^2}{2|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos \theta_\eta \cdot \hat{\mathbf{z}} \quad (1.2.48)$$

Es posible definir unos vectores de Poynting promedio correspondientes a las ondas incidente, $\bar{\mathbf{P}}_i$, reflejada, $\bar{\mathbf{P}}_r$, y transmitida, $\bar{\mathbf{P}}_t$, haciendo uso de la expresión anterior. En términos de sus módulos se definen la **reflectancia** R y **transmitancia** T , mediante los cocientes:

$$R \equiv \frac{\bar{P}_r}{\bar{P}_i} = \left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \right)^2 = r^2 \quad (1.2.49)$$

$$T \equiv \frac{\bar{P}_t}{\bar{P}_i} = \frac{4\eta_1\eta_2}{(\eta_2 + \eta_1)^2} = \frac{\eta_1}{\eta_2} t^2$$

Ambos coeficientes son adimensionales y reales, cumpliendo la propiedad:

$$R + T = 1 \quad (1.2.50)$$

Esta identidad es una expresión de la conservación de la energía en la zona interfacial.

1.2.3. Atenuación de ondas electromagnéticas

En la presente Sección se estudian los fenómenos que rigen la propagación de las ondas EM más representativas. Éstos afectan a la energía portada por la señal y, por ello, a las intensidades de las señales registradas en la antena receptora, limitando la aplicación del método.

1.2.3.1. Dispersión de frecuencias

En los desarrollos expuestos en las §§1.2.1 y 1.2.2 se estudia la propagación de ondas monocromáticas. En general, como se verá en la §1.3, los parámetros EM serán función de la frecuencia, de tal forma que la propagación de cada componente de la señal será diferente, y sus aportaciones a la amplitud y fase del impulso resultante variarán a lo largo del desplazamiento a través del medio, y en función de éste (Lorenzo, 1994). Un estudio detallado de este fenómeno puede encontrarse en la obra de Reitz et al. (1996).

1.2.3.2. Dispersión geométrica

La emisión de las ondas de radar se produce en forma de un haz de energía aproximadamente cónico, con sección elíptica, de tal forma que la energía radiada se reparte en una superficie cada vez mayor. En el caso en que el medio por el que se propaga es homogéneo y no absorbente, la reducción de la energía es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia recorrida (Pérez Gracia, 2001). Este fenómeno será tratado en mayor detalle en la §2.2.2, dedicada a la Ecuación del Radar.

1.2.3.3. Enfoque y dispersión en las interfaces

La reflexión en una interfaz que contiene aristas o concavidades puede bien enfocar, bien dispersar la energía, dependiendo de su orientación y la localización de la antena sobre la superficie (Conyers y Goodman, 1997). Este efecto se ejemplifica en la Figura 1-2-2:

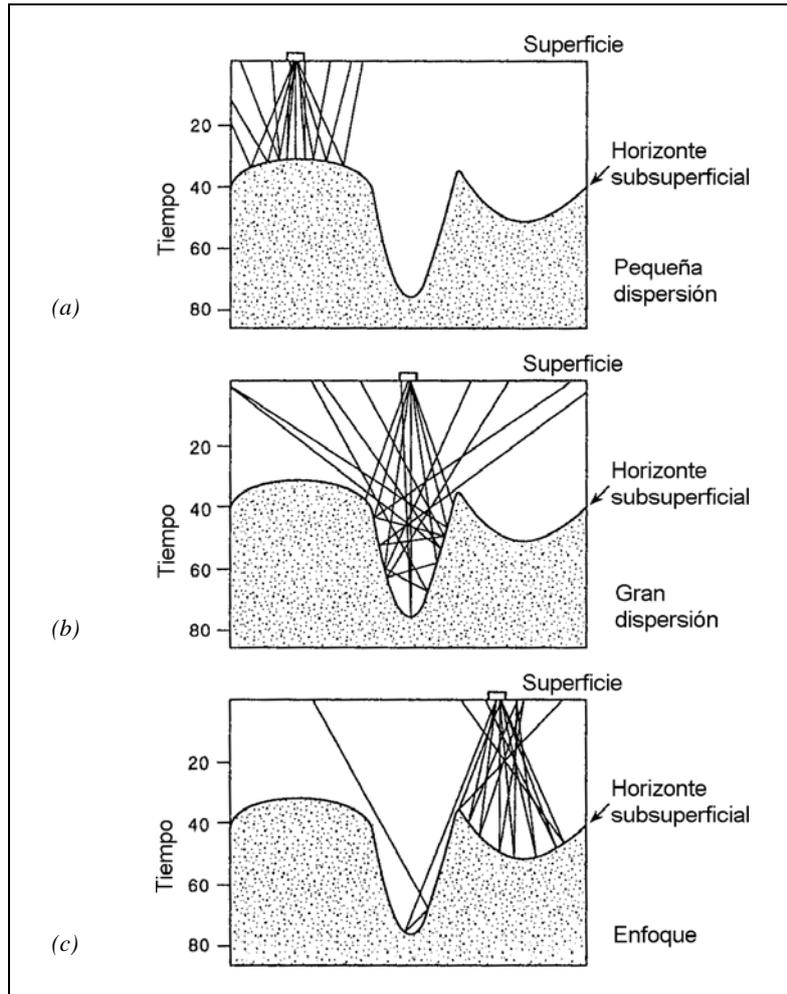


Figura 1–2-2: Sección transversal de una interfaz subsuperficial, ilustrando el enfoque y dispersión en diferentes posiciones de la antena (Conyers y Goodman, 1997).

(a) Cuando la antena está localizada sobre una superficie convexa, se produce una pequeña dispersión.

(b) Cuando la antena está localizada sobre un foso, se produce una gran dispersión, pues las ondas son reflejadas múltiples veces en el interior del foso antes de ser dispersadas fuera de él.

(c) Cuando la antena está localizada sobre una superficie cóncava, se produce un efecto de enfoque.

1.2.3.4. Absorción

En las ecuaciones (1.2.9), (1.2.15) y (1.2.48) puede apreciarse cómo los módulos de los campos eléctrico y magnético y del vector de Poynting promedio decrecen exponencialmente con la distancia recorrida, de acuerdo con la constante de propagación del medio α . Ésta depende, como se aprecia en (1.2.7), de los parámetros EM del medio y de la frecuencia de la radiación. Un estudio detallado de este fenómeno puede encontrarse en la §3.3.2 de Lorenzo (1994) y la §4.2.2 de Pérez Gracia (2001).

1.2.3.5. Dispersión (Scattering)

Este fenómeno se produce cuando la energía electromagnética incide en elementos cuyas dimensiones son del mismo orden de magnitud que la longitud de onda, esto es, cuando las propiedades electromagnéticas del medio¹⁰ cambian en una longitud del orden de la longitud de onda (Born y Wolf, 2002, Capítulo III).

El efecto de la dispersión sobre la señal se manifiesta en una disminución de la amplitud de la onda y la generación de un ruido aleatorio de fondo en el radargrama, debido a las reflexiones en las partículas que producen la aparición de pequeñas ondas propagándose en direcciones aleatorias. Este efecto es más evidente cuando en el estudio se utilizan antenas de más alta frecuencia. (Lorenzo, 1994; Pérez Gracia, 2001)

¹⁰ Las inhomogeneidades del material en el que se propaga la energía o del reflector en el que incide la radiación EM.

1.3. Parámetros electromagnéticos

En el más general de los casos las ecuaciones constitutivas (1.1.2) pueden escribirse en la forma (Ward y Hohmann, 1987):

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \tilde{\varepsilon}(\omega, \mathbf{E}, \mathbf{r}, t, T, P, \dots) \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \tilde{\mu}(\omega, \mathbf{H}, \mathbf{r}, t, T, P, \dots) \cdot \mathbf{H} \\ \mathbf{J} &= \tilde{\sigma}(\omega, \mathbf{E}, \mathbf{r}, t, T, P, \dots) \cdot \mathbf{E}\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

Donde $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\mu}$ y $\tilde{\sigma}$ denotan, respectivamente, los tensores permitividad eléctrica, permeabilidad magnética y conductividad eléctrica, como funciones de la frecuencia angular ω , el campo eléctrico \mathbf{E} , el campo magnético \mathbf{H} , la posición \mathbf{r} , el tiempo t , la temperatura T , la presión P , etc. Cada uno de los tres tensores será complejo en el caso general, permitiendo que las fases de \mathbf{D} y \mathbf{E} , \mathbf{B} y \mathbf{H} , \mathbf{J} y \mathbf{E} sean diferentes. En los problemas de electromagnetismo de aplicación en la Geofísica, se realizan las siguientes asunciones con el objeto de simplificar los análisis:

Todos los medios son lineales, homogéneos e isótropos, y poseen propiedades electromagnéticas que son independientes del tiempo, la temperatura o la presión.

La permeabilidad magnética se asume igual a la del vacío, esto es, $\mu = \mu_0$.

Atendiendo a las precedentes consideraciones, es posible reescribir las relaciones constitutivas en la forma (1.1.2), donde la permitividad eléctrica y conductividad eléctrica pueden ser funciones complejas de la frecuencia angular, de la forma (Ward y Hohmann, 1987; Keller, 1987; Grégoire y Hollender, 2004):

$$\begin{aligned}\varepsilon(\omega) &= \varepsilon'(\omega) - i\varepsilon''(\omega) \\ \sigma(\omega) &= \sigma'(\omega) + i\sigma''(\omega)\end{aligned}\tag{1.3.2}$$

Donde ε' , σ' ; ε'' , σ'' representan, respectivamente, las partes real e imaginaria de la permitividad y la conductividad eléctricas.

Otra posible parametrización de la permitividad eléctrica es la expresada mediante la expresión (Cole y Cole, 1941; Keller, 1987; Zeng et al., 2000):

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_l - \varepsilon_\infty)}{1 + (i\omega/\omega_e)^{\alpha_e}} \quad (1.3.3)$$

Donde ε_0 representa la permitividad eléctrica del vacío, y los cuatro parámetros ε_l , ε_∞ , ω_e y α_e describen la dependencia de la permitividad eléctrica con la frecuencia de la fuente, ω .

En lo que respecta a la conductividad, a las frecuencias a las que opera el geo-radar, puede asumirse que la conductividad toma un valor real independiente de la frecuencia, igual a la conductividad de corriente continua σ_{CC} (Keller, 1987; Xu y McMechan, 1997; Irving y Knight, 2003), de tal forma que:

$$\begin{aligned} \sigma'(\omega) &= \sigma_{CC} \\ \sigma''(\omega) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Estas parametrizaciones no son únicas, sino que existen diferentes alternativas en la literatura (Rappaport y Weedon, 1996; Grandjean et al., 2000; Wang y Oristaglio, 2000. Un compendio de las más representativas puede encontrarse en el artículo de Bano, 1996), incluyendo, en algunos casos, otros efectos como la anisotropía (Carcione y Schoenberg, 2000; Wilson y Thiel, 2002). El estudio detallado de los parámetros electromagnéticos y los mecanismos físicos subyacentes a las distintas parametrizaciones puede encontrarse en las obras de Blakemore (1985), Ibach y Lüth (1996) y Myers (1997), entre otros.

Los valores de los parámetros electromagnéticos pueden ser determinados experimentalmente, mediante ensayos de laboratorio (Pérez Gracia, 2001, Capítulo 10). También es posible estimarlos mediante modelado de trazas de geo-radar (Lorenzo, 1994, Capítulo 7; Pérez Gracia, 2001). Valores típicos pueden encontrarse tabulados en la literatura (Hipp, 1974; Carmichael, 1982 a-b y 1984, entre otros), hallándose tablas recopilatorias de interés para el geo-radar en las obras de Lorenzo (1994) y Pérez Gracia (2001).

Capítulo 2

*Prospección geofísica
con geo-radar*

Introducción

En este segundo Capítulo se describe el equipo de geo-radar, así como su funcionamiento en la fase de adquisición de datos de campo. Este tema es tratado en amplitud en diversas publicaciones, tales como las de Lorenzo (1994), Conyers y Goodman (1997), Daniels (2000), Pérez Gracia (2001), Olhoeft (2003) o Daniels (2004). Así mismo, se describen algunas de las técnicas de procesado de los datos de campo y de conversión del tiempo doble de recorrido en profundidad.

Se encuentra dividido en cinco Secciones dedicadas, respectivamente:

- A la enumeración de sus componentes.
- A una breve descripción de su funcionamiento.
- Al estudio de las antenas, estudiándose sus características físicas, derivándose la Ecuación del Radar y estudiándose la resolución horizontal y vertical del geo-radar.
- A las técnicas de procesado de los datos de campo.
- A la conversión del tiempo doble de recorrido en profundidad.

2.1. Componentes del geo-radar

El geo-radar es un método de Prospección Geofísica de alta resolución basado en la emisión y propagación de ondas electromagnéticas en forma de pulsos de corta duración y en el rango de frecuencias de 10–3000 MHz, y la posterior recepción de las reflexiones en discontinuidades, hábil para el estudio no destructivo de la estructura de la región subsuperficial y la localización de objetos enterrados.

Un equipo de geo-radar consiste, esencialmente, en:

- **Unidad central**

Su función es la de realizar el control y coordinación de las antenas y de la señal emitida, así como coordinar el almacenamiento de la señal en algún tipo de soporte. En ella se selecciona el rango de tiempo de registro y el número de muestras por traza. Estos aspectos serán tratados con mayor detalle en la §2.2, en la que se realiza una breve descripción del funcionamiento del geo-radar.

También permite realizar algún tratamiento básico de las señales durante el proceso de adquisición de datos, o preprocesado (Lorenzo, 1994; Brunzell, 1998; Pérez Gracia, 2001; Roth et al., 2003), disponiéndose de filtros pasa-alto para eliminar parcialmente el ruido, amplificadores de la señal (funciones de ganancia) para facilitar la identificación de las reflexiones más profundas, que llegan con una amplitud más baja, superposición de trazas (stacking) o eliminación automática del ringing. Estos aspectos serán tratados con mayor detalle en la §2.4, dedicada a las técnicas de procesado de las señales de geo-radar.

- **Antenas emisora y receptora**

Están encargadas de emitir impulsos electromagnéticos de corta duración (entre 1 y 10 ns) y captar sus reflexiones en el subsuelo.

A ellas, por su especial influencia en la adquisición de los registros de geo-radar, está dedicada la §2.3.

- **Unidad de almacenamiento y visualización**

Como unidad de almacenamiento y visualización se emplea un ordenador portátil, pudiendo almacenarse los registros bien en la memoria RAM del ordenador, bien en el Disco Duro.

Para la visualización de los registros es preciso seleccionar la frecuencia de la antena y un valor para la permitividad relativa del medio (para determinar un valor aproximado de la velocidad de propagación que permita efectuar la conversión del tiempo doble de recorrido a profundidad). Este aspecto se trata en mayor detalle en la §2.5.

Estos elementos se muestran en la Figura 2-1-1:



Figura 2-1-1: Elementos de un geo-radar.

Fotografías procedentes del sitio web de Radar Systems, Inc. (<http://www.radsys.lv>)

(a) Unidad central de geo-radar Zond-12e. Sobre ella, ordenador portátil para almacenamiento y visualización..

(b) Antena de 2 GHz.

(c) Antena de 500 MHz.

(d) Sistema de antenas de 150-75-38 MHz.

2.2. Breve descripción del funcionamiento del geo-radar

El geo-radar es un dispositivo electrónico complejo. En la Figura 2-2-1 se muestra un esquema simplificado de su estructura:

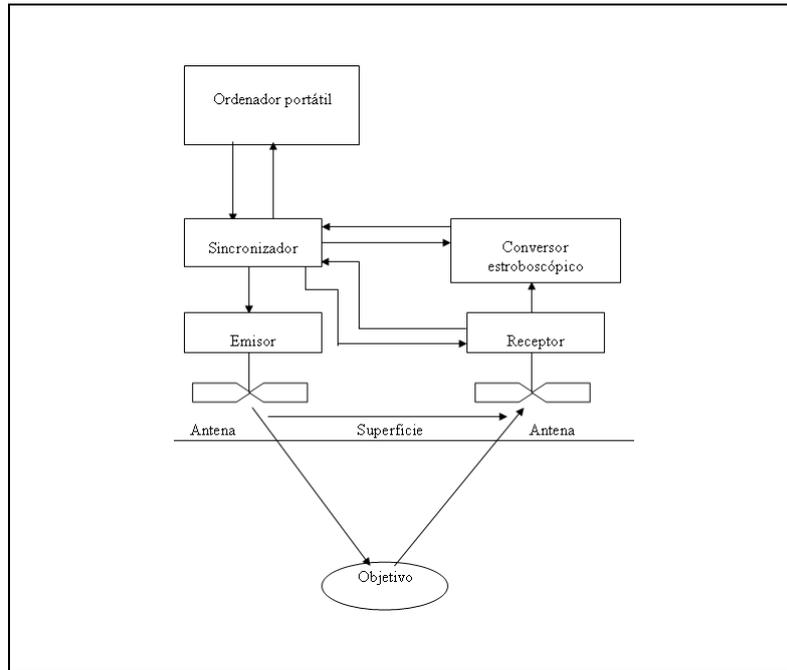


Figura 2-2-1: Estructura esquemática de un geo-radar (Grigoriev y Zelenkov, 2004).

De acuerdo con Lorenzo (1994) la emisión de señales por la antena emisora se coordina en la unidad central mediante un reloj interno (sincronizador) que emite pulsos de entre 1 y 10 ns con una frecuencia de 50 KHz (cada 20 μ s). Cada pulso activa el dipolo o dipolos de la antena, que pasa a emitir con el diagrama de radiación y frecuencia central característicos de cada modelo. La antena emisora radia ondas electromagnéticas con un ciclo y medio, cuya forma aproximada se muestra en la Figura 2-2-2:

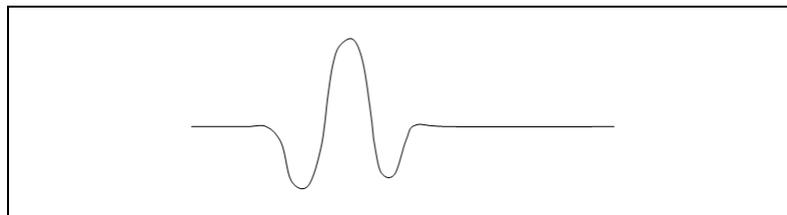


Figura 2-2-2: Forma de la onda electromagnética radiada (Grigoriev y Zelenkov, 2004).

Mientras no emite estos pulsos, la unidad central permanece recibiendo las señales procedentes de los diferentes reflectores presentes en la subsuperficie, registradas en la antena receptora. Además de estas ondas reflejadas, siempre aparecerá una onda directa que recorre la distancia más corta desde la antena emisora hacia la antena receptora. Así pues, la señal de salida consiste en un pulso transmitido, seguido de los pulsos reflejados, como se observa en la Figura 2-2-3.

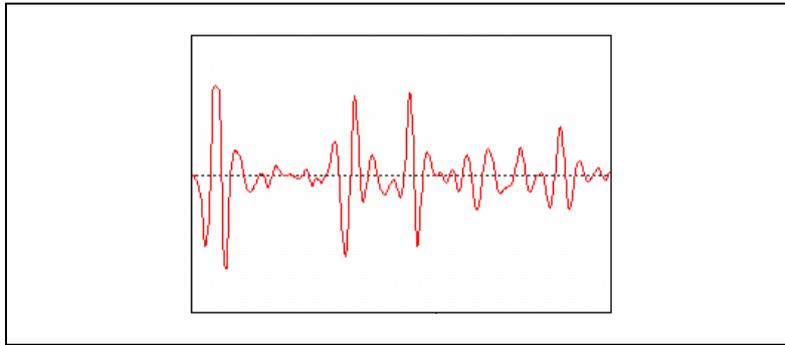


Figura 2-2-3: Ejemplo de la señal de salida. El pulso transmitido se puede observar claramente en el extremo izquierdo del registro (Grigoriev y Zelenkov, 2004).

El proceso de reconstrucción de la señal procedente del receptor es llevado a cabo por un conversor estroboscópico, empleándose una técnica de muestreo con la información recibida, empleándose la misma frecuencia de 50 KHz que en el caso de la emisión.¹

¹ Debido a las características de la señal como función muestreada con soporte acotado, su tratamiento presentará las características que corresponden a este tipo de funciones. Algunas de estas características se expondrán en los capítulos 4 y 5, dedicados respectivamente al formalismo matemático de la transformada de Fourier de funciones muestreadas con soporte acotado y a la interpolación en las transformadas de Fourier mediante métodos alternativos.

2.3. Antenas

Aparte de en las publicaciones citadas en la Introducción del presente Capítulo, las antenas son tratadas con amplitud en publicaciones referidas al radar aeronáutico, como las de Berkowitz (1965) o González y Marcello (2002), así como en publicaciones específicas, como la de Cardama et al. (1998).

En la presente Sección tras la descripción de las características físicas más relevantes, se derivará la Ecuación del Radar, finalizándose con el análisis de la resolución vertical y horizontal.

2.3.1. Tipos de antenas

Se define una antena como aquella parte de un sistema transmisor o receptor diseñada específicamente para radiar o recibir ondas electromagnéticas (IEEE Standard 145-1983). Si bien sus formas son muy variadas, todas las antenas tienen en común el ser una región de transición entre una zona donde existe una onda electromagnética guiada y una onda en el espacio libre, a la que además se puede asignar un carácter direccional (Cardama et al., 1998).

Cada tipo de antena debe escogerse debidamente de acuerdo con las necesidades de su utilización. En la §2.3.2.6 se muestra una clasificación de las antenas en función de su frecuencia. También es posible otra agrupación de las antenas basadas en sus características estructurales:

- **Antenas alámbricas:** Están construidas mediante hilos conductores que soportan las corrientes que dan lugar a los campos electromagnéticos radiados. La disposición y geometría de estos hilos puede ser diversa, pudiendo constituir en hilos rectos, espiras o hélices.
- **Antenas de apertura y reflectores:** La onda radiada se genera gracias a una disposición de campos que se excitan mediante guías de ondas. Este tipo de antenas es muy usual en telecomunicaciones cuando se asocian a algún tipo de reflector, siendo el parabólico el más común.
- **Agrupaciones de antenas:** Engloban todas las asociaciones de antenas que pueden realizarse utilizando cualquier tipo de antena.

En el caso del geo-radar, los hilos se disponen rectos, formando dispositivos dipolares, o bien en forma de espira triangular o mariposa (Lorenzo, 1994; Pérez Gracia, 2001), como puede apreciarse en la Figura 2-3-1:

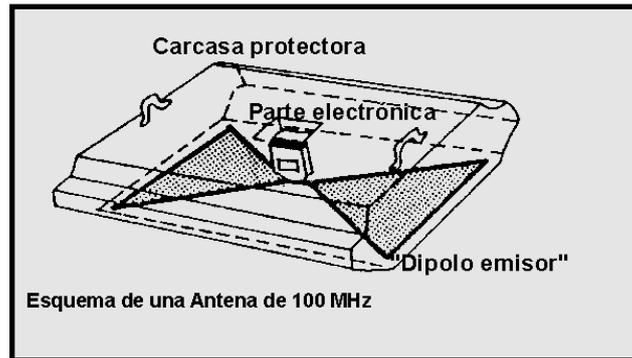


Figura 2–3-1: Esquema de una antena de 100 MHz de "GSSI" (Pérez Gracia, 2001). La espira es del tipo mariposa.

Así mismo, para estudios de geo-radar se realiza otra diferenciación entre antenas, según la posición relativa del transmisor y receptor:

- **Antenas monoestáticas:** En este caso bien se emplea una antena común para emitir y recibir (antenas de conmutación), bien se emplean dos antenas ubicadas en el mismo punto (antenas de dos dipolos).
- **Antenas biestáticas:** En este caso se emplea una antena emisora y una antena receptora, alejadas entre sí.

2.3.2. Características físicas

2.3.2.1. Impedancia y eficiencia

La antena ha de conectarse a un transmisor y radiar el máximo de potencia posible con un mínimo de pérdidas en ella, habiendo ambos de adaptarse para una máxima transferencia de potencia.

A la entrada de la antena puede definirse la **impedancia de entrada**, dependiente en general de la frecuencia, mediante relaciones tensión–corriente en ese punto. Dado que la antena radia energía, hay una pérdida neta de potencia hacia el espacio debida a radiación, que puede ser asignada a una resistencia de radiación R_r , definida como el valor de la resistencia que disiparía la misma potencia que la radiada por la antena. Así mismo, superpuestas a éstas se encuentran las pérdidas que puedan producirse en la antena, habitualmente óhmicas en los conductores. Todas éstas pueden globalizarse en una resistencia de pérdidas R_Ω . La resistencia de entrada es la suma de las de radiación y pérdidas.

La existencia de pérdidas en la antena hace que no toda la potencia entregada por el transmisor sea radiada, por lo que se puede definir la **eficiencia de la antena** η_l , mediante la relación entre la potencia radiada y la entregada o, equivalentemente, entre la resistencia de entrada de esa antena, si hubiera sido ideal (sin pérdidas) y la que presenta realmente:

$$\eta_l \equiv \frac{P_{\text{radiada}}}{P_{\text{entregada}}} = \frac{R_r}{R_r + R_\Omega} \quad (2.3.1)$$

2.3.2.2. Intensidad de radiación y potencia total radiada

La **intensidad de radiación** K se define como la potencia radiada por unidad de ángulo sólido en una determinada dirección ($\text{W}\cdot\text{sr}^{-1}$). A grandes distancias es independiente de la distancia r y sólo depende de los ángulos cenital y acimutal, θ y ϕ . Su relación con el flujo de potencia radiada P es:²

$$K(\theta, \phi) = P(\theta, \phi) \cdot r^2 \quad (2.3.2)$$

La **potencia total radiada** se puede obtener como la integral del flujo de potencia en una superficie esférica que encierra la antena:

$$P_r = \iint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{P}(\theta, \phi) \quad (2.3.3)$$

O bien integrando la intensidad de radiación en todas las direcciones del espacio:³

$$P_r = \iint_{4\pi} d\Omega \cdot K(\theta, \phi) \quad (2.3.4)$$

La intensidad de radiación puede determinarse en términos del **vector de radiación** \mathbf{N} de la forma:

$$K(\theta, \phi) = \frac{\eta}{4\lambda^2} \left(|N_\theta|^2 + |N_\phi|^2 \right) \quad (2.3.5)$$

Donde η representa la impedancia intrínseca del medio, λ la longitud de onda, y N_θ , N_ϕ son las componentes cenital y acimutal del vector de radiación:

² Se corresponde con el módulo del vector de Poynting (Cf. §1.2.2.2).

³ El diferencial de ángulo sólido en coordenadas esféricas viene dado por $d\Omega = dS/r^2 = \sin\phi d\phi d\theta$.

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= (\mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} + (\mathbf{N} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}) \hat{\boldsymbol{\theta}} + (\mathbf{N} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}) \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ &= N_r \hat{\mathbf{r}} + N_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + N_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}\end{aligned}\quad (2.3.6)$$

Definido mediante la expresión:

$$\mathbf{N} \equiv \iiint_{V'} dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot e^{ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} \quad (2.3.7)$$

Donde \mathbf{J} representa el vector densidad de corriente eléctrica, k el número de onda $k = 2\pi/\lambda$, y los parámetros con prima representan los puntos fuente, y los parámetros sin prima los puntos campo, de acuerdo con la Figura 2–3-2.

Estas expresiones son válidas en la aproximación de grandes distancias para los campos radiados (a grandes distancias los campos inducidos son despreciables frente a los radiados). Para ello se asume:

$$kR \gg 1, \quad r \gg r' \quad (2.3.8)$$

Donde $R \equiv \|\mathbf{R}\|$ y $\mathbf{R} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, de acuerdo con la Figura 2–3-2:

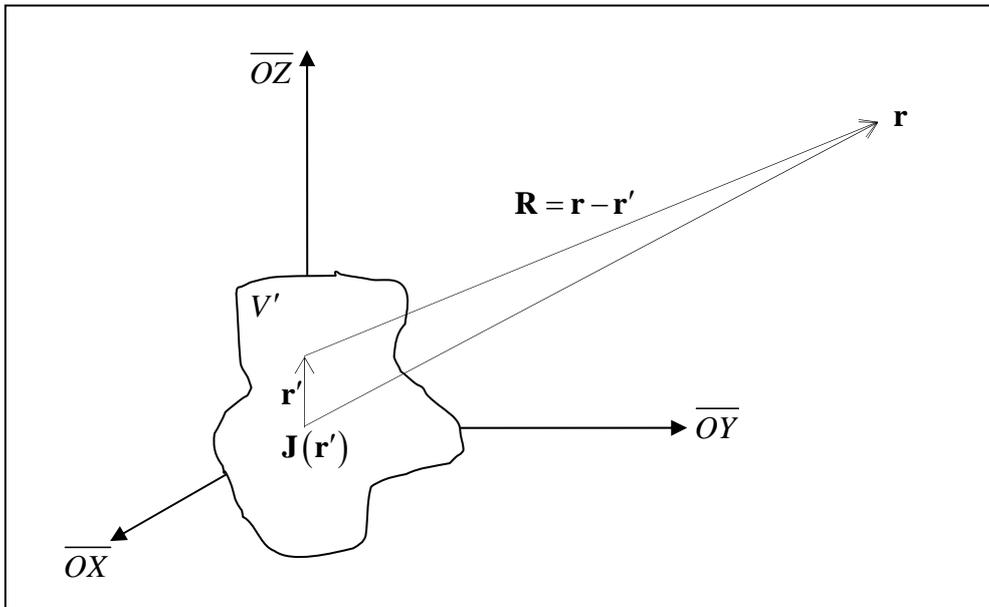


Figura 2–3-2: Sistema de coordenadas con puntos fuente y puntos campo.

2.3.2.3. Diagrama de radiación

El diagrama de radiación es una representación gráfica de las propiedades de radiación de la antena, en función de las distintas direcciones del espacio, a una distancia fija. Se define el **diagrama de radiación normalizado** mediante el cociente:

$$t(\theta, \phi) = \frac{K(\theta, \phi)}{K_{\max}} \quad (2.3.9)$$

Si bien la información de la radiación es tridimensional, puede ser de interés, y en muchos casos suficiente, representar un corte del diagrama. Los más habituales son la representación de t vs. θ para un valor de ϕ constante (denominado patrón vertical o patrón en el plano E) y la representación de t vs. ϕ para el valor $\theta = \pi/2$ (denominado patrón horizontal o patrón en el plano H).

En un diagrama de radiación típico se aprecia una zona en la que la radiación es máxima, a la que se denomina lóbulo principal, y unas zonas que rodean a los máximos de menor amplitud, denominadas lóbulos secundarios. Son parámetros importantes del diagrama de radiación:

- **Ancho de haz a -3 dB:** Separación angular de las direcciones en las que el diagrama de radiación toma el valor mitad del máximo.
- **Relación de lóbulo principal a secundario:** Es el cociente, expresado en dB, entre el valor del diagrama en la dirección del máximo y en la dirección del máximo del lóbulo secundario.
- **Relación delante-atrás:** Es el cociente, también en dB, entre el valor del diagrama en la dirección del máximo y el valor en la dirección diametralmente opuesta.

Se denomina **antena isótropa** a una antena ideal que radie la misma intensidad de radiación en todas las direcciones del espacio. El flujo de potencia que radia una antena isótropa con potencia total P_r a una distancia r puede determinarse mediante la expresión:

$$P(\theta, \phi) = \frac{P_r}{4\pi r^2} \quad (2.3.10)$$

Aunque no existe ninguna antena de estas características, es de gran utilidad para definir los parámetros de las siguientes Subsecciones.

En el caso del geo-radar, el diagrama de radiación se asimila a un cono con sección elíptica, enfocado en la dirección perpendicular a la antena, cuyo eje mayor se encuentra orientado en la dirección de desplazamiento de la misma. Una representación esquemática se muestra más adelante en la Figura 2-3-8.

2.3.2.4. Directividad y ganancia

La **directividad** D de una antena se define como la relación entre el flujo de potencia radiada en una dirección y el flujo de potencia que radiaría una antena isotrópica que radiase la misma potencia que la antena, de acuerdo con (2.3.10), a una distancia dada:

$$D(\theta, \phi) = \frac{P(\theta, \phi)}{P_r / (4\pi r^2)} \quad (2.3.11)$$

Si no se especifica la dirección angular, se sobreentiende que la directividad se refiere a la dirección de máxima radiación:

$$D = \frac{P_{\max}}{P_r / (4\pi r^2)} \quad (2.3.12)$$

Conociendo la directividad máxima D y el diagrama de radiación normalizado $t(\theta, \phi)$, la directividad en cualquier dirección se obtiene mediante el producto de ambos:

$$D(\theta, \phi) = D \cdot t(\theta, \phi) \quad (2.3.13)$$

La **ganancia** de la antena G se define de forma similar a la directividad, pero estableciendo la comparación no con la potencia radiada sino con la potencia entregada a la antena, lo cual permite tener en cuenta las posibles pérdidas en la antena. La ganancia y la directividad están relacionadas, pues, a través de la eficiencia de la antena:

$$G(\theta, \phi) = \eta_i \cdot D(\theta, \phi) \quad (2.3.14)$$

2.3.2.5. Polarización

La polarización de una antena en una dirección es la de la onda radiada por ella en esa dirección. La polarización de una onda es la figura geométrica descrita, al transcurrir el tiempo, por el extremo del vector campo eléctrico en un punto fijo del espacio en el plano perpendicular a la dirección de propagación. Para ondas con variación temporal sinusoidal esa figura es, en general, una elipse, pero hay dos casos particulares de interés: si la figura trazada es un segmento, la onda se denomina linealmente polarizada, y si es un círculo, circularmente polarizada.

2.3.2.6. Ancho de banda y frecuencia nominal

Todas las antenas, debido a su geometría finita, están limitadas a operar en una banda de frecuencias. Este intervalo de frecuencias, en el que un parámetro de antena determinado no sobrepasa unos límites prefijados, se conoce como el **ancho de banda** de la antena. Puede ser definido respecto a múltiples parámetros: diagrama de radiación, directividad, impedancia, etc.

La **frecuencia nominal** de la antena se corresponde con aquella en la que se sitúa el máximo de la distribución de frecuencias. Ésta se sitúa, en general, en el centro de la banda de frecuencias, como se muestra más adelante en la Figura 2-3-8.

La frecuencia de la antena debe escogerse debidamente de acuerdo con las necesidades de su utilización. En la Tabla 2-3-1 se muestra la división del espectro de ondas electromagnéticas para las más altas frecuencias:

Tabla 2-3-1: Denominación de las bandas de frecuencias por décadas (Cardama et al., 1998).

Banda	Frecuencia	Longitud de onda en el vacío	Denominación
ELF	< 3 KHz	> 100 Km	Extremely Low Frequency
VLf	3-30 KHz	100-10 Km	Very Low Frequency
LF	30-300 KHz	10-1 Km	Low Frequency
MF	0,3-3 MHz	1.000-100 m	Medium Frequency
HF	3-30 MHz	100-10 m	High Frequency
VHF	30-300 MHz	10-1 m	Very High Frequency
UHF	0,3-3 GHz	100-10 cm	Ultra High Frequency
SHF	3-30 GHz	10-1 cm	Super High Frequency
EHF	30-300 GHz	10-1 mm	Extremely High Frequency

El geo-radar utiliza bandas de frecuencias situadas aproximadamente entre 10 MHz y 3 GHz, es decir, que trabajan entre las bandas HF y UHF (correspondientes a las radiofrecuencias y microondas).

2.3.2.7. Área efectiva

La antena en recepción extrae potencia del frente de ondas incidente, por lo que presenta una cierta **área efectiva** A_{ef} , definida como la relación entre la potencia que entrega la antena a su carga, y el flujo de potencia de la onda incidente.

Es posible expresar el área efectiva en términos de la directividad de la forma (Cardama et al., 1998):

$$A_{ef}(\theta, \phi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} D(\theta, \phi) \quad (2.3.15)$$

2.3.3. Ecuación de propagación: Ecuación del Radar

La Ecuación del Radar permite determinar la potencia reflejada por un blanco que capta una antena de radar. Supongamos que sobre un reflector, situado a una distancia R_e del emisor, incide una onda. Parte de la potencia de la misma es interceptada y rerradiada hacia el receptor, situado a una distancia R_r del reflector. La situación se muestra en la Figura 2-3-3:

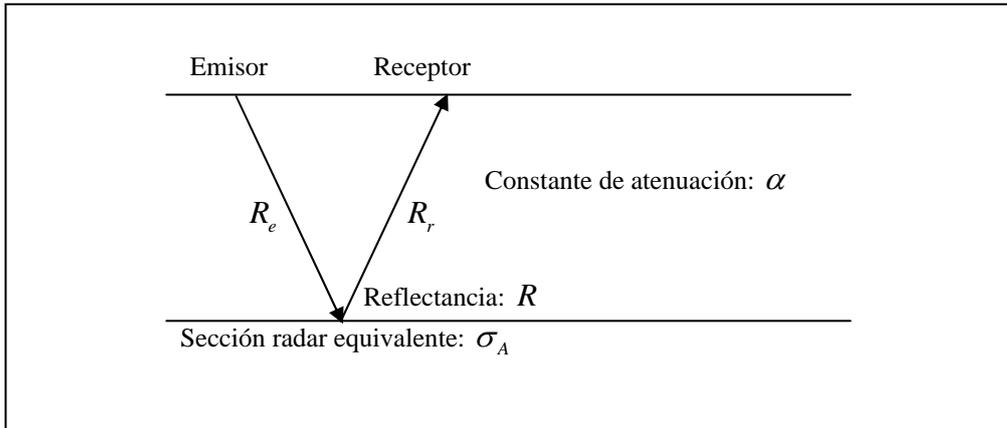


Figura 2-3-3: Diagrama para la determinación de la Ecuación del Radar.

El flujo de potencia radiada desde el emisor se obtendrá multiplicando la que habría producido una antena isotropa por la directividad:

$$\frac{P_r}{4\pi r^2} \cdot D(\theta, \phi) \quad (2.3.16)$$

Esta expresión puede reescribirse en términos de la ganancia, teniendo en cuenta (2.3.14), de la forma:

$$\frac{P_r}{4\pi r^2} \cdot \frac{G(\theta, \phi)}{\eta_e} \quad (2.3.17)$$

Donde η_e y G representan, respectivamente, la eficiencia y la ganancia del emisor. Así mismo, debe tenerse en cuenta que la amplitud de la señal se atenúa con la distancia recorrida de acuerdo con el factor $e^{-\alpha r}$, como se estudió en el Capítulo 1. La caída de potencia dependerá del cuadrado del factor anterior, obteniéndose la expresión:

$$\frac{P_r}{4\pi r^2} \cdot \frac{G(\theta, \phi)}{\eta_e} \cdot e^{-2\alpha r} \quad (2.3.18)$$

El flujo de potencia en el reflector viene dado por la expresión:

$$\frac{P_r}{4\pi R_e^2} \cdot \frac{G_e}{\eta_e} \cdot e^{-2\alpha R_e} \quad (2.3.19)$$

Donde G_e representa la ganancia del emisor en la dirección del reflector. La energía reflejada por el mismo está limitada por la superficie eficaz que presenta al frente de ondas (sección radar equivalente, σ_A) y su reflectancia R , de tal forma que la potencia rerradiada viene dada por:

$$\frac{P_r}{4\pi R_e^2} \cdot \frac{G_e}{\eta_e} \cdot e^{-2\alpha R_e} \cdot \sigma_A \cdot R \quad (2.3.20)$$

En el camino hacia el receptor la potencia se distribuye sobre una superficie esférica y se atenúa de acuerdo con el factor exponencial anteriormente expuesto. Así pues, el flujo de potencia rerradiada viene dada por:

$$\frac{P_r}{4\pi R_e^2} \cdot \frac{G_e}{\eta_e} \cdot e^{-2\alpha R_e} \cdot \sigma_A \cdot R \cdot \frac{1}{4\pi r^2} \cdot e^{-2\alpha r} \quad (2.3.21)$$

Si la antena receptora tiene un área efectiva en la dirección del reflector A_{ef} , la potencia recibida por el receptor viene dada por:

$$P_L = \frac{P_r}{4\pi R_e^2} \cdot \frac{G_e}{\eta_e} \cdot e^{-2\alpha R_e} \cdot \sigma_A \cdot R \cdot \frac{1}{4\pi R_r^2} \cdot e^{-2\alpha R_r} \cdot A_{ef} \quad (2.3.22)$$

Esta expresión puede reescribirse, teniendo en cuenta (2.3.15) y (2.3.14), de la forma:

$$P_L = \frac{P_r}{4\pi R_e^2} \cdot \frac{G_e}{\eta_e} \cdot e^{-2\alpha R_e} \cdot \sigma_A \cdot R \cdot \frac{1}{4\pi R_r^2} \cdot e^{-2\alpha R_r} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \frac{G_r}{\eta_r} \quad (2.3.23)$$

Donde η_r y G_r representan, respectivamente, la eficiencia y la ganancia del receptor en la dirección del reflector. Reorganizando los términos en la expresión anterior, es posible escribir la razón entre la potencia recibida y la potencia radiada, de la forma:

$$\frac{P_L}{P_r} = \left[\frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot \frac{G_r}{\eta_r} \cdot \frac{G_e}{\eta_e} \right] \cdot \frac{e^{-2\alpha(R_e+R_r)}}{(4\pi R_e R_r)^2} \cdot [\sigma_A \cdot R] \quad (2.3.24)$$

Donde se han separado los factores correspondientes al dispositivo, a la propagación y a las características del reflector.

2.3.4. Capacidad de resolución

La resolución se define como la capacidad para diferenciar elementos independientes en el subsuelo, ya sea en la dirección vertical u horizontal. La resolución se ve afectada por los parámetros físicos de los medios que atraviesa la señal, las características técnicas del equipo empleado, e incluso por el tratamiento realizado sobre la señal.⁴

⁴ Por ejemplo, si se realiza un stacking sobre el radargrama para mejorar la relación señal-ruido, la resolución horizontal empeora (Pérez Gracia, 2001).

2.3.4.1. Resolución vertical

La resolución vertical permite conocer la sensibilidad del equipo para diferenciar dos señales adyacentes en el tiempo como dos eventos diferentes y, por ello, como originadas en dos reflectores diferentes.

La resolución vertical puede definirse como el espesor mínimo que es capaz de distinguir el equipo en un modelo de tres capas para la capa intermedia (Lorenzo, 1994), como se muestra en la Figura 2-3-4:

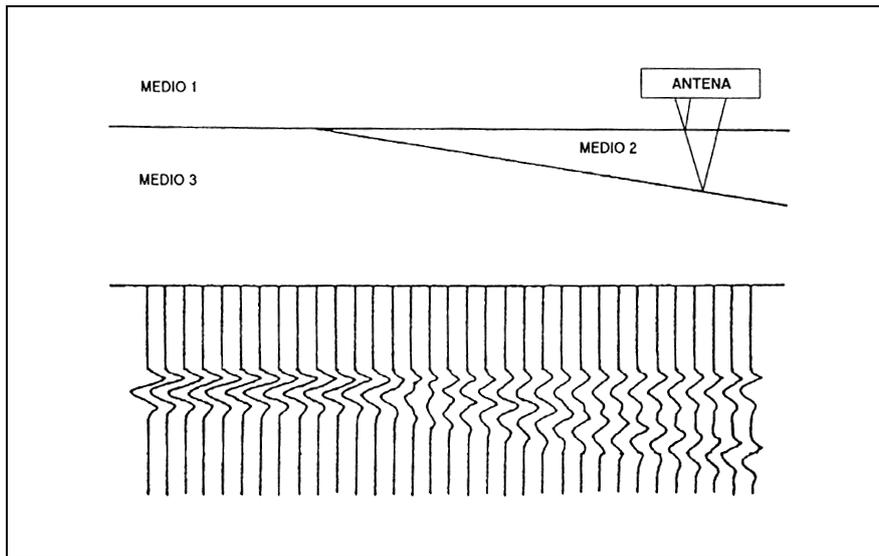


Figura 2-3-4: Representación esquemática del registro obtenido en un modelo de tres capas (Lorenzo, 1994). A partir de un cierto espesor de la capa intermedia pueden diferenciarse dos eventos diferentes.

La resolución vertical depende de la frecuencia de la antena y la duración del pulso. Teniendo en cuenta que para que sea posible resolver la capa intermedia es necesario que en el momento en que la señal originada por la reflexión en la cara inferior alcance la cara superior se haya reflejado la totalidad de la señal primaria, la resolución vertical R_v podrá expresarse de la forma (Lorenzo, 1994):

$$R_v = \frac{v \cdot \Delta t}{2} \quad (2.3.25)$$

Donde v representa la velocidad de propagación de las ondas en el medio y Δt la duración del pulso. Este resultado se muestra en la Figura 2-3-5:

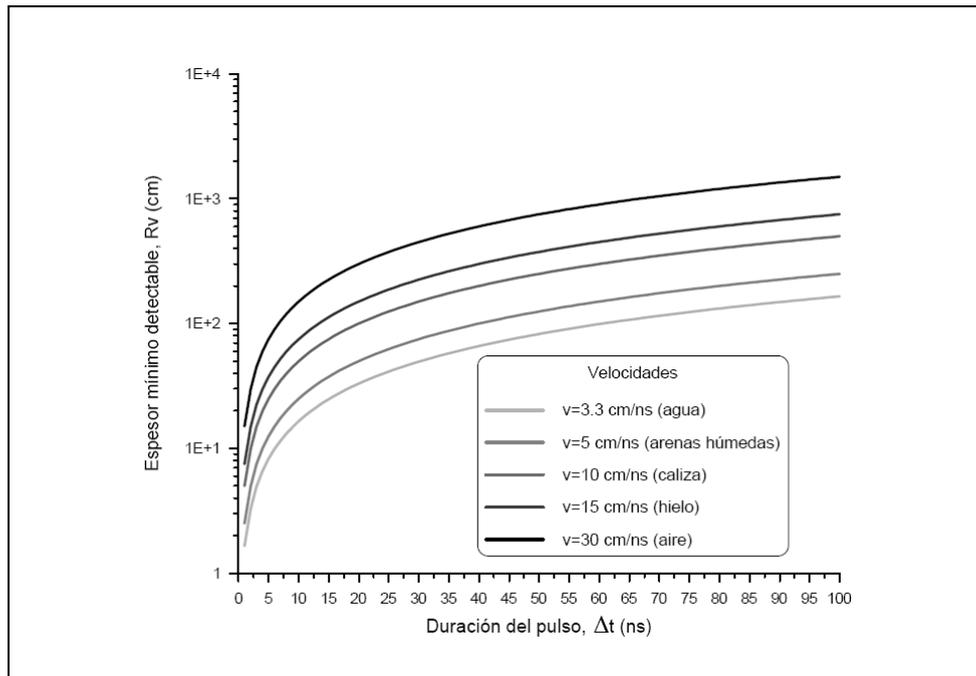


Figura 2–3-5: Resolución vertical vs. duración del pulso para diferentes valores de la velocidad de propagación (Pérez Gracia, 2001).

Bajo ciertas condiciones es posible resolver reflectores separados una distancia menor que R_v . Esto puede ocurrir en el caso de que la amplitud de la segunda reflexión sea mucho mayor que la de la primera (por ejemplo, cuando el medio 3 de la Figura 2–3-4 sea metálico). En otras ocasiones, es posible separar las señales superpuestas siempre que se conozca la forma de la señal emitida y si la superposición se produce en el primer cuarto de ciclo de la primera señal reflejada (Lorenzo, 1994).

La resolución vertical del equipo puede mejorarse, teniendo en cuenta la expresión anterior, bien aprovechando la presencia de medios con una baja velocidad de propagación, bien empleando antenas con un pulso de menor duración.

No obstante, una disminución de la longitud del pulso Δt lleva asociado un incremento del ancho de banda del haz Δf , tal como se muestra en la Figura 2–3-6, pues ambas magnitudes se encuentran ligadas por la relación:

$$\Delta t \cdot \Delta f = 1 \quad (2.3.26)$$

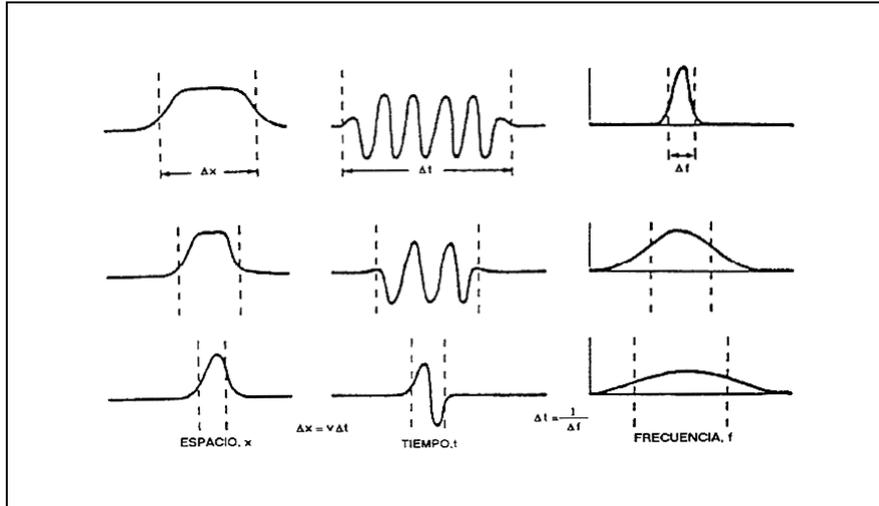


Figura 2-3-6: Relación entre la longitud del pulso y el ancho de banda (Lorenzo, 1994).

Así pues, una reducción de la longitud del pulso en un cierto factor, conlleva un incremento del ancho de banda de acuerdo con el mismo factor. Puesto que el centro de frecuencias de dicha banda corresponde aproximadamente a la frecuencia de la señal en el medio, esto conduce a la necesidad de aumentar el centro de frecuencias de emisión, limitándose pues la penetración de la señal en la subsuperficie.

En la práctica la resolución vertical es algo inferior a la dada por (2.3.25), debido a que el ancho de banda del equipo es tal que distorsiona los pulsos (González y Marcello, 2002), tal como puede apreciarse en la Figura 2-3-7:

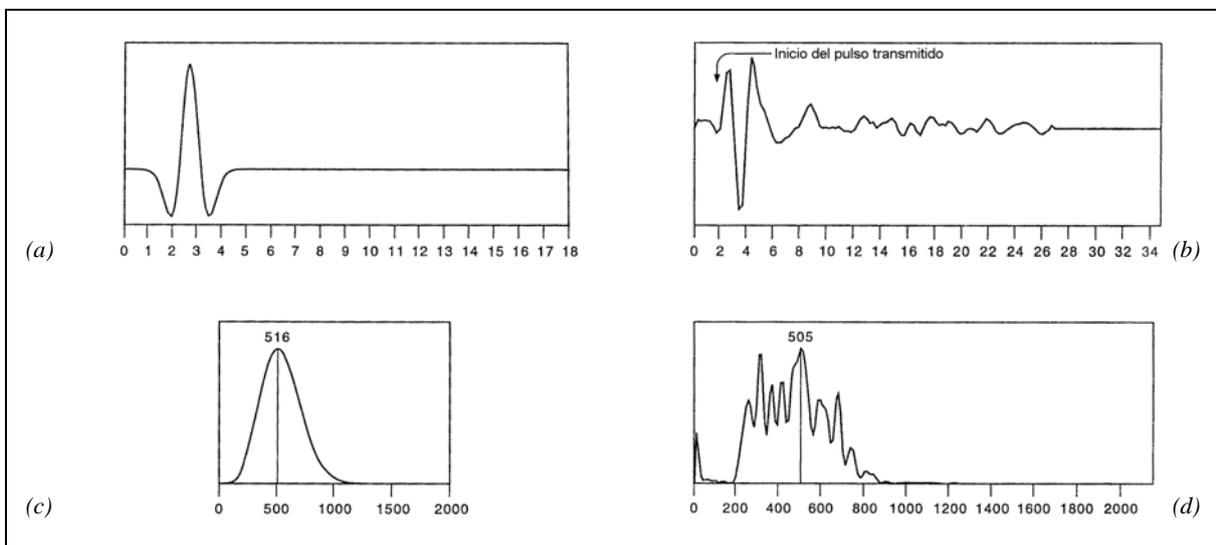


Figura 2-3-7: Pulso transmitido y distribución de frecuencias correspondiente a una antena de 500 MHz (Conyers y Goodman, 1997).

(a) Pulso ideal, en función del tiempo (ns).

(b) Pulso real, en función del tiempo (ns).

(c) Distribución de frecuencias (Hz) del pulso ideal (a). Centro de frecuencias en 516 MHz.

(d) Distribución de frecuencias (Hz) del pulso real (b). Centro de frecuencias en 505 MHz.

2.3.4.2. Resolución horizontal

La resolución horizontal permite conocer la sensibilidad del equipo para diferenciar dos señales adyacentes en el espacio (en el mismo tiempo) como originadas por elementos separados.

Existen diferentes criterios para definir la resolución horizontal. Lorenzo (1994) considera que un elemento de dimensiones finitas queda resuelto cuando el número de trazas que lo alcanza nt es suficientemente grande, pues si este número es demasiado pequeño, estas trazas quedarán recogidas en el radargrama como ruidos. Este número de trazas puede determinarse mediante la expresión:

$$nt = \phi \cdot \frac{2z}{v_a} \quad (2.3.27)$$

Donde z representa la profundidad del elemento, v_a la velocidad de arrastre de la antena sobre la superficie y ϕ el número de trazas registradas en la unidad de tiempo que puede seleccionarse en la unidad central durante el proceso de adquisición de datos.

La expresión anterior ha sido determinada suponiendo que la semianchura del lóbulo principal es un ángulo de 45° (Pérez Gracia, 2001). Esta expresión podría modificarse empleando el criterio de Conyers y Goodman (1997), que emplean la huella elíptica definida por la intersección entre el cono de radiación de la antena⁵ y la superficie reflectora, como se muestra en la Figura 2-3-8, a que se asigna una longitud:

$$A = \frac{\lambda}{4} + \frac{z}{\sqrt{1 + \epsilon_m}} \quad (2.3.28)$$

Donde λ representa la longitud de onda de la radiación, z la profundidad del reflector y ϵ_m la permitividad relativa promedio de los materiales presentes entre la superficie y el reflector.

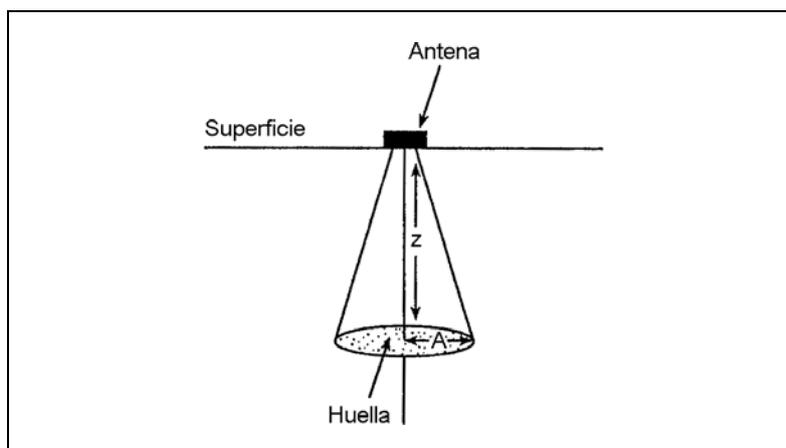


Figura 2-3-8: Cono de radiación de un geo-radar (Conyers y Goodman, 1997), donde A representa el semieje mayor de la huella elíptica y z , la profundidad desde la superficie.

⁵ Cf. diagrama de radiación en la §2.3.2.3.

Pérez Gracia (2001, §4.3) recoge otro criterio para determinar la resolución horizontal, considerando que la primera zona de Fresnel describe el área mínima detectable, de tal forma que los rasgos del medio con dimensiones menores no son detectables. Por ejemplo, en un suelo húmedo en el que se propaga la onda con una velocidad de $0,06 \text{ m}\cdot\text{ns}^{-1}$, el radio de la primera zona de Fresnel es de 43 cm si se utiliza una antena de 500 MHz y la superficie reflectora está a 1,5 m de la antena. Esto indica que se pueden detectar elementos de diámetro medio mayores de 90 cm (Pérez Gracia, 2001, §4.4.2).

2.4. Técnicas de procesamiento de los datos de campo

Los datos brutos obtenidos durante el proceso de adquisición contienen, junto a las señales que son relevantes para la investigación que se está realizando, otras señales espurias que constituyen un ruido superpuesto a las señales de relevancia.⁶ Así mismo, estos datos no se encuentran atribuidos, usualmente, a las profundidades o escalas horizontales apropiadas. El objeto de la fase de procesamiento es resolver estos inconvenientes y, en definitiva, mejorar la relación-ruido⁷ y resaltar los eventos para su reconocimiento (Dascalu y Franti, 2003).

Este tema es tratado en amplitud en diversas publicaciones, tanto desde el punto de vista del desarrollo teórico (Sheriff y Geldart, 1983; Sheriff, 1989; Teldorfd et al., 1990; Haizhong y Xiaojian, 1997; Zoubir et al., 2002; Xia et al., 2003) como del de la aplicación práctica (Conyers y Goodman, 1997; Pérez Gracia, 2001, Capítulo 7; Neal, 2004).

En los siguientes apartados se describen algunas de las técnicas de procesamiento más relevantes para el procesamiento de los datos de campo.⁸ Todas ellas pueden encontrarse en diferentes paquetes informáticos de carácter comercial, modificaciones, en general, de aquellos diseñados para la prospección sísmica.⁹

2.4.1. Visualización de los registros

Pese a no poder considerarse, en sentido estricto, una técnica de procesamiento, una conveniente representación de los datos puede ayudar a identificar adecuadamente las estructuras que se desea detectar. Entre las distintas formas de representación de los datos cabe señalar:

- **Sucesión de trazas de amplitud (wiggle-plot):** Se representan las trazas en sucesión, tal cual han sido obtenidas a lo largo del perfil.
- **Mapa de color:** Se asignan diferentes colores a diferentes bandas de amplitud relativa del perfil.

⁶ En el caso del radar, se refiere a las señales no deseadas, constituyentes del ruido, con la denominación genérica de clutter, literalmente “desperdicios” (González y Marcello, 2002, Capítulo 5; Daniels, 2004, §2.4). Cf. clutter en la §8.2.5.

⁷ Donde por señal se refiere al tipo de elementos que se desea observar en los datos y por ruido al resto (Sheriff, 1989).

⁸ Otras técnicas menos habituales son descritas en la §8.2.5.

⁹ Por ejemplo, Sun y Young (1995) refieren el software de pulseEKKO, desarrollado por Sensors & Software, Inc.; Grandjean y Durand (1999) desarrollan el software Radar Unix, referido por Grandjean et al. (2000); Sénéchal et al. (2000) refieren a Stratimagic, desarrollado por CGG-Petrosystems; Pérez Gracia (2001) y Rashed et al. (2003) refieren el software Radan, para el geo-radar de GSSI; Witten (2002) desarrolla el software Geophysica; Grigoriev y Zelenkov (2004) describen el software Prism, para el geo-radar Zond de Radar Systems, Inc.; Rucker y Ferré (2004) desarrollan el software BGPR_Reconstruct; Sandmeier (2004) describe el software Reflexw, desarrollado por Sandmeier Scientific Software.

Los perfiles pueden ser exagerados en las direcciones vertical u horizontal, la paleta de color puede ser determinada por el usuario, incrementándose o decrementándose el contraste de la imagen, con objeto de remarcar ciertos aspectos de la estratigrafía o la presencia de elementos subsuperficiales (Conyers y Goodman, 1997).

Así mismo, es posible aplicar a los perfiles una función de ganancia a lo largo de cada traza, amplificándose eventos asociados con reflexiones profundas, o poco energéticas, aumentando las amplitudes que, por su pequeño tamaño, no serían tenidas en cuenta durante la interpretación de los registros (Pérez Gracia, 2001, Capítulo 7).

2.4.2. Remuestreo o interpolación en el eje espacial

Este procedimiento se aplica para corregir las variaciones en la velocidad de arrastre de la antena durante el proceso de adquisición de datos, siendo el objetivo la obtención de un registro con trazas igualmente espaciadas (Granjean et al., 2000; Grigoriev y Zelenkov, 2004).

2.4.3. Filtros espaciales

Estos procedimientos se aplican en la dirección espacial del registro, siendo el objetivo la eliminación de la señal del fondo. Este ruido puede ser de alta frecuencia, generado al deslizar la antena por una superficie irregular, o de baja frecuencia, ocasionado por un reflector externo.

Estos filtros pueden ser:

- **Filtro pasa baja:** Consiste en la determinación del promedio de varias trazas consecutivas, siendo la salida del filtro la traza promedio.
- **Filtro pasa alta:** Consiste en la determinación del promedio de varias trazas consecutivas, siendo la salida del filtro la diferencia entre la traza central y la traza promedio.

Otro tipo de filtro horizontal para la eliminación de la señal de fondo es aquel que elimina el bandeo horizontal presente en algunos registros de geo-radar.

El proceso de eliminación consiste en restar a cada traza la traza promedio de todo el perfil. La traza promedio contendrá únicamente las señales horizontales de carácter sistemático, de tal forma que el perfil filtrado contendrá únicamente las reflexiones no horizontales, o aquellas reflexiones horizontales de corta longitud.

Es preciso ser cuidadoso en la aplicación de este tipo de filtros, pues si se emplea en registros correspondientes a regiones de la subsuperficie con estratigrafía horizontal o casi horizontal, podría perderse casi toda la información correspondiente a las reflexiones (Conyers y Goodman, 1997).

2.4.4. Filtros temporales

Estos procedimientos se aplican en la dirección temporal del registro, siendo el objetivo la eliminación del ruido presente en cada traza.

Estos filtros pueden ser:

- **Pasa baja:** Consiste en la eliminación de las señales con frecuencia superior a la esperada.
- **Pasa alta:** Consiste en la eliminación de las señales de baja frecuencia, consideradas como ruido del sistema.
- **Pasa banda y supresión de banda:** Combinaciones de los anteriores.

En la aplicación de estos filtros es conveniente realizar un estudio de frecuencias previo y posterior a la misma, con objeto de comprobar que se ha realizado correctamente y no ha sido perdida información útil (Pérez Gracia, 2001, Capítulo 7).

2.4.5. Corrección estática

Este tratamiento tiene por objetivo corregir los efectos que se producen sobre un registro a consecuencia de la topografía de la superficie o debido a variaciones bruscas de la velocidad en el medio. Si no se consideraran estas dos circunstancias, podrían producirse errores importantes en la interpretación de los registros (Pérez Gracia, 2001, §7.7.1).

2.4.6. Deconvolución

La deconvolución es una técnica basada en el hecho de que, conforme la señal del radar es transmitida en la subsuperficie, la onda electromagnética cambia de forma por el efecto de diversos agentes, de tal forma que la señal registrada es el resultado de la convolución de la señal original con los filtros que caracterizan cada uno de estos agentes. El propósito de este tipo de metodologías es eliminar de la señal registrada los efectos de los agentes no deseados, mediante la convolución de la misma con su filtro inverso (Sheriff y Geldart, 1983; Conyers y Goodman, 1997; Pérez Gracia, 2001, §7.6.1; Xia et al., 2003).

2.4.7. Migración

Los registros de geo-radar contienen una imagen distorsionada de la estratigrafía y elementos subsuperficiales (Conyers y Goodman, 1997). Estas distorsiones están causadas por las reflexiones producidas en superficies inclinadas, por difracciones en elementos puntuales o discontinuidades laterales, y la variación de la velocidad de propagación de la onda en el medio, especialmente en el caso de variaciones laterales de velocidad (Pérez Gracia, 2001, §7.6.2).

El propósito de esta técnica es facilitar la interpretación de los radargramas, trasladando a su posición real los efectos de inclinación de las reflexiones registradas y colapsando las hipérbolas de difracción al punto de la subsuperficie en que fueron originadas.

2.4.8. Superposición de trazas (Stacking)

El stacking consiste en la construcción de un registro mediante la combinación de trazas (Sheriff, 1984). Este procedimiento se emplea para mejorar la relación señal–ruido cuando éste es aleatorio, pues la superposición de varias trazas hace que los efectos debidos a fenómenos aleatorios (incoherentes) se reduzcan, realizándose los eventos coherentes. Hay que tener en cuenta que este procedimiento empeora la resolución horizontal del estudio (Pérez Gracia, 2001).

2.4.9. Corrección del normal moveout (NMO)

El normal moveout es un término que refiere a la variación del tiempo de llegada de las reflexiones debido a la distancia entre emisor y receptor. Es el tiempo adicional requerido por la energía para viajar desde el emisor al reflector y de éste a un receptor situado a una cierta distancia del emisor, comparado con el tiempo que se obtendría si el receptor estuviera situado en la posición del emisor (Sheriff, 1984).

2.5. Conversión tiempo doble de recorrido–profundidad

Los registros de geo-radar se muestran en función del tiempo doble de recorrido (el correspondiente al viaje de las ondas electromagnéticas desde la antena emisora al reflector, y desde el reflector hasta la antena receptora). El interés de la investigación se situará en relacionar el tiempo doble de recorrido en el que aparece una determinada señal con la profundidad a la que se encuentra el elemento que la origina. Esta conversión de tiempo doble de recorrido a profundidad puede establecerse mediante el conocimiento de la velocidad a la que viajan las ondas electromagnéticas en el interior de la subsuperficie (Conyers y Goodman, 1997).

En la determinación de la distribución de velocidades en el interior de la subsuperficie pueden emplearse diversas técnicas, algunas de las cuales son descritas en las siguientes Subsecciones. Un estudio detallado puede encontrarse en la obra de Pérez Gracia (2001, Capítulo11).

2.5.1. Métodos de onda reflejada (reflected–wave methods)

Están basados en la identificación en los perfiles de geo-radar de reflexiones originadas por objetos o zonas de interés situadas a profundidades conocidas. Estos métodos permiten la determinación directa de la velocidad de propagación promedio en la región comprendida desde la superficie hasta dicha profundidad.

Pueden emplearse diversas técnicas (Conyers y Goodman, 1997):

- **Test de la barra:** Consiste en la introducción de una barra metálica por el lateral de una excavación, y su identificación en el perfil de geo-radar.
- **Test del muro:** Es análogo al anterior, empleándose en la identificación la cara superior de un muro enterrado, uno de cuyos extremos ha sido expuesto en una excavación.
- **Correlación estratigráfica:** Incorpora la información derivada de la medición de la velocidad mediante los test anteriores para ayudar en la identificación de reflexiones generadas por los horizontes expuestos en sondeos.

En estas técnicas las señales registradas tendrán la forma de una hipérbola, siendo posible determinar la velocidad de propagación de las ondas en el medio a partir de su ecuación.

2.5.2. Métodos de onda directa (direct-wave methods)

Aunque no tan precisos como los métodos de onda reflejada, estas técnicas proporcionan métodos adicionales para determinar la velocidad de las ondas. En estos métodos las antenas están separadas, encontrándose el material a testar entre ambas. El tiempo que las ondas tardan en alcanzar la antena receptora desde la antena emisora puede determinarse experimentalmente, de tal forma que, si la distancia entre ambas antenas es conocida, la velocidad puede ser calculada.

Pueden emplearse diversas técnicas (Conyers y Goodman, 1997; Pérez Gracia, 2001, §5.4.4):

- **Transiluminación:** Este método es aplicable en medios donde hay dos superficies paralelas en las que se pueden situar las antenas (muros, emplazamientos arqueológicos donde se encuentran dos excavaciones próximas, redes de túneles o minas con dos túneles paralelos, etc.). Las antenas emisora y receptora se ubican en superficies diferentes, dirigidas la una hacia la otra. Una de las antenas permanece fija, mientras la otra se desplaza a lo largo de la superficie opuesta. La posición de ambas antenas y la distancia existente entre ambas debe ser conocida en todo momento, de tal forma que se puede conocer la velocidad de propagación de las ondas para cada una de estas posiciones.
- **Punto medio común (Common Midpoint, CMP):** Se realiza colocando las antenas emisora y receptora juntas en la superficie, separándolas paulatinamente en sentidos opuestos respecto a un punto central equidistante a ambas.¹⁰ El registro tiene la forma de una hipérbola en el caso en que hay presente un único reflector bajo el punto medio, siendo posible determinar la velocidad de propagación de las ondas en el medio a partir de la ecuación de dicha hipérbola.¹¹

2.5.3. Ensayos de laboratorio

En algunas ocasiones pueden extraerse muestras de las distintas unidades de que consta la región subsuperficial (por ejemplo, mediante un sondeo mecánico o en el transcurso de una excavación arqueológica), de tal forma que es posible determinar experimentalmente los valores de la permitividad eléctrica, permeabilidad magnética y conductividad eléctrica. Estas mediciones pueden ser utilizadas para estimar la velocidad y la atenuación que les caracteriza. (Conyers y Goodman, 1997; Pérez Gracia, 2001, Capítulo 10).

¹⁰ Existen diversas variaciones de este método, por ejemplo, manteniendo una antena fija mientras la otra se separa de ella a lo largo de una línea recta.

¹¹ En general, si la geometría de la región subsuperficial puede ser deducida (de tal forma que sean conocidos los recorridos de las distintas señales), puede ser determinada la velocidad de las capas más próximas a la superficie.

Capítulo 3

*Diseño de algoritmos basados
en la transformada de Fourier
para la inversión y síntesis
de radargramas*

Introducción

En este tercer Capítulo se efectúa el desarrollo de algoritmos para la síntesis numérica e inversión de radargramas, tanto en dos dimensiones (perfiles) como en tres dimensiones (cubos). Para ello se resuelve el Problema Inverso, empleándose una metodología paralela a la expuesta por Stolt (1978) para la migración de perfiles sísmicos, mediante la resolución de la Ecuación de Ondas escalar en el dominio frecuencial. Este desarrollo se particulariza y amplía para la propagación de ondas electromagnéticas, discutiéndose las simplificaciones necesarias para la obtención de un algoritmo operativo. La resolución del Problema Directo se logra mediante la inversión de los algoritmos correspondientes al Problema Inverso.

Esta técnica permite determinar los efectos ondulatorios (difracción), pero no permite tener en cuenta la presencia de reflexiones múltiples. En la resolución del Problema Directo éstas serán obtenidas mediante la introducción, previa a la aplicación de los algoritmos correspondientes, de una colección de reflectores ficticios asociados a cada reflexión múltiple. En la resolución del Problema Inverso, en cambio, no se procederá a la eliminación de las múltiples. Estos aspectos serán discutidos en el Capítulo 6, dedicado a la implementación de los algoritmos.

El presente Capítulo se encuentra dividido en tres Secciones dedicadas, respectivamente:

- A la exposición de las ecuaciones que rigen la propagación del campo electromagnético y la Ecuación de Ondas para el geo-radar.
- Al planteamiento y resolución del Problema Inverso.
- A la exposición, a modo de compilación, de los principales resultados obtenidos, tanto para la resolución del Problema Inverso como la del Problema Directo.

Así mismo, se incluyen dos Anexos dedicados, respectivamente:

- A la exposición de algunos elementos de Cálculo Diferencial.
- A la resolución de la Ecuación de Ondas en el dominio frecuencial en un caso más general, en el que emisor y receptor no son coincidentes.

3.1. Propagación del campo electromagnético: Ecuación de Ondas

Tal como fue expuesto en el Capítulo 1, dedicado a lo fundamentos de la teoría electromagnética, la propagación del campo electromagnético (EM) en el interior de medios lineales, homogéneos e isotropos está descrita por las ecuaciones de Maxwell (1.1.1) y las relaciones constitutivas (1.1.2).¹

En el caso del geo-radar la densidad de corriente asociada a la fuente del campo EM, \mathbf{J}^f , es la antena emisora. Puesto que la detección del campo EM en la antena receptora comienza una vez finalizada la emisión en la antena emisora, ésta se efectúa en unas condiciones tales que $\mathbf{J}^f = 0$ en todo punto del espacio (Lorenzo, 1994; Pérez Gracia, 2001).

Teniendo en cuenta esta consideración, y operando en las Ecuaciones de Maxwell (1.1.1) de forma análoga a como se operó en la §1.2.1,² es posible escribir las Ecuaciones de Onda para los campos eléctrico y magnético en el dominio espacial de la forma (Ward y Hohmann, 1987; Chen y Huang, 1998):

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{xx} + \mathbf{E}_{yy} + \mathbf{E}_{zz} &= \mu\epsilon\mathbf{E}_{tt} + \mu\sigma\mathbf{E}_t \\ \mathbf{H}_{xx} + \mathbf{H}_{yy} + \mathbf{H}_{zz} &= \mu\epsilon\mathbf{H}_{tt} + \mu\sigma\mathbf{H}_t\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

Donde los subíndices denotan derivación respecto de las variables indicadas, definidas en la Subsección siguiente.

De acuerdo con Chen y Huang (1998), se considerará el campo EM como la superposición de los modos ortogonales transversal eléctrico y transversal magnético (modos TE y TM).

Es preciso tener en cuenta que las antenas emisora y receptora de un geo-radar están formadas por dipolos de media onda, caracterizados por radiar un campo EM máximo en la dirección perpendicular al plano del dipolo y nulo en éste. Los dipolos emisor y receptor están orientados de tal forma que la dirección del campo eléctrico \mathbf{E} de ambos sea paralela, y perpendiculares a la dirección de cada perfil (Lorenzo, 1994). En el caso en que las antenas son dipolos eléctricos, la señal registrada en la antena receptora es el campo eléctrico; mientras que en el caso en que las antenas son dipolos magnéticos, la señal registrada es el campo magnético (Cardama et al, 1998).

¹ Aquí aparece la primera de las aproximaciones que se consideran en el desarrollo:

Se considera que los medios que constituyen la región subsuperficial son lineales, homogéneos e isotropos.

² Donde se dedujeron las Ecuaciones de Onda los campos eléctrico y magnético en el dominio frecuencial.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, así como la similitud formal de las ecuaciones (3.1.1), se está interesado en la resolución de la Ecuación de Ondas escalar (Chen y Huang, 1998):

$$\psi_{.xx} + \psi_{.yy} + \psi_{.zz} = \mu\epsilon\psi_{.tt} + \mu\sigma\psi_{.t} \quad (3.1.2)$$

Donde ψ representa la componente no nula del campo eléctrico, en el caso de dipolos eléctricos, o la componente no nula del campo magnético, en el caso de dipolos magnéticos.

3.2. Resolución del Problema Inverso

3.2.1. Planteamiento y notación

Sea $(O; \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ un sistema de referencia, donde el origen O se sitúa sobre la superficie de la Tierra, el eje \overline{OZ} (con vector unitario $\hat{\mathbf{z}}$) se sitúa en la dirección de la vertical, con sentido positivo hacia el interior de la Tierra, y los ejes \overline{OX} y \overline{OY} (con vectores unitarios $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$ respectivamente) se sitúan sobre la superficie, ortogonales con \overline{OZ} y entre sí, como se muestra en la Figura 3-2-1.

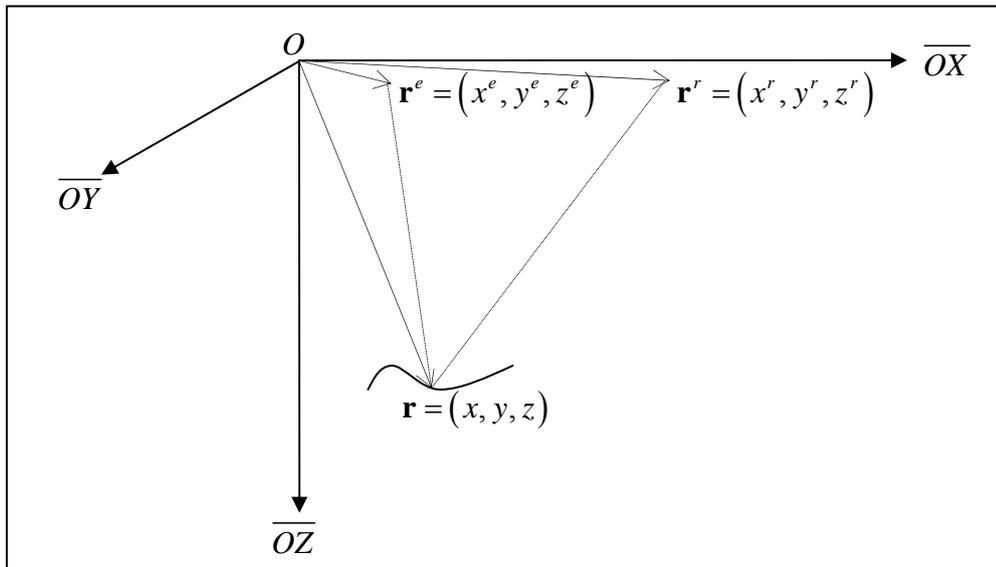


Figura 3-2-1: Sistema de coordenadas. Los vectores \mathbf{r}^e y \mathbf{r}^r denotan, respectivamente, la posición del emisor y el receptor; \mathbf{r} denota la posición de un punto genérico de la subsuperficie.

De acuerdo con Stolt (1978), se considera que cada traza representa, medida sobre un punto de la superficie, la amplitud de una de las componentes del campo eléctrico o magnético en función del tiempo. Ésta se representa mediante una función escalar ψ , que se considera que depende de las posiciones del emisor, $\mathbf{r}^e = (x^e, y^e, z^e)$, y receptor, $\mathbf{r}^r = (x^r, y^r, z^r)$, y del tiempo, que se denota:

$$\psi \equiv \psi(x^e, y^e, z^e; x^r, y^r, z^r; t) \quad (3.2.1)$$

De tal forma que un perfil está constituido por un conjunto de trazas medidas a lo largo de un segmento de línea sobre la superficie, y un cubo por un conjunto de trazas medidas sobre una superficie. De aquí en adelante se referirá a ambos casos con el nombre genérico de **SECCIÓN**.

Obsérvese que en este planteamiento únicamente se tiene en cuenta la existencia simultánea de un único emisor y un único receptor. Al definirse la SECCIÓN como un conjunto de trazas, cada una de éstas corresponde al campo propagado desde un emisor y registrado por el receptor asociado a éste.

El objetivo del presente Capítulo es hallar la relación entre esta función escalar (3.2.1) y la distribución de reflectividad de la región subsuperficial, dada por una función escalar R función de la posición $\mathbf{r} = (x, y, z)$, y cuya dependencia angular es obviada.

Esta distribución de reflectividad R se estima como el valor de la función ψ que se observaría en cada punto, en el caso en que emisor y receptor se aproximan hacia el punto \mathbf{r} de la subsuperficie, haciéndose cero el tiempo de recorrido; de tal forma que (Claerbout, 1971; Stolt, 1978):³

$$R(x, y, z) \approx \psi(x, y, z; x, y, z; 0) \quad (3.2.2)$$

De aquí en adelante se referirá al conjunto de trazas (3.2.1) que determinan una SECCIÓN como **SECCIÓN MEDIDA**, y se denotará ψ^{SM} ; y al conjunto de valores (3.2.2) que caracterizan la región subsuperficial como **DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD**, y se denotará ψ^{DR} .

3.2.2. Cambios de variable y transformaciones de la Ecuación de Onda en el dominio natural

Obsérvese que, en el más general de los casos, la SECCIÓN MEDIDA (3.2.1) depende de siete parámetros y la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD (3.2.2) de tres. Con el objeto de reducir el número de grados de libertad del problema y facilitar su resolución, se realizan sucesivas aproximaciones al Problema Inverso planteado:

- En un primer paso se considera la superficie constituida por un plano horizontal. Así mismo, las posiciones del emisor y del receptor son coincidentes.
- En un segundo paso, se considera que la velocidad de propagación es constante en todo el medio.

³ Este formalismo supone que:

■ *Los reflectores están constituidos por elementos difractores puntuales.*

De tal forma que cada uno de ellos, una vez es alcanzado por la radiación EM, se convierte a su vez en emisor de radiación (Claerbout, 1971; Stolt, 1978; Zeng et al., 1995). La implementación del modelo, desarrollada en el Capítulo 6, está de acuerdo con esta consideración.

- En un tercer paso se elimina parcialmente la aproximación anterior, considerándose que la velocidad de propagación sólo varía con la coordenada de profundidad.

Con el objeto de expresar estas aproximaciones de forma sencilla, se realizan sucesivos cambios de variable que obligan a efectuar en la Ecuación de Ondas sendas transformaciones, que son desarrolladas en los siguientes apartados.

3.2.2.1. Primera transformación

Como ha sido mencionado anteriormente, esta primera transformación responde a la expresión de las aproximaciones:

Se considera que la superficie está definida por el plano horizontal $z = 0$, de tal forma que $z^e \approx 0$, $z^r \approx 0$.

Se considera que emisor y receptor son coincidentes, de tal forma que $x^e \approx x^r$, $y^e \approx y^r$.

La primera aproximación tiene sentido en muchas aplicaciones en las que emisor y receptor se mueven sobre una superficie plana o poco curvada (suelo asfaltado u hormigonado, paredes, etc.), no siendo así cuando se mueven sobre superficies rugosas o con ondulaciones muy pronunciadas. En todo caso, siempre será posible efectuar un filtrado espacial o una corrección estática por la topografía,⁴ previa al tratamiento de los datos de campo, para corregir este efecto.

La segunda aproximación es mucho más restrictiva, pues el emisor y el receptor no son coincidentes en la mayoría de aplicaciones, salvo cuando se opera en modalidad monoestática. Fuera de esta modalidad de operación, esta aproximación tendrá sentido en los casos en que la profundidad de exploración sea mucho mayor que la distancia relativa receptor–emisor, o en los casos en que se efectúe una superposición de trazas (stacking),⁵ previamente al tratamiento de los datos de campo, bajo la consideración de que las secciones obtenidas serán equivalentes a las secciones normales (Stolt, 1978).

La adecuación de estas aproximaciones dependerá de la cuantificación de la ondulación de la superficie y la separación receptor–emisor, y deberá ser evaluada en cada caso concreto. Los resultados obtenidos bajo estas aproximaciones serán discutidos en los capítulos 7 y 8, dedicado a la aplicación de los algoritmos diseñados en el presente Capítulo.

⁴ Cf. §§2.4.3 y 2.4.5.

⁵ Cf. §2.4.7.

(1) Cambio de variables

En el sistema $(x^r, y^r, z^r; x^e, y^e, z^e; t)$ se efectúa el cambio de variables:

$$\left. \begin{matrix} \mathbf{r}^r \\ \mathbf{r}^e \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \mathbf{R} \equiv \frac{\mathbf{r}^r + \mathbf{r}^e}{2} \\ \mathbf{r}^{re} \equiv \frac{\mathbf{r}^r - \mathbf{r}^e}{2} \end{matrix} \right. \quad (3.2.3)$$

De tal forma que $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ representa la posición del centro del dispositivo y $2\mathbf{r}^{re} = 2(x^{re}, y^{re}, z^{re})$ la posición relativa receptor-emisor. Téngase en cuenta que, en la mayor parte de aplicaciones se trabaja en la modalidad en que emisor y receptor se mueven simultáneamente a lo largo de la SECCIÓN, de tal forma que \mathbf{r}^{re} permanece constante.

En este nuevo sistema, la función ψ expuesta en (3.2.1) se reescribe de la forma:

$$\chi(X, Y, Z; x^{re}, y^{re}, z^{re}; t) \equiv \psi(x^e, y^e, z^e; x^r, y^r, z^r; t) \quad (3.2.4)$$

Bajo la primera de las aproximaciones anteriormente expuestas, $z^e \simeq 0$, $z^r \simeq 0$, de tal forma que la SECCIÓN MEDIDA (3.2.1) y la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD (3.2.2) se reescriben, respectivamente, de la forma:

$$\begin{aligned} \chi^{SM}(X, Y, 0; x^{re}, y^{re}, 0; t) &= \psi^{SM}(x^e, y^e, 0; x^r, y^r, 0; t) \\ \chi^{DR}(X, Y, Z; 0, 0, 0; 0) &= \psi^{DR}(x, y, z; x, y, z; 0) \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Bajo la segunda de las aproximaciones anteriormente expuestas, $X \simeq x^e$, $Y \simeq y^e$; $x^{re} \simeq 0$, $y^{re} \simeq 0$. Teniendo en cuenta este resultado, la SECCIÓN MEDIDA (3.2.1) y la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD (3.2.2) se reescriben, respectivamente, de la forma:

$$\begin{aligned} \chi^{SM}(X, Y, 0; 0, 0, 0; t) &= \psi^{SM}(x^e, y^e, 0; x^e, y^e, 0; t) \\ \chi^{DR}(X, Y, Z; 0, 0, 0; 0) &= \psi^{DR}(x, y, z; x, y, z; 0) \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Obsérvese que la posición del centro del dispositivo coincide con la posición del punto, y la posición relativa receptor-emisor es el vector cero, al ser ambos coincidentes.

Tras estas aproximaciones, una vez efectuado el cambio de variables, se ha reducido el número de grados de libertad del problema a cuatro, correspondientes a las variables $(X, Y, Z; t)$, presentes tanto en la SECCIÓN MEDIDA como en la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD.

(2) Transformación de la Ecuación de Ondas

Dado el cambio de variables (3.2.3), es preciso modificar la Ecuación de Ondas (3.1.2) para transformar las derivadas respecto de las variables antiguas y expresarlas en términos de derivadas respecto de las nuevas variables. Este cambio de derivadas se efectúa teniendo en consideración los resultados de cálculo diferencial expuestos en el Anexo A del presente Capítulo (Cf. 3.A). Así pues, teniendo en cuenta las expresiones para el cambio de variables en las derivadas parciales expuestas en (3.A.1) y (3.A.4) se obtiene, para el cambio expuesto en (3.2.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^r} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{re}}, & \frac{\partial}{\partial x^e} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{re}} \\ \frac{\partial}{(\partial x^r)^2} &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial X \partial x^{re}} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{(\partial x^{re})^2}, & \frac{\partial}{(\partial x^e)^2} &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial X \partial x^{re}} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{(\partial x^{re})^2} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Obteniéndose expresiones análogas para el resto de coordenadas y^r , y^e , z^r , z^e .

Se propone una nueva aproximación:

Se desprecian las derivadas parciales respecto a x^{re} , y^{re} , z^{re} .

Stolt (1978) considera difícil de justificar esta aproximación, cuya necesidad tiene un carácter meramente operativo. En el caso que se está tratando en esta Tesis Doctoral, es preciso tener en cuenta que, bajo las aproximaciones anteriormente realizadas, estas variables han sido fijadas a cero en todo el dominio de estudio, de tal forma que carece de sentido tener en cuenta las derivadas parciales respecto de éstas.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, así como el resultado expuesto en (3.2.7), en este nuevo sistema la Ecuación de Ondas escalar (3.1.2) se reescribe de la forma:

$$\chi_{xx} + \chi_{yy} + \chi_{zz} = 4\mu\epsilon\chi_{tt} + 4\mu\sigma\chi_t \quad (3.2.8)$$

Obsérvese que, en general, los coeficientes presentes en el segundo miembro de la Ecuación de Ondas escalar (3.2.8) no son constantes, pues pueden depender de las coordenadas de posición X , Y y Z . La resolución de la misma se simplifica notablemente en el caso en que éstos son constantes, lo cual motiva las siguientes transformaciones expuestas en la §3.2.2.2 y la §3.2.2.3.

3.2.2.2. Segunda transformación

Esta segunda transformación responde a la expresión de las aproximaciones:

Se considera que los parámetros electromagnéticos son constantes en todo el medio.

El emisor es una fuente de radiación monocromática.

Estas aproximaciones equivalen a considerar que la velocidad de propagación, dada por (3.2.10), es constante en todo el medio. Esto carece de sentido físico en términos estrictos, puesto que la existencia de reflectores se ve condicionada a la presencia de discontinuidades en los parámetros electromagnéticos del medio y, por ello, en la velocidad de propagación. No obstante, hay autores (p.e. Zeng et al., 1995) que consideran que esta aproximación es aplicable en diversos casos, citándose el caso de rocas ígneas donde la compactación diferencial respecto a la profundidad no es significativa, o terrenos calcáreos. Éste no es el caso que se da en la mayor parte de las aplicaciones; no obstante, será tenida en cuenta con el objeto de simplificar convenientemente el presente desarrollo, y será parcialmente eliminada en la tercera transformación expuesta en la §3.2.2.3.

(1) Cambio de variables

En el sistema $(X, Y, Z; t)$ se efectúa el cambio de variables:

$$\left. \begin{matrix} Z \\ t \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} d \equiv Z \\ D \equiv \frac{c_m \cdot t}{2} + d = \frac{c_m \cdot t}{2} + Z \end{matrix} \right. \quad (3.2.9)$$

Donde c_m representa la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el medio, dada por (1.2.17):

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_m \varepsilon_m}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_m}{\omega \varepsilon_m} \right)^2} \right)}} \quad (3.2.10)$$

Donde μ_m , ε_m , σ_m representan, respectivamente, la permeabilidad magnética, permitividad eléctrica y conductividad eléctrica constantes y, a su vez, $\omega = 2\pi f$ representa la frecuencia angular, o pulsación, de las ondas electromagnéticas ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$).

Obsérvese que la velocidad de propagación dependería de la posición, a través de los parámetros electromagnéticos del medio, y de cada frecuencia contenida en la emisión de la

antena. Únicamente en medios no conductores, al ser la conductividad nula, desaparece la dependencia de la frecuencia, y la velocidad de propagación se expresa de la forma:

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{\mu_m \epsilon_m}} \quad (3.2.11)$$

En este nuevo sistema la variable d sustituye a la profundidad Z , y la variable D representa el doble del promedio entre la profundidad real y la profundidad asociada al tiempo doble de recorrido. Este cambio carece de sentido físico, y se introduce con el objeto de simplificar la posterior resolución de la Ecuación de Ondas en el dominio frecuencial.⁶

La función χ expuesta en (3.2.4) se reescribe de la forma:

$$\phi(X, Y, d, D) \equiv \chi(X, Y, Z; 0, 0, 0; t) \quad (3.2.12)$$

Teniendo en cuenta esta aproximación, la SECCIÓN MEDIDA y la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD expuestas en (3.2.6) se reescriben, respectivamente, de la forma:

$$\begin{aligned} \phi^{SM}(X, Y, 0, D) &= \phi^{SM}\left(X, Y, 0, \frac{c_m \cdot t}{2}\right) = \chi^{SM}(X, Y, 0; 0, 0, 0; t) \\ \phi^{DR}(X, Y, D, D) &= \phi^{DR}(X, Y, Z, Z) = \chi^{DR}(X, Y, Z; 0, 0, 0; 0) \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Tras esta aproximación, una vez efectuado el cambio de variables, se ha reducido el número de grados de libertad del problema a tres, correspondientes a las variables (X, Y, D) , presentes tanto en la SECCIÓN MEDIDA como en la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD.

(2) Transformación de la Ecuación de Ondas

Dado el cambio de variables expuesto en (3.2.9), es preciso modificar nuevamente la Ecuación de Ondas (3.2.8) para transformar las derivadas respecto de las variables antiguas y expresarlas en términos de derivadas respecto de las nuevas variables. Teniendo en cuenta las expresiones para el cambio de variables en las derivadas parciales expuestas en (3.A.1) y (3.A.4) se obtiene:

⁶ En la siguiente Subsección, donde se elimina parcialmente la aproximación, cobrará sentido la definición de las nuevas variables d y D .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Z} &= \frac{\partial}{\partial d} + \frac{\partial}{\partial D}, & \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{c_m}{2} \frac{\partial}{\partial D} \\ \frac{\partial^2}{\partial Z^2} &= \frac{\partial^2}{\partial d^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial d \partial D} + \frac{\partial^2}{\partial D^2}, & \frac{\partial}{\partial t^2} &= \frac{c_m^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial D^2} \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Así pues, es posible reescribir en este nuevo sistema la Ecuación de Ondas escalar (3.2.8) de la forma:

$$\phi_{XX} + \phi_{YY} + \phi_{dd} + 2\phi_{dD} + \phi_{DD} = \mu_m \varepsilon_m c_m^2 \phi_{DD} + 2\mu_m \sigma_m \phi_D \quad (3.2.15)$$

Teniendo en cuenta el valor de la velocidad de propagación c_m expuesto en (3.2.10), es posible reescribir esta ecuación de la forma:

$$\phi_{XX} + \phi_{YY} + \phi_{DD} + 2\phi_{Dd} + \phi_{dd} = 2 \left(\frac{1}{f^2} \phi_{DD} + \frac{g}{f} \phi_D \right) \quad (3.2.16)$$

Donde han sido definidas:

$$f(\omega) \equiv \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_m}{\omega \varepsilon_m} \right)^2}}, \quad g \equiv \sigma_m \sqrt{2 \frac{\mu_m}{\varepsilon_m}} \quad (3.2.17)$$

Obsérvese que los coeficientes presentes en la Ecuación de Ondas escalar (3.2.16) son constantes, lo que simplifica notablemente su resolución. Esta expresión de la Ecuación de Ondas escalar será la empleada en la §3.2.3 para determinar la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD conocida la SECCIÓN MEDIDA.

3.2.2.3. Tercera transformación

Esta tercera transformación responde a la eliminación parcial de las aproximaciones efectuadas en la §3.2.2.2, introduciéndose la aproximación menos restrictiva:

Se considera que los parámetros electromagnéticos de los medios sólo varían con la coordenada de profundidad Z .

Esta aproximación equivale a considerar que la velocidad de propagación sólo varía con la coordenada de profundidad Z , lo que permite estudiar medios constituidos por estratificaciones horizontales. Los resultados obtenidos bajo esta aproximación serán discutidos en los capítulos 7 y 8, dedicados a la aplicación de los algoritmos diseñados en el presente Capítulo.

(1) Cambio de variables

En el sistema $(X, Y, Z; t)$ se efectúa el cambio de variables:

$$\left. \begin{matrix} Z \\ t \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d \equiv \int_0^Z \frac{c_m}{c} dZ \\ D \equiv \frac{c_m \cdot t}{2} + d = \frac{c_m \cdot t}{2} + \int_0^Z \frac{c_m}{c} dZ \end{array} \right. \quad (3.2.18)$$

Donde $c = c(Z)$ representa la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el medio, dependiente de la coordenada de profundidad Z , y c_m una velocidad de propagación promedio, que se definirá de forma conveniente en el punto siguiente.

Obsérvese que la definición de las nuevas variables d y D expuesta en (3.2.18) es similar a la expuesta en (3.2.9) para la §3.2.2.2, exceptuando lo que respecta a la variable d .⁷ En el caso en que la velocidad de propagación es constante en todo el medio y no depende de la frecuencia, $c(Z) = c_m$, este cambio de variables se reduce al expuesto en (3.2.9), reduciéndose el problema expuesto en la presente Subsección al expuesto en la Subsección anterior.

La definición de la variable D es tal que los tiempos dobles de recorrido que se obtienen con esta coordenada y la velocidad de propagación promedio c_m coinciden con las que se determinarían con la profundidad Z y la velocidad de propagación $c = c(Z)$. Este resultado se ejemplifica en la Figura 3–2-2.

⁷ En esta Subsección la definición de esta variable cobra sentido físico, pues se define en forma similar a como se define la altura geopotencial en Física Atmosférica (Holton, 1992):

$$Z = \int_0^z \frac{g}{g_0} dz$$

Donde $g = g(z)$ representa la aceleración de la gravedad, dependiente de la coordenada de altura z , y g_0 el valor medio de la gravedad en el nivel medio del mar. En el caso de la Física Atmosférica, este cambio se realiza para eliminar la dependencia de la gravedad con la altura en la Ecuación de Conservación del Momento Lineal; en este caso, el cambio se realiza para posibilitar la eliminación la dependencia de la velocidad de propagación con la profundidad en la Ecuación de Ondas.

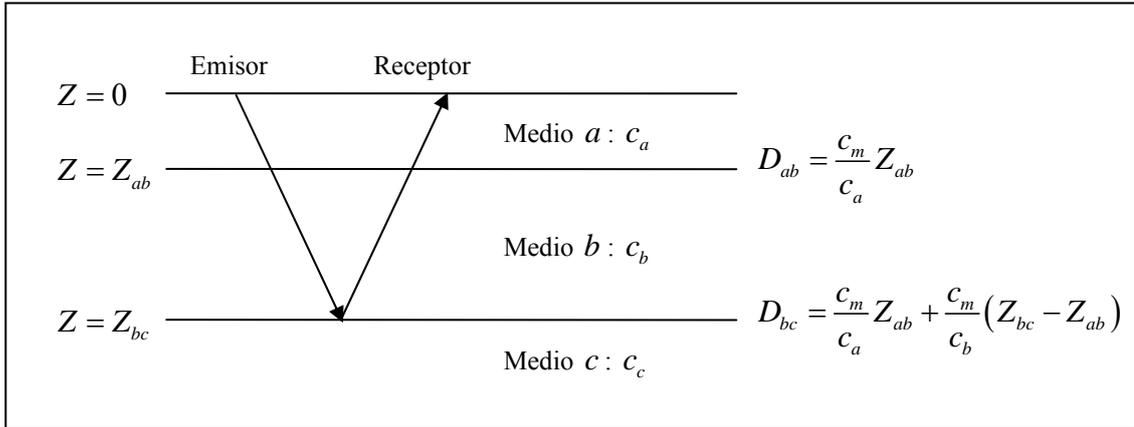


Figura 3-2-2: Ejemplo para la relación entre los tiempos dobles de recorrido calculados mediante las coordenadas Z y D .

$$\text{En este caso } t_Z = 2 \left(\frac{Z_{ab}}{c_a} + \frac{Z_{bc} - Z_{ab}}{c_b} \right), \text{ y } t_D = 2 \frac{D_{bc}}{c_m} = t_Z.$$

En este nuevo sistema, la función χ expuesta en (3.2.4) se reescribe de la forma anteriormente expuesta:

$$\phi(X, Y, d, D) \equiv \chi(X, Y, Z; 0, 0, 0; t) \quad (3.2.12)$$

Teniendo en cuenta esta aproximación, la SECCIÓN MEDIDA y la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD expuestas en (3.2.6) se reescriben, respectivamente, de forma análoga a (3.2.13):

$$\begin{aligned} \phi^{SM}(X, Y, 0, D) &= \phi^{SM}\left(X, Y, 0, \frac{c_m \cdot t}{2}\right) = \chi^{SM}(X, Y, 0; 0, 0, 0; t) \\ \phi^{DR}(X, Y, D, D) &= \phi^{DR}\left(X, Y, \int_0^Z \frac{c_m}{c} dZ, \int_0^Z \frac{c_m}{c} dZ\right) = \chi^{DR}(X, Y, Z; 0, 0, 0; 0) \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Tras esta aproximación, una vez efectuado el cambio de variables, se ha reducido el número de grados de libertad del problema a tres, correspondientes a las variables (X, Y, D) , presentes tanto en la SECCIÓN MEDIDA como en la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD.

(2) Transformación de la Ecuación de Ondas

Dado el cambio de variables (3.2.18), es preciso modificar nuevamente la Ecuación de Ondas (3.2.8) para transformar las derivadas respecto de las variables antiguas y expresarlas en

términos de derivadas respecto de las nuevas variables. Teniendo en cuenta las expresiones para el cambio de variables en las derivadas parciales expuestas en (3.A.1) y (3.A.4) se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial Z} &= \frac{c_m}{c} \left(\frac{\partial}{\partial d} + \frac{\partial}{\partial D} \right), & \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{c_m}{2} \frac{\partial}{\partial D} \\ \frac{\partial^2}{\partial Z^2} &= \left(\frac{c_m}{c} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial d^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial d \partial D} + \frac{\partial^2}{\partial D^2} \right), & \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{c_m^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial D^2}\end{aligned}\quad (3.2.20)$$

Así pues, es posible reescribir en este nuevo sistema de coordenadas la Ecuación de Ondas escalar (3.2.8) de la forma:

$$\phi_{XX} + \phi_{YY} + \left(\frac{c_m}{c} \right)^2 (\phi_{dd} + 2\phi_{dD} + \phi_{DD}) = \mu \varepsilon c_m^2 \phi_{DD} + 2\mu \sigma c_m \phi_D \quad (3.2.21)$$

Obsérvese que, en general, los coeficientes presentes en la Ecuación de Ondas escalar (3.2.21) no son constantes. No obstante, en el caso en que $(c_m/c)^2 \approx 1$,⁸ el cambio de variables expuesto en (3.2.18) se reduce al expuesto en (3.2.9), y la Ecuación de Ondas (3.2.21) se reduce a la expuesta en (3.2.15), con coeficientes constantes. Con el objeto de poder llevar a cabo esta reducción se considera:

La velocidad de propagación promedio c_m se define de tal forma que sea $(c_m/c)^2 \approx 1$ en promedio sobre la SECCIÓN.

La permeabilidad magnética μ se asume igual a la permeabilidad magnética del vacío, $\mu = \mu_0$ (Ward y Hohmann, 1987).

La permitividad eléctrica ε y la conductividad eléctrica σ se aproximan por unos valores promedio, ε_m y σ_m respectivamente, y se considera un valor característico de la pulsación de las ondas electromagnéticas, ω , de tal forma que se verifique la expresión:

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_m}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_m}{\omega \varepsilon_m} \right)^2} \right)}} \quad (3.2.10)$$

⁸ Esto es equivalente a elegir c_m como la velocidad cuadrática media, pues:

$$E \left[(c_m/c)^2 \right] = 1 \Rightarrow 1/E \left[(c_m/c)^2 \right] = 1 \Rightarrow 1/\left(c_m^2/E \left[c^2 \right] \right) = 1 \Rightarrow E \left[c^2 \right] = c_m^2 \Rightarrow c_m = \sqrt{E \left[c^2 \right]}$$

Esta velocidad cuadrática media será media espacial o temporal, en función de cómo se determine el promedio.

Teniendo en cuenta las simplificaciones anteriores, es posible reescribir la Ecuación de Ondas escalar (3.2.21) de la forma (3.2.16) expuesta en la Subsección anterior, con coeficientes constantes. Como se mencionó anteriormente, la dependencia de los parámetros electromagnéticos y, por ende, la velocidad de propagación con la profundidad ha sido eliminada de la Ecuación de Ondas escalar, encontrándose ésta en la definición de las variables d y D , tal como se expone en (3.2.18). Así mismo, como se ha mencionado anteriormente, la definición de la variable D es tal que los tiempos dobles de recorrido que se obtienen con esta coordenada y la velocidad de propagación promedio c_m coinciden con las que se determinarían con la profundidad Z y la velocidad de propagación $c = c(Z)$.

Bajo estas condiciones el problema expuesto en la presente Subsección se reduce al expuesto en la Subsección anterior, por lo que la expresión de la Ecuación de Ondas escalar (3.2.16) será la empleada en la §3.2.3 para determinar la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD conocida la SECCIÓN MEDIDA.

3.2.3. Resolución de la Ecuación de Ondas en el dominio frecuencial

Tras las aproximaciones efectuadas en la §3.2.2, el Problema Inverso planteado queda bien definido por las aproximaciones que determinan las condiciones bajo las cuales se produce la propagación y las relaciones que rigen la propagación. En este planteamiento no se emplean las Ecuaciones de Maxwell, sino la Ecuación de Ondas, más sencilla que las primeras.⁹

En esta Subsección la relación entre la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD y la SECCIÓN MEDIDA expuestas en (3.2.13) se determina vía sus transformadas de Fourier, a través de la transformada de la Ecuación de Ondas escalar (3.2.16) obtenida tras los cambios de variable y las aproximaciones efectuadas en la Subsección anterior. Para ello, se determina la transformada de Fourier de la SECCIÓN MEDIDA y se determina un filtro que permite transformar este espectro en el de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondiente, siendo posible determinar la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD mediante la transformada de Fourier inversa del espectro filtrado.¹⁰

La metodología desarrollada en la presente Subsección puede emplearse para la resolución de la Ecuación de Ondas en un caso más general, en el que emisor y receptor no son coincidentes. Este desarrollo se expone en el Anexo B (Cf. §3.B).

⁹ Como se citó en el Capítulo 1, la Ecuación de Ondas se deduce como corolario de las Ecuaciones de Maxwell y las relaciones constitutivas de los medios. No todas las soluciones de la Ecuación de Ondas verifican las Ecuaciones de Maxwell, no siendo éstas últimas físicamente admisibles como solución del problema.

¹⁰ No es posible realizar el desarrollo inverso, en que se determina la transformada de Fourier de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD y se determina un filtro que permite transformar este espectro en el de la SECCIÓN MEDIDA correspondiente, siendo posible determinar la SECCIÓN MEDIDA mediante la transformada de Fourier inversa del espectro filtrado. Esto se debe a que es posible generalizar la Sección Medida, $\phi^{SM}(U, V, 0, D)$, permitiendo a la variable d tomar un valor arbitrario no nulo, $\phi(U, V, d, D)$, y determinar la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD, $\phi^{DR}(U, V, D, D)$, particularizándolo con el valor $d = D$; mientras que en el desarrollo inverso no es posible efectuar esta generalización, al estar las dos últimas variables obligadas a tomar el mismo valor, de tal forma que si se anula la tercera, la cuarta también.

3.2.3.1. Generalización de la SECCIÓN MEDIDA en función de su transformada de Fourier

Sea la transformada de Fourier de la SECCIÓN MEDIDA expuesta en (3.2.13):¹¹

$$A(U, V, Q) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dX \int_{-\infty}^{\infty} dY \int_{-\infty}^{\infty} dD e^{-i(UX+VY+QD)} \cdot \phi^{SM}(X, Y, 0, D) \quad (3.2.22)$$

Donde U , V y Q representan, respectivamente, las frecuencias asociadas a las coordenadas X , Y y D .

Dada la transformada (3.2.22), es posible recuperar la SECCIÓN MEDIDA mediante la transformada de Fourier inversa:

$$\phi^{SM}(X, Y, 0, D) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dU \int_{-\infty}^{\infty} dV \int_{-\infty}^{\infty} dQ e^{i(UX+VY+QD)} \cdot A(U, V, Q) \quad (3.2.23)$$

Es posible generalizar la expresión anterior, definiendo:

$$\phi(X, Y, d, D) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dU \int_{-\infty}^{\infty} dV \int_{-\infty}^{\infty} dQ e^{i(UX+VY+qd+QD)} \cdot A(U, V, Q) \quad (3.2.24)$$

Donde q representa la frecuencia asociada a la coordenada d . Obsérvese que si se sustituye $d = 0$ en la expresión anterior, se obtiene (3.2.23).

La nueva frecuencia q debe ser tal que se verifique la Ecuación de Ondas escalar (3.2.16). Ésta se expresa en el dominio frecuencial de la forma (Ward y Hohmann, 1987):

$$\begin{aligned} \left[(iU)^2 + (iV)^2 + (iQ)^2 + 2(iq)(iQ) + (iq)^2 \right] \cdot \Phi(U, V, q, Q) = \\ = 2 \left[\frac{1}{f^2} (iQ)^2 + \frac{g}{f} (iQ) \right] \cdot \Phi(U, V, q, Q) \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Donde $\Phi(U, V, q, Q)$ representa la transformada de Fourier de $\phi(X, Y, d, D)$. Así pues, se obtiene la relación de dispersión:

$$U^2 + V^2 + Q^2 + 2Qq + q^2 = 2 \left(\frac{1}{f^2} Q^2 - \frac{g}{f} iQ \right) \quad (3.2.26)$$

De tal forma que es posible obtener la nueva frecuencia q en términos del resto de frecuencias de la forma:¹²

$$q = -Q \pm \sqrt{2 \left(\frac{1}{f^2} Q^2 - \frac{g}{f} iQ \right) - (U^2 + V^2)} \quad (3.2.27)$$

¹¹ Cf. Capítulo 4, dedicado al formalismo matemático de la transformada de Fourier.

¹² En esta expresión y en las siguientes el doble signo distingue la propagación de las ondas descendentes y ascendentes, habiéndose de realizar en cada caso la elección pertinente.

3.2.3.2. Obtención de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD

Es posible obtener una expresión para la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD expuesta en (3.2.13), sustituyendo la expresión de q expuesta en (3.2.27) en la generalización (3.2.24), considerando el caso particular $d = D$, de la forma:

$$\begin{aligned} \phi^{DR}(X, Y, D, D) &= \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dU \int_{-\infty}^{\infty} dV \int_{-\infty}^{\infty} dQ e^{i\left(UX+VY \pm D \sqrt{2\left(\frac{1}{f^2}Q^2 - \frac{g}{f}iQ\right) - (U^2+V^2)}\right)} \cdot A(U, V, Q) \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

Es posible reescribir la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD arriba expuesta para expresarla en la forma de una transformada de Fourier inversa. Para ello, se efectúa el cambio de variable:

$$K \equiv \pm \sqrt{2\left(\frac{1}{f^2}Q^2 - \frac{g}{f}iQ\right) - (U^2 + V^2)} \quad (3.2.29)$$

Y se sustituye la frecuencia Q en la integral (3.2.28) por esta nueva frecuencia K , conjugada de la nueva coordenada introducida D .

Es posible invertir la expresión anterior. Elevando al cuadrado y operando se obtiene:

$$\frac{1}{f^2}Q^2 - \frac{g}{f}iQ - \frac{H^2}{2} = 0 \quad (3.2.30)$$

Donde se ha definido:

$$H^2 \equiv K^2 + U^2 + V^2 \quad (3.2.31)$$

De tal forma que es posible expresar la frecuencia Q de la forma:

$$Q = \left(\frac{ig \pm \sqrt{2H^2 - g^2}}{2}\right) \cdot f(\omega) \quad (3.2.32)$$

Teniendo en cuenta el valor de H^2 expuesto en (3.2.31), tomando diferenciales en ambos miembros de la expresión anterior se obtiene:

$$dQ = \pm \frac{K}{\sqrt{2H^2 - g^2}} f(\omega) \cdot dK \quad (3.2.33)$$

Así pues, es posible reescribir la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD (3.2.28), sustituyendo el valor de Q expuesto en (3.2.32) y el valor de la diferencial dQ expuesto en (3.2.33), de la forma:

$$\phi^{DR}(X, Y, D, D) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dU \int_{-\infty}^{\infty} dV \int_{-\infty}^{\infty} dK e^{i(UX+VY+KD)} \cdot B(U, V, K) \quad (3.2.34)$$

Donde se ha definido el nuevo espectro filtrado:

$$B(U, V, K) \equiv \left(\frac{dQ}{dK}\right) A(U, V, Q(U, V, K)) \quad (3.2.35)$$

Es importante observar que, en las aplicaciones numéricas, se parte de un espectro $A(U, V, Q)$ definido en puntos equiespaciados en el dominio frecuencial. No obstante, el nuevo espectro filtrado $B(U, V, K)$ dado por la expresión anterior no se encontrará definido en puntos equiespaciados en el dominio de la nueva frecuencia K , dada la forma funcional de las transformaciones (3.2.32). Obsérvese que el rango de variación de la nueva frecuencia K en función de la frecuencia Q depende de los valores de las frecuencias espaciales U y V , de tal forma que si el sumando $U^2 + V^2$ es cero (en el centro del espectro) el rango es máximo, y va disminuyendo conforme U y V crecen (hacia los bordes del espectro). Esta variación tendrá una especial relevancia en los resultados que se obtengan, ya que influyen decisivamente en la interpolación del espectro.

Debido a que el cálculo numérico de la transformada de Fourier inversa requiere que el espectro se defina en puntos equiespaciados, será preciso interpolar adecuadamente el espectro obtenido mediante (3.2.35). Esta es una de las razones que motivan los desarrollos que se efectuarán en los capítulos 4 y 5, dedicados al formalismo matemático de la transformada de Fourier y las técnicas de interpolación.

3.3. Recapitulación

En esta Sección se exponen, a modo de compilación, los principales resultados obtenidos en el presente Capítulo. En primer lugar se expondrán las aproximaciones y simplificaciones efectuadas. A continuación se expondrá, de forma ordenada, el método de resolución del Problema Inverso y seguidamente, mediante inversión de éste, el método de resolución del Problema Directo correspondiente.

3.3.1. Aproximaciones efectuadas

En el desarrollo expuesto en el presente Capítulo han sido efectuadas las siguientes aproximaciones y simplificaciones:

1. Los medios que constituyen la región subsuperficial son lineales, homogéneos e isótropos.
2. Los reflectores están constituidos por elementos difractores puntuales.
3. La superficie está definida por un plano horizontal.
4. El emisor y el receptor son coincidentes.
5. Las derivadas parciales respecto a las coordenadas relativas receptor-emisor son despreciables frente al resto.
6. Los parámetros electromagnéticos de los medios sólo varían con la coordenada de profundidad.
7. La permeabilidad magnética μ se asume igual a la permeabilidad magnética del vacío, $\mu = \mu_0$.
8. La permitividad eléctrica ε y la conductividad eléctrica σ se aproximan por unos valores promedio, ε_m y σ_m respectivamente, y se considera un valor característico de la pulsación de las ondas electromagnéticas, ω , de tal forma que se verifique (3.2.10), y la velocidad de propagación promedio resultante c_m sea tal que se verifique $(c_m/c)^2 \approx 1$ en promedio sobre la SECCIÓN (esto es, la velocidad cuadrática media).

En los Capítulos subsiguientes estas aproximaciones serán discutidas, y se indicará la metodología necesaria para soslayarlas.

Es preciso señalar que en el desarrollo del filtro, se ha tenido en cuenta la existencia simultánea de un único emisor y un único receptor, ambos coincidentes. Así mismo, la SECCIÓN MEDIDA se define como la superposición de las señales registradas por los pares Emisor-Receptor que se sitúan en cada punto de la superficie.

Esta situación debe diferenciarse de aquella en la que se sitúa un único emisor y un conjunto de receptores sobre la superficie, definiéndose la SECCIÓN MEDIDA como la superposición de las señales registradas en los receptores, procedentes de todos los emisores (No como en el caso anterior, en el que cada receptor registra las señales procedentes de su emisor).

Ambas situaciones se muestran en la Figura 3–3-1:

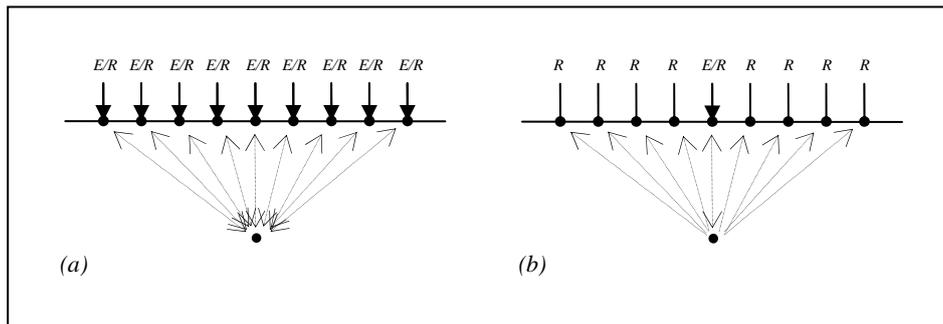


Figura 3–3-1: Representación de las situaciones a que hace referencia la §3.3.1.

(a) Existencia simultánea de un único emisor y un único receptor, ambos coincidentes. La SECCIÓN MEDIDA se define como la superposición de las señales registradas por los pares Emisor-Receptor que se sitúan en cada punto de la superficie.

(b) Existencia de un único emisor y un conjunto de receptores. La SECCIÓN MEDIDA se define como la superposición de las señales registradas en los receptores, procedentes de todos los emisores.

En todos los casos E/R simboliza un par Emisor-Receptor, R un receptor. Las flechas indican el sentido de la propagación.

Una distinción importante entre ambos casos radica en el hecho de que en el primero (Figura 3–3-1 (a)) se obtienen valores correctos para los tiempos dobles de recorrido, mientras que es en el segundo (Figura 3–3-1 (b)) en el que se obtienen valores realistas para las amplitudes de las señales (Baradello et al., 2004).

En el caso de reflectores planos y horizontales, las aproximaciones son válidas, en el sentido en que la interferencia de las hipérbolas de difracción se corresponde con la reflexión. En el caso de reflectores planos inclinados o curvados, las aproximaciones dejan de ser válidas, en el sentido en que la interferencia de las hipérbolas no se corresponde con la reflexión en el reflector, pues las trayectorias que se consideran no cumplen, en general, la Ley de Snell.

Atendiendo a estas consideraciones, únicamente tendrá sentido considerar modelos constituidos por estratificaciones horizontales que incluyan difractores puntuales. Adicionalmente, serán considerados modelos constituidos por yuxtaposición lateral de modelos con estas características.

3.3.2. Resolución del Problema Inverso: Determinación de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD a partir de la SECCIÓN MEDIDA

En esta Subsección se expone, de forma operativa, la metodología desarrollada en el presente Capítulo para la resolución del Problema Inverso tras la tercera transformación.

1. Se determinan unos valores promedio de la permitividad eléctrica y la conductividad eléctrica, ε_m y σ_m respectivamente, y se considera un valor característico de la pulsación de las ondas electromagnéticas, ω , buscando que la velocidad de propagación promedio determinada mediante:

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_m}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_m}{\omega \varepsilon_m} \right)^2} \right)}} \quad (3.2.10)$$

Donde μ_0 representa la permeabilidad magnética del vacío, sea $(c_m/c)^2 \simeq 1$ en promedio sobre la SECCIÓN.

2. Se efectúan los cambios de variable necesarios para trasladar los datos de la SECCIÓN MEDIDA desde el sistema $(x^e, y^e, z^e; x^r, y^r, z^r; t)$ al sistema (X, Y, d, D) , de acuerdo con (3.2.3) y (3.2.18), obteniéndose la función :

$$\phi^{SM}(X, Y, 0, D) = \psi^{SM}(x, y, 0; x, y, 0; t) \quad (3.2.1), (3.2.6), (3.2.19)$$

3. Se determina, en este sistema, la transformada de Fourier de la SECCIÓN MEDIDA:

$$A(U, V, Q) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dX \int_{-\infty}^{\infty} dY \int_{-\infty}^{\infty} dD e^{-i(UX+VY+QD)} \cdot \phi^{SM}(X, Y, 0, D) \quad (3.2.22)$$

4. Se filtra la transformada de Fourier anterior, obteniéndose el nuevo espectro:

$$B(U, V, K) \equiv \left(\frac{dQ}{dK} \right) A(U, V, Q(U, V, K)) \quad (3.2.35)$$

Donde dQ/dK se determina de acuerdo con (3.2.33) de la forma:

$$\frac{dQ}{dK} = \pm \frac{K}{\sqrt{2H^2 - g^2}} f(\omega) \quad (3.3.1)$$

Donde, a su vez, $K(U, V, Q)$ se determina mediante (3.2.29), H^2 mediante (3.2.31) y $f = f(\omega)$ y g mediante (3.2.17).

5. Se interpola el nuevo espectro para determinar su valor en puntos equiespaciados del nuevo dominio frecuencial.
6. La DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD se determina mediante la transformada de Fourier inversa del nuevo espectro filtrado:

$$\phi^{DR}(X, Y, D, D) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dU \int_{-\infty}^{\infty} dV \int_{-\infty}^{\infty} dK e^{i(UX+VY+KD)} \cdot B(U, V, K) \quad (3.2.34)$$

7. Finalmente, se efectúan los cambios de variable necesarios para trasladar los datos de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD desde el sistema (X, Y, d, D) al sistema $(x^e, y^e, z^e; x^r, y^r, z^r; t)$, de acuerdo con (3.2.3) y (3.2.18), obteniéndose la función:

$$R(x, y, z) \approx \psi(x, y, z; x, y, z; 0) = \phi^{DR}(X, Y, D, D) \quad (3.2.2), (3.2.6), (3.2.19)$$

Para pasar de las coordenadas D a z es necesario conocer las velocidades de propagación en cada uno de los medios.¹³

En la resolución del Problema Inverso no es posible asegurar que una determinada elección de los parámetros promedio ε_m y σ_m sea tal que se verifique $(c_m/c)^2 \approx 1$ en promedio sobre la SECCIÓN. Esta es una limitación inherente a esta metodología, y será discutida en los capítulos 8 y 9.

La técnica de interpolación en el nuevo espectro será discutida en los capítulos 4 y 5, dedicados al formalismo matemático de la transformada de Fourier y las técnicas de interpolación.

¹³ Como ejemplo, obsérvese que es posible invertir las expresiones que se exponen en la Figura 3–2-2, de tal forma que:

$$D_{ab} = \frac{c_m}{c_a} Z_{ab} \quad \Rightarrow \quad Z_{ab} = \frac{c_a}{c_m} D_{ab}$$

$$D_{bc} = \frac{c_m}{c_a} Z_{ab} + \frac{c_m}{c_b} (Z_{bc} - Z_{ab}) \quad \Rightarrow \quad Z_{bc} = \frac{c_a}{c_m} D_{ab} + \frac{c_b}{c_m} (D_{bc} - D_{ab})$$

3.3.3. Resolución del Problema Directo: Determinación de la SECCIÓN MEDIDA a partir de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD

En esta Subsección se expone, de forma operativa, la metodología para la resolución del Problema Directo tras la tercera transformación, consistente en la inversión de la expuesta en la Subsección anterior para la resolución del Problema Inverso.

1. Se determina la velocidad de propagación promedio c_m de tal forma que sea $(c_m/c)^2 \simeq 1$ en promedio sobre la SECCIÓN, esto es, como la velocidad cuadrática media espacial.
2. Se determinan unos valores promedio de la permitividad eléctrica y la conductividad eléctrica, ϵ_m y σ_m respectivamente, y se considera un valor característico de la pulsación de las ondas electromagnéticas ω , de tal forma que se verifique:

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_m}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_m}{\omega \epsilon_m} \right)^2} \right)}} \quad (3.2.10)$$

Donde μ_0 representa la permeabilidad magnética del vacío.

3. Se efectúan los cambios de variable necesarios para trasladar los datos de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD desde el sistema $(x^e, y^e, z^e; x^r, y^r, z^r; t)$ al sistema (X, Y, d, D) , de acuerdo con (3.2.3) y (3.2.18), obteniéndose la función:

$$\phi^{DR}(X, Y, D, D) = \psi(x, y, z; x, y, z; 0) \simeq R(x, y, z) \quad (3.2.2), (3.2.6), (3.2.19)$$

4. Se determina, en este sistema, la transformada de Fourier de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD:

$$B(U, V, K) = \int_{-\infty}^{\infty} dX \int_{-\infty}^{\infty} dY \int_{-\infty}^{\infty} dD e^{-i(UX+VY+KD)} \cdot \phi^{DR}(X, Y, D, D) \quad (3.3.2)$$

5. Se filtra la transformada de Fourier anterior, mediante inversión de (3.2.35), obteniéndose el nuevo espectro:

$$A(U, V, Q) \equiv \left(\frac{dQ}{dK} \right)^{-1} B(U, V, K(U, V, Q)) \quad (3.3.3)$$

Donde $(dQ/dK)^{-1}$ se determina de acuerdo con (3.2.33), aplicando el teorema de la función inversa (Harris y Stocker, 1998, §12.2.15; Marsden y Hoffman, 1999, §7.1.1), de la forma:

$$\left(\frac{dQ}{dK}\right)^{-1} = \pm \frac{\sqrt{2H^2 - g^2}}{K \cdot f(\omega)} \quad (3.3.4)$$

Donde, a su vez, H^2 se determina mediante (3.2.31) y $f = f(\omega)$ y g mediante (3.2.17).

6. Se interpola el nuevo espectro para determinar su valor en puntos equiespaciados del nuevo dominio frecuencial.
7. La SECCIÓN MEDIDA se determina mediante la transformada de Fourier inversa del nuevo espectro filtrado:

$$\phi^{SM}(X, Y, 0, D) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dU \int_{-\infty}^{\infty} dV \int_{-\infty}^{\infty} dQ e^{i(UX+VY+QD)} \cdot A(U, V, Q) \quad (3.2.23)$$

8. Finalmente, se efectúan los cambios de variable necesarios para trasladar los datos de la SECCIÓN MEDIDA desde el sistema de coordenadas (X, Y, d, D) al sistema de coordenadas $(x^e, y^e, z^e; x^r, y^r, z^r; t)$, de acuerdo con (3.2.3) y (3.2.18), obteniéndose la función:

$$\psi^{SM}(x, y, 0; x, y, 0; t) = \phi^{SM}(X, Y, 0, D) \quad (3.2.1), (3.2.6), (3.2.19)$$

Obsérvese que la SECCIÓN MEDIDA así determinada puede tomar valores complejos, no obstante, la señal registrada en el geo-radar es una magnitud real. Así pues, en lo que sigue, se tendrá en consideración únicamente la parte real de ésta.

Como se mencionó anteriormente, la técnica de interpolación en el nuevo espectro será discutida en los capítulos 4 y 5, dedicados al formalismo matemático de la transformada de Fourier y las técnicas de interpolación. Así mismo, la metodología para la determinación de las ondas reflejadas múltiples y la velocidad de propagación promedio c_m , así como los valores promedio de la permitividad eléctrica y la conductividad eléctrica, ϵ_m y σ_m , será discutida en el Capítulo 6, dedicado a la implementación de los algoritmos.

3.A. Anexo A: Elementos de Cálculo Diferencial

Los cambios de derivadas en la Ecuación de Ondas se efectúan teniendo en consideración la siguiente particularización de la Regla de la Cadena (Harris y Stocker, 1998, §12.2.10; Marsden y Hoffman, 1999, §6.5.1):

► **REGLA DE LA CADENA (CASO PARTICULAR).** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $x \in A$, y sea $B \subset \mathbb{R}^m$ un abierto y $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $y \equiv f(x) \in B$. Entonces, la matriz jacobiana de la función compuesta $h \equiv g \circ f = g[f(x)]$ en el punto x es el producto de la matriz jacobiana de g evaluada en $f(x)$ con la matriz jacobiana de f evaluada en x , en este orden, de tal forma que las derivadas parciales de h vienen dadas por la expresión:

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \sum_{a=1}^m \frac{\partial h}{\partial y_a} \cdot \frac{\partial y_a}{\partial x_i} \quad (3.A.1)$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}$$



Las derivadas parciales de segundo orden se determinan mediante iteración, de la forma (Harris y Stocker, 1998, §12.6.1; Marsden y Hoffman, 1999, §6.8):

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \right) \quad (3.A.2)$$

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

Bajo ciertas condiciones, las derivadas parciales cumplen una propiedad de simetría (Harris y Stocker, 1998, §12.6.1):

► **LEMA DE SCHWARZ (CASO PARTICULAR).** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $h : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable dos veces en $x \in A$, con derivadas parciales segundas continuas. Entonces se da la igualdad:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i} \quad (3.A.3)$$

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

◀

Aplicando nuevamente la regla de la cadena (3.A.1) en (3.A.2), teniendo en cuenta el Lema de Schwarz (3.A.3), las derivadas parciales de segundo orden se determinan en la forma que se expone a continuación:

► **DETERMINACIÓN DE DERIVADAS PARCIALES SEGUNDAS (CASO PARTICULAR).** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $x \in A$, y sea $B \subset \mathbb{R}^m$ un abierto y $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $y \equiv f(x) \in B$. Entonces, las derivadas parciales de segundo orden de h vienen dadas por la expresión:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i} = \sum_{b=1}^m \sum_{a=1}^m \left(\frac{\partial y_b}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y_b \partial y_a} \cdot \frac{\partial y_a}{\partial x_i} + \frac{\partial y_b}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial h}{\partial y_a} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial y_a}{\partial y_b} \right) \right) \quad (3.A.4)$$

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

◀

Obsérvese que, en el caso habitual en que las coordenadas $\{y_i\}_{i=1}^m$ son independientes entre sí (basta que sean linealmente dependientes), la expresión para las derivadas segundas (3.A.4), se reduce a la expresión habitual:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_i} = \sum_{b=1}^m \sum_{a=1}^m \frac{\partial^2 h}{\partial y_a \partial y_b} \cdot \frac{\partial y_a}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial y_b}{\partial x_j} \quad (3.A.5)$$

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

3.B. Anexo B: Resolución de la Ecuación de Ondas en el dominio frecuencial en un caso más general, en el que emisor y receptor no son coincidentes

En este Anexo se determina la relación entre la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD y la SECCIÓN MEDIDA expuestas en (3.2.5) vía sus transformadas de Fourier, a través de la transformada de la Ecuación de Ondas escalar inicial (3.1.2).

En este caso se considera la primera aproximación expuesta en la §3.2.2.1:

Se considera que la superficie viene dada por el plano horizontal $z = 0$, de tal forma que $z^e \simeq 0$, $z^r \simeq 0$.

Obsérvese que en este caso carece de sentido suponer emisor y receptor coincidentes.

Con el objeto de simplificar el desarrollo se considerará, de forma similar a como se realizó en la segunda transformación expuesta en la §3.2.2.2:

Se considera que los parámetros electromagnéticos son constantes en todo el medio.

Siendo posible efectuar un desarrollo análogo al correspondiente a la tercera transformación expuesta en la §3.2.2.3 para considerar que los parámetros electromagnéticos sólo varían con la coordenada de profundidad.

3.B.1. Generalización de la SECCIÓN MEDIDA en función de su transformada de Fourier

Sea la transformada de Fourier de la SECCIÓN MEDIDA expuesta en (3.2.5):

$$\begin{aligned}
 A(U, V, u, v, \omega) &\equiv \\
 &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dX \int_{-\infty}^{\infty} dY \int_{-\infty}^{\infty} dx^{re} \int_{-\infty}^{\infty} dy^{re} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(UX + VY + ux^{re} + vy^{re} + \omega t)} \cdot \chi^{SM}(X, Y, 0; x^{re}, y^{re}, 0; t)
 \end{aligned}
 \tag{3.B.1}$$

Donde U , V , u , v y ω representan, respectivamente, las frecuencias asociadas a las coordenadas X , Y , x^{re} , y^{re} y t .

Dada la transformada (3.B.1), es posible recuperar la SECCIÓN MEDIDA mediante la transformada de Fourier inversa:

$$\begin{aligned} \chi^{SM} \left(X, Y, 0; x^{re}, y^{re}, 0; t \right) &\equiv \\ &\equiv \left(\frac{1}{2\pi} \right)^5 \int_{-\infty}^{\infty} dU \int_{-\infty}^{\infty} dV \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i(UX+VY+ux^{re}+vy^{re}+\omega t)} \cdot A(U, V, u, v, \omega) \end{aligned} \quad (3.B.2)$$

Es posible generalizar la expresión anterior, teniendo en cuenta las definiciones de Z y z^{re} expuestas en (3.2.3), de la forma:

$$\begin{aligned} \chi^{SM} \left(X, Y, \frac{z^r + z^e}{2}; x^{re}, y^{re}, \frac{z^r - z^e}{2}; t \right) &\equiv \\ &\equiv \left(\frac{1}{2\pi} \right)^5 \int_{-\infty}^{\infty} dU \int_{-\infty}^{\infty} dV \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i(UX+VY+ux^{re}+vy^{re}+q^r z^r + q^e z^e + \omega t)} \cdot A(U, V, u, v, \omega) \end{aligned} \quad (3.B.3)$$

Donde q^r y q^e representan, respectivamente, las frecuencias asociadas a las coordenadas z^r y z^e . Obsérvese que si se sustituye $z^r = z^e = 0$ en la expresión anterior, se obtiene(3.B.2).

Las nuevas frecuencias q^r y q^e deben ser tales que verifiquen las relaciones de dispersión que se deducen de la Ecuación de Ondas (3.1.2) particularizada para las posiciones de receptor y emisor:

$$\begin{aligned} \Psi_{x^r x^r} + \Psi_{y^r y^r} + \Psi_{z^r z^r} &= \mu_m \varepsilon_m \Psi_{tt} + \mu_m \sigma_m \Psi_t \\ \Psi_{x^e x^e} + \Psi_{y^e y^e} + \Psi_{z^e z^e} &= \mu_m \varepsilon_m \Psi_{tt} + \mu_m \sigma_m \Psi_t \end{aligned} \quad (3.B.4)$$

Dadas por:

$$\begin{aligned} (u^r)^2 + (v^r)^2 + (q^r)^2 &= \mu_m \varepsilon_m \omega^2 - i \mu_m \sigma_m \omega \\ (u^e)^2 + (v^e)^2 + (q^e)^2 &= \mu_m \varepsilon_m \omega^2 - i \mu_m \sigma_m \omega \end{aligned} \quad (3.B.5)$$

Invirtiendo el cambio de variables (3.2.3) se obtiene:

$$\mathbf{r}^r = \frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}^{re}}{2}, \quad \mathbf{r}^e = \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}^{re}}{2} \quad (3.B.6)$$

De tal forma que es posible expresar las frecuencias:

$$u^r = \frac{U + u}{2}, \quad u^e = \frac{U - u}{2}; \quad v^r = \frac{V + v}{2}, \quad v^e = \frac{V - v}{2} \quad (3.B.7)$$

Y es posible obtener las nuevas frecuencias q^r y q^e en términos del resto de frecuencias de la forma:

$$\begin{aligned} q^r &= \pm \sqrt{\mu_m \varepsilon_m \omega^2 - \left(\frac{U+u}{2}\right) - \left(\frac{V+v}{2}\right) - i\mu_m \sigma_m \omega} \\ q^e &= \pm \sqrt{\mu_m \varepsilon_m \omega^2 - \left(\frac{U-u}{2}\right) - \left(\frac{V-v}{2}\right) - i\mu_m \sigma_m \omega} \end{aligned} \quad (3.B.8)$$

3.B.2. Obtención de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD

Es posible obtener una expresión para la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD expuesta en (3.2.5), sustituyendo las expresiones de q^r y q^e expuestas en (3.B.8) en la generalización (3.B.3), considerando el caso particular $z^r = z^e = Z$, $x^{re} = y^{re} = 0$, de la forma:

$$\begin{aligned} \chi^{DR}(X, Y, Z; 0, 0, 0; 0) &\equiv \\ &\equiv \left(\frac{1}{2\pi}\right)^5 \int_{-\infty}^{\infty} dU \int_{-\infty}^{\infty} dV \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i(UX+VY+(q^r+q^e)Z)} \cdot A(U, V, u, v, \omega) \end{aligned} \quad (3.B.9)$$

Es posible reescribir la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD arriba expuesta para expresarla en la forma de una transformada de Fourier inversa. Para ello, se efectúa el cambio de variable:

$$Q \equiv q^r + q^e \quad (3.B.10)$$

Y se sustituye la frecuencia ω en la integral (3.B.9) por esta nueva frecuencia Q , conjugada de la nueva coordenada introducida Z .

Es posible invertir la expresión anterior. Sustituyendo los valores de q^r y q^e dados en (3.B.8), operando convenientemente para eliminar las raíces, se obtiene:

$$Q^4 + 2Q^2(A+B-2C) + A^2 + B^2 + 2C^2 - 2(A+B)C = 0 \quad (3.B.11)$$

Donde se han definido:

$$A \equiv \left(\frac{U+u}{2}\right) + \left(\frac{V+v}{2}\right), \quad B \equiv \left(\frac{U-u}{2}\right) + \left(\frac{V-v}{2}\right), \quad C \equiv \mu_m \varepsilon_m \omega^2 - i\mu_m \sigma_m \omega \quad (3.B.12)$$

Es posible reescribir (3.B.11) de la forma:

$$2C^2 - 2C(A+B+2Q^2) + A^2 + B^2 + Q^4 = 0 \quad (3.B.13)$$

De tal forma que es posible despejar el valor C en función de la frecuencia Q de la forma:

$$C = \frac{A + B + 2Q^2 \pm \sqrt{(A + B + 2Q^2)^2 - 4(A + B + 2Q^2)(A^2 + B^2 + Q^4)}}{2} \quad (3.B.14)$$

Y es posible expresar la frecuencia ω en función de la frecuencia Q a través del valor C , a partir de la definición de C expuesta en (3.B.12), de la forma:

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{C}{\mu_m \varepsilon_m} - \left(\frac{\sigma_m}{2\varepsilon_m}\right)^2} + i \frac{\sigma_m}{2\varepsilon_m} \quad (3.B.15)$$

Tomando diferenciales en ambos miembros de (3.B.10) se obtiene:

$$dQ = \mu_m (2\varepsilon_m - i\sigma_m) \left(\frac{1}{q^r} + \frac{1}{q^e} \right) d\omega \quad (3.B.16)$$

Así pues, es posible reescribir la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD (3.B.9), sustituyendo el valor de ω expuesto en (3.B.15) y el valor de la diferencial $d\omega$ que resulta de aplicar el teorema de la función inversa (Harris y Stocker, 1998, §12.2.15; Marsden y Hoffman, 1999, §7.1.1) en (3.B.16), de la forma:

$$\chi^{DR}(X, Y, Z; 0, 0, 0; 0) \equiv \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dU \int_{-\infty}^{\infty} dV \int_{-\infty}^{\infty} dQ e^{i(UX + VY + QZ)} \cdot B(U, V, Q) \quad (3.B.17)$$

Donde se ha definido el nuevo espectro filtrado:

$$B(U, V, Q) \equiv \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv \left(\frac{dQ}{d\omega}\right)^{-1} A(U, V, u, v, \omega(U, V, u, v, Q)) \quad (3.B.18)$$

Donde $(dQ/d\omega)^{-1}$ se determina de acuerdo con (3.B.16), como se ha mencionado anteriormente, aplicando el teorema de la función inversa, de la forma:

$$\left(\frac{dQ}{d\omega}\right)^{-1} = \frac{q^r q^e}{\mu_m (2\varepsilon_m - i\sigma_m) (q^r + q^e)} \quad (3.B.19)$$

Análogamente a lo expuesto en la §3.2.3, es importante observar que, en las aplicaciones numéricas, se parte de un espectro $A(U, V, u, v, Q)$ definido en puntos equiespaciados en el dominio frecuencial. No obstante, el nuevo espectro filtrado $B(U, V, Q)$ dado por la expresión anterior no se encontrará definido en puntos equiespaciados en el dominio de la nueva frecuencia Q , dada la forma funcional de la transformación (3.B.10), por lo que será preciso interpolar adecuadamente el espectro obtenido mediante (3.B.18).

Capítulo 4

*Formalismo matemático
de la transformada de Fourier
de funciones muestreadas
con soporte acotado*

En este cuarto Capítulo se realiza un estudio del análisis de Fourier. Existen numerosas publicaciones en que este tema es tratado en amplitud, ya sea desde el punto de vista analítico-matemático (Tranter, 1956; Papoulis, 1962; Kaiser, 1994; Debnath, 1995; Partington y Ünalmiş, 2001), de sus aplicaciones (Udías y López Arroyo, 1970; Brigham 1974; Andrews y Shivamoggi, 1988; James, 1995; Rockmore, 2000) o los problemas de carácter numérico que surgen en éstas (Hamming, 1973; Harris, 1978; Nuttall, 1981; Ricard y Blakely, 1988; Rioul y Vetterli, 1991; Dixon y Powers, 1996; Gumas, 1997; Lyons, 1998 a y b; Masta, 1999; Xiangchun y Yaozu, 2003). En este Capítulo se realizará un estudio aplicado a las funciones muestreadas de soporte acotado,¹ efectuándose particularizaciones para las funciones constituidas por suma de impulsos, que son las tratadas en la presente Tesis Doctoral. Todos los desarrollos se efectuarán para funciones en una única dimensión, pudiendo realizarse de forma trivial la extensión a dimensiones superiores.

Se encuentra dividido en seis Secciones dedicadas, respectivamente:

- A la definición de la transformada integral de Fourier y la exposición del Teorema Integral de Fourier. Así mismo, en el camino hacia la determinación de versiones de dicho Teorema en forma discreta, se definen las series de Fourier.
- Al muestreo y acotación del soporte de funciones mediante la aplicación de ventanas, y a la definición formal de funciones muestreadas con soporte acotado.
- A la determinación de las transformadas de Fourier directa e inversa de funciones muestreadas con soporte acotado, y su relación con las transformadas que son determinadas computacionalmente.²
- Al estudio de la interpolación en las transformadas de Fourier, mediante generalizaciones del Teorema del Muestreo para funciones con soporte acotado por la aplicación de una ventana general.
- Al estudio de las relaciones entre las transformadas de Fourier y la función original.
- A la exposición, a modo de compilación, de los principales resultados obtenidos para el estudio de las transformadas de Fourier de funciones muestreadas con soporte acotado por la aplicación de una ventana cuadrada.

¹ Se define el soporte de una función f como el cierre del conjunto de valores de los argumentos para los cuales f es no nula (Weisstein, 1999).

² En el desarrollo de este Capítulo, se entenderá que las transformadas determinadas computacionalmente se calculan con MATLAB (Cf. §6.1).

4.1. Transformada integral de Fourier

4.1.1. Transformadas de Fourier directa e inversa. Teorema Integral de Fourier

► **DEFINICIÓN (TRANSFORMADA DE FOURIER).** Dada una función f , se define su transformada de Fourier, y se denota por $TF[f(x)](u) \equiv F(u)$, mediante la integral (Papoulis, 1962; Brigham, 1974):

$$F(u) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \cdot e^{-iux} \quad (4.1.1)$$



La transformada de Fourier inversa puede determinarse haciendo uso del Teorema Integral de Fourier en forma exponencial:

► **TEOREMA INTEGRAL DE FOURIER.** Dada una función f absolutamente integrable, esto es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)| < +\infty \quad (4.1.2)$$

Tal que ella y su derivada son continuas a trozos, se cumple (Debnath, 1995):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{iux} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \cdot e^{-iux'} \quad (4.1.3)$$



En la §2.3 de la obra de Andrews y Shivamoggi (1988) puede consultarse una demostración rigurosa de este Teorema, en su forma habitual en términos de cosenos.

Obsérvese que la integral más interna de (4.1.3) representa la transformada de Fourier de $f(x)$, de tal forma que, mediante sustitución, ésta se reescribe de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du F(u) \cdot e^{iux} \quad (4.1.4)$$

Esta expresión permite definir la transformada de Fourier inversa:

► **DEFINICIÓN (TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA).** Dada una función F definida sobre la recta real, se define su transformada de Fourier inversa, y se denota por $TF^{-1}[F(u)](x) \equiv f(x)$, mediante la integral (4.1.4).



Al conjunto de valores x donde la función f está definida se le denomina genéricamente **DOMINIO NATURAL**. Al conjunto de valores u donde la función F está definida se le denomina genéricamente **DOMINIO FRECUENCIAL**. Las variables x y u así relacionadas se denominan **VARIABLES CONJUGADAS**. En el caso en que x sea una coordenada de posición, su frecuencia asociada u será un número de onda, mientras que en el caso en que sea un tiempo, su frecuencia asociada será la frecuencia angular.

Las transformadas de Fourier directa e inversa existirán si se satisfacen las condiciones de Dirichlet (James, 1995):

- Las transformadas F y f son funciones univaluadas en todo su dominio.
- Las funciones F y f son continuas a trozos.
- Las funciones F y f son de cuadrado integrable, esto es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \|F(u)\|^2 < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \|f(x)\|^2 < +\infty \quad (4.1.5)$$

- Las funciones F y f están acotadas superior e inferiormente.

Estas condiciones, pese a ser muy restrictivas, se cumplen en el caso de funciones muestreadas de soporte acotado, que son las tratadas en esta Tesis Doctoral.

Es interesante mencionar que las condiciones de Dirichlet son suficientes, aunque no necesarias, para la existencia de la transformada de Fourier (por ejemplo, la δ de Dirac no es una función acotada, pese a lo cual sí tiene transformada de Fourier). Existen generalizaciones de la definición de transformada de Fourier (Lighthill, 1958; Jones, 1982) que permiten incluir funciones que no cumplen estas condiciones. Una exposición más detallada puede encontrarse en la obra de Champeney (1987).

4.1.2. Hacia la discretización del Teorema Integral de Fourier. Series de Fourier.

El Teorema Integral de Fourier demuestra ser una herramienta enormemente útil en los desarrollos que involucren las transformaciones integrales en general, y la transformada de Fourier en particular. En esta Tesis Doctoral se tratan funciones muestreadas con soporte acotado, por lo que resulta necesario desarrollar una versión de este Teorema en forma discreta.

Como primera etapa de este desarrollo, aparecen de forma natural las series de Fourier, tanto para la función f como de la función F , por lo que éstas serán expuestas en primer lugar.

4.1.2.1. Serie de Fourier de funciones en el dominio natural

En el caso en que la función f tiene soporte acotado, es posible reescribir (4.1.3) de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{iux} \cdot \int_{VX} dx' f(x') \cdot e^{-iux'} \quad (4.1.6)$$

Donde VX representa el recinto que soporta a f .

Es posible aproximar la integral en u de esta expresión por un sumatorio aplicando la fórmula del rectángulo (Harris y Stoker, 1998; Spiegel et al., 2000), lo que equivale a operar de forma inversa a como lo hace en su obra Debnath (1995) para pasar de sumatorios a integrales, reescribiéndose esta expresión de la forma:

$$f(x) = \frac{EU}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik \cdot EU \cdot x} \cdot \int_{VX} dx' f(x') \cdot e^{-iux'} \quad (4.1.7)$$

Donde EU representa el espaciado que caracteriza la discretización en el dominio frecuencial.

Esta última expresión permite definir la serie de Fourier de f :

► **DEFINICIÓN (SERIE DE FOURIER DE FUNCIONES EN EL DOMINIO NATURAL).** Dada una función f con soporte acotado, se define su serie de Fourier mediante la suma:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_k \cdot e^{ik \cdot EU \cdot x} \quad (4.1.8)$$

Donde los coeficientes ϕ_k se determinan mediante la integral:

$$\phi_k \equiv \frac{EU}{2\pi} \int_{VX} dx f(x) \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot x} \quad (4.1.9)$$

◀

Aplicando un procedimiento análogo al empleado anteriormente, es posible aproximar la integral en x de (4.1.9) por un sumatorio, reescribiéndose esta expresión de la forma:

$$\phi_k = \frac{EU \cdot EX}{2\pi} \sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} f(n \cdot EX) \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \quad (4.1.10)$$

Donde EX representa el espaciado que caracteriza la discretización en el dominio natural. El sumatorio se extiende entre los índices \underline{n} y \bar{n} , que caracterizan los valores $x = n \cdot EX$ contenidos en el recinto VX .

4.1.2.2. Serie de Fourier de funciones en el dominio frecuencial

Es posible escribir una versión del Teorema Integral de Fourier para la transformada de Fourier F , multiplicando (4.1.4) por la exponencial e^{-iux} e integrando respecto x , teniendo en cuenta la definición de Transformada de Fourier (4.1.1):

► **TEOREMA INTEGRAL DE FOURIER PARA EL DOMINIO FRECUENCIAL.** Dada una función F absolutamente integrable, tal que ella y su derivada son continuas a trozos, se cumple:

$$F(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-iux} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} du' F(u') \cdot e^{iu'x} \quad (4.1.11)$$

◀

En el caso en que la función F tiene soporte acotado, es posible reescribir (4.1.11) de la forma:

$$F(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-iux} \cdot \int_{VU} du' F(u') \cdot e^{iu'x} \quad (4.1.12)$$

Donde VU representa el recinto que soporta a F .

Aplicando un procedimiento análogo al empleado en el apartado anterior, es posible aproximar la integral en x de esta expresión por un sumatorio, reescribiéndose de la forma:

$$F(u) = \frac{EX}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-iun \cdot EX} \cdot \int_{VU} du' F(u') \cdot e^{iu' \cdot n \cdot EX} \quad (4.1.13)$$

Donde EX representa el espaciado que caracteriza la discretización en el dominio natural.

Esta última expresión permite definir la serie de Fourier de F :

► **DEFINICIÓN (SERIE DE FOURIER DE FUNCIONES EN EL DOMINIO FRECUENCIAL).** Dada una función F con soporte acotado, se define su serie de Fourier mediante la suma:

$$F(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n \cdot e^{-iun \cdot EX} \quad (4.1.14)$$

Donde los coeficientes Φ_n se determinan mediante la integral:

$$\Phi_n \equiv \frac{EX}{2\pi} \int_{VU} du F(u) \cdot e^{iun \cdot EX} \quad (4.1.15)$$

◀

Aplicando un procedimiento análogo al empleado anteriormente, es posible aproximar la integral en x de (4.1.15) por un sumatorio, reescribiéndose esta expresión de la forma:

$$\Phi_n \equiv \frac{EX \cdot EU}{2\pi} \sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} F(k \cdot EU) \cdot e^{ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \quad (4.1.16)$$

Donde EU representa el espaciado que caracteriza la discretización en el dominio frecuencial. El sumatorio se extiende entre los índices \underline{k} y \bar{k} , que caracterizan los valores $u = k \cdot EU$ contenidos en el recinto VU .

4.1.2.3. Discretizaciones del Teorema Integral de Fourier

Es posible reescribir el Teorema Integral de Fourier, enunciado para funciones definidas en el dominio natural, sustituyendo (4.1.10) en (4.1.8):

$$f(x) = \frac{EU \cdot EX}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} f(n \cdot EX) \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \cdot e^{ik \cdot EU \cdot x} \quad (4.1.17)$$

Si se evalúa la función f en valores de la forma $x = m \cdot EX'$, se obtiene la discretización del Teorema Integral de Fourier:

► **LEMA (DISCRETIZACIÓN DEL TEOREMA INTEGRAL DE FOURIER PARA FUNCIONES EN EL DOMINIO NATURAL).** Dada una función f con soporte acotado, que verifica las hipótesis del Teorema Integral de Fourier, se cumple:

$$f(m \cdot EX') = \frac{EU \cdot EX}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} f(n \cdot EX) \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \cdot e^{ik \cdot EU \cdot m \cdot EX'} \quad (4.1.18)$$

◀

Así mismo, es posible escribir una expresión análoga para funciones definidas en el dominio frecuencial, sustituyendo (4.1.16) en (4.1.14):

$$F(u) = \frac{EX \cdot EU}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} F(k \cdot EU) \cdot e^{ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \cdot e^{-iun \cdot EX} \quad (4.1.19)$$

Si se evalúa la función F en valores de la forma $u = q \cdot EU'$, se obtiene la discretización del Teorema Integral de Fourier:

► **LEMA (DISCRETIZACIÓN DEL TEOREMA INTEGRAL DE FOURIER PARA FUNCIONES EN EL DOMINIO FRECUENCIAL).** Dada una función F con soporte acotado, que verifica las hipótesis del Teorema Integral de Fourier, se cumple:

$$F(q \cdot EU') = \frac{EX \cdot EU}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} F(k \cdot EU) \cdot e^{ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \cdot e^{-iq \cdot EU' \cdot n \cdot EX} \quad (4.1.20)$$

◀

Obsérvese que no es posible acotar simultáneamente el recorrido de ambos índices en los sumatorios de (4.1.18) y (4.1.20) y mantener dichas identidades pues, dadas las relaciones de conjugación entre los dominios natural y frecuencial, si una función tiene soporte acotado su transformada no lo tiene, y viceversa (Papoulis, 1962; Brigham, 1974).

4.2. Muestreo de funciones y acotación del soporte

4.2.1. Muestreo de funciones

► **DEFINICIÓN (FUNCIÓN MUESTREADA).** Dada una función f , se define la función muestreada con periodo o espaciado EX , y se denota por f^{EX} , mediante el producto de la función y la serie infinita de impulsos unitarios equiespaciados Δ^{EX} , definida mediante la expresión:

$$\Delta^{EX} \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n \cdot EX) \quad (4.2.1)$$

Donde se define el impulso unitario:

$$\delta(x - n \cdot EX) \equiv \begin{cases} 1 & x = n \cdot EX \\ 0 & x \neq n \cdot EX \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (4.2.2)$$

De tal forma que (Brigham, 1974):

$$\begin{aligned} f^{EX}(x) &\equiv f(x) \cdot \Delta^{EX}(x) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n \cdot EX) \cdot \delta(x - n \cdot EX) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Esta función está representada por los valores:

$$f^{EX}(n \cdot EX) = f(n \cdot EX), \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (4.2.4)$$

◀

Este resultado se ejemplifica en las figuras 4-2-1 a 4-2-3:

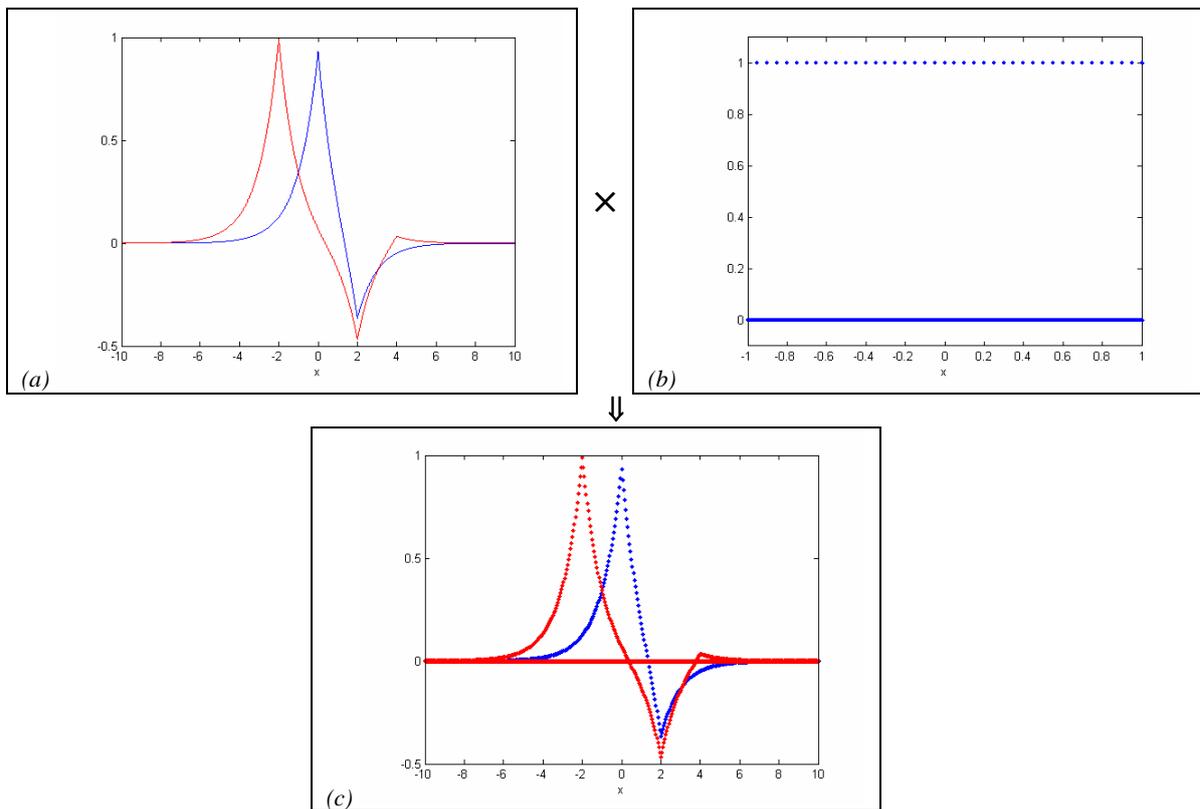


Figura 4-2-1: Muestreo de funciones, Ejemplo I:

(a) Función $f(x) = \left(e^{-|x|} - \frac{1}{2} e^{-|x-2|} \right) + i \left(e^{-|x+2|} - \frac{1}{2} e^{-|x-2|} + \frac{1}{10} e^{-|x-4|} \right)$.

(b) Serie de impulsos unitarios equiespaciados $\Delta^{0,05}$.

(c) Función muestreada $f^{0,05}$.

La relación entre figuras es $(a) \times (b) = (c)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

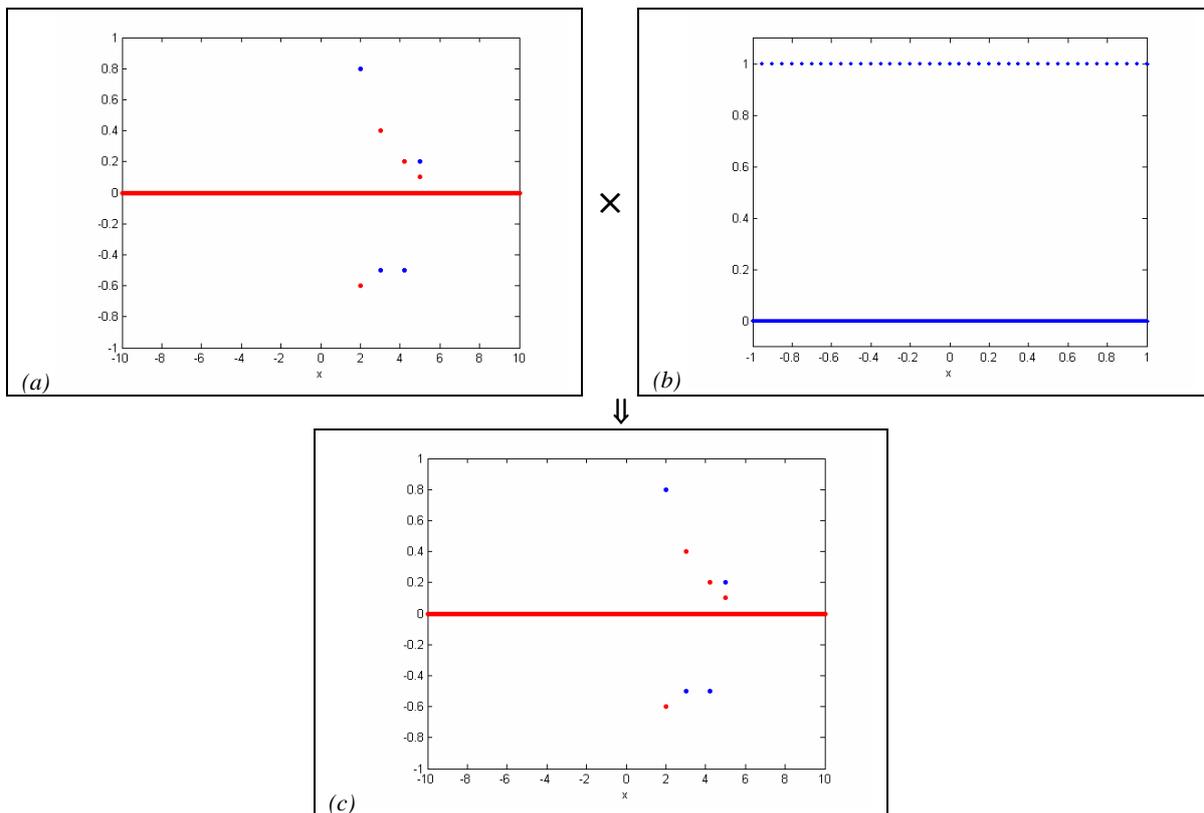


Figura 4–2-2: Muestreo de funciones, Ejemplo II:

(a) Función $g(x) = (0,8 - 0,6i) \cdot \delta(x - 2) + (-0,5 + 0,4i) \cdot \delta(x - 3) + (-0,5 + 0,2i) \cdot \delta(x - 4) + (0,2 + 0,1i) \cdot \delta(x - 5)$.

(b) Serie de impulsos unitarios equiespaciados $\Delta^{0,05}$.

(c) Función muestreada $g^{0,05}$.

La relación entre figuras es $(a) \times (b) = (c)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

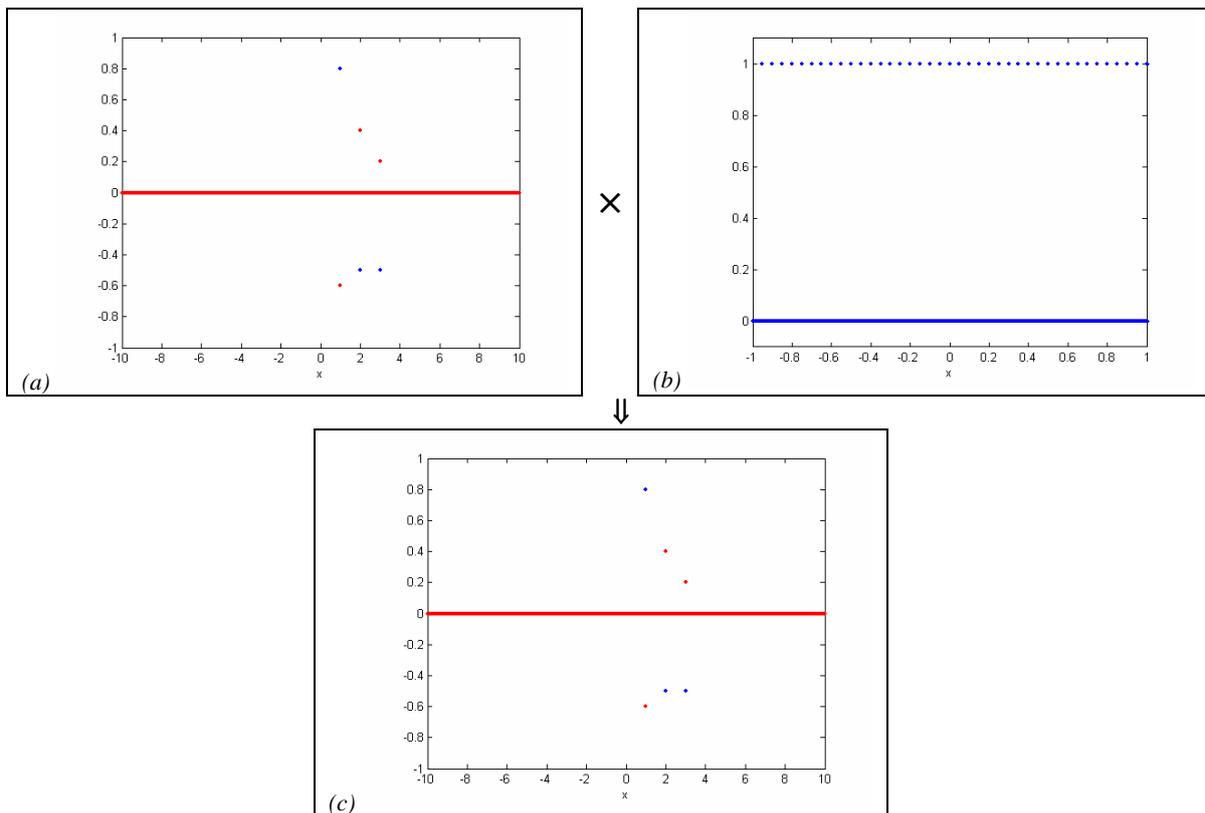


Figura 4–2-3: Muestreo de funciones, Ejemplo III:

(a) Función $k(x) = (0,8 - 0,6i) \cdot \delta(x-1) + (-0,5 + 0,4i) \cdot \delta(x-2) + (-0,5 + 0,2i) \cdot \delta(x-3)$.

(b) Serie de impulsos unitarios equiespaciados $\Delta^{0,05}$.

(c) Función muestreada $k^{0,05}$.

La relación entre figuras es $(a) \times (b) = (c)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

4.2.2. Acotación del soporte de funciones. Ventanas

La acotación del soporte de una función f se consigue mediante la aplicación sobre la misma de una ventana:

► **DEFINICIÓN (VENTANA).** Se define la ventana con soporte en el intervalo $[0, VX]$ como una función v_{VX} de soporte en dicho intervalo, esto es (Daubechies, 1992; Kaiser, 1994):

$$v_{VX}(x) \equiv \begin{cases} v(x) & 0 < x < VX \\ 0 & x \leq 0 \vee VX \leq x \end{cases}, \quad v(x) \neq 0 \quad (4.2.5)$$

◀

Obsérvese que, dada la acotación del soporte de la ventana, la aplicación de la misma sobre una función f tiene por resultado una función con soporte acotado:

► **DEFINICIÓN (FUNCIÓN CON SOPORTE ACOTADO POR APLICACIÓN DE UNA VENTANA).** Dadas una función f y una ventana v_{VX} , se define la función con soporte acotado por aplicación de la ventana, y se denota por $f_{\chi, v_{VX}}$, al producto (Daubechies, 1992; Kaiser, 1994):

$$f_{\chi, v_{VX}}(x) \equiv v_{VX}(x - \chi) \cdot f(x) \quad (4.2.6)$$

El valor de χ y la longitud de la ventana VX determinan el soporte de la función $f_{\chi, v_{VX}}$, dado por intervalo $[\chi, VX + \chi]$.

◀

Este resultado se ejemplifica en las figuras 4-2-4 a 4-2-6, empleándose la ventana de Hanning (Press et al., 1992, 1996). Esta ventana, con soporte en el intervalo $[0, VX]$, viene dada por la expresión:

$$h_{VX}(x) \equiv \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{VX}x - \pi\right) \right] & 0 < x < VX \\ 0 & x \leq 0 \vee VX \leq x \end{cases} \quad (4.2.7)$$

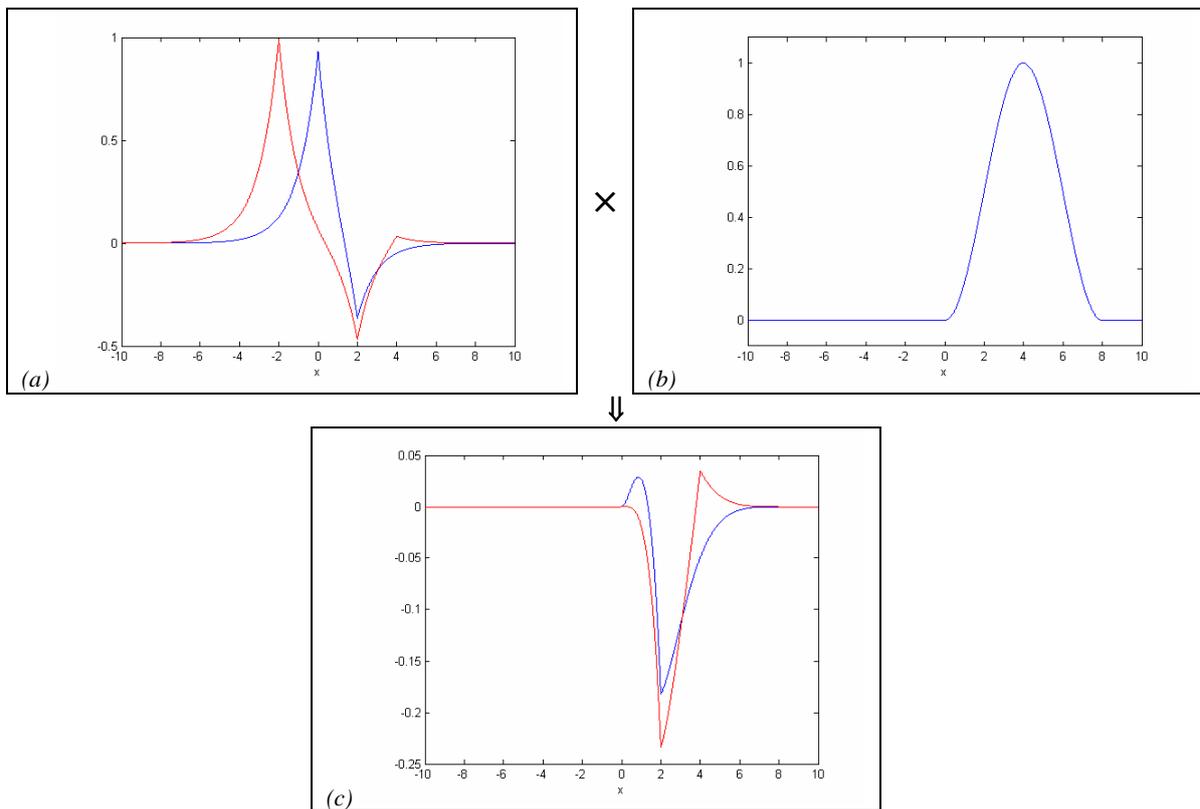


Figura 4-2-4: Acotación del soporte de funciones mediante la aplicación de ventanas, Ejemplo I:

(a) Función f .

(b) Ventana $h_8(x + 0,025)$.

(c) Función con soporte acotado $f_{0,025;h_8}$.

La relación entre figuras es $(a) \times (b) = (c)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

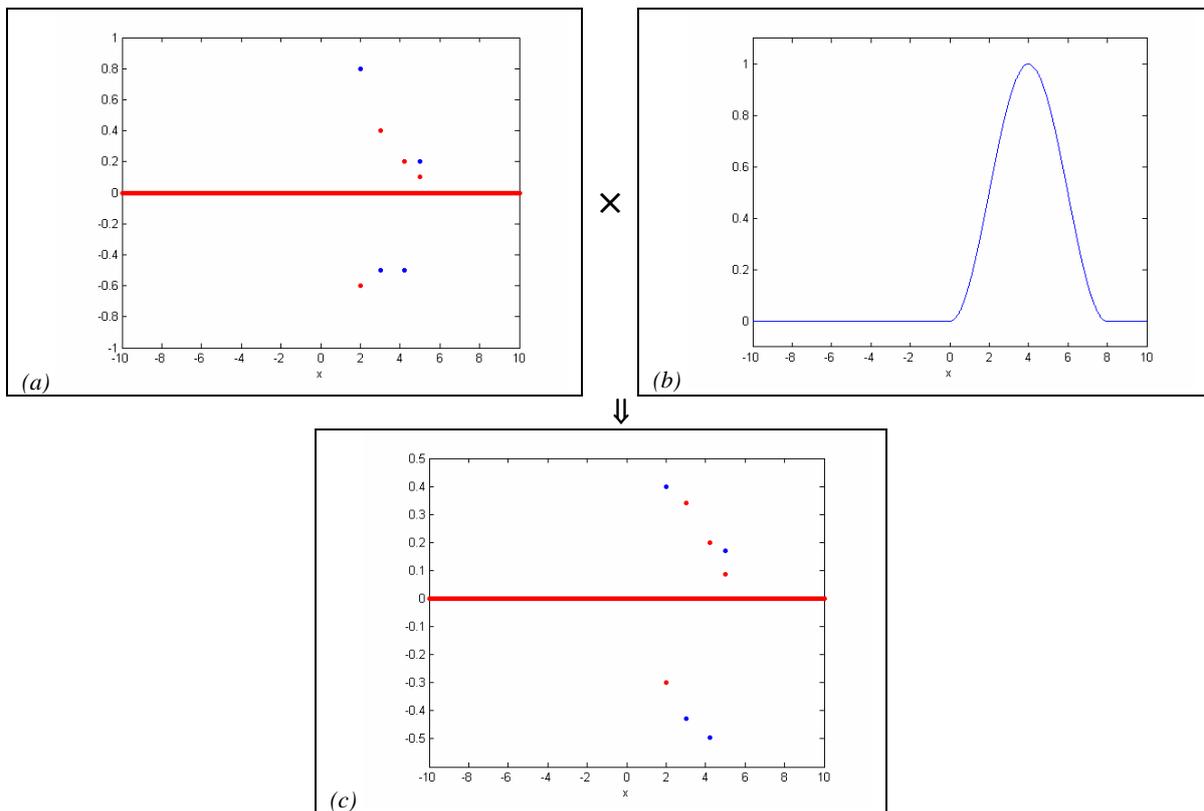


Figura 4–2-5: Acotación del soporte de funciones mediante la aplicación de ventanas, Ejemplo II:

(a) Función g .

(b) Ventana $h_g(x + 0,025)$.

(c) Función con soporte acotado $g_{0,025;h_g}$.

La relación entre figuras es $(a) \times (b) = (c)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

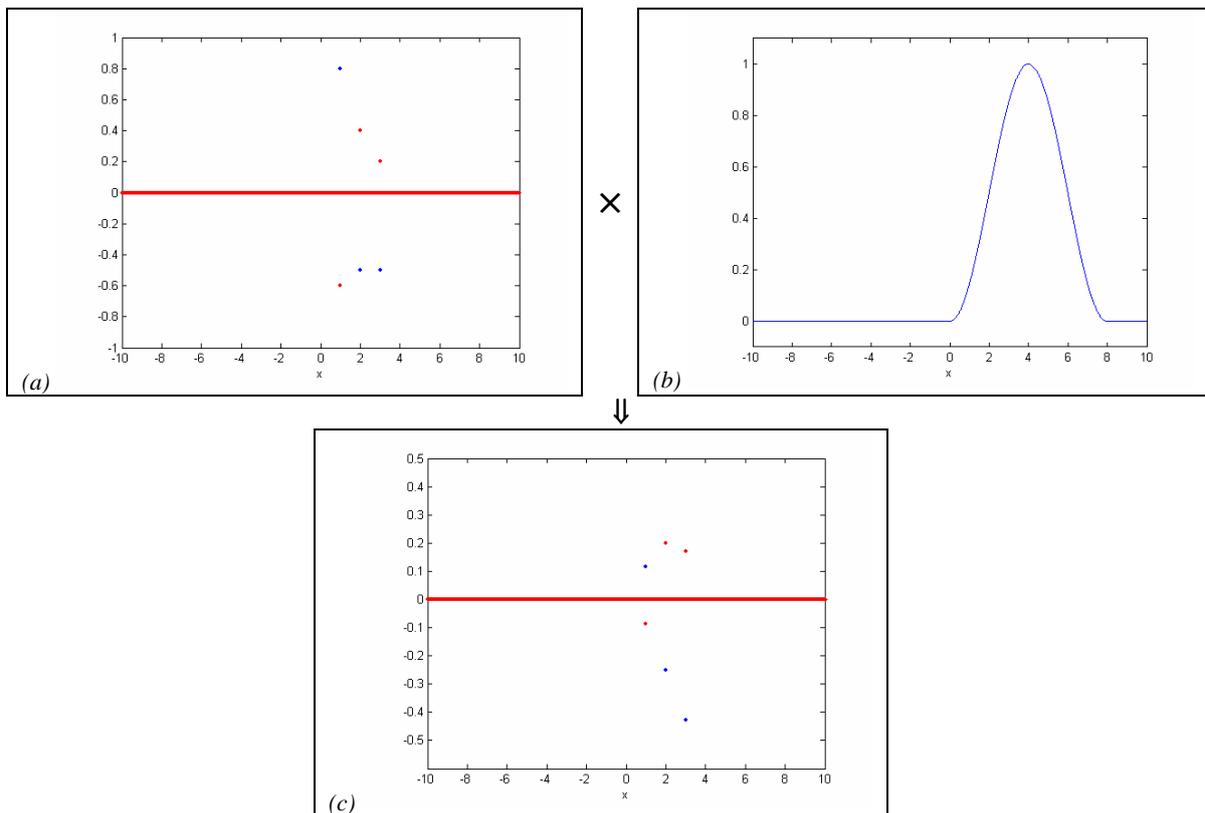


Figura 4–2-6: Acotación del soporte de funciones mediante la aplicación de ventanas, Ejemplo III:

(a) Función k .

(b) Ventana $h_8(x + 0,025)$.

(c) Función con soporte acotado $k_{0,025;h_8}$.

La relación entre figuras es $(a) \times (b) = (c)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

4.2.3. Funciones muestreadas con soporte acotado

El muestreo y la acotación del soporte de una función f se consigue mediante la aplicación simultánea sobre la misma de la serie infinita de impulsos unitarios equiespaciados y una ventana:

► **DEFINICIÓN (FUNCIÓN MUESTREADA CON SOPORTE ACOTADO).** Dadas una función f y una ventana v_{VX} , se define la función muestreada con periodo o espaciado EX y soporte acotado por aplicación de la ventana, y se denota por $f_{\chi, v_{VX}}^{EX}$, al producto:

$$\begin{aligned} f_{\chi, v_{VX}}^{EX}(x) &\equiv v_{VX}(x - \chi) \cdot f(x) \cdot \Delta^{EX}(x) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_{VX}(n \cdot EX - \chi) \cdot f(n \cdot EX) \cdot \delta(x - n \cdot EX) \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

El valor de χ y la longitud de la ventana VX determinan el soporte de la función $f_{\chi, v_{VX}}^{EX}$, dado por intervalo $[\chi, VX + \chi]$.

Dada la acotación del soporte de la ventana, es posible reescribir (4.2.8) de la forma:

$$f_{\chi, v_{VX}}^{EX}(x) = \sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} v_{VX}(n \cdot EX - \chi) \cdot f(n \cdot EX) \cdot \delta(x - n \cdot EX) \quad (4.2.9)$$

De tal forma que esta función está representada por los valores:

$$f_{\chi, v_{VX}}^{EX}(n \cdot EX) = v_{VX}(n \cdot EX - \chi) \cdot f(n \cdot EX) \quad (4.2.10)$$

$$\forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n}\}$$

Donde se ha definido:³

$$\underline{n} \equiv \left\lceil \frac{\chi}{EX} \right\rceil, \quad \bar{n} \equiv \left\lfloor \frac{VX + \chi}{EX} \right\rfloor \quad (4.2.11)$$

Y se define el número de puntos en el eje:

$$PE \equiv \text{card}\{\underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n}\} \quad (4.2.12)$$

◀

Este resultado se ejemplifica en las figuras 4-2-7 a 4-2-9:

³ Se denota $\lceil x \rceil$ el menor entero mayor o igual que x , y $\lfloor x \rfloor$ el mayor entero menor o igual que x .

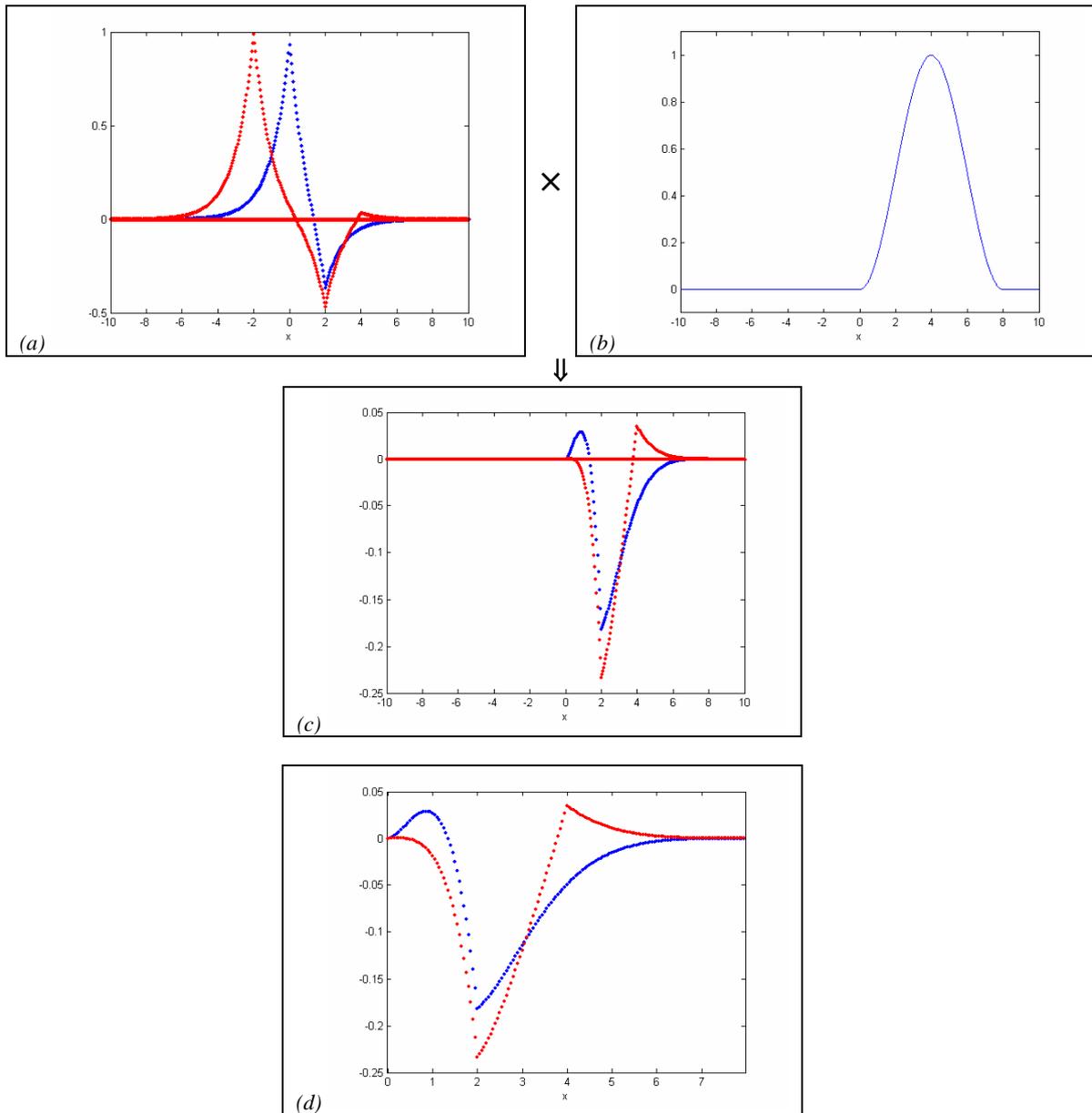


Figura 4-2-7: Funciones muestreadas con soporte acotado, Ejemplo I:

(a) Función muestreada $f^{0,05}$.

(b) Ventana $h_8(x + 0,025)$.

(c) Función muestreada con soporte acotado $f_{0,025;h_8}^{0,05}$.

La relación entre figuras es $(a) \times (b) = (c)$.

(d) Valores representativos de $f_{0,025;h_8}^{0,05}$ en el intervalo $(-0,025; 7,975)$. En este ejemplo $PE = 160$.

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

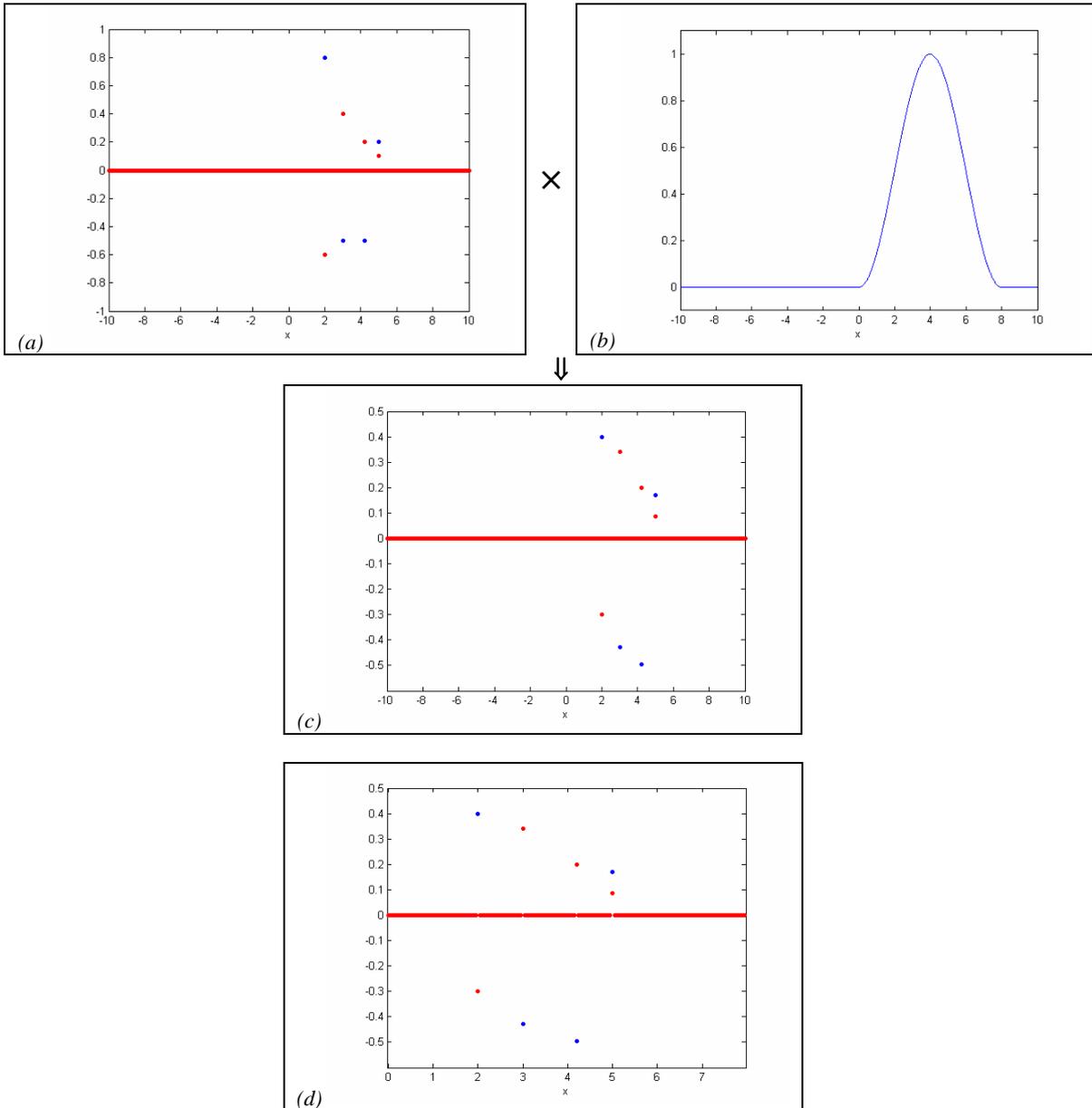


Figura 4–2-8: Funciones muestreadas con soporte acotado, Ejemplo II:

(a) Función muestreada $g^{0,05}$.

(b) Ventana $h_8(x + 0,025)$.

(c) Función muestreada con soporte acotado $g_{0,025;h_8}^{0,05}$.

La relación entre figuras es $(a) \times (b) = (c)$.

(d) Valores representativos de $g_{0,025;h_8}^{0,05}$ en el intervalo $(-0,025; 7,975)$. En este ejemplo $PE = 160$.

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

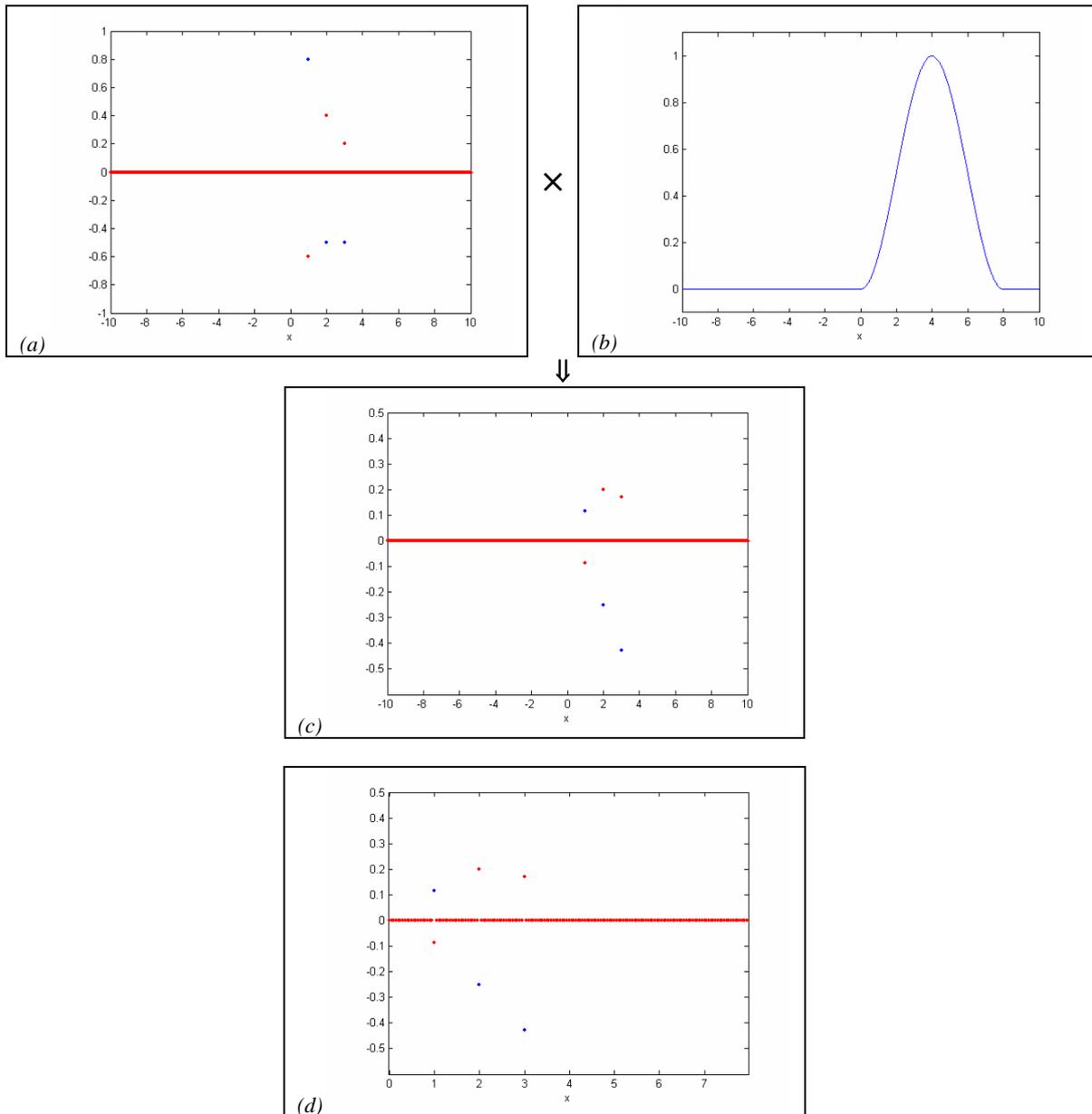


Figura 4–2-9: Funciones muestreadas con soporte acotado, Ejemplo III:

(a) Función muestreada $k^{0,05}$.

(b) Ventana $h_8(x + 0,025)$.

(c) Función muestreada con soporte acotado $k_{0,025;h_8}^{0,05}$.

La relación entre figuras es $(a) \times (b) = (c)$.

(d) Valores representativos de $k_{0,025;h_8}^{0,05}$ en el intervalo $(-0,025; 7,975)$. En este ejemplo $PE = 160$.

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

En los casos que se tratan en esta Tesis Doctoral, siempre será $\chi = -\frac{EX}{2}$ y VX un múltiplo entero de EX de tal forma que, una vez fijado PE , sean $\underline{n} = 0$, $\bar{n} = PE - 1$. Nótese que los PE valores donde se calcula la transformada se extienden desde $x = 0$ hasta $x = (PE - 1) \cdot EX$, siendo la longitud del eje muestreado:

$$LX \equiv (PE - 1) \cdot EX \tag{4.2.13}$$

Y la longitud de la ventana:

$$VX \equiv LX + EX = PE \cdot EX \tag{4.2.14}$$

Este resultado se ejemplifica en la Figura 4-2-10:

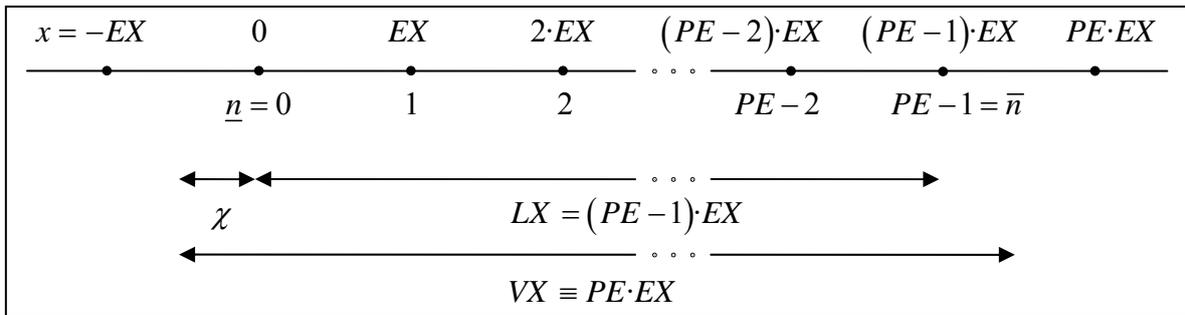


Figura 4-2-10: Elección de χ y determinación de LX , VX y los índices n .

4.3. Transformadas de Fourier de funciones muestreadas con soporte acotado

En esta Sección se exponen las expresiones pertinentes para la determinación de las transformadas de Fourier directa e inversa de funciones muestreadas con soporte acotado, y se expresa la relación entre estas transformadas de Fourier y las transformadas de Fourier discretas que se determinan computacionalmente.⁴

El desarrollo de las demostraciones es, en ambos casos, paralela al desarrollo que realiza Papoulis (1962) en la §3–2 de su obra.

En la última Subsección se exponen, a modo de compendio, las relaciones entre las magnitudes que describen las funciones en los dominios natural y frecuencial, como referencia para las secciones subsiguientes.

4.3.1. Transformada de Fourier directa

► **PROPOSICIÓN (TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA FUNCIÓN MUESTREADA CON SOPORTE ACOTADO).**⁵ Dada una función muestreada con soporte acotado $f_{\chi, v_{VX}}^{EX}$ definida en el dominio natural, dada por (4.2.9), se determina su transformada de Fourier, y se representa por $(F_{\chi, v_{VX}}^{EX})^{EU}$, mediante la expresión:

$$(F_{\chi, v_{VX}}^{EX})^{EU}(u) = EU \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} v_{VX}(n \cdot EX - \chi) \cdot f(n \cdot EX) \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \right) \cdot \delta(u - k \cdot EU) \quad (4.3.1)$$

Representada por repeticiones cíclicas de los valores:

$$(F_{\chi, v_{VX}}^{EX})_{v, l_{VU}}^{EU}(k \cdot EU) = EU \cdot \sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} v_{VX}(n \cdot EX - \chi) \cdot f(n \cdot EX) \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \quad (4.3.2)$$

$$\forall k \in \{ \underline{k} \quad \underline{k} + 1 \quad \dots \quad \bar{k} - 1 \quad \bar{k} \}$$

Donde se ha definido el espaciado en el dominio frecuencial:

$$EU \equiv \frac{2\pi}{VX} \quad (4.3.3)$$

⁴ En el desarrollo de este Capítulo, se entenderá que las transformadas determinadas computacionalmente se calculan con MATLAB (Cf. §6.1).

⁵ La demostración puede encontrarse en la §4.A.1.1 del Anexo.

Y el conjunto de índices $\{\underline{k} \quad \underline{k}+1 \quad \dots \quad \bar{k}-1 \quad \bar{k}\}$ cumple la condición:

$$\text{card}\{\underline{k} \quad \underline{k}+1 \quad \dots \quad \bar{k}-1 \quad \bar{k}\} = PE \quad (4.3.4)$$



Puesto que la función $f_{\chi, v_{VX}}^{EX}$ tiene únicamente PE valores independientes, su transformada de Fourier $(F_{\chi, v_{VX}}^{EX})_{u, l_{VU}}^{EU}$ también tendrá PE valores independientes, siendo el resto repeticiones cíclicas de éstos. Esto equivale, formalmente, a la aplicación sobre la transformada $(F_{\chi, v_{VX}}^{EX})^{EU}$ de una ventana cuadrada, dada por la expresión:

$$I_{VU}(u) \equiv \begin{cases} 1 & 0 < u < VU \\ 0 & u \leq 0 \vee VU \leq u \end{cases} \quad (4.3.5)$$

En los casos que se tratan en esta Tesis Doctoral, siempre se elegirá $u = -\frac{EU}{2}$ y la longitud de la ventana $VU = PE \cdot EU$, de tal forma que $\underline{k} = 0$ y $\bar{k} = PE - 1$.

Obsérvese que los valores de la transformada dados por (4.3.2) son EU veces los valores de la transformada de Fourier discreta que se determina computacionalmente, dada por (Brigham, 1974):

$$\tilde{F}_{u, l_{VU}}^{EU}(k \cdot EU) = \sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} v_{VX}(n \cdot EX - \chi) \cdot f(n \cdot EX) \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \quad (4.3.6)$$

$$\forall k \in \{\underline{k} \quad \underline{k}+1 \quad \dots \quad \bar{k}-1 \quad \bar{k}\}$$

Estos resultados se ejemplifican en las figuras 4-3-1 a 4-3-3:

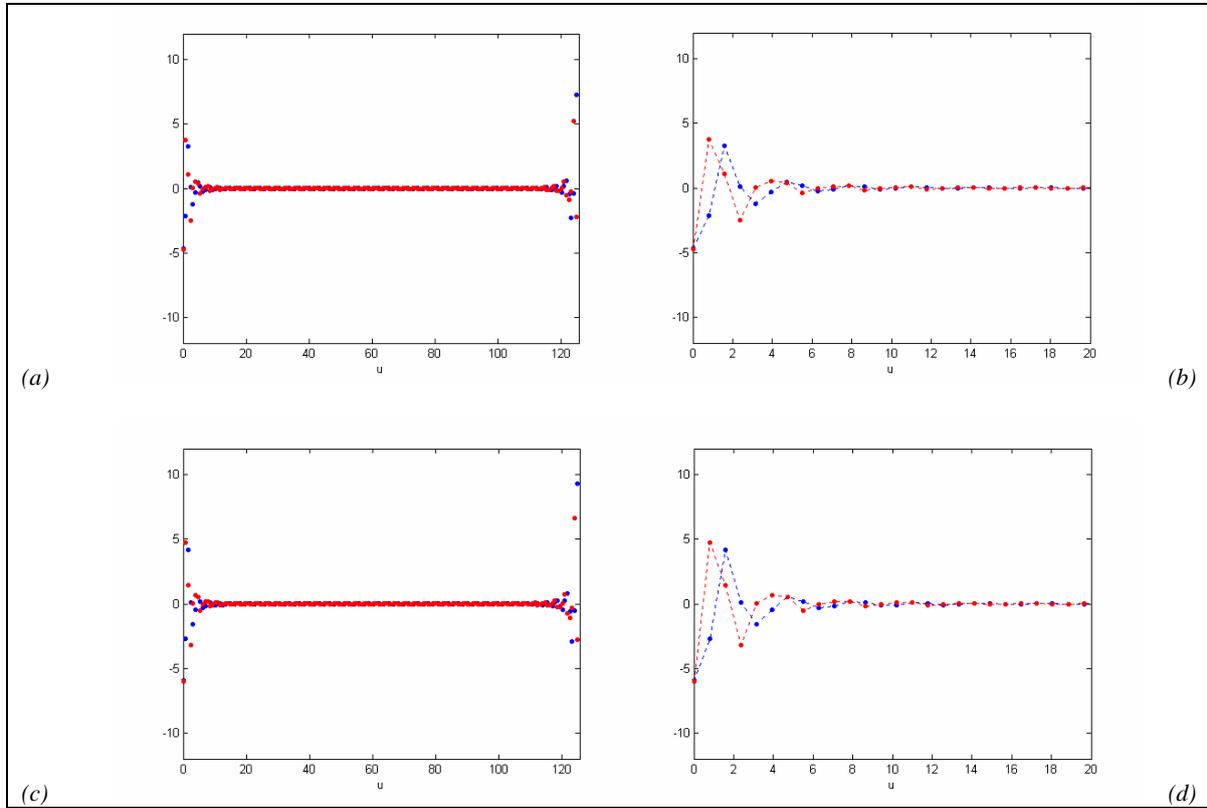


Figura 4–3-1: Transformada de Fourier directa de funciones muestreadas con soporte acotado, Ejemplo I:

(a) Transformada de Fourier $\left(F_{0,025;h_8}^{0,05}\right)_{\pi/8;1_{40\pi}}^{\pi/4}$, y (b) detalle.

(c) Transformada de Fourier discreta $\tilde{F}_{\pi/8;1_{40\pi}}^{\pi/4}$, y (d) detalle.

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.

Obsérvese que los valores en (a), (b) son $\pi/4$ veces los valores en (c), (d) respectivamente.

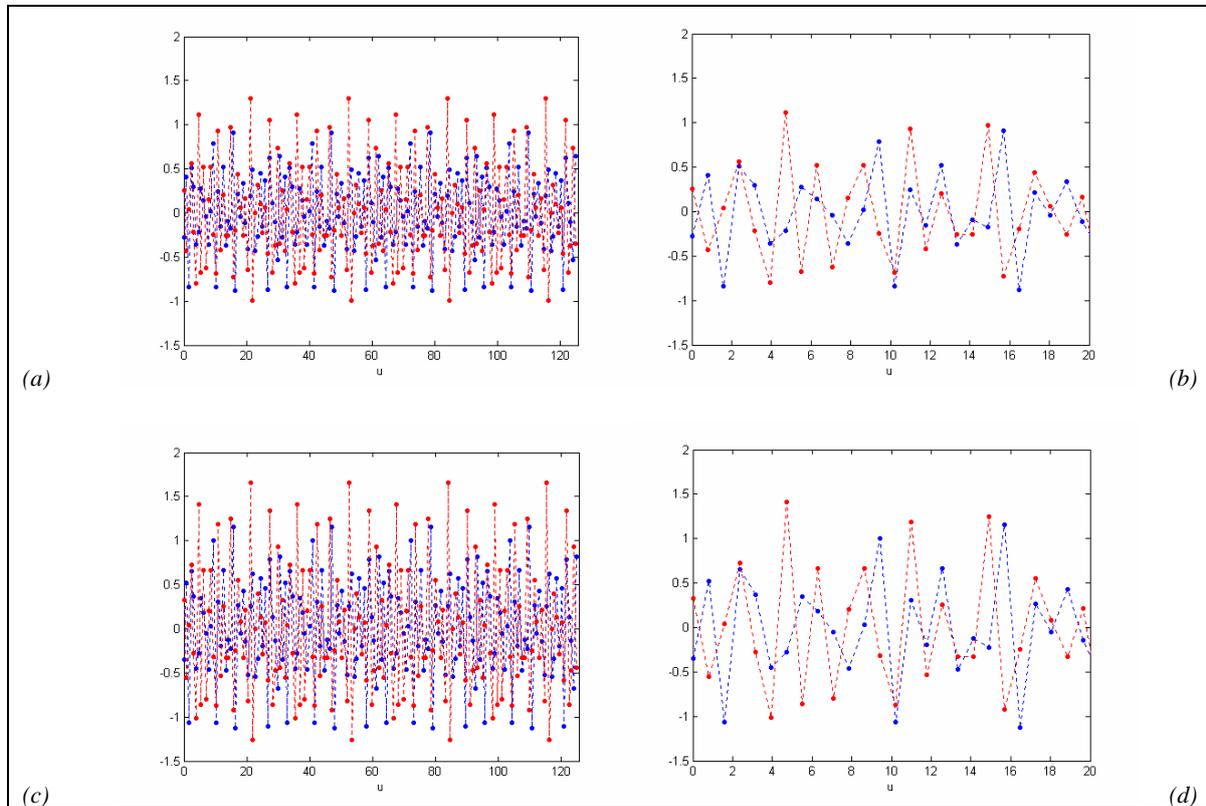


Figura 4–3-2: Transformada de Fourier directa de funciones muestreadas con soporte acotado, Ejemplo II:

(a) Transformada de Fourier $\left(G_{0,025;h_8}^{0,05}\right)_{\pi/8;1_{40\pi}}^{\pi/4}$, y (b) detalle.

(c) Transformada de Fourier discreta $\tilde{G}_{\pi/8;1_{40\pi}}^{\pi/4}$, y (d) detalle.

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.

Obsérvese que los valores en (a), (b) son $\pi/4$ veces los valores en (c), (d) respectivamente.

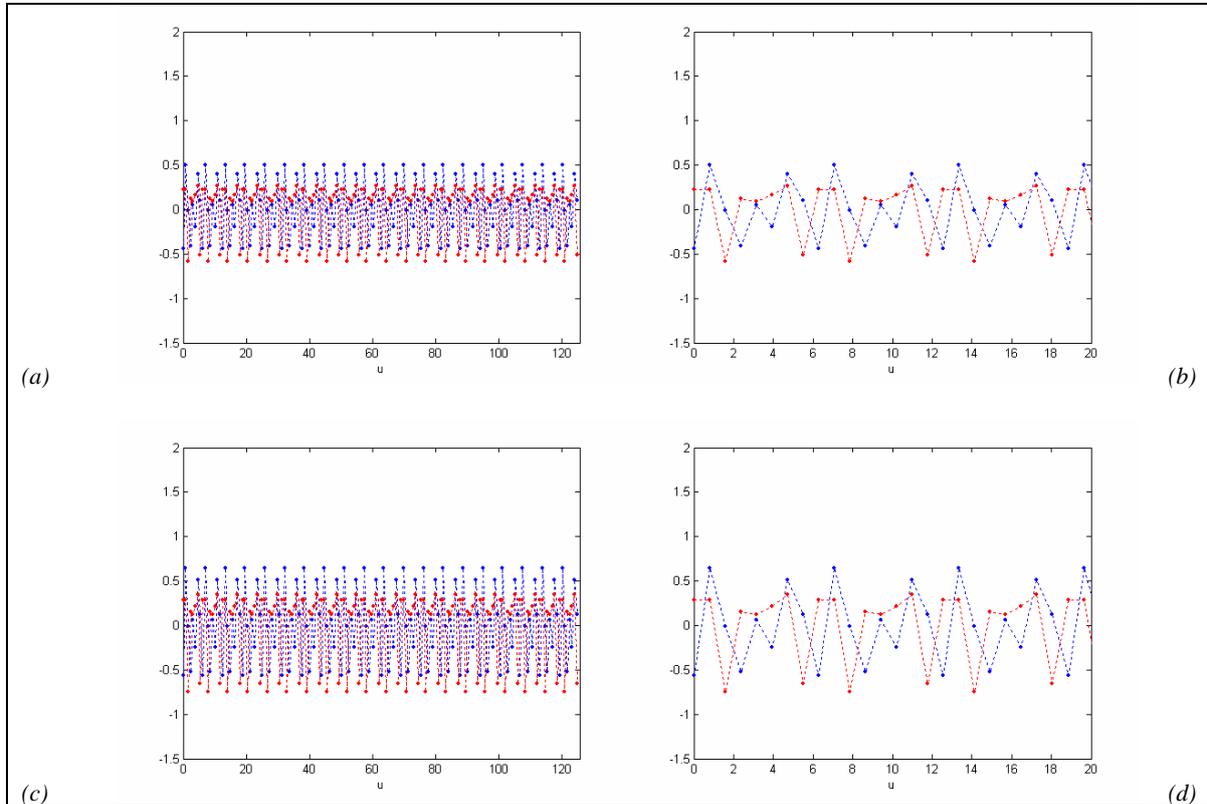


Figura 4–3-3: Transformada de Fourier directa de funciones muestreadas con soporte acotado, Ejemplo III:

(a) Transformada de Fourier $\left(K_{0,025;b_8}^{0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4}$, y (b) detalle.

(c) Transformada de Fourier discreta $\tilde{K}_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4}$, y (d) detalle.

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.

Obsérvese que los valores en (a), (b) son $\pi/4$ veces los valores en (c), (d) respectivamente.

4.3.2. Transformada de Fourier inversa

En este caso se considera una función muestreada con soporte acotado F_{ν, V_U}^{EU} , resultado de muestrear con periodo o espaciado EU , y aplicar una ventana V_U sobre una función F definida en el dominio frecuencial, dada por una expresión análoga a (4.2.9):

$$F_{\nu, V_U}^{EU}(u) = \sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} V_U(k \cdot EU - \nu) \cdot F(k \cdot EU) \cdot \delta(u - k \cdot EU) \quad (4.3.7)$$

Representada por los valores:

$$F_{\nu, V_U}^{EU}(k \cdot EU) = V_U(k \cdot EU - \nu) \cdot F(k \cdot EU) \quad (4.3.8)$$

$$\forall k \in \{\underline{k} \quad \underline{k} + 1 \quad \dots \quad \bar{k} - 1 \quad \bar{k}\}$$

Donde $\underline{k} = \left\lceil \frac{\nu}{EU} \right\rceil$ y $\bar{k} = \left\lfloor \frac{V_U + \nu}{EU} \right\rfloor$. En este desarrollo se considera $\nu = -\frac{EU}{2}$ y

V_U múltiplo entero de EU de tal forma que $\underline{k} = 0$, $\bar{k} = PE - 1$. Nótese que los PE valores se extienden desde $u = 0$ hasta $u = (PE - 1) \cdot EU$, siendo la longitud del eje muestreado:

$$LU \equiv (PE - 1) \cdot EU \quad (4.3.9)$$

Y la longitud de la ventana:

$$V_U \equiv LU + EU = PE \cdot EU \quad (4.3.10)$$

► **PROPOSICIÓN (TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA DE UNA FUNCIÓN MUESTREADA CON SOPORTE ACOTADO),⁶** Dada una función muestreada con soporte acotado F_{ν, V_U}^{EU} definida en el dominio frecuencial, dada por (4.3.7), se determina su transformada de Fourier inversa, y se representa por $(f_{\nu, V_U}^{EU})_{x, 1_{V_U}}^{EX}$, mediante la expresión:

$$(f_{\nu, V_U}^{EU})^{EX} = \frac{1}{V_U} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} V_U(k \cdot EU - \nu) \cdot F(k \cdot EU) \cdot e^{ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \right) \cdot \delta(x - n \cdot EX) \quad (4.3.11)$$

Representada por repeticiones cíclicas de los valores:

⁶ La demostración puede encontrarse en la §4.A.1.2 del Anexo.

$$\left(f_{\nu, V_{VU}}^{EU}\right)_{\chi, 1_{VX}}^{EX}(n \cdot EX) = \frac{1}{VU} \sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} V_{VU}(k \cdot EU - \nu) \cdot F(k \cdot EU) \cdot e^{ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \quad (4.3.12)$$

$$\forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n}\}$$

Donde se ha definido el espaciado en el dominio natural:

$$EX \equiv \frac{2\pi}{VU} \quad (4.3.13)$$

Y el conjunto de índices $\{\underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n}\}$ cumple la condición:

$$\text{card}\{\underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n}\} = PE \quad (4.3.14)$$

◀

Puesto que la función $F_{\nu, V_{VU}}^{EU}$ tiene únicamente PE valores independientes, su transformada de Fourier $\left(f_{\nu, V_{VU}}^{EU}\right)_{\chi, 1_{VX}}^{EX}$ también tendrá PE valores independientes, siendo el resto repeticiones cíclicas de éstos. Esto equivale, formalmente, a la aplicación sobre la transformada $\left(f_{\nu, V_{VU}}^{EU}\right)^{EX}$ de una ventana cuadrada, dada por la expresión:

$$1_{VX}(x) \equiv \begin{cases} 1 & 0 < x < VX \\ 0 & x \leq 0 \vee VX \leq x \end{cases} \quad (4.3.15)$$

En los casos que se tratan en esta Tesis Doctoral, siempre se elegirá $\chi = -\frac{EX}{2}$ y la longitud de la ventana $VX = PE \cdot EX$, de tal forma que $\underline{n} = 0$ y $\bar{n} = PE - 1$.

Obsérvese que los valores de la transformada dados por (4.3.12) son $1/EU$ veces los valores de la transformada de Fourier inversa discreta que se determina computacionalmente, dada por (Brigham, 1974):

$$\tilde{f}_{\chi, 1_{VX}}^{EX}(n \cdot EX) = \frac{1}{PE} \sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} V_{VU}(k \cdot EU - \nu) \cdot F(k \cdot EU) \cdot e^{ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \quad (4.3.16)$$

$$\forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n}\}$$

Estos resultados se ejemplifican en las figuras 4-3-4 a 4-3-6:

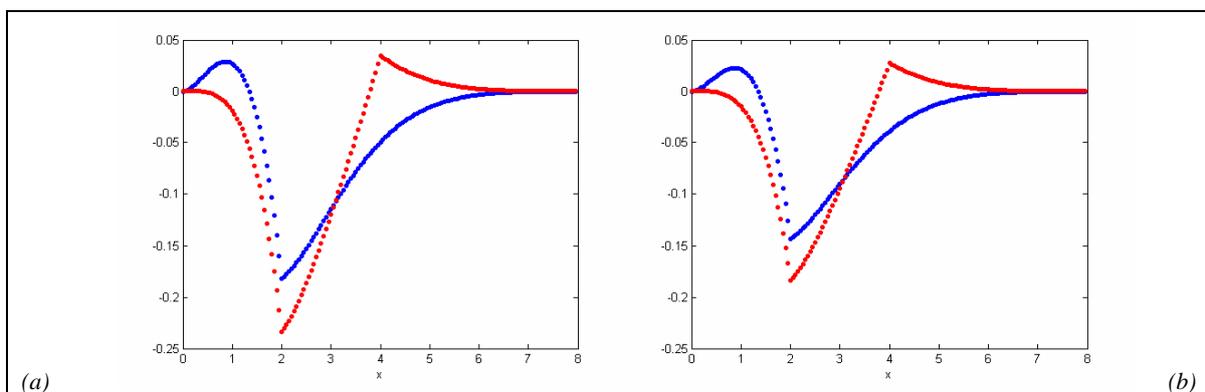


Figura 4-3-4: Transformada de Fourier inversa de funciones muestreadas con soporte acotado, Ejemplo I:

$$(a) \text{ Transformada de Fourier } \left(\left(f_{0,025;h_8}^{0,05} \right)_{\pi/8; 1_{40\pi}}^{\pi/4} \right)_{0,025; 1_8}^{0,05}.$$

$$(b) \text{ Transformada de Fourier discreta } \tilde{f}_{0,025; 1_8}^{0,05} \text{ de la función } \left(F_{0,025;h_8}^{0,05} \right)_{\pi/8; 1_{40\pi}}^{\pi/4}.$$

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

Obsérvese que los valores en (a) son $4/\pi$ veces los valores en (b). (Cf. Figura 4-2-7 (d)).

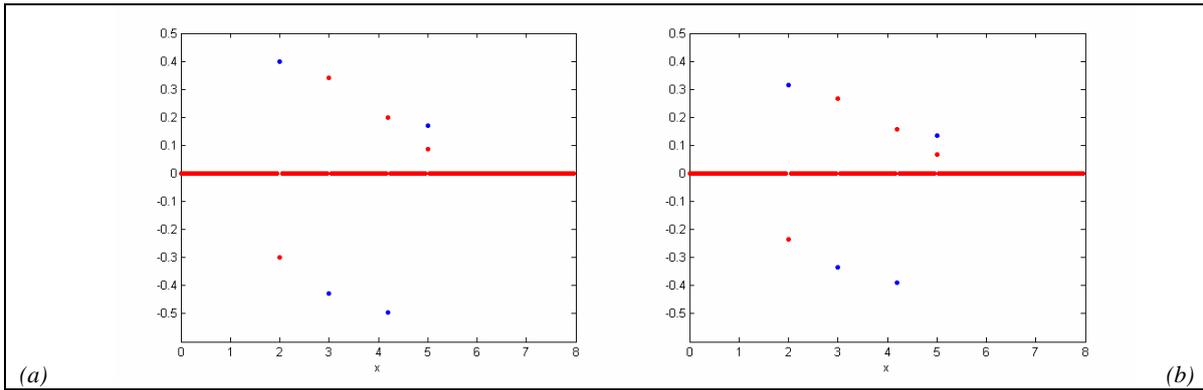


Figura 4-3-5: Transformada de Fourier inversa de funciones muestreadas con soporte acotado, Ejemplo II:

(a) Transformada de Fourier $\left(\left(g_{0,025;h_8} \right)_{\pi/8;140\pi} \right)_{0,025;1_8}^{\pi/4} \Big)^{0,05}$.

(b) Transformada de Fourier discreta $\tilde{g}_{0,025;1_8}^{0,05}$ de la función $\left(G_{0,025;h_8} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4}$.

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

Obsérvese que los valores en (a) son $4/\pi$ veces los valores en (b). (Cf. Figura 4-2-8 (d)).

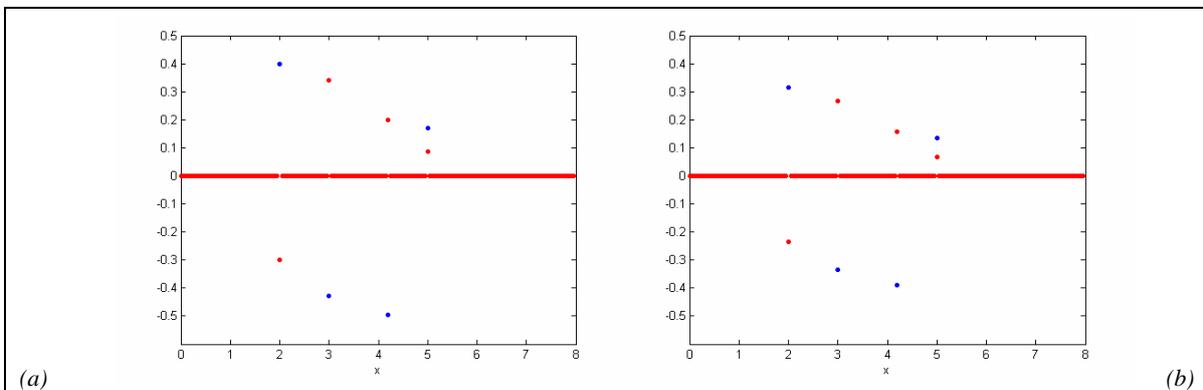


Figura 4-3-6: Transformada de Fourier inversa de funciones muestreadas con soporte acotado, Ejemplo III:

(a) Transformada de Fourier $\left(\left(k_{0,025;h_8} \right)_{\pi/8;140\pi} \right)_{0,025;1_8}^{\pi/4} \Big)^{0,05}$.

(b) Transformada de Fourier discreta $\tilde{k}_{0,025;1_8}^{0,05}$ de la función $\left(K_{0,025;h_8} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4}$.

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

Obsérvese que los valores en (a) son $4/\pi$ veces los valores en (b). (Cf. Figura 4-2-9 (d)).

4.3.3. Relaciones entre las magnitudes de los dominios natural y frecuencial

En esta Subsección se compilan las relaciones entre las magnitudes fundamentales que describen las funciones en los dominios natural y frecuencial. En la Tabla 4–3-1 puede observarse la simetría entre el espaciado y la longitud de la ventana en ambos dominios, dada la especial relación de conjugación entre éstos.

Tabla 4–3-1: Relaciones entre las magnitudes fundamentales en los dominios natural y frecuencial. En todos los casos PE indica el número de puntos en el eje.

Dominio natural		Dominio frecuencial	
$EX \equiv \frac{2\pi}{VU} = \frac{2\pi}{PE \cdot EU}$ (4.3.13)	Espaciado	(4.3.3)	$EU \equiv \frac{2\pi}{VX} = \frac{2\pi}{PE \cdot EX}$
$LX \equiv (PE - 1) \cdot EX$ (4.2.13)	Longitud de eje muestreado	(4.3.9)	$LU \equiv (PE - 1) \cdot EU$
$VX \equiv PE \cdot EX = \frac{2\pi}{EU}$ (4.2.14)	Longitud de la ventana	(4.3.10)	$VU \equiv PE \cdot EU = \frac{2\pi}{EX}$

4.4. Interpolación en las transformadas de Fourier

Como se ha mencionado anteriormente, la interpolación en la transformada de Fourier es un paso necesario en el proceso del algoritmo expuesto en el Capítulo 3, ya que al aplicar éste se obtiene un espectro filtrado definido en puntos no equiespaciados. Debido a que el cálculo numérico de la transformada de Fourier inversa requiere que el espectro se defina en puntos equiespaciados, será preciso interpolar adecuadamente este nuevo espectro.

Esta cuestión, en el contexto más amplio de las transformaciones integrales, es tratada ampliamente y en primer lugar por Whittaker (1915 y 1927 entre otras, culminación con la obra de 1935) en términos de funciones cardinales.⁷

En esta Tesis Doctoral se considera en primer lugar la interpolación de las transformadas de Fourier teniendo en cuenta el Teorema del Muestreo de Shannon para la transformada inversa:

► **TEOREMA DEL MUESTREO. (SHANNON).** Dada una función $F(u)$ nula fuera del intervalo $(-U, U)$, es posible determinar unívocamente su transformada de Fourier inversa $f(x)$ mediante el conocimiento de los valores $f_n \equiv f\left(\frac{n}{2U}\right)$, mediante la expresión:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{\text{sen}(Ut - n\pi)}{Ut - n\pi} \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{\text{sen } \pi(2Ut - n)}{\pi(2Ut - n)} \quad (4.4.1)$$

◀

La demostración de este Teorema puede encontrarse en el artículo de Shannon (1949).⁸

Este teorema, que considera la aplicación como ventana de un pulso rectangular, aquí se generaliza para funciones muestreadas de soporte acotado mediante la aplicación de una ventana cualquiera.

El desarrollo de las demostraciones es, en ambos casos, paralela al desarrollo que realiza Papoulis (1962) para la transformada inversa en la §3-5 de su obra.

⁷ Puede consultarse un “estado del arte” en el artículo de McNamee et al. (1971).

⁸ Puede consultarse un “estado del arte” en el artículo de Unser (2000).

4.4.1. Interpolación en la transformada de Fourier directa

El objetivo de esta Subsección es, dada una función $(F_{\chi, v_{vX}}^{EX})_{v, l_{vU}}^{EU}$ en la forma (4.3.1), definir una nueva función $(F_{\chi, v_{vX}}^{EX})_{v', l_{vU'}}^{EU'}$ que interpola a la primera en PE valores en el dominio frecuencial, equiespaciados una distancia EU' y contenidos en el intervalo $(v', vU' + v')$.

Para ello, en primer lugar se expondrá una generalización del Teorema del Muestreo para la transformada directa, mediante el cual es posible determinar la transformada de Fourier de una función muestreada y con soporte acotado mediante la aplicación de una ventana cualquiera.

A continuación, se determinará explícitamente la transformada en los anteriormente citados PE valores en el dominio frecuencial, aplicando un desarrollo análogo al expuesto en la §4.2.3.

4.4.1.1. Generalización del Teorema del Muestreo para la transformada directa

► **TEOREMA. (GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DEL MUESTREO PARA LA TRANSFORMADA DIRECTA).**⁹ Dada una función muestreada con soporte acotado $f_{\chi, v_{vX}}^{EX}$ definida en el dominio natural, dada por (4.2.9), su transformada de Fourier puede ser determinada unívocamente mediante el conocimiento de los PE valores:

$$(F_{\chi, l_{vX}}^{EX})_{v, l_{vU}}^{EU}(k \cdot EU) = EU \cdot \sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} 1_{vX}(n \cdot EX - \chi) \cdot f(n \cdot EX) \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \quad (4.4.2)$$

$$\forall k \in \{\underline{k} \quad \underline{k} + 1 \quad \dots \quad \bar{k} - 1 \quad \bar{k}\}$$

Y las funciones:

$$\left(\hat{V}_{\chi, l_{vX}}^q \right) (u | \chi, vX) = EU \cdot \sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} v_{vX}(n \cdot EX - \chi) \cdot e^{-i(u-q \cdot EU)n \cdot EX} \quad (4.4.3)$$

$$\forall q \in \mathbb{Z}$$

Mediante la expresión:

⁹ La demostración puede encontrarse en la §4.A.2.1 del Anexo.

$$\left(F_{\chi, v_{VX}}^{EX}\right)(u) = \frac{1}{VU} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(F_{\chi, l_{VX}}^{EX}\right)_{v, l_{VU}}^{EU} (q \cdot EU) \cdot \left(\hat{V}_{\chi, l_{VX}}^{q EX}\right)(u | \chi, VX) \quad (4.4.4)$$



Obsérvese que los valores $\left(F_{\chi, l_{VX}}^{EX}\right)_{v, l_{VU}}^{EU}$ dados por (4.4.2) son, como se mencionó en la §4.3.1, EU veces los coeficientes de la serie de Fourier de $f_{\chi, l_{VX}}^{EX}$ dada por (4.3.6), con la ventana $1_{v_{VX}}$.

La extensión del índice del sumatorio en (4.4.4) para todo $q \in \mathbb{Z}$ hace referencia a la periodicidad de esta transformada de Fourier, tal como se discutió en la §4.3.1. Esta extensión infinita del índice no es operativa computacionalmente, por lo que en lugar de (4.4.4) se emplea la expresión acotada:

$$\left(F_{\chi, v_{VX}}^{*EX}\right)(u) = \frac{1}{VU} \sum_{q=\underline{k}}^{\bar{k}} \left(F_{\chi, l_{VX}}^{EX}\right)_{v, l_{VU}}^{EU} (q \cdot EU) \cdot \left(\hat{V}_{\chi, l_{VX}}^{q EX}\right)(u | \chi, VX) \quad (4.4.5)$$

Donde el índice q se extiende únicamente a los PE valores independientes que se calculan de la transformada $\left(F_{\chi, l_{VX}}^{EX}\right)_{v, l_{VU}}^{EU}$.

Es importante señalar que no será posible expresar las funciones $\left(\hat{V}_{\chi, l_{VX}}^{q EX}\right)$ dadas por (4.4.3) como transformadas de Fourier de ninguna otra función en forma genérica, pues se evaluarán en puntos $u = k \cdot EU'$ tales que el nuevo espaciado en el dominio frecuencial EU' no será conjugado del espaciado en el dominio natural EX , y no se cumplirán las relaciones expuestas en la Tabla 4-3-1.

Así mismo, en el caso particular en que la ventana inicial v_{VX} fuera un pulso cuadrado $1_{v_{VX}}$, el resultado expuesto en (4.4.4) se reduciría a la fórmula de interpolación a la que conduce el Teorema del Muestreo tradicional, equivalente a (4.4.1), donde la transformada de Fourier de la ventana sería un miembro de la familia de los senos cardinales.

Estos resultados se ejemplifican en las figuras 4-4-1 a 4-4-3:

Figura 4–4-1: Interpolación en la transformada de Fourier directa mediante el Teorema del Muestreo generalizado (I), Ejemplo I:

- (a) Valores de $\left(F_{0,025;1_8}^{*0,05}\right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4}$, y (b) detalle.
- (c–h) Transformadas de las ventanas desplazadas $\left(\hat{h}_{0,025;1_8}^q\right)_{\pi/8;140\pi}^{0,05}(u | 0,025; 8)$ para algunos valores de q .
- (i) Detalle de la transformada de la ventana desplazada con $q = 54$.
- (j) Transformada de Fourier $\left(F_{0,025;h_8}^{*0,05}\right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4}$ (puntos) y transformada de Fourier para interpolar $\left(F_{0,025;h_8}^{*0,05}\right)(u)$ (líneas continuas), y (k) detalle.
-

Figura 4–4-2: Interpolación en la transformada de Fourier directa mediante el Teorema del Muestreo generalizado (I), Ejemplo II:

- (a) Valores de $\left(G_{0,025;1_8}^{*0,05}\right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4}$, y (b) detalle.
- (c–h) Transformadas de las ventanas desplazadas $\left(\hat{h}_{0,025;1_8}^q\right)_{\pi/8;140\pi}^{0,05}(u | 0,025; 8)$ para algunos valores de q .
- (i) Detalle de la transformada de la ventana desplazada con $q = 54$.
- (j) Transformada de Fourier $\left(G_{0,025;h_8}^{*0,05}\right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4}$ (puntos) y transformada de Fourier para interpolar $\left(G_{0,025;h_8}^{*0,05}\right)(u)$ (líneas continuas), y (k) detalle.
-

Figura 4–4-3: Interpolación en la transformada de Fourier directa mediante el Teorema del Muestreo generalizado (I), Ejemplo III:

- (a) Valores de $\left(K_{0,025;h_8}^{*0,05}\right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4}$, y (b) detalle.
- (c–h) Transformadas de las ventanas desplazadas $\left(\hat{h}_{0,025;1_8}^q\right)_{\pi/8;140\pi}^{0,05}(u | 0,025; 8)$ para algunos valores de q .
- (i) Detalle de la transformada de la ventana desplazada con $q = 54$.
- (j) Transformada de Fourier $\left(K_{0,025;h_8}^{*0,05}\right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4}$ (puntos) y transformada de Fourier para interpolar $\left(K_{0,025;h_8}^{*0,05}\right)(u)$ (líneas continuas), y (k) detalle.
-

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.

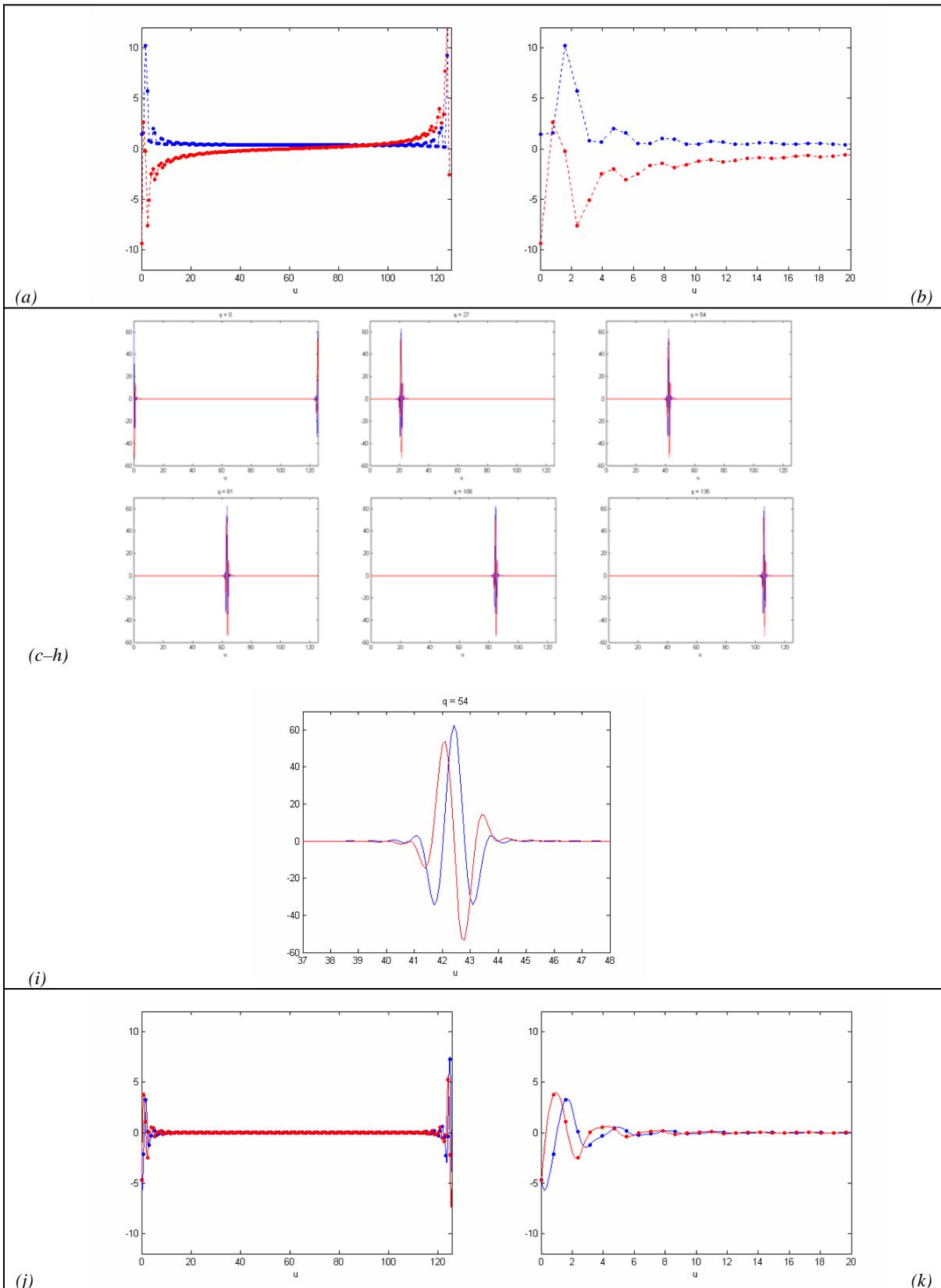


Figura 4-4-1: Interpolación en la transformada de Fourier directa mediante el Teorema del Muestreo generalizado (I), Ejemplo I.

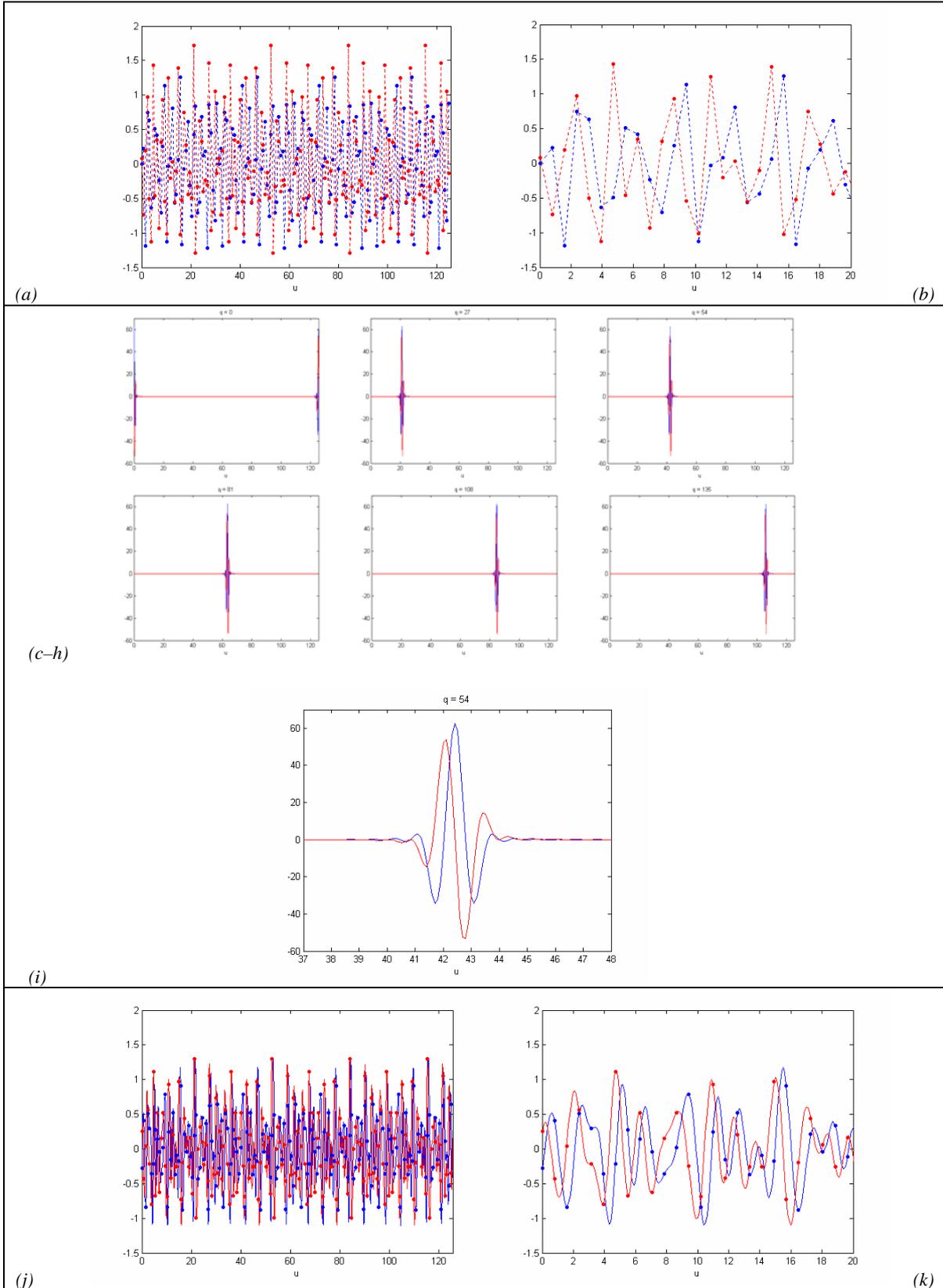


Figura 4-4-2: Interpolación en la transformada de Fourier directa mediante el Teorema del Muestreo generalizado (I), Ejemplo II.

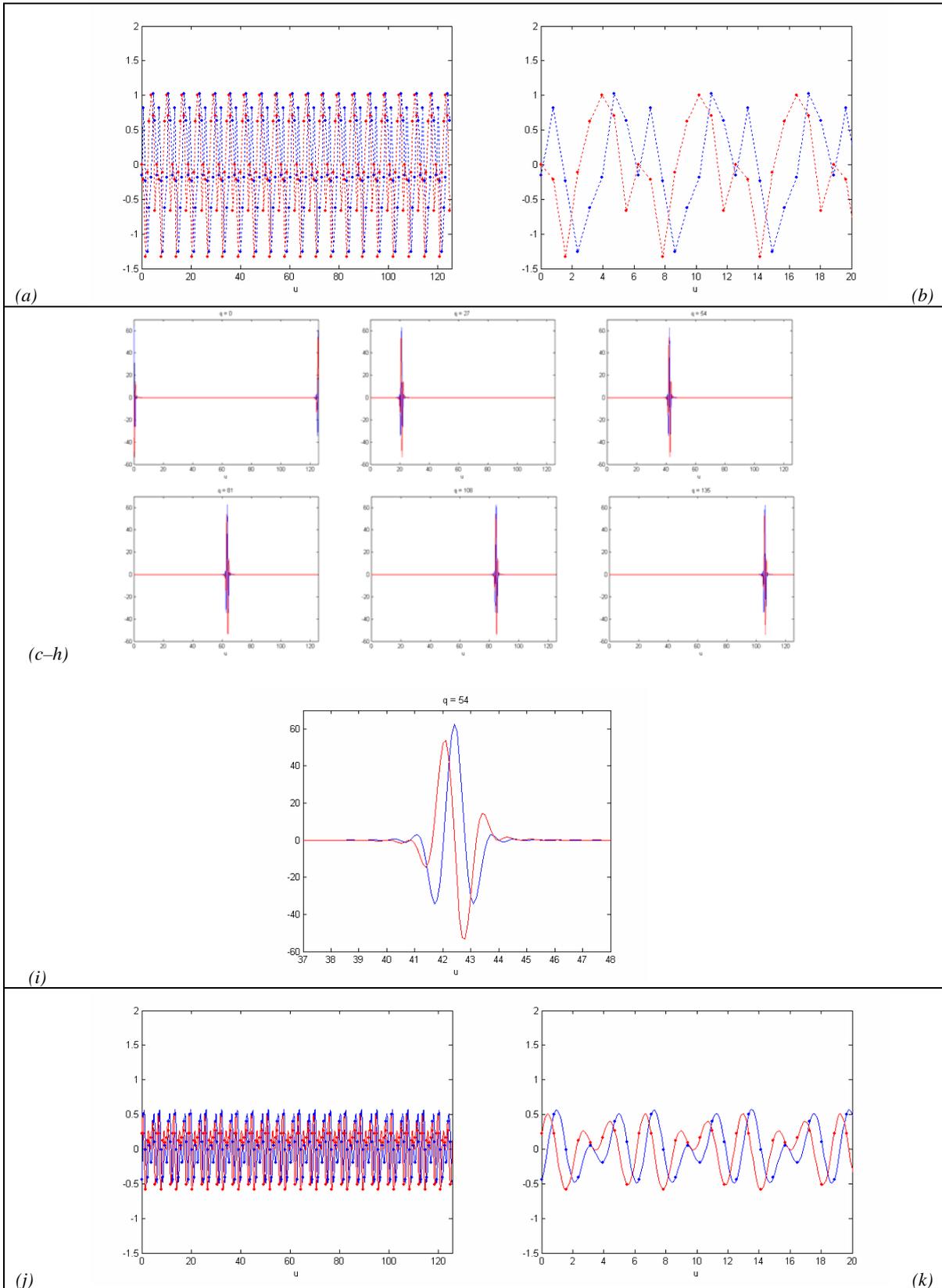


Figura 4-4-3: Interpolación en la transformada de Fourier directa mediante el Teorema del Muestreo generalizado (I), Ejemplo III.

4.4.1.2. Interpolación en la transformada directa

► **DEFINICIÓN (TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA).** Dada una función muestreada con soporte acotado f_{χ, ν_X}^{EX} definida en el dominio natural, dada por (4.2.9), se define la nueva función $\left(F_{\chi, \nu_X}^{EX}\right)_{v', I_{VU'}}^{EU'}$ resultado de la interpolación en la transformada de Fourier $\left(F_{\chi, \nu_X}^{EX}\right)_{v', I_{VU}}^{EU}$ mediante la expresión:

$$\left(F_{\chi, \nu_X}^{EX}\right)_{v', I_{VU'}}^{EU'}(u) \equiv I_{VU'}(u) \cdot \left(F_{\chi, \nu_X}^{EX}\right)(u) \cdot \Delta^{EU'}(u) \quad (4.4.6)$$

Esta expresión se reescribe, sustituyendo el valor de $I_{VU'}$, dado por una expresión análoga a (4.3.5), el valor de $\left(F_{\chi, \nu_X}^{EX}\right)(u)$ dado por (4.4.4) y el valor de $\Delta^{EU'}(u)$ dado por una expresión análoga a (4.2.1), de la forma:

$$\begin{aligned} \left(F_{\chi, \nu_X}^{EX}\right)_{v', I_{VU'}}^{EU'}(u) &= \\ &= \frac{1}{VU} \sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} \left(\sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(F_{\chi, \nu_X}^{EX}\right)^{EU}(q \cdot EU) \cdot \left(\hat{V}_{\chi, \nu_X}^{EX}\right)_{v', I_{VU'}}^{EU'}(k \cdot EU' | \chi, \nu_X) \right) \cdot \delta(u - k \cdot EU') \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

De tal forma que la función $\left(F_{\chi, \nu_X}^{EX}\right)_{v', I_{VU'}}^{EU'}$ viene representada por los valores:

$$\left(F_{\chi, \nu_X}^{EX}\right)_{v', I_{VU'}}^{EU'}(k \cdot EU') = \frac{1}{VU} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(F_{\chi, \nu_X}^{EX}\right)^{EU}(q \cdot EU) \cdot \left(\hat{V}_{\chi, \nu_X}^{EX}\right)_{v', I_{VU'}}^{EU'}(k \cdot EU' | \chi, \nu_X)$$

$$\forall k \in \{\underline{k} \quad \underline{k}+1 \quad \dots \quad \bar{k}-1 \quad \bar{k}\} \quad (4.4.8)$$

Donde el conjunto de índices $\{\underline{k} \quad \underline{k}+1 \quad \dots \quad \bar{k}-1 \quad \bar{k}\}$ cumple la condición:

$$k \cdot EU' \in (v' \quad VU' + v'), \quad \forall k \in \{\underline{k} \quad \underline{k}+1 \quad \dots \quad \bar{k}-1 \quad \bar{k}\} \quad (4.4.9)$$

◀

Atendiendo a la consideración efectuada en el Epígrafe anterior acerca de la extensión del índice del sumatorio para todo $q \in \mathbb{Z}$, en lugar de (4.4.8) se emplea la expresión acotada:

$$\left(F_{\chi, \nu_X}^{*EX}\right)_{\nu', \nu_V}^{EU'}(k \cdot EU') = \frac{1}{VU} \sum_{q=\underline{k}}^{\bar{k}} \left(F_{\chi, \nu_X}^{EX}\right)^{EU}(q \cdot EU) \cdot \left(\hat{V}_{\chi, \nu_X}^{q \cdot EX}\right)_{\nu', \nu_V}^{EU'}(k \cdot EU' | \chi, VX)$$

$$\forall k \in \{\underline{k} \quad \underline{k}+1 \quad \dots \quad \bar{k}-1 \quad \bar{k}\}$$
(4.4.10)

Donde el conjunto de índices $\{\underline{k} \quad \underline{k}+1 \quad \dots \quad \bar{k}-1 \quad \bar{k}\}$ cumple la condición (4.4.9).

En los casos en que se está interesado en la interpolación de PE valores en la región del dominio frecuencial más próxima al origen, desde $u = 0$ hasta $u = (PE - 1) \cdot EU'$, se elegirá $\nu' = -\frac{EU'}{2}$. En los casos en los que se está interesado en la interpolación de PE valores en la región del dominio frecuencial más alejada del origen, desde $u = (PE - 1)(EU - EU')$ hasta $u = (PE - 1) \cdot EU$, se elegirá $\nu' = (PE - 1)(EU - EU') - \frac{EU'}{2}$. En ambos casos se elegirá $VU' = PE \cdot EU'$, de tal forma que $LU' = (PE - 1) \cdot EU'$, $\underline{k} = 0$ y $\bar{k} = PE - 1$.

Es importante señalar que, como es de esperar, se cumple:

► **LEMA (CONSISTENCIA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA).**¹⁰ La función $\left(F_{\chi, \nu_X}^{EX}\right)(u)$ dada por (4.4.4) toma los valores $\left(F_{\chi, \nu_X}^{EX}\right)_{\nu, \nu_V}^{EU}(k \cdot EU)$ en los puntos $u = k \cdot EU$, dados por la transformada de Fourier expresada en (4.3.2).

◄

Estos resultados se ejemplifican en las figuras 4-4-4 a 4-4-6:

¹⁰ La demostración puede encontrarse en la §4.A.2.2 del Anexo.

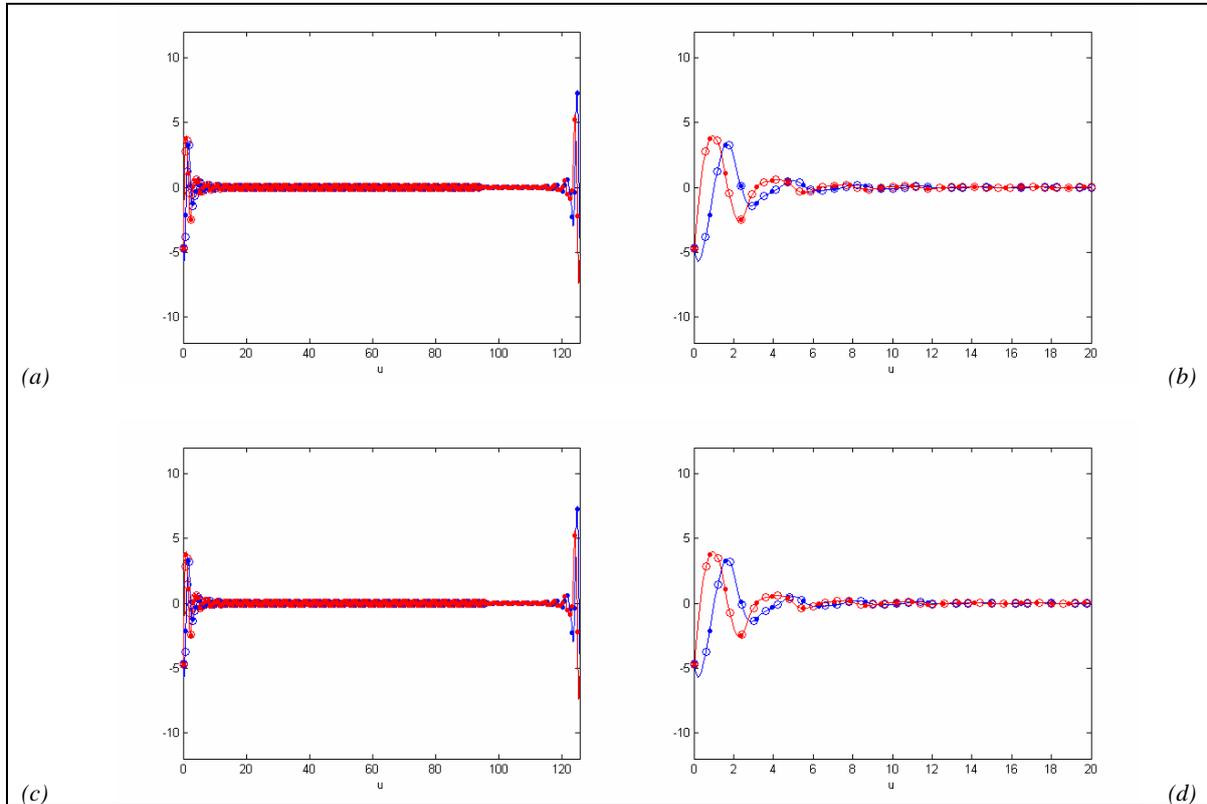


Figura 4-4-4: Interpolación en la transformada de Fourier directa mediante el Teorema del Muestreo generalizado (y II), Ejemplo I:

- (a) Transformada de Fourier $\left(F_{0,025;h_8}^{*0,05}\right)_{\pi/8;1_{40\pi}}^{\pi/4}$ (puntos), transformada para interpolar $\left(F_{0,025;h_8}^{*0,05}\right)(u)$ y transformada interpolada $\left(F_{0,025;h_8}^{*0,05}\right)_{\frac{3}{4}\pi/8;1_{\frac{3}{4}40\pi}}^{\frac{3}{4}\pi/4}$ (círculos), y (b) detalle.
- (c) Transformada de Fourier $\left(F_{0,025;h_8}^{*0,05}\right)_{\pi/8;1_{40\pi}}^{\pi/4}$ (puntos), transformada para interpolar $\left(F_{0,025;h_8}^{*0,05}\right)(u)$ y transformada interpolada $\left(F_{0,025;h_8}^{*0,05}\right)_{0,3;1_{96,0}}^{0,6}$ (círculos), y (d) detalle.

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

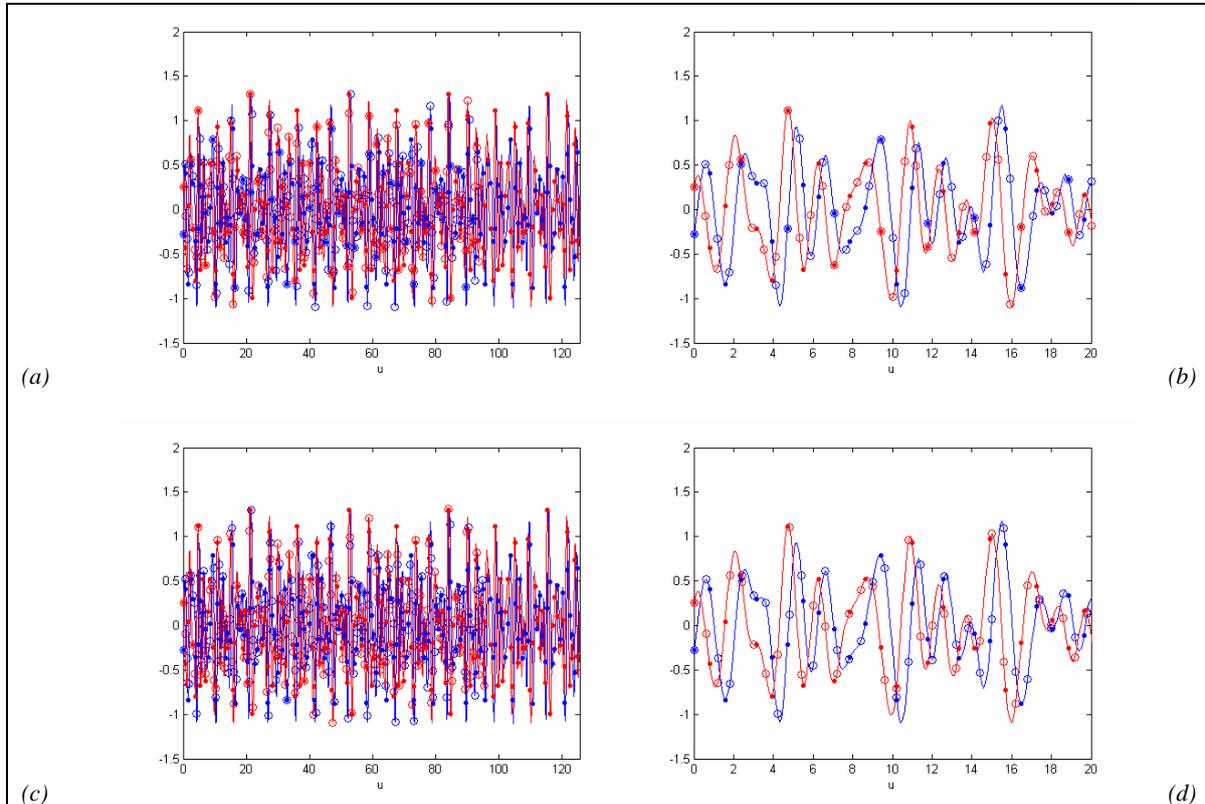


Figura 4–4-5: Interpolación en la transformada de Fourier directa mediante el Teorema del Muestreo generalizado (y II), Ejemplo II:

(a) Transformada de Fourier $\left(G_{0,025;h_8}^{*0,05}\right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4}$ (puntos), transformada para interpolar $\left(G_{0,025;h_8}^{*0,05}\right)(u)$ y transformada interpolada $\left(G_{0,025;h_8}^{*0,05}\right)_{\frac{3}{4}\pi/8;1_{\frac{3}{4}40\pi}^{\frac{3}{4}\pi/4}}$ (círculos), y (b) detalle.

(c) Transformada de Fourier $\left(G_{0,025;h_8}^{*0,05}\right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4}$ (puntos), transformada para interpolar $\left(G_{0,025;h_8}^{*0,05}\right)(u)$ y transformada interpolada $\left(G_{0,025;h_8}^{*0,05}\right)_{0,3;1_{96,0}^{0,6}}$ (círculos), y (d) detalle.

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

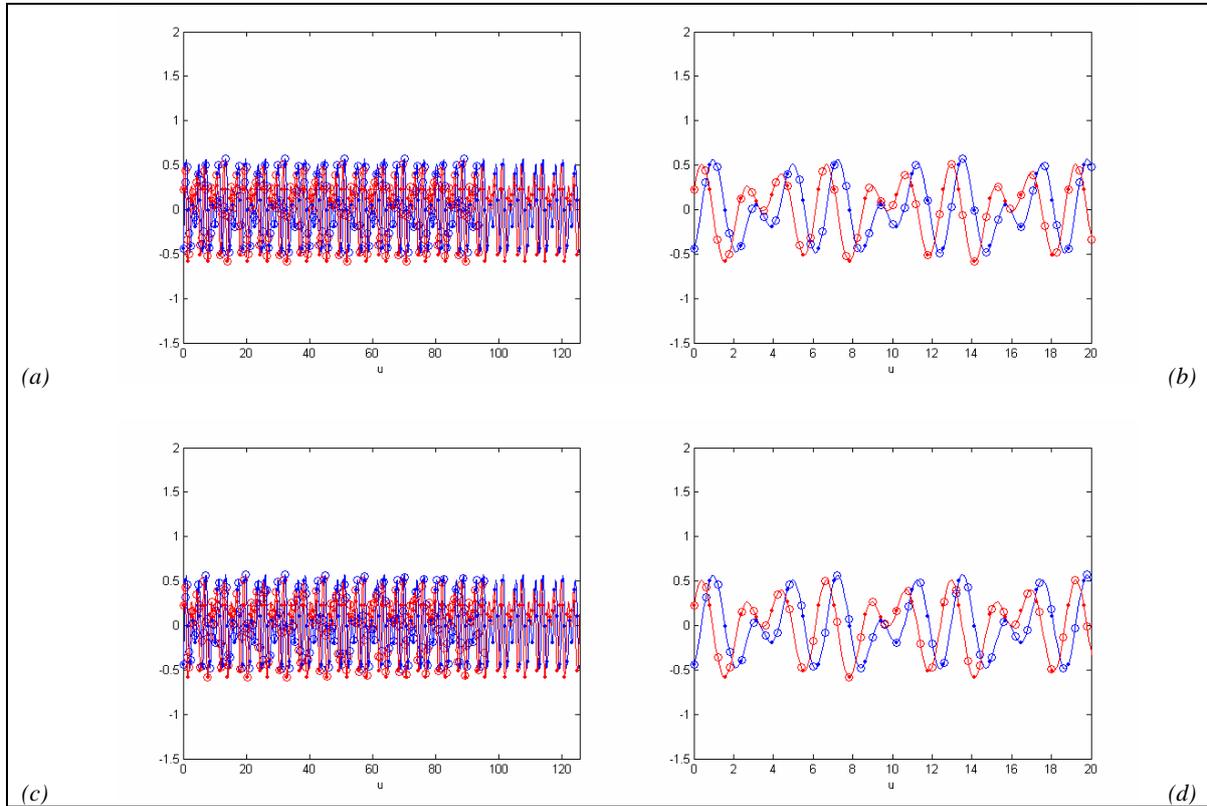


Figura 4–4-6: Interpolación en la transformada de Fourier directa mediante el Teorema del Muestreo generalizado (y II), Ejemplo III:

(a) Transformada de Fourier $\left(K_{0,025;h_8}^{*0,05}\right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4}$ (puntos), transformada para interpolar

$\left(K_{0,025;h_8}^{*0,05}\right)(u)$ y transformada interpolada $\left(K_{0,025;h_8}^{*0,05}\right)_{\frac{3}{4}\pi/8;1\frac{3}{4}40\pi}^{\frac{3}{4}\pi/4}$ (círculos), y (b) detalle.

(c) Transformada de Fourier $\left(K_{0,025;h_8}^{*0,05}\right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4}$ (puntos), transformada para interpolar

$\left(K_{0,025;h_8}^{*0,05}\right)(u)$ y transformada interpolada $\left(K_{0,025;h_8}^{*0,05}\right)_{0,3;196,0}^{0,6}$ (círculos), y (d) detalle.

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

4.4.2. Interpolación en la transformada de Fourier inversa

El objetivo de esta Sección es, dada una función $\left(f_{\nu, V_{VU}}^{EU}\right)_{\chi, 1_{VX}}^{EX}$ en la forma (4.3.11), definir una nueva función $\left(f_{\nu, V_{VU}}^{EU}\right)_{\chi', 1_{VX'}}^{EX'}$ que interpola a la primera en PE valores en el dominio frecuencial, equiespaciados una distancia EX' y contenidos en el intervalo $(\chi', VX' + \chi')$.

El procedimiento a seguir es análogo al expuesto en la §4.4.1. En primer lugar se expone una generalización del Teorema del Muestreo para la transformada inversa, mediante el cual es posible determinar la transformada de Fourier de una función muestreada y con soporte acotado mediante la aplicación de una ventana cualquiera.

A continuación, se determinará explícitamente la transformada en los anteriormente citados PE valores en el dominio natural, aplicando un desarrollo análogo al expuesto en la §4.2.3.

4.4.2.1. Generalización del Teorema del Muestreo para la transformada inversa

► **TEOREMA. (GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DEL MUESTREO PARA LA TRANSFORMADA INVERSA).**¹¹ Dada una función muestreada con soporte acotado $F_{\nu, V_{VU}}^{EU}$ definida en el dominio frecuencial, dada por (4.3.7), su transformada de Fourier inversa puede ser determinada unívocamente mediante el conocimiento de los PE valores:

$$\left(f_{\nu, 1_{VU}}^{EU}\right)_{\chi, 1_{VX}}^{EX}(n \cdot EX) = \frac{1}{VU} \sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} 1_{VU}(k \cdot EU - \nu) \cdot F(k \cdot EU) \cdot e^{ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \quad (4.4.11)$$

$$\forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n}\}$$

Y las funciones:

$$\left(\hat{v}_{\nu, 1_{VU}}^{mEU}\right)(x | \nu, VU) = \frac{1}{VU} \sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} V_{VU}(k \cdot EU - \nu) \cdot e^{ik \cdot EU(x - m \cdot EX)} \quad (4.4.12)$$

$$\forall m \in \mathbb{Z}$$

Mediante la expresión:

¹¹ La demostración puede encontrarse en la §4.A.2.3 del Anexo.

$$\left(f_{v, V_{VU}}^{EU}\right)(x) = EU \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(f_{v, I_{VU}}^{EU}\right)_{\chi, I_{VX}}^{EX} (m \cdot EX) \cdot \left(\hat{v}_{v, I_{VU}}^{mEU}\right)(x | v, VU) \quad (4.4.13)$$



Obsérvese que los valores $\left(f_{v, I_{VU}}^{EU}\right)_{\chi, I_{VX}}^{EX}$ dados por (4.4.11) son, como se mencionó en la §4.3.2, $1/EU$ veces los coeficientes de la serie de Fourier de $F_{v, I_{VU}}^{EU}$ dada por (4.3.16), con la ventana I_{VU} .

La extensión del índice del sumatorio en (4.4.13) para todo $m \in \mathbb{Z}$ hace referencia a la periodicidad de esta transformada de Fourier inversa, tal como se discutió en la §4.3.2. Esta extensión infinita del índice no es operativa computacionalmente, por lo que en lugar de (4.4.13) se emplea la expresión acotada:

$$\left(f_{v, V_{VU}}^{*EU}\right)(x) = EU \cdot \sum_{m=\underline{n}}^{\bar{n}} \left(f_{v, I_{VU}}^{EU}\right)_{\chi, I_{VX}}^{EX} (m \cdot EX) \cdot \left(\hat{v}_{v, I_{VU}}^{mEU}\right)(x | v, VU) \quad (4.4.14)$$

Donde el índice m se extiende únicamente a los PE valores independientes que se calculan de la transformada $\left(f_{v, I_{VU}}^{EU}\right)_{\chi, I_{VX}}^{EX}$.

Es importante señalar que, tal como ocurría en la sección anterior, no será posible expresar las funciones $\left(\hat{v}_{v, I_{VU}}^{mEU}\right)$ dadas por (4.4.12) como transformadas de Fourier inversas de ninguna otra función en forma genérica, pues se evaluarán en puntos $x = n \cdot EX'$ tales que el nuevo espaciado en el dominio natural EX' no será conjugado del espaciado en el dominio frecuencial EU , y no se cumplirán las relaciones expuestas en la Tabla 4-3-1.

Así mismo, en el caso particular en que la ventana inicial V_{VU} fuera un pulso cuadrado I_{VU} , el resultado expuesto en (4.4.13) se reduciría a la fórmula de interpolación a la que conduce el Teorema de Muestreo tradicional, equivalente a (4.4.1), donde la transformada de Fourier inversa de la ventana sería un miembro de la familia de los senos cardinales.

Estos resultados se ejemplifican en las figuras 4-4-7 a 4-4-9:

Figura 4–4-7: Interpolación en la transformada de Fourier inversa mediante el Teorema del Muestreo generalizado (I), Ejemplo I:

- (a) Valores de $\left(\left(f_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{0,025;1_8}^{0,05}$. (Cf. Figura 4–3–4 (b)).
- (b–g) Transformadas de las ventanas desplazadas $\left(\hat{1}_{\pi/8;140\pi}^{m\pi/4} \right) (x | \pi/8, 40\pi)$ para algunos valores de m .
- (h) Detalle de la transformada de la ventana desplazada con $m = 54$.
- (i) Transformada de Fourier $\left(\left(f_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{0,025;1_8}^{0,05}$ (puntos) y transformada de Fourier inversa para interpolar $\left(\left(f_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right) (x)$ (líneas), y (j) detalle.
-

Figura 4–4-8: Interpolación en la transformada de Fourier inversa mediante el Teorema del Muestreo generalizado (I), Ejemplo II:

- (a) Valores de $\left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{0,025;1_8}^{0,05}$. (Cf. Figura 4–3–5 (b)).
- (b–g) Transformadas de las ventanas desplazadas $\left(\hat{1}_{\pi/8;140\pi}^{m\pi/4} \right) (x | \pi/8, 40\pi)$ para algunos valores de m .
- (h) Detalle de la transformada de la ventana desplazada con $m = 54$.
- (i) Transformada de Fourier $\left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{0,025;1_8}^{0,05}$ (puntos) y transformada de Fourier inversa para interpolar $\left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right) (x)$ (líneas), y (j) detalle.
-

Figura 4–4-9: Interpolación en la transformada de Fourier inversa mediante el Teorema del Muestreo generalizado (I), Ejemplo III:

- (a) Valores de $\left(\left(k_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{0,025;1_8}^{0,05}$. (Cf. Figura 4–3–6 (b)).
- (b–g) Transformadas de las ventanas desplazadas $\left(\hat{1}_{\pi/8;140\pi}^{m\pi/4} \right) (x | \pi/8, 40\pi)$ para algunos valores de m .
- (h) Detalle de la transformada de la ventana desplazada con $m = 54$.
- (i) Transformada de Fourier $\left(\left(k_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{0,025;1_8}^{0,05}$ (puntos) y transformada de Fourier inversa para interpolar $\left(\left(k_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right) (x)$ (líneas), y (j) detalle.
-

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

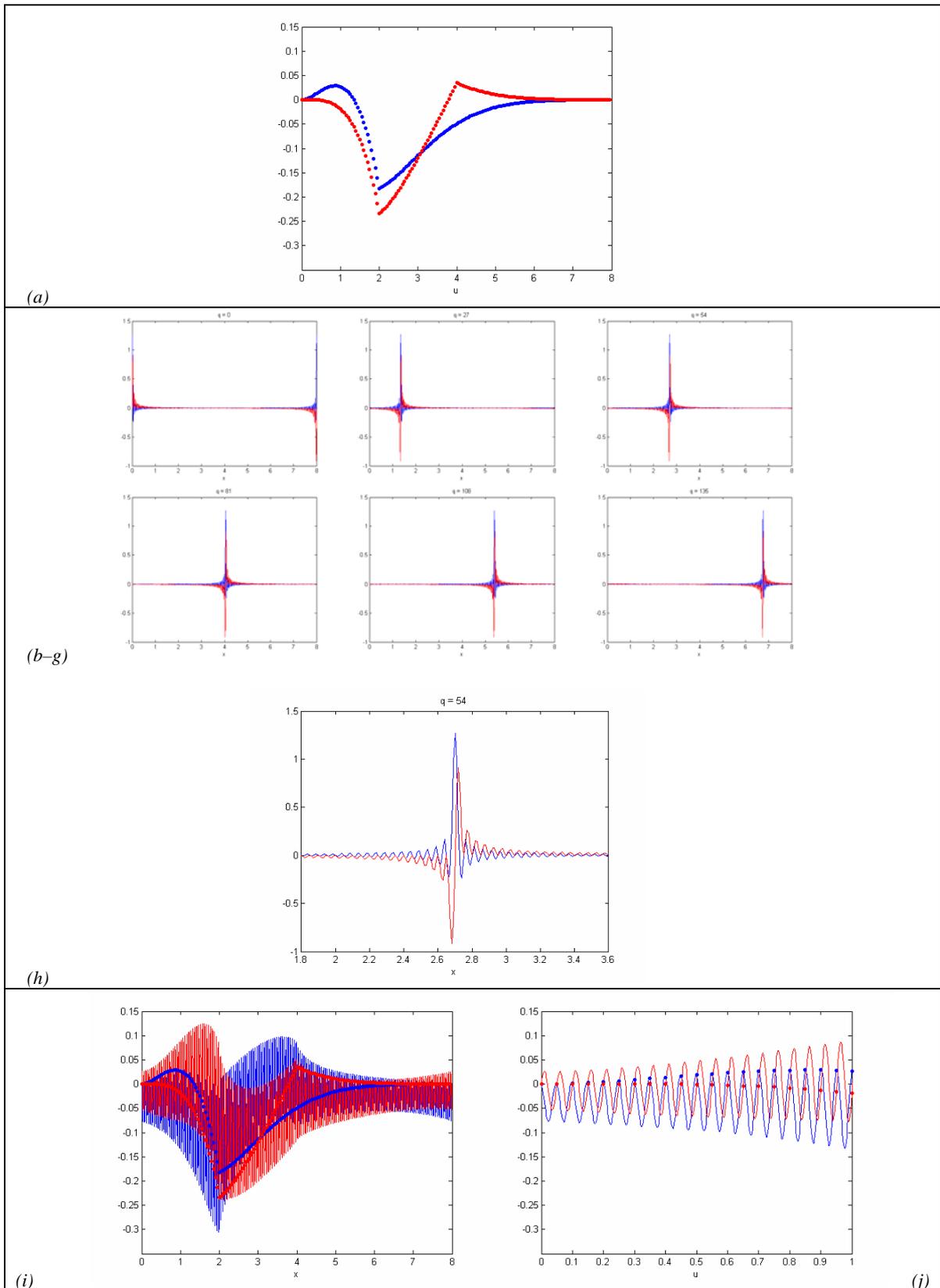


Figura 4-4-7: Interpolación en la transformada de Fourier inversa mediante el Teorema del Muestreo generalizado (I), Ejemplo I.

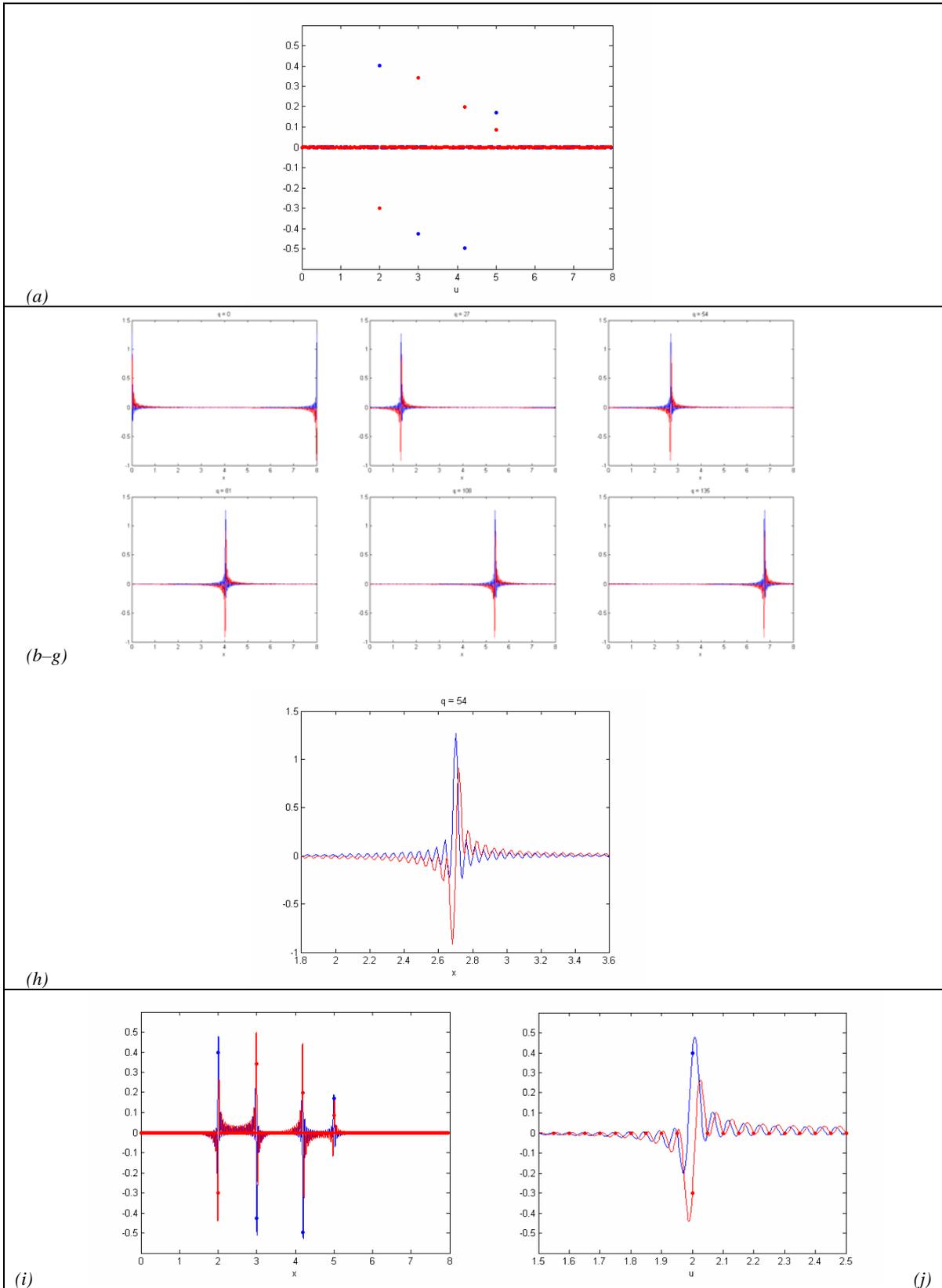


Figura 4-4-8: Interpolación en la transformada de Fourier inversa mediante el Teorema del Muestreo generalizado (I), Ejemplo II.

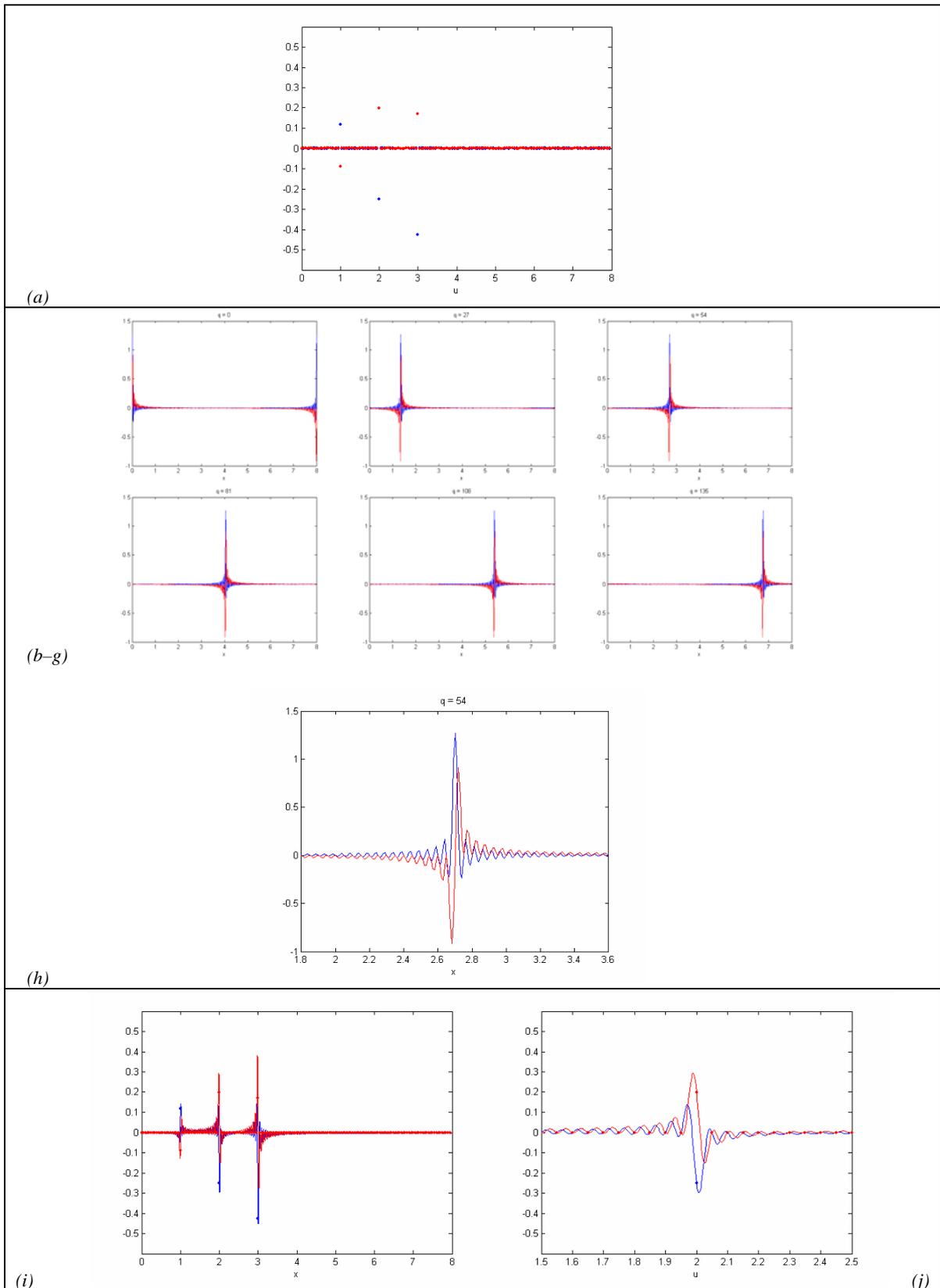


Figura 4-4-9: Interpolación en la transformada de Fourier inversa mediante el Teorema del Muestreo generalizado (I), Ejemplo III.

4.4.2.2. Interpolación en la transformada inversa

► **DEFINICIÓN (TRANSFORMADA INVERSA INTERPOLADA).** Dada una función muestreada con soporte acotado F_{ν, V_U}^{EU} definida en el dominio frecuencial, dada por (4.3.7), se define la nueva función $(f_{\nu, V_U}^{EU})_{\chi', 1_{V_X}}^{EX'}$ resultado de la interpolación en la transformada de Fourier $(f_{\nu, V_U}^{EU})_{\chi, 1_{V_X}}^{EX}$ mediante la expresión:

$$(f_{\nu, V_U}^{EU})_{\chi', 1_{V_X}}^{EX'}(x) \equiv 1_{V_X'}(x - \chi') \cdot (f_{\nu, V_U}^{EU})(x) \cdot \Delta^{EX'}(x) \quad (4.4.15)$$

Esta expresión se reescribe, sustituyendo el valor de $1_{V_X'}$, dado por una expresión análoga a (4.3.15), el valor de $(f_{\nu, V_U}^{EU})(x)$ dado por (4.4.13) y el valor de $\Delta^{EX'}(u)$ dado por una expresión análoga a (4.2.1), de la forma:

$$\begin{aligned} & (f_{\nu, V_U}^{EU})_{\chi', 1_{V_X}}^{EX'}(x) = \\ & = EU \cdot \sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} (f_{\nu, 1_{V_U}}^{EU})^{EX}(m \cdot EX) \cdot \left(\hat{\nu}_{\nu, 1_{V_U}}^{m \cdot EX} \right)_{\chi', 1_{V_X}}^{EX'}(n \cdot EX' | \nu, V_U) \right) \cdot \delta(x - n \cdot EX') \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

De tal forma que la función $(f_{\nu, V_U}^{EU})_{\chi', 1_{V_X}}^{EX'}$ viene representada por los valores:

$$(f_{\nu, V_U}^{EU})_{\chi', 1_{V_X}}^{EX'}(n \cdot EX') = EU \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} (f_{\nu, 1_{V_U}}^{EU})^{EX}(m \cdot EX) \cdot \left(\hat{\nu}_{\nu, 1_{V_U}}^{m \cdot EX} \right)_{\chi', 1_{V_X}}^{EX'}(n \cdot EX' | \nu, V_U)$$

$$\forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n}\} \quad (4.4.17)$$

Donde el conjunto de índices $\{\underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n}\}$ cumple la condición:

$$n \cdot EX' \in (\chi' \quad V_X' + \chi'), \quad \forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n}\} \quad (4.4.18)$$

◀

Atendiendo a la consideración efectuada en el Epígrafe anterior acerca de la extensión del índice del sumatorio para todo $m \in \mathbb{Z}$, en lugar de (4.4.17) se emplea la expresión acotada:

$$\left(f_{\nu, V_{VU}}^{*EU}\right)_{\chi', 1_{VX'}}^{EX'} (n \cdot EX') = EU \cdot \sum_{m=\underline{n}}^{\bar{n}} \left(f_{\nu, 1_{VU}}^{EU}\right)^{EX} (m \cdot EX) \cdot \left(\widehat{\nu}_{\nu, 1_{VU}}^{mEU}\right)_{\chi', 1_{VX'}}^{EX'} (n \cdot EX' | \nu, VU)$$

$$\forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \cdots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n}\}$$
(4.4.19)

Donde el conjunto de índices $\{\underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \cdots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n}\}$ cumple la condición (4.4.18).

En los casos en que se está interesado en la interpolación de PE valores en la región del dominio espacial más próxima al origen, desde $x = 0$ hasta $x = (PE - 1) \cdot EX'$, se elegirá $\chi' = -\frac{EX'}{2}$. En los casos en que se está interesado en la interpolación de PE valores en la región del dominio espacial más alejada del origen, desde $x = (PE - 1)(EX - EX')$ hasta $x = (PE - 1) \cdot EX$, se elegirá $\chi' = (PE - 1)(EX - EX') - \frac{EX'}{2}$. En ambos casos se elegirá $VX' = PE \cdot EX'$, de tal forma que $LX' = (PE - 1) \cdot EX'$, $\underline{n} = 0$ y $\bar{n} = PE - 1$.

Es importante señalar que, como es de esperar, se cumple:

► **LEMA (CONSISTENCIA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA).**¹² La función $\left(f_{\nu, V_{VU}}^{EU}\right)(x)$ dada por (4.4.13) toma los valores $\left(f_{\nu, V_{VU}}^{EU}\right)_{\chi', 1_{VX'}}^{EX} (n \cdot EX)$ en los puntos $x = n \cdot EX$, dados por la transformada de Fourier expresada en (4.3.12).

◀

Estos resultados se ejemplifican en las figuras 4-4-10 a 4-4-12:

¹² La demostración puede encontrarse en la §4.A.2.4 del Anexo.

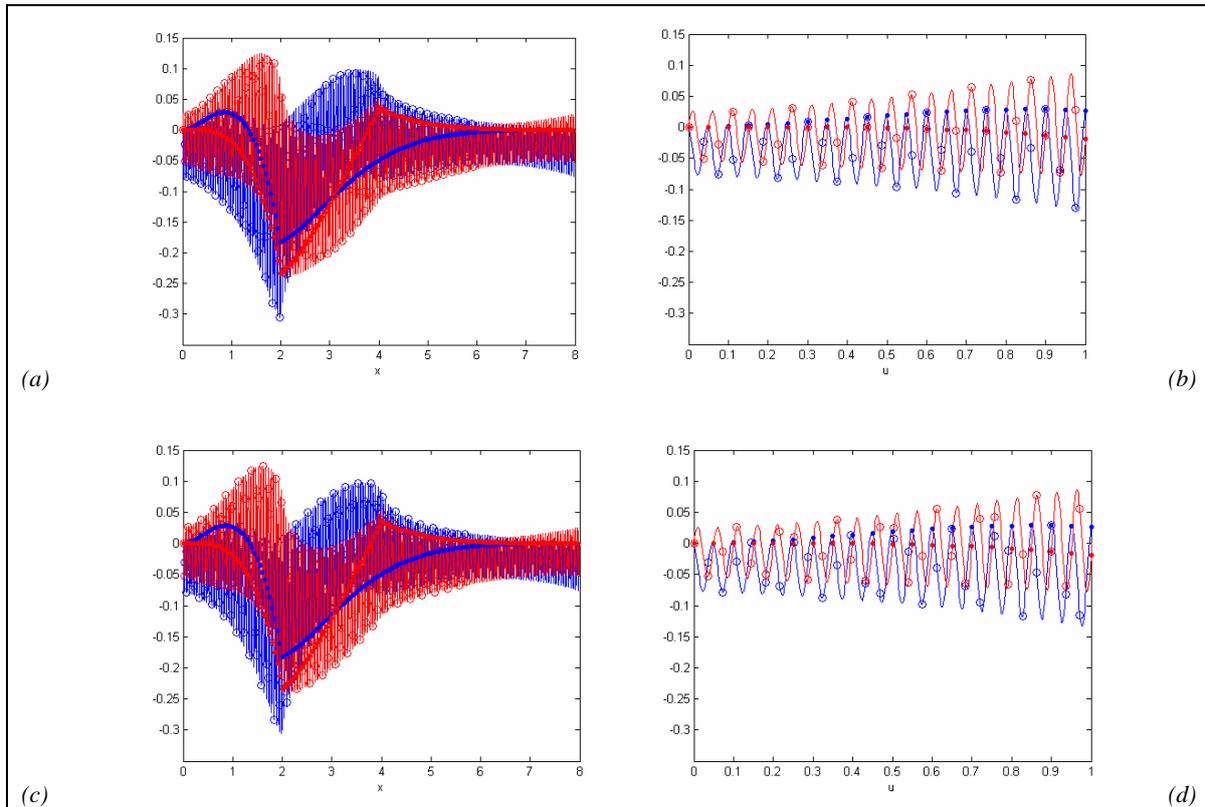


Figura 4-4-10: Interpolación en la transformada de Fourier inversa mediante el Teorema del Muestreo generalizado (y II), Ejemplo I:

(a) Transformada de Fourier inversa $\left(\left(f_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;1_{40\pi}}^{\pi/4} \right)_{0,025;1_8}^{0,05}$ (puntos), transformada para interpolación $\left(\left(f_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;1_{40\pi}}^{\pi/4} \right) (x)$ (líneas) y transformada interpolada $\left(\left(f_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;1_{40\pi}}^{\pi/4} \right)_{\frac{3}{4}0,025;1_{\frac{3}{4}8}}^{\frac{3}{4}0,05}$, y (b) detalle.

(c) Transformada de Fourier inversa $\left(\left(f_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;1_{40\pi}}^{\pi/4} \right)_{0,025;1_8}^{0,05}$ (puntos), transformada para interpolación $\left(\left(f_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;1_{40\pi}}^{\pi/4} \right) (x)$ (líneas) y transformada interpolada $\left(\left(f_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;1_{40\pi}}^{\pi/4} \right)_{0,018;1_{5,760}}^{0,036}$, y (d) detalle.

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

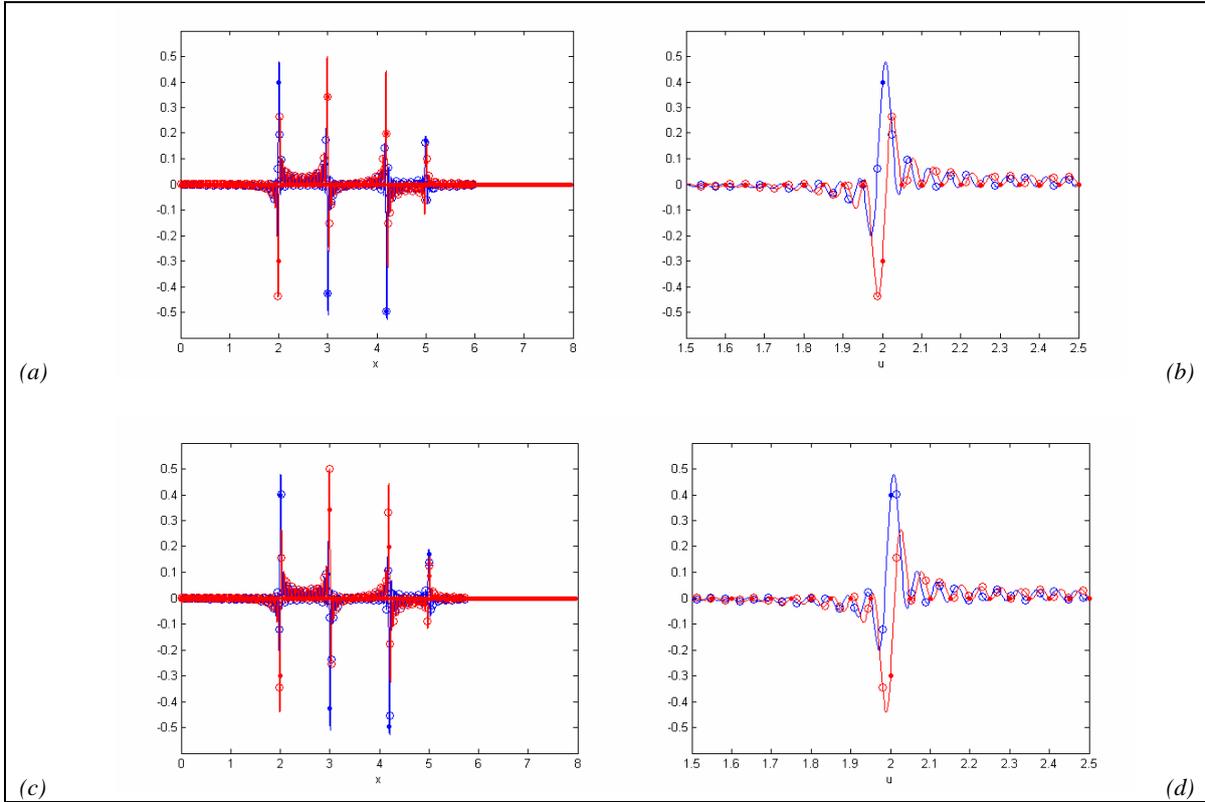


Figura 4-4-11: Interpolación en la transformada de Fourier inversa mediante el Teorema del Muestreo generalizado (y II), Ejemplo II:

(a) Transformada de Fourier inversa $\left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{0,025;1_8}^{0,05}$ (puntos), transformada para interpolación $\left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)(x)$ (líneas) y transformada interpolada $\left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{\frac{3}{4}0,025;1_{\frac{3}{4}8}}^{\frac{3}{4}0,05}$, y (b) detalle.

(c) Transformada de Fourier inversa $\left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{0,025;1_8}^{0,05}$ (puntos), transformada para interpolación $\left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)(x)$ (líneas) y transformada interpolada $\left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{0,018;1_{5,760}}^{0,036}$, y (d) detalle.

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

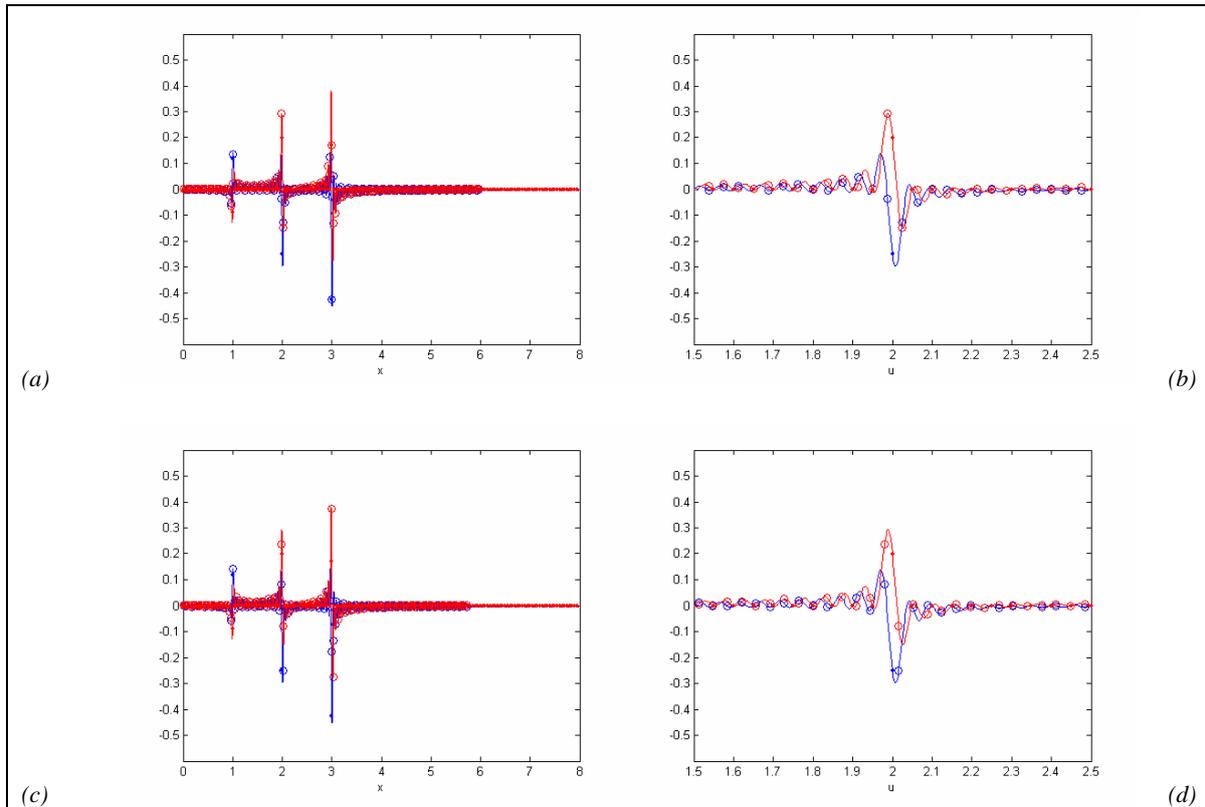


Figura 4-4-12: Interpolación en la transformada de Fourier inversa mediante el Teorema del Muestreo generalizado (y II), Ejemplo III:

(a) Transformada de Fourier inversa $\left(\left(k_{0,025;h_8}^* \right)^{\pi/4} \right)_{0,025;1_8}^{0,05}$ (puntos), transformada para interpolar $\left(\left(k_{0,025;h_8}^* \right)^{\pi/4} \right)_{\pi/8;1_{40\pi}}$ (x) (líneas) y transformada interpolada $\left(\left(k_{0,025;h_8}^* \right)^{\pi/4} \right)_{\frac{3}{4}0,025;1_{\frac{3}{4}8}}^{\frac{3}{4}0,05}$, y (b) detalle.

(c) Transformada de Fourier inversa $\left(\left(k_{0,025;h_8}^* \right)^{\pi/4} \right)_{0,025;1_8}^{0,05}$ (puntos), transformada para interpolar $\left(\left(k_{0,025;h_8}^* \right)^{\pi/4} \right)_{\pi/8;1_{40\pi}}$ (x) (líneas) y transformada interpolada $\left(\left(k_{0,025;h_8}^* \right)^{\pi/4} \right)_{0,018;1_{5,760}}^{0,036}$, y (d) detalle.

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

4.5. Relaciones entre las transformadas directa e inversa y la función original

En los casos que se tratan en esta Tesis Doctoral, se emplean funciones muestreadas con soporte acotado representadas por los valores $f_{\mathcal{Z},v_{\mathcal{VX}}}^{EX}$ dados en (4.2.10), y se calcula su transformada de Fourier, representada por los valores $\left(F_{\mathcal{Z},v_{\mathcal{VX}}}^{EX}\right)_{v,I_{VU}}^{EU}$ dados en (4.3.2), tal como se expuso en la §4.3.1.

Para recuperar nuevamente la función original tomando la transformada de Fourier inversa de su transformada directa, se ha de tener en cuenta el resultado expuesto en la §4.3.2 según el cual, dada una función muestreada de soporte acotado en el dominio frecuencial representada por los valores $F_{v,V_{VU}}^{EU}$ dados en (4.3.8), se calcula su transformada de Fourier inversa, representada por los valores $\left(f_{v,V_{VU}}^{EU}\right)_{\mathcal{Z},I_{VX}}^{EX}$ dados en (4.3.12).

En la primera Subsección, con el objeto de comprobar la consistencia de los resultados obtenidos en la §4.3, se calcula la transformada inversa de la transformada directa de $f_{\mathcal{Z},v_{\mathcal{VX}}}^{EX}$ dada en (4.3.1), representada por los valores $\left(\left(f_{\mathcal{Z},v_{\mathcal{VX}}}^{EX}\right)^{EU}\right)_{\mathcal{Z},I_{VX}}^{EX}$, debiendo darse la igualdad:

$$\left(\left(f_{\mathcal{Z},v_{\mathcal{VX}}}^{EX}\right)^{EU}\right)_{\mathcal{Z},I_{VX}}^{EX} (n \cdot EX) = f_{\mathcal{Z},v_{\mathcal{VX}}}^{EX} (n \cdot EX) \quad (4.5.1)$$

$$\forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n}\}$$

Así mismo, se pretende hallar una relación entre la función original f y los valores $\left(\left(f_{\mathcal{Z},v_{\mathcal{VX}}}^{EX}\right)^{EU}\right)_{\mathcal{Z},I_{VX}}^{EX}$.

En la siguiente Subsección, con el objeto de comprobar la consistencia de los resultados obtenidos en la §4.4.1, se estudia el resultado de considerar la transformada inversa de la transformada interpolada $\left(F_{\mathcal{Z},v_{\mathcal{VX}}}^{EX}\right)^{EU'}$ dada por la evaluación de (4.4.4) en los puntos de la forma $u = k \cdot EU'$, con k entero, representada por los valores $\left(\left(f_{\mathcal{Z},v_{\mathcal{VX}}}^{EX}\right)^{EU'}\right)_{\mathcal{Z}',I_{VX}'}$, determinados mediante una expresión análoga a (4.3.12), debiendo darse una igualdad análoga a (4.5.1).

Así mismo, se pretende hallar una relación entre la función original f y los valores de la transformada inversa de la transformada interpolada. Obsérvese que, dado que la interpolación modifica el espaciado y la longitud de la ventana en el dominio frecuencial, la transformada

inversa estará representada por valores en puntos $x = n \cdot EX'$ no coincidentes con los puntos $x = n \cdot EX$ donde se define la función original muestreada con soporte acotado.

En la siguiente Subsección, con el objeto de comprobar la consistencia de los resultados obtenidos en la §4.4.2, se estudia el resultado de considerar la interpolación de la transformada inversa de la transformada interpolada $\left(f_{\mathcal{Z}, \nu_{\mathcal{X}}}^{EX}\right)_{\nu', 1_{\nu U'}}^{EU'}$ dada por (4.4.10), representada por los valores $\left(\left(f_{\mathcal{Z}, \nu_{\mathcal{X}}}^{EX}\right)_{\nu', 1_{\nu U'}}^{EU'}\right)_{\mathcal{Z}, 1_{\nu \mathcal{X}}}^{EX}$, determinados mediante (4.4.17), debiendo darse una igualdad análoga a (4.5.1).

Así mismo, se pretende hallar una relación entre la función original f y los valores de la transformada inversa de la transformada interpolada. Obsérvese que esta nueva interpolación en el dominio natural permite obtener los valores de la transformada inversa en los puntos originales $x = n \cdot EX$ donde se define la función original muestreada con soporte acotado.

4.5.1. Relación entre la transformada inversa de la transformada directa y la función original

► **PROPOSICIÓN (RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA Y LA FUNCIÓN ORIGINAL).**¹³ La relación entre una función muestreada con soporte acotado representada por los valores $f_{\mathcal{Z}, \nu_{\mathcal{X}}}^{EX}$ dados en (4.2.10), y la transformada inversa de su transformada directa $\left(F_{\mathcal{Z}, \nu_{\mathcal{X}}}^{EX}\right)^{EU}$ dada en (4.3.1), representada por los valores $\left(\left(f_{\mathcal{Z}, \nu_{\mathcal{X}}}^{EX}\right)^{EU}\right)_{\mathcal{Z}, 1_{\nu \mathcal{X}}}^{EX}$, viene dada por la expresión:

$$f_{\mathcal{Z}, \nu_{\mathcal{X}}}^{EX}(n \cdot EX) = \left(\left(f_{\mathcal{Z}, \nu_{\mathcal{X}}}^{EX}\right)^{EU}\right)_{\mathcal{Z}, 1_{\nu \mathcal{X}}}^{EX}(n \cdot EX) \quad (4.5.1)$$

$$\forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n}\}$$

La relación entre la función original muestreada representada por los valores $f_{\mathcal{Z}, \nu_{\mathcal{X}}}^{EX}$ dados en (4.2.4), y la transformada inversa de su transformada directa, viene dada por la expresión:

¹³ La demostración puede encontrarse en la §4.A.3.1 del Anexo.

$$f^{EX}(n \cdot EX) = \left(\left(f_{\chi, \nu_{VX}}^{EX} \right)^{EU} \right)_{\chi, 1_{VX}}^{EX} (n \cdot EX) / \nu_{VX} (n \cdot EX - \chi) \quad (4.5.2)$$

$$\forall n \in \{ \underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n} \}$$



Es importante señalar que los valores de la transformada inversa $\left(\left(f_{\chi, \nu_{VX}}^{EX} \right)^{EU} \right)_{\chi, 1_{VX}}^{EX}$ no tienen por qué coincidir con los valores $\left(\left(f_{\chi, \nu_{VX}}^{EX} \right)_{\nu, 1_{VU}}^{EU} \right)_{\chi, 1_{VX}}^{EX}$ que se determinarían calculando la transformada inversa de los valores $\left(F_{\chi, \nu_{VX}}^{EX} \right)_{\nu, 1_{VU}}^{EU}$ expuestos en (4.3.2). La acotación en el dominio frecuencial podría conducir a que no se diera una igualdad del tipo (4.5.1).

Este resultado se ejemplifica en las figuras 4-5-1 a 4-5-3:

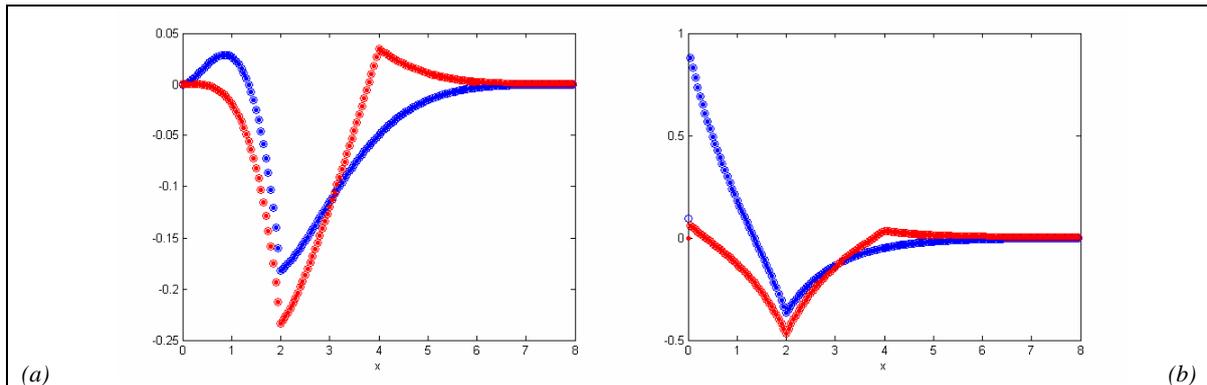


Figura 4-5-1: Relación entre la transformada inversa de la transformada directa y la función original, Ejemplo I:

(a) Valores de la función muestreada con soporte acotado $f_{0,025;h_8}^{0,05}$ (puntos) y valores de la transformada inversa $\left(\left(f_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{0,025;1_8}^{0,05}$ (círculos) en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

(b) Valores de la función muestreada $f_{0,025;h_8}^{0,05}(n \cdot 0,05)$ (puntos) y valores de la transformada inversa corregida $\left(\left(f_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{0,025;1_8}^{0,05} (n \cdot 0,05) / h_8 (n \cdot 0,05 + 0,025)$ (círculos), contenidos en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

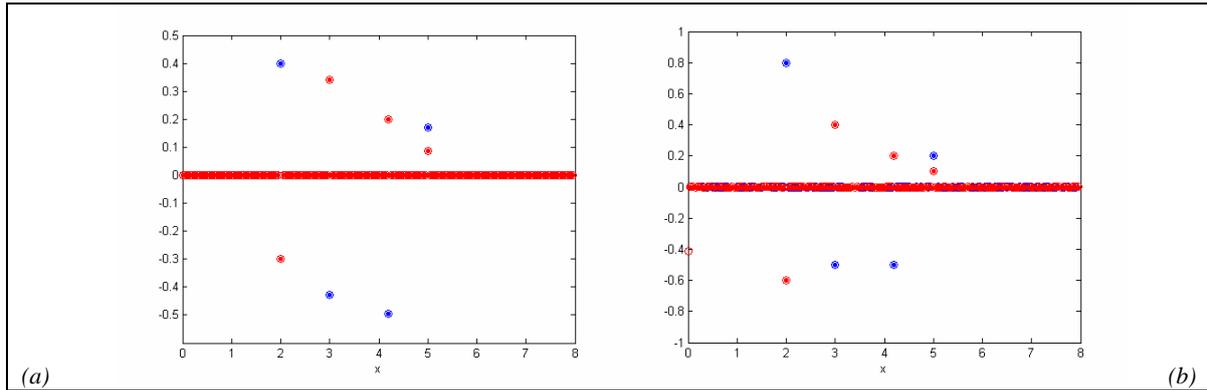


Figura 4–5-2: Relación entre la transformada inversa de la transformada directa y la función original, Ejemplo II:

(a) Valores de la función muestreada con soporte acotado $g_{0,025;h_8}^{0,05}$ (puntos) y valores de la transformada inversa $\left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{0,025;1_8}^{0,05}$ (círculos) en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

(b) Valores de la función g (puntos) y valores de la transformada inversa corregida $\left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{0,025;1_8}^{0,05} (n \cdot 0,05) / h_8 (n \cdot 0,05 + 0,025)$ (círculos), contenidos en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

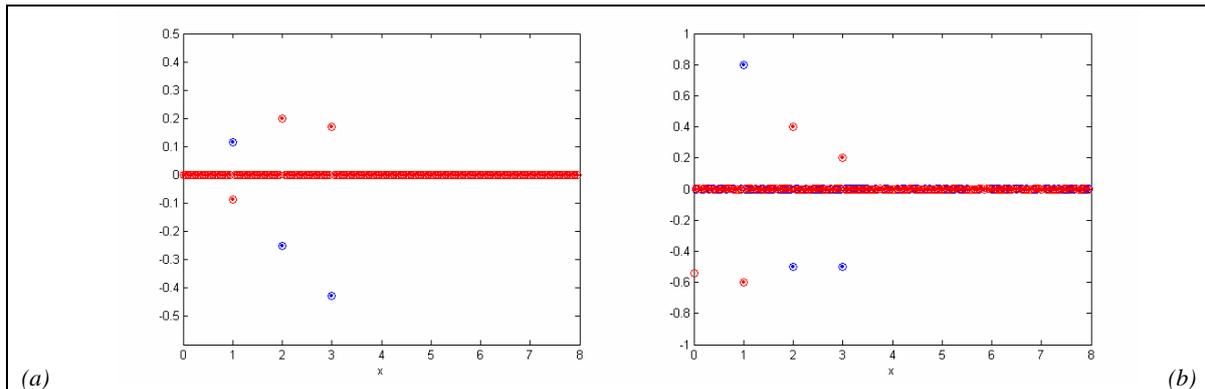


Figura 4-5-3: Relación entre la transformada inversa de la transformada directa y la función original, Ejemplo III:

(a) Valores de la función muestreada con soporte acotado $k_{0,025;h_8}^{0,05}$ (puntos) y valores de la transformada inversa $\left(\left(k_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{0,025;1_8}^{0,05}$ (círculos) en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

(b) Valores de la función k (puntos) y valores de la transformada inversa corregida $\left(\left(k_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{0,025;1_8}^{0,05} (n \cdot 0,05) / h_8 (n \cdot 0,05 + 0,025)$ (círculos), contenidos en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

4.5.2. Relación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada y la función original

► **PROPOSICIÓN (RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA Y LA FUNCIÓN ORIGINAL).**¹⁴ La relación entre una función muestreada con soporte acotado representada por los valores $f_{\chi, v_{VX}}^{EX}$ dados en (4.2.10), y la transformada inversa de su transformada directa interpolada $\left(F_{\chi, v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}$ dada por la evaluación de (4.4.4) en los puntos de la forma $u = k \cdot EU'$ con k entero, representada por los valores $\left(\left(f_{\chi, v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)^{EX'}$, viene dada por la expresión:

$$f_{\chi, v_{VX}}^{EX'}(n \cdot EX') = \left(\frac{VX}{VX'}\right)^2 \left(\left(f_{\chi, v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)^{EX'}(n \cdot EX') \quad (4.5.3)$$

$$\forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n}\}$$

La relación entre la función original muestreada representada por los valores $f^{EX'}$ dados en (4.2.4), y la transformada inversa de su transformada directa, viene dada por la expresión:

$$f^{EX'}(n \cdot EX') = \left(\frac{VX}{VX'}\right)^2 \left(\left(f_{\chi, v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)^{EX'}(n \cdot EX') / v_{VX}(n \cdot EX' - \chi) \quad (4.5.4)$$

$$\forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n}\} : n \cdot EX' \in (\chi \quad VX + \chi)$$

◀

Es importante señalar que los valores de la transformada inversa $\left(\left(f_{\chi, v_{VX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)^{EX'}$ no tienen por qué coincidir con los valores $\left(\left(f_{\chi, v_{VX}}^{*EX}\right)^{EU'}\right)^{EX'}$ que se determinarían calculando la transformada inversa de los valores $\left(f_{\chi, v_{VX}}^{*EX}\right)^{EU'}$ expuestos en (4.4.10). La acotación en el dominio frecuencial podría conducir a que no se diera una igualdad del tipo (4.5.3).

Este resultado se ejemplifica en las figuras 4-5-4 a 4-5-6:

¹⁴ La demostración puede encontrarse en la §4.A.3.2 del Anexo.

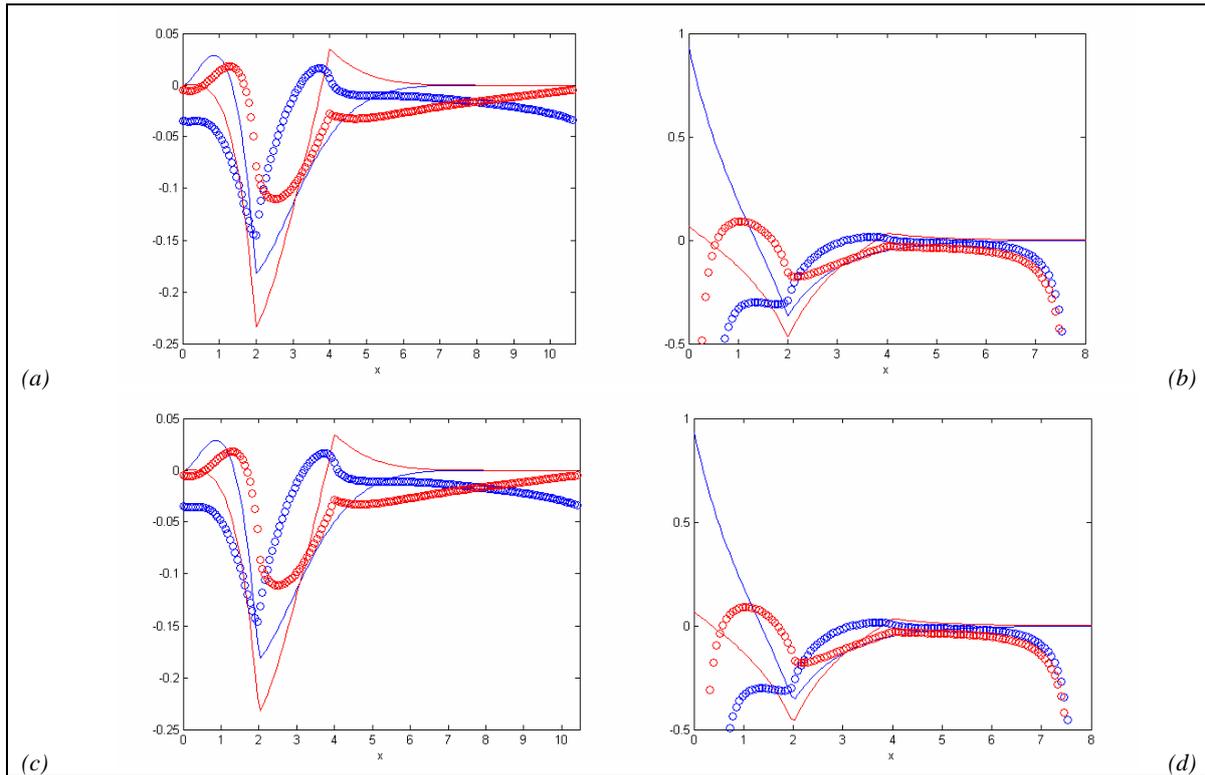


Figura 4-5-4: Relación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada mediante el Teorema del Muestreo generalizado y la función original (I), Ejemplo I:

(a) Función con soporte acotado $f_{0,025;h_8}$ (líneas) y valores de la transformada inversa

$$\left(\frac{8}{32/3}\right)^2 \cdot \left((f_{0,025;h_8}^*)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1_{\frac{3}{4}40\pi}}^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{1/30; 1_{32/3}}^{2/30} \quad (\text{círculos en el intervalo } (-1/30, 319/30)).$$

(b) Función f (líneas) y valores de la transformada inversa corregida

$$\left(\frac{8}{32/3}\right)^2 \cdot \left((f_{0,025;h_8}^*)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1_{\frac{3}{4}40\pi}}^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{1/30; 1_{32/3}}^{2/30} \left(n \frac{2}{30} \right) / h_8 \left(n \frac{2}{30} + 0,025 \right) (\text{círculos}),$$

contenidos en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

(c) Función con soporte acotado $f_{0,025;h_8}$ (líneas) y valores de la transformada inversa

$$\left(\frac{8}{4\pi/3}\right)^2 \cdot \left((f_{0,025;h_8}^*)_{0,3; 1_{96,0}}^{0,6} \right)_{\pi/96; 1_{4\pi/3}}^{2\pi/96} \quad (\text{círculos en el intervalo } (-1/30, 319/30)).$$

(d) Función f (líneas) y valores de la transformada inversa corregida

$$\left(\frac{8}{4\pi/3}\right)^2 \cdot \left((f_{0,025;h_8}^*)_{0,3; 1_{96,0}}^{0,6} \right)_{\pi/96; 1_{4\pi/3}}^{2\pi/96} \left(n \frac{2\pi}{96} \right) / h_8 \left(n \frac{2\pi}{96} + 0,025 \right) (\text{círculos}),$$

contenidos en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

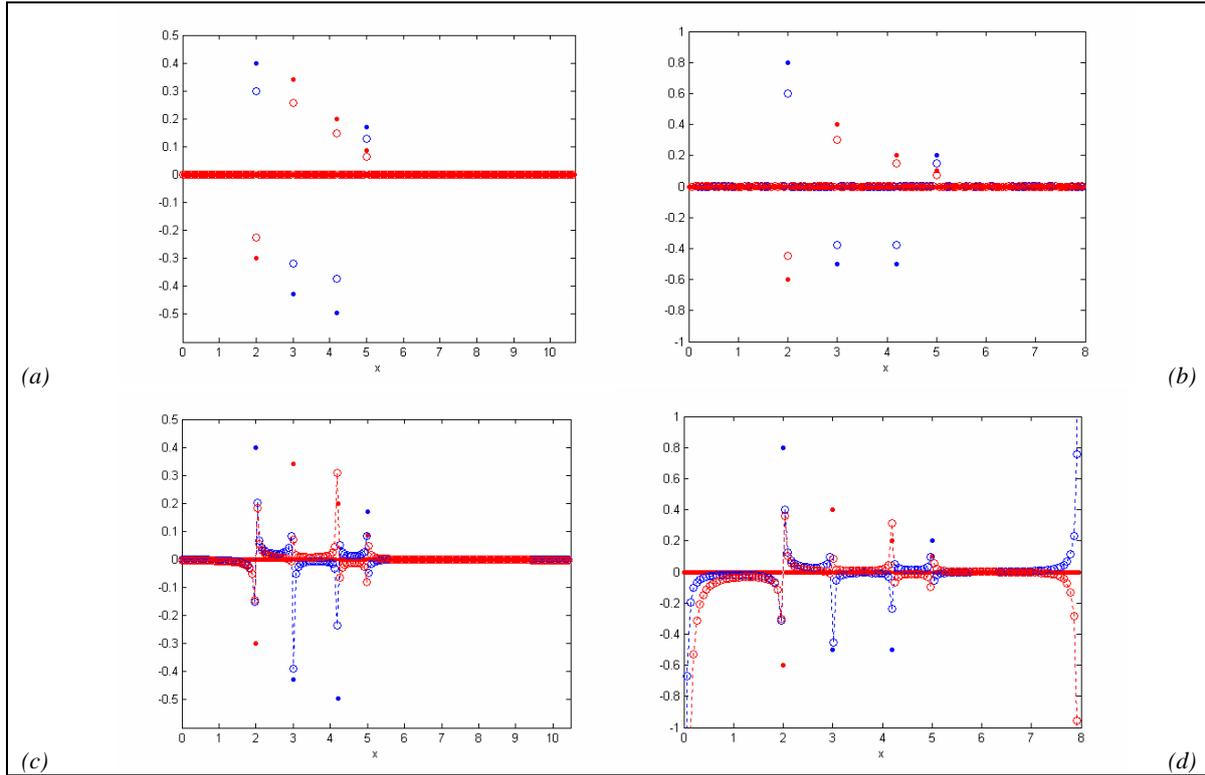


Figura 4-5-5: Relación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada mediante el Teorema del Muestreo generalizado y la función original (I), Ejemplo II:

(a) Función con soporte acotado $g_{0,025;h_8}$ (puntos) y valores de la transformada inversa

$$\left(\frac{8}{32/3}\right)^2 \cdot \left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1_{\frac{3}{4}40\pi}}^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{1/30; 1_{32/3}}^{2/30} \quad (\text{círculos en el intervalo } (-1/30, 319/30)).$$

(b) Función g (puntos) y valores de la transformada inversa corregida

$$\left(\frac{8}{32/3}\right)^2 \cdot \left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1_{\frac{3}{4}40\pi}}^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{1/30; 1_{32/3}}^{2/30} \left(n \frac{2}{30} \right) / h_8 \left(n \frac{2}{30} + 0,025 \right) (\text{círculos}),$$

contenidos en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

(c) Función con soporte acotado $g_{0,025;h_8}$ (puntos) y valores de la transformada inversa

$$\left(\frac{8}{4\pi/3}\right)^2 \cdot \left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{0,3; 1_{96,0}}^{0,6} \right)_{\pi/96; 1_{4\pi/3}}^{2\pi/96} \quad (\text{círculos en el intervalo } (-1/30, 319/30)).$$

(d) Función g (puntos) y valores de la transformada inversa corregida

$$\left(\frac{8}{4\pi/3}\right)^2 \cdot \left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{0,3; 1_{96,0}}^{0,6} \right)_{\pi/96; 1_{4\pi/3}}^{2\pi/96} \left(n \frac{2\pi}{96} \right) / h_8 \left(n \frac{2\pi}{96} + 0,025 \right) (\text{círculos}),$$

contenidos en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.

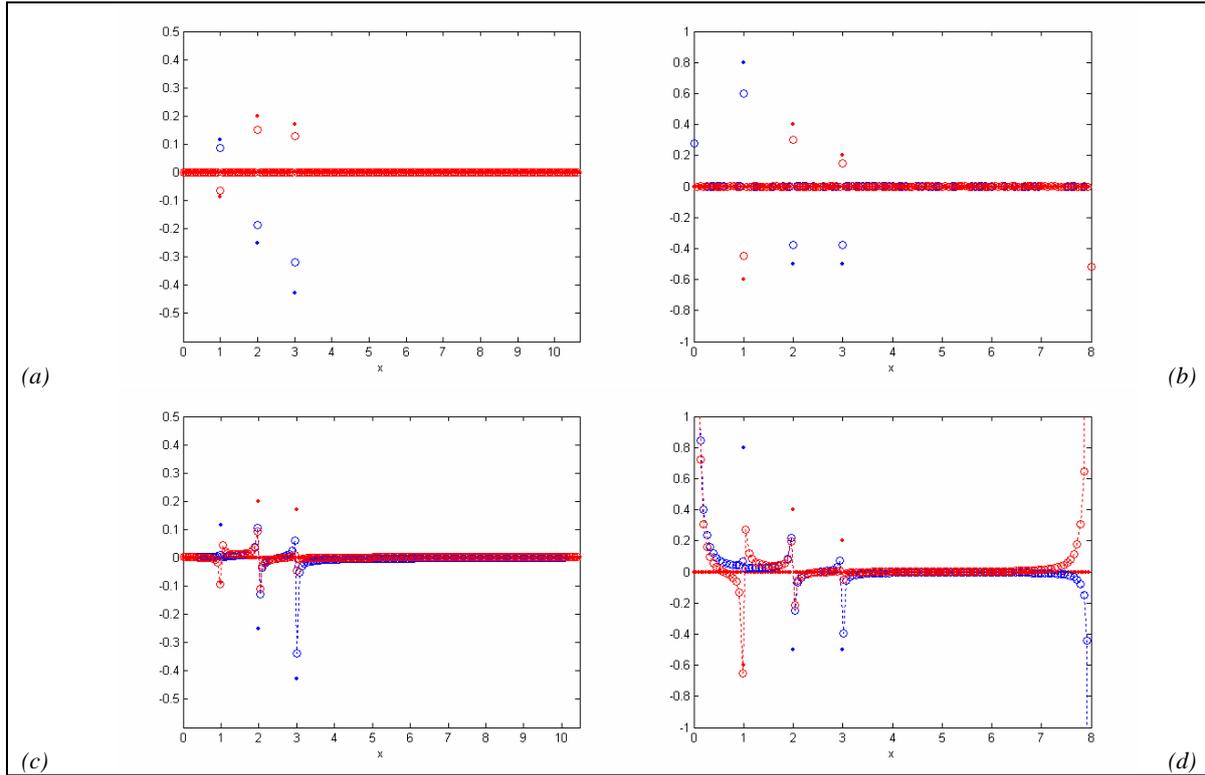


Figura 4–5-6: Relación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada mediante el Teorema del Muestreo generalizado y la función original (I), Ejemplo III:

(a) Función con soporte acotado $k_{0,025;h_8}$ (puntos) y valores de la transformada inversa

$$\left(\frac{8}{32/3}\right)^2 \cdot \left((k_{0,025;h_8}^*)^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1_{\frac{3}{4}40\pi}}^{2/30} \quad (\text{círculos en el intervalo } (-1/30, 319/30)).$$

(b) Función k (puntos) y valores de la transformada inversa corregida

$$\left(\frac{8}{32/3}\right)^2 \cdot \left((k_{0,025;h_8}^*)^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1_{\frac{3}{4}40\pi}}^{2/30} \left(n \frac{2}{30} \right) / h_8 \left(n \frac{2}{30} + 0,025 \right) (\text{círculos}),$$

contenidos en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

(c) Función con soporte acotado $k_{0,025;h_8}$ (puntos) y valores de la transformada inversa

$$\left(\frac{8}{4\pi/3}\right)^2 \cdot \left((k_{0,025;h_8}^*)^{0,6} \right)_{0,3; 1_{96,0}}^{2\pi/96} \quad (\text{círculos en el intervalo } (-1/30, 319/30)).$$

(d) Función k (puntos) y valores de la transformada inversa corregida

$$\left(\frac{8}{4\pi/3}\right)^2 \cdot \left((k_{0,025;h_8}^*)^{0,6} \right)_{0,3; 1_{96,0}}^{2\pi/96} \left(n \frac{2\pi}{96} \right) / h_8 \left(n \frac{2\pi}{96} + 0,025 \right) (\text{círculos}),$$

contenidos en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.

En los paneles (a) y (c) de las figuras 4-5-4 a 4-5-6 se aprecian fuertes discrepancias entre los valores de las funciones de soporte acotado y las transformadas inversas, siendo este efecto más notorio en el caso correspondiente al Ejemplo I, donde la función en el dominio natural no está constituida por suma de impulsos. Estas discrepancias pueden ser debidas, como ya se adelantó, a la acotación introducida en el dominio frecuencial, así como al hecho de que las discretizaciones del Teorema Integral de Fourier expuestas en (4.1.18) y (4.1.20) no dejan de ser aproximaciones de las integrales expuestas en (4.1.7) y (4.1.11).

Estas diferencias a su vez se traducen en una fuerte discrepancia entre los valores de las funciones originales y las transformadas inversas corregidas, como se aprecia en los paneles (b) y (d) de dichas figuras.

Es importante señalar que este efecto se produce independientemente de la ventana que se emplee para acotar la función en (4.2.6) ó (4.2.8). La elección de la ventana tiene una importancia capital en el estudio de funciones en el dominio frecuencial (Harris, 1978; Nuttall, 1981; Gumas, 1997; Lyons, 1998 a y b),¹⁵ pero pierde su importancia en los casos en que se efectúan transformaciones del dominio natural al frecuencial y se retorna del frecuencial al natural.

En las figuras 4-5-5 (a-b) y 4-5-6 (a-b), se observa cómo, en el caso de funciones en el dominio natural constituidas por suma de impulsos, las transformadas inversas son, a su vez, funciones constituidas por suma de impulsos, localizados en las abscisas correspondientes de la función original. Éste fenómeno ocurre en el caso en que el espaciado de interpolación en el dominio frecuencial, EU' , es submúltiplo del espaciado original, EU . En otro caso, las transformadas inversas no tienen la forma de suma de impulsos, tomando valores no nulos en una amplia región de su dominio, como puede observarse en las figuras 4-5-5 (c-d) y 4-5-6, (c-d). Este fenómeno se conoce con el nombre de *leakage* o fuga de frecuencias (Brigham, 1974).

En los paneles (b) y (d) de las figuras 4-5-4 a 4-5-6 pueden apreciarse fuertes divergencias entre la función original y la transformada inversa corregida en los extremos del intervalo. Esto es debido a que se divide entre los valores de la ventana que, en este caso, correspondiente a la ventana de Hanning dada por (4.2.7), tienden a cero en dichos extremos. Este efecto podría evitarse mediante la utilización de otra ventana en el dominio natural, como por ejemplo el pulso cuadrado 1_{vX} dado por (4.3.15).

¹⁵ En el caso que se trata en esta Tesis doctoral, en la forma de efectuarse la interpolación en el dominio frecuencial.

En el caso de funciones constituidas por suma de impulsos es posible determinar, en forma empírica, una expresión equivalente a (4.5.3) que permite relacionar idénticamente la función muestreada de soporte acotado con la transformada inversa de su transformada interpolada, en la forma:

$$f_{\chi, v_{VX}}^{EX'}(n \cdot EX') \approx \left(\frac{VX}{VX'} \right) \cdot \left(\left(f_{\chi, v_{VX}}^{*EX} \right)_{v', 1_{VU'}}^{EU'} \right)_{\chi', 1_{VX'}}^{EX'}(n \cdot EX') \quad (4.5.5)$$

$$\forall n \in \{ \underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n} \}$$

De tal forma que, atendiendo a las consideraciones anteriormente efectuadas, es posible relacionar idénticamente la función original muestreada y dicha transformada inversa mediante una expresión equivalente a (4.5.4), en la forma:

$$f_{\chi, v_{VX}}^{EX'}(n \cdot EX') \approx \left(\frac{VX}{VX'} \right) \cdot \left(\left(f_{\chi, v_{VX}}^{*EX} \right)_{v', 1_{VU'}}^{EU'} \right)_{\chi', 1_{VX'}}^{EX'}(n \cdot EX') / v_{VX}(n \cdot EX' - \chi) \quad (4.5.6)$$

$$\forall n \in \{ \underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n} \} : n \cdot EX' \in (\chi, VX + \chi)$$

Este resultado se ejemplifica en las figuras 4-5-7 y 4-5-8.

Obsérvese cómo las correcciones empíricas anteriormente expuestas son válidas en el caso en que el espaciado interpolación en el dominio frecuencial, EU' , es submúltiplo del espaciado original, EU ; no siendo así en otro caso.

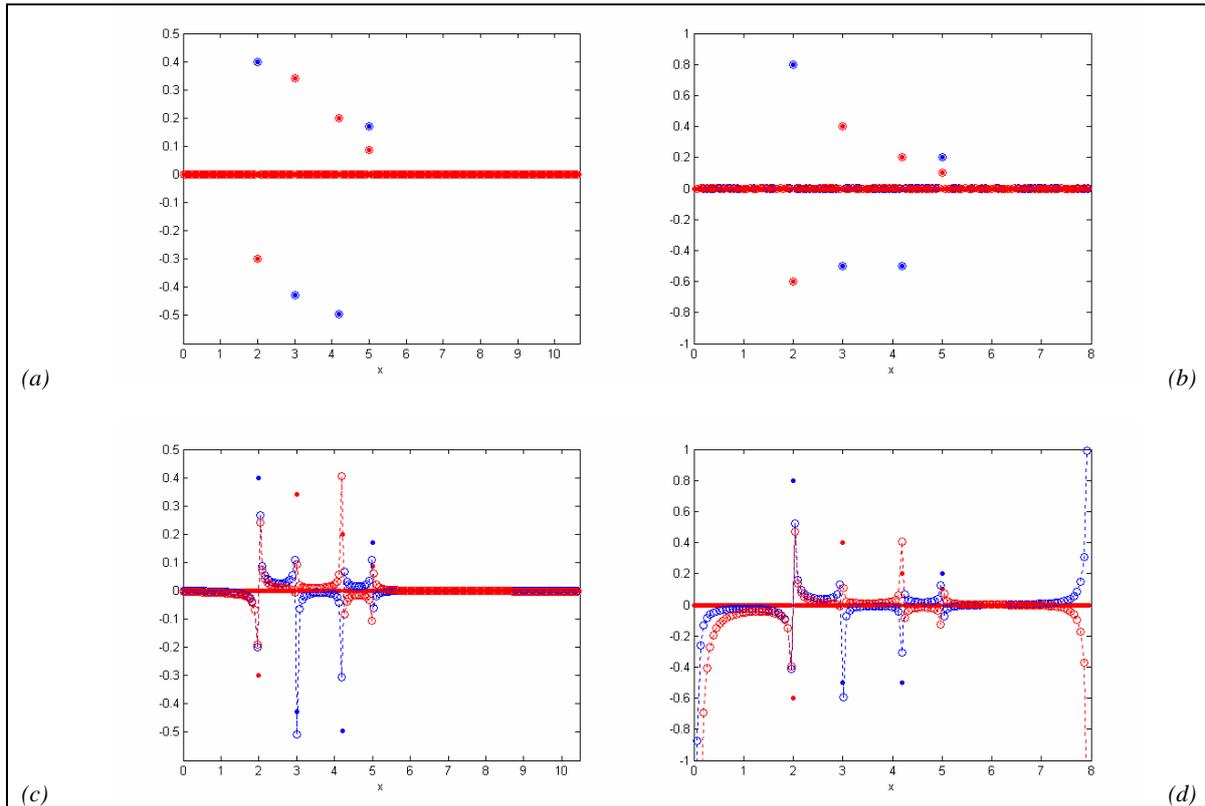


Figura 4-5-7: Relación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada mediante el Teorema del Muestreo generalizado y la función original (y II), Ejemplo II:

(a) Función con soporte acotado $g_{0,025;h_8}$ (puntos) y valores de la transformada inversa

$$\left(\frac{8}{32/3}\right) \cdot \left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1_{\frac{3}{4}40\pi}}^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{1/30; 1_{32/3}}^{2/30} \quad (\text{círculos en el intervalo } (-1/30, 319/30)).$$

(b) Función g (puntos) y valores de la transformada inversa corregida

$$\left(\frac{8}{32/3}\right) \cdot \left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1_{\frac{3}{4}40\pi}}^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{1/30; 1_{32/3}}^{2/30} \left(n \frac{2}{30} \right) / h_8 \left(n \frac{2}{30} + 0,025 \right) (\text{círculos}),$$

contenidos en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

(c) Función con soporte acotado $g_{0,025;h_8}$ (puntos) y valores de la transformada inversa

$$\left(\frac{8}{4\pi/3}\right) \cdot \left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{0,3; 1_{96,0}}^{0,6} \right)_{\pi/96; 1_{4\pi/3}}^{2\pi/96} \quad (\text{círculos en el intervalo } (-1/30, 319/30)).$$

(d) Función g (puntos) y valores de la transformada inversa corregida

$$\left(\frac{8}{4\pi/3}\right) \cdot \left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{0,3; 1_{96,0}}^{0,6} \right)_{\pi/96; 1_{4\pi/3}}^{2\pi/96} \left(n \frac{2\pi}{96} \right) / h_8 \left(n \frac{2\pi}{96} + 0,025 \right) (\text{círculos}),$$

contenidos en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.

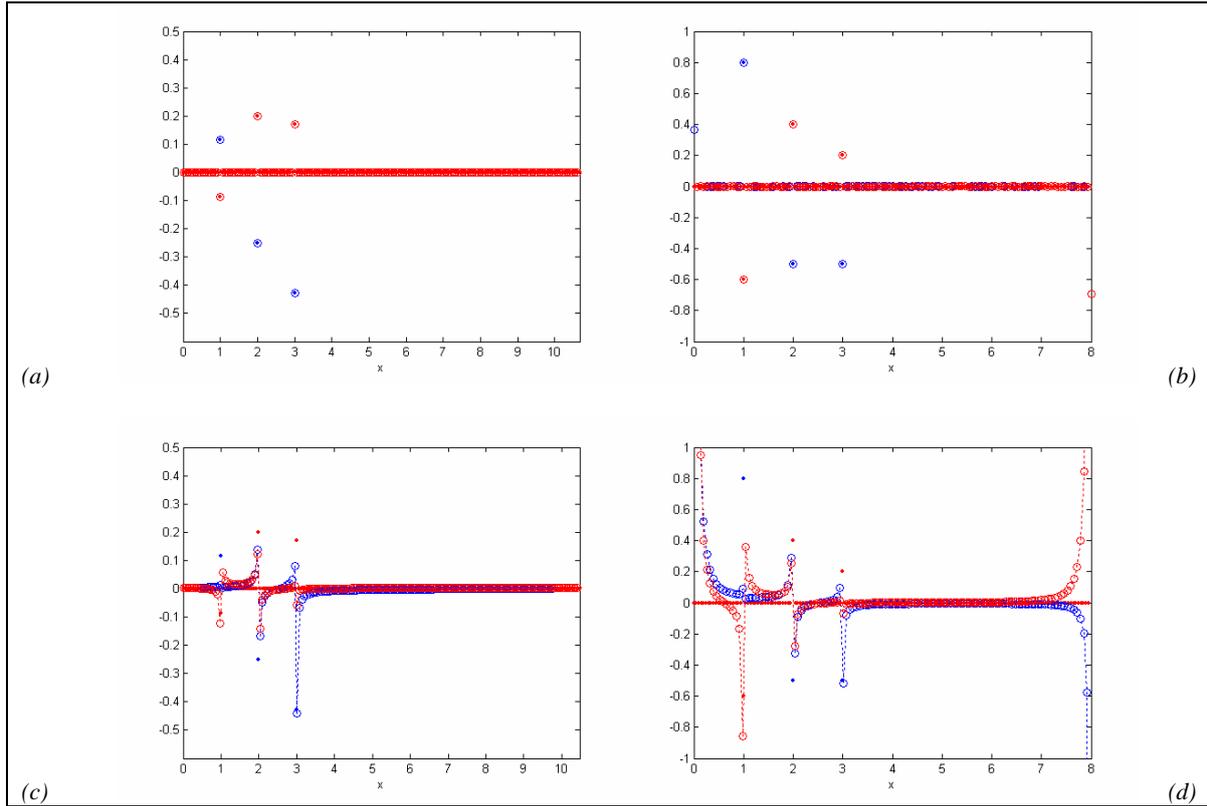


Figura 4-5-8: Relación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada mediante el Teorema del Muestreo generalizado y la función original (y II), Ejemplo III:

(a) Función con soporte acotado $k_{0,025;h_8}$ (puntos) y valores de la transformada inversa

$$\left(\frac{8}{32/3}\right) \cdot \left((k_{0,025;h_8}^*)^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1_{\frac{3}{4}40\pi}}^{2/30} \quad (\text{círculos en el intervalo } (-1/30, 319/30)).$$

(b) Función k (puntos) y valores de la transformada inversa corregida

$$\left(\frac{8}{32/3}\right) \cdot \left((k_{0,025;h_8}^*)^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1_{\frac{3}{4}40\pi}}^{2/30} \left(n \frac{2}{30} \right) / h_8 \left(n \frac{2}{30} + 0,025 \right) \quad (\text{círculos}),$$

contenidos en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

(c) Función con soporte acotado $k_{0,025;h_8}$ (puntos) y valores de la transformada inversa

$$\left(\frac{8}{4\pi/3}\right) \cdot \left((k_{0,025;h_8}^*)^{0,6} \right)_{0,3; 1_{96,0}}^{2\pi/96} \quad (\text{círculos en el intervalo } (-1/30, 319/30)).$$

(d) Función k (puntos) y valores de la transformada inversa corregida

$$\left(\frac{8}{4\pi/3}\right) \cdot \left((k_{0,025;h_8}^*)^{0,6} \right)_{0,3; 1_{96,0}}^{2\pi/96} \left(n \frac{2\pi}{96} \right) / h_8 \left(n \frac{2\pi}{96} + 0,025 \right) \quad (\text{círculos}),$$

contenidos en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.

4.5.3. Relación entre la interpolación de la transformada inversa de la transformada directa interpolada y la función original

► **PROPOSICIÓN (RELACION ENTRE LA INTERPOLACIÓN DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA Y LA FUNCIÓN ORIGINAL).**¹⁶ La relación entre una función muestreada con soporte acotado representada por los valores $f_{\chi, v_{vX}}^{EX}$ dados en (4.2.10), y la interpolación de la transformada inversa de su transformada directa interpolada $\left(F_{\chi, v_{vX}}^{EX}\right)^{EU'}$ dada por la evaluación de (4.4.4) en los puntos de la forma $u = k \cdot EU'$ con k entero, representada por los valores $\left(\left(f_{\chi, v_{vX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)^{EX}_{\chi, l_{vX}}$, viene dada por la expresión:

$$f_{\chi, v_{vX}}^{EX}(n \cdot EX) = \left(\frac{VX}{VX'}\right)^2 \left(\left(f_{\chi, v_{vX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)^{EX}_{\chi, l_{vX}}(n \cdot EX) \quad (4.5.7)$$

$$\forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n}\}$$

La relación entre la función original muestreada representada por los valores f^{EX} dados en (4.2.4), y la transformada inversa de su transformada directa, viene dada por la expresión:

$$f^{EX}(n \cdot EX) = \left(\frac{VX}{VX'}\right)^2 \left(\left(f_{\chi, v_{vX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)^{EX}_{\chi, l_{vX}}(n \cdot EX) / v_{vX}(n \cdot EX - \chi) \quad (4.5.8)$$

$$\forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n}\}$$

◀

Es importante señalar que los valores de la transformada inversa $\left(\left(f_{\chi, v_{vX}}^{EX}\right)^{EU'}\right)^{EX}_{\chi, l_{vX}}$ no tienen por qué coincidir con los valores $\left(\left(f_{\chi, v_{vX}}^{*EX}\right)^{EU'}\right)^{EX}_{\chi, l_{vX}}$ que se determinarían calculando la interpolación en la transformada inversa de los valores $\left(f_{\chi, v_{vX}}^{*EX}\right)^{EU'}$ expuestos en (4.4.10). La acotación en el dominio frecuencial podría conducir a que no se diera una igualdad del tipo (4.5.7).

Este resultado se ejemplifica en las figuras 4–5–9 a 4–5–11:

¹⁶ La demostración puede encontrarse en la §4.A.3.3 del Anexo.

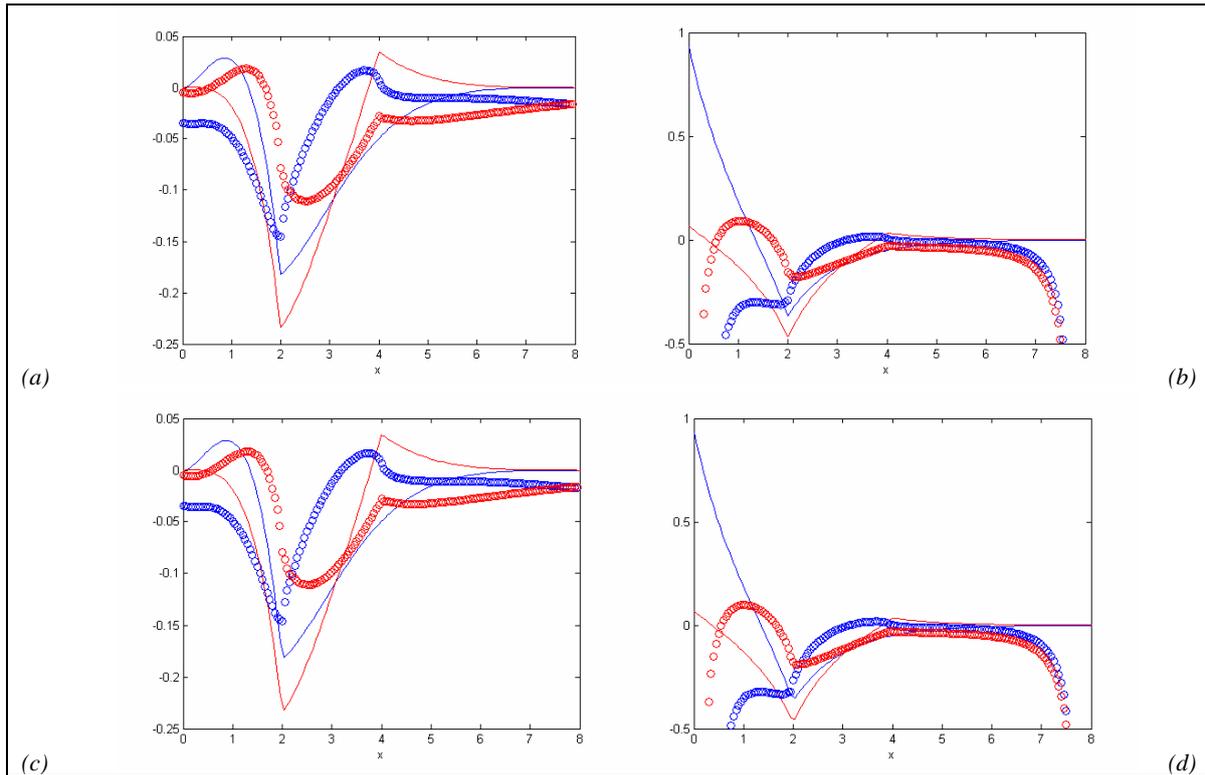


Figura 4-5-9: Relación entre la interpolación de la transformada inversa de la transformada directa interpolada mediante el Teorema del Muestreo generalizado y la función original (I), Ejemplo I:

(a) Función con soporte acotado $f_{0,025;h_8}$ (líneas) y valores de la interpolación de la

$$\text{transformada inversa } \left(\frac{8}{32/3}\right)^2 \cdot \left((f_{0,025;h_8}^*)^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1\frac{3}{4}40\pi}^{0,05} \quad (\text{círculos}) \text{ en el intervalo } (-0,025; 7,975).$$

(b) Función f (líneas) y valores de la interpolación de la transformada inversa corregida

$$\left(\frac{8}{32/3}\right)^2 \cdot \left((f_{0,025;h_8}^*)^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1\frac{3}{4}40\pi}^{0,05} (n \cdot 0,05) / h_8 (n \cdot 0,05 + 0,025) \quad (\text{círculos}),$$

contenidos en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

(c) Función con soporte acotado $f_{0,025;h_8}$ (líneas) y valores de la interpolación de la

$$\text{transformada inversa } \left(\frac{8}{4\pi/3}\right)^2 \cdot \left((f_{0,025;h_8}^*)^{0,6} \right)_{0,3; 196,0}^{0,05} \quad (\text{círculos}) \text{ en el intervalo } (-0,025; 7,975).$$

(d) Función f (líneas) y valores de la interpolación e la transformada inversa corregida

$$\left(\frac{8}{4\pi/3}\right)^2 \cdot \left((f_{0,025;h_8}^*)^{0,6} \right)_{0,3; 196,0}^{0,05} (n \cdot 0,05) / h_8 (n \cdot 0,05 + 0,025) \quad (\text{círculos}),$$

contenidos en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria.

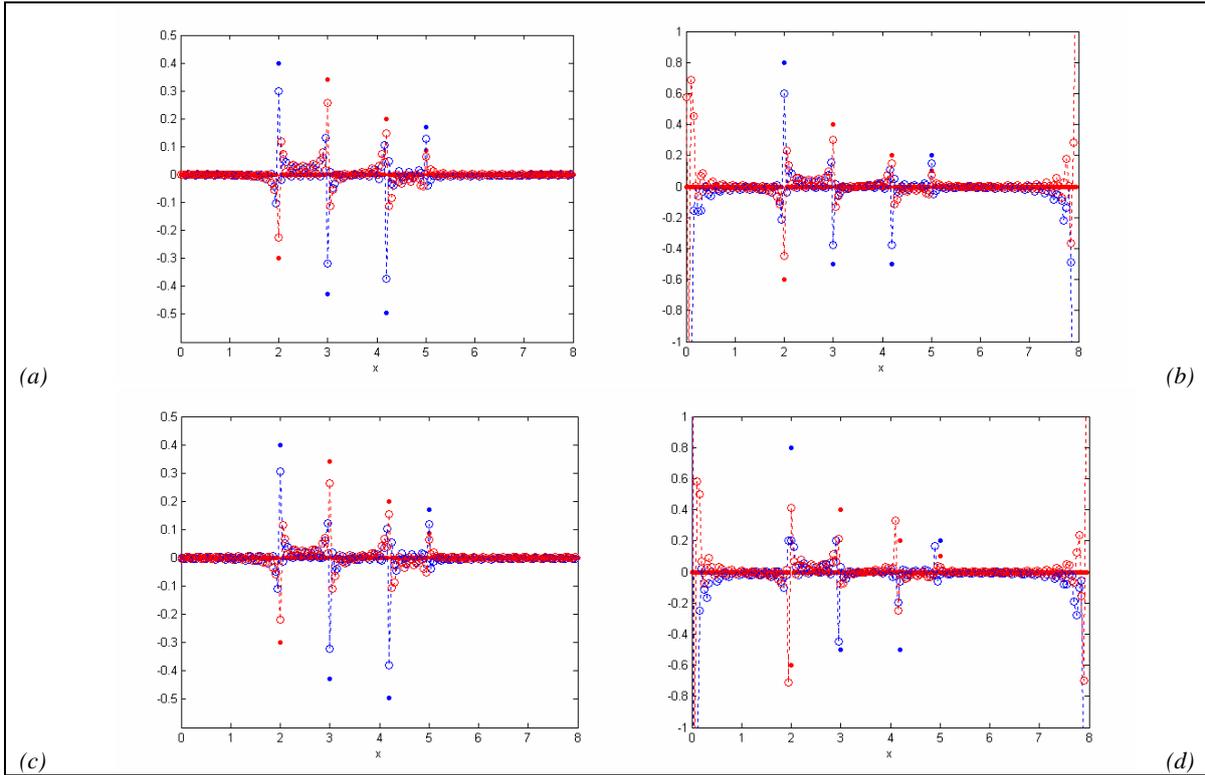


Figura 4-5-10: Relación entre la interpolación de la transformada inversa de la transformada directa interpolada mediante el Teorema del Muestreo generalizado y la función original (I), Ejemplo II:

(a) Función con soporte acotado $g_{0,025;h_8}$ (puntos) y valores de la interpolación de la

$$\text{transformada inversa } \left(\frac{8}{32/3}\right)^2 \cdot \left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1\frac{3}{4}40\pi}^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{0,025;1_8}^{0,05} \quad (\text{círculos en el intervalo } (-0,025; 7,975)).$$

(b) Función g (puntos) y valores de la interpolación de la transformada inversa corregida

$$\left(\frac{8}{32/3}\right)^2 \cdot \left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1\frac{3}{4}40\pi}^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{0,025;1_8}^{0,05} (n \cdot 0,05) / h_8 (n \cdot 0,05 + 0,025) \quad (\text{círculos}),$$

contenidos en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

(c) Función con soporte acotado $g_{0,025;h_8}$ (puntos) y valores de la interpolación de la

$$\text{transformada inversa } \left(\frac{8}{4\pi/3}\right)^2 \cdot \left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{0,3;1_96,0}^{0,6} \right)_{0,025;1_8}^{0,05} \quad (\text{círculos en el intervalo } (-0,025; 7,975)).$$

(d) Función g (puntos) y valores de la interpolación de la transformada inversa corregida

$$\left(\frac{8}{4\pi/3}\right)^2 \cdot \left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)_{0,3;1_96,0}^{0,6} \right)_{0,025;1_8}^{0,05} (n \cdot 0,05) / h_8 (n \cdot 0,05 + 0,025) \quad (\text{círculos}),$$

contenidos en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.

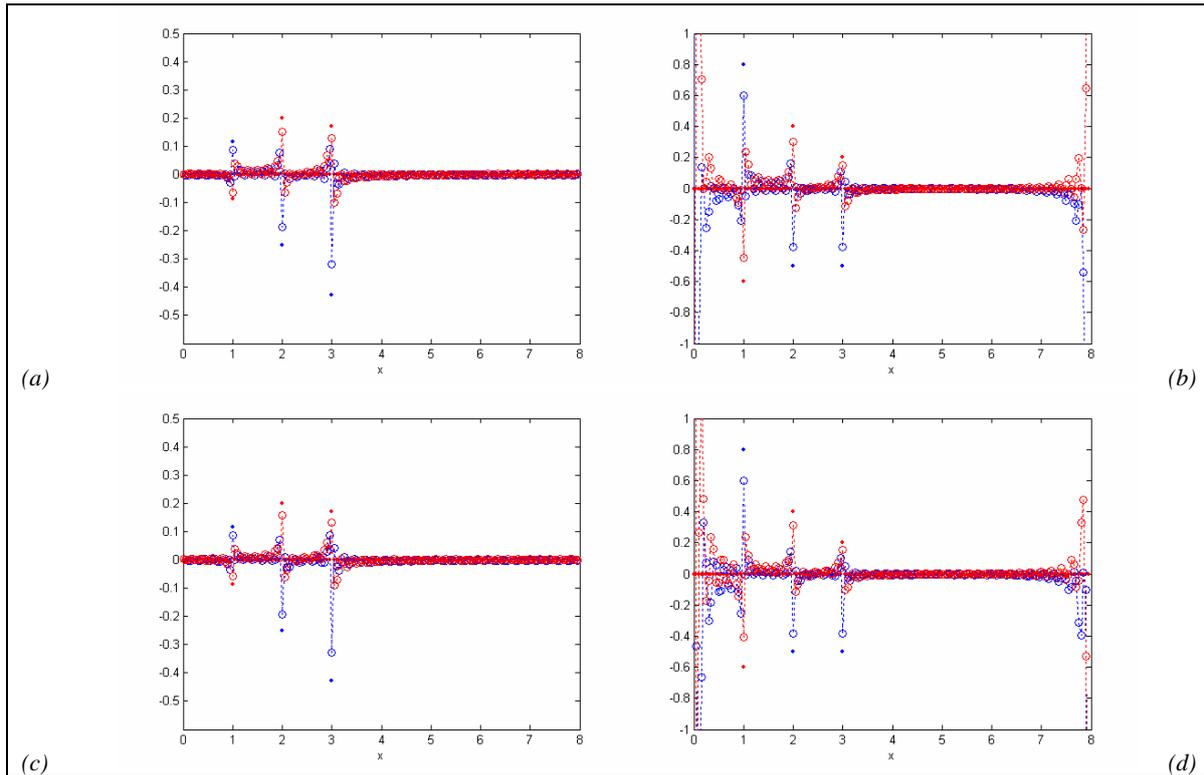


Figura 4-5-11: Relación entre la interpolación de la transformada inversa de la transformada directa interpolada mediante el Teorema del Muestreo generalizado y la función original (I), Ejemplo III:

(a) Función con soporte acotado $k_{0,025;h_8}$ (puntos) y valores de la interpolación de la

$$\text{transformada inversa } \left(\frac{8}{32/3}\right)^2 \cdot \left((k_{0,025;h_8}^*)^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1_{\frac{3}{4}40\pi}}^{0,05} \quad (\text{círculos}) \text{ en el intervalo } (-0,025; 7,975).$$

(b) Función k (puntos) y valores de la interpolación de la transformada inversa corregida

$$\left(\frac{8}{32/3}\right)^2 \cdot \left((k_{0,025;h_8}^*)^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1_{\frac{3}{4}40\pi}}^{0,05} (n \cdot 0,05) / h_8 (n \cdot 0,05 + 0,025) \quad (\text{círculos}),$$

contenidos en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

(c) Función con soporte acotado $k_{0,025;h_8}$ (puntos) y valores de la interpolación de la

$$\text{transformada inversa } \left(\frac{8}{4\pi/3}\right)^2 \cdot \left((k_{0,025;h_8}^*)^{0,6} \right)_{0,3; 1_{96,0}}^{0,05} \quad (\text{círculos}) \text{ en el intervalo } (-0,025; 7,975).$$

(d) Función k (puntos) y valores de la interpolación de la transformada inversa corregida

$$\left(\frac{8}{4\pi/3}\right)^2 \cdot \left((k_{0,025;h_8}^*)^{0,6} \right)_{0,3; 1_{96,0}}^{0,05} (n \cdot 0,05) / h_8 (n \cdot 0,05 + 0,025) \quad (\text{círculos}),$$

contenidos en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.

Análogamente a lo expuesto en la Subsección anterior, en los paneles (a) y (c) de las figuras 4-5-9 a 4-5-11 se aprecian fuertes discrepancias entre los valores de las funciones de soporte acotado y las transformadas inversas, siendo este efecto más notorio en el caso correspondiente al Ejemplo I, donde la función en el dominio natural no está constituida por suma de impulsos. Estas discrepancias pueden ser debidas, como ya se adelantó, a la acotación introducida en el dominio frecuencial, así como al hecho de que las discretizaciones del Teorema Integral de Fourier expuestas en (4.1.18) y (4.1.20) no dejan de ser aproximaciones de las integrales expuestas en (4.1.7) y (4.1.11).

Estas diferencias a su vez se traducen en una fuerte discrepancia entre los valores de las funciones originales y las transformadas inversas corregidas, como se aprecia en los paneles (b) y (d) de dichas figuras.

Es importante señalar que este efecto se produce, análogamente a lo indicado en la Subsección anterior, independientemente de la ventana que se emplee para acotar la función en (4.2.6) ó (4.2.8).

En las Figuras 4-5-10 y 4-5-11 se observa cómo, en el caso de funciones en el dominio natural constituidas por suma de impulsos, las transformadas inversas correspondientes a funciones constituidas por suma de impulsos no tienen la forma de suma de impulsos, independientemente del valor del espaciado de interpolación en el dominio frecuencial.

En el caso de funciones constituidas por suma de impulsos es nuevamente posible determinar, en forma empírica, una expresión equivalente a (4.5.7) que permite relacionar idénticamente la función muestreada de soporte acotado con la transformada inversa de su transformada interpolada, en la forma:

$$f_{\chi, \nu_X}^{EX} (n \cdot EX) \approx \left(\frac{VX}{VX'} \right) \cdot \left(\left(f_{\chi, \nu_X}^{*EX} \right)_{\nu', \nu_{V'}}^{EU'} \right)_{\chi, \nu_X}^{EX} (n \cdot EX) \quad (4.5.9)$$

$$\forall n \in \{ \underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n} \}$$

De tal forma que, atendiendo a las consideraciones anteriormente efectuadas, es posible relacionar idénticamente la función original muestreada y dicha transformada inversa mediante una expresión equivalente a (4.5.8), en la forma:

$$f_{\chi, \nu_X}^{EX} (n \cdot EX) \approx \left(\frac{VX}{VX'} \right) \cdot \left(\left(f_{\chi, \nu_X}^{*EX} \right)_{\nu', \nu_{V'}}^{EU'} \right)_{\chi, \nu_X}^{EX} (n \cdot EX) / \nu_{VX} (n \cdot EX - \chi) \quad (4.5.10)$$

$$\forall n \in \{ \underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n} \}$$

Este resultado se ejemplifica en las figuras 4-5-12 y 4-5-13.

Obsérvese cómo las correcciones empíricas anteriormente expuestas son válidas en el caso en que el espaciado interpolación en el dominio frecuencial, EU' , es submúltiplo del espaciado original, EU ; siendo mejor el ajuste correspondiente al Ejemplo III que el correspondiente al Ejemplo II.

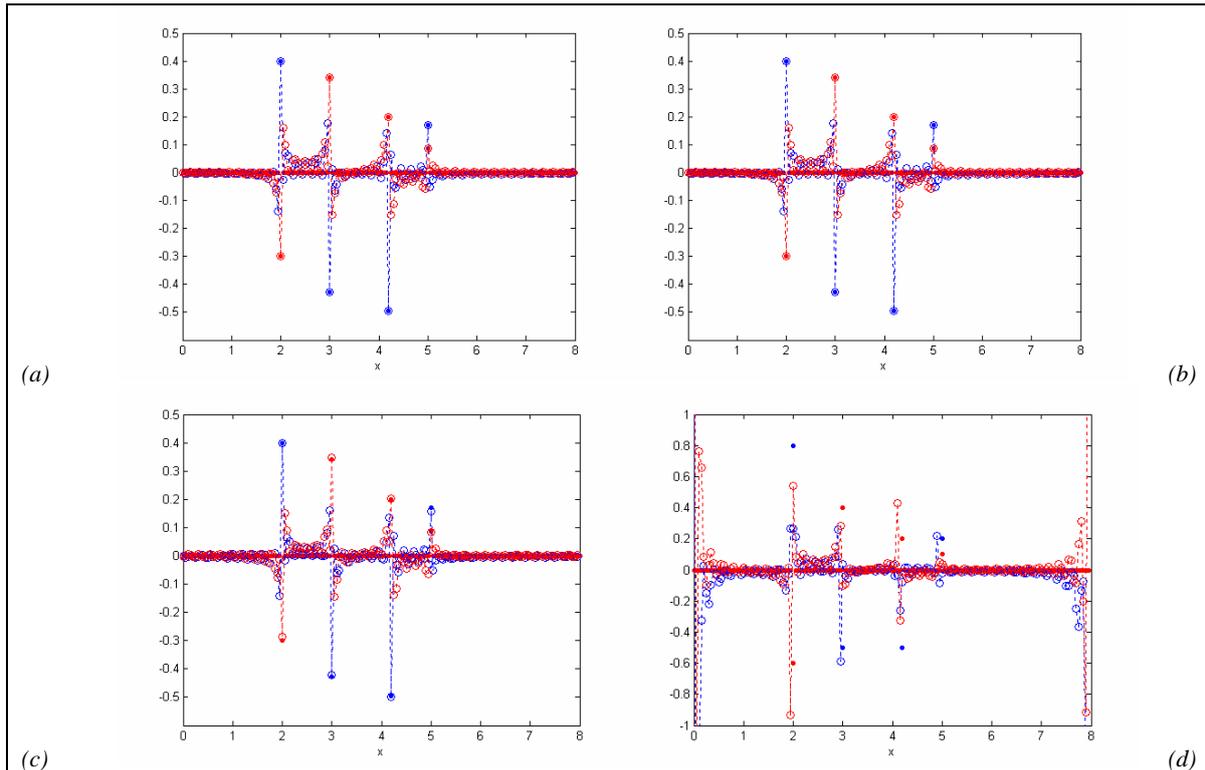


Figura 4-5-12: Relación entre la interpolación de la transformada inversa de la transformada directa interpolada mediante el Teorema del Muestreo generalizado y la función original (y II), Ejemplo II:

(a) Función con soporte acotado $g_{0,025;h_8}$ (puntos) y valores de la transformada inversa

$$\left(\frac{8}{32/3}\right) \cdot \left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{0,025;1_8}^{0,05} \quad (\text{círculos en el intervalo } (-0,025; 7,975)).$$

(b) Función muestreada $g^{0,05}(n \cdot 0,05)$ (puntos) y valores de la transformada inversa

$$\text{corregida} \left(\frac{8}{32/3}\right) \cdot \left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{0,025;1_8}^{0,05} \quad (n \cdot 0,05) / h_8 (n \cdot 0,05 + 0,025)$$

(círculos), contenidos en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

(c) Función con soporte acotado $g_{0,025;h_8}$ (puntos) y valores de la transformada inversa

$$\left(\frac{8}{4\pi/3}\right) \cdot \left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)^{0,6} \right)_{0,3;1_{96,0}}^{0,05} \quad (\text{círculos en el intervalo } (-0,025; 7,975)).$$

(d) Función muestreada $g^{0,05}(n \cdot 0,05)$ (puntos) y valores de la transformada inversa

$$\text{corregida} \left(\frac{8}{4\pi/3}\right) \cdot \left(\left(g_{0,025;h_8}^{*0,05} \right)^{0,6} \right)_{0,3;1_{96,0}}^{0,05} \quad (n \cdot 0,05) / h_8 (n \cdot 0,05 + 0,025)$$

(círculos), contenidos en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.

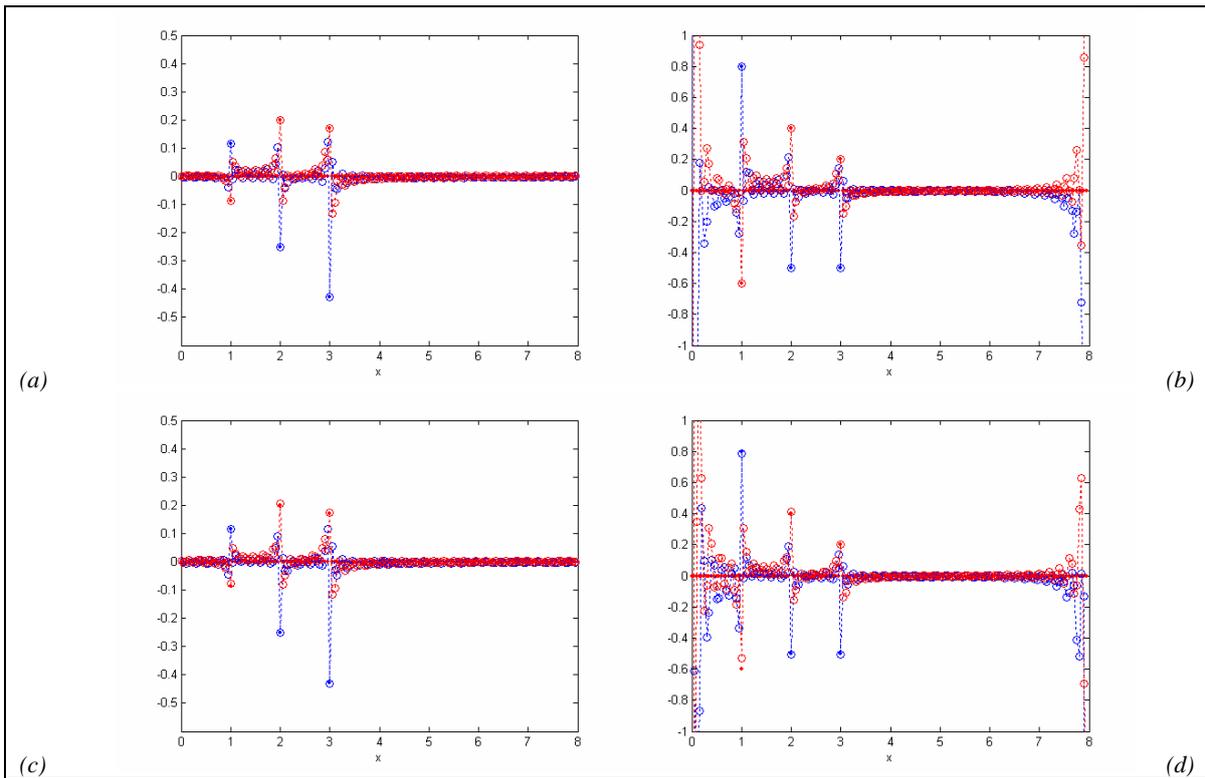


Figura 4-5-13: Relación entre la interpolación de la transformada inversa de la transformada directa interpolada mediante el Teorema del Muestreo generalizado y la función original (y II), Ejemplo III:

(a) Función con soporte acotado $k_{0,025;h_8}$ (puntos) y valores de la transformada inversa

$$\left(\frac{8}{32/3}\right) \cdot \left((k_{0,025;h_8}^*)^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1_{\frac{3}{4}40\pi}}^{0,05} \quad (\text{círculos en el intervalo } (-0,025; 7,975)).$$

(b) Función muestreada $k^{0,05}(n \cdot 0,05)$ (puntos) y valores de la transformada inversa

$$\text{corregida} \left(\frac{8}{32/3}\right) \cdot \left((k_{0,025;h_8}^*)^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1_{\frac{3}{4}40\pi}}^{0,05} (n \cdot 0,05) / h_8 (n \cdot 0,05 + 0,025)$$

(círculos), contenidos en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

(c) Función con soporte acotado $k_{0,025;h_8}$ (puntos) y valores de la transformada inversa

$$\left(\frac{8}{4\pi/3}\right) \cdot \left((k_{0,025;h_8}^*)^{0,6} \right)_{0,3; 1_{96,0}}^{0,05} \quad (\text{círculos en el intervalo } (-0,025; 7,975)).$$

(d) Función muestreada $k^{0,05}(n \cdot 0,05)$ (puntos) y valores de la transformada inversa

$$\text{corregida} \left(\frac{8}{4\pi/3}\right) \cdot \left((k_{0,025;h_8}^*)^{0,6} \right)_{0,3; 1_{96,0}}^{0,05} (n \cdot 0,05) / h_8 (n \cdot 0,05 + 0,025)$$

(círculos), contenidos en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.

4.6. Recapitulación

En esta Sección se exponen, a modo de compilación, los resultados principales expuestos en el presente Capítulo para el estudio de las transformadas de Fourier, directa e inversa, de funciones muestreadas con soporte acotado por la aplicación de una ventana cuadrada.

4.6.1. Transformadas de Fourier directa e inversa

- En esta Tesis Doctoral se tratan funciones constituidas por suma de impulsos, con soporte acotado por aplicación de la ventana cuadrada 1_{vX} dada por (4.3.15). Dada una función $f_{\chi,1_{vX}}^{EX}$ con las citadas características, representada por los valores dados por una expresión análoga a (4.2.10):

$$f_{\chi,1_{vX}}^{EX}(n \cdot EX) = f(n \cdot EX) \quad (4.6.1)$$

$$\forall n \in \{0 \ 1 \ \dots \ PE - 2 \ PE - 1\}$$

Se determina su transformada de Fourier mediante una expresión análoga a (4.3.2):

$$\left(F_{\chi,1_{vX}}^{EX}\right)_{v,1_{vU}}^{EU}(k \cdot EU) = EU \cdot \tilde{F}_{v,1_{vU}}^{EU}(k \cdot EU) \quad (4.6.2)$$

$$\forall k \in \{0 \ 1 \ \dots \ PE - 2 \ PE - 1\}$$

Donde $\tilde{F}_{v,1_{vU}}^{EU}$ representa la transformada de Fourier discreta que se determina computacionalmente, dada por una expresión análoga a (4.3.6):

$$\tilde{F}_{v,1_{vU}}^{EU}(k \cdot EU) = \sum_{n=0}^{PE-1} f(n \cdot EX) \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \quad (4.6.3)$$

$$\forall k \in \{0 \ 1 \ \dots \ PE - 2 \ PE - 1\}$$

- Dada una función $F_{\nu, \nu'}^{EU}$ con las citadas características, representada por los valores dados por una expresión análoga a (4.3.8):

$$F_{\nu, \nu'}^{EU}(k \cdot EU) = F(k \cdot EU) \quad (4.6.4)$$

$$\forall k \in \{0 \ 1 \ \dots \ PE-2 \ PE-1\}$$

Se determina su transformada de Fourier inversa mediante una expresión análoga a (4.3.12):

$$\left(f_{\nu, \nu'}^{EU}\right)_{\chi, \nu_X}^{EX}(n \cdot EX) = \frac{1}{EU} \tilde{f}_{\chi, \nu_X}^{EX}(n \cdot EX) \quad (4.6.5)$$

$$\forall n \in \{0 \ 1 \ \dots \ PE-2 \ PE-1\}$$

Donde $\tilde{f}_{\chi, \nu_X}^{EX}$ representa la transformada de Fourier discreta que se determina computacionalmente, dada por una expresión análoga a (4.3.6):

$$\tilde{f}_{\chi, \nu_X}^{EX}(n \cdot EX) = \frac{1}{PE} \sum_{k=0}^{PE-1} F(k \cdot EU) \cdot e^{ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \quad (4.6.6)$$

$$\forall n \in \{0 \ 1 \ \dots \ PE-2 \ PE-1\}$$

4.6.2. Interpolación en las transformadas de Fourier

- La interpolación de la transformada de Fourier en PE valores del dominio frecuencial viene representada por los valores dados mediante una expresión análoga a (4.4.10):

$$\begin{aligned} & \left(F_{\chi, \nu_X}^{*EX}\right)_{\nu', \nu_U'}^{EU'}(k \cdot EU') = \\ & = \frac{EX}{2\pi} \sum_{q=0}^{PE-1} \left(F_{\chi, \nu_X}^{EX}\right)_{\nu, \nu_U}^{EU}(q \cdot EU) \cdot \left(\hat{\mathbb{I}}_{\chi, \nu_X}^{q \cdot EX}\right)_{\nu', \nu_U'}^{EU'}(k \cdot EU' | \chi, \nu_X) \end{aligned} \quad (4.6.7)$$

$$\forall k \in \{\underline{k} \ \underline{k}+1 \ \dots \ \bar{k}-1 \ \bar{k}\}$$

Donde el conjunto de índices $\{\underline{k} \ \underline{k}+1 \ \dots \ \bar{k}-1 \ \bar{k}\}$ cumple la condición:

$$k \cdot EU' \in (\nu', VU' + \nu'), \quad \forall k \in \{\underline{k} \ \underline{k}+1 \ \dots \ \bar{k}-1 \ \bar{k}\} \quad (4.4.9)$$

Los valores $\left(F_{\chi, 1_{VX}}^{EX}\right)_{\nu, 1_{VU}}^{EU}$ vienen determinados por una expresión análoga a (4.4.2), que se reescribe de la forma (4.6.2).

Así mismo, los valores $\left(\hat{I}_{\chi, 1_{VX}}^{EX}\right)_{\nu', 1_{VU'}}^{EU'}$ vienen determinados por una expresión análoga a (4.4.3):

$$\left(\hat{I}_{\chi, 1_{VX}}^{EX}\right)_{\nu', 1_{VU'}}^{EU'} (k \cdot EU') = EU \cdot \sum_{n=0}^{PE-1} e^{-i(k \cdot EU' - q \cdot EU)n \cdot EX} \quad (4.6.8)$$

$$\forall k \in \{\underline{k} \ \underline{k}+1 \ \dots \ \bar{k}-1 \ \bar{k}\}$$

- La interpolación de la transformada de Fourier inversa en PE valores del dominio natural viene representada por los valores dados mediante una expresión análoga a (4.4.19):

$$\begin{aligned} & \left(f_{\nu, 1_{VU}}^{*EU}\right)_{\chi', 1_{VX'}}^{EX'} (n \cdot EX') = \\ & = EU \cdot \sum_{m=0}^{PE-1} \left(f_{\nu, 1_{VU}}^{EU}\right)_{\chi, 1_{VX}}^{EX} (m \cdot EX) \cdot \left(\hat{I}_{\nu, 1_{VU}}^{mEU}\right)_{\chi', 1_{VX'}}^{EX'} (n \cdot EX' | \nu, VU) \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

$$\forall n \in \{\underline{n} \ \underline{n}+1 \ \dots \ \bar{n}-1 \ \bar{n}\}$$

Donde el conjunto de índices $\{\underline{n} \ \underline{n}+1 \ \dots \ \bar{n}-1 \ \bar{n}\}$ cumple la condición:

$$n \cdot EX' \in (\chi', VX' + \chi'), \quad \forall n \in \{\underline{n} \ \underline{n}+1 \ \dots \ \bar{n}-1 \ \bar{n}\} \quad (4.4.18)$$

Los valores $\left(f_{\nu, 1_{VU}}^{EU}\right)_{\chi, 1_{VX}}^{EX}$ vienen determinados por una expresión análoga a (4.4.11), que se reescribe de la forma (4.6.6).

Así mismo, los valores $\left(\hat{1}_{\nu, 1_{\nu\nu}} \right)_{\chi', 1_{\nu\chi'}}^{mEU, EX'}$ vienen determinados por una expresión análoga a (4.4.12):

$$\left(\hat{1}_{\nu, 1_{\nu\nu}} \right)_{\chi', 1_{\nu\chi'}}^{mEU, EX'} (n \cdot EX') = \frac{1}{VU} \sum_{k=0}^{PE-1} e^{ik \cdot EU(n \cdot EX' - m \cdot EX)}$$

$$\forall n \in \{ \underline{n} \quad \underline{n}+1 \quad \dots \quad \bar{n}-1 \quad \bar{n} \}$$
(4.6.10)

4.6.3. Relaciones entre las transformadas de Fourier y la función original

- La relación entre la función muestreada con soporte acotado representada por los valores $f_{\chi, 1_{\nu\chi}}^{EX}$ dados en (4.6.1), y la transformada inversa de su transformada directa $\left(F_{\chi, 1_{\nu\chi}}^{EX} \right)_{\nu, 1_{\nu\nu}}^{EU}$ dada por (4.6.2), representada por los valores $\left(\left(f_{\chi, 1_{\nu\chi}}^{EX} \right)_{\nu, 1_{\nu\nu}}^{EU} \right)_{\chi, 1_{\nu\chi}}^{EX}$, viene dada por una expresión análoga a (4.5.1):

$$f_{\chi, 1_{\nu\chi}}^{EX} (n \cdot EX) = \left(\left(f_{\chi, 1_{\nu\chi}}^{EX} \right)_{\nu, 1_{\nu\nu}}^{EU} \right)_{\chi, 1_{\nu\chi}}^{EX} (n \cdot EX)$$

$$\forall n \in \{ 0 \quad 1 \quad \dots \quad PE-2 \quad PE-1 \}$$
(4.6.11)

- La relación entre la función muestreada con soporte acotado representada por los valores $f_{\chi, 1_{\nu\chi}}^{EX}$ dados en (4.6.1), y la transformada inversa de su transformada directa interpolada $\left(F_{\chi, 1_{\nu\chi}}^{EX} \right)_{\nu', 1_{\nu\nu'}}^{EU'}$ dada por (4.6.7), representada por los valores $\left(\left(f_{\chi, 1_{\nu\chi}}^{EX} \right)_{\nu', 1_{\nu\nu'}}^{EU'} \right)_{\chi', 1_{\nu\chi'}}^{EX'}$, viene dada por una expresión análoga a (4.5.5) y (4.5.6):

$$f_{\chi', 1_{\nu\chi'}}^{EX'} (n \cdot EX') \simeq \left(\frac{VX}{VX'} \right) \cdot \left(\left(f_{\chi, 1_{\nu\chi}}^{*EX} \right)_{\nu', 1_{\nu\nu'}}^{EU'} \right)_{\chi', 1_{\nu\chi'}}^{EX'} (n \cdot EX')$$

$$\forall n \in \{ 0 \quad 1 \quad \dots \quad PE-2 \quad PE-1 \} : n \cdot EX' \in (\chi, VX + \chi)$$
(4.6.12)

- La relación entre la función muestreada con soporte acotado representada por los valores $f_{\chi,1_{VX}}^{EX}$ dados en (4.6.1), y la interpolación de la transformada inversa de su transformada directa interpolada $\left(F_{\chi,1_{VX}}^{EX}\right)_{v',1_{VU'}}^{EU'}$ dada por (4.6.7), representada por los valores $\left(\left(f_{\chi,1_{VX}}^{*EX}\right)_{v',1_{VU'}}^{EU'}\right)_{\chi,1_{VX}}^{EX}$, viene dada por una expresión análoga a (4.5.9):

$$f_{\chi,1_{VX}}^{EX}(n \cdot EX) \simeq \left(\frac{VX}{VX'}\right) \cdot \left(\left(f_{\chi,1_{VX}}^{*EX}\right)_{v',1_{VU'}}^{EU'}\right)_{\chi,1_{VX}}^{EX}(n \cdot EX) \quad (4.6.13)$$

$$\forall n \in \{0 \ 1 \ \dots \ PE-2 \ PE-1\}$$

- La relación entre la función muestreada con soporte acotado representada por los valores $f_{\chi,1_{VX}}^{EX}$ dados en (4.6.1), y la transformada inversa de su transformada directa interpolada mediante splines cúbicos representada por los valores $\left(\left(f_{\chi,1_{VX}}^{*EX}\right)_{v',1_{VU'}}^{EU'}\right)_{\chi',1_{VX'}}^{EX'}$, viene dada por una expresión análoga a (4.6.12):

$$f_{\chi',1_{VX'}}^{EX'}(n \cdot EX') \simeq \left(\frac{VX}{VX'}\right) \cdot \left(\left(f_{\chi,1_{VX}}^{*EX}\right)_{v',1_{VU'}}^{EU'}\right)_{\chi',1_{VX'}}^{EX'}(n \cdot EX') \quad (4.6.14)$$

$$\forall n \in \{0 \ 1 \ \dots \ PE-2 \ PE-1\} \quad : \quad n \cdot EX' \in (\chi, VX + \chi)$$

- La relación entre la función muestreada con soporte acotado representada por los valores $f_{\chi,1_{VX}}^{EX}$ dados en (4.6.1), y la interpolación de la transformada inversa de su transformada directa interpolada representada por los valores $\left(\left(f_{\chi,1_{VX}}^{*EX}\right)_{v',1_{VU'}}^{EU'}\right)_{\chi,1_{VX}}^{EX}$, viene dada por una expresión análoga a (4.6.13):

$$f_{\chi,1_{VX}}^{EX}(n \cdot EX) \simeq \left(\frac{VX}{VX'}\right) \cdot \left(\left(f_{\chi,1_{VX}}^{*EX}\right)_{v',1_{VU'}}^{EU'}\right)_{\chi,1_{VX}}^{EX}(n \cdot EX) \quad (4.6.15)$$

$$\forall n \in \{0 \ 1 \ \dots \ PE-2 \ PE-1\}$$

4.A. Anexo: Demostraciones de los resultados matemáticos

4.A.1. Transformadas de Fourier de funciones muestreadas con soporte acotado

4.A.1.1. Transformada de Fourier directa

■ **DEMOSTRACIÓN (TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA FUNCIÓN MUESTREADA CON SOPORTE ACOTADO).** Para determinar la transformada de Fourier de la función $f_{\chi, VX}^{EX}$ dada en (4.2.9), se considera su extensión periódica:

$$\begin{aligned} f_p^{EX}(x) &\equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{\chi, VX}^{EX}(x - n \cdot VX) = \\ &= (f_{\chi, VX}^{EX} * \Delta^{VX})(x) \end{aligned} \quad (4.A.1)$$

Donde el símbolo * representa la convolución de funciones, definida mediante la integral (Spiegel et al., 2000):

$$(h_1 * h_2)(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dy h_1(t - y) \cdot h_2(y) \quad (4.A.2)$$

Dada la expresión (4.A.1), se cumple:

$$f_p^{EX}(x) = f_{\chi, VX}^{EX}(x), \quad \forall x \in (\chi, VX + \chi) \quad (4.A.3)$$

Obsérvese que, puesto que la función $f_{\chi, VX}^{EX}$ dada por (4.2.9) viene representada por los *PE* valores dados por (4.2.10), la función f_p^{EX} contendrá únicamente *PE* valores independientes, siendo el resto repeticiones cíclicas de éstos.

La transformada de Fourier directa de una función periódica es otra función periódica, que viene dada por la expresión:

$$F_p^{EU}(u) \equiv 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_k \cdot \delta(u - k \cdot EU) \quad (4.A.4)$$

Donde se ha definido el espaciado en el dominio frecuencial de la forma (4.3.3) y los coeficientes Φ_k vienen dados por la expresión:

$$\begin{aligned}\Phi_k &\equiv \frac{1}{VX} \int_{\chi}^{VX+\chi} dx f_p^{EX}(x) \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot x} = \\ &= \frac{1}{VX} \int_{\chi}^{VX+\chi} dx f_{\chi, v_{VX}}^{EX}(x) \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot x}\end{aligned}\quad (4.A.5)$$

Donde se ha tenido en cuenta (4.A.3) para escribir la última igualdad.

Estos coeficientes pueden ser determinados explícitamente, sustituyendo el valor de $f_{\chi, v_{VX}}^{EX}$ dado por (4.2.9) en la expresión anterior:

$$\begin{aligned}\Phi_k &= \frac{1}{VX} \int_{\chi}^{VX+\chi} dx \left(\sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} v_{VX}(n \cdot EX - \chi) \cdot f(n \cdot EX) \cdot \delta(x - n \cdot EX) \right) \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot x} = \\ &= \frac{1}{VX} \sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} v_{VX}(n \cdot EX - \chi) \cdot f(n \cdot EX) \cdot \int_{\chi}^{VX+\chi} dx \delta(x - n \cdot EX) \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot x} = \\ &= \frac{1}{VX} \sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} v_{VX}(n \cdot EX - \chi) \cdot f(n \cdot EX) \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot n \cdot EX}\end{aligned}\quad (4.A.6)$$

Sustituyendo esta última expresión en (4.A.4) se obtiene la transformada de Fourier:

$$F_p^{EU}(u) = EU \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} v_{VX}(n \cdot EX - \chi) \cdot f(n \cdot EX) \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \right) \cdot \delta(u - k \cdot EU)\quad (4.A.7)$$

Esta última expresión permite determinar la transformada de Fourier de $f_{\chi, v_{VX}}^{EX}$, teniendo en cuenta (4.A.3), obteniéndose la transformada (4.3.1).

Puesto que la función f_p^{EX} tiene únicamente PE valores independientes, su transformada de Fourier F_p^{EU} también tendrá PE valores independientes, siendo el resto repeticiones cíclicas de éstos.

Así pues, la transformada de Fourier de $f_{\chi, v_{VX}}^{EX}$ vendrá determinada por repeticiones cíclicas de dichos PE valores independientes de F_p^{EU} . Esto equivale, formalmente, a la aplicación sobre ésta de una ventana cuadrada, dada por la expresión:

$$I_{VU}(u) \equiv \begin{cases} 1 & 0 < u < VU \\ 0 & u \leq 0 \vee VU \leq u \end{cases}\quad (4.3.5)$$

De tal forma que los valores de la transformada $\left(F_{\chi, v_{VX}}^{EX}\right)_{\nu, I_{VU}}^{EU}$ se determinan multiplicando (4.A.7) por la ventana $I_{VU}(u - \nu)$ obteniéndose, dada la acotación del soporte de la misma:¹⁷

$$\begin{aligned} & \left(F_{\chi, v_{VX}}^{EX}\right)_{\nu, I_{VU}}^{EU}(u) = \\ & = EU \cdot \sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} I_{VU}(k \cdot EU - \nu) \left(\sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} v_{VX}(n \cdot EX - \chi) \cdot f(n \cdot EX) \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \right) \cdot \delta(u - k \cdot EU) \end{aligned} \quad (4.A.8)$$

Obsérvese que la longitud de la ventana VU , con el objeto de garantizar que el sumatorio en k de (4.A.8) contenga PE términos, debe cumplir la condición:

$$(PE - 1) \cdot EU < VU < (PE + 1) \cdot EU \quad (4.A.9)$$

Sustituyendo en (4.A.8) el valor de la ventana I_{VU} dado por (4.3.5), se obtiene:

$$\begin{aligned} & \left(F_{\chi, v_{VX}}^{EX}\right)_{\nu, I_{VU}}^{EU}(u) = \\ & = EU \cdot \sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} \left(\sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} v_{VX}(n \cdot EX - \chi) \cdot f(n \cdot EX) \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \right) \cdot \delta(u - k \cdot EU) \end{aligned} \quad (4.A.10)$$

Representada por los valores (4.3.2).

■

4.A.1.2. Transformada de Fourier inversa

■ **DEMOSTRACIÓN (TRANSFORMADA DE FOURIER INVERSA DE UNA FUNCIÓN MUESTREADA CON SOPORTE ACOTADO).** Para determinar la transformada de Fourier de la función $F_{\nu, V_{VU}}^{EU}$ dada en (4.3.7), se considera su extensión periódica:

$$\begin{aligned} F_p^{EU}(u) & \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{\nu, V_{VU}}^{EU}(u - k \cdot VU) = \\ & = \left(F_{\nu, V_{VU}}^{EU} * \Delta^{VU}\right)(u) \end{aligned} \quad (4.A.11)$$

Donde el símbolo $*$ representa la convolución de funciones definida en (4.A.2).

¹⁷ El subíndice ν, I_{VU} en la transformada mantiene la consistencia de la notación, y permite observar que la limitación en los índices k es equivalente a acotar en el dominio frecuencial la transformada de Fourier de $f_{\chi, v_{VX}}^{EX}$, que ya es una función muestreada.

Dada esta expresión se cumple:

$$F_p^{EU}(u) = F_{\nu, V_U}^{EU}(u), \quad \forall u \in (\nu, V_U + \nu) \quad (4.A.12)$$

Obsérvese que, puesto que la función F_{ν, V_U}^{EU} dada por (4.3.7) viene representada por los PE valores dados por (4.3.8), la función F_p^{EU} contendrá únicamente PE valores independientes, siendo el resto repeticiones cíclicas de éstos.

La transformada de Fourier inversa de una función periódica es otra función periódica, que viene dada por la expresión:

$$f_p^{EX}(x) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n \cdot \delta(x - n \cdot EX) \quad (4.A.13)$$

Donde se ha definido el espaciado en el dominio natural de la forma (4.3.13) y los coeficientes ϕ_n vienen dados por la expresión:

$$\begin{aligned} \phi_n &\equiv \frac{1}{V_U} \int_{\nu}^{\nu+V_U} du F_p^{EU}(u) \cdot e^{iun \cdot EX} = \\ &= \frac{1}{V_U} \int_{\nu}^{\nu+V_U} du F_{\nu, V_U}^{EU}(u) \cdot e^{iun \cdot EX} \end{aligned} \quad (4.A.14)$$

Donde se ha tenido en cuenta (4.A.12) para escribir la última igualdad.

Estos coeficientes pueden ser determinados explícitamente, sustituyendo el valor de F_{ν, V_U}^{EU} dado por (4.3.7) en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \phi_n &= \frac{1}{V_U} \int_{\nu}^{\nu+V_U} du \left(\sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} V_{V_U}(k \cdot EU - \nu) \cdot F(k \cdot EU) \cdot \delta(u - k \cdot EU) \right) \cdot e^{iun \cdot EX} = \\ &= \frac{1}{V_U} \sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} V_{V_U}(k \cdot EU - \nu) \cdot F(k \cdot EU) \cdot \int_{\nu}^{\nu+V_U} du \delta(u - k \cdot EU) \cdot e^{iun \cdot EX} = \\ &= \frac{1}{V_U} \sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} V_{V_U}(k \cdot EU - \nu) \cdot F(k \cdot EU) \cdot e^{ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \end{aligned} \quad (4.A.15)$$

Sustituyendo esta última expresión en (4.A.13) se obtiene la transformada de Fourier:

$$f_p^{EX}(x) = \frac{1}{V_U} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} V_{V_U}(k \cdot EU - \nu) \cdot F(k \cdot EU) \cdot e^{ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \right) \cdot \delta(x - n \cdot EX) \quad (4.A.16)$$

Esta última expresión permite determinar la transformada de Fourier inversa de F_{ν, V_U}^{EU} , teniendo en cuenta (4.A.12), obteniéndose la transformada (4.3.11).

Puesto que la función F_p^{EU} tiene únicamente PE valores independientes, su transformada de Fourier inversa f_p^{EX} también tendrá PE valores independientes, siendo el resto repeticiones cíclicas de éstos.

Así pues, la transformada de Fourier inversa de $F_{\nu, V_{VU}}^{EU}$ vendrá determinada por repeticiones cíclicas de dichos PE valores independientes de f_p^{EX} . Esto equivale, formalmente, a la aplicación sobre f_p^{EX} de una ventana cuadrada, dada por la expresión:

$$1_{VX}(x) \equiv \begin{cases} 1 & 0 < x < VX \\ 0 & x \leq 0 \vee VX \leq x \end{cases} \quad (4.3.15)$$

De tal forma que los valores de la transformada $(f_{\nu, V_{VU}}^{EU})_{\mathcal{X}, 1_{VX}}^{EX}$ se determinan multiplicando (4.A.16) por la ventana $1_{VX}(x - \mathcal{X})$ obteniéndose, dada la acotación del soporte de la misma:¹⁸

$$\begin{aligned} & (f_{\nu, V_{VU}}^{EU})_{\mathcal{X}, 1_{VX}}^{EX}(x) = \\ & = \frac{1}{VU} \sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} 1_{VX}(n \cdot EX - \mathcal{X}) \left(\sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} V_{VU}(k \cdot EU - \nu) \cdot F(k \cdot EU) \cdot e^{ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \right) \cdot \delta(x - n \cdot EX) \end{aligned} \quad (4.A.17)$$

Obsérvese que la longitud de la ventana VX debe cumplir la condición:

$$(PE - 1) \cdot EX < VX < (PE + 1) \cdot EX \quad (4.A.18)$$

Con el objeto de garantizar que el sumatorio en n de (4.A.17) contenga PE términos.

Sustituyendo en (4.A.17) el valor de la ventana 1_{VX} dado por (4.3.15), se obtiene:

$$\begin{aligned} & (f_{\nu, V_{VU}}^{EU})_{\mathcal{X}, 1_{VX}}^{EX}(x) = \\ & = \frac{1}{VU} \sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} \left(\sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} V_{VU}(k \cdot EU - \nu) \cdot F(k \cdot EU) \cdot e^{ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \right) \cdot \delta(x - n \cdot EX) \end{aligned} \quad (4.A.19)$$

Representada por los valores (4.3.12).

■

¹⁸ El subíndice $\mathcal{X}, 1_{VX}$ en la transformada mantiene la consistencia de la notación, y permite observar que la limitación en los índices n es equivalente a acotar en el dominio natural la transformada de Fourier inversa de $F_{\nu, V_{VU}}^{EU}$, que ya es una función muestreada.

4.A.2. Interpolación en las transformadas de Fourier

4.A.2.1. Generalización del Teorema del Muestreo para la transformada directa

■ **DEMOSTRACIÓN (GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DEL MUESTREO PARA LA TRANSFORMADA DIRECTA).** La obtención de la expresión (4.4.4) requiere separar, al tomar la transformada de Fourier de la función $f_{\chi, v_{VX}}^{EX}$ dada por (4.2.9), los efectos del muestreo y de la ventana que acota el soporte, v_{VX} . Para ello se descompone esta ventana en la forma:

$$v_{VX}(x) = 1_{VX}(x) \cdot v_{VX}(x) \cdot 1_{VX}(x) \quad (4.A.20)$$

Obsérvese que la ventana 1_{VX} , definida en (4.3.15), tiene la propiedad de ser el elemento neutro en el producto de ventanas de longitud VX en el dominio natural.

Así pues, la función $f_{\chi, v_{VX}}^{EX}$ puede reescribirse de la forma:

$$f_{\chi, v_{VX}}^{EX}(x) = \sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} 1_{VX}(n \cdot EX - \chi) \cdot v_{VX}(n \cdot EX - \chi) \cdot f_{\chi, 1_{VX}}^{EX}(n \cdot EX) \cdot \delta(x - n \cdot EX) \quad (4.A.21)$$

Donde ha sido definida la nueva función $f_{\chi, 1_{VX}}^{EX}$:

$$f_{\chi, 1_{VX}}^{EX}(x) \equiv \sum_{m=\underline{n}}^{\bar{n}} 1_{VX}(m \cdot EX - \chi) \cdot f(m \cdot EX) \cdot \delta(x - m \cdot EX) \quad (4.A.22)$$

Obsérvese que el efecto de la ventana permanece en la función $f_{\chi, v_{VX}}^{EX}$ dada por (4.A.21), mientras que el efecto del muestreo en ésta se encuentra incluido en la función $f_{\chi, 1_{VX}}^{EX}$, como puede apreciarse en su definición (4.A.22).

La función $f_{\chi, 1_{VX}}^{EX}$ es, por su definición, una función muestreada y de soporte acotado. Su transformada de Fourier puede determinarse mediante (4.3.2), que en este caso se reescribe, teniendo en cuenta el valor de la ventana 1_{VX} dado por (4.3.15), de la forma expresada en (4.4.2).

Por otra parte, es posible expandir la función $f_{\chi, 1_{VX}}^{EX}$ en una serie de Fourier en el intervalo $(\chi, VX + \chi)$ mediante (4.1.8), que en este caso se reescribe de la forma:

$$f_{\chi, 1_{VX}}^{EX}(x) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \phi_q \cdot e^{iq \cdot EU \cdot x}, \quad \forall x \in (\chi, VX + \chi) \quad (4.A.23)$$

Los coeficientes ϕ_q vienen dados por (4.1.10), que en este caso se reescribe de la forma:

$$\phi_q = \frac{1}{PE} \sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} f_{\chi, 1_{VX}}^{EX} (n \cdot EX) \cdot e^{-iq \cdot EU \cdot n \cdot EX} \quad (4.A.24)$$

Sustituyendo en esta expresión el valor de $f_{\chi, 1_{VX}}^{EX}$ dado en (4.A.22), ésta se reescribe de la forma:

$$\phi_q = \frac{1}{PE} \sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} 1_{VX} (n \cdot EX - \chi) \cdot f(n \cdot EX) \cdot e^{-iq \cdot EU \cdot n \cdot EX} \quad (4.A.25)$$

Comparando (4.4.2) y (4.A.25) se concluye que:

$$\phi_q = \frac{1}{VU} \left(F_{\chi, 1_{VX}}^{EX} \right)_{v, 1_{VU}}^{EU} (q \cdot EU) \quad (4.A.26)$$

$$\forall q \in \{ \underline{k} \quad \underline{k} + 1 \quad \dots \quad \bar{k} - 1 \quad \bar{k} \}$$

De tal forma que, sustituyendo (4.A.26) en (4.A.23), la suma:

$$f_p(x) = \frac{1}{VU} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(F_{\chi, 1_{VX}}^{EX} \right)_{v, 1_{VU}}^{EU} (q \cdot EU) \cdot e^{iq \cdot EU \cdot x} \quad (4.A.27)$$

Representa una repetición periódica de $f_{\chi, 1_{VX}}^{EX}$ a lo largo del dominio natural, y coincide en valor con ésta en el intervalo $(\chi, VX + \chi)$.

Así pues, es posible expresar la función $f_{\chi, v_{VX}}^{EX}$ dada por (4.A.21), teniendo en cuenta esta consideración y sustituyendo el valor de f_p dado por (4.A.27), de la forma:

$$\begin{aligned} f_{\chi, v_{VX}}^{EX}(x) &= \\ &= \frac{1}{VU} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(F_{\chi, 1_{VX}}^{EX} \right)_{v, 1_{VU}}^{EU} (q \cdot EU) \cdot \\ &\cdot \sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} 1_{VX} (n \cdot EX - \chi) \cdot v_{VX} (n \cdot EX) \cdot e^{iq \cdot EU \cdot n \cdot EX} \cdot \delta(x - n \cdot EX) \end{aligned} \quad (4.A.28)$$

$$\forall x \in (\chi, VX + \chi)$$

Si se define, para cada valor del índice q , la nueva ventana desplazada dada por la función:

$$v^q(x | \chi, VX) \equiv v_{VX} (x - \chi) \cdot e^{iq \cdot EU \cdot x} \quad (4.A.29)$$

Esta última expresión puede reescribirse de la forma:

$$\begin{aligned}
f_{\chi, \nu_X}^{EX}(x) &= \\
&= \frac{1}{VU} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(F_{\chi, \nu_X}^{EX} \right)_{\nu, \nu_U}^{EU} (q \cdot EU) \cdot \sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} 1_{VX}(n \cdot EX - \chi) \cdot \hat{\nu}^q(n \cdot EX | \chi, VX) \cdot \delta(x - n \cdot EX) \\
\forall x \in (\chi, VX + \chi)
\end{aligned} \tag{4.A.30}$$

La función f_{χ, ν_X}^{EX} dada por (4.A.30) es suma (en q) de funciones muestreadas de soporte acotado, a cada una de las cuales le es aplicable idénticamente el desarrollo expuesto en la §4.3.1. La transformada de Fourier de cada elemento en esta expresión vendrá dada pues, comparando (4.A.30) con (4.2.9), por una expresión análoga a (4.3.1), que en este caso se reescribe de la forma:

$$\begin{aligned}
\left(\hat{V}_{\chi, \nu_X}^q \right) (u | \chi, VX) &\equiv \\
&\equiv TF \left[\sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} 1_{VX}(n \cdot EX - \chi) \cdot \hat{\nu}^q(n \cdot EX | \chi, VX) \cdot \delta(x - n \cdot EX) \right] (u) = \\
&= EU \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} 1_{VX}(n \cdot EX - \chi) \cdot \hat{\nu}^q(n \cdot EX | \chi, VX) \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \right) \cdot \delta(u - k \cdot EU)
\end{aligned} \tag{4.A.31}$$

Es posible reescribir esta expresión, teniendo en cuenta el valor de la ventana 1_{VX} dado por (4.3.15) y sustituyendo la función $\hat{\nu}^q$ por su valor dado por (4.A.29), obteniéndose la expresión (4.4.3).

Teniendo en cuenta estas consideraciones, la transformada de Fourier de (4.A.30) vendrá dada por (4.4.4).

■

4.A.2.2. Consistencia de la transformada directa interpolada

■ **DEMOSTRACIÓN (CONSISTENCIA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA).** Para comprobar esta afirmación, se evalúa (4.4.8) en los puntos de la forma $u = k \cdot EU$, sustituyéndose explícitamente los valores $\left(F_{\chi, \nu_X}^{EX} \right)_{\nu, \nu_U}^{EU}$ dados por (4.4.2) y los valores

$$\left(\hat{V}_{\chi, \nu_X}^q \right) \text{ dados por (4.4.3):}$$

$$\begin{aligned}
& \left(F_{\chi, v_{VX}}^{EX} \right)_{v, l_{VU}}^{EU} (k \cdot EU) = \\
& = \frac{2\pi}{VX} \frac{1}{PE} \sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} v_{VX} (n \cdot EX - \chi) \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \cdot \\
& \cdot \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{m=\underline{n}}^{\bar{n}} 1_{VX} (m \cdot EX - \chi) \cdot f(m \cdot EX) \cdot e^{-iq \cdot EU \cdot m \cdot EX} \cdot e^{iq \cdot EU \cdot n \cdot EX}
\end{aligned} \tag{4.A.32}$$

$$\forall k \in \left\{ \underline{k} \quad \underline{k} + 1 \quad \dots \quad \bar{k} - 1 \quad \bar{k} \right\}$$

Es posible reescribir esta expresión, sustituyendo la ventana 1_{VX} por su valor dado en (4.3.15), de la forma:

$$\begin{aligned}
& \left(F_{\chi, v_{VX}}^{EX} \right)_{v, l_{VU}}^{EU} (k \cdot EU) = \\
& = \frac{2\pi}{VX} \frac{1}{PE} \sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} v_{VX} (n \cdot EX - \chi) \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \cdot \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{m=\underline{n}}^{\bar{n}} f(m \cdot EX) \cdot e^{-iq \cdot EU \cdot m \cdot EX} \cdot e^{iq \cdot EU \cdot n \cdot EX} \\
& \forall k \in \left\{ \underline{k} \quad \underline{k} + 1 \quad \dots \quad \bar{k} - 1 \quad \bar{k} \right\}
\end{aligned} \tag{4.A.33}$$

Es posible reescribir la discretización del Teorema Integral de Fourier (4.1.18) de la forma:

$$g(n \cdot EX) = \frac{1}{PE} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{m=\underline{n}}^{\bar{n}} g(m \cdot EX) \cdot e^{-iq \cdot EU \cdot m \cdot EX} \cdot e^{iq \cdot EU \cdot n \cdot EX} \tag{4.A.34}$$

Así pues, tomando $g(m \cdot EX) = 1_{VX} (m \cdot EX - \chi) \cdot f(m \cdot EX)$ en (4.A.32), aplicando la expresión anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \left(F_{\chi, v_{VX}}^{EX} \right)_{v, l_{VU}}^{EU} (k \cdot EU) = EU \cdot \sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} v_{VX} (n \cdot EX - \chi) \cdot f(n \cdot EX) \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \\
& \forall k \in \left\{ \underline{k} \quad \underline{k} + 1 \quad \dots \quad \bar{k} - 1 \quad \bar{k} \right\}
\end{aligned} \tag{4.A.35}$$

Obsérvese que esta expresión conduce a los mismos valores que la transformada de Fourier $\left(F_{\chi, v_{VX}}^{EX} \right)_{v, l_{VU}}^{EU}$ dada por (4.3.2), como se quería comprobar.

■

4.A.2.3. Generalización del Teorema del Muestreo para la transformada inversa

■ **DEMOSTRACIÓN (GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DEL MUESTREO PARA LA TRANSFORMADA INVERSA).** La obtención de la expresión (4.4.13) requiere separar, al tomar la transformada de Fourier de la función $F_{\nu, V_{VU}}^{EU}$ dada por (4.3.7), los efectos del muestreo y de la ventana que acota el soporte V_{VU} . Para ello se descompone esta ventana en la forma:

$$V_{VU}(x) = I_{VU}(u) \cdot V_{VU}(x) \cdot I_{VU}(u) \quad (4.A.36)$$

Obsérvese que la ventana I_{VU} , definida en (4.3.5), tiene la propiedad de ser el elemento neutro en el producto de ventanas de longitud VU en el dominio frecuencial.

Así pues, la función la función $F_{\nu, V_{VU}}^{EU}$ puede reescribirse de la forma:

$$F_{\nu, V_{VU}}^{EU}(u) = \sum_{k=\bar{k}}^{\bar{k}} I_{VU}(k \cdot EU - \nu) \cdot V_{VU}(k \cdot EU - \nu) \cdot F_{\nu, I_{VU}}^{EU}(k \cdot EU) \cdot \delta(u - k \cdot EU) \quad (4.A.37)$$

Donde ha sido definida la nueva función $F_{\nu, I_{VU}}^{EU}$:

$$F_{\nu, I_{VU}}^{EU}(u) \equiv \sum_{q=\bar{k}}^{\bar{k}} I_{VU}(q \cdot EU - \nu) \cdot F(q \cdot EU) \cdot \delta(u - q \cdot EU) \quad (4.A.38)$$

Obsérvese que el efecto de la ventana permanece en la función $F_{\nu, V_{VU}}^{EU}$ dada por (4.A.37), mientras que el efecto del muestreo en ésta se encuentra incluido en la función $F_{\nu, I_{VU}}^{EU}$, como puede apreciarse en su definición (4.A.38).

La función $F_{\nu, I_{VU}}^{EU}$ es, por su definición, una función muestreada y de soporte acotado. Su transformada de Fourier inversa puede determinarse mediante (4.3.12), que en este caso se reescribe, teniendo en cuenta el valor de la ventana I_{VU} dado por (4.3.5), de la forma expresada en (4.4.11).

Por otra parte, es posible expandir la función $F_{\nu, I_{VU}}^{EU}$ en una serie de Fourier en el intervalo $(\nu, VU + \nu)$ mediante (4.1.14), que en este caso se reescribe de la forma:

$$F_{\nu, I_{VU}}^{EU}(u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi_m \cdot e^{-ium \cdot EX}, \quad \forall u \in (\nu, VU + \nu) \quad (4.A.39)$$

Los coeficientes Φ_m vienen dados por (4.1.16), que en este caso se reescribe de la forma:

$$\Phi_m = \frac{1}{PE} \sum_{k=\bar{k}}^{\bar{k}} F_{\nu, I_{VU}}^{EU}(k \cdot EU) \cdot e^{ik \cdot EU \cdot m \cdot EX} \quad (4.A.40)$$

Sustituyendo en esta expresión el valor de $F_{\nu, I_{VU}}^{EU}$ dado por (4.A.38), ésta se reescribe de la forma:

$$\Phi_m = \frac{1}{PE} \sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} I_{VU}(k \cdot EU - \nu) \cdot F(k \cdot EU) \cdot e^{ik \cdot EU \cdot m \cdot EX} \quad (4.A.41)$$

Comparando (4.4.11) y (4.A.41) se concluye que:

$$\Phi_m = EU \cdot \left(f_{\nu, I_{VU}}^{EU} \right)_{\chi, I_{VX}}^{EX} (m \cdot EX) \quad (4.A.42)$$

$$\forall m \in \{ \underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n} \}$$

De tal forma que, sustituyendo (4.A.42) en (4.A.39), la suma:

$$F_p(u) = EU \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(f_{\nu, I_{VU}}^{EU} \right)_{\chi, I_{VX}}^{EX} (m \cdot EX) \cdot e^{-ium \cdot EX} \quad (4.A.43)$$

Representa una repetición periódica de $F_{\nu, I_{VU}}^{EU}$ a lo largo del dominio natural, y coincide en valor con ésta en el intervalo $(\nu, VU + \nu)$.

Así pues, es posible expresar la función $F_{\nu, V_{VU}}^{EU}$ dada por (4.A.37), teniendo en cuenta esta consideración y sustituyendo el valor de F_p dado por (4.A.43), de la forma:

$$\begin{aligned} F_{\nu, V_{VU}}^{EU}(u) &= \\ &= EU \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(f_{\nu, I_{VU}}^{EU} \right)_{\chi, I_{VX}}^{EX} (m \cdot EX) \cdot \\ &\cdot \sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} I_{VU}(k \cdot EU - \nu) \cdot V_{VU}(k \cdot EU - \nu) \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot m \cdot EX} \cdot \delta(u - k \cdot EU) \end{aligned} \quad (4.A.44)$$

$$\forall u \in (\nu, VU + \nu)$$

Si se define, para cada valor del índice m , la nueva ventana desplazada dada por la función:

$$\hat{V}^m(u | \nu, VU) \equiv V_{VU}(u - \nu) \cdot e^{-ium \cdot EX} \quad (4.A.45)$$

Esta última expresión puede reescribirse de la forma:

$$\begin{aligned} F_{\nu, V_{VU}}^{EU}(u) &= \\ &= EU \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(f_{\nu, I_{VU}}^{EU} \right)_{\chi, I_{VX}}^{EX} (m \cdot EX) \cdot \sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} I_{VU}(k \cdot EU - \nu) \cdot \hat{V}^m(k \cdot EU - \nu) \cdot \delta(u - k \cdot EU) \end{aligned}$$

$$\forall u \in (\nu, VU + \nu)$$

(4.A.46)

La función F_{ν, V_U}^{EU} dada por (4.A.46) es suma (en m) de funciones muestreadas de soporte acotado, a cada una de las cuales le es aplicable idénticamente el desarrollo expuesto en la §4.3.2. La transformada de Fourier inversa de cada elemento en esta expresión vendrá dada pues, comparando (4.A.46) con (4.2.9), por una expresión análoga a (4.3.11), que en este caso se reescribe de la forma:

$$\begin{aligned} & \left(\hat{v}_{\nu, I_{V_U}}^{mEU} \right) (x | \nu, V_U) \equiv \\ & \equiv TF^{-1} \left[\sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} I_{V_U} (k \cdot EU - \nu) \cdot \hat{V}^m (k \cdot EU - \nu) \cdot \delta(u - k \cdot EU) \right] (x) = \quad (4.A.47) \\ & = \frac{1}{V_U} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} I_{V_U} (k \cdot EU - \nu) \cdot \hat{V}^m (k \cdot EU - \nu) \cdot e^{ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \right) \cdot \delta(x - n \cdot EX) \end{aligned}$$

Es posible reescribir esta expresión, teniendo en cuenta el valor de la ventana I_{V_U} dado por (4.3.5) y sustituyendo la función \hat{V}^m por su valor dado por (4.A.45), obteniéndose la expresión (4.4.12).

Teniendo en cuenta estas consideraciones, la transformada de Fourier de (4.A.46) vendrá dada por (4.4.13).

■

4.A.2.4. Consistencia de la transformada inversa interpolada

■ **DEMOSTRACIÓN (CONSISTENCIA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA).** Para comprobar esta afirmación, se evalúa (4.4.17) en los puntos de la forma $x = n \cdot EX$, sustituyéndose explícitamente los valores $\left(f_{\nu, I_{V_U}}^{EU} \right)_{\mathcal{Z}, I_{V_X}}^{EX}$ dados por (4.4.11) y los valores

$\left(\hat{v}_{\nu, I_{V_U}}^{mEU} \right)$ dados por (4.4.12):

$$\begin{aligned} & \left(f_{\nu, V_U}^{EU} \right)_{\mathcal{Z}, I_{V_X}}^{EX} (n \cdot EX) = \\ & = \frac{1}{V_U} \frac{1}{PE} \sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} I_{V_U} (k \cdot EU - \nu) \cdot F(k \cdot EU) \cdot \\ & \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{q=\underline{k}}^{\bar{k}} V_{V_U} (q \cdot EU - \nu) \cdot e^{iq \cdot EU \cdot n \cdot EX} \cdot e^{ik \cdot EU \cdot m \cdot EX} \cdot e^{-iq \cdot EU \cdot m \cdot EX} \quad (4.A.48) \end{aligned}$$

$$\forall n \in \{ \underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n} \}$$

Es posible reescribir esta expresión, sustituyendo la ventana I_{VU} por su valor dado en (4.3.5) de la forma:

$$\begin{aligned} & \left(f_{\nu, V_{VU}}^{EU} \right)_{\chi, 1_{VX}}^{EX} (n \cdot EX) = \\ & = \frac{1}{VU} \frac{1}{PE} \sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} F(k \cdot EU) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{q=\underline{k}}^{\bar{k}} V_{VU}(q \cdot EU - \nu) \cdot e^{iq \cdot EU \cdot n \cdot EX} \cdot e^{ik \cdot EU \cdot m \cdot EX} \cdot e^{-iq \cdot EU \cdot m \cdot EX} \\ & \forall n \in \{ \underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n} \} \end{aligned} \quad (4.A.49)$$

Es posible reescribir la discretización del Teorema Integral de Fourier (4.1.20) de la forma:

$$G(k \cdot EU) = \frac{1}{PE} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{q=\underline{k}}^{\bar{k}} G(q \cdot EU) \cdot e^{iq \cdot EU \cdot m \cdot EX} \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot m \cdot EX} \quad (4.A.50)$$

Así pues, tomando $G(q \cdot EU) = V_{VU}(q \cdot EU - \nu) \cdot e^{iq \cdot EU \cdot n \cdot EX}$ en (4.A.48), aplicando la expresión anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} & \left(f_{\nu, V_{VU}}^{EU} \right)_{\chi, 1_{VX}}^{EX} (n \cdot EX) = \frac{1}{VU} \sum_{k=\underline{k}}^{\bar{k}} V_{VU}(k \cdot EU - \nu) \cdot F(k \cdot EU) \cdot e^{ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \\ & \forall n \in \{ \underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n} \} \end{aligned} \quad (4.A.51)$$

Obsérvese que esta expresión conduce a los mismos valores que la transformada de Fourier $\left(f_{\nu, V_{VU}}^{EU} \right)_{\chi, 1_{VX}}^{EX}$ dada por (4.3.12), como se quería comprobar.

■

4.A.3. Relaciones entre las transformadas directa e inversa y la función original

4.A.3.1. Relación entre la transformada inversa de la transformada directa y la función original

■ **DEMOSTRACIÓN (RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA Y LA FUNCIÓN ORIGINAL).** La transformada inversa de la función

$\left(F_{\chi, \nu_{VX}}^{EX} \right)^{EU}$ dada por (4.3.1) y representada por la repetición cíclica los valores dados por:

$$\left(F_{\chi, v_{VX}}^{EX} \right)^{EU} (k \cdot EU) = EU \cdot \sum_{n=\underline{n}}^{\bar{n}} v_{VX} (n \cdot EX - \chi) \cdot f(n \cdot EX) \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \quad (4.A.52)$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}$$

Se determina mediante (4.3.11), y está representada por la repetición cíclica de los valores expuestos en (4.3.12), que en este caso se reescribe, comparando (4.3.8) con (4.A.52) de la forma:

$$\begin{aligned} & \left(\left(f_{\chi, v_{VX}}^{EX} \right)^{EU} \right)_{\chi, 1_{VX}}^{EX} (n \cdot EX) = \\ & = \frac{1}{PE} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=\underline{n}}^{\bar{n}} v_{VX} (m \cdot EX - \chi) \cdot f(m \cdot EX) \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot m \cdot EX} \cdot e^{ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \end{aligned} \quad (4.A.53)$$

$$\forall n \in \{ \underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n} \}$$

Obsérvese que la ausencia de ventana en el dominio frecuencial en (4.3.2), indicada en el hecho de que el índice k puede tomar todos los valores enteros, no permite acotar la extensión del sumatorio correspondiente en (4.A.53).

Es posible reescribir la discretización del Teorema Integral de Fourier (4.1.18) de la forma:

$$g(n \cdot EX) = \frac{1}{PE} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=\underline{n}}^{\bar{n}} g(m \cdot EX) \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot m \cdot EX} \cdot e^{ik \cdot EU \cdot n \cdot EX} \quad (4.A.54)$$

Así pues, tomando $g(m \cdot EX) = v_{VX} (m \cdot EX - \chi) \cdot f(m \cdot EX)$ en (4.A.52), aplicando la expresión anterior y comparando el resultado con los valores de la función muestreada con soporte acotado $f_{\chi, v_{VX}}^{EX}$ dados en (4.2.10), se obtiene (4.5.1).

Obsérvese que los valores de la transformada inversa son $v_{VX} (n \cdot EX - \chi)$ veces los valores de la función original muestreada f^{EX} en los mismos puntos. Teniendo en cuenta que, para los valores de n expuestos en (4.5.1), la ventana es no nula por su propia definición (4.2.5), es posible recuperar los valores de la función original muestreada dividiendo (4.5.1) entre los valores de la ventana, obteniéndose (4.5.2).

■

4.A.3.2. Relación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada y la función original

■ **DEMOSTRACIÓN (RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA Y LA FUNCIÓN ORIGINAL).** La transformada inversa de la función $\left(F_{\chi, \nu_X}^{EX}\right)^{EU'}$ representada por los valores dados por una expresión análoga a (4.4.4):

$$\left(F_{\chi, \nu_X}^{EX}\right)^{EU'}(k \cdot EU') = \frac{1}{VU} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(F_{\chi, 1_{VX}}^{EX}\right)_{\nu, 1_{VU}}^{EU} (q \cdot EU) \cdot \left(\hat{V}_{\chi, 1_{VX}}^{q EX}\right) (k \cdot EU' | \chi, VX)$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}$$

(4.A.55)

Se determina por (4.3.11), y está representada por los valores expuestos en (4.3.12), que en este caso se reescribe, comparando (4.4.10) con (4.3.8) de la forma:

$$\begin{aligned} & \left(\left(f_{\chi, \nu_X}^{EX}\right)^{EU'}\right)_{\chi', 1_{VX'}}^{EX'}(n \cdot EX') = \\ & = \frac{1}{VU'} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{VU} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(F_{\chi, 1_{VX}}^{EX}\right)^{EU} (q \cdot EU) \cdot \left(\hat{V}_{\chi, 1_{VX}}^{q EX}\right)^{EU'} (k \cdot EU' | \chi, VX) \right] \cdot e^{ik \cdot EU' \cdot n \cdot EX'} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \{\underline{n} \quad \underline{n}+1 \quad \dots \quad \bar{n}-1 \quad \bar{n}\}$$

(4.A.56)

Obsérvese que la ausencia de ventana en el dominio frecuencial en (4.4.10), indicada en el hecho de que el índice k puede tomar todos los valores enteros, no permite acotar la extensión del sumatorio correspondiente en (4.A.56).

Las relaciones expuestas en la Tabla 4–3-1 entre las magnitudes EX , EU , VX y VU serán las mismas existentes entre las magnitudes EX' , EU' , VX' y VU' , pues son también provenientes de dominios conjugados.

Es posible reescribir la expresión anterior, sustituyendo $\left(F_{\chi, 1_{VX}}^{EX}\right)_{\nu, 1_{VU}}^{EU}$ por sus valores dados

por (4.4.2) y las funciones $\left(\hat{V}_{\chi, 1_{VX}}^{q EX}\right)$ por sus valores dados por (4.4.3) de la forma:

$$\begin{aligned}
& \left(\left(f_{\chi, \nu_{VX}}^{EX} \right)^{EU'} \right)_{\chi', 1_{VX'}}^{EX'} (n \cdot EX') = \\
& = \frac{VX'}{VX} \frac{1}{(PE)^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=\underline{n}}^{\bar{n}} \nu_{VX} (m \cdot EX - \chi) \cdot e^{-ik \cdot EU' \cdot m \cdot EX} \cdot e^{ik \cdot EU' \cdot n \cdot EX'} \cdot \\
& \cdot \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{r=\underline{n}}^{\bar{n}} 1_{VX} (r \cdot EX - \chi) \cdot f(r \cdot EX) \cdot e^{-iq \cdot EU \cdot r \cdot EX} \cdot e^{iq \cdot EU \cdot m \cdot EX}
\end{aligned} \tag{4.A.57}$$

$$\forall n \in \{ \underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n} \}$$

Sustituyendo en la expresión anterior la ventana 1_{VX} por su valor dado por (4.3.15), ésta se reescribe de la forma:

$$\begin{aligned}
& \left(\left(f_{\chi, \nu_{VX}}^{EX} \right)^{EU'} \right)_{\chi', 1_{VX'}}^{EX'} (n \cdot EX') = \\
& = \frac{VX'}{VX} \frac{1}{(PE)^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=\underline{n}}^{\bar{n}} \nu_{VX} (m \cdot EX - \chi) \cdot e^{-ik \cdot EU' \cdot m \cdot EX} \cdot e^{ik \cdot EU' \cdot n \cdot EX'} \cdot \\
& \cdot \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{r=\underline{n}}^{\bar{n}} f(r \cdot EX) \cdot e^{-iq \cdot EU \cdot r \cdot EX} \cdot e^{iq \cdot EU \cdot m \cdot EX}
\end{aligned} \tag{4.A.58}$$

$$\forall n \in \{ \underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n} \}$$

Es posible reescribir la discretización del Teorema Integral de Fourier (4.1.18) de la forma:

$$g(m \cdot EX) = \frac{1}{PE} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{r=\underline{n}}^{\bar{n}} g(r \cdot EX) \cdot e^{-iq \cdot EU \cdot r \cdot EX} \cdot e^{iq \cdot EU \cdot m \cdot EX} \tag{4.A.59}$$

Así pues, tomando $g(r \cdot EX) = f(r \cdot EX)$ en (4.A.57), aplicando la expresión anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \left(\left(f_{\chi, \nu_{VX}}^{EX} \right)^{EU'} \right)_{\chi', 1_{VX'}}^{EX'} (n \cdot EX') = \\
& = \frac{VX'}{VX} \frac{1}{PE} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=\underline{n}}^{\bar{n}} \nu_{VX} (m \cdot EX - \chi) \cdot f(m \cdot EX) \cdot e^{-ik \cdot EU' \cdot m \cdot EX} \cdot e^{ik \cdot EU' \cdot n \cdot EX'}
\end{aligned} \tag{4.A.60}$$

$$\forall n \in \{ \underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n} \}$$

Es posible reescribir la discretización del Teorema Integral de Fourier (4.1.18) de la forma:

$$g(n \cdot EX') = \frac{VX}{VX'} \frac{1}{PE} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=\underline{n}}^{\bar{n}} g(m \cdot EX) \cdot e^{-ik \cdot EU' \cdot m \cdot EX} \cdot e^{ik \cdot EU' \cdot n \cdot EX'} \tag{4.A.61}$$

Así pues, tomando $g(m \cdot EX) = v_{vX} (m \cdot EX - \chi) \cdot f(m \cdot EX)$ en (4.A.60), aplicando la expresión anterior y comparando el resultado con los valores de la función muestreada con soporte acotado $f_{\chi, v_{vX}}^{EX'}$ dados por una expresión análoga a (4.2.10), se obtiene (4.5.3).

Obsérvese que los valores de la transformada inversa son $v_{vX} (n \cdot EX' - \chi)$ veces los valores de la función original muestreada $f^{EX'}$ en los mismos puntos. Teniendo en cuenta que, para los valores de n expuestos en (4.5.3), la ventana es no nula por su propia definición (4.2.5), es posible recuperar los valores de la función original muestreada en el intervalo $(\chi, VX + \chi)$ dividiendo (4.5.3) entre los valores de la ventana, obteniéndose (4.5.4).

■

4.A.3.3. Relación entre la interpolación de la transformada inversa de la transformada directa interpolada y la función original

■ **DEMOSTRACIÓN (RELACIÓN ENTRE LA INTERPOLACIÓN DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LA TRANSFORMADA DIRECTA INTERPOLADA Y LA FUNCIÓN ORIGINAL).** La transformada de Fourier interpolada de la función $f_{\chi, v_{vX}}^{EX}$ está representada por los valores:

$$\left(F_{\chi, v_{vX}}^{EX} \right)^{EU'} (k \cdot EU') = \frac{1}{VU} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(F_{\chi, l_{vX}}^{EX} \right)_{v, l_{vU}}^{EU} (q \cdot EU) \cdot \left(\hat{V}_{\chi, l_{vX}}^{EX} \right) (k \cdot EU' | \chi, VX)$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}$$

(4.A.55)

La interpolación en su transformada de Fourier inversa vendrá dada por (4.4.17), que en este caso se reescribe de la forma:

$$\begin{aligned} & \left(\left(f_{\chi, v_{vX}}^{EX} \right)^{EU'} \right)_{\chi, l_{vX}}^{EX} (n \cdot EX) = \\ & = EU' \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\left(f_{\chi, v_{vX}}^{EX} \right)^{EU'} \right)^{EX'} (m \cdot EX') \cdot \left(\hat{\mathbb{I}}_{\chi, l_{vX}}^{m \cdot EU'} \right)^{EX} (n \cdot EX | v', VU') \end{aligned} \quad (4.A.62)$$

$$\forall n \in \{ \underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n} \}$$

Donde los valores $\left(\left(f_{\chi, v_{vX}}^{EX} \right)^{EU'} \right)^{EX'}$ vienen dados por una expresión análoga a (4.4.11), que en este caso se reescribe de la forma:

$$\left(\left(f_{\mathcal{Z}, \mathcal{V}_X}^{EX} \right)^{EU'} \right)^{EX'} (n \cdot EX') = \frac{1}{VU'} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(F_{\mathcal{Z}, \mathcal{V}_X}^{EX} \right)^{EU'} (k \cdot EU') \cdot e^{ik \cdot EU' \cdot n \cdot EX'} \quad (4.A.63)$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}$$

Así mismo, los valores $\left(\hat{\mathbb{1}}^{mEU'} \right)$ vienen dados por una expresión análoga a (4.4.12), que en este caso se reescribe de la forma:

$$\left(\hat{\mathbb{1}}^{mEU'} \right) (x | v', VU') = \frac{1}{VU'} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik \cdot EU' (x - m \cdot EX')} \quad (4.A.64)$$

$$\forall m \in \mathbb{Z}$$

La expresión (4.A.62) se reescribe, sustituyendo los valores $\left(\left(f_{\mathcal{Z}, \mathcal{V}_X}^{EX} \right)^{EU'} \right)^{EX'}$ dados por (4.A.63) y los valores $\left(\hat{\mathbb{1}}^{mEU'} \right)$ dados por (4.A.64) de la forma:

$$\begin{aligned} & \left(\left(f_{\mathcal{Z}, \mathcal{V}_X}^{EX} \right)^{EU'} \right)_{\mathcal{Z}, \mathcal{I}_X}^{EX} (n \cdot EX) = \\ & = \frac{1}{VU'} \frac{1}{PE} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(F_{\mathcal{Z}, \mathcal{V}_X}^{EX} \right)^{EU'} (k \cdot EU') \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{ik \cdot EU' \cdot m \cdot EX'} \cdot e^{-iq \cdot EU' \cdot m \cdot EX'} \cdot e^{iq \cdot EU' \cdot n \cdot EX} \\ & \forall n \in \{ \underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n} \} \end{aligned} \quad (4.A.65)$$

Es posible reescribir la discretización del Teorema Integral de Fourier (4.1.18) de la forma:

$$g(n \cdot EX) \stackrel{\bar{n} \rightarrow \infty}{\underset{\underline{n} \rightarrow -\infty}{PE}} = \frac{1}{PE} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(m \cdot EX') \cdot e^{-iq \cdot EU' \cdot m \cdot EX'} \cdot e^{iq \cdot EU' \cdot n \cdot EX} \quad (4.A.66)$$

Así pues, tomando $g(m \cdot EX') = e^{ik \cdot EU' \cdot m \cdot EX'}$ en (4.A.65), aplicando la expresión anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} & \left(\left(f_{\mathcal{Z}, \mathcal{V}_X}^{EX} \right)^{EU'} \right)_{\mathcal{Z}, \mathcal{I}_X}^{EX} (n \cdot EX) = \frac{1}{VU'} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(F_{\mathcal{Z}, \mathcal{V}_X}^{EX} \right)^{EU'} (k \cdot EU') \cdot e^{ik \cdot EU' \cdot n \cdot EX} \\ & \forall n \in \{ \underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \dots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n} \} \end{aligned} \quad (4.A.67)$$

Es posible reescribir la expresión anterior, sustituyendo el valor de $\left(F_{\mathcal{Z}, \mathcal{V}_X}^{EX} \right)^{EU'}$ dado por una expresión análoga a (4.4.8) de la forma:

$$\begin{aligned}
& \left(\left(f_{\chi, \nu_{VX}}^{EX} \right)^{EU'} \right)_{\chi, 1_{VX}}^{EX} (n \cdot EX) = \\
& = \frac{1}{VU} \frac{1}{VU'} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(F_{\chi, 1_{VX}}^{EX} \right)^{EU} (q \cdot EU) \cdot \left(\hat{V}_{\chi, 1_{VX}}^q \right)^{EU'} (k \cdot EU' | \chi, VX) \cdot e^{ik \cdot EU' \cdot n \cdot EX} \\
& \forall n \in \{ \underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \cdots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n} \}
\end{aligned} \tag{4.A.68}$$

Es posible reescribir la expresión anterior, sustituyendo $\left(F_{\chi, 1_{VX}}^{EX} \right)^{EU}$ por sus valores dados por una expresión análoga a (4.4.2) y las funciones $\left(\hat{V}_{\chi, 1_{VX}}^q \right)$ por sus valores dados por (4.4.3) de la forma:

$$\begin{aligned}
& \left(\left(f_{\chi, \nu_{VX}}^{EX} \right)^{EU'} \right)_{\chi, 1_{VX}}^{EX} (n \cdot EX) = \\
& = \frac{VX'}{VX} \frac{1}{(PE)^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=\underline{n}}^{\bar{n}} \nu_{VX} (r \cdot EX - \chi) \cdot e^{-ik \cdot EU' \cdot r \cdot EX} \cdot e^{ik \cdot EU' \cdot n \cdot EX} \cdot \\
& \cdot \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m \cdot EX) \cdot e^{-iq \cdot EU \cdot m \cdot EX} \cdot e^{iq \cdot EU \cdot r \cdot EX}
\end{aligned} \tag{4.A.69}$$

$$\forall n \in \{ \underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \cdots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n} \}$$

Es posible reescribir la discretización del Teorema Integral de Fourier (4.1.18) de la forma:

$$g(r \cdot EX) \Big|_{\underline{n} \rightarrow -\infty}^{\bar{n} \rightarrow \infty} = \frac{1}{PE} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(m \cdot EX) \cdot e^{-iq \cdot EU \cdot m \cdot EX} \cdot e^{iq \cdot EU \cdot r \cdot EX} \tag{4.A.70}$$

Así pues, tomando $g(m \cdot EX) = f(m \cdot EX)$ en (4.A.69), aplicando la expresión anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \left(\left(f_{\chi, \nu_{VX}}^{EX} \right)^{EU'} \right)_{\chi, 1_{VX}}^{EX} (n \cdot EX) = \\
& = \frac{VX'}{VX} \frac{1}{PE} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=\underline{n}}^{\bar{n}} \nu_{VX} (r \cdot EX - \chi) \cdot f(r \cdot EX) \cdot e^{-ik \cdot EU' \cdot r \cdot EX} \cdot e^{ik \cdot EU' \cdot n \cdot EX}
\end{aligned} \tag{4.A.71}$$

$$\forall n \in \{ \underline{n} \quad \underline{n} + 1 \quad \cdots \quad \bar{n} - 1 \quad \bar{n} \}$$

Es posible reescribir la discretización del Teorema Integral de Fourier (4.1.18) de la forma:

$$g(n \cdot EX) = \frac{VX}{VX'} \frac{1}{PE} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=\underline{n}}^{\bar{n}} g(r \cdot EX) \cdot e^{-ik \cdot EU' \cdot r \cdot EX} \cdot e^{ik \cdot EU' \cdot n \cdot EX} \tag{4.A.72}$$

Así pues, tomando $g(r \cdot EX) = v_{vX}(r \cdot EX - \chi) \cdot f(r \cdot EX)$ en (4.A.71), aplicando la expresión anterior y comparando el resultado con los valores de la función muestreada con soporte acotado $f_{\chi, vX}^{EX}$ dados en (4.2.10), se obtiene (4.5.7).

Obsérvese que los valores de la transformada inversa son $v_{vX'}(n \cdot EX' - \chi')$ veces los valores de la función original muestreada $f^{EX'}$ en los mismos puntos. Teniendo en cuenta que, para los valores de n expuestos en (4.5.7), la ventana es no nula por su propia definición (4.2.5) es posible recuperar los valores de la función original muestreada dividiendo (4.5.7) entre los valores de la ventana, obteniéndose (4.5.8).

■

Capítulo 5

*Interpolación
en las transformadas de Fourier
mediante métodos alternativos
al Teorema del muestreo generalizado*

Introducción

Como ha sido mencionado anteriormente, la interpolación en la transformada de Fourier es un paso necesario en el proceso del algoritmo expuesto en el Capítulo 3, ya que al aplicar éste se obtiene un espectro filtrado definido en puntos no equiespaciados.

Las metodologías más apropiadas para tratar este tipo de situaciones, en las que las muestras no se encuentran uniformemente espaciadas, o existen intervalos sin datos, son la interpolación en las transformadas de Fourier basada en el Teorema del Muestreo generalizado, expuesta en el Capítulo 4, y la evaluación directa de las transformadas de Fourier discretas no uniformes (NDFT, nonuniform discrete Fourier transform; NIDFT, nonuniform inverse discrete Fourier transform):

$$\begin{aligned}
 F(k \cdot EU) &= EU \cdot \sum_{n=0}^{PE-1} f(x_n) \cdot e^{-ik \cdot EU \cdot x_n}, & k \in \left\{ -\left\lfloor \frac{PE}{2} \right\rfloor, \dots, \left\lceil \frac{PE}{2} \right\rceil - 1 \right\} \\
 f(n \cdot EX) &= \frac{1}{VU} \sum_{k=-\lfloor PE/2 \rfloor}^{\lceil PE/2 \rceil - 1} F(u_k) \cdot e^{i \cdot u_k \cdot n \cdot EX}, & n \in \{0, \dots, PE-1\}
 \end{aligned}
 \tag{5.1.1}$$

Donde las posiciones de las muestras, x_n o u_k , no se encuentran uniformemente espaciadas.¹

Ambas metodologías tienen una complejidad computacional $O(PE^2)$, sensiblemente superior a $O(PE \cdot \log_2 PE)$, correspondiente a los algoritmos de las transformadas rápidas de Fourier (FFT, fast Fourier transform; IFFT, inverse fast Fourier transform; Cooley y Tukey, 1965). Este incremento de la complejidad computacional respecto a las transformadas rápidas de Fourier hace que ambas metodologías sean muy costosas en términos de potencia y tiempo de cálculo.

Otro método, presente en la literatura científica desde la última década (Dutt y Rokhlin, 1993 y 1995; Liu, 1998; Liu y Tang, 1998; Duindam y Schonewille, 1999; Edelman et al., 1999; Fessler, 2003) es el correspondiente a las transformadas rápidas de Fourier no uniformes (NUFFT, nonuniform fast Fourier transform; NUIFFT, nonuniform inverse fast Fourier transform), consistente en la aplicación del Teorema de la Convolución (Brigham, 1974) en la siguiente forma:

1. Se realiza la convolución de la función original y una cierta función filtro, siendo la función resultante uniformemente muestreada.
2. La DFT (vs. IDFT) de esta nueva función y el filtro, una vez uniformemente muestreado, se calculan mediante el algoritmo de la FFT (vs. IFFT).

¹ Los factores EU y $1/VU$ reflejan la relación entre las transformadas discreta y continua (Cf. (4.3.2) y (4.3.12)), y representan en el espaciado y el inverso de la longitud de la ventana en el dominio frecuencial que correspondería en el caso en que las muestras sí estuvieran equiespaciadas.

3. La transformada de la función original es estimada mediante la división de estas dos transformadas calculadas en el paso anterior.

Esta metodología proporciona una estima de los valores de la transformada en frecuencias que diferirán en número y valor de atribución de las esperadas, siendo el tiempo empleado por los algoritmos de la NUFFT menor que el empleado en la evaluación directa de la NDFT.

Diversos autores proponen emplear metodologías similares a la interpolación en las transformadas de Fourier basada en el Teorema del Muestreo generalizado, empleando funciones interpoladoras distintas de la transformada de Fourier de la ventana² (Posadas, 1998; Fu, 2004). Wen et al. (1988) o Haizhong y Xiaojian (1997) proponen emplear una interpolación geométrica. También es posible emplear técnicas de interpolación más generales (Lancaster y Šalkauskas, 1986; Späth, 1995). Este tema es tratado en amplitud por Unser (2000) en su artículo recopilatorio.

De entre todas las metodologías de interpolación y familias de funciones interpoladoras, se estudian en este quinto Capítulo las transformadas rápidas de Fourier no uniformes (NUFFT y NUIFFT) y las metodologías de interpolación implementadas en MATLAB (Hanselman y Littlefield, 2001), empleándose como ventana un pulso cuadrado.

Este Capítulo se encuentra dividido en cuatro Secciones dedicadas, respectivamente:

- Al estudio de las transformadas rápidas de Fourier no uniformes (NUFFT y NUIFFT).
- Al estudio de la interpolación en las transformadas de Fourier mediante técnicas generales.
- Al estudio de las relaciones entre las transformadas de Fourier directa e inversa interpoladas y la función original.
- Al análisis de los resultados obtenidos y a la elección del método de interpolación en la transformada de Fourier.

² En el caso que se trata en esta Tesis Doctoral la ventana es un pulso cuadrado, cuya transformada de Fourier es un miembro de la familia de los senos cardinales (Cf. §4.4.1.1, §4.4.2.1).

5.1. Transformadas rápidas de Fourier no uniformes (NUFFT y NUIFFT)

En esta Sección se desarrollan numéricamente las transformadas rápidas de Fourier en puntos no uniformemente espaciados (NUFFT y NUIFFT). Este método consisten en la aplicación del Teorema de la Convolución (Brigham, 1974) en la siguiente forma:

1. Se realiza la convolución de la función original y una cierta función filtro, siendo la función resultante uniformemente muestreada.
2. La DFT (vs. IDFT) de esta nueva función y el filtro, una vez uniformemente muestreado, se calculan mediante el algoritmo de la FFT (vs. IFFT).
3. La transformada de la función original es estimada mediante la división de estas dos transformadas calculadas en el paso anterior.

En esta Sección se muestra que, en el caso en el que los datos están equiespaciados, el filtro puede ser elegido apropiadamente de tal forma que la transformada estimada coincida con la transformada analítica dada por (5.1.1). En otro caso, este método proporciona una estima de los valores de la transformada en frecuencias que diferirán en número y valor de atribución de las esperadas.

La teoría muestra que debe realizarse un muestreo incrementado, con tasa sobremuestreo $tsm \geq 2$, de tal forma que deben definirse unos nuevos parámetros en los dominios natural y frecuencial (Dutt y Rokhlin, 1993). En esta Sección se muestra que el filtro que debe convolucionarse debe tener soporte acotado, y que su longitud expresada en unidades del nuevo espaciado, lf , influye en el incremento del número de puntos en el que se determina la transformada, y en el valor de las frecuencias en que son atribuidas; de tal forma que lf debe ser minimizada con objeto de minimizar estos efectos espurios. Así mismo, se muestra que un mayor valor de tsm no conlleva un decremento sensible de lf , sino un considerable incremento del tiempo de cálculo, de tal forma que el valor mínimo $tsm = 2$ será considerado.

Con objeto de comparar las transformadas obtenidas por los algoritmos de la NUFFT y la NDFT, se definen unos errores relativos de forma apropiada. Se muestra que estos errores relativos dependen de lf , pero su dependencia en PE puede ser obviada; y puede ser determinada una regla práctica para determinar el valor mínimo de lf que ha de considerarse para cometer a lo sumo un cierto error relativo.

Con objeto de hallar el filtro óptimo que debe emplearse para minimizar el error relativo para una lf dada, se analiza una colección de funciones filtro. Se muestra que la elección óptima es tomar como filtro la función gaussiana con la aplicación de la ventana de Hanning, resultado que se encuentra en acuerdo con los mostrados por Duijndam y Schonewille (1999).

A la vista de los resultados obtenidos, se expone un algoritmo práctico para la determinación de la NUFFT y NUIFFT D -dimensionales, de tal forma que pueda ser obtenida la transformada con un error relativo menor que un cierto valor máximo admisible dado, minimizándose los efectos espurios debidos a la magnitud de lf .

5.1.1. Metodología

5.1.1.1. Teoría para la transformada directa unidimensional

Sean PE , VX y $EX = VX/PE$, respectivamente, el número de puntos, la longitud de la ventana en el dominio natural y el espaciado que sería obtenido si la función estuviera uniformemente muestreada.

Una vez la tasa de incremento del muestreo, $tsm \geq 2$ en el caso más general, y la longitud del filtro, lf , han sido fijadas, el nuevo número de puntos, espaciado y longitud en el dominio natural se definen en la forma (Duijndam y Schonewille, 1999):

$$\begin{aligned} PE' &= tsm \cdot PE + lf - 1 \\ EX' &= \frac{EX}{tsm} \\ VX' &= PE' \cdot EX' = \frac{tsm \cdot PE + lf - 1}{tsm \cdot PE} \cdot VX \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Obsérvese que estas definiciones tienen sentido únicamente en el caso en que el filtro tiene soporte acotado, de tal forma que lf es un número natural no nulo finito, que se toma impar por conveniencia.

Así pues, el nuevo espaciado y longitud de la ventana en el dominio frecuencial vienen dados por:

$$\begin{aligned} EU' &= \frac{2\pi}{VX'} = \frac{tsm \cdot PE}{tsm \cdot PE + lf - 1} \cdot EU \\ VU' &= PE' \cdot EU' = tsm \cdot VU \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Una vez estos nuevos parámetros han sido fijados, se define una nueva transformada en la forma:

$$\begin{aligned} F(k \cdot EU') &= EU' \cdot \sum_{n=0}^{PE'-1} f(x_n) \cdot e^{-ik \cdot EU' \cdot x_n} \\ k &\in \left\{ - \left\lfloor \left\lfloor PE + \frac{lf-1}{tsm} \right\rfloor / 2 \right\rfloor, \dots, \left\lceil \left\lceil PE + \frac{lf-1}{tsm} \right\rceil / 2 \right\rceil - 1 \right\} \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Donde los límites en el índice k se eligen de tal forma que los puntos $k \cdot EU'$ se encuentren contenidos en la ventana de longitud VU en el dominio frecuencial.

Obsérvese que, de (5.1.2) y (5.1.3), es $VX' \geq VX$, de tal forma que es $EU' \leq EU$ y el número de índices k definidos en (5.1.4), digamos PE'_0 , es $PE'_0 \geq PE$. Las desigualdades saturan en igualdades si y sólo si $lf = 1$. Obsérvese que la necesidad de tomar filtros con longitud $lf > 1$ implica necesariamente que la transformada es determinada en un número de puntos mayor que el número de puntos original, en frecuencias diferentes de las expuestas en

(5.1.1). Estos son efectos espurios inherentes a esta metodología, que no pueden ser evitados sino únicamente minimizados.

Estos resultados se muestran en la Figura 5–1-1, en la que se ilustra cómo, conforme lf crece, así lo hacen los efectos de la reducción del espaciado de frecuencias y del incremento del número de puntos. Esta es la razón por la que debieran ser elegidos filtros lo más cortos posible, siendo esta elección menos crítica cuando el número de puntos PE es suficientemente grande.

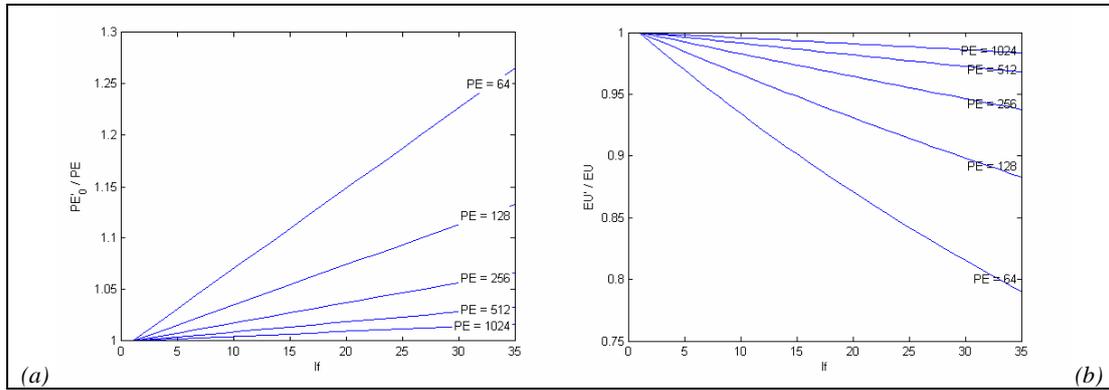


Figura 5–1-1: Variación de (a) EU'/EU y (b) PE'_0/PE vs. lf para algunos valores del número de puntos PE . En ambos casos $tsm = 2$.

Una vez la función filtro con soporte acotado g ha sido elegida (esta elección será discutida en la siguiente Subsección), la DFT de su extensión periódica $\sum_{j \in \mathbb{Z}} g(x - j \cdot VX')$, una vez uniformemente muestreada en el nuevo dominio natural expuesto en (5.1.2), viene dada por los PE' valores:

$$G(k \cdot EU') = EU' \cdot \sum_{n=0}^{PE'-1} \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}} g(n \cdot EX' - j \cdot VX') \right] \cdot e^{-ik \cdot EU' \cdot n \cdot EX'} \quad (5.1.5)$$

$$k \in \left\{ -\lfloor PE'/2 \rfloor, \dots, \lceil PE'/2 \rceil - 1 \right\}$$

Donde el sumatorio en j remarca el hecho de que se trata de la transformada de la extensión periódica de esta función (Brigham, 1974). La convolución de la función original f y el filtro g viene dada por la nueva función:

$$h(x) = \sum_{n=0}^{PE-1} f(x_n) \cdot g(x - x_n) \quad (5.1.6)$$

La DFT de su extensión periódica, una vez uniformemente muestreada en nuevo dominio natural expuesto en (5.1.2), viene dada por los PE' valores:

$$H(k \cdot EU') = EU' \cdot \sum_{n=0}^{PE'-1} \left\{ \sum_{m=0}^{PE-1} f(x_m) \cdot \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}} g(n \cdot EX' - x_m - j \cdot VX') \right] \right\} \cdot e^{-ik \cdot EU' \cdot n \cdot EX'}$$

$$k \in \left\{ -\lfloor PE'/2 \rfloor, \dots, \lceil PE'/2 \rceil - 1 \right\}$$
(5.1.7)

Siendo posible reescribir la expresión anterior en la forma:

$$H(k \cdot EU') =$$

$$= EU' \cdot \sum_{m=0}^{PE-1} f(x_m) \cdot e^{-ik \cdot EU' \cdot x_m} \cdot \sum_{n=0}^{PE'-1} \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}} g(n \cdot EX' - x_m - j \cdot VX') \right] \cdot e^{-ik \cdot EU' \cdot (n \cdot EX' - x_m)}$$

$$k \in \left\{ -\lfloor PE'/2 \rfloor, \dots, \lceil PE'/2 \rceil - 1 \right\}$$
(5.1.8)

Obsérvese que esta reescritura no supone una factorización, pues el segundo sumatorio debe ser evaluado para cada valor $m \in \{0, \dots, PE-1\}$.

Puesto que la expresión anterior es la transformada de Fourier de la convolución de dos funciones, ésta será, de acuerdo con el Teorema de la Convolución, el producto de las transformadas de cada una de ellas. Es posible operar en el segundo sumatorio de (5.1.8), bajo la suposición de que para cada $m \in \{0, \dots, PE-1\}$ existe un $r_m \in \{0, \dots, PE'-1\}$ de tal forma que es posible expresar $x_m = r_m \cdot EX'$. Suponiendo además que, para cada $m \in \{0, \dots, PE-1\}$, el soporte de la función $g(x - x_m)$ se encuentra contenido en el interior de la ventana de longitud VX' , con objeto de eliminar el aliasing, y teniendo en cuenta la periodicidad de la extensión de estas funciones (implícitamente asumido y explícitamente remarcado en el sumatorio en j), así como la periodicidad de la exponencial compleja, la expresión precedente puede reescribirse en la forma:

$$H(k \cdot EU') =$$

$$= EU' \cdot \left\{ \sum_{m=0}^{PE-1} f(x_m) \cdot e^{-ik \cdot EU' \cdot x_m} \right\} \cdot \left\{ \sum_{s=0}^{PE'-1} \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}} g(s \cdot EX' - j \cdot VX') \right] \cdot e^{-ik \cdot EU' \cdot s \cdot EX'} \right\}$$

$$k \in \left\{ -\lfloor PE'/2 \rfloor, \dots, \lceil PE'/2 \rceil - 1 \right\}$$
(5.1.9)

Donde el índice s agrupa el índice n de (5.1.8) y el índice r_m expuesto en la discusión del párrafo precedente. A la vista de las transformadas (5.1.4) y (5.1.5), la expresión anterior puede reescribirse en la forma:

$$H(k \cdot EU') = \frac{F(k \cdot EU') \cdot G(k \cdot EU')}{EU'}$$

$$k \in \left\{ -\left\lfloor \left\lfloor PE + \frac{lf-1}{tsm} \right\rfloor / 2 \right\rfloor, \dots, \left\lceil \left\lceil PE + \frac{lf-1}{tsm} \right\rceil / 2 \right\rceil - 1 \right\}$$
(5.1.10)

Donde la limitación en la extensión de k se encuentra impuesta por (5.1.4). Así pues, es posible determinar la transformada de f en los puntos $k \cdot EU'$ mediante la expresión:

$$F(k \cdot EU') = EU' \cdot \frac{H(k \cdot EU')}{G(k \cdot EU')} \quad (5.1.11)$$

$$k \in \left\{ -\left\lfloor \left\lfloor PE + \frac{lf-1}{tim} \right\rfloor / 2 \right\rfloor, \dots, \left\lceil \left\lceil PE + \frac{lf-1}{tim} \right\rceil / 2 \right\rceil - 1 \right\}$$

Obsérvese que, en el caso en que todos los x_n originales estuvieran uniformemente espaciados, la función g podría ser elegida como un impulso unitario, de tal forma que $lf = 1$, y la transformada de f podría determinarse mediante la expresión:

$$F(k \cdot EU) = EU \cdot \frac{H(k \cdot EU)}{G(k \cdot EU)} \quad (5.1.12)$$

$$k \in \left\{ -\lfloor PE/2 \rfloor, \dots, \lceil PE/2 \rceil - 1 \right\}$$

Cuyos valores son coincidentes con los expuestos en (5.1.1).

Si no todos los x_n originales se encuentran uniformemente espaciados, este resultado es analíticamente correcto en el caso en que la suposición anterior es válida, de tal forma que, para cada $m \in \{0, \dots, PE-1\}$ existe un $r_m \in \{0, \dots, PE'-1\}$ de tal forma que es posible expresar $x_m = r_m \cdot EX'$. Obsérvese que esta suposición no se verificará usualmente, de tal forma que serán obtenidos valores aproximados.

5.1.1.2. Determinación del filtro óptimo

Con objeto de hallar el filtro óptimo, una colección de funciones filtro, mostradas en la Tabla 5-1-1 han sido testadas. Todas ellas son funciones de simetría impar que dependen de un parámetro b , de tal forma que conforme éste crece, las funciones se estrechan. Este parámetro será elegido de tal forma que el filtro resultante sea óptimo en un cierto sentido. Alguno de los filtros también dependen de un parámetro c extra, pues representan una familia completa de funciones; de tal forma que cada valor de c define un filtro.

Tabla 5-1-1: Funciones filtro testadas. Sobre todas ellas han sido aplicadas las ventanas de Hanning, Triangular y Cuadrada. La función $I_A(x)$ representa la función indicatriz de A ($I_A(x) = 1$ si $x \in A$, $I_A(x) = 0$ en otro caso).

Familia gaussiana:	$g(x) = I_{\{ x < x_0\}}(x) \cdot e^{-b x ^c}$
Familia t :	$g(x) = I_{\{ x < x_0\}}(x) \cdot (1 + b \cdot x ^c)^{-1}$
Familia de senos cardinales:	$g(x) = I_{\{ x < x_0\}}(x) \cdot \frac{\text{sen}(b \cdot x)}{b \cdot x}$
	$g(x) = I_{\{ x < x_0\}}(x) \cdot \left \frac{\text{sen}(b \cdot x)}{b \cdot x} \right $
	$g(x) = I_{\{ x < x_0\}}(x) \cdot \left(\frac{\text{sen}(b \cdot x)}{b \cdot x} \right)^2$
B-Spline centrado:	$g(x) = \sum_{q=0}^{b+1} (-1)^q \binom{b+1}{q} \frac{(x/\Delta x + (q+1)/2 - l)_+^q}{b!}$ (Donde $x_+^q = I_{\{x > 0\}}(x) \cdot x^q$)
Cuadrada:	$g(x) = I_{\{ x < \min\{x_0, 1/b\}\}}(x)$
Triangular:	$g(x) = I_{\{ x < \min\{x_0, 1/b\}\}}(x) \cdot (1 - b \cdot x)$
Hanning:	$g(x) = I_{\{ x < \min\{x_0, 1/b\}\}}(x) \cdot \frac{1}{2} [1 + \cos(\pi \cdot b \cdot x)]$

Con objeto de realizar el análisis numérico, se implementan algoritmos de optimización en el lenguaje de MATLAB® Version 6.5.0.180913^a(R13), desarrollado por la compañía The MathWorks, Inc. (Hanselman y Littlefield, 2001). Los programas se ejecutan en un ordenador Compaq AlphaServer GS160 6/731 ALPHAWILDFIRE (730 MHz) con 16 CPU.

En este análisis se consideran 100 funciones f con PE puntos, distribuidos a lo largo del intervalo $[0,1]$ de acuerdo con una distribución de probabilidad uniforme. Sus valores, asimismo, tienen partes real e imaginaria distribuidas a lo largo del intervalo $[-1,1]$ de acuerdo con distribuciones de probabilidad uniformes. Obsérvese que esta elección no representa una pérdida de generalidad, puesto que cualquier otro caso se reduce a éste mediante la aplicación de unos apropiados factores de amplitud y escala. Las transformadas de estas funciones f son determinadas mediante dos métodos: la estimación del algoritmo de la NUFFT dada por (5.1.11) y la NDFT dada por (5.1.1) que, con el objeto de comparar con la primera, se calcula en los mismos PE'_0 puntos mostrados en (5.1.11). Ambas transformadas se comparan mediante los errores relativos con las normas L_2 y L_∞ definidos por Dutt y Rokhlin (1993) que, con la notación expuesta en esta Sección, se reescriben en la forma:

$$\begin{aligned}
E_2 &= \left\{ \frac{\sum_k \left[EU' \cdot \frac{H(k \cdot EU')}{G(k \cdot EU')} - F(k \cdot EU') \right]^2}{\sum_q [F(q \cdot EU')]^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \\
E_\infty &= \frac{\max_k \left\{ \left| EU' \cdot \frac{H(k \cdot EU')}{G(k \cdot EU')} - F(k \cdot EU') \right| \right\}}{\max_q \{ |F(q \cdot EU')|\}} \\
k, q &\in \left\{ - \left\lfloor \left[PE + \frac{lf - 1}{tsm} \right] / 2 \right\rfloor, \dots, \left\lceil \left[PE + \frac{lf - 1}{tsm} \right] / 2 \right\rceil - 1 \right\}
\end{aligned} \tag{5.1.13}$$

El parámetro b óptimo se determina mediante recurrencia para cada filtro, para cada valor de PE , tsm y lf ; y se elige como aquel que minimiza el error relativo E_2 medio para las 100 funciones f .

Los resultados obtenidos con esta metodología se discuten en esta Subsección para la transformada directa con $PE = 512$. Resultados análogos son obtenidos para la transformada inversa y otros valores de PE .

En la Figura 5-1-2 se muestra la variación de los errores relativos con lf . Obsérvese que únicamente el filtro gaussiano (miembro de la familia gaussiana con $c = 2$) con la aplicación de las ventanas de Hanning o Cuadrada, proporciona errores relativos menores que 10^{-8} . El filtro gaussiano con la aplicación de la ventana de Hanning es la mejor elección, en el sentido de que se necesita un filtro más corto para obtener un error relativo dado. Este resultado se encuentra de acuerdo con Duijdam y Schonewille (1999), quienes realizan esta comparación para una familia de filtros más pequeña. Ambos errores relativos se comportan de una forma similar, de tal forma que en lo siguiente únicamente se tendrá en cuenta el error relativo E_2 , y queda justificada la elección del parámetro b óptimo mediante la minimización de este error relativo.

Es importante señalar el hecho de que la dependencia del error relativo con PE puede ser obviada, siendo significativa únicamente su dependencia con lf . Este resultado será mostrado en la siguiente Subsección.

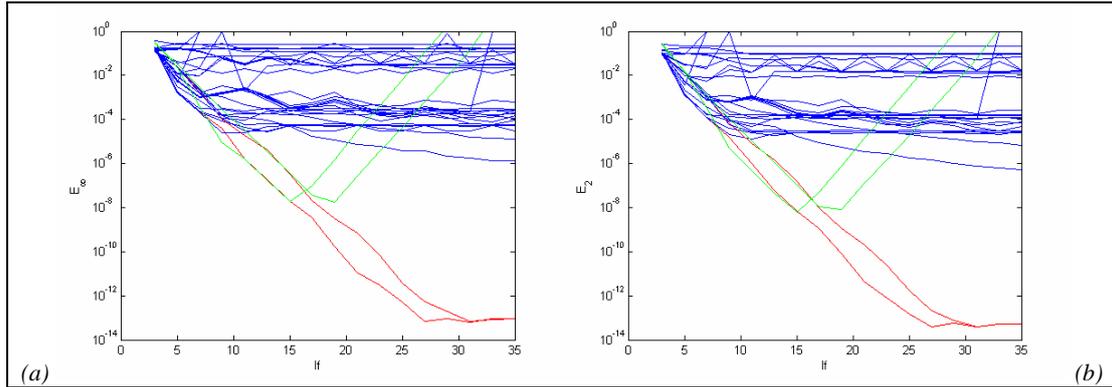


Figura 5-1-2: Variación del (a) E_2 medio y (b) E_∞ medio vs. lf para los filtros mostrados en la Tabla 5-1-1. En aquellos filtros que dependen del parámetro C , se estudian los valores $c \in \{1,995; 1,999; 2,2,001; 2,005\}$. En todos los casos se compara la transformada directa, $PE = 512$ y $tsm = 2$. Se distinguen cinco casos: Filtro gaussiano (líneas punteadas) con la aplicación de la ventana de Hanning (izquierda) y la ventana Cuadrada (derecha), el filtro B-Spline (líneas a trazos) con aplicación de la ventana de Hanning y la ventana Cuadrada (izquierda, ambas coincidentes) y la ventana Triangular (derecha).

En la Figura 5-1-3 se muestran la variación del E_2 medio vs. lf para algunos valores de tsm , así como la variación del tiempo de cálculo medio vs. tsm . Obsérvese que conforme tsm crece, es necesario un filtro más corto para obtener un error relativo dado. Sin embargo, conforme tsm crece también crece el tiempo de cálculo. Puesto que la mejora que supone un filtro más corto no compensa el inconveniente que supone el incremento en el tiempo de cálculo, el valor menor $tsm = 2$ será el considerado en lo que sigue. Esta elección está de acuerdo con la literatura anteriormente referida.

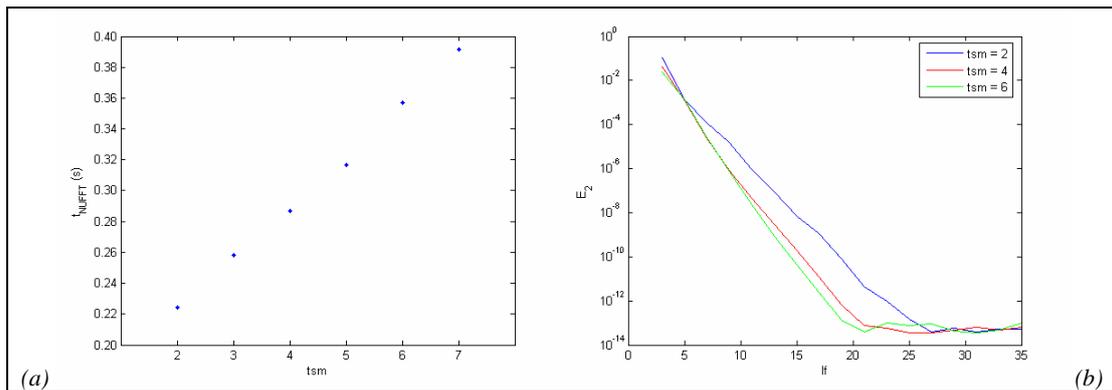


Figura 5-1-3: (a) Variación del E_2 medio vs. lf para $tsm \in \{2, 4, 6\}$. (b) Variación del tiempo medio de cálculo vs. tsm . En todos los casos se compara la transformada directa, $PE = 512$ y se considera el filtro gaussiano con la aplicación de la ventana de Hanning.

Una vez han sido elegidos el filtro gaussiano con la aplicación de la ventana de Hanning y la tasa de incremento del muestreo $t_{sm} = 2$, se determina el valor óptimo del parámetro b para cada valor de PE y lf . Estos valores óptimos, así como los errores relativos E_2 asociados con ellos y los resultados correspondientes al tiempo de cálculo medio, serán expuestos en la siguiente Sección.

5.1.2. Resultados numéricos

En esta Sección se muestran los resultados correspondientes al valor del máximo error relativo E_2 y el valor óptimo del parámetro b mencionados en la Sección anterior, así como los resultados correspondientes al tiempo de cálculo medio.

La metodología anteriormente expuesta se aplica a la transformada unidimensional y a valores $PE \in \{64, 128, 256, 384, 512, 640, 786, 896, 1024\}$.

5.1.2.1. Error relativo máximo y valor óptimo del parámetro

En las figuras 5-1-5 y 5-1-6 se muestra la variación del error relativo E_2 y el valor óptimo del parámetro b vs. lf para cada valor de PE . En la Figura 5-1-4 se aprecia un comportamiento errático de E_2 para valores $lf > 25$, relacionado con el límite de la precisión de cálculo. Así mismo puede observarse, tal como fue mencionado anteriormente, que la dependencia de E_2 con PE puede ser obviada y únicamente es significativa su dependencia con lf . Así pues, es posible obtener una regla práctica para la determinación del mínimo valor de lf que debe ser considerado para cometer un error relativo menor que un valor dado. Esta regla se muestra en la Tabla 5-1-2.

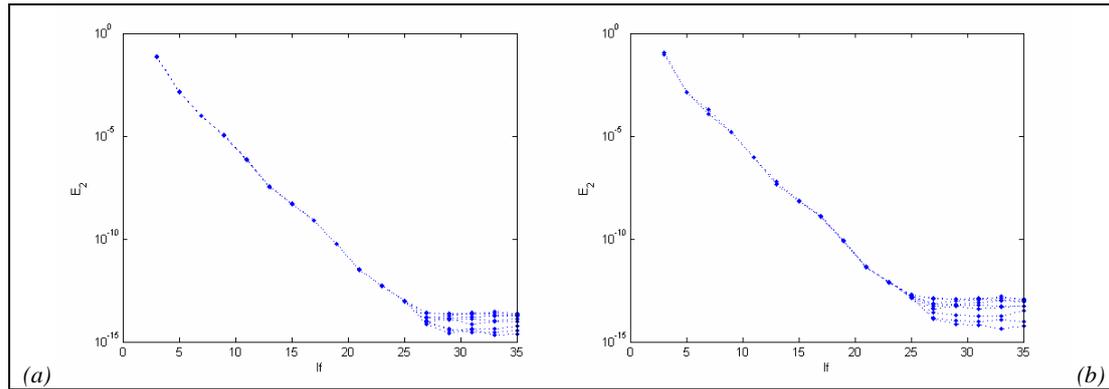


Figura 5-1-4: Variación del E_2 medio vs. lf . Los resultados para los valores de PE considerados se muestran para (a) la transformada directa y (b) la transformada inversa. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.

Tabla 5-1-2: Valor mínimo de lf como función del máximo error relativo E_2 admisible para las transformadas directa e inversa.

Máximo error relativo E_2 admisible en la		Mínimo lf
Transformada directa	Transformada inversa	
$\max E_2 \geq 1.3 \cdot 10^{-3}$	$\max E_2 \geq 1.5 \cdot 10^{-3}$	5
$1.3 \cdot 10^{-3} > \max E_2 \geq 2.0 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-3} > \max E_2 \geq 1.0 \cdot 10^{-4}$	7
$2.0 \cdot 10^{-4} > \max E_2 \geq 1.6 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-4} > \max E_2 \geq 1.2 \cdot 10^{-5}$	9
$1.6 \cdot 10^{-5} > \max E_2 \geq 9.7 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-5} > \max E_2 \geq 7.4 \cdot 10^{-7}$	11
$9.7 \cdot 10^{-7} > \max E_2 \geq 5.9 \cdot 10^{-8}$	$7.4 \cdot 10^{-7} > \max E_2 \geq 3.6 \cdot 10^{-8}$	13
$5.9 \cdot 10^{-8} > \max E_2 \geq 7.2 \cdot 10^{-9}$	$3.6 \cdot 10^{-8} > \max E_2 \geq 5.2 \cdot 10^{-9}$	15
$7.2 \cdot 10^{-9} > \max E_2 \geq 1.3 \cdot 10^{-9}$	$5.2 \cdot 10^{-9} > \max E_2 \geq 8.1 \cdot 10^{-10}$	17
$1.3 \cdot 10^{-9} > \max E_2 \geq 8.2 \cdot 10^{-11}$	$8.1 \cdot 10^{-10} > \max E_2 \geq 5.8 \cdot 10^{-11}$	19
$8.2 \cdot 10^{-11} > \max E_2 \geq 4.4 \cdot 10^{-12}$	$5.8 \cdot 10^{-11} > \max E_2 \geq 3.3 \cdot 10^{-12}$	21
$4.4 \cdot 10^{-12} > \max E_2 \geq 8.3 \cdot 10^{-13}$	$3.3 \cdot 10^{-12} > \max E_2 \geq 5.7 \cdot 10^{-13}$	23
$8.3 \cdot 10^{-13} > \max E_2 \geq 2.0 \cdot 10^{-13}$	$5.7 \cdot 10^{-13} > \max E_2 \geq 1.0 \cdot 10^{-13}$	25

En la Figura 5-1-5 se observa cómo el valor óptimo de b para $lf < 5$ es próximo a cero, lo que se encuentra en desacuerdo con la tendencia general de las curvas. Así pues, los análisis presentes en esta Subsección se restringirán a los valores $5 \leq lf \leq 25$, donde se encuentra presente un comportamiento regular.

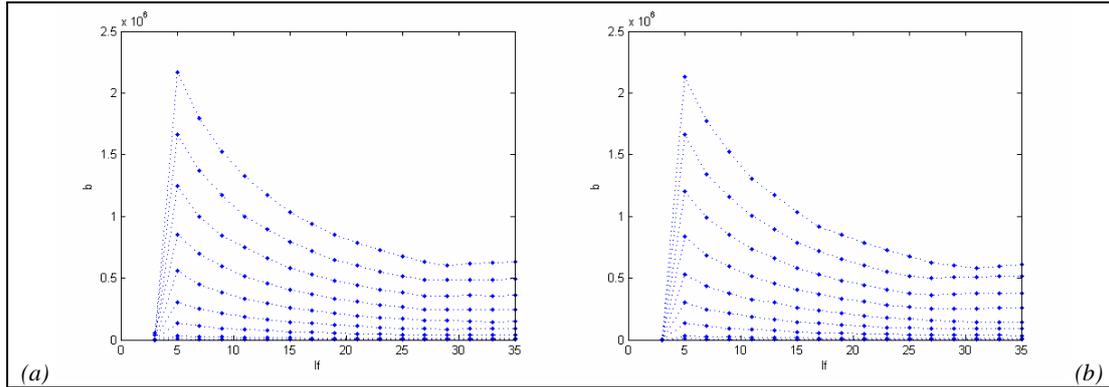


Figura 5-1-5: (a) Variación del valor óptimo de b vs. lf para (a) la transformada directa y (b) la transformada inversa. Los resultados se encuentran ordenados, de tal forma que la curva superior corresponde al valor mayor de los valores de PE considerados, la inferior al menor. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.

El comportamiento del valor óptimo del parámetro b en el rango de lf restringido puede modelarse mediante una expresión de la forma:

$$\log b = b_0 + b_1 \log lf + b_2 (\log lf)^2 + b_3 \log PE \tag{5.1.14}$$

Se realiza un análisis de regresión de los datos anteriores con el programa SPSS para Windows Versión 11.5.1 (Pérez, 2003). Los resultados obtenidos se detallan en la Tabla 5-1-3, y los modelos ajustados para las transformadas directa e inversa se muestran, junto a los datos originales, en la Figura 5-1-6. Las diferencias relativas entre los valores de b predichos y observados se muestran en la Figura 5-1-7. Estas diferencias son suficientemente pequeñas como para garantizar que los errores relativos cometidos en la estimación de la transformada con el parámetro estimado no exceden el orden de magnitud del máximo error relativo admisible que es considerado.

Tabla 5-1-3: Resultados de los análisis de regresión para los valores óptimos de b .

Transformada directa		Transformada inversa	
$R^2_{aj.} = 0,999$	$F^*_{3,95} = 1.825.640$ ($p < 0,000$)	$R^2_{aj.} = 0,999$	$F^*_{3,95} = 1.889.921$ ($p < 0,000$)
Variable en el modelo	Coefficiente ($b \pm \sigma_b$) ($p < 0,000$)	Variable en el modelo	Coefficiente ($b \pm \sigma_b$) ($p < 0,000$)
Constante	$0,534 \pm 0,019$	Constante	$0,574 \pm 0,019$
$\log lf$	$-0,16 \pm 0,04$	$\log lf$	$-0,21 \pm 0,03$
$(\log lf)^2$	$-0,270 \pm 0,016$	$(\log lf)^2$	$-0,250 \pm 0,016$
$\log N$	$2,0054 \pm 0,0018$	$\log N$	$2,0047 \pm 0,0018$

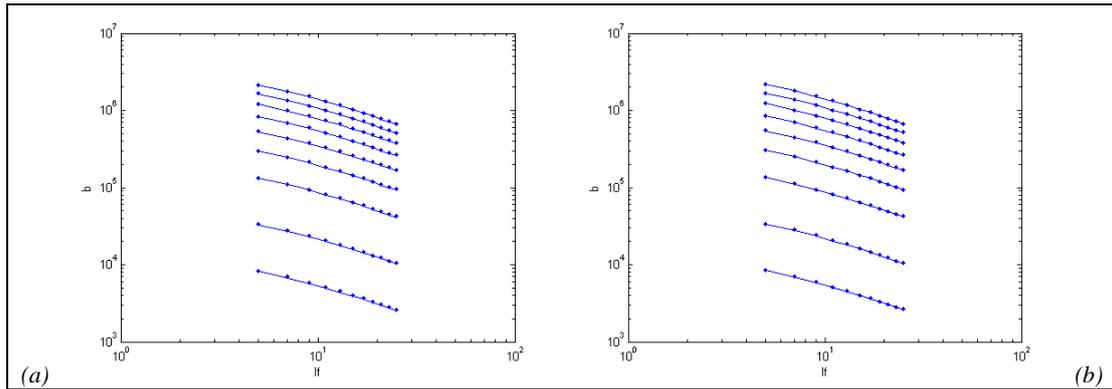


Figura 5-1-6: Modelo ajustado para el valor óptimo de b vs. lf en el rango $5 \leq lf \leq 25$ para (a) la transformada directa y (b) la transformada inversa. Se muestran los datos originales (puntos) y el modelo ajustado (línea continua). Los intervalos de confianza al 95% para los modelos ajustados son indistinguibles de éstos. Los resultados se encuentran ordenados, de tal forma que la curva superior corresponde al valor mayor de los valores de PE considerados, la inferior al menor.

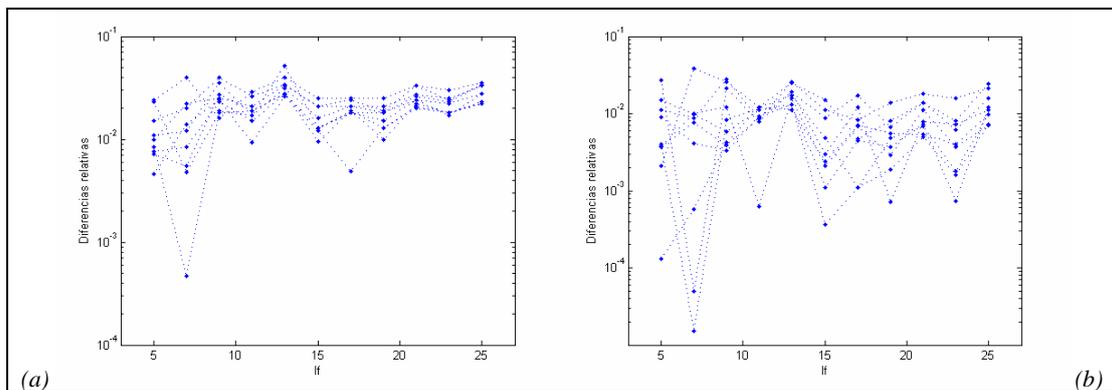


Figura 5-1-7: Residuos relativos correspondientes al modelo del valor óptimo de b vs. lf . Los resultados para los valores de PE considerados se encuentran superpuestos para (a) la transformada directa y (b) la transformada inversa. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.

A la vista de estos resultados, el parámetro b puede ser determinado para cada valor de lf y PE mediante las ecuaciones de regresión:

$$\begin{aligned} \text{Transformada directa: } b &= 10^{\{0,534 - 0,16 \cdot \log lf - 0,270 \cdot (\log lf)^2 + 2,0054 \cdot \log PE\}} \\ \text{Transformada inversa: } b &= 10^{\{0,574 - 0,21 \cdot \log lf - 0,250 \cdot (\log lf)^2 + 2,0047 \cdot \log PE\}} \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

5.1.2.2. Tiempo de cálculo medio

Los resultados obtenidos muestran que la dependencia del tiempo de cálculo medio con lf puede ser obviada, siendo significativa únicamente su dependencia con PE . En este análisis se consideran el tiempo de cálculo correspondiente a la evaluación directa de la NDFT dada por (5.1.1) y el correspondiente al algoritmo de la NUFFT expuesto en la Sección anterior.

Se realiza un análisis de regresión con el programa SPSS. Los resultados obtenidos se detallan en la Tabla 5-1-4. Los datos originales y los modelos ajustados para las transformadas directa e inversa se muestran en la Figura 5-1-8. Las diferencias relativas entre los valores predichos y observados de ambos tiempos se muestran en la Figura 5-1-9. Estas diferencias son suficientemente pequeñas como para garantizar que los errores relativos cometidos en la estimación del tiempo de cálculo medio no exceden el orden de magnitud del estimado.

Tabla 5-1-4: Resultados de los análisis de regresión para el tiempo de cálculo.

Evaluación directa de la NDFT			
Transformada directa		Transformada inversa	
$R^2_{aj.} = 0,999$	$F^*_{1,8} = 39.280,261$ ($p < 0,000$)	$R^2_{aj.} = 0,999$	$F^*_{1,8} = 143.865,5$ ($p < 0,000$)
Variable en el modelo	Coficiente ($b \pm \sigma_b$) ($p < 0,000$)	Variable en el modelo	Coficiente ($b \pm \sigma_b$) ($p < 0,000$)
N^2	$(2,443 \pm 0,012) \cdot 10^{-6}$	N^2	$(2,372 \pm 0,006) \cdot 10^{-6}$

Algoritmo de la NUFFT			
Transformada directa		Transformada inversa	
$R^2_{aj.} = 0,998$	$F^*_{2,7} = 1.035,164$ ($p < 0,000$)	$R^2_{aj.} = 0,999$	$F^*_{2,7} = 24.542,850$ ($p < 0,000$)
Variable en el modelo	Coficiente ($b \pm \sigma_b$) ($p < 0,000$)	Variable en el modelo	Coficiente ($b \pm \sigma_b$) ($p < 0,000$)
N	$(2,2 \pm 0,4) \cdot 10^{-4}$	N	$(2,48 \pm 0,08) \cdot 10^{-4}$
N^2	$(3,2 \pm 0,5) \cdot 10^{-7}$	N^2	$(2,20 \pm 0,09) \cdot 10^{-7}$

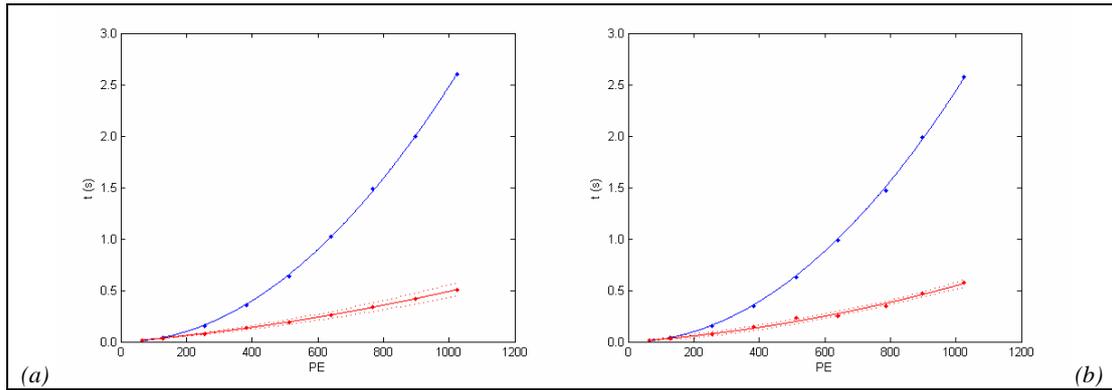


Figura 5-1-8: Modelo ajustado para el tiempo de cálculo medio vs. lf en el rango $5 \leq lf \leq 25$ para (a) la transformada directa y (b) la transformada inversa. Se muestran los datos originales (puntos, tiempo de la evaluación directa; asteriscos, tiempo del algoritmo de la convolución), modelos ajustados (línea continua) y los intervalos de confianza al 95% para los modelos ajustados (líneas punteadas, excepto aquellas que son indistinguibles de éstos). Los resultados se encuentran ordenados, de tal forma que la curva superior corresponde al tiempo de cálculo medio de la evaluación directa de la NDFT, la inferior al tiempo de cálculo medio del algoritmo de la NUFFT.

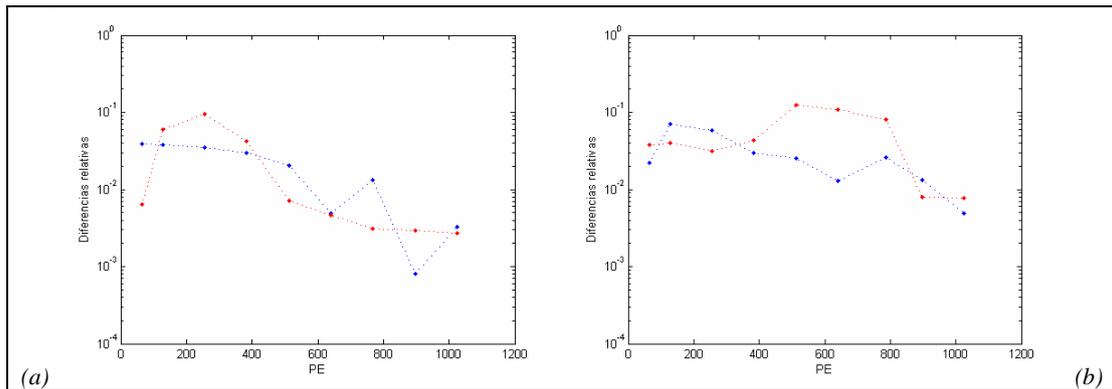


Figura 5-1-9: Residuos relativos correspondientes al modelo ajustado para el tiempo de cálculo óptimo vs. lf . Se muestran los resultados correspondientes a la evaluación directa (puntos) y el algoritmo de la convolución (asteriscos) para (a) la transformada directa y (b) la transformada inversa. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.

A la vista de estos resultados, el tiempo de cálculo medio puede ser determinado para cada valor de PE mediante las ecuaciones de regresión:

$$\begin{aligned}
 \text{Transformada directa: } & \begin{cases} t_{NDFT} = 2,443 \cdot 10^{-6} \cdot PE^2 \\ t_{NUFFT} = 2,372 \cdot 10^{-6} \cdot PE^2 \end{cases} \\
 \text{Transformada inversa: } & \begin{cases} t_{NIDFT} = 2,2 \cdot 10^{-4} \cdot PE + 3,2 \cdot 10^{-7} \cdot PE^2 \\ t_{NUIFFT} = 2,48 \cdot 10^{-4} \cdot PE + 2,20 \cdot 10^{-7} \cdot PE^2 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5.1.16}$$

Obsérvese que el tiempo empleado por el algoritmo de la convolución es mucho menor que el tiempo empleado en la evaluación directa de (5.1.1), creciendo la separación entre ambos tiempos de cálculo conforme lo hace PE . Ambos tiempos pueden ser reducidos si el algoritmo es implementado empleando las ventajas de los lenguajes de programación matriciales.

5.1.3. Algoritmo para las transformadas directa e inversa D -dimensionales

La metodología expuesta para el caso más general supone la generalización de la anteriormente desarrollada para la transformada directa unidimensional. En esta Subsección \mathbf{f} , \mathbf{g} , \mathbf{h} representarán funciones y \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{H} sus transformadas directas o inversas, dependiendo del caso.

5.1.3.1. Datos de entrada

- Número de dimensiones: D .
- Vector columna de números de puntos en cada dimensión:
 $\mathbf{PE} = PE_1, \dots, PE_D$.

Obsérvese que el número total de muestras viene dado por $PE_T = \prod_{d=1}^D PE_d$.

- Vector columna de longitudes de las ventanas a lo largo de cada dimensión del dominio natural: $\mathbf{VX} = (VX_1, \dots, VX_D)^t$.
- Vector fila de muestras de la función f cuya FFT (vs. IFFT) se busca determinar: $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_{N_T})$.

- Matriz de coordenadas de las muestras: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^{N_T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_D^1 & \dots & x_D^{N_T} \end{pmatrix}$.

Obsérvese que la matriz \mathbf{X} puede descomponerse por columnas en la forma $\mathbf{X} = (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^{N_T})$, de tal forma que el i -ésimo vector columna, $\mathbf{x}^i = (x_1^i, \dots, x_D^i)^t$, contiene las coordenadas de la i -ésima muestra en \mathbf{f} , f_i .

- Error relativo máximo admisible: E_{\max} .

5.1.3.2. Parámetros prefijados

- Tasa de sobremuestreo: $tsm = 2$.
- Filtro gaussiano con la aplicación de la ventana de Hanning.

5.1.3.3. Parámetros calculados

- Longitud de filtro (en función de E_{\max}) dada por la Tabla 5-1-2:
 $lf = lf(E_{\max})$.
- Constante auxiliar: $lf_{1/2} = \frac{lf - 1}{2}$.
- Vector columna de parámetros \mathbf{b} (en función de \mathbf{PE} y lf) dada por (5.1.15): $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_D]^t$, con $b_d = b_d(N_D, lf)$, $d = 1, \dots, D$.

5.1.3.4. Algoritmo

Paso 1

Se determinan mediante (5.1.2) y (5.1.3) los vectores columna de nuevos números de puntos y nuevos espaciados en los dominios natural y frecuencial a lo largo de cada dimensión:

$$\begin{aligned}
\mathbf{PE} &= PE_1, \dots, PE_D{}^t, \quad PE_d = tsm \cdot PE_d \quad lf = 1 \\
\mathbf{EX} &= EX_1, \dots, EX_D{}^t, \quad EX_d = \frac{VX_d}{tsm \cdot PE_d} \\
\mathbf{EU} &= EU_1, \dots, EU_D{}^t, \quad EU_d = \frac{tsm \cdot PE_d}{tsm \cdot PE_d \quad lf = 1} \cdot \frac{2}{VX_d} \quad d = 1, \dots, D
\end{aligned} \tag{5.1.17}$$

Obsérvese que el nuevo número total de muestras donde va a estimarse la transformada viene dado por $PE'_T = \prod_{d=1}^D PE'_d$.

Paso 2

Se determina el vector columna de parámetros de corte:

$$\mathbf{x}^0 = x_1^0, \dots, x_D^0{}^t, \quad x_d^0 = lf_{1/2} \cdot EX_d \quad d = 1, \dots, D \tag{5.1.18}$$

Paso 3

Se determinan los D vectores fila de coordenadas equiespaciadas:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_d^{'eq} &= (x_d^{'eq}(1), x_d^{'eq}(2), \dots, x_d^{'eq}(PE'_d)) = (-lf_{1/2}, -lf_{1/2} + 1, \dots, PE'_d - lf_{1/2} - 1) \cdot EX'_d \\
\forall d &\in \{1, \dots, D\}
\end{aligned} \tag{5.1.19}$$

Obsérvese que la malla de puntos donde van a ser determinadas las muestras viene dada por los PE'_T vectores columna:

$$\mathbf{x}_{i_1, \dots, i_D} = x_1^{eq} i_1, \dots, x_D^{eq} i_D{}^t \quad i_1 = 1, \dots, PE_1, \dots, i_D = 1, \dots, PE_D \tag{5.1.20}$$

Paso 4

Se determina el tensor D -dimensional de muestras equiespaciadas de la función filtro:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g} &= g_{i_1, \dots, i_D} \begin{matrix} i_1 = 1, \dots, PE_1 \\ \vdots \\ i_D = 1, \dots, PE_D \end{matrix}, \quad g_{i_1, \dots, i_D} = g(\mathbf{x}_{i_1, \dots, i_D}; \mathbf{b}, \mathbf{x}^0) \\
i_1 &= 1, \dots, PE_1, \dots, i_D = 1, \dots, PE_D
\end{aligned} \tag{5.1.21}$$

Donde, una vez el filtro unidimensional se define mediante:

$$g(x, b, x^0) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{x}{x^0} \right) \cdot e^{-bx^2} & |x| \leq x_0 \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases} \quad (5.1.22)$$

Se define el filtro D -dimensional de la forma:

$$g(x_1, \dots, x_D; \mathbf{b}, \mathbf{x}^0) = \prod_{d=1}^D g(x_d, b_d, x_d^0) \quad (5.1.23)$$

Paso 5

Se determina mediante (5.1.6) el tensor D -dimensional de muestras equiespaciadas como resultado de la convolución del filtro y la función \mathbf{f} :

$$\mathbf{h} = \left[h_{i_1, \dots, i_D} \right]_{\substack{i_1: 1, \dots, PE_1 \\ \vdots \\ i_D: 1, \dots, PE_D}}, \quad h_{i_1, \dots, i_D} = \prod_{j=1}^{PE_T} f_j \cdot g(\mathbf{x}_{i_1, \dots, i_D}^j; \mathbf{b}, \mathbf{x}^0) \quad (5.1.24)$$

$$i_1 = 1, \dots, PE_1, \dots, i_D = 1, \dots, PE_D$$

Paso 6

Para calcular la FFT (vs. IFFT) de ambas funciones \mathbf{g} y \mathbf{h} , es preciso determinar sus valores referidos a los vectores fila de coordenadas equiespaciadas $\mathbf{x}_d^{neq} = (0, 1, \dots, PE'_d - 1) \cdot EX'_d \quad \forall d \in \{1, \dots, D\}$.

Esto puede realizarse, dada la propiedad de periodicidad de la extensión de ambas funciones \mathbf{g} y \mathbf{h} , reordenando los valores anteriormente determinados mediante el siguiente procedimiento:

Paso 6.1

$\forall d \in \{1, \dots, D\}$ realizar Paso 6.2

Paso 6.2

$\forall i_1 \in \{1, \dots, PE'_1\}, \dots, \forall i_{d-1} \in \{1, \dots, PE'_{d-1}\}, \forall i_{d+1} \in \{1, \dots, PE'_{d+1}\}, \dots,$
 $\forall i_D \in \{1, \dots, PE'_D\}$ realizar Paso 6.3

Paso 6.3

En \mathbf{g} y \mathbf{h} , reordenar los elementos con índices desde $i_1, \dots, i_{d-1}, 1, i_{d+1}, \dots, i_D$ hasta $i_1, \dots, i_{d-1}, PE'_d, i_{d+1}, \dots, i_D$, insertando los elementos desde $i_1, \dots, i_{d-1}, \lfloor f_{j/2} + 1, i_{d+1}, \dots, i_D$ hasta $i_1, \dots, i_{d-1}, PE'_d, i_{d+1}, \dots, i_D$ y desde $i_1, \dots, i_{d-1}, 1, i_{d+1}, \dots, i_D$ hasta $i_1, \dots, i_{d-1}, \lfloor f_{j/2}, i_{d+1}, \dots, i_D$, en este preciso orden.

Paso 7

Las transformadas de \mathbf{g} y \mathbf{h} reordenadas, $\mathbf{G} = G_{i_1, \dots, i_D} \begin{matrix} i_1 = 1, \dots, PE_1 \\ \vdots \\ i_D = 1, \dots, PE_D \end{matrix}$ y

$\mathbf{H} = H_{i_1, \dots, i_D} \begin{matrix} i_1 = 1, \dots, PE_1 \\ \vdots \\ i_D = 1, \dots, PE_D \end{matrix}$, se determinan mediante el algoritmo de la FFT (vs. IFFT).

Paso 8

Se estima la transformada directa (vs. inversa) de \mathbf{f} de la forma:

$$\mathbf{F} = F_{i_1, \dots, i_D} \begin{matrix} i_1 = 1, \dots, PE_1 \\ \vdots \\ i_D = 1, \dots, PE_D \end{matrix}$$

$$F_{i_1, \dots, i_D} = EU_1 \cdots EU_D \frac{H_{i_1, \dots, i_D}}{G_{i_1, \dots, i_D}} \quad \text{vs.} \quad F_{i_1, \dots, i_D} = \frac{1}{EU_1 \cdots EU_D} \frac{H_{i_1, \dots, i_D}}{G_{i_1, \dots, i_D}} \quad (5.1.25)$$

$i_1 = 1, \dots, PE_1, \dots, i_D = 1, \dots, PE_D$

La aplicación de este algoritmo se ejemplifica en un caso sencillo en la Figura 5-1-10.

Figura 5-1-10: Ejemplo de la aplicación del algoritmo de la NUFFT.

En este caso $PE = 4$ y $VX = 1$, de tal forma que $EX = 1/4$, $EU = 2\pi$ y $VU = 8\pi$, y se eligen $tsm = 2$ y $lf = 5$, de tal forma que $PE' = 12$, $EX' = 1/8$, $VX' = 12/8$, $EU' = 4\pi/3$ y $VU' = 16\pi$.

- (a) Función f y parámetros del dominio natural original.
- (b) Parámetros de los dominios frecuencial original y nuevo.
- (c) Función filtro g y parámetros del dominio natural nuevo.
- (d) Función $h(x) = (f * g)(x)$.
- (e) Filtro muestreado, una vez reordenado.
- (f) Función h muestreada, una vez reordenada.
- (g) DFT de g .
- (h) DFT de h .
- (i) Transformada de Fourier directa de f : transformada analítica (línea), NDFT (puntos) y NUFFT (círculos).

En este caso $E_2 = 9.4 \cdot 10^{-4}$, lo que se encuentra de acuerdo con los resultados que se muestran en la Tabla 5-1-2.

En todos los casos se representa en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.

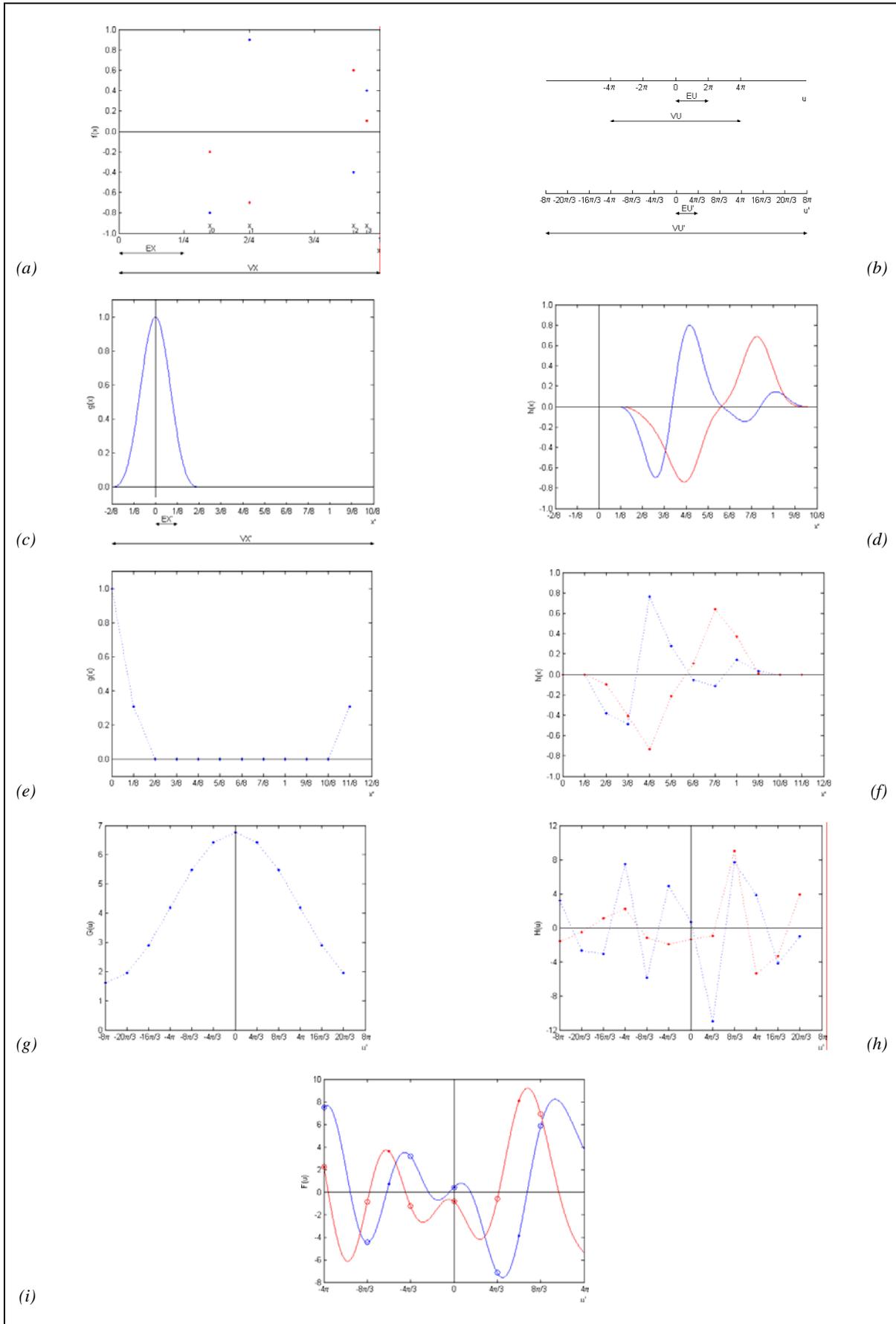


Figura 5-1-10: Ejemplo de la aplicación del algoritmo de la NUFFT.

5.2. Interpolación en las transformadas de Fourier mediante técnicas generales

Como se ha mencionado anteriormente, en este Capítulo se estudian las metodologías de interpolación implementadas en MATLAB (Hanselman y Littlefield, 2001): vecinos más próximos, interpolación lineal, interpolación mediante splines cúbicos e interpolación mediante polinomios de Hermite cúbicos; empleándose como ventana un pulso cuadrado.

5.2.1. Interpolación en la transformada de Fourier directa

En esta Subsección se realizan interpolaciones análogas a las expuestas en las figuras 4-4-4 a 4-4-6 de la §4.4.1.

Los resultados obtenidos se muestran en las figuras 5-2-1 a 5-2-8:

Páginas pares:

- (a) Transformada de Fourier directa $\left(F_{0,025;18}^{*0,05}\right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4}$ (puntos), transformada para interpolar $\left(F_{0,025;18}^{*0,05}\right)(u)$ (línea continua), función interpoladora $\left(F_{0,025;18}^{*0,05}\right)'(u)$ (línea punteada) y transformada interpolada $\left(F_{0,025;18}^{*0,05}\right)_{\frac{3}{4}\pi/8;1\frac{3}{4}40\pi}^{\frac{3}{4}\pi/4}$ (círculos), y (b) detalle.
- (c) Transformada de Fourier directa $\left(F_{0,025;18}^{*0,05}\right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4}$ (puntos), transformada para interpolar $\left(F_{0,025;18}^{*0,05}\right)(u)$ (línea continua), función interpoladora $\left(F_{0,025;18}^{*0,05}\right)'(u)$ (línea punteada) y transformada interpolada $\left(F_{0,025;18}^{*0,05}\right)_{0,3;196,0}^{0,6}$ (círculos), y (d) detalle.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria

Páginas impares:

(a) Transformada de Fourier directa $\left(G_{0,025;18}^{*0,05}\right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4}$ (puntos), transformada para interpolar

$\left(G_{0,025;18}^{*0,05}\right)(u)$ (línea continua), función interpoladora $\left(G_{0,025;18}^{*0,05}\right)'(u)$ (línea punteada) y transformada interpolada $\left(G_{0,025;18}^{*0,05}\right)_{\frac{3}{4}\pi/8;1\frac{3}{4}40\pi}^{\frac{3}{4}\pi/4}$ (círculos), y (b) detalle.

(c) Transformada de Fourier directa $\left(G_{0,025;18}^{*0,05}\right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4}$ (puntos), transformada para interpolar

$\left(G_{0,025;18}^{*0,05}\right)(u)$ (línea continua), función interpoladora $\left(G_{0,025;18}^{*0,05}\right)'(u)$ (línea punteada) y transformada interpolada $\left(G_{0,025;18}^{*0,05}\right)_{0,3;196,0}^{0,6}$ (círculos), y (d) detalle.

(e) Transformada de Fourier directa $\left(K_{0,025;18}^{*0,05}\right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4}$ (puntos), transformada para interpolar

$\left(K_{0,025;18}^{*0,05}\right)(u)$ (línea continua), función interpoladora $\left(K_{0,025;18}^{*0,05}\right)'(u)$ (línea punteada) y transformada interpolada $\left(K_{0,025;18}^{*0,05}\right)_{\frac{3}{4}\pi/8;1\frac{3}{4}40\pi}^{\frac{3}{4}\pi/4}$ (círculos), y (f) detalle.

(g) Transformada de Fourier directa $\left(K_{0,025;18}^{*0,05}\right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4}$ (puntos), transformada para interpolar

$\left(K_{0,025;18}^{*0,05}\right)(u)$ (línea continua), función interpoladora $\left(K_{0,025;18}^{*0,05}\right)'(u)$ (línea punteada) y transformada interpolada $\left(K_{0,025;18}^{*0,05}\right)_{0,3;196,0}^{0,6}$ (círculos), y (h) detalle.

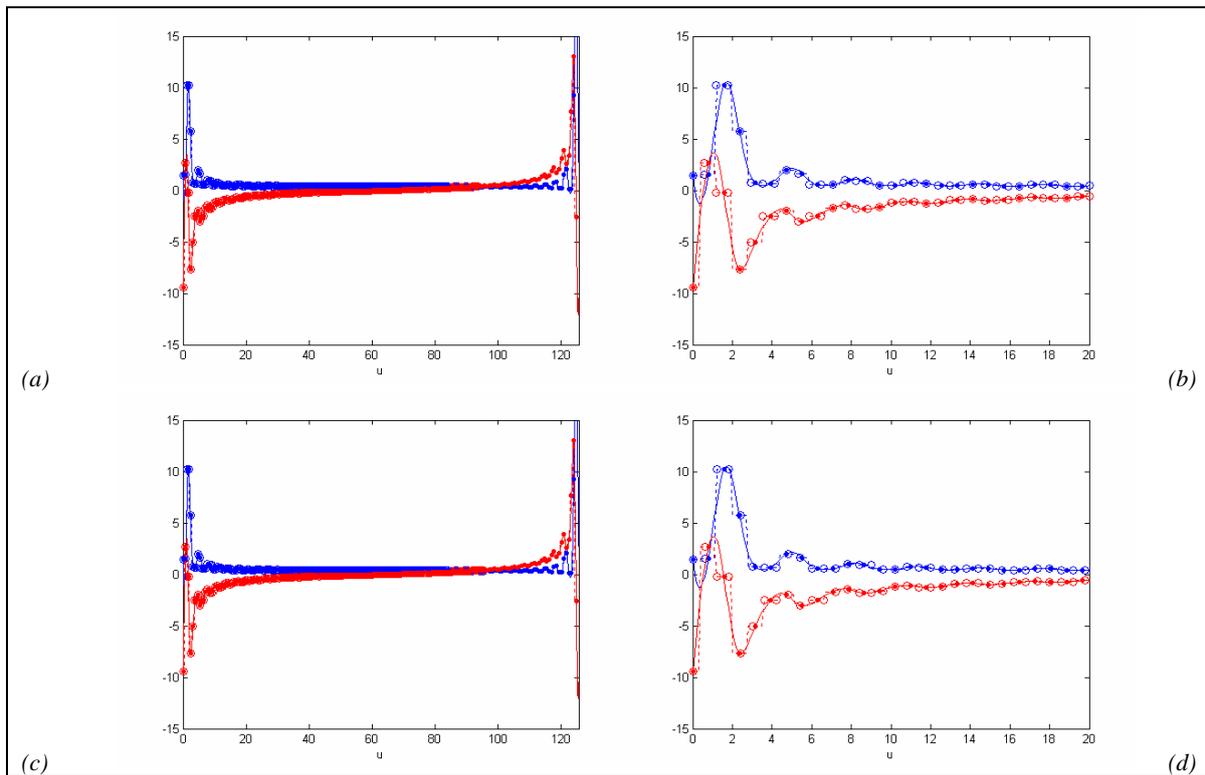


Figura 5-2-1: Interpolación en la transformada de Fourier directa mediante el método de vecinos más próximos, Ejemplo I.

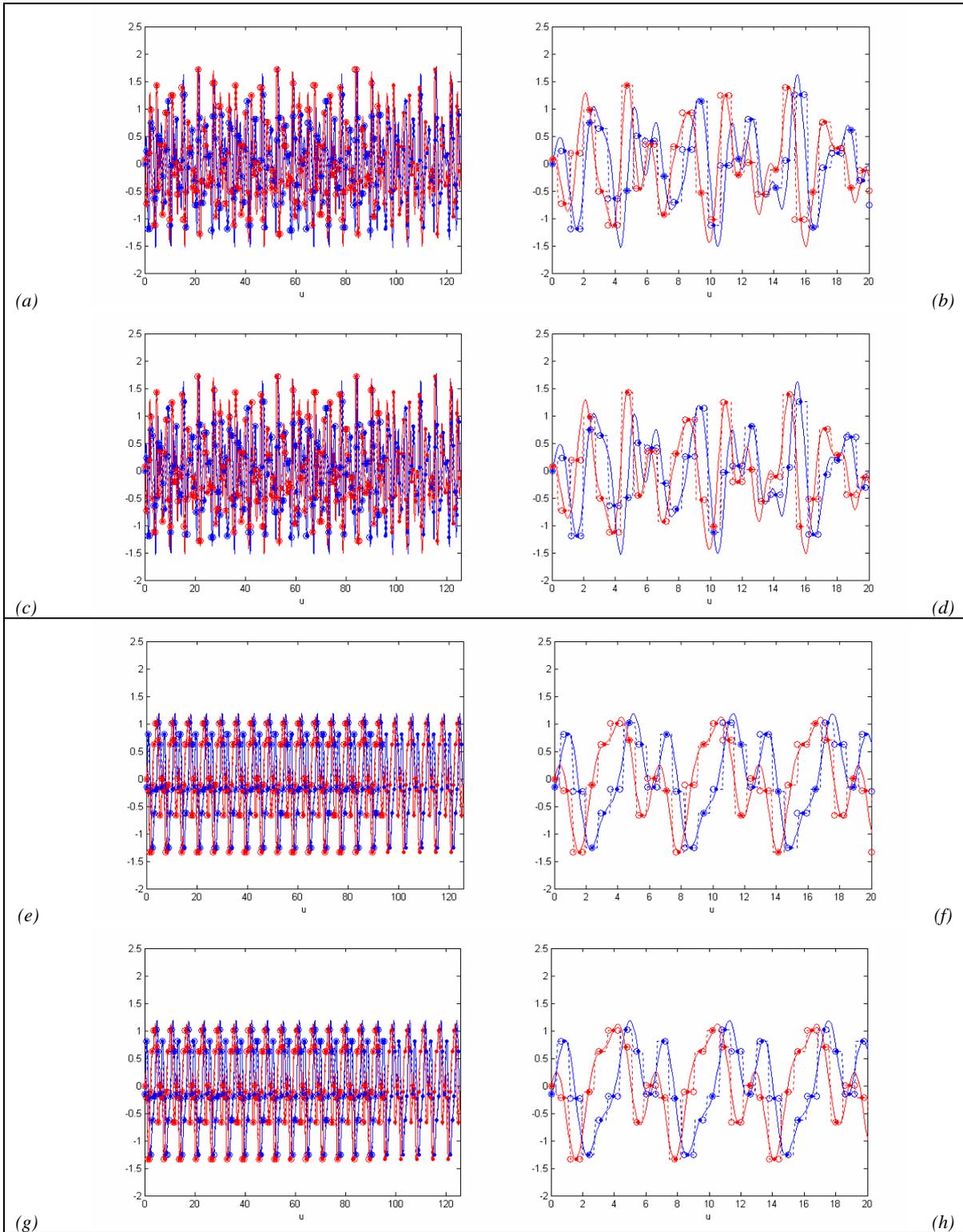


Figura 5-2-2: Interpolación en la transformada de Fourier directa mediante el método de vecinos más próximos, ejemplos II y III.

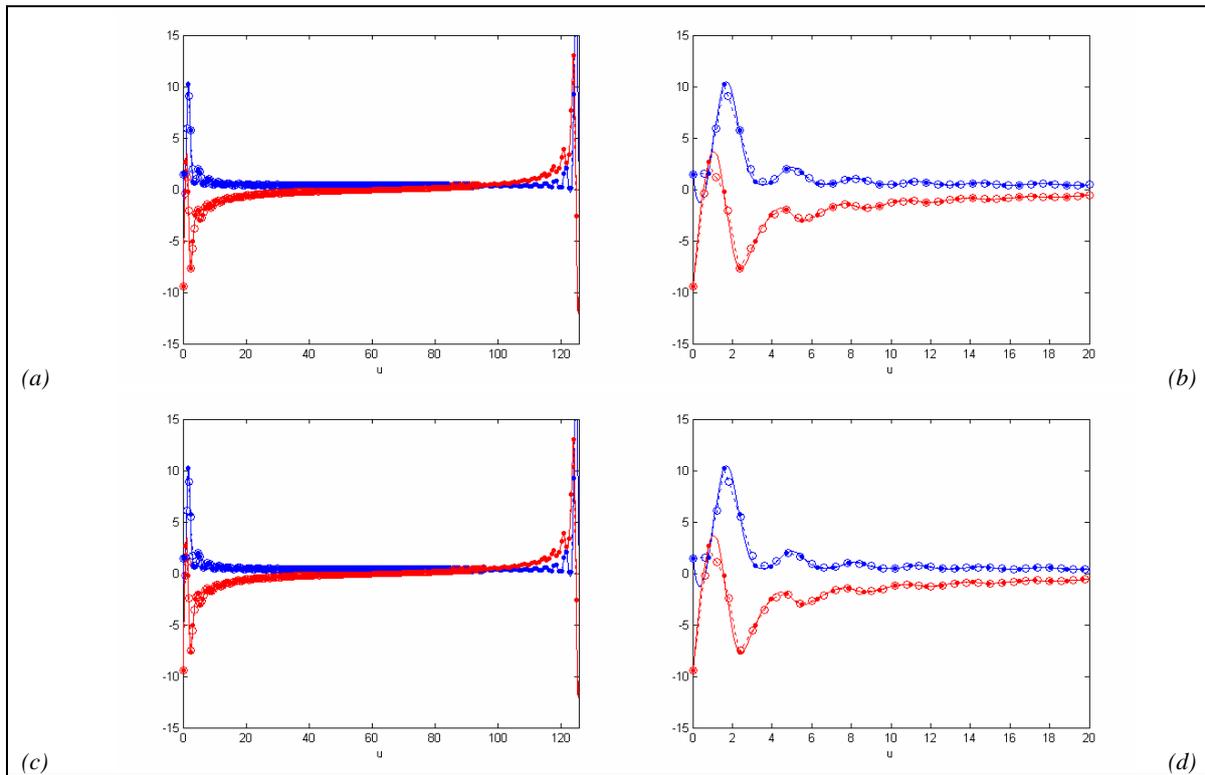


Figura 5–2-3: Interpolación en la transformada de Fourier directa mediante interpolación lineal, Ejemplo I.

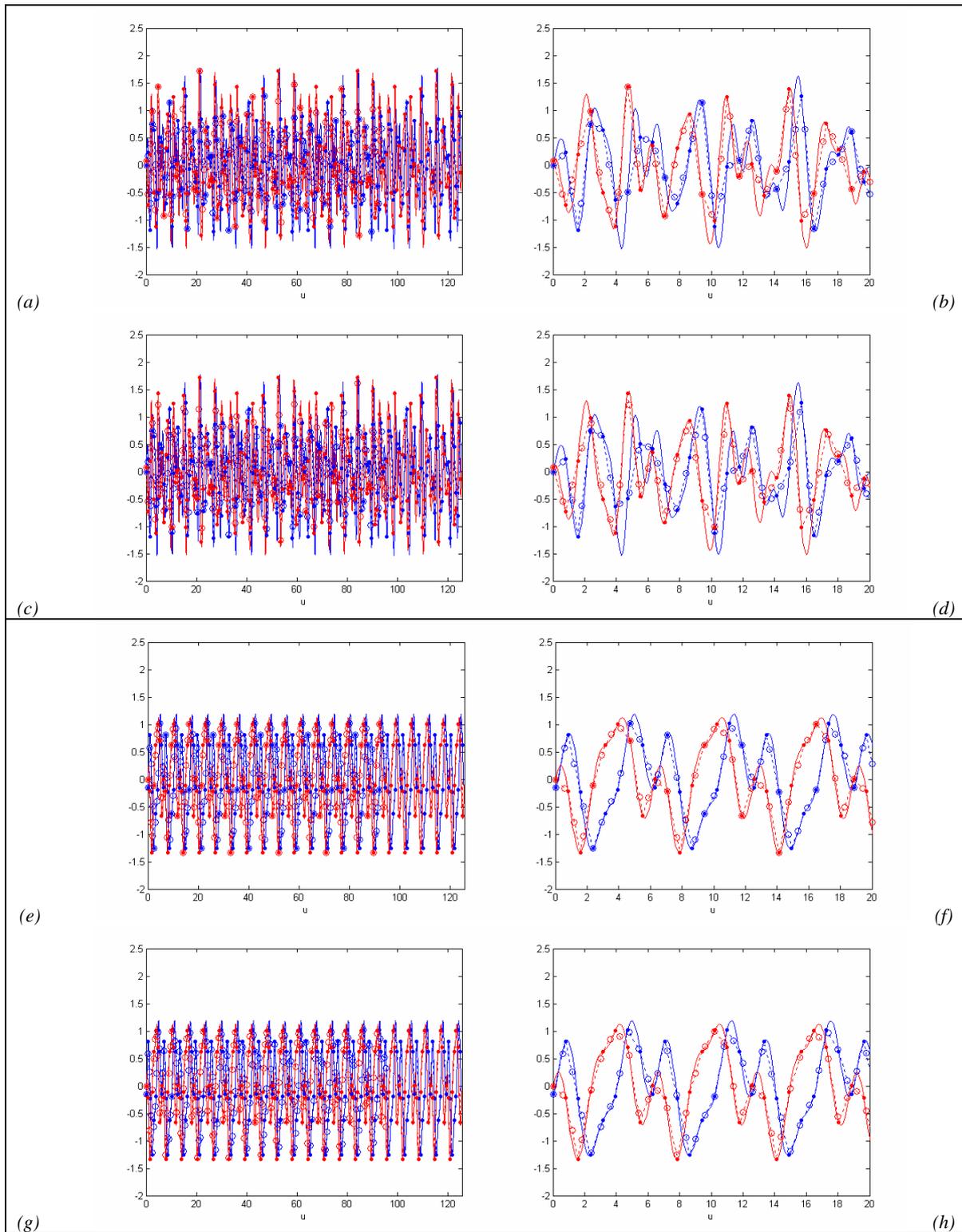


Figura 5-2-4: Interpolación en la transformada de Fourier directa mediante interpolación lineal, ejemplos II y III.

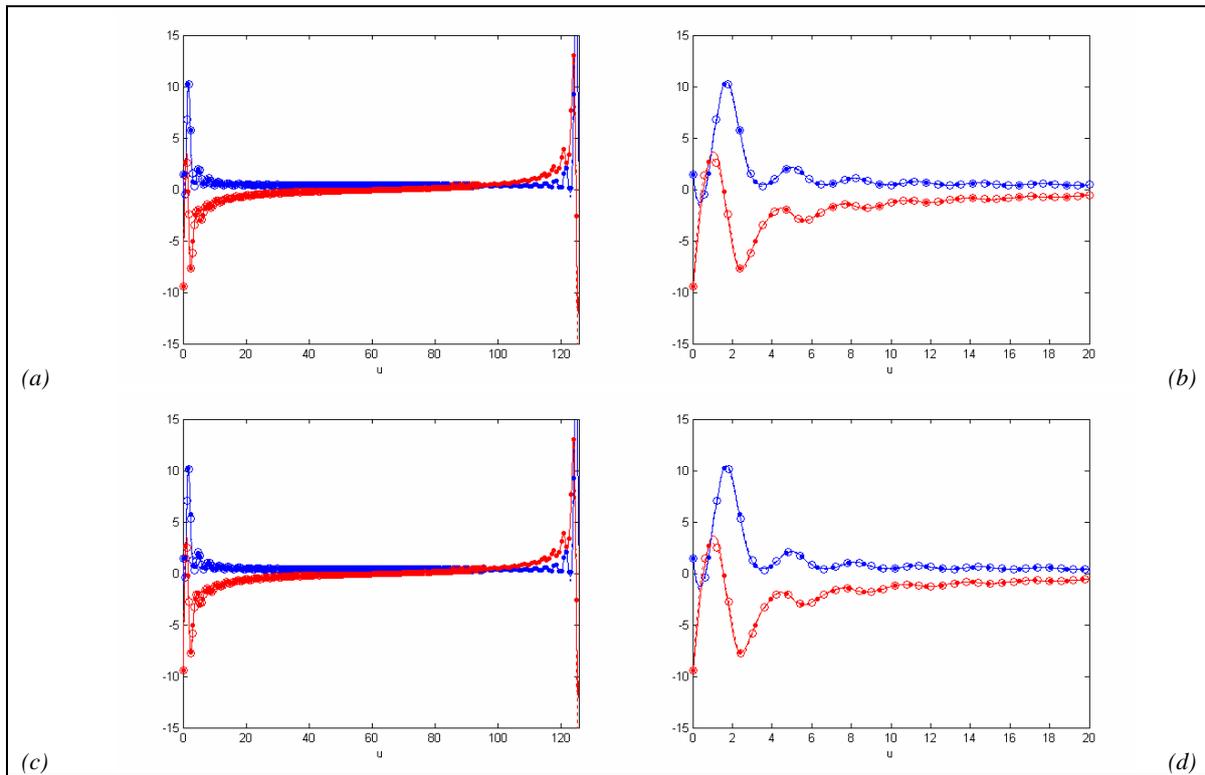


Figura 5-2-5: Interpolación en la transformada de Fourier directa mediante splines cúbicos, Ejemplo I.

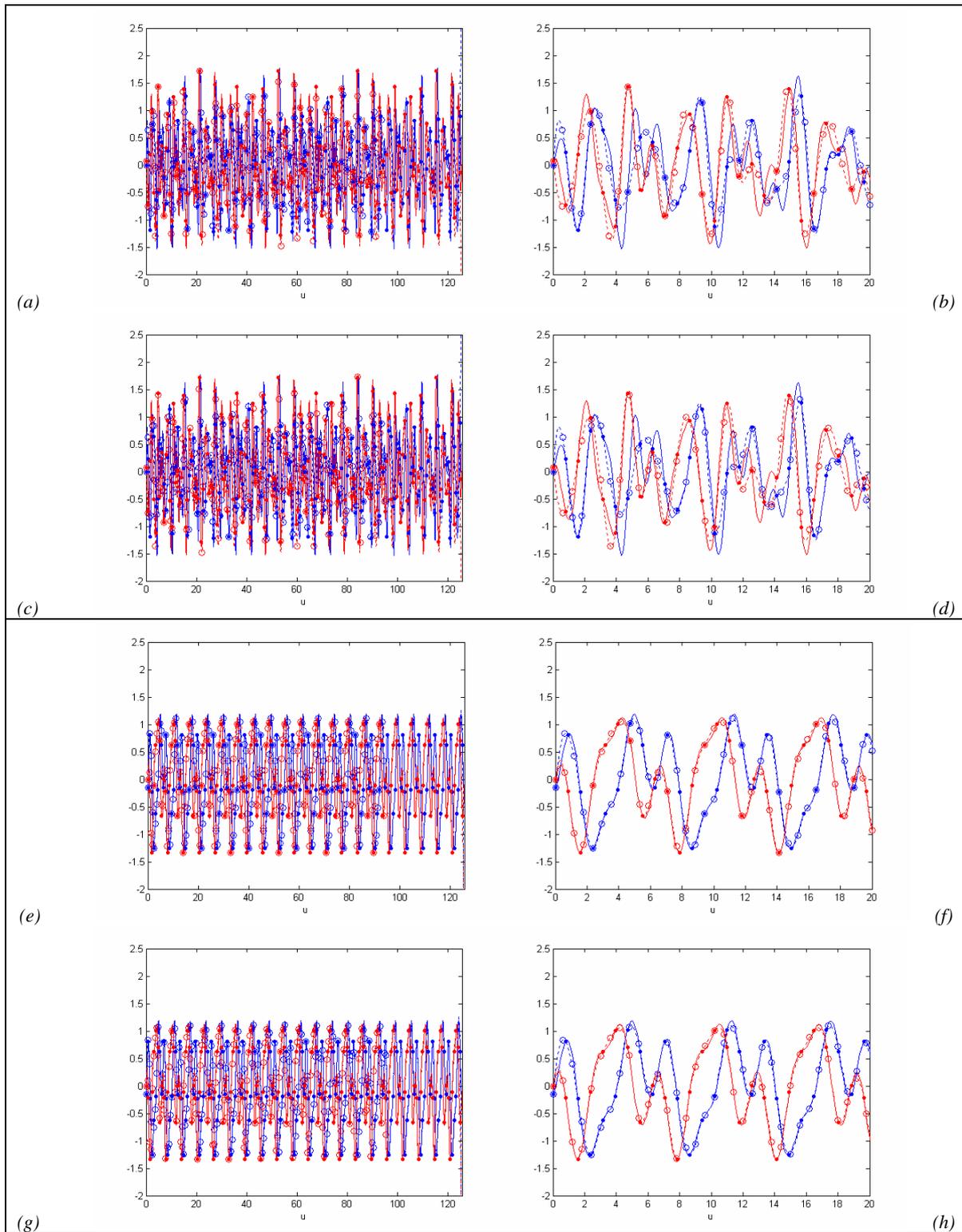


Figura 5–2-6: Interpolación en la transformada de Fourier directa mediante splines cúbicos, ejemplos II y III.

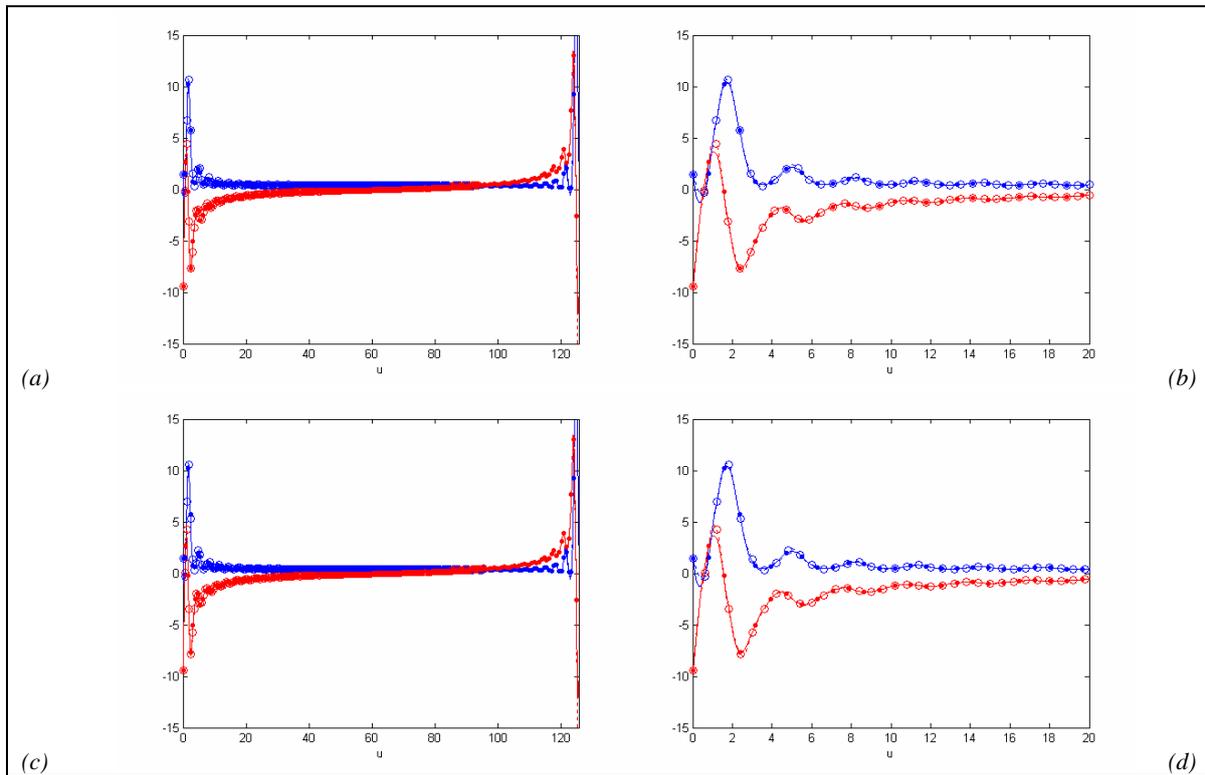


Figura 5–2-7: Interpolación en la transformada de Fourier directa mediante interpolación por polinomios de Hermite cúbicos, Ejemplo I.

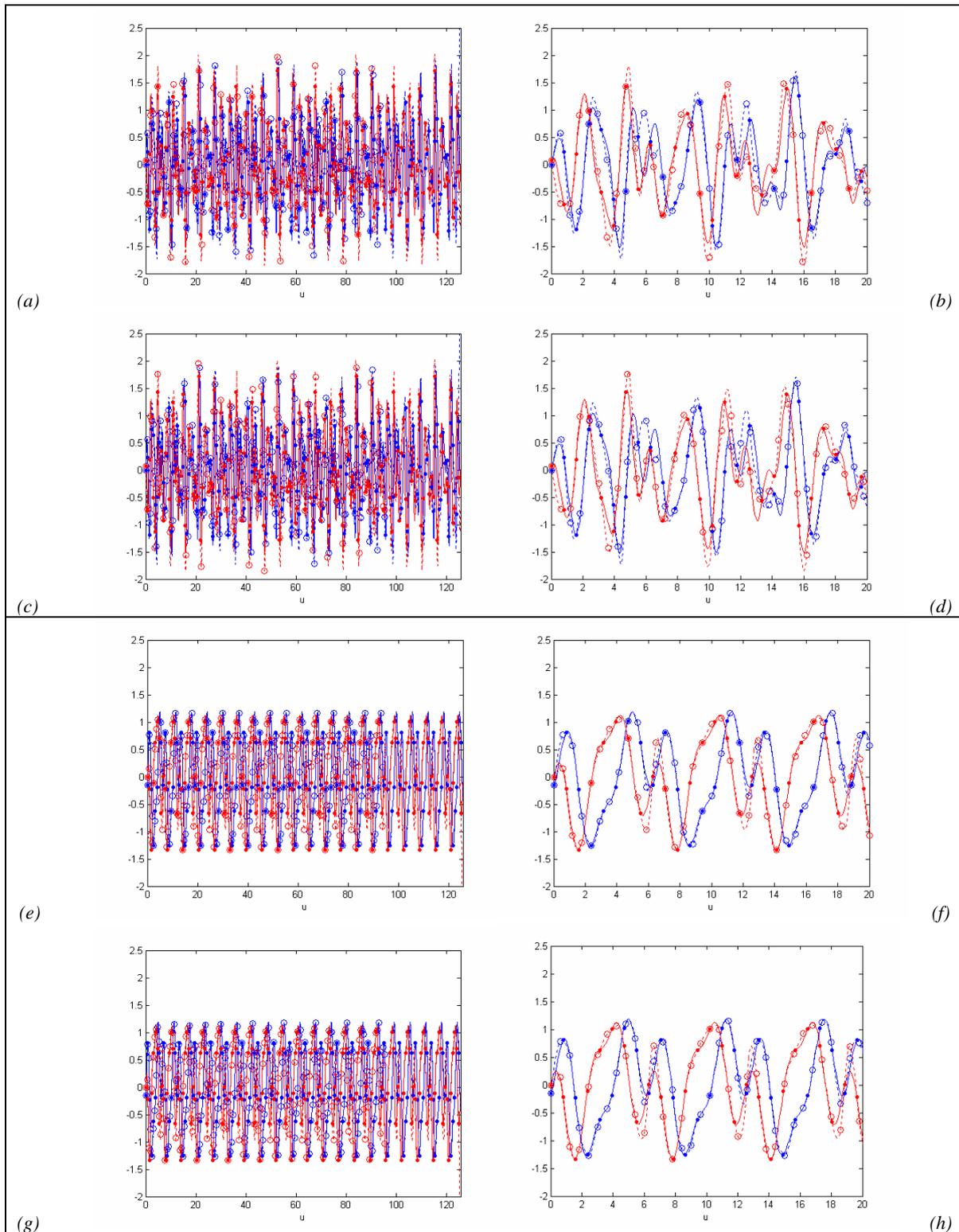


Figura 5-2-8: Interpolación en la transformada de Fourier directa mediante interpolación por polinomios de Hermite cúbicos, ejemplos II y III.

5.2.2. Interpolación en la transformada de Fourier inversa

En esta Subsección se realizan interpolaciones análogas a las expuestas en las figuras 4-4-10 a 4-4-12 de la §4.4.2.

Los resultados obtenidos se muestran en las figuras 5-2-9 a 5-2-16:

Páginas pares:

(a) Transformada de Fourier inversa $\left(\left(f_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{0,025;18}^{0,05}$ (puntos), transformada para

interpolación $\left(\left(f_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right) (x)$ (línea continua), función interpoladora

$\left(\left(f_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)' (x)$ (línea punteada) y transformada interpolada

$\left(\left(f_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{\frac{3}{4}0,025;1\frac{3}{4}8}^{\frac{3}{4}0,05}$ (círculos), y (b) detalle.

(c) Transformada de Fourier inversa $\left(\left(f_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{0,025;18}^{0,05}$ (puntos), transformada para

interpolación $\left(\left(f_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right) (x)$ (línea continua), función interpoladora

$\left(\left(f_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)' (x)$ (línea punteada) y transformada interpolada

$\left(\left(f_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{0,018;15,760}^{0,036}$ (círculos), y (d) detalle.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria

Páginas impares:

(a) Transformada de Fourier inversa $\left(\left(g_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{0,025;18}^{0,05}$ (puntos), transformada para

interpolación $\left(\left(g_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right) (x)$ (línea continua), función interpoladora

$\left(\left(g_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)' (x)$ (línea punteada) y transformada interpolada

$\left(\left(g_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{\frac{3}{4}0,025;1\frac{3}{8}}'^{\frac{3}{4}0,05}$ (círculos), y (b) detalle.

(c) Transformada de Fourier inversa $\left(\left(g_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{0,025;18}^{0,05}$ (puntos), transformada para

interpolación $\left(\left(g_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right) (x)$ (línea continua), función interpoladora

$\left(\left(g_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)' (x)$ (línea punteada) y transformada interpolada

$\left(\left(g_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{0,018;15,760}'^{0,036}$ (círculos), y (d) detalle.

(e) Transformada de Fourier inversa $\left(\left(k_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{0,025;18}^{0,05}$ (puntos), transformada para

interpolación $\left(\left(k_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right) (x)$ (línea continua), función interpoladora

$\left(\left(k_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)' (x)$ (línea punteada) y transformada interpolada

$\left(\left(k_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{\frac{3}{4}0,025;1\frac{3}{8}}'^{\frac{3}{4}0,05}$ (círculos), y (f) detalle.

(g) Transformada de Fourier inversa $\left(\left(K_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{0,025;18}^{0,05}$ (puntos), transformada para

interpolación $\left(\left(K_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right) (x)$ (línea continua), función interpoladora

$\left(\left(K_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)' (x)$ (línea punteada) y transformada interpolada

$\left(\left(K_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\pi/8;140\pi}^{\pi/4} \right)_{0,018;15,760}'^{0,036}$ (círculos), y (h) detalle.

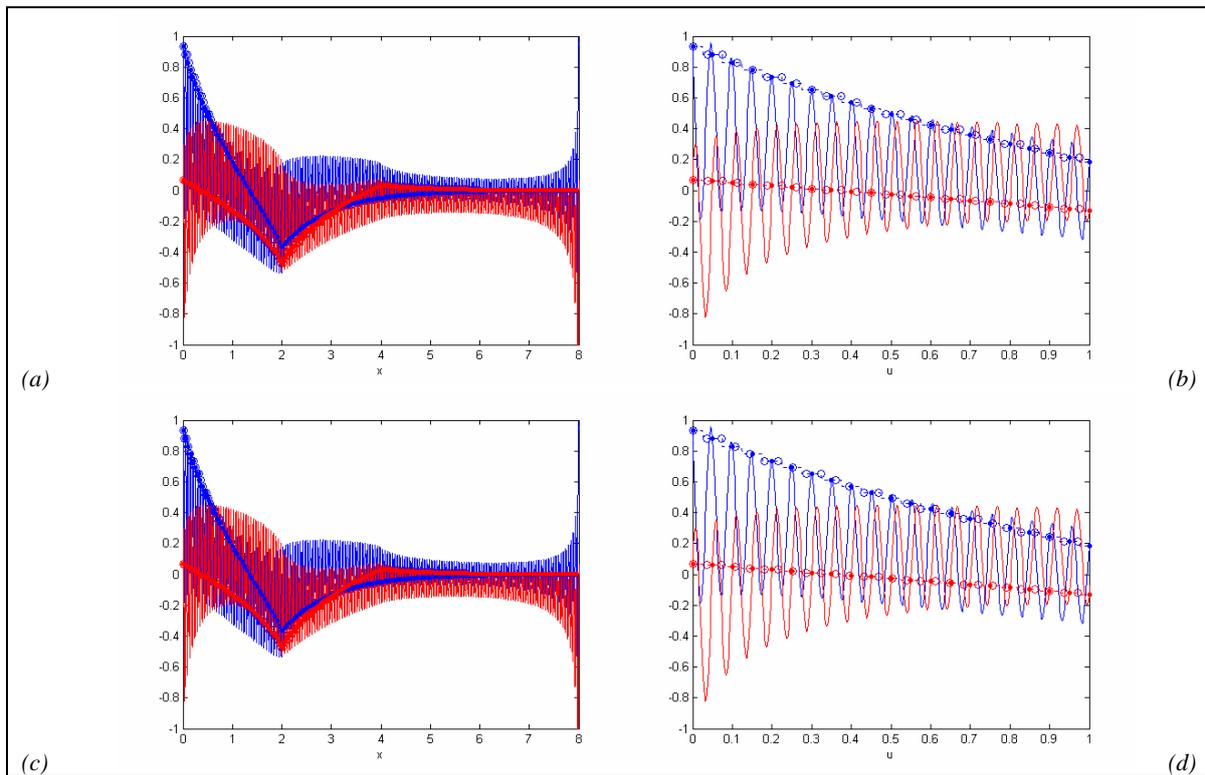


Figura 5-2-9: Interpolación en la transformada de Fourier inversa mediante el método de vecinos más próximos, Ejemplo I.

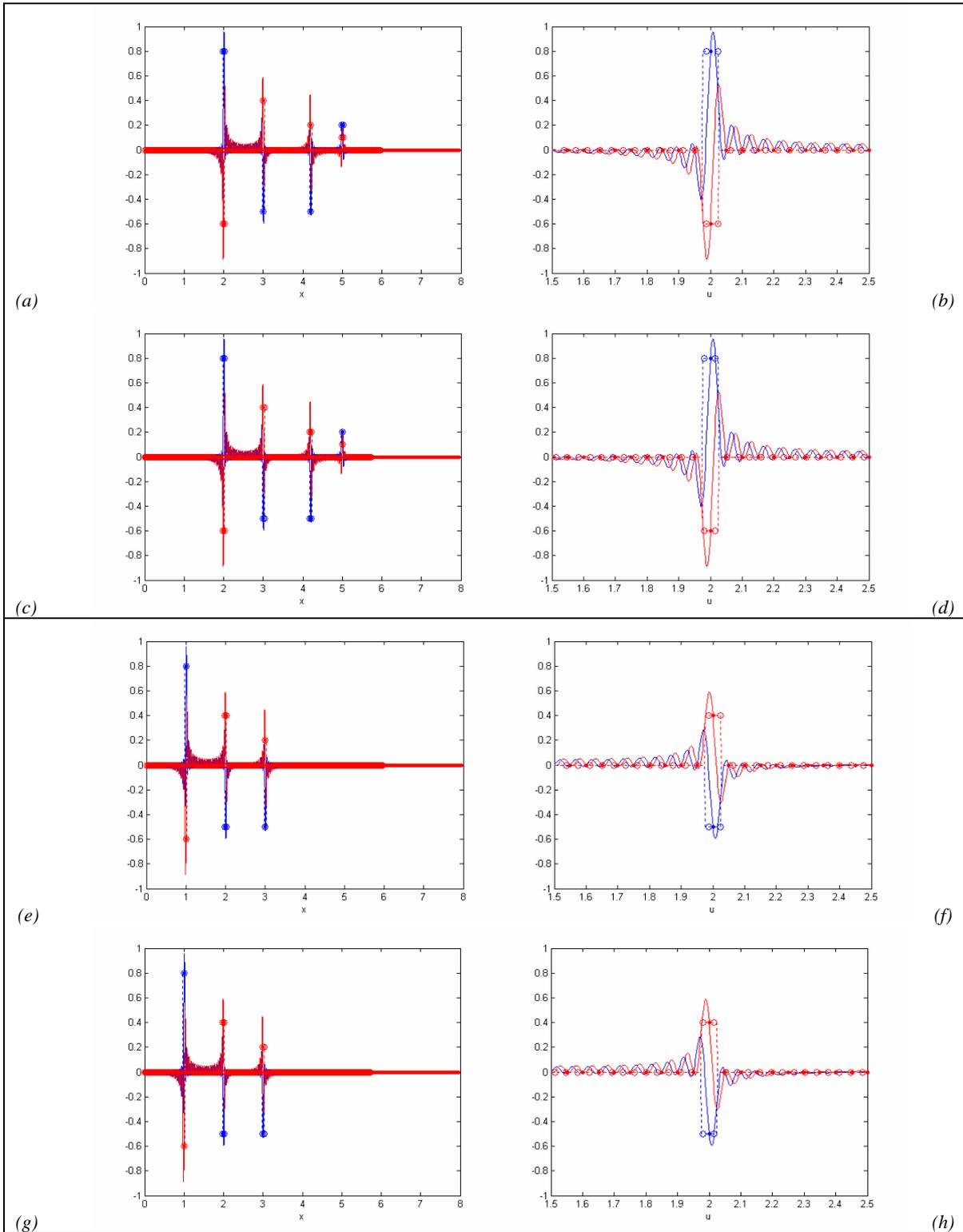


Figura 5–2-10: Interpolación en la transformada de Fourier inversa mediante el método de vecinos más próximos, ejemplos II y III.

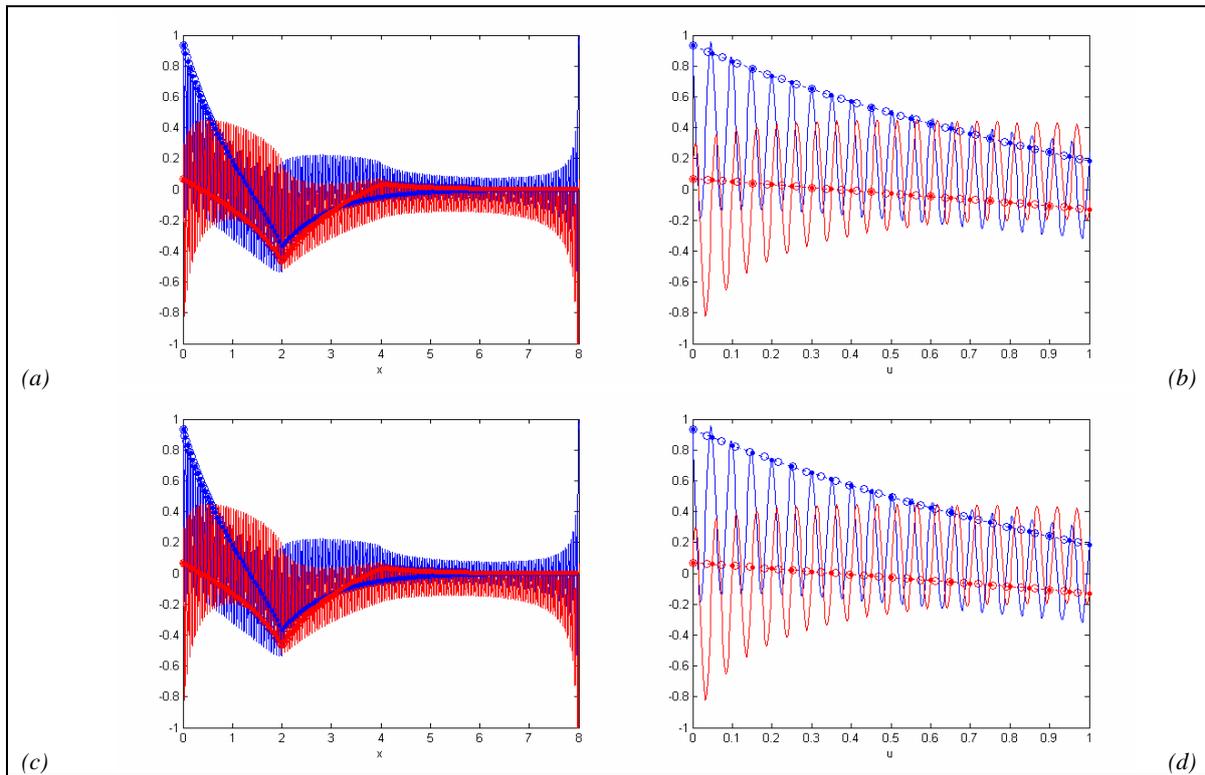


Figura 5–2-11: Interpolación en la transformada de Fourier inversa mediante interpolación lineal, Ejemplo I.

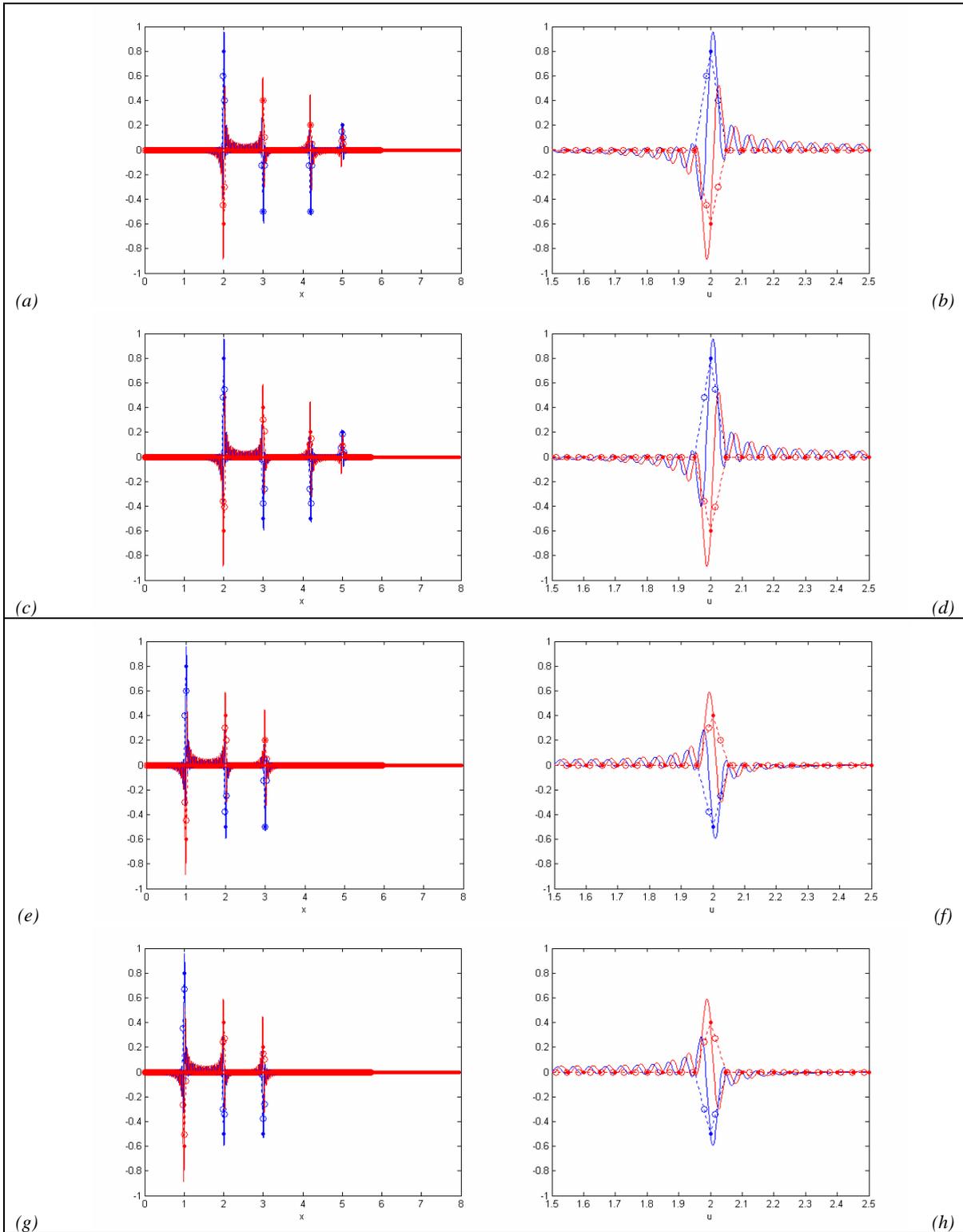


Figura 5-2-12: Interpolación en la transformada de Fourier inversa mediante interpolación lineal, ejemplos II y III.

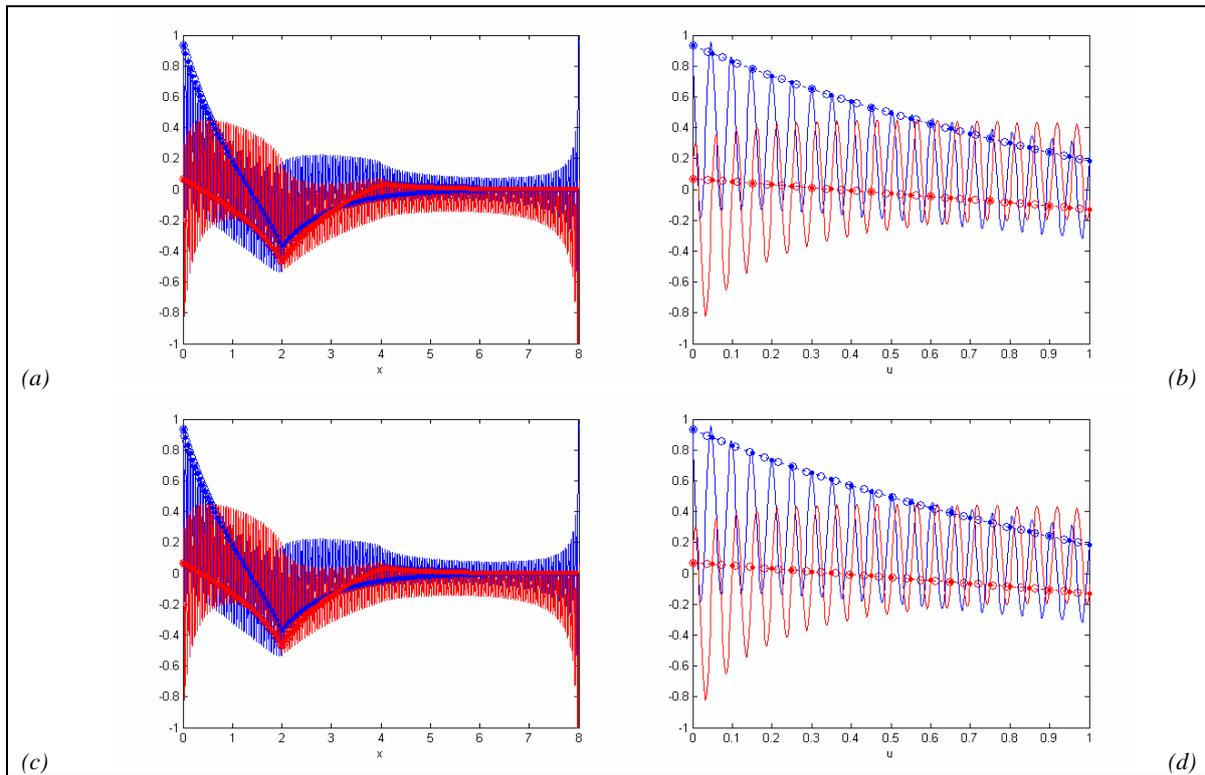


Figura 5–2-13: Interpolación en la transformada de Fourier inversa mediante splines cúbicos, Ejemplo I.

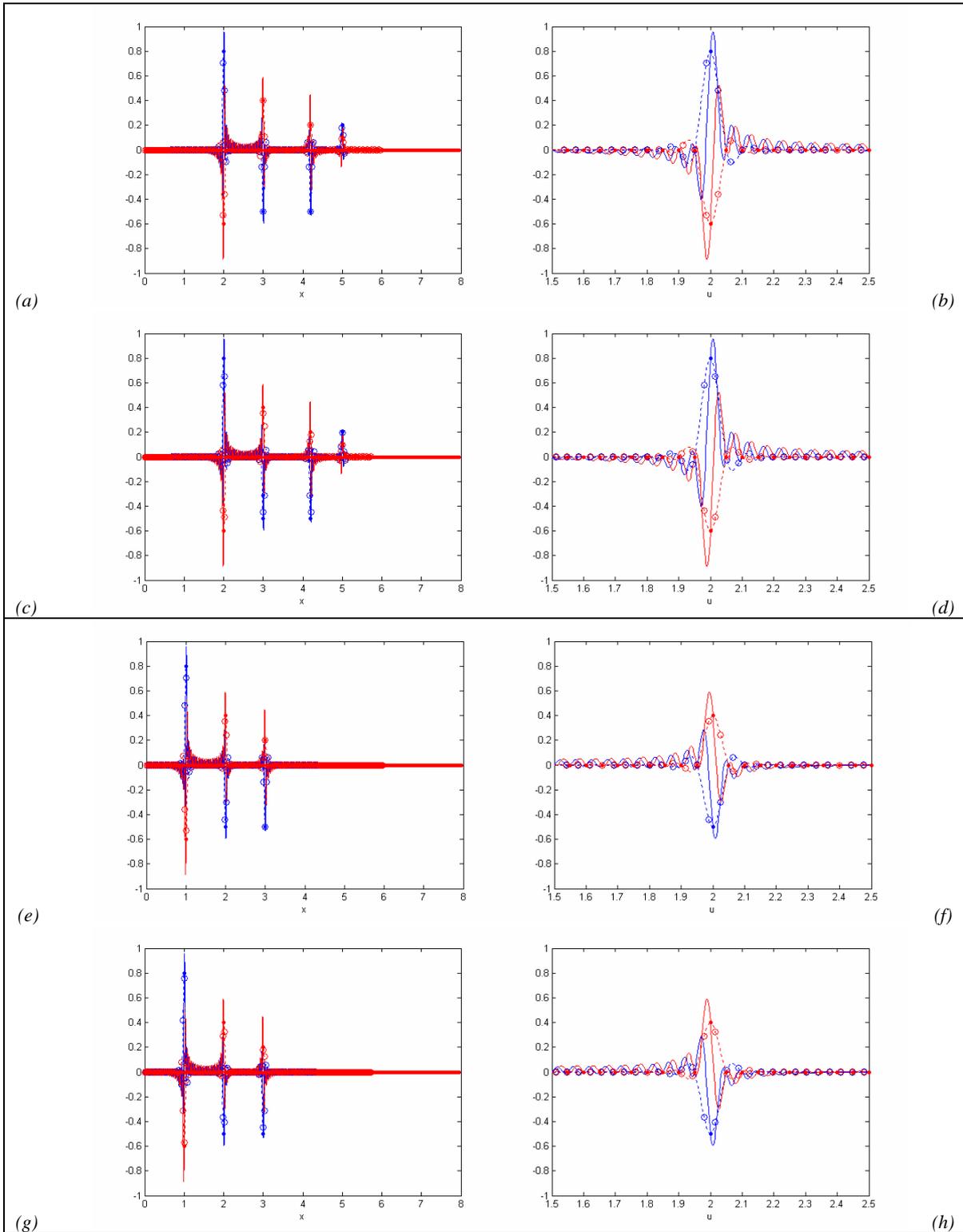


Figura 5-2-14: Interpolación en la transformada de Fourier inversa mediante splines cúbicos, ejemplos II y III.

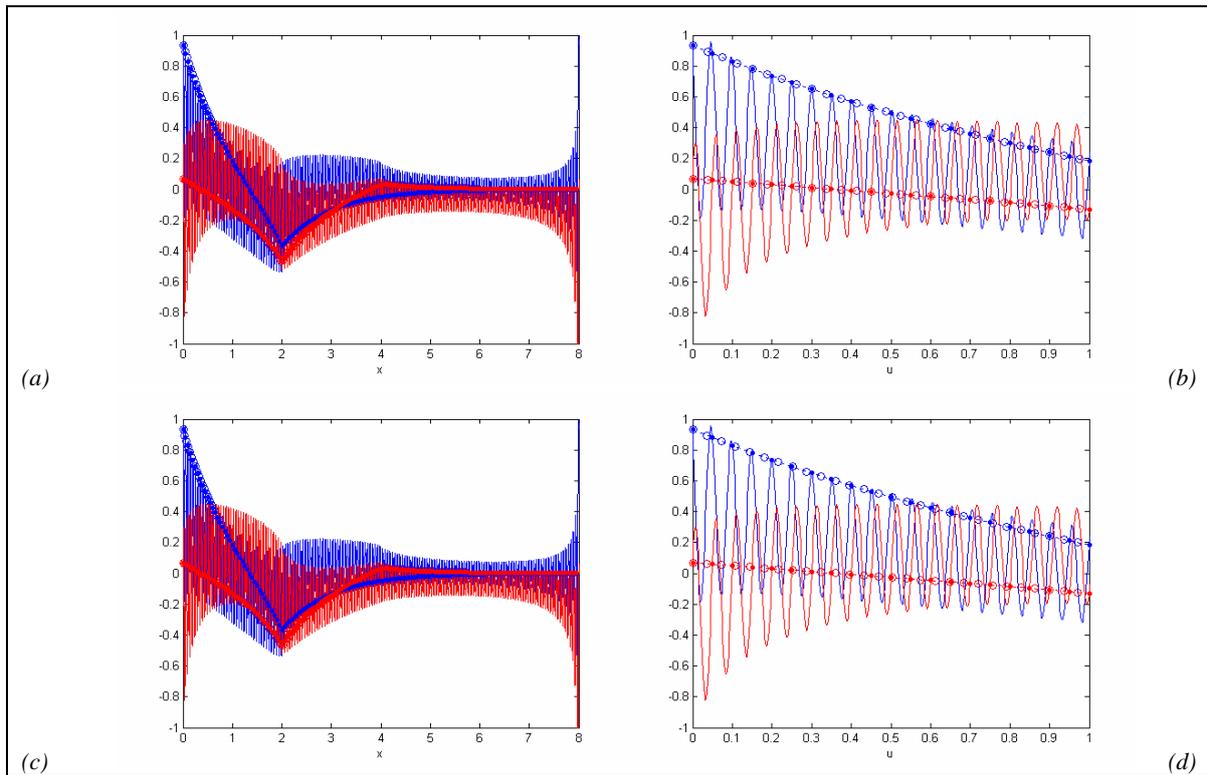


Figura 5–2-15: Interpolación en la transformada de Fourier inversa mediante interpolación por polinomios de Hermite cúbicos, Ejemplo I.

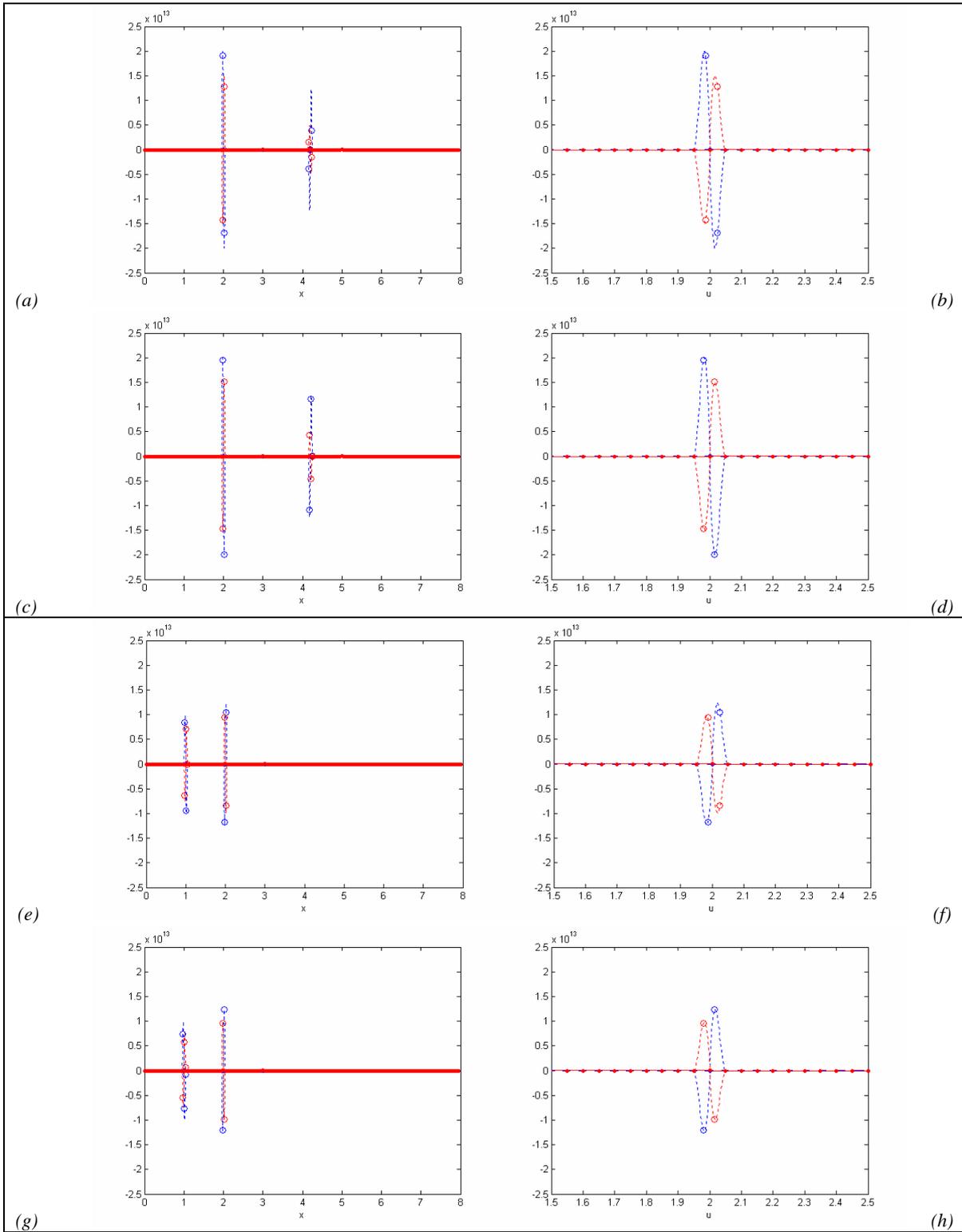


Figura 5-2-16: Interpolación en la transformada de Fourier inversa mediante interpolación por polinomios de Hermite cúbicos, ejemplos II y III.

5.3. Relaciones entre las transformadas directa e inversa interpoladas y la función original

En esta Sección se estudian las relaciones entre las transformadas directa e inversa interpoladas mediante métodos generales y la función original, así como la relación entre la NUIFFT de la transformada directa interpolada y la función original.

5.3.1. Relación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada mediante técnicas generales y la función original

En esta Subsección se realizan las transformaciones análogas a las expuestas en las figuras 4-5-4 a 4-5-8 de la §4.5.2 para la comparación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada y la función original.

Los resultados obtenidos se muestran en las figuras 5-3-1 a 5-3-8:

Páginas pares:

(a) Función f (líneas) y valores de la transformada inversa de la transformada directa

$$\text{interpolada} \left(\frac{8}{32/3} \right)^2 \cdot \left(\left(f_{0,025;18}^{*0,05} \right)'_{\frac{3}{4}\pi/4; \frac{3}{4}\pi/8; 1_{\frac{3}{4}40\pi}} \right)_{1/30; 1_{32/3}}^{2/30} \quad (\text{círculos}) \text{ en el intervalo}$$

$(-0,025; 7,975)$.

(b) Función f (líneas) y valores de la transformada inversa de la transformada directa

$$\text{interpolada} \left(\frac{8}{32/3} \right)^2 \cdot \left(\left(f_{0,025;18}^{*0,05} \right)'_{0,3; 1_{96,0}} \right)_{\pi/96; 1_{4\pi/3}}^{2\pi/96} \quad (\text{círculos}) \text{ en el intervalo}$$

$(-0,025; 7,975)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.

Páginas impares:

(a) Función g (puntos) y valores de la transformada inversa de la transformada directa

$$\text{interpolada} \left(\frac{8}{32/3} \right)^2 \cdot \left(\left(g_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1_{\frac{3}{4}40\pi}}^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{1/30; 1_{32/3}}^{2/30} \quad (\text{círculos en el intervalo} \\ (-0,025; 7,975).$$

(b) Función g (puntos) y valores de la transformada inversa de la transformada directa

$$\text{interpolada} \left(\frac{8}{32/3} \right) \cdot \left(\left(g_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1_{\frac{3}{4}40\pi}}^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{1/30; 1_{32/3}}^{2/30} \quad (\text{círculos en el intervalo} \\ (-0,025; 7,975).$$

(c) Función g (puntos) y valores de la transformada inversa de la transformada directa

$$\text{interpolada} \left(\frac{8}{32/3} \right)^2 \cdot \left(\left(g_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{0,3; 1_{96,0}}^{0,6} \right)_{\pi/96; 1_{4\pi/3}}^{2\pi/96} \quad (\text{círculos en el intervalo} \\ (-0,025; 7,975).$$

(d) Función g (puntos) y valores de la transformada inversa de la transformada directa

$$\text{interpolada} \left(\frac{8}{32/3} \right) \cdot \left(\left(g_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{0,3; 1_{96,0}}^{0,6} \right)_{\pi/96; 1_{4\pi/3}}^{2\pi/96} \quad (\text{círculos en el intervalo} \\ (-0,025; 7,975).$$

(e) Función k (puntos) y valores de la transformada inversa de la transformada directa

$$\text{interpolada} \left(\frac{8}{32/3} \right)^2 \cdot \left(\left(k_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1_{\frac{3}{4}40\pi}}^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{1/30; 1_{32/3}}^{2/30} \quad (\text{círculos en el intervalo} \\ (-0,025; 7,975).$$

(f) Función k (puntos) y valores de la transformada inversa de la transformada directa

$$\text{interpolada} \left(\frac{8}{32/3} \right) \cdot \left(\left(k_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1_{\frac{3}{4}40\pi}}^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{1/30; 1_{32/3}}^{2/30} \quad (\text{círculos en el intervalo} \\ (-0,025; 7,975).$$

(g) Función k (puntos) y valores de la transformada inversa de la transformada directa

$$\text{interpolada} \left(\frac{8}{32/3} \right)^2 \cdot \left(\left(k_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{0,3; 1_{96,0}}^{0,6} \right)_{\pi/96; 1_{4\pi/3}}^{2\pi/96} \quad (\text{círculos en el intervalo} \\ (-0,025; 7,975).$$

(h) Función k (puntos) y valores de la transformada inversa de la transformada directa

$$\text{interpolada} \left(\frac{8}{32/3} \right) \cdot \left(\left(k_{0,025;18}^{*0,05} \right)_{0,3; 1_{96,0}}^{0,6} \right)_{\pi/96; 1_{4\pi/3}}^{2\pi/96} \quad (\text{círculos en el intervalo} \\ (-0,025; 7,975).$$

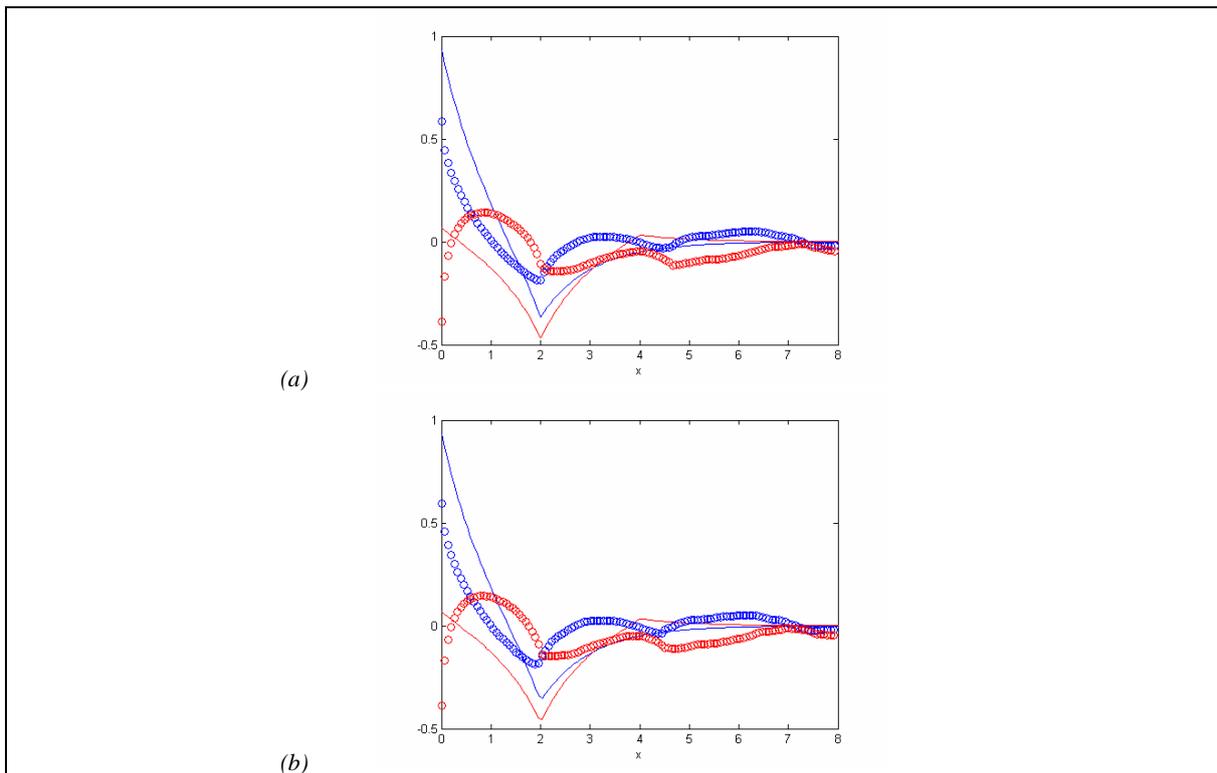


Figura 5-3-1: Relación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada mediante el método de vecinos más próximos y la función original, Ejemplo I.

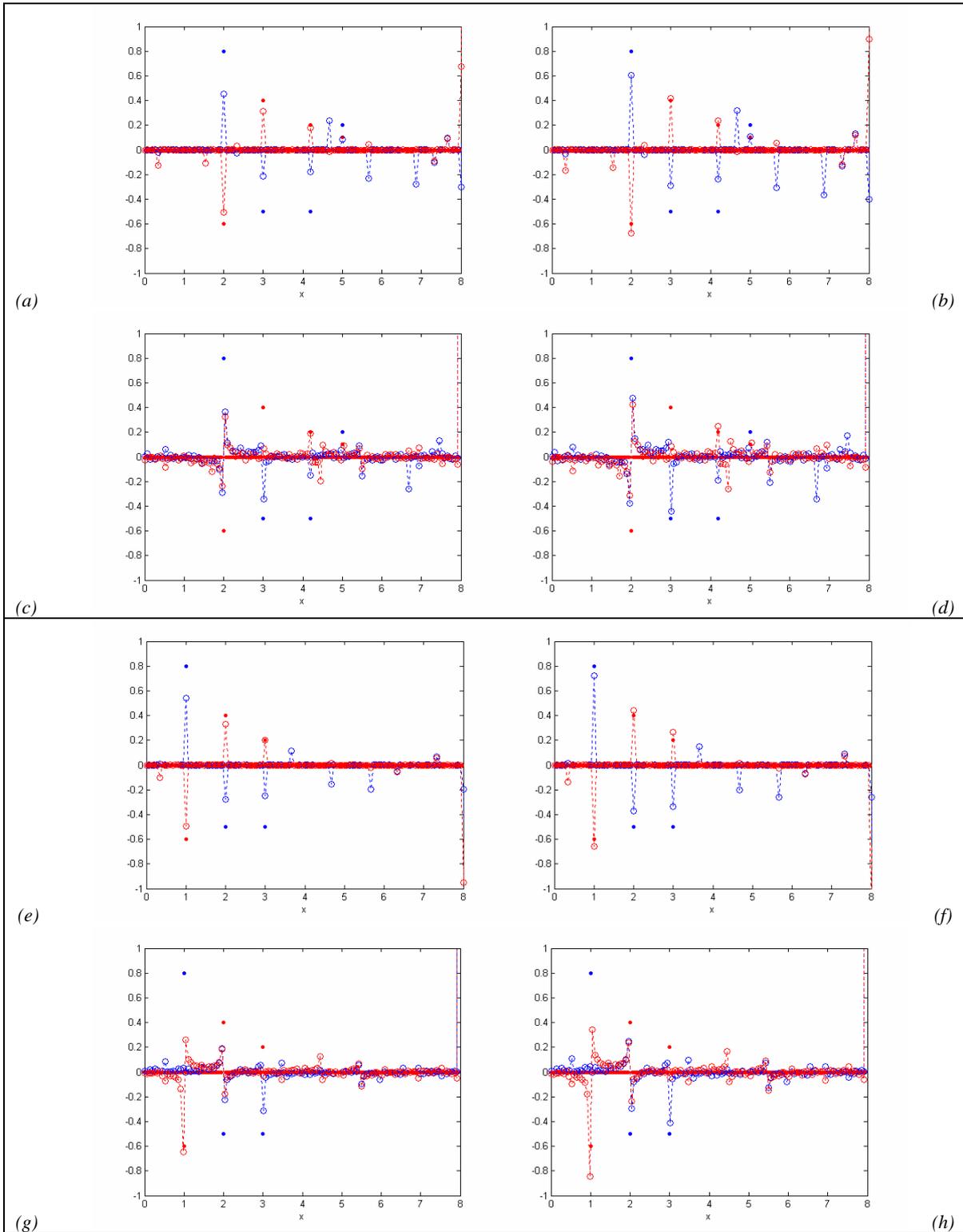


Figura 5-3-2: Relación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada mediante el método de vecinos más próximos y la función original, ejemplos II y III.

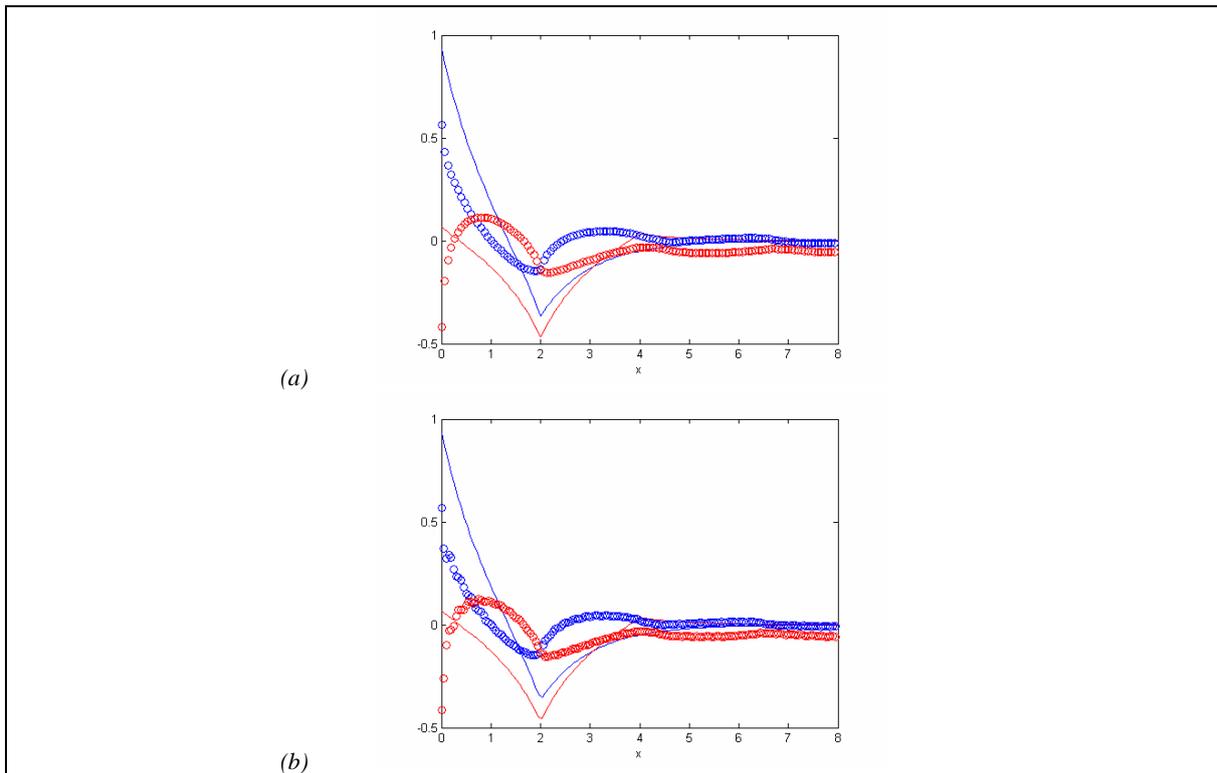


Figura 5-3-3: Relación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada mediante interpolación lineal y la función original, Ejemplo I.

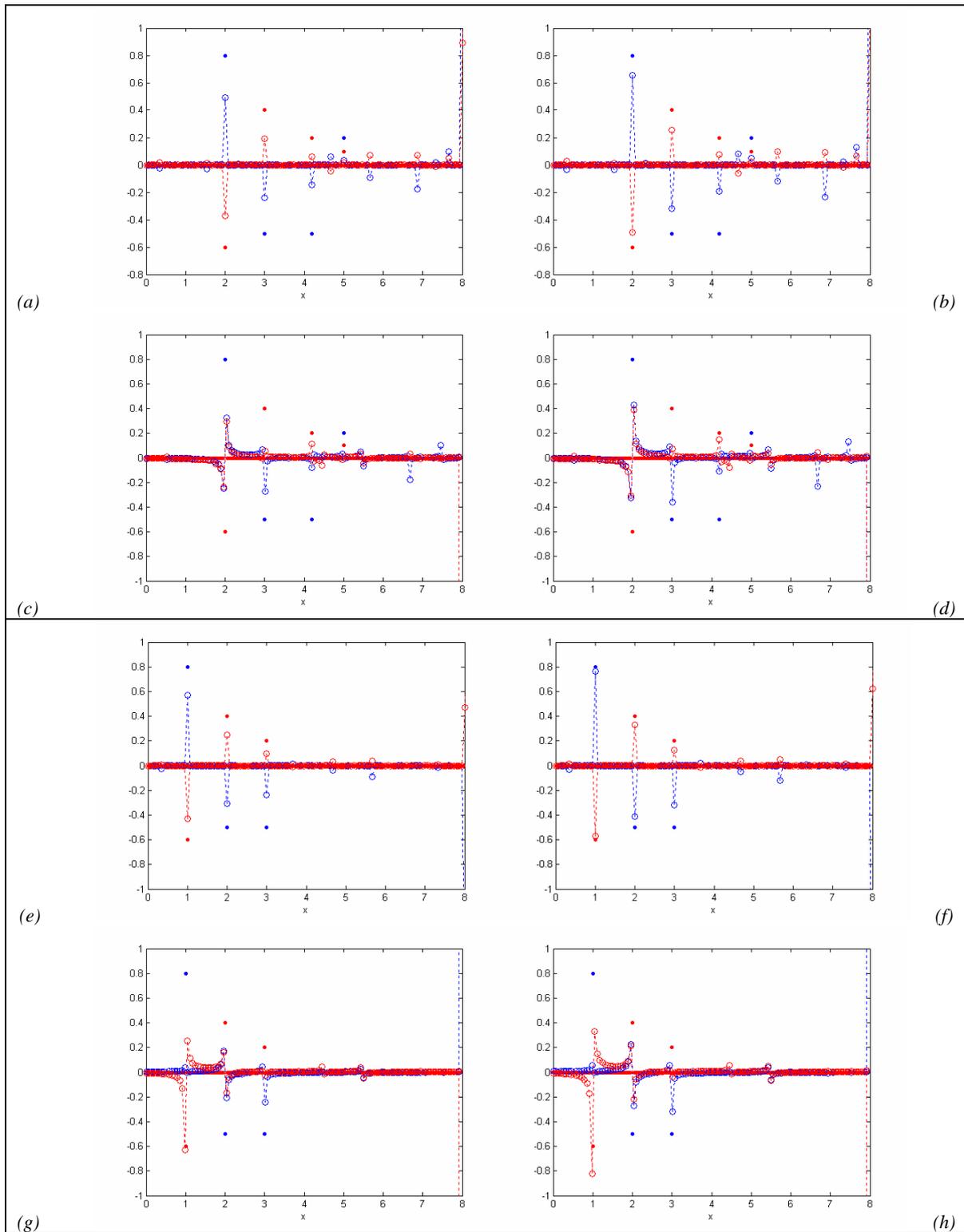


Figura 5-3-4: Relación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada mediante interpolación lineal y la función original, ejemplos II y III.

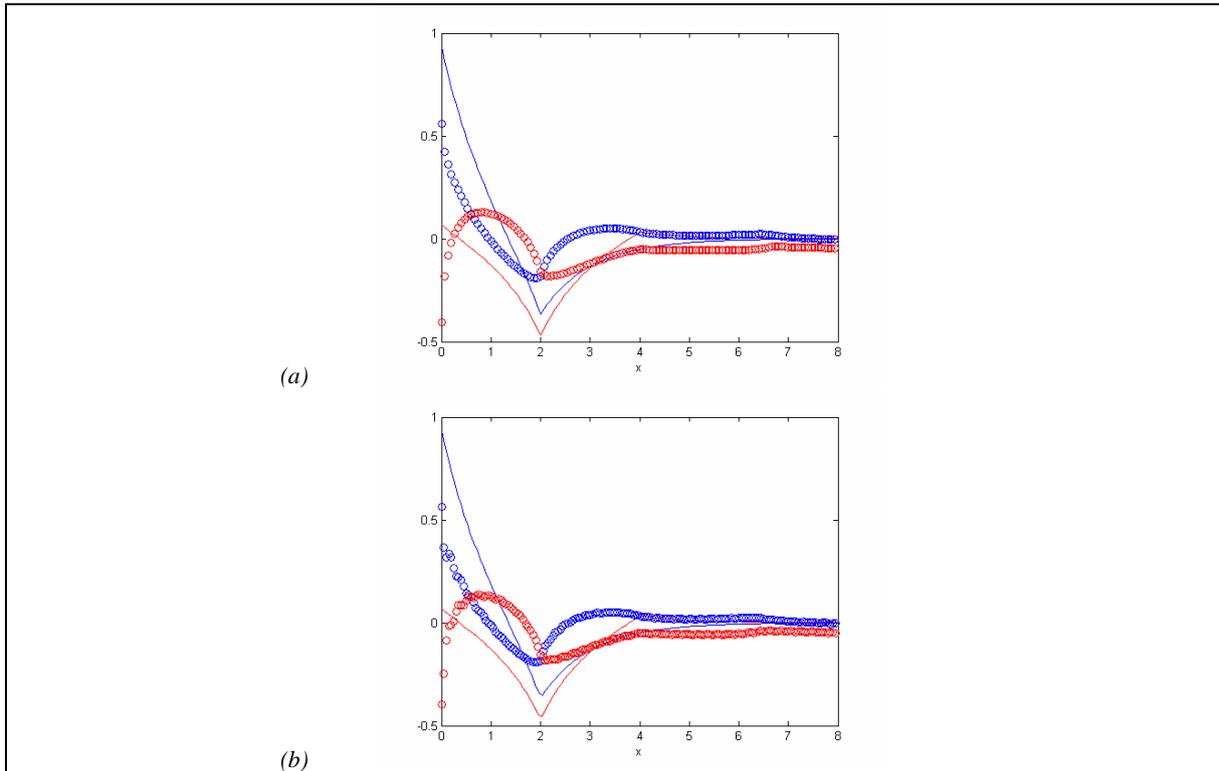


Figura 5-3-5: Relación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada mediante splines cúbicos y la función original, Ejemplo I.

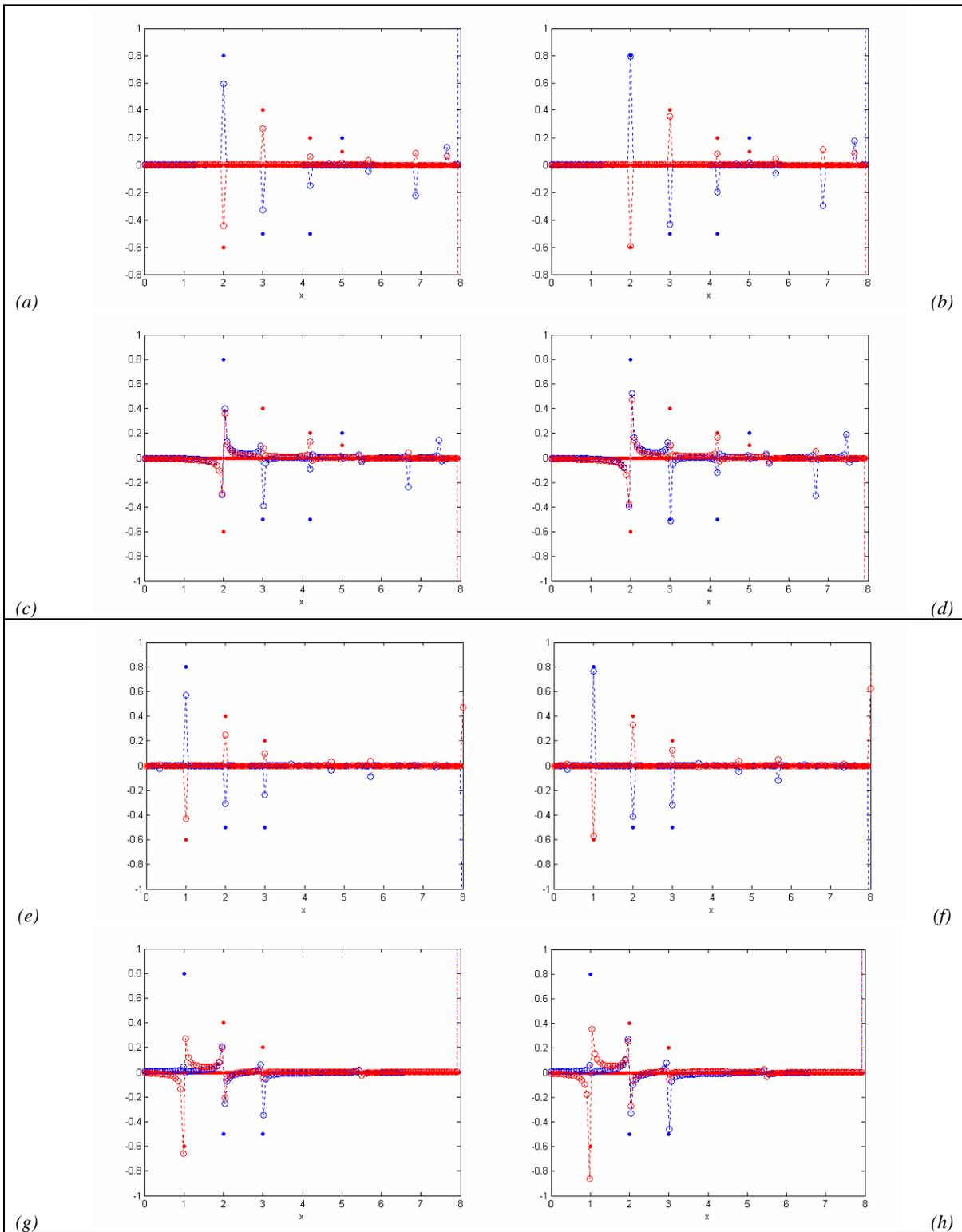


Figura 5-3-6: Relación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada mediante splines cúbicos y la función original, ejemplos II y III.

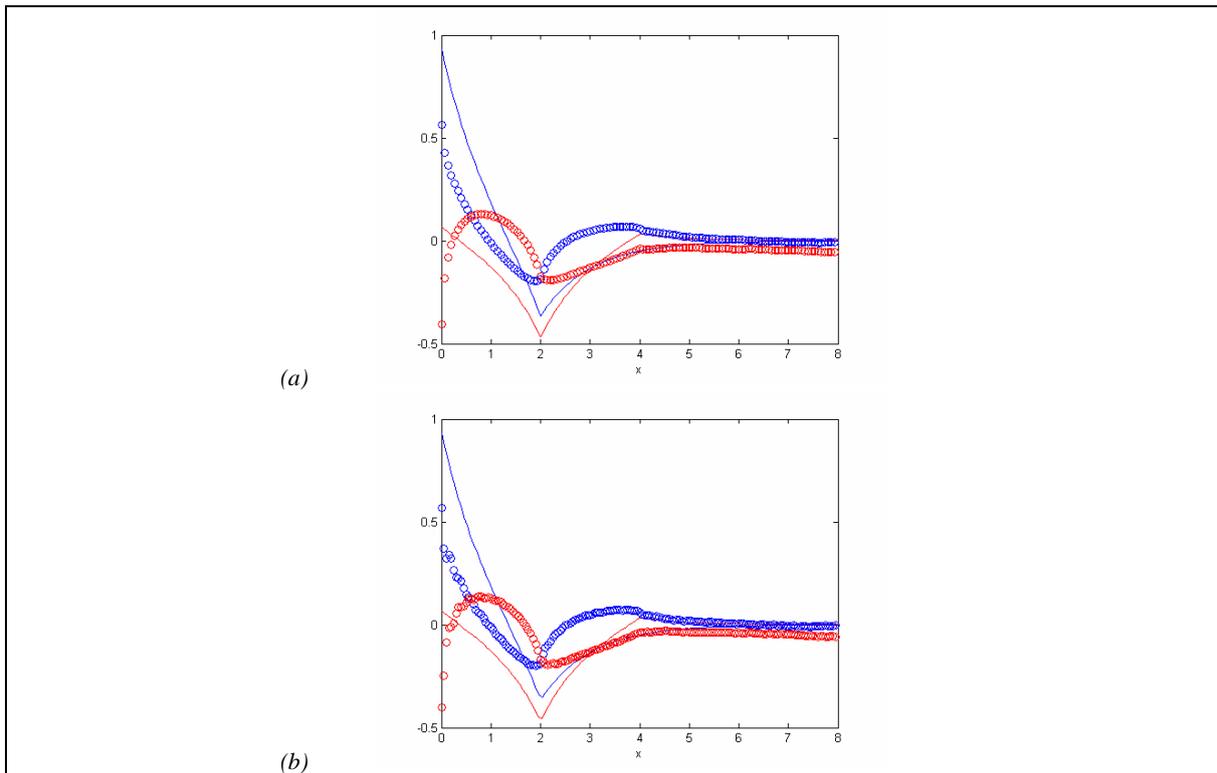


Figura 5–3-7: Relación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada por polinomios de Hermite cúbicos y la función original, Ejemplo I.

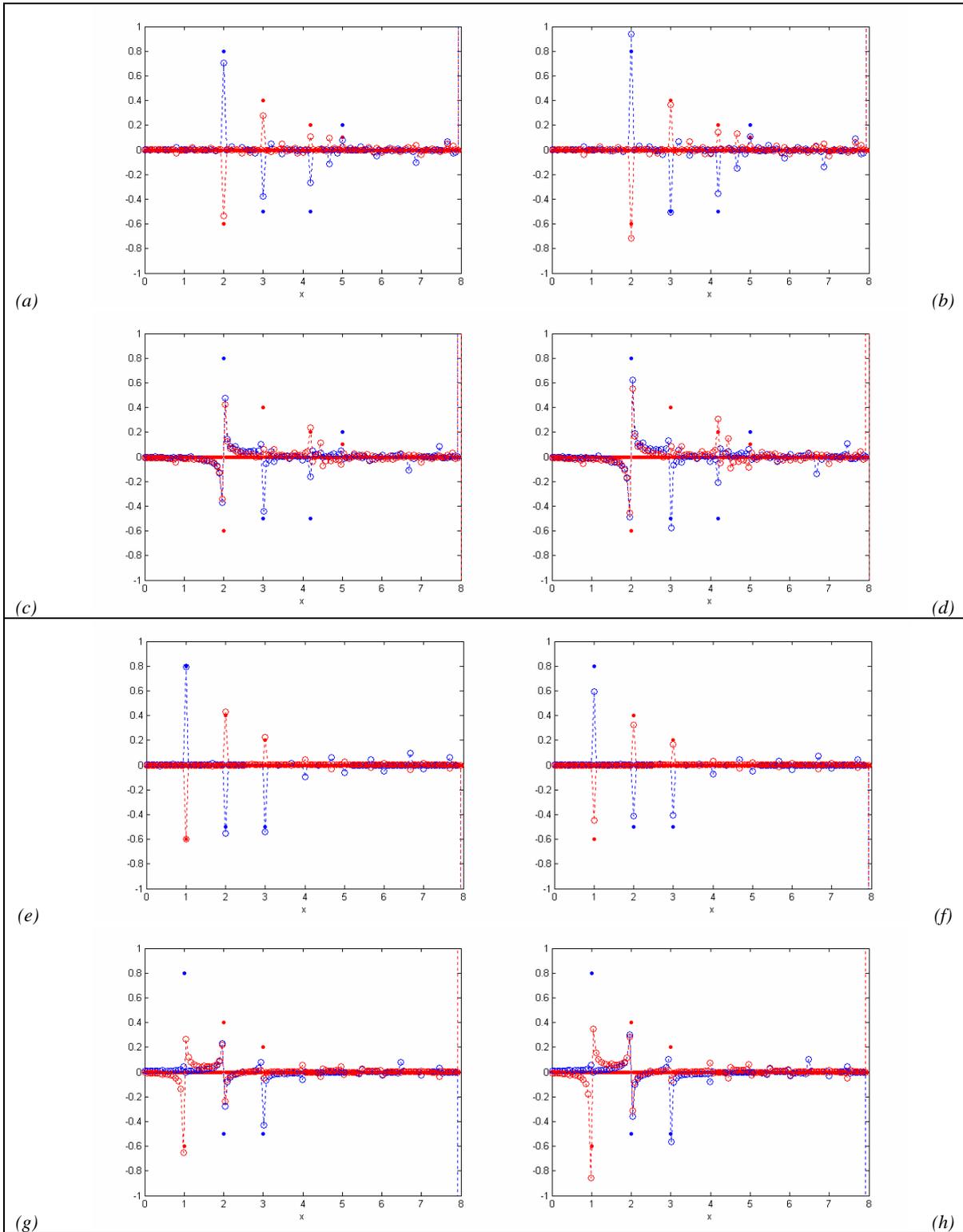


Figura 5-3-8: Relación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada por polinomios de Hermite cúbicos y la función original, ejemplos II y III.

5.3.2. Relación entre la interpolación mediante técnicas generales de la transformada inversa de la transformada directa interpolada y la función original

En esta Subsección se realizan las transformaciones análogas a las expuestas en las figuras 4-5-9 a 4-5-13 de la §4.5.3 para la comparación entre la interpolación de la transformada inversa de la transformada directa interpolada y la función original.

Los resultados obtenidos se muestran en las figuras 5-3-9 a 5-3-16:

Páginas pares:

(a) Función f (líneas) y valores de la interpolación de la transformada inversa de la

transformada directa interpolada $\left(\frac{8}{32/3}\right)^2 \cdot \left((f_{0,025;1_8}^*)^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1_{\frac{3}{4}40\pi}}^{0,05}$ (círculos) en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

(b) Función f (líneas) y valores de la interpolación de la transformada inversa de la

transformada directa interpolada $\left(\frac{8}{32/3}\right)^2 \cdot \left((f_{0,025;1_8}^*)^{0,6} \right)_{0,3; 1_{96,0}}^{0,05}$ (círculos) en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

En todos los casos se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.

Páginas impares:

(a) Función g (puntos) y valores de la interpolación de la transformada inversa de la

transformada directa interpolada $\left(\frac{8}{32/3}\right)^2 \cdot \left(\left(g_{0,025;1_8}^{*0,05} \right)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1_{\frac{3}{4}40\pi}}^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{0,025;1_8}'^{0,05}$ (círculos) en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

(b) Función g (puntos) y valores de la interpolación de la transformada inversa de la

transformada directa interpolada $\left(\frac{8}{32/3}\right) \cdot \left(\left(g_{0,025;1_8}^{*0,05} \right)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1_{\frac{3}{4}40\pi}}^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{0,025;1_8}'^{0,05}$ (círculos) en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

(c) Función g (puntos) y valores de la interpolación de la transformada inversa de la

transformada directa interpolada $\left(\frac{8}{32/3}\right)^2 \cdot \left(\left(g_{0,025;1_8}^{*0,05} \right)_{0,3; 1_{96,0}}^{0,6} \right)_{0,025;1_8}'^{0,05}$ (círculos) en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

(d) Función g (puntos) y valores de la interpolación de la transformada inversa de la

transformada directa interpolada $\left(\frac{8}{32/3}\right) \cdot \left(\left(g_{0,025;1_8}^{*0,05} \right)_{0,3; 1_{96,0}}^{0,6} \right)_{0,025;1_8}'^{0,05}$ (círculos) en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

(e) Función k (puntos) y valores de la interpolación de la transformada inversa de la

transformada directa interpolada $\left(\frac{8}{32/3}\right)^2 \cdot \left(\left(k_{0,025;1_8}^{*0,05} \right)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1_{\frac{3}{4}40\pi}}^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{0,025;1_8}'^{0,05}$ (círculos) en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

(f) Función k (puntos) y valores de la interpolación de la transformada inversa de la

transformada directa interpolada $\left(\frac{8}{32/3}\right) \cdot \left(\left(k_{0,025;1_8}^{*0,05} \right)_{\frac{3}{4}\pi/8; 1_{\frac{3}{4}40\pi}}^{\frac{3}{4}\pi/4} \right)_{0,025;1_8}'^{0,05}$ (círculos) en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

(g) Función k (puntos) y valores de la interpolación de la transformada inversa de la

transformada directa interpolada $\left(\frac{8}{32/3}\right)^2 \cdot \left(\left(k_{0,025;1_8}^{*0,05} \right)_{0,3; 1_{96,0}}^{0,6} \right)_{0,025;1_8}'^{0,05}$ (círculos) en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

(h) Función k (puntos) y valores de la interpolación de la transformada inversa de la

transformada directa interpolada $\left(\frac{8}{32/3}\right) \cdot \left(\left(k_{0,025;1_8}^{*0,05} \right)_{0,3; 1_{96,0}}^{0,6} \right)_{0,025;1_8}'^{0,05}$ (círculos) en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

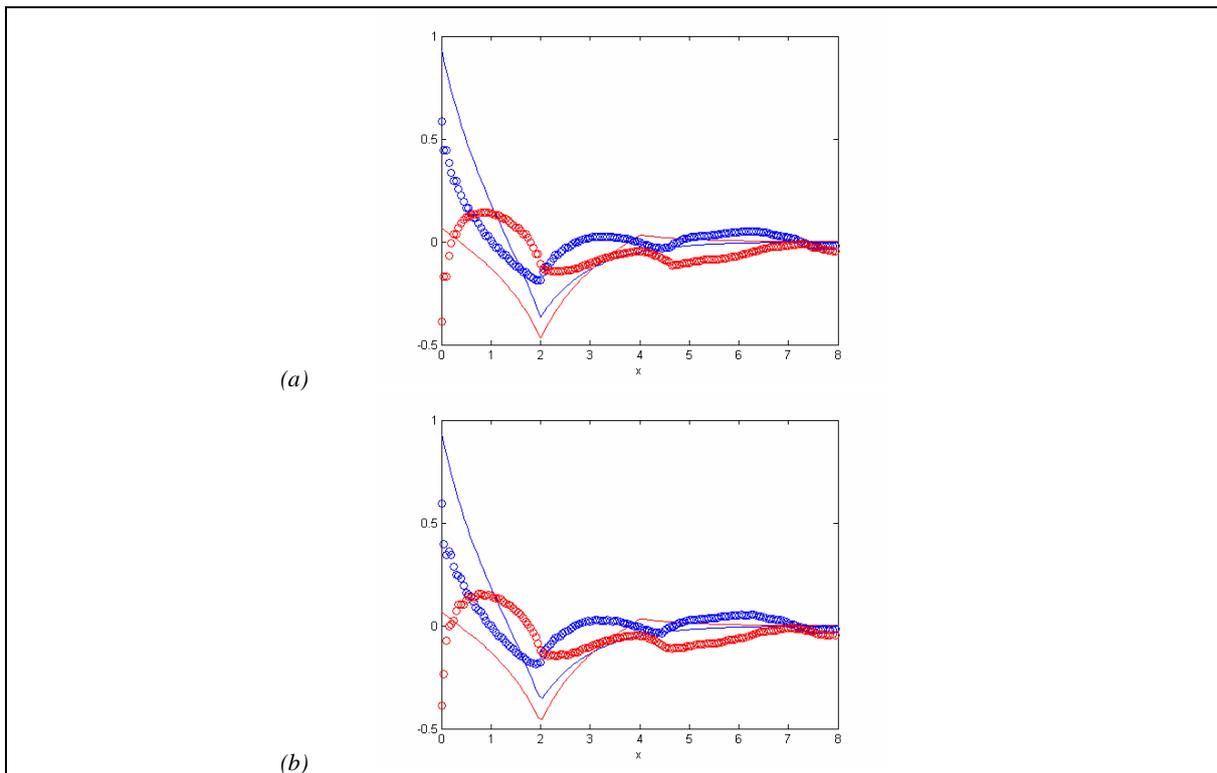


Figura 5-3-9: Relación entre la interpolación de la transformada inversa de la transformada directa interpolada mediante el método de vecinos más próximos y la función original, Ejemplo I.

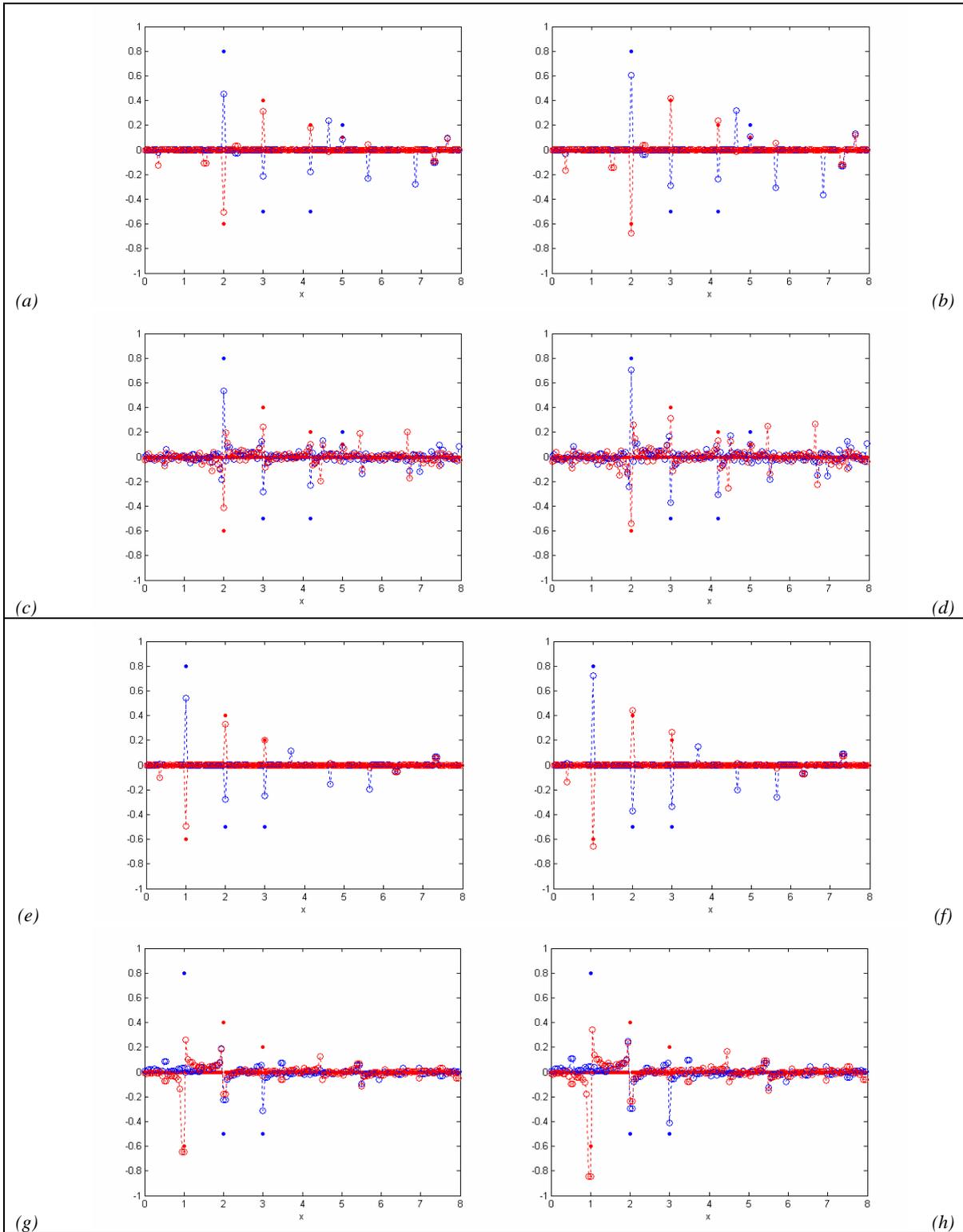


Figura 5-3-10: Relación entre la interpolación de la transformada inversa de la transformada directa interpolada mediante el método de vecinos más próximos y la función original, ejemplos II y III.

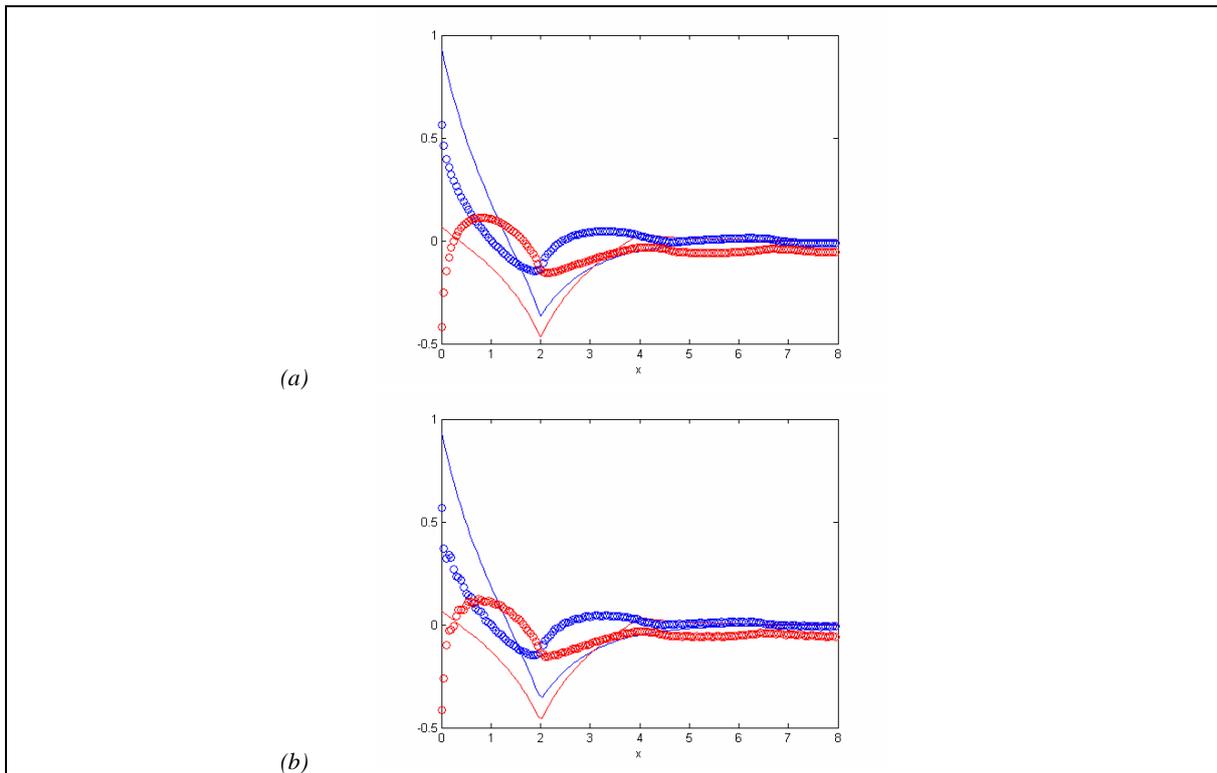


Figura 5–3-11: Relación entre la interpolación de la transformada inversa de la transformada directa interpolada mediante interpolación lineal y la función original, Ejemplo I.

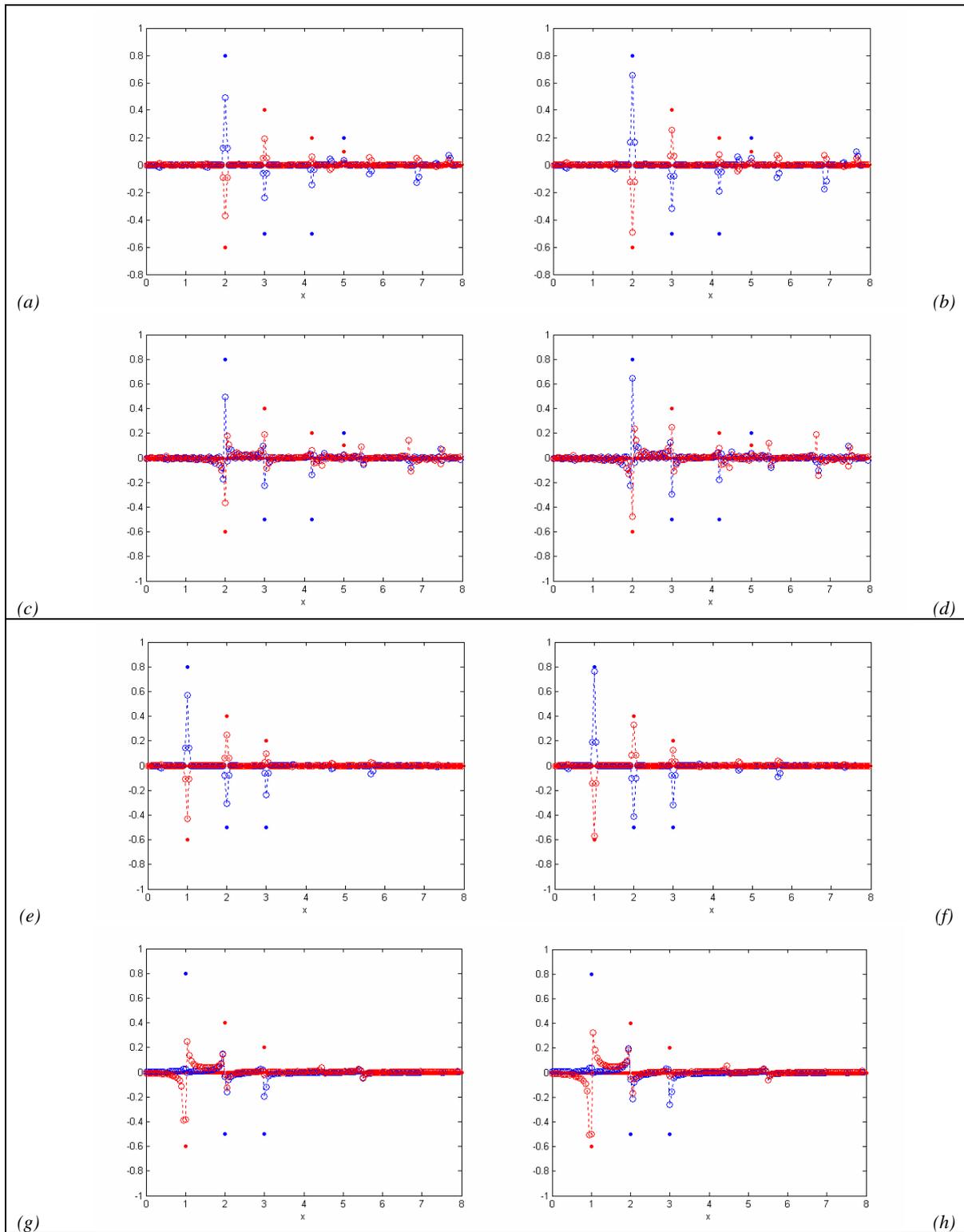


Figura 5-3-12: Relación entre la interpolación de la transformada inversa de la transformada directa interpolada mediante interpolación lineal y la función original, ejemplos II y III.

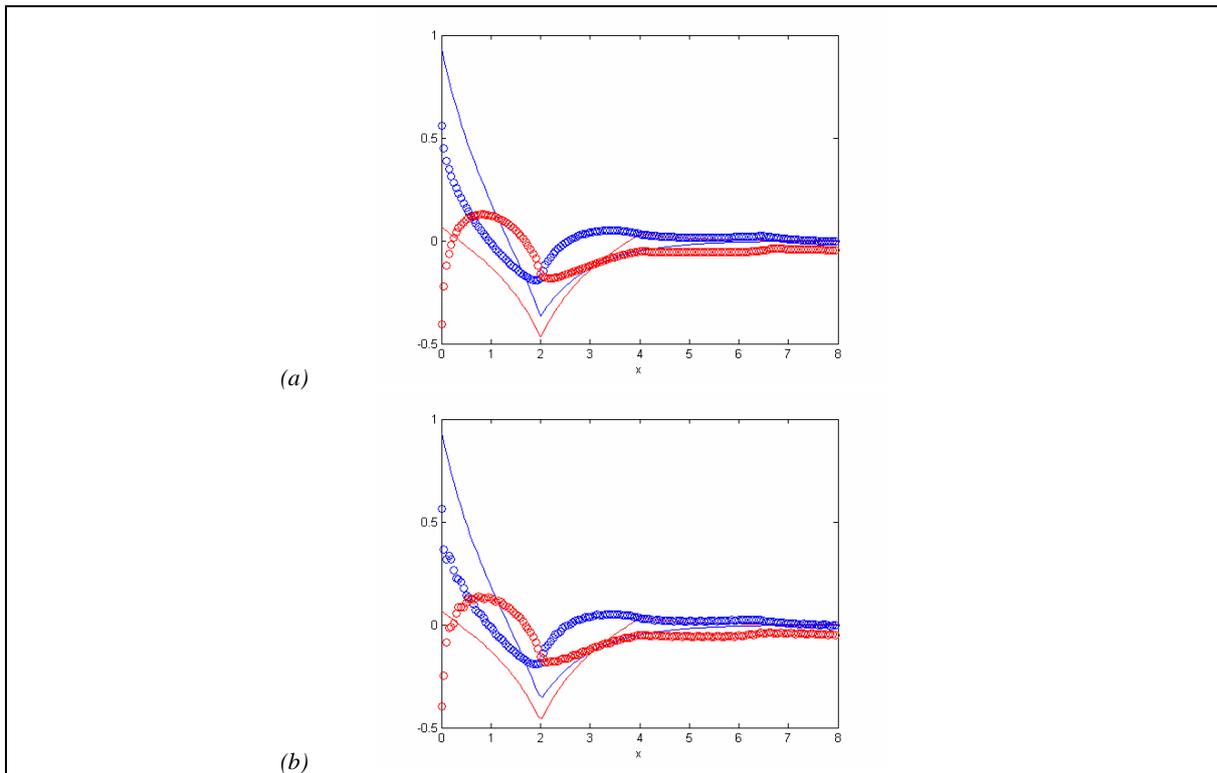


Figura 5–3-13: Relación entre la interpolación de la transformada inversa de la transformada directa interpolada mediante splines cúbicos y la función original, Ejemplo I.

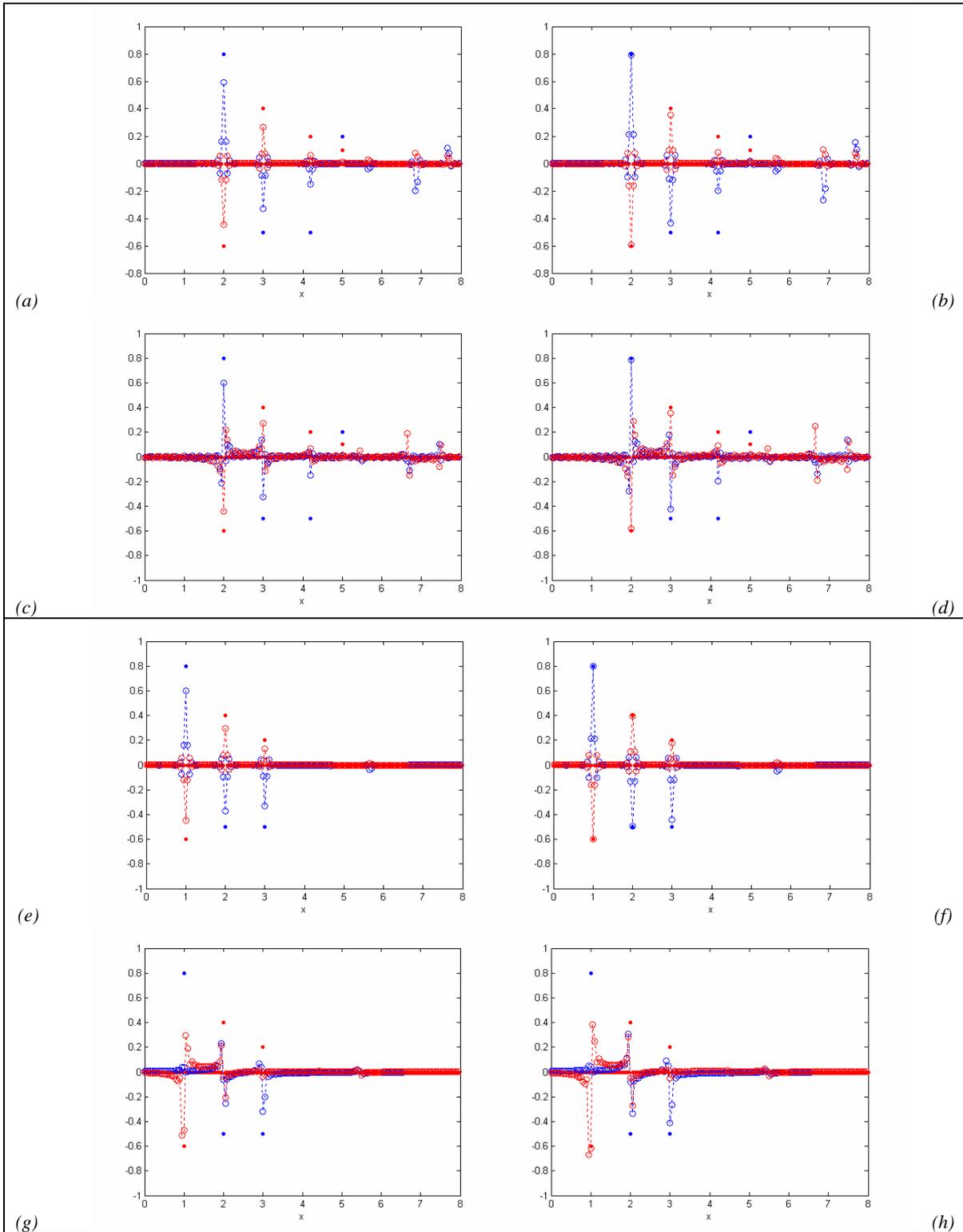


Figura 5-3-14: Relación entre la interpolación de la transformada inversa de la transformada directa interpolada mediante splines cúbicos y la función original, ejemplos II y III.

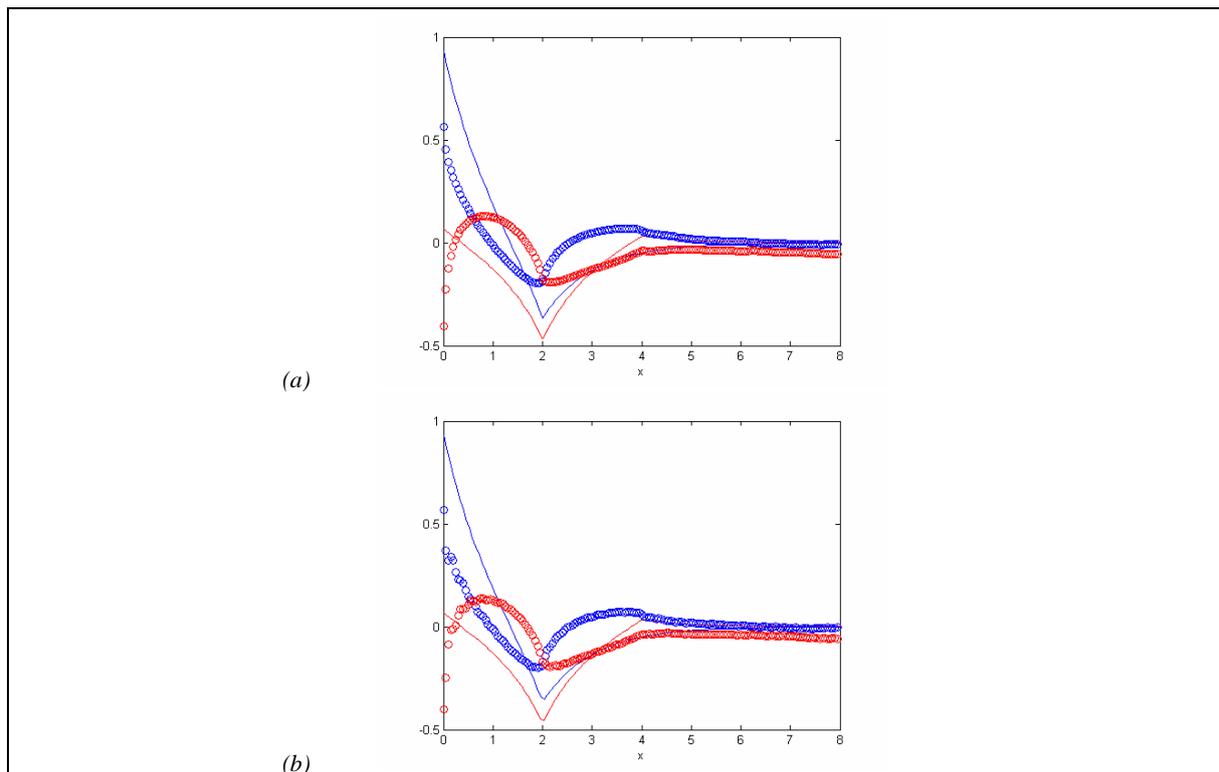


Figura 5–3-15: Relación entre la interpolación de la transformada inversa de la transformada directa interpolada por polinomios de Hermite cúbicos y la función original, Ejemplo I.

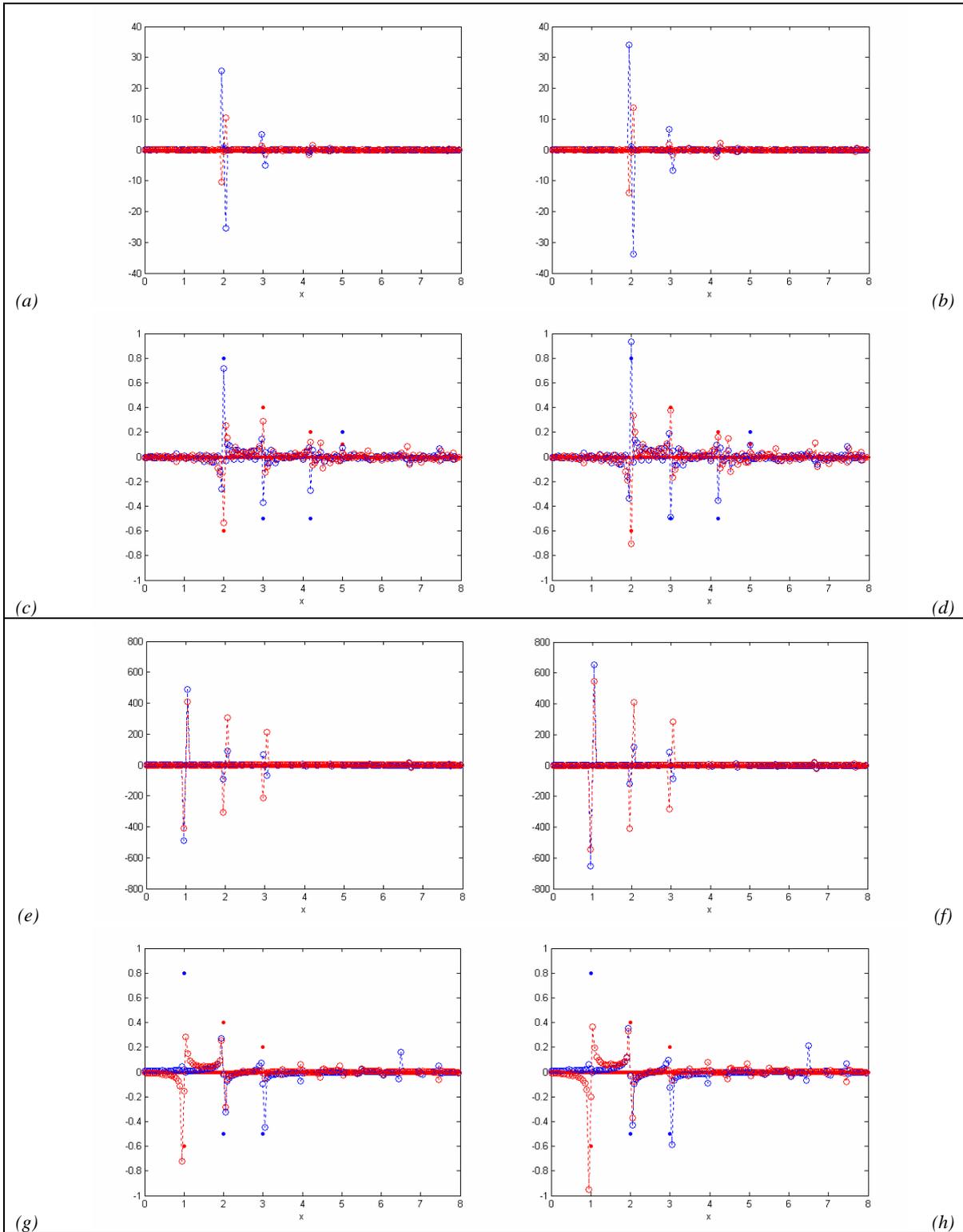


Figura 5-3-16: Relación entre la interpolación de la transformada inversa de la transformada directa interpolada por polinomios de Hermite cúbicos y la función original, ejemplos II y III.

5.3.3. Relación entre la NUIFFT de la transformada directa interpolada y la función original

En esta Subsección se realizan las transformaciones análogas a las expuestas en las figuras de las Subsecciones anteriores para la comparación entre la NUIFFT de la transformada directa interpolada y la función original.

Los resultados obtenidos se muestran en las figuras 5-3-17 y 5-3-18:

Páginas siguientes:

Figura 5-3-17: Relación entre la NUIFFT de la transformada directa interpolada y la función original, Ejemplo I.

(a) Función f (líneas) y valores de la NUIFFT de la transformada directa interpolada (círculos) en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

(b) Función f (líneas) y valores de la NUIFFT de la transformada directa interpolada (círculos) en el intervalo $(-0,025; 7,975)$.

En todos casos la NUIFFT ha sido calculada para un error relativo máximo $E_{\max} = 10^{-3}$, y contiene $PE' = 323$ puntos, uniformemente espaciados con intervalo $EX' = 0,0648$.

Se muestra en azul la parte real, en rojo la parte imaginaria. Las líneas punteadas se incluyen para facilitar la observación de las tendencias.

Figura 5–3-18: Relación entre la NUIFFT de la transformada directa interpolada y la función original, ejemplos II y III.

(a) Función g (puntos) y valores de la NUIFFT de la transformada directa interpolada (círculos) en el intervalo $(-0,025;7,975)$.

(b) Función g (puntos) y valores de la NUIFFT de la transformada directa interpolada (círculos) en el intervalo $(-0,025;7,975)$.

(c) Función g (puntos) y valores de la NUIFFT de la transformada directa interpolada (círculos) en el intervalo $(-0,025;7,975)$.

(d) Función g (puntos) y valores de la NUIFFT de la transformada directa interpolada (círculos) en el intervalo $(-0,025;7,975)$.

(e) Función k (puntos) y valores de la NUIFFT de la transformada directa interpolada (círculos) en el intervalo $(-0,025;7,975)$.

(f) Función k (puntos) y valores de la NUIFFT de la transformada directa interpolada (círculos) en el intervalo $(-0,025;7,975)$.

(g) Función k (puntos) y valores de la NUIFFT de la transformada directa interpolada (círculos) en el intervalo $(-0,025;7,975)$.

(h) Función k (puntos) y valores de la NUIFFT de la transformada directa interpolada (círculos) en el intervalo $(-0,025;7,975)$.

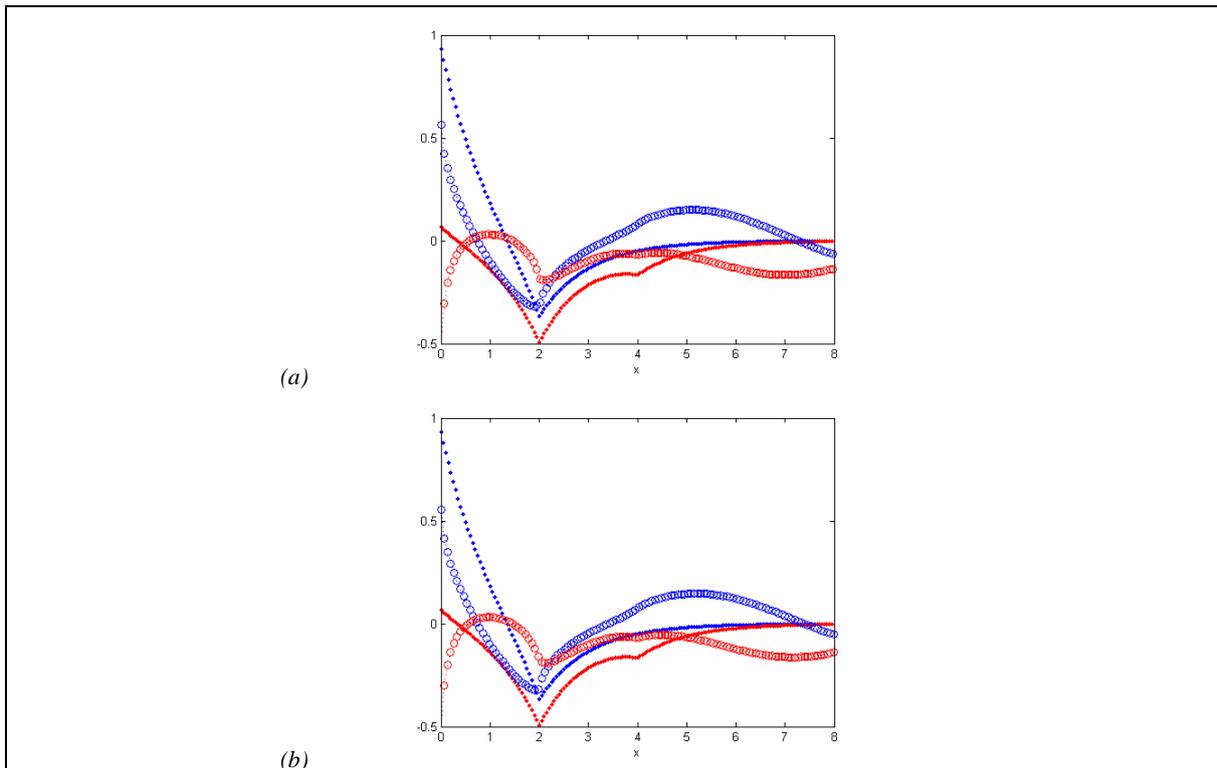


Figura 5-3-17: Relación entre la NUFFT de la transformada directa interpolada y la función original, Ejemplo I.

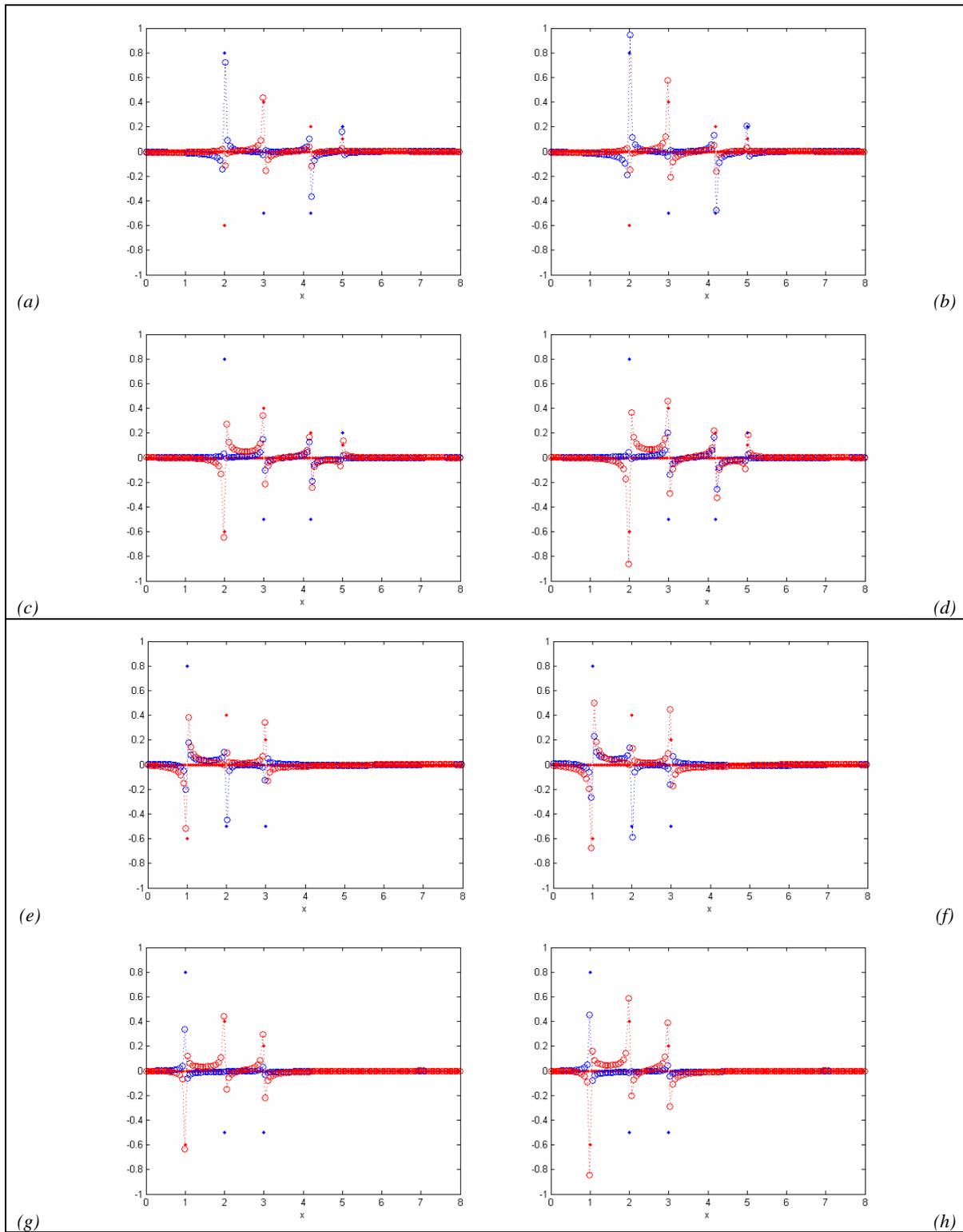


Figura 5–3-18: Relación entre la NUIFFT de la transformada directa interpolada y la función original, ejemplos II y III.

5.4. Análisis de los resultados: Elección del método de interpolación en la transformada de Fourier

El método de interpolación por vecinos más próximos (Cf. figuras 5-2-1 y 5-2-2, 5-2-9 y 5-2-10) es el más simple y, por ello, el más eficiente en términos de tiempo de cómputo. Este método puede emplearse apropiadamente para la interpolación de funciones suficientemente regulares que se encuentren bien definidas por sus muestras.

Los métodos de interpolación lineal (Cf. figuras 5-2-3 y 5-2-4, 5-2-11 y 5-2-12) y por splines cúbicos (Cf. figura 5-2-5 y 5-2-6, 5-2-13 y 5-2-14) son los que permiten obtener, en todos los casos, resultados más próximos a las transformadas que se obtienen mediante la aplicación del Teorema del Muestreo generalizado.

El método de interpolación mediante polinomios de Hermite cúbicos (Cf. figuras 5-2-7 y 5-2-8, 5-2-15 y 5-2-16) permite obtener funciones interpoladoras muy próximas a las transformadas que se obtienen mediante la aplicación del Teorema del Muestreo generalizado en el caso de funciones suaves. En el caso de funciones con variaciones grandes en intervalos pequeños del dominio, tiende a producir funciones interpoladoras con extremos muy pronunciados, por lo que este método no es apropiado para el caso de funciones constituidas por suma de impulsos.

En las figuras 5-3-1 a 5-3-8, correspondientes a la relación entre la transformada inversa de la transformada directa interpolada mediante técnicas generales y la función original, se aprecian fuertes discrepancias entre los valores de las transformadas inversas y las funciones originales, siendo este efecto más notorio en el caso correspondiente al Ejemplo I, donde la función en el dominio natural no está constituida por suma de impulsos. Como ya se adelantó en el Capítulo 4, estas discrepancias pueden ser debidas a la acotación introducida en el dominio frecuencial, así como al hecho de que las discretizaciones del Teorema Integral de Fourier expuestas en (4.1.18) y (4.1.20) no dejan de ser aproximaciones de las integrales expuestas en (4.1.7) y (4.1.11). En los casos que se tratan en el presente Capítulo, estas discrepancias se ven incrementadas por el efecto numérico introducido al emplear como función interpoladora de la transformada de Fourier una distinta de la indicada por el Teorema del Muestreo generalizado.

En los casos correspondientes a los ejemplos II y III, en que las funciones están constituidas por suma de impulsos, puede apreciarse la presencia de impulsos “fantasma” distribuidos a lo largo del dominio natural, siendo este efecto más importante en el caso de la interpolación mediante polinomios de Hermite cúbicos. Este efecto, más acusado en el caso en que el espaciado de interpolación en el dominio frecuencial no es submúltiplo del espaciado original, se minimiza en el caso en que los impulsos se encuentran distribuidos en una región más próxima al origen (Ejemplo III). Esto es debido a que en este último caso las transformadas son funciones más suaves y las funciones interpoladoras se aproximan en mayor medida a las indicadas por el Teorema del Muestreo generalizado, como puede apreciarse en las figuras 5-2-2, 5-2-4, 5-2-6 y 5-2-8.

En las figuras 5-3-9 a 5-3-16, correspondientes a la relación entre la interpolación mediante técnicas generales de la transformada inversa de la transformada directa interpolada y la función original, así como en las figuras 5-3-17 y 5-3-18, correspondientes a la relación entre la NUIFFT de la transformada directa interpolada y la función original, se aprecian características análogas a las mencionadas anteriormente para las figuras 5-3-1 a 5-3-8.

En este caso, es preciso considerar que esta metodología (la elección de la longitud del filtro óptima y el parámetro del que depende la función filtro) ha sido desarrollada para funciones cuyas muestras, aun no encontrándose uniformemente espaciadas, ocupan toda la longitud de la

ventana en que está definida. En las funciones que se tratan en esta Tesis, tal como se expone en la Sección 3.2.3.2, las muestras que definen el espectro en general no se encuentran en la zona de frecuencias altas, por lo que es de esperar que el ajuste no sea óptimo para estas frecuencias.

Los tiempos de cálculo medio de las interpolaciones expuestas en las figuras del presente Capítulo para cada método de interpolación se muestran en la Tabla 5-4-1, donde puede apreciarse cómo los tiempos de cálculo medios obtenidos con los algoritmos de la NIDFT o NUIFFT son varios órdenes de magnitud superiores a los obtenidos con los métodos de interpolación genéricos.

*Tabla 5-4-1: Tiempos de cálculo medio de las interpolaciones expuestas en las figuras del presente Capítulo para cada método de interpolación.*³

	Tiempo (s)					
	NIDFT	NUIFFT	Vecinos más próximos	Interpolación lineal	Splines cúbicos	Polinomios de Hermite cúbicos
<i>PE</i> = 128	0,0334	0,353	0,0016	0,0017	0,0074	0,0047
<i>PE</i> = 256	0,0773	0,0779	0,0021	0,0022	0,0097	0,0064
<i>PE</i> = 512	0,1965	0,1846	0,0033	0,0033	0,0146	0,0096
<i>PE</i> = 1024	0,5608	0,4846	0,0054	0,0057	0,0241	0,0169
<i>PE</i> = 2048	1,7927	1,4307	0,0099	0,0110	0,0468	0,0339
<i>PE</i> = 4096	6,2698	4,7068	0,0193	0,0212	0,0952	0,0693

Como ha sido anteriormente expuesto, el método de la NUIFFT es uno de los más apropiados para el tratamiento de espectros con muestras no equiespaciadas. Teniendo en cuenta la limitación arriba expuesta, referente al ajuste en las altas frecuencias, y los tiempos de cálculo expuestos en la Tabla 5-4-1, se opta por la interpolación mediante splines cúbicos en la implementación del algoritmo expuesto en el Capítulo 3 y desarrollado en el Capítulo 6.

³ Los tiempos referidos han sido determinados en la ejecución en la máquina descrita en la Introducción del Capítulo 7.

Capítulo 6

Implementación de los algoritmos

En este sexto Capítulo se expone la estructuración de los algoritmos para la resolución de los problemas directo e inverso, para perfiles y cubos, en sus módulos constituyentes. Estos algoritmos se implementan en el lenguaje de MATLAB® Version 6.5.0.180913a (R13), desarrollado por la compañía The MathWorks, Inc. (Hanselman y Littlefield, 2001), empleándose una estructura modular, con objeto de facilitar las futuras modificaciones, que pueda ser incluido en un programa más amplio de análisis y tratamiento de radargramas.

La metodología empleada en el desarrollo de los algoritmos, basada en las transformadas de Fourier, ya tiene en cuenta en forma natural la difracción, por lo que únicamente debe tenerse en cuenta, previo a la aplicación del filtro, la posible existencia de reflexiones múltiples. Tal como se mencionó en el Capítulo 3, dedicado al diseño de los algoritmos, en la resolución del Problema Directo se determinan las posiciones y reflectividades de unos reflectores ficticios que permitan su aparición en el radargrama. En la resolución del Problema Inverso, en cambio, no se procederá a la eliminación de las múltiples. Estos aspectos serán discutidos en el Anexo B del presente Capítulo.

Este Capítulo se encuentra dividido en tres Secciones dedicadas, respectivamente:

- A la descripción técnica del algoritmo implementado para la resolución del Problema Directo en dos dimensiones.
- A la descripción técnica del algoritmo implementado para la resolución del Problema Inverso en dos dimensiones.
- A la descripción técnica del algoritmo implementado para la resolución de los problema Directo e Inverso en tres dimensiones.

Así mismo, se incluyen dos Anexos dedicados, respectivamente:

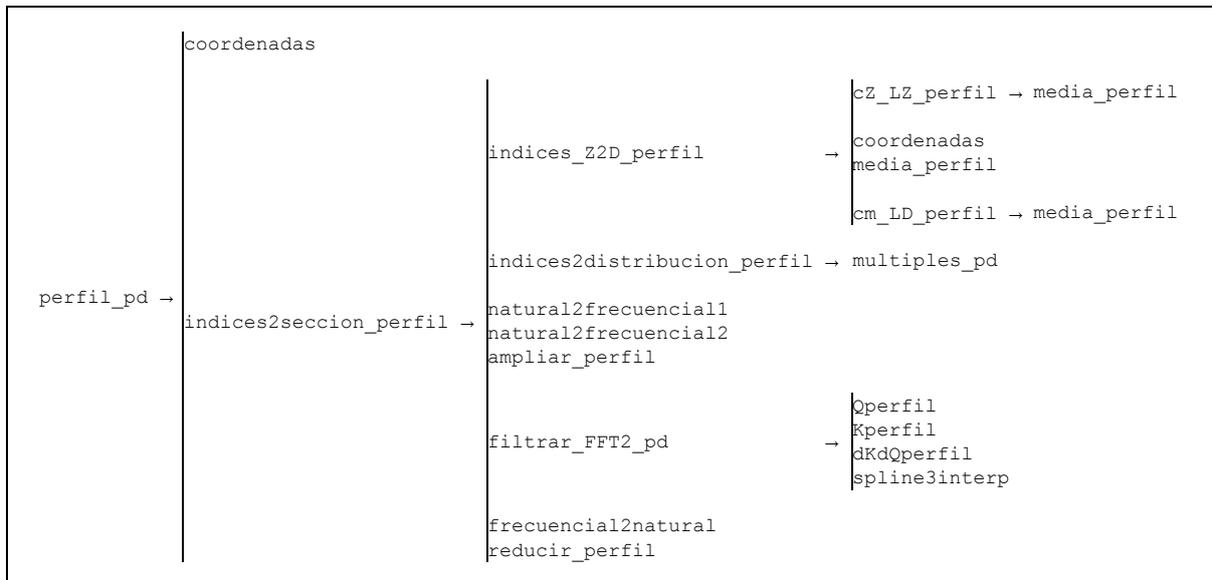
- A la metodología para la determinación de la velocidad de propagación promedio para el Problema Directo.
- A la metodología para la determinación de las ondas reflejadas múltiples en cada traza.

6.1. Descripción técnica del algoritmo implementado para la resolución del Problema Directo en dos dimensiones

Este algoritmo permite resolver el Problema Directo para el caso de un único perfil, cuyo rumbo se asume en la dirección del eje \overline{OX} . Se emplea la metodología expuesta en la §3.3, obteniéndose los efectos de la difracción, así como la expuesta en el Anexo B para la determinación de las ondas reflejadas múltiples en cada traza.

En la Tabla 6-1-1 se exponen los módulos en que se subdivide el algoritmo, que serán descritos en las siguientes Subsecciones.

Tabla 6-1-1: Relación de módulos de que consta el algoritmo implementado para la resolución del Problema Directo en dos dimensiones. Las flechas indican llamadas a los módulos correspondientes.



En estos módulos se emplean las funciones implementadas por MATLAB (p.e. `fftn` e `ifftn` para determinar las transformadas de Fourier directa e inversa, `cell` para definir vectores de matrices), así como algunas de las funciones incluidas en sus toolboxes: `mean`, `fftshift`, `ifftshift`, `num2str`, `str2num` y `linspace`.

6.1.1. Módulo `perfil_pd`

Éste es el guión del algoritmo que permite resolver el Problema Directo para un único perfil. En él el usuario debe explicitar los parámetros que definen el modelo físico cuyo radargrama sintético se quiere determinar. Todos ellos deberán estar expresados en el Sistema Internacional de Unidades.

(1) Parámetros genéricos

Se definen los parámetros genéricos:

- Frecuencia de la antena, ω .
- Condición de reflectividad mínima para el cálculo de ondas múltiples, $r_{\text{mínima}}$ (Cf. §6.1.8).

(2) Parametrización de los medios presentes en el modelo

Se definen las características de los medios presentes en el modelo (denotados 1, 2, etc.):

- Permitividad eléctrica relativa, ϵ_r .
- Permeabilidad magnética relativa, μ_r .
- Conductividad eléctrica, σ .

Con estos valores para cada medio se calcula, de acuerdo con las expresiones expuestas en el Capítulo 1:

- Permitividad eléctrica, ϵ .
- Permeabilidad magnética, μ .
- Impedancia, η .
- Constante de propagación, γ .
- Velocidad de propagación, c .

Y se construyen los vectores de:

- Permitividades eléctricas.
- Permeabilidades magnéticas.
- Conductividades.
- Constantes de propagación.
- Velocidades de propagación.

Estos vectores se definen de tal forma que el elemento i -ésimo de cada uno de ellos contiene el valor del parámetro correspondiente al medio denotado i .

(3) Parametrización de los reflectores presentes en el modelo

Cada reflector se denota mediante un código de dos dígitos, de tal forma que el reflector definido por la yuxtaposición del medio a sobre el medio b se representa por ab .

Para cada reflector se calcula, de acuerdo con las expresiones expuestas en el Capítulo 1:

- Coeficiente de reflexión, r_{ab} .
- Coeficiente de transmisión descendente, t_{ab} .
- Coeficiente de transmisión ascendente, t_{ba} .

Obsérvese que, al ser $r_{ba} = -r_{ab}$, sólo se calcula el valor del coeficiente de reflexión para la onda descendente. Esto no ocurre en el caso de los coeficientes de transmisión, por lo que se calculan explícitamente ambos (Cf. §1.2.2.1).

Se construyen los vectores de:

- Códigos.
- Coeficientes de reflexión.
- Coeficientes de transmisión descendente.
- Coeficientes de transmisión ascendente.

Estos vectores se encuentran en correspondencia biunívoca, de tal forma que los valores de los parámetros contenidos en los elementos i -ésimos de los vectores de coeficientes de reflexión y transmisión son los correspondientes al reflector cuyo código se encuentra contenido en el elemento i -ésimo del vector de códigos.

(4) Características geométricas del modelo

Se definen las características geométricas del modelo para la coordenada de tiempos dobles de recorrido:

- Número de puntos en el eje, PET .¹
- Longitud del intervalo muestreado, LT .

Se definen las características geométricas del modelo para la coordenada de distancia horizontal en la dirección y sentido del perfil:

- Número de puntos en el eje, PEX .²
- Longitud del intervalo muestreado, LX .

Con estos valores, mediante llamada al módulo `coordenadas` (Cf. §6.1.2.1), se calcula, para esta última coordenada:

- Espaciado entre puntos, EX .
- Vector de coordenadas de las muestras, X .

Se definen las características geométricas del modelo para la coordenada de profundidad:

- Número de puntos en el eje, PEZ .
- Longitud del intervalo muestreado, LZ .
- Vector de coordenadas de las muestras, Z .

Estos parámetros auxiliares permiten definir las profundidades donde se encuentran los reflectores.³

¹ El valor PET representa el número de muestras por traza.

² El valor PEX representa el número de trazas por perfil.

³ Estos parámetros se definen de forma conjunta, de tal forma que verifiquen las relaciones expuestas en la Tabla 4–3–1. Una forma de hacerlo es definir un espaciado entre puntos EZ y, considerando un valor de velocidad de propagación promedio c_m , estimar un valor de la longitud del intervalo muestreada en la forma $LZ = c_m \cdot LT$. Una vez conocidos estos valores, el resto de parámetros se determinan haciendo uso de las relaciones expuestas en la Tabla 4–3–1.

Es importante notar que, tal como ha sido implementado el algoritmo (Cf. §6.1.5.2), no es necesario que los parámetros PEZ y LZ guarden ninguna relación con los parámetros PET y LT , siendo los unos independientes de los otros.

(5) Generación de la SECCIÓN DE ÍNDICES

Se construye la SECCIÓN DE ÍNDICES, una matriz de tamaño $PEZ \times PEX$ definida de tal forma que el elemento (a, b) contiene el código correspondiente al reflector presente a la profundidad $Z(a)$ bajo el punto en la posición $X(b)$ a lo largo del perfil, o el valor 0 en el caso en que no haya reflector presente.

(6) Determinación de la SECCIÓN MEDIDA

Mediante llamada al módulo `indices2seccion_perfil` (Cf. §6.1.3) se determinan:

- SECCIÓN MEDIDA correspondiente al modelo.
- Número de puntos en el eje de tiempos dobles de recorrido correspondiente al perfil sintético, $PET2$.
- Longitud del intervalo muestreado en el eje de tiempos dobles de recorrido correspondiente al perfil sintético, $LT2$.⁴
- Permitividad eléctrica promedio considerada en el filtro, ε_m .
- Permeabilidad magnética promedio considerada en el filtro, μ_m .
- Conductividad promedio considerada en el filtro, σ_m .

Con los valores $PET2$ y $LT2$, mediante una nueva llamada al módulo `coordenadas`, se calcula, para la coordenada de tiempos dobles de recorrido:

- Espaciado entre puntos, $ET2$.
- Vector de coordenadas de las muestras, $T2$.

⁴ Por construcción será $PET2 \leq PET$ y $LT2 \leq LT$ (Cf. §6.1.9.2).

6.1.2. Módulos `coordenadas`, `natural2frecuencial1`, `natural2frecuencial2` y `frecuencial2natural`

Estos módulos efectúan el cálculo de las coordenadas en los dominios natural y frecuencial, así como el paso de unas a otras. Para ello, se emplean las expresiones obtenidas en el Capítulo 4 y expuestas en la Tabla 4-3-1.

6.1.2.1. Módulo `coordenadas`

La llamada a este módulo se muestra en la Tabla 6-1-2:

Tabla 6-1-2: Llamada al módulo `coordenadas`.

<code>[EX, X] = coordenadas(PE, LX)</code>
--

(1) Entrada del módulo

La entrada del módulo consta de:

- Número de puntos en el eje, PE .
- Longitud del intervalo muestreado en el dominio natural, LX .

(2) Salida del módulo

La salida del módulo consta de:

- Espaciado entre puntos en el dominio natural, EX .
- Vector de coordenadas de los puntos en el dominio natural, X .

Estas coordenadas se definen de tal forma que la primera es $X = 0$ y la última es $X = (PE - 1) \cdot EX$.

6.1.2.2. Módulo `natural2frecuencial1`

La llamada a este módulo se muestra en la Tabla 6-1-3:

Tabla 6-1-3: Llamada al módulo `natural2frecuencial1`.

<code>[EX, X, VX, EU, LU, U, VU] = natural2frecuencial1(PE, LX)</code>
--

(1) Entrada del módulo

La entrada del módulo consta de:

- Número de puntos en el eje, PE .
- Longitud del intervalo muestreado en el dominio natural, LX .

(2) Salida del módulo

Para el dominio natural la salida consta de:

- Espaciado entre puntos, EX .
- Vector de coordenadas de los puntos, X .
- Longitud de la ventana, VX .

Las coordenadas X se definen de tal forma que la primera es $X = -\lfloor PE/2 \rfloor \cdot EX$ y la última es $X = (\lceil PE/2 \rceil - 1) \cdot EX$.

Para el dominio frecuencial la salida consta de:

- Espaciado entre puntos, EU .
- Longitud del intervalo muestreado, LU .
- Vector de coordenadas de los puntos, U .
- Longitud de la ventana, VU .

Las coordenadas U se definen de tal forma que la primera es $U = 0$ y la última es $U = (PE - 1) \cdot EU$.

6.1.2.3. Módulo `natural2frecuencial2`

Este módulo es una modificación del anterior. La llamada se muestra en la Tabla 6-1-4:

Tabla 6-1-4: Llamada al módulo `natural2frecuencial2`.

<code>[EX, X, VX, EU, LU, U, VU] = natural2frecuencial2(PE, LX)</code>
--

(1) **Entrada del módulo**

La entrada del módulo consta de:

- Número de puntos en el eje, PE .
- Longitud del intervalo muestreado en el dominio natural, LX .

(2) **Salida del módulo**

Para el dominio natural la salida consta de:

- Espaciado entre puntos, EX .
- Vector de coordenadas de los puntos, X .
- Longitud de la ventana, VX .

Las coordenadas X se definen de tal forma que la primera es $X = -\lfloor PE/2 \rfloor \cdot EX$ y la última es $X = (\lceil PE/2 \rceil - 1) \cdot EX$.

Para el dominio frecuencial la salida consta de:

- Espaciado entre puntos, EU .
- Longitud del intervalo muestreado, LU .
- Vector de coordenadas de los puntos, U .
- Longitud de la ventana, VU .

Las coordenadas U se definen de tal forma que la primera es $U = -\lfloor PE/2 \rfloor \cdot EU$ y la última es $U = (\lceil PE/2 \rceil - 1) \cdot EU$.

6.1.2.4. Módulo `frecuencial2natural`

La llamada a este módulo se muestra en la Tabla 6-1-5:

Tabla 6-1-5: Llamada al módulo `frecuencial2natural`.

<code>[EX, LX, X, VX, EU, U, VU] = frecuencial2natural(PE, LU)</code>

(1) Entrada del módulo

La entrada del módulo consta de:

- Número de puntos en el eje, PE .
- Longitud del intervalo muestreado en el dominio frecuencial, LU .

(2) Salida del módulo

Para el dominio natural la salida consta de:

- Espaciado entre puntos, EX .
- Longitud del intervalo muestreado, LX .
- Vector de coordenadas de los puntos, X .
- Longitud de la ventana, VX .

Las coordenadas X se definen de tal forma que la primera es $X = 0$ y la última es $X = (PE - 1) \cdot EX$.

Para el dominio frecuencial la salida consta de:

- Espaciado entre puntos, EU .
- Vector de coordenadas de los puntos, U .
- Longitud de la ventana, VU .

Las coordenadas U se definen de tal forma que la primera es $U = 0$ y la última es $U = (PE - 1) \cdot EU$.

6.1.3. Módulo `indices2seccion_perfil`

La llamada a este módulo se muestra en la Tabla 6–1-6:

Tabla 6–1-6: Llamada al módulo `indices2seccion_perfil`.

```
[seccion_medida, PET2, LT2,  $\epsilon_m$ ,  $\mu_m$ ,  $\sigma_m$ ] = ...
indices2seccion_perfil( $\omega$ ,  $r_{\text{minima}}$ ,  $c$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $\gamma$ , seccion_indices, ...
codigo,  $r$ ,  $t_d$ ,  $t_a$ , PET, LT, PEX, EX, X, LZ, Z)
```

(1) Entrada del módulo

La entrada del módulo consta de:

- Frecuencia de la antena, ω .
- Condición de reflectividad mínima para el cálculo de ondas múltiples (Cf. §6.1.8), r_{minima} .
- Vector con los valores de la velocidad de propagación para cada medio, c .
- Vector con los valores de la permitividad eléctrica para cada medio, ϵ .
- Vector con los valores de la permeabilidad magnética para cada medio, μ .
- Vector con los valores de la conductividad eléctrica para cada medio, σ .
- Vector con los valores de la constante de propagación para cada medio, γ .
- SECCIÓN DE ÍNDICES (Cf. §6.1.1), definida en los ejes de coordenadas Z y X .
- Vector de códigos contenidos en la SECCIÓN DE ÍNDICES.
- Vector de coeficientes de reflexión, r .
- Vector de coeficientes de transmisión descendente, t_d .
- Vector de coeficientes de transmisión ascendente, t_a .
- Número de puntos en el eje de tiempos dobles de recorrido, PET .
- Longitud del intervalo muestreado en dicho eje, LT .
- Número de puntos en el eje de distancia horizontal en la dirección y sentido del perfil, PEX .
- Espaciado entre puntos en dicho eje, EX .

- Vector de coordenadas de las muestras en dicho eje, X .
- Longitud del intervalo muestreado en el eje de profundidades en que está definida la SECCIÓN DE ÍNDICES, LZ .
- Vector de coordenadas de los puntos en dicho eje, Z .

(2) **Cálculo de la velocidad de propagación promedio c_m y la longitud del intervalo del eje de coordenadas D muestreado, LD**

Se define el número de puntos en el eje de coordenadas D de la forma $PED \equiv PET$.

Mediante llamada al módulo `indices_z2D_perfil` (Cf. §6.1.4) se calcula:

- Velocidad de propagación promedio, c_m .
- Nueva SECCIÓN DE ÍNDICES, definida en los ejes de coordenadas D y X .⁵
- Longitud del intervalo muestreado, LD .
- Espaciado entre puntos, ED .
- Vector de coordenadas de las muestras, D .

(3) **Determinación de los parámetros electromagnéticos promedio**

Se calculan los valores promedio de los parámetros electromagnéticos para el filtro:⁶

- Permitividad eléctrica, ε_m .
- Permeabilidad magnética, μ_m .
- Conductividad eléctrica, σ_m .

⁵ La definición de las coordenadas D se encuentra en la §3.2.2.3.

⁶ Tal como se expuso en la §3.2.2.3, se asume para μ_m el valor de la permeabilidad magnética del vacío. Se propone determinar el valor de σ_m como el promedio de las conductividades de los medios conductores no metálicos (que se suponen de presencia mayoritaria). El valor de ε_m se determina, tal como se expuso en la §3.2.2.3, de tal forma que se verifique (3.2.15).

(4) Determinación de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD

Se determina la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondiente al modelo, incluyendo reflexiones múltiples, mediante llamada al módulo `indices2distribucion_perfil` (Cf. §6.1.7). Esta DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD es una matriz de tamaño $\overline{PED} \times PEX$, definida de tal forma que el elemento (a, b) contiene la reflectividad aparente asociada al punto de la subsuperficie correspondiente a la coordenada $D(a)$ bajo el punto en la posición $X(b)$ a lo largo del perfil.

(5) Ampliación de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD

Se determinan las coordenadas D ampliadas, manteniéndose el espaciado entre puntos, ED , y definiendo:

- Nuevo número de puntos en el eje, $NPED \equiv 3 \cdot PED$.
- Nueva longitud del intervalo muestreado, $NLD \equiv (NPED - 1) \cdot ED$.

Con estos valores, mediante llamada al módulo `natural2frecuencial1` (Cf. §6.1.2.2), se calcula para el dominio natural correspondiente a esta coordenada:

- Vector de coordenadas de las muestras, D .
- Longitud de la ventana, VD .

Así mismo, para el dominio frecuencial conjugado:

- Espaciado entre puntos, EK .
- Longitud del intervalo muestreado, LK .
- Vector de coordenadas de las muestras, K .
- Longitud de la ventana, VK .

Se definen las coordenadas X ampliadas, manteniéndose el espaciado entre puntos, EX , y definiendo:

- Nuevo número de puntos en el eje, $NPEX \equiv 2 \cdot PEX$.
- Nueva longitud del intervalo muestreado, $NLX \equiv (NPEX - 1) \cdot EX$.

Con estos valores, mediante llamada al módulo `natural2frecuencial2` (Cf. §6.1.2.3), se calcula para el dominio natural correspondiente a esta coordenada:

- Vector de coordenadas de las muestras, X .
- Longitud de la ventana, VX .

Así mismo, para el dominio frecuencial conjugado:

- Espaciado entre puntos, EU .
- Longitud del intervalo muestreado, LU .
- Vector de coordenadas de las muestras, U .
- Longitud de la ventana, VU .

Se determina la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD ampliada, mediante llamada al módulo `ampliar_perfil` (Cf. §6.1.9.1). Esta DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD ampliada es una matriz de tamaño $NPED \times NPEX$, definida de forma apropiada con el objeto de minimizar los efectos de borde y evitar la aparición de artefactos al tomar su transformada de Fourier (Zeng et al., 1995).

(6) Determinación del espectro

Se determina la transformada de Fourier de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD ampliada, $FFT2$, teniendo en cuenta los resultados expuestos en el Capítulo 4.

(7) Filtrado del espectro

Mediante llamada al módulo `filtrar_FFT2_pd` (Cf. §6.1.10) se aplica al espectro obtenido el filtro expuesto en la §3.3.3., obteniéndose:

- Espectro filtrado, $FFT2_{filtrada}$.
- Vector con las longitudes de la ventana en el dominio frecuencial correspondiente a la coordenada Q obtenida para cada valor determinado de la frecuencia U .
- Vector de coordenadas interpoladas en el dominio frecuencial correspondiente a la coordenada Q , donde se define el espectro filtrado.

Con estos valores se calcula la longitud del intervalo muestreado en el dominio frecuencial correspondiente a la coordenada Q tras la interpolación, $LQ2$.

Mediante llamada al módulo `frecuencial2natural` (Cf. §6.1.2.4), se calcula para el dominio natural conjugado correspondiente a esta coordenada:

- Espaciado entre puntos, $ED2$.
- Vector de coordenadas de los puntos, $D2$.
- Longitud del intervalo muestreado, $LD2$.
- Longitud de la ventana, $VD2$.

Así mismo, para el dominio frecuencial:

- Espaciado entre puntos, $EQ2$.
- Vector de coordenadas de los puntos, $Q2$.
- Longitud de la ventana, $VQ2$.

(8) Determinación de la SECCIÓN MEDIDA

Se determina la longitud del intervalo muestreado en el dominio de tiempos dobles de recorrido, de acuerdo con 3.2.23, de la forma:

$$LT2 = \frac{2 \cdot LD2}{c_m} \quad (6.1.1)$$

De forma análoga, se determinan las coordenadas de los puntos en el dominio de tiempos dobles de recorrido:

$$T2 = \frac{2 \cdot D2}{c_m} \quad (6.1.2)$$

Se determina la transformada de Fourier inversa del espectro filtrado, teniendo en cuenta los resultados expuestos en el Capítulo 4, obteniéndose la SECCIÓN MEDIDA ampliada. Ésta es una matriz de tamaño $NPED \times NPEX$, en la que la columna b -ésima representa la traza correspondiente al punto en la posición $X(b)$ a lo largo del perfil.

Esta SECCIÓN MEDIDA ampliada se reduce, mediante llamada al módulo `reducir_perfil` (Cf. §6.1.9.2), obteniéndose:

- SECCIÓN MEDIDA.⁷
- Nuevo número de puntos en el eje de tiempos dobles de recorrido, $PET2$.
- Nueva longitud del intervalo muestreado en dicho eje, $LT2$.

(9) Salida del módulo

La salida del módulo consta de:

- SECCIÓN MEDIDA.
- Nuevo número de puntos en el eje de tiempos dobles de recorrido, $PET2$.
- Nueva longitud del intervalo muestreado en dicho eje, $LT2$.
- Permitividad eléctrica promedio considerada en el filtro, ϵ_m .
- Permeabilidad magnética promedio considerada en el filtro, μ_m .
- Conductividad eléctrica promedio considerada en el filtro, σ_m .

6.1.4. Módulo `indices_z2d_perfil`

La llamada a este módulo se muestra en la Tabla 6-1-7:

Tabla 6-1-7: Llamada al módulo `indices_z2d_perfil`.

```
[cm, seccion_indices, LD, ED, D] = ...
indices_z2d_perfil(seccion_indices, codigo, PED, PEX, LZ, Z, LT, c)
```

(1) Entrada del módulo

La entrada del módulo consta de:

- SECCIÓN DE ÍNDICES (Cf. §6.1.1), definida en los ejes de coordenadas Z y X .
- Vector de códigos contenidos en la SECCIÓN DE ÍNDICES.

⁷ Esta SECCIÓN MEDIDA está truncada de tal forma que todos los valores de sus coordenadas de tiempo dobles de recorrido, $T2$, sean menores que la longitud del intervalo muestreado original, LT , de tal forma que es una matriz de tamaño $PET2 \times PEX$.

- Número de puntos en el dominio de la coordenada D definida en la §3.2.2.3, PED .
 - Número de puntos en el eje de distancia horizontal en la dirección y sentido del perfil, PEX .
 - Longitud del intervalo muestreado en el eje de profundidades en que está definida la SECCIÓN DE ÍNDICES, LZ .
 - Vector de coordenadas de los puntos en dicho eje, Z .
 - Longitud del intervalo muestreado en el dominio de tiempos dobles de recorrido, LT .
 - Vector con los valores de la velocidad de propagación para cada medio, c .
- (2) **Estima inicial de la velocidad de propagación promedio c_m y la longitud del intervalo del eje de coordenadas D muestreado, LD**

Mediante llamada al módulo `cZ_LZ_perfil` (Cf. §6.1.5.1) se calcula:

- Velocidad de propagación promedio en la SECCIÓN DE ÍNDICES, c_z .
- Longitud del intervalo muestreado, LZ .

Tal como se justifica en la §6.A, se estiman inicialmente la velocidad de propagación promedio c_m y la longitud del intervalo en el eje de coordenadas D muestreado, LD , por la velocidad c_z y la longitud LZ , respectivamente.

(3) **Determinación de las coordenadas D**

Con este valor de LD y el valor de PED , mediante llamada al módulo `coordenadas` (Cf. §6.1.2.1), se calcula para la coordenada D :

- Espaciado entre puntos, ED .
- Vector de coordenadas de las muestras, D .

(4) **Construcción de la SECCIÓN DE ÍNDICES definida en las coordenadas D y comprobación de la condición $(c_m/c)^2 \simeq 1$ en promedio sobre la SECCIÓN**

Una vez estimado el valor de la velocidad de propagación promedio c_m , es posible determinar la SECCIÓN DE ÍNDICES definida en las coordenadas D . Esta nueva SECCIÓN DE ÍNDICES, de tamaño $PED \times PEX$, se define de tal forma que el elemento (a, b) contiene el

código correspondiente al reflector presente para el valor de la coordenada $D(a)$ bajo el punto en la posición $X(b)$ a lo largo del perfil, o el valor 0 en el caso en que no haya reflector presente.

Como se indicó en §3.2.2.3., la velocidad de propagación promedio c_m debe ser tal que se verifique $(c_m/c)^2 \simeq 1$ en promedio sobre la SECCIÓN. Para garantizarlo, se emplea el método iterativo expuesto en la §6.A.

(5) Salida del módulo

La salida del módulo consta de:

- Velocidad de propagación promedio, c_m .
- SECCIÓN DE ÍNDICES, definida en los ejes de coordenadas D y X .
- Longitud del intervalo muestreado, LD .
- Espaciado entre puntos, ED .
- Vector de coordenadas de las muestras, D .

6.1.5. Módulos `cZ_LZ_perfil` y `cm_LD_perfil`

Estos módulos determinan las velocidades de propagación promedio y las longitudes de los ejes de coordenadas verticales muestreados en la SECCIÓN DE ÍNDICES, definida en las coordenadas Z o D .

6.1.5.1. Módulo `cZ_LZ_perfil`

La llamada a este módulo se muestra en la Tabla 6-1-8:

Tabla 6-1-8: Llamada al módulo `cZ_LZ_perfil`.

<code>[c2, LZ] = cZ_LZ_perfil(seccion_indices, codigo, Z, LZ, LT, c)</code>

(1) Entrada del módulo

La entrada del módulo consta de:

- SECCIÓN DE ÍNDICES (Cf. §6.1.1), definida en los ejes de coordenadas Z y X .
- Vector de códigos contenidos en la SECCIÓN DE ÍNDICES.
- Longitud del intervalo muestreado en el eje de profundidades en que está definida la SECCIÓN DE ÍNDICES, LZ .
- Vector de coordenadas de los puntos en dicho eje, Z .
- Longitud del intervalo muestreado en el dominio de tiempos dobles de recorrido, LT .
- Vector con los valores de la velocidad de propagación para cada medio, c .

(2) Cálculo de la velocidad de propagación promedio c_Z y la longitud del intervalo del eje Z muestreado, LZ

La velocidad de propagación promedio c_Z se determina como la velocidad de propagación media sobre la SECCIÓN DE ÍNDICES definida en las coordenadas Z . Se determina en este módulo como el promedio en la SECCIÓN de la velocidad de propagación, determinado mediante llamada al módulo `media_perfil` (Cf. §6.1.6).

Así mismo, tal como se justifica en la §6.A, se determina la longitud del intervalo muestreado en el dominio de la coordenada Z , LZ , de la forma:

$$LZ = \frac{c_Z \cdot LT}{2} \quad (6.1.3)$$

Ambos parámetros c_Z y LZ se determinan conjuntamente mediante el método iterativo expuesto en la §6.A.

(3) Salida del módulo

La salida del módulo consta de:

- Velocidad de propagación promedio en la SECCIÓN DE ÍNDICES, c_Z .
- Longitud del intervalo muestreado, LZ .

6.1.5.2. Módulo `cm_LD_perfil`

La llamada a este módulo se muestra en la Tabla 6-1-9:

Tabla 6-1-9: Llamada al módulo `cm_LD_perfil`.

<code>[c_m, LD] = cm_LD_perfil(seccion_indices, codigo, D, LD, LT, c)</code>
--

(1) Entrada del módulo

La entrada del módulo consta de:

- SECCIÓN DE ÍNDICES (Cf. §6.1.1), definida en los ejes de coordenadas D y X .
- Vector de códigos contenidos en la SECCIÓN DE ÍNDICES.
- Longitud del intervalo muestreado en el eje D , LD .
- Vector de coordenadas de los puntos en dicho eje, D .
- Longitud del intervalo muestreado en el dominio de tiempos dobles de recorrido, LT .
- Vector con los valores de la velocidad de propagación para cada medio, c .

(2) Cálculo de la velocidad de propagación promedio c_m y la longitud del intervalo del eje de coordenadas D muestreado, LD

La velocidad de propagación promedio c_m se determina como la velocidad de propagación media sobre la SECCIÓN DE ÍNDICES definida en las coordenadas D . Se determina en este módulo como la raíz cuadrada del promedio en la SECCIÓN del cuadrado de la velocidad de propagación, determinado mediante llamada al módulo `media_perfil` (Cf. §6.1.6).

Así mismo, se determina la longitud del intervalo muestreado en el dominio de la coordenada D definida en la §3.2.2.3, LD , de acuerdo con 3.2.23, de la forma:

$$LD = \frac{c_m \cdot LT}{2} \quad (6.1.4)$$

Ambos parámetros c_m y LD se determinan conjuntamente mediante el método iterativo expuesto en la §6.A.

(3) Salida del módulo

La salida del módulo consta de:

- Velocidad de propagación promedio en la SECCIÓN DE ÍNDICES, c_m .
- Longitud del intervalo muestreado, LD .

6.1.6. Módulo `media_perfil`

La llamada a este módulo se muestra en la Tabla 6–1-10:

Tabla 6–1-10: Llamada al módulo `media_perfil`.

<code>C_m = media_perfil(seccion_indices, codigo, Z, LZ, c)</code>
--

(1) Entrada del módulo

La entrada del módulo consta de:

- SECCIÓN DE ÍNDICES (Cf. §6.1.1), definida en los ejes de coordenadas Z y X .
- Vector de códigos contenidos en la SECCIÓN DE ÍNDICES.
- Longitud del intervalo muestreado en el eje de profundidades en que está definida la SECCIÓN DE ÍNDICES, LZ .
- Vector de coordenadas de los puntos en dicho eje, Z .
- Vector con los valores para cada medio de la magnitud cuyo promedio en todo el perfil se desea hallar, c .

(2) Cálculo del valor promedio de la magnitud c en la SECCIÓN DE ÍNDICES, c_m

En cada columna de la SECCIÓN DE ÍNDICES se localizan los reflectores presentes y sus profundidades, determinándose un promedio de la magnitud c en función de los espesores de

los medios presentes, dados por las coordenadas Z .⁸ El valor promedio en la SECCIÓN DE ÍNDICES, c_m , se calcula determinando el promedio global de todos los promedios por columnas.

(3) Salida del módulo

El módulo devuelve como salida el valor promedio de la magnitud c en la SECCIÓN DE ÍNDICES, c_m .

6.1.7. Módulo `indices2distribucion_perfil`

La llamada a este módulo se muestra en la Tabla 6-1-11:

Tabla 6-1-11: Llamada al módulo `indices2distribucion_perfil`.

```
distribucion = ...
indices2distribucion_perfil(seccion_indices, codigo, PED, PEX, Z, LD, D, ...
C, Cm, r, td, ta, gamma, r_minima)
```

(1) Entrada del módulo

La entrada del módulo consta de:

- SECCIÓN DE ÍNDICES (Cf. §6.1.1), definida en los ejes de coordenadas Z y X .
- Vector de códigos contenidos en la SECCIÓN DE ÍNDICES.
- Número de puntos en el dominio de la coordenada D definida en la §3.2.2.3, PED .

⁸ Si en una columna se encontraran presentes los reflectores ab en la posición $Z = Z_{ab}$ y el reflector bc en la posición $Z = Z_{bc}$, se determinaría el valor promedio de la magnitud c para la columna:

$$c_{m\text{columna}} = \frac{Z_{ab} \cdot c_a + (Z_{bc} - Z_{ab}) \cdot c_b + (LZ - Z_{bc}) \cdot c_c}{LZ}$$

Obsérvese que el promedio depende fuertemente del valor del parámetro LZ , pues un valor alto otorga un mayor peso a los valores de la magnitud c correspondientes a los medios inferiores, c_c en este caso.

- Número de puntos en el eje de distancia horizontal en la dirección y sentido del perfil, PEX .
- Vector de coordenadas de los puntos en el eje de profundidades en que está definida la SECCIÓN DE ÍNDICES, Z .
- Longitud del intervalo muestreado, LD .
- Vector de coordenadas de las muestras, D .
- Vector con los valores de la velocidad de propagación para cada medio, c .
- Velocidad de propagación promedio en la SECCIÓN DE ÍNDICES, c_m .
- Vector de coeficientes de reflexión, r .
- Vector de coeficientes de transmisión descendente, t_d .
- Vector de coeficientes de transmisión ascendente, t_a .
- Vector con los valores de las constantes de propagación para cada medio, γ .
- Condición de reflectividad mínima para el cálculo de ondas múltiples (Cf. §6.1.8), $r_{\text{mínima}}$.

(2) Determinación de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD

Se construye la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondiente al modelo, incluyendo reflexiones múltiples, de tamaño $PED \times PEX$, definida de tal forma que el elemento (a, b) contiene la reflectividad aparente asociada al punto de la subsuperficie correspondiente a la coordenada $D(a)$ bajo el punto en la posición $X(b)$ a lo largo del perfil.

Para ello se localizan, en cada columna de la SECCIÓN DE ÍNDICES, los índices de los reflectores presentes, los valores de sus profundidades Z y los coeficientes de reflexión y transmisión descendente y ascendente. Mediante llamada al módulo `multiples_pd` (Cf. §6.1.8), se determinan las coordenadas D y los valores de la reflectividad aparente correspondientes a los reflectores reales y los reflectores ficticios asociados a las reflexiones múltiples. Estos valores de reflectividad aparente se asignan a las filas de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD cuyos valores $D(a)$ sean más próximos a los valores de las coordenadas D calculadas.

(3) Salida del módulo

El módulo devuelve como salida la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD.

6.1.8. Módulo multiples_pd

La llamada a este módulo se muestra en la Tabla 6-1-12:

Tabla 6-1-12: Llamada al módulo multiples_pd.

```
[Dmultiples, rmultiples] = ...
multiples_pd(Z, r, t_d, t_a, gamma, c, c_m, LD, r_minima)
```

(1) Entrada del módulo

La entrada del módulo consta de:⁹

- Vector de profundidades de los reflectores en una columna de la SECCIÓN DE ÍNDICES, Z .
- Vector de coeficientes de reflexión, r .
- Vector de coeficientes de transmisión descendente, t_d .
- Vector de coeficientes de transmisión ascendente, t_a .
- Vector con los valores de las constantes de propagación para cada medio, γ .
- Vector con los valores de la velocidad de propagación para cada medio, c .
- Velocidad de propagación promedio, c_m .
- Longitud del intervalo muestreado, LD .
- Condición de reflectividad mínima para el cálculo de ondas múltiples, r_{minima} .

(2) Caracterización de los reflectores

En este módulo se hace un seguimiento de la onda que parte del emisor, tal como se describe en la §6.B, determinándose los valores de la reflectividad aparente y las coordenadas D correspondientes a los reflectores ficticios asociadas a cada onda reflejada múltiple.

⁹ Si en una columna de la SECCIÓN DE ÍNDICES se encontraran presentes los reflectores ab en la posición $Z = Z_{ab}$ y el reflector bc en la posición $Z = Z_{bc}$, los vectores Z , r , t_d , t_a , γ y c estarían definidos en la forma:

$$Z = (Z_{ab}, Z_{bc}), r = (r_{ab}, r_{bc}), t_d = (t_{ab}, t_{bc}), t_a = (t_{ba}, t_{cb}), \gamma = (\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c), c = (c_a, c_b, c_c).$$

(3) Salida del módulo

La salida del módulo consta de:

- Vector de coordenadas D correspondientes a los reflectores ficticios, $D_{multiples}$.
- Vector de reflectividades aparentes correspondientes a los reflectores ficticios, $r_{multiples}$.

6.1.9. Módulos `ampliar_perfil` y `reducir_perfil`

Estos módulos determinan la ampliación de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD y posterior reducción de la SECCIÓN MEDIDA.

6.1.9.1. Módulo `ampliar_perfil`

La llamada a este módulo se muestra en la Tabla 6-1-13:

Tabla 6-1-13: Llamada al módulo `ampliar_perfil`.

```
seccion_ampliada = ampliar_perfil(seccion, NPED, NPEX)
```

(1) Entrada del módulo

La entrada del módulo consta de:

- DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD, *seccion*.¹⁰
- Nuevo número de puntos en el eje D , *NPED*.
- Nuevo número de puntos en el eje de distancia horizontal X , *NPEX*.

¹⁰ En la resolución del Problema Inverso (Cf. 6.2) este parámetro de entrada representa la SECCIÓN MEDIDA. Análogamente, en dicho caso el módulo devuelve como salida la SECCIÓN MEDIDA ampliada.

(2) Ampliación de la SECCIÓN

La forma en que se define esta ampliación se muestra en la Figura 6-1-1:

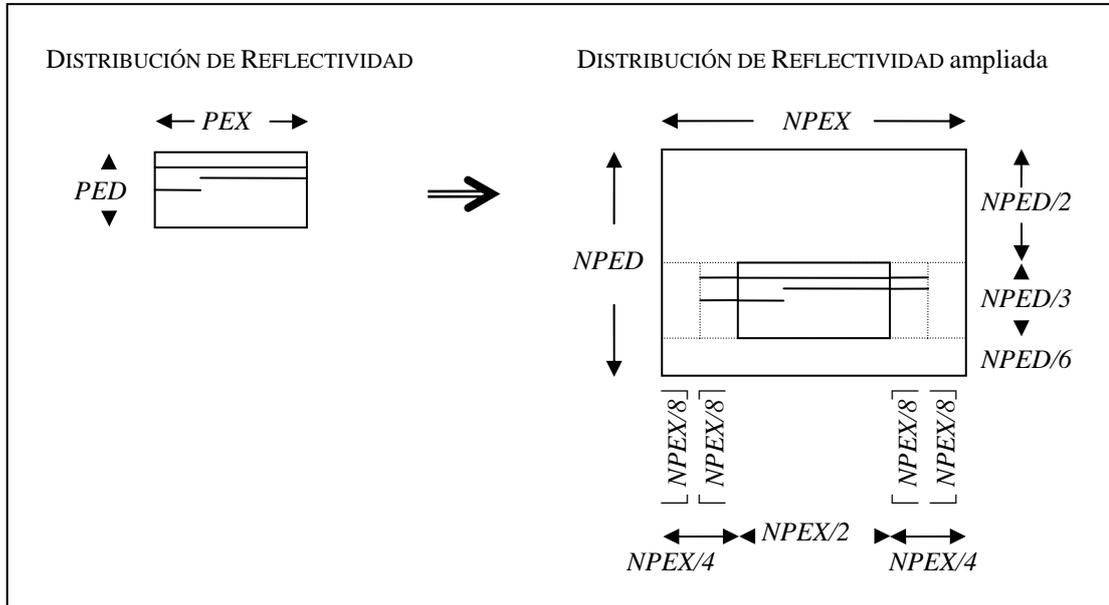


Figura 6-1-1: Ampliación de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD.

Téngase en cuenta que, por definición, se cumplen las relaciones $NPED \equiv 3 \cdot PED$ y $NPEX \equiv 2 \cdot PEX$.

La DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD ampliada está constituida por superposición de submatrices. En una primera fila aparece una submatriz de ceros de tamaño $NPED/2 \times NPEX$. En una segunda fila aparecen, por este orden, una submatriz de ceros de tamaño $NPED/3 \times \lfloor NPEX/8 \rfloor$, una submatriz de tamaño $NPED/3 \times \lceil NPEX/8 \rceil$, cuyas columnas son repetición de la primera columna de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD, la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD, una submatriz de tamaño $NPED/3 \times \lceil NPEX/8 \rceil$, cuyas columnas son repetición de la última columna de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD y una submatriz de ceros de tamaño $NPED/3 \times \lfloor NPEX/8 \rfloor$. En la última fila aparece una submatriz de ceros de tamaño $NPED/6 \times NPEX$.

(3) Salida del módulo

El módulo devuelve como salida la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD ampliada, *seccion_ampliada*.

6.1.9.2. Módulo `reducir_perfil`

La llamada a este módulo se muestra en la Tabla 6-1-14:

Tabla 6-1-14: Llamada al módulo `reducir_perfil`.

```
[seccion_reducida, PET2, LT2] = reducir_perfil(seccion, NPED, NPEX, T2, LT)
```

(1) Entrada del módulo

La entrada del módulo consta de:

- SECCIÓN MEDIDA ampliada, *seccion*.¹¹
- Nuevo número de puntos en el eje *D*, *NPED*.
- Nuevo número de puntos en el eje de distancia horizontal *X*, *NPEX*.
- Vector de coordenadas de las muestras en el eje de tiempos dobles de recorrido correspondientes a la SECCIÓN MEDIDA ampliada, *T2*.
- Longitud del intervalo muestreado en el eje de tiempos dobles de recorrido, *LT*.

(2) Reducción de la SECCIÓN

La forma en que se define esta reducción se muestra en la Figura 6-1-2:

¹¹ En la resolución del Problema Inverso (Cf. 6.2) este parámetro de entrada representa la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD. Análogamente, en dicho caso el módulo devuelve como salida la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD ampliada.

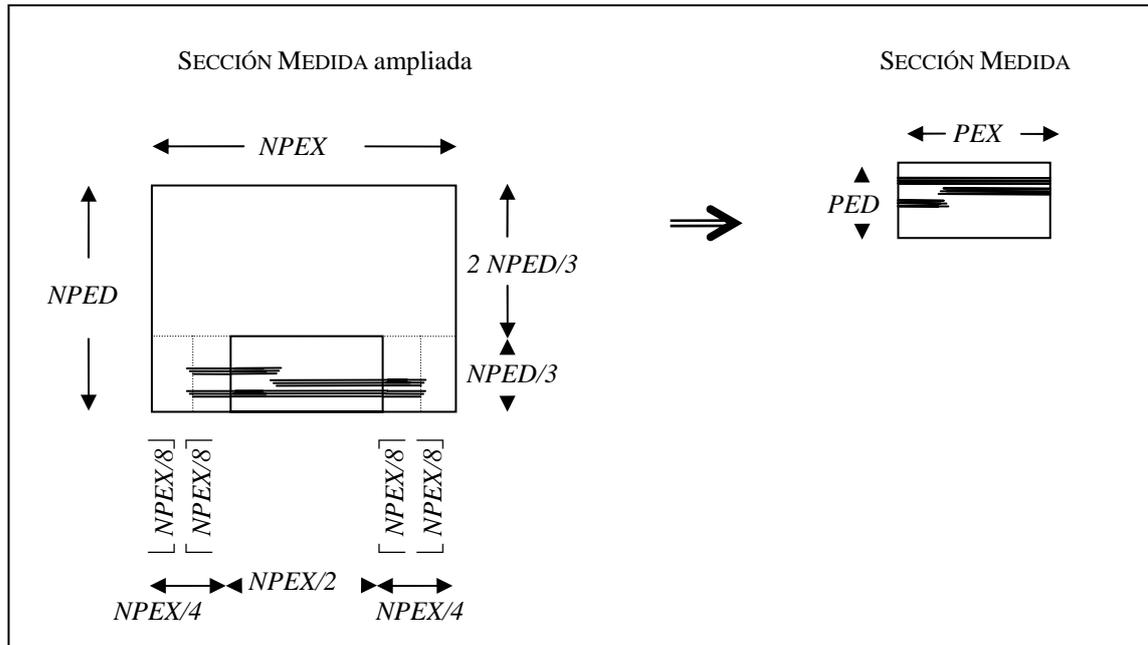


Figura 6-1-2: Reducción de la SECCIÓN MEDIDA.

Téngase en cuenta que, por definición, se cumplen las relaciones $NPED \equiv 3 \cdot PED$ y $NPEX \equiv 2 \cdot PEX$.

La SECCIÓN MEDIDA está constituida por la submatriz indicada en la Figura anterior. La matriz así obtenida se trunca en filas, de tal forma que son eliminadas aquellas correspondientes a una coordenada de tiempo doble de recorrido $T2$ mayor que el tiempo doble máximo del perfil, LT .

(3) Salida del módulo

La salida de este módulo consta de:

- SECCIÓN MEDIDA, *seccion_reducida*.
- Nuevo número de puntos en el eje de tiempos dobles de recorrido, $PET2$.
- Nueva longitud del intervalo muestreado en el eje de tiempos dobles de recorrido, $LT2$.¹²

¹² Obsérvese que, por construcción, será $PET2 \leq PET$ y $LT2 \leq LT$.

6.1.10. Módulo `filtrar_FFT2_pd`

En este módulo se aplican los resultados obtenidos en el Capítulo 3 en el diseño del algoritmo. La llamada a este módulo se muestra en la Tabla 6-1-15:

Tabla 6-1-15: Llamada al módulo `filtrar_FFT2_pd`.

$[FFT2_{filtrada}, VQ, Q_{interpolada}] = \text{filtrar_FFT2_pd}(FFT2, K, U, \omega, \varepsilon_m, \mu_m, \sigma_m, NPEX)$

(1) Entrada del módulo

La entrada del módulo consta de:

- Transformada de Fourier de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD ampliada, $FFT2$.
- Vector de coordenadas de las frecuencias conjugadas de la coordenada D , K .
- Vector de coordenadas de las frecuencias conjugadas de la coordenada X , U .
- Frecuencia de la antena, ω .
- Permitividad eléctrica promedio, ε_m .
- Permeabilidad magnética promedio, μ_m .
- Conductividad eléctrica promedio, σ_m .
- Nuevo número de puntos en el eje X , $NPEX$.

(2) Cálculos en el dominio frecuencial

Se calculan los parámetros en el dominio de frecuencias Q :

- Matriz de frecuencias Q , mediante llamada al módulo `Qperfil` (Cf. §6.1.11.1). Por columnas contiene los valores de Q en función de las frecuencias K para cada valor de la frecuencia U .
- Vector de longitudes de la ventana en el dominio frecuencial correspondiente a la coordenada Q obtenida para cada valor determinado de la frecuencia U , VQ .

- Vector de coordenadas interpoladas en el dominio frecuencial correspondiente a la coordenada Q , $Q_{\text{interpolada}}$. Este vector estará contenido en cada una de las columnas de la matriz Q (esto es, en cada uno de los vectores de frecuencias Q obtenidos para cada valor determinado de la frecuencia U).

Para estos valores de las frecuencias interpoladas $Q_{\text{interpolada}}$, mediante llamada al módulo `Kperfil` (Cf. §6.1.11.2) se determinan los valores de la frecuencia K asociados. Se define una matriz $K_{\text{interpolada}}$ que contiene por columnas los valores de K en función de las frecuencias $Q_{\text{interpolada}}$ para cada valor de la frecuencia U .

(3) Determinación de la diferencial

Mediante llamada al módulo `dKdQperfil` (Cf. §6.1.11.3) se determinan los valores de la diferencial dK/dQ . Se encuentran contenidos en una matriz que contiene por columnas los valores de la diferencial en función de las frecuencias $K_{\text{interpolada}}$ para cada valor de la frecuencia U .

(4) Filtrado del espectro

Se interpola el espectro $FFT2$ en los valores de las frecuencias $Q_{\text{interpolada}}$, mediante llamada al módulo `spline3interp` (Cf. §6.1.12), y se determina el espectro filtrado, multiplicando el espectro interpolado por los valores de la diferencial anteriormente calculados.¹³

(5) Salida del módulo

La salida del módulo consta de:

- Espectro filtrado, $FFT2_{\text{filtrada}}$
- Vector con las longitudes de la ventana en el dominio frecuencial correspondiente a la coordenada Q obtenida para cada valor determinado de la frecuencia U , VQ .
- Vector de coordenadas interpoladas en el dominio frecuencial correspondiente a dicha coordenada, $Q_{\text{interpolada}}$, donde se define el espectro filtrado.

¹³ La interpolación se efectúa teniendo únicamente en cuenta la parte real de las frecuencias Q y $Q_{\text{interpolada}}$, pues su parte imaginaria es constante.

6.1.11. Módulos Q_{perfil} , K_{perfil} y dK/dQ_{perfil}

Estos módulos efectúan el cálculo de las frecuencias Q , K y la derivada dK/dQ . Para ello, se emplean las expresiones expuestas en la §3.2.3 y §3.3.3.

6.1.11.1. Módulo Q_{perfil}

La llamada a este método se muestra en la Tabla 6–1-16:

Tabla 6–1-16: Llamada al módulo Q_{perfil} .

$Q = Q_{\text{perfil}}(K, U, \omega, \epsilon_m, \mu_m, \sigma_m)$
--

(1) Entrada del módulo

La entrada del módulo consta de:

- Vector K de frecuencias conjugadas a las coordenadas D .
- Vector U de frecuencias conjugadas a las coordenadas X .
- Frecuencia de la antena, ω .
- Permitividad eléctrica promedio considerada en el filtro, ϵ_m .
- Permeabilidad magnética promedio considerada en el filtro, μ_m .
- Conductividad promedio considerada en el filtro, σ_m .

(2) Salida del módulo

El módulo devuelve como salida una matriz que contiene por columnas las frecuencias Q asociadas a las frecuencias K para cada valor de la frecuencia U , de acuerdo con (3.2.37).

6.1.11.2. Módulo K_{perfil}

La llamada a este método se muestra en la Tabla 6-1-17:

Tabla 6-1-17: Llamada al módulo K_{perfil} .

$K = K_{\text{perfil}}(Q, U, \omega, \epsilon_m, \mu_m, \sigma_m)$
--

(1) Entrada del módulo

La entrada del módulo consta de:

- El vector Q de frecuencias conjugadas a las coordenadas D .
- El vector U de frecuencias conjugadas a las coordenadas X .
- Frecuencia de la antena, ω .
- Permitividad eléctrica promedio considerada en el filtro, ϵ_m .
- Permeabilidad magnética promedio considerada en el filtro, μ_m .
- Conductividad promedio considerada en el filtro, σ_m .

(2) Salida del módulo

El módulo devuelve como salida una matriz que contiene por columnas las frecuencias K asociadas a las frecuencias Q para cada valor de la frecuencia U , de acuerdo con (3.2.34).

6.1.11.3. Módulo `dKdQperfil`

La llamada a este método se muestra en la Tabla 6–1-18:

Tabla 6–1-18: Llamada al módulo `dKdQperfil`.

```
diferencial = dKdQperfil(K, U, ω, εm, μm, σm)
```

(1) Entrada del módulo

La entrada del módulo consta de:

- El vector K de frecuencias conjugadas a las coordenadas D .
- El vector U de frecuencias conjugadas a las coordenadas X .
- Frecuencia de la antena, ω .
- Permitividad eléctrica promedio considerada en el filtro, ϵ_m .
- Permeabilidad magnética promedio considerada en el filtro, μ_m .
- Conductividad promedio considerada en el filtro, σ_m .

(2) Salida del módulo

El módulo devuelve como salida una matriz que contiene por columnas los valores de la derivada dK/dQ asociados a las frecuencias K para cada valor de la frecuencia U , de acuerdo con (3.3.4).

6.1.12. Módulo `spline3interp`

Este módulo interpola mediante splines cúbicos en una dimensión, haciendo uso de la expresión (3.3.3) de la obra de Press et al. (1992).

La llamada a este método se muestra en la Tabla 6–1-19:

Tabla 6–1-19: Llamada al módulo `spline3interp`.

```
yi = spline3interp(x, y, xi, yp1, ypn)
yi = spline3interp(x, y, xi)
```

(1) Entrada del módulo

La entrada del módulo consta de:¹⁴

- Los vectores x e y contienen, respectivamente, los valores de las abscisas y ordenadas correspondientes a una cierta función.
- El vector xi contiene las abscisas donde se interpola dicha función.
- Los escalares $yp1$ e ypn contienen, respectivamente, los valores de la derivada primera de la función interpoladora en el primer y último valor de x .¹⁵

(2) Salida del módulo

El módulo devuelve como salida el vector yi , que contiene los valores de las ordenadas resultado de interpolar en las ordenadas xi .

¹⁴ Se asume que x y xi son vectores ordenados, las abscisas x son todas distintas y que xi está contenido en x .

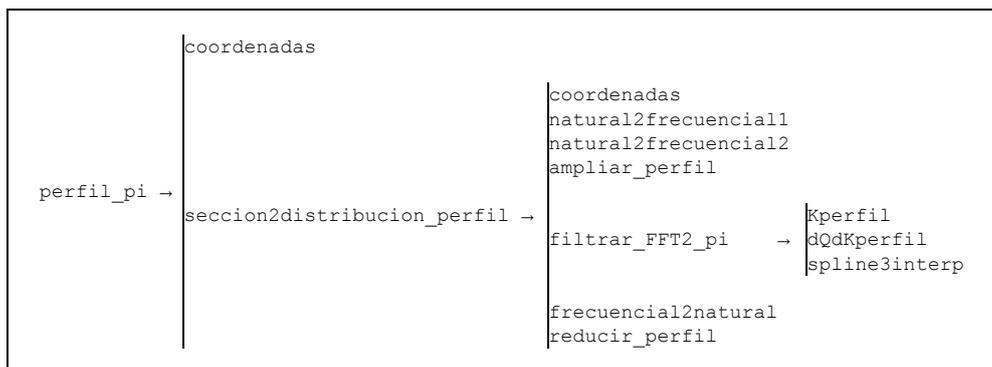
¹⁵ Los valores $yp1$ e ypn son las condiciones adicionales necesarias para la determinación de la derivada segunda de la función interpoladora en los puntos de x , la cual se determina mediante una rutina modificada de la rutina `spline` expuesta en la obra de Press et al. (1992). En el caso en que estos valores $yp1$ e ypn no se incluyan, se asume la condición de derivada segunda en el primer y último valor de x igual a cero (splines naturales).

6.2. Descripción técnica del algoritmo implementado para la resolución del Problema Inverso en dos dimensiones

Este algoritmo permite resolver el Problema Inverso para el caso de un único perfil, cuyo rumbo se asume en la dirección del eje \overline{OX} . Se emplea la metodología expuesta en la §3.3, obteniéndose los efectos de la difracción, pero no se reducen las ondas reflejadas múltiples en cada traza.

En la Tabla 6–2-1 se exponen los módulos en que se subdivide el algoritmo. Los módulos que son específicos de este algoritmo, y que no han sido descritos en la §6.1, serán descritos en las siguientes Subsecciones.

Tabla 6–2-1: Relación de módulos de que consta el algoritmo implementado para la resolución del Problema Inverso en dos dimensiones. Las flechas indican llamadas a los módulos correspondientes.



En estos módulos se emplean las funciones implementadas por MATLAB, así como algunas de las funciones incluidas en sus toolboxes.

6.2.1. Módulo `perfil_pi`

Este es el gui3n del algoritmo que permite resolver el Problema Inverso para un 3nico perfil. En 3l el usuario debe explicitar los par3metros que definen el radargrama que se quiere invertir. Todos ellos deber3n estar expresados en el Sistema Internacional de Unidades.

(1) Par3metros gen3ricos

Se define la frecuencia de la antena, ω .

(2) Parametrizaci3n del medio

Se definen los par3metros electromagn3ticos promedio:

- Permitividad el3ctrica, \mathcal{E}_m .
- Permeabilidad magn3tica, μ_m .
- Conductividad el3ctrica, σ_m .

(3) Defini3n de la SECCI3N MEDIDA

Se define la SECCI3N MEDIDA.

(4) Caracter3sticas geom3tricas de la SECCI3N MEDIDA

Se definen las caracter3sticas geom3tricas que definen la SECCI3N MEDIDA para la coordenada de tiempos dobles de recorrido:

- N3mero de puntos en el eje, PET .¹⁶
- Longitud del intervalo muestreado, LT .

¹⁶ El valor PET representa el n3mero de muestras por traza. En el algoritmo se supone que es un n3mero par, en caso contrario, debe incrementarse o decrementarse en una unidad, a3nadi3ndose o elimin3ndose una fila en la SECCI3N MEDIDA.

Con estos valores, mediante llamada al módulo `coordenadas` (Cf. §6.1.2.1), se calcula, para esta coordenada:

- Espaciado entre puntos, ET .
- Vector de coordenadas de las muestras, T .

Se definen las características geométricas que definen la SECCIÓN MEDIDA para la coordenada de distancia horizontal en la dirección y sentido del perfil:

- Número de puntos en el eje, PEX .¹⁷
- Longitud del intervalo muestreado, LX .

Con estos valores, mediante llamada al módulo `coordenadas` se calcula, para esta última coordenada:

- Espaciado entre puntos, EX .
- Vector de coordenadas de las muestras, X .

(5) Determinación de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD

Mediante llamada al módulo `seccion2distribucion_perfil` (Cf. §6.2.2), se determinan:

- DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD.
- Nuevo número de puntos en el eje D , correspondientes a la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD, $PED2$.
- Nueva longitud del intervalo muestreado en el eje D , correspondientes a la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD, $LD2$.¹⁸

Con los valores $PED2$ y $LD2$, mediante una nueva llamada a la función `coordenadas` se calcula, para la coordenada D :

- Espaciado entre puntos, $ED2$.
- Vector de coordenadas de las muestras, $D2$.

¹⁷ El valor PEX representa el número de trazas por perfil.

¹⁸ Análogamente a lo que ocurría en el caso del Problema Directo, los valores $PED2$ y $LD2$ serán, por construcción, menores que los valores PED y LD esperables.

6.2.2. Módulo `seccion2distribucion_perfil`

La llamada a este módulo se muestra en la Tabla 6-2-2:

Tabla 6-2-2: Llamada al módulo `seccion2distribucion_perfil`.

```
[distribucion, PED2, LD2] = ...
seccion2distribucion_perfil( $\omega$ ,  $\epsilon_m$ ,  $\mu_m$ ,  $\sigma_m$ , seccion, PET, LT, PEX, LX)
```

(1) Entrada del módulo

La entrada del módulo consta de:

- Frecuencia de la antena, ω .
- Permitividad eléctrica promedio considerada en el filtro, ϵ_m .
- Permeabilidad magnética promedio considerada en el filtro, μ_m .
- Conductividad promedio considerada en el filtro, σ_m .
- SECCIÓN MEDIDA (Cf. §6.1.1), definida en los ejes de tiempo doble de recorrido, T , y distancia horizontal en la dirección y sentido del perfil, X .
- Número de puntos en el eje de tiempos dobles de recorrido, PET .
- Longitud del intervalo muestreado en dicho eje, LT .
- Número de puntos en el eje de distancia horizontal en la dirección y sentido del perfil, PEX .
- Longitud del intervalo muestreado en dicho eje, LX .

(2) Determinación de la velocidad de propagación promedio

Se determina, con los valores promedio de los parámetros electromagnéticos en el perfil, la velocidad de propagación promedio de acuerdo con (3.2.15).

(3) Ampliación de la SECCIÓN MEDIDA

Se define para el dominio natural de las coordenadas D , definidas en la §3.2.2.3, el número de puntos en el eje de la forma $PED \equiv PET$.

Se determina la longitud del intervalo muestreado correspondiente a dicha coordenada, de acuerdo con 3.2.23, de la forma:

$$LD = \frac{c_m \cdot LT}{2} \quad (6.2.1)$$

Con estos valores, mediante llamada al módulo `coordenadas` (Cf. §6.1.2.1), se calcula el espaciado entre puntos, ED .

Se determinan las coordenadas D ampliadas, manteniéndose el espaciado entre puntos, ED , y definiendo:

- Nuevo número de puntos en el eje, $NPED \equiv 3 \cdot PED$.
- Nueva longitud del intervalo muestreado, $NLD \equiv (NPED - 1) \cdot ED$.

Con estos valores, mediante llamada al módulo `natural2frecuencial1` (Cf. §6.1.2.2), se calcula para el dominio natural correspondiente a esta coordenada:

- Vector de coordenadas de las muestras, D .
- Longitud de la ventana, VD .

Así mismo, para el dominio frecuencial conjugado:

- Espaciado entre puntos, EQ .
- Longitud del intervalo muestreado, LQ .
- Vector de coordenadas de las muestras, Q .
- Longitud de la ventana, VQ .

Se definen las coordenadas X ampliadas, manteniéndose el espaciado entre puntos, EX ,¹⁹ y definiendo:

- Nuevo número de puntos en el eje, $NPEX \equiv 2 \cdot PEX$.
- Nueva longitud del intervalo muestreado, $NLX \equiv (NPEX - 1) \cdot EX$.

¹⁹ Este espaciado se calcula mediante llamada al módulo `coordenadas`.

Con estos valores, mediante llamada al módulo `natural2frecuencial2` (Cf. §6.1.2.3), se calcula para el dominio natural correspondiente a esta coordenada:

- Vector de coordenadas de las muestras, X .
- Longitud de la ventana, VX .

Así mismo, para el dominio frecuencial conjugado:

- Espaciado entre puntos, EU .
- Longitud del intervalo muestreado, LU .
- Vector de coordenadas de las muestras, U .
- Longitud de la ventana, VU .

Se determina la SECCIÓN MEDIDA ampliada, mediante llamada al módulo `ampliar_perfil` (Cf. §6.1.9.1). Esta SECCIÓN MEDIDA ampliada es una matriz de tamaño $NPED \times NPEX$, definida de forma apropiada con el objeto de minimizar los efectos de borde y evitar la aparición de artefactos al tomar su transformada de Fourier (Zeng et al., 1995).

(4) Determinación del espectro

Se determina la transformada de Fourier de la SECCIÓN MEDIDA ampliada, $FFT2$, teniendo en cuenta los resultados expuestos en el Capítulo 4.

(5) Filtrado del espectro

Mediante llamada al módulo `filtrar_FFT2_pi` (Cf. §6.2.3) se aplica al espectro obtenido el filtro expuesto en la §3.3.2, obteniéndose:

- Espectro filtrado, $FFT2_{\text{filtrada}}$.
- Vector con las longitudes de la ventana en el dominio frecuencial correspondiente a la coordenada K obtenida para cada valor determinado de la frecuencia U .
- Vector de coordenadas interpoladas en el dominio frecuencial correspondiente a la coordenada K , donde se define el espectro filtrado.

Con estos valores se calcula la longitud del intervalo muestreado en el dominio frecuencial correspondiente a la coordenada K tras la interpolación, $LK2$.

Mediante llamada al módulo `frecuencial2natural` (Cf. §6.1.2.4), se calcula para el dominio natural conjugado correspondiente a esta coordenada:

- Espaciado entre puntos, $ED2$.
- Vector de coordenadas de los puntos, $D2$.
- Longitud del intervalo muestreado, $LD2$.
- Longitud de la ventana, $VD2$.

Así mismo, para el dominio frecuencial:

- Espaciado entre puntos, $EK2$.
- Vector de coordenadas de los puntos, $K2$.
- Longitud de la ventana, $VK2$.

(6) Determinación de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD

Se determina la transformada de Fourier inversa del espectro filtrado, teniendo en cuenta los resultados expuestos en el Capítulo 4, obteniéndose la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD ampliada.

Esta DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD ampliada se reduce, mediante llamada al módulo `reducir_perfil` (Cf. §6.1.9.2), obteniéndose:

- DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD.²⁰
- Nuevo número de puntos en el eje D , $PED2$.
- Nueva longitud del intervalo muestreado en dicho eje, $LD2$.

La salida del módulo consta de:

- DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD.
- Nuevo número de puntos en el eje D , $PED2$.
- Nueva longitud del intervalo muestreado en dicho eje, $LD2$.

²⁰ Esta DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD está truncada de tal forma que todos los valores de sus coordenadas D , $D2$, sean menores que la longitud del intervalo muestreado original, LD .

6.2.3. Módulo `filtrar_FFT2_pi`

En este módulo se aplican los resultados obtenidos en el Capítulo 3 en el diseño del algoritmo. La llamada a este módulo se muestra en la Tabla 6–2-3:

Tabla 6–2-3: Llamada al módulo `filtrar_FFT2_pi`.

```
[FFT2_filtrada, VK, K_interpolada] = filtrar_FFT2_pi(FFT2, Q, U, ω, εm, μm, σm, NPEX)
```

(1) Entrada del módulo

La entrada del módulo consta de:

- Transformada de Fourier de la SECCIÓN MEDIDA ampliada, $FFT2$.
- Vector de coordenadas de las frecuencias conjugadas de la coordenada D , Q .
- Vector de coordenadas de las frecuencias conjugadas de la coordenada X , U .
- Frecuencia de la antena, ω .
- Permitividad eléctrica promedio, ϵ_m .
- Permeabilidad magnética promedio, μ_m .
- Conductividad eléctrica promedio, σ_m .
- Nuevo número de puntos en el eje X , $NPEX$.

(2) Cálculos en el dominio frecuencial

Se calculan los parámetros en el dominio de frecuencias K :

- Matriz de frecuencias K , mediante llamada al módulo `Kperfil` (Cf. §6.1.11.2). Por columnas contiene los valores de K en función de las frecuencias Q para cada valor de la frecuencia U .
- Vector de longitudes de la ventana en el dominio frecuencial correspondiente a la coordenada K obtenida para cada valor determinado de la frecuencia U , VK .

- Vector de coordenadas interpoladas en el dominio frecuencial correspondiente a la coordenada K , $K_{\text{interpolada}}$. Este vector estará contenido en cada una de las columnas de la matriz K (esto es, en cada uno de los vectores de frecuencias K obtenidos para cada valor determinado de la frecuencia U).

(3) Determinación de la diferencial

Mediante llamada al módulo `dQdKperfil` (Cf. §6.2.4) se determinan los valores de la diferencial dQ/dK . Se encuentran contenidos en una matriz que contiene por columnas los valores de la diferencial en función de las frecuencias $Q_{\text{interpolada}}$ para cada valor de la frecuencia U .

(4) Filtrado del espectro

Se interpola el espectro $FFT2$ en los valores de las frecuencias $K_{\text{interpolada}}$, mediante llamada al módulo `spline3interp` (Cf. §6.1.12), y se determina el espectro filtrado, multiplicando el espectro interpolado por los valores de la diferencial anteriormente calculados.²¹

La salida del módulo consta de:

- Espectro filtrado, $FFT2_{\text{filtrada}}$
- Vector con las longitudes de la ventana en el dominio frecuencial correspondiente a la coordenada K obtenida para cada valor determinado de la frecuencia U , VK .
- Vector de coordenadas interpoladas en el dominio frecuencial correspondiente a la coordenada K , $K_{\text{interpolada}}$, donde se define el espectro filtrado.

²¹ La interpolación se efectúa teniendo únicamente en cuenta la parte real de las frecuencias K y $K_{\text{interpolada}}$, pues su parte imaginaria es constante.

6.2.4. Módulo `dQdKperfil`

La llamada a este método se muestra en la Tabla 6-2-4:

Tabla 6-2-4: Llamada al módulo `dQdKperfil`.

```
diferencial = dQdKperfil(K, U, ω, εm, μm, σm)
```

(1) Entrada del módulo

La entrada del módulo consta de:

- El vector K de frecuencias conjugadas a las coordenadas D .
- El vector U de frecuencias conjugadas a las coordenadas X .
- Frecuencia de la antena, ω .
- Permitividad eléctrica promedio considerada en el filtro, ϵ_m .
- Permeabilidad magnética promedio considerada en el filtro, μ_m .
- Conductividad eléctrica promedio considerada en el filtro, σ_m .

(2) Salida del módulo

El módulo devuelve como salida una matriz que contiene por columnas los valores de la derivada dQ/dK asociados a las frecuencias K para cada valor de la frecuencia U , de acuerdo con (3.3.1).

6.3. Descripción técnica de los algoritmos implementados para la resolución de los problemas Directo e Inverso en tres dimensiones

Los algoritmos implementados para la resolución de los problemas Directo e Inverso en tres dimensiones son completamente análogos a los expuestos en las §6.1 y §6.2 para la resolución de los problemas Inverso y Directo en dos dimensiones.

En las tablas 6-3-1 y 6-3-2 se exponen los módulos en que se subdividen sendos algoritmos.

Tabla 6-3-1: Relación de módulos de que consta el algoritmo implementado para la resolución del Problema Directo en tres dimensiones. Las flechas indican llamadas a los módulos correspondientes.

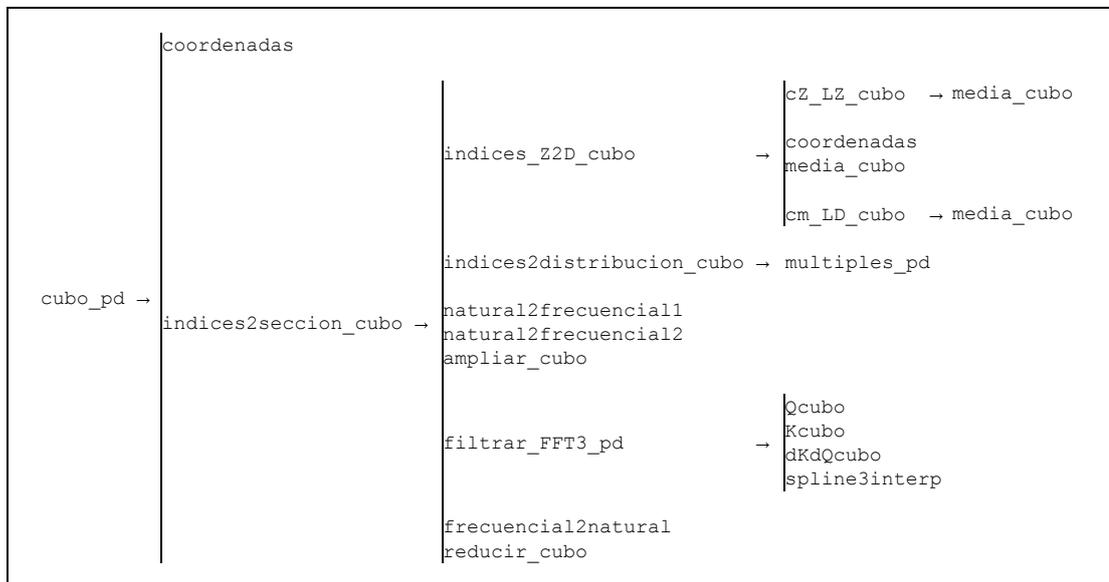
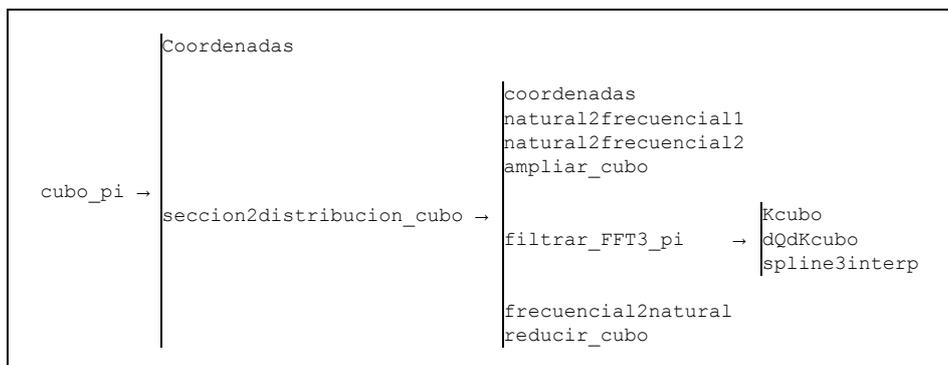


Tabla 6-3-2: Relación de módulos de que consta el algoritmo implementado para la resolución del Problema Inverso en tres dimensiones. Las flechas indican llamadas a los módulos correspondientes.



Algunos de estos módulos se corresponden idénticamente con los expuestos en las §6.1 y §6.2. En el resto, algunos objetos deben definirse con una dimensión más, lo que se corresponde al hecho de que la posición sobre la superficie ya no viene determinada por una única coordenada X a lo largo de un perfil, sino por dos coordenadas X e Y en el plano.²² La generalización es inmediata, por ejemplo:

- Se define la SECCIÓN DE ÍNDICES (Cf. §6.1.1) como un tensor de tamaño $PEZ \times PEX \times PEY$, de tal forma que el elemento (a, b, c) contiene el código correspondiente al reflector presente a la profundidad $Z(a)$ bajo el punto de la superficie en la posición $(X(b), Y(c))$, o el valor 0 en el caso en que no haya reflector presente.
- Se define la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD (Cf. §6.1.3) como un tensor de tamaño $PED \times PEX \times PEY$,²³ de tal forma que el elemento (a, b, c) contiene la reflectividad aparente asociada al punto de la subsuperficie correspondiente a la coordenada $D(a)$ bajo el punto de la superficie en la posición $(X(b), Y(c))$.
- Se define la SECCIÓN MEDIDA (Cf. §6.1.3) como un tensor de tamaño $PET \times PEX \times PEY$,²⁴ de tal forma que la columna dada por unos valores b y c fijos representa la traza correspondiente al punto de la superficie en la posición $(X(b), Y(c))$.

El resto de magnitudes presentes en los diferentes módulos se definen trivialmente de forma análoga.

²² La definición de los parámetros en el dominio natural PEX , LX , EX , X , VX y los parámetros en el dominio frecuencial LU , EU , U , VU es completamente análoga a la definición de los parámetros en el dominio natural PEY , LY , EY , Y , VY y los parámetros en el dominio frecuencial LV , EV , V , VV .

²³ Vs. $NPED \times NPEX \times NPEY$, en el caso de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD ampliada.

²⁴ Vs. $PET2 \times PEX \times PEY$ en el caso de la SECCIÓN MEDIDA troncada, o $NPED \times NPEX \times NPEY$, en el caso de la SECCIÓN MEDIDA ampliada.

6.A. Anexo A: Determinación de la velocidad de propagación promedio en el Problema Directo

La velocidad de propagación promedio c_m se corresponde en el Problema Directo con la velocidad cuadrática media espacial (Cf. §3.3.3), determinada sobre la SECCIÓN DE ÍNDICES definida en las coordenadas D (definida en la §3.2.2.3). Para ello es preciso determinar, a partir de la SECCIÓN DE ÍNDICES definida en las coordenadas Z , las coordenadas D de los reflectores presentes en el modelo y la longitud del intervalo del eje de coordenadas D muestreado, LD , valores que dependen, a su vez, de la velocidad de propagación promedio c_m .²⁵

Para solventar este problema se propone emplear un método iterativo para la determinación conjunta de la velocidad de propagación promedio c_m y la SECCIÓN DE ÍNDICES definida en las coordenadas D , implementada en el módulo `indices_z2D_perfil` (Cf. §6.1.4).

(1) Estima inicial de la velocidad de propagación promedio c_m y la longitud del intervalo del eje de coordenadas D muestreado, LD

Puesto que la información inicial disponible es la SECCIÓN DE ÍNDICES definida en las coordenadas Z , con un valor inicial de la longitud del intervalo muestreado en dicho eje, LZ , se propone emplear como estima inicial de c_m la velocidad de propagación media sobre esta SECCIÓN DE ÍNDICES, c_z , y como estima inicial de LD el valor de LZ . Estas magnitudes c_z y LZ son conceptualmente diferentes de las magnitudes que se pretende estimar c_m y LD , pero pueden ser empleadas como valores numéricos iniciales razonablemente próximos, y verifican una relación similar a (6.1.4), también expuesta en la nota al pie 25, dada por (Sheriff y Geldart, 1982, §3.2.2 y ecuación 3.3):

$$LZ = \frac{c_z \cdot LT}{2} \quad (6.1.3)$$

²⁵ Obsérvese que las integrales en (3.2.18) se reducen a sumatorios en el caso en que se considera una estratificación horizontal de medios homogéneos. Así, si en una columna se encontraran presentes los reflectores ab en la posición $Z = Z_{ab}$ y el reflector bc en la posición $Z = Z_{bc}$, las coordenadas D correspondientes a ambos reflectores se calcularían de la forma:

$$D_{ab} = \frac{c_m}{c_a} Z_{ab}, \quad D_{bc} = \frac{c_m}{c_a} Z_{ab} + \frac{c_m}{c_b} (Z_{bc} - Z_{ab}).$$

Así mismo, se determina la longitud del intervalo del eje de coordenadas D muestreado, LD , de acuerdo con la relación entre la coordenada D y el tiempo en la SECCIÓN MEDIDA, expuesta en (3.2.19), de la forma:

$$LD = \frac{c_m \cdot LT}{2}$$

Puesto que el valor inicial de LZ es un dato inicial arbitrario, se propone emplear un método iterativo para la determinación conjunta de c_z y LZ , implementado en el módulo `cZ_LZ_perfil` (Cf. §6.1.5.1), en la siguiente forma:

1. Se calcula, mediante llamada al módulo `media_perfil`, la velocidad de media c_z empleándose como profundidad máxima el valor LZ inicial.
2. Con este valor de c_z se calcula, mediante (6.1.3), un nuevo valor de la longitud del intervalo muestreado en el eje Z , LZ' .

Mientras ambos valores LZ y LZ' no sean suficientemente próximos,²⁶ se realiza:

3. Se redefine $LZ = LZ'$.
4. Se recalcula c_z con este nuevo valor de LZ .
5. Se recalcula LZ' con este nuevo valor de c_z .

Esta metodología permite determinar unos valores de c_z y LZ que verifican la condición (6.1.3) de tal forma que, estimando c_m y LD por estos valores, ambos verificarán la condición (6.1.4).

(2) Determinación de la velocidad de propagación promedio c_m y la SECCIÓN DE ÍNDICES definida en las coordenadas D

Una vez estimado el valor de la velocidad de propagación promedio c_m , es posible determinar la SECCIÓN DE ÍNDICES definida en las coordenadas D . Esta nueva SECCIÓN DE ÍNDICES, de tamaño $PED \times PEX$, se define de tal forma que el elemento (a, b) contiene el código correspondiente al reflector presente para el valor de la coordenada $D(a)$ bajo el punto en la posición $X(b)$ a lo largo del perfil, o el valor 0 en el caso en que no haya reflector presente.

Para ello, se localizan en cada columna de la SECCIÓN DE ÍNDICES original los índices de los reflectores presentes y se calculan, de acuerdo con 3.2.18, las coordenadas D a las que se encuentran, dados los valores de sus profundidades Z , las velocidades de propagación de cada medio, contenidas en el vector c , y la velocidad de propagación promedio c_m . Estos índices se

²⁶ Se propone considerar que LZ y LZ' son suficientemente próximos cuando $\frac{|LZ - LZ'|}{\min\{LZ, LZ'\}} \leq 10^{-5}$.

asignan a la columna correspondiente de la nueva SECCIÓN DE ÍNDICES, en las filas cuyos valores $D(a)$ sean más próximos a los valores de las coordenadas D calculadas.

Como se indicó en §3.2.2.3., la velocidad de propagación promedio c_m debe ser tal que verifique $(c_m/c)^2 \simeq 1$ en promedio sobre la SECCIÓN. Para comprobarlo, mediante llamada al módulo `media_perfil` se determina el valor promedio del cociente $(c_m/c)^2$ en esta nueva SECCIÓN DE ÍNDICES.

Mientras la diferencia entre este valor promedio y la unidad no sea suficientemente pequeña,²⁷ se realiza:

1. Se recalculan, mediante llamada al módulo `cm_LD_perfil` (Cf. §6.1.5.2), los valores de c_m y LD correspondientes a la nueva SECCIÓN DE ÍNDICES.
2. Se recalculan las coordenadas D correspondientes a estos valores.
3. Se construye, con dichos valores, una nueva SECCIÓN DE ÍNDICES.
4. Mediante llamada al módulo `media_perfil` se determina el valor promedio del cociente $(c_m/c)^2$ en esta nueva SECCIÓN DE ÍNDICES.

Esta metodología permite garantizar que la velocidad de propagación promedio c_m y la SECCIÓN DE ÍNDICES son tales que se verifica $(c_m/c)^2 \simeq 1$ en promedio sobre la SECCIÓN.

El módulo `cm_LD_perfil` anteriormente referido es similar al anteriormente descrito `cZ_LZ_perfil`, en el que se propone emplear un método iterativo para la determinación conjunta de c_m y LD en la siguiente forma:

1. Se calcula, mediante llamada al módulo `media_perfil`, la velocidad cuadrática media c_m empleándose como coordenada D máxima el valor LD inicial.
2. Con este valor de c_m se calcula, mediante (6.1.4), un nuevo valor de la longitud del intervalo muestreado en el eje D , LD' .

²⁷ Se propone considerar que esta diferencia es suficientemente pequeña cuando es menor de 10^{-3} .

Mientras ambos valores LD y LD' no sean suficientemente próximos,²⁸ se realiza:

3. Se redefine $LD = LD'$.
4. Se recalcula c_m con este nuevo valor de LD .
5. Se recalcula LD' con este nuevo valor de c_m .

Esta metodología permite determinar unos valores de c_m y LD que verifican la condición (6.1.4).

²⁸ Se propone considerar que LD y LD' son suficientemente próximos cuando $\frac{|LD - LD'|}{\min\{LD, LD'\}} \leq 10^{-5}$.

6.B. Anexo B: Determinación de las ondas reflejadas múltiples

En esta Sección se estudia la metodología para la determinación de las ondas reflejadas múltiples en cada traza, tanto en la resolución del Problema Directo como del Problema Inverso.

6.B.1. Problema Directo

En la aplicación del algoritmo para la resolución del Problema Directo, previo a la aplicación del filtro, debe tenerse en cuenta la posible existencia de reflexiones múltiples. Para ello, se determinan las posiciones y reflectividades de unos reflectores ficticios que permitan su aparición en el radargrama.

Atendiendo a las restricciones estructurales del algoritmo, expuestas en la §3.3.1 del Capítulo 3, únicamente se consideran modelos constituidos por estratificaciones horizontales que incluyan difractores puntuales. Así pues, en la determinación automática de las ondas reflejadas múltiples únicamente tendrá sentido considerar la propagación en la dirección de la vertical.

La determinación de las ondas reflejadas múltiples en el Problema Directo se efectúa en el módulo `multiples_pd` (Cf. §6.1.8). En este módulo se hace un seguimiento de la onda que parte del emisor, de acuerdo con las siguientes consideraciones:

La propagación de las ondas electromagnéticas se realiza en la dirección de la vertical.

Las ondas que llegan a cada reflector se dividen: una parte es reflejada y otra es transmitida, de acuerdo con los coeficientes apropiados.

Las ondas transmitidas a través del último reflector no podrán volver a ascender y no serán registradas.

Las ondas asociadas a reflectores con coordenadas D mayores que el valor máximo LD no serán registradas.

Las ondas asociadas a reflectores con reflectividades menores en módulo al valor mínimo $r_{\text{mínima}}$ no serán registradas.

La reflectividad aparente y el valor de la coordenada D asociada para cada onda es calculada para cada múltiple y actualizada tras cada reflexión o transmisión. La forma en que se llevan a cabo estos cálculos se ejemplifica en la Tabla 6-B-1 para el caso mostrado en la Figura 6-B-1.

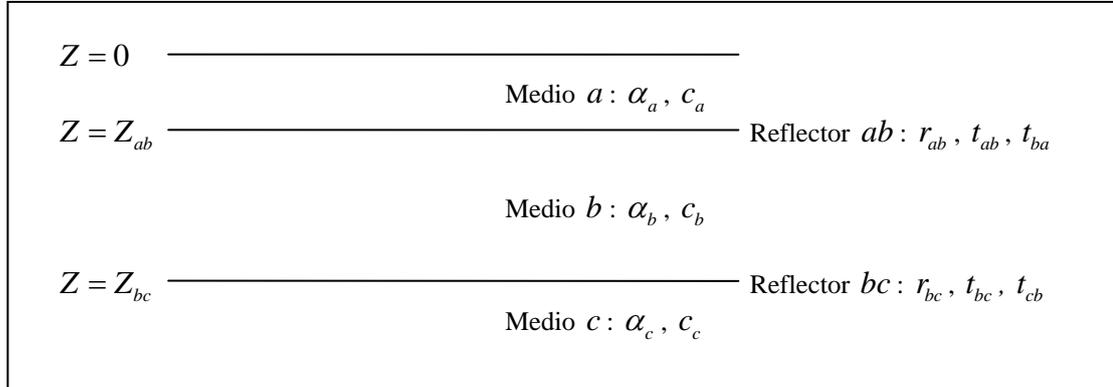


Figura 6-B-1: Ejemplo de determinación ondas reflejadas múltiples en el Problema Directo.

Tabla 6-B-1: Ejemplo del cálculo de la reflectividad aparente y la coordenada D asociada a cada onda, correspondiente al caso mostrado en la Figura 6-B-1.

Paso	Ondas viajeras	Reflectividad aparente	Coordenada D
0	$0a$	$r = e^{-\alpha_a Z_{ab}}$	$D = \frac{c_m}{c_a} Z_{ab}$
1	$0a0$	$r = e^{-\alpha_a Z_{ab}} \cdot r_{ab} \cdot e^{-\alpha_a Z_{ab}}$	$D = 2 \frac{c_m}{c_a} Z_{ab}$
	$0ab$	$r = e^{-\alpha_a Z_{ab}} \cdot t_{ab} \cdot e^{-\alpha_b (Z_{bc} - Z_{ab})}$	$D = \frac{c_m}{c_a} Z_{ab} + \frac{c_m}{c_b} (Z_{bc} - Z_{ab})$
2	$0aba$	$r = e^{-\alpha_a Z_{ab}} \cdot t_{ab} \cdot e^{-2\alpha_b (Z_{bc} - Z_{ab})} \cdot r_{ab}$	$D = \frac{c_m}{c_a} Z_{ab} + 2 \frac{c_m}{c_b} (Z_{bc} - Z_{ab})$
3	$0aba0$	$r = e^{-2\alpha_a Z_{ab}} \cdot t_{ab} \cdot e^{-2\alpha_b (Z_{bc} - Z_{ab})} \cdot r_{ab} \cdot t_{ba}$	$D = 2 \left[\frac{c_m}{c_a} Z_{ab} + \frac{c_m}{c_b} (Z_{bc} - Z_{ab}) \right]$
	$0abab$	$r = -e^{-\alpha_a Z_{ab}} \cdot t_{ab} \cdot e^{-3\alpha_b (Z_{bc} - Z_{ab})} \cdot r_{ab}^2$	$D = \frac{c_m}{c_a} Z_{ab} + 3 \frac{c_m}{c_b} (Z_{bc} - Z_{ab})$

En el paso 0 se considera:

- Onda $0a$, que parte del emisor y que, atravesando el medio a , alcanza el reflector ab .

En el paso 1 se consideran:

- Onda $0a0$, correspondiente a la parte de la onda $0a$ reflejada en el reflector ab y que, atravesando el medio a , es registrada en el receptor.
- Onda $0ab$, correspondiente a la parte de la onda $0a$ transmitida a través del reflector ab y que, atravesando el medio b , alcanza el reflector bc .

En el paso 2 se considera:²⁹

- Onda $0aba$, correspondiente a la parte de la onda $0ab$ reflejada en el reflector bc y que, atravesando el medio b , alcanza el reflector ab .

En el paso 3 se consideran:

- Onda $0aba0$, correspondiente a la parte de la onda $0aba$ transmitida a través del reflector ab y que, atravesando el medio a , es registrada en el receptor.
- Onda $0abab$, correspondiente a la parte de la onda $0aba$ reflejada en el reflector ab y que, atravesando el medio b , alcanza el reflector bc .

En cada paso se examinan la reflectividad aparente y las coordenadas D acumuladas de todas las ondas, eliminándose aquellas cuya reflectividad aparente no supere en módulo el valor mínimo $r_{\text{mínima}}$ o cuyo valor de D exceda el valor máximo LD . Este proceso finaliza cuando todas las ondas viajeras hayan alcanzado el receptor, o bien hayan sido eliminadas.

Los reflectores ficticios asociados a cada onda reflejada múltiple, $0a0$, $0aba0$, $0ababa0$, etc., están caracterizados por las reflectividades aparentes r y las coordenadas D correspondientes.

6.B.2. Problema Inverso

Existen diferentes estrategias para el tratamiento de ondas múltiples, tal como se discute en la §8.2.5. Estas estrategias permiten la identificación y eliminación parcial de las múltiples, aunque sin asignar su energía a la primaria que les corresponde, lo que conlleva un inevitable deterioro de la señal.

²⁹ La onda correspondiente a la parte de la onda $0ab$ transmitida a través del reflector bc no se considera, pues no podrá volver a ascender y no será registrada.

En cualquiera de los casos la eliminación de múltiples es una tarea complicada, pues no son completamente separables de las señales primarias de acuerdo con criterios como periodicidad o espectro (Yarovoy, 2003; Nobes et al., 2005), y es requerido un modelado preciso de la propagación de las ondas, con una determinación exacta tanto de los tiempos de recorrido como de las amplitudes (Youn y Zhou, 2001).³⁰

Todos los métodos referidos requieren una implementación adicional mucho más compleja que la empleada en el diseño de los algoritmos realizado en esta Tesis Doctoral, quedando descartada la operación automática. Así pues, la eliminación de múltiples no se implementa en esta Tesis Doctoral, y será un aspecto a tratar en la continuación de la misma.

³⁰ Como se discute en la §7.5, con la metodología propuesta se obtienen las señales en los tiempos de recorridos precisos, no ocurriendo así con las amplitudes.

Capítulo 7

*Aplicación de los algoritmos
a datos sintéticos*

En este séptimo Capítulo se aplican los algoritmos diseñados en el Capítulo 3, con la implementación descrita en el Capítulo 6, a diversos modelos sencillos.¹

El presente Capítulo se encuentra dividido en cinco Secciones dedicadas, respectivamente:

- A la aplicación del algoritmo para la resolución del Problema Directo en dos dimensiones.
- A la aplicación del algoritmo para la resolución del Problema Directo en tres dimensiones.
- A la aplicación del algoritmo para la resolución del Problema Inverso en dos dimensiones.
- A la aplicación del algoritmo para la resolución del Problema Inverso en tres dimensiones.
- A la exposición y discusión de los principales resultados obtenidos, tanto para la resolución del Problema Directo como del Problema Inverso.

Así mismo, se incluye un Anexo dedicado a la resolución analítica del Problema Directo en dos dimensiones.

En los casos estudiados en las dos primeras Secciones, dedicadas a la resolución del Problema Directo, se muestran y caracterizan los resultados obtenidos mediante la aplicación del algoritmo, comparándose, en los casos en que sea pertinente, con los resultados analíticos expuestos en el Anexo.² En lo que sigue se seguirá refiriendo a los radargramas obtenidos mediante la aplicación del algoritmo como **SECCIÓN MEDIDA**, mientras que se referirá a los resultados analíticos correspondientes como **SECCIÓN ESPERADA**.

En los casos estudiados en las dos Secciones siguientes, dedicadas a la resolución del Problema Inverso, se muestran y caracterizan los resultados obtenidos mediante la aplicación del algoritmo a las SECCIONES obtenidas en las dos primeras, comparándose éstos con la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondiente.³ En lo que sigue se referirá a los resultados obtenidos mediante la aplicación del algoritmo para la resolución del Problema Inverso a la SECCIÓN MEDIDA como **DISTRIBUCIÓN MEDIDA**, mientras que se referirá a los resultados obtenidos mediante la aplicación del algoritmo a la SECCIÓN ESPERADA como **DISTRIBUCIÓN ESPERADA**.

¹ Tal como se mencionó en la §3.3.3, únicamente se tendrá en consideración la parte real de la SECCIÓN MEDIDA.

² En estos casos, por simplicidad y sin pérdida de generalidad, no se tendrán en cuenta las reflexiones múltiples entre la antena y la superficie. Volverá a hacerse hincapié en este aspecto en la §7.5, dedicada a la exposición y discusión de los principales resultados obtenidos.

³ En la resolución del Problema Inverso mediante el algoritmo implementado en el Capítulo 6 no se reducen las ondas reflejadas múltiples en cada traza (Cf. §6.B), razón por la que se comparan la DISTRIBUCIÓN MEDIDA y la DISTRIBUCIÓN ESPERADA con la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD, que las incluye (Cf. §6.1.3).

En todos los casos se empleará como referencia la frecuencia de 900 MHz, pues los resultados obtenidos con otras frecuencias no difieren significativamente de éstos. Volverá a hacerse hincapié en este aspecto en la §7.5, dedicada a la exposición y discusión de los principales resultados obtenidos.

Así mismo, los valores de los parámetros electromagnéticos correspondientes a los medios han sido tomados de la Tabla 2.1 de Lorenzo (1994).

En todos los procesos se adjunta el tiempo medio de cómputo. Los algoritmos han sido ejecutados en un PC de sobremesa con procesador AMD Athlon™ 1,24 GHz, 384 MB de RAM y un disco duro de 60 GB.

7.1. Aplicación del algoritmo para la resolución del Problema Directo en dos dimensiones

En esta Sección se aplica el algoritmo para la resolución del Problema Directo a diversos modelos sencillos y representativos:

- Un difractor puntual.⁴
- Una superposición de capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito.
- Modelo realista.

Con objeto de remarcar las características fundamentales, en los dos primeros modelos se emplean valores realistas para los parámetros que caracterizan los medios, pero no se emplean éstos en la determinación de los parámetros que caracterizan el difractor o los reflectores, sino que se emplean otros valores dados.

En todos los casos se muestran y caracterizan los radargramas obtenidos mediante la aplicación del algoritmo (SECCIÓN MEDIDA), comparándose, en los casos en que sea pertinente, con los resultados analíticos expuestos en el Anexo 7.A (SECCIÓN ESPERADA).

7.1.1. Un difractor puntual

Este modelo está constituido por un difractor puntual aislado, inmerso en una matriz homogénea. Este modelo es de utilidad general, pues modelos más complejos pueden ser estudiados a partir de éste mediante aplicación del principio de superposición, hallándose el radargrama correspondiente como suma de los obtenidos para cada difractor puntual.⁵

⁴ Se considera que aparece difracción cuando el tamaño de los cuerpos y las aberturas es del mismo orden de magnitud que la longitud de onda, esto es, cuando las propiedades electromagnéticas del medio cambian en una longitud del orden de la longitud de onda.

En el caso en que el tamaño de los cuerpos es mucho mayor que la longitud de onda, cada punto del cuerpo se comporta como un emisor de radiación, y se observa la interferencia entre estas señales como una reflexión.

En el caso en que el tamaño de los cuerpos es mucho menor que la longitud de onda, no son detectables. (Born y Wolf, 2002, Capítulo III).

⁵ Esto es de aplicación tanto en el caso de conjuntos de difractores puntuales aislados como en el caso de superficies reflectoras, pues en este último caso se considera que están constituidas por elementos difractores puntuales (Cf. §3.3.1 y nota 1 del presente Capítulo).

(1) Descripción del modelo

En este modelo se emplean valores realistas para los parámetros que caracterizan la matriz, pero no se emplean éstos en la determinación del parámetro que caracteriza el difractor, sino que se emplean otros valores dados con objeto de remarcar las características fundamentales.

La descripción del modelo se detalla en la Tabla 7-1-1:

Tabla 7-1-1: Descripción del modelo bidimensional constituido por un único difractor puntual.

<u>Caracterización del perfil:</u>	
Número de trazas:	$PEX = 350$
Longitud:	$LX = 15,00 m$
Espaciado entre trazas:	$EX = 0,043 m$
Número de muestras por traza:	$PET = 512$
Tiempo de muestreo:	$LT = 50 \cdot 10^{-9} s$
Espaciado entre muestras:	$ET = 0,098 \cdot 10^{-9} s$
<u>Caracterización de la antena:</u>	
Pulsación:	$\omega = 2\pi \cdot 900 \cdot 10^6 s^{-1}$
<u>Caracterización de la matriz (Arenas):</u>	
Permitividad eléctrica:	$\varepsilon = 2 \cdot \varepsilon_0$
Permeabilidad magnética:	$\mu = \mu_0$
Conductividad eléctrica:	$\sigma = 10^{-4} S \cdot m^{-1}$
Velocidad de propagación: ⁶	$c_1 = 2,1198 \cdot 10^8 m \cdot s^{-1}$
Constante de propagación:	$\gamma_1 = (0,0133 + 59,28i) m^{-1}$
<u>Caracterización del difractor puntual:</u>	
Coefficiente de reflexión:	$r_{12} = -0,7000 + 0,0001i$
Posición:	$X_1 = 7,48 m, Z_1 = 1,00 m$

⁶ En este caso, al haber un único medio, la velocidad promedio coincidirá con la velocidad de propagación en el medio, $c_m = c_1$.

(2) SECCIÓN DE ÍNDICES

El modelo consta de un único punto difractor. La SECCIÓN DE ÍNDICES (Cf. §6.1.1) correspondiente a este modelo se muestra en la Figura 7-1-1:

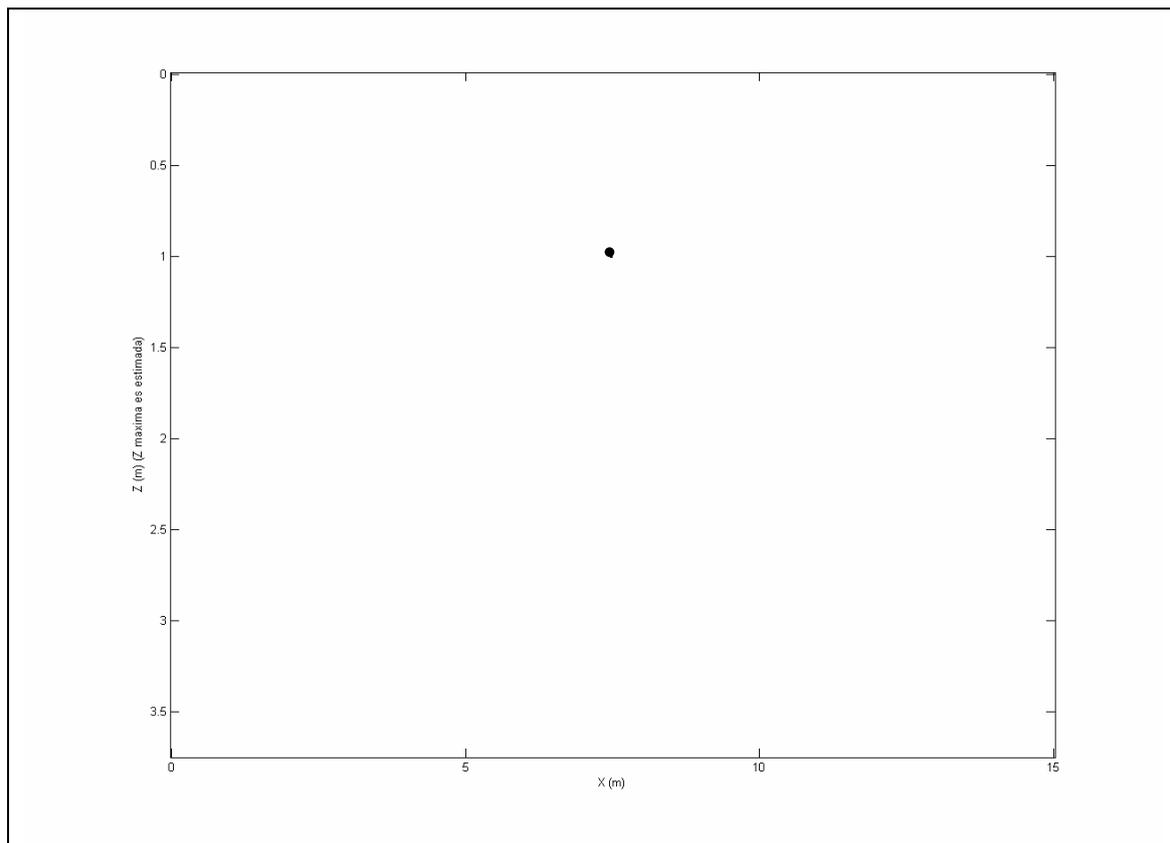


Figura 7-1-1: SECCIÓN DE ÍNDICES correspondiente al modelo bidimensional constituido por un único difractor puntual.

(3) DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD

La DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD (Cf. §6.1.3) determinada mediante la aplicación del algoritmo se muestra en la Figura 7-1-2:

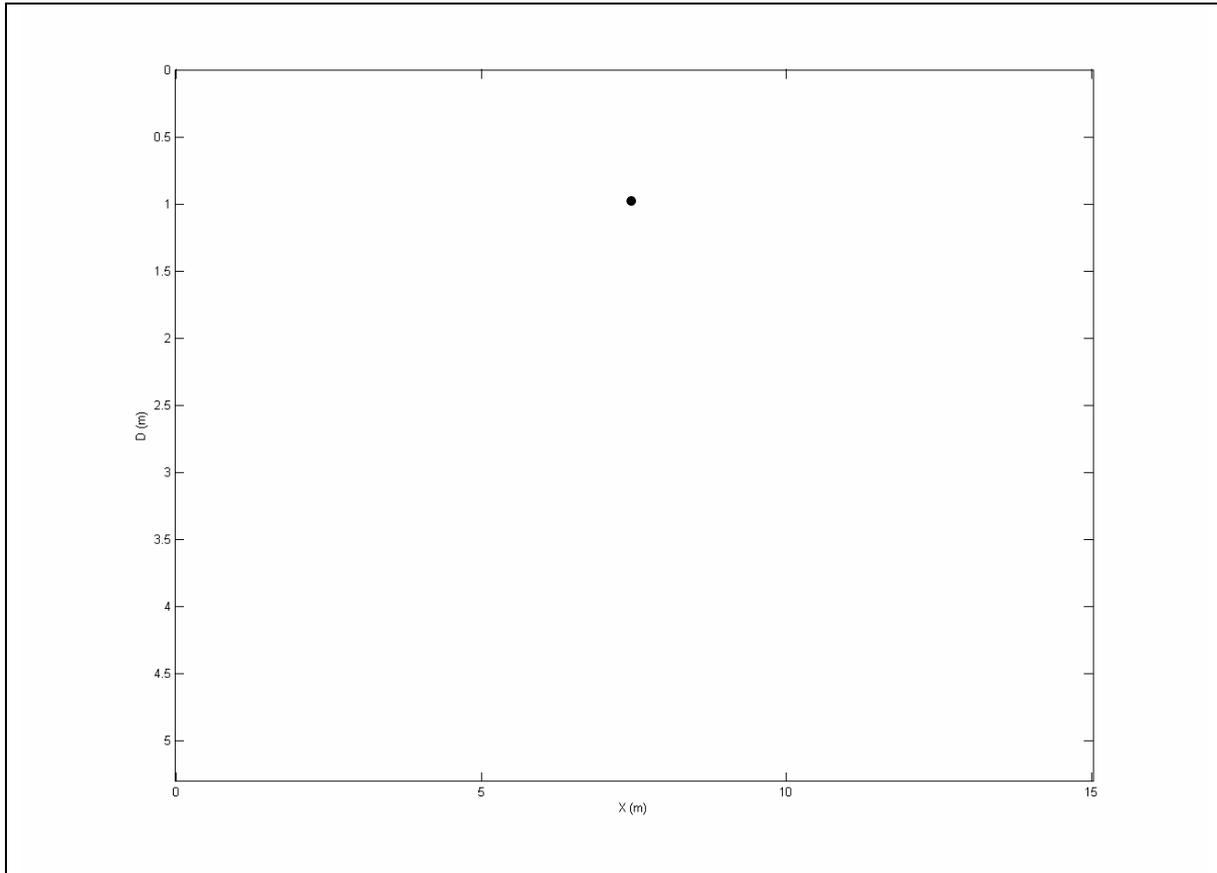


Figura 7-1-2: DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondiente al modelo bidimensional constituido por un único difractor puntual. La reflectividad aparente del punto es $r = 0,6805 + 0,0387i$.

(4) SECCIÓN MEDIDA

La descripción de la SECCIÓN MEDIDA obtenida se detalla en la Tabla 7–1-2:

Tabla 7–1-2: Descripción de la SECCIÓN MEDIDA correspondiente al modelo bidimensional constituido por un único difractor puntual.

<u>Caracterización del perfil:</u>	
Número de trazas:	$PEX = 350$
Longitud:	$LX = 15,00\text{ m}$
Espaciado entre trazas:	$EX = 0,043\text{ m}$
Número de muestras por traza:	$PET = 450$
Tiempo de muestreo:	$LT = 49,966 \cdot 10^{-9}\text{ s}$
Espaciado entre muestras:	$ET = 0,111 \cdot 10^{-9}\text{ s}$

La comparación entre la SECCIÓN MEDIDA y la SECCIÓN ESPERADA se muestra en las figuras 7–1–3 y 7–1–4.

Páginas siguientes:

Figura 7–1-3: Comparación entre la SECCIÓN MEDIDA y la SECCIÓN ESPERADA correspondientes al modelo bidimensional constituido por un único difractor puntual.

- (a) SECCIÓN MEDIDA.*
- (b) SECCIÓN ESPERADA.*

- (c) Logaritmo decimal del valor absoluto de la SECCIÓN MEDIDA.*
- (d) Logaritmo decimal del valor absoluto de la SECCIÓN ESPERADA.*

Figura 7–1-4: Trazas representativas de la SECCIÓN MEDIDA y la SECCIÓN ESPERADA correspondientes al modelo bidimensional constituido por un único difractor puntual.

- (a) Selección de trazas.*
- (b) Detalle.*

En todos los casos se representa, frente al tiempo doble de recorrido (ns), las trazas correspondientes a la SECCIÓN MEDIDA (puntos) y las correspondientes a la SECCIÓN ESPERADA (círculos).

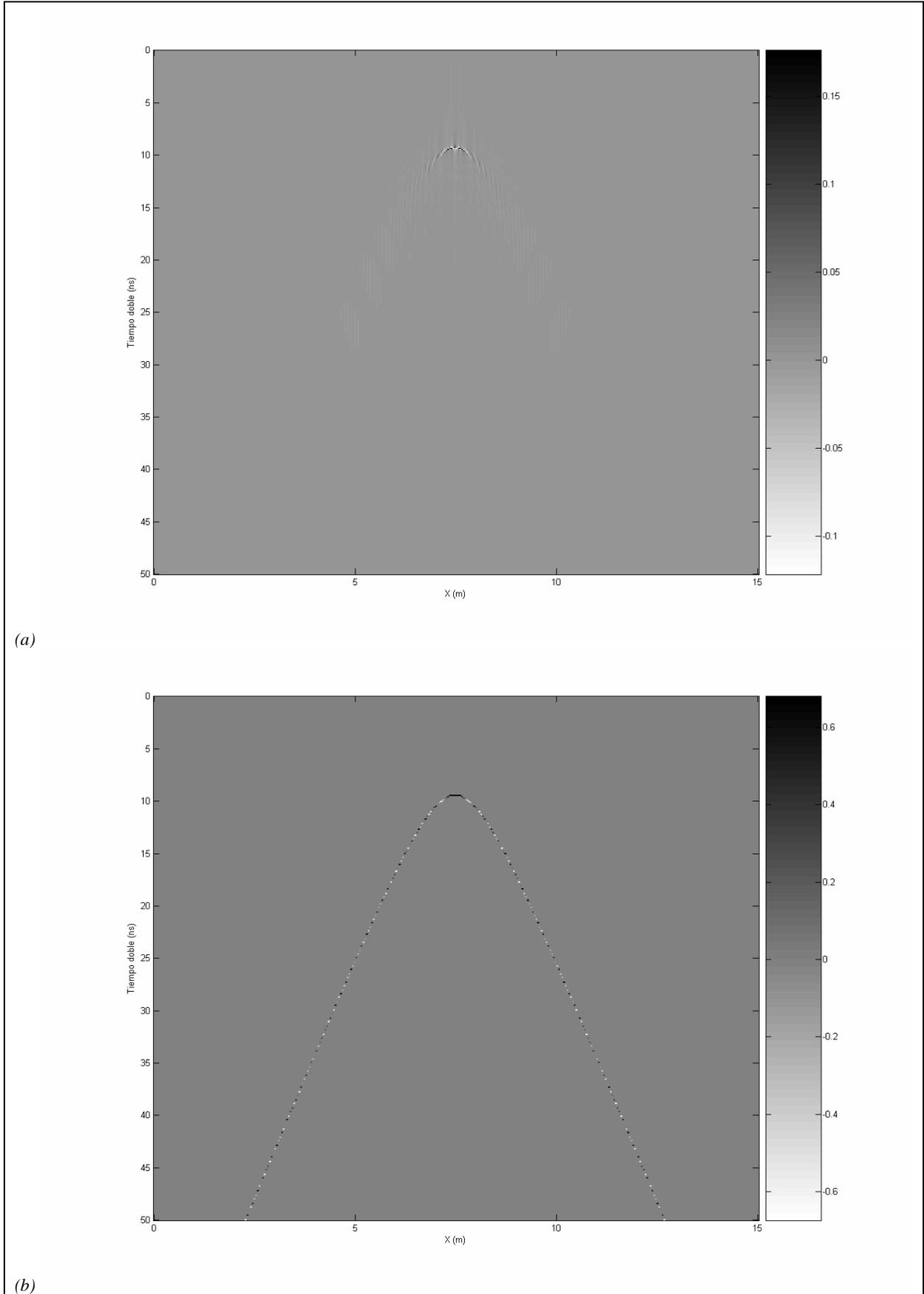
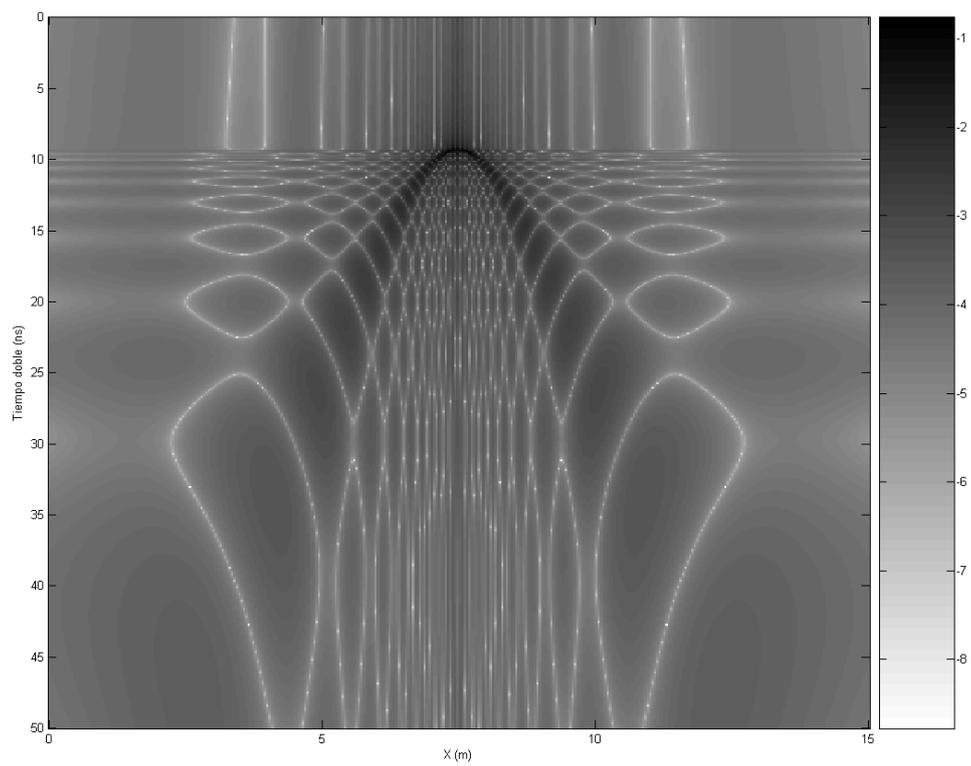
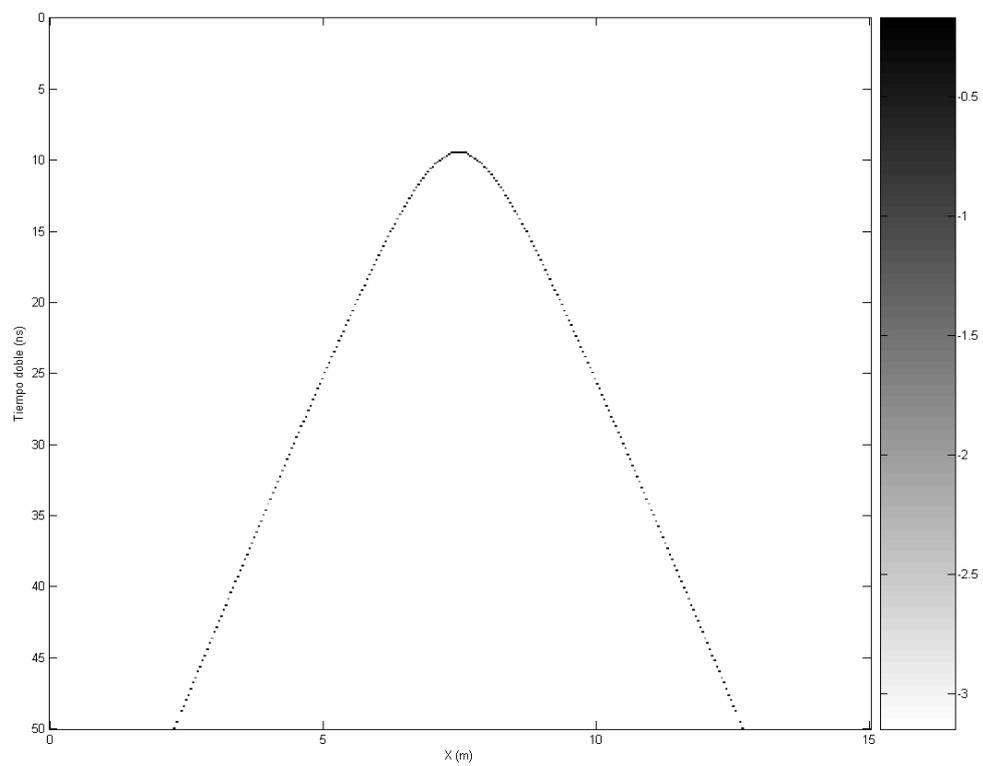


Figura 7-1-3



(c)



(d)

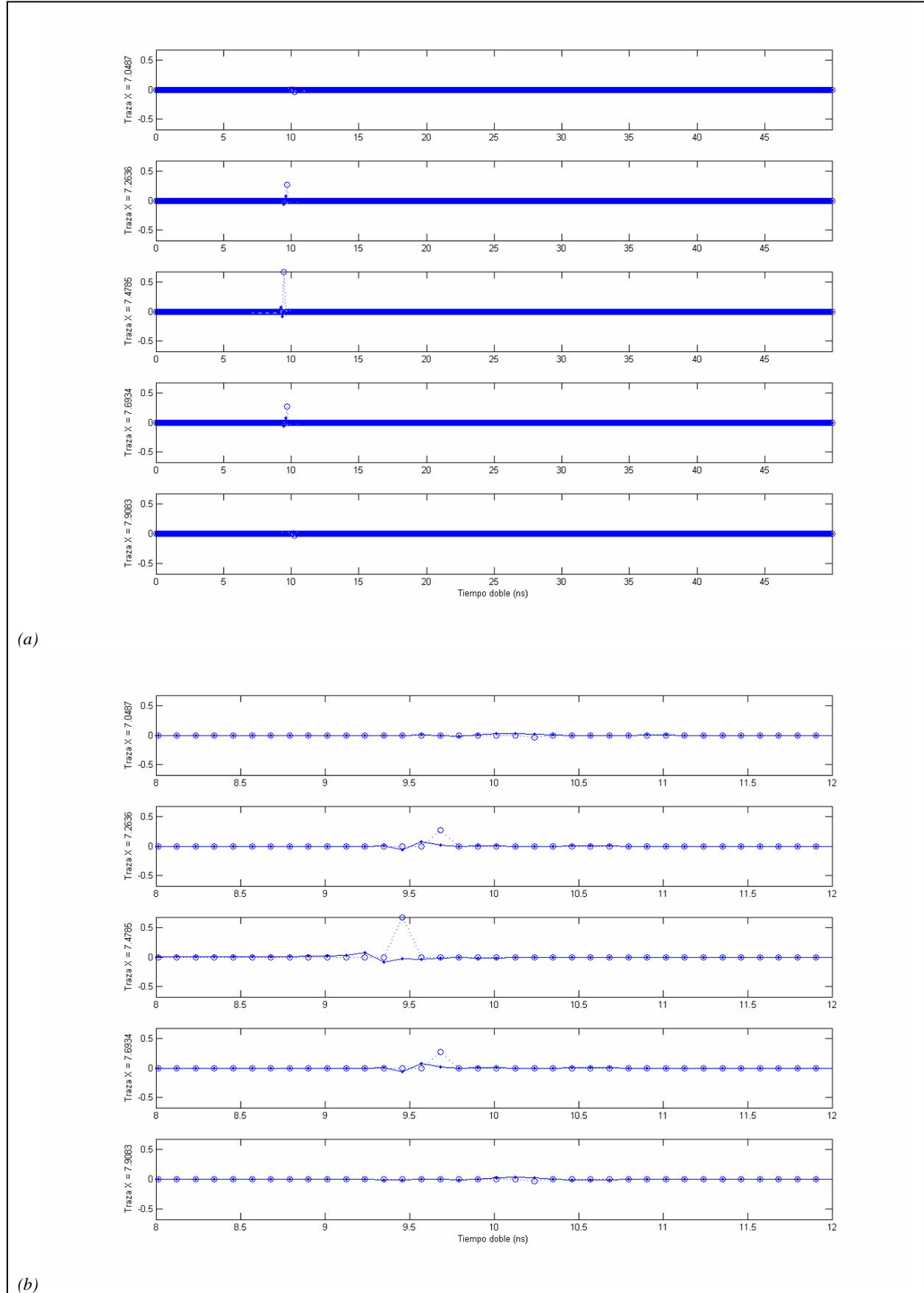


Figura 7-1-4

(5) Caracterización y comparación de resultados

El tiempo medio de cómputo para este modelo es de 18,5032 s.

A la vista de los resultados expuestos en las figuras del punto anterior, pueden resaltarse las siguientes características generales:

- La SECCIÓN MEDIDA presenta las características geométricas esperables: La señal correspondiente a un difractor puntual es una hipérbola.
- La posición del vértice de la hipérbola en la SECCIÓN MEDIDA no está nítidamente definido, sino que la señal es no nula en algunos puntos previos y posteriores al máximo.
- Aun teniendo en cuenta los aspectos señalados en el punto anterior, la hipérbola se encuentra localizada en la posición horizontal y tiempo doble de recorrido que se obtiene en la SECCIÓN ESPERADA dentro del margen de error asumible por la naturaleza discreta de la SECCIÓN MEDIDA.
- Las amplitudes de la señal en la SECCIÓN MEDIDA son inferiores a las que se obtienen en la SECCIÓN ESPERADA. Así mismo, las fases difieren de las que se obtienen en ésta.

En los modelos estudiados en las Subsecciones siguientes se obtienen resultados análogos. Los resultados conjuntos serán discutidos en la Sección 7.5, dedicada a la exposición y discusión de los principales resultados obtenidos.

7.1.2. Superposición de capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito

Este modelo está constituido por dos capas plano-paralelas, superpuestas a un semiespacio infinito. Es equivalente a considerar dos reflectores plano-paralelos, situados en las interfaces entre capas, y entre la última capa y el semiespacio.

(1) Descripción del modelo

En este modelo se emplean valores realistas para los parámetros que caracterizan los medios, pero no se emplean éstos en la determinación de los parámetros que caracterizan los reflectores, sino que se emplean otros valores dados con objeto de remarcar las características fundamentales.

La descripción del modelo se detalla en la Tabla 7-1-3:

Tabla 7-1-3: Descripción del modelo bidimensional constituido por dos capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito.

<u>Caracterización del perfil:</u>	
Número de trazas:	$PEX = 350$
Longitud:	$LX = 15,00 m$
Espaciado entre trazas:	$EX = 0,043 m$
Número de muestras por traza:	$PET = 512$
Tiempo de muestreo:	$LT = 50 \cdot 10^{-9} s$
Espaciado entre muestras:	$ET = 0,098 \cdot 10^{-9} s$
<u>Caracterización de la antena:</u>	
Pulsación:	$\omega = 2\pi \cdot 900 \cdot 10^6 s^{-1}$
<u>Caracterización de los medios:</u>	
<u>1: Aire</u>	
Permitividad eléctrica:	$\varepsilon = \varepsilon_0$
Permeabilidad magnética:	$\mu = \mu_0$
Conductividad eléctrica:	$\sigma = 0$
Velocidad de propagación:	$c_1 = 2,9980 \cdot 10^8 m \cdot s^{-1}$
Constante de propagación:	$\gamma_1 = 41,92 i m^{-1}$

Tabla 7-1-3 (Continuación)

Caracterización de los medios:2: Arenas secas

Permitividad eléctrica: $\varepsilon = 2 \cdot \varepsilon_0$

Permeabilidad magnética: $\mu = \mu_0$

Conductividad eléctrica: $\sigma = 10^{-4} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

Velocidad de propagación: $c_2 = 2,1199 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Constante de propagación: $\gamma_2 = (0,0133 + 59,28i) \text{ m}^{-1}$

3: Arenisca seca

Permitividad eléctrica: $\varepsilon = 6 \cdot \varepsilon_0$

Permeabilidad magnética: $\mu = \mu_0$

Conductividad eléctrica: $\sigma = 10^{-7} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

Velocidad de propagación: $c_3 = 1,2239 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Constante de propagación: $\gamma_3 = 102,7i \text{ m}^{-1}$

Velocidad de propagación promedio: $c_m = 1,5679 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Caracterización de los reflectores:12

Coeficiente de reflexión: $r_{12} = -0,7000 + 0,0001i$

Coeficiente de transmisión ascendente: $t_{12} = 0,3000 + 0,0001i$

Coeficiente de transmisión descendente: $t_{21} = 1,7000 - 0,0001i$

Posición: $Z = 0,25 \text{ m}$

23

Coeficiente de reflexión: $r_{23} = -0,6000 - 0,0001i$

Coeficiente de transmisión ascendente: $t_{23} = 0,4000 + 0,0001i$

Coeficiente de transmisión descendente: $t_{32} = 1,6000 + 0,0001i$

Posición: $Z = 1,50 \text{ m}$

(2) SECCIÓN DE ÍNDICES

El modelo consta de dos reflectores plano-paralelos. La SECCIÓN DE ÍNDICES correspondiente a este modelo se muestra en la Figura 7-1-5:

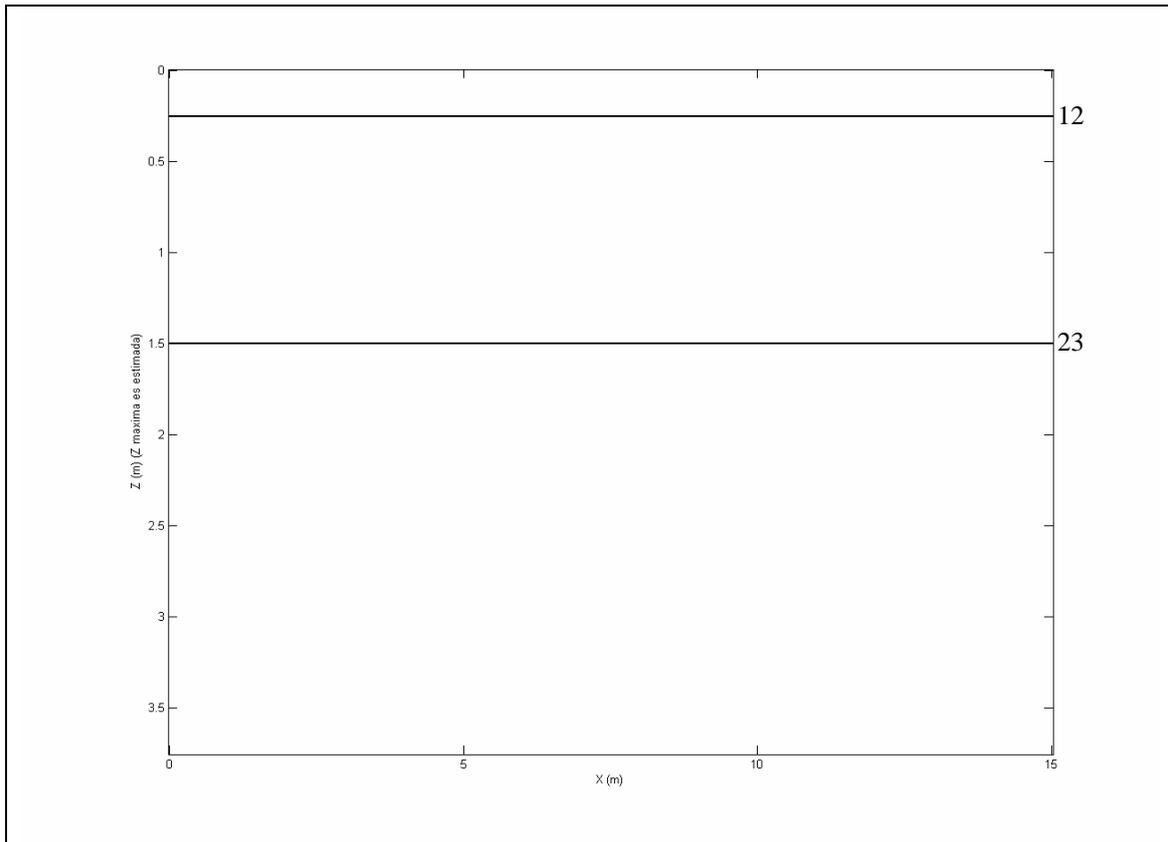


Figura 7-1-5: SECCIÓN DE ÍNDICES correspondiente al modelo bidimensional constituido por dos capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito. Junto a cada reflector se muestra el índice asociado.

(3) DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD

La DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD determinada mediante la aplicación del algoritmo se muestra en la Figura 7-1-6:

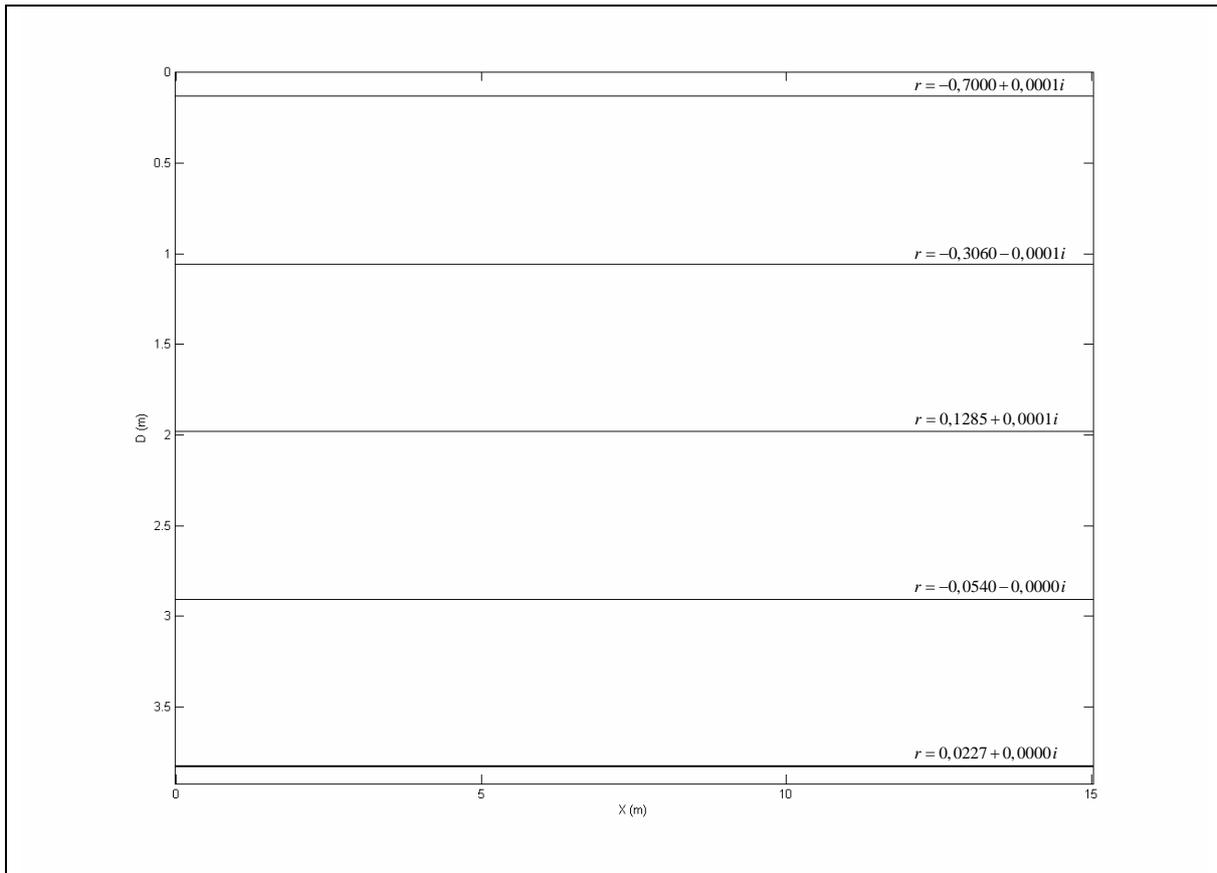


Figura 7-1-6: DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondiente al modelo bidimensional constituido por dos capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito. Junto a cada reflector se muestra la reflectividad aparente.

(4) SECCIÓN MEDIDA

La descripción de la SECCIÓN MEDIDA obtenida se detalla en la Tabla 7-1-4:

Tabla 7-1-4: Descripción de la SECCIÓN MEDIDA correspondiente al modelo bidimensional constituido por dos capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito.

Caracterización del perfil:

Número de trazas:	$PEX = 350$
Longitud:	$LX = 15,00\ m$
Espaciado entre trazas:	$EX = 0,043\ m$
Número de muestras por traza:	$PET = 466$
Tiempo de muestreo:	$LT = 49,960 \cdot 10^{-9}\ s$
Espaciado entre muestras:	$ET = 0,107 \cdot 10^{-9}\ s$

La comparación entre la SECCIÓN MEDIDA y la SECCIÓN ESPERADA se muestra en las figuras 7-1-7 y 7-1-8.

Páginas siguientes:

Figura 7-1-7: Comparación entre la SECCIÓN MEDIDA y la SECCIÓN ESPERADA correspondientes al modelo bidimensional constituido por dos capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito.

- (a) SECCIÓN MEDIDA.
(b) SECCIÓN ESPERADA.

Figura 7-1-8: Trazas representativas de la SECCIÓN MEDIDA y la SECCIÓN ESPERADA correspondientes al modelo bidimensional constituido por dos capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito.

- (a) Traza representativa.
(b) Detalle de la primera llegada.
(c) Detalle de la segunda llegada.

En todos los casos se representa, frente al tiempo doble de recorrido (ns), se representan la traza correspondiente a la SECCIÓN MEDIDA (puntos) y a la SECCIÓN ESPERADA (círculos).

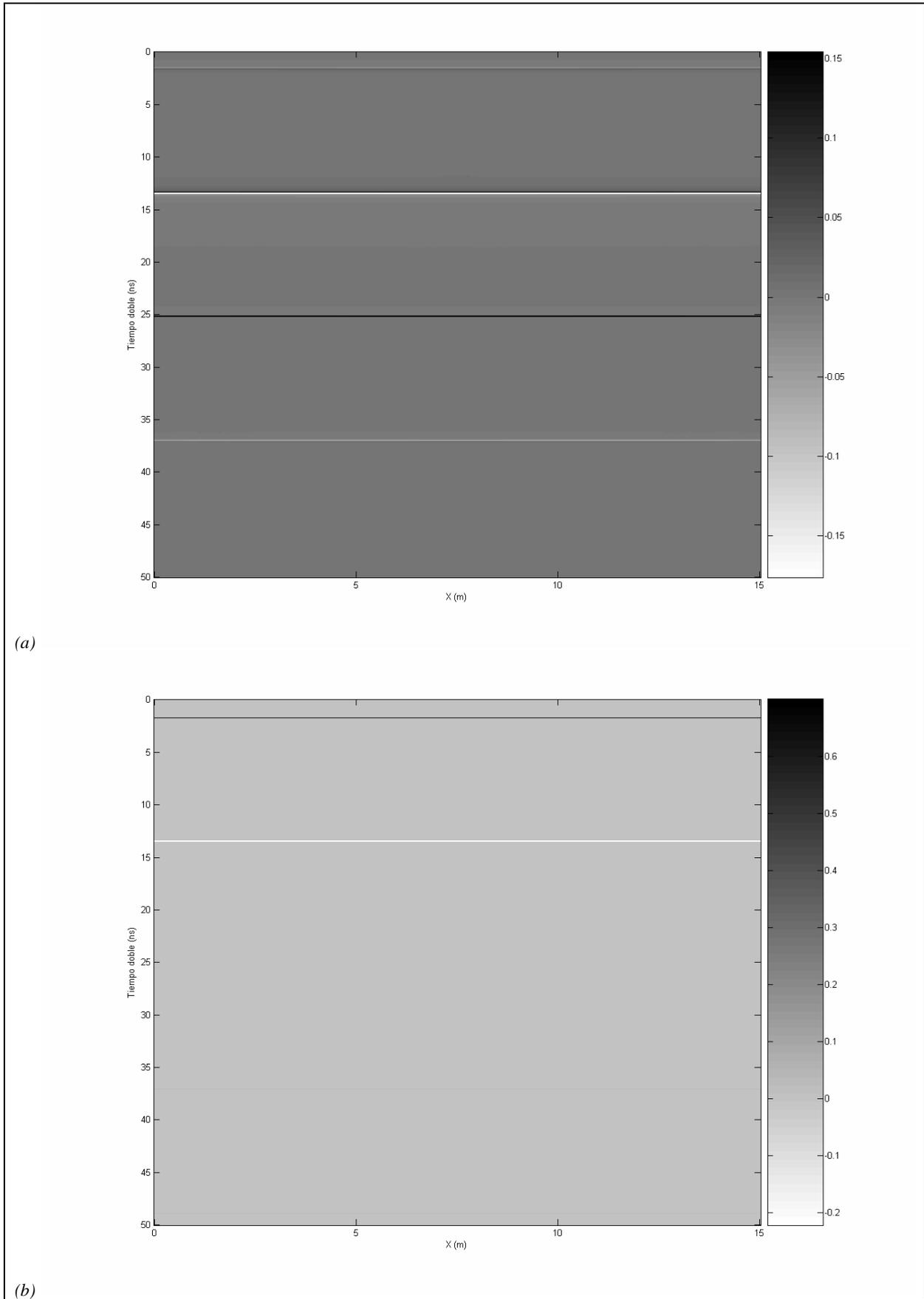
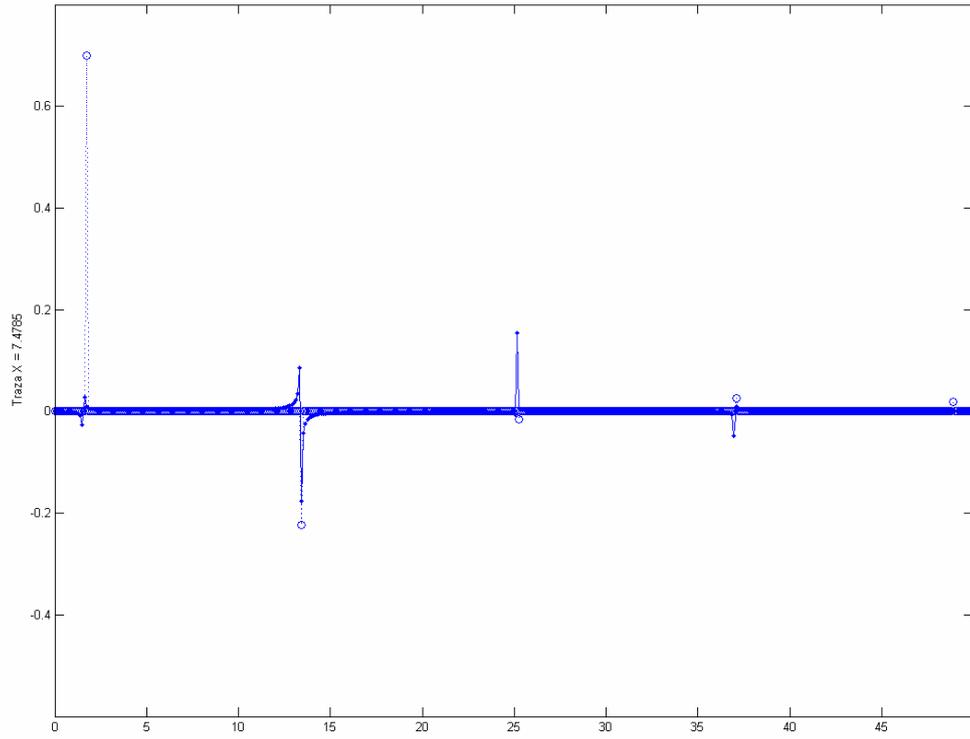
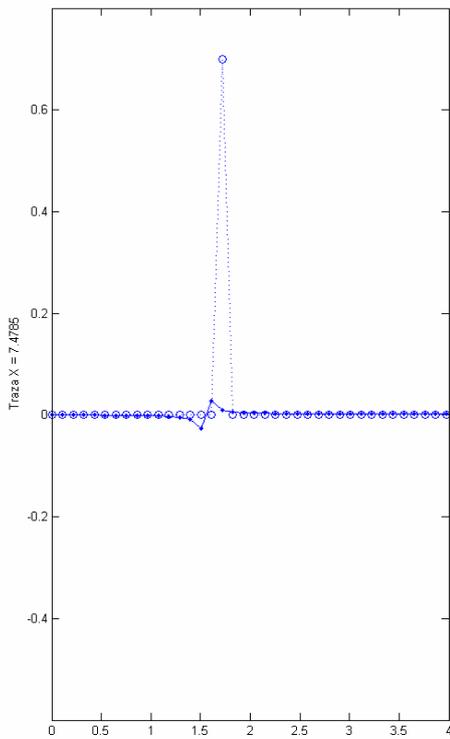


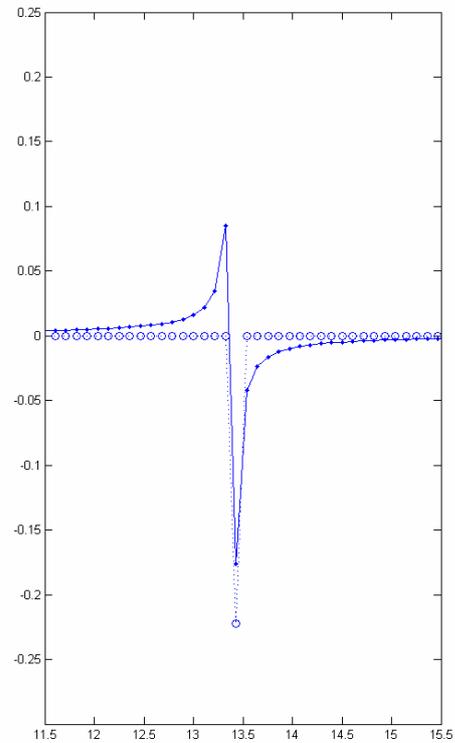
Figura 7-1-7



(a)



(b)



(c)

Figura 7-1-8

(5) Caracterización y comparación de resultados

El tiempo medio de cómputo para este modelo es de 27,9177 s.

A la vista de los resultados expuestos en las figuras del punto anterior, pueden resaltarse las siguientes características generales:

- La SECCIÓN MEDIDA presenta las características geométricas esperables: La señal correspondiente a reflectores plano-paralelos son planos horizontales, siendo observadas las señales correspondientes a las múltiples.
- La posición de los planos en la SECCIÓN MEDIDA no está nítidamente definida, sino que la señal es no nula en algunos puntos previos y posteriores al máximo.
- Aun teniendo en cuenta los aspectos señalados en el punto anterior, los planos se encuentran localizados en los tiempos dobles de recorrido que se obtiene en la SECCIÓN ESPERADA, dentro del margen de error asumible por la naturaleza discreta de la SECCIÓN MEDIDA.
- Las amplitudes de la señal en la SECCIÓN MEDIDA son inferiores a las que se obtienen en la SECCIÓN ESPERADA. Así mismo, las fases difieren de las que se obtienen en ésta.

Estos resultados son análogos a los obtenidos en el resto de Subsecciones. Los resultados conjuntos serán discutidos en la Sección 7.5, dedicada a la exposición y discusión de los principales resultados obtenidos.

7.1.3. Modelo realista

Este modelo está constituido por una colección de capas plano-paralelas y elementos difractores, superpuestos a un semiespacio infinito. Es equivalente a considerar una colección de reflectores plano-paralelos, de diferentes tamaños, situados en las interfaces entre capas, y entre las últimas capas y el semiespacio.

(1) Descripción del modelo

En este modelo se emplean valores realistas para los parámetros que caracterizan los medios, empleándose éstos en la determinación de los parámetros que caracterizan los reflectores.

La descripción del modelo se detalla en la Tabla 7-1-5:

Tabla 7-1-5: Descripción del modelo bidimensional realista.

<u>Caracterización del perfil:</u>	
Número de trazas:	$PEX = 350$
Longitud:	$LX = 15,00 m$
Espaciado entre trazas:	$EX = 0,043 m$
Número de muestras por traza:	$PET = 512$
Tiempo de muestreo:	$LT = 50 \cdot 10^{-9} s$
Espaciado entre muestras:	$ET = 0,098 \cdot 10^{-9} s$
<u>Caracterización de la antena:</u>	
Pulsación:	$\omega = 2\pi \cdot 900 \cdot 10^6 s^{-1}$
<u>Caracterización de los medios:</u>	
<u>1: Aire</u>	
Permitividad eléctrica:	$\varepsilon = \varepsilon_0$
Permeabilidad magnética:	$\mu = \mu_0$
Conductividad eléctrica:	$\sigma = 0$
Velocidad de propagación:	$c_1 = 2,9980 \cdot 10^8 m \cdot s^{-1}$
Constante de propagación:	$\gamma_1 = 41,92 i m^{-1}$

Tabla 7-1-5 (Continuación)

Caracterización de los medios:2: Arenas secas

Permitividad eléctrica: $\varepsilon = 2 \cdot \varepsilon_0$

Permeabilidad magnética: $\mu = \mu_0$

Conductividad eléctrica: $\sigma = 10^{-4} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

Velocidad de propagación: $c_2 = 2,1199 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Constante de propagación: $\gamma_2 = (0,0133 + 59,28i) \text{ m}^{-1}$

3: Cobre

Permitividad eléctrica: $\varepsilon = \varepsilon_0$

Permeabilidad magnética: $\mu = \mu_0$

Conductividad eléctrica: $\sigma = 10^8 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

Velocidad de propagación: $c_3 = 9,4870 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Constante de propagación: $\gamma_3 = 5,9607 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$

4: Arenisca seca

Permitividad eléctrica: $\varepsilon = 6 \cdot \varepsilon_0$

Permeabilidad magnética: $\mu = \mu_0$

Conductividad eléctrica: $\sigma = 10^{-7} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

Velocidad de propagación: $c_4 = 1,2239 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Constante de propagación: $\gamma_4 = 102,7i \text{ m}^{-1}$

5: Granito seco

Permitividad eléctrica: $\varepsilon = 5 \cdot \varepsilon_0$

Permeabilidad magnética: $\mu = \mu_0$

Conductividad eléctrica: $\sigma = 10^{-8} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

Velocidad de propagación: $c_5 = 1,3407 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Constante de propagación: $\gamma_5 = 7,6974 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1}$

Velocidad de propagación promedio: $c_m = 1,4761 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Tabla 7-1-5 (Continuación)

Caracterización de los reflectores:12

Coefficiente de reflexión:	$r_{12} = -0,1716 + 0,0002i$
Coefficiente de transmisión ascendente:	$t_{12} = 0,8284 + 0,0002i$
Coefficiente de transmisión descendente:	$t_{21} = 1,1716 - 0,0002i$
Posición:	$0 \leq X \leq LX, Z = 0,10m$

23

Coefficiente de reflexión:	$r_{23} = -1,0000 + 0,0000i$
Coefficiente de transmisión ascendente:	$t_{23} = 0,0000 + 0,0000i$
Coefficiente de transmisión descendente:	$t_{32} = 2,0000 - 0,0000i$
Posición:	$X = 9,9713m, Z = 0,48m$

24

Coefficiente de reflexión:	$r_{24} = -0,2679 - 0,0002i$
Coefficiente de transmisión ascendente:	$t_{24} = 0,7321 - 0,0002i$
Coefficiente de transmisión descendente:	$t_{42} = 1,2679 + 0,0002i$
Posición:	$0 \leq X \leq 4,9427m, Z = 0,50m$

25

Coefficiente de reflexión:	$r_{25} = -0,2251 - 0,0002i$
Coefficiente de transmisión ascendente:	$t_{25} = 0,7749 - 0,0002i$
Coefficiente de transmisión descendente:	$t_{52} = 1,2251 + 0,0002i$
Posición:	$4,9857m \leq X \leq LX, Z = 0,80m$

32

Coefficiente de reflexión:	$r_{32} = 1,0000 - 0,0000i$
Coefficiente de transmisión ascendente:	$t_{32} = 2,0000 - 0,0000i$
Coefficiente de transmisión descendente:	$t_{23} = 0,0000 + 0,0000i$
Posición:	$X = 9,9713m, Z = 0,52m$

45

Coefficiente de reflexión:	$r_{45} = 0,0455 - 0,0000i$
Coefficiente de transmisión ascendente:	$t_{45} = 1,0455 - 0,0000i$
Coefficiente de transmisión descendente:	$t_{54} = 0,9545 + 0,0000i$
Posición:	$0 \leq X \leq 4,9427m, Z = 1,00m$

(2) SECCIÓN DE ÍNDICES

El modelo consta de varios reflectores plano-paralelos y dos difractors puntuales. La SECCIÓN DE ÍNDICES correspondiente a este modelo se muestra en la Figura 7-1-9:

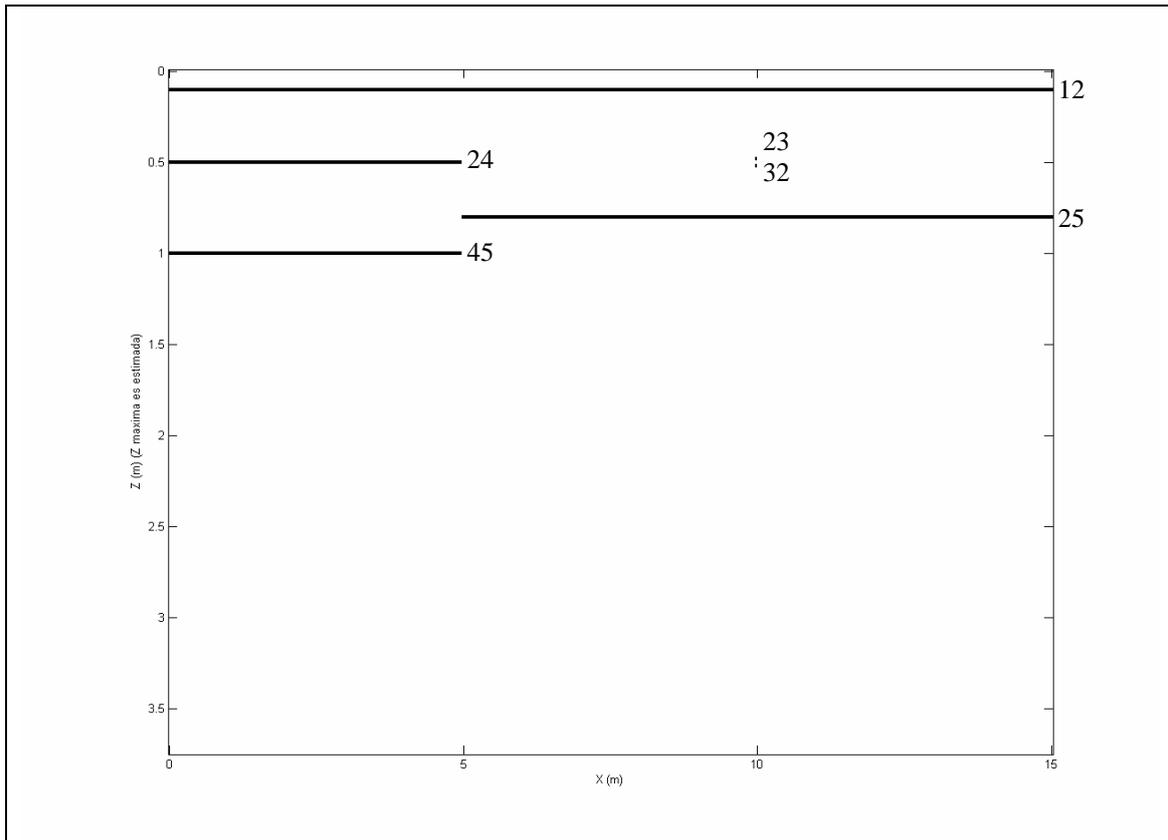


Figura 7-1-9: SECCIÓN DE ÍNDICES correspondiente al modelo bidimensional realista. Junto a cada reflector se muestra el índice asociado.

(3) DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD

La DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD determinada mediante la aplicación del algoritmo se muestra en la Figura 7-1-10:

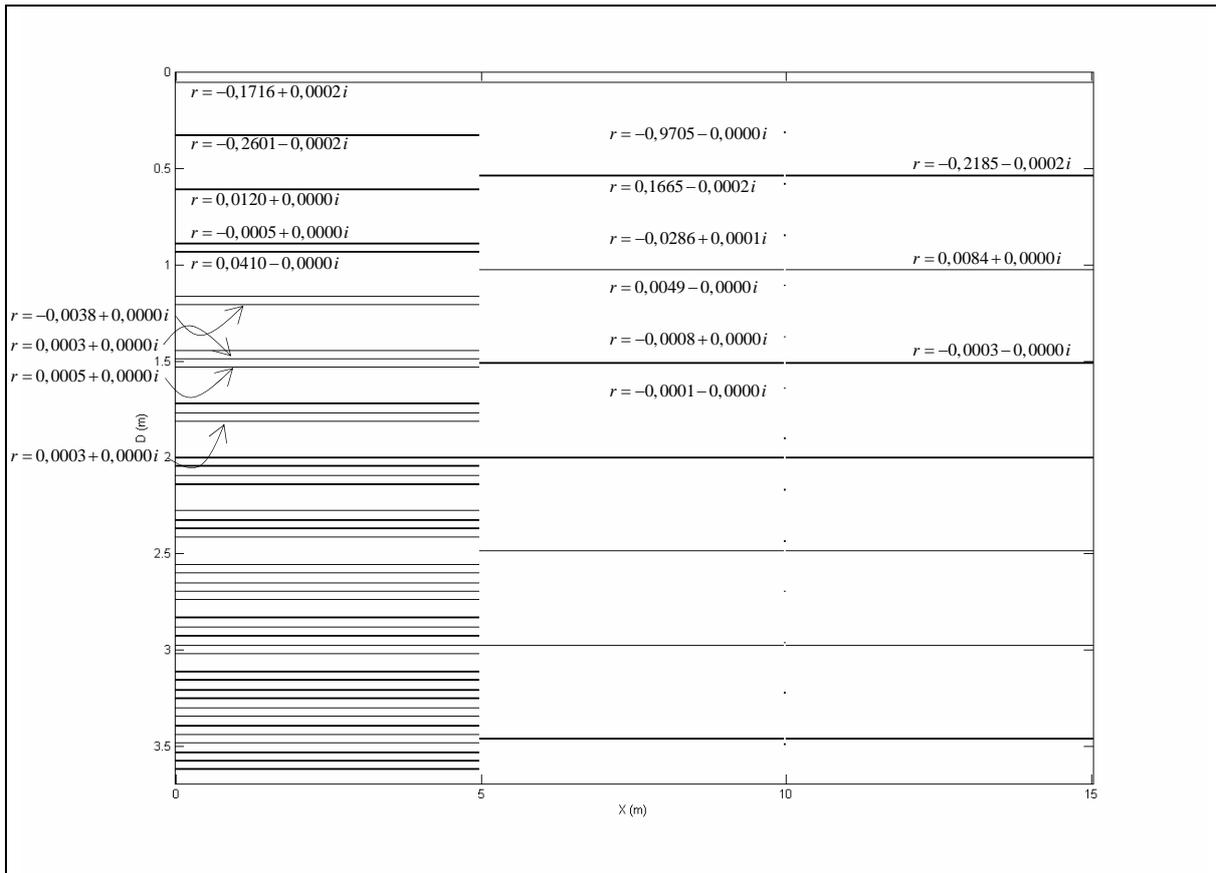


Figura 7-1-10: DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondiente al modelo bidimensional realista. Junto a cada reflector se muestra la reflectividad aparente, en el caso en que las partes real o imaginaria sean apreciables.

(4) SECCIÓN MEDIDA

La descripción de la SECCIÓN MEDIDA obtenida se detalla en la Tabla 7–1-6:

Tabla 7–1-6: Descripción de la SECCIÓN MEDIDA correspondiente al modelo bidimensional realista.

Caracterización del perfil:

Número de trazas:	$PEX = 350$
Longitud:	$LX = 15,00\ m$
Espaciado entre trazas:	$EX = 0,043\ m$
Número de muestras por traza:	$PET = 469$
Tiempo de muestreo:	$LT = 49,995 \cdot 10^{-9}\ s$
Espaciado entre muestras:	$ET = 0,107 \cdot 10^{-9}\ s$

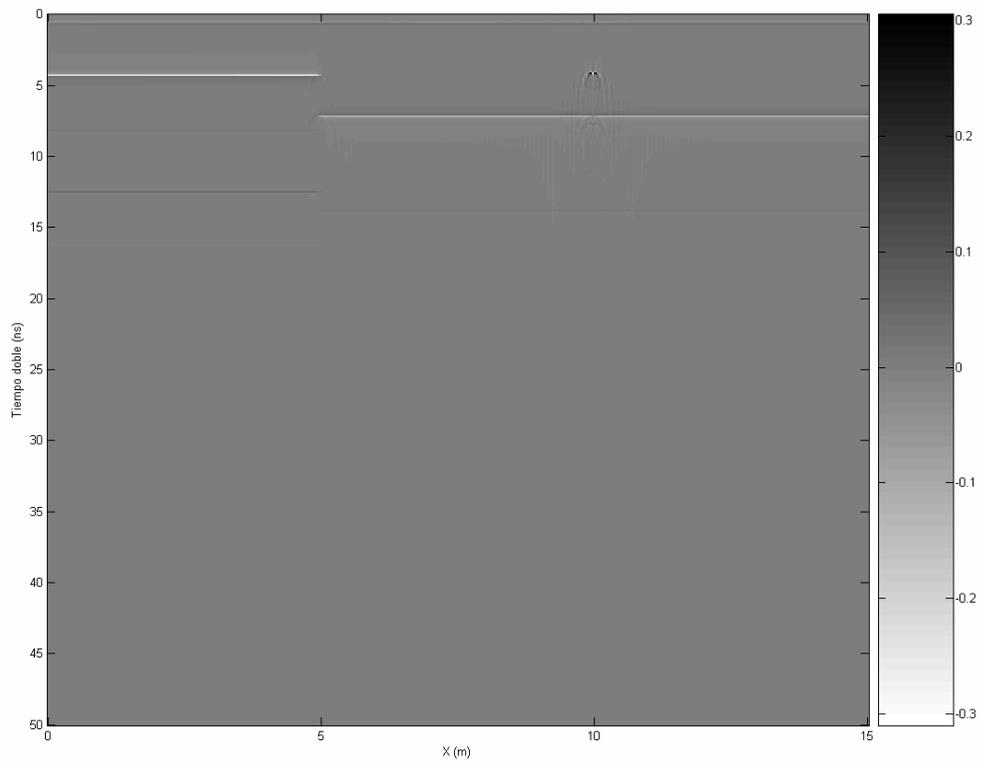
La SECCIÓN MEDIDA se muestra en las figuras 7–1–11 y 7–1–12.

Página siguiente:

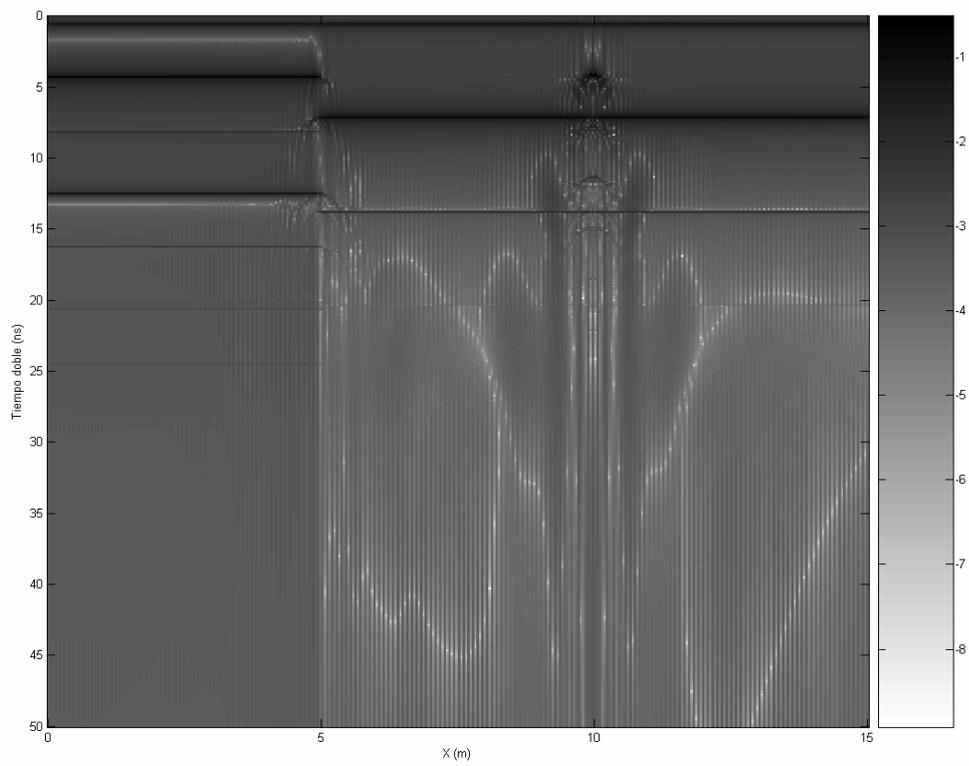
Figura 7–1-11: SECCIÓN MEDIDA correspondiente al modelo bidimensional realista.

(a) SECCIÓN MEDIDA.

(b) Logaritmo decimal del valor absoluto de la SECCIÓN MEDIDA.



(a)



(b)

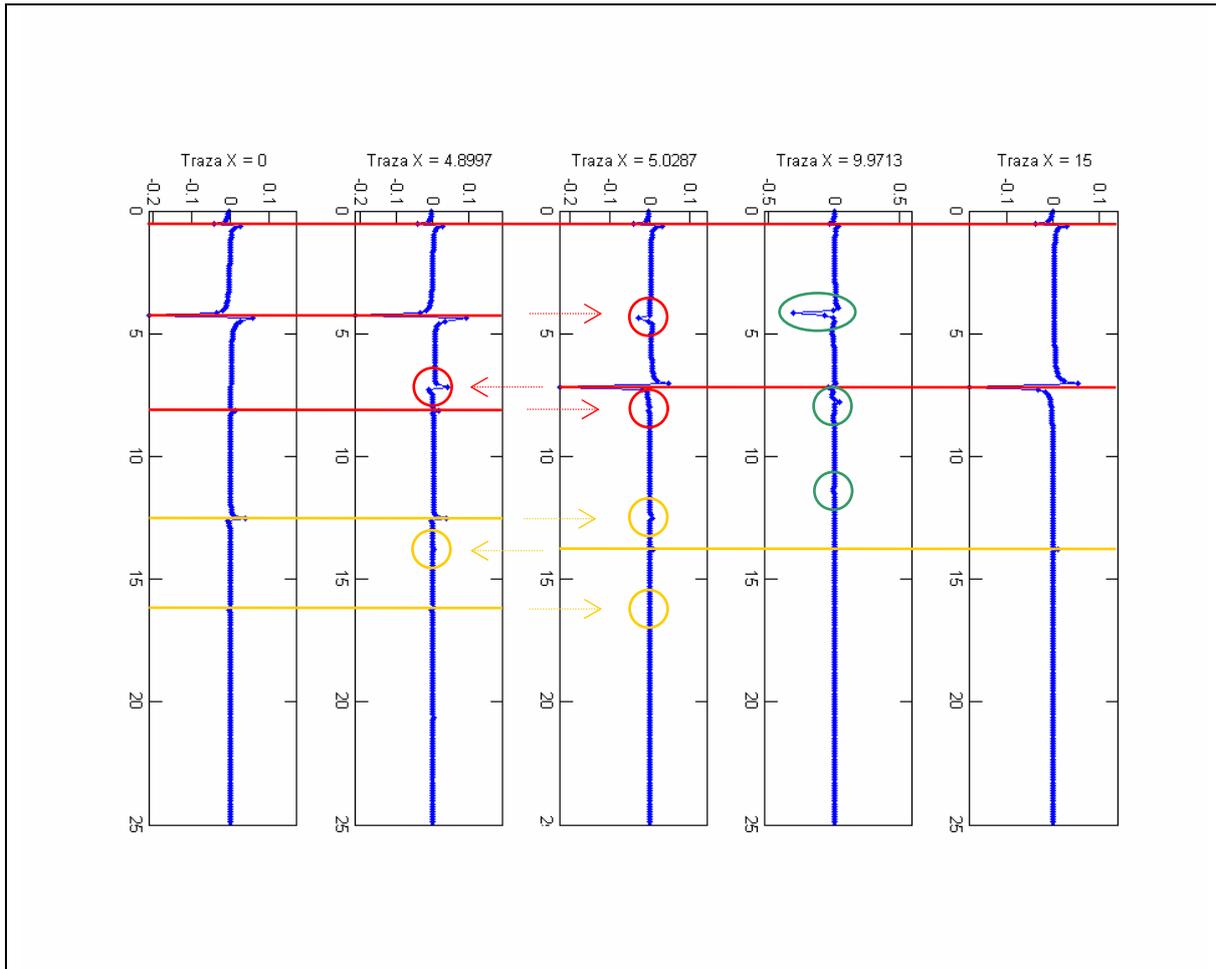


Figura 7-1-12: Trazas representativas de la SECCIÓN MEDIDA correspondiente al modelo bidimensional realista.

De izquierda a derecha las trazas corresponden a:

Inicio del perfil.

Traza anterior a la ruptura en $X = 5,00\text{ m}$.

Traza posterior a la ruptura en $X = 5,00\text{ m}$.

Traza correspondiente a los difractores en $X = 9,71\text{ m}$.

Final del perfil.

Se muestran en rojo las señales correspondientes a reflexiones primarias, en amarillo las correspondientes a reflexiones múltiples, en verde las difracciones en los elementos puntuales. Los círculos muestran los efectos de las hipérbolas de difracción.

(5) **Caracterización y comparación de resultados**

El tiempo medio de cómputo para este modelo es de 25,9936 s.

A la vista de los resultados expuestos en las figuras del punto anterior, pueden resaltarse las siguientes características generales:

- La SECCIÓN MEDIDA presenta las características geométricas esperables: Las señales correspondientes a los difractores puntuales son hipérbolas y las correspondientes a los reflectores plano-parallelos son planos horizontales, siendo observadas las señales correspondientes a las múltiples.
- A la vista de los resultados expuestos en las Subsecciones anteriores es de esperar que los vértices de las hipérbolas y los planos se encuentren localizados en la posición horizontal y tiempo doble de recorrido que se obtendría en la SECCIÓN ESPERADA, dentro del margen de error asumible por la naturaleza discreta de la SECCIÓN MEDIDA, teniendo en cuenta que dichas posiciones no se encuentran nítidamente definidas.
- Así mismo, es de esperar que las amplitudes y fases correspondientes a las señales en la SECCIÓN MEDIDA difieran de las que se obtendrían en la SECCIÓN ESPERADA.

Los resultados conjuntos serán discutidos en la Sección 7.5, dedicada a la exposición y discusión de los principales resultados obtenidos.

7.2. Aplicación del algoritmo para la resolución del Problema Directo en tres dimensiones

En esta Sección se aplica el algoritmo para la resolución del Problema Directo a diversos modelos sencillos y representativos, análogos a los estudiados en el caso bidimensional:

- Un difractor puntual.
- Una superposición de capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito.
- Modelo realista.

Debido a la complejidad añadida al cálculo causada por la inclusión de una nueva dimensión espacial, los modelos tendrán un número de puntos en los ejes menor que los expuestos en la Sección anterior.

Con objeto de remarcar las características fundamentales, en los dos primeros modelos se emplean valores realistas para los parámetros que caracterizan los medios, pero no se emplean éstos en la determinación de los parámetros que caracterizan el difractor o los reflectores, sino que se emplean otros valores dados.

En todos los casos se muestran y caracterizan los radargramas obtenidos mediante la aplicación del algoritmo (SECCIÓN MEDIDA), comparándose, en los casos en que sea pertinente, con los resultados analíticos expuestos en el Anexo 7.A (SECCIÓN ESPERADA).

7.2.1. Un difractor puntual

Este modelo está constituido por un difractor puntual aislado, inmerso en una matriz homogénea. Tal como se expuso en el caso bidimensional, a partir de este modelo pueden ser estudiados modelos más complejos mediante aplicación del principio de superposición, hallándose el radargrama correspondiente como suma de los obtenidos para cada difractor puntual.

(1) Descripción del modelo

En este modelo se emplean valores realistas para los parámetros que caracterizan la matriz, pero no se emplean éstos en la determinación del parámetro que caracteriza el difractor, sino que se emplean otros valores dados con objeto de remarcar las características fundamentales.

La descripción del modelo se detalla en la Tabla 7-2-1:

Tabla 7-2-1: Descripción del modelo tridimensional constituido por un único difractor puntual.

<u>Caracterización del cubo:</u>	
Número de trazas:	$PEX = 50$ $PEY = 50$
Longitud:	$LX = 1,00 m$ $LY = 1,00 m$
Espaciado entre trazas:	$EX = 0,020 m$ $EY = 0,020 m$
Número de muestras por traza:	$PET = 128$
Tiempo de muestreo:	$LT = 10 \cdot 10^{-9} s$
Espaciado entre muestras:	$ET = 0,078 \cdot 10^{-9} s$
<u>Caracterización de la antena:</u>	
Pulsación:	$\omega = 2\pi \cdot 900 \cdot 10^6 s^{-1}$
<u>Caracterización de la matriz (Arenas):</u>	
Permitividad eléctrica:	$\varepsilon = 2 \cdot \varepsilon_0$
Permeabilidad magnética:	$\mu = \mu_0$
Conductividad eléctrica:	$\sigma = 10^{-4} S \cdot m^{-1}$
Velocidad de propagación: ⁷	$c_1 = 2,1198 \cdot 10^8 m \cdot s^{-1}$
Constante de propagación:	$\gamma_1 = (0,0133 + 59,28i) m^{-1}$
<u>Caracterización del difractor puntual:</u>	
Coefficiente de reflexión:	$r_{12} = -0,7000 + 0,0001i$
Posición:	$X_1 = 0,49 m, Y_1 = 0,49 m, Z_1 = 0,50 m$

⁷ En este caso, al haber un único medio, la velocidad promedio coincidirá con la velocidad de propagación en el medio, $c_m = c_1$.

(2) SECCIÓN DE ÍNDICES

El modelo consta de un único difractor. La SECCIÓN DE ÍNDICES (Cf. §6.1.1) correspondiente a este modelo se muestra en la Figura 7-2-1:

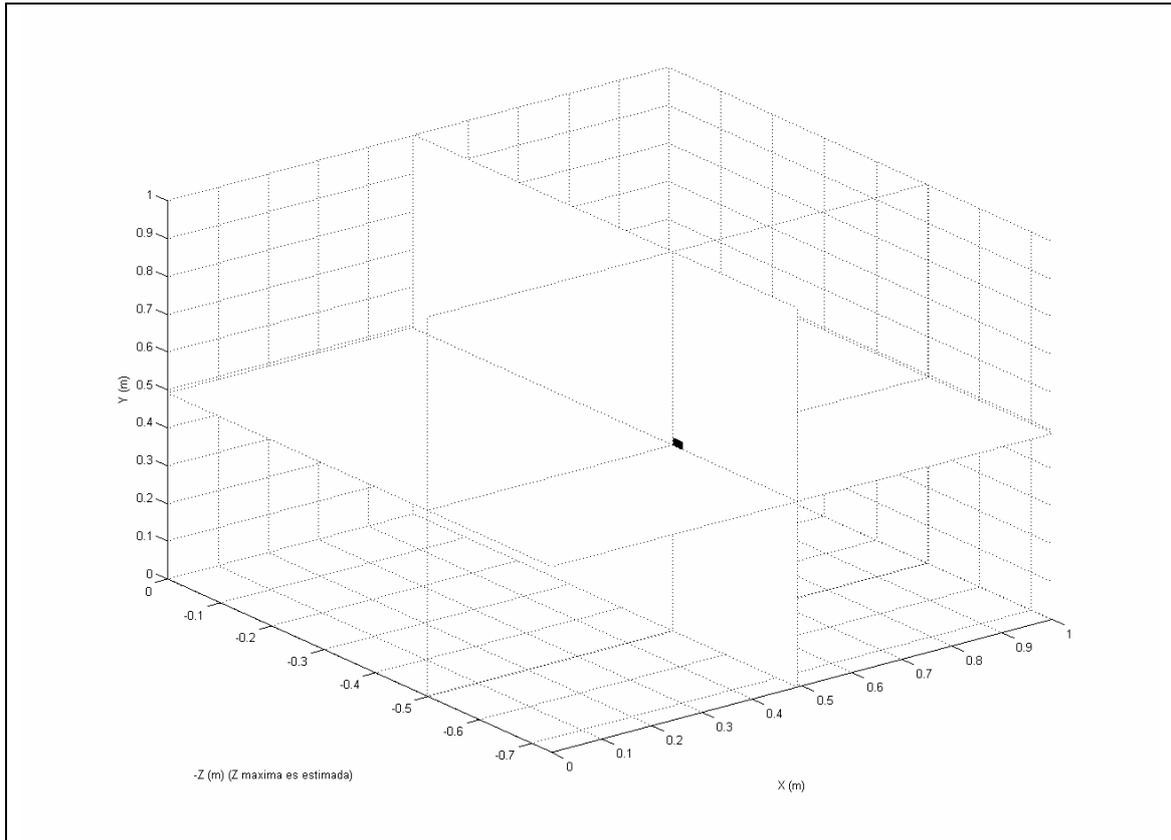


Figura 7-2-1: SECCIÓN DE ÍNDICES correspondiente al modelo tridimensional constituido por un único difractor puntual.

(3) DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD

La DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD (Cf. §6.1.3) determinada mediante la aplicación del algoritmo se muestra en la Figura 7-2-2:

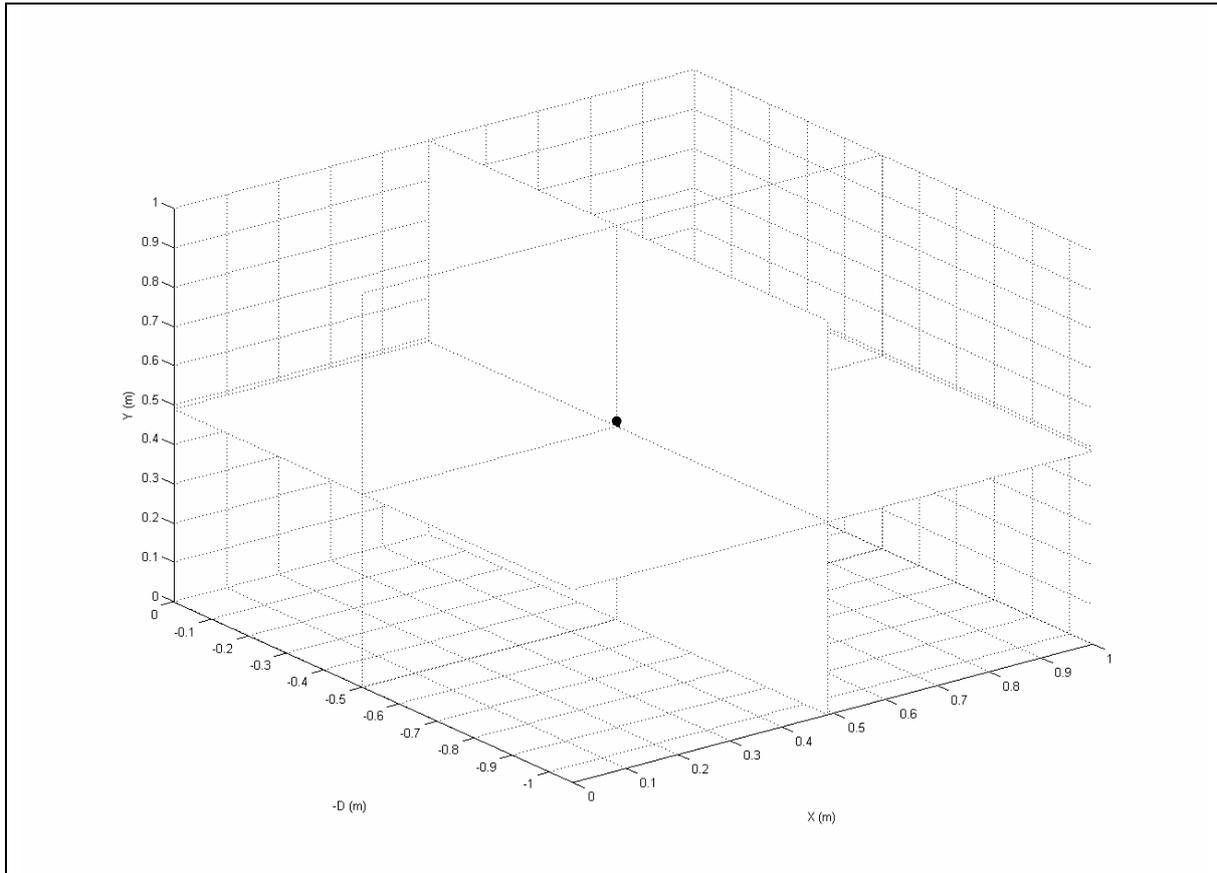


Figura 7-2-2: DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondiente al modelo tridimensional constituido por un único difractor puntual. La reflectividad aparente del punto es $r = -0,0196 + 0,6905i$.

(4) SECCIÓN MEDIDA

La descripción de la SECCIÓN MEDIDA obtenida se detalla en la Tabla 7-2-2:

Tabla 7-2-2: Descripción de la SECCIÓN MEDIDA correspondiente al modelo tridimensional constituido por un único difractor puntual.

<u>Caracterización del cubo:</u>	
Número de trazas:	$PEX = 50$ $PEY = 50$
Longitud:	$LX = 1,00 m$ $LY = 1,00 m$
Espaciado entre trazas:	$EX = 0,043 m$ $EY = 0,043 m$
Número de muestras por traza:	$PET = 91$
Tiempo de muestreo:	$LT = 9,979 \cdot 10^{-9} s$
Espaciado entre muestras:	$ET = 0,111 \cdot 10^{-9} s$

La comparación entre la SECCIÓN MEDIDA y la SECCIÓN ESPERADA se muestra en las figuras 7-2-3 y 7-2-4.

Páginas siguientes:

Figura 7-2-3: Comparación entre la SECCIÓN MEDIDA y la SECCIÓN ESPERADA correspondiente al modelo tridimensional constituido por un único difractor puntual.

(a) Perfil de la SECCIÓN MEDIDA por el plano $X = 0,49 m$.

(b) Perfil de la SECCIÓN ESPERADA por el plano $X = 0,49 m$.

(c) Perfil de la SECCIÓN MEDIDA por el plano $Y = 0,49 m$.

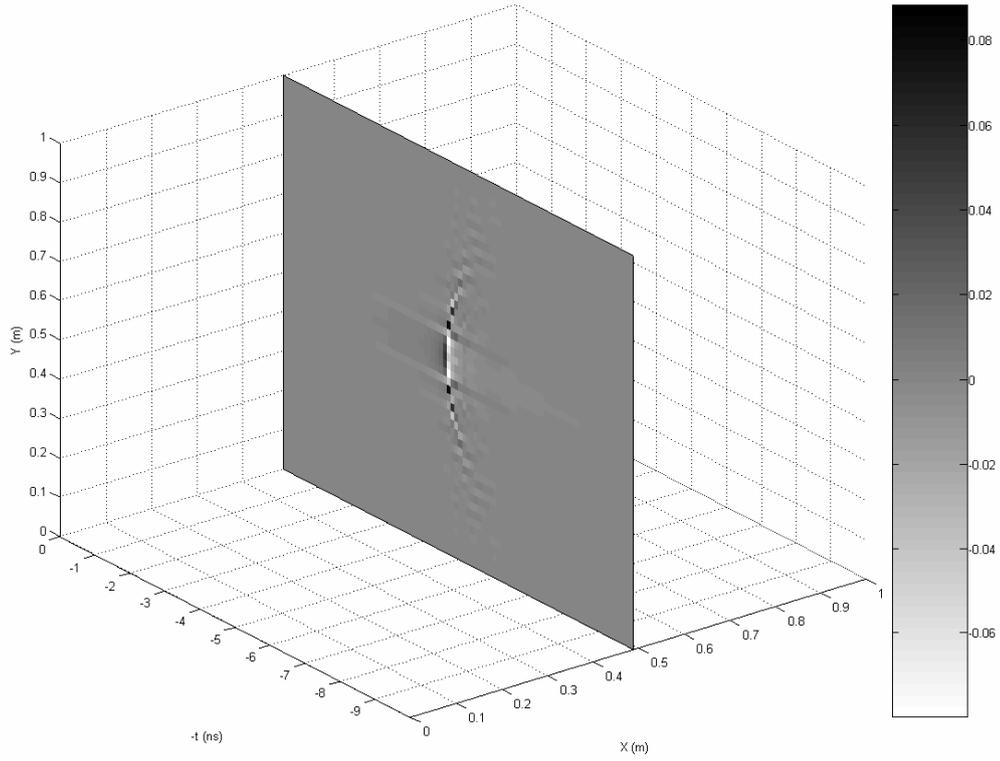
(d) Perfil de la SECCIÓN ESPERADA por el plano $Y = 0,49 m$.

(e) Perfiles de la SECCIÓN MEDIDA por los planos $X = 0,65 m$ e $Y = 0,35 m$.

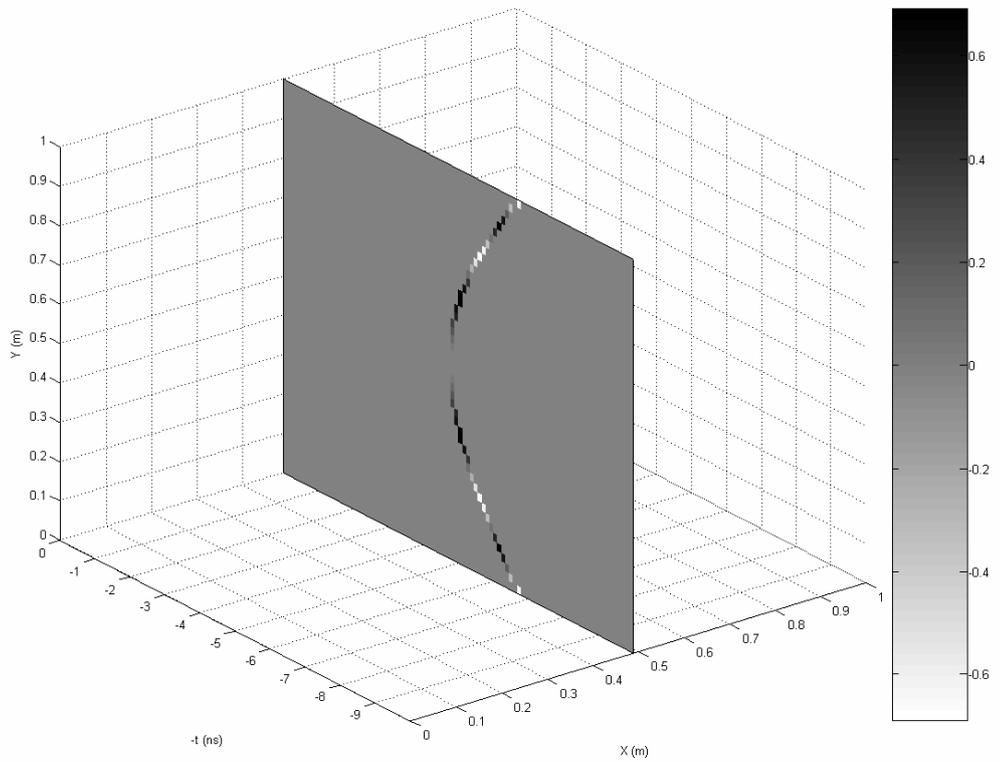
(f) Perfiles de la SECCIÓN ESPERADA por los planos $X = 0,65 m$ e $Y = 0,35 m$.

(g) Corte de la SECCIÓN MEDIDA por el plano $t = 5,5 \cdot 10^{-9} s$.

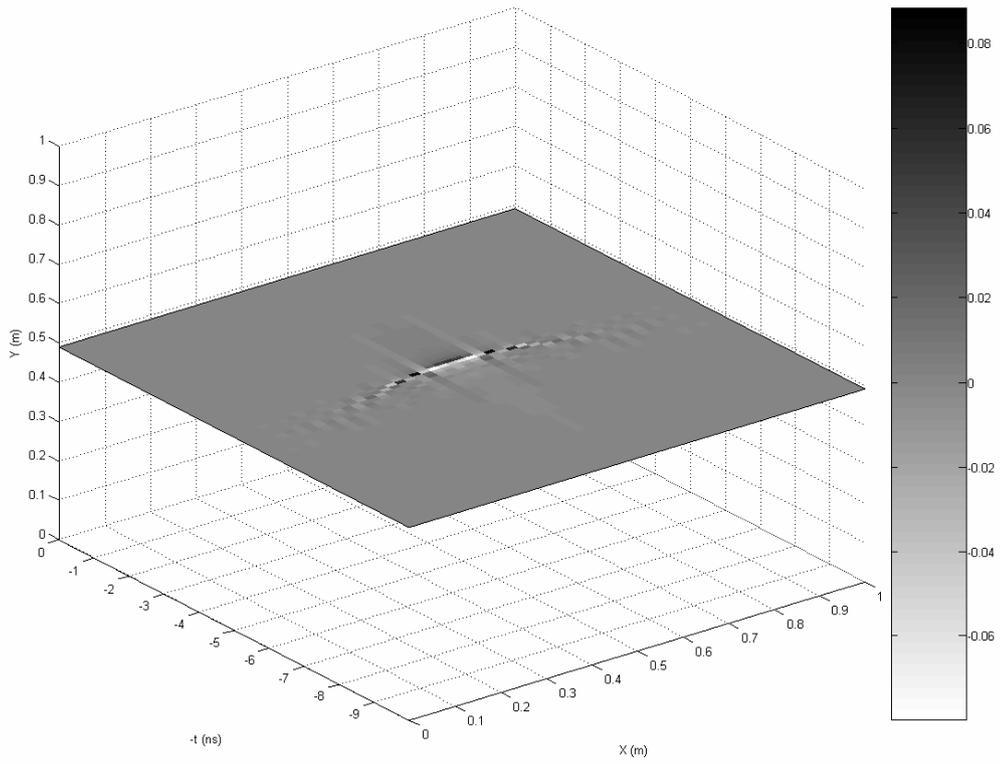
(h) Corte de la SECCIÓN ESPERADA por el plano $t = 5,5 \cdot 10^{-9} s$.



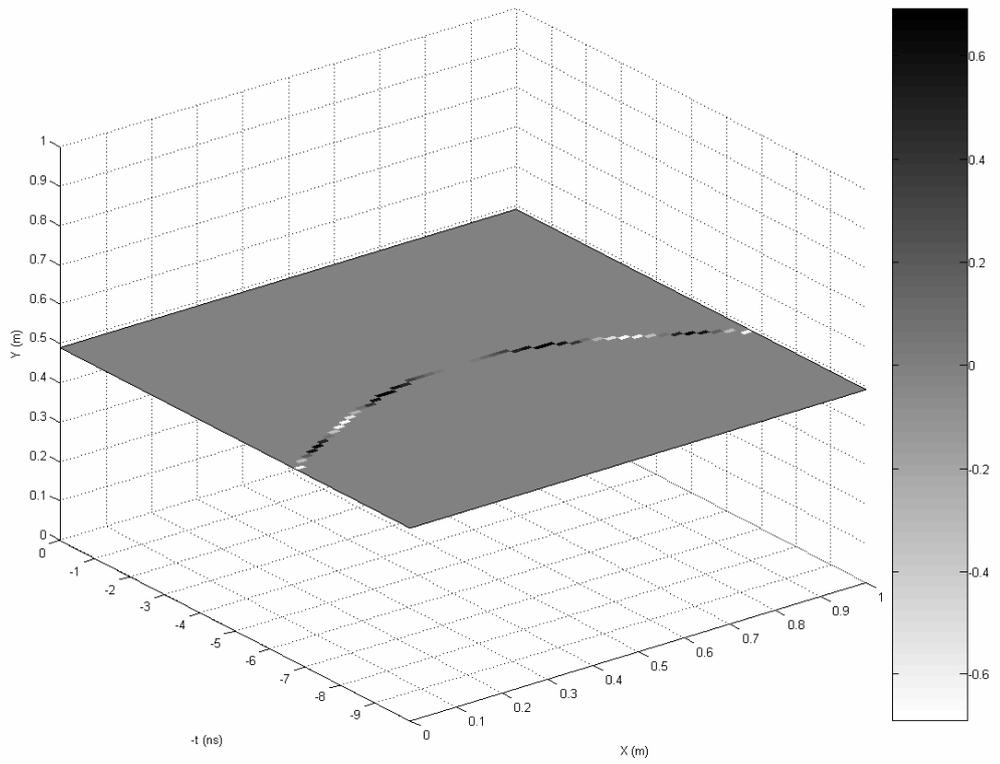
(a)



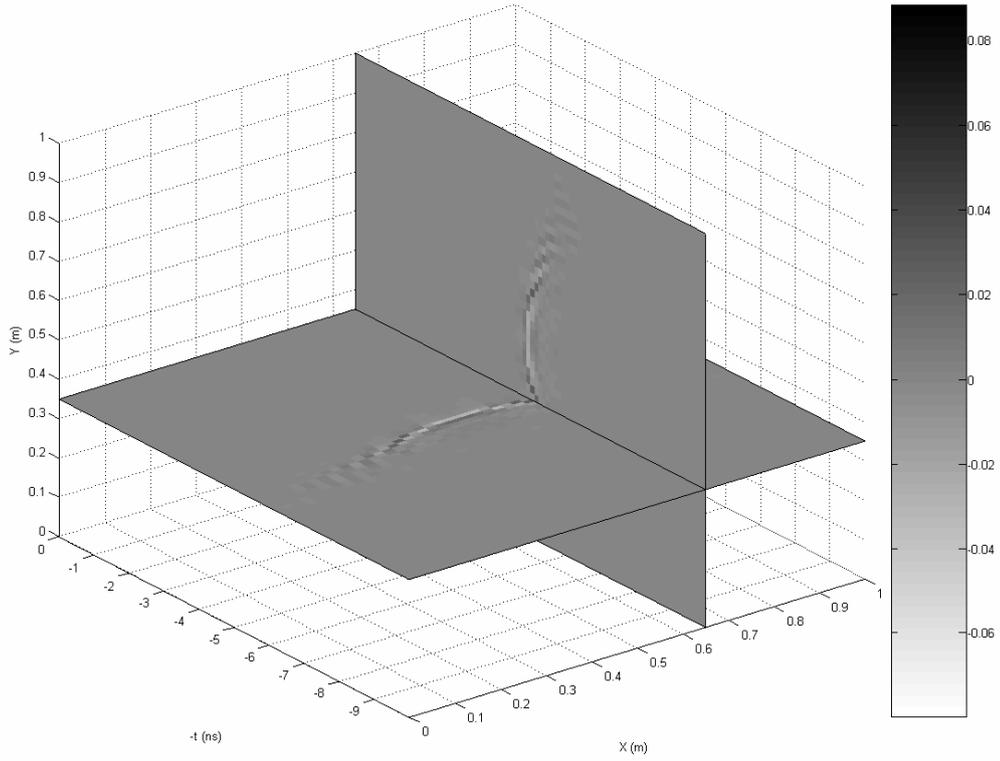
(b)



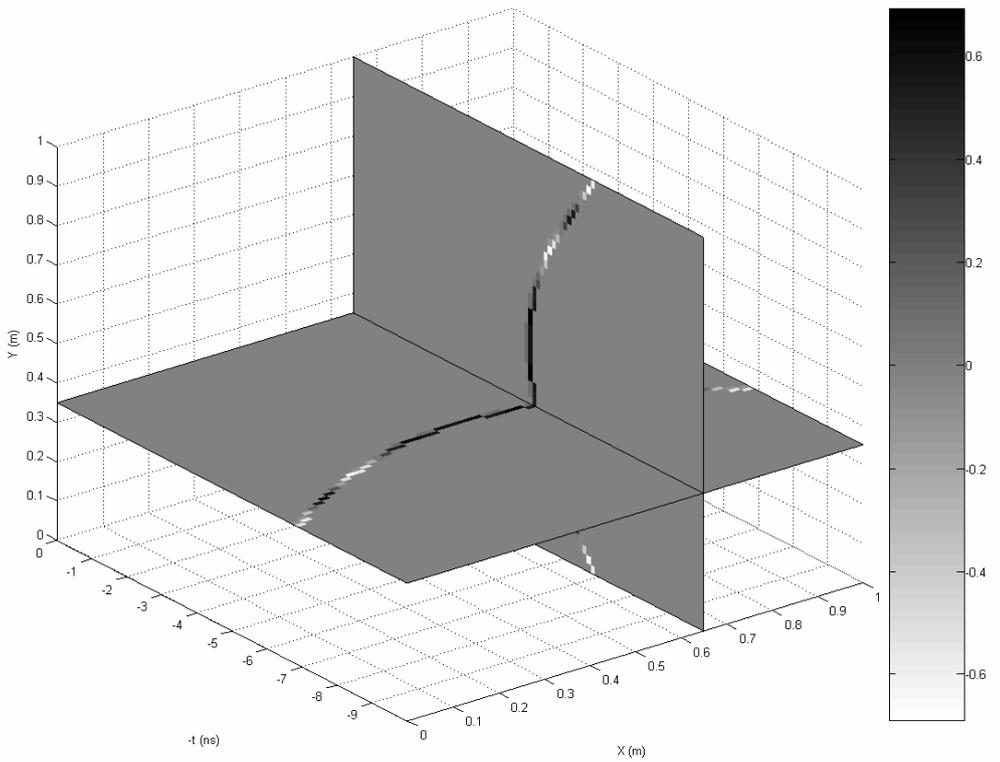
(c)



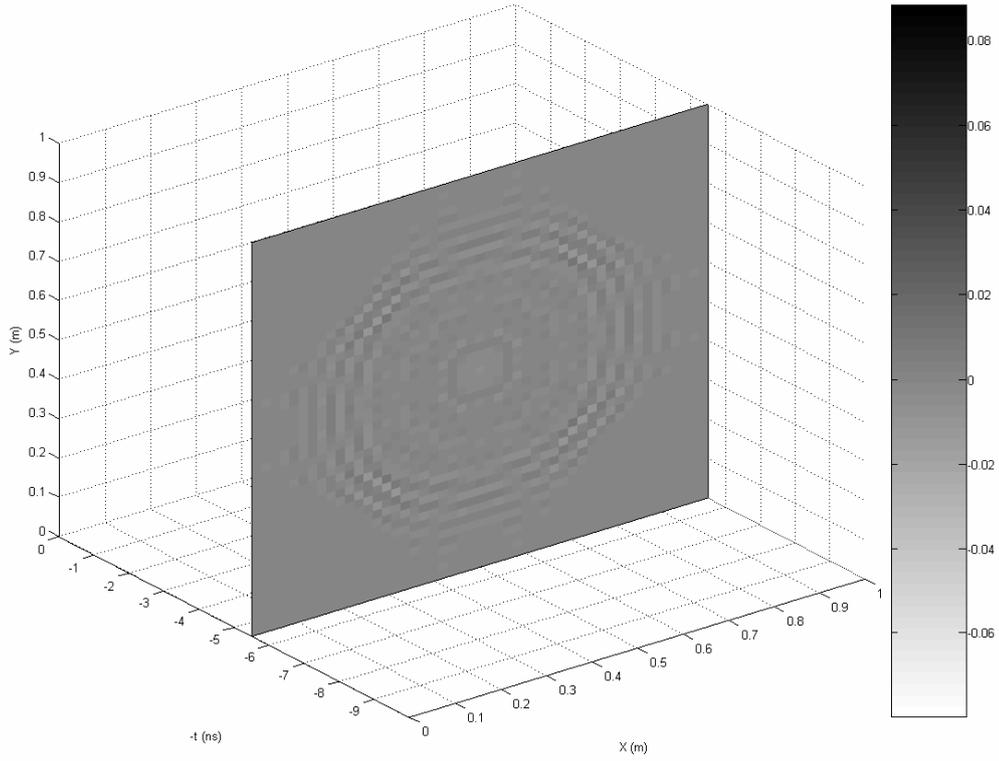
(d)



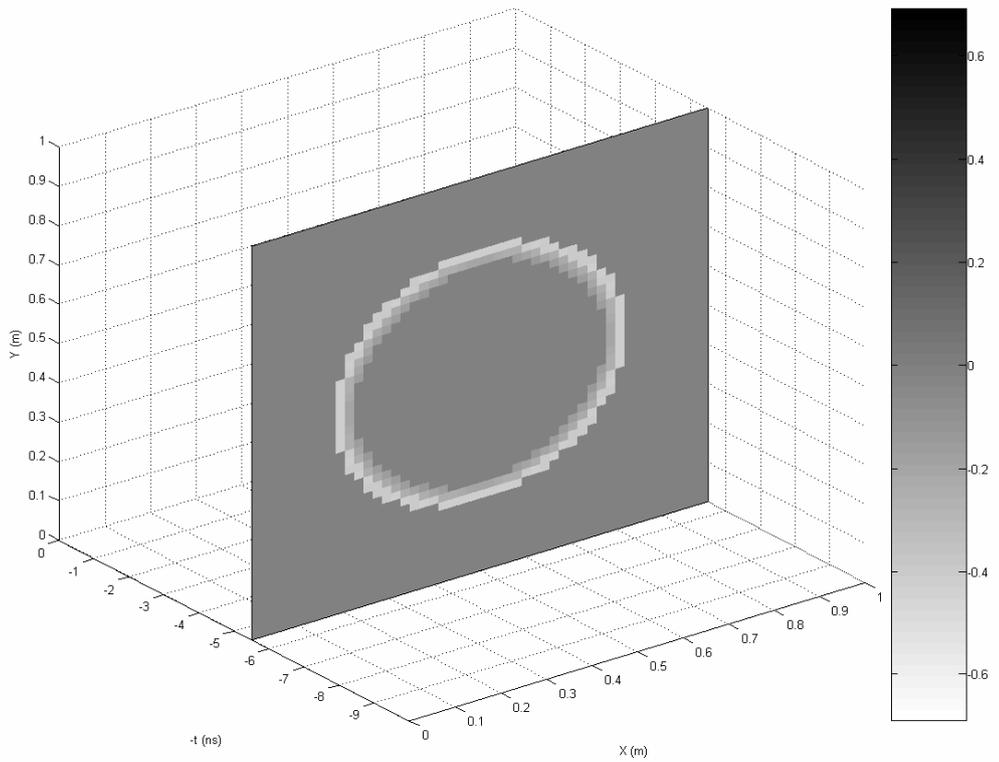
(e)



(f)



(g)



(h)

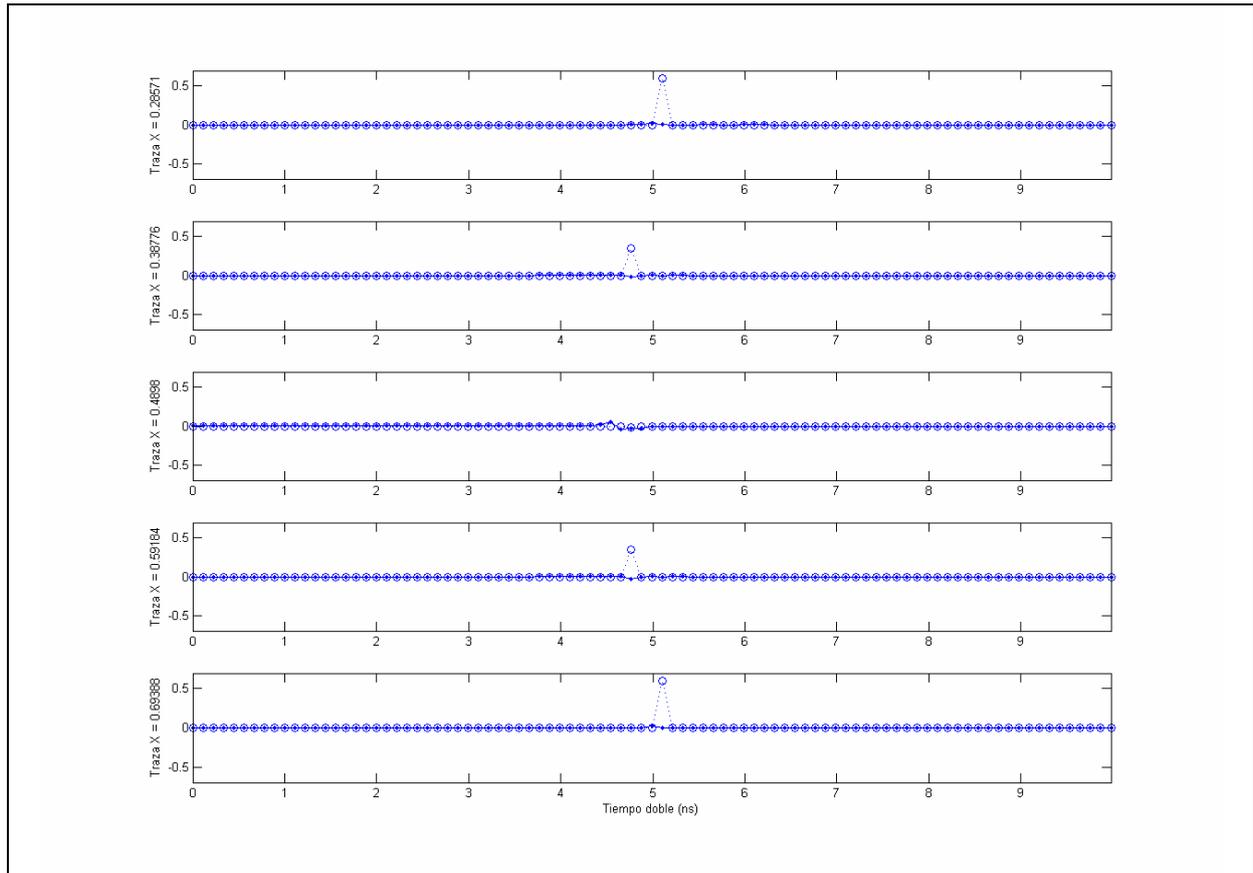


Figura 7-2-4: Trazas representativas de la SECCIÓN MEDIDA y la SECCIÓN ESPERADA correspondiente al modelo tridimensional constituido por un único difractor puntual.

En todos los casos se representa, frente al tiempo doble de recorrido (ns), las trazas correspondientes a la SECCIÓN MEDIDA (puntos) y a la SECCIÓN ESPERADA (círculos).

(5) **Caracterización y comparación de resultados**

El tiempo medio de cómputo para este modelo es de 82,8182 s.

A la vista de los resultados expuestos en las figuras del punto anterior, pueden resaltarse las siguientes características generales:

- La SECCIÓN MEDIDA correspondiente al caso tridimensional presenta características análogas a las correspondientes al caso bidimensional, en lo que refiere a:
 - La geometría de la señal.
 - Localización de la señal en los ejes de posición horizontal y tiempo doble de recorrido.
 - Amplitud y fase de la señal.
- En los perfiles que no pasan por la vertical del difractor puntual aparece una señal correspondiente al efecto lateral causado por éste, con características análogas a las arriba expuestas.

En los modelos estudiados en las Subsecciones siguientes se obtienen resultados análogos. Los resultados conjuntos serán discutidos en la Sección 7.5, dedicada a la exposición y discusión de los principales resultados obtenidos.

7.2.2. Superposición de capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito

Este modelo está constituido por dos capas plano-paralelas, superpuestas a un semiespacio infinito. Es equivalente a considerar dos reflectores plano-paralelos, situados en las interfaces entre capas, y entre la última capa y el semiespacio.

(1) Descripción del modelo

En este modelo se emplean valores realistas para los parámetros que caracterizan los medios, pero no se emplean éstos en la determinación de los parámetros que caracterizan los reflectores, sino que se emplean otros valores dados con objeto de remarcar las características fundamentales.

La descripción del modelo se detalla en la Tabla 7-2-3:

Tabla 7-2-3: Descripción del modelo tridimensional constituido por dos capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito.

<u>Caracterización del cubo:</u>	
Número de trazas:	$PEX = 50$ $PEY = 50$
Longitud:	$LX = 1,00 m$ $LY = 1,00 m$
Espaciado entre trazas:	$EX = 0,020 m$ $EY = 0,020 m$
Número de muestras por traza:	$PET = 128$
Tiempo de muestreo:	$LT = 10 \cdot 10^{-9} s$
Espaciado entre muestras:	$ET = 0,078 \cdot 10^{-9} s$
<u>Caracterización de la antena:</u>	
Pulsación:	$\omega = 2\pi \cdot 900 \cdot 10^6 s^{-1}$

Tabla 7-2-3 (Continuación)

Caracterización de los medios:1: Aire

Permitividad eléctrica: $\varepsilon = \varepsilon_0$

Permeabilidad magnética: $\mu = \mu_0$

Conductividad eléctrica: $\sigma = 0$

Velocidad de propagación: $c_1 = 2,9980 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Constante de propagación: $\gamma_1 = 41,92 i \text{ m}^{-1}$

2: Arenas secas

Permitividad eléctrica: $\varepsilon = 2 \cdot \varepsilon_0$

Permeabilidad magnética: $\mu = \mu_0$

Conductividad eléctrica: $\sigma = 10^{-4} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

Velocidad de propagación: $c_2 = 2,1199 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Constante de propagación: $\gamma_2 = (0,0133 + 59,28 i) \text{ m}^{-1}$

3: Arenisca seca

Permitividad eléctrica: $\varepsilon = 6 \cdot \varepsilon_0$

Permeabilidad magnética: $\mu = \mu_0$

Conductividad eléctrica: $\sigma = 10^{-7} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

Velocidad de propagación: $c_3 = 1,2239 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Constante de propagación: $\gamma_3 = 102,7 i \text{ m}^{-1}$

Velocidad de propagación promedio: $c_m = 1,5679 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Caracterización de los reflectores:12

Coeficiente de reflexión: $r_{12} = -0,7000 + 0,0001 i$

Coeficiente de transmisión ascendente: $t_{12} = 0,3000 + 0,0001 i$

Coeficiente de transmisión descendente: $t_{21} = 1,7000 - 0,0001 i$

Posición: $Z = 0,30 \text{ m}$

23

Coeficiente de reflexión: $r_{23} = -0,6000 - 0,0001 i$

Coeficiente de transmisión ascendente: $t_{23} = 0,4000 + 0,0001 i$

Coeficiente de transmisión descendente: $t_{32} = 1,6000 + 0,0001 i$

Posición: $Z = 0,50 \text{ m}$

(2) SECCIÓN DE ÍNDICES

El modelo consta de dos reflectores plano-paralelos. La SECCIÓN DE ÍNDICES correspondiente a este modelo se muestra en la Figura 7-2-5:

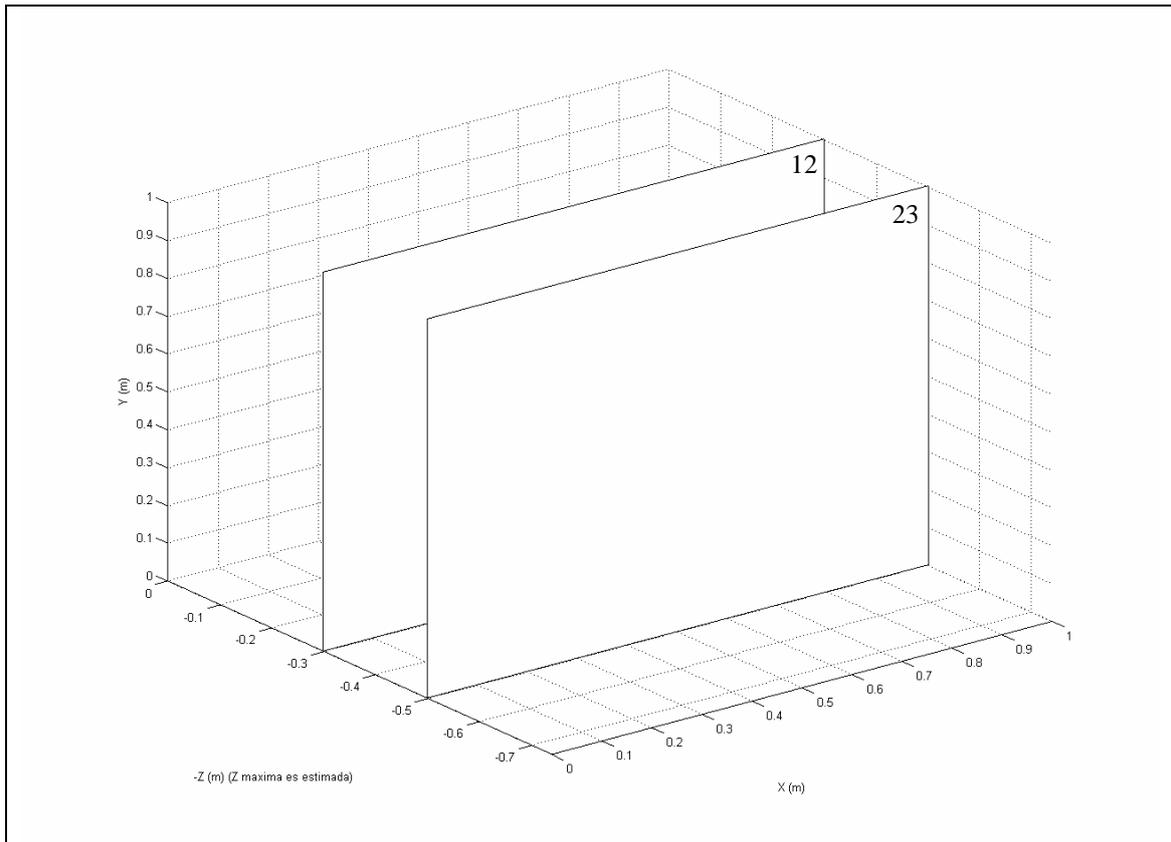


Figura 7-2-5: SECCIÓN DE ÍNDICES correspondiente al modelo tridimensional constituido por dos capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito. Junto a cada reflector se muestra el índice asociado.

(3) DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD

La DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD determinada mediante la aplicación del algoritmo se muestra en la Figura 7-2-6:

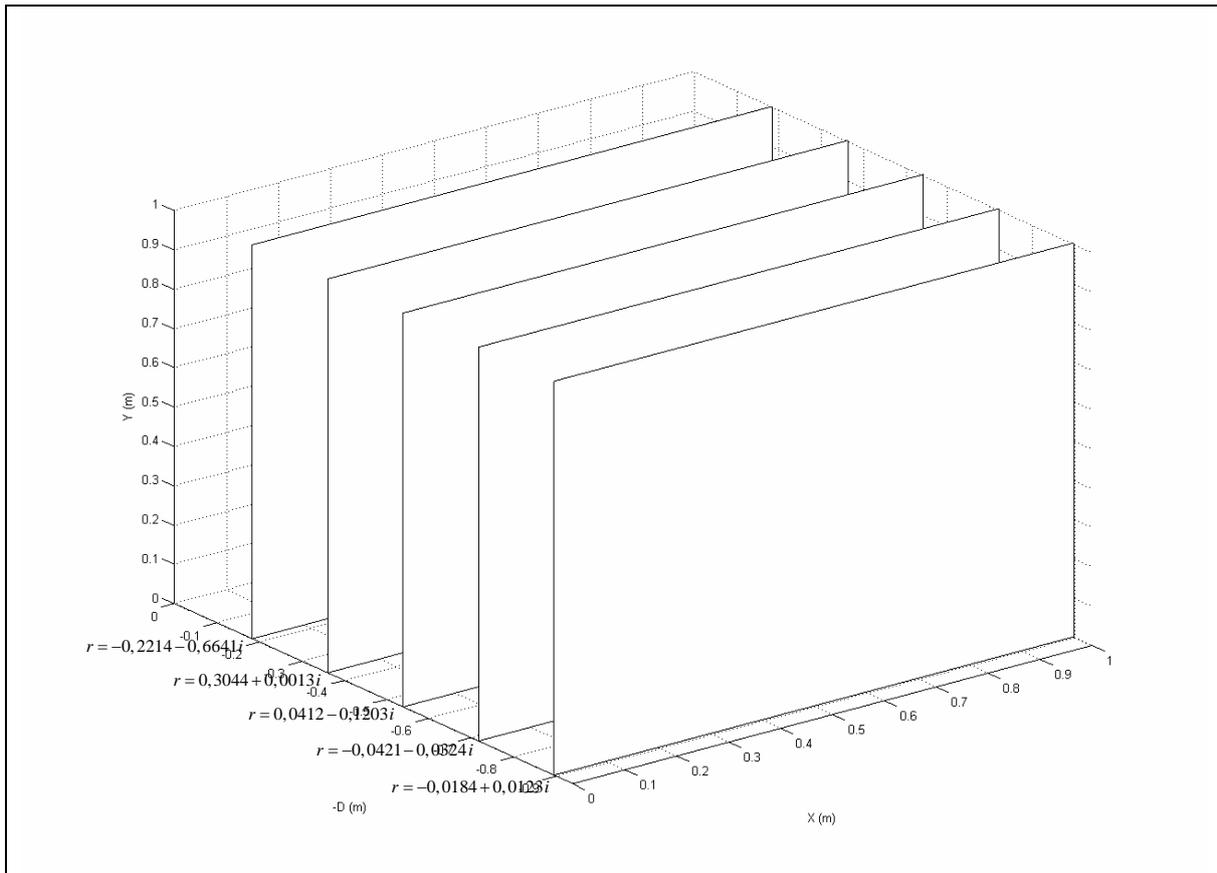


Figura 7-2-6: DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondiente al modelo tridimensional constituido por dos capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito. Junto a cada reflector se muestra la reflectividad aparente.

(4) SECCIÓN MEDIDA

La descripción de la SECCIÓN MEDIDA obtenida se detalla en la Tabla 7-2-4:

Tabla 7-2-4: Descripción de la SECCIÓN MEDIDA correspondiente al modelo tridimensional constituido por dos capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito.

<u>Caracterización del cubo:</u>	
Número de trazas:	$PEX = 50$ $PEY = 50$
Longitud:	$LX = 1,00\text{ m}$ $LY = 1,00\text{ m}$
Espaciado entre trazas:	$EX = 0,043\text{ m}$ $EY = 0,043\text{ m}$
Número de muestras por traza:	$PET = 95$
Tiempo de muestreo:	$LT = 9,966 \cdot 10^{-9}\text{ s}$
Espaciado entre muestras:	$ET = 0,106 \cdot 10^{-9}\text{ s}$

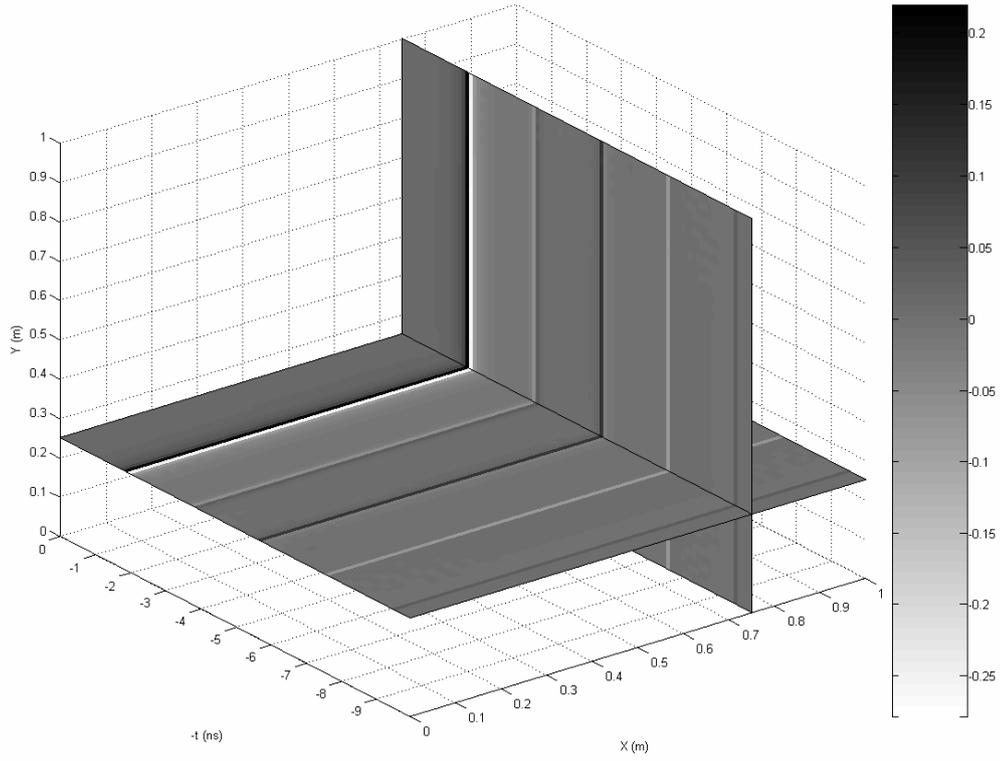
La comparación entre la SECCIÓN MEDIDA y la SECCIÓN ESPERADA se muestra en las figuras 7-2-7 y 7-2-8.

Página siguiente:

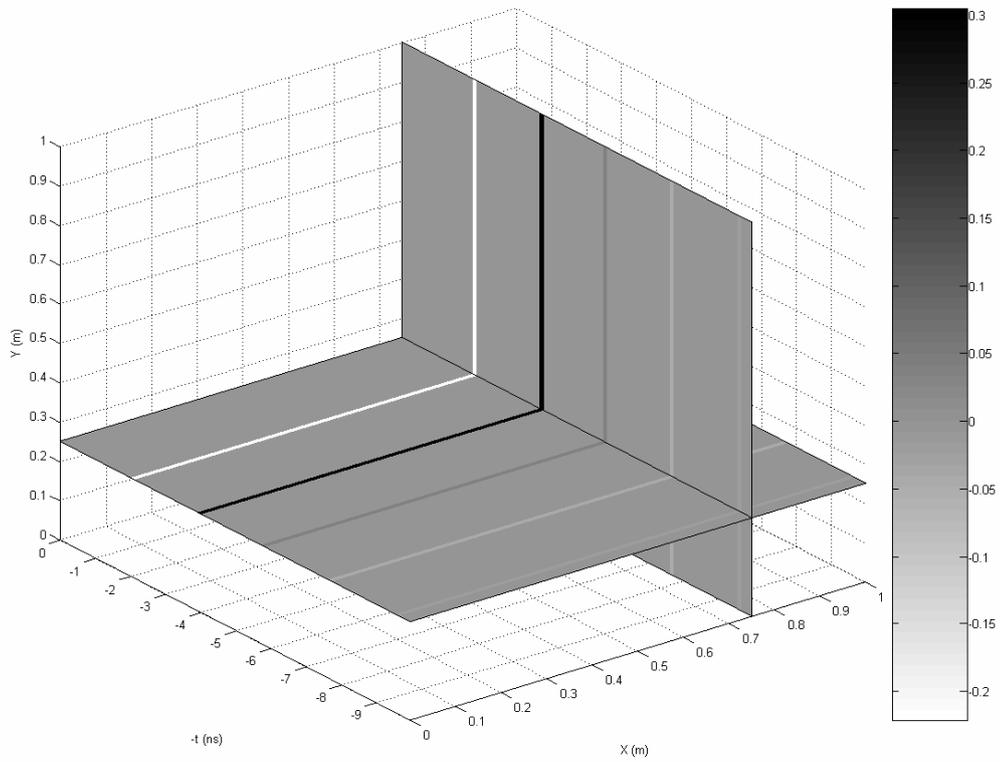
Figura 7-2-7: Comparación entre la SECCIÓN MEDIDA y la SECCIÓN ESPERADA correspondiente al modelo tridimensional constituido por dos capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito.

(a) Perfiles de la SECCIÓN MEDIDA por los planos $X = 0,75\text{ m}$ e $Y = 0,25\text{ m}$.

(b) Perfiles de la SECCIÓN ESPERADA por los planos $X = 0,75\text{ m}$ e $Y = 0,25\text{ m}$.



(a)



(b)

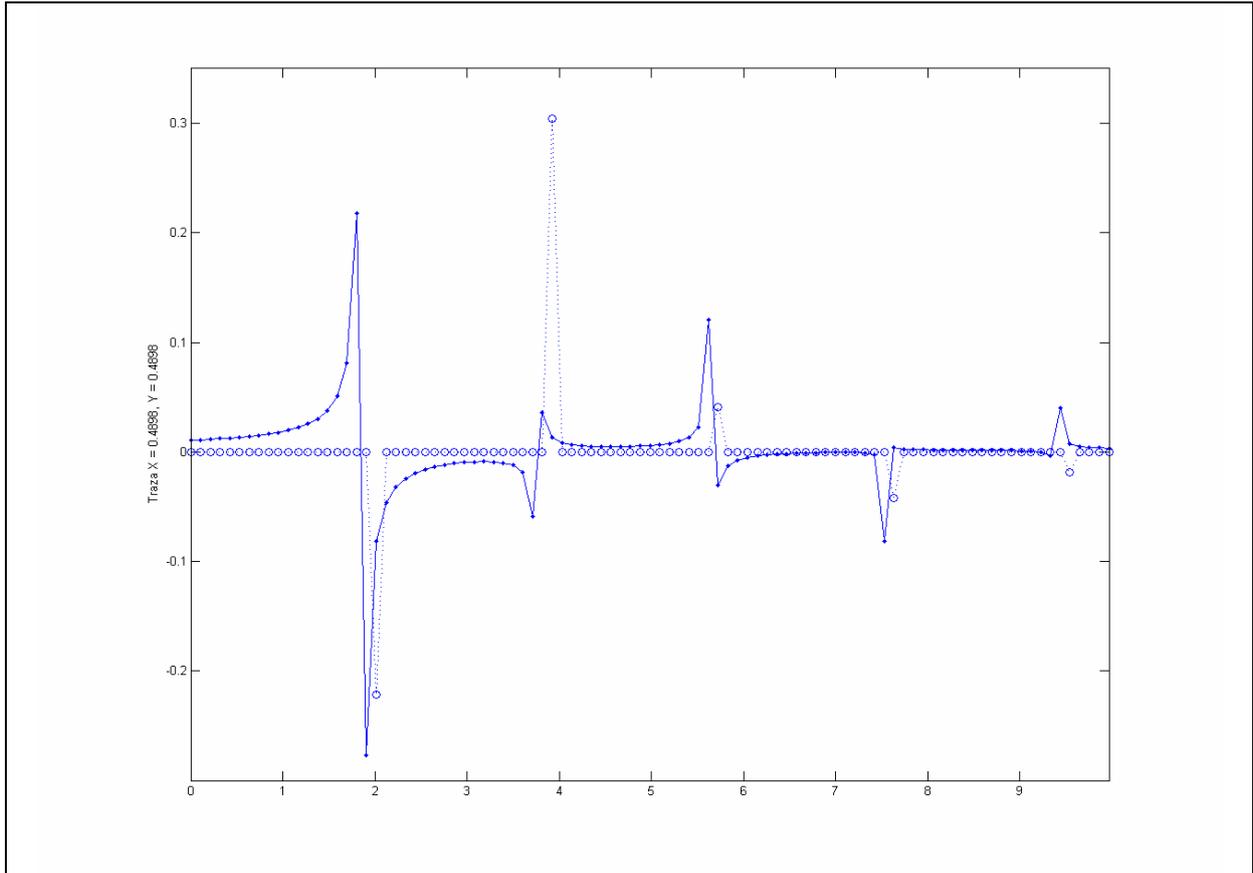


Figura 7-2-8: Trazas representativas de la SECCIÓN MEDIDA y la SECCIÓN ESPERADA correspondiente al modelo tridimensional constituido por dos capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito.

Se representa, frente al tiempo doble de recorrido (ns), las trazas correspondientes a la SECCIÓN MEDIDA (puntos) y a la SECCIÓN ESPERADA (círculos).

(5) **Caracterización y comparación de resultados**

El tiempo medio de cómputo para este modelo es de 102,4582 s.

A la vista de los resultados expuestos en las figuras del punto anterior, pueden resaltarse las siguientes características generales:

- La SECCIÓN MEDIDA correspondiente al caso tridimensional presenta características análogas a las correspondientes al caso bidimensional, en lo que refiere a:
 - La geometría de la señal.
 - Localización de la señal en los ejes de posición horizontal y tiempo doble de recorrido.
 - Amplitud y fase de la señal.

Estos resultados son análogos a los obtenidos en el resto de Subsecciones. Los resultados conjuntos serán discutidos en la Sección 7.5, dedicada a la exposición y discusión de los principales resultados obtenidos.

7.2.3. Modelo realista

Este modelo está constituido por una colección de capas plano-paralelas y elementos difractores, superpuestos a un semiespacio infinito. Es equivalente a considerar una colección de reflectores plano-paralelos, de diferentes tamaños, situados en las interfaces entre capas, y entre las últimas capas y el semiespacio.

(1) Descripción del modelo

En este modelo se emplean valores realistas para los parámetros que caracterizan los medios, empleándose éstos en la determinación de los parámetros que caracterizan los reflectores.

La descripción del modelo se detalla en la Tabla 7-2-5:

Tabla 7-2-5: Descripción del modelo tridimensional realista.

<u>Caracterización del cubo:</u>	
Número de trazas:	$PEX = 50$ $PEY = 50$
Longitud:	$LX = 1,00 m$ $LY = 1,00 m$
Longitud:	$EX = 0,020 m$ $EY = 0,020 m$
Número de muestras por traza:	$PET = 128$
Tiempo de muestreo:	$LT = 10 \cdot 10^{-9} s$
Tiempo de muestreo:	$ET = 0,078 \cdot 10^{-9} s$
<u>Caracterización de la antena:</u>	
Pulsación:	$\omega = 2\pi \cdot 900 \cdot 10^6 s^{-1}$
<u>Caracterización de los medios:</u>	
<u>1: Aire</u>	
Permitividad eléctrica:	$\varepsilon = \varepsilon_0$
Permeabilidad magnética:	$\mu = \mu_0$
Conductividad eléctrica:	$\sigma = 0$
Velocidad de propagación:	$c_1 = 2,9980 \cdot 10^8 m \cdot s^{-1}$
Constante de propagación:	$\gamma_1 = 41,92 i m^{-1}$

Tabla 7-2-5 (Continuación)

Caracterización de los medios:2: Arenas secas

Permitividad eléctrica: $\varepsilon = 2 \cdot \varepsilon_0$

Permeabilidad magnética: $\mu = \mu_0$

Conductividad eléctrica: $\sigma = 10^{-4} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

Velocidad de propagación: $c_2 = 2,1199 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Constante de propagación: $\gamma_2 = (0,0133 + 59,28i) \text{ m}^{-1}$

3: Cobre

Permitividad eléctrica: $\varepsilon = \varepsilon_0$

Permeabilidad magnética: $\mu = \mu_0$

Conductividad eléctrica: $\sigma = 10^8 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

Velocidad de propagación: $c_3 = 9,4870 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Constante de propagación: $\gamma_3 = 5,9607 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$

4: Arenisca seca

Permitividad eléctrica: $\varepsilon = 6 \cdot \varepsilon_0$

Permeabilidad magnética: $\mu = \mu_0$

Conductividad eléctrica: $\sigma = 10^{-7} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

Velocidad de propagación: $c_4 = 1,2239 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Constante de propagación: $\gamma_4 = 102,7i \text{ m}^{-1}$

5: Granito seco

Permitividad eléctrica: $\varepsilon = 5 \cdot \varepsilon_0$

Permeabilidad magnética: $\mu = \mu_0$

Conductividad eléctrica: $\sigma = 10^{-8} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$

Velocidad de propagación: $c_5 = 1,3407 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Constante de propagación: $\gamma_5 = 7,6974 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1}$

Velocidad de propagación promedio: $c_m = 1,4761 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Tabla 7-2-5 (Continuación)

Caracterización de los reflectores:12

Coeficiente de reflexión:	$r_{12} = -0,1716 + 0,0002i$
Coeficiente de transmisión ascendente:	$t_{12} = 0,8284 + 0,0002i$
Coeficiente de transmisión descendente:	$t_{21} = 1,1716 - 0,0002i$
Posición:	$0 \leq X \leq LX, 0 \leq Y \leq LY, Z = 0,10m$

23

Coeficiente de reflexión:	$r_{23} = -1,0000 + 0,0000i$
Coeficiente de transmisión ascendente:	$t_{23} = 0,0000 + 0,0000i$
Coeficiente de transmisión descendente:	$t_{32} = 2,0000 - 0,0000i$
Posición:	$X = 0,6531m, Y = 0,8367m, Z = 0,48m$

24

Coeficiente de reflexión:	$r_{24} = -0,2679 - 0,0002i$
Coeficiente de transmisión ascendente:	$t_{24} = 0,7321 - 0,0002i$
Coeficiente de transmisión descendente:	$t_{42} = 1,2679 + 0,0002i$
Posición:	$0 \leq X \leq 0,3061m, 0 \leq Y \leq 0,6531m, Z = 0,50m$

25

Coeficiente de reflexión:	$r_{25} = -0,2251 - 0,0002i$
Coeficiente de transmisión ascendente:	$t_{25} = 0,7749 - 0,0002i$
Coeficiente de transmisión descendente:	$t_{52} = 1,2251 + 0,0002i$
Posición:	$0 \leq X \leq 0,3061m, 0,6735 \leq Y \leq LY, Z = 0,80m$ $0,3265m \leq X \leq LX, 0 \leq Y \leq LY, Z = 0,80m$

32

Coeficiente de reflexión:	$r_{32} = 1,0000 - 0,0000i$
Coeficiente de transmisión ascendente:	$t_{32} = 2,0000 - 0,0000i$
Coeficiente de transmisión descendente:	$t_{23} = 0,0000 + 0,0000i$
Posición:	$X = 0,6531m, Y = 0,8367m, Z = 0,52m$

45

Coeficiente de reflexión:	$r_{45} = 0,0455 - 0,0000i$
Coeficiente de transmisión ascendente:	$t_{45} = 1,0455 - 0,0000i$
Coeficiente de transmisión descendente:	$t_{54} = 0,9545 + 0,0000i$
Posición:	$0 \leq X \leq 0,3061m, 0 \leq Y \leq 0,6531m, Z = 1,00m$

(2) SECCIÓN DE ÍNDICES

El modelo consta de varios reflectores plano-paralelos y dos difractores puntuales. La SECCIÓN DE ÍNDICES correspondiente a este modelo se muestra en la Figura 7-2-9:

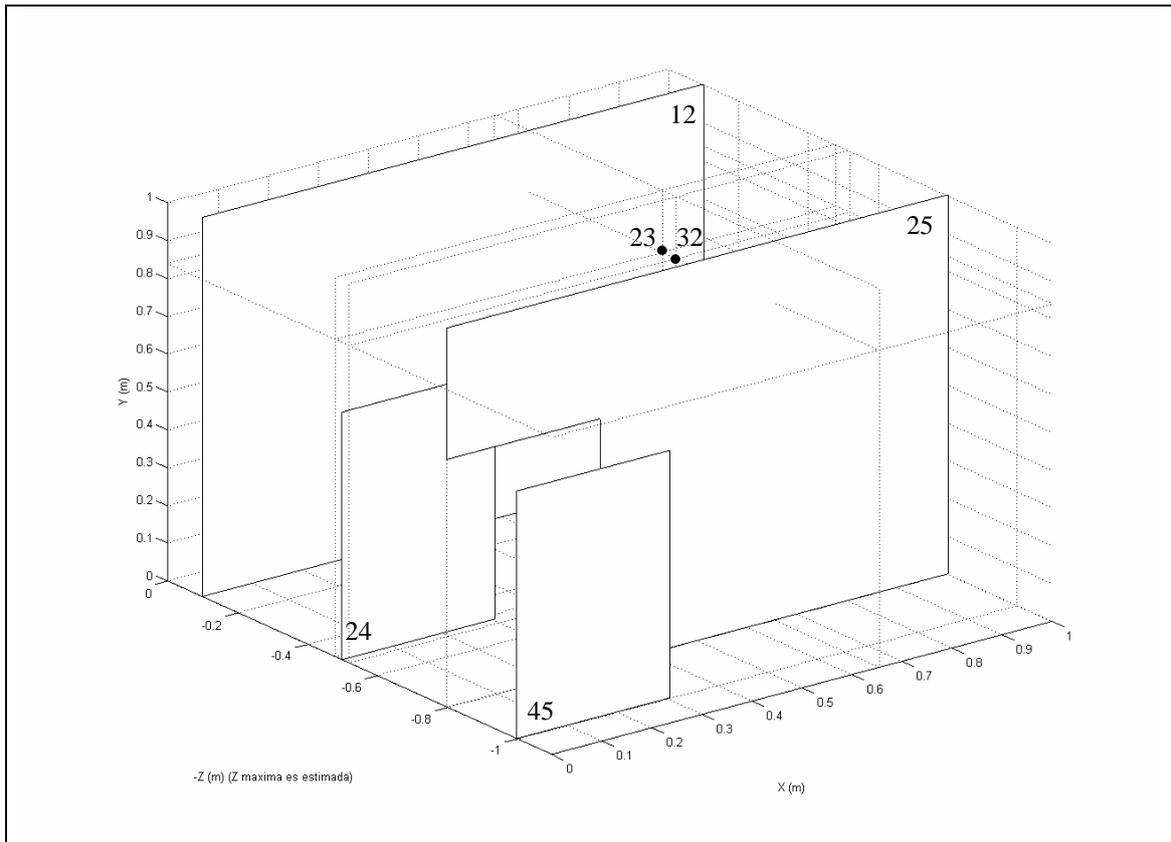


Figura 7-2-9: SECCIÓN DE ÍNDICES correspondiente al modelo tridimensional realista. Junto a cada reflector se muestra el índice asociado.

(3) DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD

La DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD determinada mediante la aplicación del algoritmo se muestra en la Figura 7-2-10:

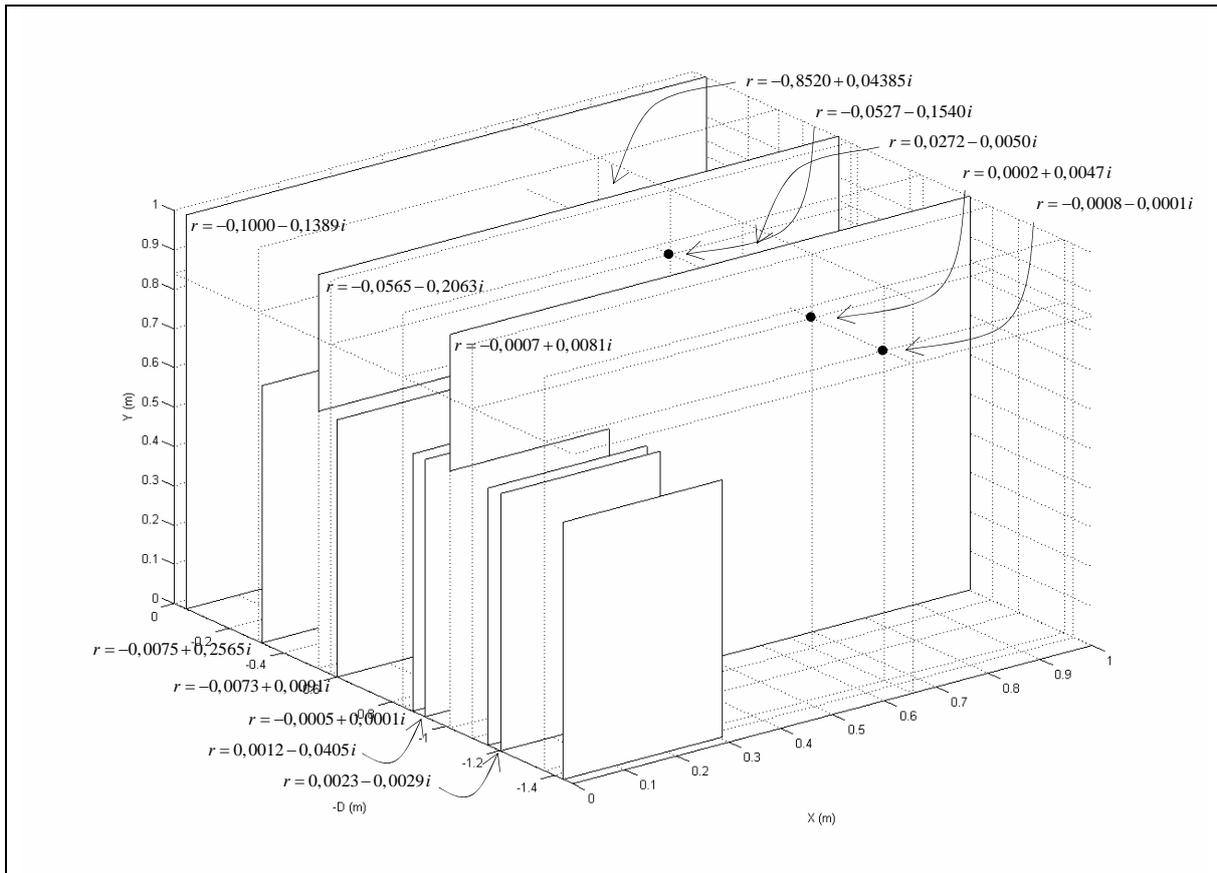


Figura 7-2-10: DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondiente al modelo tridimensional realista. Junto a cada reflector se muestra la reflectividad aparente, en el caso en que las partes real o imaginaria sean apreciables.

(4) SECCIÓN MEDIDA

La descripción de la SECCIÓN MEDIDA obtenida se detalla en la Tabla 7-2-6:

Tabla 7-2-6: Descripción de la SECCIÓN MEDIDA correspondiente al modelo tridimensional realista.

Caracterización del cubo:

Número de trazas:	$PEX = 50$ $PEY = 50$
Longitud:	$LX = 1,00\ m$ $LY = 1,00\ m$
Espaciado entre trazas:	$EX = 0,043\ m$ $EY = 0,043\ m$
Número de muestras por traza:	$PET = 76$
Tiempo de muestreo:	$LT = 19,760 \cdot 10^{-9}\ s$
Espaciado entre muestras:	$ET = 0,263 \cdot 10^{-9}\ s$

La SECCIÓN MEDIDA se muestra en las figuras 7-2-11 y 7-2-12.

Páginas siguientes:

Figura 7-2-11: SECCIÓN MEDIDA obtenida mediante la aplicación del algoritmo correspondiente al modelo tridimensional realista.

- (a) Perfil por el plano $X = 0,00 m$.*
- (b) Logaritmo decimal del valor absoluto de (a).*

- (c) Perfil por el plano $X = 0,49 m$.*
- (d) Logaritmo decimal del valor absoluto de (c).*

- (e) Perfil por el plano $X = 0,65 m$.*
- (f) Logaritmo decimal del valor absoluto de (e).*

- (g) Perfil por el plano $X = 1,00 m$.*
- (h) Logaritmo decimal del valor absoluto de (g).*

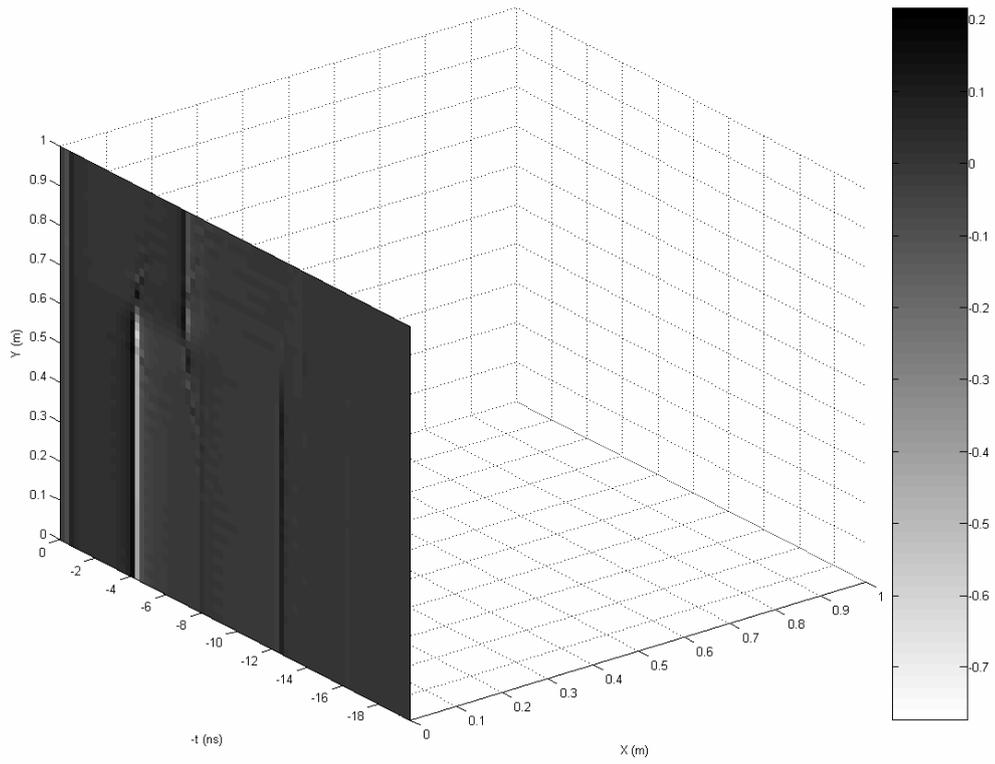
- (i) Perfil por el plano $Y = 0,00 m$.*
- (j) Logaritmo decimal del valor absoluto de (i).*

- (k) Perfil por el plano $Y = 0,84 m$.*
- (l) Logaritmo decimal del valor absoluto de (k).*

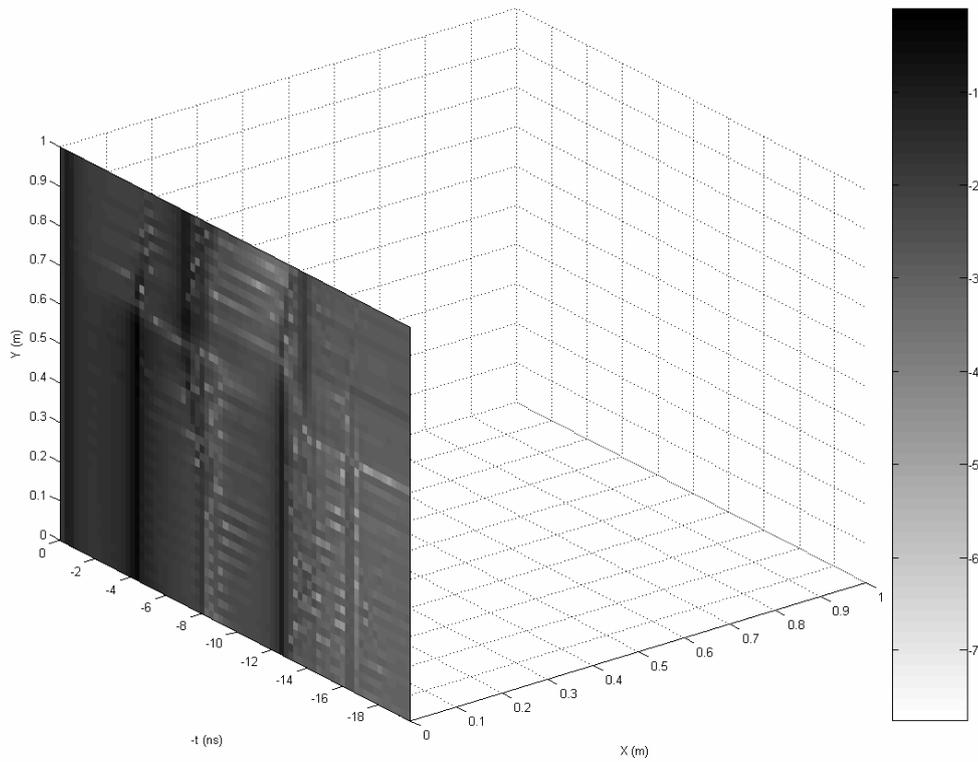
- (m) Perfil por el plano $Y = 1,00 m$.*
- (n) Logaritmo decimal del valor absoluto de (m).*

- (ñ) Corte por el plano $t = 4,5 \cdot 10^{-9} s$.*
- (o) Logaritmo decimal del valor absoluto de (ñ).*

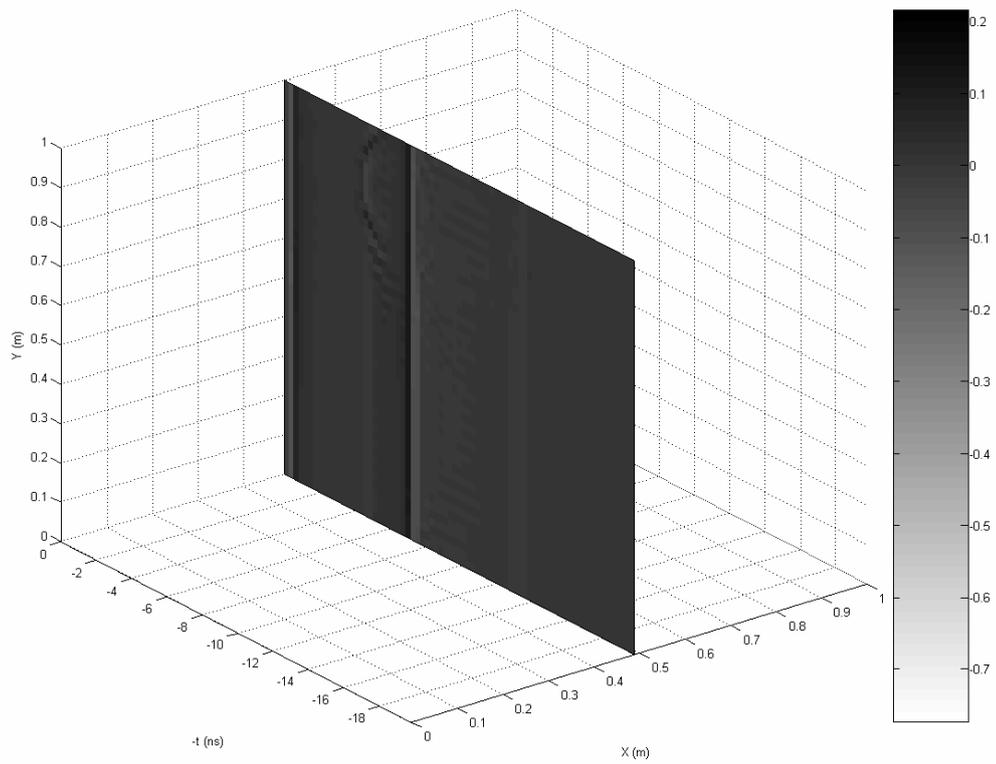
- (p) Corte por el plano $t = 7,3 \cdot 10^{-9} s$.*
- (q) Logaritmo decimal del valor absoluto de (p).*



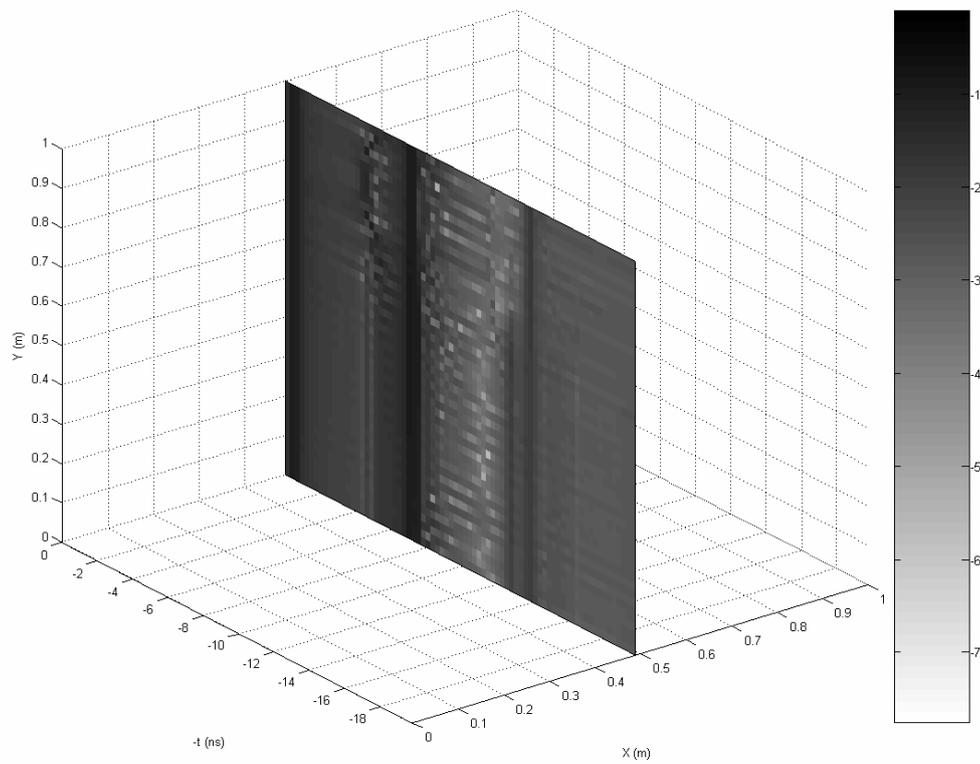
(a)



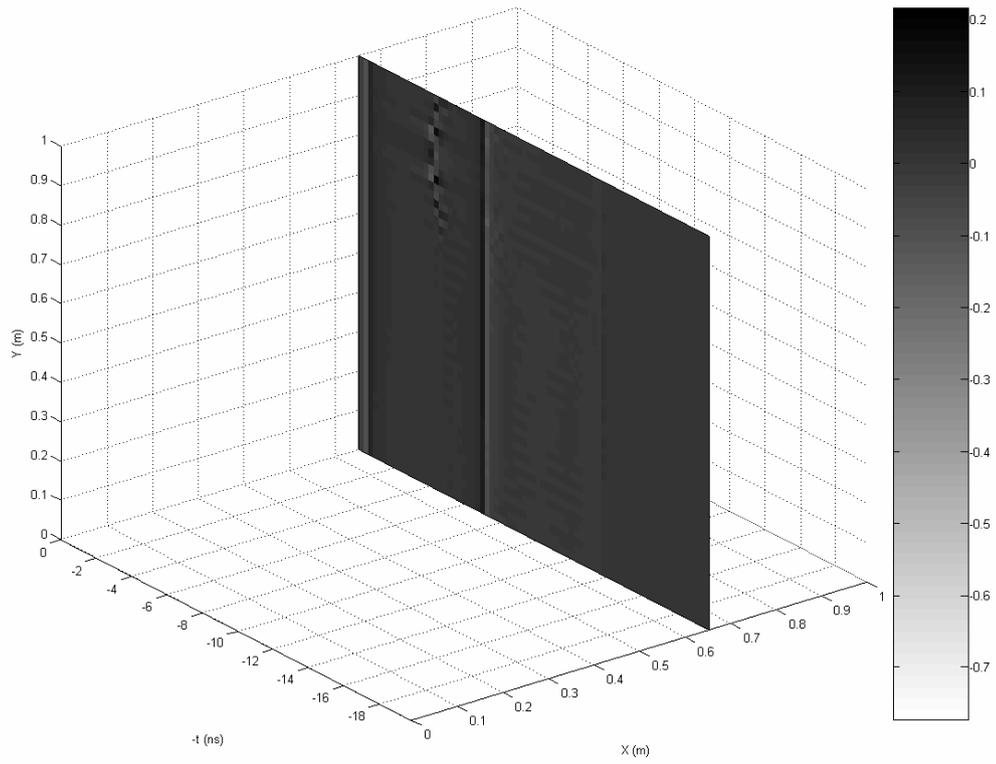
(b)



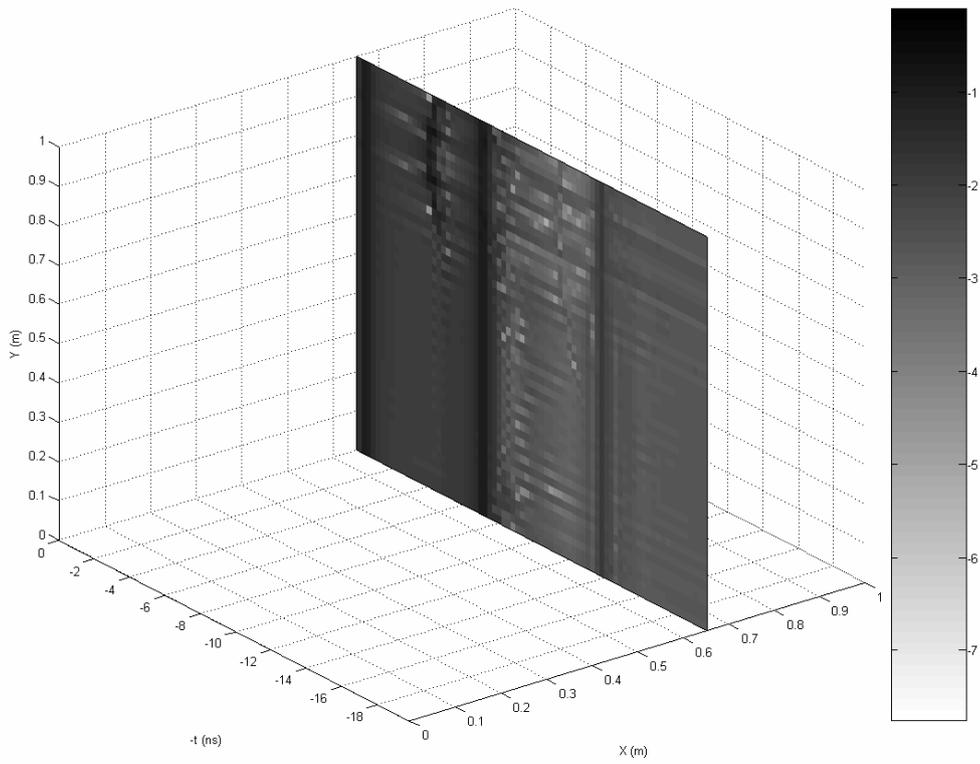
(c)



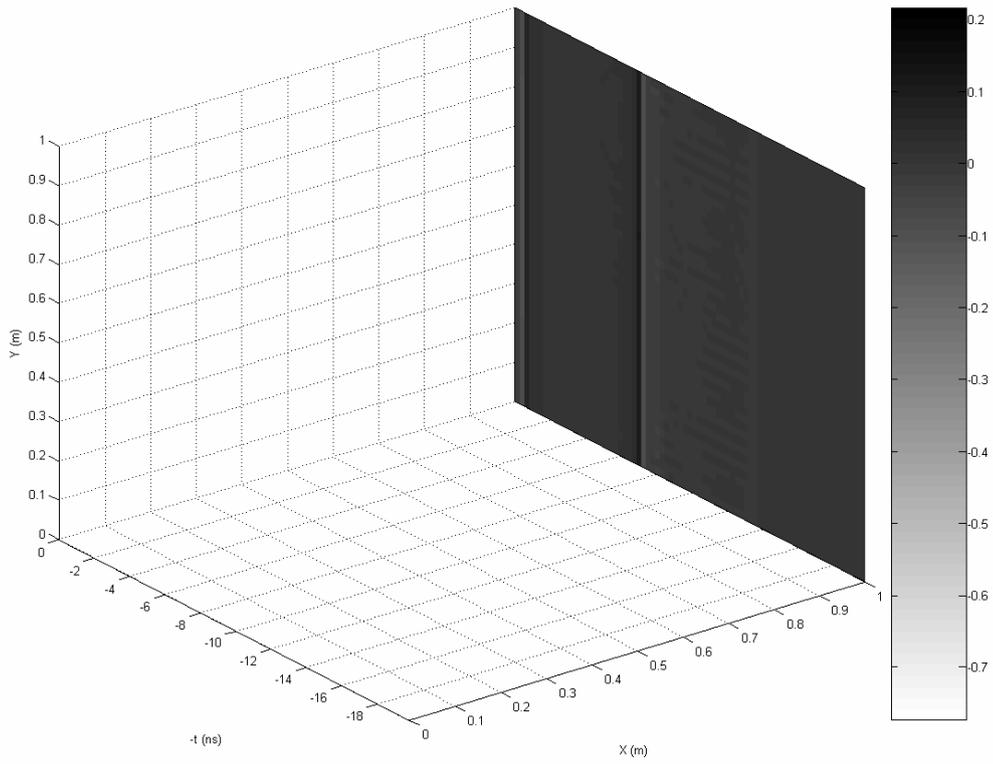
(d)



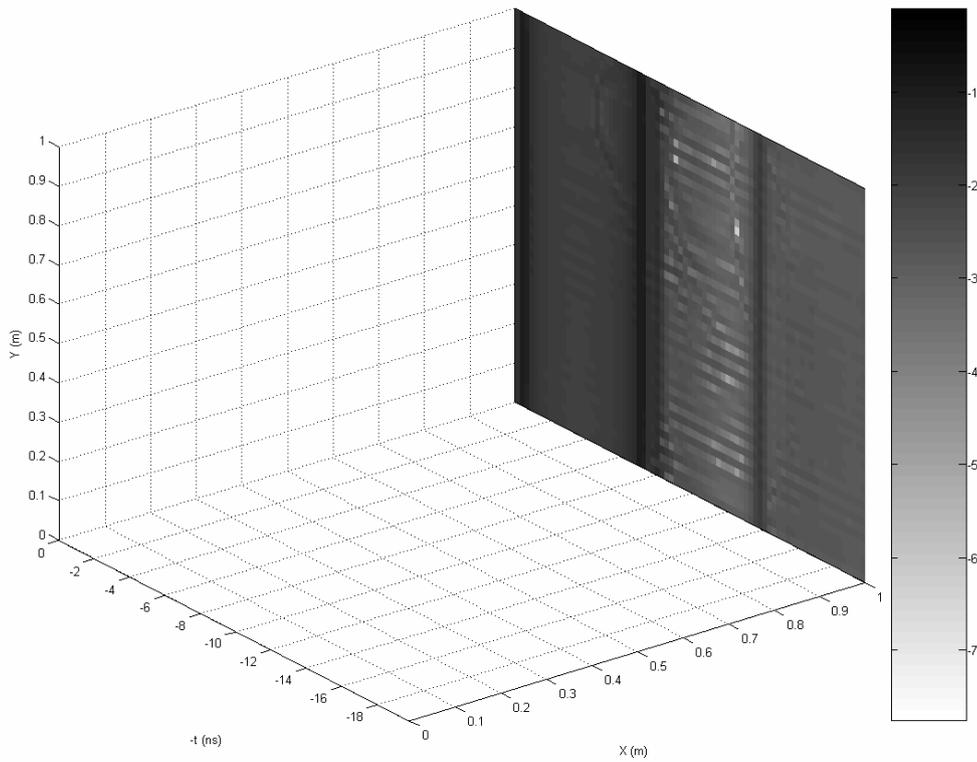
(e)



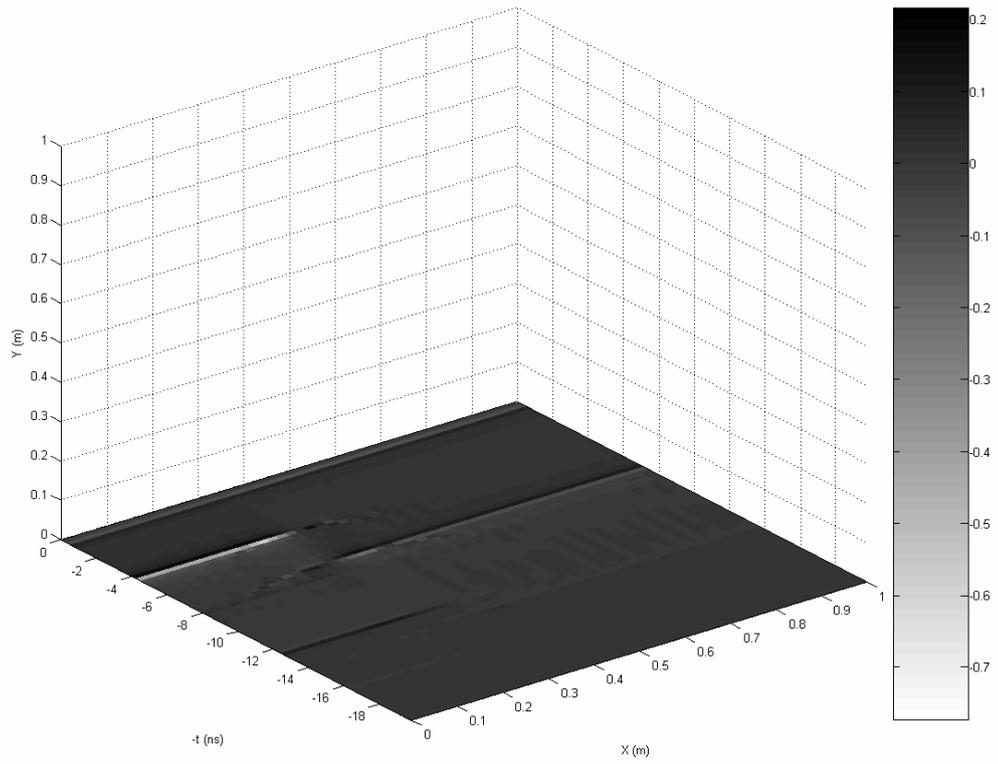
(f)



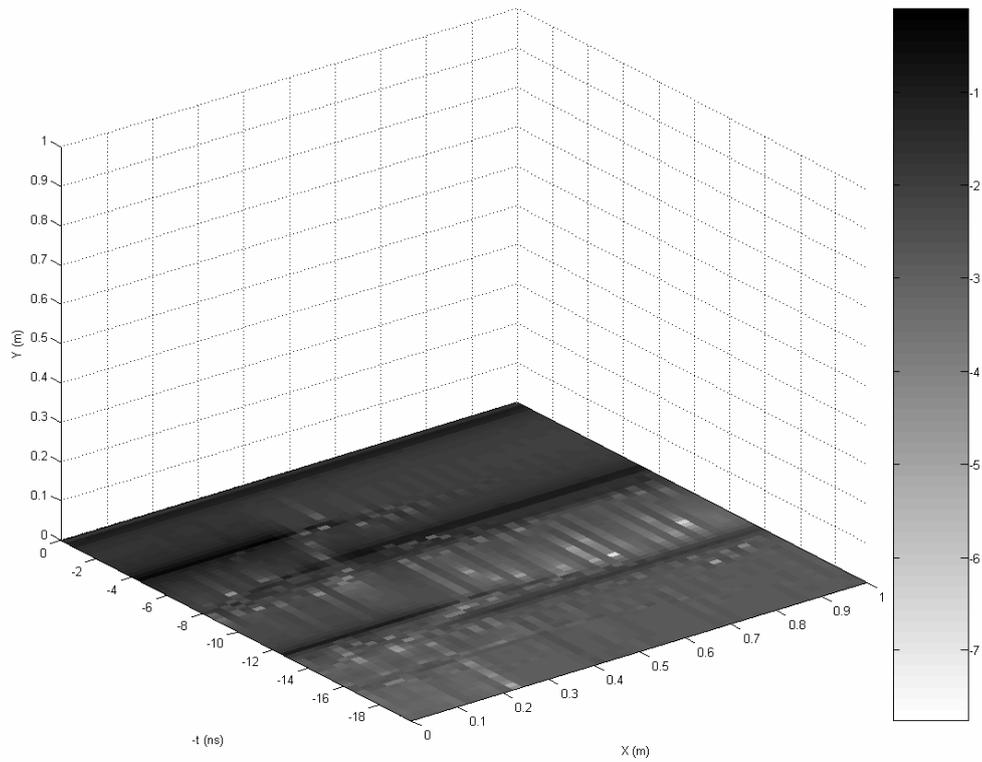
(g)



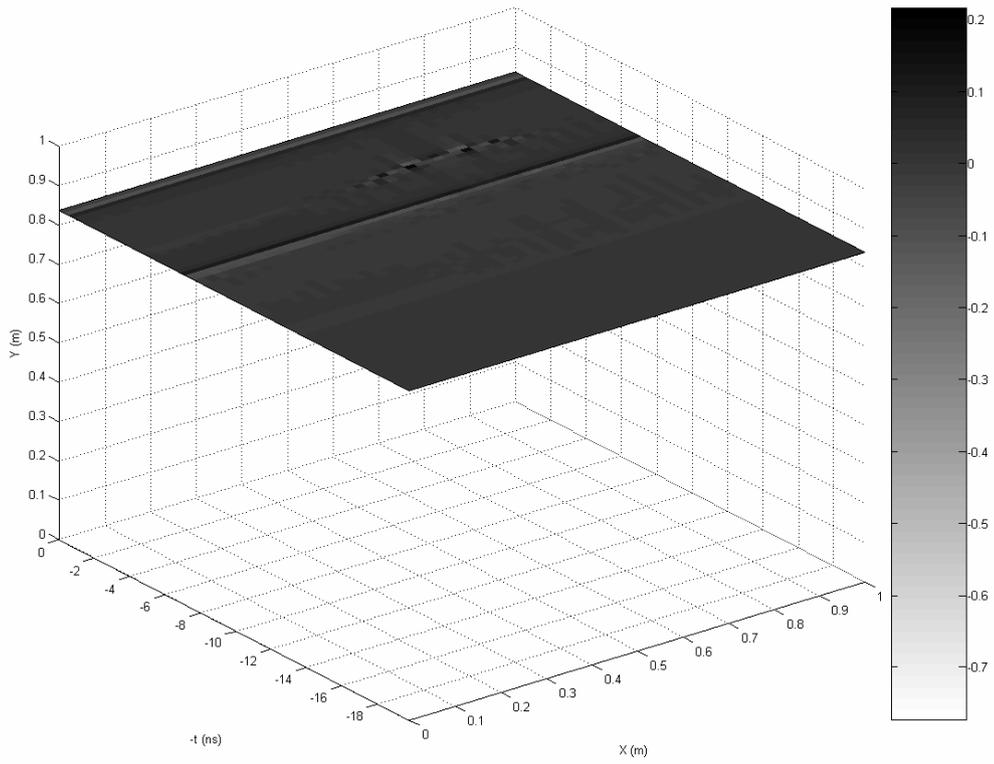
(h)



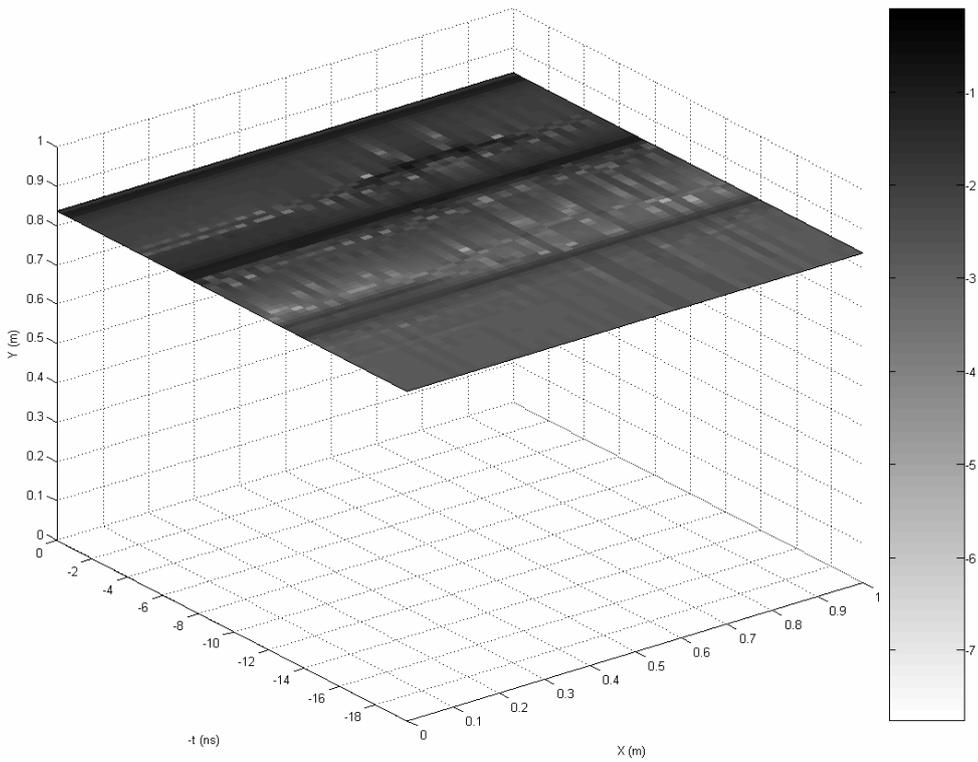
(i)



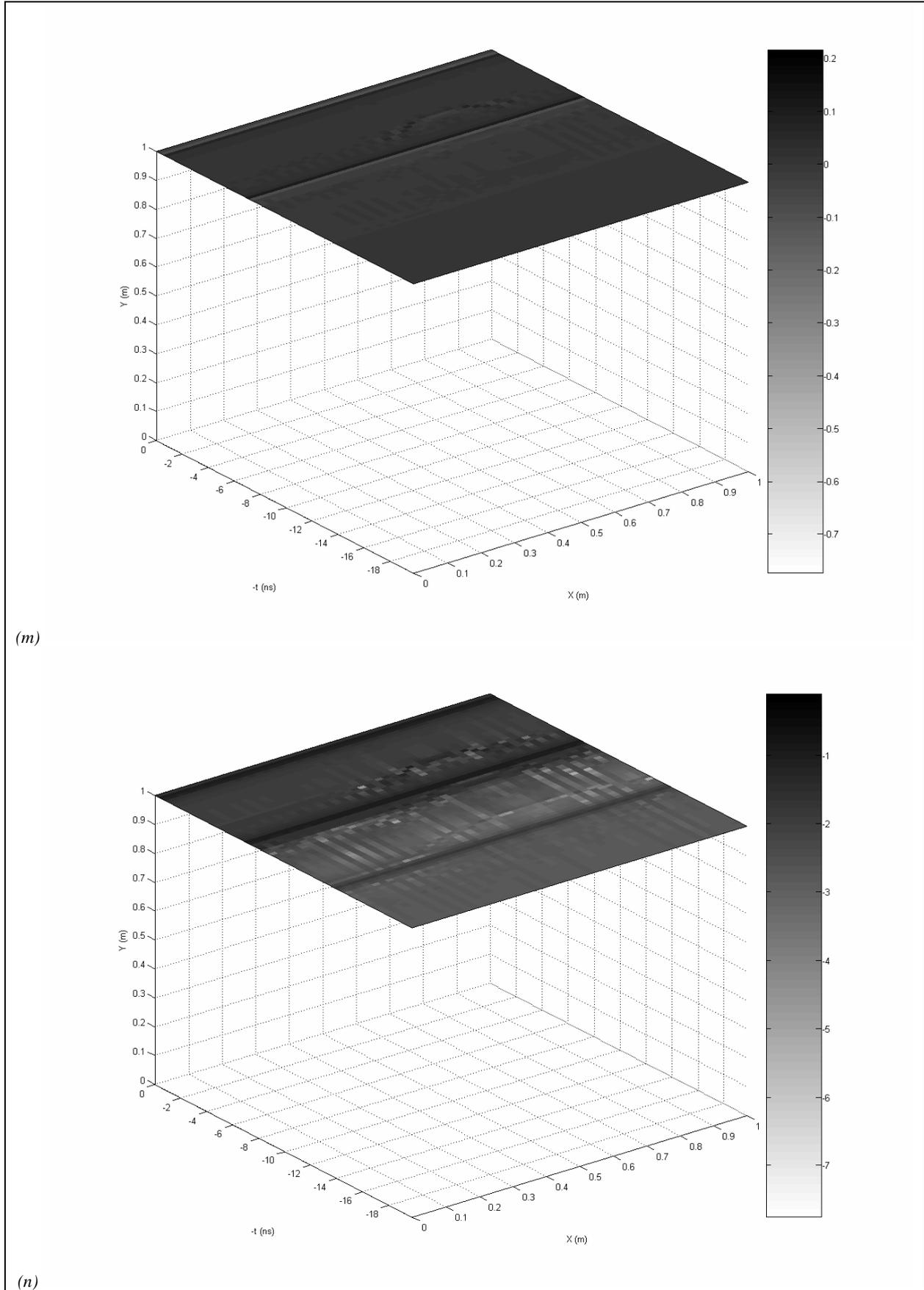
(j)

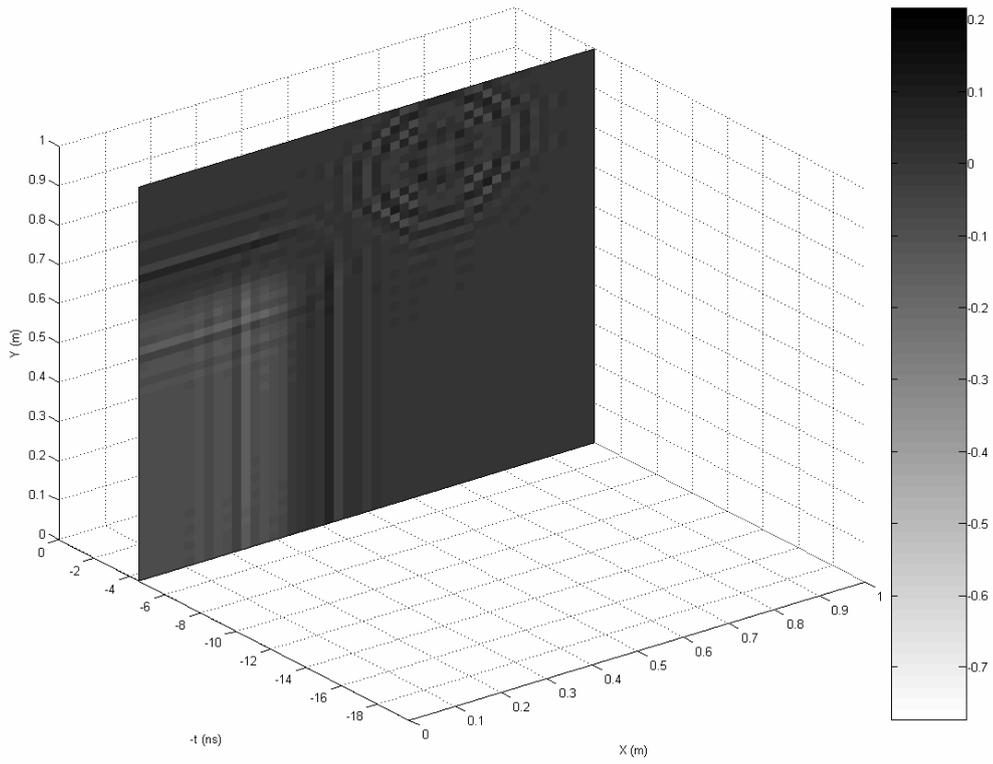


(k)

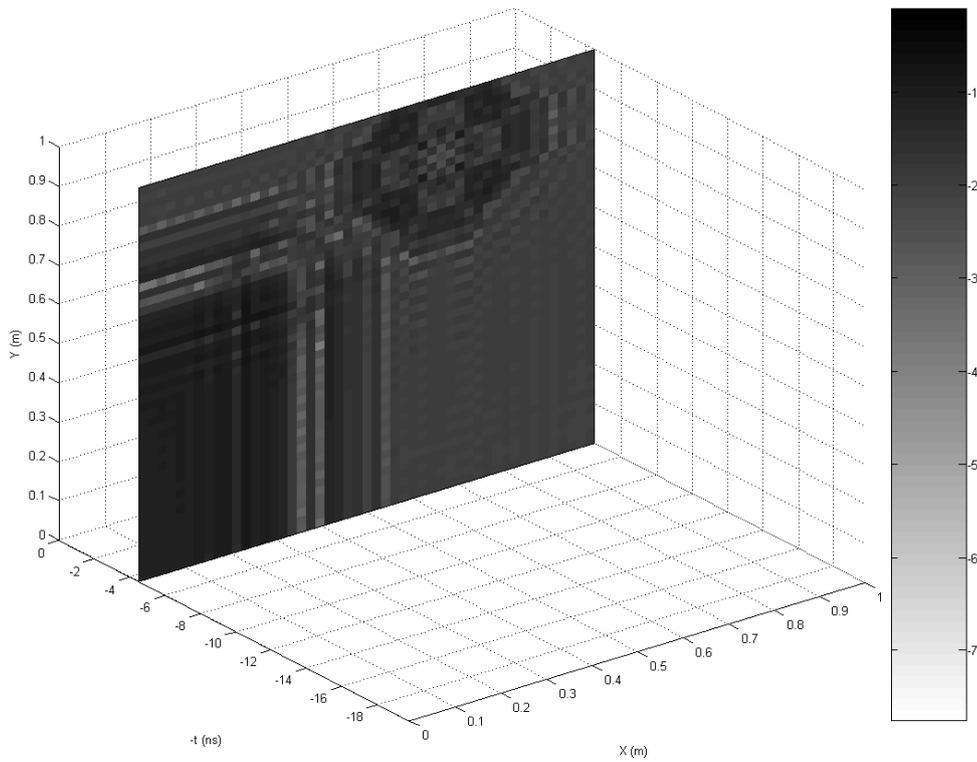


(l)

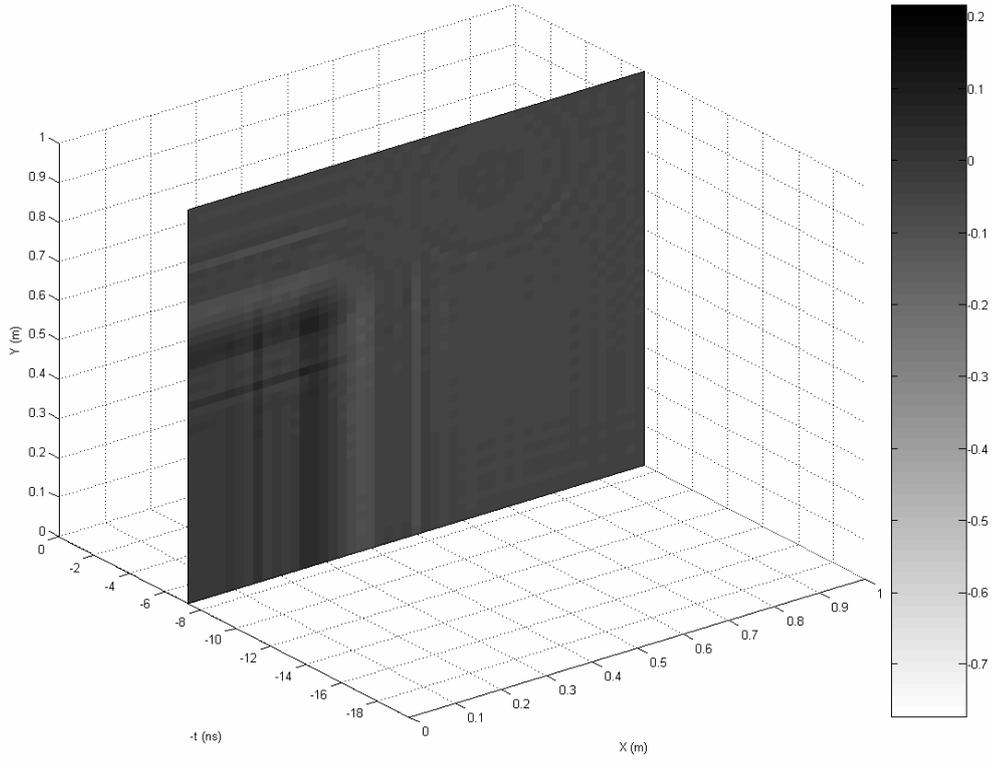




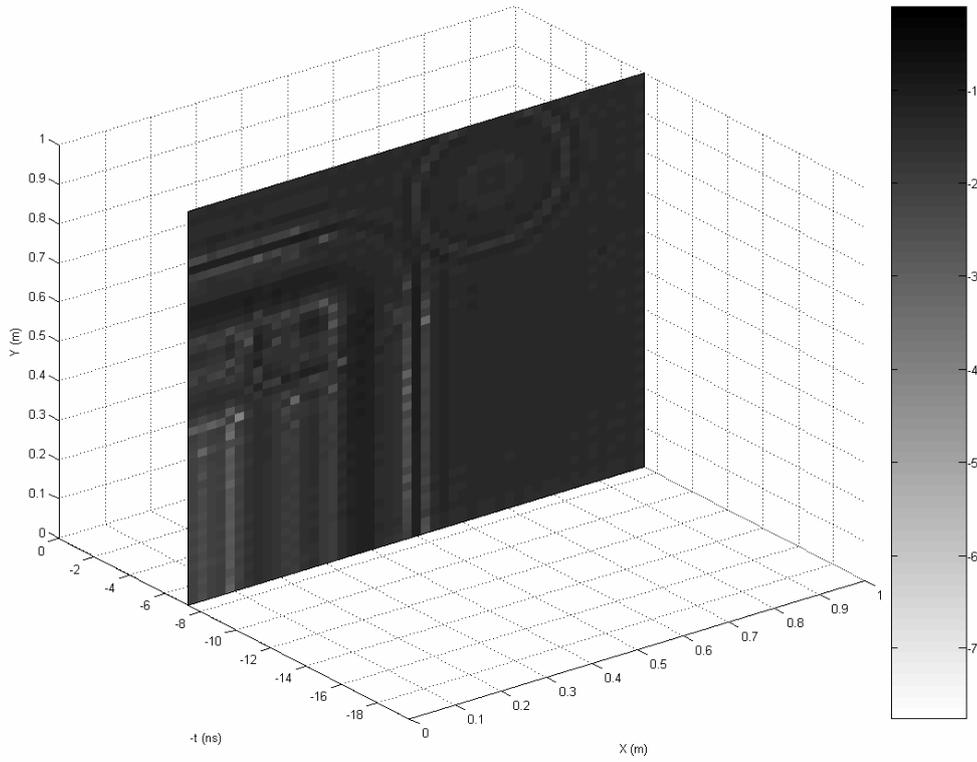
(n)



(o)



(p)



(q)

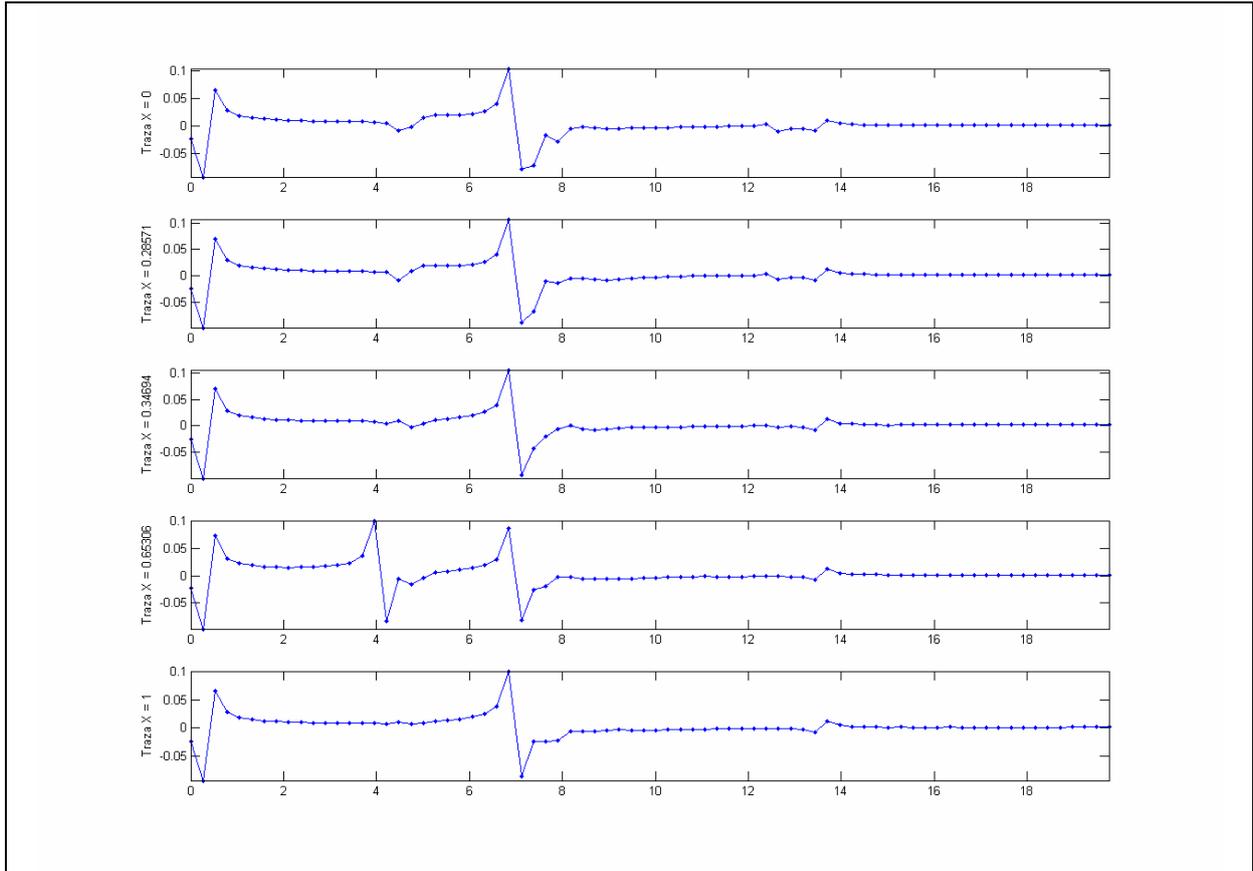


Figura 7-2-12: Trazas representativas de la SECCIÓN MEDIDA obtenida mediante la aplicación del algoritmo correspondiente al modelo tridimensional realista.

De arriba abajo las trazas corresponden a:

Traza en $X = 0,00 m$.

Traza anterior a la ruptura en $X = 0,31 m$.

Traza posterior a la ruptura en $X = 0,31 m$.

Traza correspondiente a los difractores en $X = 0,65 m$.

Traza en $X = 1,00 m$.

En todos los casos la coordenada Y es $Y = 0,84 m$.

(5) **Caracterización y comparación de resultados**

El tiempo medio de cómputo para este modelo es de 85,9982 s.

A la vista de los resultados expuestos en las figuras del punto anterior, pueden resaltarse las siguientes características generales:

- La SECCIÓN MEDIDA correspondiente al caso tridimensional presenta características análogas a las correspondientes al caso bidimensional, en lo que refiere a:
 - La geometría de la señal.
 - Localización de la señal en los ejes de posición horizontal y tiempo doble de recorrido.
 - Amplitud y fase de la señal.
- En los perfiles que no pasan por la vertical de los difractores puntuales, próximos a ellos o a los bordes de los reflectores, aparecen señales correspondientes a los efectos laterales causados por éstos, con características análogas a las arriba expuestas.

Los resultados conjuntos serán discutidos en la Sección 7.5, dedicada a la exposición y discusión de los principales resultados obtenidos.

7.3. Aplicación del algoritmo para la resolución del Problema Inverso en dos dimensiones

En esta Sección se aplica el algoritmo para la resolución del Problema Inverso a los radargramas obtenidos en la §7.1 para la resolución del Problema Directo a diversos modelos bidimensionales sencillos:

- Un difractor puntual.
- Una superposición de capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito.
- Modelo realista.

En todos los casos se aplicará el algoritmo a la SECCIÓN MEDIDA determinada con el algoritmo para la resolución del Problema Directo (DISTRIBUCIÓN MEDIDA), comparándose los resultados obtenidos con la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondiente (Cf. nota al pie en la Introducción del presente Capítulo). En los casos en que sea pertinente, se obrará de forma análoga con los resultados analíticos (DISTRIBUCIÓN ESPERADA).

7.3.1. Un difractor puntual

En esta Subsección se aplica el algoritmo a la SECCIÓN MEDIDA y la SECCIÓN ESPERADA obtenidas en la §7.1.1, mostradas en la Figura 7-1-3, comparándose con la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondiente, mostrada en la Figura 7-1-2.

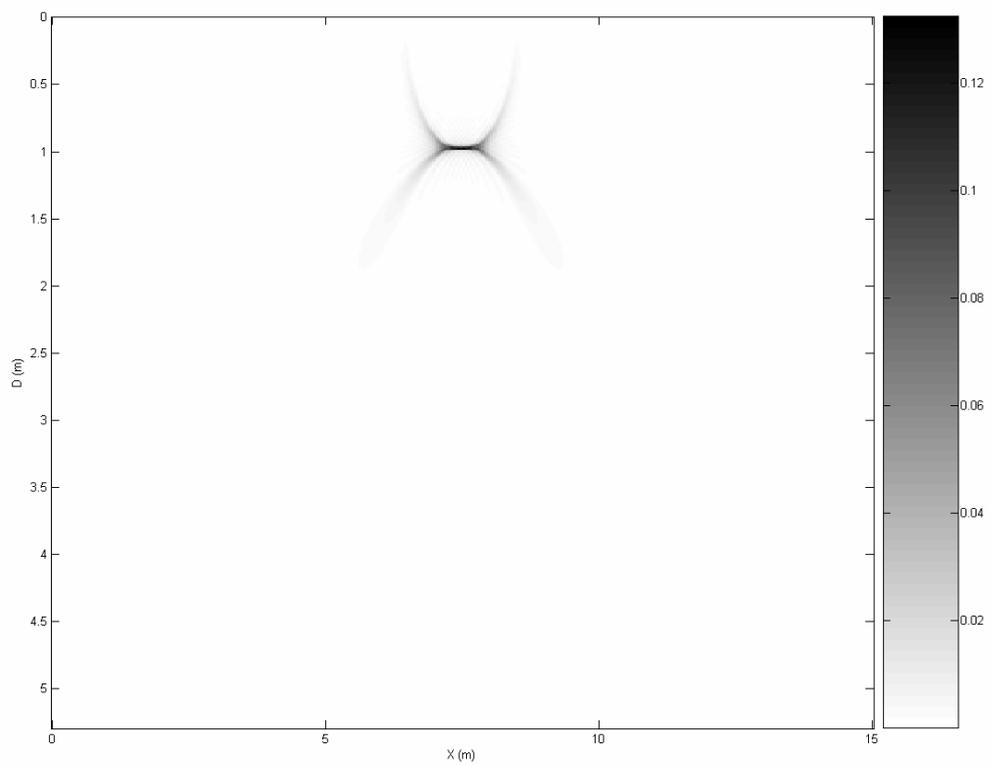
(1) Aplicación del algoritmo

La descripción de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA obtenida se detalla en la Tabla 7-3-1:

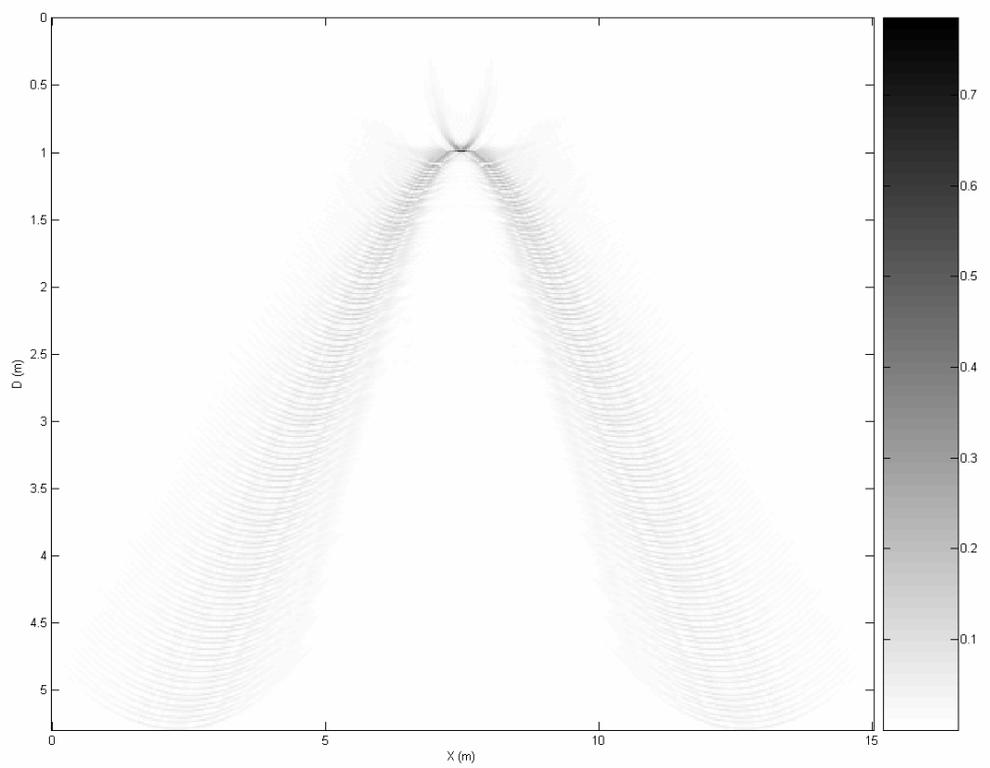
Tabla 7-3-1: Descripción de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA correspondiente al modelo bidimensional constituido por un único difractor puntual.

<u>Caracterización del perfil:</u>	
Número de trazas:	$PEX = 350$
Longitud:	$LX = 15,00 m$
Espaciado entre trazas:	$EX = 0,043 m$
Número de muestras por traza:	$PED = 445$
Longitud de muestreo:	$LD = 5,29 m$
Espaciado entre muestras:	$ED = 0,012 m$

La comparación de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA y la DISTRIBUCIÓN ESPERADA con la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD se muestra en las figuras 7-3-1 y 7-3-2.



(a)



(b)

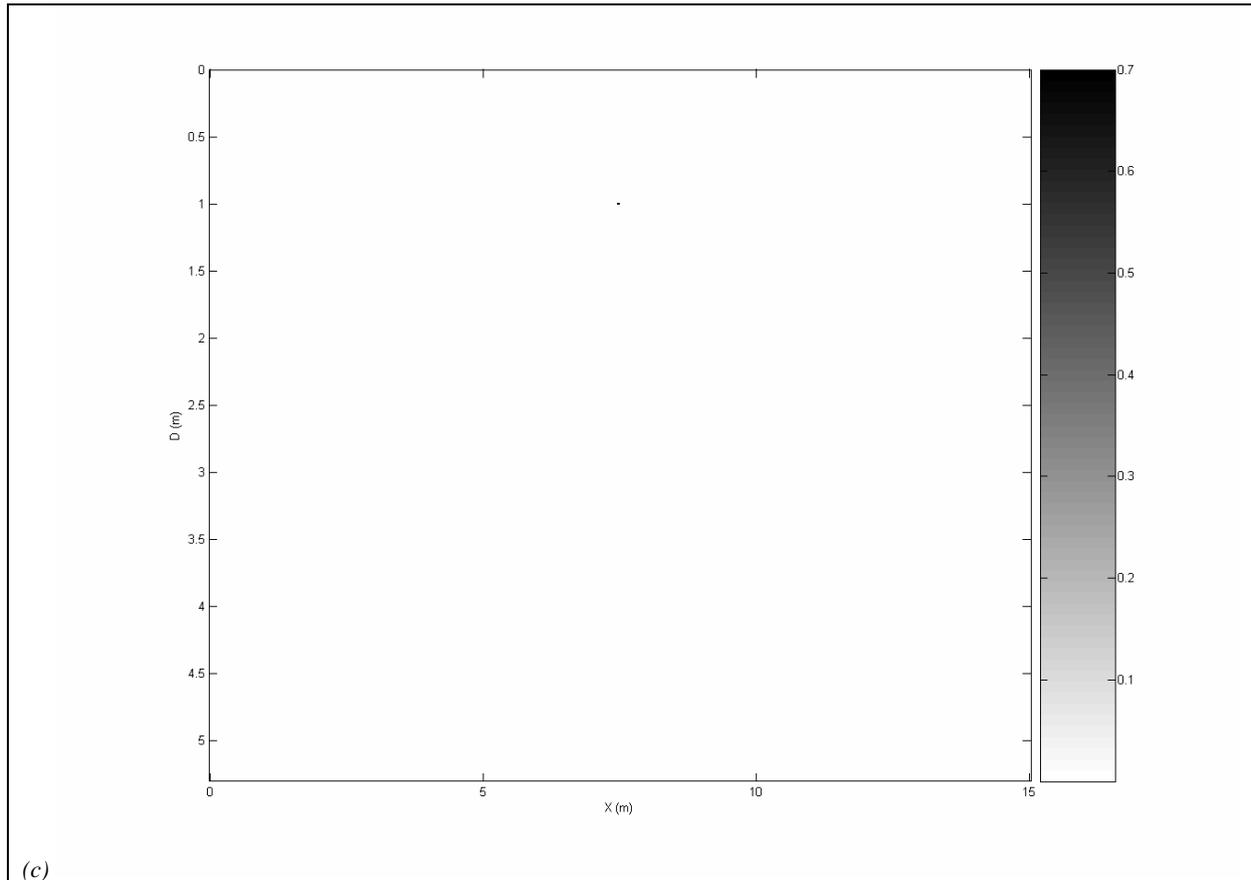


Figura 7-3-1: Comparación entre la DISTRIBUCIÓN MEDIDA y la DISTRIBUCIÓN ESPERADA con la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondientes al modelo bidimensional constituido por un único difractor puntual.

(a) Valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA.

(b) Valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN ESPERADA.

(c) Valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD.

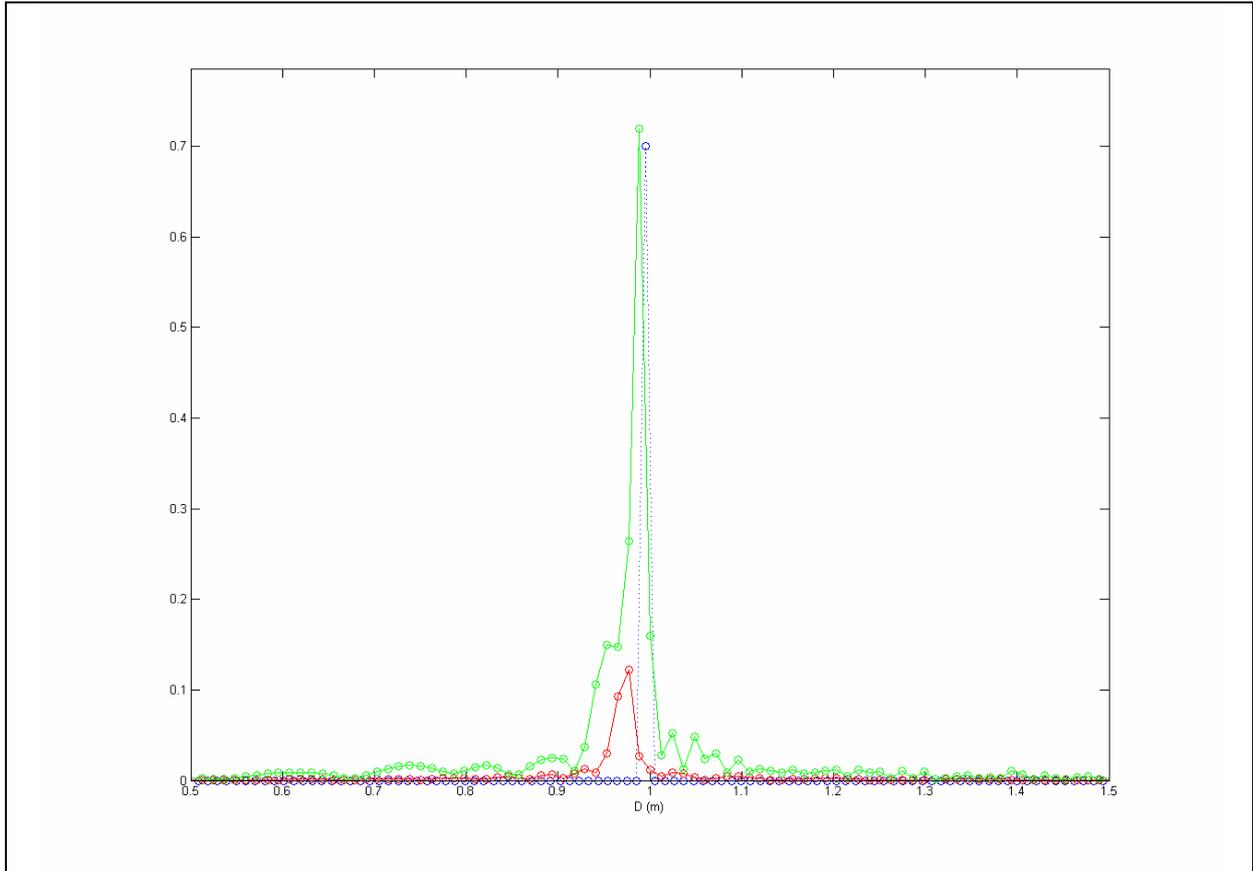


Figura 7-3-2: Trazas representativas de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA, DISTRIBUCIÓN ESPERADA y DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondientes al modelo bidimensional constituido por un único difractor puntual.

Se representa, frente a la coordenada de profundidad D (m), las trazas correspondientes al valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA (rojo), al valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN ESPERADA (verde) y al valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD (azul).

(2) Caracterización y comparación de resultados

El tiempo medio de cómputo para este modelo es de 28,8852 s.

A la vista de los resultados expuestos en las figuras del punto anterior, pueden resaltarse las siguientes características generales:

- Tanto la DISTRIBUCIÓN MEDIDA como la DISTRIBUCIÓN ESPERADA presentan las características geométricas esperables: El resultado de aplicar el algoritmo correspondiente al Problema Inverso a una hipérbola es un objeto puntual. Éstos no se encuentran nítidamente definidos, pues quedan unas ramas espurias que no convergen al punto.
- El objeto puntual se encuentra localizado en la posición horizontal y vertical que se observa en la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD dentro del margen de error asumible por su naturaleza discreta.
- Las amplitudes en la DISTRIBUCIÓN MEDIDA y la DISTRIBUCIÓN ESPERADA difieren de las correspondientes a la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD.

En los modelos estudiados en las Subsecciones siguientes se obtienen resultados análogos. Los resultados conjuntos serán discutidos en la Sección 7.5, dedicada a la exposición y discusión de los principales resultados obtenidos.

7.3.2. Superposición de capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito

En esta Subsección se aplica el algoritmo a la SECCIÓN MEDIDA y la SECCIÓN ESPERADA obtenidas en la §7.1.2, mostradas en la Figura 7-1-7, comparándose con la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondiente, mostrada en la Figura 7-1-6.

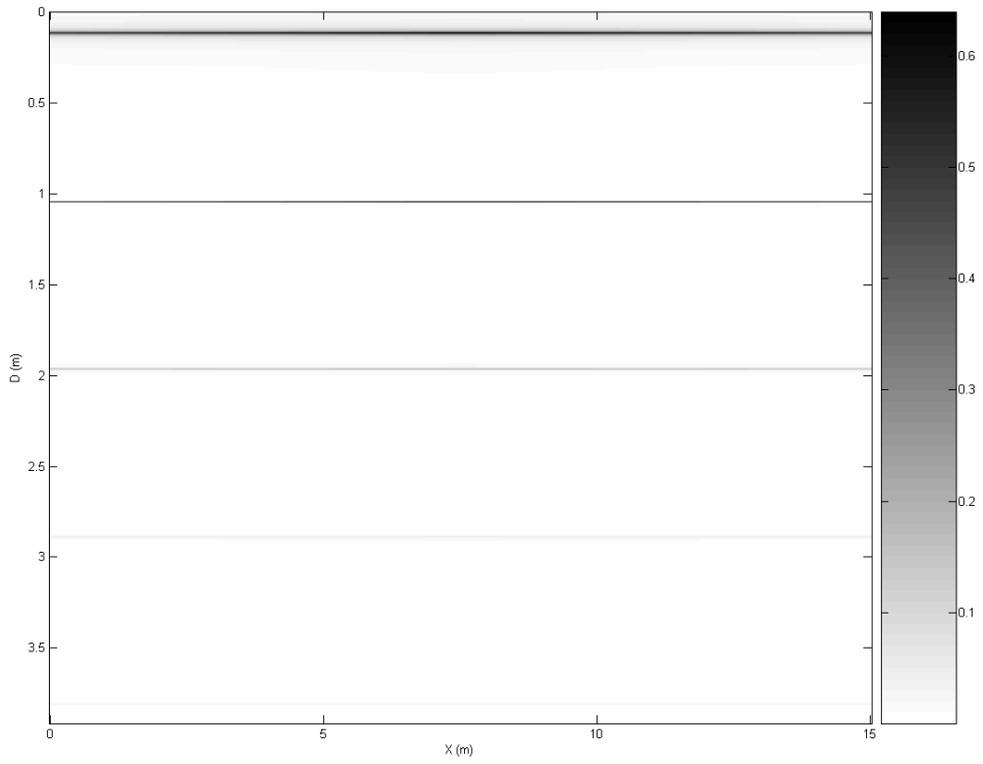
(1) Aplicación del algoritmo

La descripción de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA obtenida se detalla en la Tabla 7-3-2:

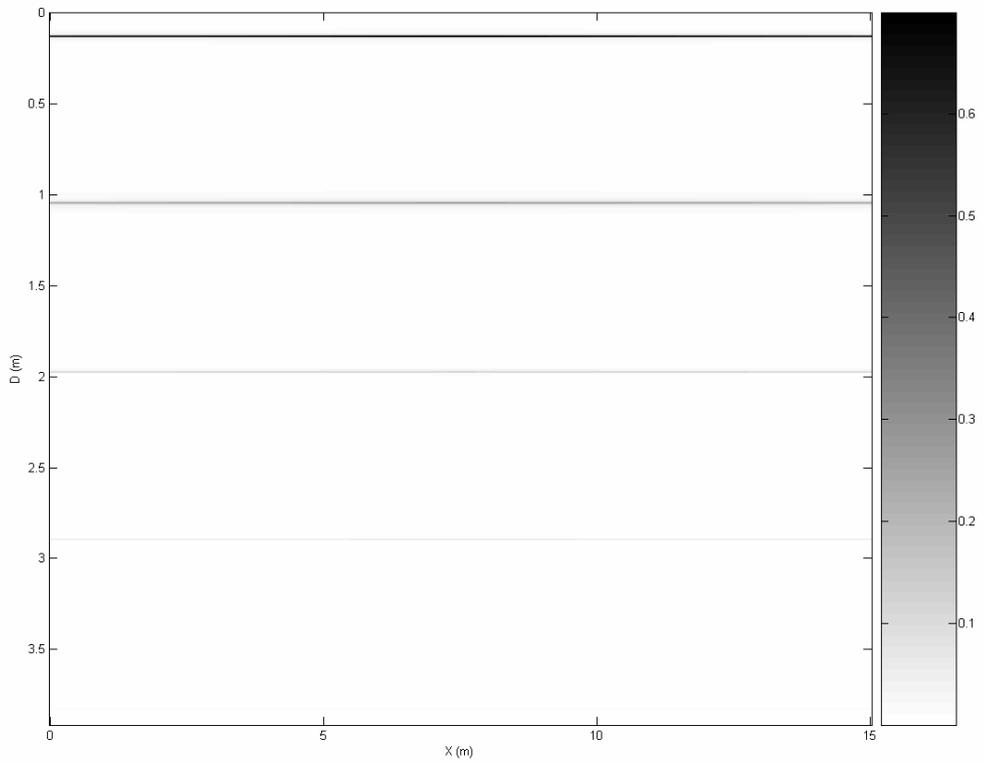
Tabla 7-3-2: Descripción de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA correspondiente al modelo bidimensional constituido por dos capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito.

<u>Caracterización del perfil:</u>	
Número de trazas:	$PEX = 350$
Longitud:	$LX = 15,00\ m$
Espaciado entre trazas:	$EX = 0,043\ m$
Número de muestras por traza:	$PED = 463$
Longitud de muestreo:	$LD = 3,91\ m$
Espaciado entre muestras:	$ED = 0,008\ m$

La comparación de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA y la DISTRIBUCIÓN ESPERADA con la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD se muestra en las figuras 7-3-3 y 7-3-4.



(a)



(b)

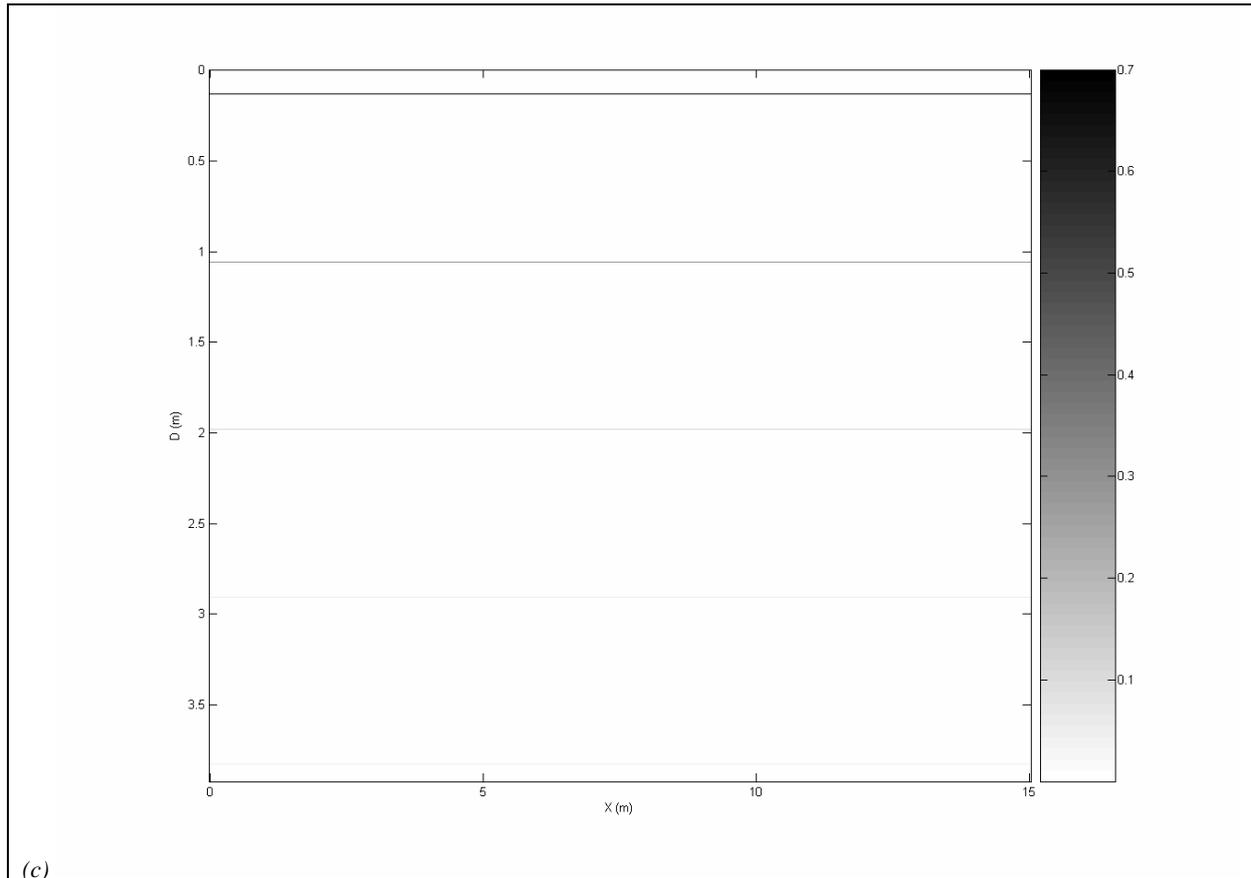


Figura 7-3-3: Comparación entre la DISTRIBUCIÓN MEDIDA y la DISTRIBUCIÓN ESPERADA con la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondientes al modelo bidimensional constituido por dos capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito.

(a) Valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA.

(b) Valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN ESPERADA.

(c) Valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD.

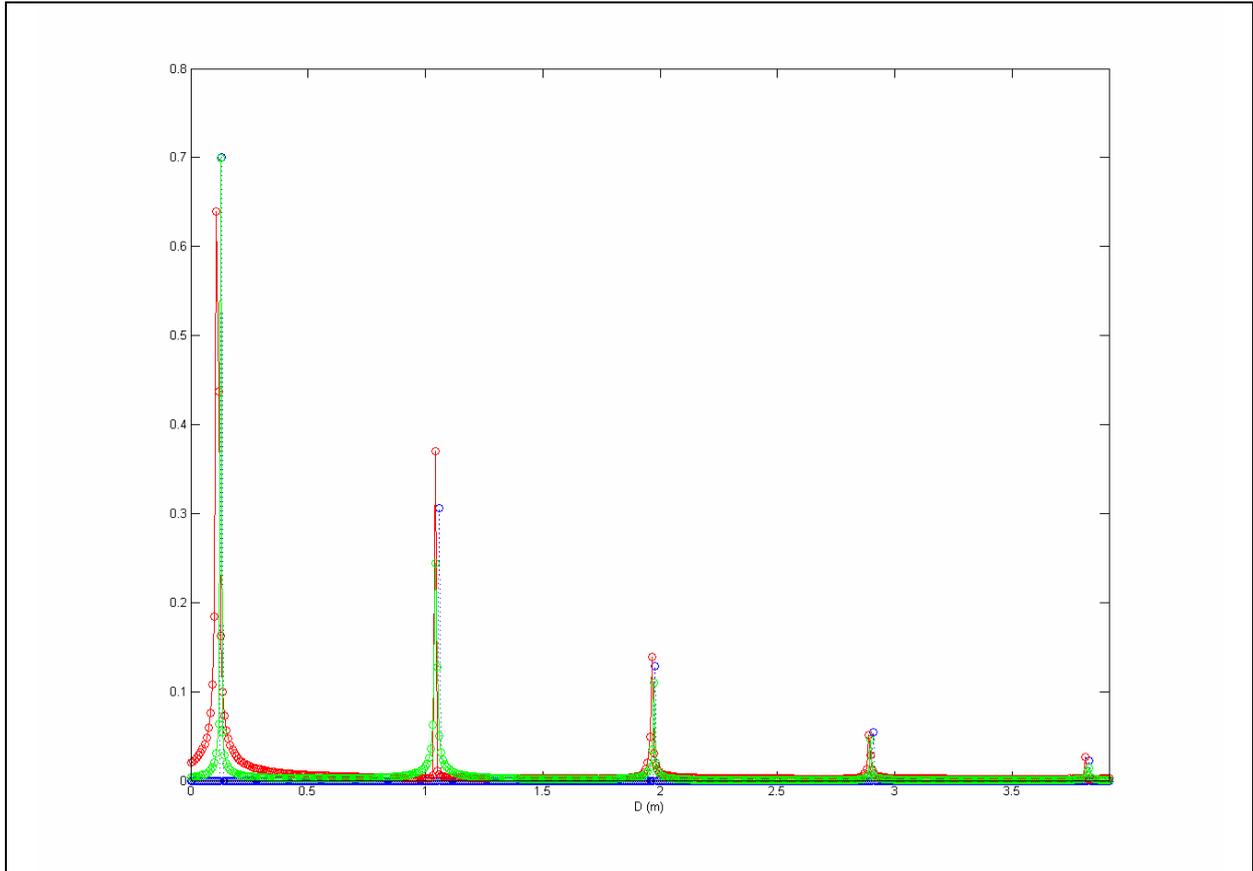


Figura 7-3-4: Traza representativa de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA, DISTRIBUCIÓN ESPERADA y DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondientes al modelo bidimensional constituido por dos capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito.

Se representa, frente a la coordenada de profundidad D (m), las trazas correspondientes al valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA (rojo), al valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN ESPERADA (verde) y al valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD (azul).

(2) Caracterización y comparación de resultados

El tiempo medio de cómputo para este modelo es de 27,0378 s.

A la vista de los resultados expuestos en las figuras del punto anterior, pueden resaltarse las siguientes características generales:

- Tanto la DISTRIBUCIÓN MEDIDA como la DISTRIBUCIÓN ESPERADA presentan las características geométricas esperables: El resultado de aplicar el algoritmo correspondiente al Problema Inverso a un conjunto de planos horizontales es un conjunto de planos horizontales. Éstos no se encuentran nítidamente definidos, sino que las DISTRIBUCIONES son no nulas en algunos puntos previos y posteriores al máximo.
- Los planos se encuentran localizados en la posición horizontal que se observa en la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD dentro del margen de error asumible por su naturaleza discreta.
- Las amplitudes en la DISTRIBUCIÓN MEDIDA y la DISTRIBUCIÓN ESPERADA difieren de las correspondientes a la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD.

Estos resultados son análogos a los obtenidos en el resto de Subsecciones. Los resultados conjuntos serán discutidos en la Sección 7.5, dedicada a la exposición y discusión de los principales resultados obtenidos.

7.3.3. Modelo realista

En esta Subsección se aplica el algoritmo a la SECCIÓN MEDIDA obtenida en la §7.1.3, mostrada en la Figura 7-1-11, comparándose con la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondiente, mostrada en la Figura 7-1-10.

(1) Aplicación del algoritmo

La descripción de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA obtenida se detalla en la Tabla 7-3-3:

Tabla 7-3-3: Descripción de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA correspondiente al modelo bidimensional realista.

<u>Caracterización del perfil:</u>	
Número de trazas:	$PEX = 350$
Longitud:	$LX = 15,00 m$
Espaciado entre trazas:	$EX = 0,043 m$
Número de muestras por traza:	$PED = 467$
Longitud de muestreo:	$LD = 3,69 m$
Espaciado entre muestras:	$ED = 0,008 m$

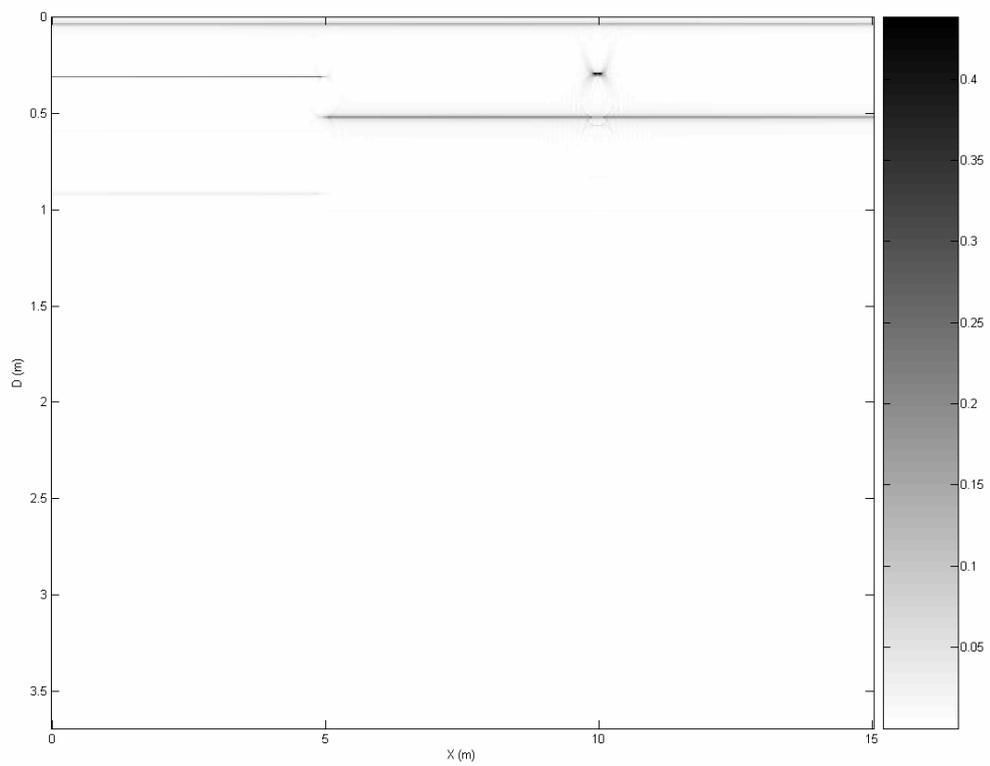
La comparación de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA con la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD se muestra en las figuras 7-3-5 y 7-3-6.

Páginas siguientes:

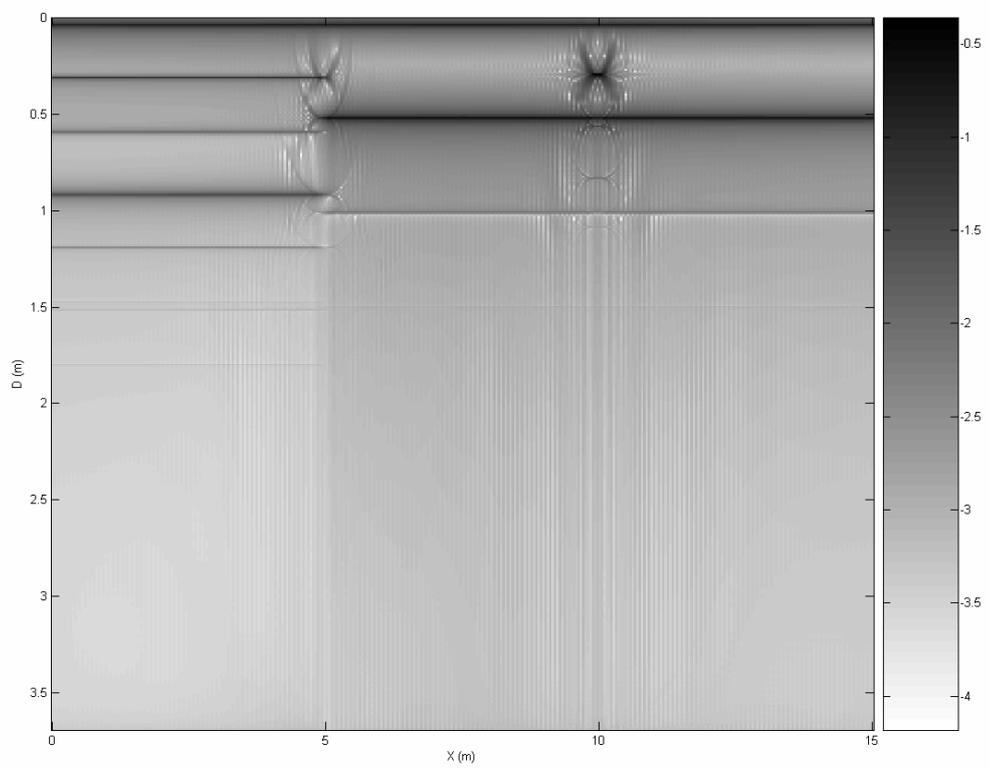
Figura 7-3-5: Comparación entre la DISTRIBUCIÓN MEDIDA con la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondientes al modelo bidimensional realista.

(a) Valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA.
 (b) Logaritmo decimal del valor absoluto de (a).

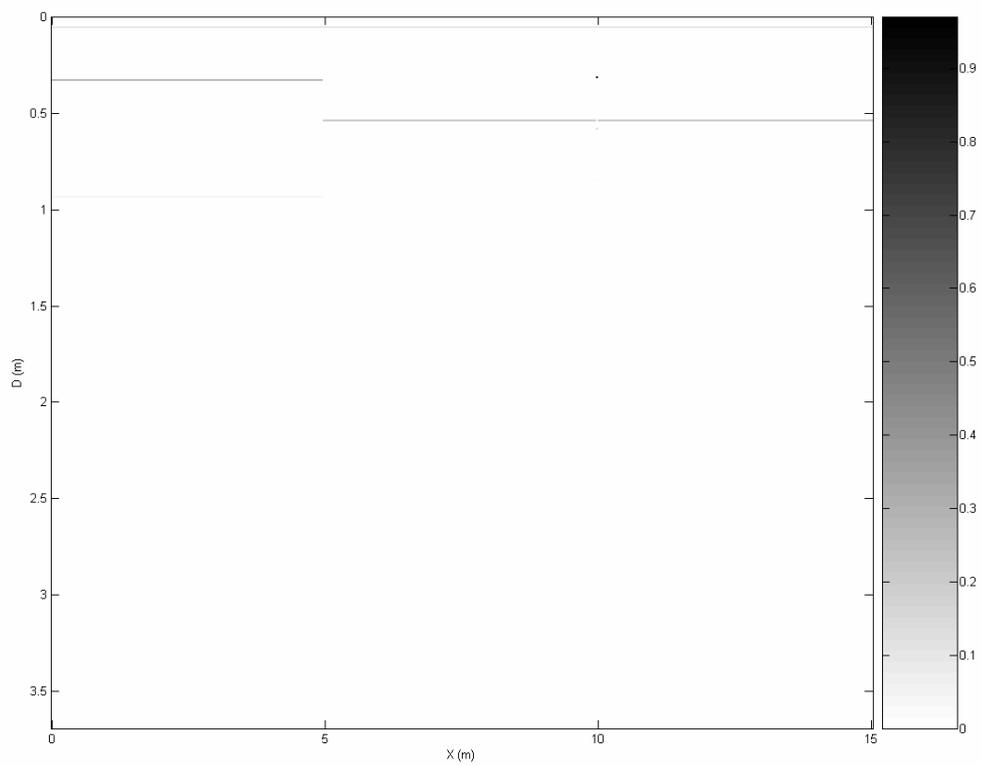
(c) Valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD.
 (d) Logaritmo decimal del valor absoluto de (c).



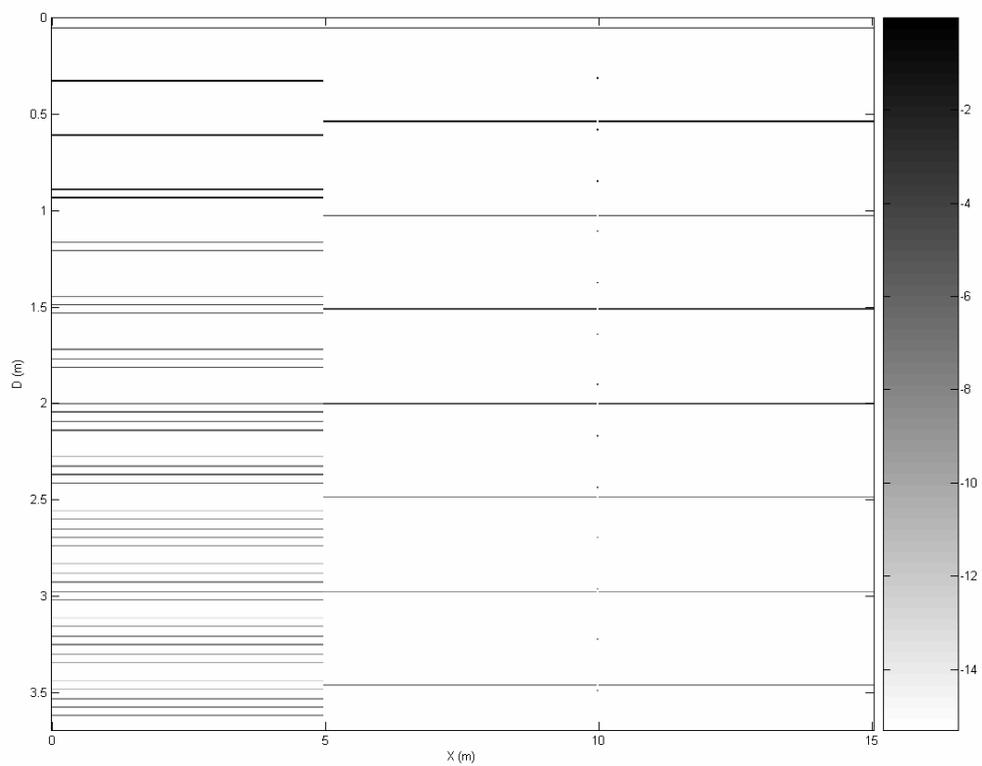
(a)



(b)



(c)



(d)

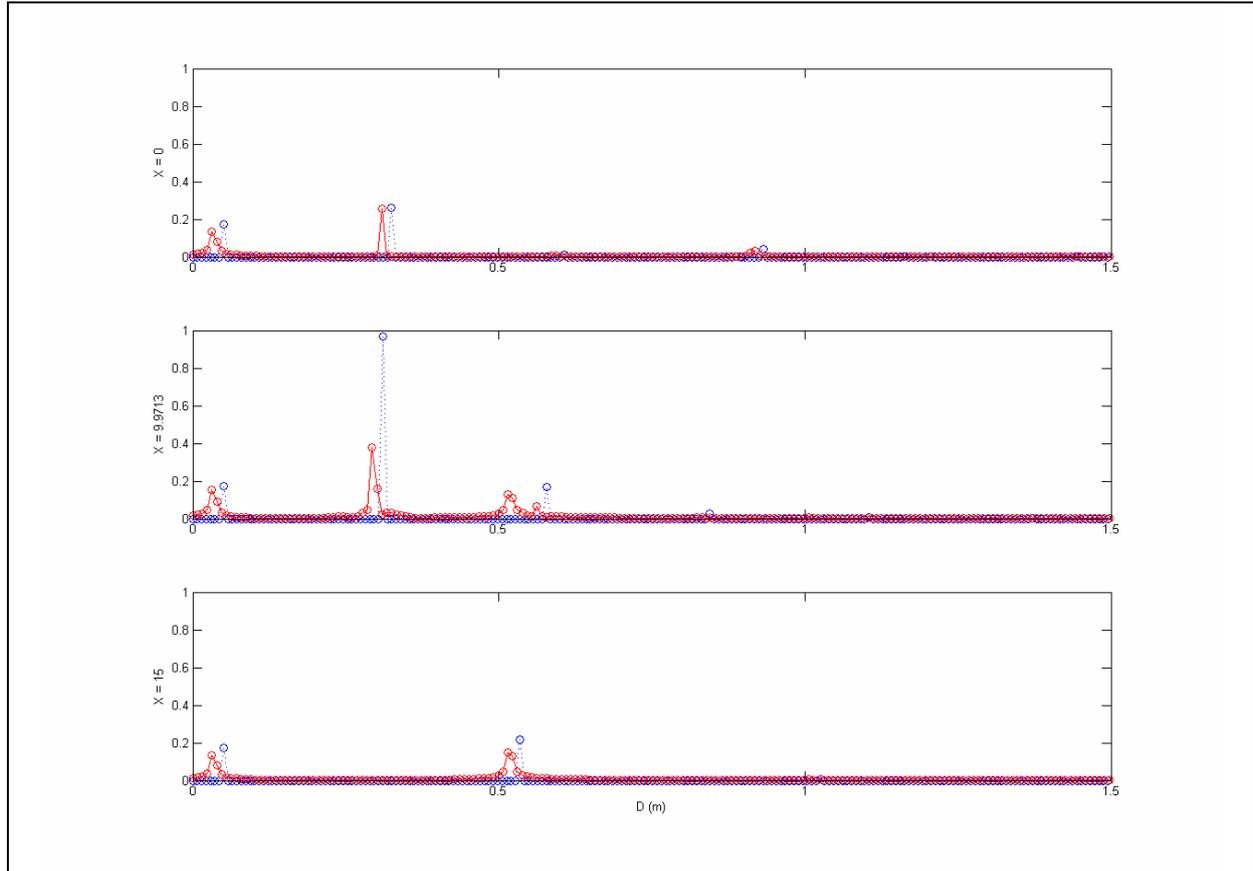


Figura 7-3-6: Trazas representativas de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA y DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondientes al modelo bidimensional realista.

De arriba abajo corresponden a:

Inicio del perfil.

Traza correspondiente a los difractores en $X = 9,71m$.

Final del perfil.

En todos los casos se representa, frente a la coordenada de profundidad D (m), las trazas correspondientes al valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA (rojo) y al valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD (azul).

(2) Caracterización y comparación de resultados

El tiempo medio de cómputo para este modelo es de 13,3769 s.

A la vista de los resultados expuestos en las figuras del punto anterior, pueden resaltarse las siguientes características generales:

- Tanto la DISTRIBUCIÓN MEDIDA como la DISTRIBUCIÓN ESPERADA presentan las características geométricas esperables: El resultado de aplicar el algoritmo correspondiente al Problema Inverso a un conjunto de hipérbolas y planos horizontales es un conjunto de objetos puntuales y planos horizontales. Éstos no se encuentran nítidamente definidos, sino que en los objetos puntuales quedan unas ramas espurias que no convergen al punto, y las DISTRIBUCIONES son no nulas en algunos puntos previos y posteriores a los máximos de los planos.
- Tanto los objetos puntuales como los planos se encuentran localizados en la posición horizontal y vertical que se observa en la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD dentro del margen de error asumible por su naturaleza discreta.
- Las amplitudes en la DISTRIBUCIÓN MEDIDA y la DISTRIBUCIÓN ESPERADA difieren de las correspondientes a la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD.

Los resultados conjuntos serán discutidos en la Sección 7.5, dedicada a la exposición y discusión de los principales resultados obtenidos.

7.4. Aplicación del algoritmo para la resolución del Problema Inverso en tres dimensiones

En esta Sección se aplica el algoritmo para la resolución del Problema Inverso a los radargramas obtenidos en la §7.2 para la resolución del Problema Directo a diversos modelos tridimensionales sencillos:

- Un difractor puntual.
- Una superposición de capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito.
- Modelo realista.

En todos los casos se aplicará el algoritmo a la SECCIÓN MEDIDA determinada con el algoritmo para la resolución del Problema Directo (DISTRIBUCIÓN MEDIDA), comparándose los resultados obtenidos con la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondiente (Cf. nota al pie en la Introducción del presente Capítulo). En los casos en que sea pertinente, se obrará de forma análoga con los resultados analíticos (DISTRIBUCIÓN ESPERADA).

7.4.1. Un difractor puntual

En esta Subsección se aplica el algoritmo a la SECCIÓN MEDIDA y la SECCIÓN ESPERADA obtenidas en la §7.2.1, mostradas en la Figura 7-2-3, comparándose con la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondiente, mostrada en la Figura 7-2-2.

(1) Aplicación del algoritmo

La descripción de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA obtenida se detalla en la Tabla 7-4-1:

Tabla 7-4-1: Descripción de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA correspondiente al modelo tridimensional constituido por un único difractor puntual.

<u>Caracterización del cubo:</u>	
Número de trazas:	$PEX = 50$ $PEY = 50$
Longitud:	$LX = 1,00\text{ m}$ $LY = 1,00\text{ m}$
Espaciado entre trazas:	$EX = 0,043\text{ m}$ $EY = 0,043\text{ m}$
Número de muestras por traza:	$PED = 84$
Longitud de muestreo:	$LD = 1,07\text{ m}$
Espaciado entre muestras:	$ED = 0,013\text{ m}$

La comparación de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA y la DISTRIBUCIÓN ESPERADA con la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD se muestra en las figuras 7-4-1 y 7-4-2.

Páginas siguientes:

Figura 7-4-1: Comparación entre la DISTRIBUCIÓN MEDIDA y la DISTRIBUCIÓN ESPERADA con la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondientes al modelo tridimensional constituido por un único difractor puntual.

(a) Perfil del valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA por el plano $X = 0,49\text{ m}$.

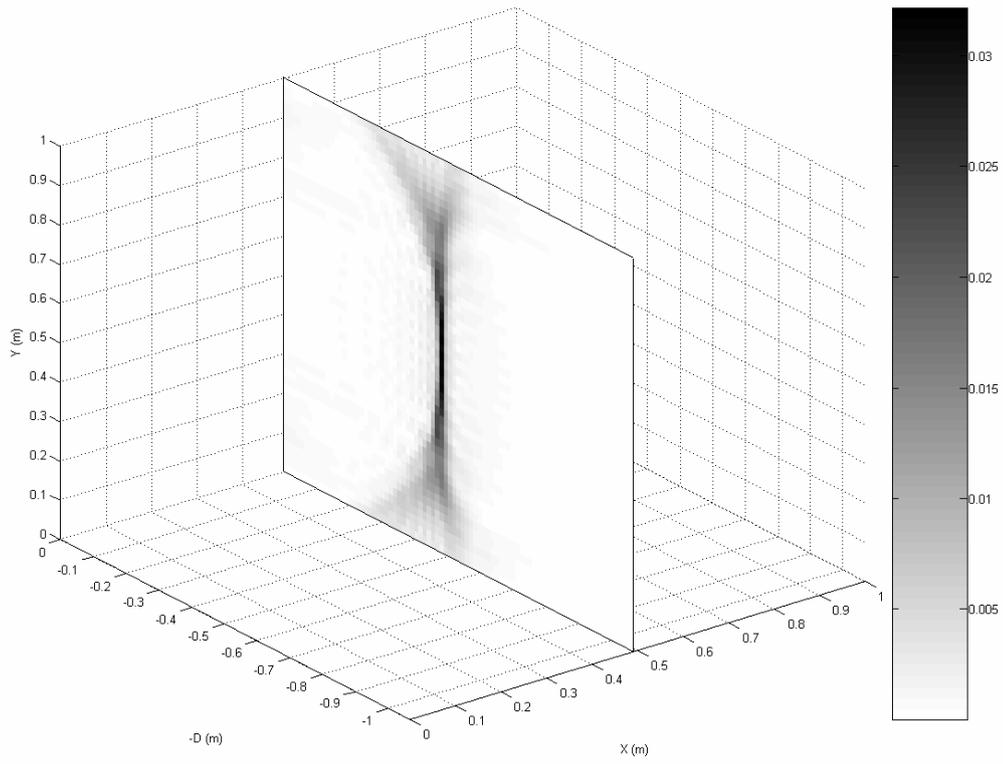
(b) Perfil del valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA por el plano $Y = 0,49\text{ m}$.

(c) Perfil del valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN ESPERADA por el plano $X = 0,49\text{ m}$.

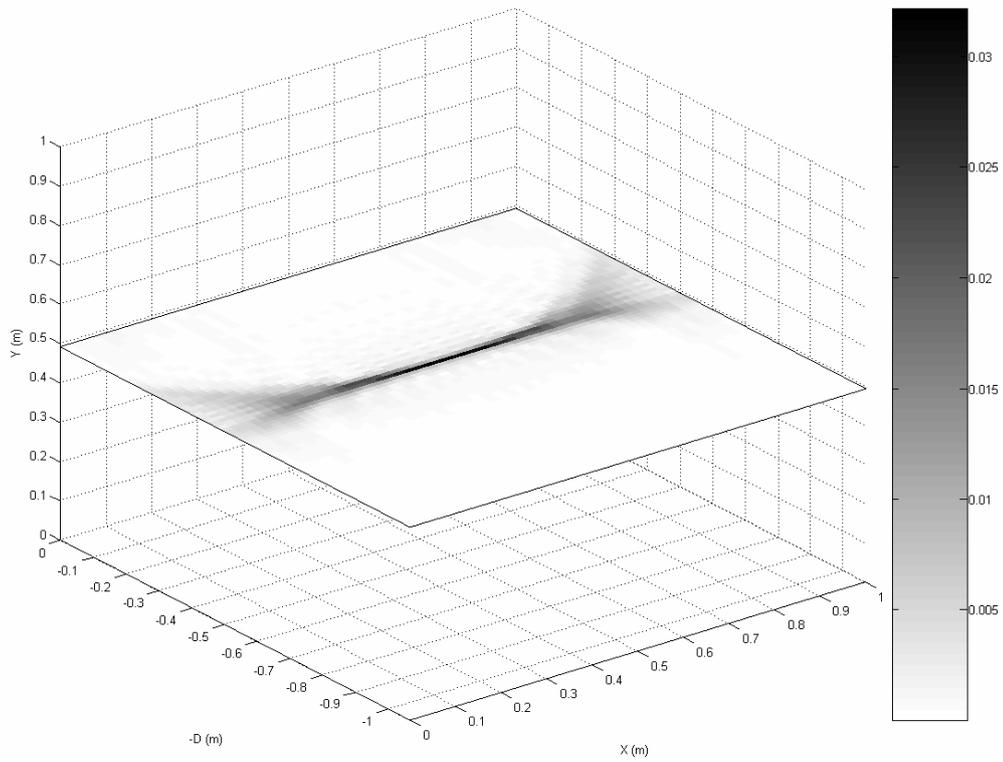
(d) Perfil del valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN ESPERADA por el plano $Y = 0,49\text{ m}$.

(e) Perfil del valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD por el plano $X = 0,49\text{ m}$.

(f) Perfil del valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD por el plano $Y = 0,49\text{ m}$.



(a)



(b)

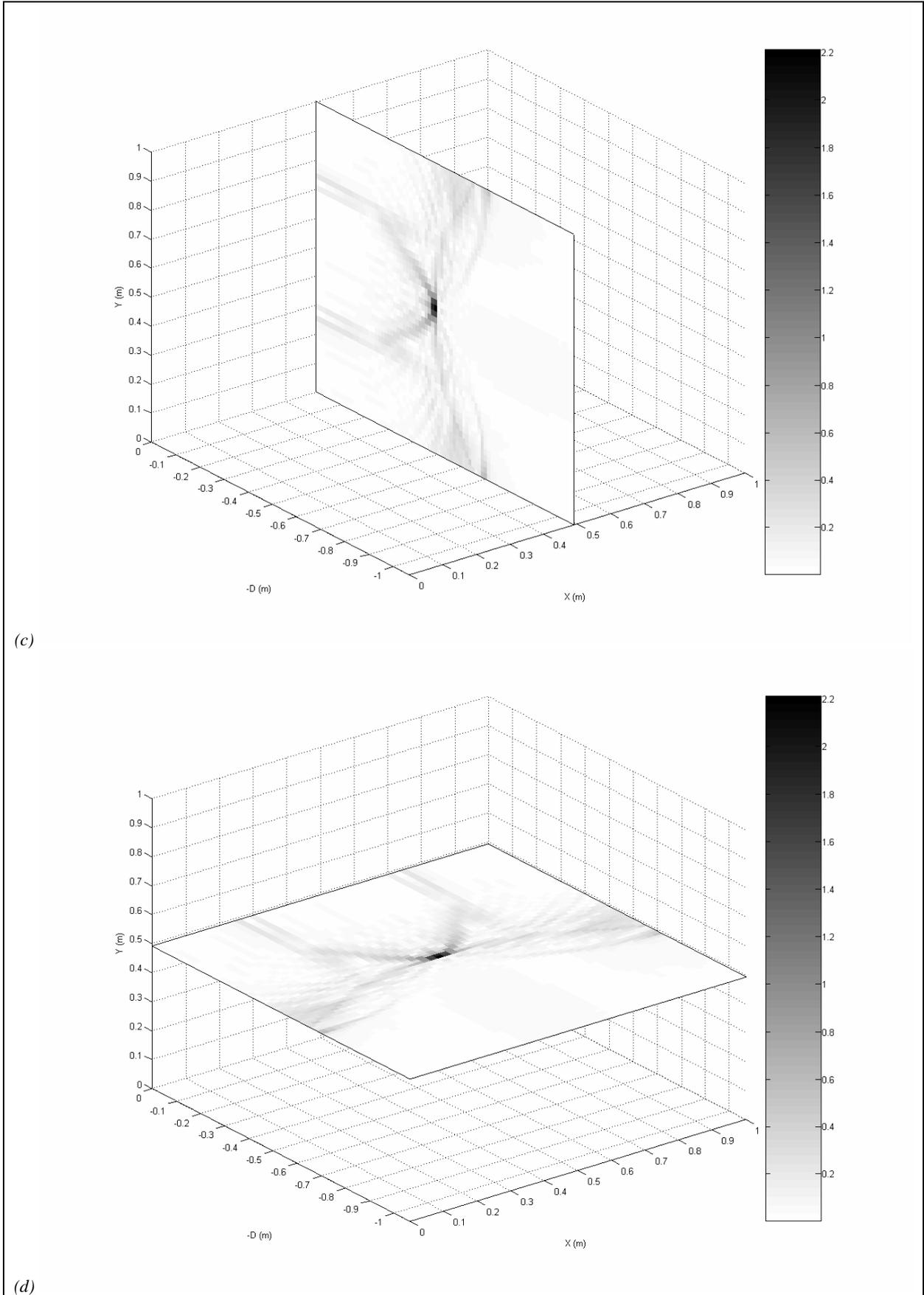
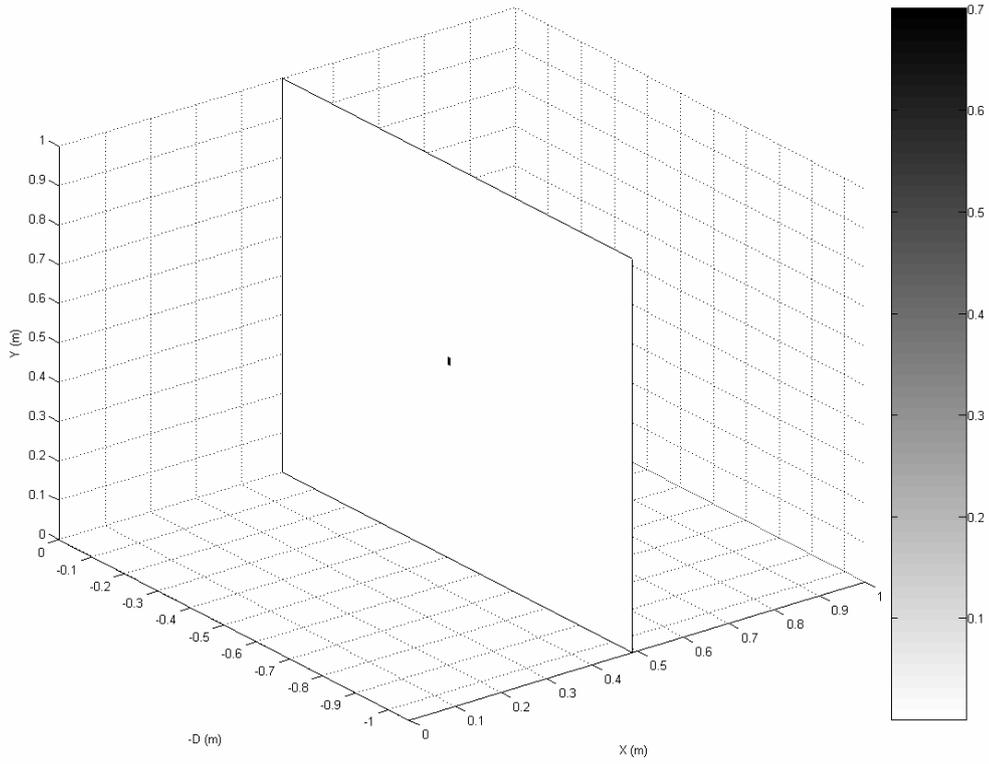
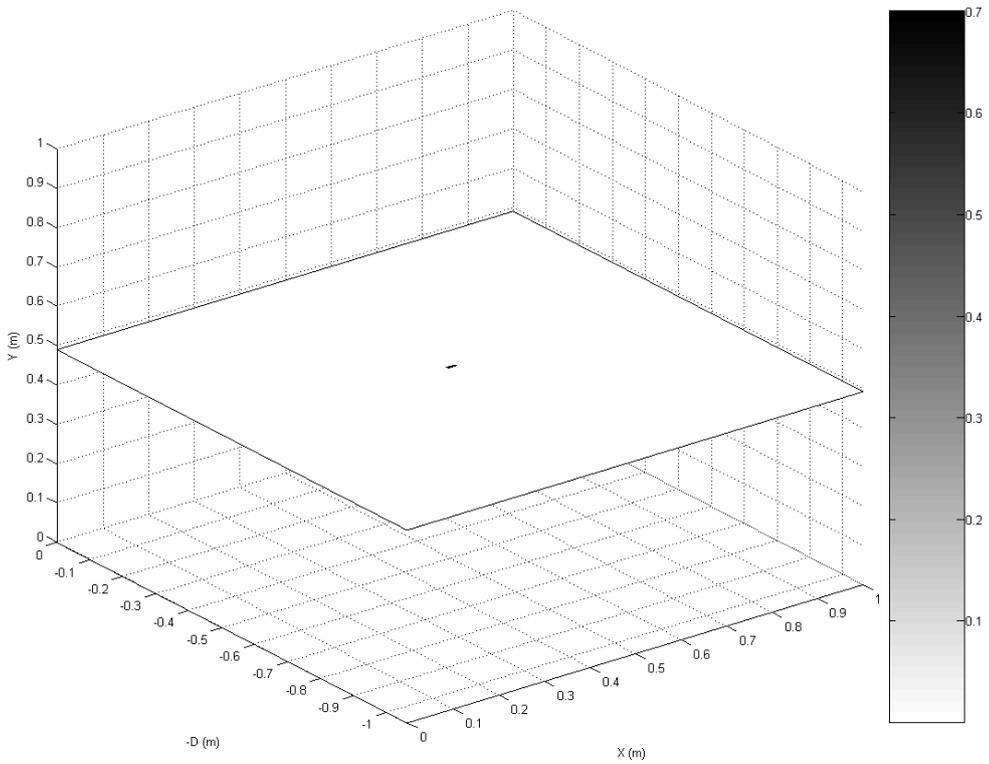


Figura 7-4-1



(e)



(f)

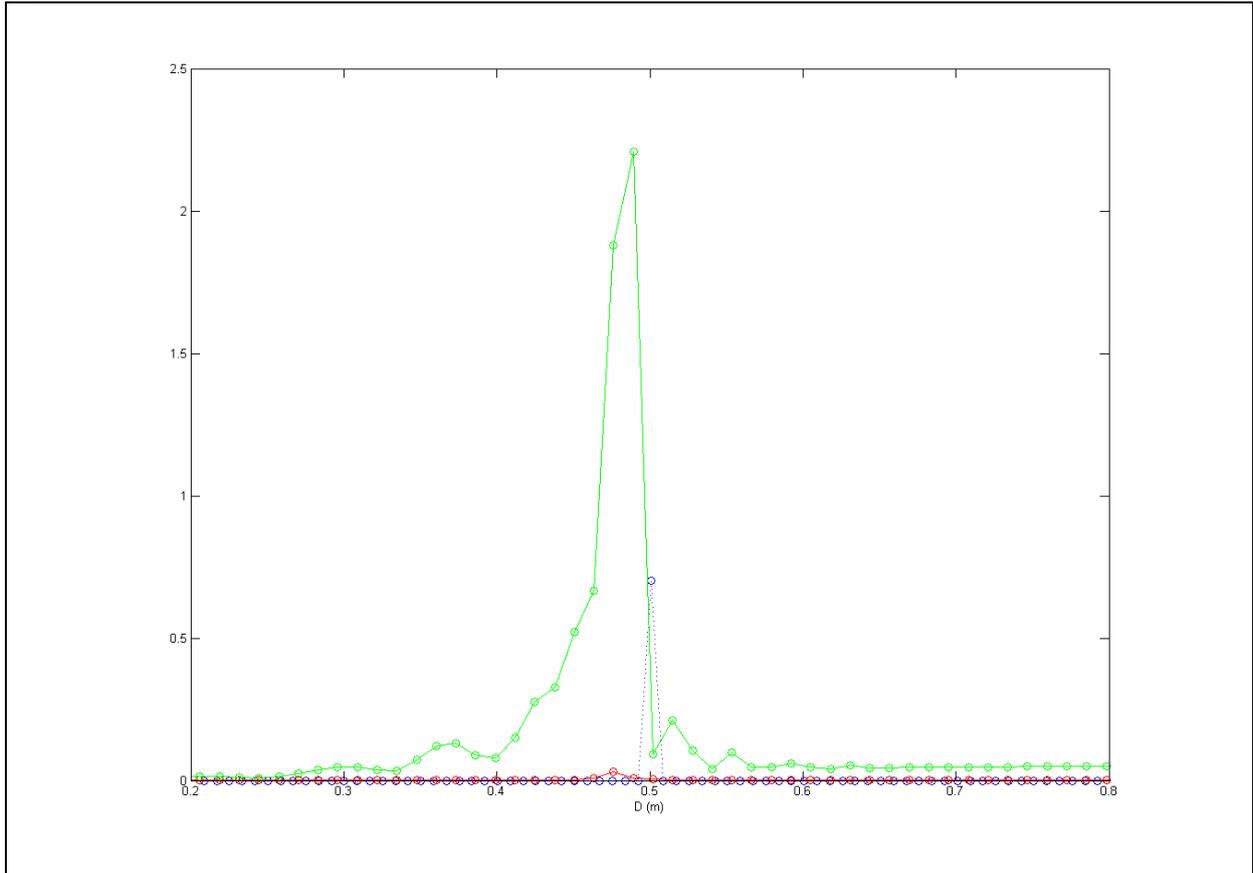


Figura 7-4-2: Trazas representativas de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA, DISTRIBUCIÓN ESPERADA y DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondientes al modelo tridimensional constituido por un único difractor puntual.

Se representa, frente a la coordenada de profundidad D (m), las trazas correspondientes al valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA (rojo), al valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN ESPERADA (verde) y al valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD (azul).

(2) Caracterización y comparación de resultados

El tiempo medio de cómputo para este modelo es de 73,9930 s.

A la vista de los resultados expuestos en las figuras del punto anterior, puede resaltarse el hecho de que las DISTRIBUCIONES correspondientes al caso tridimensional presentan características análogas a las correspondientes al caso bidimensional, en lo que refiere a:

- La geometría de las DISTRIBUCIONES.
- Localización de los objetos en los ejes de posición horizontal y vertical.
- Amplitudes en las DISTRIBUCIONES.

En los modelos estudiados en las Subsecciones siguientes se obtienen resultados análogos. Los resultados conjuntos serán discutidos en la Sección 7.5, dedicada a la exposición y discusión de los principales resultados obtenidos.

7.4.2. Superposición de capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito

En esta Subsección se aplica el algoritmo a la SECCIÓN MEDIDA y la SECCIÓN ESPERADA obtenidas en la §7.2.2, mostradas en la Figura 7-2-7, comparándose con la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondiente, mostrada en la Figura 7-2-6.

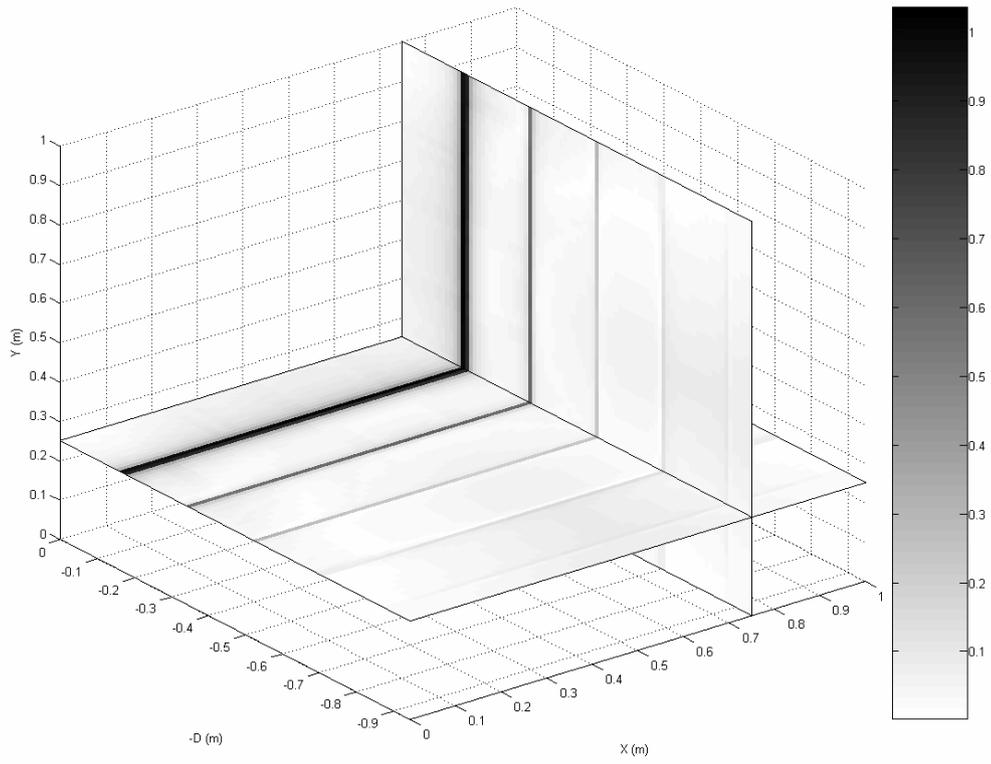
(1) Aplicación del algoritmo

La descripción de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA obtenida se detalla en la Tabla 7-4-2:

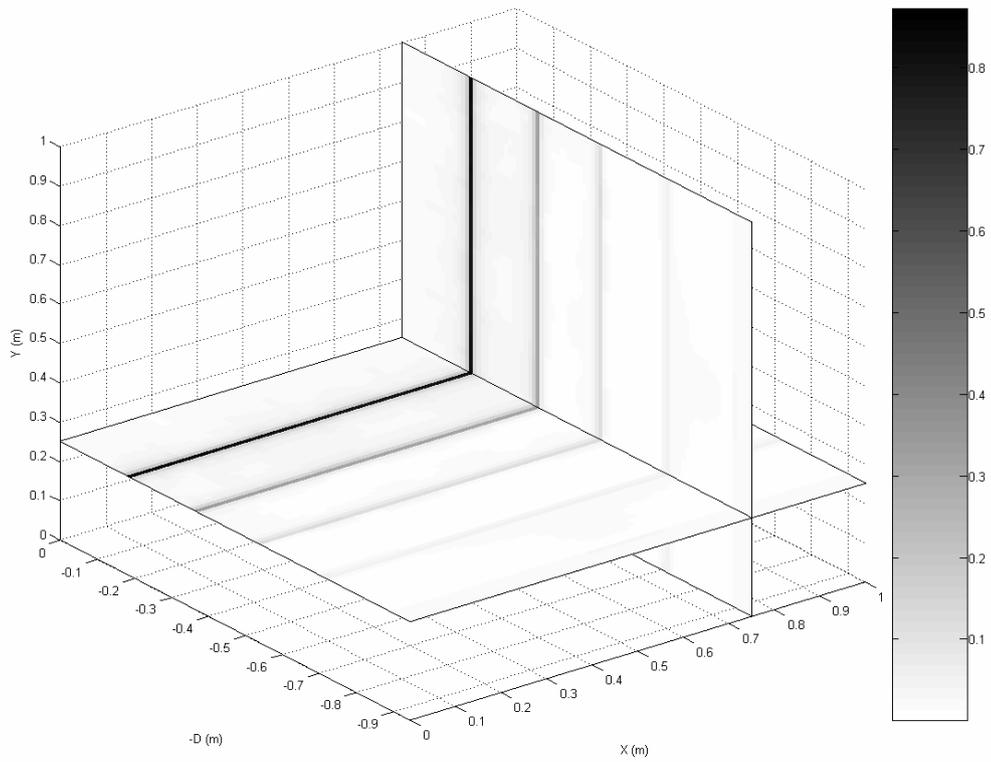
Tabla 7-4-2: Descripción de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA correspondiente al modelo tridimensional constituido por dos capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito.

<u>Caracterización del cubo:</u>	
Número de trazas:	$PEX = 50$ $PEY = 50$
Longitud:	$LX = 1,00\ m$ $LY = 1,00\ m$
Espaciado entre trazas:	$EX = 0,043\ m$ $EY = 0,043\ m$
Número de muestras por traza:	$PED = 90$
Longitud de muestreo:	$LD = 0,95\ m$
Espaciado entre muestras:	$ED = 0,011\ m$

La comparación de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA y la DISTRIBUCIÓN ESPERADA con la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD se muestra en las figuras 7-4-3 y 7-4-4.



(a)



(b)

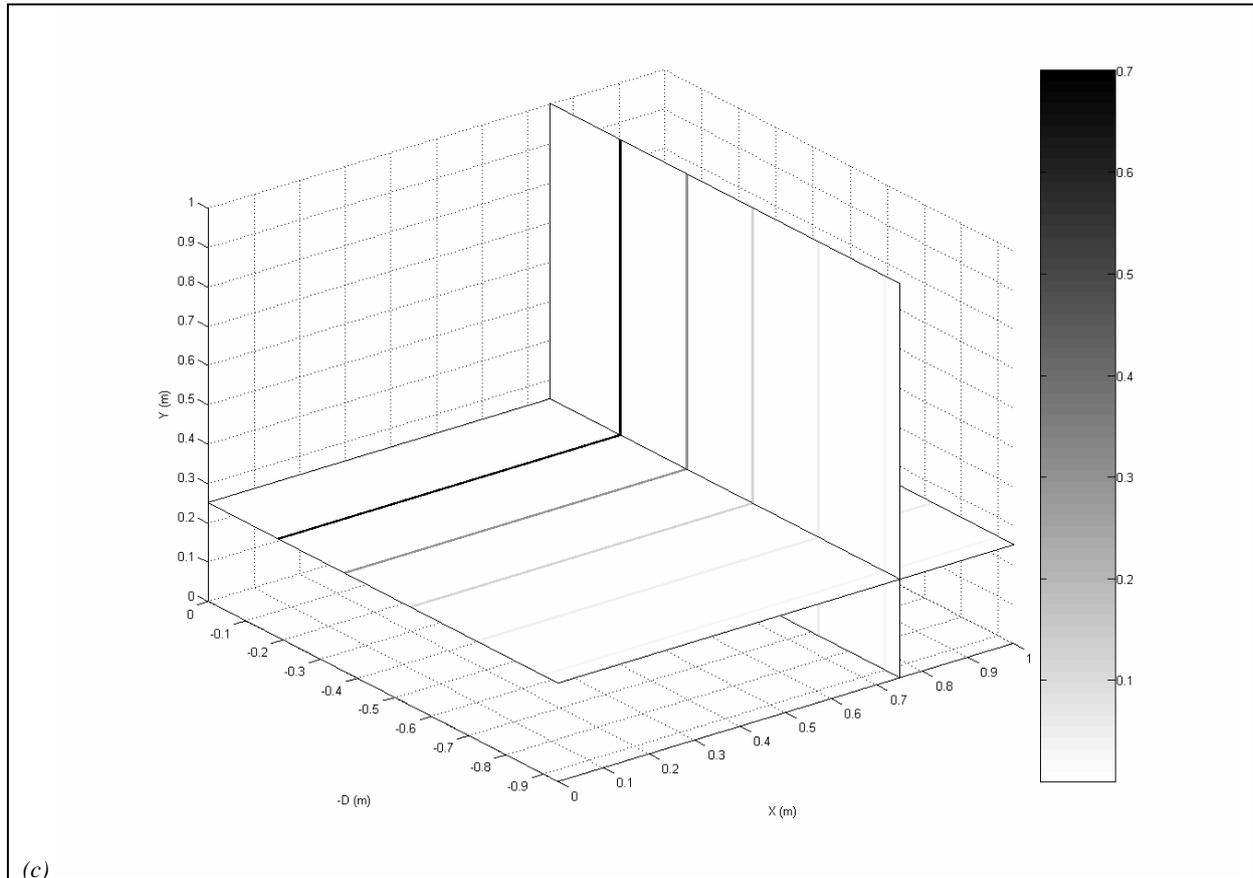


Figura 7-4-3: Comparación entre la DISTRIBUCIÓN MEDIDA y la DISTRIBUCIÓN ESPERADA con la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondientes al modelo tridimensional constituido por dos capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito.

(a) Perfil del valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA por los planos $X = 0,75\text{ m}$ e $Y = 0,25\text{ m}$.

(b) Perfil del valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN ESPERADA por los planos $X = 0,75\text{ m}$ e $Y = 0,25\text{ m}$.

(c) Perfil del valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD por los planos $X = 0,75\text{ m}$ e $Y = 0,25\text{ m}$.

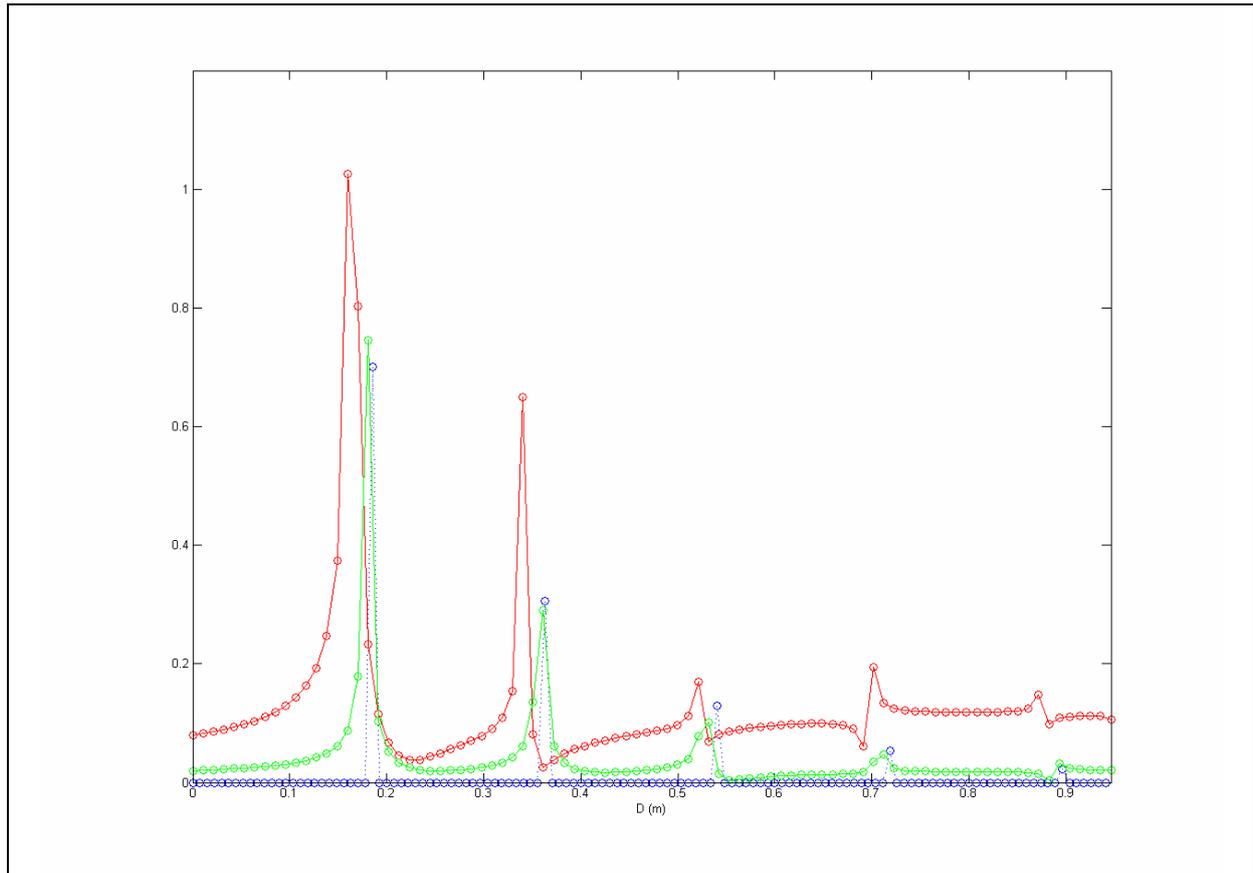


Figura 7-4-4: Traza representativa de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA, DISTRIBUCIÓN ESPERADA y DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondientes al modelo tridimensional constituido por dos capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito.

Se representa, frente a la coordenada de profundidad D (m), las trazas correspondientes al valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA (rojo), al valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN ESPERADA (verde) y al valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD (azul).

(2) Caracterización y comparación de resultados

El tiempo medio de cómputo para este modelo es de 81,5214 s.

A la vista de los resultados expuestos en las figuras del punto anterior, puede resaltarse el hecho de que las DISTRIBUCIONES correspondientes al caso tridimensional presentan características análogas a las correspondientes al caso bidimensional, en lo que refiere a:

- La geometría de las DISTRIBUCIONES.
- Localización de los objetos en los ejes de posición horizontal y vertical.
- Amplitudes en las DISTRIBUCIONES.

Estos resultados son análogos a los obtenidos en el resto de Subsecciones. Los resultados conjuntos serán discutidos en la Sección 7.5, dedicada a la exposición y discusión de los principales resultados obtenidos.

7.4.3. Modelo realista

En esta Subsección se aplica el algoritmo a la SECCIÓN MEDIDA obtenida en la §7.2.3, mostrada en la Figura 7-2-11, comparándose con la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondiente, mostrada en la Figura 7-2-10.

(1) Aplicación del algoritmo

La descripción de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA obtenida se detalla en la Tabla 7-4-3:

Tabla 7-4-3: Descripción de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA correspondiente al modelo tridimensional realista.

<u>Caracterización del cubo:</u>	
Número de trazas:	$PEX = 50$ $PEY = 50$
Longitud:	$LX = 1,00 m$ $LY = 1,00 m$
Espaciado entre trazas:	$EX = 0,043 m$ $EY = 0,043 m$
Número de muestras por traza:	$PED = 56$
Longitud de muestreo:	$LD = 1,44 m$
Espaciado entre muestras:	$ED = 0,026 m$

La comparación de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA con la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD se muestra en las figuras 7-4-5 y 7-4-6.

Páginas siguientes:

Figura 7-4-5: Comparación entre la DISTRIBUCIÓN MEDIDA con la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondientes al modelo tridimensional realista.

(a) Valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA por el plano $X = 0,65m$.

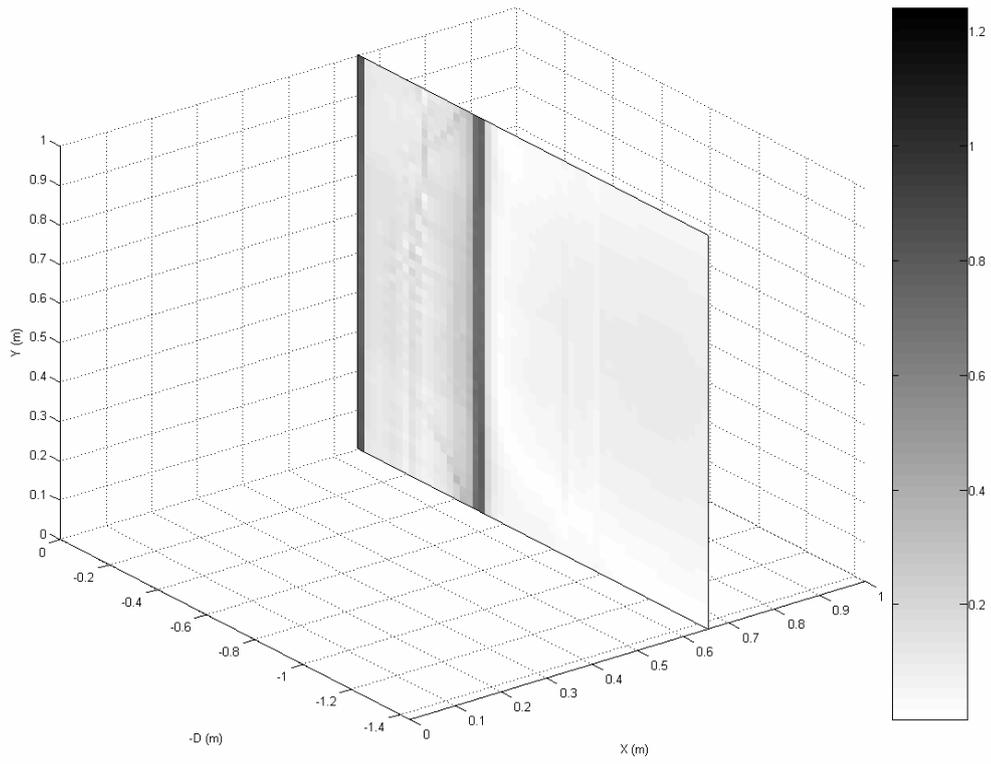
(b) Valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD por el plano $X = 0,65m$.

(c) Valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA por el plano $X = 0,31m$.

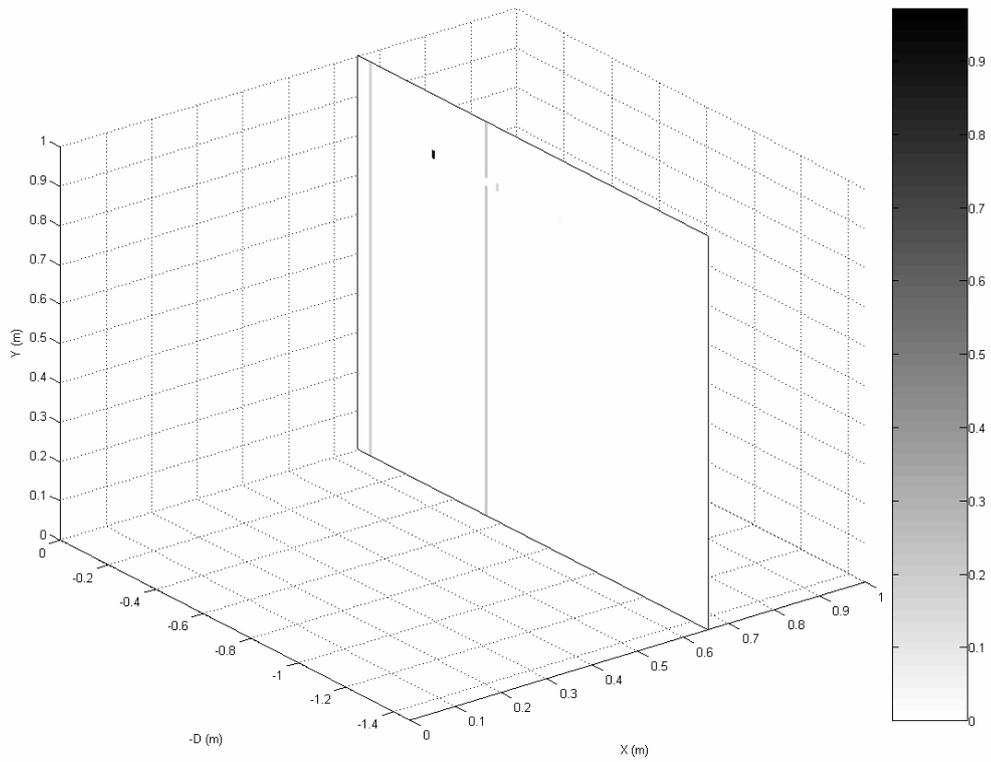
(d) Valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD por el plano $X = 0,31m$.

(e) Valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA por el plano $Y = 0,84m$.

(f) Valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD por el plano $Y = 0,84m$.



(a)



(b)

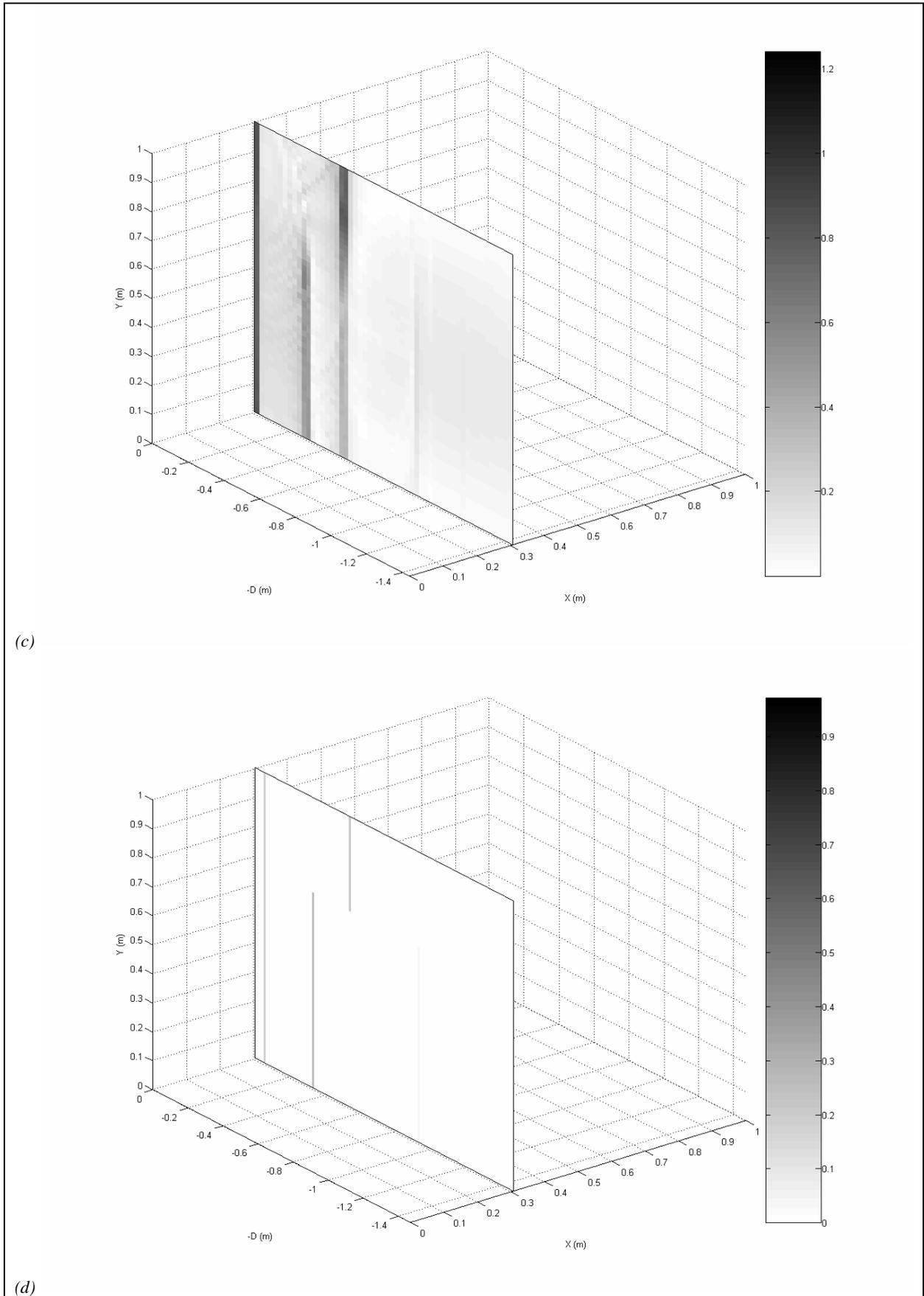
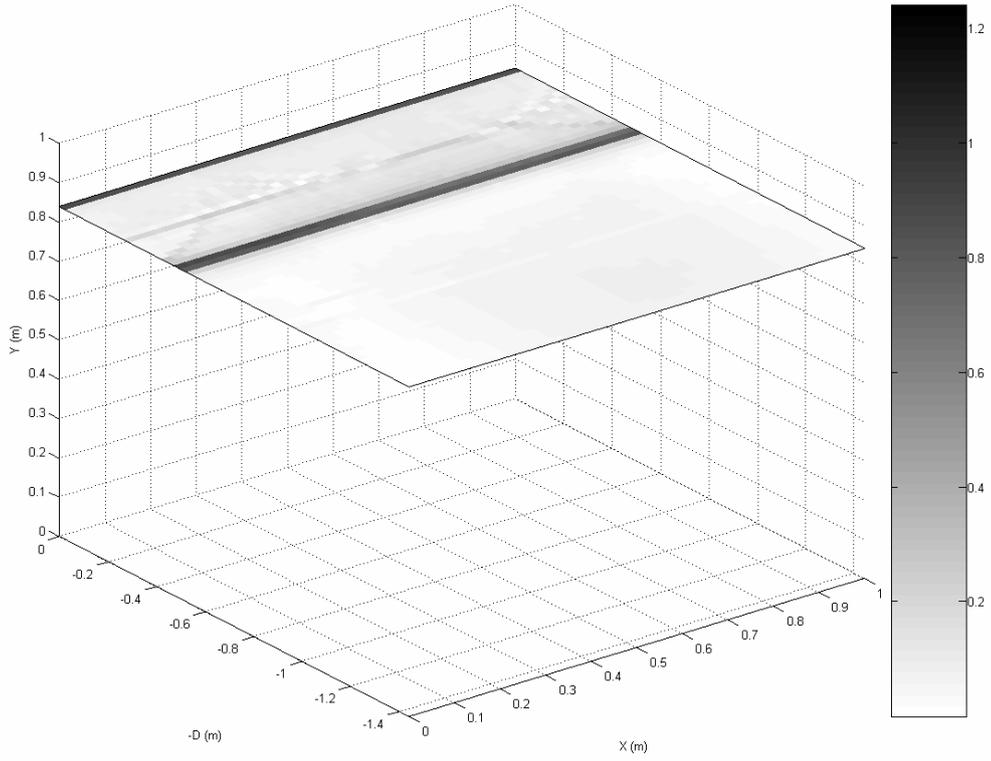
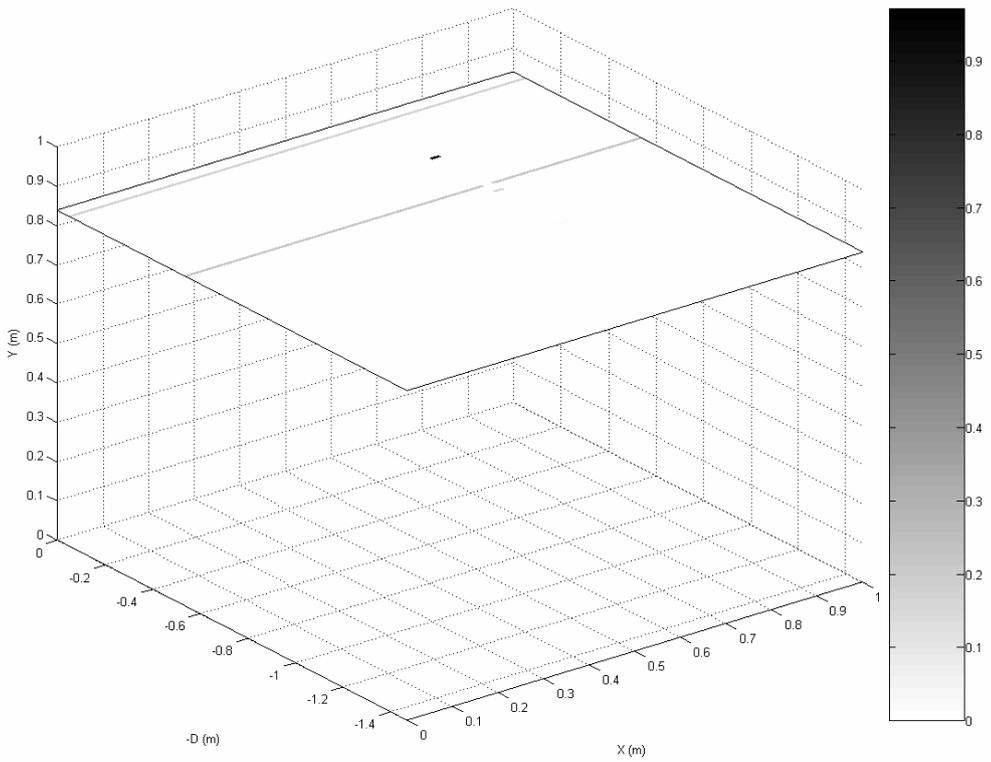


Figura 7-4-5



(e)



(f)

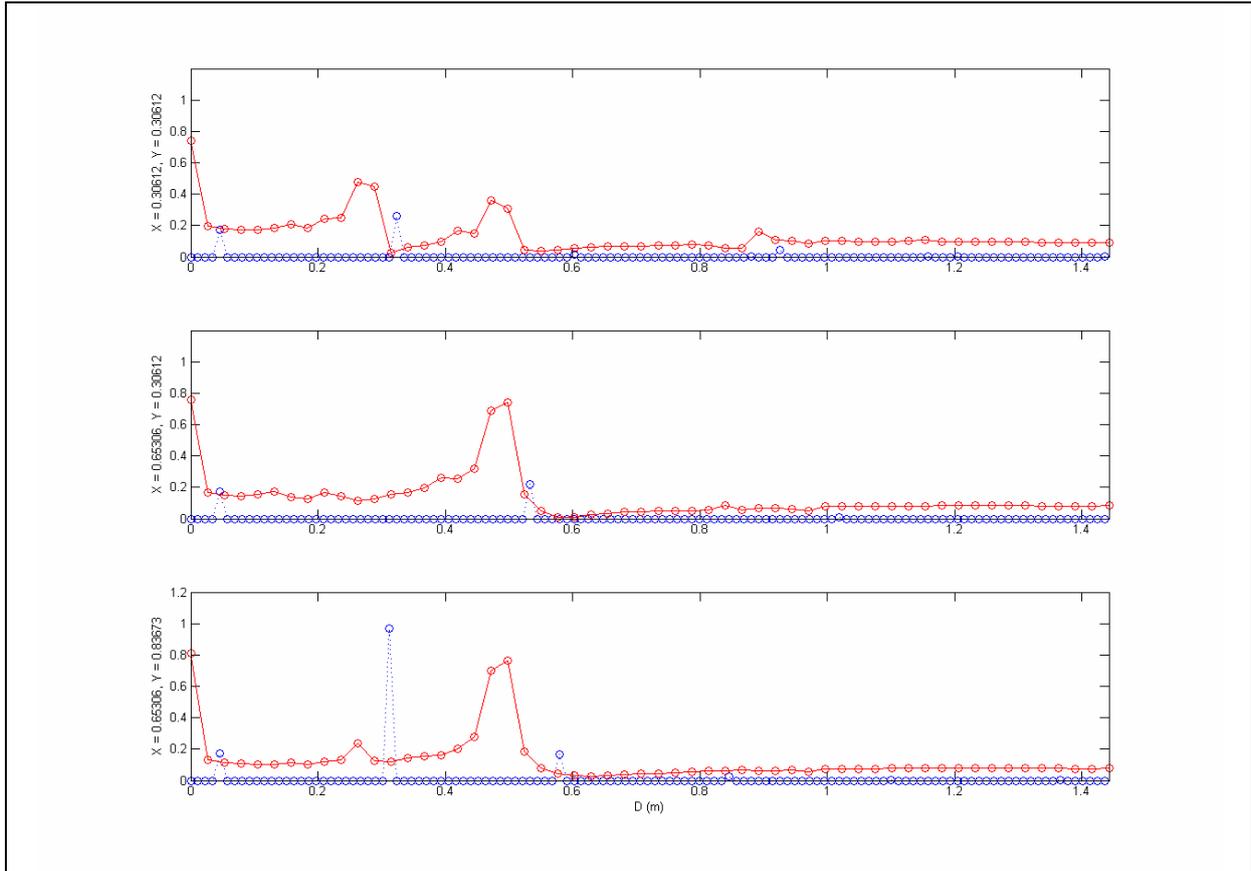


Figura 7-4-6: Trazas representativas de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA y DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD correspondientes al modelo tridimensional realista.

En todos los casos se representa, frente a la coordenada de profundidad D (m), las trazas correspondientes al valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA (rojo) y al valor absoluto de la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD (azul).

(2) Caracterización y comparación de resultados

El tiempo medio de cómputo para este modelo es de 30,7225 s.

A la vista de los resultados expuestos en las figuras del punto anterior, puede resaltarse el hecho de que las DISTRIBUCIONES correspondientes al caso tridimensional presentan características análogas a las correspondientes al caso bidimensional, en lo que refiere a:

- La geometría de las DISTRIBUCIONES.
- Localización de los objetos en los ejes de posición horizontal y vertical.
- Amplitudes en las DISTRIBUCIONES.

Los resultados conjuntos serán discutidos en la Sección 7.5, dedicada a la exposición y discusión de los principales resultados obtenidos.

7.5. Recapitulación

En esta Sección se exponen, a modo de compilación, los principales resultados obtenidos en el presente Capítulo.

A la vista de los resultados expuestos en las §§ 7.1 y 7.2, pueden resaltarse las siguientes características generales correspondientes a la resolución del Problema Directo:

- Los radargramas sintetizados mediante este algoritmo presentan las características geométricas esperables: Las señales correspondientes a difractores puntuales son hipérbolas y las correspondientes a reflectores plano-paralelos son planos horizontales.
- En todos los casos las señales correspondientes a las múltiples son observadas. Así mismo, en el caso tridimensional, en los perfiles que no pasan por la vertical de los difractores puntuales, próximos a ellos o a los bordes de los reflectores, aparecen señales correspondientes a los efectos laterales causados por éstos.
- Las posiciones de los vértices de las hipérbolas y los planos no se encuentran nítidamente definidas, sino que las señales son no nulas en algunos puntos previos y posteriores al máximo. Así mismo, las amplitudes y fases de estas señales difieren de las que se obtienen en la resolución analítica.
- Aun teniendo en cuenta los aspectos arriba señalados, las hipérbolas y los planos se encuentran localizados en la posición horizontal y tiempo doble de recorrido que se obtiene en la resolución analítica del Problema Directo, dentro del margen de error asumible por la naturaleza discreta de la SECCIÓN MEDIDA.

A la vista de los resultados expuestos en las §§ 7.3 y 7.4, pueden resaltarse las siguientes características generales para la resolución del Problema Inverso:

- La DISTRIBUCIÓN MEDIDA y la DISTRIBUCIÓN ESPERADA presentan las características geométricas esperables: El resultado de aplicar el algoritmo a un conjunto de hipérbolas y planos horizontales es un conjunto de hipérbolas y planos horizontales.
- Las posiciones de los objetos no se encuentran nítidamente definidas, sino que en los objetos puntuales quedan unas ramas espurias que no convergen al punto, y las DISTRIBUCIONES son no nulas en algunos puntos previos y posteriores a los máximos de los planos.

- Así mismo, las amplitudes de DISTRIBUCIÓN MEDIDA y la DISTRIBUCIÓN ESPERADA difieren de las correspondientes a la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD.
- Aun teniendo en cuenta los aspectos arriba señalados, los objetos puntuales y los planos se encuentran localizados en la posición horizontal y vertical que se observa en la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD, dentro del margen de error asumible por su naturaleza discreta.

Las características obtenidas son inherentes a la metodología empleada (Stolt, 1978; Stolt y Weglen, 1985; Stolt, 1996; Stolt, 2002; Baradello et al., 2004), apareciendo referidas en la literatura diferentes estrategias metodológicas, mucho más complejas, para obtener un mayor ajuste de las amplitudes (Zeng et al., 1995; Stolt, 1996; Slob, 2003; Guitton, 2004). Así mismo, en el caso de la resolución del Problema Inverso, las características obtenidas son inherentes al propio proceso de inversión (Haizhong y Xiaoqian, 1997; Bitri y Grandjean, 1998; Hermance, 2001), siendo causadas las ramas espurias por componentes submigradas o sobremigradas (Pérez Gracia, 2001, §7.6.2).

Es importante señalar que estas características se encuentran en consonancia con los resultados expuestos en la §3.3.1 del Capítulo 3, dedicado al diseño de los algoritmos, y en los Capítulos 4 y 5, dedicados al formalismo de la transformada de Fourier y las metodologías de interpolación en la misma. La falta de nitidez en la posición de las señales se debe a que éstas deberían ser asignadas a muestras con un tiempo doble de recorrido que no se encuentran presentes en la SECCIÓN MEDIDA (Cf. §4.5), efecto que se ve incrementado por la metodología empleada para la interpolación en el espectro filtrado (Cf. §§5.2 y 5.3). Esto, a su vez, redundaría en la alteración de la amplitud y fase de los máximos, pues la energía asociada a éstos se distribuye en un intervalo amplio.

Dadas estas características, es de esperar que sea posible realizar análisis cualitativos de los datos de campo, así como análisis cuantitativos en lo que respecta a la geometría, aunque no será posible extraer conclusiones de carácter cuantitativo en lo que respecta a amplitudes y fases.

Los tiempos medios de cómputo para los modelos expuestos en el presente Capítulo se muestran en la Tabla 7-5-1:

Tabla 7-5-1: Tiempos medios de cómputo para los modelos expuestos en el presente Capítulo.

Modelo	Dimensionalidad	Tiempo (s)	
		Problema Directo	Problema Inverso
Difractor puntual	2D	18,5032	28,8852
	3D	82,8182	73,9930
Superposición de capas plano-paralelas	2D	27,9177	27,0378
	3D	102,4582	81,5214
Realista	2D	25,9936	13,3769
	3D	85,9982	30,7225

Estos tiempos son suficientemente cortos como para que la metodología resulte operacionalmente eficiente.

En la resolución del Problema Directo no han sido tenidas en cuenta las reflexiones múltiples entre la antena y la superficie. Sería posible obtenerlas mediante la introducción en la posición $Z = 0$ de un reflector ficticio asociado a la antena, con un valor del coeficiente de transmisión descendente $t_d = 1$ y unos valores del coeficiente de reflexión r y coeficiente de transmisión ascendente t_a apropiados. Con objeto de simplificar las figuras, los modelos tratados en el presente Capítulo no contenían este reflector ficticio, lo cual no supone pérdida de generalidad a la presente discusión.

En todos los casos ha sido empleada como referencia una única frecuencia. Los resultados obtenidos con otras frecuencias no difieren significativamente de los mostrados en el presente Capítulo, siendo éste un aspecto presente en la literatura (Bitri y Grandjean, 1998).

La frecuencia se encuentra presente en esta metodología en la agrupación de parámetros electromagnéticos $f(\omega)$ expuesta en (3.2.17), de la cual dependen funcionalmente el resto de magnitudes. En el rango de variación de los parámetros electromagnéticos en los materiales de interés, en el rango de variación de la frecuencia en que opera el geo-radar, toma valores $f(\omega) \approx \sqrt{2}$, con independencia de la frecuencia, lo que justifica este resultado.

7.A. Anexo: Resolución analítica del Problema Directo en dos dimensiones

En este Anexo se resuelve el Problema Directo en diversos modelos bidimensionales sencillos:

- Un difractor puntual.
- Una superposición de capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito.

Para ello se emplea un procedimiento análogo al desarrollado en la §6.B del Capítulo 6, teniendo en consideración que las señales emitida y recibida no se encuentran necesariamente en la dirección de la normal a la superficie. La dirección de los rayos reflejados y transmitidos se determina de acuerdo con la ley de Snell.

7.A.1. Un difractor puntual

Este modelo está constituido por un difractor puntual, inmerso en una matriz homogénea.

La descripción del modelo, mostrado en la Figura 7–A-1, se detalla en la Tabla 7–A-2:

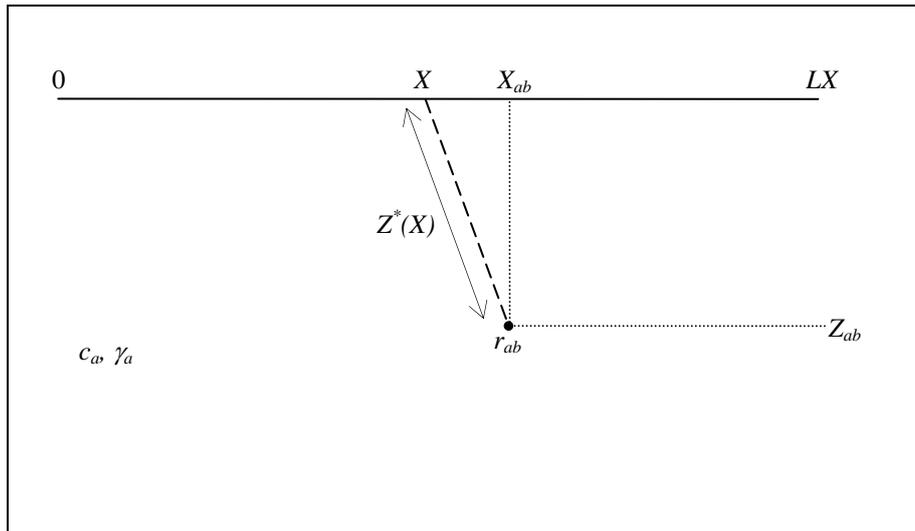


Figura 7–A-1: Planteamiento del Problema Directo para el modelo constituido por un difractor puntual.

Tabla 7–A-2: Descripción del modelo constituido por un difractor puntual.

<u>Caracterización del perfil:</u>	
Longitud:	LX
<u>Caracterización de la matriz:</u>	
Velocidad de propagación:	c_a
Velocidad de propagación promedio: ⁸	c_m
Constante de propagación:	γ_a
<u>Caracterización del difractor puntual:</u>	
Coefficiente de reflexión:	r_{ab}
Posición:	$X = X_{ab}, Z = Z_{ab}$

⁸ En este caso, al haber un único medio, la velocidad promedio coincidirá con la velocidad de propagación en el medio, $c_m = c_a$.

Para cada posición $X \in [0, LX]$ a lo largo del perfil se registra en la antena receptora una única señal. En la resolución del Problema Directo debe considerarse la distancia desde el punto al difractor, dada por:

$$Z^*(X) = \sqrt{(X - X_{ab})^2 + Z_{ab}^2} \quad (7.A.1)$$

La coordenada D asociada a esta distancia viene dada por:

$$D^*(X) = \frac{c_m}{c_a} Z^*(X) = Z^*(X) \quad (7.A.2)$$

Así pues, la reflectividad aparente y el tiempo doble de recorrido correspondiente a la señal recibida en cada posición a lo largo del perfil correspondientes a este modelo vienen dadas por:

$$\begin{aligned} r^*(X) &= e^{-2\gamma_a Z^*(X)} \cdot r_{ab} \\ t^*(X) &= 2 \frac{D^*(X)}{c_m} \end{aligned} \quad (7.A.3)$$

7.A.2. Superposición de capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito

Este modelo está constituido por dos capas plano-paralelas, superpuestas a un semiespacio infinito.

La descripción del modelo, mostrado en la Figura 7–A-2, se detalla en la Tabla 7–A-3:

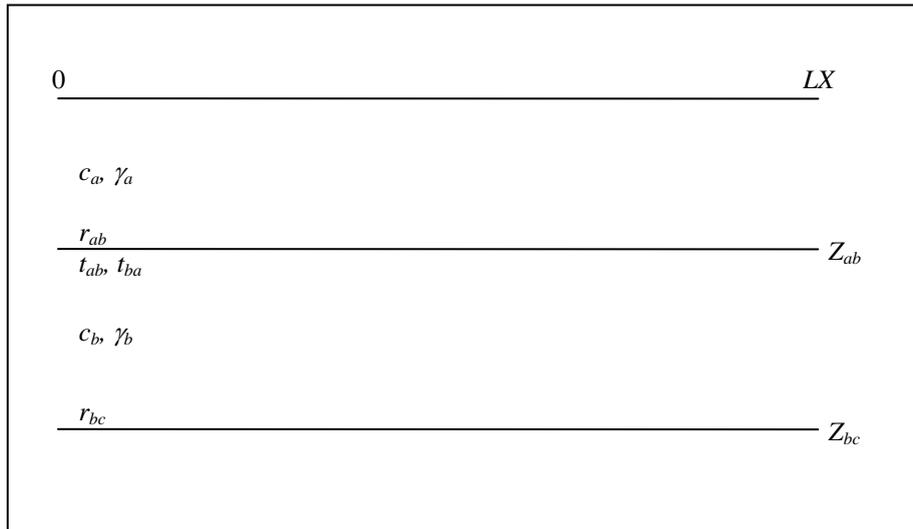


Figura 7–A-2: Planteamiento del Problema Directo para el modelo constituido por dos capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito.

Tabla 7–A-3: Descripción del modelo constituido por dos capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito.

Caracterización del perfil:

Longitud:	LX
<u>Caracterización de los medios:</u>	
Velocidades de propagación:	c_a, c_b
Constantes de propagación:	γ_a, γ_b
Velocidad de propagación promedio:	c_m

Caracterización de los reflectores:

Coefficientes de reflexión:	r_{ab}, r_{bc}
Coefficiente de transmisión ascendente:	t_{ab}
Coefficiente de transmisión descendente:	t_{ba}
Posiciones:	Reflector ab : $Z = Z_{ab}$
	Reflector bc : $Z = Z_{bc}$

En este modelo se distinguen:

- Onda $0a0$: Es la onda que, partiendo del emisor, atraviesa el medio a hasta alcanzar el reflector ab , donde es reflejada. Atravesando nuevamente el medio a es registrada en el receptor.
- Ondas $0a(ba)^n 0$: Son las ondas que, partiendo del emisor, atraviesan el medio a hasta alcanzar el reflector ab , donde son transmitidas. Atraviesan el medio b hasta alcanzar el reflector bc , donde son reflejadas. Un número entero $n \geq 1$ de veces atraviesan nuevamente el medio b hasta alcanzar el reflector ab , donde son reflejadas, atravesando nuevamente el mismo medio hasta alcanzar el reflector bc , donde son reflejadas. Atravesando nuevamente el medio b hasta alcanzar el reflector ab , donde son transmitidas, y atravesando nuevamente el medio a son registradas en el receptor.

Las coordenadas D asociadas a las profundidades de los reflectores vienen dadas por:

$$D_{ab} = \frac{c_m}{c_a} Z_{ab} \quad (7.A.4)$$

$$D_{bc} = \frac{c_m}{c_a} Z_{ab} + \frac{c_m}{c_b} (Z_{bc} - Z_{ab})$$

Así pues, las reflectividades aparentes y los tiempos dobles de recorrido correspondientes a cada onda vienen dadas por:

$$r_{0a0} = e^{-2\gamma_a Z_{ab}} \cdot r_{ab} \quad (7.A.5)$$

$$r_{0a(ba)^n 0} = e^{-2\gamma_a Z_{ab}} \cdot e^{-2\gamma_b (Z_{bc} - Z_{ab})} \cdot t_{ab} \cdot r_{bc} \cdot (-r_{ab} \cdot r_{bc})^{n-1} \cdot t_{ba}$$

$$t_{0a0} = 2 \frac{D_{ab}}{c_m} \quad (7.A.6)$$

$$t_{0a(ba)^n 0} = 2 \frac{D_{bc} + (n-1)(D_{bc} - D_{ab})}{c_m}$$

Capítulo 8

*Aplicación de los algoritmos
a datos de campo*

Introducción

Hay ocasiones en las que es posible extraer suficiente información, bien de los datos brutos bien tras un pequeño procesado, como para que sea innecesario aplicarles un proceso de inversión. En otras ocasiones, tras el procesado, quedan señales que no es posible identificar como difracciones o reflexiones en objetos en la vertical del perfil, o como efectos laterales.

En estos casos la aplicación de los algoritmos aquí desarrollados permite discriminar estas situaciones ya que, en el caso tridimensional, las señales laterales convergen a elementos situados en las posiciones reales, y el caso bidimensional las señales laterales son submigradas o sobremigradas.

En este octavo Capítulo se discute la aplicación de los algoritmos diseñados en el Capítulo 3, con la implementación descrita en el Capítulo 6, a datos de campo, atendiendo a los resultados descritos en el Capítulo 7, correspondientes a la aplicación de los mismos a datos sintéticos.

El presente Capítulo se encuentra dividido en tres secciones dedicadas, respectivamente:

- A las características que deben presentar los registros para adecuarse a las aproximaciones y simplificaciones de diseño e implementación.
- A las técnicas de procesado más indicadas para la adecuación de los registros a las anteriormente expuestas aproximaciones y simplificaciones.
- A la aplicación de los resultados anteriores a datos de campo, así como a la exposición y discusión de los principales resultados obtenidos.

8.1. Características de los registros

La aplicabilidad de los algoritmos, bien los correspondientes a la resolución del Problema Inverso sobre los datos de campo, bien los correspondientes a la resolución del Problema Directo en modelos propuestos para su posterior comparación con los mismos, se ve supeditada, en primer lugar, a la adecuación de los registros a las limitaciones de diseño debidas a las sucesivas aproximaciones y simplificaciones realizadas en el desarrollo de los algoritmos, recogidas en la §3.3.1 y aquí reexpuestas:

1. Los medios que constituyen la región subsuperficial son lineales, homogéneos e isótropos.
2. Los reflectores están constituidos por elementos difractores puntuales.
3. La superficie está definida por un plano horizontal.
4. El emisor y el receptor son coincidentes.
5. Las derivadas parciales respecto a las coordenadas relativas receptor-emisor son despreciables frente al resto.
6. Los parámetros electromagnéticos de los medios sólo varían con la coordenada de profundidad.
7. La permeabilidad magnética μ se asume igual a la permeabilidad magnética del vacío, $\mu = \mu_0$
8. La permitividad eléctrica ε y la conductividad eléctrica σ se aproximan por unos valores promedio, ε_m y σ_m respectivamente, y se considera un valor característico de la pulsación de las ondas electromagnéticas, ω , de tal forma que se verifique (3.2.10), y la velocidad de propagación promedio resultante c_m sea tal que se verifique $(c_m/c)^2 \approx 1$ en promedio sobre la SECCIÓN (esto es, la velocidad cuadrática media).

De éstas, las aproximaciones 2 y 8 son aproximaciones básicas de diseño, y la 5 es una aproximación de carácter numérico. El resto de aproximaciones puede agruparse en torno a los siguientes efectos bien diferenciados:

- **Naturaleza de la región subsuperficial:** Aproximaciones 1, 3, 6 y 7.
- **Modalidad de operación:** Aproximación 4.
- **Naturaleza de la radiación:** Segunda parte de la aproximación 8 (referida a la pulsación de las ondas electromagnéticas).

En segundo lugar, en el caso de la resolución del Problema Inverso, dada la implementación de los algoritmos expuesta en el Capítulo 6, debe tenerse en cuenta:

- Los registros deben contener **trazas y muestras equiespaciadas** (Cf. la definición de las coordenadas en la §6.1.2).
- Los algoritmos no implementan la eliminación de **ondas múltiples** (Cf. §6.B.2).

Estos aspectos, tanto los correspondientes a la fase de diseño como a la implementación de los algoritmos, serán descritos en detalle en las siguientes Subsecciones. Las técnicas de procesado más indicadas para la adecuación de los registros a las mismas serán tratadas en la §8.2.

8.1.1. Naturaleza de la región subsuperficial

A la naturaleza de la región subsuperficial hacen referencia las aproximaciones 1, 3, 6 y 7, donde se expresa que:

- La superficie está definida por un plano horizontal.

Esta aproximación, como se expone en la §3.2.2.1, tiene sentido en muchas aplicaciones en las que emisor y receptor se mueven sobre una superficie plana o poco curvada (suelo asfaltado u hormigonado, paredes, etc.), no siendo así cuando se mueven sobre superficies rugosas o con ondulaciones muy pronunciadas. En estos últimos casos, este efecto habrá de ser eliminado en la fase de procesado de los registros.

- Los medios que constituyen la región subsuperficial son lineales, homogéneos e isotrópicos, asumiéndose que la permeabilidad magnética μ es igual a la permeabilidad magnética del vacío, $\mu = \mu_0$.

Esta aproximación es adecuada en la mayoría de casos prácticos.

- Los parámetros electromagnéticos de los medios sólo varían con la coordenada de profundidad.

Esta aproximación, junto a la aproximación 4 de la página anterior, conllevan a la limitación de realizar únicamente estudios en regiones constituidas por estratificaciones horizontales que incluyan elementos difractores puntuales.

8.1.2. Modalidad de operación

A la modalidad de operación hace referencia la aproximación 4, donde se expresa que el emisor y el receptor son coincidentes.

Esta aproximación conlleva la limitación de considerar únicamente la modalidad monoestática, o bien a limitarse a aquellos estudios en los que la profundidad de exploración es mucho mayor que la distancia relativa emisor-receptor. En otro caso, sería preciso tener en cuenta este efecto en la fase de procesamiento de los registros.

8.1.3. Naturaleza de la radiación

A la naturaleza de la radiación hace referencia la segunda parte de la aproximación 8, donde se expresa que se considera un valor característico de la pulsación de las ondas electromagnéticas, ω , lo cual es equivalente a suponer que el emisor es una fuente de radiación monocromática.

Esta aproximación carece de sentido físico, y habrá de ser solventada en la fase de procesamiento de los registros.

8.1.4. Trazas y muestras equiespaciadas

Como ha sido anteriormente mencionado, los algoritmos para la resolución del Problema Inverso requieren que los registros contengan trazas y muestras equiespaciadas.

En lo que refiere a las trazas, el espaciado entre trazas dependerá de la velocidad de arrastre de la antena sobre la superficie, siendo éste uniforme en el caso en que ésta también lo sea. En el caso en que la velocidad de arrastre no sea uniforme, la situación habrá de ser solventada en la fase de procesamiento de los registros.

En lo que refiere al muestreo temporal, ésta es una característica inherente al proceso de adquisición de datos (Cf. §2.2), por lo que no supone limitación alguna.

8.1.5. Ondas múltiples

Como ha sido anteriormente mencionado, los algoritmos para la resolución del Problema Inverso no implementan la eliminación de ondas múltiples.

Esto conlleva la limitación de estudiar registros sin señales correspondientes a múltiples, o bien a su eliminación en la fase de procesado de los registros.

8.2. Procesado de los registros

En el caso en que los registros no se adecuen a las limitaciones de diseño e implementación expuestas en la Sección anterior, debe realizarse una fase de procesado de los mismos, previa a la aplicación de los algoritmos.

Existen diversas publicaciones donde los autores exponen las técnicas de procesado empleadas en los registros de geo-radar, así como sus características, siendo las más relevantes:

- Aplicación de ganancias (Hugenschmidt et al., 1998; Overmeeren, 1998; Pipan et al., 1999; Grandjean et al., 2000; Grandjean y Durand, 2000).
- Remuestreo en el eje espacial (Hugenschmidt et al., 1998; Grandjean et al., 2000).
- Filtros temporales (Hugenschmidt et al., 1998; Overmeeren, 1998; Pipan et al., 1999; Grandjean et al., 2000; Grandjean y Durand, 2000; Dascalu y Franti, 2003).
- Filtros espaciales (Overmeeren, 1998; Pipan et al., 1999; Grandjean y Durand, 2000; Heinckle et al., 2004).
- Corrección estática (Hugenschmidt et al., 1998; Overmeeren, 1998; Grandjean et al., 2000; Grandjean y Durand, 2000; Green et al., 2003; Heincke et al., 2004).
- Eliminación de la señal de fondo (Brunzell, 1998; Halman et al., 1998; Dascalu y Franti, 2003; Grandjean y Durand, 2000).
- Deconvolución (Green et al., 2003; Roth et al., 2003; Xia et al., 2003; Heincke et al., 2004).
- Migración (Hugenschmidt et al., 1998; Grandjean et al., 2000; Grandjean y Durand, 2000; Moran et al., 2000; Witten, 2002).
- Superposición de trazas (Pipan et al., 1999; Green et al., 2003).

Las técnicas de procesado más indicadas para la adecuación de los registros a las aproximaciones y simplificaciones de diseño e implementación expuestas en la Sección anterior se describen y discuten en las siguientes Subsecciones.

8.2.1. Superficie no horizontal

En los casos en que la superficie no pueda considerarse horizontal, tal como se mencionó en la §3.2.2.1, es posible efectuar un filtrado espacial o una corrección estática por la topografía.

En el caso en que la antena se desliza por una superficie irregular, se introduce un ruido de fondo de alta frecuencia, que puede ser eliminado mediante la aplicación de un filtro espacial pasa baja (Cf. §2.4.3).

En el caso en que la superficie presenta una cierta topografía, es posible corregir este efecto mediante la aplicación de una corrección estática (Cf. §2.4.5).

8.2.2. Estratificaciones con reflectores planos no horizontales o curvados

En el caso de estratificaciones con reflectores planos no horizontales o curvados, la aplicación de los algoritmos no está justificada, al no adecuarse a las limitaciones anteriormente expuestas. No obstante, es de esperar que en el caso de reflectores inclinados con pequeños buzamientos, o reflectores curvados con pequeñas curvaturas, los resultados obtenidos no sean en exceso incorrectos, debiéndose tener siempre en cuenta este hecho en la fase de interpretación de los resultados.

8.2.3. Emisor y receptor no coincidentes

En los casos en que emisor y receptor no sean coincidentes, bien porque no se opera en la modalidad monoestática, bien porque la profundidad de exploración sea comparable o inferior que la distancia relativa emisor-receptor, es posible, tal como se mencionó en la §3.2.2.1, efectuar una superposición de trazas (Cf. §2.4.8), bajo la consideración de que las secciones obtenidas serán equivalentes a las secciones normales, o bien una corrección por el NMO (Cf. §2.4.9).

En lo que refiere a la superposición de trazas, este proceso puede realizarse bien en la etapa de adquisición (preprocesado), bien con posterioridad a la misma. En cualquier caso, dado que se produce un decremento de la resolución horizontal, debe emplearse una velocidad de arrastre de la antena suficientemente baja como para que la superposición de trazas no suponga una pérdida de información importante (Pérez Gracia, 2001, §7.7.3).

8.2.4. Emisor no monocromático

Como ha sido mencionado anteriormente, en ninguno de los casos podrá considerarse al emisor como una fuente monocromática de radiación electromagnética.

El procesado adecuado a esta situación es la aplicación de un filtro temporal pasa banda (Cf. §2.4.4), con el que seleccionar un rango de frecuencias suficientemente estrecho como para que el contenido frecuencial del registro se aproxime lo más posible a la condición de monocromaticidad. En cualquier caso, es conveniente realizar un estudio de frecuencias previo y posterior a la misma, con objeto de comprobar que se ha realizado correctamente y no ha sido perdida información útil.

Un procesado inadecuado sería la deconvolución del registro por la forma de la onda (Cf. Figura 2-2-2) pues, debido a la dispersión de frecuencias (Cf. §1.2.3.1) y a la diferente atenuación de las ondas en función de su frecuencia (Cf. §1.2.1), la forma del pulso cambia conforme se propaga en el interior de la subsuperficie, en función de los materiales por los que es transmitido. Así pues, sería preciso realizar la deconvolución de cada señal presente en los registros por la forma de la onda correspondiente, quedando descartada la operación automática.

8.2.5. Trazas no equiespaciadas

Como ha sido mencionado anteriormente, en el caso en que la velocidad de arrastre de la antena sobre la superficie no sea uniforme los registros no contendrán trazas uniformemente espaciadas.

El procesado adecuado a esta situación es el remuestreo o interpolación en el eje espacial (Cf. §2.4.2).

8.2.6. Ondas múltiples. Clutter

Las ondas múltiples, a los efectos de los algoritmos implementados para la resolución del Problema Inverso, constituyen un ruido cuyo tratamiento puede enmarcarse entre los diseñados para el tratamiento genérico del clutter.

Se refiere con el término de clutter (literalmente “desperdicios”) al conjunto de señales no deseadas presentes en los registros (González y Marcello, 2002, Capítulo 5; Daniels, 2004, §2.4). Las fuentes de clutter son diversas, encontrándose referidas en la literatura:¹

- Clutter originado por reflexiones múltiples (Weglein et al., 1997; Landa et al., 1999; Youn y Zhou, 2001; Álvarez y Larner, 2004; Nobes et al., 2005; Sava y Guitton, 2005).
- Clutter originado por reflexiones múltiples entre la antena y la superficie (George y Altshuler, 1998; Salvati et al., 1998; Merwe y Gupta, 2000; Sagués et al., 2001; Karlsen et al., 2001; Kempen y Sahli, 2001; Kolba y Jouny, 2003; Kovalenko y Yoarovoy, 2003; Sai y Lighthart, 2003; Yarovoy, 2003; Yarovoy et al., 2003; Zhao et al., 2003; Hu y Zhou, 2004).
- Clutter originado por raíces u otras intrusiones en la subsuperficie (El-Shenawee y Rappaport, 2002).
- Clutter originado por reflexiones externas o efectos de borde (Pérez Gracia, 2001, §§17.2 y 17.3; Daniels, 2004, §7.10).
- Clutter doppler, originado por el desplazamiento de aviones desde los que se adquieren los datos de campo (Jaffer et al., 2005).

En la literatura se encuentran diversas metodologías para la eliminación de las señales clutter de los registros, entre ellas:

- Caracterización empírica del clutter (George y Altshuler, 1998; Salvati et al., 1998; Pérez Gracia, 2001, §17.4).
- Modelado en el dominio frecuencial (Merwe y Gupta, 2000; Hu y Zhou, 2004).
- Eliminación mediante técnicas interferométricas (Sagués et al., 2001).
- Atenuación de múltiples (Weglein et al., 1997; Landa et al., 1999; Álvarez y Larner, 2004; Sava y Guitton, 2005).

¹ El más referido en la literatura es el correspondiente a las reflexiones múltiples entre la antena y la superficie, en especial en las aplicaciones correspondientes a la detección de minas y armamento enterrado. La mayoría de tecnologías en uso o propuestas para ello padecen de una tasa de falsas alarmas inaceptablemente alta, como consecuencia de la incapacidad de discriminación entre las señales procedentes del armamento y el clutter (George y Altschuler, 1998). De hecho, el contenido de señal útil en los registros dirigidos a este objetivo se estima en 5-7%, mientras que el contenido de señal clutter se estima en 16-20% (El-Shenawee y Rappaport, 2002).

- Caracterización del clutter mediante métodos estadísticos:²
 - Simulación Monte Carlo (El-Shenawee y Rappaport, 2002; Yarovoy, 2003).
 - Modelos MA (Kovalenko y Yoarovoy, 2003; Sai y Lighthart, 2003; Yarovoy et al., 2003).
 - Modelos ARMA (Kempen y Sahli, 2001; Kolba y Jouny, 2003).
 - Modelos markovianos (Zhao et al., 2003).
 - Matriz de covarianza del espectro de potencia (Jaffer et al., 2005).
 - Correlación entre los campos correspondientes a la propagación de las ondas en sentido descendente y ascendente (Youn y Zhou, 2001).
 - Análisis de Componentes Principales (Karlsen et al., 2001).

En su aplicación a las ondas múltiples, estas metodologías permiten su identificación y eliminación parcial, aunque sin asignar su energía a la primaria que les corresponde, lo que conlleva un inevitable deterioro de la señal.

En cualquiera de los casos, tal como ha sido expuesto en la §6.2.B, la eliminación de múltiples es una tarea complicada, pues no son completamente separables de las señales primarias de acuerdo con criterios como periodicidad o espectro (Yarovoy, 2003; Nobes et al., 2005), y es requerido un modelado preciso de la propagación de las ondas, con una determinación exacta tanto de los tiempos de recorrido como de las amplitudes (Youn y Zhou, 2001).

² Un estudio detallado de los procedimientos estadísticos referidos puede encontrarse en:

- Series temporales (Pérez, 2001):
 - Modelos no paramétricos (Aznar y Trívez, 1993a).
 - Modelos paramétricos (Uriel Jiménez, 1985; Aznar y Trívez, 1993b).
- Métodos estocásticos: Procesos de Markov, entre otros (Aznar y Trívez, 1993b, Cinlar, 1975).
- Métodos de Monte Carlo (Tarantola, 1987; Scheid y Lorencez, 1991; Sen y Stoffa, 1995).
- Métodos multivariantes: Análisis de la matriz de covarianza y análisis de componentes principales, entre otros (Pérez, 2001; Johnson y Wichern, 2002).

8.3. Aplicación a datos de campo

En esta Sección se aplica el algoritmo para la resolución del Problema Inverso en dos dimensiones a datos de campo extraídos de campañas de prospección con geo-radar realizadas en agosto de 2004 en la huerta del Monasterio de El Paular (Rascafría, Madrid) y en septiembre de 2003 en el castro de “El Ceremeño” (Herrería, Guadalajara).³

En el primer caso se estudia un perfil en el que se encuentra presente una señal y sus múltiples, correspondientes a la difracción en los bordes de un muro de granito enterrado. En el segundo caso se estudia un perfil más complejo, en el que se encuentra presente un conjunto de varias señales y sus múltiples, correspondientes a las difracciones en los bordes de varias cimentaciones enterradas.

Tras la descripción del equipo empleado, en cada caso se describe el emplazamiento donde fueron adquiridos los datos y se exponen los resultados obtenidos en los procesados previos a la aplicación del algoritmo y tras la aplicación del mismo, finalizándose con la caracterización de los resultados obtenidos.

8.3.1. Descripción del equipo de geo-radar

El geo-radar empleado es un modelo Zond-12c, comercializado por Radar Systems, Inc. El equipo se acompaña con un conjunto de antenas, de frecuencias 100 MHz, 500 MHz, 900 MHz y 2 GHz.

En los estudios referidos, tras realizar pruebas con las antenas de diferentes frecuencias, se eligió emplear la antena de 900 MHz.

Para el procesado se emplea el software Prism2 de Radar Systems, Inc. (Grigoriev y Zelenkov, 2004), realizándose tres tratamientos: Remuestreo en el eje espacial, filtrado espacial pasa baja y filtrado temporal pasa banda.

³ Dada la falta de ajuste en amplitudes y fases, únicamente se realizará un análisis cualitativo de los datos de campo (Cf. §7.5).

8.3.2. Aplicación en la huerta del Monasterio de El Paular (Rascafría, Madrid)

8.3.2.1. Localización del emplazamiento de estudio

El Monasterio de El Paular se encuentra situado en el término municipal de Rascafría (Madrid), en la carretera hacia Cotos y Navacerrada. En la actualidad El Paular alberga, en el recinto de lo que fue Cartuja, dos entidades perfectamente diferenciadas: un monasterio de Monjes Benedictinos (constituido por la zona monasterial denominada la “monjía” más la iglesia y anexos) y el Hotel Santa María de El Paular (constituido por la primitiva “frailía” y la hospedería).

La historia del Monasterio de El Paular da comienzo a finales del siglo XIV cuando, en 1390, Enrique II de Trastámara, en su lecho de muerte, arrepentido por haber causado el incendio de un convento de esta orden durante sus campañas francesas, decide la fundación de un monasterio de cartujos, indicando a su hijo Juan I el lugar de la primitiva ermita de Santa María del Paular, que fue llamada posteriormente Capilla de los Reyes y hoy es la Capilla de Nuestra Señora de Montserrat.

Juan I comienza la construcción y añade, en 1403, un pequeño palacio de retiro con la dirección del arquitecto Rodrigo Alonso. Durante la época de los Reyes Católicos el arquitecto Juan Guas construye el atrio de la iglesia, las portadas gótico-isabelino y, posiblemente, el retablo de alabastro del presbiterio de la capilla del Sagrario.

En el siglo XVIII se reforma la capilla del Sagrario y se ejecuta el Transparente, obra de Francisco Hurtado Izquierdo. A mediados de este siglo, un violento terremoto (el terremoto de Lisboa de 1755) causó graves daños en la torre, teniendo que ser reedificada desde el segundo cuerpo, y en el resto del edificio, en el que hubo que cambiar el artesonado de las naves de la iglesia por una bóveda de cañón al más puro estilo rococó de fines del siglo XVIII.

Como resultado de esta constante evolución, en el conjunto se concentran cuatro estilos muy importantes del arte español: gótico, barroco, renacimiento y flamenco.

La desamortización de 1835 provoca la decadencia y abandono de la Cartuja, que es vendida a particulares. En 1876 es declarada Monumento y en 1954 es cedida en parte a la Orden de Benedictinos, siendo el resto utilizado como Hotel.

Es de señalar especialmente su huerta, donde se reúnen diversos elementos de arquitectura, escultura, obras hidráulicas y el propio elemento hortense. Se pueden destacar los estanques, distribuidos a lo largo de toda la huerta, así como la casa de labranza.



Figura 8-3-1: Vista lateral del Monasterio de El Paular.

8.3.2.2. Perfil estudiado

La descripción técnica del registro bruto correspondiente al perfil objeto del estudio se detalla en la Tabla 8-3-1:

Tabla 8-3-1: Características técnicas del registro bruto correspondiente a la huerta del Monasterio de El Paular.

<u>Caracterización del perfil:</u>	
Número de trazas:	$PEX = 174$
Longitud:	$LX = 15,00m$
Número de muestras por traza:	$PET = 512$
Tiempo de muestreo:	$LT = 50 \cdot 10^{-9} s$
Espaciado entre muestras:	$ET = 0,098 \cdot 10^{-9} s$
<u>Caracterización de la antena:</u>	
Pulsación:	$\omega = 2\pi \cdot 900 \cdot 10^6 s^{-1}$
<u>Preprocesado:</u>	
Ganancia:	$60 dB$, cuadrática.

El registro bruto se muestra en la Figura 8-3-2:

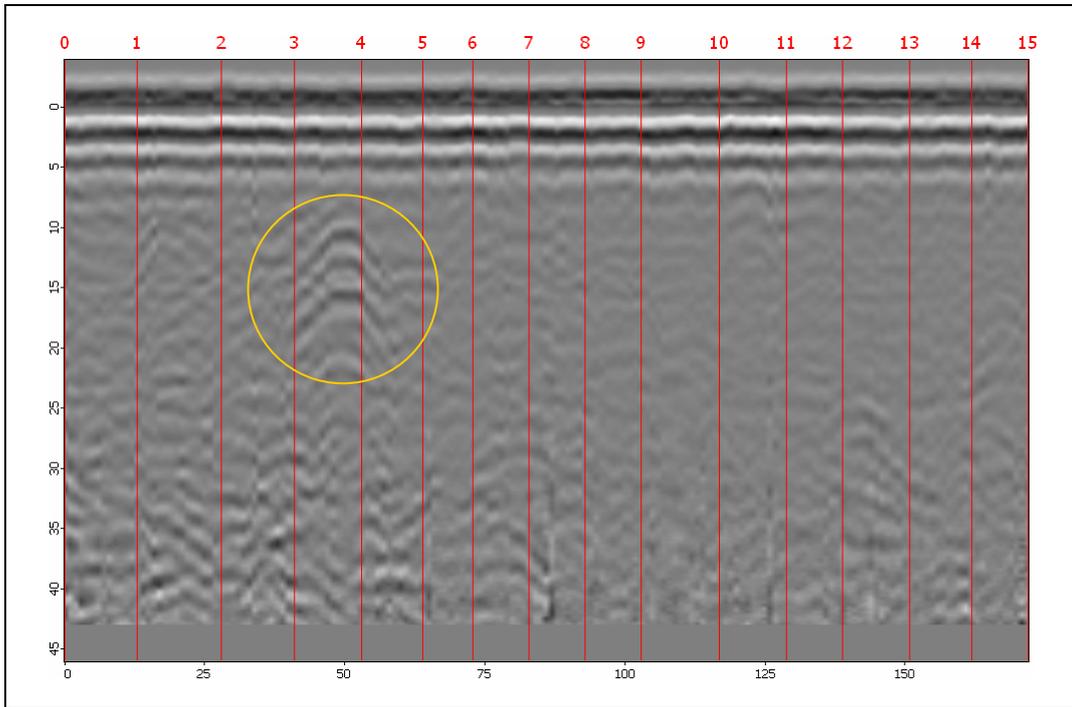


Figura 8-3-2: Mapa de color en tonos de gris del registro bruto correspondiente a la huerta del Monasterio de El Paular (el blanco corresponde al valor mínimo, el negro al máximo). El eje de ordenadas expresa el tiempo doble de recorrido, en nanosegundos, y el eje de abscisas el número de traza. Las líneas verticales muestran la distancia desde el inicio del perfil, en metros. En amarillo se indica la señal a analizar.

El material presente en la subsuperficie es sedimentario (material de relleno), y presenta las características de homogeneidad que son requeridas para la aplicación de los algoritmos. En la Figura 8-3-2 puede apreciarse, entre otras, la presencia de una señal y sus múltiples entre los metros 3 y 4, originada por la difracción en los bordes de un muro de granito como el mostrado en la Figura 8-3-3.

Ésta será la señal que se analizará en esta Subsección, siendo el objetivo del procesado la adecuación del registro a las limitaciones de diseño e implementación expuestas en las Secciones anteriores, para posteriormente aplicar sobre él el algoritmo para la resolución del Problema Inverso en dos dimensiones con objeto de lograr la convergencia de las señales analizadas a elementos puntuales.



Figura 8-3-3: Codo de muro (cortesía de Juan José Cano). Las señales marcadas en la Figura 8-3-2 y ss. están originadas por la difracción en los bordes de la prolongación del muro.

8.3.2.3. Procesado

El objetivo de las técnicas de procesado expuestas en la presente Subsección es la adecuación del registro a las limitaciones de diseño e implementación expuestas en las Secciones anteriores. Se realizan tres tratamientos: Remuestreo en el eje espacial, filtrado espacial pasa baja y filtrado temporal pasa banda.

(1) Interpolación en el eje espacial

En este registro las marcas de posición no se encuentran equiespaciadas. Con objeto de situarlas a las distancias correctas, se realiza una interpolación del mismo en el eje espacial.

La descripción técnica del registro tras la interpolación en el eje espacial se detalla en la Tabla 8-3-2:

Tabla 8-3-2: Características técnicas del registro correspondiente a la huerta del Monasterio de El Paular tras la interpolación en el eje espacial.

<u>Caracterización del perfil:</u>	
Número de trazas:	$PEX = 169$
Longitud:	$LX = 15,00m$
Espaciado entre trazas:	$EX = 0,089m$
Número de muestras por traza:	$PET = 512$
Tiempo de muestreo:	$LT = 50 \cdot 10^{-9} s$
Espaciado entre muestras:	$ET = 0,098 \cdot 10^{-9} s$

El registro resultante se muestra en la Figura 8-3-4:

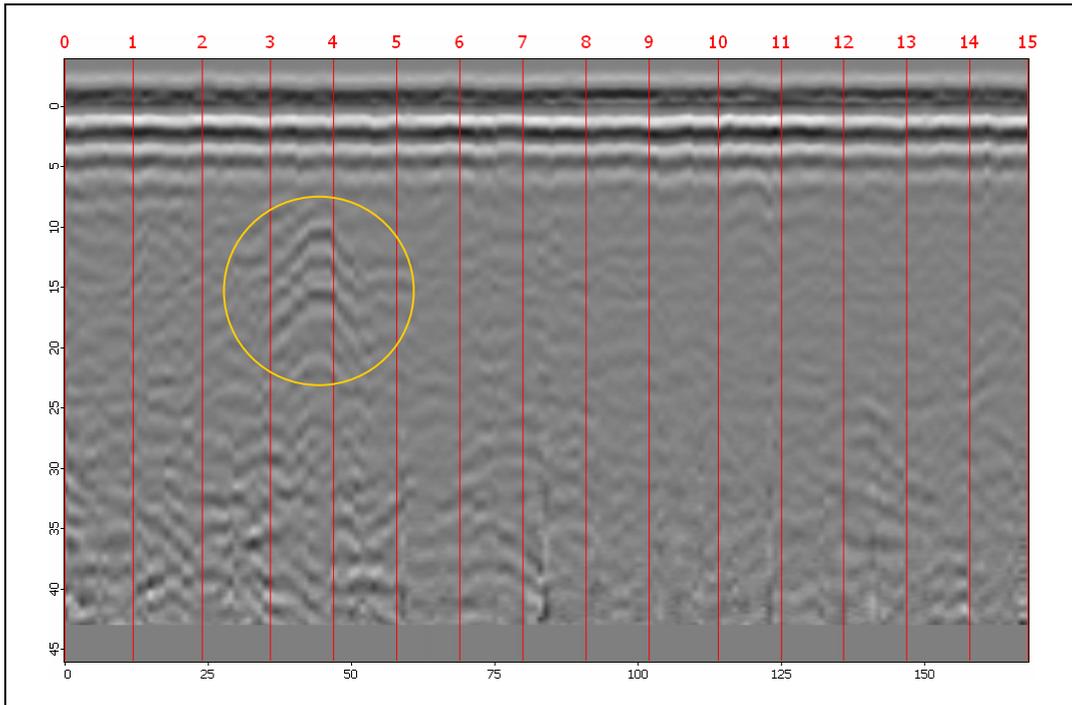


Figura 8-3-4: Mapa de color en tonos de gris del registro correspondiente a la huerta del Monasterio de El Paular tras la interpolación en el eje espacial (el blanco corresponde al valor mínimo, el negro al máximo). El eje de ordenadas expresa el tiempo doble de recorrido, en nanosegundos, y el eje de abscisas el número de traza. Las líneas verticales muestran la distancia desde el inicio del perfil, en metros. En amarillo se indica la señal a analizar.

En este registro interpolado las marcas de posición se encuentran equiespaciadas. Como resultado del procesado, el número de trazas se ha reducido a $PEX = 169$.

(2) Filtrado espacial pasa baja

Con objeto de reducir el efecto de la rugosidad de la superficie en el registro, se realiza un filtrado espacial pasa baja. Para ello se emplea una ventana de 3 trazas de longitud, valor que se elige como aquel que maximiza el suavizado del registro, minimizando la pérdida de resolución.

La descripción técnica del registro tras el filtrado espacial pasa baja se detalla en la Tabla 8-3-3:

Tabla 8-3-3: Características técnicas del registro correspondiente a la huerta del Monasterio de El Paular tras el filtrado espacial pasa baja.

Caracterización del perfil:

Número de trazas:	$PEX = 169$
Longitud:	$LX = 15,00m$
Espaciado entre trazas:	$EX = 0,089m$
Número de muestras por traza:	$PET = 512$
Tiempo de muestreo:	$LT = 50 \cdot 10^{-9} s$
Espaciado entre muestras:	$ET = 0,098 \cdot 10^{-9} s$

El registro resultante se muestra en la Figura 8-3-5:

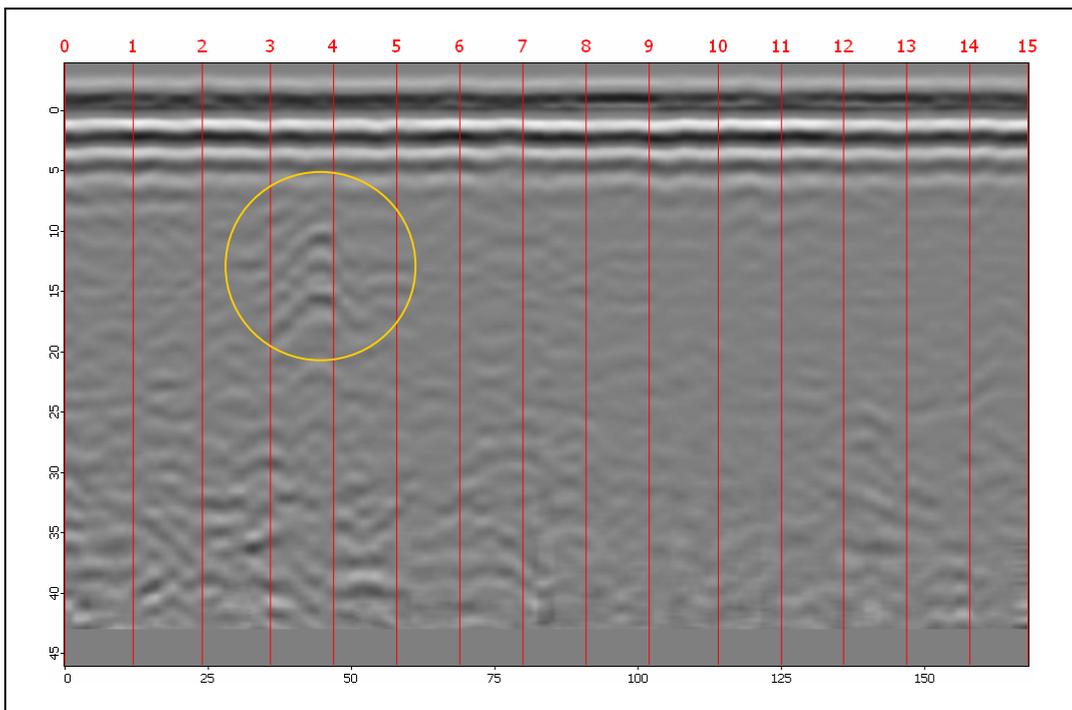


Figura 8-3-5: Mapa de color en tonos de gris del registro correspondiente a la huerta del Monasterio de El Paular tras el filtrado espacial pasa baja (el blanco corresponde al valor mínimo, el negro al máximo). El eje de ordenadas expresa el tiempo doble de recorrido, en nanosegundos, y el eje de abscisas el número de traza. Las líneas verticales muestran la distancia desde el inicio del perfil, en metros. En amarillo se indica la señal a analizar.

En este registro filtrado el efecto de la rugosidad de la superficie ha sido reducido.

(3) Filtrado temporal pasa banda

Con objeto de reducir el contenido frecuencial en el registro a una banda estrecha, en torno a la frecuencia mayoritaria, se realiza un filtrado temporal pasa banda. Como paso previo se realiza un análisis del espectro del registro, mostrado en la Figura 8–3-6:

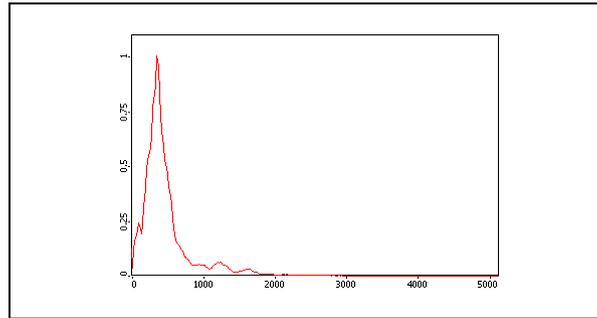


Figura 8–3-6: Espectro de potencia normalizado de la región del registro correspondiente a la huerta del Monasterio de El Paular que contiene la señal objeto de estudio, previo al filtrado temporal. El eje de abscisas expresa la frecuencia, en MHz.

Los rasgos característicos del espectro se exponen en la Tabla 8–3-4:

Tabla 8–3-4: Rasgos característicos del espectro del registro correspondiente a la huerta del Monasterio de El Paular.

Densidad espectral del espectro normalizado	0,50	0,75	1,00	0,75	0,50
Frecuencia (MHz)	208	278	362	403	487

El filtro se elige tomando como valores para los ceros las frecuencias correspondientes a los valores de densidad espectral de 0,50, y como valores para los unos las frecuencias correspondientes a los valores de densidad espectral del 0,75, como se muestra en la Figura 8-3-7:

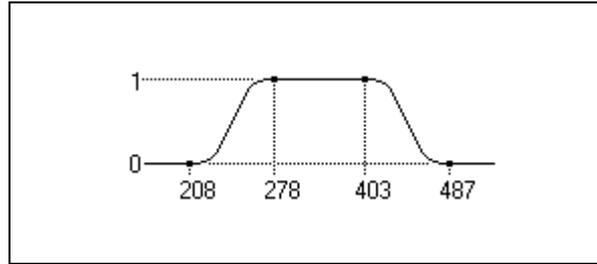


Figura 8-3-7: Respuesta en frecuencias del filtro temporal correspondiente a la huerta del Monasterio de El Paular. El eje de abscisas expresa la frecuencia, en MHz.

La descripción técnica del registro tras el filtrado temporal pasa banda se detalla en la Tabla 8-3-5:

Tabla 8-3-5: Características técnicas del registro correspondiente a la huerta del Monasterio de El Paular tras el filtrado temporal pasa baja.

Caracterización del perfil:

Número de trazas:	$PEX = 169$
Longitud:	$LX = 15,00m$
Espaciado entre trazas:	$EX = 0,089m$
Número de muestras por traza:	$PET = 512$
Tiempo de muestreo:	$LT = 50 \cdot 10^{-9} s$
Espaciado entre muestras:	$ET = 0,098 \cdot 10^{-9} s$

El registro resultante de la aplicación del filtro se muestra en la Figura 8-3-8:

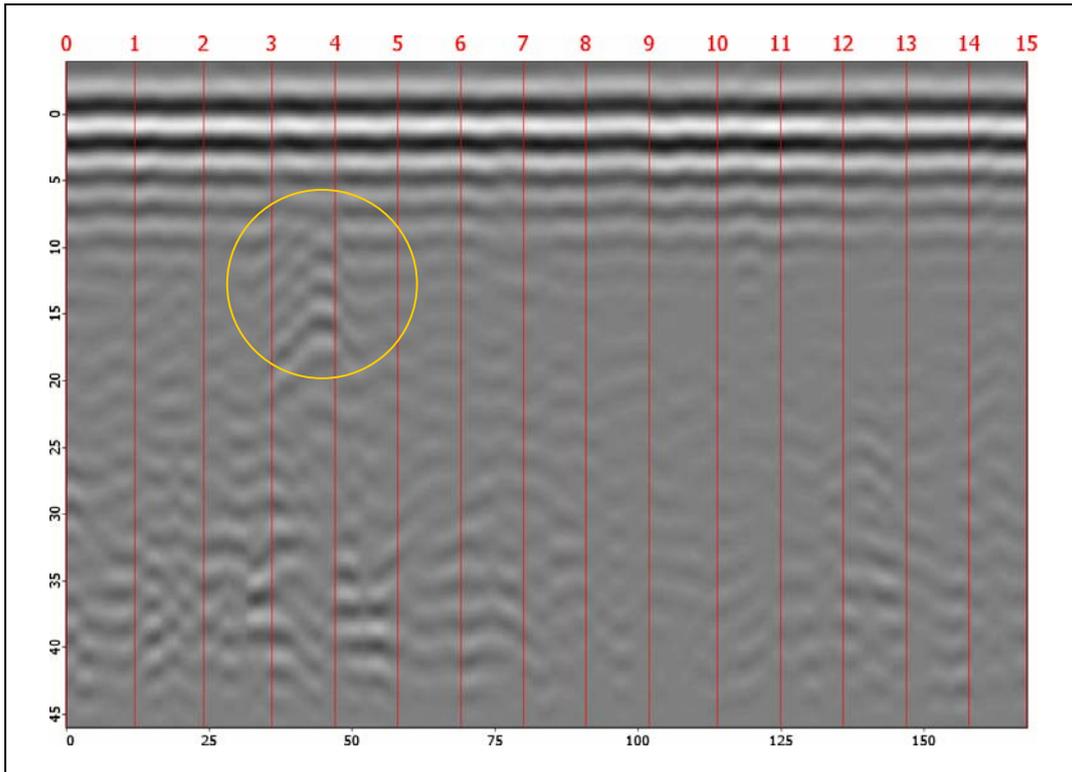


Figura 8-3-8: Mapa de color en tonos de gris del registro correspondiente a la huerta del Monasterio de El Paular tras el filtrado temporal pasa banda (el blanco corresponde al valor mínimo, el negro al máximo). El eje de ordenadas expresa el tiempo doble de recorrido, en nanosegundos, y el eje de abscisas el número de traza. Las líneas verticales muestran la distancia desde el inicio del perfil, en metros. En amarillo se indica la señal a analizar.

En este registro filtrado el contenido frecuencial se ha simplificado notablemente. El espectro de la región del registro que contiene la señal objeto del análisis se muestra en la Figura 8-3-9:

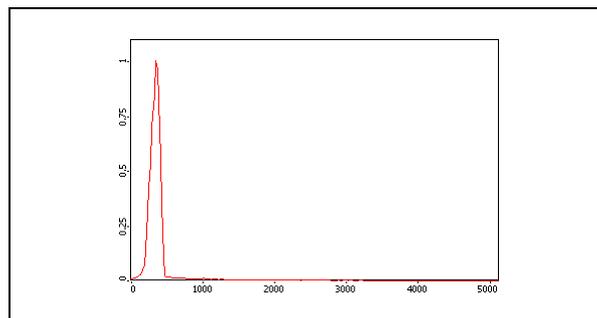


Figura 8-3-9: Espectro de potencia normalizado de la región del registro correspondiente a la huerta del Monasterio de El Paular que contiene la señal objeto de estudio, tras el filtrado temporal. El eje de abscisas expresa la frecuencia, en MHz.

Al comparar las figuras 8-3-5 y 8-3-8 se observa cómo en el nuevo registro filtrado las componentes frecuenciales fuera de la banda de interés han sido atenuadas, y aquellas que contienen la información de interés permanecen.

8.3.2.4. Resolución del Problema Inverso

El algoritmo para la resolución del Problema Inverso en dos dimensiones se aplica al registro anterior. Para ello se selecciona como valor de la pulsación de las ondas electromagnéticas el valor correspondiente al máximo de la densidad espectral expuesto en la Tabla 8-3-4, y para los parámetros electromagnéticos promedio los valores $\varepsilon_m = 8 \cdot \varepsilon_0$, $\mu_m = \mu_0$ y $\sigma_m = 10^{-2} S \cdot m^{-1}$ (compatibles con el ajuste de las hipérbolas de difracción en las figuras previas), que son los que producen una mejor convergencia de la señal.

El tiempo medio de cómputo para este registro es de 7,3872 s.⁴ La descripción de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA obtenida se detalla en la Tabla 8-3-6:

Tabla 8-3-6: Descripción de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA correspondiente a la huerta del Monasterio de El Paular.

<u>Caracterización del perfil:</u>	
Número de trazas:	$PEX = 169$
Longitud:	$LX = 15,00 m$
Espaciado entre trazas:	$EX = 0,089 m$
Número de muestras por traza:	$PED = 511$
Longitud de muestreo:	$LD = 2,65 m$
Espaciado entre muestras:	$ED = 0,005 m$

La DISTRIBUCIÓN MEDIDA resultante se muestra en la Figura 8-3-10, donde se aprecia cómo la señal ha convergido a elementos puntuales, asociados a la reflexión primaria y a las reflexiones múltiples entre la antena y la superficie.

⁴ Los tiempos referidos han sido determinados en la ejecución en la máquina descrita en la Introducción del Capítulo 7.

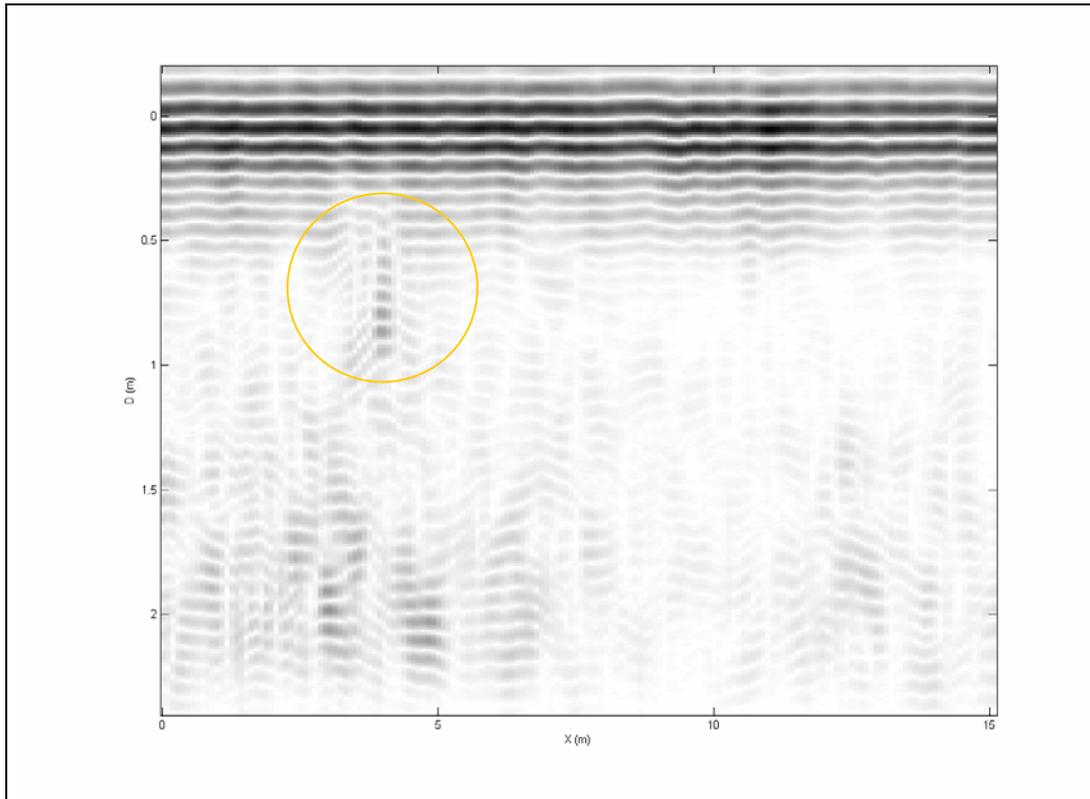


Figura 8-3-10: Mapa de color en tonos de gris de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA correspondiente a la huerta del Monasterio de El Paular (el blanco corresponde al valor mínimo, el negro al máximo). El eje de ordenadas expresa la coordenada D y el eje de abscisas la distancia al origen, ambas en metros. En amarillo se indica la señal analizada.

8.3.3. Aplicación en el castro de El Ceremeño (Herrería, Guadalajara)

8.3.3.1. Localización del emplazamiento de estudio

Los celtíberos fueron los pueblos prerromanos de stirpe celta que habitaron, en los siglos anteriores al cambio de era, la región de la Celtiberia cuyos límites se extendían desde el valle medio del Ebro hasta el río Duero, quedando incluido en ella el norte de la provincia de Guadalajara, ocupado en parte por el Señorío de Molina de Aragón, donde se ubica el yacimiento arqueológico de "El Ceremeño".

Este poblado fortificado o "castro" fue descubierto casualmente por vecinos de la localidad de Herrería (Guadalajara) durante los años 1980 y, a lo largo de varias campañas, se han realizado excavaciones arqueológicas en extensión, dirigidas por la Dra. M.Luisa Cerdeño Serrano (Departamento de Prehistoria de la Universidad Complutense de Madrid), que han ampliado notablemente nuestros conocimientos sobre la cultura celtibérica.

Su gran interés estriba en que ha conservado las estructuras defensivas y domésticas de dos momentos sucesivos de ocupación. El primer asentamiento se ha fechado en el siglo VI a. C. y fue destruido por un incendio sobre cuyas cenizas se volvieron a asentar sus habitantes, hasta el definitivo abandono del lugar presumiblemente en torno al siglo IV a. C.

El poblado es un pequeño recinto de unos 2000 m² ubicado sobre un cerro testigo en la vega del río Sauco, lo que le confiere una buena posición estratégica tanto desde el punto de vista tanto económico como defensivo, reforzado este último por una espectacular muralla de piedra que rodea su perímetro. En el interior se disponen las viviendas, rectangulares y adosadas entre sí, a lo largo de dos calles paralelas que atraviesan el espacio interior de este a oeste, siguiendo el modelo habitual de muchos poblados meseteños durante la Edad del Hierro.

Las viviendas hasta ahora descubiertas tienen un tamaño que oscila entre los 30 y los 50 m² y constan de dos o tres estancias interiores: el vestíbulo, la gran habitación central donde se situaba el hogar y la despensa al fondo donde se guardaban las provisiones. En ellas se han encontrado algunas vasijas de almacenamiento que contenían diferentes productos, como trigo, cebada, mijo y bellota, indicadores de los productos básicos de su alimentación.

Aparte de la interesante información obtenida sobre los aspectos urbanos y domésticos, también comenzamos a saber algo sobre las costumbres funerarias de los habitantes de El Ceremeño puesto que en 1997 fue descubierta la necrópolis, o lugar donde enterraban a sus muertos y en la actualidad está siendo objeto de estudio.

Otra de las características singulares del castro de El Ceremeño ha sido el buen estado de conservación general en que se encontraban sus estructuras de piedra que ha permitido acometer su consolidación y puesta en valor, tras ser declarado Bien de Interés Cultural, para que pueda ser visitado por el gran público como muestra importante de nuestro común Patrimonio Arqueológico. La explicación y comprensión de las ruinas visitables se completa con un pequeña Exposición/Centro de Visitantes instalado muy cerca del yacimiento, en los locales del Ayuntamiento de Herrería.

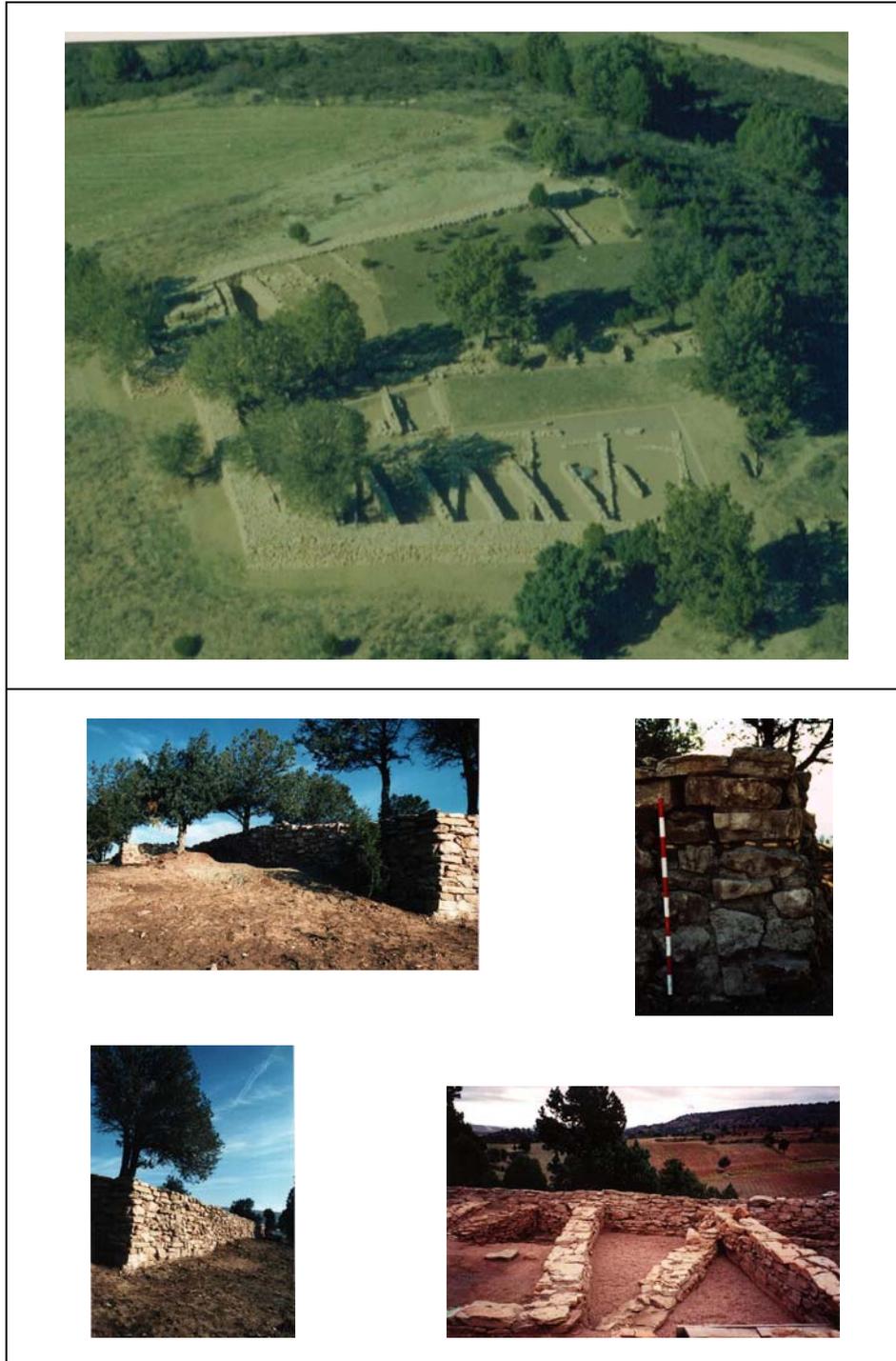


Figura 8-3-11: Vista aérea y detalles del castro de “El Ceremeño” (Herrería, Guadalajara)
(Panel superior, vista aérea cortesía de M.Luisa Cerdeño; panel inferior, vistas de detalle,
extraídas de las URL: <http://www.molina-aragon.com/historia/celtiberia/vista.htm> y
<http://www.molina-aragon.com/historia/ceremeno/ceremeno.htm>).

8.3.3.2. Perfil estudiado

La descripción técnica del registro bruto correspondiente al perfil objeto del estudio se detalla en la Tabla 8-3-7:

Tabla 8-3-7: Características técnicas del registro bruto correspondiente al castro de El Ceremeño.

<u>Caracterización del perfil:</u>	
Número de trazas:	$PEX = 430$
Longitud:	$LX = 26,00m$
Número de muestras por traza:	$PET = 512$
Tiempo de muestreo:	$LT = 50 \cdot 10^{-9} s$
Espaciado entre muestras:	$ET = 0,098 \cdot 10^{-9} s$
<u>Caracterización de la antena:</u>	
Pulsación:	$\omega = 2\pi \cdot 900 \cdot 10^6 s^{-1}$
<u>Preprocesado:</u>	
Ganancia:	$36 dB$, lineal.

El registro bruto se muestra en la Figura 8-3-12:

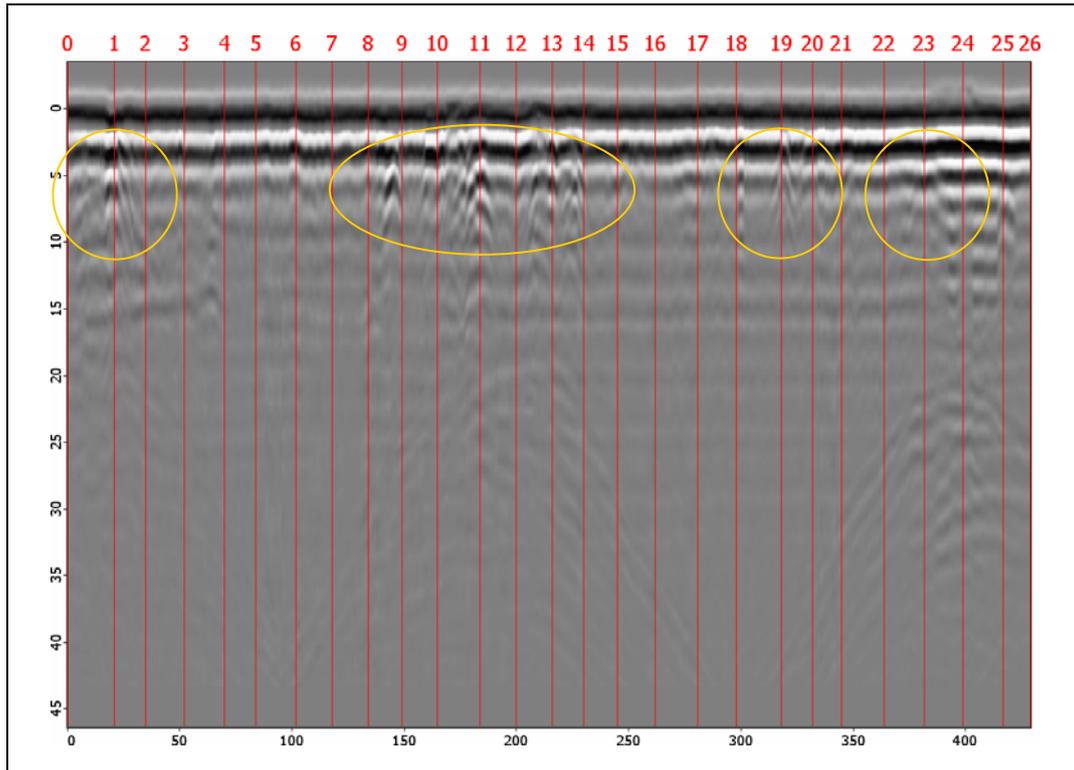


Figura 8–3-12: Mapa de color en tonos de gris del registro bruto correspondiente al castro de El Ceremeño (el blanco corresponde al valor mínimo, el negro al máximo). El eje de ordenadas expresa el tiempo doble de recorrido, en nanosegundos, y el eje de abscisas el número de traza. Las líneas verticales muestran la distancia desde el inicio del perfil, en metros. En amarillo se indican las señales a analizar.

Análogamente a lo que ocurría en el ejemplo expuesto en la Subsección anterior, el material presente en la subsuperficie es sedimentario, y presenta las características de homogeneidad que son requeridas para la aplicación de los algoritmos. En la Figura 8–3-12 puede apreciarse, entre otras, la presencia de varias señales y sus múltiples, originada por la difracción en los bordes de cimentaciones enterradas. Éstas serán las señales que se analizará en esta Subsección, siendo el objetivo del procesado la adecuación del registro a las limitaciones de diseño e implementación expuestas en las Secciones anteriores, para posteriormente aplicar sobre él el algoritmo para la resolución del Problema Inverso en dos dimensiones con objeto de lograr la convergencia de las señales analizadas a elementos puntuales.

La disposición de las cimentaciones en la región subsuperficial es análoga a la que se muestra en el panel superior y en la vista inferior derecha del panel inferior en la Figura 8-3-11, donde se observan cimentaciones a dos alturas (correspondientes a dos niveles de ocupación), cuyos arranques no son en todos los casos coincidentes (lo que origina el espaciado irregular y el aspecto complejo de las señales indicadas en la Figura 8–3-12). El perfil que se estudia en esta Subsección, se localiza en la Figura 8–3-13.



Figura 8–3-13: Proceso de adquisición de datos. El perfil mostrado en la Figura 8–3-12 es paralelo a la cinta métrica, por la derecha.

8.3.3.3. Procesado

El objetivo de las técnicas de procesado expuestas en la presente Subsección es la adecuación del registro a las limitaciones de diseño e implementación expuestas en las Secciones anteriores. Se realizan tres tratamientos: Remuestreo en el eje espacial, filtrado espacial pasa baja y filtrado temporal pasa banda.

(1) Interpolación en el eje espacial

En este registro las marcas de posición no se encuentran equiespaciadas. Con objeto de situarlas a las distancias correctas, se realiza una interpolación del mismo en el eje espacial.

La descripción técnica del registro tras la interpolación en el eje espacial se detalla en la Tabla 8–3-8:

Tabla 8-3-8: Características técnicas del registro correspondiente al castro de El Ceremeño tras la interpolación en el eje espacial.

Caracterización del perfil:

Número de trazas:	$PEX = 415$
Longitud:	$LX = 26,00m$
Espaciado entre trazas:	$EX = 0,063m$
Número de muestras por traza:	$PET = 512$
Tiempo de muestreo:	$LT = 50 \cdot 10^{-9} s$
Espaciado entre muestras:	$ET = 0,098 \cdot 10^{-9} s$

El registro resultante se muestra en la Figura 8-3-14:

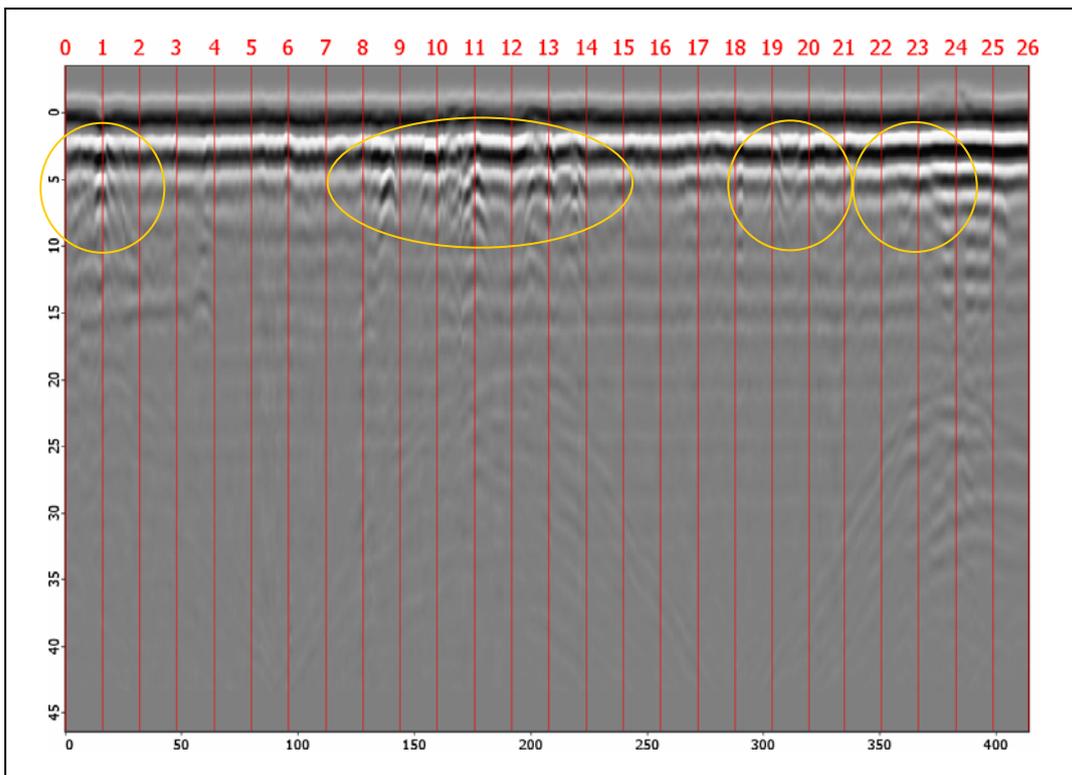


Figura 8-3-14: Mapa de color en tonos de gris del registro correspondiente al castro de El Ceremeño tras la interpolación en el eje espacial (el blanco corresponde al valor mínimo, el negro al máximo). El eje de ordenadas expresa el tiempo doble de recorrido, en nanosegundos, y el eje de abscisas el número de traza. Las líneas verticales muestran la distancia desde el inicio del perfil, en metros. En amarillo se indican las señales a analizar.

En este registro interpolado las marcas de posición se encuentran equiespaciadas. Como resultado del procesado, el número de trazas se ha reducido a $PEX = 415$.

(2) Filtrado espacial pasa baja

Con objeto de reducir el efecto de la rugosidad de la superficie en el registro, se realiza un filtrado espacial pasa baja. Para ello se emplea una ventana de 3 trazas de longitud, valor que se elige como aquel que maximiza el suavizado del registro, minimizando la pérdida de resolución.

La descripción técnica del registro tras el filtrado espacial pasa baja se detalla en la Tabla 8-3-9:

Tabla 8-3-9: Características técnicas del registro correspondiente al castro de El Ceremeño tras el filtrado espacial pasa baja.

<u>Caracterización del perfil:</u>	
Número de trazas:	$PEX = 415$
Longitud:	$LX = 26,00m$
Espaciado entre trazas:	$EX = 0,063m$
Número de muestras por traza:	$PET = 512$
Tiempo de muestreo:	$LT = 50 \cdot 10^{-9} s$
Espaciado entre muestras:	$ET = 0,098 \cdot 10^{-9} s$

El registro resultante se muestra en la Figura 8-3-15:

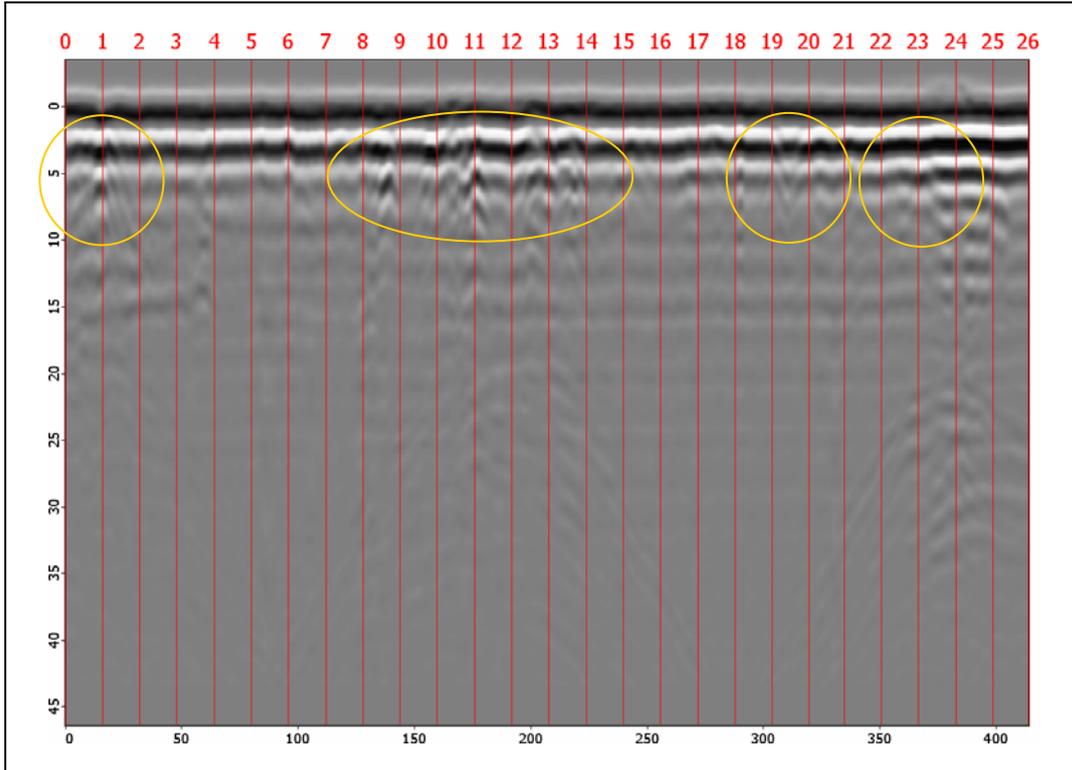


Figura 8-3-15: Mapa de color en tonos de gris del registro correspondiente al castro de El Ceremeño tras el filtrado espacial pasa baja (el blanco corresponde al valor mínimo, el negro al máximo). El eje de ordenadas expresa el tiempo doble de recorrido, en nanosegundos, y el eje de abscisas el número de traza. Las líneas verticales muestran la distancia desde el inicio del perfil, en metros. En amarillo se indican las señales a analizar.

En este registro filtrado el efecto de la rugosidad de la superficie ha sido reducido.

(3) Filtrado temporal pasa banda

Con objeto de reducir el contenido frecuencial en el registro a una banda estrecha, en torno a la frecuencia mayoritaria, se realiza un filtrado temporal pasa banda. Como paso previo se realiza un análisis del espectro del registro, mostrado en la Figura 8–3-16:

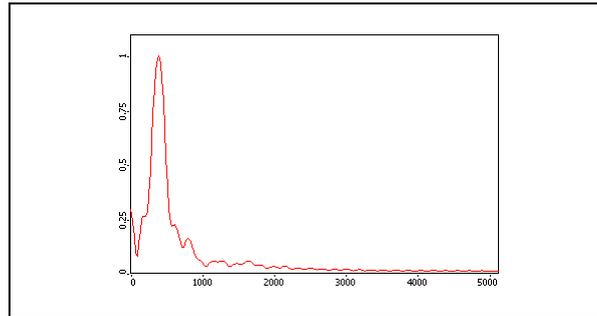


Figura 8–3-16: Espectro de potencia normalizado de la región del registro correspondiente al castro de El Ceremeño que contiene la señal objeto de estudio, previo al filtrado temporal. El eje de abscisas expresa la frecuencia, en MHz.

Los rasgos característicos del espectro se exponen en la Tabla 8–3-10:

Tabla 8–3-10: Rasgos característicos del espectro del registro correspondiente al castro de El Ceremeño.

Densidad espectral del espectro normalizado	0,50	0,75	1,00	0,75	0,50
Frecuencia (MHz)	208	278	362	403	487

El filtro se elige tomando como valores para los ceros las frecuencias correspondientes a los valores de densidad espectral de 0,50, y como valores para los unos las frecuencias correspondientes a los valores de densidad espectral del 0,75, como se muestra en la Figura 8-3-17:

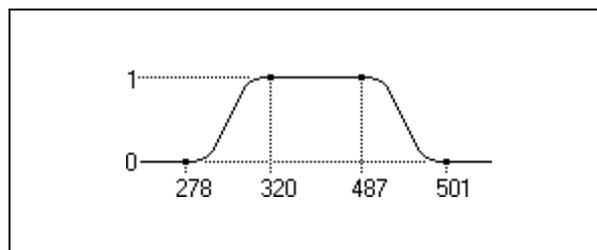


Figura 8-3-17: Respuesta en frecuencias del filtro temporal correspondiente al castro de El Ceremeño. El eje de abscisas expresa la frecuencia, en MHz.

La descripción técnica del registro tras el filtrado temporal pasa banda se detalla en la Tabla 8-3-11:

Tabla 8-3-11: Características técnicas del registro correspondiente al castro de El Ceremeño tras el filtrado temporal pasa baja.

Caracterización del perfil:

Número de trazas:	$PEX = 415$
Longitud:	$LX = 26,00m$
Espaciado entre trazas:	$EX = 0,063m$
Número de muestras por traza:	$PET = 512$
Tiempo de muestreo:	$LT = 50 \cdot 10^{-9} s$
Espaciado entre muestras:	$ET = 0,098 \cdot 10^{-9} s$

El registro resultante de la aplicación del filtro se muestra en la Figura 8-3-18:

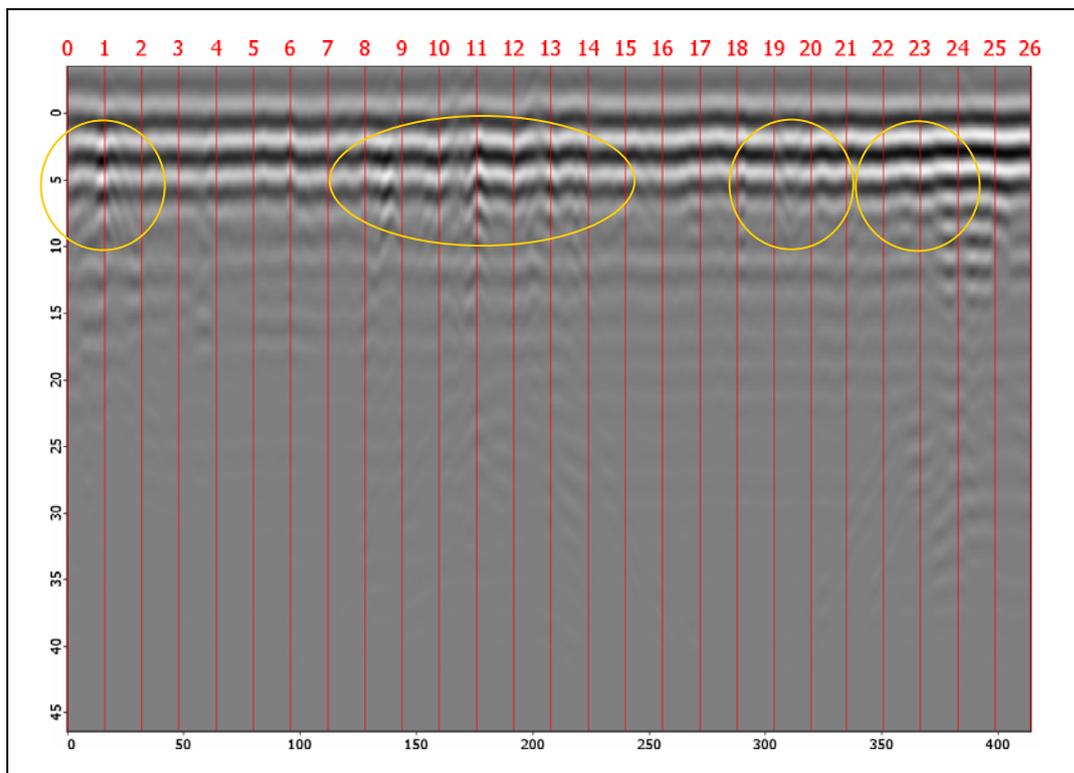


Figura 8-3-18: Mapa de color en tonos de gris del registro correspondiente al castro de El Ceremeño tras el filtrado temporal pasa banda (el blanco corresponde al valor mínimo, el negro al máximo). El eje de ordenadas expresa el tiempo doble de recorrido, en nanosegundos, y el eje de abscisas el número de traza. Las líneas verticales muestran la distancia desde el inicio del perfil, en metros. En amarillo se indican las señales a analizar.

En este registro filtrado el contenido frecuencial se ha simplificado notablemente. El espectro de la región del registro que contiene la señal objeto del análisis se muestra en la Figura 8-3-19:

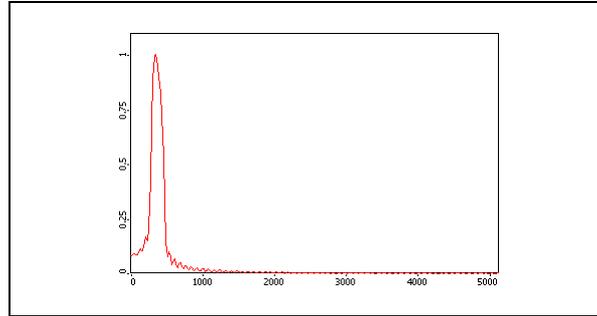


Figura 8-3-19: Espectro de potencia normalizado de la región del registro correspondiente al castro de El Ceremeño que contiene la señal objeto de estudio, tras el filtrado temporal. El eje de abscisas expresa la frecuencia, en MHz.

Al comparar las figuras 8-3-14 y 8-3-17 se observa cómo en el nuevo registro filtrado las componentes frecuenciales fuera de la banda de interés han sido atenuadas, y aquellas que contienen la información de interés permanecen.

8.3.3.4. Resolución del Problema Inverso

El algoritmo para la resolución del Problema Inverso en dos dimensiones se aplica al registro anterior. Para ello se selecciona como valor de la pulsación de las ondas electromagnéticas el valor correspondiente al máximo de la densidad espectral expuesto en la Tabla 8-3-10, y para los parámetros electromagnéticos promedio los valores $\epsilon_m = 8 \cdot \epsilon_0$, $\mu_m = \mu_0$ y $\sigma_m = 10^{-2} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ (compatibles con observaciones de una campaña anterior de calicateo eléctrico en corriente continua y con el ajuste de las hipérbolas de difracción en las figuras previas), que son los que producen una mejor convergencia de la señal.

El tiempo medio de cómputo para este registro es de 24,3080 s.⁵ La descripción de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA obtenida se detalla en la Tabla 8-3-12:

⁵ Los tiempos referidos han sido determinados en la ejecución en la máquina descrita en la Introducción del Capítulo 7.

Tabla 8-3-12: Descripción de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA correspondiente al castro de El Ceremeño.

<u>Caracterización del perfil:</u>	
Número de trazas:	$PEX = 415$
Longitud:	$LX = 26,00m$
Espaciado entre trazas:	$EX = 0,063m$
Número de muestras por traza:	$PED = 502$
Longitud de muestreo:	$LD = 2,60m$
Espaciado entre muestras:	$ED = 0,005m$

La DISTRIBUCIÓN MEDIDA resultante se muestra en la Figura 8-3-20, donde se aprecia cómo las señales marcadas en amarillo han convergido a elementos puntuales, asociados a las reflexiones primaria y a las múltiples entre la antena y la superficie. Debido a la poca profundidad de las estructuras, éstas se encuentran solapadas con las reflexiones múltiples entre la antena y la superficie.

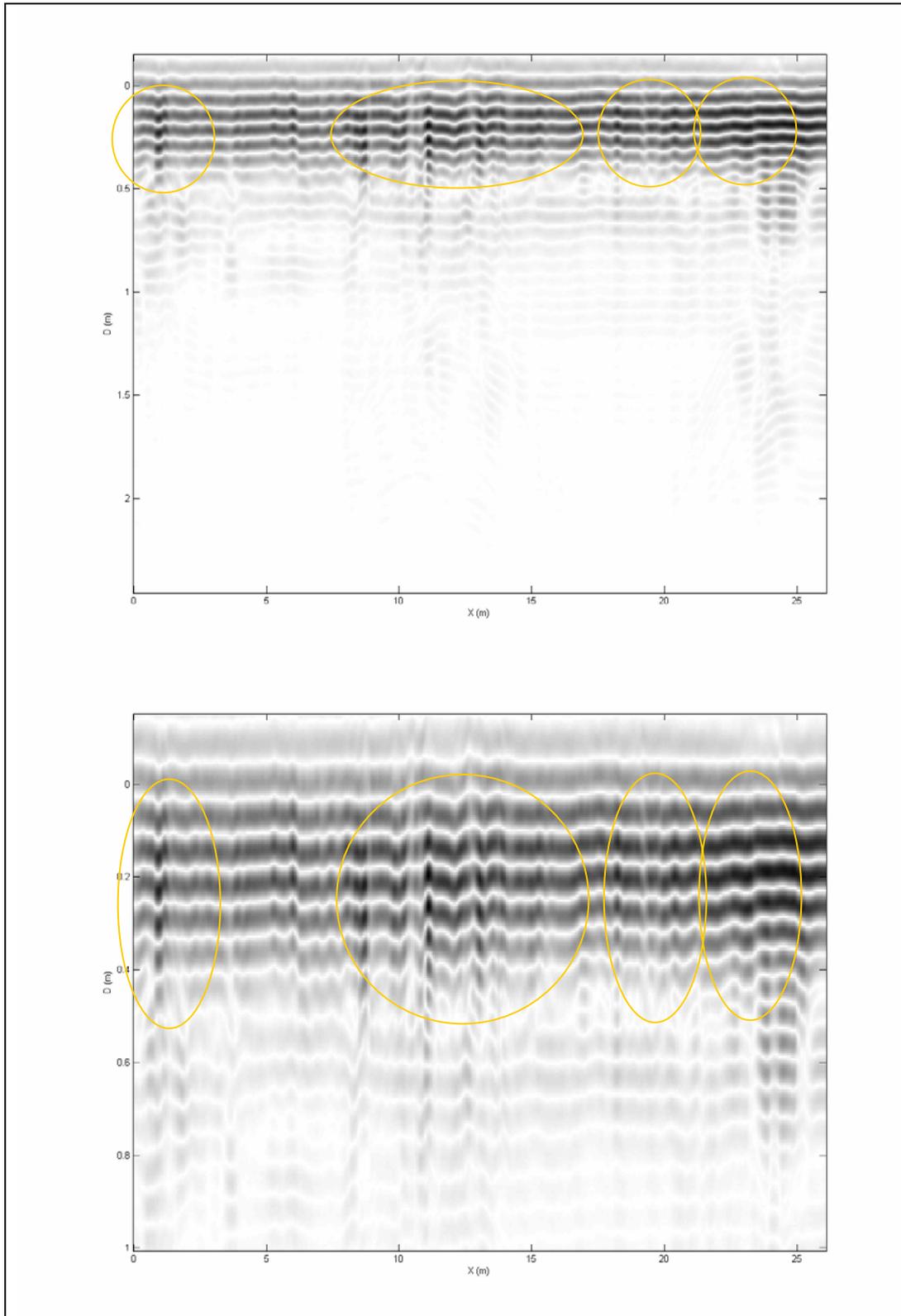


Figura 8-3-20: Mapa de color en tonos de gris de la DISTRIBUCIÓN MEDIDA correspondiente al castro de El Ceremeño (el blanco corresponde al valor mínimo, el negro al máximo) y detalle. El eje de ordenadas expresa la coordenada D y el eje de abscisas la distancia al origen, ambas en metros. En amarillo se indican las señales analizadas.

8.3.4. Caracterización de los resultados

En esta Sección se han presentado dos casos, de diferentes características: un perfil con una señal correspondiente a un muro y otro perfil con múltiples señales correspondientes a distintas cimentaciones a diferentes profundidades. En el primer caso, en contraposición al segundo, la profundidad del muro es suficientemente grande como para que la señal llegue a un tiempo tal que no se superponga al paquete de múltiples entre la antena y la superficie, por lo que es más fácilmente identificable.

A la vista de los resultados anteriormente expuestos, cabe concluir que el algoritmo para la resolución del Problema Inverso produce, una vez adecuados a las limitaciones de diseño e implementación del mismo, los resultados esperables en su aplicación sobre datos de campo: Hace converger las hipérbolas de difracción a elementos puntuales de tal forma que, en la DISTRIBUCIÓN MEDIDA final, las hipérbolas que quedan no están asociadas a difracciones en elementos subsuperficiales con la velocidad de propagación empleada en el algoritmo.

Los resultados obtenidos podrán ser mejorados a medida que aumente la correspondencia entre las características de los algoritmos y su implementación y las de los radargramas. Así mismo, la eliminación de las reflexiones múltiples permitiría limpiar los registros y obtener resultados más claros.

Las posiciones obtenidas de los reflectores son utilizables en la fase de interpretación, lo cual se ha confirmado con las excavaciones realizadas por los equipos de arqueólogos.

Capítulo 9

Discusión general y conclusiones

Introducción

En este noveno Capítulo se recopilan y discuten los principales resultados obtenidos en los capítulos precedentes. En él se incluye la discusión general de las cuatro vertientes fundamentales que se tratan en esta Tesis Doctoral: diseño, implementación, resultados numéricos y tratamiento de datos de campo; la exposición de las conclusiones finales y las futuras líneas de investigación.

El presente Capítulo se encuentra dividido en seis Secciones dedicadas, respectivamente:

- Al análisis de las características de diseño de los algoritmos, debidas a las sucesivas aproximaciones y simplificaciones realizadas en su desarrollo.
- Al análisis de las características debidas a su implementación.
- Al análisis de las características de carácter numérico, detectadas en la aplicación de los algoritmos a datos sintéticos.
- A las características en el procesado de los registros.
- A la exposición de las conclusiones finales.
- A las líneas de investigación abiertas y los futuros trabajos a realizar.

9.1. Características de diseño

Las características de diseño son debidas a las sucesivas aproximaciones y simplificaciones realizadas en el desarrollo de los algoritmos, recogidas en la §3.3.1 y aquí reexpuestas:

1. Los medios que constituyen la región subsuperficial son lineales, homogéneos e isótropos.
2. Los reflectores están constituidos por elementos difractors puntuales.
3. La superficie está definida por un plano horizontal.
4. El emisor y el receptor son coincidentes.
5. Las derivadas parciales respecto a las coordenadas relativas receptor-emisor son despreciables frente al resto.
6. Los parámetros electromagnéticos de los medios sólo varían con la coordenada de profundidad.
7. La permeabilidad magnética μ se asume igual a la permeabilidad magnética del vacío, $\mu = \mu_0$.
8. La permitividad eléctrica ε y la conductividad eléctrica σ se aproximan por unos valores promedio, ε_m y σ_m respectivamente, y se considera un valor característico de la pulsación de las ondas electromagnéticas, ω , de tal forma que se verifique (3.2.10), y la velocidad de propagación promedio resultante c_m sea tal que verifique $(c_m/c)^2 \approx 1$ en promedio sobre la SECCIÓN (esto es, la velocidad cuadrática media).

En la primera Subsección se analizará cada una de estas aproximaciones individualmente. Como podrá apreciarse, las aproximaciones que suponen restricciones importantes pueden agruparse en torno a diferentes efectos bien diferenciados, que serán tratados con mayor detalle en las Subsecciones subsiguientes.

9.1.1. Análisis individual de las aproximaciones

En el análisis individual de cada una de estas aproximaciones cabe señalarse:

- Las aproximaciones 1, 2, 7 y 8 son aproximaciones básicas de diseño, mientras que la aproximación 5 es una aproximación numérica. Ninguna de ellas afecta negativamente a los resultados posteriores, pese a lo cual habrían de ser objeto de un estudio más detallado.

En algunos casos poco frecuentes, tal vez sí sea necesario considerar expresamente la falta de linealidad, homogeneidad o isotropía de los medios; o bien la no correspondencia de la permeabilidad magnética con la del vacío. En ellos sería necesario emplear modelos apropiados para los parámetros electromagnéticos de los medios (Cf. §1.3).

La aproximación de que los reflectores están constituidos por elementos difractores puntuales conlleva el que la interferencia de las hipérbolas de difracción únicamente coincida con la reflexión en el caso en que los reflectores sean planos horizontales.

- La aproximación 3 no supone una restricción importante pues, tal como se mencionó en las §§3.2.2.1 y 8.2.1, siempre será posible efectuar un filtrado espacial o una corrección estática por la topografía para tenerlo en consideración.
- La aproximación 4 sí constituye una restricción importante. Tal como se mencionó en la §3.2.2.1, obliga a trabajar en modalidad monoestática, o bien a restringirse a aquellos estudios en que la profundidad de exploración es mucho mayor que la distancia relativa receptor-emisor, o en los casos en que se efectúe un stacking previo al tratamiento de los datos de campo.

Podría eliminarse iniciando el desarrollo de los algoritmos con el expuesto en la §3.B, realizándose un trazado de rayos general en la determinación de las ondas reflejadas múltiples.

- La aproximación 6 no supone una restricción importante pues, tal como se expone en la §3.3.1, al considerarse en el desarrollo de los algoritmos la existencia simultánea de un único emisor y un único receptor, ambos coincidentes, únicamente tendrá sentido considerar modelos constituidos por estratificaciones horizontales que incluyan difractores puntuales. No obstante, en el caso en que la aproximación 4 fuera eliminada, la argumentación expuesta en la §3.3.1 perdería su validez, y esta sexta aproximación debería ser eliminada.

En este caso sería preciso redefinir la tercera transformación expuesta en la §3.2.2.3, modificándose el cambio de variables (3.2.18) de tal forma que se consideraran los posibles cambios laterales en los parámetros electromagnéticos. Así mismo, en la determinación de las ondas reflejadas múltiples (Cf. §6.B) sería necesario realizar un trazado de rayos general.

- La segunda parte de la aproximación 8 (referida a la pulsación de las ondas electromagnéticas) carece de sentido físico pues, tal como se expone en las §§2.3.2.6 y 2.3.4.1, el emisor no es una fuente monocromática, sino que la radiación se emite en un cierto intervalo de frecuencias.

Los resultados podrían mejorarse expresando la señal emitida como superposición de frecuencias discretas, efectuando la computación para cada una de ellas y superponiendo los registros así obtenidos.

9.1.2. Emisor y receptor coincidentes

La cuarta aproximación conlleva la restricción de considerar únicamente la modalidad monoestática, o bien a restringirse a aquellos estudios en que la profundidad de exploración es mucho mayor que la distancia relativa receptor–emisor, o a efectuar un stacking previo al tratamiento de los datos de campo.

Como se ha mencionado anteriormente, esta aproximación podría eliminarse iniciando el desarrollo de los algoritmos con el desarrollo más general expuesto en la §3.B, continuándose con las transformaciones expuestas en la §3.2.2, con la modificación propuesta en la siguiente Subsección. Así mismo, en la determinación de las ondas reflejadas primarias y múltiples sería preciso realizar un trazado de rayos general, considerando diferentes ángulos de emisión, determinándose los ángulos de emergencia de cada reflector en función del ángulo de incidencia y determinándose la reflectividad aparente para cada onda viajera en función de dichos ángulos (Cf. §1.2.2).

Puede apreciarse que, mientras que en el desarrollo expuesto en la §3.2.3 la transformada de Fourier de la SECCIÓN MEDIDA tiene tres grados de libertad, en el desarrollo más general expuesto en la §3.B ésta tiene cinco grados de libertad.¹ Este incremento en el número de variables, sumado a la necesidad de considerar emisiones en diversos ángulos y la necesidad de determinar los ángulos de incidencia y emergencia de cada onda en cada reflector, supondría un notable incremento de la complejidad en el desarrollo de los algoritmos, y de los propios algoritmos.

9.1.3. Modelos constituidos por estratificaciones horizontales que incluyan difractores puntuales

Esta restricción tiene su origen en la aproximación 4, siendo posible considerar modelos que contengan reflectores planos inclinados o curvados en el caso en que esta aproximación sea eliminada, tal como se expone en la §3.3.1. Consecuentemente, sería necesario considerar

¹ El número de grados de libertad puede reducirse en el caso de algunas modalidades de operación, por sus características geométricas. Así, por ejemplo, en la modalidad CMP (Cf. §2.5.2) la posición del centro del dispositivo es constante, y en la modalidad en que una antena permanece fija mientras la otra se separa de ella a lo largo de una línea recta el centro del dispositivo se encuentra situado en el punto medio entre ambas.

posibles cambios laterales en los parámetros electromagnéticos, lo que entraría en contradicción con la aproximación 6.

En estas condiciones sería preciso redefinir la tercera transformación expuesta en la §3.2.2.3, modificándose el cambio de variables (3.2.18) de tal forma que se consideraran los posibles cambios laterales en los parámetros electromagnéticos, tomando la forma:

$$\left. \begin{array}{l} Z \\ t \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d \equiv \int_L \frac{c_m}{c} dl \\ D \equiv \frac{c_m \cdot t}{2} + d = \frac{c_m \cdot t}{2} + \int_L \frac{c_m}{c} dl \end{array} \right. \quad (9.1.1)$$

Donde la integral de línea en la definición de la nueva variable d se realiza a lo largo del camino L recorrido por las ondas electromagnéticas, $c = c(\mathbf{r})$ representa la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el medio, dependiente de la posición \mathbf{r} , y c_m representa una velocidad de propagación promedio, que habrá de ser definida de forma conveniente.

La integral habría de evaluarse en la fase de determinación de las ondas reflejadas primarias y múltiples (Cf. §6.B), en la cual se realizaría un trazado de rayos general, tal como se mencionó en el punto anterior.

9.1.4. Antenas

En lo que refiere a las antenas emisora y receptora, las aproximaciones 4 y 6, y la segunda parte de la aproximación 8, implican que no sea considerado ni el contenido frecuencial de la señal ni su diagrama de radiación.

No se considera el contenido frecuencial de la señal pues en la aproximación 6 se considera el emisor como una fuente de radiación monocromática. Como se ha mencionado anteriormente, esta aproximación carece de sentido físico, pues la radiación se emite en un cierto intervalo de frecuencias.

Así mismo, la consideración de que la propagación de las ondas electromagnéticas se produce únicamente en la dirección de la vertical, debida a las aproximaciones 4 y 7, es equivalente a considerar que el diagrama de radiación de las antenas toma el valor unidad en dicha dirección y es idénticamente nulo en el resto, lo cual no se corresponde con la realidad (Cf. §2.3.2.3).

El contenido frecuencial de la radiación podría tenerse en cuenta considerando que la señal está constituida por la superposición de distintas componentes monocromáticas. El registro final se obtendría mediante la superposición de los registros obtenidos aplicando los algoritmos a cada una de estas componentes, asignando un peso a cada uno en función de la contribución de la componente correspondiente al espectro de frecuencia de la señal.

Otro posible tratamiento sería la convolución (en el Problema Directo) o deconvolución (en el Problema Inverso) del registro por la forma de la onda. Éste habría de realizarse de forma cuidadosa pues, debido a la dispersión de frecuencias y a la diferente atenuación de las ondas en función de su frecuencia, la forma del pulso cambia conforme se propaga en el interior de la subsuperficie, en función de los materiales por los que es transmitido. Así pues, sería preciso

realizar la convolución o deconvolución de cada señal presente en los registros por la forma de la onda correspondiente, quedando descartada la operación automática.

Este último tratamiento se ejemplifica en la Figura 9–1-1:

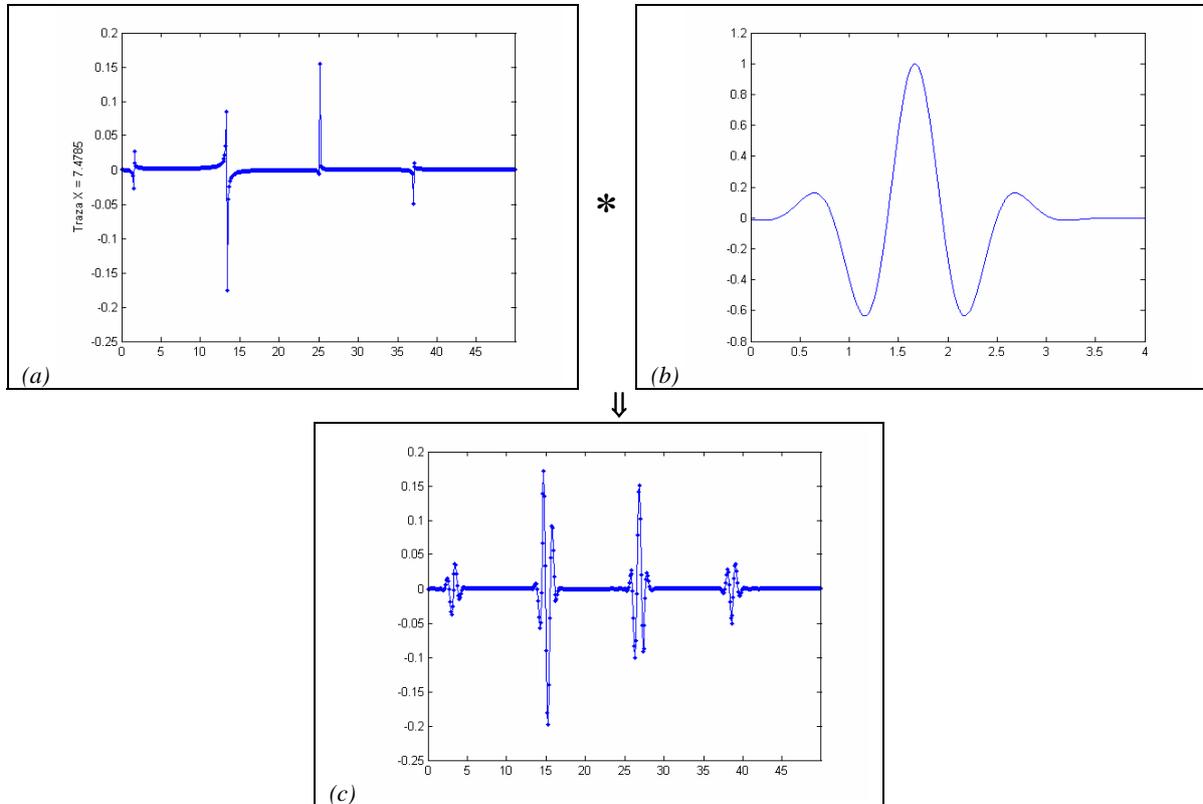


Figura 9–1-1: Convolución de la SECCIÓN MEDIDA correspondiente al modelo bidimensional constituido por dos capas plano-paralelas sobre un semiespacio infinito, y la forma de la onda electromagnética radiada.

(a) Trazo representativa de la SECCIÓN MEDIDA (Cf. Figura 7-1-8 (a)).

(b) Forma de la onda electromagnética radiada (Carcione, 1998, expresión analítica (13) con frecuencia central $f_c = 900 \text{ MHz}$).

(c) Trazo resultado de la convolución de (a) y (b).

La relación entre figuras es (a) * (b) = (c).

En todos los casos en el eje de abscisas se representa en tiempo doble de recorrido (ns).

Así mismo, el diagrama de radiación de las antenas habría de tenerse en cuenta en el trazado de rayos general que se efectuaría en la determinación de las ondas reflejadas primarias y múltiples, multiplicándose la reflectividad aparente obtenida para cada onda viajera por los valores del diagrama de radiación de las antenas emisora y receptora, evaluados ambos en las direcciones de emisión y recepción.

9.2. Características en la implementación

Una de las características positivas de la programación en MATLAB es la posibilidad de construir programas ejecutables, que puedan ser usados en máquinas que no tengan instalado este lenguaje.

Las restricciones impuestas por la implementación de los algoritmos, recogidas en parte en la §8.1, son aquí reexpuestas:

- En la resolución del Problema Directo, las SECCIONES DE ÍNDICES deben estar definidas en **puntos igualmente espaciados en cada una de las direcciones horizontales y en la vertical** (Cf. la definición de las coordenadas en la §6.1.2).
- En la resolución del Problema Inverso las SECCIONES MEDIDAS deben contener **trazas y muestras equiespaciadas** (Cf. la definición de las coordenadas en la §6.1.2).
- Los algoritmos para la resolución del Problema Inverso no implementan la eliminación de **ondas múltiples** (Cf. §6.B.2).

Estas restricciones pueden agruparse en torno a dos efectos bien diferenciados, que serán tratados en las siguientes Subsecciones.

9.2.1. Definición de las SECCIONES

Los algoritmos implementados suponen que las SECCIONES DE ÍNDICES se encuentran definidas en puntos igualmente espaciados en cada una de las direcciones horizontales y en la vertical, y las SECCIONES MEDIDAS contienen trazas y muestras equiespaciadas.

En lo que refiere a las SECCIONES DE ÍNDICES ésta no supone restricción alguna, pues ésta es la forma natural de definir las.

En lo que refiere a las SECCIONES MEDIDAS, el muestreo temporal presenta esta característica de forma inherente, dependiendo el muestreo espacial de la velocidad de arrastre de la antena sobre la superficie, que habrá de ser constante para conseguir un espaciado uniforme.

9.2.2. Eliminación de ondas múltiples en el Problema Inverso

Como ha sido mencionado anteriormente, las ondas múltiples no son eliminadas en la resolución del Problema Inverso debido a la dificultad que este tipo de procesado, por sí sólo, conlleva.

La implementación de la eliminación de ondas múltiples en el Problema Inverso pasa por la elección de un modelo apropiado y una estimación ajustada de los parámetros que lo definen. Para ello, podrían ser empleadas las técnicas de procesado de la señal clutter que se refieren en la §8.2.6.

9.3. Características de carácter numérico

Estas características han sido detectadas en la aplicación de los algoritmos a datos sintéticos, recogidas en la §7.5, y son aquí reexpuestas.

Las características generales correspondientes a la resolución del Problema Directo son:

- Los radargramas sintetizados mediante este algoritmo presentan las características geométricas esperables: Las señales correspondientes a difractores puntuales son hipérbolas y las correspondientes a reflectores plano-paralelos son planos horizontales.
- En todos los casos las señales correspondientes a las múltiples son observadas. Así mismo, en el caso tridimensional, en los perfiles que no pasan por la vertical de los difractores puntuales, próximos a ellos o a los bordes de los reflectores, aparecen señales correspondientes a los efectos laterales causados por éstos.
- Las posiciones de los vértices de las hipérbolas y los planos no se encuentran nítidamente definidas, sino que las señales son no nulas en algunos puntos previos y posteriores al máximo. Así mismo, las amplitudes y fases de estas señales difieren de las que se obtienen en la resolución analítica.
- Aun teniendo en cuenta los aspectos arriba señalados, las hipérbolas y los planos se encuentran localizados en la posición horizontal y tiempo doble de recorrido que se obtiene en la resolución analítica del Problema Directo, dentro del margen de error asumible por la naturaleza discreta de la SECCIÓN MEDIDA.

Las características generales correspondientes a la resolución del Problema Inverso son:

- La DISTRIBUCIÓN MEDIDA y la DISTRIBUCIÓN ESPERADA presentan las características geométricas esperables: El resultado de aplicar el algoritmo a un conjunto de hipérbolas y planos horizontales es un conjunto de hipérbolas y planos horizontales.
- Las posiciones de los objetos no se encuentran nítidamente definidas, sino que en los objetos puntuales quedan unas ramas espurias que no convergen al punto, y las DISTRIBUCIONES son no nulas en algunos puntos previos y posteriores a los máximos de los planos.
- Así mismo, las amplitudes de DISTRIBUCIÓN MEDIDA y la DISTRIBUCIÓN ESPERADA difieren de las correspondientes a la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD.
- Aun teniendo en cuenta los aspectos arriba señalados, los objetos puntuales y los planos se encuentran localizados en la posición horizontal y vertical que se observa en la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD, dentro del margen de error asumible por su naturaleza discreta.

Tal como se mencionó en la §7.5, las características obtenidas son inherentes a la metodología empleada y, en el caso de la resolución del Problema Inverso, al propio proceso de inversión. Estas características se encuentran en consonancia con los resultados expuestos en la §3.3.1 del Capítulo 3, dedicado al diseño de los algoritmos, y en los Capítulos 4 y 5, dedicados al formalismo de la transformada de Fourier y las metodologías de interpolación en la misma.

Las restricciones pueden agruparse en torno a dos efectos bien diferenciados, que serán tratados en las siguientes Subsecciones. La presente Sección finaliza con una última Subsección dedicada a otras consideraciones de carácter numérico.

9.3.1. Resolución espacial de las señales

La falta de nitidez en la posición de las señales está causada a que éstas deberían ser asignadas a muestras con un tiempo doble de recorrido que no se encuentran presentes en la SECCIÓN MEDIDA (Cf. §4.5).

Este efecto es inevitable, dada la naturaleza discreta de la SECCIÓN MEDIDA, y únicamente puede ser minimizado incrementando el número de muestras y decrementando el espaciado en los ejes de coordenadas D , en la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD, y de tiempos dobles de recorrido, en la SECCIÓN MEDIDA. Esto supondría un notable incremento del tamaño de las matrices que definen la DISTRIBUCIÓN DE REFLECTIVIDAD y SECCIÓN MEDIDA (Cf. §6.1.3), lo cual requeriría una mayor potencia de cálculo y supondría un notable incremento del tiempo de cálculo.

Así mismo, el efecto anteriormente referido se ve incrementado por la metodología empleada para la interpolación en el espectro filtrado (Cf. §§5.2 y 5.3). Esto podría evitarse empleando otro tipo de funciones interpoladoras distintas de los splines cúbicos propuestos en la presente Tesis Doctoral (Cf. §5.3), o empleando otro tipo de metodologías de cálculo de transformadas de Fourier.

9.3.2. Amplitud y fase de las señales

El efecto expuesto en el apartado anterior redunda en la alteración de la amplitud y fase de los máximos, pues la energía asociada a éstos se distribuye en un intervalo amplio.

9.3.3. Otras consideraciones

Otras consideraciones de carácter numérico, referidas a la aplicación de los algoritmos correspondientes al Problema Directo a modelos sintéticos, son expuestas a continuación.

9.3.3.1. Reflexiones múltiples entre la antena y la superficie en la resolución del Problema Directo en modelos sintéticos

Tal como ha sido anteriormente mencionado, con objeto de simplificar las figuras y sin pérdida de generalidad, en la aplicación de los algoritmos correspondientes al Problema Directo a modelos sintéticos no han sido tenidas en cuenta las reflexiones múltiples entre la antena y la superficie.

Estas reflexiones podrían ser obtenidas mediante la introducción en la posición $Z = 0$ de un reflector ficticio asociado a la antena, con un valor del coeficiente de transmisión descendente $t_a = 1$ y unos valores del coeficiente de reflexión r y coeficiente de transmisión ascendente t_a apropiados.

9.3.3.2. Frecuencia empleada en la resolución del Problema Directo en modelos sintéticos

Tal como ha sido anteriormente mencionado, en la aplicación de los algoritmos correspondientes al Problema Directo a modelos sintéticos ha sido empleada como referencia en todos los casos una única frecuencia.

Los resultados obtenidos con otras frecuencias no difieren significativamente de los mostrados, siendo éste un aspecto presente en la literatura (Cf. §7.5).

9.4. Procesado de los registros

En el caso en que los registros no se adecuen a las restricciones de diseño e implementación expuestas en la Sección anterior, debe realizarse una fase de procesado de los mismos, previa a la aplicación de los algoritmos.

Es preciso realizar un procesado muy cuidadoso de los registros, pues un tratamiento inadecuado puede conllevar una inevitable pérdida de información, quedando los registros desvirtuados.

9.5. Conclusiones finales

En esta Tesis Doctoral se diseña una metodología para el modelado de registros de geo-radar eficiente en términos de potencia y tiempo de cálculo. Ésta metodología es completa, en el sentido en que incluye tanto el efecto de la difracción como la presencia de reflexiones múltiples, así como efectos laterales en problemas tridimensionales.

Para el desarrollo de estos algoritmos ha sido empleada una novedosa metodología híbrida del filtrado de Fourier y el trazado de rayos, implementándose algoritmos para la resolución numérica del Problema Directo y el Problema Inverso en dos y tres dimensiones, proponiéndose una metodología para el adecuado tratamiento de los datos de campo. El filtrado de Fourier es una metodología basada en la resolución de la Ecuación de Ondas en el dominio frecuencial, por lo que la difracción es tratada en forma natural. Las reflexiones múltiples son obtenidas en la resolución del Problema Directo mediante la introducción, previa a la resolución de la Ecuación de Ondas, de una colección de reflectores ficticios asociados a cada reflexión múltiple, que son determinados mediante un procedimiento análogo al trazado de rayos.

Ésta es una metodología novedosa, que permite aprovechar los aspectos positivos de las técnicas que la constituyen: la aparición de la difracción y los efectos laterales en los problemas tridimensionales, del filtrado de Fourier; las reflexiones múltiples, del trazado de rayos; todo ello sin que se requiera una gran potencia de cómputo y con un razonablemente pequeño tiempo de cálculo, lo que le hace ser válida como herramienta de carácter práctico.

En la aplicación de los algoritmos a datos sintéticos, tanto en dos como en tres dimensiones, se obtienen resultados que presentan las características geométricas esperables: en la resolución del Problema Directo aparecen hipérbolas de difracción como señales originadas por difractores puntuales, señales múltiples, efectos laterales en los problemas tridimensionales, etc.; en la resolución del Problema Inverso las hipérbolas de difracción convergen a objetos puntuales, desaparecen las ramas asociadas a los efectos laterales, etc.

Los elementos característicos (vértices de las hipérbolas de difracción, planos asociados a reflexiones) se encuentran localizados en las posiciones correctas (coordenadas de posición en el plano horizontal y tiempo doble de recorrido en el Problema Directo, coordenadas de posición en el plano horizontal y coordenada D en el Problema Inverso), dentro del margen de error asumible por la naturaleza discreta de la Sección Medida y la Distribución Medida.

La disponibilidad de una herramienta fiable para la resolución del Problema Directo es de gran utilidad a la hora de plantear el uso del geo-radar ya que, en los casos en que se pretende localizar estructuras conocidas, permite determinar la tipología de las señales que se han de detectar en los radargramas.

La aplicación de los algoritmos a datos de campo hace converger las hipérbolas de difracción a elementos puntuales de tal forma que, en la DISTRIBUCIÓN MEDIDA final, las hipérbolas que quedan no están asociadas a difracciones en elementos subsuperficiales con la velocidad de propagación empleada en el algoritmo.

Los resultados obtenidos podrán ser mejorados a medida que aumente la correspondencia entre las características de los algoritmos y su implementación y las de los radargramas. Así mismo, la eliminación de las reflexiones múltiples permitiría limpiar los registros y obtener resultados más claros.

En todos los casos la aplicación de los algoritmos no requiere una gran potencia de cómputo, requiriéndose un tiempo de cálculo razonablemente pequeño, lo que hace que esta metodología sea válida como herramienta de carácter práctico, incluso en máquinas que no tengan MATLAB instalado.

9.6. Futuros trabajos: Líneas de investigación abiertas

A la vista de los resultados expuestos en las §§ 9.1, 9.2 y 9.3, la continuación natural de esta Tesis Doctoral se orientaría en las siguientes direcciones:

- Modificación en el diseño de los algoritmos:
 - Eliminación de la restricción de emisor y receptor coincidentes.
 - Consideración de los cambios laterales en los parámetros electromagnéticos.
 - Consideración del contenido multifrecuencial de la señal, constituida por la superposición de distintas componentes monocromáticas.
- Modificación en la implementación de los algoritmos:
 - Realización de un trazado de rayos general, que tenga en cuenta los cambios laterales de los parámetros electromagnéticos y el diagrama de radiación de las antenas.
 - Eliminación de las reflexiones múltiples en la resolución del Problema Inverso.
- Modificación en el desarrollo numérico:
 - Mejora de los resultados cuantitativos, bien modificándose la metodología para la interpolación del espectro, bien implementando otro tipo de metodología de cálculo de transformadas de Fourier.

Estas modificaciones, pese a conllevar un incremento de la complejidad de los algoritmos y de la potencia y tiempo de cálculo, redundarían en un mejor ajuste en amplitudes y fases de los resultados obtenidos con ellos.

Referencias bibliográficas

A continuación de las referencias bibliográficas citadas en la memoria, con la finalidad de completar la bibliografía sobre geo-radar, se adjunta un compendio de referencias clasificadas por materias que incluyen las que, habiendo sido consultadas, no han sido citadas en ella.

Referencias citadas

- Allred, B. J., N. R. Fausey, Daniels, J. J., C-C. Chen, Peters Jr., L. and H-S. Youn, 2004: "GPR Detection of Drainage Pipes in Farmlands". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 307-310.
- Álvarez, G. and K. Larner, 2004: "Relative performance of moveout-based multiple-suppression methods for amplitude variation with offset (AVO) analysis and common midpoint (CMP) stacking". *Geophysics*, 69 (1), 275-285.
- Anderson, K. B., J. A. Spotila and J. A. Hole, 2003: "Application of geomorphic analysis and ground-penetrating radar to characterization of paleoseismic sites in dynamic alluvial environments: an example from southern California". *Tectonophysics*, 368, 25-32.
- Andrews, L. C. and B. K. Shivamoggi, 1988: "Integral transforms for engineers and applied mathematicians". Macmillan Publishing Company.
- Antunes Aranha, P. R., C. H. Ribeiro Rocha Agustin and F. García Sobreira, 2002: "The use of GPR for characterizing underground weathered profiles in the sub-humid tropics". *Journal of Applied Geophysics*, 49, 195-210.
- Arcone, S. A., 1996: "High resolution of glacial ice stratigraphy: A ground-penetrating radar study of Pegasus Runway, McMurdo Station, Antarctica". *Geophysics*, 61 (6), 1653-1663.
- Arcone, S. A., P. R. Peapples and L. Liu, 2003: "Propagation of a ground-penetrating radar (GPR) pulse in a thin-surface waveguide". *Geophysics*, 68 (6), 1922-1933.
- Asprion, U., H. Westphal and T. Aigner, 2004: "Refining sedimentological information of carbonate environments with Ground-Penetrating Radar (GPR)". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 617-620.

- Aubry, W. M., R. J. Bonneau, R. D. Brown, E. D. Lynch, M. C. Wicks, R. A. Schneible, A. D. George and M. A. Krumme, 2002: "Airborne Sensor Concept To Image Shallow-Buried Targets". IEEE Radar Conference, 233-236.
- Audru, J-C., M. Bano, J. Begg, K. Berryman, S. Henrys and B. Nivière, 2001: "GPR investigations on active faults in urban areas: the Georisc-NZ project in Wellington, New Zealand". C. R. Acad. Sci. Paris, Sciences de la Terre et des planètes, 333, 447-454.
- Aznar, A. y F. J. Trivez, 1993a: "Métodos de predicción en economía I. Fundamentos, Input-output, Modelos econométricos y métodos no paramétricos de series temporales". Editorial Ariel, S. A.
- Aznar, A. y F. J. Trivez, 1993b: "Métodos de predicción en economía II. Análisis de series temporales". Editorial Ariel, S. A.
- Bancroft, J. C., H. D. Geiger and G. F. Margrave, 1998: "The equivalent offset method of prestack time migration". Geophysics, 63 (6), 2042-2053.
- Bano, M., 1996: "Constant dielectric losses of ground-penetrating radar waves". Geophys. J. Int., 124, 279-288.
- Bano, M., G. Marquis, B. Nivière, J. C. Maurin and M. Cushing, 2000: "Investigating alluvial and tectonics features with ground-penetrating radar and analyzing diffraction patterns". Journal of Applied Geophysics, 43, 33-41.
- Baradello, L., J. M. Carcione and D. Gei, 2004: "Fast monostatic GPR modeling". Geophysics, 69 (2), 466-471.
- Bellefleur, G. and M. Chouteau, 2001: "Massive sulphide delineation using borehole radar: test at the McConnell nickel deposit, Sudbury, Ontario". Journal of Applied Geophysics, 47, 45-61.
- Benedetto, A., F. Benedetto, M. R. De Blasiis and G. Giunta, 2005: "Reliability of Signal Processing Technique for Pavement Damages Detection and Classification Using Ground Penetrating Radar". IEEE Sensors Journal, 5 (3), 471-480.
- Bennet, M. R., D. Huddart, R. I. Waller, N. Cassidy, A. Tomio, P. Zukowskyj, N. G. Midgley, S. J. Cook, S. Gonzalez and N. F. Glasser, 2004: "Sedimentary and tectonic architecture of a large push moraine: a case study from Hagafellsjökull-Eystri, Iceland". Sedimentary Geology, 172, 269-292.
- Beres, M., M. Luetscher and R. Olivier, 2001: "Integration of ground-penetrating radar and microgravimetric methods to map shallow caves". Journal of Applied Geophysics, 46, 249-262.
- Berkowitz, R. S. (Ed.), 1965: "Modern Radar: Evaluation and System Design". John Wiley & Sons, Inc.
- Binda, L., A. Saisi, C. Tiraboschi, S. Valle, C. Colla and M. Forde, 2003: "Application of sonic and radar tests on the piers and walls of the Cathedral of Noto". Construction and Building Materials, 17, 613-627.
- Bitri, A. and G. Grandjean, 1998: "Frequency-wavenumber modelling and migration of 2D GPR data in moderately heterogeneous dispersive media". Geophysical Prospecting, 46, 287-301.
- Blakemore, J. S., 1985: "Solid State Physics". Cambridge University Press. 2nd Edition.
- Blumberg, D. G., T. Neta, N. Margalit, M. Lazar and V. Freilikher, 2004: "Mapping exposed and buried drainage systems using remote sensing in the Negev Desert, Israel". Geomorphology, 61, 239-250.
- Bohidar, R. N. and J. F. Hermance, 2002: "The GPR refraction method". Geophysics, 67 (5), 1474-1485.

- Born, M. and E. Wolf, 2002: "Principles of Optics: electromagnetic theory of propagation interference and diffraction of light". Cambridge University Press. 7th Edition.
- Bourgeois, J. M. and G. S. Smith, 1994: "A full electromagnetic simulation of a ground penetrating radar: theory and experiment". IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, 1442-1445.
- Brigham, E. O., 1974: "The fast Fourier transform". Prentice-Hall, Inc.
- Brooks, J. W., M. W. Maier and S. R. Vechinski, 1997: "Applying System Identification and Neural Networks to the Efficient Discrimination of Unexploded Ordnance". IEEE Aerospace Conference, 449-467.
- Brunzell, H., 1998: "Pre-processing of ground penetrating impulse radar data for improved detection capability". IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, 1478-1480.
- Bugaev, A. S., V. V. Chapursky, S. I. Ivashov, V. V. Razevig, A. P. Sheyko and I. A. Vasilyev, 2004: "Through Wall Sensing of Human Breathing and Heart Beating by Monochromatic Radar". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 291-294.
- Busby, J. P. and J. W. Merritt, 1999: "Quaternary deformation mapping with ground penetrating radar". Journal of Applied Geophysics, 41, 75-91.
- Cagnoli, B. and T. J. Ulrych, 2001: "Ground penetrating radar images of unexposed climbing dune-forms in the Ubehebe hydrovolcanic field (Death Valley, California)". Journal of Volcanology and Geothermal Research, 109, 279-298.
- Cai, J. and G. A. McMechan, 1995: "Ray-based synthesis of bistatic ground-penetrating radar profiles". Geophysics, 60 (1), 87-96.
- Caorsi, S. and G. Cevini, 2004: "An Electromagnetic Approach Based on Neural Networks for the GPR Investigation of Buried Cylinders". IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2 (1), 3-7.
- Carcione, J. M., 1998: "Radiation patterns for 2-D GPR forward modeling". Geophysics, 63 (2), 424-430.
- Carcione, J. M., G. Lenzi and S. Valle, 1999: "GPR modelling by the Fourier method: improvement of the algorithm". Geophysical Prospecting, 47, 1015-1029.
- Carcione, J. M. and M. A. Schoenberg, 2000: "3-D ground-penetrating radar simulation and plane-wave theory in anisotropic media". Geophysics, 65 (5), 1527-1541.
- Carcione, J. M. and G. Seriani, 2000: "An electromagnetic modelling tool for the detection of hydrocarbons in the subsoil". Geophysical prospecting, 48, 231-256.
- Cardama Aznar, A., L. Jofre Rosa, J. M. Rius Casals, J. Romeu Robert y S. Blanch Boris, 1998: "Antenas". Edicions Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), S. L.
- Carmichael, R. S., 1982a: "Handbook of Physical Properties of Rocks, I". CRC Press, Inc.
- Carmichael, R. S., 1982b: "Handbook of Physical Properties of Rocks, II". CRC Press, Inc.
- Carmichael, R. S., 1984: "Handbook of Physical Properties of Rocks, III". CRC Press, Inc.
- Carreón-Freyre, D., M. Cerca and M. Hernández-Marín, 2003: "Correlation of near-surface stratigraphy and physical properties of clayey sediments from Chalco Basin, Mexico, using Ground Penetrating Radar". Journal of Applied Geophysics, 53, 121-136.

- Cerdeño, M.L., G. Rodríguez-Caderot, M. Folgueira, M.C. Hernández y R. Corraliza, 2004: "Novedades culturales y metodológicas en la necrópolis de Herrería (Guadalajara)". En "Novedades arqueológicas celtibéricas", 43-62. Editado por M. Barril Vicente y A. Rodero Riaza. Asociación Cultural de Protectores y Amigos del Museo Arqueológico Nacional. Museo Arqueológico Nacional.
- Champeney, D. C., 1987: "A handbook of Fourier Theorems". Cambridge University Press.
- Chang, P-Y., D. Alumbaugh, J. Brainard and L. Hall, 2004: "The application of ground penetrating radar attenuation tomography in a vadose zone infiltration experiment". *Journal of Contaminant Hydrology*, 71, 67-87.
- Chen, H.-W. and T.-M. Huang, 1998: "Finite-difference time-domain simulation of GPR data". *Journal of Applied Geophysics*, 40, 139-163.
- Ciarletti, V., J. J. Bertheliet, R. Ney, S. Bonaimé, F. Dolon, A. Reinex, G. Bauché, D. Nevejans and E. Heggy, 2003: "Experimental validation of a GPR dedicated to the Martian subsurface exploration (Pyla sand dune)". *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, 2906-2908.
- Cinlar, E., 1975: "Introduction to Stochastic Processes". Prentice-Hall, Inc.
- Claerbout, J. J., 1971: "Toward a unified theory of reflector mapping". *Geophysics*, 36 (3), 467-481.
- Cole, R. H. and R. H. Cole, 1941: "Dispersion and Absorption in Dielectrics-I. Alternating Current Characteristics". *Journal of Chemical Physics*, 9, 341-351.
- Comas, X., L. Slater and A. Reeve, 2005: "Stratigraphic controls on pool formation in a domed bog inferred from ground penetrating radar (GPR)". *Journal of Hydrology* (In press).
- Conyers, L. B. and D. Goodman, 1997: "Ground-Penetrating Radar. An Introduction for Archaeologists". Altamira Press.
- Cooley, J. W. and J. W. Tukey, 1965: "An algorithm for the machine computation of complex Fourier series". *Math. Comp.*, 19, 297-301.
- Cunningham, K. J., 2004: "Application of ground-penetrating radar, digital optical borehole images, and cores for characterization of porosity hydraulic conductivity and paleokarst in the Biscayne aquifer, southeast Florida, USA". *Journal of Applied Geophysics*, 55, 61-76.
- Daniels, D. (Ed.), 2004: "Ground Penetrating Radar". Institution of Electrical Engineers (IEE). Radar, Sonar and Avionics Books Series. 2nd Edition.
- Daniels, D., 2000: "Ground Penetrating Radar Fundamentals". Prepared as an appendix to a report to the U.S.EPA, Region V. Available in the URL: <http://www.geology.ohio-state.edu/~jeff/Library/BASICS.PDF>
- Dascalu, M. and E. D. Franti, 2003: "Computing system processing of GPR sounding profiles". *IEEE International Semiconductor Conference*, 387-390.
- Daubechies, I., 1992: "Ten Lectures on Wavelets". Society for Industrial and Applied Mathematics. CBMS-NSF. Regional conference series in applied mathematics; v. 61.
- Debnath, L., 1995: "Integral Transforms and Their Applications". CRC Press, Inc.
- Di, Q. and M. Wang, 2004: "Migration of ground-penetrating radar data with a finite-element method that considers attenuation and dispersion". *Geophysics*, 69 (2), 472-477.
- Dixon, S. E. and D. M. W. Powers, 1996: "The Characterization, Separation and Transcription of Complex Acoustic Signals". *Proceedings of the 6th Australian International Conference on Speech Science and Technology*. 73-78.

- Doolittle, J. A., B. Jenkinson, D. Hopkins, M. Ulmer and W. Tuttle, 2005: "Hydrogeological investigations with ground-penetrating radar (GPR): Estimating water-table depths and local ground-water flow pattern in areas of coarse-textured soils". *Geoderma* (In press).
- Duijndam, A. J. W. and M. A. Schonewille, 1999: "Nonuniform fast Fourier transform". *Geophysics*, 64, 539-551.
- Dutt, A. and V. Rokhlin, 1993: "Fast Fourier transforms for nonequispaced data" *SIAM J. Sci. Comput.*, 14, 1368-1393.
- Dutt, A. and V. Rokhlin, 1995: "Fast Fourier transforms for nonequispaced data II" *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2, 85-100.
- Edelman, A., P. McCorquodale and S. Toledo, 1999: "The future fast Fourier transform". *SIAM J. Sci. Comput.*, 20, 1094-1114.
- Ékes, C. and P. Friele, 2004: "Ground penetrating radar and its use in forest road stability analysis". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 639-642.
- Ékes, C. and E. J. Hickin, 2001: "Ground penetrating radar facies of the paraglacial Cheekye Fan, southwestern British Columbia, Canada". *Sedimentary Geology*, 143, 199-217.
- El-Shenawee, M. and C. M. Rappaport, 2002: "Monte Carlo Simulations for Clutter Statistics in Minefields: AP-Mine-Like-Target Buried Near a Dielectric Object Beneath 2-D Random Rough Ground Surfaces". *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 40 (6), 1416-1426.
- Elkhetali, S. I., 2003a: "Application of ANN's to the Classification of Radar Images". 6th International Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Service, 727-729.
- Elkhetali, S. I., 2003b: "Ground Penetrating Radar as an Assisting Tool for Prospecting for Oil". 6th International Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Service, 730-731.
- Ellefsen, K. J. and D. L. Wright, 2005: "Radiation pattern of a borehole radar antenna". *Geophysics*, 70 (1), K1-K11.
- Fan, G-X., Q-H. Liu and J. S. Hesthaven, 2002: "Multidomain Pseudospectral Time-Domain Simulations of Scattering by Objects Buried in Lossy Media". *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 40 (6), 1366-1373.
- Fessler, J. A., 2003: "Nonuniform fast Fourier transforms using min-max interpolation". *IEEE Trans. Signal Process.*, 51, 560-574.
- Fischer, C., M. Younis and W. Wiesbeck, 2003: "Multistatic antennas and non-linear inversion for mine-detection GPR". 2nd International Workshop on Advanced GPR, 212-215.
- Francké, J. C. and R. Yelf, 2003: "Applications of GPR for Surface Mining". 2nd International Workshop on Advanced GPR, 115-119.
- Freeland, R. S., R. E. Yoder and J. T. Ammons, 1998: "Mapping shallow underground features that influence site-specific agricultural production". *Journal of Applied Geophysics*, 40, 19-29.
- Fu, L-Y., 2004: "Wavefield interpolation in the Fourier wavefield extrapolation". *Geophysics*, 69 (1), 257-264.
- Fullagar, P. K., D. W. Livelybrooks, P. Zhang, A. J. Calvert and Y. Wu, 2000: "Radio tomography and borehole radar delineation of the McConnell nickel sulfide deposit, Sudbury, Ontario, Canada". *Geophysics*, 65 (6), 1920-1930.

- Gader, P. D., M. Mystkowski and Y. Zhao, 2001: "Landmine Detection with Ground Penetrating Radar Using Hidden Markov Models". *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 39 (6), 1231-1244.
- George, V. and T. W. Altshuler, 1998: "Summary of the DARPA background clutter data collection experiment". *IEEE Ultra-Wideband Short-Pulse Electromagnetics* 4, 409-416.
- Giang, N. V., 2004: "Geotechnical and Engineering Applications of GPR in Vietnam". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 399-401.
- Giroux, B., E. Gloaguen and M. Chouteau, 2004: "Geotechnical Application of Borehole GPR - A Case History". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 249-252.
- Gloaguen, E., D. Marcotte and M. Chouteau, 2004: "A new constrained velocity tomography algorithm using geostatistical simulation". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 75-78.
- González, F. E. y F. J. Marcello Ruiz, 2002: "Fundamentos de Radar". Servicio de Publicaciones de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.
- Goodman, D., 1994: "Ground-penetrating radar simulation in engineering and archaeology". *Geophysics*, 59 (2), 224-232.
- Grandjean, G. and H. Durand, 1999: "Radar Unix: a complete package for GPR data processing". *Computers & Geosciences*, 25, 141-149.
- Grandjean, G., J. C. Gourry and A. Bitri, 2000: "Evaluation of GPR techniques for civil-engineering applications: study on a test site". *Journal of Applied Geophysics*, 45, 141-156.
- Grasmueck, M., R. Weber and H. Horstmeyer, 2005: "Full-resolution 3D GPR imaging". *Geophysics*, 70 (1), K12-K19.
- Green, A., R. Gross, K. Holliger, H. Horsmeyer and J. Baldwin, 2003: "Results of 3-D georadar surveying and trenching the San Andreas fault near its northern landward limit". *Tectonophysics*, 368, 7-23.
- Grégoire, C. and F. Hollender, 2004: "Discontinuity characterization by the inversion of the spectral content of ground-penetrating radar (GPR) reflections—Application of the Jonscher model". *Geophysics*, 69 (6), 1414-1424.
- Grigoriev, K. and S. Zelenkov, 2004: "Prism2 Software Package Version 2.1 User's Manual". Radar Systems, Inc. Available in the URL: www.radsys.lv
- Grinin, S. V., 1997: "Integer-arithmetic FDTD codes for computer simulation of internal, near and far electromagnetic fields scattered by three-dimensional conductive complicated form bodies". *Computer Physics Communications*, 102, 109-131.
- Grivas, D. A., F. N. U. Brawijaya and H. Shin, 2004: "Measuring Performance of Geotextiles in Pavement Systems Using Ground Penetrating Radar". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 643-646.
- Grote, K., S. Hubbard, J. Harvey and Y. Rubin, 2005: "Evaluation of infiltration in layered pavements using surface GPR reflection techniques". *Journal of Applied Geophysics*, 57, 129-153.
- Guangyou, F. and M. Pipan, 2003: "Synthetic and field examples of ground-penetrating radar (GPR) profile improvement using two-phase detection techniques". *Geophysics*, 68 (2), 554-558.
- Guitton, A., 2004: "Amplitude and kinematic corrections of migrated images for nonunitary imaging operators". *Geophysics*, 69 (4), 1017-1024.

- Gumas, C. C., 1997: "Window choices become crucial in high-dynamic-range FFT processing". *Personal Engineering & Instrumentations News*, May 1997, 53-59.
- Gürel, L. and U. Oguz, 2000: "Three-Dimensional FDTD Modeling of a Ground-Penetrating Radar". *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 18 (4), 1513-1521.
- Haizhong, Y. and Y. Xiaojian, 1997: "Derivative Seismic Processing Method for GPR Data". *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, 145-147.
- Halman, J. I., A. Shubert and G. T. Ruck, 1998: "SAR Processing of Ground-Penetrating Radar Data for Buried UXO Detection: Results from a Surface-Based System". *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 46, 7, 1023-1027.
- Hamming, R. W., 1973: "Numerical Methods for Scientists and Engineers". McGraw-Hill. 2nd Edition.
- Hammon, W. S. III, G. A. McMechan and X. Zeng, 2000: "Forensic GPR: finite-difference simulations of responses from buried human remains". *Journal of Applied Geophysics*, 45, 171-186.
- Hanselman, D. C. and B. Littlefield, 2001: "Mastering MATLAB 6: a comprehensive tutorial and reference". Prentice-Hall, Inc.
- Harris, F. J., 1978: "On the Use of Windows for Harmonical Analysis with the Discrete Fourier Transform". *Proceedings of the IEEE*, 66 (1), 51-83.
- Harris, J. W. and H. Stocker, 1998: "Handbook of Mathematics and Computational Science". Springer – Verlag.
- Heinckle, B., J. van der Kruk, A. G. Green and H. Horstmeyer, 2004: "Processing strategy for 3-D georadar data acquired in areas characterized by rugged topography". *10th International Conference on Ground Penetrating Radar*, 283-286.
- Hermance, J. F., 2001: "Ground-penetrating radar: Postmigration stacking of n-fold common midpoint profile data". *Geophysics*, 66 (2), 379-388.
- Hipp, J. E., 1974: "Soil Electromagnetic Parameters as Functions of Frequency, Soil Density, and Soil Moisture". *Proceedings of the IEEE*, 62 (1), 98-103.
- Holton, J. R., 1992: "An Introduction to Dynamic Meteorology". Academic Press.
- Hu, J-F. and Z-O. Zhou, 2004: "A novel method for clutter reduction in the FLGPR measurements". *IEEE International Conference on Communications, Circuits and Systems*, 896-900.
- Hugenschmidt, J., 2004: "Accuracy and Reliability of Radar Results on Bridge Decks". *10th International Conference on Ground Penetrating Radar*, 371-374.
- Hugenschmidt, J., M. N. Partl and H. de Witte, 1998: "GPR inspection of a mountain motorway in Switzerland". *Journal of Applied Geophysics*, 40, 95-104.
- Huisman, J. A., J. J. C. snepvangers, W. Bouten and G. B. M. Heuvelink, 2002: "Mapping spatial variations in surface soil water content: comparison of ground-penetrating radar and time domain reflectometry". *Journal of Hydrology*, 269, 194-207.
- Ibach, H. and H. Lüth, 1996: "Solid-State Physics". Springer-Verlag.
- Instanes, A., Ida Lonne and K. Sandaker, 2004: "Location of avalanche victims with ground-penetrating radar". *Cold Regions Science and Technology*, 38, 55-61.
- Irving, J. D. and R. J. Knight, 2003: "Removal of wavelet dispersion from ground-penetrating radar data". *Geophysics*, 68 (3), 960-970.

- Jaffer, A. G., B. Himed and P. T. Ho, 2005: "Estimation of range-dependent clutter covariance by configuration system parameter estimation". IEEE International Radar Conference, 459-464.
- Jakobsen, P. R. and T. Overgaard, 2002: "Georadar facies and glaciotectonic structures in ice marginal deposits, northwest Zealand, Denmark". Quaternary Science Reviews, 21, 917-927.
- James, J. F., 1995: "A student's guide to Fourier transforms: with applications in physics and engineering". Cambridge University Press.
- Jha, P. C., V. R. Balasubramaniam, N. Sandeep, Y. V. Sivaram and R. N. Gupta, 2004: "GPR applications in mapping barrier thickness in coal mines: Some case studies". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 605-608.
- Jiao, Y., G. A. McMechan and E. Pettinelli, 2000: "In situ 2-D and 3-D measurements of radiation patterns of half-wave dipole GPR antennas". Journal of Applied Geophysics, 43, 69-89.
- Johnson, R. A. and D. W. Wichern, 2002: "Applied Multivariate Statistical Analysis". Pearson Education International - Prentice Hall, Inc. 5th Edition.
- Jol, H. M., M. A. Deshusses and P. Gostomski, 2004: "Initial experiments on the application of ground penetrating radar to troubleshoot biofilters for air pollution control". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 423-426.
- Jones, D. S., 1982: "The Theory of Generalized Functions". Cambridge University Press, Cambridge.
- Jordan, T. E., G. S. Baker, K. Henn and J-P. Messier, 2004: "Using amplitude variation with offset and normalized residual polarization analysis of ground penetrating radar data to differentiate an NAPL release from stratigraphic changes". Journal of Applied Geophysics, 56, 41-58.
- Kaiser, G., 1994: "A friendly guide to wavelets". Birkhäuser.
- Karlsen, B., J. Larsen, H. B. D. Sorensen and K. B. Jakobsen, 2001: "Comparison of PCA and ICA based clutter reduction in GPR systems for anti-personal landmine detection". 11th IEEE Signal Processing Workshop on Statistical Signal Processing, 146-149.
- Keller, G. V., 1987: "Rock and Mineral Properties". Investigations in Geophysics, n°3: "Electromagnetic Methods in Applied Geophysics, volume 1: Theory", 13-51. Edited by M. N. Nabighian. Society of Exploration Geophysicist (SEG).
- Kempen, L van, and H. Sahli, 2001: "Signal processing techniques for clutter parameters estimation and clutter removal in GPR data for landmine detection". 11th IEEE Signal Processing Workshop on Statistical Signal Processing, 158-161.
- Kim, S-W. and S-Y. Kim, 2004: "The effective hybrid PSTD/FDTD method for borehole radar simulation including water-filled tunnel". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 37-40.
- Kim, J-H., S-J. Cho, M-J. Yi and M. Sato, 2004: "Application of anisotropy borehole radar tomography in Korea". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 241-244.
- Kjaer, K. H., L. Sultan, J. Krüger and A. Schomacker, 2004: "Architecture and sedimentation of outwash fans in front of the Mýrdalsjökull ice cap, Iceland". Sedimentary Geology, 172, 139-163.
- Klysz, G., J. P. Balayssac and S. Laurens, 2004: "Numerical FDTD simulation of the direct wave propagation of a GPR coupled antenna". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 45-48.

- Kolba, M. P. and I. I. Jouny, 2003: "Clutter suppression and feature extraction for land mine detection using ground penetrating radar". IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, 203-206.
- Koppenjan, S., M. Streton, H. Lee, M. Lee and S. Ono, 2004: "Advanced Signal Analysis for Forensic Applications of Ground Penetrating Radar". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 443-446.
- Kovalenko, V. and A. Yoarovoy, 2003: "Analysis of target responses and clutter based on measurements at test facility for landmine detection systems located at TNO-FEL". 2nd International Workshop on Advanced GPR, 82-88.
- Kowlasky, M. B., S. Finsterle and Y. Rubin, 2004: "Estimating flow parameter distribution using ground-penetrating radar and hydrological measurements during transient flow in the vadose zone". Advances in Water Resources, 27, 583-599.
- Kumar, S. B., J. Jacob and K. T. Mathew, 2003: "Experimental and theoretical analysis of different buried object systems using time domain reflected signal analysis". 2nd International Workshop on Advanced GPR, 76-81.
- Kurk, J. van der, C. P. A. Wapenaar, J. T. Fokkema and P. M. van der Berg, 2003: "Three-dimensional imaging of multicomponent ground-penetrating radar data". Geophysics, 68 (4), 1241-1254.
- Lampe, B. and K. Holliger, 2003: "Effects of fractal fluctuations in topographic relief, permittivity and conductivity on ground-penetrating radar antenna radiation". Geophysics, 68 (6), 1934-1944.
- Lancaster, P. and K. Šalkauskas, 1986: "Curve and Surface Fitting: An Introduction". Academic Press, Ltd.
- Landa, E., I. Belfer and S. Keydar, 1999: "Multiple attenuation in the parabolic τ - p domain using wavefront characteristics of multiple generating primaries". Geophysics, 64 (6), 1806-1815.
- Ledger, P. D., K. Morgan and O. Hassan, 2005: "Frequency and time domain electromagnetic scattering simulations employing higher order edge elements". Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194, 105-125.
- Lee, K-H., Ch-Ch. Chen, F. L. Teixeira and R. Lee, 2004a: "Modeling and Investigation of a Geometrically Complex UWB GPR Antenna Using FDTD". IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 52 (8), 1983-1991.
- Lee, J. S., C. Nguyen and T. Scullion, 2004b: "A Novel, Compact, Low-Cost, Impulse Ground-Penetrating Radar for Nondestructive Evaluation of Pavements". IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 53 (6), 1502-1509.
- Legarsky, J. J., S. P. Gogineni and T. L. Akins, 2001: "Focused Synthetic Aperture Radar Processing of Ice-Sounder Data Collected Over the Greenland Ice Sheet". IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 39 (10), 2109-2117.
- Leparoux, D., D. Gibert and P. Côte, 2001: "Adaptation of prestack migration to multi-offset ground-penetrating radar (GPR) data". Geophysical Prospecting, 49, 374-386.
- Leuschen, C. J., S. P. Gogineni, S. M. Clifford and R. K. Raney, 2001: "Simulation and Design of Ground-Penetrating Radar for Mars Exploration". IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, 1524-1526,
- Leuschen, C., P. Kanagaratnam and K. Yoshikawa, 2002: "Field Experiments of a Surface-Penetrating Radar for Mars". IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, 6, 24-28.

- Lighthill, M. J., 1958: "Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions". Cambridge University Press.
- Liu, Q. H., 1997: "Using GPR and Seismic Reflection Measurements to Characterize Buried Objects: Large-Scale Simulations". 17th International Geoscience & Remote Sensing Symposium, 1147-1149.
- Liu, Q. H., 1998: "An Accurate Algorithm for Nonuniform Fast Fourier Transforms (NUFFT's)". IEEE Microw. Guided. W., 18-20.
- Liu, Q. H., 2000: "Applications of Nonuniform Fast Fourier Transform Algorithms in Numerical Solutions of Differential and Integral Equations". IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 38 (4), 1551-1560.
- Liu, Q. H. and G-X. Fan, 1999a: "Simulations of GPR in Dispersive Media Using A Frequency-Dependent PSTD Algorithm". IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 17 (5), 2317-2324.
- Liu, Q-H. and G-X- Fan, 1999b: "Frequency-Dependent PSTD Method and Its Applications to GPR Modeling". International IEEE/AP-S Symposium Digest, 2188-2191.
- Liu, Q. H. and X. Y. Tang, 1998: "Iterative algorithm for nonuniform inverse fast Fourier transform (NU-IFFT)". Electron. Lett., 34, 1913-1914.
- Liu, S. and M. Sato; 2004: "Borehole Radar Simulation for Mineral Detection by FDTD". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 209-212.
- Lopes de Castro, D. and R. M. Gomes Castelo Branco, 2003: "4-D ground penetrating radar monitoring of a hydrocarbon leakage site in Fortaleza (Brazil) during its remediation process: a case history". Journal of Applied Geophysics, 54, 127-144.
- Lorenzo, E., 1994: "Prospección geofísica de alta resolución mediante geo-radar. Aplicación a obras civiles". Tesis Doctoral. Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I. Universidad Complutense de Madrid. Madrid (España).
- Lorenzo, H. and P. Arias, 2005: "A methodology for rapid archaeological site documentation using ground-penetrating radar and terrestrial photogrammetry". Geoarchaeology, 20 (5), 521-535.
- Lorenzo, H., P. Arias, M. Pereira, F. Rial and A. Tejada, 2004: "Use of GPR to map Prestige fuel layers below sand of the beaches of Galicia". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 597-600.
- Lorenzo, E. y V. Cuéllar, 1995: "Geofísica de alta resolución en ingeniería civil. Estudios en estructuras de hormigón utilizando geo-radar". Física de la Tierra, n°7: "Geofísica aplicada", 243-257. Editado por M. C. Hernández y M. Herraiz. Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I. Universidad Complutense de Madrid. Servicio de Publicaciones de la Universidad Complutense.
- Lorenzo, H., V. Cuéllar and M. C. Hernández, 2001: "Close range radar remote sensing of concrete degradation in a textile factory floor". Journal of Applied Geophysics, 47, 327-336.
- Lu, T., W. Cai and P. Zhang, 2005: "Discontinuous Galerkin Time-Domain Method for GPR Simulation in Dispersive Media". IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 43 (1), 72-80.
- Lyons, R., 1998a: "Windowing Functions Improve FFT Results. Part I." Test & Measurement World, 18 (7), 37-44.
- Lyons, R., 1998b: "Windowing Functions Improve FFT Results. Part II." Test & Measurement World, 18 (10), 53-60.

- Main, D. J. and W. S. Hammon III, 2003: "The application of Ground Penetrating Radar as a mapping technique at vertebrate fossil excavations in the Cretaceous of Texas". *Cretaceous Research*, 24, 335-345.
- Malcolm, A. E., M. V. de Hoop and J. H. Le Rousseau, 2005: "The applicability of dip moveout/azimuth moveout in the presence of caustics". *Geophysics*, 70 (1), S1-S17.
- Markus, T., J. L. Green, J. F. Cooper, S. F. Fung, W. W. L. Taylor and R. F. Benson, 2004: "Ground Penetrating Radar Simulations for Jupiter's Icy Moons". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 789-792.
- Marsden, J. E. and M. J. Hoffman, 1999: "Elementary classical analysis". W. H. Freeman and Company. 2nd Ed.
- Masta, R., 1999: "Gut-Level Fourier Transforms". Parts 1-8 available in the URL: <http://www.daqarta.com/AUTHOR.HTM>
- McMechan, G. A., R. G. Loucks, P. Mescher and X. Zeng, 2002: "Characterization of a coalescent, collapsed paleocave reservoir analog using GPR and well-core data". *Geophysics*, 67 (4), 1148-1158.
- McNamee, J., F. Stenger and E. L. Whitney, 1971: "Whittaker's Cardinal Function in Retrospect". *Mathematics of Computation*, 25 (113), 141-154.
- Merwe, A. van der, and I. J. Gupta, 2000: "A Novel Signal Processing Technique for Clutter Reduction in GPR Measurements of Small, Shallow Land Mines". *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 38 (6), 2627-2637.
- Modroo, J. J. and G. R. Olhoeft, 2004: "Avalanche Rescue using Ground Penetrating Radar". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 785-788.
- Moran, M. L., R. J. Greenfield, S. A. Arcone and A. J. Delaney, 2000: "Multidimensional GPR array processing using Kirchoff migration". *Journal of Applied Geophysics*, 43, 281-295.
- Moran, M. L., R. J. Greenfield and S. A. Arcone, 2003: "Modeling GPR radiation and reflection characteristics for a complex temperate glacial bed". *Geophysics*, 68 (2), 559-565.
- Myers, H. P., 1997: "Introductory Solid State Physics". Taylor & Francis.
- Navarro, F. J., Y. Y. Macheret and B. Benjumea, 2005: "Application of radar and seismic methods for the investigation of temperate glaciers". *Journal of Applied Geophysics*, 57, 193-211.
- Neal, A., 2004: "Ground-penetrating radar and its use in sedimentology: principles, problems and progress". *Earth-Science Reviews*, 66, 261-330.
- Nguyen, N. and Q. H. Liu, 1999: "The regular Fourier matrices and nonuniform fast Fourier transforms". *SIAM J. Sci. Comput.*, 21 (1), 283-293.
- Niltawach, N., J. T. Johnson, C-C. Chen and B. A. Baertlein, 2003: "Modeling of Buried Biomass Effects on Ground Penetrating Radar". *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, 219-222.
- Niltawach, N., C-C. Chen, J. T. Johnson and B. A. Baertlein, 2004: "A Numerical Study of Buried Biomass Effects on Ground-Penetrating Radar Performance". *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 42 (6), 1233-1240.
- Nobes, D. C., E. F. Davis and S. A. Arcone, 2005: "'Mirror-image' multiples in ground-penetrating radar". *Geophysics*, 70 (1), K20-K22.
- Nuttall, A. H., 1981: "Some Windows with Very Good Sidelobe Behavior". *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 29 (1), 84-91.

- Nuzzo, L., 2004: "The contribution of GPR to investigate damages in the Crypt of the Cathedral of Otranto (Apulia, Italy)". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 479-482.
- Nuzzo, L. and T. Quarta, 2004: "Improvement in GPR coherent noise attenuation using tau-p and wavelet transforms". *Geophysics*, 69 (3), 789-802.
- O'Neill, K., 1997: "Exploration of Innovative Radar Sensing Schemes for Subsurface Object Detection". *IEEE International Geoscience and Remote Sensing*, 1135-1137.
- O'Neill, K., 2000: "Broadband Bistatic Coherent and Incoherent Detection of Buried Objects Beneath Randomly Rough Surfaces". *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 38 (2), 891-898.
- O'Neill, K., 2001: "Discrimination of UXO in Soil Using Broadband Polarimetric GPR Backscatter". *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 39 (2), 356-367.
- Oguz, U. and L. Gürel, 2000: "Three-Dimensional FDTD Modeling of a GPR". *IEEE AP-S International Symposium and USNC/URSI National Radio Science Meeting*, 1990-1993.
- Oguz, U. and L. Gürel, 2003: "FDTD simulations of multiple GPR systems". *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, 764-767.
- Olhoeft, G. R., 2003: "Ground Penetrating Radar". URL: <http://www.g-p-r.com>
- Orlando, L. and E. Marchesi, 2001: "Georadar as a tool to identify and characterise solid waste dump deposits". *Journal of Applied Geophysics*, 48, 163-174.
- Osorio, R., J. Clapés, J. O. Caselles, J. A. Canas, L. G. Pujades, V. Pérez Gracia, R. González Drigo y D. Canas, 2002a: "Aplicación de técnicas de georadar para la evaluación de las reservas susceptibles de aprovechamiento en explotaciones de áridos". 3ª Asamblea Hispano-Portuguesa de Geodesia y Geofísica, 1823-1825.
- Osorio, R., D. Canas, J. O. Caselles, J. Clapés, J. A. Canas, L. G. Pujades, V. Pérez Gracia y R. González Drigo, 2002b: "Aplicación de técnicas de GPR para la determinación de sistemas kársticos en la ciudad de Tarragona". 3ª Asamblea Hispano-Portuguesa de Geodesia y Geofísica, 1826-1829.
- Overmeeren, R. A. von, 1998: "Radar facies of unconsolidated sediments in The Netherlands: A radar stratigraphy interpretation method for hydrogeology". *Journal of Applied Geophysics*, 40, 1-18.
- Paniagua, J., M. del Río and M. Rufo, 2004: "Test site for the analysis of subsoil GPR signal propagation". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 751-754.
- Papoulis, A., 1962: "The Fourier integral and its applications". McGraw Hill Book Company, Inc.
- Park, I., J. Lee and W. Cho, 2004: "Assessment of Bridge Scour and Riverbed variation by a Ground Penetrating Radar". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 411-414.
- Partington, J. R. and B. Ünalmiş, 2001: "On the Windowed Fourier Transform and Wavelet Transform of Almost Periodic Functions". *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 10, 45-60.
- Pedersen, K. and L. B. Clemmensen, 2005: "Unveiling past aeolian landscapes: A ground-penetrating radar survey of a Holocene coastal dunefield system, Thy, Denmark". *Sedimentary Geology*, 177, 57-86.
- Pelpola, C. P. and E. J. Hickin, 2004: "Long-term bed load transport rate based on aerial-photo and ground penetrating radar surveys of fan-delta growth, Coast Mountains, British Columbia". *Geomorphology*, 57, 169-181.

- Pérez Gracia, V., 2001: "Radar de subsuelo. Evaluación para aplicaciones en Arqueología y en Patrimonio Histórico-Artístico". Tesis Doctoral. Departamento de Ingeniería de Terreno, Cartografía y Geofísica. Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona (España).
- Pérez Gracia, V., L. G. Pujades, J. A. Canas, F. García García, J. Clapés, R. Osorio y R. González, 2002a: "Prospección con radar de subsuelo en los emplazamientos arqueológicos del antiguo castro romano y convento de las monjas comendadoras, en Alcántara (Cáceres)". 3ª Asamblea Hispano-Portuguesa de Geodesia y Geofísica, 1789-1793.
- Pérez Gracia, V., L. G. Pujades, J. A. Canas y F. García García, 2002b: "Radar de subsuelo. Estudio para la caracterización electromagnética de medios". 3ª Asamblea Hispano-Portuguesa de Geodesia y Geofísica, 1814-1818.
- Pérez, C., 2001: "El sistema estadístico SAS". Prentice-Hall.
- Pérez, C., 2003: "Técnicas estadísticas con SPSS". Prentice-Hall.
- Perrin, S., E. Duflos, P. Vanheeghe and A. Bibaut, 2004: "Multisensor Fusion in the Frame of Evidence Theory for Landmines Detection". IEEE Transactions of systems, Man, and Cybernetic - Part C: Applications and Reviews, 34 (4), 485-498.
- Pettinelli, E., A. R. Pisani, P. Burghignoli, A. Galli and F. Ticconi. 2003: "Electromagnetic Propagation Modeling for GPR Exploration of Martian Subsurface". 2nd International Workshop on Advanced GPR, 66-69.
- Pieraccini, M., D. Mecatti, M. Fratini, C. Atzeni and M. Seracini, 2004: "A High Frequency GPR application to the Cultural Heritage survey: the search of the "Battle of Anghiari" by Leonardo da Vinci". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 391-394.
- Pipan, M., L. Baradello, E. Forte, A. Prizzon and I. Finetti, 1999: "2-D and 3-D processing and interpretation of multi-fold ground penetrating radar data: a case history from an archaeological site". Journal of Applied Geophysics, 41, 271-292.
- Pipan, M., E. Forte, G. Dal Moro, M. Sukan and I. Finetti, 2003: "Integrated Vertical Radar Profiles (VRP) and Multi-Fold GPR for Site Characterization". 2nd International Workshop on Advanced GPR, 125-129.
- Posadas Yagüe, S. L., 1998: "Transformada Rápida de Fourier (FFT) e Interpolación en Tiempo Real-Algoritmos y aplicaciones". Comunicación interna del Departamento de Informática de Sistemas y Computadores (DISCA) de la Universidad Politécnica de Valencia. Disponible en la URL: <http://www.disca.upv.es/jposadas/web/Ficheros/FFT.pdf>
- Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, 1992: "Numerical recipes in Fortran: The art of scientific computing". Cambridge University Press. 2nd edition.
- Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, 1996: "Numerical recipes in Fortran 90: The art of parallel scientific computing. Volume 2 of Fortran numerical recipes". Cambridge University Press. 2nd edition.
- Radzevicius, S. J., B. T. Clark, D. Herbst and T. T. Webster, 2004: "Imaging columns with GPR". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 387-390.
- Ranalli, D., M. Scozzafava and M. Tallini, 2004: "Ground penetrating radar investigations for the restoration of historic buildings: the case study of the Collemaggio Basilica (L'Aquila, Italy)". Journal of Cultural Heritage, 5, 91-99.
- Rappaport, C. M. and W. H. Weedon, 1996: "Efficient Modeling of Electromagnetic Characteristics of Soil for FDTD Ground Penetrating Radar Simulation". IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, 620-623.

- Rashed, M., D. Kawamura, H. Nemoto, T. Miyata and K. Nakagawa, 2003: "Ground penetrating radar investigations across the Uemachi fault, Osaka, Japan". *Journal of Applied Geophysics*, 53, 63-75.
- Reitz, J. R., F. J. Milford y R. W. Christy, 1996: "Fundamentos de la teoría electromagnética". Addison-Wesley Iberoamericana, S. A.
- Rey, R., S. Bonaimé, F. Dolon, D. Nevejans, R. Clairquin, C. duvanaud, B. Martinat, J. J. Berthelie, V. Ciarletti, 2003: "A ground penetrating radar for Mars exploration, the GPR experiment on Netlander". 9th International Conference on HF Radio Systems and Techniques, 282-287.
- Ricard, Y. and R. Blakely, 1988: "A method to minimize edge effects in two-dimensional discrete Fourier transforms". *Geophysics*, 53 (8), 1113-1117.
- Rioul, O. and M. Vetterli, 1991: "Wavelets and Signal Processing". *IEEE Signal Processing Magazine*, 8 (4), 14-38.
- Rockmore, D. N., 2000: "The FFT: an algorithm the whole family can use". *Computing in Science & Engineering*. January / February 2000. 60-64.
- Roth, F., P. van Genderen and M. Verhaegen, 2003: "Processing and analysis of polarimetric ground penetrating radar landmine signatures". 2nd International Workshop on Advanced GPR, 70-75.
- Rubio Bretones, A., R. Gómez Martín, R. Godoy Rubio, S. González García and M. Fernández Pantoja, 2004: "On the Simulation of a GPR Using an ADI-FDTD/MoMTD Hybrid Method". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 13-15.
- Rucker, D. F. and T. P. A. Ferré, 2004: "BGPR_Reconstruct: A MATLAB(R) ray-tracing program for nonlinear inversion of first arrival travel time data from zero-offset borehole radar". *Computers & Geosciences*, 30, 767-776.
- Rust, A. C. and J. K. Russell, 2000: "Detection of welding in pyroclastic flows with ground penetrating radar: insights from field and forward modeling data". *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 95, 23-34.
- Rüter, H., 1987: "Migration and tomography: Radon migration". *First Break*, 5 (11), 399-402.
- Sadiku, M. N. O., 1994: "Elements of Electromagnetics". Saunders College Publishing. 2nd Edition.
- Sagués, L., J. M. Lopez-Sanchez, J. Fortuny, X. Fabregas, A. Broquetas and A. L. Sieber, 2001: "Polarimetric Radar Interferometry for Improved Mine Detection and Surface Clutter Rejection". *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 39 (6), 1271-1278.
- Sai, B. and L. P. Ligthart, 2003: "Effective clutter removal for detecting non-metallic mines in various soil fields". *IEEE Geoscience and Remote Sensing Symposium*, 764-766.
- Salvati, J. L., C. C. Chen and T. J. Johnson, 1998: "Theoretical study of a surface clutter reduction algorithm". *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium Proceedings*, 1460-1462.
- Sandmeier, K. J., 2004: "REFLEXW Version 3.5. Windows™ 9x/NT/2000/XP-program for the processing of seismic, acoustic or electromagnetic reflection, refraction and transmission data". Sandmeier Scientific Software. Available in the URL: <http://www.sandmeier-geo.de/Download/downloadguides.htm>
- Sava, P. and A. Guitton, 2005: "Multiple attenuation in the image space". *Geophysics*, 70 (1), V10-V20.
- Scheid, F. y R. E. di Costanzo Lorencez, 1991: "Métodos numéricos". McGraw-Hill. Serie Schaum. 2ª Edición.

- Scmalz, B., B. Lennartz and D. Wachsmuth, 2002: "Analyses of soil water content variations and GPR attribute distributions". *Journal of Hydrology*, 267, 217-226.
- Sen, M. and P. L. Stoffa, 1995: "Global optimization methods in geophysical inversion". *Advances in Exploration Geophysics 4*. Elsevier Science B. V.
- Sénéchal, P., H. Perroud and G. Sénéchal, 2000: "Interpretation of reflection attributes in a 3-D GPR survey at Vallée d'Ossau, western Pyrenees, France". *Geophysics*, 65 (5), 1435-1445.
- Shannon, C. E., 1949: "Communication in the Presence of Noise". *Proceedings of the Institute of Radio Engineers (IRE)*, 37 (1), 10-21. Reprinted in the *Proceedings of the Institute of Electrical and Electronic Engineers (IEEE)*, 86 (2), 447-457, February 1998.
- Sheriff, R. E. and L. P. Geldart, 1982: "Exploration seismology. Vol. 1: History, theory, and data acquisition". Cambridge University Press.
- Sheriff, R. E. and L. P. Geldart, 1983: "Exploration seismology. Vol. 2: Data-processing and interpretation". Cambridge University Press.
- Sheriff, R. E., 1984: "Encyclopedic Dictionary of Exploration Geophysics". Society of Exploration Geophysicists (SEG). 2nd Edition.
- Sheriff, R. E., 1989: "Geophysical 'Methods'". Prentice-Hall International.
- Shrestha, S. M., I. Arai, T. Miwa and Y. Tomizawa, 2001: "Signal Processing of Ground Penetrating Radar Using Super Resolution Technique". *IEEE Radar Conference*, 300-305.
- Skelly, R. L., C. S. Bristow and F. G. Ethridge, 2003: "Architecture of channel-belt deposits in an aggrading shallow sandbed braided river: the lower Niobrara River, northeast Nebraska". *Sedimentary Geology*, 158, 249-270.
- Slater, L. and T. M. Niemi, 2003: "Ground-penetrating radar investigation of active faults along the Dead Sea Transform and implications for seismic hazards within the city of Aqaba, Jordan". *Tectonophysics*, 368, 33-50.
- Slob, E. C., 2003: "Toward true amplitude processing of GPR data". *2nd International Workshop on Advanced GPR*. 16-23.
- Späth, H., 1995: "Two Dimensional Spline Interpolation Algorithms". A K Peters, Ltd.
- Spiegel, M. R., J. Liu y L. Abellanas Rapún, 2000: "Fórmulas y tablas de matemática aplicada". McGraw-Hill / Interamericana de España, S. A. U. 2ª edición.
- Stolt, R. H. and A. B. Weglein, 1985: "Migration and inversion of seismic data". *Geophysics*, 50(12), 2458-2472.
- Stolt, R. H., 1978: "Migration by Fourier Transform". *Geophysics*, 43 (1), 23-48.
- Stolt, R. H., 1996: "A prestack residual time migration operator". *Geophysics*, 61 (3), 605-607.
- Stolt, R. H., 2002: "Seismic data mapping and reconstruction". *Geophysics*, 67 (3), 890-908.
- Strange, A. D., J. C. Ralston and V. Chandran, 2005: "Application of Ground Penetrating Radar Technology for Near-Surface Interface Determination in Coal Mining". *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 701-704.
- Sun, J. and R. A. Young, 1995: "Recognizing surface scattering in ground-penetrating radar data". *Geophysics*, 60 (5), 1378-1385.
- Szynkiewicz, A. and P. Grabowski, 2004: "GPR Monitoring of pavements on airfield". *10th International Conference on Ground Penetrating Radar*, 803-806.

- Tallini, M., A. Giamberardino, D. Ranalli and M. Scozzafava, 2004: "GPR survey for investigation in building foundations". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 395-397.
- Tarantola, A., 1987: "Inverse Problem Theory. Methods for data fitting and model parameter estimation". Elsevier Science Publishers, S. V.
- Teixeira, F. L., W. Ch. Chew, M. Straka, M. L. Oristaglio and T. Wang, 1998: "Finite-Difference Time-Domain Simulation of Ground Penetrating Radar on Dispersive, Inhomogeneous, and Conductive Soils". IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 36 (6), 1928-1937.
- Teixeira, T., H. Lorenzo, P. Arias y A. da Costa, 2002: "Aplicação de GPR em meio ambiente: Detecção do nível freático e intrusão de água salina na Praia de Itaipuaçu, Maricá, Rio de Janeiro". 3ª Assembleia Hispano-Portuguesa de Geodesia y Geofísica, 1850-1851.
- Telford, W. M., L. P. Geldart and R. E. Sheriff, 1990: "Applied Geophysics". Cambridge University Press. 2nd Edition.
- Trad, D., 2003: "Interpolation and multiple attenuation with migration operators". Geophysics, 68 (6), 2043-2054.
- Tranter, C. J., 1956: "Integral Transforms in Mathematical Physics". Methuens's Monographs on Physical Subjets. Methuen & Co. Ltd. London.
- Travassos, J. de M. and P. de T. L. Menezes, 2004: "GPR exploration for ground water in a crystalline rock terrain". Journal of Applied Geophysics, 55, 239-248.
- Triltzsch, G., Y. H. M. Braun, A. Prugger, W. G. Maybee and P. K. S. Maloney, 2004: "Stepped Frequency GPR Field Trials in Potash Mines". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 755-758.
- Tronice, J. , P. Dietrich, U. Wahlig and E. Appel, 2002: "Integrating surface georadar and crosshole radar tomography: A validation experiment in braiden stream deposits". Geophysics, 67 (5), 1516-1523.
- Turesson, A., 2005: "Water content and porosity estimated from ground-penetrating radar and resistivity". Journal of Applied Geophysics (In press).
- Udías, A. y A. López Arroyo, 1970: "Análisis de frecuencias y su programación". Revista de Geofísica, 29 (1), 1-39.
- Uduwawala, D., M. Norgren, P. Fuks and A. W. Gunawardena, 2004: "A Deep Parametric Study of Resistor-Loaded Bow-Tie Antennas for Ground-Penetrating Radar Applications Using FDTD". IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 42 (4), 732-742.
- Unser, M., 2000: "Sampling—50 Years After Shannon". Proceedings of the Institute of Electrical and Electronic Engineers (IEEE), 88 (4), 569-587.
- Uriel Jiménez, E., 1985: "Análisis de series temporales. Modelos ARIMA". Ed. Paraninfo. Colección Ábaco.
- Utsi, E., 2004: "The Use of Ground Penetrating Radar as a Risk Mitigation Tool". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 795-798.
- Vafidis, A., N. Economou, Y. Ganiatsos, M. Manakou, G. Poulioudis, G. Sourlas, E. Vrontaki, A. Sarris, M. Guy and Th. Kalpaxis, 2005: "Integrated geophysical studies at ancient Itanos (Greece)". Journal of Archaeological Science, 32, 1023-1036.
- Wang, T. and M. L. Oristaglio, 2000a: "3-D simulation of GPR surveys over pipes in dispersive soils". Geophysics, 65 (5), 1560-1568.

- Wang, T. and M. L. Oristaglio, 2000b: "GPR imaging using the generalized Radon Transform". *Geophysics*, 65 (5), 1553-1559.
- Ward, S. H. and G. W. Hohmann, 1987: "Electromagnetic Theory for Geophysical Applications". *Investigations in Geophysics*, nº3: "Electromagnetic Methods in Applied Geophysics, volume 1: Theory", 131-311. Edited by M. N. Nabighian. Society of Exploration Geophysicist (SEG).
- Weglein, A. B., F. Araújo Gasparotto, P. M. Carvalho and R. H. Stolt, 1997: "An inverse-scattering series method for attenuating multiples in seismic reflection data". *Geophysics*, 62 (6), 1975-1989.
- Weisstein, E. W., 1999: "The CRC concise encyclopedia of mathematics". CRC Press LLC.
- Wen, J., G. A. McMechan and M. W. Booth, 1988: "Three-dimensional modeling and migration of seismic data using Fourier transforms". *Geophysics*, 53 (9), 1194-1201.
- Whiting, B. M. and T. O. Orvald, 2004: "GPR Investigations Of A Prehistoric Native American Village Site, Lower Snake River Floodplain, Idaho, USA". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 451-454.
- Whiting, B. M. and S. Hackenberger, 2004: "Using 3D GPR to Determine the Extent of Possible 17th and 18th Century Graves Beneath a Concrete Driveway: Bridgetown Synagogue, Bridgetown, Barbados". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 475-478.
- Whittaker, E. T., 1915: "On the Functions Which are Represented by the Expansions of the Interpolation Theory". *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A, Mathematical and physical sciences*, 35, 181-194.
- Whittaker, J. M., 1927: "On the Cardinal Function of Interpolation Theory". *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 2, 41-46.
- Whittaker, J. M., 1935: "Interpolatory Function Theory". Cambridge University Press.
- Wilson, G. A. and D. V. Thiel, 2002: "Modeling of inclined anisotropic complex permittivity media using the self-consistent impedance method". *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, 808-811.
- Witten, A., 2002: "Geophysica: MATLAB-based software for the simulation, display and processing of near-surface geophysical data". *Computers & Geosciences*, 28, 751-762.
- Xia, J., E. K. Franseen, R. D. Miller and T. V. Weiss, 2004: "Application of deterministic deconvolution of ground-penetrating radar data in a study of carbonate strata". *Journal of Applied Geophysics*, 56, 213-229.
- Xia, J., E. V. Franseen, R. D. Miller, T. V. Weis and A. P. Byrnes, 2003: "Improving ground-penetrating radar data in sedimentary rocks using deterministic deconvolution". *Journal of Applied Geophysics*, 54, 15-33.
- Xiangchun, Z. and S. Yaozu, 2003: "Investigation on image processing error in Moiré deflectometry applied to mini/micro scale flow visualization". *Optics Communications*, 226, 141-147.
- Xu, T. and G. A. McMechan, 1997: "GPR attenuation and its numerical simulation in 2.5 dimensions". *Geophysics*, 62 (1), 403-414.
- Yang, B., D. Gottlieb and J. S. Hesthaven, 1997: "Spectral Simulations of Electromagnetic Wave Scattering". *Journal of Computational Physics*, 134, 216-230.
- Yarovoy, A. G., 2003: "Monte-Carlo Simulations of Surface Clutter in GPR scenarios". *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, 130-132.

- Yarovoy, A. G., 2004: "Comprehensive Experimental Analysis of GPR Antennas". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 153-156.
- Yarovoy, A., V. Kovalenko and A. Fogar, 2003: "Impact of ground clutter on buried object detection by ground penetrating radar [ground penetrating radar]". IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, 755-777.
- Youn, O. K. and H-W. Zhou, 2001: "Depth imaging with multiples". Geophysics, 66 (1), 246-255.
- Young, R. A., R. M. Slatt and J. G. Staggs, 2003: "Application of ground penetrating radar imaging to deepwater (turbidite) outcrops". Marine and Petroleum Geology, 20, 809-821.
- Zdunek, A. and W. Rachowicz, 2004: "A goal-oriented hp-adaptive finite element approach to radar scattering problems". Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194, 657-674.
- Zeng, X. and G. A. McMechan, 1997: "GPR characterization of buried tanks and pipes". Geophysics, 62 (3), 797-806.
- Zeng, X., G. A. McMechan, J. Cai and H-W. Chen, 1995: "Comparison of ray and Fourier methods for modeling monostatic ground-penetrating radar profiles". Geophysics, 60 (6), 1727-1734.
- Zeng, X., G. A. McMechan and T. Xu, 2000: "Synthesis of amplitude-versus-offset variations in ground-penetrating radar data". Geophysics, 65 (1), 113-125.
- Zhan, H., C. R. Rappaport and E. L. Miller, 2001: "Mine Detection under Rough Ground Surfaces using 2-D FDTD Modeling and Hypothesis Testing". IEEE Antennas and Propagation International Symposium, 756.
- Zhao, Y., P. Gader, P. Chen and Y. Zhang, 2003: "Training DHMMs of Mine and Clutter to Minimize Landmine Detection Errors". IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 41 (5), 1016-1024.
- Zoubir, A. M., I. J. Chant, C. L. Brown, B. Barkat and C. Abeynayake, 2002: "Signal Processing Techniques for Landmine Detection Using Impulse Ground Penetrating Radar". IEEE Sensors Journal, 2 (1), 41-51.

Referencias no citadas

Aplicaciones

Antenas

- Guangyou, F. and Z. Zhongzhi, 1997: "The Calculation of a SP-GPR Antenna Near Lossy Media Interface by FD-TD Method". Asia Pacific Microwave Conference, 1193-1196.

- Holliger, K., B. Lampe, U. Meier, M. Lambert and A. G. Green, 2003: "Realistic modeling of surface ground-penetrating radar antenna systems: where do we stand?". 2nd International Workshop on Advanced GPR, 45-50.
- Huang, Z., K. Demarest and R. Plumb, 1996: "Ground-Penetrating Radar Antenna Modeling". International Geoscience and Remote Sensing Symposium, 778-780.
- Jiao, Y., G. A. McMechan and E. Pettinelli, 2000: "In situ 2-D and 3-D measurements of radiation patterns of half-wave dipole GPR antennas". Journal of Applied Geophysics, 43, 69-89.
- Kim, K-H., S-B. Cho, Y-J. Park and H-G. Park, 2003: "Novel Planar Ultra Wideband Steppad-Fat Dipole Antenna". IEEE Conference on Ultra Wideband Systems and Technologies, 508-512.
- Lampe, B., K. Holliger and A. G. Green, 2003: "A finite-difference time-domain simulation tool for ground penetrating radar antennas". Geophysics, 68 (3), 971-987.
- Lestari, A. A., A. G. Yarovoy and L. P. Lighthart, 2002: "Adaptive Antenna for Ground Penetrating Radar Applications". IEEE RADAR 2002, 228-231.
- Lighthart, L. P., A. G. Yarovoy and A. Y. Kirana, 2003: "GPR Antenna Simulations and Optimizations in Time Domain". International Conference on Antenna Theory and Techniques, 21-24.
- Phelan, M., H. Su and J. LoVetri, 2002: "Near Field Analysis of a Wideband Log-Spiral Antenna for 1-2 GHz GPR". IEEE Canadian conference on Electrical & Computer Engineering, 336-341.

Arqueología

- Arlsan, E., G. Biella, G. Boniolo, D. caporusso, R. de Franco, A. Lozej and L. Veronesse, 1999: "Geophysical investigations of the Olonium Roman site (Northern Como Lake)". Journal of Applied Geophysics, 41, 169-188.
- Basile, V., M. T. Carrozzo, S. Negri, L. Nuzzo, T. Quarta, A. V. Villani, 2000: "A ground-penetrating radar survey for achaeological investigations in an urban area (Lecce, Italy)". Journal of Applied Geophysics, 44, 15-32.
- Chianese, D., M. D'Emilio, S. Di Salvia, V. Lapenna, M. Ragosta and E. Rizzio, 2004: "Magnetic mapping, ground penetrating radar surveys and magnetic susceptibility measurements for the study of the archaeological site of Serra di Vaglio (southern Italy)". Journal of Archaeological Science, 31, 633-643.
- García García, F., C. Ballester Bernal, M. Ramírez Blanco and J. Benlloch Marco, 2004: "Study of the archaeological structures of the subsurface churches of the Society of Jesus, city of Valencia (Spain), derived from the GPR technique". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 467-470.
- Hruska, J. and G. Fuchs, 1999: "GPR prospection in ancient Ephesos". Journal of Applied Geophysics, 41, 293-312.
- Lorenzo, E. y M. C. Hernández, 1995: "Prospección geofísica en yacimientos arqueológicos con georadar en España. dos casos: Numancia y El Paular". En "Física de la Tierra 7: Geofísica Aplicada", 193-205. Editado por M. C. Hernández y M. Herraiz. Departamento de Física de la Tierra, Astronomía y Astrofísica I. Universidad Complutense de Madrid.
- Mainstein-Evron, M., A. Beck and M. Ezersky, 2003: "Geophysical investigations in the service of Mount Carmen (Israel) prehistoric research". Journal of Archaeological Science, 30, 1331-1341.

- Pérez Gracia, M. V., J. A. Canas, L. G. Pujades, J. Clapés, O. Caselles, F. García and R. Osorio, 2000: "GPR survey to confirm the location of ancient structures under the Valencian Cathedral (Spain)". *Journal of Applied Geophysics*, 43, 167-174.
- Persson, K. and B. Olofsson, 2004: "Inside a mound: Applied geophysics in archaeological prospecting at the Kings' Mounds, Gamla Uppsala, Sweden". *Journal of Archaeological Science*, 31, 551-562.
- Ranieri, G., A. Casas, J. C. Tapias, R. Deiana y L. Noli, 2002: "Prospección por tomografía eléctrica y GPR de la necrópolis fenicio-púnica del Cabo San Marco (Cerdeña Occidental, Italia)". 3ª Asamblea Hispano-Portuguesa de Geodesia y Geofísica, 1799-1802.
- Sambuelli, L., L. V. Socco and L. Brecciaroli, 1999: "Acquisition and processing of electric, magnetic and GPR data on a Roman site (Victimulae, Salussola, Biella)". *Journal of Applied Geophysics*, 41, 189-204.
- Shaaban, F. F. and F. A. Shaaban, 2001: "Use of two-dimensional electric resistivity and ground penetrating radar for archaeological prospecting at the ancient capital of Egypt". *African Earth Sciences*, 33, 661-671.
- Zhou, H. and M. Sato, 2000: "Application of vertical radar profiles technique to Sendai Castle". *Geophysics*, 65 (2), 533-539.

Contaminación y medio ambiente

- Atekwana, E. A., W. A. Sauck and D. D. Werkema Jr., 2000: "Investigations of geoelectrical signatures at a hydrocarbon contaminated site". *Journal of Applied Geophysics*, 44, 167-180.
- Lorenzo, H., P. Arias, M. Pereira, F. Rial and A. Tejada, 2004: "Use of GPR to map Prestige fuel layers below sando fo the beaches of Galicia". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 597-600.

Detección de minas y otro armamento

- Bruschini, C., B. Gros, F. Guerne, P-Y. Pièce and O. Carmona, 1998: "Ground penetrating radar and imaging metal detector for antipersonnel mine detection". *Journal of Applied Geophysics*, 40, 59-71.
- Leij, W. R. van der, D. B. Davidson and D. M. Weber, 1999: "Synthesizing GPR returns using body of revolution FD-TD method: initial results". *IEEE AFRICON*, 1059-1064.
- Montoya, T. P. and G. S. Smith, 1999: "Land Mine Detection Using a Ground-Penetrating Radar Based on Resistively Loaded Vee Dipoles". *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 47 (12), 1795-1806.

Estratigrafía

- Dagallier, G., A. I. Laitinen, F. Malartre, I. P. A. M. Van Campenhout, P. C. H. Veecken, 2000: "Ground penetrating radar application in a shallow marine Oxfordian limestone sequence located on the eastern flank of the Paris Basin, NE France". *Sedimentary Geology*, 130, 149-165.
- García García, F., J. L. Berné Valero, I. Quintanilla García y J. V. García Cuenca, 2002: "Integración de las técnicas GPS y georradar para cartografiado del fondo lacustre de La Albufera de Valencia". 3ª Asamblea Hispano-Portuguesa de Geodesia y Geofísica, 1819-1822.
- Gourry, J-C., F. Vermeersch, M. Garcin and D. Giot, 2003: "Contribution of geophysics to the study of alluvial deposits: a case study in the Val d'Aray area of the River Loire, France". *Journal of Applied Geophysics*, 54, 35-49.
- Kruse, S. E., J. C. Schneider, D. J. Campagna, J. A. Inman and T. D. Hickey, 2000: "Ground penetrating radar imaging of cap rock, caliche and carbonate strata". *Journal of Applied Geophysics*, 43, 239-249.

Exploración planetaria

- Berthelier, J. J., R. Ney, F. Costard, M. Hamelin, A. Meyer, B. Martinat, A. Reineix, Th. Hansen, M. Bano, W. Kofman, F. Lefeuvre and P. Paillou, 2000: "The GPR experiment on NETLANDER". *Planetary and Space Science*, 48, 1161-1180.

Geodinámica

- Chow, J., J. Angelier, J-J. Hua, J-C. Lee and R. Sun, 2001: "Paleoseismic event and active faulting: from ground penetrating radar and high-resolution seismic reflection profiles across the Chihshang Fault, eastern Taiwan". *Tectonophysics*, 333, 241-259.
- Demant, D., F. Renardy, K. Vanneste, D. Jongmans, T. Camelbeeck and M. Meghraoui, 2001: "The use of geophysical prospecting for imaging active faults in the Roer Graben, Belgium". *Geophysics*, 66 (1), 78-89.
- Silva, C. C. N. da, W. E. de Medeiros, E. F. J. de Sá and P. X. Neto, 2004: "Resistivity and ground-penetrating radar images of fractures in a crystalline aquifer: a case study in Caiçara farm-NE Brazil". *Journal of Applied Geophysics*, 56, 295-307.

Geomorfología

- Al-fares, W., M. Bakalowicz, R. Guérin and M. Dukhan, 2002: "Analysis of the karst aquifer structure of the Lamalou area (Hérault, France) with ground penetrating radar". *Journal of Applied Geophysics*, 51, 97-106.

- Corbeanu, R. M., G. A. McMechan, R. B. Szerbiak and K. Soegaard, 2002: "Prediction of 3-D fluid permeability and mudstone distributions from ground-penetrating radar (GPR) attributes: Example from the Cretaceous Ferron Sandstone Member, east-central Utah". *Geophysics*, 67 (5), 1495-1504.
- Elkhetali, S. I., 2001: "Two and Three Dimensional Images of Shallow Geological structures". 5th International Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Service, 434-435.
- Fisher, E., G. A. McMechan and A. P. Annan, 1992: "Acquisition and processing of wide-aperture ground-penetrating radar data". *Geophysics*, 57 (3), 495-504.
- Grang, J. A., M. J. Brooks and B. E. Taylor, 1998: "New constraints on the evolution of Carolina Bays from ground-penetrating radar". *Geomorphology*, 22, 325-345.
- Hammon III, W. S., X. Zeng, R. M. Corbeanu and G. A. McMechan, 2002: "Estimation of the spatial distribution of fluid permeability from surface and tomographic GPR data and core, with a 2-D example from the Ferron Sandstone, Utah". *Geophysics*, 67 (5), 1505-1515.
- Jol, H. M., D. C. Lawton and D. G. Smith, 2002: "Ground penetrating radar: 2-D and 3-D subsurface imaging of a coastal barrier spit, Long Beach, WA, USA". *Geomorphology*, 53, 165-181.
- McMechan, G. A., R. G. Loucks, X. Zeng and P. Mescher, 1998: "Ground penetrating radar imaging of a collapsed paleocave system in the Ellenburger dolomite, central Texas". *Journal of Applied Geophysics*, 39, 1-10.
- Pettinelli, E., S. E. beaubien, F. S. Marzano and N. Pierdicca, 1995: "Comparison of GPR Field Results from a Stratified Limestone Terrain with Model Simulations". *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, 1705-1707.
- Sigurdsson, T. and T. Overgaard, 1998: "Application of GPR for 3-D visualization of geological and structural variation in a limestone formation". *Journal of Applied Geophysics*, 40, 29-36.
- Szerbiak, R. B., G. A. McMechan, R. Corbeanu, C. Forster and S. H. Snelgrove, 2001: "3-D characterization of a clastic reservoir analog: From 3-D GPR data to a 3-D fluid permeability model". *Geophysics*, 66 (4), 1026-1037.

Glaciología

- Beres, M., P. Huggenberger, A. G. Green and H. Horstmeyer, 1999: "Using two- and three-dimensional georadar methods to characterize glaciofluvial architecture". *Sedimentary Geology*, 129, 1-24.

Hidrología

- Greaves, R. J., D. P. Lesmes, J. M. Lee and M. N. Toksöz, 1996: "Velocity variations and water content estimated from multi-offset, ground-penetrating radar". *Geophysics*, 61 (3), 683-695.
- Slater, L. and A. Reeve, 2002: "Investigating peatland stratigraphy and hydrogeology using integrated electrical geophysics". *Geophysics*, 67 (2), 365-378.

Ingeniería civil

- Benedetto, A., F. Benedetto, M. R. de Blasiis and G. Giunta, 2003: "Ground Penetrating Radar Signal Processing for Road Monitoring and Damage Detection". 7th International symposium on Signal Processing and Its Applications, 325-328.
- Forde, M. C., D. M. McCann, M. R. Clark, K. J. Broughton, P. J. Fenning and A. Brown, 1999: "Radar measurement of bridge scour". NDT&E International, 32, 481-492.
- Hugenschmidt, J., 2000: "Railway track inspection using GPR". Journal of Applied Geophysics, 43, 147-155.
- Hugenschmidt, J., 2002: "Concrete bridge inspection with a mobile GPR system". Construction and Building Materials, 16, 147-154.
- Karastathis, V. K., P. N. Karmis, G. Drakatos and G. Stavrakakis, 2002: "Geophysical methods contributing to the testing of concrete dams. Application at the Marathon Dam". Journal of Applied Geophysics, 50, 247-260.
- Olhoef, G. R., S. Smith III, J. P. Hyslip and E. T. Selig Jr., 2004: "GPR in Railroad Investigations". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 635-638.
- Saarenketo, T. and T. Scullion, 2000: Road evaluation with ground penetrating radar". Journal of Applied Geophysics, 43, 119-138.
- Tercier, P., R. Knight and H. Jol, 2000: "A comparison of the correlation structure in GPR images of deltaic and barrier-spit depositional environments". Geophysics, 65 (4) 1142-1153.
- Wu, R., X. Li and J. Li, 2002: "Continuous pavement profiling with ground-penetrating radar". IEEE Proc.-Radar Sonar Navig., 149 (4), 183-193.

Metodologías para el modelado de perfiles de geo-radar

Diferencias finitas

- Bourgeois, J. M. and G. S. Smith, 1997: "A complete electromagnetic simulation of a ground penetrating radar for mine detection: Theory and experiment". IEEE Antennas and Propagat. Soc. Int. Symp., 2, 986-989.
- Chew, W. C., F. L. Teixeira, M. Straka, M. L. Oristaglio and T. Wang, 1997: "Parallel 3D PML-FDTD Simulation of GPR on Dispersive, Inhomogeneous and Conductive Media". IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, 380-383.
- Guangyou, F. and Z. Zhongzhi, 1997: "The Calculation of a SP-GPR Antenna Near Lossy Media Interface by FD-TD Method". Asia Pacific Microwave Conference, 1193-1196.
- Guangyou, F., 2001: "Reconstruction parameters of underground objects based on FDTD and optimization method". IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2698-2700.

- Gürel, L, and U. Oguz, 2001: "Simulations of Ground-Penetrating Radars Over Lossy and Heterogeneous Grounds". IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 39 (6), 1190-1197.
- Gürel, L, and U. Oguz, 2003: "Optimization of the Transmitter-Receiver Separation in the Ground-Penetrating Radar". IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 51 (3), 362-370.
- Holliger, K., B. Lampe, U. Meier, M. Lambert and A. G. Green, 2003: "Realistic modeling of surface ground-penetrating radar antenna systems: where do we stand?". 2nd International Workshop on Advanced GPR, 45-50.
- Huang, Z., K. Demarest and R. Plumb, 1996: "Ground-Penetrating Radar Antenna Modeling". International Geoscience and Remote Sensing Symposium, 778-780.
- Lampe, B., K. Holliger and A. G. Green, 2003: "A finite-difference time-domain simulation tool for ground penetrating radar antennas". Geophysics, 68 (3), 971-987.
- Leij, W. R. van der, D. B. Davidson and D. M. Weber, 1999: "Synthesizing GPR returns using body of revolution FD-TD method: initial results". IEEE AFRICON, 1059-1064.
- Ligthart, L. P., A. G. Yarovoy and A. Y. Kirana, 2003: "GPR Antenna Simulations and Optimizations in Time Domain". International Conference on Antenna Theory and Techniques, 21-24.
- Montoya, T. P. and G. S. Smith, 1999: "Land Mine Detection Using a Ground-Penetrating Radar Based on Resistively Loaded Vee Dipoles". IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 47 (12), 1795-1806.
- Oguz, U. and L. Gürel, 2002: "Frequency Responses of Ground-Penetrating Radars Operating Over Highly Lossy Grounds". IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 40 (6), 1385-1394.
- Shubitidze, F., K. O'Neill, I. Shamatava, K. Sun and K. D. Paulsen, 2003: "Analysis of GPR scattering by multiple subsurface metallic objects to improve UXO discrimination". IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, 4163-4165.
- Teggatz, A., A. Jöstingmeier, T. Meyer, and A. S. Omar, 2004: "Simulation of a Ground Penetrating Radar Environment by Means of Finite Integration Methods Using an Automatic Control Approach". 1st CST European User Group Meeting, 2095-2098.
- Teixeira, F.L., W. C. Chew, M. Straka, M. L. Oristaglio and T. Wang, 1997: "3D PML-FDTD simulation of ground penetrating radar on dispersive Earth media". IEEE International Geoscience and Remote Sensing, 945-947.
- Tronicke, J. and K. Holliger, 2004: "Influence of the borehole and its filling medium on crosshole georadar data: experimental evidence and numerical simulations". 10th International Conference on Ground Penetrating Radar, 237-240.
- Wang, T. and M. L. Oristaglio, 2000: "3-D simulation of GPR surveys over pipes in dispersive soils". Geophysics, 65 (5), 1560-1568.
- Yang, B. and C. Rappaport, 2001: "Response of Realistic Soil for GPR Applications with 2-D FDTD". IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 39 (6), 1198-1205.
- Zhan, Y., C. Liang and G. Fang, 2000: "Development of a 3-D GPR Simulator Using the FDTD Method". 5th International Symposium on Antennas, Propagation and EM Theory, 459-463.

Filtrado de Fourier

Pettinelli, E., S. E. beaubien, F. S. Marzano and N. Pierdicca, 1995: "Comparison of GPR Field Results from a Stratified Limestone Terrain with Model Simulations". IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, 1705-1707.

Witten, A. J., J. E. Molyncus and J. E. Nyquist, 1994: "Ground Penetrating Radar Tomography: Algorithms and Case Studies". IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 32 (2), 461-467.

Pseudo espectral

Arcone, S. A., P. R. Peapples and L. Liu, 2003: "Propagation of a ground-penetrating radar (GPR) pulse in a thin-surface waveguide". Geophysics, 68 (6), 1922-1933.

Casper, D. A. and K-J. Samuel Kung, 1996: "Simulation of ground-penetrating radar waves in a 2-D soil model". Geophysics, 61 (4), 1034-1049.

Trazado de rayos

Cai, J. and G. A. McMechan, 1999: "2-D ray-based tomography for velocity, layer shape, and attenuation from GPR data". Geophysics, 64 (5), 1579-1593.

Elkhetali, S. I., 2001: "Two and Three Dimensional Images of Shallow Geological structures". 5th International Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Service, 434-435.

Hammon III, W. S., X. Zeng, R. M. Corbeanu and G. A. McMechan, 2002: "Estimation of the spatial distribution of fluid permeability from surface and tomographic GPR data and core, with a 2-D example from the Ferron Sandstone, Utah". Geophysics, 67 (5), 1505-1515.

Szerbiak, R. B., G. A. McMechan, R. Corbeanu, C. Forster and S. H. Snelgrove, 2001: "3-D characterization of a clastic reservoir analog: From 3-D GPR data to a 3-D fluid permeability model". Geophysics, 66 (4), 1026-1037.

Thierry, P., S. Operto and G. Lambaré, 1999: "Fast 2-D ray+Born migration/inversion in complex media". Geophysics, 64 (1), 162-181.