UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Análisis Matemático

PROBLEMAS DE MAYORACIÓN EN CLASES DE OPERADORES ENTRE RETÍCULOS DE BANACH

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Julio Flores Álvarez

Bajo la dirección de los doctores

Francisco Luis Hernández Rodríguez
César Ruiz Bermejo

Madrid, 2001

ISBN: 84-669-1857-4

Problemas de mayoración en clases de operadores entre retículos de Banach

Julio Flores Álvarez

Directores de Tesis:

Francisco L. Hernández Rodríguez

César Ruiz Bermejo

Memoria para optar al grado de Doctor en Matemáticas.

Departamento de Análisis Matemático.

Universidad Complutense de Madrid.

Diciembre de 2000

A Mónica

Índice general

Introducción

La presente Memoria tiene como marco la Teoría de Retículos de Banach y Operadores Positivos que se encuadra en esa extensa rama de las Matemáticas que es el Análisis Funcional y la Teoría de Operadores. La Teoría de Operadores Positivos es un campo ampliamente estudiado y con notables aplicaciones como puede apreciarse en las memorias de Aliprantis y Burkinshaw ([**4**]), Meyer-Nieberg ([**50**]), Schaefer ([**65**]) y Zaanen ([**80**]). Un aspecto central de dicha teoría es el *problema de mayoración* de operadores positivos. En general, dados dos retículos de Banach E y F y una clase de operadores $\mathcal{I}$ entre E y F, surge el siguiente problema de mayoración: ¿qué condiciones sobre los retículos E y F hacen que todo operador positivo dominado por un operador de la clase $\mathcal{I}$ deba pertenecer a $\mathcal{I}$? En otras palabras, ¿es cierto que si $0 \leq S \leq T : E \to F$ son operadores positivos y $T \in \mathcal{I}$, se deduce que $S \in \mathcal{I}$?

Varios autores han tratado el problema de mayoración en distintas clases de operadores. Por ejemplo, la importante caracterización de operadores integrales dada por Bukhvalov ([**9**]) proporciona para dicha clase un resultado de mayoración (ver también ([**46**], [**66**]). Cabe notar que en la clase de los operadores pseudo-integrales introducida por Sourour, que generaliza a la de los integrales, se ha obtenido también un resultado de mayoración ([**67**], [**68**], [**71**], [**23**]).

Es quizás en la clase de los operadores compactos en la que se ha dado el resultado de mayoración más celebrado por sus aplicaciones. En concreto Dodds y Fremlin ([**17**]) probaron el siguiente:

Teorema 0.1. *Sean E y F dos retículos de Banach tales que E' y F son orden continuos, y sean $0 \leq S \leq T : E \to F$ dos operadores positivos. Si T es compacto entonces S es compacto.*

El interés del teorema de Dodds-Fremlin va más allá de su valor intrínseco que es innegable, de hecho viene a dar una prueba rigurosa de un resultado que desde el mundo de la Física Teórica se conjeturaba (ver [**4**, pág. 279] para un enfoque histórico del problema). Su demostración es consecuencia de la elaboración de una teoría más amplia ([**17**]), importante por sí misma, adecuada a un enunciado de carácter tan general que extiende notablemente la versión paralela que dio Pitt ([**59**]) para operadores entre espacios $L^p(\mu)$.

En cuanto a la clase de los operadores débilmente compactos, Abramovich dio en [**1**] un resultado parcial de mayoración en dicha clase que posteriormente fue mejorado por Wickstead ([**74**]) por medio del siguiente:

Teorema 0.2. *Sean E y F retículos de Banach y $0 \leq S \leq T : E \to F$ operadores positivos. Si F o E' es orden continuo y T es débilmente compacto, entonces S es débilmente compacto.*

Por su parte Kalton y Saab ([**39**]) han considerado el problema de mayoración para operadores Dunford-Pettis obteniendo el siguiente:

Teorema 0.3. *Sean E y F retículos de Banach y $0 \leq S \leq T : E \to F$ operadores positivos. Si F es orden continuo y T es Dunford-Pettis, entonces S es Dunford-Pettis.*

Es de destacar que Wickstead [**75**] ha dado resultados recíprocos de los Teoremas de Dodds-Fremlin y Kalton-Saab identificando las condiciones que permiten enunciar resultados de mayoración en dichas clases.

Merece la pena observar que en algunas clases de operadores el problema de mayoración tiene siempre una repuesta positiva independiente de los espacios considerados. Por ejemplo las clases de los operadores M-débilmente compactos, semicompactos, L-débilmente compactos ([**4**]) o la de los operadores integrales ([**9**]).

Por otra parte el problema de mayoración para endomorfismos, es decir $E = F$, ha sido ampliamente estudiado por Aliprantis y Burkinshaw ([**2**], [**3**]). En concreto probaron que si $0 \leq S \leq T : E \to E$ son operadores positivos y T es compacto, entonces S^2 es compacto si E o E' son orden continuos, y S^3 es compacto sin condiciones sobre E o E'. También probaron que S^2 es débilmente compacto si T lo es.

El objeto fundamental de esta Memoria es estudiar el problema de mayoración en ciertas clases de operadores positivos, así como establecer relaciones entre esas clases, todas ellas próximas a la de los operadores compactos. En concreto y desde un punto de vista cronológico el origen de nuestra investigación se remonta a la siguiente pregunta: ¿existe un resultado de mayoración para la clase de operadores estrictamente singulares entre dos retículos de Banach?

Recordemos que un operador T entre dos espacios de Banach X e Y es *estrictamente singular,* o *Kato,* (abrev. SS) si no preserva ningún subespacio cerrado de dimensión infinita, en otras palabras si la restricción de T a cualquier subespacio cerrado de dimensión infinita de X no es un isomorfismo sobre su imagen. Esta clase fue introducida por Kato ([**42**]) en 1958 en relación con problemas de perturbación de operadores semi-Fredholm y ha sido bastante estudiada por varios autores. En particular en la Teoría de espacios de Banach proporciona un modo de comparar la estructura de dos espacios. En los libros de Goldberg ([**31**]), Lindenstrauss-Tzafriri ([**44**]) y Rolewicz ([**61**]) se pueden consultar varias de las propiedades generales de estos operadores.

El hecho de que la clase de los operadores SS contiene y es próxima a la de operadores compactos hacía presagiar la existencia de una respuesta positiva a nuestra pregunta si teníamos en cuenta el teorema de Dodds-Fremlin. Por otra parte un examen atento de la prueba de dicho teorema manifestaba diferencias insalvables entre ambas clases de operadores que no nos permitían trasladar los argumentos usados en la demostración de una clase a otra.

A lo largo de la investigación que nos ha ocupado surgieron como herramienta básica de estudio los operadores disjuntamente estrictamente singulares, introducidos por Hernández y Rodríguez-Salinas en [**34**] en relación con la existencia de copias singulares complementadas de l^p en retículos de Banach de funciones. Un operador definido en un retículo de Banach E y con valores en un espacio de Banach es *disjuntamente estrictamente singular* (abrev. DSS) si no preserva ningún subespacio generado por una sucesión disjunta de vectores en E. Claramente todo operador SS es DSS. En general estas clases son distintas pudiendo coincidir en casos particulares. Así ocurre cuando E tiene base de Schauder de vectores disjuntos ([**33**]). De este modo el problema original se relaciona con el problema de mayoración en la clase de los operadores disjuntamente estrictamente singulares. De hecho éste último es interesante por sí mismo ya que toda una serie de problemas cercanos aparecen naturalmente. Así el Capítulo segundo de este trabajo se dedica a estudiar varios aspectos de esta clase de operadores, obteniéndose en particular el siguiente resultado de mayoración (cf. Teorema 2.14):

TEOREMA 0.4. *Sean E y F retículos de Banach, con F orden continuo, y sean $0 \leq S \leq T : E \rightarrow F$ operadores positivos. Si T es DSS entonces S es DSS.*

Más aún, en el Corolario 2.19 se prueba que la clase de los operadores disjuntamente estrictamente singulares entre dos retículos de Banach E y F es un orden ideal en la clase de los operadores regulares entre E y F cuando F es orden continuo. En contraste se proporcionan ejemplos (cf. Ejemplo 2.15) que muestran que en general el problema de mayoración en esta clase de operadores tiene respuesta negativa.

En dicho capítulo se estudian así mismo los operadores reticularmente estrictamente singulares que fueron introducidos en la Tesis Doctoral de García del Amo ([**26**]). Decimos que un operador T entre un retículo de Banach E y un espacio de Banach es *reticularmente estrictamente singular* si la restricción de T a cualquier subretículo de dimensión infinita de E no es un isomorfismo. Claramente todo operador disjuntamente estrictamente singular es reticularmente estrictamente singular; en este capítulo probamos que para un operador regular entre dos retículos de Banach E y F ambos conceptos son equivalentes cuando F es orden continuo (cf. Proposición 2.13). Este resultado es esencial para la prueba que damos del Teorema 0.4. También damos un resultado que caracteriza vía compacidad ambas clases de operadores cuando se imponen condiciones de orden continuidad sobre E' y F (cf. Proposición 2.29 y Corolario 2.30). Por último se estudia el problema de mayoración en el caso $E = F$ en ambas clases de operadores. En concreto probamos que si $0 \leq S \leq T : E \rightarrow E$ son dos operadores y T es disjuntamente estrictamente singular, entonces S^2 es disjuntamente estrictamente singular, todo ello sin condiciones sobre E, a la vez que por medio de un ejemplo mostramos que este resultado es el mejor posible.

A continuación consideramos una cuestión de autodualidad en la clase de operadores disjuntamente estrictamente singulares. En general el hecho de que un operador sea disjuntamente estrictamente singular no implica que el operador traspuesto lo sea, ni recíprocamente. Sin embargo probamos que si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finita, E es un retículo de Banach con dual orden continuo y $T : E \rightarrow L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, es un operador regular, entonces T es disjuntamente estrictamente singular si el operador traspuesto T' lo es (cf. Proposición 2.36). También probamos el resultado dual (cf. Corolario 2.38). Concluimos el capítulo con el estudio del problema de mayoración para una clase "dual" de los operadores reticularmente estrictamente singulares, la de los *operadores reticularmente estrictamente cosingulares* estudiada por García del Amo en [**26**].

Como hemos comentado anteriormente, existe una relación intrínseca entre el problema de mayoración en la clase de operadores estrictamente singulares, punto de partida de este trabajo, con el problema correspondiente para operadores disjuntamente estrictamente singulares. El Capítulo tercero de esta memoria se dedica en su mayor parte a estudiar tal relación, haciendo un uso sistemático del método de disjuntificación introducido por Kadec y Pelczynski ([**37**],[**45**]). Dicho método junto con otros ingredientes de gran importancia como el Teorema de Freudenthal ([**25**]) o el propio Teorema de mayoración para operadores disjuntamente estrictamente singulares (cf. Teorema 2.14), permiten probar uno de los resultados principales de esta Memoria (cf. Teorema 3.15):

TEOREMA 0.5. *Sean E y F retículos de Banach tales que E, F y E' son orden continuos. Supongamos además que E satisface la propiedad de la división subsecuencial. Si $0 \leq S \leq T : E \to F$ son operadores positivos y T es estrictamente singular, entonces S es también estrictamente singular.*

La propiedad de la división subsecuencial fue observada por Kadec y Pelczynski para los espacios $L^p(\mu)$ ([**37**]) y generalizada por Figiel, Johnson y Tzafriri ([**22**]) a retículos de funciones, y Weis ([**72**]). De hecho cualquier retículo p-cóncavo y q-convexo, $1 < q, p < \infty$ satiface las hipótesis del Teorema 0.5 así como cualquier espacio de funciones invariante por reordenamiento que no contenga copias isomorfas de c_0 ([**72**],[**36**], [**21**]). Los Corolarios 3.18 y 3.19 recogen estas y otras condiciones concretas para las que se puede aplicar el Teorema anterior.

En el mismo capítulo se dan ejemplos que ponen de manifiesto que el problema de mayoración tiene en general una respuesta negativa, y se recalca la importancia que tiene la condición de orden continuidad del retículo de llegada F (cf. Ejemplo 3.22).

También consideramos el caso $E = F$ de los endomorfismos obteniendo un resultado en el que suprimimos la propiedad de la subdivisión secuencial de entre las hipótesis (cf. Proposición 3.26).

Parte del trabajo realizado tiene como consecuencia un resultado curioso que en principio no parece estar muy relacionado con los problemas de mayoración (cf. Proposición 3.23): la no existencia de isomorfismos regulares entre los espacios l^2 y $L^2[0,1]$, extendiendo así el hecho conocido de que l^2 y $L^2[0,1]$ no son reticularmente isomorfos.

El estudio del problema de mayoración en la clase de los operadores estrictamente singulares tiene su aplicación al considerar el problema similar en la clase de los operadores *estrictamente cosingulares* introducida por Pelczynski en [**57**] que, bajo algunas condiciones, se comporta como la clase dual de la de los operadores estrictamente singulares. Recordamos que un operador T entre dos espacios de Banach X e Y es *estrictamente cosingular* si para todo subespacio M de Y de codimensión infinita el operador $\pi T : X \to Y/M$ no es sobreyectivo, donde π es la aplicación cociente de Y sobre Y/M. Así, y vía dualidad, obtenemos un resultado de mayoración para esta clase de operadores que constituye el contenido del Teorema 3.29 del capítulo tercero.

El Capítulo cuarto estudia los operadores *delgados* (*"thin"*) introducidos por Neidinger ([**52**], [**53**]) en relación con la factorización de operadores por espacios l^p-hereditarios. Si X e Y son dos espacios de Banach, se dice que un operador $T : X \to Y$ es *delgado* (*"thin"*) si la bola unidad B_M de cualquier subespacio M de Y de dimensión infinita no es casi absorbida por TB_X, es decir si existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\lambda > 0$ se tiene que $B_M \nsubseteq \lambda TB_X + \varepsilon B_Y$.

Esta clase de operadores está situada entre la clase de los operadores compactos y la de los estrictamente singulares, es decir, todo operador compacto es delgado y todo operador delgado es estrictamente singular; sin embargo las tres clases son en general distintas. El capítulo se dedica fundamentalmente a estudiar la relación de los operadores delgados con los operadores estrictamente singulares, y se prueba la igualdad de ambas clases en casos concretos (cf. Corolario 4.19). Los resultados obtenidos se refieren mayormente a operadores regulares con valores en espacios $L^p(\mu)$. Relacionado con esto cabe recordar el siguiente resultado de Caselles y González ([**11**, Prop. 1]): *Si $T : L^p(\mu) \to L^q(\mu)$, $1 < q \leq p < \infty$, es un operador regular, entonces T es estrictamente singular si y sólo si T es compacto.* En el Teorema 4.8 mostramos que esta equivalencia se mantiene en el caso $p < q$ cuando sustituimos la clase de los operadores compactos por la de los operadores delgados.

En el Capítulo cuarto también se considera el problema de autodualidad en la clase de los operadores estrictamente singulares. En general esta clase no es autodual, a diferencia de lo que ocurre para operadores compactos o débilmente compactos, pero se obtienen resultados positivos interesantes en el marco de los operadores integrales entre espacios de Köthe de funciones que incluyen a los espacios $L^p(\mu)$. También probamos que para un endomorfismo regular e integral de $L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$, ser disjuntamente estrictamente singular, ser estrictamente singular, ser delgado y ser compacto son condiciones equivalentes. Vale la pena observar que los endomorfismos de $L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$, que son SS han sido caracterizados por Weis en [**70**] como aquellos que son simultáneamente l^2-singulares y l^p-singulares (un operador es l^p-singular si no preserva ninguna copia isomorfa de l^p). Concluimos el capítulo con un resultado de mayoración (cf. Corolario 4.20) que se deriva de una extensión de la equivalencia anterior y del Teorema dado de mayoración para operadores estrictamente singulares.

El quinto y último Capítulo se dedica a considerar la clase de los operadores *estrechos* ("*narrow*") estudiada por Plichko y Popov en [**60**]. Si E denota un espacio de Köthe sobre un espacio de probabilidad (Ω, Σ, μ) donde μ es una medida sin átomos e Y es un espacio de Banach, se dice que un operador $T : E \to Y$ es *estrecho* si para todo conjunto $A \in \Sigma$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición $\{A_1, A_2\}$ del conjunto A, con $\mu(A_1) = \mu(A_2)$ tal que $\|T(\chi_{A_1} - \chi_{A_2})\| < \varepsilon$. Los operadores estrechos son útiles en el estudio de propiedades geométricas como la propiedad de Daugavet o en el estudio de subespacios ricos ([**60**], [**38**]).

La clase de los operadores estrechos ha sido considerada por varios autores. Por ejemplo Ghoussoub y Rosenthal estudian en [**30**] los operadores en $L^1[0,1]$ que preservan normasigno ("norm-sign-preserving operators") que son precisamente la clase complementaria de la de los operadores estrechos. Por otra parte es conocido que todo operador $T : L^p(\mu) \to L^p(\nu)$ que es $L^p[0,1]$-singular (es decir que no preserva copia de $L^p[0,1]$) es estrecho si $1 \leq p \leq 2$. Esto ha sido probado para $p = 1$ por Enflo y Starbird ([**20**]) y para $1 < p < 2$ por Johnson, Maurey, Schechtman y Tzafriri ([**36**]). Relacionado con esto Plichko y Popov plantean en [**60**] la siguiente pregunta: si $1 \leq p < \infty$ y $T : L^p[0,1] \to Y$ es un operador l^2-singular, ¿es T necesariamente estrecho?

La primera parte del Capítulo quinto se dedica a dar una respuesta parcial a esta cuestión. Así obtenemos la siguiente:

PROPOSICIÓN 0.6. *Sea F un retículo de Banach orden continuo y $T : L^p[0,1] \to F$, $1 \leq p < \infty$, un operador regular. Si T es l^2-singular entonces T es estrecho. En particular, si T es SS entonces T es estrecho.*

La prueba usa el conocido resultado de Rosenthal de que todo operador en $L^1[0,1]$ que es l^2-singular es Dunford-Pettis ([**62**]). También damos condiciones suficientes para que un operador definido en $L^1[0,1]$ sea estrecho distintas de las dadas por Bourgain y Rosenthal en [**8**].

La segunda parte del capítulo quinto se dedica (como no podía ser de otro modo) al problema de mayoración en la clase de los operadores estrechos. Dicho problema tiene en general una respuesta negativa como se muestra en el Ejemplo 5.16, pero obtenemos el siguiente resultado general:

TEOREMA 0.7. *Sea E un espacio de Köthe de funciones sobre un espacio de probabilidad (Ω, Σ, μ) sin μ-átomos, F un retículo de Banach orden continuo y $0 \leq S \leq T : E \to F$ operadores positivos. Si T es estrecho entonces S es estrecho.*

Subrayamos el hecho de que las técnicas empleadas en la demostración eluden el inconveniente que representa la ausencia de estructura vectorial en la clase de los operadores estrechos.

Finalmente señalemos que el Capítulo primero ha sido reservado para exponer conceptos y resultados de carácter general que son usados en el resto de los capítulos, y a ello debe su extensión. Algunos de estos resultados son bien conocidos, mientras que otros son versiones mejoradas de resultados anteriores (p.e. Lema 1.10, Proposición 1.59), o novedosos (p.e. Proposición 1.46 b)). Hemos pretendido así presentar esta Memoria del modo más autocontenido posible, facilitando con ello su lectura. No obstante referimos al lector a las monografías de Aliprantis y Burkinshaw ([**4**]), Lindenstrauss y Tzafriri ([**45**]), Meyer-Nieberg ([**50**]), Schaefer ([**65**]) y Zaanen ([**80**]) para consultar cualquier término o resultado de teoría de retículos de Banach y operadores regulares que hayamos podido emplear sin hacer referencia explícita del mismo.

Quiero finalizar esta Introducción dando las gracias expresamente a todos los miembros del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad Complutense de Madrid que han contribuido de una u otra forma a materializar este proyecto. En cuanto a mis directores de Tesis, Paco y César, ¡qué puedo decir! Ellos son los que han sufrido de cerca mis divagaciones, disparates, aciertos, alegrías y decepciones, y lo han hecho con paciencia y amistad. Les estoy profundamente agradecido por todo el tiempo que han empleado en enseñarme a organizar una investigación, así como por todo el material que han puesto en mis manos, además de sus valiosas indicaciones; todo lo cual ha mantenido vivo el estímulo que se necesita para llevar a buen fin una empresa como esta.

Otro grupo de personas me han dado todo su apoyo, confianza, amor y comprensión a lo largo de estos años. A ellos, a mi mujer, a mis padres y hermanas va el agradecimiento más profundo y emocionado. Por último y por encima de todo quiero dar las gracias a Dios que con su habitual fidelidad me ha llevado hasta aquí.

Madrid, Diciembre de 2000.

CAPíTULO 1

Preliminares

El objeto de este primer capítulo es presentar varios resultados de carácter general que se emplearán a la largo de la memoria. Algunos de ellos forman parte de la teoría básica de espacios y retículos de Banach y nos limitamos a dar referencias precisas de los mismos. Otros, sin embargo, son novedosos o han precisado modificaciones o mejoras para adaptarlos a nuestras necesidades, e incluimos demostraciones explícitas de los mismos.

En cuanto a la notación hemos procurado que sea estándar, así si X es un espacio de Banach denotaremos por B_X al conjunto $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Si $(x_n)_n$ es una sucesión en X, entonces $[x_n]$ denotará el subespacio (cerrado) generado por dicha sucesión. Los subespacios se sobreentenderán siempre cerrados. El espacio dual de X se denotará por X' y la topología débil sobre X por $\sigma(X, X')$. El término *operador* se referirá a cualquier aplicación lineal acotada entre dos espacios de Banach X e Y. El operador traspuesto de un operador $T : X \to Y$ se denotará por $T' : Y' \to X'$.

1. Operadores regulares entre retículos vectoriales

DEFINICIÓN 1.1. Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales. Se dice que E es un *retículo vectorial si está parcialmente ordenado con un orden,* $\leq$, *que cumple:*

a) Si $x \leq y$, *entonces* $x + z \leq y + z$ *para* $x, y, z \in E$ *cualesquiera.*

b) Si $x \leq y$, *entonces* $ax \leq ay$ *para todo* $a \geq 0$.

c) Para todo par de elementos x, y *de* E *existen el supremo* $x \vee y$ *y el ínfimo* $x \wedge y$.

Dado un retículo vectorial E se define el *cono positivo* $E_+ = \{x \in E : x \geq 0\}$, la parte positiva $x^+ = x \vee 0$ y la parte negativa $x^- = (-x) \wedge 0$ de un elemento x de E, así como su módulo $|x| = x \vee (-x)$. Dos elementos x e y de E son *disjuntos* si $|x| \wedge |y| = 0$, y se denota por $x \perp y$. Si A es un subconjunto de E se llama *complemento ortogonal* de A, y se denota por $A^\perp$, al conjunto $A^\perp = \{x \in E : x \perp y$ para todo $y \in A\}$.

Se llama *orden-intervalo* de extremos a y b pertenecientes a E al conjunto $[a,b] = \{x \in E : a \leq x \leq b\}$, y se dice que un subconjunto A de E es *orden-acotado* si existen a y b en E tales que $A \subset [a,b]$. De modo obvio se definen la orden-acotación superior e inferior. Un retículo vectorial E es *Dedekind completo* si todo conjunto no vacío orden acotado tiene supremo e ínfimo en E. E es *σ-Dedekind completo* si toda sucesión orden acotada tiene supremo e ínfimo en E. Retículos Dedekind completos son los $L^p(\mu)$, con $p \in [1,\infty)$, $L^\infty(\mu)$, con μ σ-finita y c_0. Un ejemplo de retículo no Dedekind completo es $C[0,1]$.

Se dice que una red $(x_i)_{i\in\Delta}$ en un retículo E es creciente (resp. decreciente) si $x_i \leq x_j$ (resp. $x_i \geq x_j$) para todo $i \leq j$. Si $(x_i)_{i\in\Delta}$ es una red creciente (resp. decreciente) y $x = \sup\{x_i : i \in \Delta\}$ (resp. $x = \text{ínf}\{x_i : i \in \Delta\}$), entonces se escribe $x_i \uparrow x$ (resp. $x_i \downarrow x$). Análogamente se definen las sucesiones crecientes y decrecientes. Una red $(y_i)_{i\in\Delta}$ en un retículo vectorial E *converge en orden a* $y \in E$ si existe una red $(x_i)_{i\in\Delta}$ tal que $x_i \downarrow 0$ y $|y_i - y| \leq x_i$ para todo $i \in \Delta$. Análogamente se definen las sucesiones orden convergentes en E.

Un subespacio U de E es un *subretículo* si $x \vee y$ y $x \wedge y$ están en U para cualesquiera dos elementos x, y de U, es decir, si es cerrado para las operaciones de retículo. Igualmente un subconjunto A de E es *sólido* si $|x| \leq |y|$ con $y \in A$ implica $x \in A$. Un subconjunto $I \subset E$ se llama *ideal* si es un subretículo sólido, y un subconjunto $B \subset E$ se llama *banda* si es un ideal que cumple que para todo suconjunto $A \subset B$ con supremo en E se tiene $\sup(A) \in B$. Diremos que una banda B de E es *banda de proyección* si existe una proyección $P : E \to B$ tal que $0 \leq P(x) \leq x$ para todo $x \in E_+$.

Definición 1.2. Un elemento $e \in E_+$ es una *unidad fuerte* (resp. *unidad débil*) si $E_e = E$ (resp. $B_e = E$), donde $E_e = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n[-e,e]\}$ es el ideal generado por e (resp. B_e es la banda generada por e). Un ideal (resp. banda) se llama *principal* si está generado (resp. generada) por un solo elemento. E satisface la *propiedad de la proyección principal* si toda banda principal es de proyección.

Un operador lineal T entre dos retículos vectoriales E y F es *orden acotado* si transforma conjuntos orden acotados en conjuntos orden acotados. Un operador $T : E \to F$ es *positivo,* y se escribe $T \geq 0$, si $TE_+ \subset F_+$, y T es *regular* si es la diferencia de dos operadores positivos definidos en E y con valores en F. Las clases de operadores orden acotados, positivos y regulares de E en F se denotarán respectivamente por $L_b(E,F)$, $L(E,F)_+$ y $L^r(E,F)$.

En $L^r(E,F)$ se define el siguiente orden: $S \leq T$ si y sólo si $T - S \geq 0$. Se tiene la relación inmediata:

$$L(E,F)_+ \subset L^r(E,F) \subset L_b(E,F).$$

PROPOSICIÓN 1.3. *Si F es un retículo Dedekind completo entonces $L^r(E,F)$ es un retículo Dedekind completo. Además $L^r(E,F) = L_b(E,F)$ y para $T,S \in L^r(E,F)$ se cumple que:*

$$\begin{aligned}
&T^+(x) = \sup\{Ty : 0 \leq y \leq x\}\\
&T^-(x) = -\operatorname{ínf}\{Ty : 0 \leq y \leq x\}\\
&|T|(x) = \sup\{|Ty| : |y| \leq x\}\\
&(T \vee S)(x) = \sup\{T(x-y) + Sy : y \in [0,x]\}\\
&(T \wedge S)(x) = \operatorname{ínf}\{T(x-y) + Sy : y \in [0,x]\}\\
&|Tz| \leq |T|(|z|),
\end{aligned}$$

para todo $x \in E_+$ y todo $z \in E$.

Si $A \subset L^r(E,F)$ es orden acotado y dirigido superiormente entonces $(\sup A)(x) = \sup\{Tx : T \in A\}$ *para todo $x \in E_+$.*

DEMOSTRACIÓN. La primera parte se debe a Riesz-Kantorovic ([**40**], [**41**]), en cuanto a la última ver [**50**, Thm. 1.14]. □

Se define el *orden dual de E* como $E^\sim = L^r(E,\mathbb{R})$ y se tiene que $E^\sim$ es Dedekind completo.

DEFINICIÓN 1.4. Un operador $T \in L^r(E,F)$ es *orden continuo (resp. σ- orden continuo) si preserva las redes orden convergentes a cero (resp. las sucesiones orden convergentes a cero).*

Denotaremos por $L^r_n(E,F)$ el conjunto de operadores de $L^r(E,F)$ que son orden continuos, y por $L^r_c(E,F)$ el conjunto de operadores de $L^r(E,F)$ que son σ-orden continuos. Igualmente denotaremos $E^\sim_n = L^r_n(E,\mathbb{R})$ y $E^\sim_c = L^r_c(E,\mathbb{R})$.

DEFINICIÓN 1.5. Sean E y F retículos vectoriales y $T : E \to F$ un operador lineal. Se dice que T es un *homomorfismo de Riesz* (o de retículos) si $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ para cualesquiera $x, y \in E$. Claramente todo homomorfismo de Riesz es positivo.

PROPOSICIÓN 1.6. (cf. [**50**, Prop. 1.3.11]) *Sean E y F retículos vectoriales y $T : E \to F$ un operador lineal. Son equivalentes: (a) T es un homomorfismo de Riesz. (b) $T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty \quad \forall\, x, y \in E$. (c) $|Tx| = T|x| \quad \forall x \in E$. (d) $Tx^+ \wedge Tx^- = 0 \quad \forall x \in E$.*

DEFINICIÓN 1.7. Sea E un retículo vectorial y $T : E \to E$ un operador lineal. Se dice que T *preserva bandas* si $T(B) \subset B$ para toda banda B de E, y que T es un *ortomorfismo en E* si $T : E \to E$ es orden acotado y preserva bandas.

PROPOSICIÓN 1.8. *Sea $T : E \to F$ un operador positivo entre dos retículos vectoriales con F Dedekind completo. Si S y R son dos ortomorfismos positivos en F entonces $(R \vee S)T = RT \vee ST$.*

DEMOSTRACIÓN. La desigualdad $(R \vee S)T \geq RT \vee ST$ es trivial. Para probar la opuesta tomemos $x \in E_+$ arbitrario y notemos que $(R \vee S)Tx = RTx \vee STx$ por ser R y S ortomorfismos (cf. [**4**, Thm. 8.9]), así como que $RTx \vee STx \leq (RT \vee ST)x$. $\square$

2. Componentes de un operador positivo: Teorema de Freudenthal

Un resultado básico en la teoría de retículos vectoriales es el teorema de Freudenthal ([**25**]). Dicho teorema extiende a retículos σ-Dedekind completos con unidad fuerte el resultado de que las funciones simples son densas en $L^\infty(\mu)$ (cf. [**13**, Prop. 3.4.2]). Para una presentación del mismo adecuada a nuestras necesidades requerimos varias definiciones previas:

DEFINICIÓN 1.9. Si $T : E \to F$ es un operador positivo entre retículos vectoriales E y F con F Dedekind completo, se llama *componente* de T a cualquier operador positivo $S : E \to F$ tal que $S \wedge (T - S) = 0$ en $L^r(E, F)$. Los operadores de la forma QTP, donde P y Q son proyecciones de banda en E y F respectivamente, se llaman *componentes elementales* de T. Una *componente simple* de T es una componente de la forma $\bigvee_{i=1}^{n} Q_i T P_i$, es decir supremo finito de componentes elementales. Denotaremos la colección de todas las componentes simples de T por $\mathcal{S}_T$, mientras que la colección de todas las componentes de T se denotará por $\mathcal{C}_T$.

Un operador regular $S : E \to F$ se llama T-*escalonado* si existen componentes de T disjuntas dos a dos $T_1, \ldots, T_n$ satisfaciendo $T_1 + \cdots + T_n = T$, y números reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i T_i$.

Damos a continuación un lema muy útil que permite sustituir el supremo en la definición de componente simple por una suma finita; esto tiene interés cuando manejemos ideales de operadores. El lema extiende el resultado dado en [**4**, Chap. 2, sec. 6, Ex. 5].

LEMA 1.10. *Sean E y F retículos vectoriales con F Dedekind completo y $T \in L(E,F)_+$. Para toda componente simple $S \in \mathcal{S}_T$ existe un conjunto de componentes elementales de T disjuntas dos a dos, $Q_1TP_1, \cdots, Q_nTP_n$, tales que $S = \sum\limits_{i=1}^{n} Q_iTP_i$. Más aún las proyecciones $P_1, \ldots P_n$ se pueden tomar disjuntas dos a dos.*

DEMOSTRACIÓN. La prueba se hace por inducción sobre el número de componentes elementales que intervienen en la definición de S. Así para $m = 1$ es trivialmente cierto pues $S = Q_1TP_1$.

Sea $m = n - 1$ y $S = \bigvee\limits_{i=1}^{n-1} Q_iTP_i$. Denotemos por $C_{n-1,k}$ el conjunto de todas las combinaciones de orden k tomadas en el conjunto $\{1, \ldots, n-1\}$ y consideremos para cualquier combinación $\{i_1, \ldots, i_k\} \in C_{n-1,k}$ la banda

$$B_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_{n-1-k}} = \left(\bigcap_{s=1}^{k} P_{i_s}(E) \right) \bigcap \left(\bigcap_{l=1}^{n-1-k} P_{j_l}(E)^{\perp} \right),$$

donde $\{j_1, \ldots, j_{n-1-k}\}$ es el conjunto complementario de $\{i_1, \ldots, i_k\}$ en $\{1, \ldots, n-1\}$. Por convenio escribimos $B^{1,\ldots,n-1} = \bigcap\limits_{l=1}^{n-1} P_l(E)^{\perp}$. Claramente el número de bandas obtenidas de ese modo es $\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \cdots + \binom{n-1}{n-1} = 2^{n-1}$ siendo $\binom{n-1}{k}$ el número de combinaciones de orden k tomadas de entre $n-1$ elementos. Además las bandas son disjuntas entre sí y E es la suma directa de todas ellas. Por tanto cada $x \in E$ se expresa como $x = x^{1,\ldots,n-1} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \sum\limits_{i_1,\ldots,i_k \in C_{n-1,k}} x_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_{n-1-k}}$ donde $x^{1,\ldots,n-1} \in B^{1,\ldots,n-1}$ y $x_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_{n-1-k}} \in B_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_{n-1-k}}$.

Supongamos que el lema es cierto para $m = n-1$, en concreto supongamos que hemos probado que la restricción de S a la banda $B_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_{n-1-k}}$ es

$$S|_{B_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_{n-1-k}}} = \left(\bigvee_{l=1}^{k} Q_{i_l} T\right) P_{B_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_{n-1-k}}}.$$

Entonces por linealidad se obtiene

$$\begin{aligned} S = & 0TP_{B^{1,\dots,n-1}} + \sum_{i_1 \in C_{n-1,1}} Q_{i_1} T P_{B_{i_1}^{j_1,\dots,j_{n-2}}} + \sum_{i_1,i_2 \in C_{n-1,2}} (Q_{i_1}T \vee Q_{i_2}T) P_{B_{i_1,i_2}^{j_1,\dots,j_{n-3}}} + \\ & + \sum_{i_1,i_2,i_3 \in C_{n-1,3}} (Q_{i_1}T \vee Q_{i_2}T \vee Q_{i_3}T) P_{B_{i_1,i_2,i_3}^{j_1,\dots,j_{n-4}}} + \cdots + \big(\bigvee_{i=1}^{n-1} Q_i T\big) P_{B_{1,\dots,n-1}} \end{aligned}$$

Probaremos a continuación que el lema sigue siendo cierto para $m = n$. En efecto sea $S = \bigvee_{i=1}^{n} Q_i T P_i$. Consideremos para cada combinación $\{i_1, \dots, i_k\} \in C_{n-1,k}$ las bandas

$$B_{i_1,\dots,i_k,n}^{j_1,\dots,j_{n-1-k}} = B_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_{n-1-k}} \bigcap P_n(E) \quad \text{y} \quad B_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_{n-1-k},n} = B_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_{n-1-k}} \bigcap P_n(E)^{\perp},$$

así como las bandas $B^{1,\dots,n-1,n} = B^{1,\dots,n-1} \cap P_n(E)^{\perp}$ y $B_n^{1,\dots,n-1} = B^{1,\dots,n-1} \cap P_n(E)$.

El número de bandas obtenido es $\binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$ y E se expresa como suma directa de todas ellas. Así para cada $x \in E_+$ existe una única descomposición

$$x = x^{1,\dots,n-1,n} + x_n^{1,\dots,n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i_1,\dots,i_k \in C_{n-1,k}} x_{i_1,\dots,i_k,n}^{j_1,\dots,j_{n-1-k}} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i_1,\dots,i_k \in C_{n-1,k}} x_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_{n-1-k},n}$$

con $x_{i_1,\dots,i_k,n}^{j_1,\dots,j_{n-1-k}} \in B_{i_1,\dots,i_k,n}^{j_1,\dots,j_{n-1-k}}$ y $x_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_{n-1-k},n} \in B_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_{n-1-k},n}$.

Consideremos primeramente una banda del tipo $B_{i_1,\dots,i_k,n}^{j_1,\dots,j_{n-1-k}}$ y notemos que

$$S|_{B_{i_1,\dots,i_k,n}^{j_1,\dots,j_{n-1-k}}} = \left(\left(\bigvee_{l=1}^{k} Q_{i_l} T\right) \vee Q_n T\right) P_{B_{i_1,\dots,i_k,n}^{j_1,\dots,j_{n-1-k}}}.$$

En efecto, si $z \in B_{i_1,\dots,i_k,n}^{j_1,\dots,j_{n-1-k}}$ es un elemento positivo arbitrario, entonces de la Proposición 1.3, de la hipótesis de inducción y de la inclusión $B_{i_1,\dots,i_k,n}^{j_1,\dots,j_{n-1-k}} \subset B_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_{n-1-k}} \cap P_n(E)$ se obtiene

$$\begin{aligned}
S(z) &= \sup\left\{\left(\bigvee_{i=1}^{n-1} Q_i T P_i\right)(y) \vee Q_n T P_n(z-y) : 0 \le y \le z\right\} \\
&= \sup\left\{\left(\bigvee_{l=1}^{k} Q_{i_l} T\right) P_{B^{j_1,\dots,j_{n-1-k}}_{i_1,\dots,i_k}}(y) + Q_n T P_n(z-y) : 0 \le y \le z\right\} \\
&= \sup\left\{\left(\bigvee_{l=1}^{k} Q_{i_l} T\right)(y) + Q_n T(z-y) : 0 \le y \le z\right\} \\
&= \left(\left(\bigvee_{l=1}^{k} Q_{i_l} T\right) \vee Q_n T\right)(z) = \left(\left(\bigvee_{l=1}^{k} Q_{i_l} T\right) \vee Q_n T\right) P_{B^{j_1,\dots,j_{n-1-k}}_{i_1,\dots,i_k,n}}(z).
\end{aligned}$$

Igualmente si consideramos una banda del tipo $B^{j_1,\dots,j_{n-1-k},n}_{i_1,\dots,i_k}$ y un elemento positivo z en dicha banda, entonces

$$\begin{aligned}
S(z) &= \sup\left\{\left(\bigvee_{i=1}^{n-1} Q_i T P_i\right)(y) \vee Q_n T P_n(z-y) : 0 \le y \le z\right\} \\
&= \sup\left\{\left(\bigvee_{l=1}^{k} Q_{i_l} T\right) P_{B^{j_1,\dots,j_{n-1-k}}_{i_1,\dots,i_k}}(y) + 0 : 0 \le y \le z\right\} \\
&= \left(\bigvee_{l=1}^{k} Q_{i_l} T\right)(z) = \left(\bigvee_{l=1}^{k} Q_{i_l} T\right) P_{B^{j_1,\dots,j_{n-1-k},n}_{i_1,\dots,i_k}}(z).
\end{aligned}$$

Análogamente se obtiene que $S|_{B^{1,\dots,n-1}_n} = Q_n T P_{B^{1,\dots,n-1}_n}$ y que $S|_{B^{1,\dots,n}} = 0$.

Así para un elemento de E positivo y arbitario

$$x = x^{1,\dots,n-1,n} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i_1,\dots,i_k \in C_{n-1,k}} x^{j_1,\dots,j_{n-1-k}}_{i_1,\dots,i_k,n} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i_1,\dots,i_k \in C_{n-1,k}} x^{j_1,\dots,j_{n-1-k},n}_{i_1,\dots,i_k} + x^{1,\dots,n-1}_n$$

se tiene por linealidad la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
S(x) =& 0 + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i_1,\dots,i_k \in C_{n-1,k}} \left(\left(\bigvee_{l=1}^{k} Q_{i_l} T\right) \vee Q_n T\right) P_{B^{j_1,\dots,j_{n-1-k}}_{i_1,\dots,i_k,n}}(x^{j_1,\dots,j_{n-1-k}}_{i_1,\dots,i_k,n}) \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i_1,\dots,i_k \in C_{n-1,k}} \left(\bigvee_{l=1}^{k} Q_{i_l} T\right) P_{B^{j_1,\dots,j_{n-1-k},n}_{i_1,\dots,i_k}}(x^{j_1,\dots,j_{n-1-k},n}_{i_1,\dots,i_k}) + Q_n T P_{B^{1,\dots,n-1}_n}(x^{1,\dots,n-1}_n) \\
=& \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i_1,\dots,i_k \in C_{n-1,k}} \left(\left(\bigvee_{l=1}^{k} Q_{i_l} T\right) \vee Q_n T\right) P_{B^{j_1,\dots,j_{n-1-k}}_{i_1,\dots,i_k,n}}(x) \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i_1,\dots,i_k \in C_{n-1,k}} \left(\bigvee_{l=1}^{k} Q_{i_l} T\right) P_{B^{j_1,\dots,j_{n-1-k},n}_{i_1,\dots,i_k}}(x) + Q_n T P_{B^{1,\dots,n-1}_n}(x).
\end{aligned}$$

Renombrando podemos escribir

$$S = 0TP_{B^{1,\dots,n}} + \sum_{i_1 \in C_{n,1}} Q_{i_1} T P_{B_{i_1}^{j_1,\dots,j_{n-1}}} + \sum_{i_1,i_2 \in C_{n,2}} (Q_{i_1}T \vee Q_{i_2}T) P_{B_{i_1,i_2}^{j_1,\dots,j_{n-2}}} +$$
$$+ \sum_{i_1,i_2,i_3 \in C_{n,3}} (Q_{i_1}T \vee Q_{i_2}T \vee Q_{i_3}T) P_{B_{i_1,i_2,i_3}^{j_1,\dots,j_{n-3}}} + \cdots + \left(\bigvee_{i=1}^{n} Q_i T \right) P_{B_{1,\dots,n}}$$

Para concluir notemos que para todo $k \in \{1, \dots, n\}$ el operador $\left(\bigvee_{l=1}^{k} Q_{i_l} T \right) P_{B_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_{n-k}}}$ es una componente simple de T. En efecto, las proyecciones de banda Q_i son ortomorfismos positivos, por tanto aplicando la Proposición 1.8 se tiene $\left(\bigvee_{l=1}^{k} Q_{i_l} T \right) = \left(\bigvee_{l=1}^{k} Q_{i_l} \right) T$ y se sigue entonces que $\left(\bigvee_{l=1}^{k} Q_{i_l} T \right) P_{B_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_{n-k}}} = \left(\bigvee_{l=1}^{k} Q_{i_l} \right) T P_{B_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_{n-k}}}$. Además usando repetidamente el Teorema 8.9 de [**4**] se deriva facilmente que $\bigvee_{l=1}^{k} Q_{i_l}$ es una proyección de banda. Así toda componente simple de T se expresa como suma finita de componentes elementales de T. Notemos por último que dichas componentes elementales son disjuntas dos a dos por serlo las proyecciones $P_{B_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_{n-k}}}$. □

Enunciamos seguidamente el Teorema espectral de Freudenthal en una versión para operadores adecuada a nuestras necesidades (cf. [**4**, 2. Thm. 6.9]):

TEOREMA 1.11 (Freudenthal). *Sean $0 \le S \le T : E \to F$ operadores positivos entre dos retículos vectoriales E y F con F Dedekind completo. Entonces existe una sucesión $(S_n)_n$ de operadores T-escalonados satisfaciendo*

$$0 \le S - S_n \le n^{-1} T \quad \textit{para todo natural } n \textit{ y } \quad 0 \le S_n \uparrow S.$$

Sea A un subconjunto de un retículo vectorial E y denotemos:

$$A^{\upharpoonleft} = \{x \in E : \exists \text{ una sucesión } (x_n)_n \subset A \text{ con } x_n \uparrow x\},$$
$$A^{\uparrow} = \{x \in E : \exists \text{ una red } (x_\alpha)_\alpha \subset A \text{ con } x_\alpha \uparrow x\},$$

($A^{\downharpoonleft}$ y $A^{\downarrow}$ se definen simétricamente). El siguiente resultado se debe a de Pagter ([**15**]), ver [**4**, Thm. 6.6] para una prueba del mismo.

PROPOSICIÓN 1.12. *Sean E y F retículos vectoriales tales que E satisface la propiedad de la proyección principal, F es Dedekind completo y $F_n^\sim$ separa los puntos de F. Entonces $\mathcal{C}_T = (\mathcal{S}_T)^{\upharpoonleft\downharpoonleft\upharpoonleft} = (\mathcal{S}_T)^{\downharpoonleft\upharpoonleft\downharpoonleft}$.*

3. Retículos vectoriales normados. M-espacios y L-espacios

DEFINICIÓN 1.13. Sea E un retículo vectorial; una norma $||\cdot||$ sobre E es *reticular* si para cualquier par de elementos $x, y \in E$ con $|x| \leq |y|$ se tiene $||x|| \leq ||y||$. Un retículo es *normado* si está dotado de una norma reticular. Un *retículo de Banach* E es un retículo vectorial normado que es completo respecto a la métrica derivada de su norma.

Notemos que todo retículo de Banach σ-Dedekind completo satisface la propiedad de la proyección principal (cf. [**50**, Prop. 1.2.11]).

Si E y F son dos retículos normados denotaremos por $\mathcal{L}(E,F)$ al conjunto de los operadores continuos de E en F. Asímismo denotaremos por $\mathcal{L}^r(E,F)$ (resp. $\mathcal{L}(E,F)_+$) a los elementos de $\mathcal{L}(E,F)$ que son regulares (resp. positivos).

PROPOSICIÓN 1.14. (cf. [**50**, Prop. 1.3.5]) *Sean E y F retículos normados y sea $T : E \to F$ un operador positivo. Entonces $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in B_E \cap E_+\}$. Si además E es retículo de Banach entonces $L(E,F)_+ \subset \mathcal{L}(E,F)$ y se tienen las igualdades $\mathcal{L}^r(E,F) = L^r(E,F)$ y $\mathcal{L}(E,F)_+ = L(E,F)_+$.*

PROPOSICIÓN 1.15. *Si E es un retículo normado entonces el espacio dual E' es un retículo de Banach. Además si E es un retículo Banach entonces E' coincide con el orden dual de E, es decir $E' = E^\sim$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**50**, Prop. 1.3.7] y Proposición 1.14. □

Dados dos retículos de Banach E y F se define en $\mathcal{L}^r(E,F)$ la norma *regular,* $\|\cdot\|_r$, mediante la igualdad $\|T\|_r = \text{ínf}\{\|S\| : S \in \mathcal{L}(E,F)_+ \text{ y } |Tx| \leq S|x| \quad \forall x \in E\}$.

PROPOSICIÓN 1.16. (cf. [**50**, Prop. 1.3.6]) *$\big(\mathcal{L}^r(E,F), \|\ \|_r\big)$ es un espacio de Banach con $\|T\| \leq \|T\|_r$ para todo $T \in \mathcal{L}^r(E,F)$. Además si F es Dedekind completo entonces $\big(\mathcal{L}^r(E,F), \|\ \|_r\big)$ es un retículo de Banach y $\|T\|_r = \|\,|T|\,\|$.*

DEFINICIÓN 1.17. Un operador T entre dos retículos vectoriales normados E y F se dice que *preserva intervalos* si $T[0,x] = [0,Tx]$ para todo $x \in E_+$. Decimos que T *casi preserva intervalos* si $\overline{T[0,x]} = [0,Tx]$

PROPOSICIÓN 1.18. (cf. [**50**, Thm. 1.4.19]) *Sean E y F retículos de Banach y $T : E \to F$ un operador.*

i) T es homomorfismo de Riesz si y sólo T' casi preserva intervalos.

ii) T casi preserva intervalos si y sólo si T' es homomorfismo de Riesz.

DEFINICIÓN 1.19. Sea E un retículo vectorial. Se dice que una norma $\| \|$ sobre E es una L-norma si $\| \|$ es aditiva en E_+. Se dice que $\| \|$ es una M-norma si

$$\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\} \quad \forall x, y \in E_+.$$

Un *L-espacio (resp. M-espacio)* es un retículo de Banach respecto a una L-norma (resp. M-norma).

Ejemplos de L-espacios son $L^1(\mu)$ y $bvca(\Sigma)$, y de M-espacios $L^\infty(\mu)$ y $C(K)$. Si bien $L^\infty(\mu)$ tiene unidad fuerte (χ_Ω) hay M-espacios sin unidad fuerte: c_0.

PROPOSICIÓN 1.20. *Sean E y F retículos de Banach. Entonces $\mathcal{L}^r(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$ y $\|T\| = \|T\|_r$ para cualquier $T \in \mathcal{L}(E, F)$ si se satisface una de las siguientes condiciones:*
i) F es un M-espacio Dedekind completo con unidad fuerte e y con la norma dada por $\|x\| = \inf\{\lambda : x \in [-\lambda e, \lambda e]\}$.
ii) E es un L-espacio y F es un espacio KB.

DEMOSTRACIÓN. Ver [**50**, 1.5.11]. Para la definición de espacio KB ver Definición 1.26. □

PROPOSICIÓN 1.21. (cf. [**50**, Prop. 1.4.7]) *Sea E un retículo normado.*
i) La norma de E es un M-norma si y sólo si E' es un L-espacio.
ii) La norma de E es una L-norma si y sólo si E' es un M-espacio. En tal caso E' tiene una unidad fuerte e tal que $[-e, e] = B_{E'}$.

DEFINICIÓN 1.22. Un retículo de Banach E tiene la *propiedad de Schur positiva* si toda sucesión débilmente nula de vectores *positivos* en E es convergente a cero.

Claramente todo espacio E con la propiedad de Schur (i.e. toda sucesión débilmente nula en E converge a cero en norma) tiene la propiedad de Schur positiva.

PROPOSICIÓN 1.23. *Todo L-espacio E satisface la propiedad de Schur positiva.*

DEMOSTRACIÓN. Notemos que E' es un M-espacio con unidad fuerte $e \in E'_+$ tal que $B_{E'} = [-e, e]$ (cf. Proposición 1.21). Sea $(x_n)_n$ una sucesión débilmente nula de vectores positivos. Por el teorema de Hahn-Banach existe una sucesión $(x'_n)_n$ en $B_{E'}$ tal que $x'_n(x_n) = \|x_n\|$ para todo n. Como $B_{E'} = [-e, e]$ resulta que $e \geq |x'_n|$ para todo n. Por último de la desigualdad $\|x_n\| = x'_n(x_n) \leq e(x_n)$ y del hecho de que la sucesión $(x_n)_n$ es débilmente nula se obtiene la convergencia en norma a cero de $(x_n)_n$. □

Observación 1.24. El recíproco de la Proposición 1.23 no es cierto. Para una sucesión de números positivos $(p_n)_n \searrow 1$ el espacio de sucesiones de Nakano $l^{(p_n)} = \{(x_n)_n : \sum_{n=1}^{\infty} |rx_n|^{p_n} < \infty$ para algún $r > 0\}$ tiene la propiedad de Schur ([**32**]) y por tanto la propiedad de Schur positiva. Si tomamos además la sucesión $(p_n)_n$ tal que $1 < p_n < \infty$ y $p_n((p_n - 1)ln\, n)^{-1} \to 0$, entonces $l^{(p_n)}$ no es isomorfo a l^1 ([**76**]). Para más ejemplos de espacios con la propiedad de Schur positiva remitimos a [**77**].

4. Retículos orden continuos

Definición 1.25. Un retículo de Banach E es *orden continuo,* o tiene *norma orden continua,* si $\inf_{x \in A} \{\|x\|\} = 0$ para todo $A \subset E$ con $\inf(A) = 0$. E es *σ-orden continuo* si se tiene lo mismo para sucesiones.

Ejemplos de retículos orden continuos son los $L^p(\mu)$, $\quad p \in [1, +\infty)$. Si E es orden continuo entonces es Dedekind completo (la afirmación recíproca no es cierta, considerar por ejemplo l^∞).

Definición 1.26. Un retículo de Banach E se llama *espacio KB* (Kantorovic-Banach) si toda sucesión monótona acotada en norma es convergente.

Los siguientes resultados proporcionan caracterizaciones muy útiles de retículos con norma orden continua y de espacios KB (para más caracterizaciones ver [**78**])

Proposición 1.27. *Sea E retículo de Banach. Son equivalentes:*

1. *E es orden continuo.*
2. *E es Dedekind completo y σ-orden continuo.*
3. *Si $(x_n)_n \subset E_+$ es orden acotada y disjunta entonces $(x_n)_n$ es convergente a cero.*
4. *Toda sucesión monótona orden acotada es convergente.*
5. *Todo ideal cerrado de E es una banda de proyección.*
6. *$(x_n)_n$ es $\sigma(E', E)$-nula para cualquier sucesión disjunta $(x_n)_n \subset B_{E'}$.*

7. $E' = E'_n$.
8. *E es σ-Dedekind completo y no contiene copia reticular de l^∞.*

Demostración. Ver [**50**, Prop. 2.4.2, 2.4.3 y 2.4.4]. La equivalencia entre (1) y (8) es el Teorema clásico de Lozanovski-Mekler ([**47**]). $\square$

Todo espacio KB tiene norma orden continua. Sin embargo el recíproco no es en general cierto (considérese c_0).

Proposición 1.28. (cf. [**4**, Thm 14.12]) *Sea E retículo de Banach. Son equivalentes:*

1. *E es KB.*
2. *E es débilmente secuencialmente completo.*
3. *E no contiene copia isomorfa de c_0.*
4. *E no contiene copia reticular de c_0.*

Observación 1.29. Claramente un retículo de Banach con la propiedad de Schur positiva no contiene una copia reticular de c_0 (considérese la sucesión $(e_n)_n$); se obtiene entonces como consecuencia de la Proposición 1.28 que todo retículo de Banach con la propiedad de Schur positiva es un espacio KB y por tanto tiene norma orden continua. En particular todo L-espacio es un espacio KB.

Cuando el retículo de Banach E tiene predual entonces ser espacio KB es equivalente a ser orden continuo (nótese que c_0 no es dual):

Proposición 1.30. *Sea E retículo de Banach. Son equivalentes:*

1. *E' es orden continuo.*
2. *$(x_n)_n$ converge débilmente a cero para cualquier sucesión disjunta $(x_n)_n \subset B_E$.*
3. *E' es un espacio KB.*
4. *E no contiene copia reticular de l^1.*
5. *E no contiene copia reticular de l^1 complementada por una proyección positiva.*
6. *E no contiene copia isomorfa complementada de l^1.*
7. *E' no contiene copia reticular de l^∞.*
8. *E' no contiene copia reticular de c_0.*

Demostración. Ver [**4**, Thm. 14.21 y Prop. 2.3.11]. $\square$

El siguiente resultado será de utilidad más adelante.

PROPOSICIÓN 1.31. *Sean E y F dos retículos de Banach con F orden continuo y sea $T \in L^r(E,F)$. Entonces $|T'| = |T|'$, $(T^+)' = (T')^+$ y $(T^-)' = (T')^-$.*

DEMOSTRACIÓN. Para la primera igualdad usar [**4**, Thm. 5.11] y el hecho de que $F' = F'_n = F_n^\sim$ por ser F orden continuo (cf. Proposición 1.27). Las otras dos igualdades son consecuencia de la primera. □

5. Algunas clases de operadores entre retículos de Banach

Introducimos ahora algunas clases de operadores distinguidos (cf. [**4**], [**50**]).

DEFINICIÓN 1.32. Sean E un retículo de Banach y X e Y espacios de Banach.
a) Un operador $T : E \to Y$ es *orden débilmente compacto* (abrev. o-débilmente compacto) si $T[-x,x]$ es relativamente débilmente compacto para todo $x \in E_+$.
b) $T : E \to Y$ es *AM-compacto* si $T[-x,x]$ es relativamente compacto para todo $x \in E_+$.
c) $T : E \to Y$ es *M-débilmente compacto* si transforma sucesiones disjuntas acotadas en norma en sucesiones convergentes a cero.
d) $T : X \to Y$ es *Dunford-Pettis* si transforma sucesiones débilmente nulas en sucesiones convergentes a cero.
e) $T : X \to Y$ es *débilmente secuencialmente precompacto* si para cualquier sucesión $(x_n)_n$ en B_X existe $(n_j)_j$ tal que $(Tx_{n_j})_j$ es débilmente convergente.

Si $T : E \to Y$ es AM-compacto entonces es o-débilmente compacto, y si $T : E \to Y$ es Dunford-Pettis y además E es orden continuo entonces T es AM-compacto (cf. [**50**, Prop. 3.7.11]). Nótese que si $T : E \to Y$ es compacto y E' es orden continuo entonces T es M-débilmente compacto (cf. Proposición 1.30).

PROPOSICIÓN 1.33. *Sea $T : E \to F$ un operador orden acotado entre dos retículos de Banach E y F. Son equivalentes:*
i) T es o-débilmente compacto.
ii) $\|Tx_n\| \to 0$ para toda sucesión disjunta y orden acotada $(x_n)_n \subset E_+$.
iii) T no preserva un subretículo isomorfo a c_0 con una bola unidad orden acotada en E.

DEMOSTRACIÓN. Ver [**50**, Thm. 3.4.4 y Cor. 3.4.5]. □

De la Proposición 1.33 se sigue que todo operador Dunford-Pettis es o-débilmente compacto. Otra consecuencia es el siguiente:

COROLARIO 1.34. *Sea $T : E \to F$ un operador regular entre dos retículos de Banach E y F. Si $|T|$ es o-débilmente compacto entonces T es o-débilmente compacto.*

DEFINICIÓN 1.35. Sea T un operador entre dos espacios de Banach X e Y y sea Z otro espacio de Banach. Decimos que T *preserva una copia isomorfa de* Z si existe un subespacio $N \subset X$ isomorfo a Z tal que T es un isomorfismo entre N y $T(N)$. Decimos que T *preserva una copia complementada de* Z si además N y $T(N)$ están complementados en X e Y respectivamente. Si E y R son dos retículos de Banach decimos que $T : E \to Y$ *preserva una copia reticular de* R si existe un subretículo $S \subset E$ isomorfo reticularmente a R tal que S y $T(S)$ son isomorfos como espacios de Banach.

Los resultados que siguen a continuación serán usados a menudo. Comenzamos con un teorema debido a Ghoussoub y Johnson ([**29**]) (cf. [**50**, Thm. 3.4.11]).

TEOREMA 1.36 (Ghoussoub-Johnson). *Sean E y X retículo y espacio de Banach respectivamente y un operador $T : E \to X$. Son equivalentes:*
i) T no preserva una copia isomorfa de c_0.
ii) T no preserva una copia reticular de c_0.
iii) $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es creciente y acotada en norma.

PROPOSICIÓN 1.37. (cf. [**50**, Cor. 3.4.14]) *Sea X un espacio de Banach, F un retículo de Banach orden continuo y un operador $T : X \to F$. Son equivalentes:*
i) T preserva una copia isomorfa de l^1.
ii) T preserva una copia complementada de l^1.
iii) T' no es o-débilmente compacto.
iv) T' preserva una copia reticular de c_0 (o l^∞).
v) T no es débilmente secuencialmente precompacto.

Cuando el operador T es positivo se tiene algo más:

PROPOSICIÓN 1.38. (cf. [**50**, Thm 3.4.17]) *Sean E y F retículos de Banach con F orden continuo. Si $T : E \to F$ es un operador positivo que no es débilmente secuencialmente precompacto, entonces T preserva una copia reticular de l^1.*

Como consecuencia de los dos resultados previos se obtiene el siguiente resultado de Niculescu ([**54**]).

COROLARIO 1.39. *Sean E y F retículos de Banach con F orden continuo y un operador positivo $T : E \to F$. Entonces T preserva una copia isomorfa de l^1 si y sólo si T preserva una copia reticular de l^1.*

También se tiene la siguiente caracterización (cf. [**50**, Thm. 3.4.18])

PROPOSICIÓN 1.40. *Sea E un retículo de Banach. Son equivalentes:*
i) La norma dual de E' es orden continua.
ii) Si X es un espacio de Banach, entonces todo operador o-débilmente compacto $T : E \to X$ es débilmente secuencialmente precompacto.

6. Estimaciones superiores e inferiores. p-convexidad y q-concavidad

DEFINICIÓN 1.41. Sea E un retículo de Banach y $1 < q < \infty$. Decimos que E satisface una *q-estimación superior (resp. inferior)* si existe una constante $M > 0$ tal que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \leq M\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad (\text{ resp. } \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \geq M\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}})$$

para toda sucesión disjunta $(x_i)_{i=1}^n$ en E.

Se define el índice inferior (resp. superior) de E como

$$s(E) = \sup\{q > 1 : E \text{ satisface una } q\text{-estimación superior}\}$$

(resp. $\sigma(E) = \text{ínf}\{q > 1 : E \text{ satisface una } q\text{-estimación inferior}\}$).

La siguiente caracterización de q-estimaciones inferiores nos permite no limitarnos a vectores disjuntos (cf. [**45**, Prop. 1.f.6.]).

PROPOSICIÓN 1.42. *Un retículo de Banach E satisface una q-estimación inferior, $1 < q < \infty$, si y sólo si $\left\|\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right\| \geq M\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}}$ para cualesquiera $(x_i)_{i=1}^n$ en E.*

PROPOSICIÓN 1.43. *Si un retículo de Banach E satisface una q-estimación inferior, $q < \infty$, entonces E es orden continuo. Si E satisface una q-estimación superior, $q > 1$, entonces E' es orden continuo. Además se tienen las igualdades $[s(E)]^{-1} + [\sigma(E')]^{-1} = 1 = [\sigma(E)]^{-1} + [s(E')]^{-1}$.*

Demostración. E es σ-completo y σ-orden continuo por [**45**, Thm. 1.a.5 y Prop. 1.a.7], y por tanto orden continuo (cf. [**45**, Prop. 1.a.8]). Por otra parte, si E satisface una q-estimación superior entonces E' satisface una p-estimación inferior siendo $1/p+1/q=1$ (cf. [**45**, Prop. 1.f.5]). Usar ahora la primera parte. $\square$

Conceptos próximos a las p-estimaciones superiores e inferiores son la p-convexidad y q-concavidad de un retículo de Banach.

Definición 1.44. Un retículo de Banach E es *p-convexo* si existe una constante $M<\infty$ tal que

$$\left\|\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\| \leq M\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ si } 1<p<\infty \text{ ó } \left\|\bigvee_{i=1}^{n}|x_i|\right\| \leq M \max_{1\leq i\leq n}\|x_i\|, \text{ si } p=\infty,$$

para vectores cualesquiera $(x_i)_{i=1}^n$ en E.
E es *q-cóncavo* si existe $M<\infty$ tal que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq M\left\|\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|, \text{ si } 1<q<\infty \text{ ó } \max_{1\leq i\leq n}\|x_i\| \leq M\left\|\bigvee_{i=1}^{n}|x_i|\right\|, \text{ si } q=\infty,$$

para vectores cualesquiera $(x_i)_{i=1}^n$ en E.

Todo retículo p-convexo (resp. q-cóncavo) satisface una p-estimación superior (resp. q-estimación inferior). Con carácter recíproco tenemos el siguiente resultado de Maurey (cf. [**45**, Thm. 1.f.7])

Proposición 1.45. *Si un retículo de Banach E satisface una r-estimación superior (resp. inferior) para algún $1<r<\infty$, entonces E es p-convexo (resp. q-cóncavo) para todo $1\leq p<r<q\leq\infty$. Por tanto E es q-cóncavo para algún $q<\infty$ (resp. p-convexo para algún $p>1$) si y sólo si $\sigma(E)<\infty$ (resp. $s(E)>1$).*

Pasamos a aislar en forma de proposición dos condiciones sobre los retículos E y F que garantizan que la clase de los operadores M-débilmente compactos entre E y F coincide con $\mathcal{L}^r(E,F)$. La primera de ellas se debe a Zaanen (cf [**80**, Thm. 129.7]):

Proposición 1.46. *Sean E y F retículos de Banach satisfaciendo una de las dos condiciones siguientes:*
a) $\sigma(F)<s(E)$

b) E' es orden continuo y F tiene la propiedad de Schur positiva.

Entonces todo operador regular de E en F es M-débilmente compacto.

DEMOSTRACIÓN. Tomando sus partes positiva y negativa podemos asumir que T es positivo. Comencemos con a). Sea $(x_n)_n$ una sucesión disjunta de vectores positivos en B_E. Por hipótesis podemos tomar p y q tales que $\sigma(F) < p < q < s(E)$. Elijamos un vector positivo $(a_n)_n$ en la bola unidad de l^q. Como $q < s(E)$, existe $K > 0$ tal que

$$\left\|\sum_{n=1}^{m} a_n x_n\right\| \leq K\left(\sum_{n=1}^{m} |a_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq K\|(a_n)\|_q \leq K,$$

para todo m. Esto implica que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in KB_E$. Por otra parte, como $\sigma(F) < p$ podemos usar la Proposición 1.42 para encontrar una constante $M > 0$ tal que

$$K^p\|T\|^p \geq \|Tx\|^p \geq \left\|\sum_{n=1}^{m} a_n T x_n\right\|^p \geq M\sum_{n=1}^{m} |a_n|^p \, \|Tx_n\|^p$$

para todo m. Supongamos ahora que $(Tx_n)_n$ no tiende a cero; entonces, pasando a una subsucesión si es necesario, podemos asumir que $\|Tx_n\| \geq \alpha$ para todo n y un cierto $\alpha > 0$. De la desigualdad previa obtenemos

$$M^{-1}(K/\alpha)^p\|T\|^p \geq \sum_{n=1}^{m} |a_n|^p$$

para todo m, es decir, $(a_n)_n \in \eta \ B_{l^p}$ donde $\eta = M^{-1}(K/\alpha)^p\|T\|^p$. Llegamos así a una contradicción con el hecho de que $p < q$ y de que $(a_n)_n$ fue tomado arbitrariamente.

En cuanto a b), tomemos una sucesión disjunta acotada en norma $(x_n)_n$ en E_+. Dicha sucesión es débilmente nula ya que E' es orden continuo (cf. Proposición 1.30); como T es positivo la sucesión $(Tx_n)_n$ es débilmente nula en F_+, y por tanto convergente a cero en norma. □

7. Espacios de Köthe. Equi-integrabilidad

Una clase muy importante de retículos de Banach es la de los espacios de Köthe de funciones medibles.

DEFINICIÓN 1.47. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ-finito y completo. Un espacio de Banach $(E, \| \|)$ de clases de equivalencia (módulo igualdad en casi todo punto) de funciones reales localmente integrables sobre Σ se llama *espacio de Köthe de funciones* si

se cumple:
1) Si f es medible, $g \in E$ y $|f(\omega)| \leq |g(\omega)|$ a.e en Ω, entonces $f \in E$ y $\|f\| \leq \|g\|$.
2) $\chi_A \in E$ para todo medible $A \in \Sigma$ con $\mu(A) < \infty$.

Si E es un espacio de Köthe se define el dual de Köthe de E como

$$E^\times = \{f \;\; \Sigma\text{-medible} : \int |fg| < \infty \, \text{para toda} \, g \in E\}.$$

Claramente $E^\times \subset E'$. Además si E es orden continuo entonces $E^\times = E'$ (cf. [**45**, pag. 29]).

Observación 1.48. Dado un espacio de Köthe E sobre un espacio de medida finita (Ω, Σ, μ) se tienen las inclusiones canónicas $L^\infty(\mu) \hookrightarrow E \hookrightarrow L^1(\mu)$, que son continuas por ser operadores positivos (cf. Proposición 1.14). Observemos igualmente que todo espacio de Köthe es Dedekind-completo por ser un ideal de $L^1(\mu)$.

Aparte del hecho de que muchos de los retículos clásicos son espacios de Köthe, la importancia añadida de estos radica en que son el prototipo, vía representación, de los retículos de Banach orden continuos con unidad débil. De forma precisa, todo retículo de Banach orden continuo con unidad débil E es reticularmente isométrico a un espacio de Köthe de funciones sobre un cierto espacio de probabilidad (este hecho será usado repetidamente a lo largo de esta memoria):

Teorema 1.49. (cf. [**45**, Thm. 1.b.14]) *Sea E un retículo de Banach orden continuo con unidad débil. Entonces existe un espacio de probabilidad completo (Ω, Σ, μ), un ideal X de $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$, en general no $\|\cdot\|_1$-cerrado, y una norma reticular $\|\cdot\|_X$ en X tales que:*
i) E es reticularmente isométrico a $(X, \|\cdot\|_X)$.
ii) X es denso en $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ y $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ es denso en X.
iii) $\|f\|_1 \leq \|f\|_X \leq 2\|f\|_\infty$ para toda $f \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$.

La existencia de unidad débil en el Teorema 1.49 no es necesaria en el caso en que el retículo sea separable. Más aún, si manejamos subespacios separables de un retículo orden continuo arbitrario, que será en la práctica lo usual, siempre podremos asumir la existencia de la unidad débil como el siguiente resultado muestra.

TEOREMA 1.50. (cf. [**45**, Prop. 1.a.9]) *Todo retículo de Banach E orden continuo se puede descomponer como suma directa incondicional de una familia (en general no contable) $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de ideales disjuntos dos a dos, cada uno de los cuales tiene una unidad débil $x_\alpha > 0$. Más concretamente, cada $y \in E$ tiene una única representación de la forma $y = \sum_{\alpha\in A} y_\alpha$ donde $y_\alpha \in X_\alpha$, la convergencia de la serie es incondicional y el cardinal de $\{\alpha : y_\alpha \neq 0\}$ es numerable. Además, si Z es un subespacio separable de E entonces existe $\alpha_0 \in A$ tal que $Z \subset X_{\alpha_0}$.*

El siguiente resultado conocido ([**49**, Ex. 22.11]) caracteriza las bandas en un espacio de Köthe de funciones

PROPOSICIÓN 1.51. *Sea I un ideal de un espacio de Köthe de funciones E sobre un espacio de probabilidad (Ω, Σ, μ); entonces existe un conjunto medible $C \in \Sigma$ tal que $I^{\perp\perp} = \{f\chi_C : f \in E\}$. En particular, si I es una banda entonces $I = \{f\chi_C : f \in E\} \equiv E(C)$.*

DEMOSTRACIÓN. Damos los pasos a seguir de modo esquemático. Comencemos llamando $\Gamma = \{A \in \Sigma : f_{|A} = 0,\ \mu\text{−}a.e.\ \text{ para toda } f \in I\}$, donde el conjunto de μ-medida cero varía con cada f, y consideremos $\alpha = \sup\{\mu(A) : A \in \Gamma\}$.

Aserto 1: Existe $A_0 \in \Gamma$ tal que $\mu(A_0) = \alpha$.

Ahora para todo $C \in \Sigma$ con $\mu(C) > 0$ y tal que $C \subset \Omega\backslash A_0$ se tiene $C \notin \Gamma$. En efecto, basta observar que $C \cup A_0 \in \Gamma$ y que $\mu(C \cup A_0) > \alpha$, lo cual no es posible.

Aserto 2: A_0 está únicamente determinado, salvo un conjunto de medida cero, por las condiciones (1) $A_0 \in \Gamma$ y (2) Para todo $C \in \Sigma$ con $\mu(C) > 0$ y tal que $C \subset \Omega\backslash A_0$ se tiene $C \notin \Gamma$.

Siendo A_0 como arriba se define el *"carrier"* de I como el conjunto $\Omega\backslash A_0$

Aserto 3: A_0 es el carrier de $I^\perp$.

Volvamos ahora al Aserto 1. Si suponemos que $\alpha = 0$ entonces se tiene equivalentemente la condición: Para todo $C \in \Sigma$ con $\mu(C) > 0$ existe $f \in I$ tal que $f|_C \neq 0$ μ−a.e. Como A_0 es tal que $\mu(A_0) = 0 = \alpha$, resulta que $f|_{A_0} = 0$ μ−a.e. para toda $f \in I$. Según el Aserto 3 A_0 es el carrier de $I^\perp$, lo que implica que $I^\perp = \{0\}$; por tanto $I^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = E$. En particular, si I es una banda, la igualdad $I = B(I) = I^{\perp\perp}$ (cf. [**50**, Prop. 1.2.7]) justifica que $I = E$ y por tanto que $f = f\chi_\Omega$ para toda $f \in I$.

Supongamos ahora que $\alpha > 0$ y consideremos la banda $M = \{\chi_{\Omega\backslash A_0} f : f \in E\}$. Claramente $I \subset M$. Sea $\hat{\Gamma} = \{C \in \Sigma_{\Omega\backslash A_0} : f|_C = 0 \ \mu - a.e.$ para toda $f \in I\}$, donde $\Sigma_{\Omega\backslash A_0} = \{C \cap (\Omega\backslash A_0) : C \in \Sigma\}$, y sea $\hat{\alpha} = \sup\{\mu(C) : C \in \hat{\Gamma}\}$. Sea $C \subset \Omega\backslash A_0$ tal que $\mu(C) > 0$. Como A_0 satisface (2) resulta que existe $f \in I \subset M$ tal que $f|_C \neq 0$ $\mu-$.a.e. lo cual implica que $\hat{\Gamma} = \varnothing$ y por tanto que $\hat{\alpha} = 0$. Así, si $\hat{A}_0$ denota el único conjunto que, salvo un conjunto de μ-medida nula, satisface las condiciones
(1) $\hat{A}_0 \in \hat{\Gamma}$ y (2) $\forall\, C \in \Sigma_{\Omega\backslash A_0}$ con $\mu(C) > 0$ y tal que $C \subset (\Omega\backslash A_0)\backslash \hat{A}_0$ se tiene $C \notin \hat{\Gamma}$, resulta que $\mu(\hat{A}_0) = 0$ y que $\hat{A}_0$ es el carrier de $I^\perp$ por el Aserto 3). Por tanto $I^\perp = \{0\}$ y $I^{\perp\perp} = M$. Como antes, si I es banda se concluye que $I = M = \{\chi_{\Omega\backslash A_0} f : f \in E\}$. □

Definición 1.52. Sea E un espacio de Köthe sobre un espacio de medida finita (Ω, Σ, μ). Un conjunto B en E es *equi-integrable* si $\lim\limits_{\mu(A)\to 0} \sup\{\|\chi_A f\| : f \in B\} = 0$.

La siguiente definición es una versión abstracta del concepto de equi-integrabilidad para retículos de Banach (cf. Lema 1.54)

Definición 1.53. Un subconjunto A de un retículo de Banach E es *L-débilmente compacto* si $\|x_n\| \to 0$ para toda sucesión disjunta $(x_n)_n$ contenida en la envoltura sólida de A.

Notemos que si E^a denota el ideal maximal en E sobre el que la norma inducida es orden continua, entonces un conjunto A de E es L-débilmente compacto si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $x \in E^a_+$ tal que $A \subset [-x, x] + \varepsilon\, B_E$ (cf. [**50**, Cor. 3.6.2]).

Lema 1.54. *Sea E un espacio de Köthe orden continuo sobre un espacio de medida finita (Ω, Σ, μ), y $A \subset E$ acotado en norma. Entonces A es equi-integrable si y sólo si es L-débilmente compacto.*

Demostración. Para probar la implicación directa sea $\varepsilon > 0$; por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que $\|f\chi_B\| < \varepsilon$ para toda $f \in A$ y para todo $B \in \Sigma$ con $\mu(B) < \delta$. Siendo A acotado en norma existe $m > 0$ tal que $\mu(A_f) < \delta$ para toda $f \in A$ donde $A_f = \{\omega : |f(\omega)| \geq m\}$. Notemos que $x = m\chi_\Omega$ es un elemento de E^a_+ puesto que E es orden continuo. Si denotamos por A_f^c al complementario en Ω del conjunto A_f, es claro que $f\chi_{A_f^c} \in [-x, x]$; además la hipótesis inicial y el hecho de que $\mu(A_f) < \delta$ para toda $f \in A$

implican que $\|f\chi_{A_f}\| < \varepsilon$ para todo $f \in A$. Por último nótese $f = f\chi_{A_f^c} + f\chi_{A_f}$. En cuanto a la implicación contraria tomemos $\varepsilon > 0$. Por hipótesis existe $x \in E_+^a$ tal que $A \subset [-x, x] + \frac{\varepsilon}{2} B_E$. Así, si $f \in A$ es arbitraria podemos tomar $g \in [-x, x]$ y $h \in B_E$ tales que $f = g + \frac{\varepsilon}{2} h$. Como $x \in E^a$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|x\chi_B\| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $\mu(B) < \delta$. Sea $B \in \Sigma$ con $\mu(B) < \delta$, entonces $\|f\chi_B\| \leq \|g\chi_B\| + \frac{\varepsilon}{2}\|h\chi_B\| \leq \|x\chi_B\| + \frac{\varepsilon}{2}\|h\| < \varepsilon$. Como f era arbitraria se concluye la prueba. $\square$

Nótese que E es orden continuo si B_E es L-débilmente compacto (cf. [**50**, Thm. 2.4.2 y Prop. 3.6.5]). La definición siguiente se debe a Weis:

Definición 1.55. ([**72**]) Un retículo de Banach orden continuo E satisface la *propiedad de la división subsequencial* ("subsequence splitting property ") si para toda sucesión acotada en norma $(f_n)_n \subset E$ existe una subsuesión $(n_k)_k$ y sucesiones $(g_k)_k, (h_k)_k$ con $|g_k| \wedge |h_k| = 0$ y $f_{n_k} = g_k + h_k$ tales que
i) $(g_k)_k$ es L-débilmente compacto.
ii) $|h_k| \wedge |h_l| = 0$ si $k \neq l$.

Observemos que c_0 no satisface la propiedad de la división subsecuencial (basta considerar la sucesión $x_n = \sum_{i=1}^{n} e_n$) y que todo retículo de Banach que no es orden continuo tampoco es un espacio KB y por tanto contiene una copia reticular de c_0 (cf. Proposición 1.28). Estos dos hechos explican porqué se incluye la condición de orden continuidad en la definición de la propiedad de la división subsecuencial.

Los siguientes resultados serán útiles en los capítulos posteriores y especialmente en la prueba del resultado principal del Capítulo tres (cf. Teorema 3.15).

Lema 1.56. *Sean E y F retículos de Banach con F orden continuo y sea $S \in L^r(E, F)$. Si $A \subset E$ es L-débilmente compacto entonces $S(A)$ es L-débilmente compacto.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis existe $x \in E_+^a$ tal que $A \subset [-x, x] + \frac{\varepsilon}{\|S\|} B_E$. Notemos que F es Dedekind-completo por ser orden continuo; por tanto $\mathcal{L}^r(E, F)$ es un retículo vectorial Dedekind-completo (cf. Proposición 1.16) y en particular existe el módulo $|S|$. Claramente $S(A) \subset [\,-|S|x, |S|x\,] + \varepsilon\, B_F$ y $|S|x \in F_+^a = F_+$. $\square$

Corolario 1.57. *Sean E y F espacios de Köthe orden continuos sobre espacios de medida (Ω, Σ, μ) y (Ω', Σ', μ') respectivamente y sea $S \in L^r(E, F)$. Si $A \subset B_E$ es un conjunto equi-integrable entonces SA es equi-integrable en F.*

Demostración. Ver el Lema 1.54. □

Lema 1.58. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y sea $(f_n)_n \subset L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ una sucesión de funciones débilmente convergente. Si $(f_n)_n$ tiende en μ-medida a cero entonces $(f_n)_n$ tiende a cero en norma.*

Demostración. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\mu(\Omega) = 1$. La sucesión $(f_n)_n$ es equi-integrable puesto que es débilmente convergente (cf. [**19**, Cor. IV.8.11]). Por tanto para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|\chi_B f_n\|_1 < \varepsilon/2$ para todo natural n y todo $B \in \Sigma$ con $\mu(B) < \delta$.
Consideremos $B_n = \{t \in \Omega : |f_n(t)| > \varepsilon/2\}$. Como $(f_n)_n$ converge a cero en medida existe un natural n_0 tal que $\mu(B_n) < \delta$ para $n \geq n_0$. Así para $n \geq n_0$ se tiene

$$\|f_n\|_1 = \int_{B_n} |f_n| + \int_{B_n^c} |f_n| \leq \|\chi_{B_n} f_n\|_1 + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

□

Proposición 1.59. *Sea E un espacio de Köthe orden continuo sobre un espacio de medida finita (Ω, Σ, μ) y $(g_n)_n$ una sucesión de E acotada en norma. Entonces $(g_n)_n$ es convergente a cero si y sólo si $(g_n)_n$ es equi-integrable y convergente a cero en medida.*

Demostración. La implicación directa es clara por ser $E \hookrightarrow L^1(\mu)$ continua. En cuanto a la contraria, sea $(g_n)_n$ una sucesión equi-integrable y convergente a cero en medida y tomemos una subsucesión arbitraria $(g_{n_k})_k$. Si $(g_{n_k})_k$ converge a cero en norma no hay nada que probar. Supongamos alternativamente que $(g_{n_k})_k$ no converge a cero. Entonces existe una subsucesión (que denotamos igual) $(n_k)_k$ tal que $\|g_{n_k}\| \geq \beta$ para todo k y un cierto $\beta > 0$. Claramente $(g_{n_k})_k$ es un conjunto equi-integrable en $L^1(\mu)$ o equivalentemente débilmente compacto en $L^1(\mu)$ (cf. [**19**, Cor. IV.8.11]). Por tanto existe una subsucesión, que denotamos igual, débilmente convergente. Por el Lema 1.58 se tiene $\|g_{n_k}\|_1 \to 0$ cuando k tiende a infinito. Tomemos $\varepsilon \in (0, \beta)$; por hipótesis existe $\delta_0 > 0$ tal que $\|\chi_A g_{n_k}\| < \varepsilon/2$ para todo k y para todo $A \in \Sigma$ con $\mu(A) < \delta_0$. Igualmente podemos encontrar una constante $M < \infty$ tal que $\|g_{n_k}\| \leq M$ para todo k, y por tanto una constante $\alpha > 0$ tal que $\mu\{s : |g_{n_k}(s)| > \alpha\} < \delta_0$ para todo k. Resulta entonces que $\|\chi_{A_{n_k}} g_{n_k}\| < \varepsilon/2$ para todo n_k, donde $A_{n_k} = \{s : |g_{n_k}(s)| > \alpha\}$. Por otra parte, la sucesión $(\chi_{A^c_{n_k}} g_{n_k})_k$ está acotada en orden por $\alpha\chi_\Omega$. Como $\|g_{n_k}\|_1 \to 0$, existe una subsucesión $(n_{k_j})_j$ tal que $g_{n_{k_j}} \to 0$ μ-a.e y así $(\chi_{A^c_{n_{k_j}}} g_{n_{k_j}})_j \to 0$ μ-a.e. Consideremos $h_j = \sup_{l \geq j} |\chi_{A^c_{n_{k_l}}} g_{n_{k_l}}|$. Claramente $(h_j)_j$ es una sucesión orden acotada tal que $h_j \downarrow 0$ μ-a.e; además $\|h_j\| \to 0$ ya que la norma de E es orden continua. Por tanto $\|\chi_{A^c_{n_{k_j}}} g_{n_{k_j}}\| \to 0$ y así existe j_0 tal que $\|\chi_{A^c_{n_{k_j}}} g_{n_{k_j}}\| < \varepsilon/2$ para todo $j \geq j_0$. Por último $\|g_{n_{k_j}}\| \leq \|g_{n_{k_j}} \chi_{A_{n_{k_j}}}\| + \|\chi_{A^c_{n_{k_j}}} g_{n_{k_j}}\| < \varepsilon$ para todo $j \geq j_0$, y llegamos así a una contradicción con el hecho de que $\|g_{n_k}\| \geq \beta > \varepsilon$. □

Concluimos esta sección con un conocido resultado relativo a la equi-integrabilidad en $L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$, que se prueba a partir de la desigualdad de Hölder (cf. [**13**, Prop. 3.3.2]). Para la definición de las funciones de Rademacher sobre $[0,1]$ ver [**16**, pag. 203].

Proposición 1.60. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita sin átomos y $1 \leq p < q \leq \infty$. Entonces todo conjunto acotado de $L^q(\mu)$ es equi-integrable en $L^p(\mu)$.*

Corolario 1.61. *Si $1 \leq p < \infty$ y $[r_n]_p$ es el subespacio de $L^p[0,1]$ generado por las funciones de Rademacher, entonces la bola unidad de $[r_n]_p$ es equi-integrable en $L^p[0,1]$.*

Demostración. Es consecuencia de la Proposición anterior puesto que la bola unidad de $[r_n]_p$ es acotada en $L^q[0,1]$, con $q > p$, por las desigualdades de Khintchine (cf. [**44**, Thm. 2.b.3]). □

8. Algunos resultados básicos de espacios de Banach

En esta breve sección enunciamos algunos resultados básicos de la teoría de espacios de Banach que serán usados frecuentemente. Comenzamos con un par de resultados referentes a operadores. El primero es una caracterización de continuidad.

Proposición 1.62. (cf. [**16**, II. Thm. 5]) *Sea $T : X \to Y$ un operador entre dos espacios de Banach X e Y. Entonces T es continuo si y sólo si es $\sigma(X,X')$-$\sigma(Y,Y')$ continuo. En particular si $(x_n)_n \subset X$ y $(z_n)_n \subset Y$ son dos sucesiones básicas equivalentes, entonces la convergencia débil de una de ellas implica la de la otra.*

PROPOSICIÓN 1.63. (cf. [**31**, Thm. II.4.4]) *Sea $T : X \to Y$ un operador entre dos espacios de Banach X e Y. i) T es sobreyectivo si y sólo si T' es un isomorfismo sobre su imagen. ii) T es un isomorfismo sobre su imagen si y sólo si T' es sobreyectivo.*

Continuamos con un bien conocido argumento de perturbación (cf. [**44**, Prop.1.a.9])

PROPOSICIÓN 1.64. *Sea $(x_n)_n$ una sucesión básica normalizada de un espacio de Banach X con constante básica K.*
i) Si $(y_n)_n$ es una sucesión en X que satisface la desigualdad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < 1/2K$, entonces $(y_n)_n$ es una sucesión básica equivalente a $(x_n)_n$.
ii) Si el subespacio $[x_n]$ está complementado en X por una proyección P e $(y_n)_n$ es una sucesión en X satisfaciendo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < 1/8K\|P\|$, entonces $(y_n)_n$ es una sucesión básica equivalente a $(x_n)_n$ y el subespacio $[y_n]$ está complementado en X.

Un tercer resultado que se empleará sistemáticamente se refiere a las sucesiones básicas incondicionales en un espacio de Banach (cf. [**44**, Prop. 1.c.7])

PROPOSICIÓN 1.65. *Sea $(x_n)_n$ una sucesión basica incondicional en un espacio de Banach X con constante incondicional K. Entonces para toda sucesión $(a_n)_n$ de números reales tal que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ es convergente, y para toda sucesión acotada $(\lambda_n)_n$ de números reales, se tiene la desigualdad*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n x_n \right\| \leq K \sup_n |\lambda_n| \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|$$

La conocida disyuntiva de H.P. Rosenthal (cf. [**44**, Thm. 2.e.5]) también será de utilidad:

TEOREMA 1.66 (Rosenthal). *Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada en un espacio de Banach X. Entonces $(x_n)_n$ tiene una subsucesión $(x_{n_i})_i$ que satisface una y sólo una de las dos condiciones siguientes:*
i) $(x_{n_i})_i$ es equivalente a la base canónica de l^1.
ii) $(x_{n_i})_i$ es una sucesión débilmente Cauchy.

COROLARIO 1.67. *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita que satisface la propiedad de Schur. Entonces* *a) X es débilmente secuencialmente completo.*

b) X contiene una copia isomorfa de l^1.

Demostración. Notemos que una sucesión $(x_n)_n$ en el espacio de Banach X es débilmente Cauchy si y sólo si existe x'' en el bidual X'' tal que $J(x_n) \stackrel{\omega*}{\to} x''$, donde J es la inclusión canónica de X en X''. Consecuentemente el espacio de Banach X es débilmente secuencialmente completo si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_n$ en X tal que $J(x_n) \stackrel{\omega*}{\to} x''$ se tiene $x'' \in X$.

Sea pues $(x_n)_n$ una sucesión en X tal que $J(x_n) \stackrel{\omega*}{\to} x''$ para algún $x'' \in X''$. Claramente la sucesión $(x_n - x_{n+1})_n$ converge a cero en la topología débil y consecuentemente en norma puesto que X satisface la propiedad de Schur. En ese caso existe una subsucesión $(x_{n_j} - x_{n_j+1})_j$ tal que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_{n_j} - x_{n_j+1}\|$ es convergente; de la desigualdad triangular se sigue que la sucesión $(x_{n_j})_j$ es de Cauchy y por tanto convergente a un cierto $x \in X$. Notemos que la sucesión $(Jx_{n_j})_j$ converge en la topología $\omega*$ al elemento $J(x)$ por ser dicha topología menos fina que la topología de la norma. Como además la topología $\omega*$ es Hausdorff se obtiene que $J(x) = x''$, con lo que $x'' \in X$. Así X es débilmente secuencialmente completo.

b) Sea $(x_n)_n$ una sucesión de la bola unidad de X. Por el Teorema 1.66 existe una subsucesión $(x_{n_j})_j$ tal que: i) $(x_{n_j})_j$ es débilmente Cauchy, o bien ii) $(x_{n_j})_j$ es equivalente a la base canónica de l^1. La opción ii) pone fin a la prueba. En cuanto a la opción i) notemos que en ese caso la subsucesión $(x_{n_j})_j$ es débilmente convergente por el apartado a) y en consecuencia convergente en norma ya que X satisface la propiedad de Schur. Llegamos así a que toda sucesión de la bola unidad de X contiene una subsucesión convergente, lo cual es una contradicción con el hecho de que X tiene dimensión infinita. $\square$

Concluimos esta sección recordando una propiedad específica de los espacios $L^p(\mu)$, $1 \le p < \infty$ (cf. [**45**, Lemma 1.b.9])

Proposición 1.68. *Sea $1 \le p < \infty$ y (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Si $(f_n)_n$ es una sucesión de funciones no nulas con soportes mutuamente disjuntos en $L^p(\mu)$, entonces $[f_n]$ es isométrico a l^p y existe una proyección de norma uno $P : L^p(\mu) \to [f_n]$. Si además $f_n \ge 0$ para todo n entonces $P \ge 0$.*

9. El método de disjuntificación de Kadec-Pelczynski

Concluimos este capítulo con una exposición detallada del método de disjuntificación de Kadec-Pelczynski ([**37**]) y su generalización (cf. [**45**, Prop. 1.c.8]). Esto se justifica por la importancia que tiene en las demostraciones de varios resultados de la memoria.

Sea E un retículo de Banach orden continuo y sea $(x_n)_n$ una sucesión en E. Considerando el subespacio separable $[x_n]$ podemos asumir que $[x_n]$ está incluido en un orden ideal I de E dotado de unidad débil (cf. Teorema 1.50), y por tanto que el propio E es orden continuo con unidad débil. El Teorema 1.49 permite entonces ver E como un espacio de Köthe sobre un espacio de probabilidad (Ω, Σ, μ) que está continuamente incluido en $L^1(\mu)$.

Para un $\varepsilon > 0$ consideremos los conjuntos $\sigma(x,\varepsilon) = \{t \in \Omega : |x(t)| \geq \varepsilon \|x\|_E\}$ y $M_E(\varepsilon) = \{x \in E : \mu(\sigma(x,\varepsilon)) \geq \varepsilon\}$. Notemos que se pueden dar los dos siguientes casos (excluyentes): a) $(x_n)_n \subset M_E(\varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$, o bien b) $(x_n)_n \not\subseteq M_E(\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$.

En el caso a) notemos que se tiene

$$\|x_n\|_E \geq \|x_n\|_1 = \int_\Omega |x_n(t)| d\mu \geq \int_{\sigma(x_n,\varepsilon)} |x_n(t)| d\mu \geq \varepsilon^2 \|x_n\|_E, \quad n \in \mathbb{N},$$

es decir, $(x_n)_n$ es convergente a cero si y sólo si $(x_n)_n$ es $\|\cdot\|_1$-convergente a cero.

En cuanto al caso b) supongamos para simplificar la notación que la sucesión $(x_n)_n$ está normalizada. Claramente existe n_1 tal que $x_{n_1} \notin M_E(4^{-2})$ ($j_1 = 2$). Entonces se tiene $\mu(\sigma(x_{n_1}, 4^{-2})) < 4^{-2}$ y $\|\chi_{\sigma(x_{n_1},4^{-2})^c} x_{n_1}\| \leq 4^{-2}$. Como E es orden continuo, existe $\delta_1 > 0$ tal que $\|\chi_A x_{n_1}\| < 4^{-(j_1+1)} = 4^{-3}$, si $\mu(A) < \delta_1$. Tomemos $j_2 > j_1$ tal que $4^{-j_2} < \delta_1$. De nuevo existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \notin M_E(4^{-j_2})$, con lo que $\mu(\sigma(x_{n_2}, 4^{-j_2})) < 4^{-j_2} < \delta_1$, y así $\|\chi_{\sigma(x_{n_2},4^{-j_2})^c} x_{n_1}\| \leq 4^{-(j_1+1)}$. Además $\|\chi_{\sigma(x_{n_2},4^{-j_2+1})^c} x_{n_2}\| \leq \|4^{-j_2} \chi_{\sigma(x_{n_2},4^{-j_2})^c}\| \leq 4^{-j_2}$. Tomando ahora $\varepsilon = 4^{-(j_2+1)}$, podemos encontrar, por la orden continuidad de E, un $\delta_2 > 0$ tal que $\|\chi_A x_{n_1}\|$, $\|\chi_A x_{n_2}\| < 4^{-(j_2+1)}$, si $\mu(A) < \delta_2$. Sea entonces $j_3 > j_2$ tal que $4^{-j_3} < \delta_2$. De nuevo existe $n_3 > n_2 > n_1$ tal que $x_{n_3} \notin M_E(4^{-j_3})$. Como en los casos previos se obtiene $\mu(\sigma(x_{n_3}, 4^{-j_3})) < 4^{-j_3} < \delta_2$, $\|\chi_{\sigma(x_{n_3},4^{-j_3})} x_{n_1}\|$, $\|\chi_{\sigma(x_{n_3},4^{-j_3})} x_{n_2}\| \leq 4^{-(j_2+1)}$ y $\|\chi_{\sigma(x_{n_3},4^{-j_3})^c} x_{n_3}\| \leq 4^{-j_3}$.

Prosiguiendo del mismo modo obtenemos dos sucesiones $(x_{n_k})_k$ y $(\sigma(x_{n_k}, 4^{-j_k}))_k$ cumpliendo

1) $\mu(\sigma(x_{n_k}, 4^{-j_k})) < 4^{-j_k}$

2) $\|\chi_{\sigma(x_{n_k},4^{-j_k})^c} x_{n_k}\| \leq 4^{-j_k}$

3) $\|\chi_{\sigma(x_{n_k},4^{-j_k})} x_{n_i}\| \leq 4^{-(j_{k-1}+1)} \quad i = 1 \dots k-1.$

A continuación procedemos a disjuntificar considerando

$$\sigma_k = \sigma(x_{n_k}, 4^{-j_k}) - \bigcup_{i=k+1}^{\infty} \sigma(x_{n_i}, 4^{-j_i})$$

Claramente $\sigma_k \cap \sigma_l = \varnothing$ si $k \neq l$; además $\sigma_k^c = \sigma(x_{n_k}, 4^{-j_k})^c \bigcup \bigcup\limits_{i=k+1}^{\infty} \sigma(x_{n_i}, 4^{-j_i})$.

Definiendo $z_k = \chi_{\sigma_k} x_{n_k}$ tenemos

$$\|x_{n_k} - z_k\| = \|\chi_{\sigma_k^c} x_{n_k}\| \leq \|\chi_{\sigma(x_{n_k},4^{-j_k})^c} x_{n_k}\| + \|\chi_{\bigcup\limits_{i=k+1}^{\infty}} \sigma(x_{n_i}, 4^{-j_i}) x_{n_k}\| \leq$$

$$\leq 4^{j_k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \|\chi_{\sigma(x_{n_i},4^{-j_i})} x_{n_k}\| \leq 4^{-j_k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} 4^{-(j_{i-1}+1)} =$$

$$= 4^{-j_k} + \frac{4^{-(j_k+1)}}{1 - 1/4} = 4^{-j_k} + \frac{1}{3} 4^{-j_k} = \frac{1}{3} 4^{-(j_k-1)}$$

y por tanto $\|x_{n_k} - z_k\| \to 0$ cuando $k \to \infty$. Notemos que la sucesión seminormalizada $(z_k)_k$ es una sucesión básica incondicional de elementos disjuntos dos a dos. Así, pasando a subsucesión si es necesario, podemos suponer por la Proposición 1.64 que $(x_{n_k})_k$ y $(z_k)_k$ son sucesiones básicas incondicionales equivalentes.

Se observa que si en lugar de una sucesión consideramos un subespacio separable X en E, la disyuntiva $X \subset M_E(\varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$ o $X \not\subseteq M_E(\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$ nos lleva por un lado a que la normas $\|\cdot\|_E$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes sobre X, o bien por otro lado a la existencia de una sucesión normalizada $(y_k)_k$ en X y una sucesión de elementos disjuntos dos a dos $(z_k)_k$ en E tales que $(y_k)_k$ y $(z_k)_k$ son equivalentes; más aún $\|y_k - z_k\|_E \to 0$ cuando $k \to \infty$. Podemos pues enunciar la siguiente

Proposición 1.69. *Sea E un espacio de Köthe orden continuo sobre un espacio de medida finita (Ω, Σ, μ) y sea $(x_n)_n$ una sucesión en E.*

a) Si $(x_n)_n \subset M_E(\varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$, entonces $(x_n)_n$ converge a cero en E si y sólo si $(x_n)_n$ converge a cero en $L^1(\mu)$.

b) Si $(x_n)_n \not\subseteq M_E(\varepsilon)$ para ningún $\varepsilon > 0$ entonces existe una subsucesión $(n_k)_k$ y una sucesión en E de elementos disjuntos dos a dos, $(z_k)_k$, con $|z_k| \leq |x_{n_k}|$ para todo k, tales que $(x_{n_k})_k$ y $(z_k)_k$ son sucesiones básicas incondicionales equivalentes. Más aún

$\|x_{n_k} - z_k\| \underset{k}{\rightarrow} 0$.

c) Si X es un subespacio separable de E entonces, o bien X es isomorfo a un subespacio de $L^1(\mu)$, o bien existe una sucesión normalizada $(y_k)_k$ en X y una sucesión disjunta $(z_k)_k$ en E, con $|z_k| \leq |y_k|$ para todo k, tales que $(y_k)_k$ y $(z_k)_k$ son sucesiones básicas incondicionales equivalentes. Más aún $\|y_k - z_k\| \underset{k}{\rightarrow} 0$.

CAPíTULO 2

Operadores disjuntamente estrictamente singulares. Problema de mayoración

En este capítulo estudiamos la clase de los operadores *disjuntamente estrictamente singulares* introducidos por Hernández y Rodríguez-Salinas en [**34**]. La primera parte del mismo se dedica a presentar resultados generales y condiciones para que un operador sea disjuntamente estrictamente singular en algunos casos concretos. Las partes segunda y tercera tratan el problema de mayoración en dicha clase, incluyendo también el caso de endomorfismos $E = F$. Caracterizaciones de estos operadores se dan en la sección cuarta mientras que la quinta se concentra en cuestiones de autodualidad de operadores disjuntamente estrictamente singulares definidos o con valores en espacios $L^p(\mu)$. Concluimos con la mayoración en la clase de los operadores *reticularmente estrictamente cosingulares* introducidos por García del Amo en [**26**], que bajo ciertas condiciones es la clase "dual"de la de los operadores disjuntamente estrictamente singulares.

1. Propiedades básicas

Definición 2.1. Un operador $T : E \to Y$ definido en un retículo de Banach E y con valores en un espacio de Banach Y es *disjuntamente estrictamente singular* (abrev. DSS) si para cualquier sucesión disjunta $(x_n)_n$ en E la restricción de T al subespacio $[x_n]$ no es un isomorfismo.

Esta clase es una generalización de la conocida clase de los operadores estrictamente singulares que será considerada en el capítulo tercero. Los operadores DSS, introducidos en relación con la existencia de copias singulares complementadas de l^p en retículos de Banach de funciones, son una herramienta útil para comparar la estructura reticular de los mismos ([**33**], [**27**]). Recientemente varios autores han estudiado dichos operadores en distintos contextos: Astashkin ([**6**]), Cobos et. al ([**12**]), Novikov ([**55**], [**56**]), Semenov et. al ([**28**]),... La clase de los operadores DSS entre E e Y se denotará por $\mathcal{DSS}(E, Y)$.

Del hecho de que todo operador compacto y sobreyectivo tiene rango de dimensión finita se deriva que todo operador compacto es DSS. Más aún todo operador M-débilmente compacto es evidentemente DSS. Los recíprocos no son ciertos: el operador inclusión $J : L^p[0,1] \hookrightarrow L^q[0,1]$ con $1 \leq q < p$ es M-débilmente compacto (cf. Proposición 1.46) pero no es DSS ya que el subespacio generado por cualquier sucesión disjunta en $L^p[0,1]$ es isomorfo a l^p (cf. Proposición 1.68), y l^p y l^q no son isomorfos cuando $p \neq q$. Por otra parte la inclusión canónica $J : l^p \hookrightarrow l^q$ con $1 \leq p < q < \infty$ es DSS porque l^p y l^q no comparten subespacios pero claramente no es M-débilmente compacta.

La siguiente caracterización está probada en [**27**] usando la técnica de la joroba deslizante y el hecho de que el límite en norma de operadores de rango finito es un operador compacto.

Proposición 2.2. *Sea un operador $T : E \to Y$ con E retículo de Banach e Y espacio de Banach. Entonces T es DSS si y sólo si para toda sucesión disjunta $(x_n)_n$ en E existe una sucesión bloque normalizada $(w_j)_j$, con $w_j = \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} a_k x_k$ para todo j, tal que $\|Tw_j\| \underset{j}{\to} 0$ y la restricción de T al subespacio $[w_j]$ es compacta.*

Las siguientes propiedades de la clase $\mathcal{DSS}$ han sido dadas en [**33**]:

Proposición 2.3. *Sean E y F retículos de Banach y Z e Y espacios de Banach, y operadores $T : E \to Y$, $S : Y \to Z$ y $U : F \to E$. Se tiene que*
i) La clase $\mathcal{DSS}(E,Y)$ es un espacio vectorial.
ii) Si T es DSS entonces ST es DSS.
iii) Si T es DSS y U es un homomorfismo de Riesz entonces TU es DSS.

En general $DSS(E,Y)$ no es estable por la composición por la derecha. En efecto, sea $J : L^2[0,1] \to L^1[0,1]$ la inclusión canónica y $T : l^2 \to L^2[0,1]$ el operador definido por $Te_n = r_n$ donde r_n es la n-ésima función de Rademacher. El operador J es DSS y sin embargo el operador JT es un isomorfismo sobre su imagen. También existen operadores DSS cuyos operadores traspuestos no lo son, ni recíprocamente. En otras palabras, ser DSS no es una propiedad autodual como el siguiente ejemplo muestra

Ejemplo 2.4. La inclusión $J : L^r[0,\infty)+L^s[0,\infty) \hookrightarrow L^p[0,\infty)+L^q[0,\infty)$, $1 < p < r < s < q < \infty$ no es DSS ([**27**, Prop. 2.6]). Sin embargo si r', s', p' y q' denotan los conjugados de r, s, p y q respectivamente, entonces el operador inclusión $G : L^{p'}[0,\infty) \cap L^{q'}[0,\infty) \hookrightarrow L^{r'}[0,\infty) \cap L^{s'}[0,\infty)$ es DSS ([**27**, Ex. 4.9]).

En algunos casos la clase de los operadores DSS es bastante grande:

PROPOSICIÓN 2.5. *Sean E y F retículos de Banach tales que E' y F son orden continuos. Supongamos además que $[s(E), \sigma(E)] \cap [s(F), \sigma(F)] = \varnothing$. Entonces todo operador regular de E en F es DSS.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos lo contrario; entonces existe $T : E \to F$ regular que no es DSS. En ese caso existe una sucesión disjunta normalizada $(x_n)_n \subset E$ y una constante $\alpha > 0$ tal que $\|Tx\| \geq \alpha \|x\|$ para todo $x \in [x_n]$. Como el espacio $[Tx_n]$ es separable existe un ideal cerrado J en F con unidad débil que contiene a $[Tx_n]$ (cf. Teorema 1.50); además al ser F orden continuo dicho ideal está complementado en F por una proyección positiva P (cf. Proposición 1.27). Claramente PT es regular y no es DSS; además $[s(E), \sigma(E)] \cap [s(J), \sigma(J)] = \varnothing$. Por tanto podemos suponer que el propio F tiene unidad débil y así suponer por el Teorema 1.49 que es un ideal, en general no cerrado, de $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ para algún espacio de probabilidad (Ω, Σ, μ) tal que F está incluido continuamemte en $L^1(\mu)$.
Notemos que el operador $T : E \to L^1(\mu)$ es M-débilmente compacto (cf. Proposición 1.46) y por tanto que $\|Tx_n\|_1 \to 0$. Supongamos ahora que $(Tx_n)_n \subset M_F(\varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$, donde $M_F(\varepsilon)$ denota un conjunto de Kadec-Pelczynski (cf. Cap. 1 §11), entonces $\|Tx_n\|_1 \geq \varepsilon^2 \|Tx_n\|_F$ (cf. Proposición 1.69); de ahí se sigue que $\|Tx_n\|_F \to 0$, lo cual es una contradicción con el hecho de que $\|x_n\| = 1$ para todo n y de que T es invertible en $[x_n]$. Así pues podemos suponer que $[Tx_n] \nsubseteq M_F(\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$. En tal caso existe $(n_j)_j$ y una sucesión disjunta $(z_j)_j \subset F$ tales que $(Tx_{n_j})_j$ y $(z_j)_j$ son sucesiones básicas equivalentes (cf. Proposición 1.69). Sin embargo la equivalencia entre $(x_{n_j})_j$ y $(Tx_{n_j})_j$ implica que las sucesiones disjuntas $(x_{n_j})_j \subset E$ y $(z_j)_j \subset F$ son equivalentes. Llegamos así a una contradicción con la hipótesis $[s(E), \sigma(E)] \cap [s(F), \sigma(F)] = \varnothing$. $\square$

Antes de presentar una caracterización para operadores DSS en un caso particular necesitamos la siguiente:

PROPOSICIÓN 2.6. (cf. [**50**, Cor. 2.3.5]) *Sea E un retículo de Banach. Sea $(v_n)_n \subseteq E_+$ una sucesión débilmente nula tal que $\|v_n\| \geq 1$ para todo n. Entonces para toda constante*

$0 < C < 1$ *existe una subsucesión* $(v_{n_j})_j$ *y una sucesión disjunta* $(y_j)_j \subseteq E_+$ *tales que para todo* j *se tiene* $y_j \leq v_{n_j}$ *y* $\|y_j\| \geq C$.

Proposición 2.7. *Sea* E *retículo de Banach con* E' *orden continuo,* F *un* M*-espacio y* $T : E \to F$ *un operador que preserva intervalos. Entonces* T *es DSS si y sólo si* T *no preserva copia isomorfa de* c_0.

Demostración. La implicación directa es inmediata a partir del hecho de que todo operador que preserva una copia isomorfa de c_0 preserva una copia reticular de c_0 (cf. Teorema 1.36).

Para probar el recíproco supongamos que T no es DSS; entonces existe una sucesión disjunta $(z_n)_n \subset E$ y $\alpha > 0$ tales que $\left\|T\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n\Big)\right\| \geq \alpha \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n\right\|$. Sea una sucesión bloque (disjunta) normalizada $w_j = \sum\limits_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} a_k z_k$ tal que para todo j se tiene $\|T\| \geq \|Tw_j\| \geq \alpha$. La sucesión acotada disjunta $(|w_j|/\alpha)_j$ es débilmente nula por ser E' orden continuo (cf. Proposición 1.30) y lo mismo se puede decir de la sucesión $\big(T(|w_j|/\alpha)\big)_j$ por ser T continuo. Aplicando la Proposición 2.6 a la sucesión $\big(T(|w_j|/\alpha)\big)_j$ se obtiene una subsucesión $(j_k)_k$ y una sucesión disjunta $(y_k)_k \subset F_+$ tales que para todo k se tiene $0 \leq y_k \leq T(|w_{j_k}|/\alpha)$ y $\|y_k\| \geq \dfrac{\|T\|}{K\alpha}$ donde K es una constante tal que $0 < \dfrac{\|T\|}{K\alpha} < 1$. Como T preseva intervalos (cf. Definición 1.17) existe para todo k un elemento $0 \leq t_k \leq |w_{j_k}|/\alpha$ tal que $T(t_k) = y_k$ (notemos que $(t_k)_k$ es seminormalizada por la elección de $(y_k)_k$). Ahora del hecho de que $(y_k)_k$ y $(t_k)_k$ son disjuntas en el M-espacio F y en E, y de que T es positivo se obtiene

$$\begin{aligned}
\left\|T\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_j t_j\Big)\right\| &= \left\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j y_j\right\| = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \|y_j\| \\
&\geq 1/K \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \frac{\|T\|}{\alpha} \geq 1/K \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \frac{\|T|w_j|\|}{\alpha} \\
&\geq 1/K \left\|\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| T\Big(\frac{|w_j|}{\alpha}\Big)\right\| \geq 1/K \left\|\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| T\Big(\frac{w_j}{\alpha}\Big)\right\| \\
&\geq \frac{\alpha}{K} \left\|\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \frac{w_j}{\alpha}\right\| = \frac{\alpha}{K} \left\|\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \frac{|w_j|}{\alpha}\right\| \geq \frac{\alpha}{K} \left\|\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| t_j\right\| = \frac{\alpha}{K} \left\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j t_j\right\|,
\end{aligned}$$

es decir T preserva una copia del subespacio $[t_j]$. Por último, como $(y_j)_j$ es disjunta en el M-espacio F resulta que $[y_j]$ es isomorfo a c_0 y se concluye que T preserva una copia isomorfa de c_0. Contradicción. □

Como consecuencia de la Proposición 2.6 y del hecho de que todo retículo reflexivo es un espacio KB con dual orden continuo (cf. [**50**, Thm. 2.4.15]) se obtiene:

COROLARIO 2.8. *Sean E un espacio reflexivo, F un M-espacio y $T : E \to F$ un operador positivo. Si T preserva intervalos entonces T es DSS.*

También usando la dualidad entre los homomorfismos de Riesz y los operadores que preservan intervalos se tiene el siguiente:

COROLARIO 2.9. *Sea $T : E \to F$ un operador entre un L-espacio E y un retículo de Banach reflexivo F. Si T es homomorfismo de retículos entonces T' es DSS.*

2. Mayoración de operadores disjuntamente estrictamente singulares

Comencemos introduciendo unos operadores que serán útiles en el estudio del problema de mayoración en la clase de los operadores DSS:

DEFINICIÓN 2.10. Un operador $T : E \to Y$ entre un retículo de Banach E y un espacio de Banach Y es *reticularmente estrictamente singular* (abrev. RSS) si la restricción de T a cualquier subretículo (cerrado) de E de dimensión infinita no es un isomorfismo. Denotaremos la clase de tales operadores por $\mathcal{RSS}(E, Y)$.

La siguiente proposición es evidente teniendo en cuenta que en todo retículo de Banach de dimensión infinita existe una sucesión de vectores no nulos mutuamente disjuntos (cf. [**49**, Thm. 28.5]).

PROPOSICIÓN 2.11. *Sea $T : E \to Y$ un operador definido en un retículo de Banach E y con valores en un espacio de Banach Y. Se cumple que:*
a) Si T es DSS entonces T es RSS.
b) T es RSS si y sólo si T no es invertible en el subespacio cerrado generado por cualquier sucesión de vectores positivos y disjuntos de E.

Notemos que en principio la implicación recíproca de a) no tiene porqué ser cierta ya que el subespacio generado por una sucesión de vectores mutuamente disjuntos en E no es en general un subretículo de E (por supuesto dicho subespacio puede ser dotado de una estructura reticular a partir de la incondicionalidad de su base, pero en general el orden definido no será el heredado como subconjunto de E).

De nuevo [**49**, Thm. 28.5] permite trasladar la prueba de la Proposición 2.2 y obtener la siguiente:

PROPOSICIÓN 2.12. *Sea $T : E \to Y$ un operador definido en un retículo de Banach E y con valores en un espacio de Banach Y. Entonces T es RSS si y sólo si para toda sucesión disjunta $(x_n)_n$ en E_+ existe una sucesión bloque normalizada $(w_j)_j$, con $w_j = \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} a_k x_k$ para todo j, tal que $\|Tw_j\| \underset{j}{\to} 0$ y tal que la restricción de T al subespacio $[w_j]$ es compacta.*

García del Amo ([**26**]) ha probado que si $T : E \to F$ es un homomorfismo de Riesz entre retículos de Banach E y F, entonces T es DSS si y sólo si T es RSS. Sin embargo no sabemos si en general las clases de todos los operadores DSS y RSS, entre un retículo de Banach E y un espacio de Banach Y, son iguales. Esta cuestión es claramente de interés porque una respuesta afirmativa mostraría que el hecho de que el subespacio generado por una sucesión de vectores disjuntos en E no sea un subretículo de E no influye en la definición de operador DSS. Los resultados siguientes están encaminados a establecer relaciones entre ambas definiciones. Así en el marco de los operadores positivos y regulares obtendremos resultados positivos.

PROPOSICIÓN 2.13. *Sea $T : E \to F$ un operador positivo entre dos retículos de Banach E y F con F orden continuo. Entonces T es RSS si y sólo si T es DSS.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos la implicación no trivial. Supongamos que T no es DSS; entonces existe una sucesión disjunta (normalizada) en E, $(x_n)_n$, y un $\alpha > 0$ tal que para toda sucesión de escalares $(a_n)_n$ se tiene

$$(*) \quad \left\| T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right) \right\| \geq \alpha \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|.$$

Como el subespacio $[Tx_n]$ es separable y el retículo F es orden continuo podemos encontrar un ideal cerrado J de F con unidad débil que contiene a $[Tx_n]$ (cf. Proposición 1.50).

Además J está complementado en F por una poyección positiva P (cf. Proposición 1.27). Consideremos el operador $PT : E \to J$. Claramente la restricción de PT al subespacio $[x_n]$ es un isomorfismo y por tanto PT no es DSS. Por otra parte es igualmente claro que el operador PT no puede ser invertible en el subespacio generado por una sucesión disjunta de vectores no nulos *positivos* porque T no lo es. Así no es restricción suponer que el propio F tiene unidad débil. En tal caso podemos ver a F como un orden ideal (en general no cerrado) de $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ para algún espacio de probabilidad (Ω, Σ, μ) tal que F está incluido continuamente en $L^1(\mu)$ (cf. Teorema 1.49). Consideremos el subretículo $[\,|x_n|\,]$.

Aserto : $[\,|x_n|\,]$ no contiene copia reticular de c_0.

En efecto, de lo contrario existirá una sucesión seminormalizada $(z_k)_k \subset [\,|x_n|\,]_+$ de elementos disjuntos dos a dos y una constante $M > 0$ tales que $\left\| \sum_{i=1}^{n} z_i \right\| \leq M$ para todo n. Además $(z_k)_k$ será equivalente a la base canónica $(e_k)_k$ de c_0. Sea $z_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^k |x_j|$ con $a_j^k \geq 0$ para todo j. Si $\|\, T\,(z_{k_l})\| \to 0$ para alguna subsucesión $(k_l)_l$, entonces de la monotonía de la norma se obtiene que $\left\| T\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^{k_l} x_j \right) \right\| \to 0$ y por tanto que $\|z_{k_l}\| = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{k_l} x_j \right\| \to 0$, pues T es isomorfismo en $[x_n]$; sin embargo eso contradice que $(z_k)_k$ es seminormalizada. Por tanto podemos asumir que $\text{ínf}_k \,\|\, T\, z_k\| \geq \delta > 0$ para algún $\delta > 0$.

Notemos que $(z_k)_k$ es $\sigma([z_k], [z_k]')$-nula siendo equivalente a la base canónica de c_0. Por tanto $(Tz_k)_k$ es $\sigma(F, F')$-nula y más aún $\sigma(L^1(\mu), L^\infty(\mu))$-nula ya que la inclusión de F en $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ es continua (cf. Proposición 1.62. Además como $Tz_k \geq 0$ para todo k, resulta que $\|\, T\, z_k\|_1 \to 0$ dado que $L^1(\mu)$ tiene la propiedad de Schur positiva (cf. Proposición 1.23).

Supongamos ahora que $(Tz_k)_k \subset M_F(\varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$ donde $M_F(\varepsilon)$ es un conjunto de Kadec-Pelczynski. Entonces $\|\, T\, z_k\|_1 \to 0$ implica que $\|\, T\, z_k\|_F \to 0$ y por tanto que $\left\| T\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^{k_l} x_j \right) \right\| \to 0$, lo cual contradice como antes que $(z_k)_k$ es seminormalizada.

Por tanto podemos asumir que $(Tz_k)_k \not\subseteq M_F(\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$. En tal caso existe una subsucesión $(k_j)_j$ tal que $(Tz_{k_j})_j$ es equivalente a una sucesión disjunta de F (cf. Proposición 1.69); así $(Tz_{k_j})_j$ es sucesión básica incondicional y por la Proposición 1.65

existe $\beta > 0$ tal que
$$\Big\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j\, T\, z_{k_j}\Big\| \geq \beta \Big\|\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|\, T\, z_{k_j}\Big\| \geq \beta |a_j|\, \|T\, z_{k_j}\| \geq \beta |a_j| \delta$$
para todo j (en la penúltima desigualdad se usa que $T z_{k_j} \geq 0$ para todo j). En definitiva, se obtiene
$$\Big\|T\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_j z_{k_j}\Big)\Big\| \geq \beta\delta\Big(\bigvee_{j=1}^{\infty} |a_j|\Big) \geq K \Big\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j z_{k_j}\Big\|,$$
donde $K > 0$ es una constante que engloba las constantes β, δ y la constante de equivalencia entre $(z_k)_k$ y la base canónica de c_0. Llegamos así a que T preserva una copia reticular de c_0 y por tanto a que T no es RSS. Contradicción.

Una vez probado el aserto podemos concluir que $[|x_n|]$ es un espacio KB y por tanto débilmente secuencialmente completo (cf. Proposición 1.28). Aplicando a continuación la disyuntiva de Rosenthal (cf. Teorema 1.66) a la sucesión $(|x_n|)_n$, podemos encontrar una subsucesión $(|x_{n_j}|)_j$ que satisface una y sólo una de las dos condiciones siguientes:
1) $(|x_{n_j}|)_j$ es equivalente a la base canónica de l^1.
2) $(|x_{n_j}|)_j$ es débilmente Cauchy.
Supongamos en primer lugar que se tiene 1). En tal caso, y usando que $(x_{n_j})_j$ es una sucesión disjunta, se tiene
$$\sum_j a_j x_{n_j} < \infty \Leftrightarrow \sum_j a_j |x_{n_j}| < \infty \Leftrightarrow \sum_j |a_j| < \infty,$$
y de ahí se concluye que T preserva una copia isomorfa de l^1 (ver desigualdad $(*)$). Eso implica a su vez que T preserva una copia reticular de l^1 por ser T positivo y F orden continuo (cf. Corolario 1.39). Contradicción.
Podemos asumir entonces que se tiene 2). Como $[|x_n|]$ es débilmente secuencialmente completo, necesariamente la sucesión $(|x_{n_j}|)_j$ converge débilmente. Por otra parte, siendo $[|x_n|]$ separable y orden continuo, podemos representarlo como un orden ideal de $L^1(\Omega', \Sigma', \mu')$ para algún espacio de probabilidad (Ω', Σ', μ') (cf. Proposición 1.49); como la inclusión canónica de $[|x_n|]$ en $L^1(\mu')$ es continua resulta que $(|x_{n_j}|)_j$ es también convergente para la topología débil de $L^1(\mu')$ (cf. Proposición 1.62).
Notemos que la sucesión $(|x_{n_j}|)_j$ tiende a cero en μ'-medida siendo disjunta; entonces por el Lema 1.58 obtenemos que $\|x_{n_j}\|_1 \to 0$ y en particular que $|x_{n_j}| \underset{j}{\to} 0$ en la topología débil de $L^1(\mu')$; por tanto $(|x_{n_j}|)_j$ converge a cero en la topología débil de $[|x_n|]$, siendo

esta última más fina que la anterior.
La restricción de T al subretículo $[|x_n|]$ es positiva y por tanto $(T|x_{n_j}|)_j$ es una sucesión de elementos positivos débilmente nula en F. Como la inclusión de F en $L^1(\Omega,\Sigma,\mu)$ es continua, obtenemos que $(T\,|x_{n_j}|)_j$ es débilmente nula en $L^1(\mu)$ o equivalentemente convergente a cero en $\|\cdot\|_1$ ya que $L^1(\mu)$ satisface la propiedad de Schur positiva (cf. Proposición 1.23).
Planteamos a continuación la disyuntiva de Kadec-Pelczynski (ver Proposición 1.69): si $(T|x_{n_j}|)_j \subset M_F(\varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$, entonces $\|\,T\,|x_{n_j}|\,\|_1 \to 0$ implica que $\|\,T\,|x_{n_j}|\,\|_F \to 0$ y consecuentemente que $\|x_{n_j}\| \to 0$, lo cual es una contradicción con la elección de $(x_n)_n$. Si por el contrario $(T\,|x_{n_j}|)_j \not\subseteq M_F(\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces pasando a una subsucesión si es necesario, podemos asegurar que $(T\,|x_{n_j}|)_j$ es sucesión básica incondicional. Así, por la Proposición 1.65 existe una constante $K > 0$ tal que

$$\Big\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j\,T\,|x_{n_j}|\,\Big\| \geq K^{-1}\Big\|\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|\;T\,|x_{n_j}|\,\Big\|.$$

La situación a la que hemos llegado es

$$\begin{aligned}\alpha\Big\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j|x_{n_j}|\,\Big\| &= \alpha\Big\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_{n_j}\Big\| \leq \Big\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j\,T\,x_{n_j}\Big\| \leq \Big\|\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|\,T\,|x_{n_j}|\,\Big\| \\ &\leq K\,\Big\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j\,T\,|x_{n_j}|\,\Big\| = K\,\Big\|\,T\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_j|x_{n_j}|\Big)\Big\|,\end{aligned}$$

es decir, T es invertible en el subretículo $[\,|x_{n_j}|\,]$ o equivalentemente T no es reticularmente singular. Contradicción. $\square$

Notemos que si E' y F son orden continuos, entonces la demostración anterior se abrevia pues en ese caso la sucesión $(|x_n|)_n$ es débilmente nula de modo automático (cf. Proposición 1.30). La Proposición 2.13 nos permite pasar a demostrar el resultado principal del capítulo sobre mayoración de operadores DSS:

Teorema 2.14. *Sean E y F retículos de Banach con F orden continuo y operadores positivos $0 \leq S \leq T : E \to F$. Si T es DSS entonces S es DSS.*

Demostración. Comencemos probando el resultado en el caso en que la norma en F y la norma dual en E' sean orden continuas simultáneamente. Supongamos que S no es DSS o equivalentemente que S no es RSS (cf. Proposición 2.13). Entonces por la

Proposición 2.11 b), existe una sucesión (normalizada) de vectores *positivos* mutuamente disjuntos, $(x_n)_n$, y un $\alpha > 0$ tales que $\|Sx\| \geq \alpha\|x\|$ para todo $x \in [x_n]$.

El subespacio separable $[Sx_n]$ está incluido en un ideal cerrado $J \subseteq F$ con unidad débil (cf. Teorema 1.50). Además J es el rango de una proyección positiva P de F en J (cf. Proposición 1.27). Claramente PT es DSS mientras que PS no lo es; por tanto el problema se puede reducir al caso en F es orden continuo con unidad débil. El teorema de representación 1.49 proporciona un espacio de probabilidad (Ω, Σ, μ), un orden ideal I de $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$, una norma reticular $\|\cdot\|_I$ en I y una isometría reticular ψ entre F y $(I, \| \|_I)$, tal que la inclusión canónica de I en $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ es continua con $\|f\|_1 \leq \|f\|_I$. Así, si $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$, $(I, \| \|_I)$ y ψ tienen el significado previo, entonces es claro que probar que T DSS implica S DSS es equivalente a probar que $\psi T : E \to I$ DSS implica ψS DSS (notemos que ψ es positivo por ser isometría reticular). En resumen, se puede asumir sin pérdida de generalidad que F es un orden ideal de $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ para algún espacio de probabilidad (Ω, Σ, μ).

Aserto : $(Tx_n) \nsubseteq M_F(\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$, donde $M_F(\varepsilon)$ denota un conjunto de Kadec-Pelczynski.
En efecto, de lo contrario existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|Tx_n\|_1 \geq \varepsilon^2\|Tx_n\| \geq \varepsilon^2\|Sx_n\|$ (cf. demostración de la Proposición 1.69). La sucesión $(x_n)_n$ converge débilmente a cero por ser E' orden continuo (cf. Proposición 1.30). De ahí se sigue que $(Tx_n)_n$ converge a cero en la topología débil de $L^1(\mu)$ por ser $T : E \to L^1(\mu)$ un operador acotado (cf. Proposición 1.62). Más aún, $(Tx_n)_n$ converge a cero en $L^1(\mu)$ dado que $Tx_n \geq 0$ para todo n y que $L^1(\mu)$ satisface la propiedad de Schur positiva (cf. Proposición 1.23). Usando la desigualdad anterior se obtiene que $(Sx_n)_n$ converge a cero en F. Como la restricción de S al subretículo $[x_n]$ es un isomorfismo se concluye que $(x_n)_n$ converge a cero en E, lo cual es una contradicción con la elección inicial de la sucesión $(x_n)_n$.

Una vez que el aserto ha sido probado podemos usar la Proposición 1.69 para seleccionar una subsucesión de $(Tx_n)_n$, que seguimos denotando igual, que es equivalente a una sucesión disjunta de F y por tanto sucesión básica incondicional. Por la Proposición 1.65 existe una constante $K > 0$ tal que

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n T x_n \right\| \geq K^{-1} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| T x_n \right\|.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\left\|T\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n\right)\right\| &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_nTx_n\right\| \geq K^{-1}\left\|\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|Tx_n\right\| \\ &\geq K^{-1}\left\|\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|Sx_n\right\| \geq \alpha K^{-1}\left\|\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|x_n\right\| = \alpha K^{-1}\left\|\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n\right\|,\end{aligned}$$

es decir, T es invertible en el subespacio $[x_n]$, lo cual es una contradicción con la hipótesis inicial.

Probemos a continuación el caso en que únicamente la norma de F es orden continua. Supongamos como antes lo contrario; entonces existe una sucesión $(x_n)_n$ en E de vectores positivos mutuamente disjuntos y de norma uno tales que la restricción de S al subespacio $[x_n]$ es un isomorfismo. Por lo visto previamente, podemos asumir que la norma dual del subretículo $[x_n]'$ no es orden continua. En ese caso $[x_n]$ contiene una copia reticular de l^1 (cf. Proposición 1.30) y por tanto S preserva una copia de l^1. De ahí se sigue que el operador adjunto S' no es orden débilmente compacto (cf. Proposición 1.37) y lo mismo se puede decir de T' por la Proposición 1.33; de nuevo la Proposición 1.37 concluye que T preserva una copia isomorfa de l^1 o equivalentemente una copia reticular de l^1 dado que F es orden continuo y T es positivo (cf. Corolario 1.39). Resulta entonces que T no es RSS lo cual es una contradicción con lo obtenido en la Proposición 2.13. $\square$

En general el problema de mayoración en la clase de los operadores DSS tiene una respuesta negativa:

Ejemplo 2.15. Sea $S : l^1 \to L^\infty[0,1]$ la isometría que lleva el elemento enésimo de la base canónica de l^1 a la enésima función de Rademacher, r_n, sobre $[0,1]$ (cf. [**16**, pg. 203]), i.e. $S(\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n) = \sum_{n=1}^{\infty}a_nr_n$. Consideremos los operadores positivos $S_1, S_2 : l^1 \to L^\infty[0,1]$ definidos como $S_1(e_n) = r_n^+$ y $S_2(e_n) = r_n^-$ respectivamente, donde r_n^+ y r_n^- denotan respectivamente la parte positiva y negativa de r_n. Claramente $S = S_1 - S_2$. Además $0 \leq S_1, S_2 \leq T$ donde T es el operador de rango uno $T(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}x_n\right)\chi_{[0,1]}$. T es DSS por ser compacto y sin embargo ni S_1 ni S_2 son DSS porque de lo contrario las igualdades $T = S_1 + S_2$ y $S = S_1 - S_2$ implicarían que S es un operador DSS, lo cual no es cierto.

Proposición 2.16. *Sean E y F retículos de Banach con F orden continuo y sea $T : E \to F$ un operador regular. Si T es RSS entonces $|T|$ es RSS.*

DEMOSTRACIÓN. Si $|T|$ no es RSS entonces $|T|$ no es DSS. Por tanto tiene que ocurrir una de las dos opciones siguientes: a) T^+ no es DSS, o bien, b) T^- no es DSS. Por la Proposición 2.13 la disyuntiva anterior es equivalente a esta otra: a) T^+ no es RSS, o bien T^- no es RSS.

Comencemos con a). En tal caso existe una sucesión normalizada de elementos positivos y disjuntos, $(x_n)_n$, tal que $\left\|T^+\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right)\right\| \geq \alpha \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\|$ para algún $\alpha > 0$ y para toda sucesión $(a_n)_n$. Notemos que $T^+x_n = \sup\{Ty : 0 \leq y \leq x_n\}$ (cf. Proposición 1.3). Como F es orden continuo podemos elegir para cada n un $y_n \in [0, x_n]$ tal que $\|Ty_n - T^+x_n\| \leq \alpha/2^{n+1}$. Así

$$\begin{aligned}\left\|T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n\right)\right\| &\geq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n T^+ x_n\right\| - \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n (T^+x_n - Ty_n)\right\| \\ &\geq \alpha \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\| - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \| T^+x_n - Ty_n\| \\ &\geq \alpha \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\| - \alpha/2 \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\| = \alpha/2 \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\| \\ &= \alpha/2 \left\|\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| x_n\right\| \geq \alpha/2 \left\|\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| y_n\right\| = \alpha/2 \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n\right\|.\end{aligned}$$

Así pues llegamos a que T es invertible en el subretículo $[y_n]$ lo cual es una contradicción con la hipótesis inicial.

Supongamos a continuación b), es decir T^- no es RSS. En tal caso la igualdad $T^- = (-T)^+$ implica según la primera parte que $-T$ no es RSS, o equivalentemente que T no es RSS. Contradicción. □

Notemos que la Proposición 2.13 es un caso particular de la Proposición 2.16; no obstante este hecho lo conocemos a posteriori ya que la prueba de la Proposición 2.16 depende del Teorema 2.14, el cual se demuestra a su vez gracias a la Proposición 2.13.

COROLARIO 2.17. *Sean E y F retículos de Banach con F orden continuo y $T : E \to F$ un operador regular. Son equivalentes:*
i) T es DSS. ii) T es RSS. iii) $|T|$ es RSS. iv) $|T|$ es DSS.

DEMOSTRACIÓN. La implicación $i) \Rightarrow ii)$ siempre es cierta. La implicación $ii) \Rightarrow iii)$ es la Proposición 2.16. Por otra parte la implicación $iii) \Rightarrow iv)$ se deriva de la Proposición

2.13. Por último la desiguadad $|T| \geq T^+, T^-$ junto con el Teorema 2.14 muestran que $T = T^+ - T^-$ es DSS. Eso prueba la implicación $iv) \Rightarrow i)$. $\square$

Observación 2.18. El Corolario 2.17 no es cierto en general si prescindimos de la hipótesis de orden continuidad sobre F (ver la Observación 2.22).

Usando el Corolario 2.17 podemos ir un poco más allá en el estudio de la estructura de la clase de los operadores disjuntamente singulares:

Corolario 2.19. *Sean E y F retículos de Banach con F orden continuo. Entonces las clases $\mathcal{RSS}(E,F) \cap \mathcal{L}^r(E,F)$ y $\mathcal{DSS}(E,F) \cap \mathcal{L}^r(E,F)$ coinciden y son orden ideales de $\mathcal{L}^r(E,F)$.*

Demostración. Por el Corolario previo tenemos la igualdad $\mathcal{RSS}(E,F) \cap \mathcal{L}^r(E,F) = \mathcal{DSS}(E,F) \cap \mathcal{L}^r(E,F)$, lo que prueba que $\mathcal{RSS}(E,F) \cap \mathcal{L}^r(E,F)$ es un subretículo de $\mathcal{L}^r(E,F)$. Además, si $0 \leq |S| \leq |T|$ y T es RSS (DSS), entonces S es RSS (DSS) por el Corolario 2.17 y el Teorema 2.14. $\square$

No sabemos si la condicion de orden continuidad sobre la norma dual de E' es suficiente por sí sola para establecer el Teorema de mayoración 2.14. Al menos podemos dar la siguiente:

Proposición 2.20. *Sean E y F retículos de Banach y $0 \leq S \leq T : E \to F$ operadores. Si T es M-débilmente compacto entonces S es DSS. En particular si E' es orden continuo y T es compacto entonces S es DSS.*

Demostración. Es inmediato comprobar que cualquier operador dominado por un operador M-débilmente compacto es M-débilmente compacto (cf. Definición 1.32). Por otra parte ya hemos notado que todo operador M-débilmente compacto es DSS. En cuanto a la segunda parte basta notar que si E' es orden continuo entonces todo operador compacto es M-débilmente compacto (cf. Proposición 1.30). Usar ahora la primera parte. $\square$

En cualquier caso la condición de orden continuidad sobre la norma dual de E' juega un papel importante en el problema de mayoración como queda reflejado a continuación:

Proposición 2.21. *Sean E y F retículos de Banach, F σ-Dedekind completo. Supongamos que todo operador positivo de E en F dominado por otro operador DSS es también DSS. Entonces debe ocurrir al menos una de las dos condiciones siguientes:*
i) La norma dual de E' es orden continua.
ii) La norma de F es orden continua.

Demostración. Supongamos que $i)$ y $ii)$ no se cumplen, esto es que E' y F no son orden continuos. En tal caso E contiene una copia reticular de l^1 que está complementada por una proyección positiva (cf. Proposición 1.30); llamemos H_1 al subretículo de E reticularmente isomorfo a l^1, ϕ_1 al isomorfismo de Riesz entre H_1 y l^1, y P_1 a la proyección positiva de E sobre H_1. Por otra parte, como la norma de F no es orden continua y F es σ-Dedekind completo, existe un subretículo H_2 de F y un isomorfismo de Riesz ϕ_2 entre H_2 y l^∞ (cf. Proposición 1.27). Consideremos los operadores de l^1 en l^∞ definidos como sigue

$$T(a = (a_n)) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)(1, 1, \cdots) \quad \text{y} \quad S(a = (a_n)) = \left((\sum_{n=1}^{\infty} x_{k,n} a_n)_{k=1}^{\infty}\right),$$

donde $S \equiv (x_{k,n})$ es la matriz infinita con valores en $\{0, 1, -1\}$ dada a continuación

$$S \equiv (x_{k,n}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Notemos que para un $a \in l^1$ dado existe un entero k tal que $2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} < k \leq 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$, y satisfaciendo $\sum_{m=1}^{n} |a_m| = \sum_{j=1}^{n} x_{k,j} a_j$.

Claramente S es una isometría lineal de l^1 en l^∞. En efecto,

$$\|S(a)\|_\infty = \sup_k \left(\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_{k,n} a_n \right| \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \|a\|_1$$

Por otra parte, para un $\varepsilon > 0$ dado, existe un entero n tal que $\sum\limits_{m=1}^{n} |a_m| \geq (\|a\|_1 - \varepsilon)$; por tanto existe un entero k satisfaciendo $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{k,j} a_j = \sum\limits_{m=1}^{n} |a_m| \geq (\|a\|_1 - \varepsilon)$ con lo que $\|Sa\|_\infty \geq \|a\|_1 - \varepsilon$. Así $\|Sa\|_\infty = \|a\|_1$.

Consideremos ahora los operadores S^+ y S^- definidos por medio de las sucesiones $(x'_{k,n})$ y $(x''_{k,n})$, donde

$$x'_{k,n} = \begin{cases} x_{k,n} & \text{si } x_{k,n} > 0, \\ 0 & \text{si } x_{k,n} \leq 0. \end{cases} \qquad x''_{k,n} = \begin{cases} -x_{k,n} & \text{si } x_{k,n} < 0, \\ 0 & \text{si } x_{k,n} \geq 0. \end{cases}$$

El operador $\widetilde{S}(a) = (\sum_{j=1}^{\infty} |x_{k,j}|a_j)_{k=1}^{\infty}$ de l^1 en l^∞ claramente factoriza a través del espacio c de las sucesiones convergentes con la norma usual (que es isomorfo a c_0). Así $\widetilde{S}$ es DSS pues l^1 y c_0 no comparten subespacios. Además las igualdades $\widetilde{S} = S^+ + S^-$ y $S = S^+ - S^-$ implican $S = 2S^+ - \widetilde{S}$; por tanto, si S^+ es DSS lo mismo se puede decir de S, lo cual es una contradicción con el hecho de que S es una isometría. Consecuentemente S^+ no es DSS; de hecho la desigualdad $\|S^+a\| \geq 1/2\|a\|_1$ es cierta para todo $a \in l^1$. Finalmente es claro que $S^+ \leq T$ y que T es DSS siendo un operador de rango uno.

Consideremos los operadores $S' = \phi_2 S^+ \phi_1 P_1$ y $T' = \phi_2 T \phi_1 P_1$ definidos en E y con valores en F. Claramente $0 \leq S' \leq T'$; además $\phi_2 S^+ \phi_1$ no es DSS puesto que ϕ_1 y ϕ_2 son isomorfismos y S^+ no es DSS. Las desigualdades

$$m\|h\|_E \leq \|S^+\phi_1(h)\|_{l^\infty} \leq \|\phi_2 S^+ \phi_1(h)\|_F \leq M\|h\|_H$$

muestran que S' es invertible en H, y por tanto que S' no es DSS. □

Observación 2.22. Notemos que en el ejemplo previo se tiene la igualdad $|S| = T$ y que por tanto el operador $|S|$ es DSS mientras que el operador S no es DSS. Así el Corolario 2.17 no es en general cierto.

3. El caso de endomorfismos ($E = F$)

Pasamos a continuación a considerar el caso en que $E = F$ y a estudiar, dados $0 \leq S \leq T : E \to E$ con T DSS, cual es el mínimo exponente n para el que S^n es DSS, todo ello sin imponer condiciones a E. Este problema ha sido considerado por Aliprantis y Burkinshaw para las clases de operadores compactos y débilmente compactos, en [**2**] y [**3**] respectivamente (ver introducción).

Necesitamos recordar el siguiente resultado de factorización relativo a operadores o-débilmente compactos (cf. Definición 1.32)

Proposición 2.23. *Sean E e Y un retículo de Banach y un espacio de Banach respectivamente y $T : E \to Y$ un operador o-débilmente compacto. Entonces existe un retículo* *de Banach orden continuo F, un homomorfismo de Riesz Q de E en F y un operador acotado S de F en Y tal que $T = SQ$. Además, si Y es un retículo de Banach y $0 \leq T_1 \leq T$ entonces $0 \leq S_1 \leq S$.*

Demostración. Ver [**50**, Thm. 3.4.6]. $\square$

Proposición 2.24. *Sean E_i, $i = 1, 2, 3$, retículos de Banach y $0 \leq S_i \leq T_i$ operadores definidos en E_i y con valores en E_{i+1} para $i = 1, 2$. Si T_1 es DSS (resp. RSS) y T_2 es o-débilmente compacto, entonces $S_2 S_1$ es DSS (resp. RSS).*

Demostración. Dados los operadores $0 \leq S_2 \leq T_2 : E_2 \to E_3$, podemos encontrar por la Proposición 2.23 un retículo de Banach G con norma orden continua, un homomorfismo de Riesz Q de E_2 en G y dos operadores positivos $\widetilde{S}_2 \leq \widetilde{T}_2$ de G en E_3 tales que $T_2 = \widetilde{T}_2 Q$ y $S_2 = \widetilde{S}_2 Q$.

Consideremos los operadores $S = QS_1$ y $T = QT_1$ de E_1 en G. Notemos que T es DSS (resp. RSS) porque T_1 lo es y estamos componiendo por la izquierda; como la norma de G es orden continua, el Teorema 2.14 implica que S es también DSS (resp. RSS) y por tanto que $\widetilde{S}_2 S$ es DSS (resp. RSS). Finalmente la igualdad $S_2 S_1 = \widetilde{S}_2 S$ concluye que $S_2 S_1$ es DSS (resp. RSS). $\square$

Corolario 2.25. *Sean $0 \leq S \leq T$ operadores positivos en un retículo de Banach E. Si T es DSS (resp. RSS) entonces S^2 is DSS (resp. RSS).*

Observación 2.26. El Corolario 2.25 da lo mejor posible. En efecto, consideremos el retículo $E = l^1 \oplus l^\infty$ y los operadores $0 \leq \widetilde{S} \leq \widetilde{T}$ en E definidos vía las matrices

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S^+ & 0 \end{pmatrix} \qquad \widetilde{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & 0 \end{pmatrix}$$

donde S^+ y T son los operadores definidos en la prueba de la Proposición 2.21. Claramente $\widetilde{T}$ es DSS (resp. RSS) mientras que $\widetilde{S}$ no lo es.

Corolario 2.27. *Sean E retículo de Banach Dedekind completo y $0 \leq S \leq T : E \to E$ operadores positivos. Si T es DSS (resp. RSS) y S es un ortomorfismo entonces S es DSS (resp. RSS). En particular el operador identidad de E no está mayorado por ningún operador DSS (resp. RSS).*

Demostración. Notemos que si una proyección de banda P satisface $0 \leq P \leq Q$, siendo Q DSS (resp RSS), entonces P es DSS (resp RSS). En efecto, sólo hay que observar que $P^2 = P$ y usar el Corolario 2.25.

Como S es un ortomorfismo, existe $\lambda > 0$ tal que $0 \leq S \leq \lambda I$, donde I denota la identidad en E (cf. [**4**, Thm. 15.5]). Por el Teorema 1.11 (Freudenthal) existe una sucesión $(S_n)_n$ de operadores I-escalonados tales que $0 \leq S_n \leq S$ y

$$S - S_n \leq n^{-1} I$$

para todo n. Notemos ahora que cada componente de I es una proyección de banda con lo que, por lo observado previamente, cada S_n es un operador DSS (resp. RSS). Como $\|S - S_n\| \leq n^{-1}$ para todo n es claro que S es DSS (resp. RSS). □

Aunque no sabemos si todo operador RSS es DSS sí que podemos afirmar la siguiente:

Proposición 2.28. *Sea E un retículo de Banach y $T : E \to E$ un operador regular. Si T es RSS entonces T^2 es DSS.*

Demostración. Notemos que T es o-débilmente compacto por la Proposición 1.33. En tal caso por la Proposición 2.23 existe un retículo orden continuo G, un homomorfismo de Riesz $Q : E \to G$ y un operador continuo $S : G \to E$ tales que $T = SQ$. Notemos que el operador $QT : E \to G$ es RSS por serlo T y por tanto DSS según el Corolario 2.17. A partir de aquí se obtiene que el operador $T^2 = SQT$ es DSS. □

4. Caracterizaciones de operadores DSS y RSS

Los resultados que siguen tratan de dar caracterizaciones de los operadores reticularmente estrictamente singulares y disjuntamente estrictamente singulares que extiendan las dadas en las Proposiciones 2.2 y 2.12. En concreto estamos interesados en estudiar si es cierto que un operador $T : E \to F$ es RSS si y sólo si para cualquier subretículo S de E existe otro subretículo $R \subset S$ tal que la restricción de T a R es compacta. Esta caracterización estaría en línea con la conocida para operadores estrictamente singulares (cf. Proposición 3.2). Obtenemos con carácter parcial la siguiente:

Proposición 2.29. *Sea $T : E \to F$ un operador regular entre dos retículos de Banach E y F tales que E' y F son orden continuos. Son equivalentes:*

i) T es RSS.
ii) Para todo subretículo H de dimensión infinita de E existe un subretículo $R \subset H$ de dimensión infinita tal que la restricción de T a R es un operador compacto.

Demostración. *ii)* $\Rightarrow$ *i)*
Si T no es RSS existe un subretículo de dimensión infinita H en E tal que $T(H)$ y H son isomorfos. Por hipótesis existe $R \subset H$ subretículo de dimensión infinita tal que la restricción $T : R \to F$ es compacta, lo que contradice que $T(R)$ es isomorfo a R (notemos que ni la orden continuidad de E' ni la de F se necesitan).

i) $\Rightarrow$ *ii)*
Sea $S \subset E$ un subretículo cerrado de dimensión infinita. Tomemos en S una sucesión normalizada $(x_n)_n$ de vectores positivos y mutuamente disjuntos (cf. [**49**, Thm. 28.5]). La sucesión $(x_n)_n$ es débilmente nula por ser E' orden continuo (cf. Proposición 1.30). Como el subespacio generado por la sucesión $(Tx_n)_n$ es separable y el retículo F es orden continuo, podemos encontrar un ideal cerrado J de F con unidad débil que contiene a $[Tx_n]$ (cf. Proposición 1.50). Además J está complementado en F por una proyección positiva P (cf. Proposición 1.27). Consideremos el operador $PT : E \to J$. Claramente la restricción de PT al subretículo $[x_n]$ es RSS. Si suponemos la implicación probada en el caso en que el retículo de llegada tenga unidad débil, entonces existiría un subretículo $R \subset [x_n]$ tal que la restricción de PT a R sería compacta. Es claro entonces que la restricción de T a R también debe ser compacta. Así pues no hay pérdida de generalidad en suponer que el propio F tiene una unidad débil. En tal caso, podemos ver a F como un orden ideal de $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ para algún espacio de probabilidad (Ω, Σ, μ), tal que F está incluido continuamente en $L^1(\mu)$ (cf. Teorema 1.49).

Como $(|T|x_n)_n$ converge débilmente a cero, también es convergente a cero para la toplogía débil de $L^1(\mu)$ y por tanto convergente a cero con la norma $\|\cdot\|_1$ (cf. Proposición 1.62 y 1.23). Consiguientemente $(Tx_n)_n$ converge a cero en norma $\|\cdot\|_1$. Supongamos ahora que $(Tx_n)_n \subset M_F(\varepsilon)$ para algún ε, donde $M_F(\varepsilon)$ es un conjunto de Kadec-Pelczynski; en tal caso $\|Tx_n\|_1 \to 0$ implica $\|Tx_n\|_F \to 0$. Definiendo para todo m el operador de rango finito $T_m(x) = \sum_{n=1}^{m} a_n Tx_n$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in [x_n]$, es inmediato ver que existe $(m_j)_j$ tal que $\|T|_{[x_n]} - T_{m_j}\| < 1/j$, con lo que la restricción de T al subretículo $[x_n]$ es un operador compacto.

Si por el contrario suponemos que $(Tx_n)_n \nsubseteq M_F(\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces existe una subsucesión $(n_j)_j$ tal que $(Tx_{n_j})_j$ es sucesión básica incondicional (cf. Proposición 1.69). Entonces, por la Proposición 1.65 existe $K > 0$ tal que

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j T x_{n_j}\right\| \geq K^{-1}\left\|\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|\ T x_{n_j}\right\|.$$

Como T es RSS, existe una sucesión bloque normalizada de vectores mutuamente disjuntos (no necesariamente positivos), $w_l = \sum_{k=j_l+1}^{j_{l+1}} a_k x_{n_k}$, tal que $\|Tw_l\| \to 0$ (cf. Proposición 2.2). Tenemos

$$\|T|w_l|\,\| = \left\|\sum_{k=j_l+1}^{j_{l+1}} |a_k|\, T x_{n_k}\right\| \leq K\left\|\sum_{k=j_l+1}^{j_{l+1}} a_k T x_{n_k}\right\| = K\|Tw_l\|,$$

con lo que $\|T\,|w_l|\,\| \underset{l}{\to} 0$. Como antes, la restricción de T al subretículo $[\,|w_l|\,]$ se puede poner como límite en norma de operadores de rango finito y por tanto es compacta. Esto concluye la demostración. $\square$

Corolario 2.30. *Sea $T : E \to F$ un operador regular entre dos retículos de Banach E y F tales que E' y F son orden continuos. Son equivalentes*
i) T es DSS.
ii) Para todo subretículo H de dimensión infinita existe un subretículo $R \subset H$ de dimensión infinita tal que la restricción de T a R es un operador compacto.

Demostración. Basta usar el Corolario 2.17 y la Proposición 2.29. Hacemos notar que la implicación $ii) \Rightarrow i)$ no requiere la orden continuidad de E'. $\square$

Observación 2.31. El Corolario previo junto con el Teorema de Dodds-Fremlin (introducción) permite dar una demostración trivial del Teorema 2.14 cuando añadimos la hipótesis de orden continudad a la norma dual de E'.

El ejemplo siguiente muestra que el Corolario 2.30 no es en general cierto.

Ejemplo 2.32. *El operador $T : l^1 \to l^\infty$ definido como $T(a_n) = \left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)_{m=1}^{\infty}$ es DSS pero la restricción de T a cualquier subretículo de l^1 nunca es compacta.*

En efecto, el operador T es positivo y por tanto continuo, y como para todo n se tiene $T(e_n) = (0, \dots, 0, \underset{n}{1}, 1, 1, 1, \dots)$ es claro que T toma los valores en el retículo de Banach

c de las sucesiones convergentes. Como l^1 y c no comparten subespacios resulta que T es estrictamente singular y por tanto DSS y RSS.

Tomemos en l^1 un subretículo arbitrario de dimensión infinita M.
"Aserto": $T : M \to c$ no es compacto.

En efecto, de lo contrario podemos tomar en M una sucesión normalizada de vectores positivos disjuntos $(w_n)_n$ tal que $(Tw_n)_n$ es convergente. Consideremos para todo n un truncamiento finito $\widetilde{w}_n$ de w_n tal que $\|\widetilde{w}_n - w_n\|_1 \leq \|T\|^{-1}2^{-n}$. Ahora como $w_m \wedge w_n = 0$ si $n \neq m$, es claro que, pasando a subsucesión si es necesario, podemos asumir que $(\widetilde{w}_n)_n$ está formada por bloques y es seminormalizada, es decir $\widetilde{w}_n = \sum_{k=j_n+1}^{j_{n+1}} a_k^n e_k$ con $a_k^n \geq 0$ para todos n, k y $\|\widetilde{w}_n\|_1 \geq \alpha > 0$ para todo n y para algún $\alpha > 0$.

La desigualdad $\|T\widetilde{w}_n - T\widetilde{w}_m\| \leq \|Tw_n - Tw_m\| + \|Tw_n - T\widetilde{w}_n\| + \|T\widetilde{w}_m - Tw_m\|$ junto con las líneas previas muestran que la sucesión $(T\widetilde{w}_n)_n$ es de Cauchy y por tanto convergente. Por otra parte notemos que para $m > n$ se tiene

$$T(\widetilde{w}_n - \widetilde{w}_m) = \left(0, \dots, 0, a_{j_n+1}^n, \dots, \sum_{j_n+1}^{j_{n+1}} a_k^n, \sum_{j_n+1}^{j_{n+1}} a_k^n - a_{j_m+1}^m, \dots, \left(\sum_{j_n+1}^{j_{n+1}} a_k^n - \sum_{j_m+1}^{j_{m+1}} a_k^m\right), \dots\right).$$

Así $\|T\widetilde{w}_n - T\widetilde{w}_m\|_\infty \geq \left|\sum_{j_n+1}^{j_{n+1}} a_k^n\right| = \sum_{j_n+1}^{j_{n+1}} a_k^n = \|\widetilde{w}_n\|_1 \geq \alpha$. Contradicción. Notemos que no se satisface ninguna de las hipótesis de orden continuidad del Corolario 2.30 pues ni c ni $(l^1)' = l^\infty$ son orden continuos.

Un razonamiento análogo al empleado en el Ejemplo 2.32 se puede emplear para construir el siguiente ejemplo que muestra como la hipótesis de orden continuidad sobre F tampoco es suficiente para establecer el Corolario 2.29

Ejemplo 2.33. *El operador $T : l^1 \to c_0$ definido como $T(a_n) = \left(\sum_{k=m}^{\infty} a_k\right)_{m=1}^{\infty}$ es DSS pero la restricción del mismo a cualquier subretículo de l^1 nunca es compacta.*

Observación 2.34. A la vista de los ejemplos precedentes surge de modo natural la pregunta ¿Es la condición de orden continuidad sobre E' suficiente por sí sola para que el Corolario 2.29 sea cierto? Notemos que una respuesta afirmativa supondría que el problema de mayoración en $\mathcal{RSS}(E, F)$, con E' orden continuo, sería cierto. En efecto, supongamos que $S, T \in \mathcal{L}^r(E, F)$ con $0 \leq S \leq T$ y T RSS, y tomemos un subretículo M. Por hipótesis existe N subretículo de M tal que $T : N \to F$ es compacto. Como N' es

orden continuo el operador $T : N \to F$ es M-débilmente compacto y lo mismo se puede decir de $S : N \to F$. En tal caso la restricción $S : N \to F$ es RSS y lo mismo se puede decir del operador S puesto que M fue tomado arbitrariamente.
Desde el punto de vista opuesto, si el problema de mayoración no fuera cierto en $\mathcal{RSS}(E, F)$ con E' orden continuo, entonces la condición de orden continuidad de F sería imprescindible en el Corolario 2.29.

5. Operadores disjuntamente estrictamente singulares y dualidad

Al comienzo del capítulo vimos por medio del Ejemplo 2.4 que la clase de operadores DSS no es autodual. En esta sección pretendemos probar que hay resultados positivos en el marco de los espacios $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ sobre un espacio de probabilidad (Ω, Σ, μ) . Comenzamos con la siguiente:

PROPOSICIÓN 2.35. *Sea E un retículo de Banach, (Ω, Σ, μ) un espacio de probabilidad y $T : E \to L^p(\mu)$ un operador positivo, $p \in [1, \infty)$; supongamos que E' es orden continuo. Si el operador T' es DSS entonces el operador T es DSS.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el operador T no es DSS; entonces existe una sucesión (seminormalizada) $(z_n)_n$ en E de elementos disjuntos que además pueden suponerse positivos por la Proposición 2.13 tal que T es invertible sobre el subespacio $[z_n]$. Notemos que el operador $T : E \to L^1(\mu)$ es M-débilmente compacto por la Proposición 1.46; por tanto $\|Tz_n\|_1 \to 0$.

Supongamos que $(Tz_n)_n \subset M_F(\delta)$ para algún $\delta > 0$, donde $M_F(\delta)$ es un conjunto de Kadec-Pelczynski. Entonces $\|Tz_n\|_1 \geq \delta^2\|Tz_n\|$ para todo n, lo que implica que $\|Tz_n\| \to 0$ y por tanto que $(z_n)_n$ converge a cero. Contradicción.

Podemos suponer entonces que $(Tz_n)_n \not\subseteq M_F(\delta)$ para todo $\delta > 0$ y por tanto (cf. Proposición 1.69) que existe una subsucesión, que seguimos denotando igual, $(Tz_n)_n$, y una sucesión disjunta $(w_n)_n$ en $L^p(\mu)$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \|Tz_n - w_n\| < \infty$.

Los elementos de la sucesión $(Tz_n)_n$ son positivos por ser T positivo; notemos ahora que en la prueba de la Proposición 1.69 cada w_n se obtiene como el producto de Tz_n por una cierta función característica, lo que implica que w_n también es positivo para todo n. Notemos también que las sucesiones $(z_n)_n$, $(Tz_n)_n$ y $(w_n)_n$ son sucesiones básicas equivalentes (cf. Proposición 1.64).

Como la sucesión $(w_n)_n$ es disjunta, el subespacio $[w_n]$ está complementado en $L^p(\mu)$ por una proyeción positiva P de norma uno que viene dada por la expresión

$$Pf = \sum_{n=1}^{\infty} (\int_{A_n} f w_n^{p-1}) \cdot w_n,$$

donde el conjunto A_n es el soporte de w_n para todo n (Proposición 1.68). Notemos además que la sucesión $(w_n)_n$ es seminormalizada por serlo la sucesión $(z_n)_n$ y más aún que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\|w_n\| = 1$ para todo n; de nuevo por la Proposición 1.68 existe una isometría entre $[w_n]$ y l^p que lleva cada w_n al elemento e_n de la base canónica de l^p. Del hecho de que el subespacio $[w_n]$ es reflexivo se deriva que $[w_n]' = [w_n']$, donde $w_n'(w_m) = \delta_{nm}$ (cf. [**44**, Prop. 1.b.4 y Thm. 1.b.5]).

Observemos que la aplicación $\phi(y') = y'P$ define una isometría del espacio $[w_n]'$ sobre el subespacio G de $L^q(\mu)$ definido como $G = \{y'P : y' \in [w_n']\}$, donde $1/p + 1/q = 1$.

Consideremos el subespacio $K = \{x' \in L^q(\mu) : x'(x) = x'(Px)\}$. Notemos que G está incluido en K ya que $y'P(x) = y'(P^2x) = y'P(Px)$ para todo $y' \in [w_n']$.

Aserto: El operador T' es invertible sobre K y por tanto sobre $[w_n'P]$.

En efecto, como la sucesión $(w_n)_n$ es disjunta y normalizada se tiene que $|a_k| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n \right\|$ para todo k. Por otra parte, pasando a una subsucesión si es necesario, podemos suponer que $\sum_{n=1}^{\infty} \|Tz_n - w_n\| < \varepsilon < \frac{M_1}{2M_2}$, donde M_1 y M_2 son tales que

$$M_1 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n \right\| \leq M_2 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n \right\|.$$

Así, si $y' \in K$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|T'y'\| &= \sup\{|T'y'(x)| : x \in B_E\} = \sup\{|y'(Tx)| : x \in B_E\} \\
&\geq \sup\{|y'(Tx)| : x \in B_{[z_n]}\} = \sup\left\{ \left| y'\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n T z_n \Big) \right| : \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n \right\| \leq 1 \right\} \\
&= \sup\left\{ \left| y'\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n \Big) - y'\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n T z_n \Big) \right| : \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n \right\| \leq 1 \right\} \\
&\geq \sup\left\{ \left| y'\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n \Big) \right| : \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n \right\| \leq 1 \right\} \\
&- \sup\left\{ \left| y'\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n (w_n - T z_n) \Big) \right| : \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n \right\| \leq 1 \right\}
\end{aligned}$$

$$\geq \sup\left\{\left|y'\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n\right)\right| \,:\, \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n\right\| \leq M_1\right\}$$
$$- \sup\left\{\left|y'\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n (w_n - Tz_n)\right)\right| \,:\, \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n\right\| \leq M_2\right\}$$
$$\geq \sup\left\{|y'(Py)| \,:\, \|y\| \leq M_1\right\}$$
$$- \sup\left\{\left|y'\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n (w_n - Tz_n)\right)\right| \,:\, \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n\right\| \leq M_2\right\}$$
$$\geq M_1\|y'P\| - \sup\left\{\|y'\|\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n\right\|\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|Tz_n - w_n\|\right) \,:\, \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n\right\| \leq M_2\right\}$$
$$\geq M_1\|y'P\| - M_2\|y'\|\varepsilon > M_1\|y'\| - \frac{M_1}{2}\|y'\| = \frac{M_1}{2}\|y'\|.$$

Por último que la sucesión $(w_n'P)_n \subset G \subset K$ es de elementos disjuntos es consecuencia de que $w_n' = w_n^{p-1}$ para todo n. $\square$

Proposición 2.36. *Sea E un retículo de Banach y $T : E \to L^p(\mu)$ un operador regular, $p \in [1, \infty)$; supongamos que E' es orden continuo. Si T' es DSS entonces T es DSS.*

Demostración. Si T' es DSS entonces $|T'|$ es DSS por el Corolario 2.17. Por la Proposición 1.31 se tiene la igualdad $|T|' = |T'|$ con lo que $|T|'$ es DSS. Se sigue entonces que $|T|$ es DSS por la Proposición 2.35 o equivalentemente que T es DSS de nuevo por el Corolario 2.17. $\square$

Observación 2.37. La regularidad de T en la Proposición 2.36 es imprescindible. En efecto, sea $\phi : l^2 \to L^p[0,1]$, $1 < p < 2$ el operador (no regular) que transforma cada e_n de la base canónica de l^2 en la n-ésima función de Rademacher, r_n, sobre $[0,1]$. Claramente ϕ es un isomorfismo sobre su imagen y por tanto no es DSS; sin embargo el operador $\phi' : L^{p'}[0,1] \to l^2$, $p^{-1} + p'^{-1} = 1$, sí lo es.

Corolario 2.38. *Sea F un retículo de Banach y $T : L^p(\mu) \to F$ un operador regular, $1 < p < \infty$. Supongamos que F'' es orden continuo. Si T es DSS entonces T' es DSS.*

6. Operadores reticularmente estrictamente cosingulares. Mayoración

En esta sección presentamos un resultado de mayoración para la clase de los operadores reticularmente estrictamente cosingulares introducida por García del Amo ([**26**]). Esta clase es la versión reticular de la clase de los operadores estrictamente cosingulares introducida por Pelczynski en [**57**] (ver introducción). El resultado de mayoración se prueba vía dualidad a partir de los obtenidos en las secciones precedentes. También damos una caracterización de los operadores reticularmente estrictamente cosingulares (Proposición 2.42) bajo ciertas condiciones.

Antes de introducir la definición de operador reticularmente estrictamente cosingular vamos a motivarla. Notemos que un operador T entre un retículo de Banach E y un espacio de Banach Y es reticularmente estrictamente singular si y sólo si para ningún retículo de Banach G de dimensión infinita existen $i_E : G \to E$ e $i_Y : G \to Y$ isomorfismos sobre sus imágenes, con i_E homomorfismo de Riesz, tal que $Ti_E = i_Y$. Queremos considerar la situación dual, para ello tendremos en cuenta la Proposición 1.18 y la Proposición 1.63

Definición 2.39. Sea X espacio de Banach y E un retículo de Banach. Un operador $T : X \to E$ es *reticularmente estrictamente cosingular* (RSCS) si para ningún retículo de Banach G de dimensión infinita existen $p_X : X \to G$ y $p_E : E \to G$ operadores sobreyectivos con $p_E : E \to G$ preservando intervalos tales que $p_E T = p_X$.

Todo operador RSCS es estrictamente cosingular pero el recíoco no es cierto (considérese el operador inclusión $J : L^p[0,1] \to L^q[0,1]$, con $1 < q < p < \infty$). También si X es un espacio de Banach e Y es un retículo de Banach entonces todo operador $T : X \to F$ que sea L-débilmente compacto (es decir tal que $T(B_X)$ sea L-débilmente compacto en F) es RSCS. En contraste ningún operador sobreyectivo es RSCS. La clase de los operadores RSCS es estable bajo la composición por la derecha; si además componemos un operador RSCS por la izquierda con un operador sobreyectivo que preserva intervalos entonces la composición también es RSCS ([**26**, Prop. 4.15]).

El siguiente resultado también se debe a García del Amo ([**26**, Cor. 4.10]) y muestra que la clase de los operadores RSCS es la "dual" de la de los operadores reticularmente estrictamente singulares bajo ciertas condiciones:

PROPOSICIÓN 2.40. *i) Sea E un retículo de Banach reflexivo, Y un espacio de Banach y $T : E \to Y$ un operador. Entonces T es RSS si y sólo si T' es RSCS.*
ii) Sea X un espacio de Banach reflexivo, F un retículo de Banach orden continuo y $T : X \to F$ un operador. Entonces T es RSCS si y sólo si T' es RSS.

Usando el Teorema de mayoración de operadores RSS (cf. Teorema 2.14) se obtiene el siguiente:

TEOREMA 2.41. *Sean E y F retículos de Banach tales que E es reflexivo y F es orden continuo. Sean $0 \leq S \leq T : E \to F$ operadores positivos. Si T es RSCS entonces S es también RSCS.*

DEMOSTRACIÓN. Notemos que el operador $T' : F' \to E'$ es RSS por la Proposición 2.40. Además como $0 \leq S' \leq T'$ resulta que S' es RSS sin más que usar el Teorema 2.14; de nuevo la Proposición 2.40 concluye que S es RSCS. □

A continuación damos una caracterización (parcial) de operadores RSCS similar a la dada por Vladimirski (cf. [**61**, C.II.Thm. 6.1]) para operadores estrictamente cosingulares

PROPOSICIÓN 2.42. *Sean E y F dos retículos de Banach, E reflexivo y F'' orden continuo. Sea $T : E \to F$ un operador regular. Son equivalentes:*
i) T es RSCS.
ii) Para todo retículo reflexivo de dimensión infinita, R, y para todo operador sobreyectivo que preserva intervalos, $Q_1 : F \to R$, existe un retículo reflexivo de dimensión infinita, S, y un operador sobreyectivo que preserva intervalos, $Q_2 : R \to S$, tales que el operador composición $Q_2 Q_1 T : E \to S$ es compacto.

DEMOSTRACIÓN. Comencemos con $i) \Rightarrow ii)$. Sean R y Q_1 como en el enunciado. Notemos que el operador $T' : F' \to E'$ es RSS (cf. Proposición 2.40). Por la Proposición 2.29 existe un retículo de Banach de dimensión infinita, Z, y un isomorfismo reticular sobre su imagen $h_Z : Z \to R'$ tales que $T'Q_1'h_Z : Z \to E'$ es un operador compacto. Notemos que Z es reflexivo por serlo R y ser h_Z un isomorfismo; entonces existe un operador $g : R \to Z'$ tal que $g' = h_Z$ (cf. [**14**, VI §2 Ex. 11]). Además g es sobreyectivo y preserva intervalos (cf. Proposiciones 1.63 y 1.18). Por el Teorema de Schauder el operador $gQ_1T : E \to Z'$ es compacto; basta llamar ahora $Q_2 = g$ y $S = Z'$.

Probemos ahora $ii) \Rightarrow i)$. Supongamos que T no es RSCS; entonces existe un retículo de Banach de dimensión infinita R y un operador sobreyectivo que preserva intervalos $Q_1 : F \to R$ tales que el operador composición $Q_1T : E \to R$ es sobreyectivo. Notemos que el retículo R es reflexivo por serlo E. Por hipótesis existe un retículo reflexivo de dimensión infinita, S, y un operador sobreyectivo que preseva intervalos $Q_2 : R \to S$ tales que $Q_2Q_1T : E \to S$ es compacto. Sin embargo eso es una contradicción con el hecho de que Q_2Q_1T es sobreyectivo y que S es de dimensión infinita. □

Parte de este capítulo fue presentado en una comunicación en la Conferencia: "Positivity and its applications. In memoriam of C.B. Huijsmansçelebrada en Ankara (Junio 1998). También parte de este capítulo será publicado en [**24**].

CAPíTULO 3

Operadores estrictamente singulares. Problema de mayoración

Los resultados obtenidos en el capítulo segundo sobre mayoración de operadores DSS nos ayudarán ahora a estudiar el problema de mayoración en la clase de los operadores estrictamente singulares. El trabajo realizado está centrado en torno al Teorema 3.15 y sus Corolarios. Damos también aplicación a los operadores estrictamente cosingulares (o de Pelczynski).

1. Propiedades básicas

DEFINICIÓN 3.1. Un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ entre dos espacios de Banach X e Y es *estrictamente singular* (abrev. SS), o de *Kato,* si la restricción de T a cualquier subespacio (cerrado) de dimensión infinita no es un isomorfismo. La clase de los operadores estrictamente singulares entre X e Y se denotará por $\mathcal{SS}(X, Y)$.

Exposiciones de las propiedades de los operadores estrictamente singulares se pueden encontrar en las referencias [**31**], [**44**], [**58**] y [**61**]. Recordemos que $\mathcal{SS}(X, Y)$ es un subespacio vectorial cerrado del espacio de operadores acotados entre X e Y; además $\mathcal{SS}(X, Y)$ es estable por la composición a derecha e izquierda, es decir, es un ideal de operadores. Especialmente interesante es la siguiente caracterización (cf. [**44**, Prop. 2.c.4]) que subraya la relación de los operadores SS con los compactos

PROPOSICIÓN 3.2. *Sea un operador $T : X \to Y$ entre dos espacios de Banach X e Y. Son equivalentes*
i) T es estrictamente singular.
ii) Para cualquier subespacio cerrado de de dimensión infinita $M \subset X$ existe un subespacio cerrado de dimensión infinta $N \subset M$ tal que la restricción de T a N es compacta.

A la vista de la Proposición 3.2 es claro que todo operador compacto es SS; sin embargo el recíproco no es cierto. En efecto, cualquier operador $T : l^p \to l^q$ con $1 \leq p, q < \infty$ y $p \neq q$

es SS ya que l^p y l^q no comparten subespacios si $p \neq q$, sin embargo no todo operador de l^p en l^q es compacto si $p < q$ (por ejemplo la inclusión canónica). Recurriremos a menudo al siguiente hecho conocido:

Proposición 3.3. *Sea $T : X \to Y$ un operador débilmente compacto y Dunford-Pettis. Entonces T es SS.*

Demostración. Si T no es SS entonces preserva un subespacio $N \subset X$ de dimensión infinita. Tomemos en N una sucesión $(x_n)_n$ sin subsucesiones convergentes. Por hipótesis existe una subsucesión $(n_j)_j$ tal que $(Tx_{n_j})_j$ converge débilmente. Como N es isomorfo a $T(N)$ se sigue por la Proposición 1.62 que la propia $(x_{n_j})_j$ es débilmente convergente. En ese caso la sucesión $(Tx_{n_j})_j$ es convergente por ser T Dunford-Pettis y lo mismo se puede decir de $(x_{n_j})_j$ de nuevo por ser T invertible en N. Contradicción. $\square$

Si E es un retículo de Banach es claro que $\mathcal{SS}(E, Y) \subset \mathcal{DSS}(E, Y)$ mientras que la inclusión recíproca no es cierta en general: considérese la inclusión canónica $J : L^p[0, 1] \to L^q[0, 1]$, $1 \leq q < p < \infty$. El operador J preserva el subespacio engendrado por la sucesión de las funciones Rademacher, que es isomorfo a l^2, y por tanto no es SS; no obstante sí es DSS por ser M-débilmente compacto (cf. Proposición 1.46). Se tienen sin embargo los siguientes resultados:

Proposición 3.4. [**33**] *Sea E un retículo de Banach con una base de Schauder formada por vectores disjuntos y sea Y un espacio de Banach. Entonces $\mathcal{SS}(E, Y) = \mathcal{DSS}(E, Y)$.*

Proposición 3.5. *Sea $E = C(K)$ para algún espacio compacto Hausdorff K, Y un espacio de Banach y un operador $T : E \to Y$. Son equivalentes: i) T es SS. ii) T es DSS. iii) T es débilmente compacto. iv) T es M-débilmente compacto. v) T es o-débilmente compacto.*

Demostración. Para la equivalencia de iii) y iv) ver p.e. [**50**, pag. 214]. Que iii) y v) son equivalentes se prueba en [**50**, pag. 192]. La equivalencia entre i) y iii) es consecuencia de que E tiene la propiedad de Dunford-Pettis ([**57**]) . Por último que ii) implica v) es consecuencia de la Proposición 1.33. $\square$

Ser estrictamente singular no es una propiedad autodual (p.e. la isometría que sumerge l^2 como espacio separable en l^∞ es el operador traspuesto de un operador $T : l^1 \to l^2$ que es SS por ser débilmente compacto y Dunford-Pettis). Sin embargo se tienen resultados positivos en algunos casos particulares. Recordemos previamente la siguiente definición de Whitley ([**73**]):

DEFINICIÓN 3.6. Un espacio de Banach X es *subproyectivo* si cualquier subespacio de dimensión infinita $M \subset X$ contiene otro subespacio de dimensión infinita $N \subset M$ que está complementado en X.

Ejemplos de espacios subproyectivos son l^p, $1 \leq p < \infty$, c_0 y $L^p[0,1]$ si $2 \leq p < \infty$.

PROPOSICIÓN 3.7 ([**73**]). *Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador.*
i) Si Y es subproyectivo y $T' : Y' \to X'$ es SS, entonces T es SS.
ii) Si X es reflexivo, X' es subproyectivo y T es SS, entonces $T' : Y' \to X'$ es SS.

La siguiente versión reticular de espacio subproyectivo es más débil:

DEFINICIÓN 3.8. Un retículo de Banach E es *disjuntamente subproyectivo* si para toda sucesión disjunta $(x_n)_n \subset E$ existe una subsucesión $(n_j)_j$ tal que el subespacio $[x_{n_j}]$ está complementado en E.

Los espacios l^p y $L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$ son disjuntamente subproyectivos y los espacios de Lorentz $L_{p,q}[0,1]$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ ([**10**]) y $d(\omega, p)$. También lo son los espacios de Orlicz del tipo $L^{x^p log^q(1+x)}([0,1])$ con $1 < p < \infty$, $-\infty < q < \infty$.

La siguiente proposición proporciona otra condición suficiente para que un operador sea SS sabiendo que su operador traspuesto lo es (será utilizada más adelante).

PROPOSICIÓN 3.9. *Sea E un retículo de Banach y F un espacio de Köthe orden continuo sobre un espacio de medida finita (Ω, Σ, μ) que es disjuntamente subproyectivo. Sea $T : E \to F$ un operador regular tal que T' es SS. Entonces T es SS si ocurre una de las siguientes condiciones:*
a) $T : E \to L^1(\mu)$ es SS.
b) E' es orden continuo y T es compacto en medida, i.e. T transforma sucesiones acotadas en norma en sucesiones que tienen alguna subsucesión convergente en medida.

Demostración. Supongamos que T no es SS; entonces existe un subespacio (separable) $N \subset E$ isomorfo a $T(N)$. Supongamos que $T(N) \subset M_F(\varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$, donde $M_F(\varepsilon)$ es un conjunto de Kadec-Pelczynski. En tal caso $T(N)$ es un subespacio de $L^1(\mu)$ (cf. Proposición 1.69) y por tanto el operador $T : E \to L^1(\mu)$ no es SS, lo cual es una contradicción si estamos suponiendo la hipótesis a). Si por el contrario estamos suponiendo la hipótesis b), entonces el teorema de la convergencia dominada prueba que $T[-x, x]$ es relativamente compacto en $L^1(\mu)$ para todo $x \in E_+$ y por tanto T es orden débilmente compacto. En ese caso T no preserva copia isomorfa de l^1 (cf. Proposiciones 1.40 y 1.37). Así podemos suponer que N no contiene copia isomorfa de l^1 y consecuentemente que existe una sucesión normalizada $(x_n)_n \subset N$ que es débilmente nula (cf. Corolario 1.67). Entonces $(Tx_n)_n$ converge a cero para la topología débil de $L^1(\mu)$ (cf. Proposición 1.62) y pasando a subsucesión si es necesario podemos asumir por la hipótesis b) y por el Lema 1.58 que la sucesión $(Tx_n)_n$ converge a cero en μ-medida. Como estamos suponiendo que $T(N) \subset M_F(\varepsilon)$, se obtiene que $(Tx_n)_n$ converge a cero en F, lo cual es una contradicción con el hecho de que $(x_n)_n$ es normalizada y de que $T(N)$ y N son isomorfos. Resumiendo, cuando suponemos que $T(N) \subset M_F(\varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$, las hipótesis a) y b) nos llevan a contradicción.

Podemos suponer pues que $T(N) \not\subseteq M_F(\varepsilon)$ para ningún $\varepsilon > 0$. En tal caso existe una sucesión normalizada $(y_n)_n \subset T(N)$ y una sucesión disjunta $(z_n)_n$ en F tales que $\|Ty_n - z_n\| \to 0$ (cf. Proposición 1.69). El hecho de que F sea disjuntamente subproyectivo junto con la Proposición 1.64 garantizan la existencia de una proyección P que complementa $[Ty_{n_j}]$ en F para alguna subsucesión $(n_j)_j$. A partir de aquí se prueba como en la Proposición 2.35 que el operador T' es invertible en el subespacio $K = \{y' \in F' : y'(y) = y'(Py)\}$ y consecuentemente que T' no es SS. Contradicción. $\square$

2. Mayoración en ideales de operadores arbitrarios

En esta sección, dados E y F retículos de Banach e $\Im$ un ideal de operadores arbitrario, damos un resultado de mayoración en $\Im(E, F)$ imponiendo condiciones sobre E y F. Es de esperar que un resultado tan general precise de hipótesis muy restrictivas sobre E y F. Aún así la información obtenida será útil para establecer el resultado de mayoración en la clase $\mathcal{SS}(E, F)$.

Recordemos (cf. Definición 1.9) que si $T : E \to F$ es un operador positivo, el conjunto de las componentes simples de T se simboliza por $\mathcal{S}_T$ y el de las componentes de T por $\mathcal{C}_T$.

LEMA 3.10. *Sean $\Im$ un ideal de operadores, E y F retículos de Banach con F Dedekind completo y $T : E \to F$ un operador positivo perteneciente a $\Im(E, F)$. Entonces se tiene la inclusión $\mathcal{S}_T \subset \Im(E, F)$.*

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia inmediata del Lema 1.10. □

Supongamos que T, E y F son como en el Lema 3.10. Supongamos además por un momento que el conjunto de todas las componentes de T, $\mathcal{C}_T$, es un subconjunto de $\Im(E, F)$. En ese caso todo operador T-escalonado pertenecerá a $\Im(E, F)$ y el Teorema de Freudenthal 1.11 concluirá que el orden-intervalo $[0, T]$ está incluido en $\Im(E, F)$ sin más que observar que $\Im(E, F)$ es cerrado en el espacio de todos los operadores acotados $\mathcal{L}(E, F)$. Por tanto parece razonable fijarnos en las clases de operadores $T : E \to F$ para las que se tiene $\mathcal{C}_T \subset \Im(E, F)$. Una de esas clases es la formada por los operadores M-débilmente compactos (cf. Definición 1.32) pero una justificación de este hecho requiere previamente la siguiente caracterización debida a Dodds y Fremlin:

PROPOSICIÓN 3.11. ([**17**]) *Sean E y F retículos de Banach con F orden continuo y $T : E \to F$ un operador positivo. Son equivalentes:*
a) T es M-débilmente compacto.
b) La norma operador es orden continua en el intervalo $[0, T] \subset \mathcal{L}^r(E, F)$.

PROPOSICIÓN 3.12. *Sea E un retículo de Banach σ-Dedekind completo y F un retículo de Banach orden continuo. Sea $\Im$ un ideal de operadores y $T : E \to F$ un operador positivo M-débilmente compacto. Si $T \in \Im(E, F)$ entonces se tiene la inclusión $\mathcal{C}_T \subset \Im(E, F)$.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos $R \in (\mathcal{S}_T)^1$ (ver capítulo 1); entonces existe una sucesión $(R_n)_n \subset \mathcal{S}_T \subset [0, T]$ tal que $R_n \uparrow R$ (cf. Proposición 1.12). Por la Proposición 1.3 podemos escribir $0 \leq R(x) = \sup_n\{R_n(x)\} \leq T(x)$ para cada $x \in E_+$, es decir, $R \in [0, T]$; además $\|R_n - R\| \to 0$ por la Proposición 3.11. Como $R_n \in \Im(E, F)$ para todo n (cf. Lema 3.10) y $\Im(E, F)$ es cerrado en $\mathcal{L}(E, F)$ resulta que $R \in \Im(E, F)$; sin embargo R fue tomado arbitrariamente y por tanto $(\mathcal{S}_T)^1 \subset [0, T] \cap \Im(E, F)$. Tomemos ahora arbitrariamente un operador $R \in (\mathcal{S}_T)^{\uparrow\downarrow}$ y una red $(R_\alpha)_\alpha \subset (\mathcal{S}_T)^{\uparrow}$ tal que $R_\alpha \downarrow R$; entonces $R_\alpha - R \downarrow 0$ y por tanto $(R_\alpha - R)(x) \downarrow 0$ para todo $x \in E_+$ (cf. [**4**, Thm. 1.13]). De ahí se tiene que $0 \leq R(x) \leq R_\alpha(x) \leq T(x)$ para todo $x \in E_+$, es decir, $R \in [0, T]$. Por el párrafo anterior sabemos que $R_\alpha \in \Im(E, F)$ para todo α; de nuevo la Proposición 3.11 muestra que $R \in \Im(E, F)$. Así $(\mathcal{S}_T)^{\uparrow\downarrow} \subset [0, T] \cap \Im(E, F)$. A partir de aquí se obtiene de forma similar la inclusión $(\mathcal{S}_T)^{\uparrow\downarrow\uparrow} \subset [0, T] \cap \Im(E, F)$, y la demostración se concluye usando la Proposición 1.12. $\square$

Notemos que la Proposición 3.12 no es cierta en general; para verlo basta considerar los operadores S_1, S_2 y T del Ejemplo 2.15 y observar que S_1 y S_2 son componentes de T.

Una vez probada la Proposición 3.12 parece lógico enfocar nuestra atención en aquellas condiciones sobre los retículos E y F que hagan que todo operador regular entre E y F sea M-débilmente compacto. La Proposición 1.46 aísla dos de esas condiciones lo que permite resumir las ideas anteriores en la siguiente

PROPOSICIÓN 3.13. *Sean E y F retículos de Banach con E σ-Dedekind completo e $\Im$ un ideal de operadores arbitrario. Sea $T : E \to F$ un operador positivo $T \in \Im(E, F)$. Supongamos que ocurre una de las dos condiciones siguientes:*
a) $s(E) > \sigma(F)$.
b) E' es orden continuo y F tiene la propiedad de Schur positiva.
Entonces $[0, T] \subseteq \Im(E, F)$.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos un operador arbitrario $S \in [0, T]$. El operador T es M-débilmente compacto por la Proposición 1.46. Por otra parte, el Teorema de Freudenthal 1.11 garantiza la existencia de una sucesión $(S_n)_n$ de operadores T-escalonados satisfaciendo $0 \leq S_n \uparrow S$ y $0 \leq S - S_n \leq T/n$ para todo n. Ahora, de la definición de operador T-escalonado, del hecho de que $\Im(E, F)$ es espacio vectorial y de que $\mathcal{C}_T \subset \Im(E, F)$ (cf. Proposición 3.12) obtenemos que $S_n \in \Im(E, F)$ para todo n. Finalmente notemos que de la desigualdad $0 \leq S - S_n \leq T/n$ resulta (cf. Proposición 1.14) que $\|S_n - S\| \to 0$; para concluir usamos que $\Im(E, F)$ es cerrado. $\square$

OBSERVACIÓN 3.14. En especial usaremos la Proposición 3.13 cuando $\Im(E, F) = \mathcal{SS}(E, F)$.

3. Mayoración de operadores estrictamente singulares

Claramente la técnica que da lugar a la Proposición 3.13 no puede ser extendida a retículos con índices arbitrarios. No obstante parte del trabajo hecho será básico para probar el Teorema principal de este capítulo. Antes de enunciarlo recordamos (cf. Definición 1.55) que un retículo de Banach orden continuo E satisface la *propiedad de la división subsequencial* (*subsequence splitting property*) si para toda sucesión acotada en norma $(f_n)_n \subset E$ existe una subsuesión $(n_k)_k$ y sucesiones $(g_k)_k, (h_k)_k$ con $|g_k| \wedge |h_k| = 0$ y $f_{n_k} = g_k + h_k$ tales que i) $(g_k)_k$ es L-débilmente compacto y ii) $|h_k| \wedge |h_l| = 0$ si $k \neq l$.

TEOREMA 3.15. *Sean E y F retículos de Banach tales que E, F y E' son orden continuos. Supongamos además que E satisface la propiedad de la división subsecuencial. Si $0 \leq T : E \to F$ es un operador SS entonces se tiene la inclusión $[0, T] \subset \mathcal{SS}(E, F)$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe un operador $S \in [0, T]$ que no es SS. Notemos en primer lugar que S es DSS por el Teorema 2.14. Queremos llegar a una contradicción probando que existe una sucesión disjunta en E tal que la restricción de S al subespacio generado por dicha sucesión es un isomorfismo. Hacemos hincapié en que este planteamiento justifica todas las aseveraciones que aparecen a lo largo de la demostración cuya veracidad depende del "paso a una subsucesión si fuese necesario".

Como S no es SS existe un subespacio cerrado de dimensión infinita $M \subseteq E$ y una constante $\alpha > 0$ tal que $\|S(x)\| \geq \alpha \|x\|$ para todo $x \in M$. Claramente no hay pérdida de generalidad en asumir que M es separable. Por la Proposición 1.50 existe un ideal I, cerrado en E y con unidad débil, que contiene a M. Así, si i denota la inclusión canónica de I en E, es claro que el operador Ti mayora al operador positivo Si y que Ti es SS mientras que Si no lo es. Por tanto podemos asumir que el propio E tiene unidad débil. Como el subespacio $S(M)$ es separable por ser isomorfo a M, existe de nuevo un ideal J cerrado en F y con unidad débil que contiene a $S(M)$. Notemos que dicho ideal está complementado en F por una proyección positiva P (cf. Proposición 1.27). Claramente el operador PT es SS mientras que PS no lo es, además $0 \leq PS \leq PT$. Concluimos entonces que no hay pérdida de generalidad en asumir que el propio F tiene unidad débil. Por el Teorema 1.49 existen espacios de probabilidad (Ω, Σ, μ) y (Ω', Σ', μ'), ideales I y J (en general no cerrados) de $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ y $L^1(\Omega', \Sigma', \mu')$ respectivamente, normas reticulares $\| \, \|_I$ y $\| \, \|_J$ en

I y J respectivamente, e isometrías reticulares ψ_1 y ψ_2 definidas entre E y $(I, \| \|_I)$ y entre F y $(J, \| \|_J)$ respectivamente, tales que las inclusiones naturales de I en $L^1(\mu)$ y de J en $L^1(\mu')$ son continuas y satisfaciendo $\|f\|_1 \leq \|f\|_I$ y $\|f\|_1 \leq \|f\|_J$ respectivamente. Así, si $0 \leq S \leq T : E \to F$ son dos operadores positivos es claro que probar que T es SS implica S es SS es equivalente a probar que $\psi_2 T \psi_1^{-1} : I \to J$ SS implica $\psi_2 S \psi_1^{-1}$ SS (notemos que ψ_1,ψ_2 y ψ_1^{-1} son operadores positivos por ser isometrías reticulares y que por tanto se tiene $0 \leq \psi_2 S \psi_1^{-1} \leq \psi_2 T \psi_1^{-1}$). Resumiendo, podemos asumir que tanto E como F son ideales de los espacios $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ y $L^1(\Omega', \Sigma', \mu')$ respectivamente para ciertos espacios de probabilidad (Ω, Σ, μ) y (Ω', Σ', μ').

Notemos que el operador composición $jT : E \to L^1(\mu')$ es SS siendo j la inclusión canónica de F en $L^1(\mu')$. La Proposición 3.13 garantiza entonces que el operador jS también es SS puesto que la norma dual de E' es orden continua y $L^1(\mu')$ satisface la propiedad de Schur positiva (cf. Proposición 1.23). Por la Proposición 3.2 existe un subespacio cerrado de dimensión infinita $N \subset M$ tal que $jS|_N : N \to L^1(\mu')$ es un operador compacto; notemos sin embargo que la restricción $S|_N : N \to F$ es un isomorfismo.

Aserto: N contiene una sucesión normalizada débilmente nula.
Si este no fuera el caso el espacio N tendría la propiedad de Schur y por tanto contendría una copia isomorfa de l^1 (cf. Corolario 1.67); por consiguiente el operador S preservaría una copia isomorfa de l^1 o equivalentemente una copia reticular de l^1 por ser F orden continuo y ser S positivo (cf. Corolario 1.39). Sin embargo eso no es posible porque S es DSS. Es interesante hacer notar que el subespacio N, y por tanto el subespacio $S(N)$, son reflexivos. En efecto, acabamos de ver que N no puede contener copia isomorfa de l^1. Por otro lado, si N contuviese una copia isomorfa de c_0 entonces S preservaría una copia isomorfa de c_0 o equivalentemente una copia reticular de c_0 (cf. Teorema 1.36). Sin embargo esto no es posible ya que S es DSS. Finalmente la orden continuidad de E junto con [**45**, Thm. 1.c.5] implican que N es reflexivo (también se puede usar la orden continuidad de F para probar que $S(N)$ es reflexivo).

Así pues, podemos tomar en N una sucesión normalizada y débilmente nula, $(f_n)_n$. Probemos a continuación varias propiedades relativas a la sucesión $(f_n)_n$ que nos llevarán a una contradicción con el hecho de que S es DSS.

(1) $\|Sf_n\|_1 \to 0$.

En efecto, como $jS : N \to L^1(\mu')$ es un operador compacto existe una subsucesión $(n_k)_k$ tal que $(Sf_{n_k})_k$ converge en la norma $\| \|_1$ a alguna $g \in L^1(\mu')$. Notemos ahora que $g = 0$ puesto que $(f_{n_k})_k$ es débilmente nula y S es continuo (cf. Proposición 1.62).

(2) $(S(f_n))_n \nsubseteq M_F(\varepsilon)$ para ningún $\varepsilon > 0$ donde $M_F(\varepsilon)$ es un conjunto de Kadec-Pelczynski.

En efecto, si $(S(f_n))_n \subseteq M_F(\varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$, entonces $\|Sf_n\|_1 \geq \varepsilon^2 \|Sf_n\|$ (ver Proposición 1.69), y así $\|Sf_n\| \to 0$ por (1); esto a su vez implica que $\|f_n\| \to 0$ puesto que S es un isomorfismo sobre el subespacio $[f_n]$, lo cual es una contradicción con la elección inicial de $(f_n)_n$.

Así por el método de disjuntificación de Kadec-Pelczynski (cf. Proposición 1.69) existe una subsucesión $(n_j)_j$ y una sucesión disjunta $(z_j)_j \subset F$ tales que $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|z_j - Sf_{n_j}\| < \infty$; por tanto, pasando a una subsucesión si necesario podemos asumir que $(f_n)_n$, $(Sf_n)_n$ y $(z_n)_n$ son sucesiones básicas incondicionales equivalentes (la incondicionalidad se deriva del hecho de que $(z_n)_n$ es disjunta y de la Proposición 1.64).

(3) Existe $\delta > 0$ tal que $N \subseteq M_E(\delta)$.

De lo contrario podemos usar la Proposición 1.69 para encontrar una sucesión disjunta $(w_j)_j$ en E y una sucesión normalizada $(r_j) \subseteq N$ que son equivalentes, más aún tales que la serie $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|r_j - w_j\|$ es convergente. Como S es invertible en el subespacio N tenemos $\left\| S\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j r_j \right) \right\| \geq \alpha \left\| \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j r_j \right\|$; además, dado que $(w_j)_j$ es disjunta y seminormalizada existe una constante $\beta < \infty$ tal que $|a_l| \leq \beta \left\| \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j w_j \right\|$ para todo natural l. Notemos que existe una subsucesión $(j_k)_k$ tal que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|r_{j_k} - w_{j_k}\| < \varepsilon/2C$, donde C es la constante básica de

$(r_j)_j$ y $\varepsilon < min\left\{1, \dfrac{\alpha}{2\|S\|\beta}\right\}$. Así

$$\begin{aligned}
\left\|S\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{j_k} w_{j_k}\Big)\right\| &\geq \left\|S\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{j_k} r_{j_k}\Big)\right\| - \left\|S\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{j_k} r_{j_k} - \sum_{k=1}^{\infty} a_{j_k} w_{j_k}\Big)\right\| \\
&\geq \alpha \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{j_k} r_{j_k}\right\| - \|S\|\ \beta \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{j_k} w_{j_k}\right\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|r_{j_k} - w_{j_k}\|\right) \\
&\geq \alpha K^{-1} \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{j_k} w_{j_k}\right\| - \varepsilon\ \|S\|\beta \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{j_k} w_{j_k}\right\| \\
&\geq \Big(\alpha K^{-1} - \varepsilon\|S\|\beta\Big) \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{j_k} w_{j_k}\right\|,
\end{aligned}$$

donde $K = (1+\varepsilon)$ es la constante de equivalencia entre $(r_j)_j$ y $(w_j)_j$. Consecuentemente el operador S no es DSS, contradicción.

(4) Como por hipótesis E satisface la propiedad de la división subsecuencial podemos asumir, pasando a una subsucesión si es necesario, que existen sucesiones $(g_n)_n$ y $(h_n)_n$ en E tales que $(h_n)_n$ es disjunta, $(g_n)_n$ es equi-integrable, y $f_n = h_n + g_n$ con $|h_n| \wedge |g_n| = 0$ para todo n (notemos que se usa implícitamente el Lema 1.54).

(5) $\|h_n\|_1 \to 0$ y $\|Sh_n\|_1 \to 0$.

En efecto, la sucesión $(h_n)_n$ es acotada en norma por ser $|h_n| \leq |f_n|$ para todo n; más aún es débilmente convergente a cero por ser la norma de E' orden continua (cf. Proposición 1.30). Se sigue que $(|h_n|)_n$ converge a cero para la topología débil de $L^1(\mu)$ puesto que la inclusión de E en $L^1(\mu)$ es continua para las topologías débiles (cf. Proposición 1.62). Finalmente $\|h_n\|_1 \to 0$ por la Proposición 1.23. Ahora que la sucesión $(S|h_n|)_n$ es débilmente nula se sigue del hecho de que $(|h_n|)_n$ es débilmente nula y S es un operador continuo (cf. Proposición 1.62), y considerando la inclusión continua de F en $L^1(\mu')$ y argumentando como antes se concluye que $\|Sh_n\|_1 \to 0$.

(6) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ es $\|\ \|_1$-convergente si y sólo si es convergente en E.

En efecto, esto es consecuencia inmediata de (3).

(7) $(f_n)_n$ y $(g_n)_n$ son sucesiones básicas equivalentes con la norma $\|\ \|_1$ y por tanto equivalentes cuando $(f_n)_n$ se considera como una sucesión en E y $(g_n)_n$ como una sucesión en $L^1(\mu)$.

En efecto, notemos que $\|f_n - g_n\|_1 = \|h_n\|_1 \to 0$ por (5). Así, pasando a una subsucesión si es necesario, podemos suponer que $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n - g_n\|_1$ es convergente. El resultado de perturbación (cf. Proposición 1.64) prueba la primera parte. En cuanto a la segunda basta usar (6) y la primera parte.

(8) $(Sf_n)_n$ y $(Sh_n)_n$ son sucesiones básicas equivalentes en F.

La sucesión $(g_n)_n$ es acotada en norma ya que $|g_n| \leq |f_n|$ para todo n, además es equi-integrable por (4); por tanto $S(g_n)$ es equi-integrable (cf. Lema 1.56). Por otro lado la igualdad $Sg_n = Sf_n - Sh_n$ junto con (1) y (5) implica que $\|Sg_n\|_1 \to 0$. De ambas cosas se deduce que $\|Sg_n\| \to 0$ sin más que usar el Lema 1.59. Por tanto, pasando a una subsucesión si es necesario, podemos asumir que $\sum_{n=1}^{\infty} \|Sf_n - Sh_n\|$ es una serie convergente. Se concluye usando el resultado de perturbación 1.64.

(9) $(h_n)_n$ y $(g_n)_n$ son sucesiones básicas incondicionales equivalentes; además la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n$ implica la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$.

Para probar esto notemos primeramente que la sucesión $(h_n)_n$ es seminormalizada; en efecto, de lo contrario existiría una subsucesión $(h_{n_k} = f_{n_k} - g_{n_k})_k$ convergente a cero. Es fácil ver que en ese caso la equi-integrabilidad de $(g_{n_k})_k$ es heredada por $(f_{n_k})_k$ y por tanto por $(Sf_{n_k})_k$ (cf. Lema 1.56); usando (1) y el Lema 1.59 se obtiene que $\|S(f_{n_k})\| \to 0$ o equivalentemente que $\|f_{n_k}\| \to 0$, lo cual es imposible. Por consiguiente $(h_n)_n$ es una sucesión básica seminormalizada y además incondicional por ser disjunta.
Igualmente la sucesión $(g_n)_n$ es seminormalizada porque de lo contrario existiría una subsucesión $(n_k)_k$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_k} - h_{n_k}\|$ sería convergente. Razonando como en (3) llegaríamos a poder invertir el operador S en el subespacio $[h_{n_k}]$, lo cual es imposible ya que S es DSS. Por otro lado $(g_n)_n$ es débilmente nula porque $(f_n)_n$ y $(h_n)_n$ lo son, así, por el principio de selección de Bessaga-Pelczynski (cf. [**44**, Lem. 1.a.6]) podemos asumir que, pasando a una subsucesión si es necesario, la sucesión $(g_n)_n$ es básica.

Probemos a continuación que ambas sucesiones básicas son equivalentes. Para ello supongamos primero que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n$ es una serie convergente en E; entonces es convergente con la norma $\| \, \|_1$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ es convergente en E por (7). La igualdad $h_n = f_n - g_n$ para todo n implica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n$ es también convergente. Recíprocamente, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n$ converge en E también lo hace la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n S h_n$ puesto que S continuo; usando (8) se obtiene que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n S f_n$ es convergente y lo mismo se puede decir de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ dado que S es invertible en el subespacio $[f_n]$. De nuevo la igualdad $g_n = f_n - h_n$ para todo n muestra que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n$ es convergente en E.

(10) Existe una constante $\lambda > 0$ tal que para todo entero n y para toda sucesión finita $(a_i)_{i=1}^n$ de números reales se tiene $\left\| \sum_{i=1}^n a_i f_i \right\| \geq \lambda \left\| \sum_{i=1}^n a_i h_i \right\|$

En efecto, tomemos arbitrariamente un entero n y una sucesión finita $(a_i)_{i=1}^n$ de números reales. La sucesión $(f_n)_n$ es una sucesión básica incondicional por (2), llamemos K a su constante incondicional. Para toda sucesión finita $(\varepsilon_i)_{i=1}^n$ con valores en $\{-1, 1\}$ se cumple la desigualdad $\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i f_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^n a_i f_i \right\|$ (cf. Proposición 1.65). Por tanto

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n a_i f_i \right\| &\geq K^{-1} \operatorname*{Average}_{\varepsilon=\pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i f_i \right\| = K^{-1}\, 2^{-n} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i f_i \right\| \\ &= K^{-1} \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n a_i f_i r_i(t) \right\| dt \geq K^{-1} \left\| \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n a_i f_i r_i(t) \right| dt \right\| \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a que E es 1-convexo y $(r_i)_i$ es la sucesión de las funciones Rademacher en $[0,1]$. Además, por la desigualdad de Khintchine (cf. [**45**, Thm. 1.d.6]), tenemos

$$C \left(\sum_{i=1}^n |a_i f_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n a_i f_i r_i(t) \right| dt,$$

para alguna constante $C > 0$.

Usando ahora la monotonía de la norma de E, que $|f_n| \geq |h_n|$ para todo n y que $(h_n)_n$ es disjunta se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n a_i f_i r_i(t) \right\| dt &\geq \left\| \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n a_i f_i r_i(t) \right| dt \right\| \geq C \left\| \left(\sum_{i=1}^n |a_i f_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\| \\ &= C \left\| \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 |f_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\| \geq C \left\| \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 |h_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\| \\ &= C \left\| \sum_{i=1}^n |a_i| |h_i| \right\| = C \left\| \sum_{i=1}^n a_i h_i \right\|. \end{aligned}$$

Finalmente tomando $\lambda = CK^{-1}$ concluimos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \right\| \geq \lambda \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i h_i \right\|,$$

para toda sucesión finita de números reales $(a_i)_{i=1}^n$.

(11) $(h_n)_n$ y $(f_n)_n$ son sucesiones básicas equivalentes en E.

En efecto, sea λ la constante en (10); si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ converge, entonces para un $\varepsilon > 0$ dado existe un entero m tal que $\left\| \sum\limits_{k=p}^{n} a_k f_k \right\| \leq \lambda \varepsilon$ para $n \geq p \geq m$. Además la desigualdad en (10) muestra que $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k h_k \right)_n$ es una sucesión de Cauchy y por tanto convergente en E. Por otra parte, si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n h_n$ converge entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ converge por (9).

(12) La restricción de S al subespacio $[h_n]$ es un isomorfismo y por tanto S no es DSS.

En efecto, si β_1 y β_2 son las constantes de equivalencia en (8) y (11) respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} \left\| S\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n \right) \right\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n S h_n \right\| \geq \beta_1 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n S f_n \right\| \\ &\geq \alpha\beta_1 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n \right\| \geq \alpha\beta_1\beta_2 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n \right\|. \end{aligned}$$

Así hemos llegado a una contradicción con el hecho de que el operador S es disjuntamente singular, y dicha contradicción concluye la prueba. $\square$

Es interesante notar que la demostración del Teorema 3.15 se abrevia bastante si en la misma podemos garantizar que no solo es débilmente continua la sucesión $(f_n)_n$ sino que también lo es la sucesión de valores absolutos $(|f_n|)_n$ (en general las operaciones de retículo no son débilmente secuencialmente continuas, por ejemplo, la sucesión $(r_n)_n$ de las funciones de Rademacher en $L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$ es débilmente nula mientras que la sucesión $(|r_n|)_n$ no lo es):

Proposición 3.16. *Sean E y F retículos de Banach orden continuos con E atómico y sea $T : E \to F$ un operador positivo y SS. Entonces $[0,T] \subset \mathcal{SS}(E,F)$.*

Demostración. Exactamente igual que en la demostración del Teorema 3.15 podemos suponer que E y F son ideales de $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ y $L^1(\Omega', \Sigma', \mu')$ respectivamente para

ciertos espacios de probabilidad (Ω, Σ, μ) y (Ω', Σ', μ').
Supongamos que existe un operador $S \in [0, T]$ tal que S no es SS. Entonces S es invertible en un subespacio cerrado $M \subset E$ de dimensión infinita. Al igual que en la prueba del Teorema 3.15 podemos suponer que en M existen sucesiones normalizadas débilmente nulas. Sea pues $(f_n)_n \subset M$ una de esas sucesiones. Como E es atómico y orden continuo, podemos asegurar que la sucesión $(|f_n|)_n$ es débilmente nula (cf. [**50**, Prop. 2.5.23]) y por tanto convergente a cero para la topología débil de $L^1(\mu)$ (cf. Proposición 1.62). Esto a su vez implica que $\|f_n\|_1 \to 0$ sin más que usar la Proposición 1.23. Supongamos ahora que $(f_n)_n \not\subseteq M_E(\varepsilon)$ para ningún $\varepsilon > 0$, donde $M_E(\varepsilon)$ denota un conjunto de Kadec-Pelczynski. Entonces el mismo razonamiento que usábamos en la prueba del Teorema 3.15 nos llevaría a concluir que el operador S no es DSS, lo cual no es posible. Por otro lado, si existe $\varepsilon > 0$ tal que $(f_n)_n \subset M_E(\varepsilon)$ entonces $(f_n)_n$ convergería a cero puesto que $\|f_n\|_1 \to 0$; sin embargo eso no es posible según se ha elegido $(f_n)_n$. De ambas contradicciones se deduce que S debe ser SS. □

OBSERVACIÓN 3.17. En la Proposición 3.16 no es necesaria la hipótesis de orden continuidad para la norma dual de E'.

COROLARIO 3.18. *Sean E y F retículos de Banach con F orden continuo y sea $T : E \to F$ un operador positivo SS. Entonces $[0, T] \subset \mathcal{SS}(E, F)$ si se cumple una de las siguientes condiciones:*
a) E es atómico y orden continuo.
b) E tiene la propiedad de la división subsecuencial y E' es orden continuo.

DEMOSTRACIÓN. La suficiencia de las condiciones a) y b) se ha visto en la Proposición 3.16 y el Teorema 3.15 respectivamente. □

COROLARIO 3.19. *Sean E y F retículos de Banach con F orden continuo y sea $T : E \to F$ un operador positivo SS. Entonces $[0, T] \subset \mathcal{SS}(E, F)$ si se cumple alguna de las condiciones siguientes:*
(i) $\sigma(E) < \infty$ y E' es orden continuo.
(ii) $1 < s(E) \leq \sigma(E) < \infty$.

(iii) E es un espacio de funciones invariante por reordenamiento que no contiene copia de c_0 y E' es orden continuo.

DEMOSTRACIÓN. Para probar (i) obsérvese que la condición $\sigma(E) < \infty$ implica que E es q-cóncavo para algún $q < \infty$ (cf. Prop. 1.45) y por tanto que E satisface la propiedad de la división subsecuencial ([**21**]); usar ahora el apartado b) del Corolario 3.18. A partir de aquí se sigue la suficiencia de la condición (ii) observando que $s(E) > 1$ implica E' orden continuo (cf. Proposición 1.43). Que todo espacio de funciones de reordenamiento invariante que no contiene copia de c_0 satisface la propiedad de la división subsecuencial se establece en [**72**, Cor. 2.6], esto prueba (iii). $\square$

Observemos que en el caso $[s(E), \sigma(E)] \cap [s(F), \sigma(F)] = \varnothing$ con $1 < s(E)$ y $\sigma(F) < \infty$ se tiene la inclusión $[0, T] \subset \mathcal{SS}(E, F)$ cuando T es SS. En efecto, sólo puede ocurrir una de estas dos posibilidades: a) $\sigma(F) < s(E)$ o b) $\sigma(E) < s(F)$. El caso a) se resuelve con la ayuda de la Proposición 3.13 mientras que para el caso b) basta usar el apartado i) del Corolario 3.19.

OBSERVACIÓN 3.20. En el caso especial en que E sea un retículo de Banach con la propiedad de Dunford-Pettis y la propiedad (V) de Pelczynski (cf. [**50**, Defn. 5.3.1]), el problema de mayoración por operadores SS tiene siempre una respuesta positiva. En efecto, en este caso la clase de los operadores SS definidos en E y con valores en F coincide con la clase de los operadores débilmente compactos y con la clase de los operadores c_0-*singulares* (i.e. los operadores que no son invertibles en ningún subespacio de E isomorfo a c_0). Esta equivalencia se obtiene fácilmente de resultados conocidos (cf. [**50**, Prop. 5.3.2]). Ahora el resultado de dominación para operadors SS se deriva del correspondiente debido a Wickstead para operadores débilmente compactos (cf. [**4**, Thm. 17.10]). Nótese que por el Teorema 1.36 un operador preserva una copia de c_0 si y sólo si preserva una copia reticular de c_0.

La clase de los retículos de Banach que satisfacen simultáneamente las propiedades (V) y de Dunford-Pettis contiene todos los espacios $C(K)$ y los M-espacios (cf. [**50**, Prop. 3.5.6]). Cabe destacar que otros retículos de Banach como el de Talagrand ([**69**]) pertenecen a esta clase.

Es natural plantearse cuáles son las mínimas condiciones que hay que imponer a los retículos E y F en el Teorema 3.15 para que la conclusión siga siendo cierta. Sabemos que para retículos de Banach arbitrarios el problema de mayoración tiene respuesta negativa sin más que usar los operadores del Ejemplo 2.15 y la Proposición 3.4. Más aún, se tiene el siguiente resultado análogo al que se dio para operadores DSS (cf. Proposición 2.21)

PROPOSICIÓN 3.21. *Sean E y F dos retículos de Banach, F σ-Dedekind completo. Supongamos que todo operador positivo de E en F dominado por un operador SS es también SS. Entonces debe ocurrir al menos una de las dos condiciones siguientes:*
i) La norma dual de E' es orden continua.
ii) La norma de F es orden continua.

En otras palabras, si tanto E' como F no son orden continuos entonces es posible encontrar dos operadores $0 \leq S \leq T : E \to F$ tales que T es SS pero S no lo es.

Observemos que en los ejemplos previos los retículos E y F distan mucho de cumplir las condiciones del Teorema 3.15. Más interesante resulta el siguiente:

EJEMPLO 3.22. *Existen operadores $0 \leq R \leq P : L^2[0,1] \to l^\infty$ tales que P es SS y R no lo es.*

En efecto, consideremos el operador compacto positivo $T : L^1[0,1] \to l^\infty$ definido por $Tf = (\int f)(1,1,1,\dots)$. Siendo $L^1[0,1]$ separable existe una sucesión densa $(h_n)_n$ en $B_{L^1[0,1]}$ y una sucesión de funcionales $(h'_n)_n$ en $B_{L^\infty[0,1]}$ satisfaciendo $h'_n(h_n) = \|h_n\|$ para todo n, tales que el operador $S : L^1[0,1] \to l^\infty$ definido por $Sf = (h'_n(f))_n$ es una isometría lineal (cf. [**50**, Thm. 2.1.14]). Notemos que $\mathcal{L}(L^1[0,1], l^\infty) = \mathcal{L}^r(L^1[0,1], l^\infty)$ es un retículo vectorial Dedekind-completo (cf. Proposiciones 1.20 y 1.16); en particular existen las partes positiva y negativa S^+, S^- de S así como el módulo $|S|$. Además $0 \leq S^+, S^- \leq |S|$. Para un n fijo y una $g \in L^1[0,1]$ tenemos la siguiente fórmula (cf. Proposición 1.3)

$$< |h'_n|, |g| > = \sup\{|h'_n(r)| : 0 \leq |r| \leq |g|\} \leq \sup\{\|Sr\| : 0 \leq |r| \leq |g|\} =$$
$$= \sup\{\|r\|_1 : 0 \leq |r| \leq |g|\} \leq \|g\|_1 = \int |g|,$$

así $(<|h_n'|, |g|>)_n \leq (\int |g|)(1,1,1,\dots) = T(|g|)$.
Por tanto para un elemento positivo $f \in E$ tenemos

$$|S|f = \sup\{|Sg| : 0 \leq |g| \leq f\} = \sup\{|(h_n'(g))_n| : 0 \leq |g| \leq f\} \leq$$
$$\leq \sup\{(<|h_n'|, |g|>)_n : 0 \leq |g| \leq f\} \leq \sup\{T|g| : 0 \leq |g| \leq f\} \leq Tf.$$

En consecuencia se tiene $0 \leq S^+, S^- \leq |S| \leq T$. Si i denota la inclusion canónica de $L^2[0,1]$ en $L^1[0,1]$ y $(r_n)_n$ es la sucesión de las funciones Rademacher, entonces el operador Si no es SS puesto que S es una isometría y la inclusión i no es SS. Se sigue que $(Si)^+$ y $(Si)^-$ no pueden ser simultáneamente SS. Por otra parte el operador Ti es compacto y claramente $0 \leq (Si)^+, (Si)^- \leq |Si| \leq |S|i \leq Ti$. Para concluir tomemos $P = Ti$ y $R = (Si)^+$ (nótese que $L^2[0,1] = E$ satisface todas las condiciones del Teorema 3.15).

Es bien sabido que $L^2[0,1]$ y l^2 no son reticularmente isomorfos, en otras palabras no existe un isomorfismo de retículos entre ambos retículos de Banach (nótese por ejemplo que en $L^2[0,1]$ las operaciones de retículo no son débilmente secuencialmente continuas mientras que en l^2 sí lo son). Es interesante que el Ejemplo 3.22 nos permite afirmar algo más, en concreto se tiene la siguiente:

Proposición 3.23. *No existe ningún isomorfismo regular entre l^2 y $L^2[0,1]$.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir que existe un isomorfismo regular $\phi : l^2 \to L^2[0,1]$. Entonces existe $|\phi|$ (cf. Proposición 1.3). Sean T y S los operadores definidos en el Ejemplo 3.22 y sea i la inclusión canónica de $L^2[0,1]$ en $L^1[0,1]$. Claramente el operador $Ti|\phi| : l^2 \to l^\infty$ es compacto y el operador $Si\phi : l^2 \to l^\infty$ preserva una copia de l^2. Notemos que el módulo $|Si\phi|$ existe por las Proposiciones 1.20 y 1.3; además $|Si\phi| \leq |Si||\phi| \leq (|S|)i(|\phi|) \leq Ti|\phi|$. Los operadores $(Si\phi)^+$ y $(Si\phi)^-$ no pueden ser simultánamente SS porque $Si\phi$ no lo es, por tanto los operadores $(Si\phi)^+$ y $(Si\phi)^-$ no pueden ser simultáneamente DSS por la Proposición 3.4. Por otra parte el operador $Ti|\phi|$ es M-débilmente compacto por ser compacto y ser $(l^2)' = l^2$ orden continuo (cf. Proposición 1.30); se sigue entonces que tanto $(Si\phi)^+$ como $(Si\phi)^-$ son M-débilmente compactos y por tanto DSS. Llegamos así a una contradicción. $\square$

A la vista del Ejemplo 3.22 es claro que cualquier mejora del Teorema 3.15 pasa necesariamente por debilitar las hipótesis sobre E, no sobre F. Por otro lado que dichas hipótesis no son necesarias es claro: basta tomar un L-espacio E y un retículo reflexivo F para ver que el problema se resuelve trivialmente puesto que en ese caso todo operador acotado es Dunford-Pettis y débilmente compacto, y por consiguiente estrictamente singular (cf. Proposición 3.3). En cuanto a la condición de la propiedad de la división subsecuencial no sabemos si es superflua o no en general, aunque sí lo es en alguna situación particular:

PROPOSICIÓN 3.24. *Sean E y F retículos de Banach tales que las normas de E, E' y F son orden continuas. Supongamos que $E \hookrightarrow F$ y denotemos la inclusión por J. Sea $T : E \to F$ un operador positivo tal que $0 \le J \le T$. Si T es SS entonces J es SS.*

DEMOSTRACIÓN. Asumimos todas las reducciones hechas en el Teorema 3.15. Si J no es SS podemos encontrar un subespacio cerrado $M \subset E$ de dimensión infinta tal que J es invertible en M, es decir, tal que la norma de E y la norma de F son equivalentes en M. Como en la prueba del Teorema 3.15 podemos encontrar un subespacio cerrado $N \subset M$ de dimensión infinita tal que $J : N \to L^1(\Omega', \Sigma', \mu')$ es compacto. Tomemos una sucesión normalizada débilmente nula $(t_n)_n$ en N. Podemos asumir que $(t_n)_n \not\subseteq M_E(\delta)$ para todo $\delta > 0$. En efecto, de otro modo tendríamos $\|t_n\|_1 \ge \delta^2 \|t_n\|_E$ y por tanto $\|t_n\|_1 \ge \delta^2 K \|t_n\|_F$ ya que la inclusión J es continua por ser positiva (cf. Proposición 1.14) y donde K es la constante de equivalencia entre las normas de E y F sobre M. La compacidad de $J : N \to L^1(\mu')$ junto con la equivalencia de normas en N lleva a contradicción con la elección inicial de $(t_n)_n$. Una vez asumido que $(t_n)_n \not\subseteq M_E(\delta)$ para todo $\delta > 0$, el proceso de disjuntificación de Kadec-Pelczynski (cf. Proposición 1.69) nos lleva como en la prueba del Teorema 3.15 a concluir que el operador J no es DSS. Contradicción. $\square$

Al igual que hicimos en el capítulo 2 con los operadores DSS, pasamos a considerar el caso $E = F$ y a estudiar cual es el mínimo exponente n para el cual un operador positivo S dominado por otro operador T que sea SS cumple que S^n es SS, todo ello rebajando respecto al Teorema 3.15 las condiciones sobre E. El resultado obtenido es más débil que los obtenidos para los operadores DSS. Comenzamos con el siguiente:

EJEMPLO 3.25. *Existe un espacio de Banach E tal que E' es orden continuo y dos operadores positivos $0 \le \widetilde{R} \le \widetilde{P} : E \to E$ tales que $\widetilde{R}$ es SS y $\widetilde{P}$ no lo es.*

En efecto, consideremos $E = L^2[0,1] \oplus l^\infty$ y los operadores $0 \leq \widetilde{R} \leq \widetilde{P} : E \to E$ definidos via las matrices

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R & 0 \end{pmatrix} \qquad \widetilde{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P & 0 \end{pmatrix}$$

donde R y P son los operadores definidos en el Ejemplo 3.22. Claramente $\widetilde{P}$ es SS y $\widetilde{R}$ no lo es.

Nótese que en el ejemplo previo $\widetilde{R}^2$ es SS puesto que es el operador cero. En general podemos dar el siguiente resultado en el que la propiedad de la división subsequencial es eliminada.

Proposición 3.26. *Sea E un retículo de Banach orden continuo con dual E' orden continuo y sean $0 \leq S \leq T : E \to E$. Si T es SS entonces S^2 es SS.*

Demostración. Asumimos las reducciones hechas en la prueba del Teorema 3.15. Sea M un subespacio cerrado de E de dimensión infinita elegido arbitrariamente. Necesariamente se tiene que verificar una de las dos condiciones excluyentes dadas a continuación: a) S es invertible en M, o b) S no es invertible en M.
Comencemos por b); en ese caso podemos elegir una sucesión normalizada $(t_n)_n$ tal que $\|St_n\| \to 0$, y por tanto tal que $\|S^2(t_n)\| \to 0$. Es claro entonces que S^2 no puede ser invertible en M ya que $\|t_n\| = 1$ para todo n. Supongamos ahora que se verifica a); como en la demostración del Teorema 3.15, podemos tomar una sucesión normalizada y débilmente nula en M, $(t_n)_n$, tal que (t_n), $(St_n)_n$ y (z_n) son sucesiones básicas incondicionales equivalentes, donde (z_n) es una sucesión disjunta en E satisfaciendo $\sum_{n=1}^{\infty} \|St_n - z_n\| < \infty$. Por otro lado S es un operador DSS por serlo T (cf. Teorema 2.14), y así por la Proposición 2.2 podemos encontrar una sucesión bloque normalizada de $(z_n)_n$ que denotamos $(w_n)_n$ tal que la restricción $S_{|_{[w_n]}} : [w_n] \to E$ es compacta, de hecho $\|S(w_n)\| \to 0$. Denotemos

$$w_j = \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} a_k^j z_k \quad \text{y} \quad p_j = \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} a_k^j t_k.$$

Claramente $\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} \|St_k - z_k\| \underset{j}{\to} 0$ ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \|St_n - z_n\| < \infty$.
Por otra parte, de la equivalencia entre (t_n), (St_n) y (z_n) se obtiene que $\inf_j \|p_j\| > 0$ y que $\inf_n \|z_n\| > 0$, y de ahí que $\sup_j\{|a_k| : n_j + 1 \leq k \leq n_{j+1}\} < \infty$ gracias a que la

sucesión $(w_n)_n$ es normalizada. Llamemos a dicho supremo β. A partir de la desigualdad

$$\begin{aligned}\|S^2(p_j)\| = \Big\|S\Big(\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} a_k^j S t_k\Big)\Big\| &\leq \Big\|S\Big(\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} a_k^j (St_k - z_k)\Big)\Big\| + \Big\|S\Big(\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} a_k^j z_k\Big)\Big\| \\ &\leq \|S\|\beta\Big(\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} \|St_k - z_k\|\Big) + \|Sw_j\|,\end{aligned}$$

se obtiene que $\|S^2(p_j)\| \underset{j}{\to} 0$ y por tanto que el operador S^2 no es un isomorfismo cuando se restringe a M. Como tanto a) como b) implican que S^2 no es invertible sobre el subespacio M, que fue tomado arbitrariamente, se concluye que S^2 es SS. □

4. Operadores estrictamente cosingulares. Mayoración

En el Capítulo segundo hemos considerado la clase "dual"de los operadores RSS y el problema de mayoración en la misma. A continuación vamos a considerar el problema de mayoración en la clase "dual"de la de los operadores estrictamente singulares, es decir la formada por los operadores *estrictamente cosingulares* (o de *Pelczynski*) que fueron introducidos por Pelczynski en [**57**].

Para justifiacar la definición de operador estrictamente cosingular recordemos que un operador T entre dos espacios de Banach X e Y es estrictamente singular si y sólo si para ningún espacio de Banach W de dimensión infinita existen $i_X : W \to X$ e $i_Y : W \to Y$ isomorfismos sobre sus imágenes tales que $Ti_X = i_Y$. Usando dualidad y la Proposición 1.63 se tiene la siguiente:

Definición 3.27. Sean X e Y espacios de Banach. Un operador $T : X \to Y$ es *estrictamente cosingular* si para ningún espacio de Banach W de dimensión infinita existen $p_X : X \to W$ y $p_Y : Y \to W$ operadores sobreyectivos tales que $p_Y T = p_X$.

En otras palabras, $T : X \to Y$ es estrictamente cosingular si para todo subespacio Z de Y de codimensión infinita la composición $\pi_Z T : X \to Y/Z$ no es sobreyectiva.

Ejemplo clásico de operador estrictamente cosingular es la inclusión canónica $J : c_0 \to l^\infty$ ([**57**]). La clase de los operadores estrictamente cosingulares entre dos espacios de Banach X e Y se denotará por $\mathcal{SCS}(X, Y)$. Dicha clase es un ideal de operadores (cf. [**61**, Thm. 6.5 y 6.6]) que contiene a los operadores compactos. Propiedades de $\mathcal{SCS}(X, Y)$ se pueden encontrar en [**57**], [**58**] y [**61**]. Ejemplos de operadores estrictamente consingulares que no sean compactos son todos los operadores $T : X \to L^1(\mu)$ que sean débilmente compactos y no compactos (en particular las inclusiones $L^p[0,1] \hookrightarrow L^1[0,1]$ con $p > 1$).

Proposición 3.28. (cf. [**57**, I.2.Prop.3]) *Sean X e Y espacios de Banach y un operador $T : X \to Y$.*
i) Si T' es estrictamente cosingular entonces T es SS.
ii) Si T' es SS entonces T es estrictamente cosingular.
iii) Supongamos que T es débilmente compacto. Si T es estrictamente cosingular entonces T' es SS.
iv) Supongamos que X es reflexivo. Si T es SS entonces T' es estrictamente cosingular.

En general el problema de mayoración de operadores estrictamente cosingulares entre dos retículos de Banach tiene respuesta negativa. En efecto, si $S_1, S_2 : l^1 \to L^\infty[0,1]$ y $T : l^1 \to L^\infty[0,1]$ son los operadores definidos en el Ejemplo 2.15, entonces T' es compacto y por tanto estrictamente cosingular; por otra parte los operadores S_1' y S_2' no pueden ser simultáneamente estrictamente cosingulares porque de lo contrario el operador sobreyectivo S' sería estrictamente cosingular lo cual implicaría que S sería SS, y eso es imposible. Nótese que $0 \le S_1', S_2' \le T'$.

Teorema 3.29. *Sean E y F retículos de Banach tales que E' es orden continuo. Sea $T \in \mathcal{SCS}(E,F)$ un operador positivo. Entonces se tiene la inclusión $[0,T] \subset \mathcal{SCS}(E,F)$ si ocurre alguna de las siguientes condiciones:*
a) F' es atómico con norma dual orden continua y F'' es un espacio KB.
b) F y F' son espacios KB y F' satisface la propiedad de la división subsecuencial.

Demostración. Sea $S : E \to F$ un operador positivo dominado por T. Notemos que basta probar que T es débilmente compacto. En efecto, en tal caso el uso conjunto de la Proposición 3.28, la Proposición 1.43 y el Teorema 3.18 da por resultado que S es estrictamente cosingular. Notemos también que para que T sea débilmente compacto basta con que E' sea orden continuo y F sea un espacio KB (cf. [**4**, Thm. 17.6]). Obviamente ésta es la situación en los apartados a) y b). □

Corolario 3.30. *Sean E y F retículos de Banach con E' orden continuo, y un operador positivo $0 \le T : E \to F$ estrictamente cosingular. Entonces se tiene la inclusión*

$[0, T] \subset \mathcal{SCS}(E, F)$ *si ocurre alguna de las siguientes condiciones:*
i) $\sigma(F') < \infty$ *y* F'' *es un espacio KB.*
ii) $1 < s(F) \leq \sigma(F) < \infty$.
iii) F' *es un espacio de funciones de reordenamiento invariante que no contiene copia de* c_0 *y* F'' *es un espacio KB.*
iv) F' *es un espacio* $C(K)$.

Demostración. Al igual que en el Teorema 3.29 basta con probar que T es débilmente compacto y aplicar el Corolario 3.19. Eso es inmediato en los casos i) y iii). En cuanto a ii) nótese que F'' es un espacio KB por ser $\sigma(F'') < \infty$ (cf. Proposición 1.43 y Proposición 1.30). Por último en el caso iv) nótese que F'' es un L-espacio (cf. Proposición 1.21) y por tanto un espacio KB (cf. Observación 1.29). □

Observamos que la orden continuidad de E' es esencial en el Teorema 3.29. En efecto, si $T, S : L^1[0, 1] \to l^\infty$ son los operadores definidos en el Ejemplo 3.22 y J denota la inclusión canónica de $L^2[0, 1]$ en $L^1[0, 1]$, entonces el operador traspuesto $(TJ)' : (l^\infty)' \to L^2[0, 1]$ es compacto y por tanto estrictamente cosingular; por otro lado el operador $(SJ)'$ no puede ser estrictamente cosingular puesto que SJ no es SS (cf. Proposición 3.28). Se sigue entonces que los operadores $(SJ)^+$ y $(SJ)^-$ no pueden ser simultáneamente estrictamente cosingulares; sin embargo $0 \leq (SJ)^+, (SJ)^- \leq (TJ)'$ (por supuesto $(l^\infty)''$ no es orden continuo).

Parte de este capítulo tercero ha sido presentado en una comunicación en el Congreso Internacional de Análisis Funcional celebrado en Valencia (Julio de 2000), en homenaje al Profesor Valdivia.

CAPíTULO 4

Operadores delgados. Mayoración

En este capítulo consideramos la clase de los operadores *delgados* (*"thin"*) introducidos por Neidinger en [**51**] y [**52**] en relación con el estudio de factorización de operadores a través de espacios l^p-saturados. Los operadores delgados constituyen una clase localizada dentro de la de los operadores estrictamente singulares y conteniendo a la de los operadores compactos. La motivación que nos ha guíado en este capítulo ha sido el intentar dar condiciones suficientes para establecer la coincidencia de estas clases cuando trabajamos con operadores regulares para extender resultados de Caselles y González en [**11**]. De ese modo podemos enunciar algún resultado de mayoración para operadores delgados definidos entre espacios concretos. En la segunda parte del capítulo consideramos operadores regulares integrales y mostramos la igualdad de las clases anteriores con la de los operadores disjuntamente estrictamente singulares en ciertos espacios.

1. Propiedades básicas

Definición 4.1. Sean W y V subconjuntos de un espacio de Banach X. Decimos que W *absorbe* a V si existe $\lambda > 0$ tal que $V \subset \lambda W$ y que W *casi absorbe* V si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\lambda > 0$ tal que $V \subset \lambda W + \varepsilon B_X$.

Definición 4.2. ([**52**]) Sean X e Y espacios de Banach y un operador $T : X \to Y$. Se dice que T es *delgado* (*"thin"*) si la bola unidad de cualquier subespacio de Y de dimensión infinita no es casi absorbida por TB_X.

Es fácil ver, razonando al absurdo, que todo operador delgado es SS. Por otra parte que todo operador compacto es delgado es consecuencia de que en un espacio de Banach X todo conjunto $V \subset X$ casi-absorbido por un conjunto $W \subset X$ relativamente compacto es relativamente compacto ([**52**, Thm. 1.3]). Esta propiedad también es cierta para conjuntos débilmente relativamente compactos. Consecuencia de esto es que para un espacio de

Banach Y sin subespacios reflexivos todo operador $T : X \to Y$ que sea débilmente compacto es delgado ([**52**, Prop. 2.3]) (Por ejemplo las inclusiones $l^p \hookrightarrow c_0$, con $p > 1$).

Proposición 4.3. ([**52**]) *Sea un operador $T : X \to Y$. Son equivalentes: i) TB_X absorbe B_Y. ii) TB_X casi absorbe B_Y. iii) T es sobreyectivo.*

Se sigue de la proposición previa que ningún operador sobreyectivo es delgado. Por tanto cualquier operador $T : l^1 \to l^2$ que sea sobreyectivo es SS pero no es delgado. También se deduce de lo anterior que todo operador $T : l^p \to l^q$, $1 < p \neq q < \infty$ es delgado, usando que todo subespacio de l^q contiene otro subespacio complementado e isomorfo a l^q. Si además $p < q$ entonces se puede tomar $T : l^p \to l^q$ que no sea compacto.

La clase de los operadores delgados es cerrada; además se tiene la siguiente proposición:

Proposición 4.4. *Sean X, Y y Z espacios de Banach y los operadores $X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{S} Z$. Si S es delgado entonces ST es delgado.*

Demostración. De lo contrario existe un subespacio de dimensión infinita $N \subset Z$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\lambda > 0$ satisfaciendo $B_N \subset \lambda S(T(B_X)) + \varepsilon B_Z$. Por otra parte, como $T(B_X) \subset \|T\| B_Y$, resulta que $B_N \subset \lambda S(\|T\| B_Y) + \varepsilon B_Z = \lambda \|T\| S(B_Y) + \varepsilon B_Z$ y por tanto que S no es delgado. Contradicción. $\square$

Proposición 4.5. *Sea un operador $T : X \to Y$ y M un subespacio complementado en Y (de dimensión infinita) por una proyección $P : Y \to M$. Si $(PT)'$ no es un isomorfismo sobre su imagen entonces B_M no es casi absorbida por $T(B_X)$.*

Demostración. Supongamos lo contrario y sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Tomemos $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{\|P\|}$; entonces existe $\lambda > 0$ tal que $B_M \subset \lambda T B_X + \dfrac{\varepsilon}{\|P\|} B_Y$. Como $PB_M = B_M$ y $PB_Y \subset \|P\| B_M$, resulta que $B_M \subset \lambda PTB_X + \varepsilon B_M$. Así el operador $PT : X \to M$ es sobreyectivo (cf. Proposición 4.3) y por tanto el operador traspuesto $(PT)' : M' \to X'$ es un isomorfismo sobre su imagen (cf. Proposición 1.63). Contradicción. $\square$

2. Relación entre operadores delgados y SS

En esta sección consideramos operadores regulares entre espacios $L^p(\mu)$ y espacios de Köthe estudiando condiciones para la equivalencia entre ser delgado y ser SS. Uno de los objetivos es extender el siguiente resultado de Caselles y González:

PROPOSICIÓN 4.6. ([**11**]) *Sean* (Ω, Σ, μ) *y* (Ω', Σ', μ') *espacios de probabilidad con* $1 \leq q \leq p < \infty$ *y* $p \neq 1$, *y* $T : L^p(\mu) \to L^q(\mu')$ *un operador regular. Entonces* T *es SS si y sólo si* T *es compacto.*

OBSERVACIÓN 4.7. La Proposición 4.6 no es cierta si $1 \leq p < q < \infty$: considérese una sucesión disjunta normalizada de vectores positivos, $(x_n)_n$, en $L^p[0,1]$ y la proyección ortogonal $P : L^p[0,1] \to [x_n]$ (cf. Proposición 1.68). Sea también $(y_n)_n$ una sucesión disjunta normalizada de vectores positivos en $L^q[0,1]$. Si $\varphi_1 : [x_n] \to l^p$ es la isometría positiva que lleva cada x_n al elemento e_n de la base canónica de l^p, $\varphi_2 : l^q \to [y_n]$ es la isometría positiva que lleva cada e_n al elemento y_n y $J : l^p \to l^q$ es el operador inclusión, entonces el operador positivo $T = \varphi_2 J \varphi_1 P : L^p[0,1] \to L^q[0,1]$ es SS por serlo J pero no es compacto porque la sucesión $(x_n)_n$ es débilmente nula, mientras que la sucesión $(Tx_n = y_n)_n$ es normalizada.

La Proposición 4.6 tampoco es cierta si el operador T no es regular: considérense $2 < q < \infty$, $(y_n)_n \subset L^q[0,1]$ y φ_2 como antes. Sea $P : L^q[0,1] \to [r_n]$ la proyección sobre el subespacio generado por las funciones de Rademacher y $\varphi_1 : [r_n] \to l^2$ el isomorfismo que lleva cada r_n al elemento e_n de la base de l^2. Si $J : l^2 \hookrightarrow l^q$ es la inclusión canónica entonces el operador $T : \varphi_2 J \varphi_1 P : L^q[0,1] \to L^q[0,1]$ es SS pero no es compacto.

TEOREMA 4.8. *Sean* (Ω, Σ, μ) *y* (Ω', Σ', μ') *espacios de probabilidad y* $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$. *Si* $T : L^p(\mu) \to L^q(\mu')$ *es un operador regular, entonces* T *es SS si y sólo si* T *es delgado.*

DEMOSTRACIÓN. Dividiremos la prueba en distintos casos.

1) $1 < p = q$ ó $1 \leq q < p < \infty$. Basta tener en cuenta la Proposición 4.6.

2) $1 < p < q < \infty$ y $q \neq 2$.

Supongamos que $T : L^p(\mu) \to L^q(\mu')$ es SS pero no es delgado; entonces el operador regular $T : L^p(\mu) \to L^p(\mu')$ es SS o equivalentemente delgado por el caso anterior. Por otra parte existe un subespacio de dimensión infinita $M \subset L^q(\mu')$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\lambda_\varepsilon > 0$ con $B_M \subset \lambda_\varepsilon T(B_{L^p(\mu)}) + \varepsilon B_{L^q(\mu')}$. Supongamos que $M \subset M_q(\delta)$ para algún $\delta > 0$, donde $M_q(\delta)$ es un conjunto de Kadec-Pelczynski. En tal caso se obtiene $\|x\|_p \geq \|x\|_1 \geq \delta^2 \|x\|_q \geq \delta^2 \|x\|_p$ para todo $x \in M$, es decir M es también un subespacio de $L^p(\mu')$. La relación $B_M \subset \lambda_\varepsilon T(B_{L^p(\mu)}) + \varepsilon B_{L^q(\mu')}$ implica $B_M \subset \lambda_\varepsilon T(B_{L^p(\mu)}) + \varepsilon B_{L^p(\mu')}$, de donde se deduce que el operador $T : L^p(\mu) \to L^p(\mu')$ no es delgado lo cual es una contradicción.

Supongamos alternativamente que $M \not\subseteq M_q(\delta)$ para ningún $\delta > 0$. En tal caso, existe una sucesión normalizada $(y_n)_n \subset M$ y una sucesión disjunta $(z_n)_n \subset L^q(\mu')$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n - y_n\|_q < \infty$ y satisfaciendo $|z_n| \leq |y_n|$ para todo n (cf. Proposición 1.69). El subespacio $[z_n]$ es isomorfo a l^q y además está complementado en $L^q(\mu')$ (cf. Proposición 1.68), de ahí se sigue que el subespacio $[y_n]$ también es isomorfo a l^q y está complementado en $L^q(\mu')$ por una proyección P (cf. Proposición 1.64). Asumamos que $p < 2$. Si p' y q' denotan respectivamente el conjugado de p y de q, entonces $p' > 2$ y por tanto $L^{p'}(\mu)$ no contiene copia de $l^{q'}$ $(2 \neq q' \neq p')$. Si por el contrario suponemos que $p \geq 2$, entonces la desigualdad $q > p \geq 2$ implica $2 \geq p' > q'$ y por tanto $L^{p'}(\mu)$ no contiene copia de $l^{q'}$ (cf. [**79**, pag. 105]). Así, en cualquiera de los dos casos llegamos a que $(PT)' : [y_n]' \to L^p(\mu)'$ no es un isomorfismo sobre su imagen. Ahora de la Proposición 4.5 deducimos que $B_{[y_n]}$ no es casi absorbida por $PTB_{L^p(\mu)}$, contradicción.

3) $1 < p < q = 2$

Supongamos que $T : L^p(\mu) \to L^2(\mu')$ es SS y no es delgado. Como $L^{p'}(\mu)$ es subproyectivo y reflexivo el operador traspuesto $T' : L^2(\mu') \to L^{p'}(\mu)$ es SS (Proposición 3.7); y como T no es delgado existe un subespacio de dimensión infinita $M \subset L^2(\mu')$ tal que $T(B_{L^p(\mu)})$ casi absorbe B_M. Sea P la proyección de $L^2(\mu')$ en M. El operador $(PT)' : M' \to L^{p'}(\mu)$ es SS por serlo T' y de la Proposición 4.5 se sigue que B_M no es casi absorbida por $T(B_{L^p(\mu)})$, lo que es una contradicción. $\square$

Damos a continuación varios ejemplos que complementan el resultado anterior:

EJEMPLO 4.9. *Un operador $T : L^\infty[0,1] \to L^\infty[0,1]$ que es SS pero no es delgado.*

Sea $Q : L^\infty[0,1] \to L^2[0,1]$ un operador sobreyectivo. Para ver que tal operador existe consideremos un isomorfismo $\varphi : L^2[0,1] \to l^2$ y la inclusión canónica $J : [r_n] \to L^1[0,1]$, donde $[r_n]$ es el subespacio engendrado por las funciones Rademacher en $L^1[0,1]$. Consideremos asímismo el isomorfismo clásico $\psi : l^2 \to [r_n]$ (cf. [**44**, Thm. 2.b.3]) y la composición $J\psi\varphi : L^2[0,1] \to L^1[0,1]$ que es un isomorfismo sobre su imagen. Tomemos $Q = (J\psi\varphi)' : L^\infty[0,1] \to L^2[0,1]$ y usemos la Proposición 1.63. El operador Q es SS por ser débilmente compacto y Dunford-Pettis (cf. Proposición 3.3).

Consideremos también un operador $\varphi : L^2[0,1] \to L^\infty[0,1]$ que sumerge isomórficamente $L^2[0,1]$ en $L^\infty[0,1]$ (tal operador existe por ser $L^2[0,1]$ separable y ser $L^\infty[0,1]$ isomorfo a l^∞) y la composición $T = \varphi Q : L^\infty[0,1] \to L^\infty[0,1]$. Si tomamos un subespacio M de $L^\infty[0,1]$ incluido en la imagen del operador φ es claro que la bola unidad B_M es casi absorbida por $\varphi Q(B_{L^\infty[0,1]})$. Por tanto T no es delgado y sin embargo es SS por serlo Q. Notemos que T es trivialmente regular por la Proposición 1.20.

En [**52**, Prop. 2.6] se muestra que la inclusión canónica $I : L^\infty[0,1] \to L^1[0,1]$ es un ejemplo de operador que no es delgado y sin embargo es SS (por ser M-débilmente compacto (cf. Proposiciones 1.46 y 3.5)). De hecho podemos extender este resultado:

Ejemplo 4.10. *El operador inclusión $I : L^\infty[0,1] \to L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$ no es delgado pero es SS.*

El razonamiento es análogo al que se da en [**51**] para la inclusión de $L^\infty[0,1]$ en $L^1[0,1]$. Notemos que si N es un subespacio de $L^p[0,1]$ tal que la bola unidad B_N es equi-integrable entonces B_N es casi absorbida por $B_{L^\infty[0,1]}$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|f\chi_B\|_p < \varepsilon$ para toda $f \in B_N$ y todo Boreliano B tal que $\mu(B) < \delta$. Notemos que fijado ese $\delta > 0$ existe una constante $\lambda = \delta^{\frac{-1}{p}} > 0$ tal que $\mu\{t : |f(t)| > \lambda\} < \delta$ para toda $f \in B_N$. Llamemos $B_f = \{t : |f(t)| > \lambda\}$ para toda $f \in B_N$. Claramente $f\chi_{B_f^c} \in \lambda B_{L^\infty[0,1]}$ para toda $f \in B_N$ y $\|f - f\chi_{B_f^c}\|_p = \|f\chi_{B_f}\|_p < \varepsilon$. Por tanto $B_N \subset \lambda B_{L^\infty[0,1]} + \varepsilon B_{L^p[0,1]}$.

Así pues todo se reduce a probar que en $L^p[0,1]$ existe un subespacio M cuya bola unidad es equi-integrable para la norma $\|\,\|_p$. El Corolario 1.61 nos asegura la existencia de tal subespacio, precisamente el generado por las funciones Rademacher en $[0,1]$.

Ejemplo 4.11. *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Existe un operador regular $T : L^1[0,1] \to L^p[0,1]$ que es SS pero no es delgado.*

En efecto, consideremos primeramente el caso $1 < p < \infty$ y tomemos una proyección positiva $P : L^1[0,1] \to M$, donde M es un subretículo de $L^1[0,1]$ reticularmente e isométricamente isomorfo a l^1 (cf. Proposición 1.68). Consideremos un operador sobreyectivo $Q : M \to L^p[0,1]$; nótese que un tal Q existe porque $L^p[0,1]$ es separable y por tanto isomorfo a un cociente de l^1 (cf. [**44**, pg. 108]). Tomemos a continuación la composición $T = QP : L^1[0,1] \to L^p[0,1]$. Claramente T es SS por ser débilmente compacto y Dunford-Pettis (cf. Proposición 3.3). Además T es regular por estar definido en un L-espacio y tomar valores en un espacio KB (cf. Proposición 1.20). Que T no es delgado es consecuencia de ser sobreyectivo.

Consideremos ahora $p = 1$. Sea $T : L^1[0,1] \to L^q[0,1]$ como en las lineas previas con $1 < q < \infty$ y compongamos con la inclusión canónica $J : L^q[0,1] \to L^1[0,1]$. El operador $JT : L^1[0,1] \to L^1[0,1]$ es SS por serlo T. Sin embargo no es delgado. En efecto, la inclusión J no es SS pues preserva el subespacio generado por las funciones Rademacher y por tanto no es delgado. Sea pues N un subespacio de $L^1[0,1]$ cuya bola unidad B_N sea casi absorbida por $J(B_{L^q[0,1]})$. Basta notar que T es sobreyectivo para obtener que B_N también es casi absorbida por $JT(B_{L^1[0,1]})$.

Por último consideremos el caso $p = \infty$. Sea $Q : L^1[0,1] \to L^2[0,1]$ un operador sobreyectivo, considerado en los párrafos anteriores, que es SS y regular (cf. Proposición 1.20), y la isometría canónica $\varphi : L^2[0,1] \to L^\infty[0,1]$. Si M es un subespacio de $L^\infty[0,1]$ contenido en la imagen de φ, entonces B_M es casi absorbida por $\varphi Q(B_{L^1[0,1]})$ con lo que el operador $\varphi Q : L^1[0,1] \to L^\infty[0,1]$ no es delgado. Sin embargo es φQ es SS por serlo Q. Nótese que φQ es regular (cf. Proposición 1.20).

Cuestión: ¿Existe un operador $T : L^p[0,1] \to L^\infty[0,1]$, $1 < p < \infty$, que sea SS pero no sea delgado?

A partir de los Teoremas 3.15 y 4.8 se obtiene el siguiente resultado de mayoración

Corolario 4.12. *Sean (Ω, Σ, μ) y (Ω, Σ', μ') espacios de probabilidad y $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$. Sean $0 \leq S \leq T : L^p(\mu) \to L^q(\mu')$ operadores positivos. Si T es delgado entonces S es delgado.*

Pretendemos a continuación extender el Teorema 4.8 a otros espacios de Köthe de funciones. Recordemos que dado (Ω, Σ, μ) espacio de probabilidad, una sucesión $(h_n)_n \subset L^1(\mu)$ se llama *sistema de Rademacher* si existe $A \in \Sigma$, con $\mu(A) > 0$, tal que el soporte de h_n está en A para todo n, y que $(h_n)_n$, como subconjunto de $L^1(A, \mu)$, es una sucesión de variables aleatorias $\{-1, 1\}$-valoradas, independientes, simétricas e idénticamente distribuidas.

Definición 4.13. Un espacio E de Köthe de funciones sobre un espacio de probabilidad (Ω, Σ, μ) satisface la *R-condición* si todo sistema de Rademacher en E es equivalente a la base canónica de l^2.

Los espacios invariantes por reordenamiento, E, sobre $[0,1]$ que satisfacen la R-condición han sido caracterizados por Rodin-Semenov (cf. [**45**, Thm. 2.b.4]). Entre ellos se encuentran los $L^p[0,1]$, con $1 \leq p < \infty$. Ejemplos de espacios que no satisfacen la R-condición son $L^\infty[0,1]$ ó el espacio de Orlicz $L^{exp(x^3)}[0,1]$.

Usaremos el siguiente resultado dado en [**11**, Prop.3]

Proposición 4.14. *Sean E y F espacios de Köthe sobre espacios de probabilidad (Ω, Σ, μ) y (Ω', Σ', μ') respectivamente, tales que E y F son orden continuos y E satisface la R-condición. Sea $T : E \to F$ un operador regular. Si T es l^2-singular entonces T es AM-compacto.*

Proposición 4.15. *Sean E y F espacios de Köthe de funciones sobre espacios de probabilidad (Ω, Σ, μ) y (Ω', Σ', μ') respectivamente tales que E y E' son orden continuos y E satisface la R-condición. Para un operador regular $T : E \to F$ son equivalentes:*
i) T es SS. ii) T es compacto. iii) T es delgado,
si se satisface una de las siguientes condiciones:
a) E' es orden continuo y F tiene la propiedad de Schur positiva.
b) $\sigma(F) < s(E)$.

Demostración. Tanto a) como b) implican que el operador T es M-débilmente compacto (cf. Proposición 1.46). Ahora si T es SS entonces T es AM-compacto por la Proposición 4.14, y usando [**50**, Prop. 3.7.5] resulta que T es compacto. □

Observaciones 4.16. 1) La equivalencia anterior se mantiene en el caso $s(E) \leq \sigma(F)$ siempre que exista q con $s(E) \leq q \leq \sigma(F)$ tal que toda sucesión disjunta en F contenga una subsucesión con una q-estimación inferior, y toda sucesión disjunta en E contenga una subsucesión con una q-estimación superior (en particular cuando E es q-convexo y F es q-cóncavo). En efecto, basta razonar como antes y usar ahora que si T es SS entonces T es M-débilmente compacto (cf. [**11**, Prop. 2]).

2) En las condiciones de la Proposición 4.15 se tiene para el operador T que ser l^2-singular es equivalente a ser SS, delgado o compacto.

3) En la Proposición 4.15 es esencial la hipótesis de que E cumpla la R-condición: sea $E = (L^{exp(x^3)})_0[0,1]$ la parte orden continua del espacio de Orlicz $L^{exp(x^3)}[0,1]$. Entonces $E' = L^{xlog^{1/3}(1+x)}[0,1]$ es orden continuo y el operador inclusión $J : E[0,1] \hookrightarrow L^1[0,1]$ es SS pero no es delgado. En efecto, el operador J es SS por [**55**, Thm. 2], y que no es delgado se sigue del Ejemplo 4.10 y la Proposición 4.4 usando un argumento de factorización.

Para extender este resultado necesitamos el lema y la proposición que siguen:

Lema 4.17. *Sean E y F espacios de Köthe sobre espacios de probabilidad (Ω, Σ, μ) y (Ω', Σ', μ') tales que E, E' y F son orden continuos y E satisface la R-condición. Sea un operador regular $T : E \to F$ tal que $T : E \to L^1(\mu')$ es SS. Si $T : E \to F$ no es delgado entonces existe una sucesión $(v_n)_n \subset F$ de vectores normalizados disjuntos tal que $B_{[v_n]}$ es casi absorbida por $T(B_E)$.*

Demostración. Como $T : E \to F$ no es delgado existe un subespacio $M \subset F$ de dimensión infinita tal que B_M es casi absorbida por $T(B_E)$. Consideremos $T : E \to L^1(\mu')$. Si $M \subset M_F(\delta)$ para algún $\delta > 0$, donde $M_F(\delta)$ es un conjunto de Kadec-Pelczynski, entonces M es un subespacio de $L^1(\mu')$ (cf. Proposición 1.69). Como $B_F \subset B_{L^1(\mu')}$ resulta que $T : E \to L^1(\mu')$ no es delgado, lo cual es una contradicción con la Proposición 4.15. Supongamos pues que $M \not\subseteq M_F(\delta)$ para ningún $\delta > 0$. Ahora, fijado un $\varepsilon > 0$, existe por la Proposición 1.69 una sucesión normalizada $(y_n)_n \subset M$ y una sucesión disjunta (seminormalizada) $(z_n)_n \subset F$ satisfaciendo $|z_n| \leq |y_n|$ para todo n y tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n - y_n\| < \infty$; más aún existen $K_1, K_2 > 0$ tales que $K_2 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \right\| \leq K_1 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n \right\|$. Por la hipótesis existe $\lambda > 0$ tal que $B_{[y_n]} \subset B_M \subset \lambda T(B_E) + \frac{\varepsilon}{3K_1} B_F$. Pasando a subsucesión si es necesario podemos suponer $\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n - y_n\| < \frac{\varepsilon}{3K_1}$. Sea $(a_n)_n$ tal que $\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n \| < 1$; entonces $\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \| < K_1$. Por hipótesis existen $x \in B_E$ y $w \in B_F$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n = \lambda K_1 T(x) + \frac{\varepsilon}{3} w$. Tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n (y_n - z_n) = \lambda K_1 T(x) + \frac{\varepsilon}{3} w - \sum_{n=1}^{\infty} a_n (y_n - z_n).$$

Como $\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n(y_n - z_n)\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, \|y_n - z_n\| \leq K_1 \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n - z_n\| \leq K_1 \dfrac{\varepsilon}{3K_1} = \varepsilon/3$, resulta

$$\left\|\frac{\varepsilon}{3} w - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y_n - z_n)\right\| \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon,$$

y por tanto $B_{[z_n]} \subset \lambda K_1 T(B_E) + \varepsilon B_F$. □

PROPOSICIÓN 4.18. *Sean E y F espacios de Köthe sobre espacios de probabilidad (Ω, Σ, μ) y (Ω', Σ', μ') respectivamente tales que E, E' y F son orden continuos, E satisface la R-condición y F es disjuntamente subproyectivo. Sea un operador regular $T : E \to F$ tal que T' es DSS. Son equivalentes i) T es SS. ii) T es delgado. iii) $T : E \to L^1(\mu')$ es SS.*

DEMOSTRACIÓN. Basta probar la implicación *iii)* $\Rightarrow$ *ii)*. Supongamos que T no delgado; entonces por el Lema 4.17 existe una sucesión disjunta normalizada $(y_n)_n \subset F$ tal que $B_{[y_n]}$ es casi absorbida por $T(B_E)$. Como F es disjuntamente subproyectivo podemos asumir, pasando a una subsucesión si es necesario, que el subespacio $[y_n]$ está complementado en F por una proyección P de norma 1. Consideremos el operador $PT : E \to [y_n]$; claramente $PB_{[y_n]} = B_{[y_n]}$ es casi absorbida por $PT(B_E)$, y por tanto PT es sobreyectivo (cf. Proposición 4.3). Así el operador $T'P'$ es un isomorfismo sobre su imagen (cf. Proposición 1.63). Consideremos los elementos disjuntos dos a dos $P'y'_n \in F'$, donde para todo n $y'_n \in [y_n]' = [y'_n]$ es el funcional ortogonal asociado a y_n ($y'_n(y_m) = \delta_{nm}$). Por tanto existe $\alpha > 0$ tal que $\|T'P'x\| \geq \alpha\|x\|$ para todo $x \in [y_n]'$. Además siendo P' también isomorfismo sobre su imagen se tiene

$$\left\|T'\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n P'y'_n\Big)\right\| = \left\|T'P'\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n y'_n\Big)\right\| \geq \alpha \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n y'_n\right\| \geq$$
$$\geq \frac{\alpha}{\|P'\|}\left\|P'\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n y'_n\Big)\right\| = \frac{\alpha}{\|P'\|}\left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n P'y'_n\right\| = \alpha \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n P'y'_n\right\|.$$

Se concluye que T' es invertible en el subespacio generado por la sucesión disjunta $(P'y'_n)_n$, lo cual es una contradicción. □

COROLARIO 4.19. *Sean E y F espacios de Köthe sobre espacios de probabilidad (Ω, Σ, μ) y (Ω', Σ', μ') respectivamente tales que E, E' y F son orden continuos, E satisface la R-condición, F es disjuntamente subproyectivo y $[s(E), \sigma(E)] \cap [s(F), \sigma(F)] = \varnothing$. Sea un operador regular $T : E \to F$. Entonces T es SS si y sólo si T es delgado.*

Demostración. El caso $\sigma(F) < s(E)$ está ya visto en la Proposición 4.15. Supongamos pues que $\sigma(E) < s(F)$. Entonces usando las Proposiciones 1.43 y 2.5 se tiene que $T' : F' \to E'$ es DSS y se concluye empleando la Proposición 4.18. $\square$

Corolario 4.20. *Sean E y F espacios de Köthe sobre espacios de probabilidad (Ω, Σ, μ) y (Ω', Σ', μ') respectivamente tales que E, E' y F son orden continuos, E satisface la R-condición, F es disjuntamente subproyectivo y $[s(E), \sigma(E)] \cap [s(F), \sigma(F)] = \varnothing$. Sean $0 \leq S \leq T : E \to F$ operadores positivos . Si T es delgado entonces S es delgado.*

Demostración. T es SS por ser delgado. Si $\sigma(F) < s(E)$, entonces S es SS por la Proposición 3.13. Si por el contrario $\sigma(E) < s(F)$, entonces S es SS por el Corolario 3.19. En ambos casos se concluye usando el Corolario 4.19. $\square$

3. Operadores integrales estrictamente singulares

Concluimos este capítulo extendiendo las equivalencias de la primera parte a la clase de los operadores disjuntamente estrictamente singulares cuando trabajamos con operadores regulares e integrales entre espacios $L^p(\mu)$. Recordemos algunas definiciones y resultados:

Definición 4.21. (*cf.* [**50**, 3.3]) Sean E y F espacios de Köthe sobre dos espacios de probabilidad (Ω, Σ, μ) y (Ω', Σ', μ') respectivamente, y sea $T : E \to F$ un operador. Decimos que T es *integral* si existe una función real K (núcleo) sobre $\Omega \times \Omega'$ que es $\Sigma \times \Sigma'$-medible, tal que
$$Tf(t) = \int_\Omega K(s,t) f(s) \mu(ds)$$
para toda $f \in E$ y casi todo $t \in \Omega'$.

Proposición 4.22. (cf. [**50**, Thm. 3.3.5]) *Sea $T : E \to F$ un operador regular e integral con núcleo K. Entonces el operador $|T|$ es integral y tiene por núcleo $|K|$.*

De la proposición precedente se sigue la siguiente:

Proposición 4.23. (cf. [**50**, Prop. 3.3.2]) *Sean E y F espacios de Köthe orden continuos sobre dos espacios de probabilidad (Ω, Σ, μ) y (Ω', Σ', μ') respectivamente, y sea $T : E \to F$ un operador regular e integral con núcleo K. Entonces el operador traspuesto $T' : F' \to E'$ es integral con núcleo $K'(t,s) = K(s,t)$ para todo punto $(s,t) \in \Omega \times \Omega'$.*

Damos un par de proposiciones que utilizadas simultáneamente proporcionarán ejemplos de operadores estrictamente singulares. La primera se refiere a operadores integrales entre espacios de Köthe de funciones y se debe a Dodds y Schep ([**18**]); extiende resultados previos de Krasnoselski para $L^p(\mu)$ (cf. [**43**]) y de Luxemburg-Zaanen ([**48**]) y Andô ([**5**]).

Proposición 4.24. *Sean E y F espacios de Köthe sobre dos espacios de probabilidad (Ω, Σ, μ) y (Ω', Σ', μ') respectivamente, y sea $T : E \to F$ un operador regular e integral. Entonces T es compacto si ocurre una de las siguientes condiciones:*
i) E' es orden continuo y $F = L^1(\mu')$.
ii) E y F son orden continuos y $\sigma(F) < s(E)$.

Demostración. Para la parte *i*) ver [**18**, Thm. 2.3 (ii)] y para la *ii*) usar [**18**, Thm. 2.7 (iii)] junto con la Proposición 4.23. □

Notemos que si T no es regular entonces el apartado *ii*) de la Proposición 4.24 no es cierto ([**18**, Ex. 2.10]), mientras que el apartado *i*) sí lo es.

El segundo resultado es de factorización y se debe a Johnson ([**35**]):

Proposición 4.25. *Sea (Ω, Σ, μ) espacio de probabilidad sin átomos y separable, y X espacio de Banach.*
a) Sea un operador $T : X \to L^q(\mu)$, $2 < q < \infty$; entonces T factoriza a través de l^q si y sólo si $T : X \to L^2(\mu)$ es compacto.
b) Sea un operador $T : L^p(\mu) \to X$, $1 < p < 2$; entonces T factoriza a través de l^p si y sólo si el operador restricción $T : L^2(\mu) \to X$ es compacto.

Combinando ambas proposiciones obtenemos la siguiente:

Proposición 4.26. *Sea (Ω, Σ, μ) espacio de probabilidad sin átomos y separable, y $E(\mu')$ espacio de Köthe de funciones sobre un espacio de probabilidad (Ω', Σ', μ').*

(i) Si $1 < p < s(E) \leq \sigma(E) < 2$ y $T : L^p(\mu) \to E(\mu')$ es un operador regular e integral, entonces T es SS.

(ii) Si $2 < s(E) \leq \sigma(E) < p < \infty$ y $T : E(\mu') \to L^p(\mu)$ es un operador regular e integral, entonces T es SS.

Demostración. Consideremos el operador restricción $T : L^2(\mu) \to E$, que es compacto por ser $\sigma(E) < 2$ (cf. Proposición 4.24 ii)). Se sigue, usando la Proposición 4.25, que el operador $T : L^p(\mu) \to E$ factoriza a través de l^p, es decir existen $T_1 : L^p(\mu) \to l^p$ y $T_2 : l^p \to E$ tales que $T = T_2 T_1$. El operador $T_2 : l^p \to E$ es SS por ser $p < s(E)$ (cf. [**45**, Thm. 1.d.7]). Por tanto $T : L^p(\mu) \to E(\mu')$ es también SS.

(ii) El operador $T : E \to L^2(\mu)$ es compacto por ser $s(E) > 2$ (cf. Proposición 4.24). Se sigue, usando la Proposición 4.25, que el operador $T : E \to L^p(\mu)$ factoriza a través de $T_1 : E \to l^p$ y $T_2 : l^p \to L^p(\mu)$. Ahora el operador $T : E \to l^p$ es SS por ser $2 < \sigma(E) < p$ (cf. [**45**, Thm. 1.d.7]). Por tanto $T : E \to L^p(\mu)$ es también SS. $\square$

COROLARIO 4.27. *Sean* (Ω, Σ, μ) *y* (Ω', Σ', μ') *espacios de probabilidad sin átomos y separables, y* $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ *con* $p \neq q$. *Entonces todo operador regular e integral* $T : L^p(\mu) \to L^q(\mu')$ *es SS.*

DEMOSTRACIÓN. El caso $1 \leq q < p$ se deduce de la Proposición 4.24 i). En cuanto al caso $1 < p < q$ podemos limitarnos, por la Proposición 4.26, a probar las casos $1 < p \leq 2 < q$ y $1 < p < q = 2$.

(i) Si $1 < p \leq 2 < q$ consideremos el operador $T : L^p(\mu) \to L^1(\mu')$ que es compacto por la Proposición 4.24 ii). Supongamos que $T : L^p(\mu) \to L^q(\mu')$ no es SS; entonces existe un subespacio N de $L^p(\mu)$ tal que T es invertible en N. Sea $T(N) \subset L^q(\mu')$. Si $T(N) \subset M_q(\varepsilon)$ para algún conjunto de Kadec-Pelczynski entonces $T(N)$ sería un subespacio cerrado de $L^1(\mu')$ (cf. Proposición 1.69), lo que contradice que $T : L^p(\mu) \to L^1(\mu')$ es compacto.

Supongamos por el contrario que $T(N)$ no está contenido en ningún conjunto $M_q(\varepsilon)$ de Kadec-Pelczynski; entonces por la Proposición 1.69 existe una sucesión normalizada $(y_n)_n$ en $T(N)$ y una sucesión disjunta $(z_n)_n$ en $L^q(\mu')$ tales que son sucesiones básicas equivalentes. Se sigue que $[z_n]$ es isomorfo a l^q y por tanto que $L^p(\mu)$ contiene una copia isomorfa de l^q, lo cual es una contradicción (cf. [**79**, pag. 105]).

(ii) Si $1 < p < q = 2$, entonces el operador $T' : L^2(\mu') \to L^{p'}(\mu)$, con $2 < p' < \infty$, es también regular e integral, y por tanto SS por el apartado (i). Como $L^2(\mu')$ es subproyectivo se deduce que el propio $T : L^p(\mu) \to L^2(\mu')$ es SS (cf. Proposición 3.7). $\square$

El hecho de que para un operador regular entre espacios de Köthe orden continuos ser integral es una propiedad autodual (cf. Proposición 4.23) justifica la Proposición que sigue. Recordemos que un retículo de Banach E es *disjuntamente subproyectivo* si para toda sucesión disjunta $(x_n)_n \subset E$ existe una subsucesión $(n_j)_j$ tal que $[x_{n_j}]$ está complementado en E (cf. Definición 3.8).

PROPOSICIÓN 4.28. *Sean E y F espacios de Köthe orden continuos sobre espacios de probabilidad (Ω, Σ, μ) y (Ω', Σ', μ'). Supongamos que E es reflexivo y que E y F son disjuntamente subproyectivos. Sea $T : E \to F$ un operador regular e integral, entonces T es SS si y sólo si T' es SS. (En particular si $E = L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$, y $F = L^q(\mu')$, $1 \leq q < \infty$).*

DEMOSTRACIÓN. Si T es SS, entonces T'' es SS por ser E reflexivo. Como $T' : F' \to E'$ es integral y regular resulta que $T' : F' \to L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ es compacto (cf. Proposición 4.24). Basta usar ahora la Proposición 3.9 para concluir que T' es SS. Igualmente si T' es SS, entonces T es SS gracias a la Proposición 3.9 y al hecho de que $T : E \to L^1(\Omega', \Sigma', \mu')$ es compacto por ser T integral (cf. Proposición 4.24). □

De la Proposición 4.6 se deduce que no es posible dar la Proposición 4.26 en el caso $p = q$ porque, de lo contrario, todo operador regular e integral de $L^p(\mu)$ en sí mismo sería compacto, lo cual no es cierto: considérense los operadores de tipo potencial estudiados por Krasnoselski et. al. (cf. [**43**, Pag. 84]).

PROPOSICIÓN 4.29. *Sean E y F espacios de Köthe orden continuos sobre espacios de probabilidad (Ω, Σ, μ), y (Ω', Σ', μ'), tales que E' es orden continuo y E satisface la propiedad de la división subsecuencial. Si $T : E \to F$ es un operador regular e integral, entonces T es DSS si y sólo si T es SS.*

DEMOSTRACIÓN. El operador $T : E \to L^1(\mu')$ es compacto por la Proposición 4.24. Si suponemos que $T : E \to F$ no es SS, entonces un razonamiento análogo a la demostración del Teorema 3.15 nos llevaría a que $T : E \to F$ no sería DSS, lo cual es una contradicción. □

Concluimos el capítulo con un par de consecuencias de la Proposición 4.29. En primer lugar y usando el Corolario 4.19 se obtiene el siguiente:

COROLARIO 4.30. *Sean (Ω, Σ, μ) espacio de probabilidad, $E(\mu)$ un espacio de Köthe orden continuo que satisface la R-condición, la propiedad de la división subsecuencial, y* *tal que E' es orden continuo, y F un retículo de Banach orden continuo y disjuntamente subproyectivo tal que $[s(E), \sigma(E)] \cap [s(F), \sigma(F)] = \varnothing$. Si $T : E \to F$ es un operador regular e integral, entonces T es SS si y sólo si T es delgado si y sólo si T es DSS.*

También usando la Proposición 4.6 se deduce el siguiente:

COROLARIO 4.31. *Sean (Ω, Σ, μ) y (Ω', Σ', μ') espacios de probabilidad, $1 < p < \infty$ y $T : L^p(\mu) \to L^p(\mu')$ un operador regular e integral. Son equivalentes: i) T es DSS. ii) T es compacto. iii) T es SS. iv) T es delgado.*

OBSERVACIÓN 4.32. Si $p = 1$ existen operadores regulares e integrales que son SS y no son compactos (cf. [**31**, III Prop. 3.10]).

CAPíTULO 5

Operadores estrechos. Problema de mayoración

En este capítulo consideramos la clase de los operadores *estrechos* (“*narrow*”) sobre espacios de Köthe de funciones, estudiada por Plichko y Popov en [**60**], y el problema de mayoración en la misma. Si E denota un espacio de Köthe sobre un espacio de probabilidad (Ω, Σ, μ) donde μ es una medida sin átomos e Y es un espacio de Banach, se dice que un operador $T : E \to Y$ es *estrecho* si para todo conjunto $A \in \Sigma$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición $\{A_1, A_2\}$ del conjunto A, con $\mu(A_1) = \mu(A_2)$ tal que $\|T(\chi_{A_1} - \chi_{A_2})\| < \varepsilon$. Los operadores estrechos o sus complementarios han sido estudiados por varios autores desde distintos puntos de vista. Por ejemplo Ghoussoub y Rosenthal ([**30**]) han considerado los operadores en $L^1[0,1]$ que preservan norma-signo (“norm-sign-preserving operators”), y que son precisamente el conjunto complementario de los operadores estrechos en $L^1[0,1]$ (véase [**7**], [**63**], [**64**]). También Enflo y Starbird ([**20**]) han probado que si $T : L^1(\mu) \to L^1(\nu)$ es L^1-complementablemente singular (i.e. tal que la restricción de T a cualquier subespacio complementado de $L^1(\mu)$ e isomorfo a $L^1(\mu)$ no es un isomorfismo), entonces $T : L^1(\mu) \to L^1(\nu)$ es estrecho. Igualmente Johnson, Maurey, Schechtman y Tzafriri ([**36**]) han probado que los operadores $T : L^p(\mu) \to L^p(\nu)$, $1 \leq p < 2$ que son L^p-complementablemente singulares son estrechos. Para $p = 2$ el problema es trivialmente cierto pues en ese caso todo operador L^2-singular es SS y compacto y por tanto estrecho (cf. Lema 5.2). Para $p > 2$ el resultado ya no es cierto: considérese el operador inclusión $J : L^p[0,1] \to L^2[0,1]$ y $\phi : L^2[0,1] \to L^p[0,1]$ un isomorfismo sobre su imagen. Entonces el operador composición $T = \phi J : L^p[0,1] \to L^p[0,1]$ es claramente $L^p[0,1]$-singular y sin embargo no es estrecho (tómese la sucesión $(r_n)_n$ de las funciones Rademacher en $L^p[0,1]$).

Los operadores estrechos son además una herramienta para definir “subespacios ricos”de espacios de funciones $E(\mu)$, precisamente como aquellos subespacios $X \subset E(\mu)$ tales que el operador cociente $T : E \to E/X$ es estrecho.

A la vista de los resultados precedentes cabe plantearse la relación entre los operadores estrechos y los estrictamente singulares. En general ser SS no implica ser estrecho (basta considerar la inclusión canónica $J : L^\infty[0,1] \to L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$) y el recíproco tampoco se tiene. Sin embargo en [**60**] se plantea esta otra cuestión: si T es un operador SS definido en $E = L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$, y con valores en un espacio de Banach Y, ¿es T necesariamente estrecho? En la primera parte del capítulo contestamos positivamente a esta pregunta (cf. Proposición 5.9), si bien imponemos ciertas condiciones como que Y sea un retículo de Banach orden continuo y T sea regular. Bourgain y Rosenthal han probado en [**8**] que si $T : L^1[0,1] \to Y$ un operador l^1-singular (i.e T no preserva copia de l^1), entonces T es estrecho. Nosotros obtenemos una condición suficiente distinta de la de Bourgain y Rosenthal para el caso en que $E = L^1[0,1]$ e Y sea un espacio KB (cf. Corolario 5.12).

La segunda parte del capítulo se dedica a probar un resultado de mayoración para la clase de los operadores estrechos positivos entre retículos de Banach: el Teorema 5.22. Notamos que la falta de estructura vectorial de los operadores estrechos impide usar en la prueba métodos lineales. También damos un contraejemplo que muestra que no se tiene resultado de mayoración en general.

1. Propiedades básicas

A lo largo de este capítulo $E \equiv E(\mu)$ denotará siempre un espacio de Köthe de funciones sobre un espacio de probabilidad (Ω, Σ, μ) donde μ es una medida sin átomos. Recordemos que se tienen las inclusiones canónicas $L^\infty(\mu) \hookrightarrow E \hookrightarrow L^1(\mu)$.

Definición 5.1. Sea Y un espacio de Banach. Un operador $T : E \to Y$ es *estrecho* (*"narrow"*) si para todo conjunto $A \in \Sigma$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición $\{A_1, A_2\}$ del conjunto A, con $\mu(A_1) = \mu(A_2) = \mu(A)/2$ y tal que $\|T(\chi_{A_1} - \chi_{A_2})\| < \varepsilon$.

Denotaremos la clase de los operadores estrechos entre E e Y por $\mathcal{N}(E, Y)$.

Lema 5.2. ([**60**, §8 Prop. 2]) *Sea $E(\mu)$ un espacio invariante por reordenamiento distinto de $L^\infty(\mu)$ e Y espacio de Banach. Si $T : E(\mu) \to Y$ es compacto, entonces T es estrecho.*

Demostración. Sea $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$. El sistema de Rademacher $\{r_n(A)\}_n$ es débilmente nulo en $\{x \in E(\mu) : sopx \subset A\}$ (cf. [**45**, Prop. 2.c.10]). Por tanto $T(r_n(A)) \underset{n}{\rightarrow} 0$. $\square$

La clase de los operadores estrechos se comporta de modo menos estable que la de los compactos respecto a las operaciones usuales entre operadores. De hecho la clase de los operadores estrechos no tiene en general estructura vectorial: en [**60**, § 8. Ex.2] se muestra que si E es un espacio invariante por reordenamiento en $[0,1]$ con la medida de Lebesgue, y con base incondicional, entonces el operador identidad en E (que claramente no es estrecho) es suma de dos operadores estrechos.

La clase de los operadores estrechos es estable bajo la composición por la izquierda con operadores acotados pero no lo es por la derecha ([**60**, §8 Ex. 3]). Al menos se tiene la siguiente proposición:

Proposición 5.3. *Sea Y un espacio de Banach y $T : E \to Y$ un operador estrecho. Si P es una proyección de banda en E entonces $TP : E \to Y$ es estrecho.*

Demostración. Sea $C \in \Sigma$ tal que $P(f) = f\chi_C$ para toda $f \in E$ (cf. Proposición 1.51). Sean $A \in \Sigma$ y $\varepsilon > 0$ y supongamos que $\mu(A \cap C) > 0$ (si no es trivial). Como T es estrecho existen $A_1, A_2 \in \Sigma$ con $A \cap C = A_1 \cup A_2$ y $\mu(A_1) = \mu(A_2) = \mu(A \cap C)/2$ tales que $\|T(\chi_{A_1} - \chi_{A_2})\| < \varepsilon$. Tomemos $A \cap C^c$ y supongamos que $\mu(A \cap C^c) > 0$ (si no, es trivial). Sea B_1, B_2 una partición tal que $\mu(B_1) = \mu(B_2) = \mu(A \cap C^c)/2$. Ahora $A_1^1 = A_1 \cup B_1, A_2^1 = A_2 \cup B_2$ es una partición de A y $\mu(A_1^1) = \mu(A_2^1) = \mu(A)/2$. Además $\|TP(\chi_{A_1^1} - \chi_{A_2^1})\| = \|T\big((\chi_{A_1^1} - \chi_{A_2^1})\chi_C\big)\| = \|T(\chi_{A_1} - \chi_{A_2})\| < \varepsilon$. Así TP es estrecho. $\square$

La clase de los operadores estrechos tampoco es estable por dualidad ([**60**, §8 Ex. 4]). Sin embargo es estable bajo la convergencia en norma:

Proposición 5.4. *$\mathcal{N}(E,Y)$ es cerrado en $\mathcal{L}(E,Y)$ para la norma operador.*

Demostración. Sea $(T_n)_n$ una sucesión en $\mathcal{N}(E,Y)$ convergente a un cierto operador $T \in \mathcal{L}(E,Y)$. Sea $\varepsilon > 0$ y n_0 tal que $1/n_0 < \varepsilon/2$. Para todo natural $n > n_0$ existe una partición $\{A_n^1, A_n^2\}$ del conjunto A, con $\mu(A_n^1) = \mu(A_n^2)$ tal que $\|T_n(\chi_{A_1^n} - \chi_{A_2^n})\| < 1/n$; además existe un natural $m > n_0$ tal que para todo $n \geq m$ se tiene $\|T - T_n\| < \dfrac{\varepsilon}{2\|\chi_\Omega\|}$.

De ambas cosas se obtiene para $n > m$

$$\begin{aligned}\|T(\chi_{A_n^1} - \chi_{A_n^2})\| \leq \|T - T_n\| \, \|\chi_{A_n^1} - \chi_{A_n^2}\| + \|T_n(\chi_{A_n^1} - \chi_{A_n^2})\| \leq \\ \leq \frac{\varepsilon}{2\|\chi_\Omega\|}\|\chi_A\| + \varepsilon/2 < \varepsilon,\end{aligned}$$

y por tanto el operador T es estrecho. □

La siguiente caracterización está probada en [**60**, § 8 Prop. 1]

PROPOSICIÓN 5.5. *Sea E espacio de Köthe orden continuo e Y espacio de Banach. Un operador $T : E \to Y$ es estrecho si y sólo si para todo conjunto $A \in \Sigma$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $B \subset A$, con $\mu(B) \geq \mu(A)/2$, y una partición $\{B_1, B_2\}$ del conjunto B tal que $\|T(\chi_{B_1} - \chi_{B_2})\| < \varepsilon$.*

El siguiente resultado, cuya prueba es muy simple, permite pasar a estudiar operadores regulares estrechos con valores en L-espacios:

PROPOSICIÓN 5.6. *Sea F un retículo de Banach orden continuo que es un orden-ideal de $L^1(\Omega', \Sigma', \mu')$ para algún espacio de probabilidad (Ω', Σ', μ') y sea $T : E \to F$ un operador regular. Entonces T es estrecho si y sólo si $T : E \to L^1(\Omega', \Sigma', \mu')$ es estrecho.*

DEMOSTRACIÓN. La implicación $i) \Rightarrow ii)$ es trivial. Veamos $ii) \Rightarrow i)$. Sea $A \in \Sigma$ y n un natural. Por hipótesis existe una partición $\{A_1^n, A_2^n\}$ del conjunto A, con $\mu(A_1^n) = \mu(A_2^n)$, tal que $\|T(\chi_{A_1^n} - \chi_{A_2^n})\|_1 < 1/n$. Claramente la sucesión $(\chi_{A_1^n} - \chi_{A_2^n})_n$ está acotada en orden y lo mismo se puede decir de la sucesión $(T\chi_{A_1^n} - T\chi_{A_2^n})_n$ por ser T regular. En ese caso la sucesión $(T\chi_{A_1^n} - T\chi_{A_2^n})_n$ es equi-integrable por ser F orden continuo. Como además converge a cero en medida por hacerlo en la norma $\| \, \|_1$, resulta de ambas cosas que $\|T(\chi_{A_1^n} - \chi_{A_2^n})\|_F \to 0$ (cf. Lema 1.59); por tanto el operador T es estrecho. □

Claramente las isometrías no son operadores estrechos; en general se tiene:

PROPOSICIÓN 5.7. *Sean E un espacio de Köthe sobre un espacio de probabilidad y F un retículo de Banach. Si un operador $T : E \to F$ preserva elementos disjuntos, entonces T no es estrecho. En particular los homomorfismos de Riesz no son estrechos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$ y sea $\delta = \|T\chi_A\|$. Tomemos una partición $\{A_1, A_2\}$ del conjunto A con $\mu(A_1) = \mu(A_2) = \mu(A)/2$. Entonces

$$\delta = \|T\chi_A\| = \|T\chi_{A_1} + T\chi_{A_2}\| = \|T(\chi_{A_1} - \chi_{A_2})\|,$$

donde se ha usado que $\chi_{A_1}\perp\chi_{A_2}$ implica $T\chi_{A_1}\perp T\chi_{A_2}$. Como la partición era arbitraria se concluye que T no es estrecho. $\square$

2. Operadores estrechos y operadores estrictamente singulares

Hemos visto que la clase de los operadores estrechos contiene a la de los compactos cuando $E(\mu)$ es un espacio invariante por reordenamiento orden continuo (cf. Lema 5.2). Sin embargo no contiene a la de los operadores DSS (considérese p.e. la incusión $J : L^p[0,1] \hookrightarrow L^q[0,1]$, $p > q \geq 1$) y por tanto no contiene a la de los operadores SS. Recordemos que un operador T entre dos espacios de Banach es *l^p-singular* si no preserva ninguna copia isomorfa de l^p. Bourgain y Rosenthal habían estudiado en [**8**] si todo operador $T : L^1[0,1] \to Y$ l^1-singular era estrecho, dando una respuesta afirmativa. Plichko y Popov plantean en [**60**, pg. 64] las siguientes preguntas: en primer lugar, si $1 < p \neq 2 < \infty$ y $T : L^p[0,1] \to Y$ es un operador SS, es necesariamente T un operador estrecho? La segunda pregunta es: si $1 < p \neq 2 < \infty$ y $T : L^p[0,1] \to Y$ es un operador l^2-singular, es necesariamente T un operador estrecho? Antes de dar una respuesta parcial a estas preguntas recordamos el siguiente resultado de Rosenthal ([**62**])

Teorema 5.8. *Sean (Ω,Σ,μ) y (Ω',Σ',μ') espacios de medida finita y un operador $T : L^1(\mu) \to L^1(\mu')$. Si T es l^2-singular entonces T es Dunford-Pettis.*

Proposición 5.9. *Sea $1 \leq p < \infty$, F un retículo de Banach orden continuo, $([0,1],\Sigma,\mu)$ el espacio de Borel y $T : L^p[0,1] \to F$ un operador regular. Si T es l^2-singular entonces T es estrecho. En particular si T es SS entonces T es estrecho.*

Demostración. Supongamos que T no es estrecho. Como $\overline{T(L^p[0,1])}$ es un subespacio separable de F existe un ideal cerrado J en F que contiene a $\overline{T(L^p[0,1])}$ (cf. Teorema 1.50), además dicho ideal está complementado en F por una proyección positiva P (cf. Proposición 1.27). Claramente el operador PT no es estrecho pero sí es l^2-singular. Por tanto podemos suponer sin pérdida de generalidad que el propio F tiene una unidad débil. En ese caso F se puede considerar como un ideal (en general no cerrado) de $L^1(\Omega,\Sigma,\mu)$ para un cierto espacio de probabilidad (Ω,Σ,μ).

Consideremos las funciones χ_Ω y $\chi_{[0,1]}$ que son las unidades fuertes de $L^\infty(\mu)$ y de $L^\infty[0,1]$ (notemos también que $\chi_\Omega \in F'$ y que $\chi_{[0,1]} \in (L^p[0,1])'$). Como T no es estrecho existe $A \in \Sigma$, $\mu(A) > 0$ y $0 < \varepsilon < \mu(A)/4$ tal que para todo $B \subset A$ con $\mu(B) \geq \mu(A)/2$ y para toda partición $\{B_1, B_2\}$ del conjunto B se tiene $\|T(\chi_{B_1} - \chi_{B_2})\| \geq \varepsilon$ (cf. Proposición 5.5). Pretendemos probar que para ese $\varepsilon > 0$ existe un Boreliano $B \in \Sigma$, $B \subset A$ con $\mu(B^c) < \varepsilon$ y $M > 0$ tal que $\|TP_B g\|_1 \leq M\|g\|_1$ para toda $g \in L^p[0,1]$, donde P_B denota la proyección de banda asociada a B. Notemos que en lo que sigue se puede asumir sin pérdida de generalidad que $T \geq 0$. Así pues, dado $\varepsilon > 0$ existen $B \in \Sigma$, $B \subset A$ con $\mu(B^c) < \varepsilon$ y $M > 0$ tales que $\chi_B \cdot (T'\chi_\Omega) \leq M\chi_{[0,1]}$. Ahora dada $g \in L^p[0,1]_+$ se tiene

$$\begin{aligned}\|TP_B(g)\|_1 &= \int_\Omega TP_B(g)\, d\mu = (TP_B)'(\chi_\Omega)(g) = (P_B' T'(\chi_\Omega))(g) \\ &= (\chi_B \cdot T'(\chi_\Omega))(g) \leq M\chi_{[0,1]}(g) = M\|g\|_1,\end{aligned}$$

lo que prueba que TP_B es $\| \|_1$-$\| \|_1$ continuo.

Notemos ahora que como $L^p[0,1]$ es $\|\cdot\|_1$-denso en $L^1[0,1]$ el operador TP_B admite una extensión continua $\widetilde{TP_B} : L^1[0,1] \to L^1(\mu)$. Como $\mu(B^c) < \varepsilon < \mu(A)/4$, se sigue necesariamente que $\mu(B) \geq \mu(A)/2$. En tal caso existe un sistema de Rademacher en B, $(r_n^B)_n$, de variables aleatorias independientes y simétricas tales que

$$\begin{aligned}&\mu\{t \in B : r_n^B(t) = 1\} = \mu\{t \in B : r_n^B(t) = -1\} = \mu(B)/2 \\ &r_n^B(t) = 0 \quad \text{si } t \notin B.\end{aligned}$$

Notemos que $(r_n^B)_n$ es débilmente nula y que el subespacio $[r_n^B]$ en $L^p[0,1]$ es isomorfo a l^2. Además $\|Tr_n^B\| \geq \varepsilon$ para todo n porque estamos asumiendo que $T : L^p[0,1] \to F$ no es estrecho.

Veamos a continuación que el operador $\widetilde{TP_B} : L^1(B) \to L^1(\mu)$ no es Dunford-Pettis. Si lo fuese, entonces la igualdad $Tr_n^B = TP_B r_n^B = \widetilde{TP_B} r_n^B$ para todo n implicaría que la sucesión $(Tr_n^B)_n$ converge a cero en norma $\|\cdot\|_1$. Supongamos que $(Tr_n^B)_n \subset M_F(\delta)$ para algún $\delta > 0$, donde $M_F(\delta)$ es un conjunto de Kadec-Pelczynski; en tal caso $\|Tr_n^B\|_1 \geq \delta^2\|Tr_n^B\|$ para todo n, y de ahí se obtiene que $\|Tr_n^B\| \to 0$ lo cual es una contradicción. Supongamos alternativamente que $(Tr_n^B)_n \not\subseteq M_F(\delta)$ para ningún $\delta > 0$; entonces existe una subsucesión $(n_j)_j$ y una sucesión disjunta $(z_j)_j$ en F tales que $|z_j| \leq |Tr_{n_j}^B|$ para todo j y cumpliendo $\|z_j - Tr_{n_j}^B\| \to 0$ (cf. Proposición 1.69). Notemos que $(Tr_{n_j}^B)_j$ es orden acotada por ser T regular y lo mismo se puede decir de $(|z_j|)_j$ por la desigualdad previa; por tanto al ser F orden continuo $(z_j)_j$ es equi-integrable y además convergente a cero en medida por ser una sucesión disjunta. Esto implica que $(z_j)_j$ es convergente a

cero (cf. Proposición 1.59) y lo mismo se puede decir de $(Tr_{n_j}^B)_j$, lo cual es de nuevo una contradicción.
Se tiene pues que el operador $\widetilde{TP_B} : L^1(B) \to L^1(\mu)$ no es Dunford-Pettis. En tal caso, por el resultado anterior de Rosenthal (Teorema 5.8), el operador $\widetilde{TP_B}$ no es l^2-singular y lo mismo se puede decir del operador $TP_B : L^p[0,1] \to L^1(\mu)$. Sin embargo eso no es posible pues el operador $T : L^p[0,1] \to F$ es l^2-singular por hipótesis. □

Observación 5.10. Notemos que la Proposición 5.9 se puede extender para operadores regulares $T : E \to F$ donde E es un espacio de Köthe orden continuo que satisface la R-condición (cf. Definición 4.13).

Hacemos notar que el recíproco en la Proposición 5.9 no es cierto:

Ejemplo 5.11. Sea $P : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ la proyección "en media" positiva definida como $Pf = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} f \right) \chi_{A_n}$, donde $(A_n)_n$ una sucesión de Borelianos disjuntos dos a dos del intervalo $[0,1]$ tales que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = [0,1]$. Entonces el operador positivo P es estrecho pero no es l^2-singular.

En efecto, es claro que el operador P preserva una copia isomorfa de l^2. Para ver que P es estrecho tomemos arbitrariamente un Boreliano $A \subset [0,1]$ de medida mayor que cero y un $\varepsilon > 0$. Consideremos para todo natural la intersección $B_n = A \cap A_n$ y elijamos para todo natural n tal que $\mu(B_n) > 0$ una partición $\{C_{n,1}, C_{n,2}\}$ de B_n con $\mu(C_{n,1}) = \mu(C_{n,2}) = \mu(B_n)/2$. Claramente $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Llamemos $C_1 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_{n,1}$ y $C_2 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_{n,2}$. Claramente C_1 y C_2 son disjuntos y $\mu(C_1) = \mu(C_2)$. Por último es inmediato que

$$P(\chi_{C_1} - \chi_{C_2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} \chi_{C_{n,1}} - \chi_{C_{n,2}} \right) \chi_{A_n} = 0,$$

y por tanto que P es estrecho.

Notemos que el mismo operador proyección en media $P : L^p[0,1] \to L^p[0,1]$ proporciona un ejemplo de que ser estrecho no implica ser SS ni tampoco DSS (ni compacto).

Corolario 5.12. *Sea F un espacio KB y un operador $T : L^1[0,1] \to F$. Si T es l^2-singular entonces T estrecho.*

Demostración. Basta notar que se tiene la igualdad $\mathcal{L}(L^1[0,1], F) = \mathcal{L}^r(L^1[0,1], F)$ (cf. Proposición 1.20 y Proposición 1.27) y usar la Proposición 5.9. □

OBSERVACIÓN 5.13. Notemos que el Corolario 5.12 difiere esencialmente del resultado de Bourgain-Rosenthal ([**8**]) que establece que todo operador $T : L^1[0,1] \to Y$ que sea l^1-singular es estrecho.

3. Mayoración de operadores estrechos

En la presente sección consideramos el problema de mayoración en la clase de los operadores estrechos (cf. Teorema 5.22). En general dicho problema tiene una respuesta negativa (cf. Ejemplo 5.16). Antes de presentar dicho ejemplo necesitamos hacer algunas observaciones previas.

Comencemos considerando el operador $S : L^1[0,1] \to l^\infty$ definido por $Sx = (h'_n(x))_n$, que es una isometría lineal, donde $(h_n)_n$ es una sucesión densa en la bola unidad de $L^1[0,1]$ y $(h'_n)_n$ es una sucesión de funcionales en $B_{L^\infty[0,1]}$ satisfaciendo $h'_n(h_n) = \|h_n\|$ para todo n (cf. Ejemplo 3.22 y [**50**, Thm. 2.1.14]).

LEMA 5.14. *Sea la isometría $S : L^1[0,1] \to l^\infty$ definida por $Sx = (h'_n x)_n$. Entonces para todo $x \in L^1[0,1]$ se tiene $S^+x = ({h'_n}^+ x)_n$, $\quad S^-x = ({h'_n}^- x)_n$, $\quad |S|x = (|h'_n| x)_n$.*

DEMOSTRACIÓN. Observemos que los operadores S^+, S^- y $|S|$ están bien definidos (cf. Proposiciones 1.16 y 1.20). Sea $x \in L^1[0,1]$, su parte positiva x^+ y consideremos el conjunto $A = \{Sy : 0 \leq y \leq x^+\}$. Notemos que para $y \in [0, x^+]$ arbitrario se tiene $Sy = (h'_n y)_n \leq ({h'_n}^+ x^+)_n$ con lo que $({h'_n}^+ x^+)_n$ es una cota superior de A. Para ver que $({h'_n}^+ x^+)_n$ es el supremo de A consideremos $(\alpha_n)_n$, otra cota superior de A. Se tiene que $({h'_n}^+ x^+)_n \leq (\alpha_n)_n$. En efecto, si $y \in [0, x^+]$, entonces $(Sy) = (h'_n y)_n \leq (\alpha_n)_n$, y por tanto $h'_n y \leq \alpha_n$ para todo n. Se deduce que $\sup\{h'_n y : 0 \leq y \leq x^+\} \leq \alpha_n$ para todo n puesto que y fue tomado arbitrariamente. Notemos por último que $\sup\{h'_n y : 0 \leq y \leq x^+\} = {h'_n}^+ x^+$ (cf. Proposición 1.3). Por tanto $S^+x^+ = \sup\{Sy : 0 \leq y \leq x^+\} = ({h'_n}^+ x^+)_n$, donde la primera igualdad es cierta de nuevo por la Proposición 1.3. Además como $S^+x^- = ({h'_n}^+ x^-)_n$, también se concluye que $S^+x = ({h'_n}^+ x)_n$ para todo $x \in L^1[0,1]$. Las otras dos igualdades se obtienen a partir de aquí inmediatamente. $\square$

El siguiente resultado es bien conocido y se deriva de la regularidad de la medida de Lebesgue; aquí $\triangle$ denota la diferencia simétrica (cf. [**13**, Prop. 1.4.1]).

Lema 5.15. *Sea* $([0,1],\Sigma,\mu)$ *el espacio de Borel con la medida de Lebesgue. Para todo Boreliano* $B\in\Sigma$ *y* $\varepsilon>0$ *existen un número finito de intervalos disjuntos de extremos racionales* $\{(p_i,q_i)\}_{i=1}^k$ *tales que* $\mu\left(B\triangle\bigcup_{i=1}^k(p_i,q_i)\right)<\varepsilon$.

Consideremos para todo natural k la familia numerable $\mathcal{F}_k=\left\{\sum_{i=1}^k\chi_{(p_i,q_i)}\right\}$ donde p_i,q_i son racionales de $[0,1]$ con $p_i<q_i$ para todo $i=1,\ldots,k$ y tales que $(p_i,q_i)\cap(p_j,q_j)=\varnothing$ si $i\neq j$. Sea $\mathcal{F}=\bigcup_{k=1}^\infty\mathcal{F}_k$, numerable. Se tiene $\|x\|_1\leq\|x\|_\infty\leq 1$ para todo $x\in\mathcal{F}$. Puesto que $(p_i,q_i)\cap(p_j,q_j)=\varnothing$ para $i\neq j$, no es ninguna restricción suponer que la familia $\mathcal{F}$ forma parte de la sucesión densa $(h_n)_n$ que interviene en la definición de la isometría S definida en el Lema 5.14.

Ejemplo 5.16. Si E es espacio de Köthe sobre $[0,1]$ con la σ-álgebra de Borel y la medida de Lebesgue, entonces existen operadores $0\leq R\leq P:E\to l^\infty$ tales que P es estrecho y R no lo es.

El operador $0\leq T:L^1[0,1]\to l^\infty$ definido por $Tf=(\int f)(1,1,\ldots,)$ es claramente estrecho. Sea $(h_n)_n$ una sucesión densa en $B_{L^1[0,1]}$ que contiene a la familia $\mathcal{F}$ y $(h'_n)_n$ la sucesión de funcionales asociados tales que $h'_nh_n=\|h_n\|$ para todo n. Si $S:L^1[0,1]\to l^\infty$ es la isometría definida por $Sf=(h'_nf)_n$, entonces el operador S^+ no es estrecho.

En efecto, de lo contrario, dado $A=[0,1]$ y $\varepsilon=1/8$ existiría una partición $\{A_1,A_2\}$ de A con $\mu(A_1)=\mu(A_2)=1/2$ y tal que $\|S^+(\chi_{A_1}-\chi_{A_2})\|_\infty<1/8$. Por el Lema 5.15, dado $1/16>0$ y A_1, existen $p_1,\ldots,p_k,q_1,\ldots,q_k$ racionales en $[0,1]$ con $p_i<q_i$ tales que $(p_i,q_i)\cap(p_j,q_j)=\varnothing$ para $i\neq j$ y satisfaciendo $\mu\left(A_1\triangle\bigcup_{i=1}^k(p_i,q_i)\right)<1/16$. Denotemos $G_i=(p_i,q_i)$ y consideremos el elemento $\sum_{i=1}^k\chi_{G_i}\in\mathcal{F}_k\subseteq B_{L^1[0,1]}$ así como su funcional asociado $\sum\limits_{i=1}^{k}\chi_{G_i} \in B_{L^\infty[0,1]}$. Se tiene

$$\begin{aligned}
\Big\langle \sum_{i=1}^{k}\chi_{G_i}\,,\,(\chi_{A_1}-\chi_{A_2})\Big\rangle &= \Big\langle \chi_{\overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} G_i}\,,\,\chi_{A_1}\Big\rangle - \Big\langle \chi_{\overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} G_i}\,,\,\chi_{A_2}\Big\rangle \\
&= \mu\Big((\overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} G_i)\cap A_1\Big) - \mu\Big((\overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} G_i)\cap A_2\Big) \\
&= \mu(A_1) - \mu\Big((\overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} G_i)^c\cap A_1\Big) - \mu\Big((\overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} G_i)\cap A_2\Big) \\
&\geq \mu(A_1) - \mu\Big((\overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} G_i)^c\cap A_1\Big) - \mu\Big((\overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} G_i)\triangle A_1\Big) \\
&\geq \mu(A_1) - 2\mu\Big((\overset{k}{\underset{i=1}{\cup}} G_i)\triangle A_1\Big) \geq \mu(A_1) - 1/8 = 3/8.
\end{aligned}$$

Llegamos así a que $\Big|\Big\langle \sum\limits_{i=1}^{k}\chi_{G_i}\,,\,(\chi_{A_1}-\chi_{A_2})\Big\rangle\Big| \geq 3/8$. Si usamos ahora el Lema 5.14 resulta que

$$\Big\|S^+(\chi_{A_1}-\chi_{A_2})\Big\|_\infty = \Big\|\Big({h'_n}^+(\chi_{A_1}-\chi_{A_2})\Big)_n\Big\|_\infty \geq \Big|\Big\langle \sum_{i=1}^{k}\chi_{G_i}\,,\,(\chi_{A_1}-\chi_{A_2})\Big\rangle\Big| \geq 3/8,$$

ya que $\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\chi_{G_i}\right)^+ = \sum\limits_{i=1}^{k}\chi_{G_i}$ es un elemento de $(h'_n)_n$. Sin embargo esto es una contradicción con la hipótesis inicial.

Notemos que de modo análogo se obtiene que los operadores S^- y $|S|$ tampoco son estrechos. Por último notemos que se probó en el Ejemplo 3.22 que se tienen las desigualdades $0 \leq S^+, S^- \leq |S| \leq T$, con lo que se concluye que el problema de dominación en la clase $\mathcal{N}(L^1[0,1], l^\infty)$ tiene respuesta negativa en general.

Considerando ahora la inclusión canónica $J : E \to L^1[0,1]$ se obtiene inmediatamente que el operador $TJ : E \to l^\infty$ es estrecho mientras que el operador S^+J no lo es por lo anterior; además se tiene la desigualdad $0 \leq S^+J \leq TJ$. Basta llamar $P = TJ$ y $R = S^+J$ para concluir el resultado.

Antes de presentar el teorema de mayoración para operadores estrechos recordemos que dado un operador positivo $T : G \to F$ entre dos retículos vectoriales G y F, con F Dedekind completo, una componente de T (cf. Definición 1.9) es cualquier operador positivo $S : G \to F$ tal que $S \wedge (T - S) = 0$ en $L^r(G, F)$. Los operadores de la forma QTP, donde P y Q son proyecciones de banda en G y F respectivamente, se llaman componentes elementales de T mientras que una componente de la forma $\bigvee_{i=1}^{n} Q_i T P_i$ se llama componente simple de T. Denotamos por $\mathcal{S}_T$ las componentes simples de T y por $\mathcal{C}_T$ las componentes de T. Usando la Proposición 5.3 se tiene el siguiente:

COROLARIO 5.17. *Sea F un retículo normado Dedekind completo y $T : E \to F$ un operador estrecho positivo. Entonces toda componente elemental de T es estrecha.*

Como la clase de los operadores estrechos no tiene estructura vectorial en general, el siguiente resultado no puede derivarse directamente del Corolario 5.17:

PROPOSICIÓN 5.18. *Sea F un retículo normado Dedekind completo y $T : E \to F$ un operador estrecho positivo. Entonces $\mathcal{S}_T \subset \mathcal{N}(E, F)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea S una componente simple de T. Por el Lema 1.10 existe un conjunto de componentes elementales de T disjuntas dos a dos, $Q_1 T P_1, \cdots, Q_n T P_n$, tales que $S = \sum_{i=1}^{n} Q_i T P_i$; más aún, las proyecciones $P_1, \ldots P_n$ se pueden tomar disjuntas dos a dos. Dado $1 \leq i \leq n$ tomemos $C_i \in \Sigma$, $\mu(C_i) > 0$, tal que $P_i(f) = f\chi_{C_i}$ para toda $f \in E$ (cf. Proposición 1.51). Además como $P_i \perp P_j$ para $i \neq j$, resulta que $\mu(C_i \cap C_j) = 0$ si $i \neq j$.
Sea $A \in \Sigma$, $\mu(A) > 0$ y $\varepsilon > 0$. Si $\mu(A \cap C_i) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ la conclusión es trivial. Supongamos pues que existe $1 \leq k \leq n$ tal que existen $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ con

$$\begin{cases} \mu(A \cap C_{i_j}) & > 0 \text{ si } j = 1, \ldots, k, \\ \mu(A \cap C_{i_j}) & = 0 \text{ si } j = k+1, \ldots, n. \end{cases}$$

Los operadores $Q_{i_1} T, \ldots, Q_{i_k} T$ son estrechos por serlo T; así para todo $j = 1, \ldots, k$ existe $\{A_1^{i_j}, A_2^{i_j}\}$ partición de $A \cap C_{i_j}$ con $\mu(A_1^{i_j}) = \mu(A_2^{i_j}) = \dfrac{\mu(A \cap C_{i_j})}{2}$, y tal que $\|Q_{i_j} T(\chi_{A_1^{i_j}} - \chi_{A_2^{i_j}})\| < \varepsilon/n$. Supongamos que $A \cap \bigcup_{j=1}^{k} C_{i_j} = A$ y definamos $A_1 = \bigcup_{j=1}^{k} A_1^{i_j}$ y $A_2 = \bigcup_{j=1}^{k} A_2^{i_j}$. Claramente

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{k} \mu(A \cap C_{i_j}) = \sum_{j=1}^{k} \mu(A_1^{i_j}) + \sum_{j=1}^{k} \mu(A_2^{i_j}) = \mu(A_1) + \mu(A_2),$$

y $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ con $\mu(A_1) = \mu(A_2) = \mu(A)/2$. Además

$$\begin{aligned}\|S(\chi_{A_1} - \chi_{A_2})\| &= \Big\|\sum_{j=1}^{k} Q_{i_j} T P_{i_j}(\chi_{A_1} - \chi_{A_2})\Big\| \leq \sum_{j=1}^{k} \|Q_{i_j} T(\chi_{A_1^{i_j}} - \chi_{A_2^{i_j}})\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{k} \varepsilon/n = k\varepsilon/n < \varepsilon.\end{aligned}$$

Para finalizar basta observar que el caso $A \cap \bigcup_{j=1}^{k} C_{i_j} \nsubseteq A$ se puede reducir al caso previo considerando dos conjuntos medibles disjuntos B_1 y B_2 de igual medida y cumpliendo $B_1 \cup B_2 = A \cap (\bigcup_{j=1}^{k} C_{i_j})^c$, y definir $A_1 = \big(\bigcup_{j=1}^{k} A_1^{i_j}\big) \cup B_1$ y $A_2 = \big(\bigcup_{j=1}^{k} A_2^{i_j}\big) \cup B_2$. Se concluye entonces que el operador S es estrecho. $\square$

Proposición 5.19. *Sean E y F espacios de Köthe sobre espacios de probabilidad (Ω, Σ, μ) y (Ω', Σ', μ') respectivamente. Si E' y F son orden continuos y $T : E \to F$ es un operador estrecho positivo entonces $\mathcal{C}_T \subset \mathcal{N}(E, F)$.*

Demostración. Sea $R : E \to F$ una componente del operador T. Notemos que el operador $T : E \to L^1(\Omega', \Sigma', \mu')$ es M-débilmente compacto por la Proposición 1.46. Equivalentemente se obtiene que la norma operador es orden continua en el intervalo $[0, T]$ (cf. Proposición 3.11). De ahí se obtiene que el operador $R : E \to L^1(\mu')$ es límite en norma de una red de componentes simples de T. En efecto, fijemos un natural n. Notemos que el espacio E es σ-Dedekind completo por ser un espacio de Köthe (cf. Observación 1.48); podemos aplicar entonces la igualdad $\mathcal{C}_T = (\mathcal{S}_T)^{\uparrow\downarrow\uparrow} \subset [0, T]$ (cf. Proposición 1.12) y obtener una red $(R_\alpha)_\alpha \subset (\mathcal{S}_T)^{\uparrow\downarrow}$ tal que $R_\alpha \uparrow R$. Así $R - R_\alpha \downarrow 0$ y por tanto $(R - R_\alpha)(x) \downarrow 0$ para todo $x \in E_+$ (cf. [**4**, Thm. 1.13]). De ahí se tiene que $0 \leq R_\alpha(x) \leq R(x) \leq T(x)$ para todo $x \in E_+$, es decir, $R_\alpha \in [0, T]$. Como la norma operador es orden continua en $[0, T]$ resulta que $\|R - R_\alpha\| \to 0$. Sea pues α_1 tal que $\|R - R_{\alpha_1}\| \leq (3n)^{-1}$. Para ese R_{α_1} existe una red $(Q_\beta)_\beta \subset (\mathcal{S}_T)^{\uparrow} \subset [0, T]$ tal que $Q_\beta \downarrow R_{\alpha_1}$. De modo similar se obtiene que $Q_\beta \in [0, T]$ para todo β y de nuevo la orden continuidad de la norma operador en $[0, T]$ implica que $\|Q_\beta - R_{\alpha_1}\| \underset{\beta}{\to} 0$. Sea β_1 tal que $\|Q_{\beta_1} - R_{\alpha_1}\| \leq (3n)^{-1}$. Para ese β_1 existe una sucesión $(P_k)_k \subset S_T$ tal que $P_k \uparrow Q_{\beta_1}$. Como antes se obtiene un k_n tal que $\|P_{k_n} - Q_{\beta_1}\| \leq (3n)^{-1}$. Ahora de la desiguadad triangular se sigue que $\|R - P_{k_n}\| \leq n^{-1}$, en otras palabras, existe una sucesión $(P_n)_n$ de componentes simples que tiende en norma a R. Las Proposiciones 5.18 y 5.4 concluyen que $R : E \to L^1(\Omega', \Sigma', \mu')$ es estrecho. Finalmente $R : E \to F$ es también estrecho por la Proposición 5.6. $\square$

PROPOSICIÓN 5.20. *Sean E y F espacios de Köthe sobre espacios de probabilidad (Ω, Σ, μ) y (Ω', Σ', μ') respectivamente. Si E' y F son orden continuous y $T : E \to F$ es un operador estrecho positivo, entonces todo operador T-escalonado positivo es estrecho.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 5.6 podemos suponer que $F = L^1(\Omega', \Sigma', \mu')$. Tomemos un operador T-escalonado positivo arbitrario $S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i R_i$, donde $\alpha_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ y $R_1, \dots, R_n$ son componentes de T disjuntas dos a dos y tales que $\sum_{i=1}^{n} R_i = T$. Notemos que el operador $T : E \to L^1(\mu')$ es M-débilmente compacto por la Proposición 1.46 y consecuentemente la norma operador es orden continua en el intervalo $[0, T]$ (cf. Proposición 3.11). Como en la prueba de la Proposición 5.19 existen n sucesiones $(P_k^i)_k$, $i = 1, \dots, n$ de componentes simples de T que tienden respectivamente en norma a cada R_i. Como las operaciones de retículo son continuas en un retículo de Banach (cf. [**50**, Prop. 1.1.6]) resulta que la sucesión $(\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i P_k^i)_k$ converge en norma a $\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i R_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i R_i = S$ cuando k tiende a infinito. Notemos por último que el supremo de un número finito de componentes simples es una componente simple (cf. [**4**, Cap. 2]) y por tanto que $\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i P_k^i$ es estrecho para cada k (cf. Proposición 5.18). Ahora el límite en norma de operadores estrechos es estrecho la Proposición 5.4. $\square$

PROPOSICIÓN 5.21. *Sea E un espacio de Köthe sobre un espacio de probabilidad (Ω, Σ, μ) tal que E' es orden continuo y sea F un retículo de Banach orden continuo. Si $T : E \to F$ es un operador estrecho positivo, entonces $[0, T] \subset \mathcal{N}(E, F)$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos lo contrario, es decir que existe $S \in [0, T]$ tal que S no es estrecho. Entonces existe $A \in \Sigma$, $\mu(A) > 0$, y $\varepsilon > 0$ tal que para toda partición $\{A_1, A_2\}$ del conjunto A, con $\mu(A_1) = \mu(A_2)$, se tiene $\|S(\chi_{A_1} - \chi_{A_2})\|_F \geq \varepsilon$.

Aserto: podemos asumir que F tiene una unidad débil.

En efecto, consideremos la σ-algebra $\Sigma_A = \{A \cap B : B \in \Sigma\}$ y una sub σ-algebra, $\widetilde{\Sigma_A}$ de Σ_A, separable. Consideremos los operadores $\widetilde{S} \leq \widetilde{T} : E(A, \widetilde{\Sigma_A}, \mu) \to F$ definidos como $\widetilde{S}x = Sx$ y $\widetilde{T}x = Tx$ respectivamente para todo $x \in E(A, \widetilde{\Sigma_A}, \mu)$. La adherencia del subespacio imagen del operador $\widetilde{S}$ es separable ya que $E(A, \widetilde{\Sigma_A}, \mu)$ es un espacio separable; por tanto la adherencia del subespacio imagen del operador $\widetilde{S}$ está incluida en algún orden ideal J con unidad débil del retículo orden continuo F (cf. Teorema 1.50). Además el ideal J está complementado por una proyección positiva $P : F \to J$ (cf. Proposición 1.27). Notemos que el operador $P\widetilde{T}$ es estrecho mientras que el operador $P\widetilde{S}$ no lo es, por tanto podemos asumir sin pérdida de generalidad que el propio F tiene unidad débil. Existe entonces (cf. Teorema 1.49) un espacio de probabilidad (Ω', Σ', μ'), un orden-ideal J, en general no cerrado, de $L^1(\Omega', \Sigma', \mu')$, una norma reticular $\|\cdot\|_J$ y una isometría de Riesz $\varphi : F \to (J, \|\cdot\|_J)$, tales que la inclusión natural $i : J \to L^1(\Omega', \Sigma', \mu')$ es continua y satisfaciendo $\|f\|_1 \leq \|f\|_J$ para todo $f \in J$. Claramente el operador φT es estrecho por serlo T (cf. Proposición 5.3); además $0 \leq \varphi S \leq \varphi T$ por ser $\varphi \geq 0$. Por último, como φ es una isometría se tiene $\|\varphi S(\chi_{A_1} - \chi_{A_2})\|_J = \|S(\chi_{A_1} - \chi_{A_2})\|_F \geq \varepsilon$, es decir φS no es estrecho.

Todo lo anterior permite reducir la demostración del teorema al caso en que el propio F sea un orden-ideal, en general no cerrado, de $L^1(\Omega', \Sigma', \mu')$ para algún espacio de probabilidad (Ω', Σ', μ'). Una vez hecha esta reducción existe, por el Teorema de Freudenthal 1.11, una sucesión $(S_n)_n \subset [0, T]$ de operadores T-escalonados positivos tales que $\|S_n - S\| \underset{n}{\to} 0$. Para concluir sólo necesitamos usar las Proposiciones 5.20 y 5.4. $\square$

Como consecuencia de los resultados precedentes llegamos al resultado principal de la sección: el teorema de mayoración para operadores estrechos.

Teorema 5.22. *Sea E un espacio de Köthe sobre un espacio de probabilidad (Ω, Σ, μ), F un retículo de Banach orden continuo y $T : E \to F$ un operador estrecho positivo. Entonces $[0, T] \subset \mathcal{N}(E, F)$.*

Demostración. Sea $S \in [0, T]$. El operador restricción $T|_{L^\infty(\mu)} : L^\infty(\mu) \to F$ es estrecho por serlo el operador T. Notemos que $L^\infty(\mu)'$ tiene norma orden continua por ser un L-espacio; por tanto el operador $S|_{L^\infty(\mu)} : L^\infty(\mu) \to F$ es estrecho por la Proposición 5.21, y lo mismo se puede decir del propio operador $S : E \to F$. $\square$

Observación 5.23. Si F no es orden continuo el Teorema 5.22 no es cierto: véase el Ejemplo 5.16.

Concluimos esta sección relacionando los operadores estrechos y los homomorfismos de Riesz desde el punto de vista de la mayoración:

COROLARIO 5.24. *Sean E un espacio de Köthe sobre un espacio de probabilidad y F un retículo de Banach orden continuo. Si $T : E \to F$ es un homomorfismo de Riesz entonces T no está mayorado por ningún operador estrecho.*

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia del Teorema 5.22 y la Proposición 5.7. □

COROLARIO 5.25. *Sea $1 \leq p < \infty$ y F un retículo de Banach orden continuo. Sea $T : L^p[0,1] \to F$ un homomorfismo de Riesz. Entonces T no está mayorado por ningún operador l^2-singular.*

DEMOSTRACIÓN. Basta usar el Corolario 5.24 y la Proposición 5.9. □

Bibliografía

1. Y. A. Abramovich, *Weakly compact sets in topological K-spaces*, Teor. Funkcii Funkional. Anal. i Prilozen **15** (1972), 27–35.
2. C.D. Aliprantis and O. Burkinshaw, *Positive compact operators on Banach lattices*, Math. Z. **174** (1980), 289–298.
3. ______, *On weakly compact operators on Banach lattices*, Proc. Amer. Math. Soc. **83** (1981), 573–578.
4. ______, *Positive operators*, Academic Press, 1985.
5. T. Andô, *On compactness of integral operators*, Indag. Math. **24** (1962), 235–239.
6. S. Astashkin, *Disjoint strict singularity of embeddings of symetric spaces*, Math. Notes **65** (1999), 3–12.
7. J. Bourgain, *New classes of $\mathcal{L}_p$-spaces*, Lecture Notes in Math., vol. 889, Springer, 1981.
8. J. Bourgain and H.P. Rosenthal, *Applications of the theory of semi-embeddings to Banach space theory*, J. Funct. Anal. **52** (1983), no. 2, 149–188.
9. A. V. Bukhvalov, *Integral representations of linear operators*, J. Soviet. Math. **8** (1978), 129–137.
10. N.L. Carothers and S.J. Dilworth, *Geometry of Lorentz Spaces via Interpolation*, Longhorn Notes. The University of Texas at Austin. Functional Analysis Seminar. (1985-1986), 107–133.
11. V. Caselles and M. González, *Compactness properties of strictly singular operators in Banach lattices*, Semesterbericht Funktionalanalysis. Tübingen, Summersemester. (1987), 175–189.
12. F. Cobos, A. Manzano, A. Martínez, and P. Matos, *On interpolation of strictly singular operators, strictly cosingular operators and related operator ideals.*, Proc. Roy. Soc. Edimburg (to appear).
13. D. Cohn, *Measure theory*, Birkhauser, Boston, 1980.
14. J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Second ed., GTM, vol. 96, Springer-Verlag, 1990.
15. B. de Pagter, *The components of a positive operator*, Indag. Math. **45** (1983), 229–241.
16. J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces*, Springer-Verlag, 1983.
17. P.G. Dodds and D.H. Fremlin, *Compact operators in Banach lattices*, Israel J. of Math. **34** (1979), 287–320.
18. P.G Dodds and A.R. Schep, *Compact integral operators on Banach function spaces*, Math. Z. **180** (1982), 249–255.
19. N. Dunford and J.T. Schwarz, *Linear Operators. Part I, General Theory*, Pure and applied Mathematics, vol. VII, Interscience, New York, 1958.
20. P. Enflo and T.W. Starbird, *Subspaces of L^1 containing L^1*, Studia Math. **65** (1979), no. 2, 203–225.
21. T. Figiel, N. Ghoussoub, and W.B. Johnson, *On the structure of nonweakly compact operators on Banach lattices*, Math. Ann. **257** (1981), 317–334.
22. T. Figiel, W.B. Johnson, and L. Tzafriri, *On Banach lattices and spaces having local unconditional structure, with applications to Lorentz function spaces*, J. Approx. Theory **13** (1975), 395–412.
23. J. Flores, *Representación de operadores orden continuos entre retículos de Banach,* Tesina de Licenciatura. Universidad Complutense. Madrid, 1996.
24. J. Flores and F. L. Hernández, *Domination by positive disjointly strictly singular operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), no. 7, 1979–1986.
25. H. Freudenthal, *Teilwise geordnete Moduln*, Proc. Acad. Sci. Amsterdam **39** (1936), 641–651.
26. A. García del Amo, *Clases de operadores singulares en retículos de Banach. Desigualdades con pesos y funciones maximales,* Tesis Doctoral. Universidad Complutense. Madrid , 1993.

27. A. García del Amo, F. L. Hernández, and C. Ruiz, *Disjointly strictly singular operators and interpolation*, Proc. Royal Soc. of Edinburgh **126A** (1996), 1011–1026.
28. A. García del Amo, F.L. Hernández, V.M. Sánchez, and E. M. Semenov, *Disjointly strictly-singular inclusions between rearrangement invariant spaces*, J. London. Math. Soc **62** (2000), no. 2, 239–252.
29. N. Ghoussoub and W.B. Johnson, *Factoring operators through Banach lattices not containing $C(0,1)$*, Math. Z. **194** (1987), 153–171.
30. N. Ghoussoub and H.P. Rosenthal, *Martingales, G_δ-embeddings and quotients of L_1*, Math. Ann. **264** (1983), no. 3, 321–332.
31. S. Goldberg, *Unbounded linear operators*, Dover, New York, 1966.
32. I Halperin and H.Ñakano, *Generalized l^p-spaces and the Schur property*, J. Math. Soc. Japan. **5** (1953), 50–58.
33. F. L. Hernández, *Disjointly Strictly-Singular Operators in Banach Lattices* , Proc. 18 Winter School on Abstract Analysis (Srni). Acta Univ. Carolinae-Mathematica et Physica **31** (1990), 35–40.
34. F. L. Hernández and B. Rodríguez-Salinas, *On l^p-complemented copies in Orlicz spaces II*, Israel J. of Math. **68** (1989), 27–55.
35. W.B. Johnson, *Operators into L_p which factor through l_p*, J. London Math. Soc. **2** (1976), no. 14, 333–339.
36. W.B Johnson, B. Maurey, G. Schechtman, and L. Tzafriri, *Symmetric structures in Banach spaces.*, Memoirs Amer. Math. Soc. **19** (1979).
37. M. Kadec and A. Pelczynski, *Basis, lacunary sequences and complemented subespaces in the spaces L_p*, Studia Math. **21** (1962), 161–176.
38. V.M. Kadets, R.V. Shvidkoy, and D. Werner, *Narrow operators and rich subspaces of Banach spaces with the Daugavet property*, Studia Math. **147** (2001), no. 3, 269–298.
39. N.J. Kalton and P. Saab, *Ideal properties of regular operators between Banach lattices*, Illinois Journal of Mathematics **29** (1985), no. 3, 382–400.
40. L.V. Kantorovic, *On the moment problem for a finite interval*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **14** (1937), 531–537 (Russian).
41. ______, *Linear operators in semi-ordered spaces*, Mat. Sb. (N.S.) **49** (1940), 209–284.
42. K. Kato, *Perturbation theory for nullity deficiency and other quantities of linear operators*, J. Analyse Math. **6** (1958), 273–322.
43. M.A Krasnoselskii, P.P Zabreiko, E.I. Pustylnik, and E.B. Sbolevskii, *Integral operators in spaces of summable functions.*, Nordhoff, Leyden, 1976.
44. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I*, Springer-Verlag, 1977.
45. ______, *Classical Banach Spaces II*, Springer-Verlag, 1979.
46. G. Ya. Lozanovskii, *On almost integral operators in KB-spaces*, Vestnik Leningrad Univ. **7** (1966), 35–44.
47. G. Ya. Lozanovskii and Mekler A. A., *Completely linear functionals and reflexivity in normed linear lattices*, Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Mathematika **66** (1967), 47–53 (Russian).
48. W.A.J Luxemburg and A.C Zaanen, *Compactness of integral operators in Banach function spaces*, Math. Ann. **149** (1963), 150–180.
49. W.A.J. Luxemburg and A.C. Zaanen, *Riesz Spaces*, vol. I, North-Holland, Amsterdam, London, 1971.
50. P. Meyer-Nieberg, *Banach Lattices*, Springer-Verlag, 1991.
51. R.D. Neidinger, *Properties of Tauberian operators on Banach spaces*, Ph.D. thesis, The University of Texas at Austin, 1984.
52. ______, *Factoring operators through hereditarily -l^p spaces*, “Banach spaces”, Lecture Notes in Mathematics, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1166, Springer-Verlag, 1985, pp. 116–128.
53. ______, *Concepts in the real interpolation of Banach spaces*, ”Functional Analysis”. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1332, Springer-Verlag, 1986-87, pp. 33–42.
54. C.P. Niculescu, *Weak compactness in Banach lattices*, J. Oper. Theory **6** (1981), 217–231.
55. S.Y. Novikov, *Boundary spaces for the inclusion map between r.i.spaces*, Collect. Math. **44** (1993), 211–215.

56. ______, *The differences of inclusion map operators between rearrangement invariant spaces on finite and σ-finite measure spaces*, Collect. Math. **48** (1997), 725–732.
57. A. Pelczynski, *On Strictly Singular and Strictly Cosingular Operators*, Bull. Acad.Pol.Sci. **XIII** (1965), 31–41.
58. A. Pietsch, *Operator ideals*, North-Holland, 1980.
59. L. D. Pitt, *A compactness condition for linear operators on function spaces*, J. Oper. Theory **1** (1979), 49–54.
60. A.M Plichko and M.M. Popov, *Symetric function spaces on atomless probability spaces*, Dissertationes Mathematicae **CCCVI** (1990), 1–87.
61. D. Przeworska-Rolewicz and S. Rolewicz, *Equations in linear spaces*, vol. 47, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa (Poland), 1968.
62. H.P. Rosenthal, *Convolution by a biased coin*, The Altgeld Book 1975/76. Univ. of Illinois, Functional Analysis Seminar.
63. ______, *Some remarks concerning sign-embeddings*, Sémin. d'Analyse Fonct., Univ. Paris VII, 1981-1982.
64. ______, *Embeddings of L^1 in L^1*, Contemp. Math. **26** (1984), 335–349.
65. H.H. Schaefer, *Banach lattices and positive operators*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1974.
66. A.R Schep, *Kernel operators*, Ph.D. thesis, University Leiden, Netherlands, 1977.
67. A.R. Sourour, *Pseudo-integral operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **21** (1979), 339–363.
68. ______, *Characterization and order properties of pseudo-integral operators*, Pacific J. of Mathematics **99** (1982), no. 1, 145–148.
69. M. Talagrand, *La propriété de Dunford-Pettis dans $C(K,E)$ et $L^1(E)$*, Israel J. of Math. **44** (1983), no. 4, 317–321.
70. L. Weis, *On perturbation of Fredholm operators in $L_p(\mu)$-spaces*, Proc. of the Amer. Math. Soc. **67** (1977), no. 2, 287–292.
71. ______, *On the representation of positive operators by random measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **285** (1984), no. 2, 535–563.
72. ______, *Banach lattices with the subsequence splitting property*, Proc. Amer. Math. Soc. **105** (1989), 87–96.
73. R.J. Whitley, *Strictly singular operators and their conjugates*, Trans. Amer. Math. Soc. **113** (1964), 252–261.
74. A. W. Wickstead, *Extremal structure of cones of operators*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **32** (1981), 239–253.
75. ______, *Converses for the Dodds-Fremlin and Kalton-Saab theorems*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **120** (1996), 175–179.
76. W. Wnuk, *$l^{(p_n)}$ spaces with the Dunford-Pettis property*, Comm. Math. Prac. Math. **30** (1991), 483–489.
77. ______, *Banach lattices with properties of the Schur type- a survey*, Conf. del Sem. di Matematica dell' Università di Bari (1993), no. 249, 1–24.
78. ______, *Banach Lattices with Order Continuous Norms*, Advanced topics in mathematics, Polish Scientific Publishers PWN, Warszawa, 1999.
79. P. Wojtaszczyk, *Banach spaces for analysts.*, Cambridge University Press, Cambridge., 1991.
80. A. C. Zaanen, *Riesz Spaces II*, North-Holland, Amsterdam, 1983.