

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Astronomía y Geodesia



**CONTROL ORBITAL DE SATÉLITES
GEOESTACIONARIOS**

**MEMORIA PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO DE
DOCTOR POR**

María Esther Patiño Rodríguez

Bajo la dirección de la Doctora:

María del Pilar Romero Pérez

Madrid, 2001

ISBN: 84-669-1803-5

Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Ciencias Matemáticas
Sección Departamental de Astronomía y Geodesia



Control Orbital
de
Satélites Geoestacionarios

Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por

María Esther Patiño Rodríguez

Directora: **Pilar Romero**

Madrid, 2001

A Rosa y Tomás, mis padres.

Agradecimientos

Son numerosas las personas que, directa o indirectamente, han contribuido a la realización de esta tesis. Quisiera mencionar a las siguientes:

En primer lugar, a la Dra. Dña. Pilar Romero, mi directora de tesis, a quien deseo expresar mi más profundo agradecimiento por haberme ofrecido un tema tan interesante, por todo el tiempo que ha dedicado orientándome y ayudándome, por sus consejos, todo lo que he aprendido de ella, y por la paciencia que ha mostrado durante estos años de trabajo. Sin su dirección esta memoria no hubiese sido posible.

Al Dr. D. Jose María Gambí, a quien quiero también manifestar mi gratitud por su valiosa ayuda y colaboración en algunos problemas surgidos durante la realización de este trabajo.

Quiero dar las gracias también a todos los miembros de la Sección Departamental de Astronomía y Geodesia, donde he trabajado durante cuatro años y comencé mi labor investigadora. En especial a la Dra. Dña. Marta Folgueira, por su apoyo y ánimo constantes, que me han servido de estímulo a lo largo de estos años.

Asimismo, quiero agradecer a mis actuales compañeros del Departamento de Matemática Aplicada de la E.T.S. de Arquitectura, en especial a los que también fueron mis compañeros de carrera algunos años, la Dra. Dña. Lourdes Tello y el Dr. D. J. Francisco Padial por la gran ayuda que me han prestado en numerosas ocasiones y por el entusiasmo que siempre me han demostrado.

También agradezco a la Estación de Control del satélite HISPASAT por habernos facilitado datos tan útiles en la validación de algunos de los resultados obtenidos.

Y, por último, deseo dar las gracias a mis padres, a mi hermana Marta y a Javier. Ellos me han ayudado con su constante aliento, cariño y comprensión y han compartido conmigo los buenos momentos y los sinsabores de este trabajo.

Índice General

Introducción.	i
1 Perturbaciones de la órbita geostacionaria.	1
1.1 Características generales.	2
1.2 Ecuaciones de Lagrange en elementos orbitales equinocciales.	3
1.3 Efecto del campo gravitatorio terrestre.	7
1.4 Efecto de la fuerza lunisolar.	16
1.5 Efecto de la presión de radiación solar.	27
1.6 Conclusiones y resultados.	35
2 Maniobras de mantenimiento en estación.	37
2.1 Mantenimiento en estación.	37
2.2 Maniobras impulsivas.	40
2.2.1 Coordenadas del satélite en función de los elementos orbitales equinocciales.	40
2.2.2 Maniobras impulsivas en términos de los elementos orbitales equinocciales.	44
2.3 Efecto de las maniobras impulsivas sobre los elementos orbitales equinocciales.	45
2.3.1 Efecto de un impulso normal sobre el vector inclinación.	46
2.3.2 Efecto de un impulso tangencial sobre la excentricidad, semieje, deriva y longitud verdadera.	47

2.4	Maniobras norte-sur.	50
2.4.1	Cálculo del impulso normal.	51
2.4.2	Determinación del instante de la maniobra.	53
2.5	Maniobras este-oeste.	54
2.5.1	Cálculo de los impulsos tangenciales.	58
2.5.2	Determinación del instante de las maniobras.	62
2.6	Conclusiones y resultados.	62
3	Integración numérica de las ecuaciones del movimiento.	63
3.1	Modelos de fuerzas.	64
3.1.1	Fuerza gravitatoria terrestre.	65
3.1.2	Fuerza lunisolar.	72
3.1.3	Presión de radiación solar.	81
3.2	Integración numérica de las ecuaciones del movimiento.	82
3.2.1	Selección del intervalo de integración.	83
3.2.2	Inicio de la tabla.	84
3.2.3	Establecimiento de las condiciones iniciales.	85
3.3	Interpolación para los tiempos de las maniobras.	88
3.4	Obtención de parámetros oscultrices.	89
3.5	Obtención de parámetros centrados.	95
3.6	Validación de resultados.	98
3.7	Conclusiones y resultados.	102
4	Optimización de maniobras.	103
4.1	Descripción general del método de optimización.	104
4.2	Convergencia del método.	106
4.3	Optimización de las maniobras norte-sur.	107

4.4	Optimización de las maniobras este-oeste.	113
4.4.1	Problema 1: $\lambda_{\mathcal{T}}(t_b + T) = l_s - \delta l$	113
4.4.2	Problema 2: $\max_{t_b \leq t \leq t_b + T} \lambda(t) - l_s = l_s - \min_{t_b \leq t \leq t_b + T} \lambda(t)$	121
4.5	Conclusiones y resultados.	128
5	Simulación numérica. Resultados.	129
5.1	Datos para la simulación numérica.	130
5.2	Mantenimiento en estación norte-sur.	130
5.2.1	Proceso iterativo. Elementos osculatrices.	130
5.2.2	Modelo lineal. Elementos centrados.	146
5.2.3	Conclusiones.	148
5.3	Mantenimiento en estación este-oeste.	149
5.3.1	Problema 1: $\lambda_{\mathcal{T}}(t_b + T) = l_s - \delta l$	149
5.3.2	Problema 2: $\max_{t_b \leq t \leq t_b + T} \lambda(t) - l_s = l_s - \min_{t_b \leq t \leq t_b + T} \lambda(t)$	162
5.3.3	Conclusiones.	167
5.4	Comparación entre el modelo lineal y el proceso iterativo. Resultados numéricos.	167
5.5	Mantenimiento en estación para el año 2000.	168
5.6	Conclusiones y resultados.	175
	Conclusiones Finales.	177
	Referencias.	183

Índice de Figuras

1.2.1 Elementos orbitales clásicos y equinocciales.	5
1.3.1 Distribución de los puntos de equilibrio a lo largo del ecuador.	12
1.3.2 Diagrama de fases longitud (en radianes) - deriva.	12
1.3.3 Magnitud de la componente tangencial de la fuerza gravitatoria terrestre en grados/día ²	13
1.3.4 Trayectoria de la longitud en función del tiempo.	14
1.3.5 Evolución de la longitud media durante un mes.	16
1.4.1 Tierra-Luna-satélite (plano vertical).	17
1.4.2 Evolución del vector inclinación durante el año 2000.	26
1.4.3 Trayectoria aparente diaria de un satélite geosíncrono ($a_s, e = 0, i \neq 0$).	27
1.5.1 Evolución del vector excentricidad durante el año 2000.	34
2.1.1 Ventana espacial.	38
2.1.2 Evolución natural de la posición de un satélite durante un mes a partir de la posición nominal $\lambda_s = 30^\circ$ Oeste, $a = a_s, i = 0^\circ, e = 0$	39
2.1.3 Sistema de referencia local.	40
2.2.1 Evolución de la longitud verdadera.	42
2.2.2 Evolución del radio vector.	43
2.2.3 Evolución de la latitud.	44
2.3.1 Efecto de una maniobra normal sobre el vector inclinación.	47
2.3.2 Efecto de una maniobra tangencial sobre el vector excentricidad.	48

2.3.3 Efecto de una maniobra tangencial. Plano longitud media - deriva.	50
2.3.4 Efecto de una maniobra tangencial. Plano longitud media - semieje.	50
2.4.1 Evolución del vector inclinación y maniobra para un círculo de control de radio $i_c = 0.^\circ 05$	51
2.4.2 Evolución del vector inclinación durante 10 años.	53
2.5.1 Secuencia de maniobras tangenciales ΔV_O , ΔV_E para $\ddot{l} < 0$	56
2.5.2 Efecto de dos maniobras tangenciales. Plano longitud media - deriva.	57
2.5.3 Efecto de dos maniobras tangenciales. Plano longitud media - semieje.	57
2.5.4 Efecto de dos maniobras tangenciales de distinto signo y separadas medio día sidéreo sobre el vector excentricidad.	57
3.1.1 Influencia de diferentes armónicos en la fuerza gravitatoria terrestre.	69
3.1.2 Comparación de los modelos de geopotencial GEM-T1 y GEM-T2.	71
3.1.3 Planos fundamentales y ángulos.	75
3.2.1 Sistema de referencia ecuatorial y sistemas orbitales.	86
3.4.1 Vectores radial y transversal.	90
3.4.2 Sistemas $R(O;XYZ)$, $\{\vec{N}, \vec{M}, \vec{W}\}$ y $\{\vec{u}, \vec{v}\}$	92
3.5.1 Elementos orbitales oscultrices y centrados.	96
3.5.2 Elementos orbitales oscultrices y centrados.	97
3.6.1 Propagación numérica de la órbita.	99
3.6.2 Elementos orbitales medios y centrados.	100
3.6.3 Elementos orbitales medios y centrados.	101
4.1.1 Obtención de la sucesión (x_n)	106
4.3.1 Proceso iterativo para el cálculo de maniobras norte-sur.	112
4.4.1 Proceso iterativo para el cálculo de maniobras este-oeste.	127
5.2.1 Evolución del vector inclinación según la época del año.	132

5.2.2	Influencia del vector inclinación inicial en el mantenimiento en estación. . . .	133
5.2.3	Mantenimiento en estación norte-sur durante el año 2000 para $\Delta i = 0^\circ.03$ y $T = 14$ días.	134
5.2.4	Evolución del vector inclinación según la época del año.	136
5.2.5	Mantenimiento en estación norte-sur durante el año 2000 para $\Delta i = 0^\circ.06$ y $T = 28$ días.	137
5.2.6	Mantenimiento en estación para distintos valores de Δi	138
5.2.7	Mantenimiento en estación norte-sur durante el año 2000 para Δi variable y $T = 14$ días.	139
5.2.8	Mantenimiento en estación norte-sur durante el año 2000.	141
5.2.9	Mantenimiento en estación norte-sur durante el año 2000 para Δi variable y $T = 28$ días.	142
5.2.10	Mantenimiento en estación norte-sur durante el año 2000 para Δi variable y $T = 28$ días.	144
5.2.11	Mantenimiento en estación norte-sur durante el año 2000. Modelo lineal. . .	146
5.3.1	Evolución anual del vector excentricidad centrado y círculo de control. . . .	150
5.3.2	Mantenimiento en estación este-oeste para $e_c = 1.6 \times 10^{-4}$ radianes. Problema 1-a.	152
5.3.3	Evolución de los vectores excentricidad medio y centrado durante el año 2000.	154
5.3.4	Mantenimiento del vector excentricidad osculatriz.	155
5.3.5	Mantenimiento del vector excentricidad osculatriz y evolución anual.	155
5.3.6	Mantenimiento en estación este-oeste para $e_c = 1.6 \times 10^{-4}$ radianes. Problema 1-b.	157
5.3.7	Mantenimiento en estación este-oeste para $e_c = 2.3 \times 10^{-4}$ radianes. Problema 1-a.	159
5.3.8	Mantenimiento en estación este-oeste para $e_c = 2 \times 10^{-4}$ radianes. Problema 1-b.	161
5.3.9	Mantenimiento en estación este-oeste para $e_c = 1.6 \times 10^{-4}$ radianes. Pro- blema 2.	163

5.3.10 Mantenimiento en estación este-oeste para $e_c = 3.5 \times 10^{-4}$ radianes. Problema 2.	165
5.5.1 Mantenimiento en estación de la posición del satélite durante el año 2000.	169
5.5.2 Mantenimiento de la longitud verdadera durante el año 2000.	170
5.5.3 Mantenimiento del vector excentricidad centrado durante el año 2000.	171
5.5.4 Mantenimiento del vector inclinación osculatriz durante el año 2000.	172

Índice de Tablas

1.3.1 Valores de la aceleración producida por el campo gravitatorio terrestre para diferentes longitudes.	14
1.3.2 Tiempo máximo de permanencia en función de la longitud de estacionamiento para $\delta l = 0^\circ.05$	15
2.4.1 Dirección secular del vector inclinación.	53
2.4.2 Tiempo Universal aproximado de las maniobras norte y sur para $l_s = 30^\circ$ Oeste y $\Omega_{sec} = 90^\circ$	54
3.1.1 Valores de la fuerza gravitatoria terrestre para $n = 4$ y $n = 5$	69
3.1.2 Valores de la fuerza gravitatoria terrestre para los modelos GEM-T1 y GEM-T2.	70
3.2.1 Tabla de integración numérica.	83
5.2.1 Resultado de una iteración.	131
5.2.2 Tiempos y magnitudes de las maniobras sur para $\Delta i = 0^\circ.03$ y $T = 14$ días.	135
5.2.3 Tiempos y magnitudes de las maniobras sur para Δi variable y $T = 14$ días.	140
5.2.4 Tiempos y magnitudes de las maniobras sur para un Δi variable y $T = 28$ días.	143
5.2.5 Tiempos y magnitudes de las maniobras sur para un Δi variable y $T = 28$ días.	144
5.2.6 Incrementos totales de velocidad y estrategias.	145
5.2.7 Tiempos y magnitudes de las maniobras sur para $\Delta i = 0^\circ.03$, $T = 14$ días. Modelo lineal.	147
5.3.1 Resultado de una iteración. Problema 1.	150

5.3.2 Tiempos y magnitudes de las maniobras este-oeste para $e_c = 1.6 \times 10^{-4}$ radianes. Problema 1-a.	153
5.3.3 Tiempos y magnitudes de las maniobras este-oeste para $e_c = 1.6 \times 10^{-4}$ radianes. Problema 1-b.	158
5.3.4 Tiempos y magnitudes de las maniobras este-oeste para $e_c = 2.3 \times 10^{-4}$ radianes. Problema 1-a.	160
5.3.5 Resultado de una iteración. Problema 2.	162
5.3.6 Tiempos y magnitudes de las maniobras este-oeste para $e_c = 1.6 \times 10^{-4}$ radianes. Problema 2	164
5.3.7 Tiempos y magnitudes de las maniobras este-oeste para $e_c = 3.5 \times 10^{-4}$ radianes. Problema 2.	166
5.5.1 Tiempos y magnitudes de las maniobras de mantenimiento en estación durante el año 2000.	173
5.5.2 Tiempos y magnitudes de las maniobras de mantenimiento en estación durante el año 2000.	174

Introducción.

Idealmente, un satélite geoestacionario es aquél cuya posición relativa respecto de la Tierra permanece fija. Para que esto ocurra, su órbita debe cumplir unas determinadas características: tener un periodo orbital igual al de la rotación terrestre, así como ser ecuatorial y circular. Además, en la elaboración de este concepto se supone que la Tierra es esférica y homogénea; que no existen fuerzas externas, como la atracción lunisolar o la presión de radiación solar y que, por tanto, sólo actúa la fuerza gravitatoria central terrestre. En la realidad, por tanto, un satélite geoestacionario no está ocupando la misma posición relativa respecto de la Tierra debido, tanto a las irregularidades que presenta el campo gravitatorio terrestre, como a las fuerzas adicionales mencionadas que actúan sobre él, ya que, como se sabe, estos factores modifican la forma de la órbita y la orientación del plano orbital.

La tarea de que un satélite se mantenga lo más próximo posible al ideal de estacionariedad es lo que, técnicamente, se llama *mantenimiento en estación*.

Cada misión tiene, pues, asignada una región espacial dentro de la cual el satélite puede moverse libremente. Esta región, llamada *ventana espacial*, es un rectángulo en el que uno de los lados corresponde al margen de variación permitido para la longitud, *ventana en longitud*, y el otro lado tiene como amplitud el margen permitido para la variación de la latitud, *ventana en latitud*.

Desde que en 1963 se situase el primer satélite en órbita geoestacionaria (el SYNCOM II) el número de este tipo de satélites se ha incrementado de modo considerable debido a las múltiples aplicaciones que tienen. Esto hizo necesario que, la International Telecommunications Union (ITU), como agencia especializada de las Naciones Unidas, se encargara, entre otras funciones, de distribuir la órbita geoestacionaria entre los diferentes países. Como ejemplo, cabe citar que España tiene asignada para el satélite de telecomunicaciones HISPASAT una ventana en longitud de amplitud $0^{\circ}.14$ en la posición nominal 30° Oeste. La amplitud de la ventana en latitud no está regulada y depende únicamente de los requerimientos de cada misión.

Como hemos mencionado, debido a la acción de las fuerzas antes citadas, un satélite pretendidamente geostacionario abandona en poco tiempo la ventana espacial asignada y deja, por tanto, de ser operativo. Entonces, para que permanezca dentro de los márgenes establecidos, es necesario corregir su posición mediante la aplicación de maniobras periódicas para producir un cambio en la velocidad del satélite y compensar, así, las perturbaciones naturales. Esta es una parte de la naturaleza del mantenimiento en estación antes citado.

Desde este punto de vista se puede decir que existen varios tipos de maniobras, y que las más utilizadas son las denominadas maniobras norte-sur y las este-oeste. Una maniobra norte-sur emplea impulsos perpendiculares al plano orbital en el que está el satélite en el momento de cada uno de esos impulsos, y una maniobra este-oeste se realiza con impulsos tangenciales a la órbita para producir cambios en su forma, tamaño y orientación.

Las técnicas estándar para el mantenimiento en estación de un satélite geostacionario se han sustentado tradicionalmente en métodos analíticos para la obtención de elementos orbitales medios, es decir, sólo afectados de las perturbaciones de largo periodo, y en métodos de linealización para el cálculo de las maniobras y sus instantes de realización.

Actualmente están en uso distintos programas para el control de este tipo de satélites basados en las técnicas mencionadas. Uno de los más utilizados es el *Portable ESOC Package for Synchronous Orbit Control (PEPSOC)*, desarrollado por el Centro Europeo de Operaciones Espaciales ESOC-ESA. La agencia espacial Matra-Marconi-Space ha elaborado el programa de mantenimiento en estación para el satélite HISPASAT.

Por otro lado, el mantenimiento en estación requiere tener en cuenta también que la vida útil de un satélite está limitada principalmente por la cantidad de combustible que lleva a bordo. Este hecho genera la necesidad de determinar con gran precisión la magnitud de los impulsos necesarios para su mantenimiento en estación y, de esta forma, aumentar su tiempo de funcionamiento. Esta es la otra parte del mantenimiento en estación, un problema que todavía no está tratado satisfactoriamente. De hecho, el objetivo de este trabajo está en la optimización del cálculo de maniobras para conseguir minimizar el consumo de combustible y aumentar, así, la vida útil del satélite y, para abordar este problema, hemos comenzado determinando con gran precisión su posición. Con relación a este citado aspecto, es necesario mencionar que, para poder disponer de coordenadas que describan con suficiente precisión su comportamiento real, hemos tenido que integrar numéricamente las ecuaciones que describen el movimiento perturbado, considerando en cada instante la acción conjunta de todas las fuerzas perturbadoras, de manera que su integración proporciona elementos osculatrices.

También, y con el mismo objetivo de optimizar el cálculo de la magnitud de los impulsos y su instante de realización, hemos desarrollado un proceso iterativo que combina

el modelo lineal estándar con la integración numérica precisa de las ecuaciones diferenciales del movimiento del satélite, incluyendo en ellas las maniobras de mantenimiento en estación. De esta forma, y con este método, basado en técnicas de control “feed-back”, demostramos que es posible conocer en cada iteración el comportamiento del sistema, y podemos terminar el proceso cuando se alcanzan unos criterios objetivo impuestos por la misión.

Estas son, esencialmente, las dos aportaciones básicas sobre las que se sustentan los resultados contenidos en esta memoria que, para su más clara exposición, hemos estructurado en cinco capítulos que a su vez constan de varias secciones, en la forma siguiente:

El capítulo 1 está dedicado al análisis de las perturbaciones que tiene la órbita geoestacionaria. Los resultados de este capítulo son conocidos, pero no se hallan estructurados globalmente en ningún trabajo o manual disponible hasta la fecha. Nuestra estructuración es la siguiente:

En primer lugar planteamos las ecuaciones de Lagrange que dan la variación de los elementos orbitales clásicos en función de las derivadas de la función perturbadora. A continuación, comprobamos que para el estudio del movimiento de un satélite geoestacionario no resulta adecuada la utilización de estos elementos orbitales, i.e., el semieje, la excentricidad, la inclinación, la ascension recta del nodo ascendente, el argumento del perigeo y el instante de paso por el perigeo (ya que los valores tan próximos a cero que toman la excentricidad y la inclinación producen singularidades numéricas que hacen necesario disponer de un conjunto de parámetros que eviten este problema) y, utilizamos, a continuación, los *elementos orbitales equinocciales*: el semieje, la longitud media, el vector excentricidad y el vector inclinación, que además de evitar las singularidades numéricas permitirán establecer las condiciones de control de forma sencilla.

A continuación, se analiza por separado el efecto que tienen las fuerzas perturbadoras sobre estos elementos y vemos que la fuerza perturbadora gravitatoria terrestre modifica el semieje y la longitud media. El estudio cualitativo de las ecuaciones de Lagrange correspondientes (linealizadas respecto de dos pequeños parámetros y escritas en términos de la longitud media y su deriva) da como resultado el esperado de la existencia de dos puntos de equilibrio estables y dos inestables, situados sobre el ecuador en las longitudes geográficas $75^{\circ}.08$ E, $104^{\circ}.92$ O y $165^{\circ}.08$ E, $14^{\circ}.92$ O, respectivamente. En estos cuatro puntos la componente tangencial de la fuerza perturbadora es nula, no siendo así en los demás, donde vemos que su valor varía, ocasionando que la longitud media describa una parábola en función del tiempo. Analizamos, entonces, como consecuencia de esto, cómo el tiempo de permanencia del satélite en su región asignada depende de la longitud de estacionamiento y hemos evaluado, también, este tiempo obteniendo que puede estar en esta región desde varios días hasta un año.

Seguidamente, obtenemos la expresión analítica de la función perturbadora lunisolar a partir del potencial perturbador del problema de los tres cuerpos (astro perturbador-Tierra-satélite). Las ecuaciones de Lagrange que resultan de sustituir esta función y simplificarla muestran cómo esta fuerza actúa principalmente sobre el vector inclinación de manera que la integración dará como posterior resultado que la evolución de este vector se compone de un término secular con un periodo de 18.61 años cuya dirección es distinta para cada año y, también, de términos periódicos entre los que destacan uno que tiene un periodo de 6 meses y una amplitud de $0^\circ.02331$ y, otro, con un periodo de 13.66 días y una amplitud de $0^\circ.00457$.

Finalmente, comprobamos que la fuerza debida a la presión de radiación solar modifica fundamentalmente el vector excentricidad y que la integración de las ecuaciones de Lagrange simplificadas sin términos de corto periodo muestran que este vector describe un círculo anual cuyo radio depende, entre otros parámetros, de las características físicas del satélite: el coeficiente de reflectividad, el área efectiva y la masa.

En el segundo capítulo se presentan, en primer lugar, estrategias para el mantenimiento en estación que utilizan modelos lineales para el cálculo de las maniobras. En una primera parte se obtienen las expresiones para las maniobras impulsivas y el efecto que éstas producen sobre los elementos orbitales. A continuación, mostramos cómo una maniobra normal modifica el vector inclinación, una tangencial afecta a la deriva de la longitud media y al vector excentricidad (y, como consecuencia, la longitud media y el semieje), cómo una radial actúa sobre el vector excentricidad y, finalmente, cómo, con la aplicación de las dos primeras maniobras, se tienen datos suficientes para controlar la posición de un satélite.

En la segunda parte de este capítulo estudiamos los dos tipos de maniobras más comunes en el mantenimiento en estación: las maniobras norte-sur y las este-oeste. Las maniobras norte-sur, efectuadas con impulsos normales, corrigen las perturbaciones ocasionadas por la acción de la fuerza lunisolar sobre el vector inclinación. Con su aplicación se pretende mantener este vector evolucionando dentro de un círculo en el plano (i_x, i_y) de centro $(0, 0)$ y radio el valor del control para la inclinación, i_c . Las maniobras este-oeste, realizadas mediante impulsos tangenciales, compensan la acción que ejercen, tanto la fuerza gravitatoria terrestre, como la fuerza debida a la presión de radiación solar sobre la longitud y el vector excentricidad. Con ellas se quiere conseguir que la longitud media se mantenga dentro de su ventana en longitud y que el vector excentricidad permanezca dentro de su región de tolerancia, siendo ésta un círculo en el plano (e_x, e_y) , centrado en $(0, 0)$ y de radio el control para la excentricidad, e_c . En particular, puesto que en esta memoria se estudia el mantenimiento en estación de un satélite con grandes paneles solares, por lo que la acción de la presión de radiación solar es dominante frente a la de la fuerza perturbadora gravitatoria terrestre, encontramos que, para controlar la excentrici-

dad, se necesita un impulso mayor que el que se precisa para mantener la longitud. Este es un problema que solucionamos aplicando dos maniobras tangenciales, separadas medio día sidéreo, cuya combinación permite corregir simultáneamente y de manera adecuada ambos elementos. También obtenemos las expresiones del modelo lineal simplificado que proporciona, tanto la magnitud de los impulsos, como el instante de su realización, en función de la variación que experimentan los elementos orbitales.

Asimismo, estudiamos en este capítulo estrategias óptimas para el mantenimiento en estación. La estrategia *dirección secular*, aplicada para el mantenimiento en estación norte-sur, que corrige el vector inclinación en la misma dirección que la que lleva la componente secular de la evolución del vector \vec{i} . La estrategia *perigeo hacia el Sol*, que se aplica en el mantenimiento en estación este-oeste para conseguir que el vector excentricidad, bajo la acción combinada de la presión de radiación solar y de los impulsos tangenciales, describa un círculo de menor radio que el valor del control excentricidad, apuntando en cada momento hacia el Sol. Y, finalmente, con esta estrategia se determina también el instante de la realización del impulso: una maniobra oeste se efectuará aproximadamente a las 18^h de tiempo solar local en el satélite mientras que, si se trata de una este, se hará, también de manera aproximada, a las 6^h.

Por tanto, en estos dos capítulos que anteceden al trabajo de investigación que constituye la presente tesis se estudia exhaustivamente el problema del mantenimiento en estación de un satélite geostacionario y se establecen las condiciones básicas para abordar dicho problema y optimizar su solución.

Ahora bien, el control de la posición del satélite se puede plantear como el estudio de la evolución de un sistema dinámico no lineal de la forma $\ddot{\vec{x}} = \mathbf{F}(\vec{x}, t)$, en el que el estado del sistema viene dado por los elementos orbitales y donde la función \mathbf{F} representa la acción conjunta de todas las fuerzas que actúan sobre el satélite y del que se conocen unas condiciones iniciales en una época t_0 y un conjunto de criterios objetivo impuestos sobre los elementos orbitales que se deben verificar en una época posterior. El tercer capítulo de este trabajo presenta el método seguido para la integración numérica de estas ecuaciones.

Como se indicó anteriormente en lo referente al capítulo 1, para poder integrar las ecuaciones de Lagrange se ha considerado que la longitud y el semieje están afectados sólo por la fuerza perturbadora gravitatoria terrestre, que el vector excentricidad lo está por la presión de radiación solar y, finalmente, que el vector inclinación lo está por la fuerza lunisolar. Sin embargo, la realidad es que las tres fuerzas perturbadoras actúan simultáneamente sobre todos los parámetros orbitales, dando lugar a variaciones de corto periodo que sólo es posible evaluar con una propagación numérica de la órbita. Procediendo así, obtenemos con gran precisión los elementos orbitales que se utilizarán el

cálculo de las maniobras del mantenimiento en estación en el capítulo siguiente.

Comenzamos, pues, el tercer capítulo con la presentación de los modelos de fuerzas utilizados. Para la evaluación de la función perturbadora gravitatoria terrestre hemos utilizado su desarrollo en armónicos esféricos hasta el orden y grado cuarto con el modelo de geopotencial GEM-T2. Esto ha venido motivado por el resultado obtenido al evaluar la magnitud de la fuerza para distintos órdenes y grados, y para los modelos de geopotencial GEM-T1 y GEM-T2.

Hemos calculado la fuerza lunisolar a partir de la función perturbadora del problema de los tres cuerpos expresada en términos de las coordenadas cartesianas geocéntricas de la Luna y del Sol en un sistema de referencia ecuatorial geocéntrico referido al equinoccio medio en t_0 , $R(O; XYZ)$. Estas coordenadas se han determinado con teorías orbitales que incluyen perturbaciones de segundo orden y se han comparado con las efemérides LE2000 proporcionadas por el Jet Propulsion Laboratory, obteniendo diferencias en las componentes de la fuerza menores que $10^{-9} m/s^2$.

La fuerza debida a la presión de radiación solar se ha evaluado a partir de su expresión en función de las coordenadas cartesianas del Sol en $R(O; XYZ)$. En este caso, éstas se han determinado utilizando la teoría analítica dada por Stumpff, permitiendo compararlas con las obtenidas anteriormente. La diferencia entre ambas ha resultado ser del orden de 10 metros que, para la precisión que buscamos, resulta despreciable.

A continuación describimos el método seguido para la integración numérica de las ecuaciones que describen el movimiento del satélite. La tabla de integración se inicia con el proceso de iniciación de Herrick, para el que se calculan previamente los valores necesarios en este método de $\ddot{\vec{x}}$ con el método de Runge-Kutta de cuarto orden, ya que este último método únicamente necesita la posición y la velocidad del satélite en un instante. Como nuestras condiciones iniciales son los elementos orbitales en un instante dado t_0 , para poder obtener la posición y velocidad iniciales hemos desarrollado un cálculo de efemérides específico que evita singularidades numéricas. Una vez iniciada la tabla de integración realizamos la propia integración numérica aplicando el método de Gauss-Jackson, o Σ^2 . Este método, de tipo predictor-corrector, no necesita en este caso la fase correctora si se elige de manera óptima el paso de integración. Para determinar este paso se ha tomado como referencia la ecuación que describe el movimiento armónico simple, $\ddot{\vec{x}} = -\vec{x}$ por su similitud con las ecuaciones que describen el movimiento no perturbado del satélite y porque, al tener una solución analítica conocida, nos permite evaluar la precisión con la que se realiza la integración. El intervalo de integración que hemos determinado ha sido de $22^m 51^s.3$. Con la integración numérica de las ecuaciones de movimiento obtenemos, entonces, posiciones y velocidades del satélite referidas al sistema $R(O; XYZ)$.

Ahora bien, estas posiciones y velocidades están determinadas en un conjunto discreto

de tiempos, obtenidos a partir del instante inicial más el intervalo de integración, y estos tiempos no tienen por qué coincidir con el instante de realización de las maniobras. Entonces, para obtener la posición y velocidad en el instante requerido hemos efectuado una interpolación utilizando el método de Bower, ya que hemos comprobado que este método mantiene la precisión de la integración numérica.

Seguidamente presentamos el algoritmo que hemos desarrollado para el cálculo de la órbita, que también evita singularidades de tipo numérico, y así obtenemos los elementos orbitales equinociales osculatrices, afectados por todas las perturbaciones descritas anteriormente. Pero, puesto que para el diseño de las maniobras de mantenimiento en estación se necesitará, en algún caso, disponer de elementos orbitales que no presenten periodos inferiores a los diurnos, hemos aplicado un filtro numérico que elimina cortos periodos, obteniendo de esta forma elementos orbitales centrados. El capítulo finaliza con una validación numérica, comparando los parámetros centrados calculados con este procedimiento con parámetros medios proporcionados por HISPASAT S.A.

En el capítulo 4 se presenta el método que hemos desarrollado para la optimización del cálculo de los impulsos, y de su instante de realización, necesarios para el mantenimiento en estación.

Primero planteamos el problema de la forma siguiente:

La utilización de modelos lineales para el diseño de las maniobras tiene como ventaja que las funciones que relacionan los impulsos con la variación de los elementos orbitales son fácilmente invertibles. Por otro lado, al considerar métodos numéricos para calcular el efecto que tiene una maniobra sobre los parámetros orbitales, aunque se está ganando precisión, no se pueden obtener ni los impulsos ni el instante en el que se efectúa, al no existir ninguna función que se pueda invertir. Por tanto, la combinación de ambos métodos, que aprovecha las ventajas de cada uno, va a dar lugar a un proceso iterativo que, demostramos, genera sucesiones convergentes a los valores que queremos determinar.

Entonces, en primer lugar, describimos el modelo general de optimización y demostramos que el método es convergente. Continuamos el capítulo con la aplicación de este proceso al caso concreto del mantenimiento norte-sur describiendo los vectores y funciones que intervienen en el proceso, obteniendo los términos generales de las sucesiones que proporcionarán la magnitud del impulso y el tiempo sidéreo de su realización, a partir del cual se podrá determinar el instante de la maniobra, según se trate de una maniobra norte o sur. El criterio objetivo para el vector inclinación se ha determinado a partir de la estrategia *dirección secular* comentada anteriormente. Con ella se establece que la corrección efectuada al vector \vec{i} llevará la misma dirección que la componente secular de la evolución anual de ese vector.

Por último, finalizamos el capítulo con la aplicación del método iterativo al mantenimiento este-oeste para determinar la magnitud de los impulsos y el instante de realización del primero de ellos, puesto que el segundo se efectuará medio día sidéreo después como hemos comentado anteriormente. El vector excentricidad objetivo se determina con la expresiones que obtenemos en el capítulo 2, resultado de la aplicación de la estrategia *perigeo hacia el Sol*. Sin embargo, el criterio objetivo para la longitud verdadera se establece de dos formas distintas: un primer objetivo es que la longitud verdadera alcance el límite inferior de su ventana con el fin de comparar los resultados que se obtienen de este modo con los que resultan de la utilización de las expresiones del modelo lineal simplificado para el cálculo de impulsos con el fin de controlar la longitud media. Y, como segundo objetivo, se pretende que la longitud verdadera, durante el ciclo, se mantenga simétrica respecto de la longitud nominal, con su máximo en la mitad del ciclo y su mínimo al final del mismo.

De esta forma, determinamos los términos generales de las sucesiones que proporcionan el valor de la suma de los impulsos, que corresponde a la corrección para la longitud; también, el valor de la diferencia entre ambos, siendo éste el valor necesario para corregir el vector excentricidad y, finalmente, el valor del tiempo sidéreo del primer impulso. Cuando se considera el criterio de simetría impuesto sobre la longitud se obtiene, además, el término general de otra sucesión relacionada con la parte de ventana ocupada por la longitud verdadera en su evolución, de manera que, a partir de los límites de las dos primeras sucesiones, se puede determinar la magnitud de los impulsos este-oeste y, con el tiempo sidéreo, se calcula el tiempo universal en el que se efectúan las maniobras.

A continuación, los parámetros determinados en cada iteración se introducen en la integración numérica de las ecuaciones del movimiento del satélite con el fin de evaluar la respuesta del sistema y finalizamos el proceso cuando se alcanzan los criterios objetivo establecidos sobre los elementos orbitales que tenemos a nuestra disposición decidir.

Finalmente, en el capítulo 5 de este trabajo presentamos la simulación numérica efectuada con un programa elaborado en FORTRAN para la propagación numérica de la órbita y la determinación de los impulsos con el método desarrollado. Consideramos, para ello, un satélite geoestacionario situado en la longitud 30° Oeste, con una ventana de $0^\circ.14$ de amplitud para la longitud y de $0^\circ.01$ para la latitud.

Se comienza dicha simulación considerando por separado las maniobras norte-sur y este-oeste y analizando, en el primer caso, varias formas de obtener el vector inclinación objetivo para distintas duraciones del ciclo de mantenimiento y, en el segundo, teniendo en cuenta las dos maneras de calcular los impulsos y el tiempo, establecidas en función del criterio objetivo de la longitud. En todos los casos propuestos aplicamos el proceso iterativo y utilizamos el vector inclinación osculatriz, la longitud verdadera y el vector

excentricidad centrado. Asimismo realizamos la simulación numérica con las expresiones del modelo lineal, con los vectores inclinación y excentricidad centrados y la longitud media, tan solo en uno de los casos del mantenimiento norte-sur y este-oeste.

Una comparación entre ambos métodos da como resultado que la manera óptima de realizar el mantenimiento en estación consiste en calcular las magnitudes de los impulsos, y su instantes de realización, mediante la aplicación del proceso iterativo combinado con la propagación numérica de la órbita. Además, vemos cómo para el mantenimiento norte-sur, será conveniente considerar un valor constante de la corrección para la inclinación, determinado a partir de las variaciones que experimenta este vector en su evolución libre. Para el mantenimiento este-oeste, el criterio de simetría para la longitud es el que da mejores resultados ya que, de esta forma, se puede aprovechar al máximo la ventana en longitud aumentando el valor del control en excentricidad y, así, aplicar impulsos de menor magnitud y, como consecuencia, minimizar el consumo de combustible. Además, los ciclos tienen una duración de 14 días.

Una evaluación numérica de las velocidades totales utilizadas en el mantenimiento en estación, tanto realizado con el modelo lineal como con el proceso iterativo, muestra que con este último se produce un ahorro del 3.56 % del consumo total de combustible para un satélite con 10 años de vida útil.

La memoria se finaliza con una simulación completa, combinando los impulsos normales (que en nuestro caso serán sur) con los tangenciales (en secuencias oeste-este a causa de la situación del satélite). Esta simulación se efectúa desde el 1 de enero hasta el 31 de diciembre del año 2000.

Capítulo 1

Perturbaciones de la órbita geostacionaria.

Idealmente, para que un satélite sea geostacionario debe mantener la misma posición respecto de la Tierra. Esto ocurre cuando su órbita cumple unas determinadas condiciones que dependerán de los valores que tomen la excentricidad, la inclinación y el semieje mayor: ser circular, ecuatorial, y tener un periodo de rotación igual que el terrestre.

Pero la posición relativa de un satélite geostacionario no permanece fija, ya que sobre él están actuando fuerzas que perturban su órbita y causan un alejamiento de su posición nominal o de estacionamiento. Estas fuerzas son: la fuerza perturbadora gravitatoria terrestre, la fuerza que ejercen el Sol y la Luna, y la fuerza ocasionada por la presión de radiación solar.

En este capítulo se analizan los efectos que producen estas fuerzas perturbadoras sobre la posición del satélite, utilizando una teoría analítica para la integración de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento del satélite.

Debido a las características orbitales de estos satélites, en este análisis no se utilizan las ecuaciones de Lagrange para los elementos orbitales clásicos, sino que se utiliza un conjunto de elementos orbitales, llamados equinocciales, que evitan las singularidades numéricas producidas por los pequeños valores de la inclinación y de la excentricidad que aparecen en la integración numérica.

Se verá como la fuerza perturbadora gravitatoria terrestre modifica el semieje y la longitud media y, para estudiar su efecto, las ecuaciones de Lagrange se linealizan respecto de dos pequeños parámetros para estos elementos. Un estudio cualitativo del sistema de ecuaciones diferenciales, escrito en función de la longitud media y su deriva, muestra la existencia de cuatro puntos de equilibrio, dos estables y dos inestables, correspondientes

a las longitudes geográficas $75^\circ.08$ E, $104^\circ.92$ O y $165^\circ.08$ E, $14^\circ.92$ O, respectivamente. Para finalizar el análisis del efecto de esta fuerza se muestra la influencia de la longitud de estacionamiento en la evolución de la longitud media y se calcula el tiempo aproximado de permanencia de un satélite en la región asignada para distintas posiciones nominales.

A continuación, se ve cómo la fuerza lunisolar modifica el vector inclinación mediante la integración de las ecuaciones de Lagrange correspondientes. Se obtiene que la evolución de \vec{i} , bajo su efecto, se compone de un término secular, con un periodo de 18.61 años, y de términos periódicos, destacando dos de ellos: uno con un periodo de seis meses y otro con un periodo de 13.66 días.

Finalmente, se analiza cómo actúa la fuerza producida por la presión de radiación solar. La integración de las ecuaciones de Lagrange para este caso dará como resultado que el vector excentricidad, bajo la acción de esta fuerza, describe un círculo anual cuyo radio dependerá, entre otros parámetros, de las características físicas del satélite.

1.1 Características generales.

Como se ha dicho, para que un satélite sea geoestacionario se deben cumplir las siguientes condiciones:

- el periodo orbital debe ser igual al periodo de rotación de la Tierra,
- la órbita debe ser circular, y
- también debe ser ecuatorial.

La primera condición depende del semieje mayor de la órbita, cuyo valor puede ser determinado a partir de la tercera ley de Kepler [Brouwer & Clemence, 1971]:

$$n^2 a^3 = G(m_\oplus + m_s), \quad (1.1.1)$$

donde n es el movimiento medio del satélite, a es el semieje mayor de la órbita, m_\oplus es la masa de la Tierra y m_s es la masa del satélite.

Si se expresa el movimiento medio en función del periodo, P , y denotamos por μ la constante geocéntrica de gravitación, es sabido que de la expresión (1.1.1) se deduce que

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}, \quad (1.1.2)$$

y que , por tanto, con los valores numéricos correspondientes al Sistema IAU 1989 de Constantes Astronómicas [Seidelmann *et al.*, 1992],

$$\begin{aligned} P &= 86164.09890369732 \text{ s de UT1,} \\ \mu &= 3.986005 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}, \end{aligned}$$

se obtiene como valor del radio geoestacionario, a_s :

$$a_s = 42164.2 \text{ Km.} \quad (1.1.3)$$

La segunda condición requiere que la excentricidad sea nula, y la tercera, que la inclinación sobre el ecuador también lo sea.

Ahora bien, como también hemos dicho, una órbita geoestacionaria no es más que una situación ideal en la que se supone que la Tierra es esférica y homogénea y que no existen fuerzas externas, como la atracción lunisolar o la presión de radiación solar, de manera que sólo actúa la fuerza gravitatoria central terrestre. Pero, lo que realmente sucede es que los satélites que ocupan estas órbitas no permanecen estacionarios sobre un mismo punto de la superficie de la Tierra debido a las irregularidades que presenta el campo gravitatorio terrestre y a las fuerzas adicionales mencionadas que actúan sobre él modificando la forma de la órbita y la orientación del plano orbital que como consecuencia, causan un alejamiento de su posición de estacionamiento, también denominada posición nominal. Los cambios producidos tienen que ser compensados mediante las denominadas maniobras de *mantenimiento en estación*, activando los motores a bordo desde la estación de control, siendo necesario conocer en cada instante la posición del satélite.

1.2 Ecuaciones de Lagrange en elementos orbitales equinocciales.

El método de variación de las constantes aplicado a la resolución analítica de las ecuaciones del movimiento perturbado de un satélite conduce a las ecuaciones de Lagrange. Como se sabe, las ecuaciones de Lagrange dan la variación de los elementos orbitales con el tiempo en función de las derivadas parciales de la función perturbadora, R , respecto de dichos elementos. Para los elementos orbitales clásicos: semieje, a , excentricidad, e , inclinación, i , ascensión recta del nodo ascendente de la órbita, Ω , argumento del perigeo, ω , y anomalía media, M , dichas ecuaciones se escriben en la forma [Taff, 1985]:

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial M}, \\
\frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2e} \cdot \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\
\frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial i}, \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial i}, \\
\frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e}.
\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Como se indicó anteriormente, en un satélite geostacionario los valores de la inclinación y de la excentricidad son próximos a cero y, por tanto, se producen singularidades numéricas en estas ecuaciones. Por esta razón, en lugar de los elementos orbitales clásicos vamos a utilizar otro conjunto de parámetros más apropiados, denominados *elementos orbitales equinocciales*, comúnmente utilizados para este tipo de satélites, que evitan este problema [Broucke & Cefola, 1972], [Cot, 1993], [Arsenault *et al.*, 1970]; éstos son:

- el semieje, a ;
- el vector excentricidad, \vec{e} , dirigido desde el centro de la Tierra al perigeo de la órbita y cuyo módulo es igual a la magnitud de la excentricidad, esto es,

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \cos(\Omega + \omega) \\ e \sin(\Omega + \omega) \end{pmatrix}; \tag{1.2.5}$$

- el vector inclinación, \vec{i} , dirigido desde el centro de la Tierra al nodo ascendente de la órbita con un módulo igual a la magnitud de la inclinación, esto es,

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} i_x \\ i_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \cos \Omega \\ i \sin \Omega \end{pmatrix}; \tag{1.2.6}$$

- y la longitud media, l ,

$$l = \Omega + \omega + M - \vartheta_G, \tag{1.2.7}$$

donde ϑ_G es el tiempo sidéreo medio en Greenwich (véase la figura (1.2.1)).

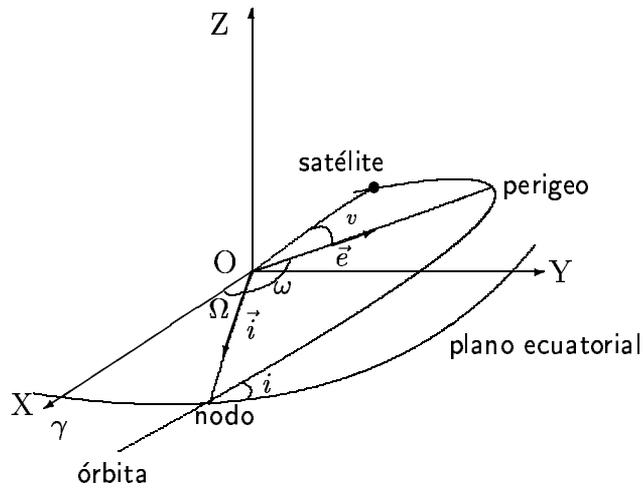


Figura 1.2.1: Elementos orbitales clásicos y equinocciales.

Para obtener las ecuaciones que describen la variación con el tiempo de estos elementos, en primer lugar se derivan las expresiones (1.2.5) - (1.2.7), resultando:

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial M}, \\
 \frac{dl}{dt} &= \frac{dM}{dt} + \frac{d\omega}{dt} + \frac{d\Omega}{dt} - \Omega_{\oplus}, \\
 \frac{de_x}{dt} &= \cos(\omega + \Omega) \frac{de}{dt} - e \operatorname{sen}(\omega + \Omega) \frac{d\omega}{dt} - e \operatorname{sen}(\omega + \Omega) \frac{d\Omega}{dt}, \\
 \frac{de_y}{dt} &= \operatorname{sen}(\omega + \Omega) \frac{de}{dt} + e \cos(\omega + \Omega) \frac{d\omega}{dt} + e \cos(\omega + \Omega) \frac{d\Omega}{dt}, \\
 \frac{di_x}{dt} &= \cos \Omega \frac{di}{dt} - i \operatorname{sen} \Omega \frac{d\Omega}{dt}, \\
 \frac{di_y}{dt} &= \operatorname{sen} \Omega \frac{di}{dt} + i \cos \Omega \frac{d\Omega}{dt},
 \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

con Ω_{\oplus} la velocidad de rotación terrestre.

A continuación, se sustituyen las ecuaciones de Lagrange (1.2.4) con lo que, finalmente, se obtienen las ecuaciones básicas a partir de las cuales se estudia el movimiento de un

satélite geostacionario:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial l}, \quad (1.2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= n - \Omega_{\oplus} - \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{e(1-e^2)^{1/2}}{na^2 [1 + (1-e^2)^{1/2}]} \cdot \frac{\partial R}{\partial e} + \\ &+ \frac{\tan i/2}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i}, \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{de_x}{dt} &= -\frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial e_y} - \frac{e_y \tan i/2}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} - \\ &- \frac{e_x(1-e^2)^{1/2}}{na^2 [1 + (1-e^2)^{1/2}]} \cdot \frac{\partial R}{\partial l}, \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{de_y}{dt} &= \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial e_x} + \frac{e_x \tan i/2}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} - \\ &- \frac{e_y(1-e^2)^{1/2}}{na^2 [1 + (1-e^2)^{1/2}]} \cdot \frac{\partial R}{\partial l}, \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

$$\frac{di_x}{dt} = -\frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i_y} - \frac{\cos \Omega \tan i/2}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \quad (1.2.13)$$

$$\frac{di_y}{dt} = \frac{1}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i_x} - \frac{\sin \Omega \tan i/2}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \quad (1.2.14)$$

donde las relaciones entre las derivadas parciales de la función perturbadora respecto de los elementos orbitales clásicos, $R = R(a, e, i, M, \omega, \Omega)$, y de los elementos equinocciales, $R = R(a, l, e_x, e_y, i_x, i_y)$, son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial e} &= \cos(\omega + \Omega) \frac{\partial R}{\partial e_x} + \sin(\omega + \Omega) \frac{\partial R}{\partial e_y}, \\ \frac{\partial R}{\partial i} &= \cos \Omega \frac{\partial R}{\partial i_x} + \sin \Omega \frac{\partial R}{\partial i_y}, \\ \frac{\partial R}{\partial \Omega} &= -i_y \frac{\partial R}{\partial i_x} + i_x \frac{\partial R}{\partial i_y} + \frac{\partial R}{\partial l}, \\ \frac{\partial R}{\partial \omega} &= -e_y \frac{\partial R}{\partial e_x} + e_x \frac{\partial R}{\partial e_y} + \frac{\partial R}{\partial l}, \\ \frac{\partial R}{\partial M} &= \frac{\partial R}{\partial l}. \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

Según se indicó antes, las principales fuerzas que actúan sobre un satélite geoestacionario modificando su posición son:

- la fuerza gravitatoria debida al potencial perturbador terrestre causado por la no esfericidad y no homogeneidad de la Tierra,
- la fuerza lunisolar debida a la atracción gravitacional del Sol y de la Luna, y
- la fuerza producida por la presión de radiación solar.

Ciertos efectos perturbadores son dominantes en la evolución de largo periodo (la que se corrige con el mantenimiento en estación) de los diferentes elementos orbitales. Esencialmente, como veremos, ocurre que:

- La longitud y el semieje son perturbados fundamentalmente por los términos teserales del campo gravitatorio terrestre.
- El vector excentricidad se modifica, principalmente, por la presión de radiación solar.
- En la variación del vector inclinación, la fuerza dominante es la que corresponde a la atracción lunisolar.

A continuación, mediante la integración de las ecuaciones de Lagrange, (1.2.9) - (1.2.14), se analizan estos efectos.

1.3 Efecto del campo gravitatorio terrestre.

El potencial perturbador gravitatorio terrestre, R , que interviene en las ecuaciones de Lagrange (1.2.9) - (1.2.14) se obtiene como:

$$R = U - \frac{G \cdot m_{\oplus}}{r}, \quad (1.3.1)$$

donde U es el potencial gravitatorio terrestre, y $\frac{G \cdot m_{\oplus}}{r}$ es el potencial creado por una Tierra perfectamente esférica y homogénea.

En un sistema de referencia ecuatorial geocéntrico ligado a la Tierra con eje \vec{Ox} en la dirección del meridiano medio de Greenwich, el potencial U se puede expresar en serie de armónicos esféricos en la forma [Heiskanen & Moritz, 1985]:

$$U = \frac{Gm_{\oplus}}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{r_t}{r} \right)^n \left(J_{nm} R_{nm}(\vartheta, \lambda) + K_{nm} S_{nm}(\vartheta, \lambda) \right) \right\}, \quad (1.3.2)$$

donde

G es la constante de gravitación universal,

m_{\oplus} es la masa de la Tierra,

r_t es el semieje mayor del elipsoide terrestre,

(r, ϑ, λ) son las coordenadas polares esféricas del satélite,

J_{nm} y K_{nm} son los coeficientes armónicos esféricos, y

$R_{nm}(\vartheta, \lambda) = P_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda$ y $S_{nm}(\vartheta, \lambda) = P_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda$ son los armónicos esféricos, con $P_{nm}(\cos \vartheta)$, las funciones de Legendre.

Para realizar un estudio cualitativo del efecto de esta fuerza consideramos únicamente el efecto dominante de este potencial. Desarrollando U hasta el orden y grado 2, la función perturbadora (1.3.1) queda en la forma:

$$R = \frac{1}{2} \frac{Gm_{\oplus}}{a} \left(\frac{r_t}{a} \right)^2 J_2 - 3 \frac{Gm_{\oplus}}{a} \left(\frac{r_t}{a} \right)^2 (J_{22} \cos 2\lambda + K_{22} \sin 2\lambda), \quad (1.3.3)$$

donde se ha tomado en (1.3.2) $r = a$ y $\vartheta = 90^\circ$.

Una expresión equivalente para esta función perturbadora, [Kaula, 1966], más adecuada para este estudio es la siguiente:

$$R = \frac{1}{2} J_2 \frac{Gm_{\oplus}}{a} \left(\frac{r_t}{a} \right)^2 - 3 J_{22} \frac{Gm_{\oplus}}{a} \left(\frac{r_t}{a} \right)^2 \cos 2(l - \lambda_{22}), \quad (1.3.4)$$

en la que se ha aproximado la longitud verdadera, λ , por la longitud media, l , y donde λ_{22} viene dada por:

$$\lambda_{22} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{K_{22}}{J_{22}} \right), \quad (1.3.5)$$

cuyo valor, si se toman los coeficientes armónicos del modelo de geopotencial GEM-T2, resulta ser de $-14^\circ.92$.

Con esta expresión para la función perturbadora R (1.3.4), y considerando que, al tratarse de un satélite geostacionario, los valores de la excentricidad y la inclinación son

próximos a cero, las ecuaciones de Lagrange (1.2.9) - (1.2.14) se reducen a:

$$\frac{dl}{dt} = n - \Omega_{\oplus} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}, \quad (1.3.6)$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial l}, \quad (1.3.7)$$

de modo que los únicos elementos orbitales afectados por la acción de la fuerza perturbadora gravitatoria terrestre son el semieje y la longitud media.

El estudio cualitativo de este sistema de ecuaciones permite analizar el comportamiento de un satélite bajo la acción de la fuerza perturbadora gravitatoria terrestre. En efecto, transformando las ecuaciones de Lagrange (1.3.6) y (1.3.7) y linealizando en función de dos pequeños parámetros, ε y η , definidos en función del semieje sincrono, a_s , y de la longitud de estacionamiento, l_s , correspondientes a la posición nominal:

$$l = l_s + \varepsilon, \quad (1.3.8)$$

$$a = a_s(1 + \eta). \quad (1.3.9)$$

se puede observar que las ecuaciones de Lagrange se escriben entonces en la forma:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = n - \Omega_{\oplus} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}, \quad (1.3.10)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{a_s} \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial l}, \quad (1.3.11)$$

que, si se tiene en cuenta la relación entre el semieje y el movimiento medio dada por $n = \mu^{1/2} a^{-3/2}$ y $n_s = \mu^{1/2} a_s^{-3/2}$, donde $\mu = Gm_{\oplus}$, se convierten en las siguientes:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = n_s - \Omega_{\oplus} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{3}{2} n_s \eta, \quad (1.3.12)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{a_s} \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial l}. \quad (1.3.13)$$

Con un valor del semieje sincrono que incluya los efectos del potencial gravitatorio que hacen $\frac{\partial R}{\partial a} = 0$, esto es [Kamel *et al.*, 1973],:

$$a_s = a_{sk} + 2J_2 a_{sk} \left(\frac{r_t}{a_{sk}} \right)^2 + 12J_{22} a_{sk} \left(\frac{r_t}{a_{sk}} \right)^2 \cos 2(l - \lambda_{22}), \quad (1.3.14)$$

donde a_{sk} es el semieje síncrono geoestacionario cuyo valor viene dado en (1.1.3), la función perturbadora, R , queda en la forma:

$$R = -3J_{22} \frac{Gm_{\oplus}}{a_s} \left(\frac{r_t}{a_s} \right)^2 \cos 2(l - \lambda_{22}). \quad (1.3.15)$$

Ahora bien, si se considera además que, al tratarse de un satélite geoestacionario, $n_s \doteq \Omega_{\oplus}$, la ecuación (1.3.12) se escribe entonces como

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{3}{2}n_s\eta. \quad (1.3.16)$$

Sustituyendo ahora en (1.3.13) la expresión de la derivada de la función perturbadora, R (1.3.15), respecto de la longitud media:

$$\frac{\partial R}{\partial l} = 6J_{22} \frac{Gm_{\oplus}}{a_s} \left(\frac{r_t}{a_s} \right)^2 \sen 2(l - \lambda_{22}), \quad (1.3.17)$$

y de nuevo con la expresión para el movimiento medio, n_s , la ecuación (1.3.13) resulta:

$$\frac{d\eta}{dt} = 12n_s J_{22} \left(\frac{r_t}{a_s} \right)^2 \sen 2(l - \lambda_{22}). \quad (1.3.18)$$

Ahora, si se toma como nueva variable la derivada de la longitud respecto del tiempo, denominada *deriva*, d ,

$$d = \frac{dl}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{3}{2}n_s\eta, \quad (1.3.19)$$

resulta que, si se deriva a su vez esta expresión respecto de t :

$$\frac{dd}{dt} = -\frac{3}{2}n_s \frac{d\eta}{dt}, \quad (1.3.20)$$

resulta con (1.3.18) que:

$$\frac{dd}{dt} = -18J_{22}n_s^2 \left(\frac{r_t}{a_s} \right)^2 \sen 2(l - \lambda_{22}), \quad (1.3.21)$$

y las ecuaciones (1.3.16) y (1.3.21) quedan finalmente en la forma:

$$\frac{dl}{dt} = d, \quad (1.3.22)$$

$$\frac{dd}{dt} = -\mathcal{K} \sen 2(l - \lambda_{22}), \quad (1.3.23)$$

donde

$$\mathcal{K} = 18J_{22}n_s^2 \left(\frac{r_t}{a_s} \right)^2. \quad (1.3.24)$$

Este sistema de ecuaciones es equivalente a la ecuación

$$\ddot{l} = -\mathcal{K} \operatorname{sen} 2(l - \lambda_{22}), \quad (1.3.25)$$

que es análoga a la que describe el movimiento del péndulo no lineal.

Los puntos de equilibrio del sistema (1.3.11) son las soluciones de la ecuación

$$\frac{d d}{dt} = 0,$$

que corresponden a las longitudes geográficas

$$\begin{aligned} l_1 &= 14^\circ.92 \text{ Oeste,} \\ l_2 &= 75^\circ.08 \text{ Este,} \\ l_3 &= 165^\circ.08 \text{ Este,} \\ l_4 &= 104^\circ.92 \text{ Oeste.} \end{aligned}$$

El estudio de los extremos relativos de la función

$$F(l) = \int_{l_0}^l \mathcal{K} \operatorname{sen} 2(l - \lambda_{22}) dl \quad (1.3.26)$$

permite clasificar estos 4 puntos de equilibrio [Perko, 1991], obteniéndose que las longitudes $75^\circ.08 E$ y $104^\circ.92 O$ corresponden a puntos de equilibrio estable mientras que $165^\circ.08 E$ y $14^\circ.92 O$ corresponden a puntos de equilibrio inestable (véase la figura (1.3.1)). El diagrama de fases correspondiente a las ecuaciones (1.3.22) y (1.3.23) viene representado en la figura (1.3.2).

En la figura (1.3.3), donde aparece calculada para todos los puntos de la Tierra la magnitud de la componente tangencial de esta fuerza gravitatoria [Gambí *et al.*, 1996], puede observarse que, en efecto, en los puntos de equilibrio se tiene que $\ddot{l} = 0$, y que los puntos más desfavorecidos a la hora de estacionar un satélite, al ser los de máxima aceleración, son los que se encuentran a mitad de distancia entre puntos de equilibrio.

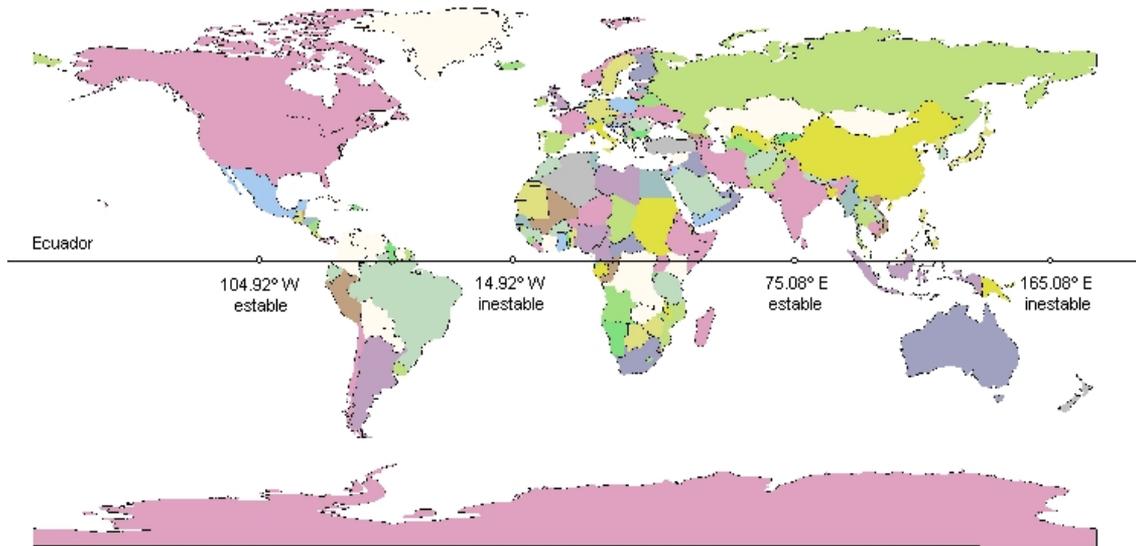


Figura 1.3.1: Distribución de los puntos de equilibrio a lo largo del ecuador.

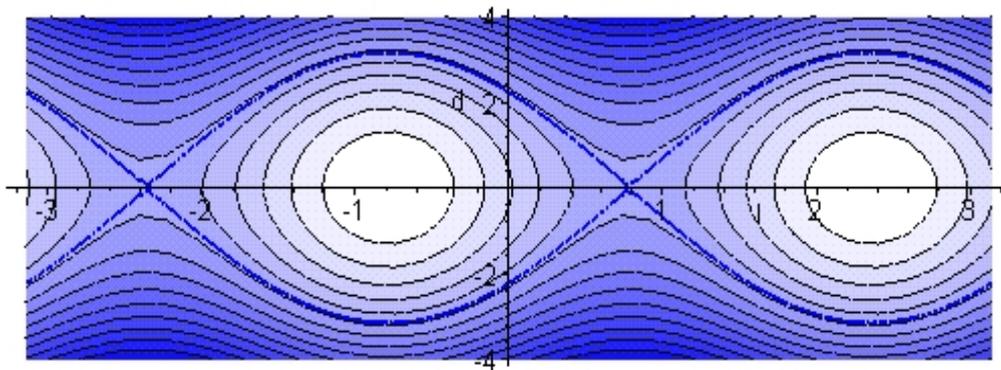


Figura 1.3.2: Diagrama de fases longitud (en radianes) - deriva.

En estas condiciones, consideremos un satélite situado en una posición nominal, l_s , y una región donde la longitud del satélite puede variar libremente,

$$[l_s - \delta l, l_s + \delta l]. \quad (1.3.27)$$

Como se puede suponer que en este intervalo (cuya amplitud es del orden de una décima

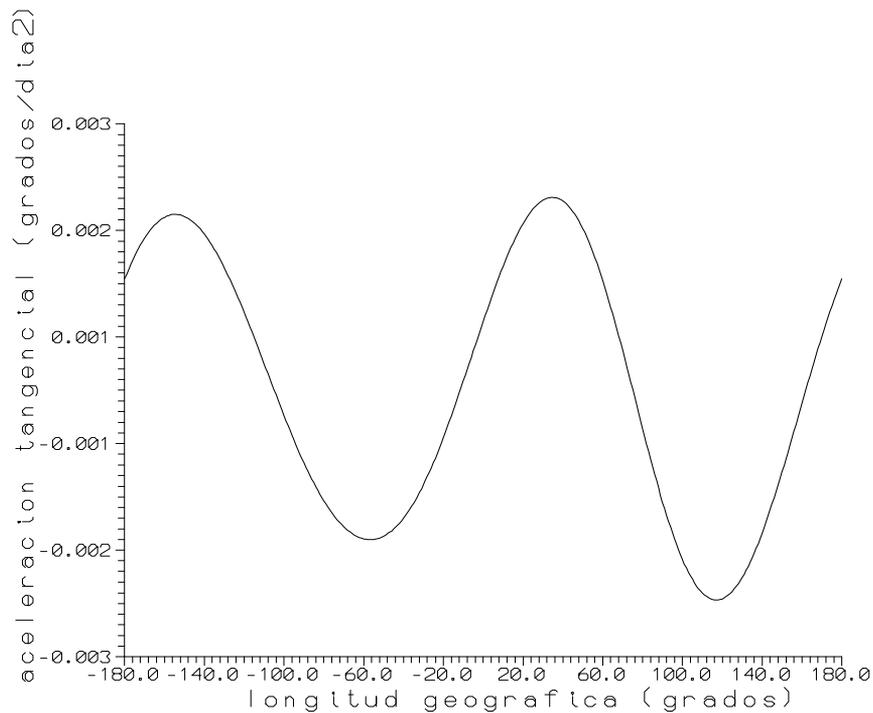


Figura 1.3.3: Magnitud de la componente tangencial de la fuerza gravitatoria terrestre en grados/día².

de grado) la aceleración producida por el campo gravitatorio terrestre es constante (véase la tabla (1.3.1)), es decir,

$$\ddot{l}(t) = \ddot{l}, \quad \ddot{l} = \text{constante}, \quad (1.3.28)$$

la integración de esta ecuación da:

$$\dot{l}(t) - \dot{l}(t_0) = \ddot{l} \cdot (t - t_0), \quad (1.3.29)$$

y, si se integra de nuevo, se obtiene que la longitud en función del tiempo describe una parábola de ecuación

$$l(t) = l(t_0) + \dot{l}(t_0)(t - t_0) + \frac{\ddot{l}}{2}(t - t_0)^2, \quad (1.3.30)$$

que es cóncava o convexa dependiendo de la longitud de estacionamiento (véase la figura (1.3.4)).

l (grados)	\ddot{l} (m/s ²)	\ddot{l} (grados/día ²)
70.00	-0.00000001214	0.000369
71.00	-0.00000000978	0.000297
72.00	-0.00000000740	0.000225
73.00	-0.00000000501	0.000152
74.00	-0.00000000261	0.000079
75.00	-0.00000000020	0.000006
76.00	0.00000000222	-0.000068
77.00	0.00000000464	-0.000141
78.00	0.00000000706	-0.000215
79.00	0.00000000947	-0.000288
80.00	0.00000001187	-0.000361

Tabla 1.3.1: Valores de la aceleración producida por el campo gravitatorio terrestre para diferentes longitudes.

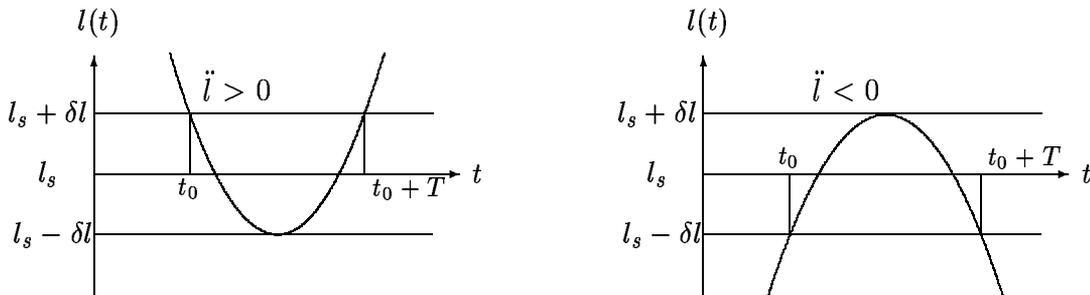


Figura 1.3.4: Trayectoria de la longitud en función del tiempo.

De esta forma, el satélite en su movimiento libre sobrepasará los límites asignados para la longitud. El intervalo de tiempo en el que se mantiene dentro de dichos límites se denomina *tiempo máximo de permanencia*, T . Es posible calcular el valor de T en función de la componente tangencial de la fuerza gravitatoria terrestre, \ddot{l} . Si se considera, por ejemplo, el caso $\ddot{l} > 0$, imponiendo las condiciones

$$\begin{aligned}
 l(t_0) &= l_m + \delta l, \\
 l(t_0 + T/2) &= l_m - \delta l, \\
 \dot{l}(t_0 + T/2) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.3.31}$$

en las ecuaciones (1.3.29) y (1.3.30) se obtiene el sistema:

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{l}(t_0) + \ddot{l}T &= 0 \\ 16\delta l + 4\dot{l}(t_0)T + \ddot{l}T^2 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (1.3.32)$$

cuya solución proporciona para T el valor

$$T = 4\sqrt{|\delta l / \ddot{l}|}. \quad (1.3.33)$$

Con esta expresión se pone de manifiesto la influencia de la longitud de estacionamiento en el diseño de las estrategias de control para el mantenimiento en estación.

En la tabla (1.3.2) aparece calculado el valor aproximado de T para distintas longitudes con $\delta l = 0^\circ.05$ [Gambí *et al.*, 1996]. En ella se puede ver que hay longitudes favorecidas cerca de los puntos estables donde, sin necesidad de maniobras, el satélite permanecería un año dentro de su región asignada.

l (grados)	\ddot{l} (grados/día ²)	T (días)
75 E	0.000006	365
76 E	-0.000068	108
83 E	-0.000577	37
117 E	-0.001968	20
30 O	-0.000887	30
105 O	0.000006	365

Tabla 1.3.2: Tiempo máximo de permanencia en función de la longitud de estacionamiento para $\delta l = 0^\circ.05$.

La figura (1.3.5) muestra la evolución durante un mes de la longitud media de un satélite con $l_s = 30^\circ$ Oeste.

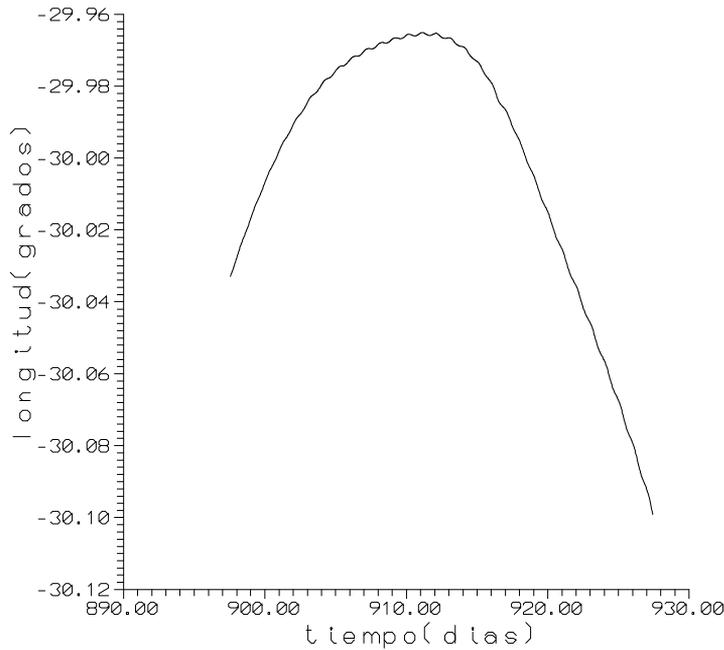


Figura 1.3.5: Evolución de la longitud media durante un mes.

1.4 Efecto de la fuerza lunisolar.

El problema del movimiento del satélite bajo la acción gravitatoria del Sol o de la Luna es un problema de tres cuerpos, siendo la función perturbadora, R , la suma de las funciones perturbadoras correspondientes a cada astro.

En estas condiciones, para el caso Tierra-Luna-satélite, el potencial perturbador creado por la Luna, R_L , viene dado por [Danby, 1992]:

$$R_L = Gm_L \left(\frac{1}{d_{Ls}} - \frac{x_L x_s + y_L y_s + z_L z_s}{d_L^3} \right), \quad (1.4.1)$$

donde (véase la figura (1.4.1))

m_L es la masa de la Luna,

d_L es la distancia geocéntrica de la Luna,

d_{Ls} es la distancia del satélite a la Luna,

(x_L, y_L, z_L) son las coordenadas cartesianas de la Luna en un sistema ecuatorial geocéntrico, y

(x_s, y_s, z_s) son las coordenadas cartesianas del satélite en el mismo sistema.

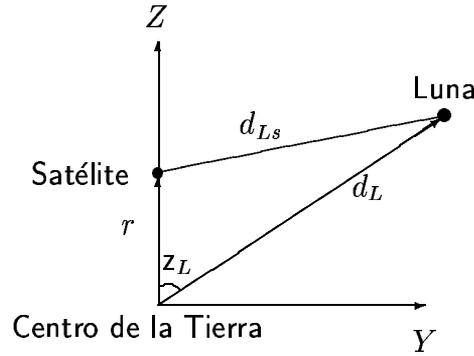


Figura 1.4.1: Tierra-Luna-satélite (plano vertical).

Del triángulo (Centro de la Tierra-Satélite-Luna) de la figura (1.4.1) se obtiene que

$$d_{Ls}^2 = d_L^2 + r^2 - 2d_L r \cos z_L = d_L^2 \left[1 + \left(\frac{r}{d_L} \right)^2 - 2 \left(\frac{r}{d_L} \right) \cos z_L \right], \quad (1.4.2)$$

con r la distancia geocéntrica del satélite y z_L la distancia cenital geocéntrica de la Luna, de donde resulta que

$$\frac{1}{d_{Ls}} = \frac{1}{d_L} \left[1 + \left(\frac{r}{d_L} \right)^2 - 2 \frac{r}{d_L} \cos z_L \right]^{-1/2}. \quad (1.4.3)$$

El término entre corchetes es la función generatriz de los polinomios de Legendre en $\cos z_L$; así pues, esta expresión se puede escribir en la forma [Hobson, 1965]:

$$\frac{1}{d_{Ls}} = \frac{1}{d_L} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{d_L} \right)^n P_n(\cos z_L). \quad (1.4.4)$$

Por otra parte,

$$\cos z_L = \frac{x_L x_s + y_L y_s + z_L z_s}{d_L r}, \quad (1.4.5)$$

de modo que:

$$\frac{x_L x_s + y_L y_s + z_L z_s}{d_L^3} = \frac{r}{d_L^2} \cos z_L. \quad (1.4.6)$$

Entonces, sustituyendo (1.4.4) y (1.4.6) en la expresión de R_L (1.4.1), resulta que:

$$R_L = Gm_L \left[\frac{1}{d_L} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{d_L} \right)^n P_n(\cos z_L) - \frac{r}{d_L^2} \cos z_L \right], \quad (1.4.7)$$

y, explicitando los dos primeros términos de los polinomios de Legendre, queda que:

$$R_L = \frac{Gm_L}{d_L} \left[1 + \frac{1}{d_L} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{d_L} \right)^n P_n(\cos z_L) \right]. \quad (1.4.8)$$

Si observamos que las ecuaciones de Lagrange (1.2.9) - (1.2.14) sólo dependen de las derivadas parciales de R respecto de los elementos orbitales del satélite, el término $\frac{Gm_L}{d_L}$ no va a tener ninguna influencia, de ahí que en el desarrollo (1.4.8) podamos prescindir de él, y limitándonos al orden $n = 2$, se obtiene finalmente para R_L la expresión:

$$R_L = \frac{Gm_L}{d_L} \left(\frac{r}{d_L} \right)^2 P_2(\cos z_L) = \frac{Gm_L r^2}{d_L^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 z_L - \frac{1}{2} \right). \quad (1.4.9)$$

Ahora, el potencial creado por el Sol viene dado por la expresión:

$$R_{\odot} = Gm_{\odot} \left(\frac{1}{d_{\odot s}} - \frac{x_{\odot} x_s + y_{\odot} y_s + z_{\odot} z_s}{d_{\odot}^3} \right), \quad (1.4.10)$$

donde:

m_{\odot} es la masa del Sol,

$d_{\odot s}$ es la distancia entre el Sol y el satélite,

d_{\odot} es la distancia geocéntrica del Sol, y

$(x_{\odot}, y_{\odot}, z_{\odot})$ son las coordenadas cartesianas del Sol en un sistema ecuatorial geocéntrico.

Procediendo de manera análoga al caso de la Luna, este potencial se escribe en la forma:

$$R_{\odot} = \frac{Gm_{\odot} r^2}{d_{\odot}^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 z_{\odot} - \frac{1}{2} \right), \quad (1.4.11)$$

con z_{\odot} la distancia cenital geocéntrica del Sol.

Por consiguiente, considerando el efecto conjunto de las fuerzas producidas por los dos astros, la función perturbadora resulta ser:

$$R = \frac{Gm_L r^2}{d_L^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 z_L - \frac{1}{2} \right) + \frac{Gm_\odot r^2}{d_\odot^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 z_\odot - \frac{1}{2} \right). \quad (1.4.12)$$

Con el fin de expresar esta función en términos de los elementos orbitales equinocciales del satélite se consideran las expresiones:

$$\begin{aligned} r d_L \cos z_L &= x_s x_L + y_s y_L + z_s z_L, \\ r d_\odot \cos z_\odot &= x_s x_\odot + y_s y_\odot + z_s z_\odot. \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

Las fórmulas del cálculo de efemérides permiten obtener las coordenadas ecuatoriales geocéntricas de la Luna y del Sol en función de sus elementos orbitales respectivos.

Coordenadas de la Luna.

Para las coordenadas de la Luna se verifica que:

$$\begin{pmatrix} x_L \\ y_L \\ z_L \end{pmatrix} = R_1(-\varepsilon) \cdot R_3(-\Omega_L) \cdot R_1(-i_L) \cdot R_3(-(\omega_L + v_L)) \cdot \begin{pmatrix} d_L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.4.14)$$

donde $R_i(\alpha)$, en general, representa una rotación alrededor del eje i de ángulo α , siendo en (1.4.14):

ε , la oblicuidad de la eclíptica; Ω_L , la longitud del nodo ascendente de órbita de la Luna sobre la eclíptica; i_L , la inclinación de la órbita de la Luna sobre la eclíptica; ω_L , el argumento del perigeo lunar, y v_L , la anomalía verdadera de la Luna.

De (1.4.14) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \frac{x_L}{d_L} &= \cos \Omega_L \cos(\omega_L + v_L) - \operatorname{sen} \Omega_L \cos i_L \operatorname{sen}(\omega_L + v_L), \\ \frac{y_L}{d_L} &= \cos \varepsilon \operatorname{sen} \Omega_L \cos(\omega_L + v_L) + (\cos \varepsilon \cos \Omega_L \cos i_L - \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} i_L) \operatorname{sen}(\omega_L + v_L), \\ \frac{z_L}{d_L} &= \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} \Omega_L \cos(\omega_L + v_L) + (\operatorname{sen} \varepsilon \cos \Omega_L \cos i_L + \cos \varepsilon \operatorname{sen} i_L) \operatorname{sen}(\omega_L + v_L). \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

Coordenadas del Sol.

Las coordenadas del Sol se pueden determinar con las expresiones

$$\begin{pmatrix} x_{\odot} \\ y_{\odot} \\ z_{\odot} \end{pmatrix} = R_1(-\varepsilon) \cdot R_3(-\lambda_{\odot}) \cdot \begin{pmatrix} d_{\odot} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.4.16)$$

donde λ_{\odot} es la longitud eclíptica del Sol.

Operando en (1.4.16) resulta que:

$$\begin{aligned} \frac{x_{\odot}}{d_{\odot}} &= \cos \lambda_{\odot}, \\ \frac{y_{\odot}}{d_{\odot}} &= \cos \varepsilon \operatorname{sen} \lambda_{\odot}, \\ \frac{z_{\odot}}{d_{\odot}} &= \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} \lambda_{\odot}. \end{aligned} \quad (1.4.17)$$

Coordenadas del satélite.

Las coordenadas del satélite se pueden expresar en términos de los elementos orbitales a partir de las relaciones

$$\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = R_3(-\Omega) \cdot R_1(-i) \cdot R_3(-(\omega + v)) \cdot \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4.18)$$

De estas relaciones se obtiene que:

$$\begin{aligned} \frac{x_s}{r} &= \cos \psi \cos s = \cos \Omega \cos(\omega + v) - \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen}(\omega + v) \cos i, \\ \frac{y_s}{r} &= \cos \psi \operatorname{sen} s = \operatorname{sen} \Omega \cos(\omega + v) + \cos \Omega \operatorname{sen}(\omega + v) \cos i, \\ \frac{z_s}{r} &= \operatorname{sen} \psi = \operatorname{sen}(\omega + v) \operatorname{sen} i, \end{aligned} \quad (1.4.19)$$

donde ψ es la latitud y s es el ángulo sidéreo del satélite. Desarrollando hasta segundo orden en i y ψ quedan:

$$\cos s = \cos \Omega \cos(\omega + v) - \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen}(\omega + v) = \cos(\Omega + \omega + v), \quad (1.4.20)$$

$$\operatorname{sen} s = \operatorname{sen} \Omega \cos(\omega + v) + \cos \Omega \operatorname{sen}(\omega + v) = \operatorname{sen}(\Omega + \omega + v), \quad (1.4.21)$$

$$\psi = i \operatorname{sen}(\omega + v). \quad (1.4.22)$$

De las dos primeras expresiones se deduce que

$$s = \Omega + \omega + v; \quad (1.4.23)$$

entonces, con esta relación, la expresión (1.4.22) resulta ser:

$$\psi = i \operatorname{sen} s \cos \Omega - i \cos s \operatorname{sen} \Omega, \quad (1.4.24)$$

de forma que, al sustituir en ésta las componentes del vector inclinación definidas en (1.2.6), queda en la forma:

$$\psi = i_x \operatorname{sen} s - i_y \cos s. \quad (1.4.25)$$

Por tanto, considerando (1.4.19) y (1.4.25), los cosenos directores del radio vector geocéntrico del satélite se obtienen a partir de las expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{x_s}{r} &= \cos s, \\ \frac{y_s}{r} &= \operatorname{sen} s, \\ \frac{z_s}{r} &= i_x \operatorname{sen} s - i_y \cos s. \end{aligned} \quad (1.4.26)$$

Sustituyendo ahora (1.4.15), (1.4.17) y (1.4.26) en las expresiones de $\cos z_L$ y $\cos z_\odot$, (1.4.13) y éstas, a su vez, en (1.4.12), la función perturbadora lunisolar, R , queda escrita finalmente en la forma:

$$\begin{aligned} R &= \frac{Gm_L r^2}{d_L^3} \left\{ \frac{3}{2} \left[\left(\cos \Omega_L \cos(\omega_L + v_L) - \operatorname{sen} \Omega_L \cos i_L \operatorname{sen}(\omega_L + v_L) \right) \cos s + \right. \right. \\ &+ \left. \left(\cos \varepsilon \operatorname{sen} \Omega_L \cos(\omega_L + v_L) + (\cos \varepsilon \cos \Omega_L \cos i_L - \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} i_L) \operatorname{sen}(\omega_L + v_L) \right) \operatorname{sen} s + \right. \\ &+ \left. \left(\operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} \Omega_L \cos(\omega_L + v_L) + (\operatorname{sen} \varepsilon \cos \Omega_L \cos i_L + \cos \varepsilon \operatorname{sen} i_L) \operatorname{sen}(\omega_L + v_L) \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot (i_x \operatorname{sen} s - i_y \cos s) \right]^2 - \frac{1}{2} \right\} + \\ &+ \frac{Gm_\odot r^2}{d_\odot^3} \left\{ \frac{3}{2} \left[\cos \lambda_\odot \cos s + \cos \varepsilon \operatorname{sen} \lambda_\odot \operatorname{sen} s + \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} \lambda_\odot (i_x \operatorname{sen} s - i_y \cos s) \right]^2 - \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (1.4.27)$$

A la vista de esta expresión para R y de las ecuaciones de Lagrange (1.2.9)- (1.2.14), y teniendo en cuenta de nuevo que los valores de la excentricidad y de la inclinación son

próximos a cero, las ecuaciones que dan la variación de los elementos orbitales perturbados por las atracciones gravitatorias del Sol y de la Luna se reducen a:

$$\frac{di_x}{dt} = -\frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial i_y}, \quad (1.4.28)$$

$$\frac{di_y}{dt} = \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial i_x}. \quad (1.4.29)$$

A partir de estas ecuaciones se deduce que la fuerza lunisolar actúa sobre el satélite modificando principalmente el vector inclinación.

Las derivadas parciales de la función perturbadora R (1.4.27) resultan ser:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial i_x} = & \frac{Gm_L r^2}{d_L^3} \cdot \frac{3}{2} \left[\right. \\ & \left(\cos \Omega_L \cos(\omega_L + \nu_L) - \sin \Omega_L \cos i_L \sin(\omega_L + \nu_L) \right) \cdot \\ & \cdot \left(\sin \varepsilon \sin \Omega_L \cos(\omega_L + \nu_L) + (\sin \varepsilon \cos \Omega_L \cos i_L + \cos \varepsilon \sin i_L) \sin(\omega_L + \nu_L) \right) \sin 2s - \\ & - \left(\cos \varepsilon \sin \Omega_L \cos(\omega_L + \nu_L) + (\cos \varepsilon \cos \Omega_L \cos i_L - \sin \varepsilon \sin i_L) \sin(\omega_L + \nu_L) \right) \cdot \\ & \cdot \left(\sin \varepsilon \sin \Omega_L \cos(\omega_L + \nu_L) + (\sin \varepsilon \cos \Omega_L \cos i_L + \cos \varepsilon \sin i_L) \sin(\omega_L + \nu_L) \right) \cos 2s + \\ & + 2(i_x \sin s - i_y \cos s) \cdot \\ & \cdot \left(\sin \varepsilon \sin \Omega_L \cos(\omega_L + \nu_L) + (\sin \varepsilon \cos \Omega_L \cos i_L + \cos \varepsilon \sin i_L) \sin(\omega_L + \nu_L) \right)^2 \sin s + \\ & + \left(\cos \varepsilon \sin \Omega_L \cos(\omega_L + \nu_L) + (\cos \varepsilon \cos \Omega_L \cos i_L - \sin \varepsilon \sin i_L) \sin(\omega_L + \nu_L) \right) \cdot \\ & \cdot \left. \left(\sin \varepsilon \sin \Omega_L \cos(\omega_L + \nu_L) + (\sin \varepsilon \cos \Omega_L \cos i_L + \cos \varepsilon \sin i_L) \sin(\omega_L + \nu_L) \right) \right] + \\ & + \frac{Gm_\odot r^2}{d_\odot^3} \cdot \frac{3}{2} \left[\sin \varepsilon \sin \lambda_\odot \cos \lambda_\odot \sin 2s - \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin^2 \lambda_\odot \cos 2s + \right. \\ & \left. + 2(i_x \sin s - i_y \cos s) \cdot \sin^2 \varepsilon \sin^2 \lambda_\odot \sin s + \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin^2 \lambda_\odot \right], \quad (1.4.30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial i_y} = & -\frac{Gm_L r^2}{d_L^3} \cdot \frac{3}{2} \left[\right. \\
& \left(\cos \varepsilon \sin \Omega_L \cos(\omega_L + v_L) + (\cos \varepsilon \cos \Omega_L \cos i_L - \sin \varepsilon \sin i_L) \sin(\omega_L + v_L) \right) \cdot \\
& \cdot \left(\sin \varepsilon \sin \Omega_L \cos(\omega_L + v_L) + (\sin \varepsilon \cos \Omega_L \cos i_L + \cos \varepsilon \sin i_L) \sin(\omega_L + v_L) \right) \sin 2s + \\
& + \left(\cos \Omega_L \cos(\omega_L + v_L) - \sin \Omega_L \cos i_L \sin(\omega_L + v_L) \right) \cdot \\
& \cdot \left(\sin \varepsilon \sin \Omega_L \cos(\omega_L + v_L) + (\sin \varepsilon \cos \Omega_L \cos i_L + \cos \varepsilon \sin i_L) \sin(\omega_L + v_L) \right) \cos 2s + \\
& + 2(i_x \sin s - i_y \cos s) \cdot \\
& \cdot \left(\sin \varepsilon \sin \Omega_L \cos(\omega_L + v_L) + (\sin \varepsilon \cos \Omega_L \cos i_L + \cos \varepsilon \sin i_L) \sin(\omega_L + v_L) \right)^2 \cos s + \\
& + \left(\cos \Omega_L \cos(\omega_L + v_L) - \sin \Omega_L \cos i_L \sin(\omega_L + v_L) \right) \cdot \\
& \cdot \left(\sin \varepsilon \sin \Omega_L \cos(\omega_L + v_L) + (\sin \varepsilon \cos \Omega_L \cos i_L + \cos \varepsilon \sin i_L) \sin(\omega_L + v_L) \right) \left. \right] - \\
& - \frac{Gm_\odot r^2}{d_\odot^3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left[\sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin^2 \lambda_\odot \sin 2s + \sin \varepsilon \sin \lambda_\odot \cos \lambda_\odot \cos 2s + \right. \\
& \left. + 2(i_x \sin s - i_y \cos s) \cdot \sin^2 \varepsilon \sin^2 \lambda_\odot \cos s + \sin \varepsilon \sin \lambda_\odot \cos \lambda_\odot \right]. \tag{1.4.31}
\end{aligned}$$

Con estas expresiones para las derivadas parciales de R , eliminando cortos periodos (semidiurnos), teniendo en cuenta las aproximaciones $r \doteq a$ y $z_s \doteq 0$ y operando, las ecuaciones de Lagrange para la inclinación (1.4.28) y (1.4.29) quedan finalmente en la forma:

$$\begin{aligned}
\frac{di_x}{dt} = & \frac{3Gm_L}{4nd_L^3} \left[\frac{1}{2} \left(\sin 2\Omega_L \sin \varepsilon \sin^2 i_L - \sin \Omega_L \cos \varepsilon \sin 2i_L \right) + \right. \\
& + \frac{1}{2} \left(\sin 2\Omega_L \sin \varepsilon (1 + \cos^2 i_L) + \sin \Omega_L \cos \varepsilon \sin 2i_L \right) \cos 2(\omega_L + v_L) + \\
& \left. + \left(\cos 2\Omega_L \sin \varepsilon \cos i_L + \cos \Omega_L \cos \varepsilon \sin i_L \right) \sin 2(\omega_L + v_L) \right] + \\
& + \frac{3Gm_\odot}{4nd_\odot^3} \sin 2\lambda_\odot \sin \varepsilon, \tag{1.4.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{di_y}{dt} &= \frac{3Gm_L}{4nd_L^3} \left\{ \frac{1}{2} \left[\text{sen } 2\varepsilon \left(1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i_L \right) + \cos \Omega_L \cos 2\varepsilon \text{sen } 2i_L - \frac{1}{2} \cos 2\Omega_L \text{sen } 2\varepsilon \text{sen}^2 i_L \right] + \right. \\
&+ \frac{1}{2} \left[\text{sen } 2\varepsilon (\text{sen}^2 \Omega_L - \cos^2 \Omega_L \cos^2 i_L + \text{sen}^2 i_L) - \cos \Omega_L \cos 2\varepsilon \text{sen } 2i_L \right] \cos 2(\omega_L + \nu_L) + \\
&+ \left. \text{sen } \Omega_L (\cos \Omega_L \text{sen } 2\varepsilon \cos i_L + \cos 2\varepsilon \text{sen } i_L) \text{sen } 2(\omega_L + \nu_L) \right\} + \\
&+ \frac{3Gm_\odot}{4nd_\odot^3} (\text{sen } \varepsilon \cos \varepsilon - \text{sen } \varepsilon \cos \varepsilon \cos 2\lambda_\odot). \tag{1.4.33}
\end{aligned}$$

En estas ecuaciones se observa que la evolución del vector inclinación, a causa de la acción perturbadora del Sol y la Luna, presenta una componente secular y una periódica (en los términos dependientes de $2(\omega_L + \nu_L)$ y λ_\odot). Para evaluar las amplitudes de estas componentes resulta conveniente estudiar por separado los efectos de cada astro.

Consideremos, en primer lugar, únicamente el efecto producido por la Luna. Teniendo en cuenta que la amplitud de los términos periódicos es máxima cuando $\Omega_L = 0$, y tomando como términos seculares aquellos que tengan un periodo igual al del movimiento retrógrado del nodo ascendente de la órbita de la Luna sobre la eclíptica (18.66 años), se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{di_x}{dt} &= \left(-\frac{3Gm_L}{4nd_L^3} \frac{1}{2} \text{sen } \Omega_L \cos \varepsilon \text{sen } 2i_L \right)_{sec} + \left(\frac{3Gm_L}{4nd_L^3} \text{sen}(i_L + \varepsilon) \text{sen } 2(\omega_L + \nu_L) \right)_{per}, \\
\frac{di_y}{dt} &= \left(\frac{3Gm_L}{4nd_L^3} \frac{1}{2} \left[\text{sen } 2\varepsilon \left(1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i_L \right) + \cos \Omega_L \cos 2\varepsilon \text{sen } 2i_L \right] \right)_{sec} + \\
&+ \left(-\frac{3Gm_L}{4nd_L^3} \cos(i_L + \varepsilon) \text{sen}(i_L + \varepsilon) \cos 2(\omega_L + \nu_L) \right)_{per}. \tag{1.4.34}
\end{aligned}$$

Evaluando numéricamente los coeficientes de las ecuaciones con unos valores medios [Seidelmann *et al.*, 1992] para

$$\begin{aligned}
Gm_L &= 3.659909 \times 10^{13} \text{ km}^3/\text{día}^2, \\
n &= 6.3003874 \text{ rad/día}, \\
d_L &= 3.844 \times 10^5 \text{ km}, \\
\varepsilon &= 23^\circ.43929111, \\
i_L &= 5^\circ.145396,
\end{aligned}$$

se tiene que la variación del vector inclinación producida por la Luna, en grados/año, viene descrita por:

$$\begin{aligned}\frac{di_x}{dt} &= -0.1315 \operatorname{sen} \Omega_L + 0.7680 \operatorname{sen} 2(\omega_L + \nu_L), \\ \frac{di_y}{dt} &= 0.5787 + 0.0980 \cos \Omega_L - 0.6744 \cos 2(\omega_L + \nu_L).\end{aligned}\quad (1.4.35)$$

Consideremos, ahora, únicamente el efecto producido por la acción gravitatoria del Sol, es decir,

$$\begin{aligned}\frac{di_x}{dt} &= \left(\frac{3Gm_\odot}{4nd_\odot^3} \operatorname{sen} 2\lambda_\odot \operatorname{sen} \varepsilon \right)_{per}, \\ \frac{di_y}{dt} &= \left(\frac{3Gm_\odot}{4nd_\odot^3} \cos \varepsilon \operatorname{sen} \varepsilon \right)_{sec} - \left(\frac{3Gm_\odot}{4nd_\odot^3} \cos \varepsilon \operatorname{sen} \varepsilon \cos 2\lambda_\odot \right)_{per}.\end{aligned}\quad (1.4.36)$$

Evaluando numéricamente los coeficientes de las ecuaciones, con [Seidelmann *et al.*, 1992]

$$\begin{aligned}Gm_\odot &= 9.9006953 \times 10^{20} \text{ Km}^3/\text{día}^2, \\ d_\odot &= 1.4959787066 \times 10^8 \text{ km},\end{aligned}$$

se tiene que la variación del vector inclinación producida por el Sol, en grados/año, viene dada por:

$$\begin{aligned}\frac{di_x}{dt} &= 0.2930 \operatorname{sen} 2\lambda_\odot, \\ \frac{di_y}{dt} &= 0.2688 - 0.2688 \cos 2\lambda_\odot.\end{aligned}\quad (1.4.37)$$

Por tanto, si se consideran ambos efectos, las ecuaciones que proporcionan la variación del vector \vec{i} , en grados/año, se escriben en la forma:

$$\begin{aligned}\frac{di_x}{dt} &= -0.1315 \operatorname{sen} \Omega_L + 0.7680 \operatorname{sen} 2(\omega_L + \nu_L) + 0.2930 \operatorname{sen} 2\lambda_\odot, \\ \frac{di_y}{dt} &= 0.8476 + 0.0980 \cos \Omega_L - 0.6744 \cos 2(\omega_L + \nu_L) - 0.2688 \cos 2\lambda_\odot,\end{aligned}\quad (1.4.38)$$

cuya integración da:

$$\begin{aligned}i_x &= -0^\circ.3895 \cos \Omega_L - 0^\circ.00457 \cos 2(\omega_L + \nu_L) - 0^\circ.02331 \cos 2\lambda_\odot, \\ i_y &= 0^\circ.8474t - 0^\circ.2903 \operatorname{sen} \Omega_L - 0^\circ.0040 \operatorname{sen} 2(\omega_L + \nu_L) - 0^\circ.02139 \operatorname{sen} 2\lambda_\odot,\end{aligned}\quad (1.4.39)$$

donde t es el tiempo, en días, desde la época fundamental J2000.0.

Como puede observarse en estas expresiones, la evolución del vector inclinación bajo la acción gravitatoria del Sol y de la Luna se compone de [Slavinskas, 1998]:

- un término secular (con un periodo de 18.61 años) que hace variar al vector \vec{i} en una dirección secular distinta para cada año;
- términos periódicos, siendo los principales dos de ellos: uno con una amplitud máxima de $0^\circ.02331$ en la dirección de la componente i_x , y con un periodo de seis meses (por efecto del Sol), y otro con una amplitud máxima de $0^\circ.00457$ en la misma dirección que el anterior, y con un periodo de 13.66 días, por efecto de la Luna. (La magnitud de otros términos es menor de $0^\circ.004$).

La figura (1.4.2) muestra la evolución anual del vector inclinación. En ella se aprecian las ondas periódicas semianuales producidas por el Sol combinadas con las quincenales, más pequeñas, producidas por la Luna.

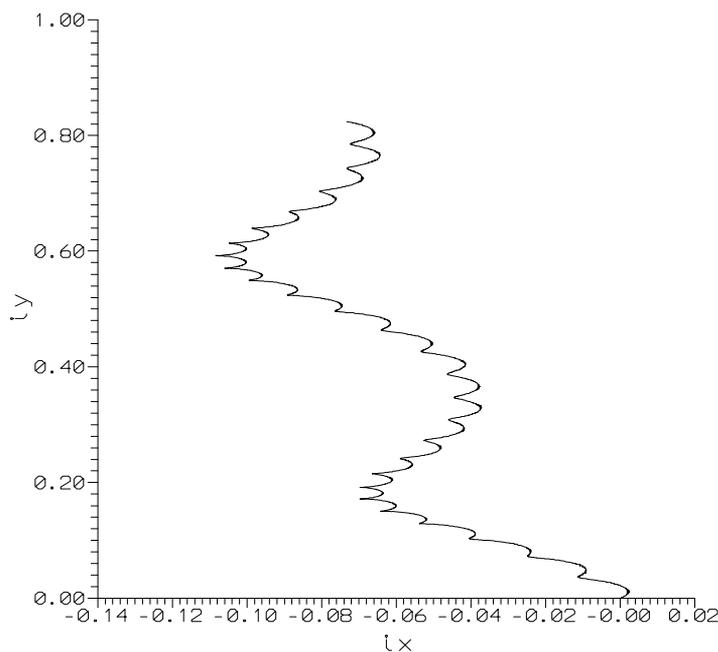


Figura 1.4.2: Evolución del vector inclinación durante el año 2000.

Conviene señalar que el efecto que produce la fuerza lunisolar sobre el valor de la inclinación de la órbita y sobre la longitud del nodo ascendente, que se traduce en un

desplazamiento del satélite hacia fuera de su plano orbital, no es constante, sino que varía dependiendo de la época del año. Para el Sol, la perturbación producida será máxima en los solsticios y nula en los equinoccios debido a la inclinación del plano de la eclíptica con respecto al ecuador. Algo similar ocurre con la perturbación ocasionada por la atracción gravitatoria de la Luna a causa de la inclinación de la órbita lunar sobre el ecuador.

Por último cabe destacar, en virtud de la expresión (1.4.25), la relación existente entre el valor de la inclinación, la latitud y longitud del satélite. En una órbita ligeramente inclinada con respecto al ecuador, aun siendo perfectamente circular, la posición aparente del satélite oscila en latitud y longitud, describiendo un bucle con periodo de un día sidéreo según viene representado en la figura (1.4.3), siendo $A = i^2/2$ y $B = i/\sqrt{2}$ [Berlin, 1988].

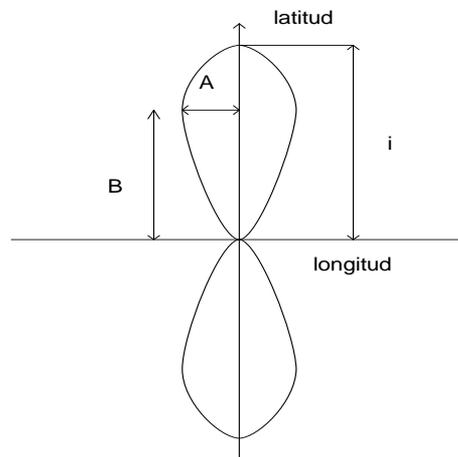


Figura 1.4.3: Trayectoria aparente diaria de un satélite geosíncrono ($a_s, e = 0, i \neq 0$).

1.5 Efecto de la presión de radiación solar.

Un satélite expuesto al Sol sufre una presión de radiación que resulta ser una aceleración en la dirección Sol-satélite. Por tanto, la fuerza por unidad de masa ejercida por los rayos solares sobre un satélite de área efectiva A (superficie aparente del satélite en dirección al Sol) y masa m_s , se puede expresar en la forma:

$$\vec{F} = P \frac{A}{m_s} \vec{u}, \quad (1.5.1)$$

siendo P la presión por unidad de superficie que los rayos solares ejercen sobre tal satélite, supuesto que está situado a una distancia heliocéntrica r_h , y que \vec{u} es el vector unitario en la dirección Sol-satélite.

Si $S_{\odot}^{(0)}$ denota la energía de radiación del Sol sobre la Tierra por unidad de área y unidad de tiempo, cuyo valor es $1.35 \times 10^6 \text{ erg/cm}^2\text{sg}$, c es la velocidad de la luz, y considerando que esta energía se propaga de manera esférica, y que también depende del ángulo de incidencia θ (ángulo formado por la dirección normal a la superficie del satélite y la dirección del Sol), la presión P admite la siguiente expresión:

$$P = \frac{S_{\odot}^{(0)}}{c} \left(\frac{a_{\odot}}{r_h} \right)^2 \cos \theta, \quad (1.5.2)$$

donde a_{\odot} es la distancia media Tierra-Sol. Tomando los valores [Seidelmann *et al.*, 1992]

$$\begin{aligned} c &= 299792458 \text{ m s}^{-1}, \\ a_{\odot} &= 1.4959787066 \times 10^{11} \text{ m}, \\ r_h &= a_{\odot} - a_s = 1.495557064 \times 10^{11} \text{ m}, \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta, además, que $\theta \doteq 90^\circ$, ya que los rayos inciden perpendicularmente sobre el satélite al orientarse habitualmente los paneles solares en esa dirección, P toma el valor:

$$P = 4.50 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2. \quad (1.5.3)$$

Pero la magnitud de esta fuerza depende de la reflectividad de los materiales con los que está fabricada la superficie expuesta a los rayos solares, \mathcal{R} . También es necesario tener en cuenta cuándo el satélite está eclipsado por la Tierra y, por tanto, no está afectado por la radiación solar; para ello se define la función sombra, ϵ , cuyo valor es 0 si el satélite no está iluminado y 1 en caso contrario.

Con estas consideraciones, la fuerza por unidad de masa ejercida sobre el satélite viene dada por:

$$\vec{F} = \epsilon (1 + \mathcal{R}) P \frac{A}{m_s} \vec{u}. \quad (1.5.4)$$

Esta fuerza expresada como gradiente de un potencial perturbador R , $\vec{F} = \text{grad } R$, aparece en la forma:

$$R = \vec{F} \cdot \vec{r}, \quad (1.5.5)$$

siendo \vec{r} el radio vector geocéntrico del satélite.

Si ϑ es el ángulo que forman las direcciones geocéntricas del Sol y del satélite, y se tiene en cuenta que el sentido del vector \vec{F} es opuesto al sentido del radio vector geocéntrico

del Sol, la función perturbadora, R , resulta entonces ser:

$$R = -Fr \cos \vartheta, \quad (1.5.6)$$

de forma que, sustituyendo el valor de F dado en (1.5.4), la función R queda en la forma:

$$R = -\epsilon (1 + \mathcal{R}) \frac{A}{m_s} Pr \cos \vartheta. \quad (1.5.7)$$

En esta expresión, el término $r \cos \vartheta$ se puede determinar así:

$$r \cos \vartheta = (x_s, y_s, z_s) \cdot (u_{x_\odot}, u_{y_\odot}, u_{z_\odot}), \quad (1.5.8)$$

donde $\vec{u}_\odot = (u_{x_\odot}, u_{y_\odot}, u_{z_\odot})$ es el vector unitario en la dirección del Sol que, suponiendo que la órbita del Sol es ecuatorial y circular, tiene por componentes:

$$\begin{aligned} u_{x_\odot} &= \cos s_\odot, \\ u_{y_\odot} &= \text{sen } s_\odot, \\ u_{z_\odot} &= 0. \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

Por otra parte, para obtener las componentes del radio vector \vec{r} en función de parámetros orbitales se parte de sus componentes expresadas en el sistema orbital clásico (con eje $\vec{O}x$ en la dirección del perigeo de la órbita), es decir [Smart, 1953],

$$x_v = r \cos v = a(\cos E - e), \quad (1.5.10)$$

$$y_v = r \text{sen } v = a\sqrt{1 - e^2} \text{sen } E. \quad (1.5.11)$$

De la ecuación de Kepler

$$M = E - e \text{sen } E \quad (1.5.12)$$

se obtiene que:

$$\frac{\partial E}{\partial e} = \frac{\text{sen } E}{1 - e \cos E}, \quad (1.5.13)$$

$$dM = (1 - e \cos E) dE, \quad (1.5.14)$$

y relacionando ambas expresiones se llega a que:

$$\frac{\partial E}{\partial e} dM = \text{sen } E dE. \quad (1.5.15)$$

Antes de integrar esta ecuación resulta necesario expresar el término $\frac{\partial E}{\partial e}$ en función de la anomalía media, M . Para ello se utiliza un proceso iterativo que resuelve la ecuación de Kepler, con la relación de recurrencia dada por:

$$E_{i+1} = M + e \text{sen } E_i. \quad (1.5.16)$$

Con este proceso, que comienza con la aproximación $E_1 = M$, se llega en la tercera iteración a que

$$E = M + e \operatorname{sen} M + e^2 \operatorname{sen} M \cos M + o(e^3), \quad (1.5.17)$$

y, derivando esta expresión, se obtiene que:

$$\frac{\partial E}{\partial e} = \operatorname{sen} M + e \operatorname{sen} 2M. \quad (1.5.18)$$

Si se lleva este resultado a la ecuación (1.5.15) y se integra esta ecuación, se obtiene que:

$$-\cos M - \frac{1}{2}e \cos 2M = -\cos E + C, \quad (1.5.19)$$

es decir, que

$$\cos E = \cos M + \frac{1}{2}e \cos 2M + C, \quad (1.5.20)$$

donde únicamente queda por determinar el valor de la constante C .

Para ello, si sustituimos la expresión (1.5.20) en (1.5.10) obtenemos que:

$$\frac{x_v}{a} = \cos E - e = \cos M + \frac{1}{2}e \cos 2M - e + C, \quad (1.5.21)$$

y, puesto que, al ser $e < 1$, la serie de potencias de e es uniformemente convergente se puede integrar término a término esta expresión, con lo que se tiene que:

$$\int_0^{2\pi} \frac{x_v}{a} dM = \int_0^{2\pi} (\cos M + \frac{1}{2}e \cos 2M - e + C) dM = 2\pi(C - e). \quad (1.5.22)$$

Ahora bien, esta integral también se puede calcular a partir de la expresión (1.5.14) como:

$$\int_0^{2\pi} \frac{x_v}{a} dM = \int_0^{2\pi} (\cos E - e)(1 - e \cos E) dE, \quad (1.5.23)$$

que, en primer orden, resulta ser igual a:

$$-3\pi e, \quad (1.5.24)$$

de modo que, al igualar las expresiones (1.5.22) y (1.5.24), se obtiene para la constante C el valor:

$$C = -\frac{e}{2} \quad (1.5.25)$$

y con este valor el desarrollo en serie para $\cos E$ (1.5.20) queda entonces en la forma:

$$\cos E = \cos M + \frac{1}{2}e \cos 2M - \frac{e}{2}. \quad (1.5.26)$$

El desarrollo en serie de $\text{sen } E$ se obtiene inmediatamente derivando esta expresión, es decir,

$$-\text{sen } E = (-\text{sen } M - e \text{sen } 2M) \frac{dM}{dE}, \quad (1.5.27)$$

de manera que, teniendo en cuenta ahora la relación entre dM y dE dada en (1.5.14) y la expresión (1.5.26), el desarrollo de $\text{sen } E$ en primer orden resulta ser:

$$\text{sen } E = \text{sen } M + \frac{1}{2}e \text{sen } 2M. \quad (1.5.28)$$

Los desarrollos (1.5.26) y (1.5.28) sustituidos en las expresiones (1.5.10) y (1.5.11) nos permiten obtener las siguientes expresiones para las componentes del radio vector en el sistema orbital:

$$x_v = a \left(\cos M - \frac{3}{2}e + \frac{1}{2}e \cos 2M \right), \quad (1.5.29)$$

$$y_v = a \left(\text{sen } M + \frac{1}{2}e \text{sen } 2M \right). \quad (1.5.30)$$

Para expresar este vector en el sistema ecuatorial se aplica la rotación $R_3(-(\omega + \Omega))$ y se tiene que:

$$x_s = \cos(\omega + \Omega)x_v - \text{sen}(\omega + \Omega)y_v, \quad (1.5.31)$$

$$y_s = \text{sen}(\omega + \Omega)x_v + \cos(\omega + \Omega)y_v, \quad (1.5.32)$$

$$z_s = 0. \quad (1.5.33)$$

Sustituyendo ahora (1.5.29) y (1.5.30), y recordando la definición del vector excentricidad

$$e_x = e \cos(\omega + \Omega),$$

$$e_y = e \text{sen}(\omega + \Omega),$$

se obtienen, finalmente, para las componentes del radio vector del satélite las expresiones:

$$x_s = a \left(\cos s - \frac{3}{2}e_x + \frac{1}{2}e_x \cos 2M - \frac{1}{2}e_y \text{sen } 2M \right), \quad (1.5.34)$$

$$y_s = a \left(\text{sen } s - \frac{3}{2}e_y + \frac{1}{2}e_x \text{sen } 2M + \frac{1}{2}e_y \cos 2M \right), \quad (1.5.35)$$

$$z_s = 0, \quad (1.5.36)$$

donde se ha aproximado s por $\omega + \Omega + M$.

Con estas expresiones para (x_s, y_s, z_s) , y las componentes del vector \vec{u}_\odot dadas en (1.5.9), la expresión (1.5.8) se escribe en la forma:

$$\begin{aligned} r \cos \vartheta &= a \left(\cos s - \frac{3}{2}e_x + \frac{1}{2}e_x \cos 2M - \frac{1}{2}e_y \sin 2M \right) \cos s_\odot + \\ &+ a \left(\sin s - \frac{3}{2}e_y + \frac{1}{2}e_x \sin 2M + \frac{1}{2}e_y \cos 2M \right) \sin s_\odot, \end{aligned} \quad (1.5.37)$$

y, por tanto, la función perturbadora (1.5.7), escrita en función de las componentes del vector excentricidad, resulta ser:

$$\begin{aligned} R = -\epsilon (1 + \mathcal{R}) \frac{A}{m_s} P \left[a \cos s_\odot \left(\cos s - \frac{3}{2}e_x + \frac{1}{2}e_x \cos 2M - \frac{1}{2}e_y \sin 2M \right) + \right. \\ \left. + a \sin s_\odot \left(\sin s - \frac{3}{2}e_y + \frac{1}{2}e_x \sin 2M + \frac{1}{2}e_y \cos 2M \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.5.38)$$

Con esta expresión de la función perturbadora, considerando de nuevo que los valores de la inclinación y de la excentricidad son próximos a cero, y en virtud de las ecuaciones de Lagrange (1.2.9) - (1.2.14), la variación de los elementos orbitales perturbados por la fuerza debida a la presión de radiación solar viene dada por las ecuaciones:

$$\frac{de_x}{dt} = -\frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial e_y}, \quad (1.5.39)$$

$$\frac{de_y}{dt} = \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial e_x}. \quad (1.5.40)$$

De ellas se deduce que esta fuerza afecta principalmente al vector excentricidad.

Sustituyendo en estas ecuaciones las derivadas parciales de la función R (1.5.38) respecto de e_x y e_y , éstas quedan en la forma:

$$\begin{aligned} \frac{de_x}{dt} &= \epsilon (1 + \mathcal{R}) \frac{A}{m_s} P \frac{1}{na} \left[-\frac{3}{2} \sin s_\odot + \frac{1}{2} \sin s_\odot \cos 2M - \frac{1}{2} \cos s_\odot \sin 2M \right], \\ \frac{de_y}{dt} &= \epsilon (1 + \mathcal{R}) \frac{A}{m_s} P \frac{1}{na} \left[\frac{3}{2} \cos s_\odot - \frac{1}{2} \cos s_\odot \cos 2M - \frac{1}{2} \sin s_\odot \sin 2M \right], \end{aligned} \quad (1.5.41)$$

de manera que, al eliminar los términos de corto periodo (semidiurnos) resultan, finalmente, ser:

$$\begin{aligned}\frac{de_x}{dt} &= -\frac{3}{2}\epsilon(1+\mathcal{R})\frac{A}{m_s}\cdot\frac{P}{na}\text{sen}s_\odot, \\ \frac{de_y}{dt} &= \frac{3}{2}\epsilon(1+\mathcal{R})\frac{A}{m_s}\cdot\frac{P}{na}\cos s_\odot,\end{aligned}\quad (1.5.42)$$

donde se observa que la dirección de la variación del vector \vec{e} es perpendicular a la dirección del Sol.

Suponiendo ahora que el movimiento del Sol es uniforme, la integración de estas ecuaciones (1.5.42) proporciona la evolución del vector \vec{e} perturbado por la acción de la presión de radiación solar:

$$\begin{aligned}e_x(t) &= e_x(t_0) + R_e(\cos s_\odot(t) - \cos s_\odot(t_0)), \\ e_y(t) &= e_y(t_0) + R_e(\text{sen } s_\odot(t) - \text{sen } s_\odot(t_0)),\end{aligned}\quad (1.5.43)$$

donde $(e_x(t_0), e_y(t_0))$ y $s_\odot(t_0)$ son constantes de integración, y

$$R_e = \frac{3}{2}\epsilon(1+\mathcal{R})\frac{A}{m_s}\frac{P}{na\Omega_\odot},\quad (1.5.44)$$

con $\Omega_\odot = \frac{ds_\odot}{dt} = 1.991021277652 \times 10^{-7} \text{ rad/seg.}$

Estas ecuaciones, que se pueden escribir en la forma

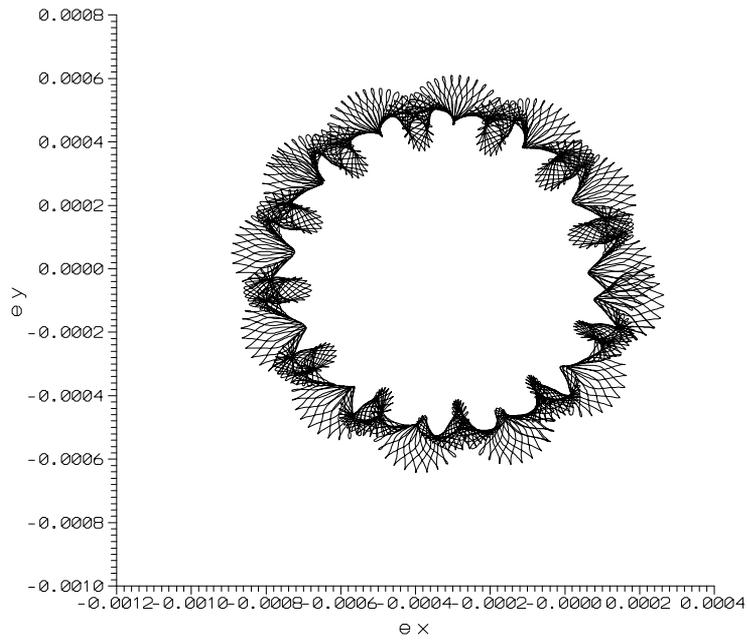
$$\vec{e}(t) = \vec{e}_0 + R_e \begin{pmatrix} \cos s_\odot(t) \\ \text{sen } s_\odot(t) \end{pmatrix},\quad (1.5.45)$$

muestran cómo el vector \vec{e} describe una circunferencia anual de centro

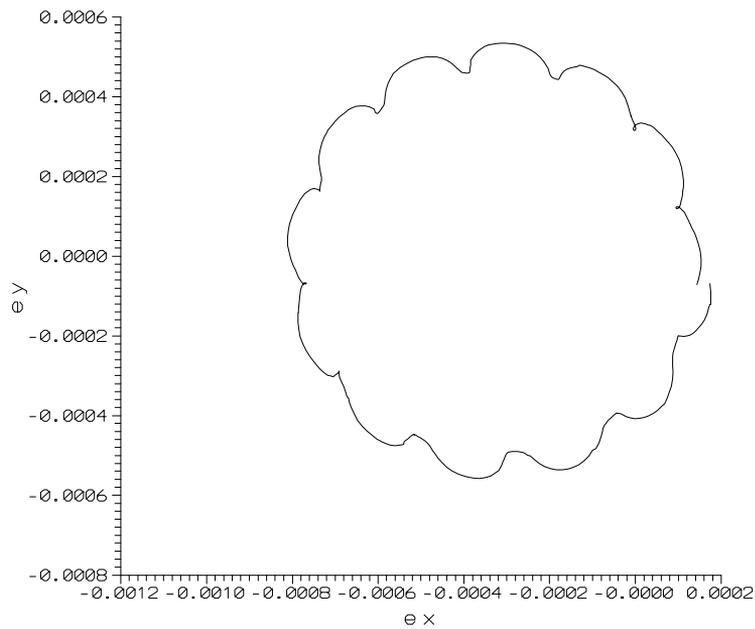
$$\begin{aligned}e_{x_0} &= e_x(t_0) - R_e \cos s_\odot(t_0), \\ e_{y_0} &= e_y(t_0) - R_e \text{sen } s_\odot(t_0),\end{aligned}\quad (1.5.46)$$

y radio R_e .

Las figuras (1.5.1-(a)) y (1.5.1-(b)) muestran la evolución libre del vector \vec{e} durante el año 2000, incluyendo efectos de corto periodo y sin incluirlos, respectivamente. En esta última figura las ondas que aparecen son debidas a perturbaciones lunares.



(a) Con efectos de corto periodo.



(b) Sin efectos de corto periodo.

Figura 1.5.1: Evolución del vector excentricidad durante el año 2000.

1.6 Conclusiones y resultados.

En este capítulo se han analizado las características de la órbita geoestacionaria y el principal problema que presenta un satélite estacionado en ella. Hemos deducido las ecuaciones de Lagrange en unos elementos orbitales equinocciales y las hemos integrado para estudiar el comportamiento del satélite bajo la acción de determinadas fuerzas perturbadoras.

Se ha comprobado que la fuerza perturbadora gravitatoria terrestre modifica el semieje y la longitud media, que esta perturbación produce una aceleración en la longitud que depende del lugar de estacionamiento y, desde el punto de vista cualitativo, que existen dos puntos estables y dos inestables en la órbita geoestacionaria. Este resultado sirve para mostrar la influencia que tiene la longitud nominal en el diseño de las maniobras de mantenimiento en estación. También hemos calculado, para distintos valores de esta longitud, el tiempo que permanece un satélite en su ventana en longitud a partir del movimiento parabólico que describe la longitud media con el tiempo.

Se ha verificado que la fuerza lunisolar causa perturbaciones en el vector inclinación, de manera que su evolución presenta una deriva secular, cuya dirección varía cada año, así como perturbaciones periódicas, siendo las de mayor amplitud una con un periodo de seis meses y otra con un periodo de 13.66 días.

Por último, se ha analizado el efecto de la fuerza debida a la presión de radiación solar. Para integrar las ecuaciones de Lagrange correspondientes ha sido necesario escribir la fuerza perturbadora en términos de \vec{e} , para lo cual hemos calculado la expresión del radio vector en función de \vec{e} . Finalmente, se ha verificado que el vector excentricidad, por acción de la fuerza debida a la presión de radiación solar, describe un círculo anual que depende de la reflectividad, del área y de la masa del satélite.

Se presentan también las gráficas que representan la evolución de la longitud media y los vectores inclinación y velocidad, obtenidas mediante simulación numérica.

Capítulo 2

Maniobras de mantenimiento en estación.

Como se ha visto en el capítulo anterior, las perturbaciones naturales modifican la posición de un satélite idealmente geoestacionario y, por tanto, un satélite nunca tiene este carácter. Resulta entonces necesario corregir su posición para que permanezca dentro de unos límites de tolerancia (determinados por la misión) que permitan acercarle al ideal de estacionariedad. A todas las correcciones periódicas que se aplican al satélite para este fin se las conoce con el nombre de *maniobras de mantenimiento en estación*.

En este capítulo se muestran los distintos tipos de maniobras impulsivas que se pueden efectuar para el mantenimiento en estación: las maniobras norte-sur y las maniobras este-oeste.

A partir del efecto teórico que produciría cada maniobra sobre los elementos orbitales se puede calcular la magnitud de los impulsos reales y su instante de realización utilizando modelos lineales y aplicando estrategias óptimas. Mencionaremos la estrategia *dirección secular* para el mantenimiento en estación norte-sur y la estrategia *perigeo hacia el Sol* para el mantenimiento en estación este-oeste, que se lleva a cabo mediante la realización de dos impulsos tangenciales separados entre sí en medio día sidéreo.

2.1 Mantenimiento en estación.

Como hemos dicho, la principal característica de un satélite geoestacionario es que su posición relativa respecto de la Tierra no varía. Su longitud, por tanto, permanecería fija y su latitud, nula. Ahora bien, como, a causa de las perturbaciones naturales, cuyo

efecto ha sido descrito en el capítulo anterior, el satélite no se mantiene en su posición de estacionamiento, sino que se aleja de ésta, ocurre que deja de ser efectivo para la misión que se pretende.

Cada misión tiene una región espacial asignada, dentro de la cual se permiten pequeñas variaciones en la latitud y la longitud del satélite, sin que esto afecte de manera significativa a los requerimientos de tal misión. Esta región, llamada *ventana espacial*, es un rectángulo centrado en la posición nominal del satélite, en el que uno de sus lados equivale al margen permitido para la variación de la longitud -*ventana en longitud*- y el otro lado, es el margen permitido para la variación en latitud -*ventana en latitud* (véase la figura (2.1.1)).

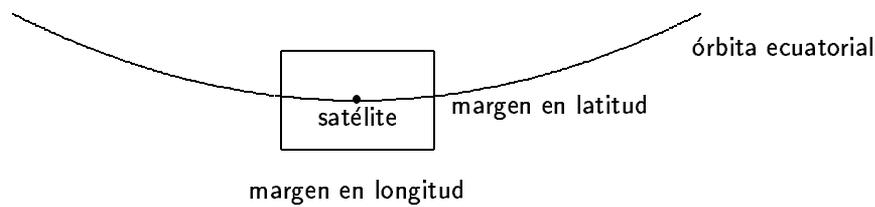


Figura 2.1.1: Ventana espacial.

La figura (2.1.2) muestra la evolución libre de la posición de un satélite (en latitud y longitud) durante un mes. Como se puede apreciar, a causa de las perturbaciones naturales, el satélite abandona en un tiempo limitado su ventana espacial.

Entonces, con el fin de mantener el satélite dentro de los márgenes de latitud y longitud requeridos es necesario corregir su posición mediante maniobras periódicas realizadas durante la misión y, así, compensar la acción de las fuerzas perturbadoras. Esto es lo que se denomina **mantenimiento en estación** [Soop, 1983].

La realización de las maniobras se lleva a cabo desde la estación de control mediante telecomandos que, al poner en funcionamiento distintos motores situados en el satélite, producen un cambio en su velocidad orbital y, por tanto, modifican su órbita.

Existen varios tipos de maniobras según sea la dirección que lleve el impulso o cambio en la velocidad orbital ΔV :

- Las **maniobras norte-sur**, o maniobras en inclinación, son aquellas que emplean impulsos perpendiculares al plano orbital.

El impulso es norte si la actuación neta de los motores es tal que ΔV se dirige hacia el norte, y el impulso es sur cuando la actuación neta de los motores tiene la dirección contraria.

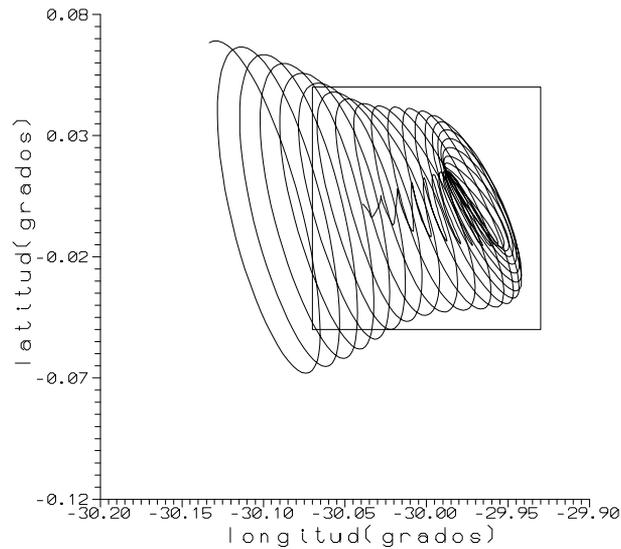


Figura 2.1.2: Evolución natural de la posición de un satélite durante un mes a partir de la posición nominal $\lambda_s = 30^\circ$ Oeste, $a = a_s$, $i = 0^\circ$, $e = 0$.

- Las **maniobras este-oeste**, o maniobras en longitud, son las que emplean impulsos tangenciales a la órbita.

El impulso es este si la actuación neta de los motores tiene la dirección de la velocidad del satélite, y es oeste en el caso contrario.

- Las **maniobras radiales** son las que emplean impulsos en la dirección del radio vector. En la práctica, este tipo de maniobras no se utiliza por las razones que se explican en la sección 2.3.

Para el estudio de las maniobras de mantenimiento en estación, en esta memoria se considera un sistema de referencia ligado al satélite con origen en su centro de masas, un eje tangencial a la trayectoria y positivo hacia el este; otro eje en la dirección radial, positivo en el sentido del radio vector Tierra-satélite; y un tercer eje, perpendicular al plano orbital y positivo hacia el sur (véase la figura (2.1.3)). Por tanto, en este sistema local los impulsos este y sur se representan por incrementos de velocidad positivos, mientras que los correspondientes a impulsos norte y oeste, son negativos.

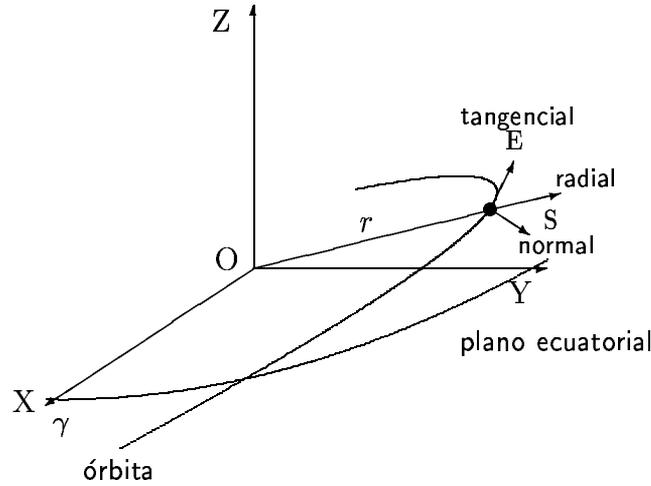


Figura 2.1.3: Sistema de referencia local.

2.2 Maniobras impulsivas.

Una maniobra impulsiva, cuya duración es tan breve que puede considerarse un impulso instantáneo, produce un cambio en la velocidad del satélite y, como consecuencia, una variación en sus elementos orbitales. Vamos a obtener las expresiones de las maniobras impulsivas a partir de las expresiones de las componentes radial, tangencial y normal del vector velocidad, $\vec{V} = (V_r, V_t, V_n)$, derivando las coordenadas del satélite, (r, ψ, λ) , respecto del tiempo, siendo r el radio vector, ψ la latitud y λ la longitud verdadera del satélite, esto es,

$$V_r = \frac{dr}{dt}, \quad (2.2.1)$$

$$V_t = a_s \frac{d\lambda}{dt}, \quad (2.2.2)$$

$$V_n = -a_s \frac{d\psi}{dt}. \quad (2.2.3)$$

2.2.1 Coordenadas del satélite en función de los elementos orbitales equinociales.

Expresión para la longitud verdadera λ .

La longitud verdadera del satélite puede escribirse como:

$$\lambda = s - \vartheta_G, \quad (2.2.4)$$

donde s es su ángulo sidéreo y ϑ_G es el tiempo sidéreo en Greenwich.

La relación entre λ y los elementos orbitales viene dada a través de s mediante la expresión (1.4.23):

$$s = \Omega + \omega + v,$$

de modo que la longitud verdadera queda:

$$\lambda = \Omega + \omega + v - \vartheta_G. \quad (2.2.5)$$

Para expresar la anomalía verdadera en función del tiempo se considera la ley de las áreas [Brouwer & Clemence, 1971]:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = C, \quad (2.2.6)$$

que, tras sustituir la constante de las áreas, C , por su expresión para el movimiento elíptico, $C = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$, resulta:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{\mu a(1 - e^2)}}{r^2}. \quad (2.2.7)$$

Teniendo en cuenta ahora la expresión clásica del radio vector:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}, \quad (2.2.8)$$

y tomando como valor de la constante geocéntrica de gravitación $\mu = \Omega_{\oplus}^2 a_s^3$, donde Ω_{\oplus} es la velocidad de rotación terrestre, y a_s , el semieje síncrono dado en (1.1.3), la ecuación para la anomalía verdadera (2.2.7), en primer orden, queda:

$$\frac{dv}{dt} = \Omega_{\oplus} \left(\frac{a_s}{a} \right)^{3/2} (1 + 2e \cos v). \quad (2.2.9)$$

Si se linealiza respecto del pequeño parámetro δa definido por

$$a = a_s + \delta a, \quad (2.2.10)$$

se tiene que, en primer orden,

$$\left(\frac{a_s}{a} \right)^{3/2} = \left(\frac{a}{a_s} \right)^{-3/2} = \left(1 + \frac{\delta a}{a_s} \right)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{\delta a}{a_s}, \quad (2.2.11)$$

relación que sustituida en (2.2.9), permite escribir la segunda ley de Kepler en la forma:

$$\frac{dv}{dt} = \Omega_{\oplus} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\delta a}{a_s} + 2e \cos v \right). \quad (2.2.12)$$

La integración de esta ecuación proporciona la expresión de la anomalía verdadera:

$$v = \Omega_{\oplus}(t - t_p) \left(1 - \frac{3 \delta a}{2 a_s} \right) + 2 e \operatorname{sen}(\Omega_{\oplus}(t - t_p)), \quad (2.2.13)$$

siendo t_p el instante de paso por el perigeo y donde se ha efectuado la aproximación:

$$v \doteq M = n(t - t_p) \doteq \Omega_{\oplus}(t - t_p). \quad (2.2.14)$$

Sustituyendo ahora (2.2.13) en la expresión de la longitud verdadera (2.2.5), ésta queda en la forma:

$$\lambda = \Omega + \omega + \Omega_{\oplus}(t - t_p) - \frac{3 \delta a}{2 a_s} \Omega_{\oplus}(t - t_p) + 2 e \operatorname{sen} \Omega_{\oplus}(t - t_p) - \vartheta_G, \quad (2.2.15)$$

donde el coeficiente $-\frac{3 \delta a}{2 a_s}$ es la deriva, definida en (1.3.19), pero ahora sin dimensión de velocidad, que se denota por

$$D = -\frac{3 \delta a}{2 a_s}. \quad (2.2.16)$$

Con este nuevo parámetro, la expresión (2.2.15) (que describe la variación de la longitud verdadera en función del tiempo) resulta ser:

$$\lambda = \Omega + \omega + \Omega_{\oplus}(t - t_p) + D \Omega_{\oplus}(t - t_p) + 2 e \operatorname{sen} \Omega_{\oplus}(t - t_p) - \vartheta_G. \quad (2.2.17)$$

La figura (2.2.1) muestra esta variación. En ella se observa que el movimiento oscilatorio que describe la longitud con el tiempo tiene como amplitud $2e$, hecho que se debe tener en cuenta al efectuar las correcciones para la longitud.

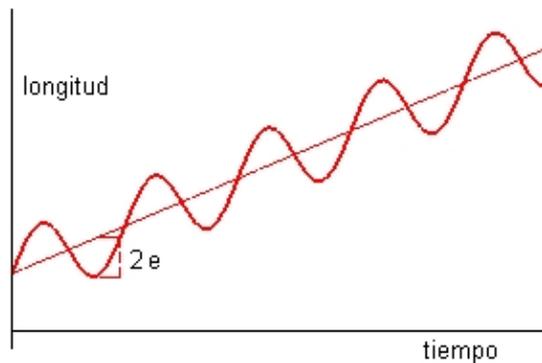


Figura 2.2.1: Evolución de la longitud verdadera.

Expresión para el radio vector r .

La expresión del radio vector (2.2.8), linealizada en función del parámetro δa (2.2.10), resulta ser en primer orden:

$$r = \delta a + a_s - a_s e \cos v, \quad (2.2.18)$$

que, tras sustituir (1.4.23) y teniendo en cuenta la definición del vector excentricidad dado en (1.2.5), se escribe como:

$$r = \delta a + a_s - a_s e \cos(s - (\Omega + \omega)) = \delta a + a_s - a_s (e_x \cos s + e_y \text{sens } s). \quad (2.2.19)$$

Si se considera, ahora, la deriva, D (dada en (2.2.16)), la expresión que proporciona la variación del radio vector del satélite con el tiempo queda en la forma:

$$r = a_s - a_s \left(\frac{2}{3} D + e_x \cos s + e_y \text{sens } s \right). \quad (2.2.20)$$

La figura (2.2.2) representa esta variación. En ella se observa que el movimiento oscilatorio, de periodo diurno, tiene amplitud $a_s e$.

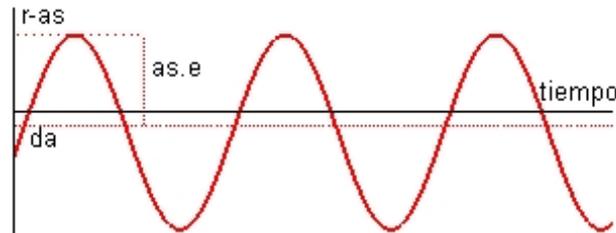


Figura 2.2.2: Evolución del radio vector.

Expresión para la latitud ψ .

La variación de la latitud del satélite con el tiempo viene dada por la expresión (1.4.25) ya obtenida en la sección 1.4:

$$\psi = i_x \text{sens } s - i_y \cos s. \quad (2.2.21)$$

En la figura (2.2.3) se muestra esta variación de periodo diurno y amplitud i .

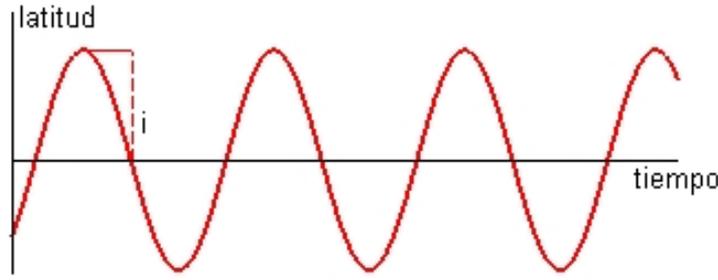


Figura 2.2.3: Evolución de la latitud.

2.2.2 Maniobras impulsivas en términos de los elementos orbitales equinociales.

Si se deriva la expresión del radio vector (2.2.20) respecto del tiempo, se obtiene la componente radial de la velocidad:

$$V_r = \frac{dr}{dt} = -a_s (-e_x \text{sen } s + e_y \cos s) \frac{ds}{dt}, \quad (2.2.22)$$

y considerando la velocidad geosíncrona del satélite, $V = \Omega_{\oplus} a_s$, queda:

$$V_r = V(e_x \text{sen } s - e_y \cos s). \quad (2.2.23)$$

La derivada de la longitud verdadera (2.2.17) respecto del tiempo es:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \Omega_{\oplus} + D\Omega_{\oplus} + 2\Omega_{\oplus} e \cos \Omega_{\oplus}(t - t_p) - \frac{d\vartheta_G}{dt}. \quad (2.2.24)$$

Ahora, si tenemos en cuenta la aproximación (2.2.14), la expresión (1.4.23) para s y, además, que $\frac{d\vartheta_G}{dt} = \Omega_{\oplus}$, resulta que:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \Omega_{\oplus} (D + 2e_x \cos s + 2e_y \text{sen } s). \quad (2.2.25)$$

Sustituyendo, entonces, esta expresión en (2.2.2) se obtiene para la componente tangencial de la velocidad que:

$$V_t = V(D + 2e_x \cos s + 2e_y \text{sen } s). \quad (2.2.26)$$

Por último, si ahora se deriva la latitud (2.2.21) respecto del tiempo se tiene que

$$\frac{d\psi}{dt} = i_x \cos s \frac{ds}{dt} + i_y \operatorname{sen} s \frac{ds}{dt}, \quad (2.2.27)$$

y, por tanto, la componente normal de la velocidad (2.2.3) queda en la forma:

$$V_n = -a_s \cdot \frac{d\psi}{dt} = -a_s \Omega_{\oplus} (i_x \cos s + i_y \operatorname{sen} s), \quad (2.2.28)$$

donde $\frac{ds}{dt} = \Omega_{\oplus}$.

Considerando de nuevo la velocidad geosíncrona del satélite, $V = \Omega_{\oplus} a_s$, la velocidad normal del satélite (2.2.28) resulta ser entonces:

$$V_n = -V (i_x \cos s + i_y \operatorname{sen} s). \quad (2.2.29)$$

En estos términos, las expresiones de las maniobras impulsivas (variaciones de la velocidad orbital del satélite) en función de la variación de los elementos orbitales equinocciales se obtienen a partir de las componentes de la velocidad (2.2.23), (2.2.26) y (2.2.29) como:

$$\Delta V_r = V (\Delta e_x \operatorname{sen} s - \Delta e_y \cos s), \quad (2.2.30)$$

$$\Delta V_t = V (\Delta D + 2\Delta e_x \cos s + 2\Delta e_y \operatorname{sen} s), \quad (2.2.31)$$

$$\Delta V_n = -V (\Delta i_x \cos s + \Delta i_y \operatorname{sen} s), \quad (2.2.32)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta \vec{e} &= \vec{e}^+ - \vec{e}^-, \\ \Delta \vec{i} &= \vec{i}^+ - \vec{i}^-, \\ \Delta D &= D^+ - D^-, \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

y los superíndices - y + representan los valores de los elementos orbitales antes y después de la maniobra, respectivamente.

2.3 Efecto de las maniobras impulsivas sobre los elementos orbitales equinocciales.

A la vista de las expresiones que proporcionan la relación entre las maniobras impulsivas y la variación de los elementos orbitales, (2.2.30), (2.2.31) y (2.2.32), se deduce que:

- un cambio en la velocidad normal del satélite, ΔV_n , modifica el vector inclinación;
- un cambio en la velocidad tangencial, ΔV_t , produce una variación en el vector excentricidad y la deriva de la longitud (y, como consecuencia, en el semieje y la longitud verdadera (véanse las expresiones (2.2.16) y (2.2.17)));
- un cambio en la velocidad radial, ΔV_r , modifica el vector excentricidad.

Por tanto, para llevar a cabo el mantenimiento en estación es suficiente con la aplicación de maniobras tangenciales y normales.

2.3.1 Efecto de un impulso normal sobre el vector inclinación.

Con el objeto de analizar el efecto que produce un impulso normal sobre el vector inclinación vamos a plantear un sistema de ecuaciones en Δi_x y Δi_y . Una de estas ecuaciones viene dada por la expresión del impulso normal (2.2.32), y la otra se obtiene a partir de la expresión (2.2.21) al considerar que una maniobra impulsiva no modifica la latitud en el instante del impulso, es decir, que $\Delta \psi = 0$. Por tanto, este sistema es el siguiente:

$$\begin{aligned} -V(\Delta i_x \cos s_b + \Delta i_y \sin s_b) &= \Delta V_n, \\ \Delta i_x \sin s_b - \Delta i_y \cos s_b &= 0, \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

y su resolución proporcionará las expresiones que describen el efecto que produce una maniobra normal sobre el vector inclinación, es decir,

$$\Delta i_x = -\frac{\Delta V_n}{V} \cos s_b, \quad (2.3.2)$$

$$\Delta i_y = -\frac{\Delta V_n}{V} \sin s_b. \quad (2.3.3)$$

En estas soluciones se observan los dos siguientes hechos:

- que el vector $\Delta \vec{i}$ tiene la misma dirección y sentido opuesto al radio vector del satélite, de modo que la correspondiente corrección dependerá de la hora en que se efectúe la maniobra, y
- que una maniobra norte tiene el mismo efecto que una maniobra sur efectuada medio día sidéreo después.

En la figura (2.3.1) representamos el efecto de un impulso normal sobre el vector inclinación.

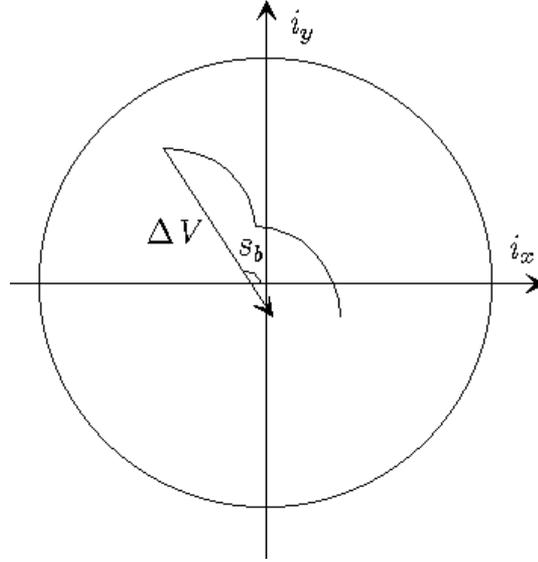


Figura 2.3.1: Efecto de una maniobra normal sobre el vector inclinación.

2.3.2 Efecto de un impulso tangencial sobre la excentricidad, semieje, deriva y longitud verdadera.

Para obtener analíticamente el efecto que un impulso tangencial tiene sobre la deriva y el vector excentricidad vamos a plantear un sistema de tres ecuaciones en el que las tres incógnitas son ΔD , Δe_x y Δe_y .

Una de las ecuaciones viene dada por la expresión (2.2.31); otra se obtiene a partir de (2.2.30) al tener en cuenta que el impulso radial es nulo puesto que, en este caso, únicamente existe la componente tangencial de la velocidad; y la tercera ecuación es el resultado de considerar en la expresión del radio vector (2.2.20) que, al tratarse de una maniobra impulsiva, cambia la velocidad del satélite pero no su posición, es decir, $\Delta r = 0$. Por tanto, el sistema de ecuaciones resulta ser:

$$\begin{aligned} V(\Delta D + 2\Delta e_x \cos s_b + 2\Delta e_y \sin s_b) &= \Delta V_t, \\ V(\Delta e_x \sin s_b - \Delta e_y \cos s_b) &= 0, \\ \frac{2}{3}\Delta D + \Delta e_x \cos s_b + \Delta e_y \sin s_b &= 0, \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

donde s_b es el ángulo sidéreo del satélite en el instante del impulso.

La resolución de este sistema de ecuaciones proporciona las expresiones que describen el efecto que produce una maniobra tangencial sobre la deriva y la excentricidad; éstas son:

$$\Delta D = -\frac{3\Delta V_t}{V}, \quad (2.3.5)$$

$$\Delta e_x = \frac{2\Delta V_t}{V} \cos s_b, \quad (2.3.6)$$

$$\Delta e_y = \frac{2\Delta V_t}{V} \operatorname{sen} s_b. \quad (2.3.7)$$

Aquí se ve que $\Delta \vec{e}$ tiene la dirección y el sentido del radio vector del satélite y que, por tanto, la correspondiente corrección depende de la hora en que se realice el impulso, mientras que para la deriva no existe esta dependencia del tiempo. También se puede observar que una maniobra este tiene el mismo efecto sobre el vector excentricidad que una maniobra oeste efectuada medio día sidéreo después.

En la figura (2.3.2) representamos el efecto de una maniobra tangencial sobre el vector excentricidad.

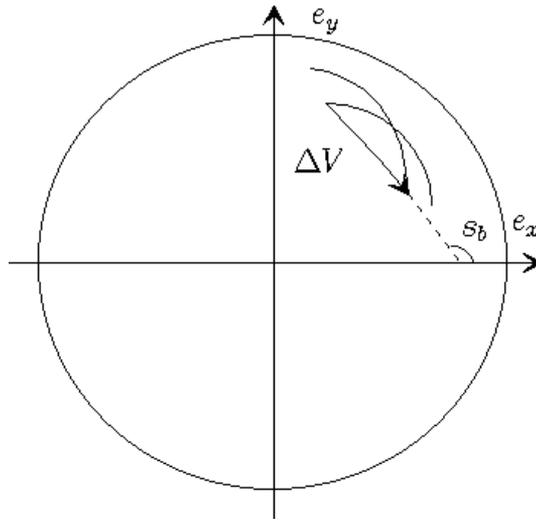


Figura 2.3.2: Efecto de una maniobra tangencial sobre el vector excentricidad.

Ahora bien, dado que, según (2.2.17), la evolución de la longitud verdadera depende de la deriva y de la excentricidad, resulta que un impulso tangencial también produce un cambio en la longitud verdadera del satélite. Pero esta variación es posterior al impulso, ya que en el instante de la maniobra la longitud no varía, es decir,

$$\Delta \lambda = \lambda(t) - \lambda^-, \quad (2.3.8)$$

donde λ^- es la longitud verdadera antes de la maniobra, y $\lambda(t)$ es la longitud verdadera en un instante t posterior al instante de la maniobra, t_b .

Considerando de nuevo la aproximación (2.2.14), recordando que $s = \Omega + \omega + v$, y sustituyendo las coordenadas del vector excentricidad dadas en (1.2.5), la expresión (2.2.17) se puede escribir en la forma

$$\lambda = \Omega + \omega + \Omega_{\oplus}(t - t_p) + D\Omega_{\oplus}(t - t_p) + 2e_x \operatorname{sen} s - 2e_y \operatorname{sen} s - \vartheta_G, \quad (2.3.9)$$

y, por tanto, de ésta se obtiene que

$$\Delta\lambda = \Delta D\Omega_{\oplus}(t - t_p) + 2\Delta e_x \operatorname{sen} s - 2\Delta e_y \operatorname{sen} s. \quad (2.3.10)$$

Si se sustituyen ahora las expresiones de ΔD , Δe_x y Δe_y dadas en (2.3.5), (2.3.6) y (2.3.7) y se tiene en cuenta que la longitud no varía en el instante del impulso y que $\Omega_{\oplus}(t - t_b) = (s - s_b)$, el efecto de una maniobra tangencial sobre la longitud verdadera resulta finalmente ser:

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta V_t}{V} \left[4 \operatorname{sen} \Omega_{\oplus}(t - t_b) - 3\Omega_{\oplus}(t - t_b) \right]. \quad (2.3.11)$$

Por otro lado, el semieje también varía como resultado de una maniobra tangencial al estar éste relacionado con la deriva mediante la expresión

$$a = a_s - \frac{2}{3}a_s D \quad (2.3.12)$$

obtenida a partir de (2.2.10) y (2.2.16), de modo que

$$\Delta a = -\frac{2}{3}a_s \Delta D, \quad (2.3.13)$$

donde $\Delta a = a^+ - a^-$, con a^+ y a^- los semiejes inmediatamente después de la maniobra y antes de la misma, respectivamente.

Entonces, el efecto que un impulso tangencial produce sobre a , tras sustituir ΔD (2.3.5), queda en la forma:

$$\Delta a = 2a_s \frac{\Delta V_t}{V}. \quad (2.3.14)$$

Según esta expresión, una maniobra este ($\Delta V_t > 0$) aumenta el valor de a , y como consecuencia, el periodo orbital del satélite, produciéndose un desplazamiento relativo del satélite hacia el oeste. Análogamente, una maniobra oeste, ($\Delta V_t < 0$), produce el efecto contrario, es decir, un desplazamiento hacia el este.

En las figuras (2.3.3) y (2.3.4) se ilustra el efecto de las maniobras tangenciales en el plano longitud media - deriva y en el plano longitud media - semieje, respectivamente.

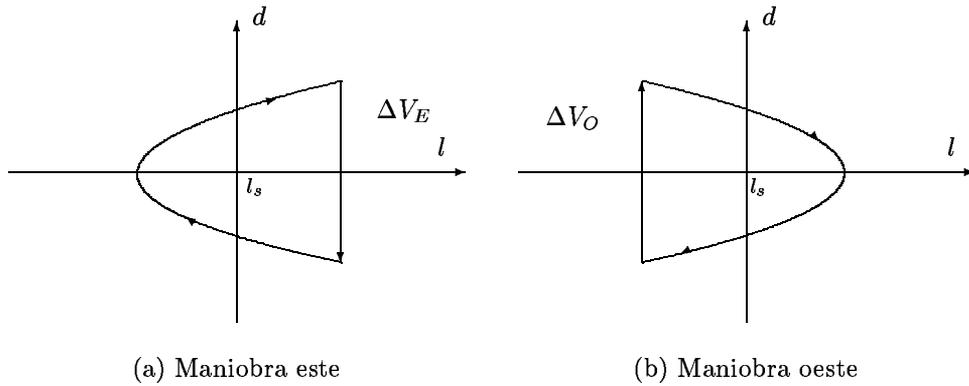


Figura 2.3.3: Efecto de una maniobra tangencial. Plano longitud media - deriva.

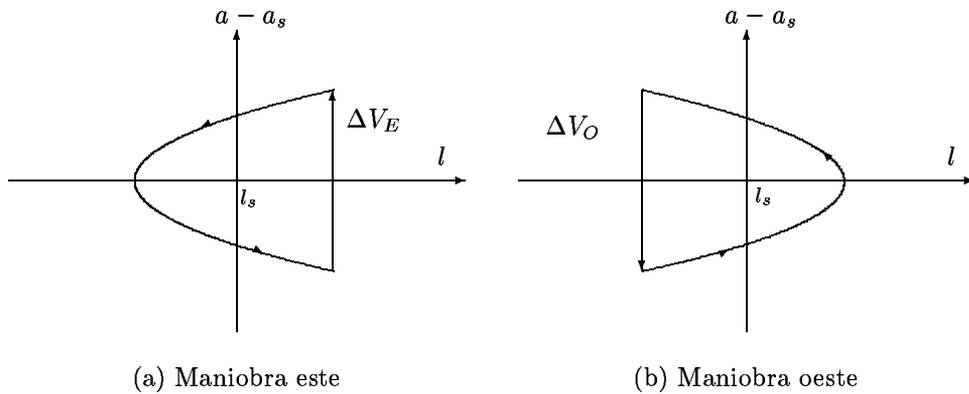


Figura 2.3.4: Efecto de una maniobra tangencial. Plano longitud media - semieje.

2.4 Maniobras norte-sur.

Como se ha visto en la sección anterior, una maniobra normal modifica el vector inclinación. Puesto que la acción de la fuerza lunisolar afecta principalmente a este vector, las maniobras norte-sur, efectuadas mediante impulsos normales, se usan, por tanto, para compensar este efecto perturbador.

Ya hemos dicho que cada misión tiene asignada un margen de tolerancia para el valor de la inclinación. Esta región viene, por tanto, representada por un círculo en el plano (i_x, i_y) de centro $(0,0)$ y radio i_c , el valor de control para la inclinación, es decir, el valor máximo permitido para i . El vector \vec{i} , en su evolución, puede ocupar cualquier posición

en este círculo pero, una vez que su módulo alcanza el valor i_c (véase la figura (2.4.1)), es necesario efectuar una maniobra que lo modifique para mantenerlo durante todo el ciclo siguiente dentro del círculo de control.

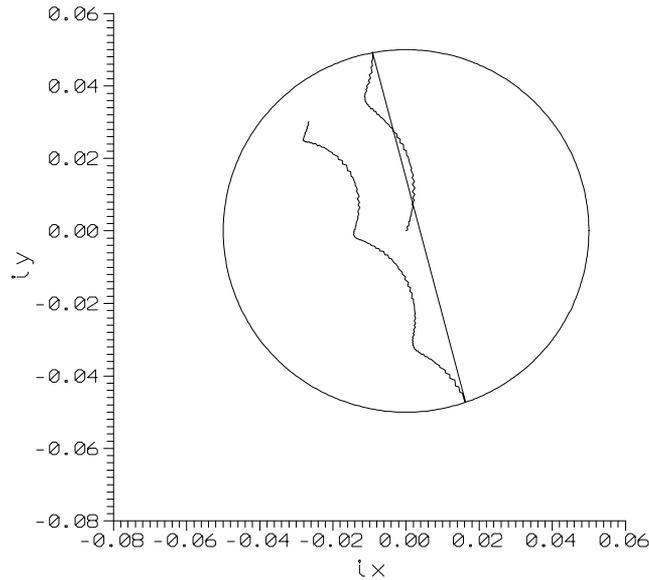


Figura 2.4.1: Evolución del vector inclinación y maniobra para un círculo de control de radio $i_c = 0.05$.

Naturalmente, según lo visto anteriormente, para llevar a cabo el mantenimiento en estación norte-sur es necesario conocer la magnitud del impulso normal, ΔV_n , y el instante en el que se efectuará la maniobra, s_b .

2.4.1 Cálculo del impulso normal.

La magnitud del impulso normal se determina a partir de las expresiones que proporcionan el efecto que tiene este impulso sobre el vector \vec{i} , (2.3.2) y (2.3.3), es decir,

$$\Delta \vec{i} = -\frac{\Delta V_n}{V} \begin{pmatrix} \cos s_b \\ \sin s_b \end{pmatrix}, \quad (2.4.1)$$

donde $\Delta \vec{i} = \vec{i}^+ - \vec{i}^-$.

Una manera óptima de controlar la inclinación, manteniendo al vector \vec{i} dentro del círculo de control durante el máximo tiempo posible, se consigue aplicando la estrategia *dirección secular* [Chan, 1999]

Esta estrategia proporciona un método para obtener las componentes del vector $\Delta\vec{i}$, y como consecuencia, las del vector inclinación después de la maniobra, es decir, el vector inclinación objetivo, $\vec{i}_{\mathcal{T}}$. De acuerdo con ella se deben cumplir las siguientes condiciones:

- el vector $\Delta\vec{i}$ debe llevar la misma dirección que la componente secular de la evolución del vector \vec{i} , y sentido opuesto,

$$\arg(\Delta\vec{i}) = -\Omega_{sec}; \quad (2.4.2)$$

- el módulo del vector $\Delta\vec{i}$ debe ser tal que el módulo del vector $\vec{i}_{\mathcal{T}}$ sea menor que el valor de control para la inclinación, i_c .

En estos términos, las componentes del vector $\vec{i}_{\mathcal{T}}$ serán:

$$\begin{aligned} i_{x_{\mathcal{T}}} &= i_x^+ = i_x^- - \Delta i \cos \Omega_{sec}, \\ i_{y_{\mathcal{T}}} &= i_x^+ = i_x^- - \Delta i \sen \Omega_{sec}, \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

donde Ω_{sec} representa la dirección de la componente secular de la evolución de \vec{i} . Con esta forma de actuar se corrige únicamente la deriva secular, ya que las variaciones periódicas (aproximadamente de amplitudes $0.^\circ 0233$ producidas por el Sol y $0.^\circ 00457$, por la Luna) sólo se corrigen cuando los radios de los círculos de control son de ese orden.

Una vez determinado el vector $\Delta\vec{i}$ resulta inmediato obtener la magnitud del impulso norte-sur a partir de las expresiones (2.3.2) y (2.3.3) mediante la expresión:

$$\Delta V_{N/S} = V \sqrt{\Delta i_x^2 + \Delta i_y^2}. \quad (2.4.4)$$

Naturalmente, debido a que la variación secular del vector inclinación no tiene una dirección constante, es necesario determinar el valor de la longitud del nodo ascendente, Ω_{sec} .

En la figura (2.4.2) representamos la evolución del vector inclinación desde $\vec{i} = (0, 0)$ durante 10 años, del 2000 al 2009, y la tabla (2.4.1) muestra el valor de la dirección secular del vector inclinación para estos 10 años.

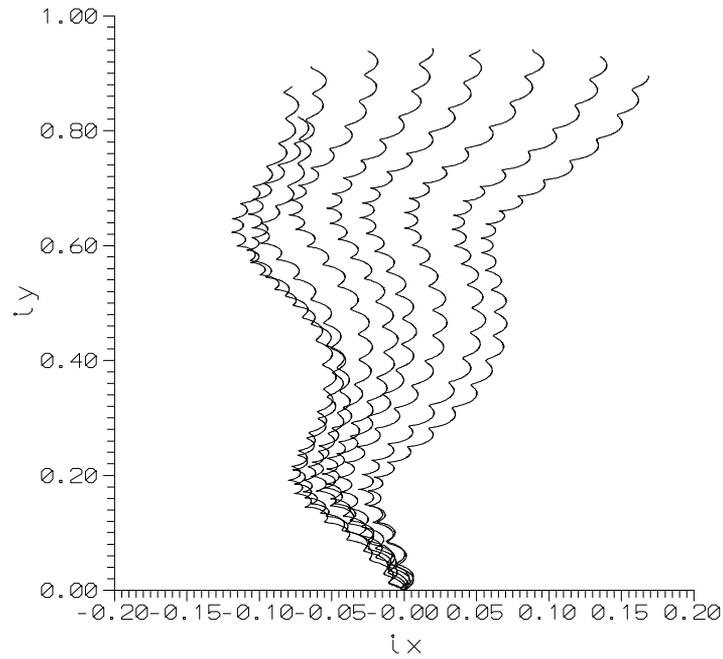


Figura 2.4.2: Evolución del vector inclinación durante 10 años.

Año	Ω_{sec} (en grados)
2000	95.08016
2001	95.11428
2002	95.06518
2003	94.02151
2004	91.52129
2005	88.82844
2006	86.81624
2007	84.59143
2008	81.71584
2009	79.34204

Tabla 2.4.1: Dirección secular del vector inclinación.

2.4.2 Determinación del instante de la maniobra.

Para determinar el instante en el que se ha de realizar la maniobra es preciso calcular, en primer lugar, el tiempo sidéreo local, que se obtiene a partir de las expresiones (2.3.2)

y (2.3.3) como

$$s_b = \arctan \left(\frac{\Delta i_y}{\Delta i_x} \right), \quad (2.4.5)$$

y, puesto que una maniobra norte produce el mismo efecto que una maniobra sur efectuada medio día sidéreo después, (véanse las expresiones (2.3.2) y (2.3.3)), el tiempo universal de ésta se determina a partir del tiempo sidéreo, s_b , dependiendo del tipo de maniobra que se aplique. En la tabla (2.4.2) se indica el tiempo universal aproximado de las maniobras norte y sur correspondiente a un satélite estacionado en la longitud 30° Oeste, según la época del año, para una deriva secular media de 90° .

Época del año	α_\odot	H_{\odot_s}	TU para ΔV_S	TU para ΔV_N
Primavera	0^h	6^h	20^h	8^h
Verano	6^h	0^h	14^h	2^h
Otoño	12^h	18^h	8^h	20^h
Invierno	18^h	12^h	2^h	14^h

Tabla 2.4.2: Tiempo Universal aproximado de las maniobras norte y sur para $l_s = 30^\circ$ Oeste y $\Omega_{sec} = 90^\circ$.

2.5 Maniobras este-oeste.

Según se vio en la sección 2.3, las maniobras este-oeste modifican la deriva y el vector excentricidad y, como consecuencia, la longitud verdadera y el semieje. Puesto que la fuerza perturbadora gravitatoria terrestre y la fuerza debida a la presión de radiación solar modifican estos mismos elementos, estas maniobras corrigen también las perturbaciones producidas por la acción de estas fuerzas.

De la misma forma que el valor de la longitud verdadera se tiene que mantener dentro de su ventana en longitud, el valor de la excentricidad también debe ser controlado. Cada misión tiene asignada una región de tolerancia para la excentricidad: un círculo en el plano (e_x, e_y) de centro $(0, 0)$ y radio e_c , el valor del control para la excentricidad, es decir, el máximo permitido para la excentricidad; dentro de este círculo el vector excentricidad puede ocupar cualquier posición. Es muy importante mantener al vector \vec{e} dentro de su círculo de control ya que, si lo abandona, el valor de la excentricidad aumenta y causa oscilaciones de gran amplitud en la longitud verdadera (véase la figura (2.2.1)) llegando incluso a abandonar su ventana en longitud por este motivo.

Un mismo impulso tangencial, ΔV_t , corrige estos dos elementos simultáneamente, y puede ocurrir que la magnitud del impulso que corrige uno de ellos no sea la adecuada para el otro. Si la magnitud del impulso necesaria para corregir la longitud es mayor que la requerida para mantener el vector excentricidad dentro de su círculo de control, es suficiente aplicar un único impulso tangencial para corregir estos elementos. Si, por el contrario, la magnitud del impulso necesaria para corregir la longitud es menor que la del que corrige \vec{e} es conveniente la realización de dos impulsos tangenciales de distinto signo (uno este y otro oeste), separados medio día sidéreo de modo que su efecto combinado produzca la variación deseada en \vec{e} y λ [Legendre, 1980].

En esta memoria se estudia el mantenimiento en estación de un satélite para el que el efecto de la presión de radiación solar es dominante frente al de la fuerza gravitatoria terrestre (debido al gran tamaño de los paneles solares) y, por tanto, la magnitud del impulso que corrige el vector excentricidad es mayor que la necesaria para corregir la longitud. Por esta razón será necesaria la aplicación de dos impulsos tangenciales en las condiciones descritas.

El efecto que tienen dos impulsos, ΔV_{t_1} y ΔV_{t_2} , sobre el vector excentricidad y la longitud verdadera, obtenido a partir de las expresiones (2.3.6), (2.3.7), y (2.3.11) y teniendo en cuenta que están separados medio día sidéreo, resulta ser:

$$\Delta \vec{e} = \frac{2}{V} (\Delta V_{t_1} - \Delta V_{t_2}) \begin{pmatrix} \cos s_b \\ \sin s_b \end{pmatrix}, \quad (2.5.1)$$

$$\begin{aligned} \Delta \lambda &= -\frac{3}{V} (\Delta V_{t_1} + \Delta V_{t_2}) \left[\Omega_{\oplus} (t - t_b) - 90^\circ \right] + \\ &+ \frac{1}{V} (\Delta V_{t_1} - \Delta V_{t_2}) \left[4 \sin \Omega_{\oplus} (t - t_b) - 270^\circ \right], \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

donde recordemos que s_b representa el ángulo sidéreo del satélite en el primer impulso; t_b el instante en el que se efectúa y Ω_{\oplus} la velocidad de rotación terrestre en grados/día.

Si se limita la expresión (2.5.2) al primer término tendríamos la análoga para la longitud media, l :

$$\Delta l = -\frac{3}{V} (\Delta V_{t_1} + \Delta V_{t_2}) \left[\Omega_{\oplus} (t - t_b) - 90^\circ \right]. \quad (2.5.3)$$

Entonces, a la vista de las expresiones (2.5.1) y (2.5.3) y recordando que se trata de impulsos de signos opuestos, se observa que:

- el vector excentricidad se corrige con una maniobra de magnitud

$$|\Delta V_{t_1}| + |\Delta V_{t_2}|;$$

- la longitud media se corrige con una maniobra de magnitud

$$|\Delta V_{t_1}| - |\Delta V_{t_2}|.$$

El orden de realización de las maniobras depende de la longitud de estacionamiento. Para un satélite estacionado en un lugar donde $\ddot{l} < 0$, se efectuará primero una maniobra oeste, ΔV_O , evitando así que el valor de la longitud media abandone la ventana en longitud por el oeste y, posteriormente, una maniobra este, ΔV_E , de menor magnitud, que corregirá el exceso de velocidad para l y aumentará el efecto de la corrección para \vec{e} (véase la figura (2.5.1)).

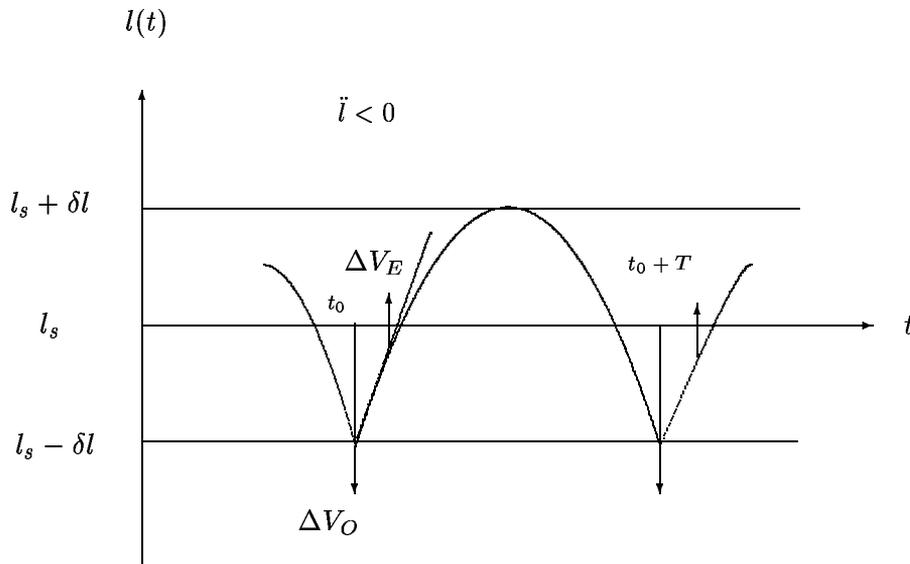


Figura 2.5.1: Secuencia de maniobras tangenciales ΔV_O , ΔV_E para $\ddot{l} < 0$.

En las figuras (2.5.2), (2.5.3) y (2.5.4) se muestra el resultado de la aplicación de dos maniobras tangenciales, primero oeste y luego este, en los planos longitud media - deriva y longitud media - semieje, así como sobre el vector excentricidad.

Naturalmente, de las expresiones anteriores se observa que para efectuar el mantenimiento este-oeste, tienen que ser calculados tanto los valores de los impulsos tangenciales como el instante de la realización del primero de ellos, t_b .

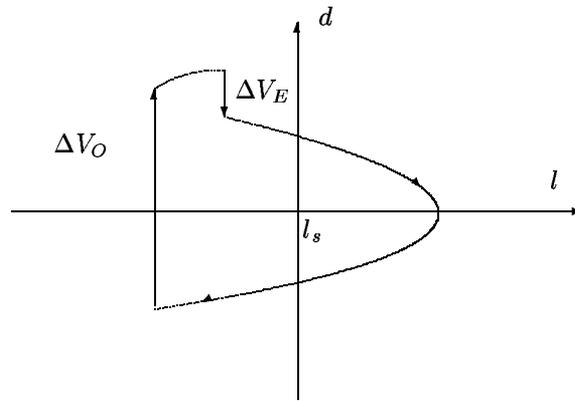


Figura 2.5.2: Efecto de dos maniobras tangenciales. Plano longitud media - deriva.

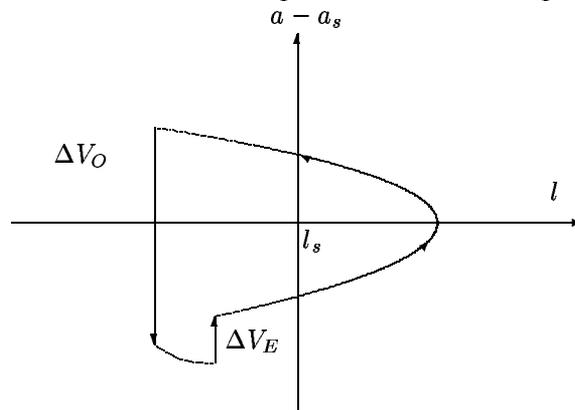


Figura 2.5.3: Efecto de dos maniobras tangenciales. Plano longitud media - semieje.

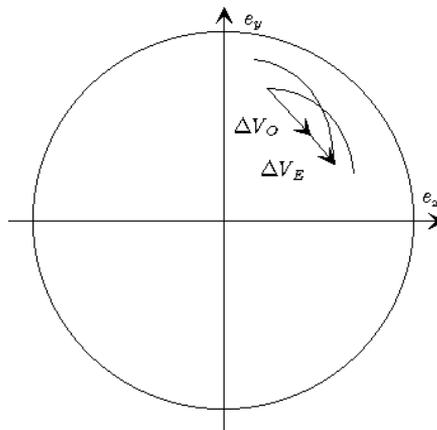


Figura 2.5.4: Efecto de dos maniobras tangenciales de distinto signo y separadas medio día sidéreo sobre el vector excentricidad.

2.5.1 Cálculo de los impulsos tangenciales.

La magnitud de los dos impulsos tangenciales se obtiene a partir de las expresiones que describen el efecto que éstos tienen sobre el vector excentricidad y la longitud media (2.5.1) y (2.5.3), es decir,

$$\Delta \vec{e} = \frac{2}{V} (\Delta V_{t_1} - \Delta V_{t_2}) \begin{pmatrix} \cos s_b \\ \text{sen } s_b \end{pmatrix}, \quad (2.5.4)$$

$$(2.5.5)$$

$$\Delta l = -\frac{3}{V} (\Delta V_{t_1} + \Delta V_{t_2}) \left[\Omega_{\oplus} (t - t_b) - 90^\circ \right], \quad (2.5.6)$$

donde recordemos que

$$\begin{aligned} \Delta \vec{e} &= \vec{e}^+ - \vec{e}^-, \\ \Delta l &= l(t) - l^-, \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

siendo \vec{e}^- y l^- el vector excentricidad y la longitud media antes de la primera maniobra, \vec{e}^+ el vector excentricidad en el instante inmediatamente después de la segunda maniobra, y $l(t)$, el valor de la longitud media en un instante t posterior a la segunda maniobra.

Es necesario conocer previamente los valores e^+ y $l(t_{\mathcal{T}})$, es decir, los valores objetivo para la excentricidad y la longitud media que se desean obtener tras las maniobras:

- para la longitud media, el objetivo será que alcance un determinado valor $l_{\mathcal{T}} = l(t_{\mathcal{T}})$ en algún instante $t_{\mathcal{T}}$ del ciclo. Por ejemplo, si se trata de un satélite que verifica $\ddot{l} < 0$, podría ser que l alcanzara el límite inferior de la ventana al final del ciclo, es decir, $l_{\mathcal{T}}(t_b + T) = l_s - \delta l$;
- el valor de la excentricidad objetivo, $e_{\mathcal{T}}$, se determina de manera óptima con la aplicación de la estrategia *perigeo hacia el Sol*, que se verá a continuación.

Por tanto, una vez determinados los valores \vec{e}^+ y $l(t_{\mathcal{T}})$, con las expresiones (2.5.4) y (2.5.6) se pueden calcular las magnitudes

$$\Delta V_{t_1} - \Delta V_{t_2} = \arctan \left(\frac{\Delta e_y}{\Delta e_x} \right), \quad (2.5.8)$$

$$(2.5.9)$$

$$\Delta V_{t_1} + \Delta V_{t_2} = \frac{-\Delta l \cdot V}{3 \left[\Omega_{\oplus} (t - t_b) - 90^\circ \right]}, \quad (2.5.10)$$

que proporcionan los valores de los impulsos tangenciales ΔV_{t_1} y ΔV_{t_2} .

Estrategia perigeo hacia el Sol.

Tanto para el cálculo de las componentes del vector excentricidad objetivo, como para la determinación del instante de la primera maniobra, es recomendable el uso de la estrategia *perigeo hacia el Sol* [Soop, 1983], [Kelly *et al.*, 1994], [Gantous, 1985], [Klotz & Prigge, 1985]. Con la aplicación de esta estrategia se pretende que el vector excentricidad describa un círculo anual, similar al de su evolución libre (véase la figura (1.5.1-(b))), pero con menor radio, de modo que permanezca dentro de su círculo de control.

La estrategia *perigeo hacia el Sol* surge como resultado de combinar:

- (a) el efecto que tiene sobre la excentricidad una maniobra este-oeste realizada para corregir la longitud, y
- (b) la variación que experimenta \vec{e} debido a la presión de radiación solar.

El cambio en excentricidad debido a una maniobra tangencial viene dado por las expresiones (2.3.6) y (2.3.7), es decir,

$$\Delta \vec{e} = \frac{2}{V} \Delta V_t \begin{pmatrix} \cos s_b \\ \text{sen } s_b \end{pmatrix}, \quad (2.5.11)$$

de manera que, en media, para cada ciclo de T días de duración se tiene que

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{2}{V} \frac{\Delta V_t}{T} \begin{pmatrix} \cos s_b \\ \text{sen } s_b \end{pmatrix}. \quad (2.5.12)$$

Por otra parte, para la variación del vector \vec{e} perturbado por el efecto de la presión de radiación solar se tenía (1.5.42), es decir,

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{3}{2} \epsilon (1 + \mathcal{R}) \frac{A}{m_s} \cdot \frac{P}{na} \begin{pmatrix} -\text{sen } s_\odot \\ \cos s_\odot \end{pmatrix}. \quad (2.5.13)$$

La combinación de los dos efectos (2.5.12) y (2.5.13) da como resultado para la variación de \vec{e} :

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{3}{2} \epsilon (1 + \mathcal{R}) \frac{A}{m_s} \cdot \frac{P}{na} \begin{pmatrix} -\text{sen } s_\odot \\ \cos s_\odot \end{pmatrix} + \frac{2}{V} \frac{\Delta V_t}{T} \begin{pmatrix} \cos s_b \\ \text{sen } s_b \end{pmatrix}, \quad (2.5.14)$$

que obviamente es mínima cuando

$$s_b = s_\odot + \frac{\pi}{2}, \quad \text{si} \quad \Delta V_t = \Delta V_{\text{este}}, \quad (2.5.15)$$

o bien, cuando

$$s_b = s_{\odot} - \frac{\pi}{2}, \quad \text{si} \quad \Delta V_t = \Delta V_{este}, \quad (2.5.16)$$

por lo que, al imponer esta última condición, queda finalmente:

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \left(\frac{3}{2}\epsilon (1 + \mathcal{R}) \frac{A}{m_s} \cdot \frac{P}{na} - \frac{2}{V} \frac{|\Delta V_t|}{T} \right) \begin{pmatrix} -\text{sen } s_{\odot} \\ \text{cos } s_{\odot} \end{pmatrix}. \quad (2.5.17)$$

La integración de estas ecuaciones conduce a las expresiones que describen la evolución óptima del vector excentricidad incluyendo, tanto el efecto de la presión de radiación solar, como el de las maniobras tangenciales:

$$\vec{e} = \frac{1}{\Omega_{\odot}} \left(\frac{3}{2}\epsilon (1 + \mathcal{R}) \frac{A}{m_s} \cdot \frac{P}{na} - \frac{2}{V} \frac{|\Delta V_t|}{T} \right) \begin{pmatrix} \text{cos } s_{\odot} \\ \text{sen } s_{\odot} \end{pmatrix}. \quad (2.5.18)$$

En estas expresiones se observa que el vector excentricidad, que está dirigido hacia el Sol, describe un círculo anual, similar al descrito en la sección 1.5, pero con un radio óptimo cuyo valor viene dado por:

$$|\vec{e}(t)| = \frac{1}{\Omega_{\odot}} \left(\frac{3}{2}\epsilon (1 + \mathcal{R}) \frac{A}{m_s} \cdot \frac{P}{na} - \frac{2}{V} \frac{|\Delta V_t|}{T} \right). \quad (2.5.19)$$

Puesto que el vector \vec{e} , por su definición (1.2.5), apunta al perigeo de la órbita, se deduce que el perigeo orbital estará en la dirección del Sol; de ahí el nombre *perigeo hacia el Sol*.

En la práctica, no tienen por qué coincidir en todo momento las direcciones de \vec{e} y del Sol; es suficiente con que lo hagan en algún instante del ciclo.

Determinación de $e_{\mathcal{T}}$.

Vamos a aplicar esta estrategia con el fin de determinar el valor de la excentricidad objetivo, $e_{\mathcal{T}}$.

En virtud de ella, elegimos un vector excentricidad objetivo, $\vec{e}_{\mathcal{T}}$, que sea tal que:

- en la mitad del ciclo, el vector \vec{e} apunte hacia el Sol;
- su módulo, en el instante inmediatamente posterior a la maniobra, sea igual al valor del control en excentricidad, e_c .

Sean los vectores

$\vec{e}^+ = \vec{e}(t_b)$, el vector excentricidad después de la maniobra, de componentes

$$\vec{e}^+ = e_c \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (2.5.20)$$

$\vec{e}(t_b + T/2)$, el vector excentricidad en la mitad del ciclo.

Según la expresión (1.5.45) que describe la evolución del vector excentricidad, estos vectores se pueden escribir en la forma:

$$\vec{e}(t_b) = \vec{e}_0 + R_e \begin{pmatrix} \cos s_\odot(t_b) \\ \text{sen } s_\odot(t_b) \end{pmatrix}, \quad (2.5.21)$$

$$\vec{e}(t_b + T/2) = \vec{e}_0 + R_e \begin{pmatrix} \cos s_\odot(t_b + T/2) \\ \text{sen } s_\odot(t_b + T/2) \end{pmatrix}. \quad (2.5.22)$$

La primera condición de esta estrategia implica que el vector \vec{e}_0 debe tener también la dirección del Sol en la mitad del ciclo, y dado que $e_c < R_e$, su sentido tiene que ser opuesto a ella para así garantizar que $\vec{e}(t_b + T/2)$ permanezca en el círculo de control; de este modo,

$$\vec{e}_0 = e_0 \begin{pmatrix} -\cos s_\odot(t_b + T/2) \\ -\text{sen } s_\odot(t_b + T/2) \end{pmatrix}. \quad (2.5.23)$$

Ahora bien, de la segunda condición deducimos, tras sustituir las expresiones (2.5.20) y (2.5.23) en (2.5.21), que:

$$e_c \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = e_0 \begin{pmatrix} -\cos s_\odot(t_b + T/2) \\ -\text{sen } s_\odot(t_b + T/2) \end{pmatrix} + R_e \begin{pmatrix} \cos s_\odot(t_b) \\ \text{sen } s_\odot(t_b) \end{pmatrix}, \quad (2.5.24)$$

y obtenemos a partir de ella la siguiente expresión para e_0 :

$$e_0 = R_e \cos \left(s_\odot(t_b + T/2) - s_\odot(t_b) \right) - \sqrt{e_c^2 - R_e^2 \text{sen}^2 \left(s_\odot(t_b + T/2) - s_\odot(t_b) \right)}. \quad (2.5.25)$$

Con este valor de e_0 , el vector excentricidad objetivo, $\vec{e}^+ = \vec{e}_T$ queda determinado por la expresión:

$$\begin{pmatrix} e_{x_T} \\ e_{y_T} \end{pmatrix} = e_0 \begin{pmatrix} -\cos s_\odot(t_b + T/2) \\ -\text{sen } s_\odot(t_b + T/2) \end{pmatrix} + R_e \begin{pmatrix} \cos s_\odot(t_b) \\ \text{sen } s_\odot(t_b) \end{pmatrix}. \quad (2.5.26)$$

2.5.2 Determinación del instante de las maniobras.

La estrategia *perigeo hacia el Sol* también proporciona la manera de calcular los instantes de realización de las maniobras este-oeste a partir de las condiciones (2.5.15) y (2.5.16).

Para el caso $\ddot{l} < 0$, en el que la primera maniobra será oeste, la condición (2.5.15) implica que ha de realizarse aproximadamente a las 18^h de tiempo solar local en el satélite, y por lo tanto, la segunda maniobra, este, se efectuará medio día sidéreo después, esto es, aproximadamente a las 6^h del día siguiente.

Para el caso $\ddot{l} > 0$, la primera maniobra, que será este, se llevará a cabo a las 6^h de tiempo solar local y la segunda, oeste, a las 18^h de ese mismo día, según (2.5.16).

No obstante, este tiempo es aproximado y se calculará con más precisión cuando se vaya a realizar el impulso.

2.6 Conclusiones y resultados.

El propósito de este capítulo ha sido el estudio de las maniobras de mantenimiento en estación para controlar la posición de un satélite geoestacionario.

Se han obtenido, primeramente, las expresiones de las maniobras impulsivas en un sistema de referencia ligado al satélite y, a continuación, hemos analizado el efecto que producen sobre los elementos orbitales.

Hemos presentado también la manera de determinar la magnitud del impulsos correctores y de los instantes de realización de las maniobras norte-sur y este-oeste (un impulso para las primeras y dos impulsos de distinto signo, separados medio día sidéreo, para las segundas) utilizando modelos lineales y estrategias óptimas ya conocidas: *dirección secular* y *perigeo hacia el Sol*. Puesto que la dirección secular de la variación del vector inclinación es distinta para cada año, hemos obtenido su valor para 10 años, del 2000 al 2009. Y, finalmente, a partir de la estrategia *perigeo hacia el Sol*, hemos obtenido las expresiones que permiten calcular el vector excentricidad objetivo, resultado que utilizaremos posteriormente en la optimización del cálculo de maniobras.

Capítulo 3

Integración numérica de las ecuaciones del movimiento.

Con el fin de optimizar el cálculo de los impulsos necesarios para el mantenimiento en estación del satélite resulta imprescindible comenzar determinando con gran precisión su posición. Por esta razón se hace necesaria la integración numérica de las ecuaciones que describen su movimiento, $\ddot{\vec{x}} = \mathbf{F}(\vec{x}, t)$, donde la función vectorial \mathbf{F} representa la acción conjunta de todas las fuerzas que actúan sobre él.

Los modelos que se utilizan para la determinación de la magnitud de las fuerzas perturbadoras son:

- La fuerza perturbadora gravitatoria terrestre evaluada a partir de su desarrollo en armónicos esféricos, incluyendo hasta el orden y grado 4, y el modelo de geopotencial GEM-T2, seleccionados después de comparar la magnitud de la fuerza para distintos grados y modelos de geopotencial.
- La fuerza lunisolar, obtenida como gradiente del potencial perturbador del problema de los tres cuerpos, que se calcula a partir de las coordenadas cartesianas geocéntricas de la Luna y el Sol; estas últimas se han determinado utilizando diferentes desarrollos para su comparación.
- La fuerza producida por la presión de radiación solar, que se calcula a partir de la expresión (1.5.4) en función de las coordenadas cartesianas geocéntricas de Sol.

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento del satélite se integran utilizando el método de Gauss-Jackson, o Σ^2 , iniciando previamente la tabla de integración con el proceso de iniciación de Herrick y el método Runge-Kutta de cuarto orden. Las condiciones

iniciales de la integración se determinan a partir de los elementos orbitales equinocciales mediante cálculo de efemérides específico desarrollado para este caso.

Para el cálculo de los elementos orbitales osculatrices en los tiempos de las maniobras aplicamos, en primer lugar, el método de interpolación de Bower que dará posiciones y velocidades en esos tiempos y, a continuación, un algoritmo desarrollado para este cálculo de órbitas concreto que evita singularidades numéricas.

Con un filtro numérico que elimina los cortos periodos de estos elementos obtenemos, finalmente, los elementos centrados.

Completamos el capítulo con una validación numérica comparando estos parámetros centrados con elementos medios proporcionados por HISPASAT S.A., determinados mediante métodos analíticos.

3.1 Modelos de fuerzas.

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un satélite geoestacionario en presencia de fuerzas externas son de la forma:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= F_x(x, y, z, t), \\ \ddot{y} &= F_y(x, y, z, t), \\ \ddot{z} &= F_z(x, y, z, t),\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

bajo las condiciones iniciales

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \quad \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0,\tag{3.1.2}$$

donde (F_x, F_y, F_z) representa la acción conjunta de las fuerzas perturbadoras descritas en el primer capítulo: la fuerza perturbadora gravitatoria terrestre, \mathbf{F}^G , la fuerza lunisolar, \mathbf{F}^{LS} , y la fuerza debida a la presión de radiación solar, \mathbf{F}^{RS} ; es decir,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^G + \mathbf{F}^{LS} + \mathbf{F}^{RS}$$

Al no considerar ahora simplificaciones ni aproximaciones en el cálculo del efecto de estas fuerzas, la integración numérica de las ecuaciones del movimiento que forman el sistema (3.1.1) proporciona con gran precisión las posiciones y velocidades del satélite.

A continuación se presentan los modelos utilizados para la evaluación de estas fuerzas en un sistema de referencia ecuatorial geocéntrico referido al equinoccio medio en t_0 , que denotaremos por $R(O; XYZ)$.

3.1.1 Fuerza gravitatoria terrestre.

En la sección 1.3 se vio cómo la fuerza perturbadora que ejerce el campo gravitatorio terrestre se obtiene como gradiente del potencial gravitatorio terrestre, U , (1.3.2),

$$U = \frac{Gm_{\oplus}}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{r_t}{r} \right)^n (J_{nm} R_{nm}(\vartheta, \lambda) + K_{nm} S_{nm}(\vartheta, \lambda)) \right\}. \quad (3.1.3)$$

Ahora, si consideramos las coordenadas geográficas del satélite, dadas por

$$\begin{aligned} \xi &= r \operatorname{sen} \vartheta \cos \lambda, \\ \eta &= r \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \lambda, \\ \zeta &= r \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

donde (r, ϑ, λ) son sus coordenadas polares esféricas, la expresión del potencial U , desarrollado hasta el orden y grado cuarto, en función de estas coordenadas, queda :

$$\begin{aligned} U(\xi, \eta, \zeta) &= \mu \left\{ \frac{1}{r} - \frac{r_t^2}{2r^5} \left[J_{20} (2\zeta^2 - \xi^2 - \eta^2) + 6J_{22} (\xi^2 - \eta^2) + 12K_{22}\xi\eta \right] - \right. \\ &- \frac{r_t^3}{2r^7} \left[J_{30} (2\zeta^3 - 3\xi^2\zeta - 3\eta^2\zeta) + J_{31} (12\xi\zeta^2 - 3\xi^2 - 3\xi\eta^2) + \right. \\ &\quad + K_{31} (12\eta\zeta^2 - 3\xi^2\eta - 3\eta^3) + 30J_{32} (\xi^2\zeta - \eta^2\zeta) + 60K_{32}\xi\eta\zeta + \\ &\quad \left. \left. + 30J_{33} (\xi^3 - 3\xi\eta^2) + 30K_{33} (3\xi^2\eta - \eta^3) \right] - \right. \\ &- \frac{r_t^4}{8r^9} \left[J_{40} (8\zeta^4 + 3\xi^4 + 3\eta^4 + 6\xi^2\eta^2 - 24\xi^2\zeta^2) + J_{41} (20\xi\zeta^3 - 16\xi^3\zeta - 15\xi\eta^2\zeta) + \right. \\ &\quad + 8K_{41} (40\eta\zeta^3 - 30\xi^2\eta\zeta - 30\eta^3\zeta) + 4J_{42} (90\xi^2\zeta^2 - 90\eta^2\zeta^2 - 15\xi^4 + 15\eta^4) + \\ &\quad + 8K_{42} (90\xi\eta\zeta^2 - 15\xi^3\eta - 15\xi\eta^3) + 8J_{43} (105\xi^3\zeta - 315\xi\eta^2\zeta) + \\ &\quad + 8K_{43} (315\xi^2\eta\zeta - 105\eta^3\zeta) + 840J_{44} (\xi^4 + \eta^4 - 6\xi^2\eta^2) + \\ &\quad \left. \left. + 3360K_{44} (\xi^3\eta - \xi\eta^3) \right] \right\}. \quad (3.1.5) \end{aligned}$$

Las derivadas del potencial, U (3.1.5), respecto de (ξ, η, ζ) , proporcionan, por tanto, las componentes de la fuerza perturbadora gravitatoria terrestre:

$$\begin{aligned}
F_\xi &= \frac{\partial U}{\partial \xi} = \mu \left\{ \frac{-\xi}{r^3} - \right. \\
&- \frac{r_t^2}{2r^7} \left[J_{20} \left(3\xi^3 + 3\xi\eta^2 - 12\xi\zeta^2 \right) + J_{22} \left(-18\xi^3 + 42\xi\eta^2 + 12\xi\zeta^2 \right) + \right. \\
&\quad \left. \left. + K_{22} \left(-48\xi^2\eta + 12\eta^3 + 12\eta\zeta^2 \right) \right] - \right. \\
&- \frac{r_t^3}{2r^9} \left[J_{30} \left(15\xi^3\zeta + 15\xi\eta^2\zeta - 20\xi\zeta^3 \right) + \right. \\
&\quad + J_{31} \left(12\xi^4 + 9\xi^2\eta^2 - 81\xi^2\zeta^2 - 3\eta^4 + 9\eta^2\zeta^2 + 12\zeta^4 \right) + \\
&\quad + K_{31} \left(15\xi^3\eta + 15\xi\eta^3 - 90\xi\eta\zeta^2 \right) + \\
&\quad + J_{32} \left(-150\xi^3\zeta + 270\xi\eta^2\zeta + 60\xi\zeta^3 \right) + \\
&\quad + K_{32} \left(-360\xi^2\eta\zeta + 60\eta^3\zeta + 60\eta\zeta^3 \right) + \\
&\quad + J_{33} \left(-120\xi^4 + 630\xi^2\eta^2 + 90\xi^2\zeta^2 - 90\eta^4 - 90\eta^2\zeta^2 \right) + \\
&\quad \left. \left. + K_{33} \left(-450\xi^3\eta + 390\eta^3\xi + 180\xi\eta\zeta^2 \right) \right] - \right. \\
&- \frac{r_t^4}{8r^{11}} \left[J_{40} \left(-15\xi^5 - 30\xi^3\eta^2 + 180\xi^3\zeta^2 - 15\xi\eta^4 - 104\xi\zeta^4 + 180\xi\eta^2\zeta^2 \right) + \right. \\
&\quad + J_{41} \left(360\xi^4\zeta - 820\xi^2\zeta^3 + 300\xi^2\eta^2\zeta + 20\eta^2\zeta^3 - -60\eta^4\zeta + 80\zeta^5 \right) + \\
&\quad + K_{41} \left(1680\xi^3\eta\zeta - 1680\xi\eta^3\zeta - 3360\xi\eta\zeta^3 \right) + \\
&\quad + J_{42} \left(300\xi^5 - 240\xi^3\eta^2 - 2760\xi^3\zeta^2 - 540\xi\eta^4 + 720\xi\zeta^4 + 3960\xi\eta^2\zeta^2 \right) + \\
&\quad + K_{42} \left(720\xi^4\eta + 600\xi^2\eta^3 - 6120\xi^2\eta\zeta^2 - 120\eta^5 + 600\eta^3\zeta^2 + 720\eta\zeta^4 \right) + \\
&\quad + J_{43} \left(-5040\xi^4\zeta + 2520\xi^2\zeta^3 + 22680\xi^2\eta^2\zeta - 2520\eta^4\zeta - 2520\eta^2\zeta^3 \right) + \\
&\quad + K_{43} \left(-17640\xi^3\eta\zeta + 12600\xi\eta^3\zeta + 5040\xi\eta\zeta^3 \right) + \\
&\quad + J_{44} \left(-4200\xi^5 + 38640\xi^3\eta^2 + 3360\xi^3\zeta^2 - 17640\xi\eta^4 - 10080\xi\eta^2\zeta^2 \right) + \\
&\quad \left. \left. + K_{44} \left(-20160\xi^4\eta + 36960\xi^2\eta^3 + 10080\xi^2\eta\zeta^2 - 3360\eta^5 - 3360\eta^3\zeta^2 \right) \right] \right\}, \tag{3.1.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_\eta &= \frac{\partial U}{\partial \eta} = \mu \left\{ \frac{-\eta}{r^3} - \right. \\
&- \frac{r_t^2}{2r^7} \left[J_{20} (3\xi^2\eta + 3\eta^3 - 12\eta\zeta^2) + J_{22} (-42\xi^2\eta + 18\eta^3 - 12\eta\zeta^2) + \right. \\
&\quad \left. + K_{22} (12\xi^3 - 48\xi\eta^2 + 12\xi\zeta^2) \right] - \\
&- \frac{r_t^3}{2r^9} \left[J_{30} (15\xi^2\eta\zeta + 15\eta^3\zeta - 20\eta\zeta^3) + J_{31} (15\xi^3\eta + 15\xi\eta^3 - 90\xi\eta\zeta^2) + \right. \\
&\quad + K_{31} (-3\xi^4 + 9\xi^2\eta^2 + 9\xi^2\zeta^2 + 12\eta^4 - 81\eta^2\zeta^2 + 12\zeta^4) + \\
&\quad + J_{32} (-270\xi^2\eta\zeta + 150\eta^3\zeta - 60\eta\zeta^3) + \\
&\quad + K_{32} (-360\xi\eta^2\zeta + 60\xi^3\zeta + 60\xi\zeta^3) + \\
&\quad + J_{33} (-390\xi^3\eta + 450\xi\eta^3 - 180\xi\eta\zeta^2) + \\
&\quad \left. + K_{33} (90\xi^4 - 630\xi^2\eta^2 + 90\xi^2\zeta^2 + 120\eta^4 - 90\eta^2\zeta^2) \right] - \\
&- \frac{r_t^4}{8r^{11}} \left[J_{40} (-15\xi^4\eta - 30\xi^2\eta^3 + 180\xi^2\eta\zeta^2 - 15\eta^5 + 180\eta^3\zeta^2 - 120\eta\zeta^4) + \right. \\
&\quad + J_{41} (420\xi^3\eta\zeta + 420\xi\eta^3\zeta - 840\xi\eta\zeta^3) + \\
&\quad + K_{41} (-240\xi^4\zeta + 80\xi^2\zeta^3 + 1200\xi^2\eta^2\zeta - 3280\eta^2\zeta^3 + 1440\eta^4\zeta + 320\zeta^5) + \\
&\quad + J_{42} (540\xi^4\eta + 240\xi^2\eta^3 - 3960\xi^2\eta\zeta^2 - 300\eta^5 + 2760\eta^3\zeta^2 - 720\eta\zeta^4) + \\
&\quad + K_{42} (-120\xi^5 + 600\xi^3\eta^2 + 600\xi^3\zeta^2 + 720\xi\eta^4 - 6120\xi\eta^2\zeta^2 +) + \\
&\quad + J_{43} (-12600\xi^3\eta\zeta + 17640\xi\eta^3\zeta - 5040\xi\eta\zeta^3) + \\
&\quad + K_{43} (+2520\xi^4\zeta + 2520\xi^2\zeta^3 - 22680\xi^2\eta^2\zeta + 5040\eta^4\zeta - 2520\eta^2\zeta^3) + \\
&\quad + J_{44} (-17640\xi^4\eta + 38640\xi^2\eta^3 - 10080\xi^2\eta\zeta^2 - 4200\eta^5 + 3360\eta^3\zeta^2) + \\
&\quad \left. + K_{44} (3360\xi^5 - 36960\xi^3\eta^2 + 3360\xi^3\zeta^2 - 40320\xi\eta^4 - -10080\xi\eta^2\zeta^2) \right] \left. \right\},
\end{aligned}
\tag{3.1.7}$$

$$\begin{aligned}
F_\zeta = & \frac{\partial U}{\partial \zeta} = \mu \left\{ \frac{-\zeta}{r^3} - \right. \\
& - \frac{r_t^2}{2r^7} \left[J_{20} (9\xi^2\zeta + 9\eta^2\zeta - 6\zeta^3) + J_{22} (-30\xi^2\zeta + 30\eta^2\zeta) + K_{22} (-60\xi\eta\zeta) \right] - \\
& - \frac{r_t^3}{2r^9} \left[J_{30} (-3\xi^4 - 6\xi^2\eta^2 + 24\xi^2\zeta^2 - 3\eta^4 + 24\eta^2\zeta^2 - 8\zeta^4) + \right. \\
& \quad + J_{31} (45\xi^3\zeta - 60\xi\zeta^3 + 45\xi\eta^2\zeta) + K_{31} (45\xi^2\eta\zeta + 45\eta^3\zeta - 60\eta\zeta^3) + \\
& \quad + J_{32} (30\xi^4 - 180\xi^2\zeta^2 - 30\eta^4 + 180\eta^2\zeta^2) + \\
& \quad + K_{32} (60\xi^3\eta + 60\xi\eta^3 - 360\xi\eta\zeta^2) + \\
& \quad \left. + J_{33} (-210\xi^3\zeta + 630\xi\eta^2\zeta) + K_{33} (-630\xi^2\eta\zeta + 210\eta^3\zeta) \right] - \\
& - \frac{r_t^4}{8r^{11}} \left[J_{40} (-75\xi^4\zeta + 200\xi^2\zeta^3 - 150\xi^2\eta^2\zeta - 75\eta^4\zeta + 200\eta^2\zeta^3 - 40\zeta^5) + \right. \\
& \quad + J_{41} (-60\xi^5 - 120\xi^3\eta^2 + 720\xi^3\zeta^2 - 480\xi\zeta^4 - 60\xi\eta^4 + 720\xi\eta^2\zeta^2) + \\
& \quad + K_{41} (-240\xi^4\eta - 480\xi^2\eta^3 + 2880\xi^2\eta\zeta^2 - 240\eta^5 + 2880\eta^3\zeta^2 - 1920\eta\zeta^4) + \\
& \quad + J_{42} (1260\xi^4\zeta - 2520\xi^2\zeta^3 + 1260\eta^4\zeta + 2520\eta^2\zeta^3) + \\
& \quad + K_{42} (2520\xi^3\eta\zeta + 2520\xi\eta^3\zeta - 5040\xi\eta\zeta^3) + \\
& \quad + J_{43} (840\xi^5 - 1680\xi^3\eta^2 - 6720\xi^3\zeta^2 - 2520\xi\eta^4 + 20160\xi\eta^2\zeta^2) + \\
& \quad + K_{43} (2520\xi^4\eta + 1680\xi^2\eta^3 - 20160\xi^2\eta\zeta^2 - 840\eta^5 + 6720\eta^3\zeta^2) + \\
& \quad + J_{44} (-760\xi^4\zeta - 7560\eta^4\zeta + 45360\xi^2\eta^2\zeta) + \\
& \quad \left. \left. + K_{44} (-30240\xi^3\eta\zeta + 30240\xi\eta^3\zeta) \right] \right\}.
\end{aligned}
\tag{3.1.8}$$

Hemos considerado suficiente incluir hasta el orden y grado cuarto en el desarrollo del potencial gravitatorio. Esta conclusión viene determinada a partir de una evaluación de la magnitud de la fuerza para distintos grados y órdenes [Gambí *et al.*, 1996]. El resultado se muestra en la figura (3.1.1), donde aparece evaluado, en ms^{-2} , el valor de la fuerza gravitatoria, F^G , hasta los grados $n = 4$ y $n = 5$, respectivamente, para un satélite situado en una longitud de estacionamiento $l_s = 30^\circ$ Oeste. Como se ve, gráficamente

no se aprecian diferencias. Numéricamente, la diferencia entre los valores de F^G resulta menor que 10^{-10} ms^{-2} . Así, por ejemplo, en la tabla (3.1.1) aparecen evaluados algunos valores de esta fuerza para $n = 4$ y $n = 5$.

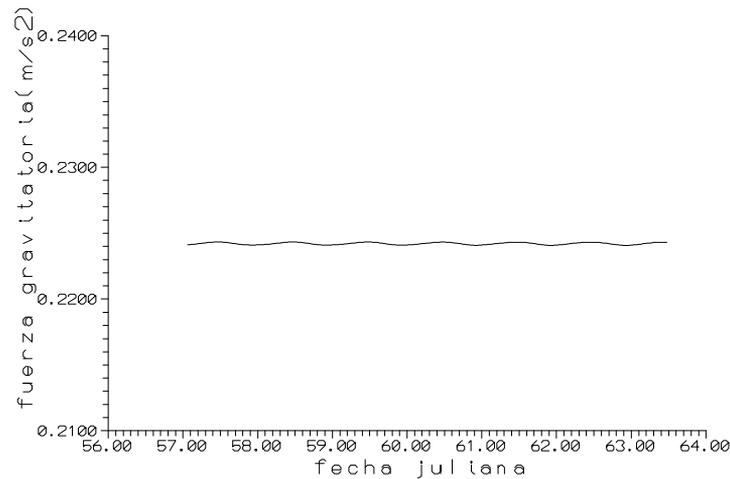


Figura 3.1.1: Influencia de diferentes armónicos en la fuerza gravitatoria terrestre.

$n = 4$	$n = 5$
0.224112335619998	0.224112335989882
0.224110158136641	0.224110158506599
0.224106768880951	0.224106769251119
0.224102383678230	0.224102384048500
0.224097918018670	0.224097918389056
0.224094618765667	0.224094619136192

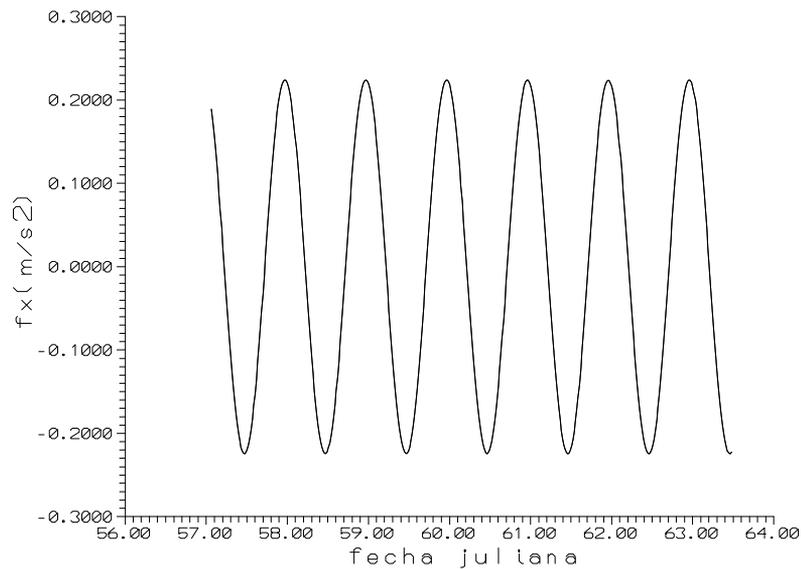
Tabla 3.1.1: Valores de la fuerza gravitatoria terrestre para $n = 4$ y $n = 5$.

También se ha efectuado un estudio comparativo entre dos modelos de geopotencial, con el fin de analizar su influencia en la magnitud de la fuerza: el GEM-T1 [Archinal, 1992] y el modelo mejorado GEM-T2 [Marsh *et al.*, 1990]. En este caso se han evaluado las componentes de la fuerza, (F_x^G, F_y^G, F_z^G) , y hemos encontrado que las diferencias entre sus valores para los dos modelos también son menores que 10^{-10} ms^{-2} . La tabla (3.1.2) muestra algunos de estos valores para ambos modelos y las gráficas de la figura (3.1.2) ilustran los resultados obtenidos al compararlos. Como se ve, tampoco se aprecian diferencias significativas para nuestro caso. En ellas también se observa que

la componente F_z^G de la fuerza, al ser un satélite ecuatorial, es casi nula, y las otras dos componentes F_x^G y F_y^G , están desfasadas de tal forma, que la fuerza total resultante, F^G , resulta prácticamente constante (véase la figura (3.1.1)) .

	GEM-T1	GEM-T2
F_x	0.189065215816612	0.189065215820056
	0.176112135136254	0.176112135139495
	0.161399769389924	0.161399769392928
F_y	0.120368045825976	0.120368045827845
	0.138640427359675	0.138640427361878
	0.155530032852460	0.155530032854976
F_z	-0.000069424689581	-0.000069424690352
	-0.000059154877045	-0.000059154877816
	-0.000048277380335	-0.000048277381106

Tabla 3.1.2: Valores de la fuerza gravitatoria terrestre para los modelos GEM-T1 y GEM-T2.



(a) Componente F_x^G .

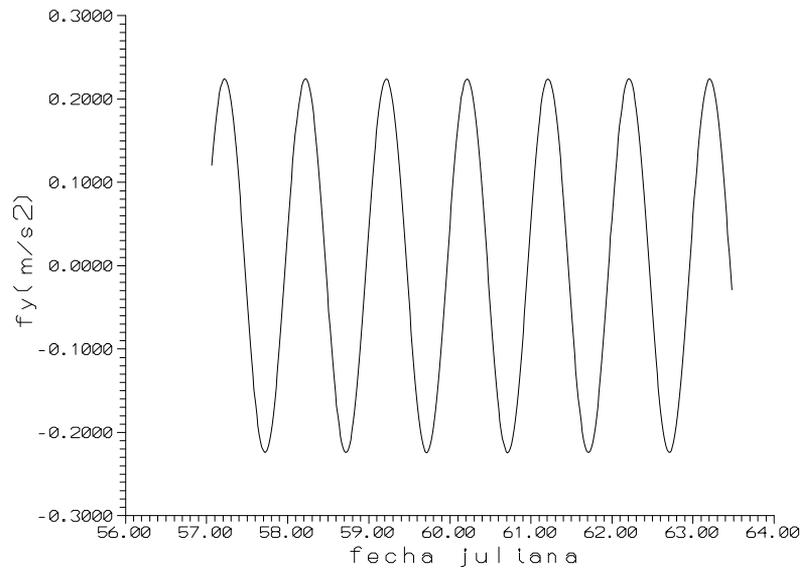
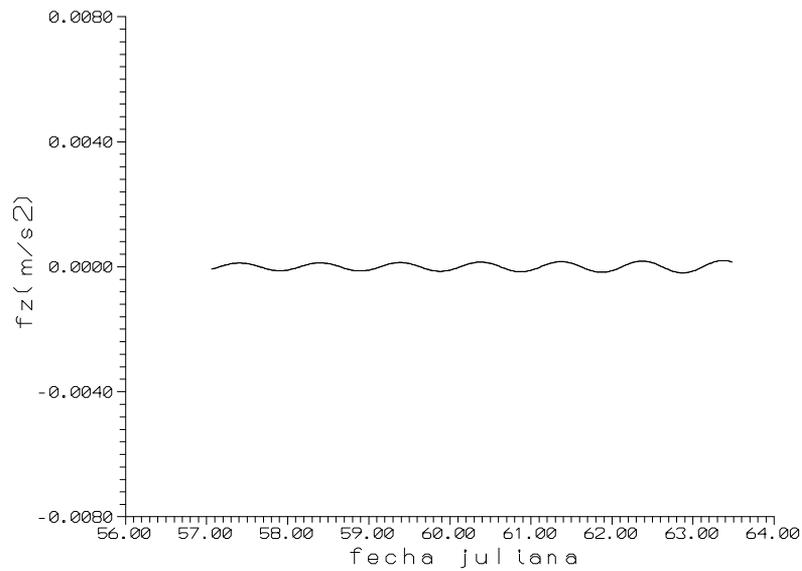
(b) Componente F_y^G .(c) Componente F_z^G .

Figura 3.1.2: Comparación de los modelos de geopotencial GEM-T1 y GEM-T2.

Ante estos resultados hemos decidido utilizar el modelo de geopotencial GEM-T2, al tratarse de una mejora del modelo GEM-T1. Los valores de los coeficientes J_{nm} y K_{nm} para este modelo, multiplicados por 10^6 , son [Marsh *et al.*, 1990]:

$$\begin{aligned}
J_{20} &= 1082.626523 \\
J_{22} &= -1.57437205 & K_{22} &= 0.90375227 \\
J_{30} &= -2.53207157 \\
J_{31} &= -2.19346328 & K_{31} &= -0.26960172 \\
J_{32} &= -0.30861735 & K_{32} &= 0.21142390 \\
J_{33} &= -0.10060938 & K_{33} &= -0.19713456 \\
J_{40} &= -1.61972340 \\
J_{41} &= 0.50778814 & K_{41} &= 0.44980224 \\
J_{42} &= -0.07787321 & K_{42} &= -0.14848019 \\
J_{43} &= -0.05924215 & K_{43} &= 0.01203767 \\
J_{44} &= -0.00400112 & K_{44} &= -0.00652814
\end{aligned}$$

Las coordenadas geográficas del satélite que intervienen en las expresiones (3.1.6), (3.1.7) y (3.1.8) se obtienen a partir de las coordenadas ecuatoriales en $R(O; XYZ)$ aplicando la rotación $R_3(\vartheta_G)$,

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = R_3(\vartheta_G) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (3.1.9)$$

donde ϑ_G es el tiempo sidéreo en Greenwich.

Las componentes de la fuerza en $R(O; XYZ)$, obtenidas aplicando una rotación $R_3(-\vartheta_G)$ al vector (F_ξ, F_η, F_ζ) , quedan finalmente:

$$\begin{aligned}
F_x^G &= \cos \vartheta_G F_\xi - \operatorname{sen} \vartheta_G F_\eta, \\
F_y^G &= \operatorname{sen} \vartheta_G F_\xi + \cos \vartheta_G F_\eta, \\
F_z^G &= F_\zeta.
\end{aligned} \quad (3.1.10)$$

3.1.2 Fuerza lunisolar.

El problema de los tres cuerpos [Kovalevsky, 1963], Tierra-satélite-cuerpo perturbador, se escribe como:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{x}{r^3} &= \frac{\partial R_{LS}}{\partial x}, \\
\frac{d^2y}{dt^2} + \mu \frac{y}{r^3} &= \frac{\partial R_{LS}}{\partial y}, \\
\frac{d^2z}{dt^2} + \mu \frac{z}{r^3} &= \frac{\partial R_{LS}}{\partial z},
\end{aligned} \quad (3.1.11)$$

donde

(x, y, z) son las coordenadas cartesianas del satélite en $R(O; XYZ)$,

r es el radio vector del satélite,

$\mu = G(m_{\oplus} + m_s)$ es la constante geocéntrica de gravitación, y

R_{LS} es el potencial perturbador lunisolar, cuya expresión viene dada por (1.4.1) y (1.4.10):

$$R_{LS} = Gm_L \left(\frac{1}{d_{Ls}} - \frac{x_L x + y_L y + z_L z}{d_L^3} \right) + Gm_{\odot} \left(\frac{1}{d_{\odot s}} - \frac{x_{\odot} x + y_{\odot} y + z_{\odot} z}{d_{\odot}^3} \right), \quad (3.1.12)$$

siendo

(x_L, y_L, z_L) las coordenadas cartesianas de la Luna en $R(O; XYZ)$,

$(x_{\odot}, y_{\odot}, z_{\odot})$ las coordenadas cartesianas del Sol en $R(O; XYZ)$,

d_{Ls} la distancia entre la Luna y el satélite,

d_L la distancia geocéntrica de la Luna,

$d_{\odot s}$ la distancia entre el Sol y el satélite y

d_{\odot} la distancia geocéntrica del Sol.

Derivando la expresión (3.1.12) respecto de las coordenadas (x, y, z) se obtienen las componentes de la fuerza de atracción que el Sol y la Luna ejercen sobre el satélite en $R(O; XYZ)$; éstas son:

$$\begin{aligned} F_x^{LS} &= Gm_L \left(\frac{x_L - x}{d_{Ls}^3} - \frac{x_L}{d_L^3} \right) + Gm_{\odot} \left(\frac{x_{\odot} - x}{d_{\odot s}^3} - \frac{x_{\odot}}{d_{\odot}^3} \right), \\ F_y^{LS} &= Gm_L \left(\frac{y_L - y}{d_{Ls}^3} - \frac{y_L}{d_L^3} \right) + Gm_{\odot} \left(\frac{y_{\odot} - y}{d_{\odot s}^3} - \frac{y_{\odot}}{d_{\odot}^3} \right), \\ F_z^{LS} &= Gm_L \left(\frac{z_L - z}{d_{Ls}^3} - \frac{z_L}{d_L^3} \right) + Gm_{\odot} \left(\frac{z_{\odot} - z}{d_{\odot s}^3} - \frac{z_{\odot}}{d_{\odot}^3} \right), \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

con

$$\begin{aligned} d_{Ls} &= \sqrt{(x_L - x)^2 + (y_L - y)^2 + (z_L - z)^2}, \\ d_{\odot s} &= \sqrt{(x_{\odot} - x)^2 + (y_{\odot} - y)^2 + (z_{\odot} - z)^2}. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Para evaluar la magnitud de las componentes de esta fuerza necesitamos una teoría que nos permita calcular, de manera precisa, las coordenadas (x_L, y_L, z_L) y $(x_{\odot}, y_{\odot}, z_{\odot})$.

• Determinación de las coordenadas cartesianas de la Luna.

Las coordenadas de la Luna en $R(O; XYZ)$ en un instante t , (x_L, x_L, z_L) , se obtienen a partir de sus coordenadas en el sistema de referencia J2000.0, (x_{L0}, y_{L0}, z_{L0}) , reduciendo por precesión.

Las coordenadas (x_{L0}, y_{L0}, z_{L0}) se determinarán, a su vez, a partir de las coordenadas polares esféricas como

$$\begin{aligned} x_{L0} &= d_{L0} \cos \alpha_{L0} \cos \delta_{L0}, \\ y_{L0} &= d_{L0} \operatorname{sen} \alpha_{L0} \cos \delta_{L0}, \\ z_{L0} &= d_{L0} \operatorname{sen} \delta_{L0}, \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

donde d_{L0} es la distancia geocéntrica de la Luna y $(\alpha_{L0}, \delta_{L0})$ son las coordenadas ecuatoriales absolutas.

Para determinar $(d_{L0}, \alpha_{L0}, \delta_{L0})$ se utilizan los triángulos esféricos y las magnitudes angulares representadas en la figura (3.1.3), donde [Torge *et al.*, 1989]

S es la posición del Sol,

L es la posición de la Luna,

S' es la intersección del meridiano solar con el ecuador,

L' es la intersección del meridiano lunar con el ecuador,

N es el nodo ascendente de la órbita de la Luna sobre la eclíptica,

N' es el nodo ascendente de la órbita de la Luna sobre el ecuador,

$\Omega_L = \gamma N$ es la longitud nodo ascendente de la órbita de la Luna sobre la eclíptica,

γ' es tal que $\gamma N = \gamma' N$

i_L es la inclinación de la órbita de la Luna sobre la eclíptica,

I es la inclinación de la órbita de la Luna sobre el ecuador y

ε es la oblicuidad de la eclíptica.

Cálculo de la declinación.

En el triángulo esférico $N'LL'$ se tiene que

$$\operatorname{sen} \delta_{L0} = \operatorname{sen} I \operatorname{sen} LN'. \quad (3.1.16)$$

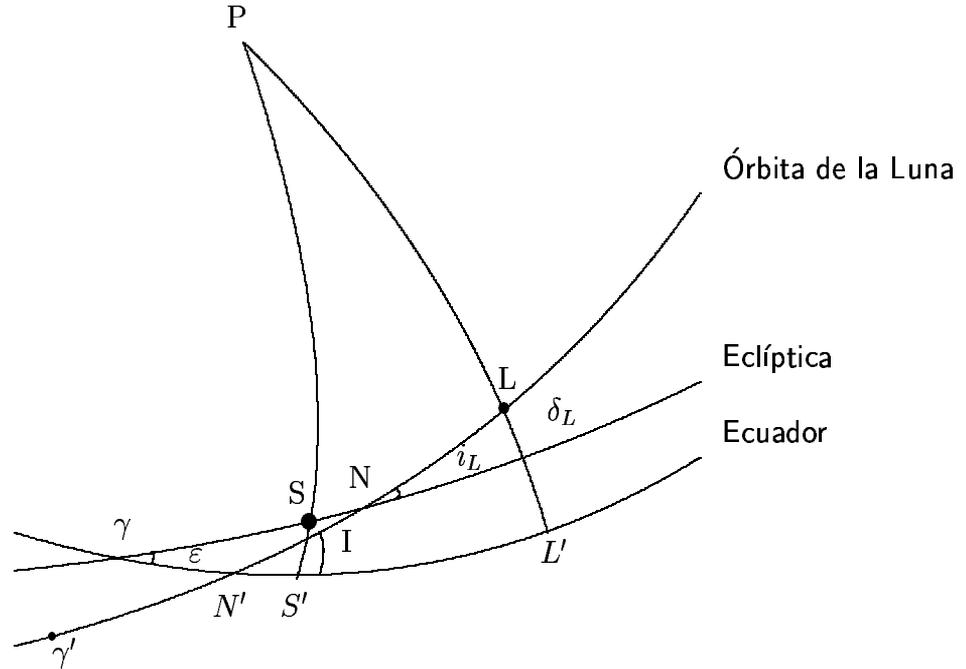


Figura 3.1.3: Planos fundamentales y ángulos.

El valor de la inclinación de la órbita de la Luna sobre el ecuador, I , se determina a partir del triángulo $\gamma NN'$, en el que se verifica que:

$$\cos I = (\cos \varepsilon \cos i_L - \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} i_L \cos \Omega_L), \quad (3.1.17)$$

donde i_L , ε y Ω_L vienen dados por sus desarrollos referidos a J2000.0 [Hohenkeik *et al.*, 1992], [Simon *et al.*, 1994]:

$$i_L = 5^\circ.15668983 + 0''.00008t \quad (3.1.18)$$

$$\varepsilon = 23^\circ 26' 21''.448 - 46''.8150t - 0''.00059t^2 + 0''.001813t^3, \quad (3.1.19)$$

$$\Omega_L = 125^\circ 2' 40''.280 - (5^r + 134^\circ 08' 10''.539)t + 7''.455t^2 + 0''.008t^3, \quad (3.1.20)$$

con $1^r = 360^\circ$ y $t = \frac{\text{FJ} - 2451545.0}{36525}$ la fracción de siglo juliano desde la época fundamental J2000.0.

El valor de LN' que interviene en (3.1.16) se obtiene como

$$LN' = \psi_L - \Omega_L + NN', \quad (3.1.21)$$

donde ψ_L es la longitud verdadera de la Luna.

En el triángulo $\gamma NN'$ se tiene que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} NN' &= \frac{\operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} \Omega_L}{\operatorname{sen} I}, \\ \operatorname{cos} NN' &= \operatorname{cos} \Omega_L \operatorname{cos} \gamma N' + \operatorname{sen} \Omega_L \operatorname{sen} \gamma N' \operatorname{cos} \varepsilon,\end{aligned}\quad (3.1.22)$$

de manera que el ángulo NN' que interviene en (3.1.21) se calcula mediante

$$NN' = \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{sen} NN'}{\operatorname{cos} NN'} \right), \quad (3.1.23)$$

y el ángulo $\gamma N'$ de la expresión (3.1.22) se determina por

$$\gamma N' = \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{sen} \gamma N'}{\operatorname{cos} \gamma N'} \right), \quad (3.1.24)$$

obteniendo, a partir del triángulo anterior, que:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \gamma N' &= \frac{\operatorname{sen} i_L \operatorname{sen} \Omega_L}{\operatorname{sen} I}, \\ \operatorname{cos} \gamma N' &= \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \gamma N'}.\end{aligned}\quad (3.1.25)$$

La obtención de ψ_L es tratada en la *Teoría de la Luna*, que estudia el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra perturbado por la acción gravitatoria del Sol, los planetas, la forma irregular de la Tierra y la Luna, etc.

Puesto que la longitud verdadera de la Luna, ψ_L , se define como

$$\psi_L = \omega_L + \Omega_L + v_L, \quad (3.1.26)$$

entonces, sustituyendo la ecuación del centro, limitada al segundo orden en potencias de e_L [Roy, 1978],

$$v_L - M_L = 2 e_L \operatorname{sen} M_L + \frac{5}{4} e_L^2 \operatorname{sen} 2M_L, \quad (3.1.27)$$

se tiene que:

$$\psi_L = \omega_L + \Omega_L + M_L + 2 e_L \operatorname{sen} M_L + \frac{5}{4} e_L^2 \operatorname{sen} 2M_L. \quad (3.1.28)$$

Ahora bien, si consideramos que el movimiento de la Luna está perturbado únicamente por la acción gravitatoria del Sol (lo que se conoce como *Problema principal de la Teoría de la Luna*), se deben añadir los términos que representan esta perturbación. Considerando

sólo los principales términos periódicos: variación, evección, ecuación anual y desigualdad paraláctica dados por [Brouwer & Clemence, 1971]:

$$\begin{aligned}
\delta\psi_{VARIACIÓN} &= \frac{11}{8}m^2 \text{sen}(2l_L - 2l_{\odot}), \\
\delta\psi_{EVECCIÓN} &= \frac{15}{4}m e_L \text{sen}(l_L + \tilde{\omega}_L - 2l_{\odot}), \\
\delta\psi_{E.ANUAL} &= -3m e_{\oplus} \text{sen}(l_{\odot} - \tilde{\omega}_{\odot}), \\
\delta\psi_{D.PARALÁCTICA} &= -\frac{15}{8}m \frac{a_L}{a_{\oplus}} \text{sen}(l_L - l_{\odot}),
\end{aligned} \tag{3.1.29}$$

la expresión para la longitud verdadera de la Luna resulta ser finalmente:

$$\begin{aligned}
\psi_L &= l_L + 2e_L \text{sen}(l_L - \tilde{\omega}_L) + \frac{5}{4}e_L^2 \text{sen} 2(l_L - \tilde{\omega}_L) + \frac{11}{8}m^2 \text{sen}(2l_L - 2l_{\odot}) + \\
&+ \frac{15}{4}me_L \text{sen}(l_L + \tilde{\omega}_L - 2l_{\odot}) - 3me_{\oplus} \text{sen}(l_{\odot} - \tilde{\omega}_{\odot}) - \frac{15}{8}m \frac{a_L}{a_{\oplus}} \text{sen}(l_L - l_{\odot}),
\end{aligned} \tag{3.1.30}$$

donde

$l_L = \omega_L + \Omega_L + M_L$ es la longitud media de la Luna,

l_{\odot} es la longitud media del Sol,

$m = \frac{n_{\odot}}{n_L}$, con n_{\odot} , el movimiento medio del Sol, y n_L , el movimiento medio de la Luna,

e_L es la excentricidad de la órbita de la Luna,

e_{\oplus} es la excentricidad de la órbita de la Tierra,

$\tilde{\omega}_L$ es la longitud media del perigeo lunar,

$\tilde{\omega}_{\odot}$ es la longitud media del perigeo solar,

a_L es el semieje mayor de la órbita de la Luna y

a_{\oplus} es el semieje mayor de la órbita de la Tierra,

cuyos desarrollos referidos a J2000.0 vienen dados por [Hohenkeik *et al.*, 1992] y [Simon *et al.*, 1994]:

$$\begin{aligned}
l_L &= 218^\circ 18' 59''.1 + (1337^r - 52^\circ 7' 7''.4)t - 5''.802t^2 + 0''.019t^3, \\
\tilde{\omega}_L &= 83^\circ 21' 12''.37 + (12^r - 250^\circ 59' 10'')t - 37''.112t^2 - 0''.045t^3, \\
l_\odot &= 280^\circ 27' 57''.7 + (101^r - 359^\circ 13' 48''.7)t + 1''.089t^2, \\
\tilde{\omega}_\odot &= 282^\circ 56' 17''.9 + (2^r - 718^\circ 16' 49''.9)t + 1''.666t^2 + 0''.012t^3, \\
e_\oplus &= 0.0167086342 - 0.00004203654t - 0.000000126734t^2,
\end{aligned} \tag{3.1.31}$$

donde t , igual que en (3.1.19) y (3.1.20), es la fracción de siglo juliano desde la época fundamental J2000.0.

Cálculo de la distancia.

La distancia geocéntrica de la Luna para el movimiento no perturbado al segundo orden de aproximación es [Sevilla, 1989]:

$$d_{L0} = a_L \left(1 + \frac{e_L^2}{2} - e_L \cos M_L - \frac{e_L^2}{2} \cos 2M_L \right), \tag{3.1.32}$$

que, al considerar el efecto de las perturbaciones producidas por el Sol, queda en la forma:

$$\begin{aligned}
d_{L0} &= a_L \left(1 - e_L \cos(l_L - \tilde{\omega}_L) - m^2 \cos 2(l_L - l_\odot) - \right. \\
&\quad - \frac{15}{8} m e_L \cos(l_L - 2l_\odot + \tilde{\omega}_L) + \frac{15}{16} m \frac{a_L}{a_\odot} \cos(l_L - l_\odot) + \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} m^2 - \frac{5}{4} \frac{a_L}{a_\oplus} e_\oplus \cos(l_L - \tilde{\omega}_\odot) \right),
\end{aligned} \tag{3.1.33}$$

donde los términos tercero, cuarto y quinto son las principales perturbaciones periódicas: variación, evección y desigualdad paraláctica, respectivamente [Brouwer & Clemence, 1971].

Cálculo de la ascensión recta.

La ascensión recta se determina a partir de

$$\alpha_{L0} = \gamma N' + N' L', \tag{3.1.34}$$

y, puesto que el ángulo $\gamma N'$ viene dado en (3.1.24), queda únicamente por calcular $N' L'$.

Por tanto, ya que en el triángulo $N'LL'$ se verifica que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} N'L' &= \frac{\operatorname{sen} LN' \cos I}{\cos \delta_{L0}}, \\ \operatorname{cos} N'L' &= \frac{\operatorname{cos} LN'}{\cos \delta_{L0}},\end{aligned}\tag{3.1.35}$$

teniendo en cuenta (3.1.21), resulta que

$$N'L' = \tan^{-1}(\tan(\psi_L - \Omega_L + NN') \cos I).\tag{3.1.36}$$

Finalmente, las coordenadas (x_L, y_L, z_L) en un instante t referidas a $R(O; XYZ)$ se determinan reduciendo por precesión las coordenadas ecuatoriales referidas a J2000.0, (x_{L0}, y_{L0}, z_{L0}) , obtenidas a partir de (3.1.15) con (3.1.16), (3.1.33) y (3.1.34),

$$\begin{pmatrix} x_L \\ y_L \\ z_L \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x_{L0} \\ y_{L0} \\ z_{L0} \end{pmatrix},\tag{3.1.37}$$

donde P es la matriz de precesión para pasar de J2000.0 al instante t ,

$$P = R_3(-90 - z)R_1(\theta)R_3(90 - \zeta_0),\tag{3.1.38}$$

y los parámetros precesionales ecuatoriales, (z, ζ_0, θ) , vienen dados por [Sevilla, 1980]:

$$\begin{aligned}z &= 2306''.2181t + 1''.09468t^2 + 0''.018203t^3, \\ \zeta_0 &= 2306''.2181t + 0''.30188t^2 + 0''.017998t^3, \\ \theta &= 2004''.3109 - 0''.42665t^2 - 0''.041833t^3,\end{aligned}\tag{3.1.39}$$

siendo, de nuevo, t , la fracción de siglo juliano desde J2000.0.

• Determinación de las coordenadas cartesianas del Sol.

Las coordenadas del Sol en el instante t referidas a $R(O; XYZ)$, $(x_{\odot}, y_{\odot}, z_{\odot})$, se obtienen de manera análoga, reduciendo por precesión las coordenadas cartesianas geocéntricas referidas a J2000.0, $(x_{\odot 0}, y_{\odot 0}, z_{\odot 0})$ que, expresadas en función de las coordenadas polares esféricas, se escriben como:

$$\begin{aligned}x_{\odot 0} &= d_{\odot 0} \cos \alpha_{\odot 0} \cos \delta_{\odot 0}, \\ y_{\odot 0} &= d_{\odot 0} \operatorname{sen} \alpha_{\odot 0} \cos \delta_{\odot 0}, \\ z_{\odot 0} &= d_{\odot 0} \operatorname{sen} \delta_{\odot 0},\end{aligned}\tag{3.1.40}$$

donde $d_{\odot 0}$ es la distancia geocéntrica del Sol y $(\alpha_{\odot 0}, \delta_{\odot 0})$ son sus coordenadas ecuatoriales absolutas.

Cálculo de la declinación.

En el triángulo triángulo $\gamma SS'$ de la figura (3.1.3) se verifica que

$$\text{sen } \delta_{\odot 0} = \text{sen } \varepsilon \text{ sen } \psi_{\odot}, \quad (3.1.41)$$

donde ψ_{\odot} es la longitud verdadera del Sol en la eclíptica, cuya expresión, limitada al primer término, viene dada por [Sevilla, 1989]:

$$\psi_{\odot} = l_{\odot} + 2e_{\oplus} \text{sen}(l_{\odot} - \tilde{\omega}_{\odot}). \quad (3.1.42)$$

Cálculo de la ascensión recta.

En el triángulo anterior, se cumple que

$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha_{\odot 0} &= \frac{\text{sen } \psi_{\odot} \cos \varepsilon}{\cos \delta_{\odot 0}}, \\ \cos \alpha_{\odot 0} &= \frac{\cos \psi_{\odot}}{\cos \delta_{\odot 0}}, \end{aligned} \quad (3.1.43)$$

de modo que el valor de la ascensión recta se calcula mediante la expresión:

$$\alpha_{\odot 0} = \tan^{-1} (\tan \psi_{\odot} \cos \varepsilon). \quad (3.1.44)$$

Cálculo de la distancia.

La distancia geocéntrica del Sol se obtiene a partir de la expresión

$$d_{\odot 0} = a_{\oplus} \left(1 + e_{\oplus} \cos(l_{\odot} - \tilde{\omega}_{\odot}) \right)^{-1}, \quad (3.1.45)$$

análoga a la ya utilizada para el caso de la Luna (3.1.33), pero sin considerar perturbaciones.

Por último, las coordenadas ecuatoriales del Sol en el instante t referidas a $R(O; XYZ)$, $(x_{\odot}, y_{\odot}, z_{\odot})$, se obtienen reduciendo por precesión las coordenadas ecuatoriales referidas a J2000.0, $(x_{\odot 0}, y_{\odot 0}, z_{\odot 0})$,

$$\begin{pmatrix} x_{\odot} \\ y_{\odot} \\ z_{\odot} \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x_{\odot 0} \\ y_{\odot 0} \\ z_{\odot 0} \end{pmatrix}, \quad (3.1.46)$$

donde P es la matriz de precesión dada en (3.1.38).

Hemos comparado las coordenadas así calculadas con las efemérides LE2000 proporcionadas por el Jet Propulsion Laboratory y hemos obtenido diferencias menores que $10^{-9} m/s^2$ en las componentes de la fuerza.

3.1.3 Presión de radiación solar.

La fuerza de radiación solar viene dada por la expresión (1.5.4), esto es, por

$$\vec{F} = \epsilon (1 + \mathcal{R}) P \frac{A}{m_s} \vec{u}. \quad (3.1.47)$$

Las componentes de esta fuerza en el sistema $R(O; XYZ)$ vienen determinadas por:

$$\begin{aligned} F_x^{RS} &= -F \frac{x_\odot}{d_\odot}, \\ F_y^{RS} &= -F \frac{y_\odot}{d_\odot}, \\ F_z^{RS} &= -F \frac{z_\odot}{d_\odot}, \end{aligned} \quad (3.1.48)$$

donde

$$\begin{aligned} x_\odot &= d_\odot \cos \alpha_\odot \cos \delta_\odot, \\ y_\odot &= d_\odot \sin \alpha_\odot \cos \delta_\odot, \\ z_\odot &= d_\odot \sin \delta_\odot, \end{aligned} \quad (3.1.49)$$

y $(\alpha_\odot, \delta_\odot)$ son las coordenadas ecuatoriales absolutas del Sol en $R(O; XYZ)$.

Las coordenadas del Sol, en este caso, se han obtenido a partir de la teoría analítica dada por Stumpff [Stumpff, 1980] en el que el máximo error para estas coordenadas es de 1.1×10^{-5} unidades astronómicas. En este método se incluyen perturbaciones periódicas debidas a la Luna y planetas, y variaciones seculares de los elementos orbitales del Sol.

Hemos comparado estas coordenadas con las calculadas mediante las expresiones del apartado anterior, (3.1.40)-(3.1.46), y hemos obtenido entre ambas diferencias del orden de 10 metros, que se traduce en una diferencia en las componentes de la fuerza menores que $10^{-9} m/s^2$, que para la precisión que buscamos resulta irrelevante.

3.2 Integración numérica de las ecuaciones del movimiento.

Para la integración numérica de las ecuaciones del movimiento (3.1.1) hemos utilizado el método de **Gauss-Jackson**, conocido también como Σ^2 [Jackson, 1924]. Este método, de tipo predictor-corrector, no necesita en este caso la fase correctora si se elige de manera óptima el intervalo de integración. Además, es un método diseñado específicamente para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden y presenta ventajas sustanciales con respecto a los que reducen estas ecuaciones a sistemas de ecuaciones de primer orden. Así, un estudio comparativo realizado entre los métodos de Runge-Kutta, Adams-Moulton, Gauss-Jackson-Mason, Runge-Kutta-Butcher y Runge-Kutta-Gill concluye que el método Gauss-Jackson es el más rápido, estable y con errores de redondeo más pequeños de entre todos ellos. Además, para intervalos de integración constantes (que será nuestro caso, como veremos más adelante) resulta el más adecuado [Pocha,1978] y [Fox, 1984].

Las fórmulas en diferencias centradas para el orden 5 son:

$$\begin{aligned}
 x_{i+1} &= h^2 \left(\Sigma^2 \ddot{x}_{i+1} + \frac{1}{12} \ddot{x}_i + \frac{1}{12} \delta \ddot{x}_{i-\frac{1}{2}} + \frac{19}{240} \delta^2 \ddot{x}_{i-1} + \frac{18}{240} \delta^3 \ddot{x}_{i-\frac{3}{2}} + \frac{1726}{24192} \delta^4 \ddot{x}_{i-2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1650}{24192} \delta^5 \ddot{x}_{i-\frac{5}{2}} \right), \\
 \dot{x}_{i+1} &= h^2 \left(\Sigma \ddot{x}_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \ddot{x}_i + \frac{5}{12} \delta \ddot{x}_{i-\frac{1}{2}} + \frac{3}{8} \delta^2 \ddot{x}_{i-1} + \frac{251}{720} \delta^3 \ddot{x}_{i-\frac{3}{2}} + \frac{95}{288} \delta^4 \ddot{x}_{i-2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{19087}{60480} \delta^5 \ddot{x}_{i-\frac{5}{2}} \right). \tag{3.2.1}
 \end{aligned}$$

donde \ddot{x} representa el integrando, $\delta^j \ddot{x}$, las diferencias j -ésimas, y $\Sigma^j \ddot{x}$, las sumas j -ésimas, con

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_{i+1} &= \ddot{x}_i + \delta \ddot{x}_{i+\frac{1}{2}}, \\
 \delta \ddot{x}_{i+\frac{1}{2}} &= \delta \ddot{x}_{i-\frac{1}{2}} + \delta^2 \ddot{x}_i, \\
 \Sigma \ddot{x}_{i+\frac{1}{2}} &= \ddot{x}_i + \Sigma \ddot{x}_{i-\frac{1}{2}}, \\
 \Sigma^2 \ddot{x}_{i+1} &= \Sigma^2 \ddot{x}_i + \Sigma \ddot{x}_{i+\frac{1}{2}}. \tag{3.2.2}
 \end{aligned}$$

La tabla (3.2.1) muestra una tabla de integración.

Antes de comenzar la integración numérica de las ecuaciones resulta necesario seleccionar el intervalo de integración e iniciar la tabla.

(t)	suma 2 ^a	suma 1 ^a	\ddot{x}	dif. 1 ^a	dif. 2 ^a	dif. 3 ^a	dif. 4 ^a	dif. 5 ^a
t_{i-3}	$\Sigma^2 \ddot{x}_{i-3}$		\ddot{x}_{i-3}		$\delta^2 \ddot{x}_{i-3}$		$\delta^4 \ddot{x}_{i-3}$	
		$\Sigma \ddot{x}_{i-\frac{5}{2}}$		$\delta \ddot{x}_{i-\frac{5}{2}}$		$\delta^3 \ddot{x}_{i-\frac{5}{2}}$		$\delta^5 \ddot{x}_{i-\frac{5}{2}}$
t_{i-2}	$\Sigma^2 \ddot{x}_{i-2}$		\ddot{x}_{i-2}		$\delta^2 \ddot{x}_{i-2}$		$\delta^4 \ddot{x}_{i-2}$	
		$\Sigma \ddot{x}_{i-\frac{3}{2}}$		$\delta \ddot{x}_{i-\frac{3}{2}}$		$\delta^3 \ddot{x}_{i-\frac{3}{2}}$		$\delta^5 \ddot{x}_{i-\frac{3}{2}}$
t_{i-1}	$\Sigma^2 \ddot{x}_{i-1}$		\ddot{x}_{i-1}		$\delta^2 \ddot{x}_{i-1}$		$\delta^4 \ddot{x}_{i-1}$	
		$\Sigma \ddot{x}_{i-\frac{1}{2}}$		$\delta \ddot{x}_{i-\frac{1}{2}}$		$\delta^3 \ddot{x}_{i-\frac{1}{2}}$		
t_i	$\Sigma^2 \ddot{x}_i$		\ddot{x}_i		$\delta^2 \ddot{x}_i$			
		$\Sigma \ddot{x}_{i+\frac{1}{2}}$		$\delta \ddot{x}_{i+\frac{1}{2}}$				
t_{i+1}	$\Sigma^2 \ddot{x}_{i+1}$		\ddot{x}_{i+1}					
		$\Sigma \ddot{x}_{i+\frac{3}{2}}$						
t_{i+2}	$\Sigma^2 \ddot{x}_{i+2}$							

Tabla 3.2.1: Tabla de integración numérica.

3.2.1 Selección del intervalo de integración.

Como se ha indicado al principio de la sección, en este caso se puede comprobar que la selección óptima del intervalo de integración permite prescindir de la fase correctora en el método de integración elegido y proporciona una convergencia rápida del proceso de inicio, que se describe posteriormente.

Este intervalo puede ser constante o variable. En el caso de la órbita geoestacionaria se puede tomar constante ya que, al ser ésta casi circular, no existe gran diferencia entre la longitud orbital recorrida en intervalos de tiempo iguales para distintos puntos de la órbita.

El intervalo se ha seleccionado utilizando como ecuación de referencia la que describe el movimiento armónico simple expresada en radianes, $\ddot{x} = -x$, por dos razones:

- esta ecuación es similar, aunque muy simplificada, a las ecuaciones que describen el movimiento no perturbado del satélite; y además,
- al conocer su solución analítica, resulta muy fácil evaluar la precisión con la que se efectúa la integración para distintos valores del intervalo, h .

De esta forma se ha llegado a la conclusión de que la integración de esta ecuación con

el método Σ^2 mantiene una precisión en 14 vueltas de 10^{-7} radianes para un intervalo de paso, h , de 0.1 radianes, lo que equivale, para la correspondiente órbita de radio geostacionario, a un intervalo de integración de $22^m 51^s .3$, que es el intervalo que hemos adoptado.

3.2.2 Inicio de la tabla.

Para el inicio de la tabla, primero se determinan unos valores preliminares de \ddot{x}_i mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden, que únicamente necesita un dato para empezar la integración. En este método, el error local es $\mathcal{O}(h^5)$, y el global es $\mathcal{O}(h^4)$ [Gerald, 1984].

Dado que las ecuaciones del movimiento (3.1.1) son de segundo orden, para aplicar este método es preciso transformarlas en ecuaciones de primer orden; el sistema queda, entonces, en la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u(x, y, z, t), & \ddot{x} &= \dot{u} = F_x(x, y, z, t), \\ \dot{y} &= v(x, y, z, t), & \ddot{y} &= \dot{v} = F_y(x, y, z, t), \\ \dot{z} &= w(x, y, z, t), & \ddot{z} &= \dot{w} = F_z(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Las fórmulas que proporcionan los valores iniciales para x_i y \dot{x}_i son [Hildebrand, 1974], [Gear, 1971]:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3), \\ \dot{x}_{i+1} &= \dot{x}_i + \frac{1}{6}(m_0 + 2m_1 + 2m_2 + m_3), \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

donde

$$\begin{aligned} k_0 &= h\dot{x}_i, & m_0 &= hF_x(x_i, y_i, z_i, t_i), \\ k_1 &= h\left(\dot{x}_i + \frac{m_0}{2}\right), & m_1 &= hF_x\left(x_i + \frac{k_0}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}, z_i + \frac{k_0}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right), \\ k_2 &= h\left(\dot{x}_i + \frac{m_1}{2}\right), & m_2 &= hF_x\left(x_i + \frac{k_1}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{k_1}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right), \\ k_3 &= h(\dot{x}_i + m_2), & m_3 &= hF_x(x_i + k_2, y_i + k_2, z_i + k_2, t_i + h). \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Las expresiones para y_{i+1} , \dot{y}_{i+1} , z_{i+1} , \dot{z}_{i+1} son análogas a las anteriores.

Una vez determinados con este método algunos valores de \ddot{x}_i , se confecciona la tabla inicial de integración mediante el proceso de iniciación de Herrick [Herrick, 1972]. Con este proceso iterativo se calculan valores, en distintos ciclos, hasta que éstos convergen. Llamando ε a la diferencia entre dos valores de las sumas segundas, diferencias segundas y de x (en dos tablas sucesivas), el proceso iterativo termina cuando se satisfacen las tres condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} \text{para } \Sigma^2 \ddot{x} & : |\varepsilon| < 0.5 \cdot 10^{-9}/c^2 h^2 & (\text{respectivamente } \Sigma^2 \ddot{y}, \Sigma^2 \ddot{z}), \\ \text{para } \ddot{x} & : |\varepsilon| < 6 \cdot 10^{-9}/c^2 h^2 & (\text{respectivamente } \ddot{y}, \ddot{z}), \\ \text{para } \delta^2 \ddot{x} & : |\varepsilon| < 120 \cdot 10^{-9}/c^2 h^2 & (\text{respectivamente } \delta^2 \ddot{y}, \delta^2 \ddot{z}), \end{aligned}$$

donde c^2 es el coeficiente de x (respectivamente de y y de z) en las ecuaciones del movimiento, y h es el paso de integración.

Una vez que se consigue esto, ya está preparada la tabla para la integración numérica de las ecuaciones del movimiento por el método Σ^2 descrito anteriormente.

Para comenzar la integración con el método Runge-Kutta resulta necesario tener las condiciones iniciales del sistema (3.1.1):

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0.$$

3.2.3 Establecimiento de las condiciones iniciales.

Las condiciones iniciales para la integración numérica, es decir, las coordenadas cartesianas y la velocidad del satélite en $R(O; XYZ)$, se obtienen a partir de los elementos orbitales equinociales, $(a, l, e_x, e_y, i_x, i_y)$, mediante un cálculo de efemérides específico para este caso, que evita singularidades numéricas [Romero *et al.*, 1993].

Para ello, en primer lugar se calculan las componentes de los vectores posición y velocidad del satélite, (x_γ, y_γ) y $(\dot{x}_\gamma, \dot{y}_\gamma)$, en un sistema orbital cuyo eje \vec{Ox}_γ lleva la dirección de la proyección del eje \vec{OX} del sistema $R(O; XYZ)$ sobre el plano orbital (véase la figura (3.2.1)). Y, posteriormente, mediante tres rotaciones de ángulos Ω , $-i$, y $-\Omega$ se obtienen las componentes de los vectores \vec{x}_s y $\dot{\vec{x}}_s$.

Las coordenadas del satélite expresadas en el sistema orbital clásico, con eje \vec{Ox} en la dirección del perigeo orbital vienen dadas por

$$x_v = r \cos v = a(\cos E - e), \quad (3.2.6)$$

$$y_v = r \sin v = a\sqrt{1 - e^2} \sin E. \quad (3.2.7)$$

Si se les aplica la rotación $R_3(-\tilde{\omega})$, donde $\tilde{\omega} = \Omega + \omega$, se obtienen las coordenadas

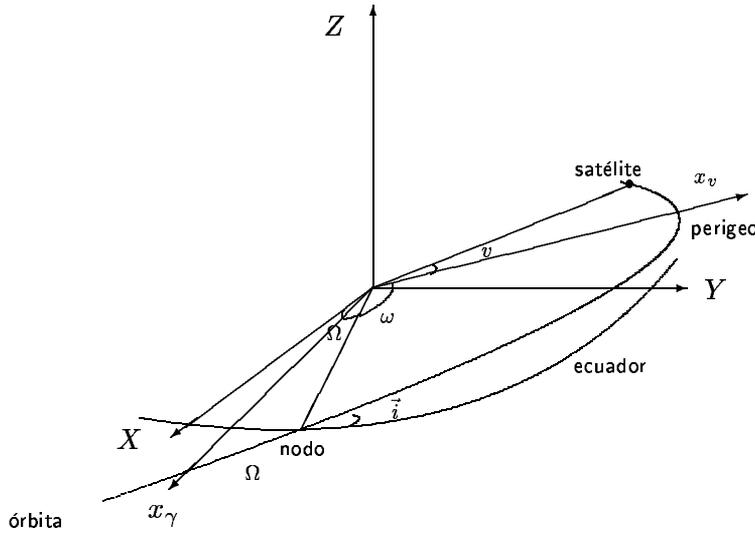


Figura 3.2.1: Sistema de referencia ecuatorial y sistemas orbitales.

(x_γ, y_γ) como:

$$\begin{aligned} x_\gamma &= a(\cos E - e) \cos \tilde{\omega} - a\sqrt{1 - e^2} \sin E \sin \tilde{\omega}, \\ y_\gamma &= a(\cos E - e) \sin \tilde{\omega} + a\sqrt{1 - e^2} \sin E \cos \tilde{\omega}. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Para expresar estas coordenadas en función de los elementos orbitales equinocciales consideremos la relación entre la anomalía excéntrica, E , y la ascensión recta excéntrica, α_E , es decir,

$$\alpha_E = \Omega + \omega + E, \quad (3.2.9)$$

donde α_E se calcula resolviendo la ecuación modificada de Kepler [Herrick, 1972],

$$\alpha_m = \alpha_E - e_x \sin \alpha_E + e_y \cos \alpha_E, \quad (3.2.10)$$

y donde α_m se determina con

$$\alpha_m = l + \vartheta_G. \quad (3.2.11)$$

Con (3.2.9) podemos calcular ahora

$$\cos E = \cos(\alpha_E - \tilde{\omega}) \quad (3.2.12)$$

que llevada a (3.2.8), considerando de nuevo la definición del vector \vec{e} y el valor $f = 1/[1 + (1 - e^2)^{1/2}]$, permite obtener para las coordenadas (x_γ, y_γ) las expresiones:

$$\begin{aligned} x_\gamma &= a(\cos \alpha_E - e_x + e_y(fe \sin E)), \\ y_\gamma &= a(\sin \alpha_E - e_y - e_x(fe \sin E)), \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

donde el término $e \operatorname{sen} E$, se puede calcular a partir de (3.2.9) y (3.2.10) como

$$e \operatorname{sen} E = \alpha_E - \alpha_m. \quad (3.2.14)$$

De manera análoga, las coordenadas del vector velocidad $(\dot{x}_\gamma, \dot{y}_\gamma)$ se determinan a partir del vector (\dot{x}_v, \dot{y}_v) , cuyas expresiones, obtenidas al derivar las coordenadas (3.2.6) y (3.2.7), resultan ser:

$$\begin{aligned} \dot{x}_v &= -\frac{\sqrt{\mu a}}{r} \operatorname{sen} E, \\ \dot{y}_v &= \frac{\sqrt{\mu a}}{r} \sqrt{1 - e^2} \cos E. \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Ahora, efectuando, de nuevo, la rotación $R_3(-\tilde{\omega})$, tenemos para $(\dot{x}_\gamma, \dot{y}_\gamma)$ que:

$$\begin{aligned} \dot{x}_\gamma &= -\frac{\sqrt{\mu a}}{r} \operatorname{sen} E \cos \tilde{\omega} - \frac{\sqrt{\mu a}}{r} \cos E \operatorname{sen} \tilde{\omega}, \\ \dot{y}_\gamma &= -\frac{\sqrt{\mu a}}{r} \operatorname{sen} E \operatorname{sen} \tilde{\omega} + \frac{\sqrt{\mu a}}{r} \cos E \cos \tilde{\omega}, \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

y, si repetimos el proceso seguido para la obtención de las expresiones (3.2.13), éstas quedan ahora en la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_\gamma &= -\frac{\sqrt{\mu a}}{r} \left[\operatorname{sen} \alpha_E - e_y f e \cos E \right], \\ \dot{y}_\gamma &= \frac{\sqrt{\mu a}}{r} \left[\cos \alpha_E - e_x f e \cos E \right], \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

donde el valor del radio vector, r , viene dado por su expresión clásica,

$$r = a(1 - e \cos E), \quad (3.2.18)$$

y el término $e \cos E$ se determina con (3.2.12) como:

$$e \cos E = e_x \cos \alpha_E + e_y \operatorname{sen} \alpha_E. \quad (3.2.19)$$

Finalmente, aplicando en este orden las rotaciones $R_3(\Omega)$, $R_1(-i)$ y $R_3(-\Omega)$ a los vectores $(x_\gamma, y_\gamma, 0)$ y $(\dot{x}_\gamma, \dot{y}_\gamma, 0)$ se obtienen las expresiones de las componentes de los

vectores posición y velocidad del satélite en $R(O; XYZ)$:

$$\begin{aligned} x &= (\cos^2 \Omega + \sen^2 \Omega \cos i)x_\gamma + (\sen \Omega \cos \Omega - \sen \Omega \cos \Omega \cos i)y_\gamma, \\ y &= (\sen \Omega \cos \Omega - \sen \Omega \cos \Omega \sen i)x_\gamma + (\sen^2 \Omega + \cos^2 \Omega \cos i)y_\gamma, \\ z &= -\sen i \sen \Omega x_\gamma + \sen i \cos \Omega y_\gamma, \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\cos^2 \Omega + \sen^2 \Omega \sen i)\dot{x}_\gamma + (\sen \Omega \cos \Omega - \sen \Omega \cos \Omega \cos i)\dot{y}_\gamma, \\ \dot{y} &= (\sen \Omega \cos \Omega - \sen \Omega \cos \Omega \sen i)\dot{x}_\gamma + (\sen^2 \Omega + \cos^2 \Omega \sen i)\dot{y}_\gamma, \\ \dot{z} &= -\sen i \sen \Omega \dot{x}_\gamma + \cos i \cos \Omega \dot{y}_\gamma, \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

donde los valores de i y de Ω se calculan a partir del vector inclinación como $i^2 = i_x^2 + i_y^2$ y $\Omega = \tan^{-1}(i_y/i_x)$.

Con este procedimiento es posible calcular, a partir de unos valores iniciales de los elementos orbitales, las condiciones iniciales para aplicar el método Runge-Kutta.

3.3 Interpolación para los tiempos de las maniobras.

Los resultados de la predicción de la órbita se tienen para un conjunto discreto de tiempos obtenidos a partir del inicial más el intervalo óptimo de integración. Pero es necesario conocer la posición del satélite en los instantes en los que se efectúan los impulsos que, en general, serán distintos a los obtenidos en la predicción. Para calcular los valores de la posición y la velocidad en este instante utilizamos el método de interpolación de Bower, ya que este método mantiene la precisión del método numérico [Herrick, 1972].

Las fórmulas de interpolación para nuestro caso son:

$$\begin{aligned}
x_{i+n} &= h^2 \left[\Sigma^2 \ddot{x}_i + n \Sigma \ddot{x}_i + \frac{1}{2} \left(n^2 + \frac{1}{6} \right) \ddot{x}_i + \frac{1}{3!} \left(n^3 - \frac{1}{2} n \right) \delta \ddot{x}_i + \right. \\
&+ \frac{1}{4!} \left(n^4 - \frac{1}{10} \right) \delta^2 \ddot{x}_i + \frac{1}{5!} \left(n^5 - \frac{10}{3} n^3 + \frac{11}{6} n \right) \delta^3 \ddot{x}_i + \\
&+ \left. \frac{1}{6!} \left(n^6 - \frac{5}{2} n^4 + \frac{31}{84} \right) \delta^4 \ddot{x}_i + \frac{1}{7!} \left(n^7 - \frac{21}{2} n^5 + 28 n^3 - \frac{191}{12} n \right) \delta^5 \ddot{x}_i \right],
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{i+n} &= h \left[\Sigma \ddot{x}_i + n \ddot{x}_i + \frac{1}{2} \left(n^2 - \frac{1}{6} \right) \delta \ddot{x}_i + \frac{1}{3!} n^3 \delta^2 \ddot{x}_i + \right. \\
&+ \frac{1}{4!} \left(n^4 - 2n^2 + \frac{11}{30} \right) \delta^3 \ddot{x}_i + \frac{1}{5!} \left(n^5 - \frac{5}{3} n^3 \right) \delta^4 \ddot{x}_i + \\
&+ \left. \frac{1}{6!} \left(n^6 - \frac{15}{2} n^4 + 12n^2 - \frac{191}{84} \right) \delta^5 \ddot{x}_i \right],
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

donde $i + n$ representa el paso correspondiente al instante de la maniobra y

$$\begin{aligned}
\Sigma \ddot{x}_i &= \frac{1}{2} \left(\Sigma \ddot{x}_{i-\frac{1}{2}} + \Sigma \ddot{x}_{i+\frac{1}{2}} \right), \\
\delta \ddot{x}_i &= \frac{1}{2} \left(\delta \ddot{x}_{i-\frac{1}{2}} + \delta \ddot{x}_{i+\frac{1}{2}} \right), \\
\delta^3 \ddot{x}_i &= \frac{1}{2} \left(\delta^3 \ddot{x}_{i-\frac{1}{2}} + \delta^3 \ddot{x}_{i+\frac{1}{2}} \right), \\
\delta^5 \ddot{x}_i &= \frac{1}{2} \left(\delta^5 \ddot{x}_{i-\frac{1}{2}} + \delta^5 \ddot{x}_{i+\frac{1}{2}} \right).
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Las fórmulas para y_{i+n} , \dot{y}_{i+n} , z_{i+n} , \dot{z}_{i+n} son análogas a las anteriores.

3.4 Obtención de parámetros osculatrices.

Para el diseño de las maniobras de mantenimiento en estación es necesario conocer los elementos orbitales del satélite, ya que éstos son los que intervienen en las expresiones que calculan la magnitud de los impulsos. Esto lleva a plantear un problema de cálculo de órbitas:

A partir de las posiciones y velocidades determinadas mediante la integración numérica, obtener los elementos orbitales osculatrices, es decir, los que tendría el satélite recorriendo en cada instante t una órbita kepleriana con su misma posición y velocidad.

Para su resolución hemos desarrollado un algoritmo que evita las indeterminaciones numéricas que se producirían al utilizar un método clásico a causa de los valores tan próximos a cero que toman la excentricidad y la inclinación [Romero *et al.*, 1993]. Este procedimiento se describe a continuación.

El cálculo del semieje mayor no presenta estos problemas, por lo que se obtiene a partir de la expresión clásica del movimiento elíptico [Roy, 1978],

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}, \quad (3.4.1)$$

siendo

$$\begin{aligned} v^2 &= |\vec{v}| = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2, \\ r &= |\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \\ \mu &= G(m_{\oplus} + m_s) \doteq Gm_{\oplus}, \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

y donde \vec{r} y \vec{v} representan los vectores posición y velocidad, respectivamente.

Los restantes elementos orbitales se determinan a partir de los vectores unitarios radial y transversal, \vec{U} y \vec{V} , representados en la figura (3.4.1).

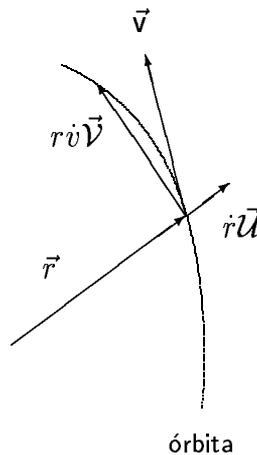


Figura 3.4.1: Vectores radial y transversal.

Estos vectores se pueden expresar en función de la posición y velocidad del satélite en $R(O;XYZ)$ mediante las relaciones:

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}, \quad (3.4.3)$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}'}{|\vec{v}'|}, \quad (3.4.4)$$

donde

$$\vec{v}' = \frac{(r \vec{v} - \dot{r} \vec{r})}{\sqrt{\mu}} \quad (3.4.5)$$

y \dot{r} es la magnitud de la componente radial del vector velocidad, cuya expresión viene dada por

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{r}. \quad (3.4.6)$$

Con el objeto de expresar estos vectores en función de los elementos orbitales consideramos un sistema de coordenadas auxiliar $\{\vec{N}, \vec{M}, \vec{W}\}$, donde \vec{W} es el vector unitario ortogonal al plano orbital; \vec{N} es, en este mismo plano, el vector unitario que lleva la dirección del nodo, y \vec{M} es el vector unitario que forma triángulo directo con los dos anteriores. En estas condiciones, los vectores \vec{N} y \vec{M} tienen por componentes, en $R(O;XYZ)$ (véase la figura (3.4.2)):

$$\begin{aligned} \vec{N} &= (\cos \Omega, \sin \Omega, 0), \\ \vec{M} &= (-\sin \Omega \cos i, \cos \Omega \cos i, \sin i). \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Por otro lado, los vectores \vec{u} y \vec{v} están relacionados con \vec{N} y \vec{M} mediante las expresiones

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{N} \cos u + \vec{M} \sin u, \\ \vec{v} &= -\vec{N} \sin u + \vec{M} \cos u, \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

donde $u = \omega + v$ es el argumento de la latitud.

Si combinamos las expresiones (3.4.7) y (3.4.8) y tenemos en cuenta que

$$\alpha_v = u + \Omega = \omega + v + \Omega, \quad (3.4.9)$$

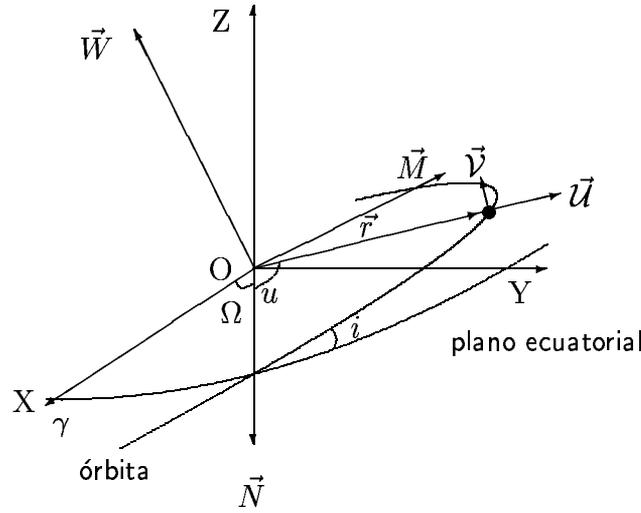


Figura 3.4.2: Sistemas $R(O;XYZ)$, $\{\vec{N}, \vec{M}, \vec{W}\}$ y $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

obtenemos las componentes ecuatoriales de \vec{u} y \vec{v} en función de los elementos orbitales como:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{2}(1 + \cos i) \cos \alpha_v + \frac{1}{2}(1 - \cos i) \cos(u - \Omega), \\ u_y &= \frac{1}{2}(1 + \cos i) \operatorname{sen} \alpha_v - \frac{1}{2}(1 - \cos i) \operatorname{sen}(u - \Omega), \\ u_z &= \operatorname{sen} i \operatorname{sen} u, \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{1}{2}(1 + \cos i) \operatorname{sen} \alpha_v - \frac{1}{2}(1 - \cos i) \operatorname{sen}(u - \Omega), \\ v_y &= \frac{1}{2}(1 + \cos i) \cos \alpha_v - \frac{1}{2}(1 - \cos i) \cos(u - \Omega), \\ v_z &= \operatorname{sen} i \cos u. \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

Recordando la definición del vector inclinación dada en (1.2.6), $i_x = i \cos \Omega$, $i_y = i \operatorname{sen} \Omega$, y teniendo en cuenta (3.4.9), el vector \vec{i} se calcula con las expresiones:

$$\begin{aligned} i_x &= i \cos(\alpha_v - u), \\ i_y &= i \operatorname{sen}(\alpha_v - u), \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

en las que la inclinación y los ángulos α_v y u , se obtienen a partir de las expresiones (3.4.10) y (3.4.11) mediante las relaciones:

$$i = \text{sen}^{-1} \sqrt{\mathcal{U}_z^2 + \mathcal{V}_z^2}, \quad (3.4.13)$$

$$\alpha_v = \tan^{-1} \left(\frac{\mathcal{U}_y - \mathcal{V}_x}{\mathcal{U}_x + \mathcal{V}_y} \right), \quad (3.4.14)$$

$$u = \tan^{-1} \left(\frac{\mathcal{U}_z}{\mathcal{V}_z} \right), \quad (3.4.15)$$

donde hemos calculado previamente las componentes de los vectores $\vec{\mathcal{U}}$ y $\vec{\mathcal{V}}$ mediante (3.4.3), (3.4.4) y (3.4.5).

Las componentes del vector excentricidad se determinan con las relaciones

$$\begin{aligned} e_x &= (e \cos v) \cos \alpha_v + (e \text{sen } v) \text{sen } \alpha_v, \\ e_y &= (e \cos v) \text{sen } \alpha_v - (e \text{sen } v) \cos \alpha_v, \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

que son el resultado de sustituir (3.4.9) en las expresiones que definen este vector (1.2.5).

En ellas, $e \cos v$ se calcula de manera inmediata a partir de la expresión clásica para el radio vector, $r = \frac{p}{1 + e \cos v}$, es decir,

$$e \cos v = \frac{p}{r} - 1, \quad (3.4.17)$$

y $e \text{sen } v$ se determina derivando la expresión anterior, teniendo en cuenta que $r^2 \dot{v} = \sqrt{\mu p}$, mediante la expresión:

$$e \text{sen } v = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot \dot{r}, \quad (3.4.18)$$

donde \dot{r} se calcula a partir de (3.4.6) y el parámetro p se obtiene como:

$$p = \vec{\mathcal{V}}' \cdot \vec{\mathcal{V}}' = \frac{r^2 \mathbf{v}^2 - (\vec{r}' \cdot \vec{\mathcal{V}})^2}{\mu}. \quad (3.4.19)$$

Finalmente, la longitud media viene dada por su expresión (3.2.11):

$$l = \alpha_m - \vartheta_G, \quad (3.4.20)$$

donde α_m se calcula a partir de la ecuación modificada de Kepler dada en (3.2.10):

$$\alpha_m = \alpha_E - e_x \text{sen } \alpha_E + e_y \cos \alpha_E. \quad (3.4.21)$$

Para determinar los valores de $\text{sen } \alpha_E$ y $\text{cos } \alpha_E$ que intervienen en esta ecuación, se relaciona las expresiones (3.2.13) de las coordenadas planas (x_γ, y_γ) ,

$$\begin{aligned} x_\gamma &= a(\text{cos } \alpha_E - e_x + e_y(fe \text{ sen } E)), \\ y_\gamma &= a(\text{sen } \alpha_E - e_y - e_x(fe \text{ sen } E)), \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

con otras equivalentes para ellas dadas por:

$$\begin{aligned} x_\gamma &= r \text{cos } \alpha_v, \\ y_\gamma &= r \text{sen } \alpha_v, \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

obteniéndose así:

$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha_E &= \frac{r \text{sen } \alpha_v}{a} + e_y + e_x f(e \text{ sen } E), \\ \text{cos } \alpha_E &= \frac{r \text{cos } \alpha_v}{a} + e_x - e_y f(e \text{ sen } E). \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

Queda ahora determinar $e \text{ sen } E$, y para ello se considera la expresión (3.2.7) para la coordenada y_v del satélite expresada en el sistema orbital clásico, $r \text{ sen } v = a\sqrt{1 - e^2} \text{ sen } E$, y, teniendo en cuenta que $p = a(1 - e^2)$, resulta de manera inmediata que:

$$e \text{ sen } E = \frac{r e \text{ sen } v}{\sqrt{ap}}, \quad (3.4.25)$$

donde, obviamente, todos los valores que intervienen en esta expresión se pueden determinar con mínimos errores numéricos.

De este modo hemos obtenido los elementos orbitales equinocciales oscultrices del satélite, $(a, l, e_x, e_y, i_x, i_y)$.

Ahora bien, en el mantenimiento en estación este-oeste utilizaremos la longitud verdadera, λ . Ésta se determina con la expresión

$$\lambda = \alpha_v - \vartheta_{G_v}. \quad (3.4.26)$$

En ella, la ascensión recta verdadera, α_v , viene dada en (3.4.14) y el tiempo sidéreo verdadero en Greenwich, ϑ_{G_v} , se calcula a partir de la expresión

$$\vartheta_{G_v} = \vartheta_G + \Delta\psi \text{cos } \varepsilon_v, \quad (3.4.27)$$

donde:

$\Delta\psi$ es la nutación en longitud,

$\varepsilon_v = \varepsilon + \Delta\varepsilon$ es la oblicuidad verdadera de la eclíptica en la época t ,

ε es la oblicuidad media de la eclíptica en la época t dada en (3.1.19) y

$\Delta\varepsilon$ es la nutación en oblicuidad.

3.5 Obtención de parámetros centrados.

Los elementos orbitales oscultrices obtenidos en la sección anterior están afectados por todas las perturbaciones descritas en el capítulo 1. Los efectos que producen estas perturbaciones tienen periodos distintos: desde periodos menores que los diurnos hasta términos seculares. Cuando se corrige la posición del satélite mediante impulsos, se actúa principalmente sobre los largos periodos, ya que son éstos los que afectan a la posición en mayor medida. Por esta razón, a la hora de diseñar las maniobras de mantenimiento en estación, es necesario eliminar los cortos periodos (entendiendo por éstos los inferiores al periodo de revolución del satélite).

Los elementos que no presentan variaciones de corto periodo, pero contienen exactamente las mismas variaciones seculares y de largo periodo que los elementos oscultrices, se denominan *elementos centrados* [Metris, 1991]; estos elementos describen el movimiento real sin cortos periodos.

Estos elementos orbitales centrados los obtenemos mediante la aplicación de un filtro que hemos desarrollado y que se describe a continuación [Patiño *et al.*, 1994] :

Llamando $\sigma(t)$ a un elemento orbital cualquiera y $\sigma_f(t)$ al elemento orbital filtrado, éste último se obtiene como

$$\sigma_f(t) = H_R(t) * \sigma(t), \quad (3.5.1)$$

donde

$$H_R(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [t_k, t_k + T_c] \\ 0 & \text{si } t \notin [t_k, t_k + T_c] \end{cases} \quad (3.5.2)$$

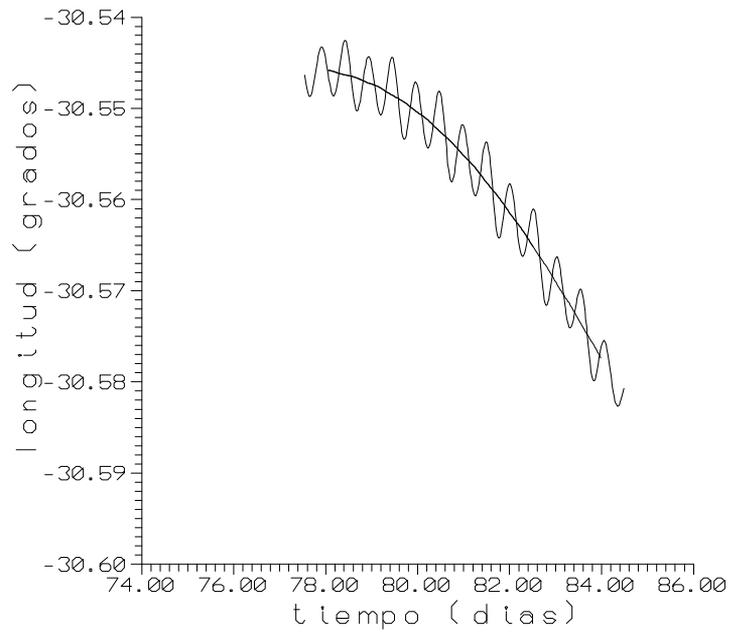
Si se elige como periodo de corte $T_c = 24$ horas se eliminan periodos diurnos y el valor de los parámetros centrados, $\sigma_c(t_k + T_c/2)$, asignados al centro del intervalo $[t_k, t_k + T_c]$, se determina, entonces, mediante la expresión:

$$\sigma_c(t + T_c/2) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_f(t_i), \quad (3.5.3)$$

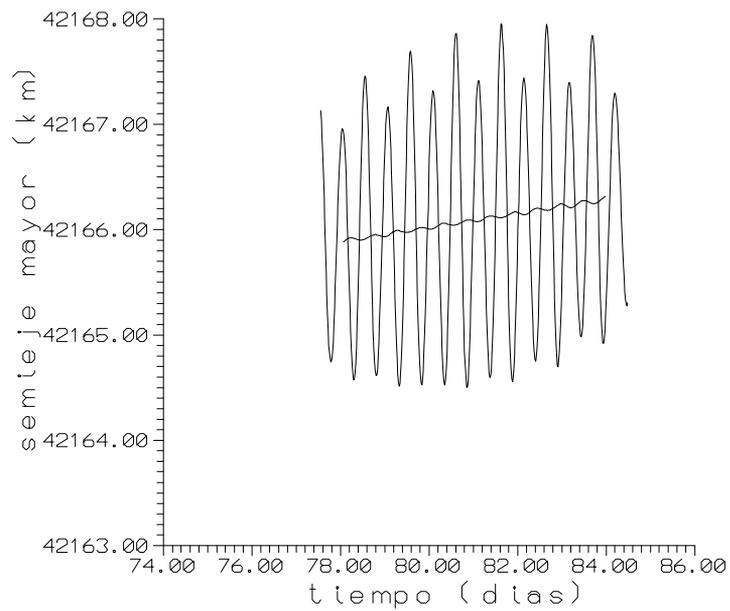
con $N = \frac{T_c}{h}$ y $t_i = t_k + ih$.

Esta manera de proceder está inspirada en el trabajo sobre filtros semi-analíticos realizado por P. Exertier [Exertier, 1990].

Las figuras (3.5.1) y (3.5.2) muestran la comparación entre los elementos oscultrices, obtenidos a partir de la integración numérica, y los elementos centrados, obtenidos con la aplicación del método de centrado descrito.

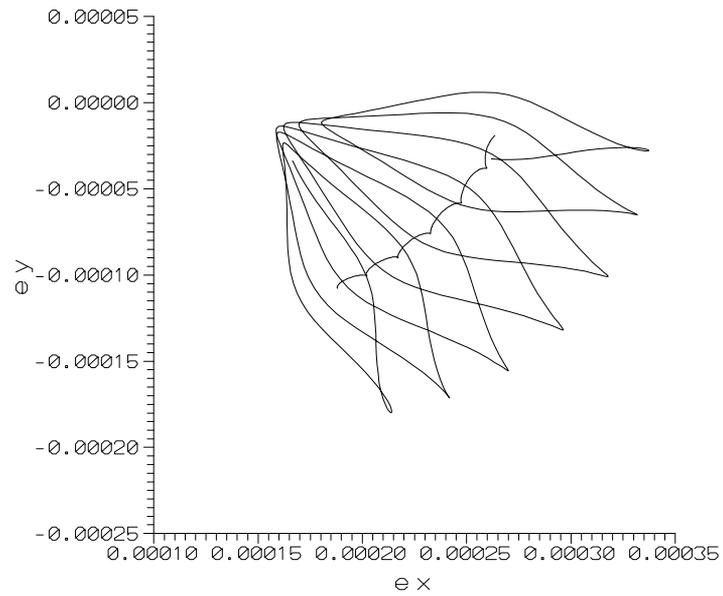


(a) Longitud media.

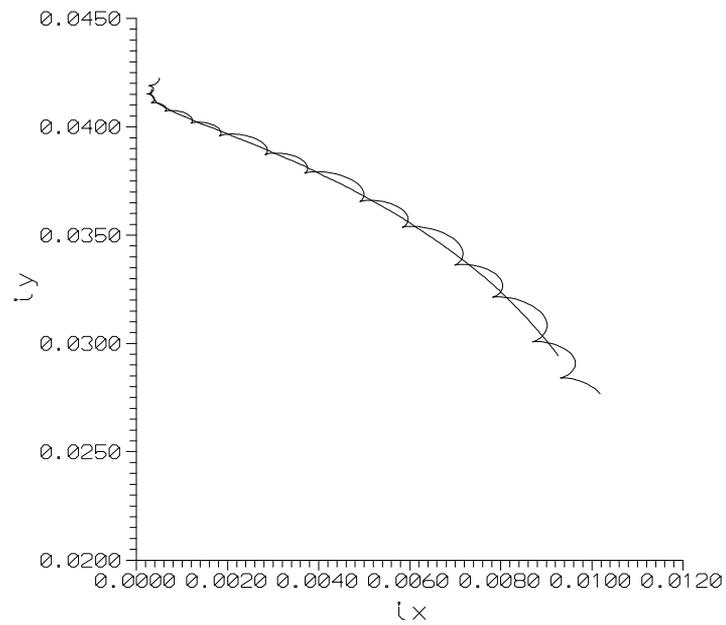


(b) Semieje.

Figura 3.5.1: Elementos orbitales osculadores y centrados.



(a) Vector excentricidad.



(a) Vector inclinación.

Figura 3.5.2: Elementos orbitales oscultrices y centrados.

3.6 Validación de resultados.

Hemos elaborado un programa en FORTRAN para la integración numérica de las ecuaciones que describen el movimiento perturbado de un satélite geoestacionario (3.1.1), tomando en consideración todo lo expuesto en este capítulo. El esquema del método de propagación de la órbita se describe en el diagrama de la figura (3.6.1).

Los elementos centrados obtenidos con este programa se han comparado con elementos medios, es decir, parámetros orbitales calculados mediante métodos analíticos en los que se suprimen efectos de corto periodo [Metris, 1991]. Éstos han sido proporcionados por HISPASAT S.A. y se han calculado con un programa desarrollado por MATRA-MARCONI-SPACE, que se basa en métodos analíticos similares a los descritos en el capítulo 1.

La diferencia que hemos obtenido entre elementos centrados y medios, así obtenidos, es del orden de 10 metros para el semieje, de 10^{-6} radianes para el vector excentricidad, del orden de 10^{-4} grados para el vector inclinación, y de 10^{-3} grados para la longitud media. Estos resultados garantizan la validez del método de propagación de la órbita que hemos creado.

Las figuras (3.6.2) y (3.6.3) muestran la comparación entre los elementos centrados y los elementos medios.

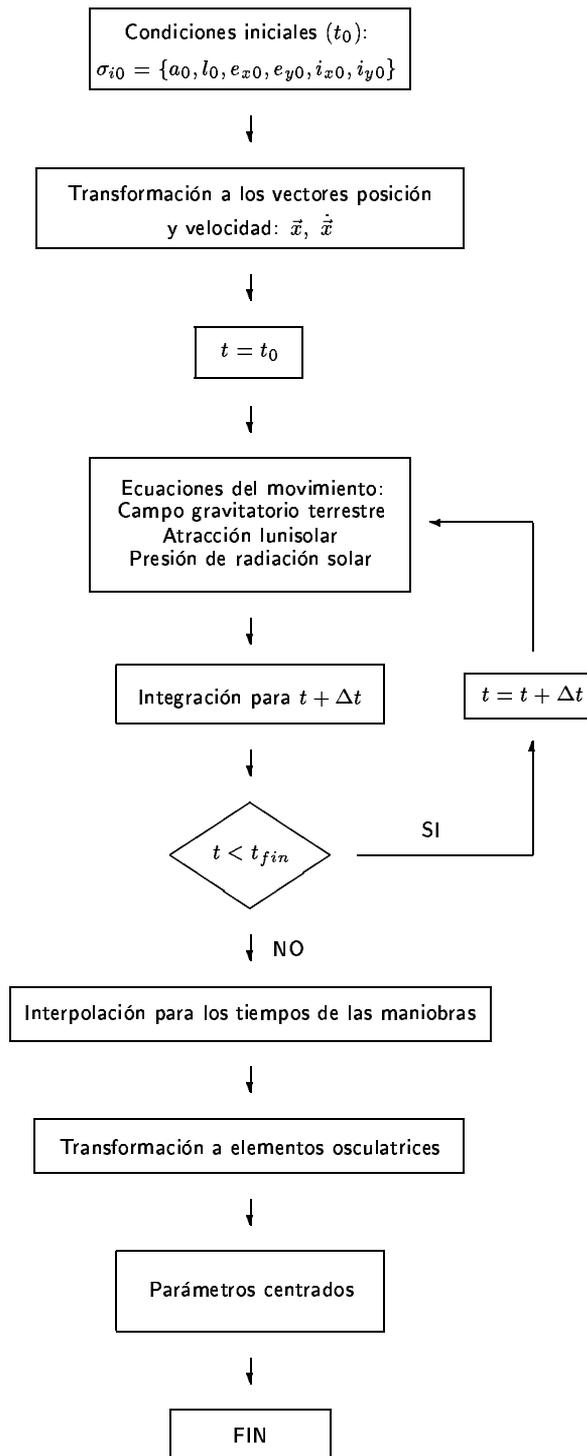
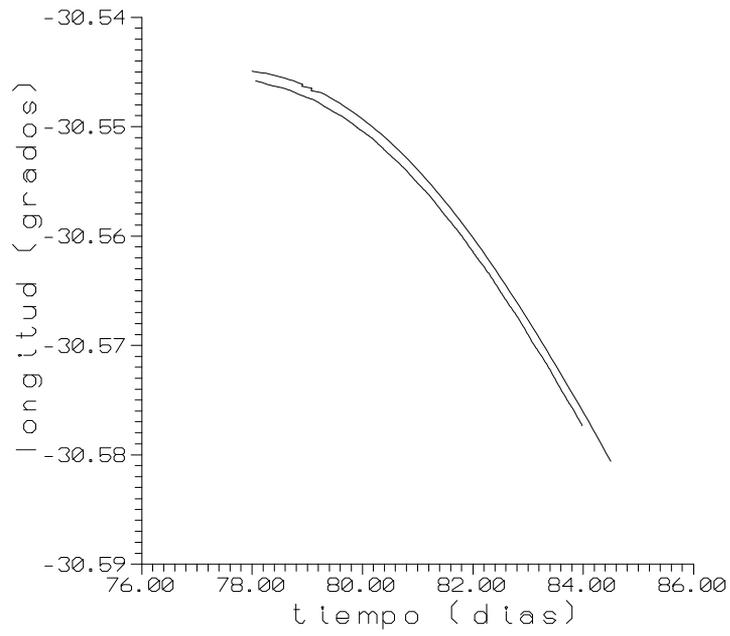
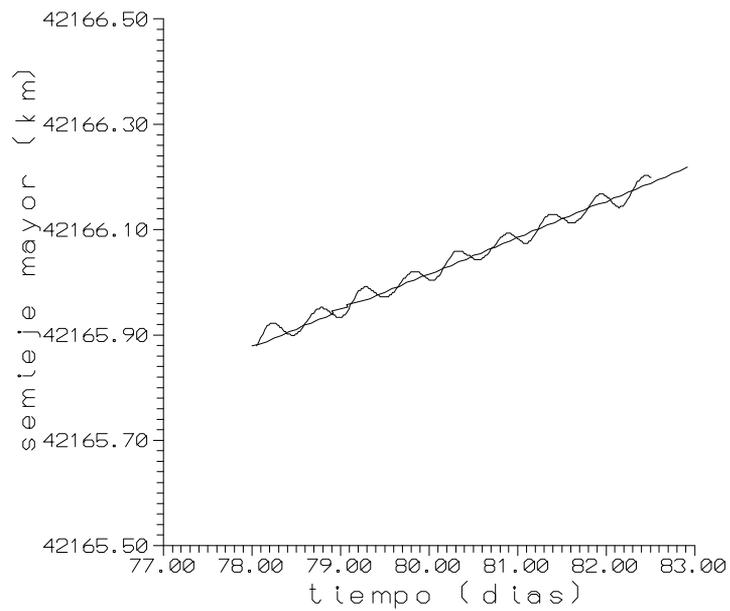


Figura 3.6.1: Propagación numérica de la órbita.

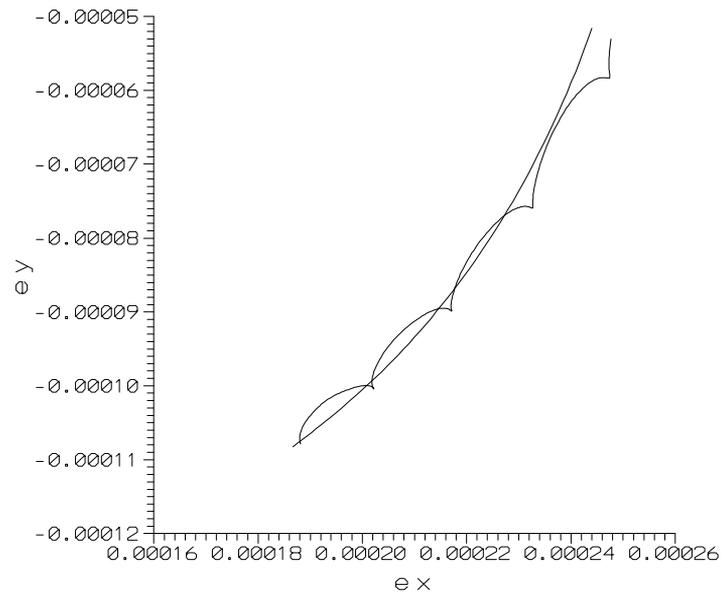


(a) Longitud media.

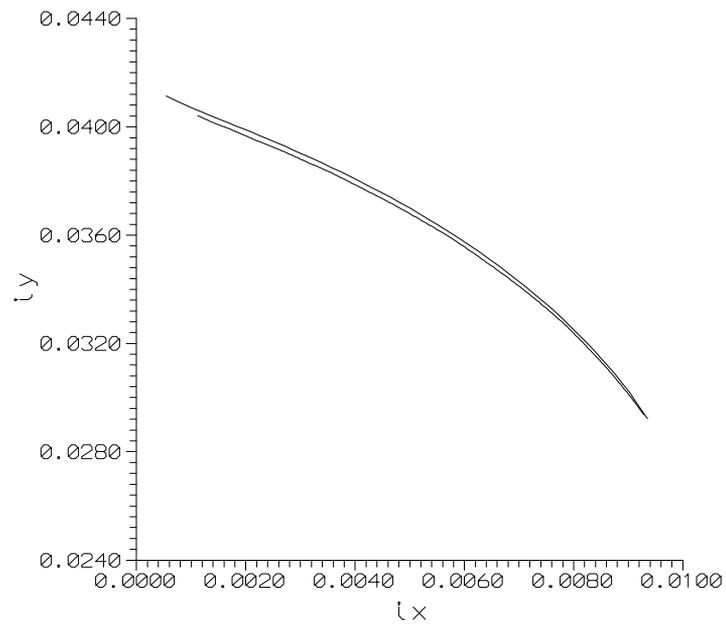


(b) Semieje.

Figura 3.6.2: Elementos orbitales medios y centrados.



(a) Vector excentricidad.



(a) Vector inclinación.

Figura 3.6.3: Elementos orbitales medios y centrados.

3.7 Conclusiones y resultados.

A lo largo de este capítulo hemos desarrollado y aplicado un proceso propio para la obtención de parámetros osculatrices y centrados mediante la integración numérica de las ecuaciones del movimiento perturbado de un satélite geoestacionario, $\ddot{\vec{x}} = \mathbf{F}(\vec{x}, t)$.

Se han obtenido los modelos de fuerzas que componen la función $\mathbf{F}(\vec{x}, t)$. Para la fuerza gravitatoria terrestre hemos efectuado un estudio previo, evaluando la magnitud de la fuerza para distintos órdenes y grados de su desarrollo en armónicos esféricos, así como para dos modelos de geopotencial distintos. A la vista de los resultados obtenidos hemos decidido utilizar el modelo GEM-T2 hasta el orden y grado cuatro. La fuerza lunisolar se ha calculado a partir de la función perturbadora del problema de los tres cuerpos, y la fuerza debida a la presión de radiación solar se ha determinado con su expresión en términos de las coordenadas del Sol las cuales, a su vez, han sido obtenidas utilizando distintos desarrollos a los seguidos en el caso de la fuerza lunisolar para comparar los resultados.

A continuación hemos aplicado un método de integración numérica junto con otro de interpolación, éste último necesario para la obtención de los elementos orbitales en el instante de las maniobras. Éstos son, respectivamente, el método de Gauss-Jackson, con el proceso de iniciación de Herrick combinado con el método Runge-Kutta de cuarto orden y el método de Bower para la interpolación.

Asimismo, se muestran los algoritmos que hemos desarrollado para la determinación de posiciones y velocidades a partir de elementos orbitales equinocciales y viceversa, que evitan singularidades numéricas. También hemos obtenido parámetros centrados mediante la aplicación de un filtro numérico.

Finalmente, hemos realizado una comparación entre los parámetros centrados obtenidos con un programa desarrollado en FORTRAN en el que se ha aplicado todo lo desarrollado a lo largo del capítulo, y parámetros medios proporcionados por HISPASAT S.A., mostrando que las diferencias entre los correspondientes resultados no son significativas, quedando de esta forma probada la validez del método seguido para la propagación numérica de la órbita que hemos utilizado.

Capítulo 4

Optimización de maniobras.

Una vez obtenidos con la precisión adecuada los elementos orbitales del satélite, cuyos valores se requieren para su mantenimiento en estación, resulta lógico determinar la magnitud de los impulsos que corrigen la posición mediante un método que sea consistente con la precisión que se ha alcanzado al integrar numéricamente las ecuaciones que describen el movimiento.

En este capítulo presentamos un procedimiento para el cálculo de la magnitud de los impulsos y del instante de su realización que mejora notablemente el descrito en el capítulo 2. Se lleva a cabo mediante un proceso iterativo que combina la integración numérica precisa para la propagación de la órbita con una teoría analítica que proporciona funciones fácilmente invertibles, y que utiliza técnicas de control “feedback”, dando como resultado sucesiones numéricas que convergen a los valores buscados, ΔV y t_b , cuando se alcanzan los valores objetivo impuestos para cada elemento orbital.

Los valores objetivo para los vectores inclinación y excentricidad vienen impuestos por las estrategias ya expuestas también en el capítulo 2, *dirección secular* y *perigeo hacia el Sol*, respectivamente. Para la longitud verdadera estudiaremos dos problemas distintos que dependerán del criterio objetivo que se considere en cada caso. En primer lugar, se pretende que la longitud verdadera alcance el límite inferior de su ventana en el final del ciclo, suponiendo que se trata de un satélite estacionado en un punto que cumple $\ddot{\lambda} < 0$. El segundo problema se plantea al considerar, como criterio objetivo, que la longitud verdadera se mantenga simétrica respecto de su valor nominal, alcanzando su máximo en la mitad del ciclo y su mínimo en el final del mismo [Soop, 1994].

Comenzamos el capítulo describiendo el método iterativo general de optimización y estudiando su convergencia, para seguir con su aplicación en la obtención de las relaciones de recurrencia de las sucesiones que proporcionan las magnitudes de los impulsos y sus

instantes de realización, necesarios para el mantenimiento en estación norte-sur y este-oeste.

4.1 Descripción general del método de optimización.

Las expresiones que relacionan la variación de los elementos orbitales con la magnitud de los impulsos y su instante de realización dadas en la sección 2.3 se pueden interpretar como funciones vectoriales del tipo

$$\mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{y}, \quad (4.1.1)$$

donde \vec{x} representa el vector compuesto por la magnitud de los impulsos y el instante en el que se efectúan y el vector \vec{y} es el que tiene por componentes las variaciones de los elementos orbitales.

En estos términos, el cálculo del valor de las maniobras correctoras se puede plantear como la resolución, en \vec{x} , de la ecuación dada por las relaciones (4.1.1), es decir, la obtención de los valores

$$\vec{x} = \mathbf{f}^{-1}(\vec{y}). \quad (4.1.2)$$

Cuando la función $\mathbf{f}(\vec{x})$ tiene una expresión analítica conocida, como sucede al considerar modelos lineales para describir el efecto que tiene una maniobra sobre los elementos orbitales, (véase el capítulo 2), es posible invertir la función para, así, calcular la magnitud de los impulsos en función de la variación de los elementos orbitales (siempre que la función sea inyectiva para que exista su inversa).

Sin embargo, si se pretende mejorar la precisión de los resultados utilizando un método de integración numérica para la propagación de la órbita que tenga en cuenta el efecto, tanto de las perturbaciones naturales como el de los impulsos correctores sobre la posición del satélite, no se dispone de una expresión analítica del tipo (4.1.1) y, por tanto, no es posible encontrar una solución similar a (4.1.2) al no poder invertir ninguna función analítica.

Este inconveniente se puede resolver de manera adecuada combinando el modelo lineal y el numérico mediante un proceso iterativo para generar una sucesión de soluciones aproximadas (\vec{x}_n) que converjan al valor buscado, \vec{X} . De esta forma se aprovechan las ventajas de ambos métodos; por un lado la facilidad que presenta el tratamiento algebraico de expresiones analíticas y, por otro, la mejora en la precisión de los resultados al utilizar métodos numéricos.

El proceso a seguir se describe a continuación:

Sea $\mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{y}$ la función (4.1.1) dada por el modelo lineal, donde \vec{x} es el vector compuesto por los parámetros que se precisa determinar (en nuestro caso, ΔV y t_b) y el vector \vec{y} , el compuesto por el efecto que éstos producen sobre los elementos orbitales. Esta función admite inversa \mathbf{f}^{-1} , cuya expresión analítica se puede determinar.

Sea $\mathbf{F}(\vec{x}) = \vec{y}$ una función análoga a la anterior, pero obtenida mediante la integración numérica de las ecuaciones diferenciales del movimiento del satélite. Esta función no admite inversa analítica.

El objetivo es encontrar una sucesión de valores \vec{x}_n que converjan a un valor \vec{X} , solución de la ecuación

$$\mathbf{F}(\vec{X}) = \vec{Y},$$

donde el vector \vec{Y} está compuesto por los valores objetivo de los elementos orbitales que deben ser alcanzados después de efectuar la maniobra correctora.

El proceso comienza con un valor inicial que se determina aplicando la función \mathbf{f}^{-1} al vector de valores objetivo, \vec{Y} , es decir,

$$\vec{x}_1 = \mathbf{f}^{-1}(\vec{Y}),$$

y ya iniciado el proceso, el vector \vec{x}_{n+1} se determina a partir del vector \vec{x}_n de la siguiente forma:

Una vez obtenido el valor \vec{x}_n , se evalúa numéricamente $\mathbf{F}(\vec{x}_n)$. El error que se comete en el paso n -ésimo de la iteración viene dado por

$$\vec{\varepsilon}_n = \vec{Y} - \mathbf{F}(\vec{x}_n). \quad (4.1.3)$$

Ahora bien, el valor $\mathbf{f}(\vec{x}_{n+1})$ se puede determinar mediante la relación

$$\mathbf{f}(\vec{x}_{n+1}) = \mathbf{f}(\vec{x}_n) + \vec{\varepsilon}_n, \quad (4.1.4)$$

es decir,

$$\mathbf{f}(\vec{x}_{n+1}) = \mathbf{f}(\vec{x}_n) + \vec{Y} - \mathbf{F}(\vec{x}_n), \quad (4.1.5)$$

y el vector \vec{x}_{n+1} se calculará entonces mediante la expresión

$$\vec{x}_{n+1} = \mathbf{f}^{-1} \left(\mathbf{f}(\vec{x}_n) + \vec{Y} - \mathbf{F}(\vec{x}_n) \right). \quad (4.1.6)$$

El proceso finaliza cuando el error ε_n es suficientemente pequeño, es decir,

$$\mathbf{f}(\vec{x}_{n+1}) \doteq \mathbf{f}(\vec{x}_n),$$

ya que, por tratarse de una función inyectiva, se deduce que, en este caso,

$$\vec{x}_{n+1} \doteq \vec{x}_n.$$

De esta forma se determina el límite de la sucesión y, por tanto, se encuentra la solución buscada. La figura (4.1.1) muestra un esquema de este proceso iterativo para una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

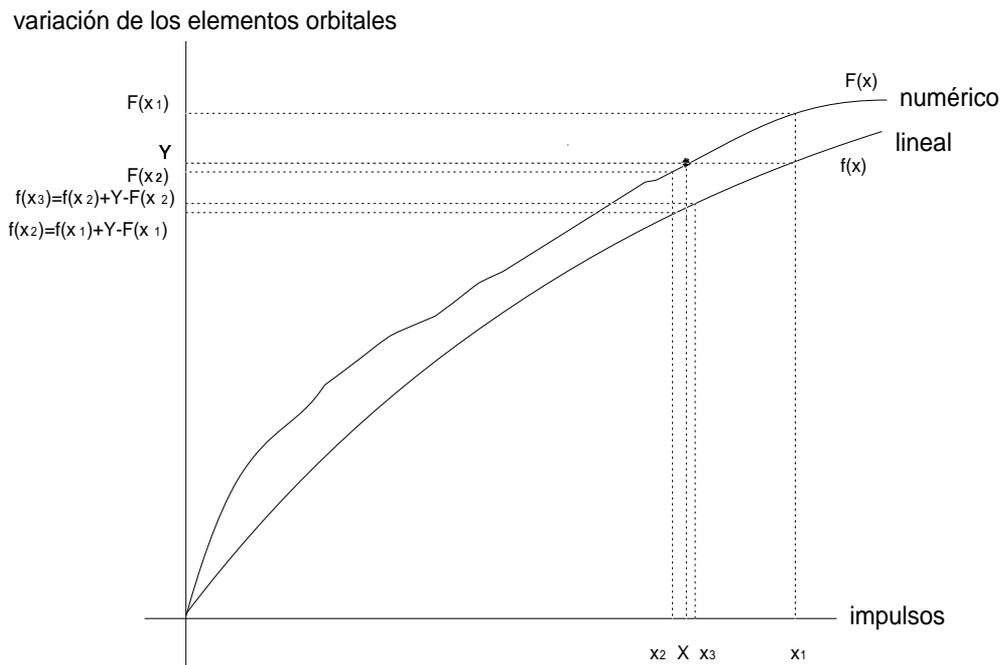


Figura 4.1.1: Obtención de la sucesión (x_n) .

4.2 Convergencia del método.

Para demostrar la convergencia del método hay que probar que los errores $\vec{\varepsilon}_n$ convergen en algún momento del proceso iterativo, es decir, que

$$\varepsilon_{n+1_i} = C\varepsilon_{n_i} \quad \text{con} \quad C < 1,$$

para cada componente de los vectores $\vec{\varepsilon}_{n+1}$ y $\vec{\varepsilon}_n$

El método es convergente ya que, en efecto, si consideramos la expresión para el error $(n+1)$ -ésimo, que viene dada por (4.1.3),

$$\vec{\varepsilon}_{n+1} = \vec{Y} - \mathbf{F}(\vec{x}_{n+1}), \quad (4.2.1)$$

teniendo en cuenta de nuevo (4.1.3), la expresión anterior para cada componente se puede escribir en la forma:

$$\varepsilon_{n+1_i} = \varepsilon_{n_i} + F_i(\vec{x}_n) - F_i(\vec{x}_{n+1}). \quad (4.2.2)$$

Sustituyendo entonces aquí (4.1.4) y operando, resulta que:

$$\varepsilon_{n+1} = \left(1 - \frac{F(\vec{x}_{n+1}) - F(\vec{x}_n)}{f(\vec{x}_{n+1}) - f(\vec{x}_n)} \right) \varepsilon_n, \quad (4.2.3)$$

donde hemos omitido el subíndice i para simplificar la notación.

Llamemos C a la expresión que aparece entre paréntesis; ésta verifica que

$$C = 1 - \frac{F(\vec{x}_{n+1}) - F(\vec{x}_n)}{f(\vec{x}_{n+1}) - f(\vec{x}_n)} < 1, \quad (4.2.4)$$

dado que el cociente $\frac{F(\vec{x}_{n+1}) - F(\vec{x}_n)}{f(\vec{x}_{n+1}) - f(\vec{x}_n)}$ es positivo al ser crecientes las funciones $F(\vec{x})$ y $f(\vec{x})$.

Así pues, la expresión (4.2.3) es equivalente a

$$\varepsilon_{n+1} = C\varepsilon_n \quad \text{con} \quad C < 1,$$

como queríamos demostrar.

4.3 Optimización de las maniobras norte-sur.

Vamos a aplicar el método iterativo de optimización descrito en la sección anterior para calcular el valor del impulso normal que corrige el vector inclinación, así como el instante óptimo de su realización.

Recordemos que con esta corrección se pretende que el valor del módulo del vector inclinación después de la maniobra sea menor que el valor del control en inclinación, i_c , y que su dirección y sentido sean tales que permitan evolucionar a este vector dentro de su círculo de control durante todo el ciclo.

Para conseguir esto aplicamos la estrategia óptima *dirección secular* descrita en la sección 2.4.

Obtención de las expresiones que definen el modelo matemático.

En primer lugar definimos los vectores que intervienen en el proceso:

$$\begin{aligned}
\vec{X} &= (\Delta V, s_b), \\
\vec{x}_n &= (\Delta V_n, s_{b_n}), \\
\vec{Y} &= \Delta \vec{i}_{\mathcal{T}} = (\Delta i_{x_{\mathcal{T}}}, \Delta i_{y_{\mathcal{T}}}), \\
\vec{y}_n &= \Delta \vec{i}_{\mathcal{T}_n} = (\Delta i_{x_{\mathcal{T}_n}}, \Delta i_{y_{\mathcal{T}_n}}), \\
\vec{Y}_n &= \Delta \vec{i}_{\mathcal{T}_n}^N = (\Delta i_{x_{\mathcal{T}_n}}^N, \Delta i_{y_{\mathcal{T}_n}}^N),
\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

siendo

$$\bullet \Delta \vec{i}_{\mathcal{T}} = \vec{i}_{\mathcal{T}}^+(s_b) - \vec{i}_b^-, \tag{4.3.2}$$

cuyas componentes son:

$$\begin{pmatrix} \Delta i_{x_{\mathcal{T}}} \\ \Delta i_{y_{\mathcal{T}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{x_{\mathcal{T}}}^+(s_b) \\ i_{y_{\mathcal{T}}}^+(s_b) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i_{x_b}^- \\ i_{y_b}^- \end{pmatrix}, \tag{4.3.3}$$

donde \vec{i}_b^- es el vector inclinación antes de la maniobra y el vector $\vec{i}_{\mathcal{T}}^+(s_b)$ es el que se pretende obtener con la maniobra en el instante inmediatamente posterior a ésta, vector inclinación objetivo. El vector $\Delta \vec{i}_{\mathcal{T}}$, determinado a partir de la estrategia *dirección secular*, tiene por componentes (2.4.3):

$$\Delta i_{x_{\mathcal{T}}} = -\Delta i \cos \Omega_{sec}, \tag{4.3.4}$$

$$\Delta i_{y_{\mathcal{T}}} = -\Delta i \sen \Omega_{sec}, \tag{4.3.5}$$

donde, recordemos que Ω_{sec} representa la dirección de la componente secular de la evolución del vector inclinación y Δi es un valor tal que $|\vec{i}_{\mathcal{T}}| < i_c$.

$$\bullet \Delta \vec{i}_{\mathcal{T}_n} = \vec{i}_{\mathcal{T}_n}^+(s_{b_n}) - \vec{i}_b^-, \tag{4.3.6}$$

cuyas componentes son:

$$\begin{pmatrix} \Delta i_{x_{\mathcal{T}_n}} \\ \Delta i_{y_{\mathcal{T}_n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{x_{\mathcal{T}_n}}^+(s_{b_n}) \\ i_{y_{\mathcal{T}_n}}^+(s_{b_n}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i_{x_b}^- \\ i_{y_b}^- \end{pmatrix}, \tag{4.3.7}$$

donde $\vec{i}_{\mathcal{T}_n}^+(s_{b_n})$ es el vector inclinación en el instante inmediatamente posterior a la maniobra n -ésima. El vector $\Delta \vec{i}_{\mathcal{T}_n}$, que representa el efecto de dicha maniobra, se determina a partir de las expresiones del modelo lineal dadas en (2.3.2) y (2.3.3).

$$\bullet \Delta \vec{i}_{\mathcal{T}_n}^N = \vec{i}_{\mathcal{T}}^{N+}(s_{b_n}) - \vec{i}_b^-, \quad (4.3.8)$$

cuyas componentes son:

$$\begin{pmatrix} \Delta i_{x\mathcal{T}_n}^N \\ \Delta i_{y\mathcal{T}_n}^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{x\mathcal{T}}^{N+}(s_{b_n}) \\ i_{y\mathcal{T}}^{N+}(s_{b_n}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i_{x_b}^- \\ i_{y_b}^- \end{pmatrix}, \quad (4.3.9)$$

donde, ahora, el vector $\vec{i}_{\mathcal{T}}^{N+}(s_{b_n})$ es el análogo al vector $\vec{i}_{\mathcal{T}}^+(s_{b_n})$, pero obtenido calculando el efecto de la maniobra n -ésima mediante la propagación numérica de la órbita.

Seguidamente definimos las funciones que intervienen.

La función que corresponde al modelo lineal se escribe mediante la expresión:

$$\mathbf{f}(\Delta V_n, s_{b_n}) = \begin{pmatrix} \Delta i_{x\mathcal{T}_n} \\ \Delta i_{y\mathcal{T}_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\Delta V_n, s_{b_n}) \\ f_2(\Delta V_n, s_{b_n}) \end{pmatrix}, \quad (4.3.10)$$

y las expresiones analíticas para f_1 y f_2 vienen dadas por (2.3.2) y (2.3.3), es decir, por

$$f_1(\Delta V_n, s_{b_n}) = -\frac{\Delta V_n}{V} \cos s_{b_n}, \quad (4.3.11)$$

$$f_2(\Delta V_n, s_{b_n}) = -\frac{\Delta V_n}{V} \operatorname{sen} s_{b_n}. \quad (4.3.12)$$

La función inversa

$$\mathbf{f}^{-1}(\Delta i_{x\mathcal{T}_n}, \Delta i_{y\mathcal{T}_n}) = \begin{pmatrix} \Delta V_n \\ s_{b_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(\Delta i_{x\mathcal{T}_n}, \Delta i_{y\mathcal{T}_n}) \\ h_2(\Delta i_{x\mathcal{T}_n}, \Delta i_{y\mathcal{T}_n}) \end{pmatrix}, \quad (4.3.13)$$

obtenida a partir de las expresiones (4.3.10) - (4.3.12) tiene como expresión analítica la siguiente:

$$h_1(\Delta i_{x\mathcal{T}_n}, \Delta i_{y\mathcal{T}_n}) = V \sqrt{\Delta i_{x\mathcal{T}_n}^2 + \Delta i_{y\mathcal{T}_n}^2}, \quad (4.3.14)$$

$$h_2(\Delta i_{x\mathcal{T}_n}, \Delta i_{y\mathcal{T}_n}) = \arctan \left(\frac{\Delta i_{y\mathcal{T}_n}}{\Delta i_{x\mathcal{T}_n}} \right), \quad (4.3.15)$$

y, por último, escribimos la función que describe el efecto de los impulsos calculados a partir del modelo numérico en la forma:

$$\mathbf{F}(\Delta V_n, s_{b_n}) = \begin{pmatrix} \Delta i_{x\mathcal{T}_n}^N \\ \Delta i_{y\mathcal{T}_n}^N \end{pmatrix}. \quad (4.3.16)$$

Obtención de las expresiones que proporcionan el proceso iterativo.

Los valores ΔV y s_b que son soluciones de las ecuaciones $\mathbf{F}(\vec{X}) = \vec{Y}$ se determinan a partir de las sucesiones (ΔV_n) y (s_{b_n}) , respectivamente. La forma de construir estas sucesiones se describe a continuación:

- Cálculo del término general de la sucesión (ΔV_n) .

La expresión (4.1.5) del proceso iterativo en este caso se escribe en la forma:

$$\begin{pmatrix} \Delta i_{x_{\mathcal{T}_{n+1}}} \\ \Delta i_{y_{\mathcal{T}_{n+1}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta i_{x_{\mathcal{T}_n}} + \Delta i_{x_{\mathcal{T}}} - \Delta i_{x_{\mathcal{T}_n}}^N \\ \Delta i_{y_{\mathcal{T}_n}} + \Delta i_{y_{\mathcal{T}}} - \Delta i_{y_{\mathcal{T}_n}}^N \end{pmatrix}. \quad (4.3.17)$$

Si tenemos en cuenta (4.3.10) y sustituimos, tanto las expresiones analíticas de las funciones f_1 y f_2 , (4.3.11) y (4.3.12), como las componentes de los vectores $\Delta \vec{i}_{\mathcal{T}}$ y $\Delta \vec{i}_{\mathcal{T}_n}^N$, (4.3.3) y (4.3.9), resulta que:

$$\begin{pmatrix} -\frac{\Delta V_{n+1}}{V} \cos s_{b_{n+1}} \\ -\frac{\Delta V_{n+1}}{V} \operatorname{sen} s_{b_{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta V_n}{V} \cos s_{b_n} + i_{x_{\mathcal{T}}}^+(s_b) - i_{x_{\mathcal{T}}}^{N+}(s_{b_n}) \\ -\frac{\Delta V_n}{V} \operatorname{sen} s_{b_n} + i_{y_{\mathcal{T}}}^+(s_b) - i_{y_{\mathcal{T}}}^{N+}(s_{b_n}) \end{pmatrix}. \quad (4.3.18)$$

Aplicando a esta expresión la función h_1 (4.3.14), obtenemos para el término $(n+1)$ -ésimo de la sucesión (ΔV_n) la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} \Delta V_{n+1} = & V \left\{ \frac{\Delta V_n^2}{V^2} + i_{\mathcal{T}}^2(s_b) + i_{\mathcal{T}_n}^{N^2}(s_{b_n}) - 2 \left(i_{x_{\mathcal{T}}}^+(s_b) i_{x_{\mathcal{T}}}^{N+}(s_{b_n}) + i_{y_{\mathcal{T}}}^+(s_b) i_{y_{\mathcal{T}}}^{N+}(s_{b_n}) \right) + \right. \\ & \left. + \frac{2\Delta V_n}{V} \left[\cos s_{b_n} \left(i_{x_{\mathcal{T}}}^{N+}(s_{b_n}) - i_{x_{\mathcal{T}}}^+(s_b) \right) + \operatorname{sen} s_{b_n} \left(i_{y_{\mathcal{T}}}^{N+}(s_{b_n}) - i_{y_{\mathcal{T}}}^+(s_b) \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

donde $i_{\mathcal{T}}(s_b) = |i_{\mathcal{T}}^+(s_b)|$ y $i_{\mathcal{T}_n}^N(s_{b_n}) = |i_{\mathcal{T}_n}^{N+}(s_{b_n})|$.

Sustituyendo ahora las expresiones que relacionan el tiempo sidéreo local s_{b_n} con $\Delta \vec{i}_{\mathcal{T}_n}$ obtenidas con (4.3.13) y (4.3.15), que vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \cos s_{b_n} &= \frac{\Delta i_{x_{\mathcal{T}_n}}}{\Delta i_{\mathcal{T}_n}}, \\ \operatorname{sen} s_{b_n} &= \frac{\Delta i_{y_{\mathcal{T}_n}}}{\Delta i_{\mathcal{T}_n}}, \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

donde $\Delta i_{\tau_n} = |\Delta \vec{i}_{\tau_n}|$, el término ΔV_{n+1} se obtiene finalmente mediante la relación:

$$\begin{aligned} \Delta V_{n+1} = & V \left\{ \frac{\Delta V_n^2}{V^2} + i_{\tau}^2(s_b) + i_{\tau_n}^{N^2}(s_{b_n}) - 2 \left(i_{x\tau}^+(s_b) i_{x\tau}^{N^+}(s_{b_n}) + i_{y\tau}^+(s_b) i_{y\tau}^{N^+}(s_{b_n}) \right) \right. \\ & \left. + \frac{2\Delta V_n}{V\Delta i_{\tau_n}} \left[\Delta i_{x\tau_n} \left(i_{x\tau}^{N^+}(s_{b_n}) - i_{x\tau}^+(s_b) \right) + \Delta i_{y\tau_n} \left(i_{y\tau}^{N^+}(s_{b_n}) - i_{y\tau}^+(s_b) \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

- Cálculo del término general de la sucesión (s_{b_n}) .

El instante en el que se realiza la maniobra se determina con el tiempo sidéreo local, s_{b_n} . Aplicando la función h_2 dada en (4.3.15) a la expresión (4.3.18) se obtiene para el término $s_{b_{n+1}}$ la siguiente relación:

$$s_{b_{n+1}} = \arctan \left(\frac{-\frac{\Delta V_n}{V} \operatorname{sen} s_{b_n} + i_{y\tau}^+(s_b) - i_{y\tau}^{N^+}(s_{b_n})}{-\frac{\Delta V_n}{V} \operatorname{cos} s_{b_n} + i_{x\tau}^+(s_b) - i_{x\tau}^{N^+}(s_{b_n})} \right). \quad (4.3.22)$$

Sustituyendo ahora el valor de ΔV_n , obtenido a partir de las expresiones (4.3.13) y (4.3.14), queda finalmente para $s_{b_{n+1}}$ que:

$$s_{b_{n+1}} = \arctan \left(\frac{\sqrt{\Delta i_{x\tau_n}^2 + \Delta i_{y\tau_n}^2} \operatorname{sen} s_{b_n} - i_{y\tau}^+(s_b) + i_{y\tau}^{N^+}(s_{b_n})}{\sqrt{\Delta i_{x\tau_n}^2 + \Delta i_{y\tau_n}^2} \operatorname{cos} s_{b_n} - i_{x\tau}^+(s_b) + i_{x\tau}^{N^+}(s_{b_n})} \right). \quad (4.3.23)$$

Una vez obtenido $s_{b_{n+1}}$, la hora en que se efectúa la corrección se decide con arreglo al tipo de maniobra que se realice, norte o sur, dado que, según vimos en la sección 2.4, una maniobra norte produce el mismo efecto que una sur efectuada medio día sidéreo después.

La figura (4.3.1) muestra el organigrama del proceso iterativo descrito. En ella se puede observar que, si con los valores obtenidos de ΔV y t_b , no se alcanzan los objetivos impuestos sobre el vector inclinación, estos parámetros se introducen de nuevo en la integración numérica, modificando las condiciones iniciales de las ecuaciones del movimiento, y se repite el proceso hasta que la respuesta del sistema es la esperada: esta técnica se conoce con el nombre de control "feedback" [Franklin *et al.*, 1991].

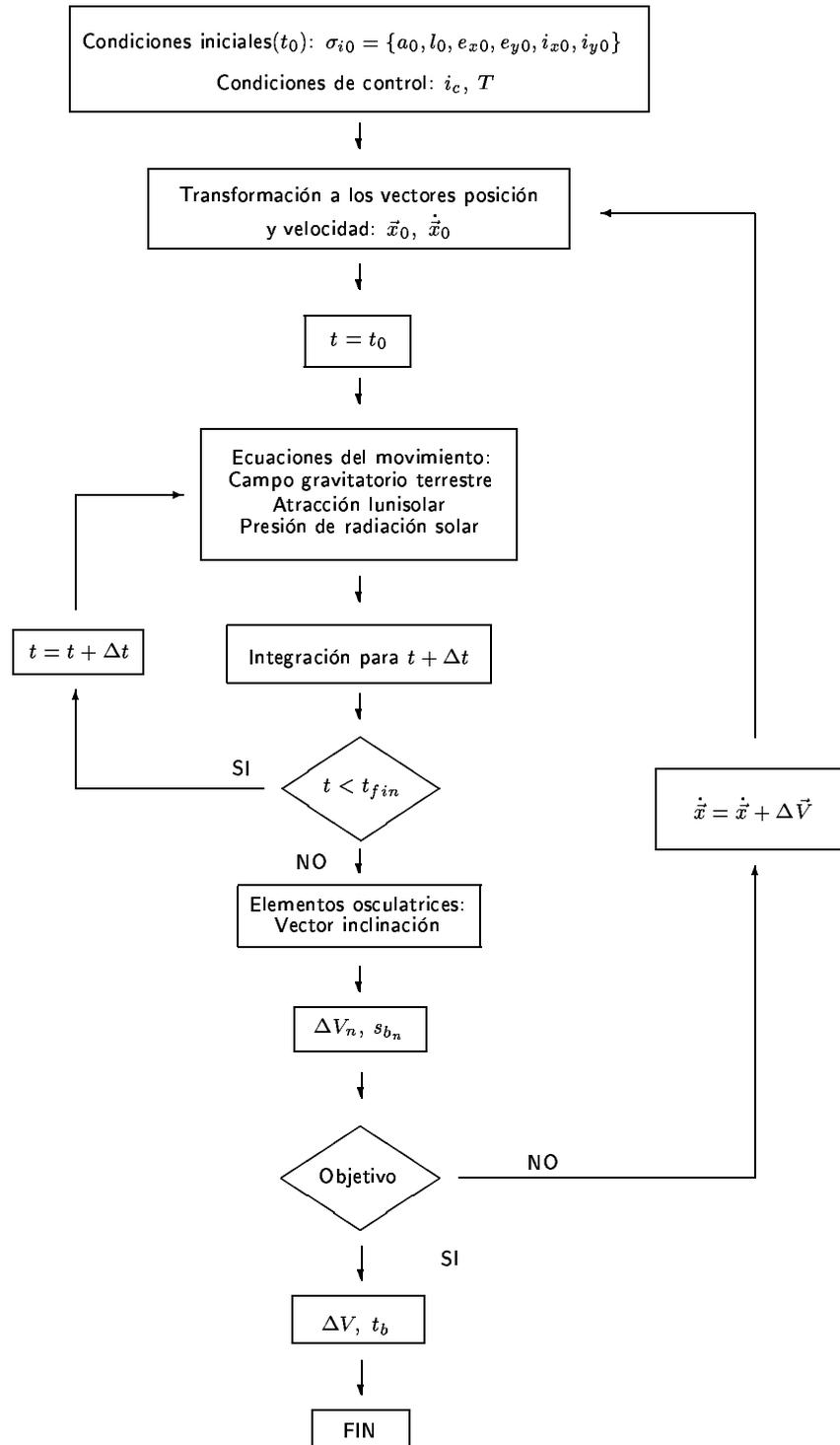


Figura 4.3.1: Proceso iterativo para el cálculo de maniobras norte-sur.

4.4 Optimización de las maniobras este-oeste.

4.4.1 Problema 1: $\lambda_{\mathcal{T}}(t_b + T) = l_s - \delta l$.

En esta sección se aplica el método de optimización para calcular el valor de dos impulsos tangenciales, ΔV_1 y ΔV_2 , y el instante en el que se realiza el primero de ellos, t_b , con el objeto de corregir simultáneamente el vector excentricidad y la longitud verdadera del satélite, modificados por la acción de la presión de radiación solar y de la fuerza gravitatoria terrestre, respectivamente, teniendo en cuenta que:

- la longitud verdadera deberá llegar al límite de la ventana en longitud en el final del ciclo. Para un satélite estacionado en una longitud que verifique $\ddot{\lambda} < 0$, la longitud tendrá que alcanzar el valor $\lambda_{\mathcal{T}} = l_s - \delta l$ en $t = t_b + T$, donde
 - l_s es el valor de la longitud de estacionamiento,
 - $[l_s - \delta l, l_s + \delta l]$ es la ventana en longitud, y
 - T es el tiempo máximo de permanencia en la ventana;
- la corrección del vector \vec{e} se hará de acuerdo con la estrategia *perigeo hacia el Sol* descrita en el capítulo 2, donde, recordemos que, con esta estrategia se pretende conseguir que:
 - el vector excentricidad tenga la dirección del Sol en la mitad del ciclo, y que
 - el módulo del vector excentricidad en un instante inmediatamente posterior a la maniobra, \vec{e}_b^+ , sea igual al valor del control en excentricidad, e_c .

Obtención de las expresiones que definen el modelo matemático.

Los vectores que intervienen en el proceso ahora son:

$$\begin{aligned}
 \vec{X} &= (\Delta V_1, \Delta V_2, t_b), \\
 \vec{x}_n &= (\Delta V_{1n}, \Delta V_{2n}, t_{bn}), \\
 \vec{Y} &= (\Delta \lambda_{\mathcal{T}}, \Delta e_{x_{\mathcal{T}}}, \Delta e_{y_{\mathcal{T}}}), \\
 \vec{y}_n &= (\Delta \lambda_{\mathcal{T}_n}, \Delta e_{x_{\mathcal{T}_n}}, \Delta e_{y_{\mathcal{T}_n}}), \\
 \vec{Y}_n &= (\Delta \lambda_{\mathcal{T}_n}^N, \Delta e_{x_{\mathcal{T}_n}}^N, \Delta e_{y_{\mathcal{T}_n}}^N),
 \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

siendo

$$\bullet \Delta\lambda_{\mathcal{T}} = \lambda_{\mathcal{T}}(t_b + T) - \lambda_b^-, \quad (4.4.2)$$

donde $\lambda_{\mathcal{T}}(t_b + T) = l_s - \delta l$ y λ_b^- es el valor de la longitud verdadera antes de la maniobra;

$$\bullet \Delta\lambda_{\mathcal{T}_n} = \lambda_{\mathcal{T}_n}(t_{b_n} + T) - \lambda_b^-, \quad (4.4.3)$$

donde $\lambda_{\mathcal{T}_n}(t_{b_n} + T)$ es el valor de la longitud verdadera en el final del ciclo, obtenido al calcular el efecto de la maniobra n -ésima mediante las expresiones del modelo lineal;

$$\bullet \Delta\lambda_{\mathcal{T}_n}^N = \lambda_{\mathcal{T}_n}^N(t_{b_n} + T) - \lambda_b^-, \quad (4.4.4)$$

donde $\lambda_{\mathcal{T}_n}^N(t_{b_n} + T)$ es el valor de la longitud verdadera en el final del ciclo obtenido, en este caso, calculando el efecto de la maniobra n -ésima mediante la propagación numérica de la órbita;

$$\bullet \Delta\vec{e}_{\mathcal{T}} = \vec{e}_{\mathcal{T}}(t_b + T/2) - \vec{e}_b^-, \quad (4.4.5)$$

cuyas componentes son:

$$\begin{pmatrix} \Delta e_{x_{\mathcal{T}}} \\ \Delta e_{y_{\mathcal{T}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{x_{\mathcal{T}}}(t_b + T/2) \\ e_{y_{\mathcal{T}}}(t_b + T/2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e_{x_b}^- \\ e_{y_b}^- \end{pmatrix}, \quad (4.4.6)$$

donde \vec{e}_b^- es el vector excentricidad antes de la maniobra y $\vec{e}_{\mathcal{T}}(t_b + T/2)$ es el vector excentricidad en la mitad del ciclo, cuyo valor es el que se pretende alcanzar como resultado del efecto de la maniobra (vector excentricidad objetivo) y cuyas componentes, resultantes de la aplicación de la estrategia *perigeo hacia el Sol* (2.5.24), se han determinado en la sección 2.5, esto es,

$$\begin{pmatrix} e_{x_{\mathcal{T}}}(t_b + T/2) \\ e_{y_{\mathcal{T}}}(t_b + T/2) \end{pmatrix} = e_0 \begin{pmatrix} -\cos s_{\odot}(t_b + T/2) \\ -\sin s_{\odot}(t_b + T/2) \end{pmatrix} + R_e \begin{pmatrix} \cos s_{\odot}(t_b) \\ \sin s_{\odot}(t_b) \end{pmatrix}, \quad (4.4.7)$$

con e_0 dado por (2.5.25), esto es,

$$e_0 = R_e \cos \left(s_{\odot}(t_b + T/2) - s_{\odot}(t_b) \right) - \sqrt{e_c^2 - R_e^2 \sin^2 \left(s_{\odot}(t_b + T/2) - s_{\odot}(t_b) \right)}, \quad (4.4.8)$$

y donde $s_{\odot}(t_b)$ y $s_{\odot}(t_b + T/2)$ son los ángulos sidéreos del Sol en el instante de la maniobra y en la mitad del ciclo, respectivamente.

- $\Delta \vec{e}_{\mathcal{T}_n} = \vec{e}_{\mathcal{T}_n}(t_{b_n} + T/2) - \vec{e}_b^-,$ (4.4.9)

cuyas componentes son:

$$\begin{pmatrix} \Delta e_{x_{\mathcal{T}_n}} \\ \Delta e_{y_{\mathcal{T}_n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{x_{\mathcal{T}}}(t_{b_n} + T/2) \\ e_{y_{\mathcal{T}}}(t_{b_n} + T/2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e_{x_b}^- \\ e_{y_b}^- \end{pmatrix}. \quad (4.4.10)$$

$\Delta \vec{e}_{\mathcal{T}_n}$ es el vector análogo a $\Delta \vec{e}_{\mathcal{T}}$, pero obtenido en la iteración n -ésima y determinado a partir de las expresiones que calculan el efecto que tiene un impulso tangencial sobre la excentricidad dadas por (2.3.6) y (2.3.7). Como estas expresiones están dadas en función de la diferencia entre los valores del vector excentricidad después y antes de la maniobra, $\vec{e}_{b_n}^+$ y \vec{e}_b^- respectivamente, es decir, mediante la relación

$$\Delta \vec{e}_n = \begin{pmatrix} \Delta e_{x_n} \\ \Delta e_{y_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{x_{b_n}}^+ \\ e_{y_{b_n}}^+ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e_{x_b}^- \\ e_{y_b}^- \end{pmatrix}, \quad (4.4.11)$$

es preciso expresar el vector $\Delta \vec{e}_{\mathcal{T}_n}$ en función de $\Delta \vec{e}_n$. Para ello, consideremos la expresión del vector excentricidad en la mitad del ciclo determinada a partir de su valor después de la maniobra n -ésima, $\vec{e}_{b_n}^+$, más su evolución hasta la mitad del ciclo. Recordando que, por efecto de la presión de radiación solar, el vector excentricidad describe un círculo anual de radio R_e (1.5.44), el vector excentricidad en la mitad del ciclo viene dado por (1.5.45) y (1.5.46):

$$\begin{pmatrix} e_{x_{\mathcal{T}}}(t_{b_n} + T/2) \\ e_{y_{\mathcal{T}}}(t_{b_n} + T/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{x_{b_n}}^+ \\ e_{y_{b_n}}^+ \end{pmatrix} + R_e \begin{pmatrix} \cos s_{\odot}(t_{b_n} + T/2) - \cos s_{\odot}(t_{b_n}) \\ \sin s_{\odot}(t_{b_n} + T/2) - \sin s_{\odot}(t_{b_n}) \end{pmatrix}. \quad (4.4.12)$$

Entonces, el vector $\Delta \vec{e}_{\mathcal{T}_n}$ se escribe en la forma:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta e_{x_{\mathcal{T}_n}} \\ \Delta e_{y_{\mathcal{T}_n}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e_{x_{b_n}}^+ \\ e_{y_{b_n}}^+ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e_{x_b}^- \\ e_{y_b}^- \end{pmatrix} + R_e \begin{pmatrix} \cos s_{\odot}(t_{b_n} + T/2) - \cos s_{\odot}(t_{b_n}) \\ \sin s_{\odot}(t_{b_n} + T/2) - \sin s_{\odot}(t_{b_n}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \Delta e_{x_n} \\ \Delta e_{y_n} \end{pmatrix} + R_e \begin{pmatrix} \cos s_{\odot}(t_{b_n} + T/2) - \cos s_{\odot}(t_{b_n}) \\ \sin s_{\odot}(t_{b_n} + T/2) - \sin s_{\odot}(t_{b_n}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

con lo que ya es posible calcular el vector $\Delta \vec{e}_{\mathcal{T}_n}$ a partir de las expresiones del modelo lineal que describen el efecto de un impulso referidas anteriormente.

- $\Delta \vec{e}_{\mathcal{T}_n}^N = \vec{e}_{\mathcal{T}_n}^N(t_{b_n} + T/2) - \vec{e}_b^-,$ (4.4.14)

cuyas componentes son:

$$\begin{pmatrix} \Delta e_{x_{\mathcal{T}_n}}^N \\ \Delta e_{y_{\mathcal{T}_n}}^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{x_{\mathcal{T}}}^N(t_{b_n} + T/2) \\ e_{y_{\mathcal{T}}}^N(t_{b_n} + T/2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e_{x_b}^- \\ e_{y_b}^- \end{pmatrix}. \quad (4.4.15)$$

$\Delta \vec{e}_{\mathcal{T}_n}^N$ es también un vector análogo a los dos anteriores, $\Delta \vec{e}_{\mathcal{T}}$ y $\Delta \vec{e}_{\mathcal{T}_n}$, pero en este caso, el vector $\vec{e}_{\mathcal{T}_n}^N(t_{b_n} + T/2)$ se obtiene calculando, tanto el efecto de la maniobra n -ésima sobre el vector excentricidad, como su evolución hasta la mitad del ciclo, mediante la propagación numérica de la órbita.

A continuación definimos las funciones que intervienen en el proceso.

La función que define el modelo lineal es:

$$\mathbf{f}(\Delta V_{1_n}, \Delta V_{2_n}, t_{b_n}) = \begin{pmatrix} \Delta \lambda_{\mathcal{T}_n} \\ \Delta e_{x_n} \\ \Delta e_{y_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\Delta V_{1_n}, \Delta V_{2_n}, t_{b_n}) \\ f_2(\Delta V_{1_n}, \Delta V_{2_n}, t_{b_n}) \\ f_3(\Delta V_{1_n}, \Delta V_{2_n}, t_{b_n}) \end{pmatrix}, \quad (4.4.16)$$

y las expresiones analíticas para f_1 , f_2 y f_3 , dadas por (2.5.1) y (2.5.2), se escriben en la forma:

$$\begin{aligned} f_1(\Delta V_{1_n}, \Delta V_{2_n}, t_{b_n}) &= -\frac{3}{V} (\Delta V_{1_n} + \Delta V_{2_n}) \left[\Omega_{\oplus} (t - t_{b_n}) - 90^\circ \right] + \\ &+ \frac{1}{V} (\Delta V_{1_n} - \Delta V_{2_n}) \left[4 \operatorname{sen} \Omega_{\oplus} (t - t_{b_n}) - 270^\circ \right], \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

$$f_2(\Delta V_{1_n}, \Delta V_{2_n}, t_{b_n}) = \frac{2}{V} (\Delta V_{1_n} - \Delta V_{2_n}) \cos s_{b_n}, \quad (4.4.18)$$

$$f_3(\Delta V_{1_n}, \Delta V_{2_n}, t_{b_n}) = \frac{2}{V} (\Delta V_{1_n} - \Delta V_{2_n}) \operatorname{sen} s_{b_n}. \quad (4.4.19)$$

Simplificamos la expresión de f_1 para poder invertirla sin que esto afecte a la precisión de la solución ya que, al tratarse de un proceso iterativo, únicamente influirá en el número de iteraciones necesarias para la convergencia de la sucesión que se construye a partir de ella. Ésta queda entonces en la forma:

$$f_1(\Delta V_{1_n}, \Delta V_{2_n}, t_{b_n}) = -\frac{3}{V} (\Delta V_{1_n} + \Delta V_{2_n}) \left[\Omega_{\oplus} (t - t_{b_n}) - 90^\circ \right]. \quad (4.4.20)$$

Introducimos ahora los parámetros auxiliares

$$\begin{aligned} U_n &= \Delta V_{1_n} + \Delta V_{2_n}, \\ W_n &= \Delta V_{1_n} - \Delta V_{2_n}. \end{aligned} \quad (4.4.21)$$

Dado que los impulsos ΔV_{1_n} y ΔV_{2_n} son de distinto signo, U_n es el valor del cambio en la velocidad del satélite necesario para corregir la longitud, y W_n es el necesario para corregir el vector excentricidad (véase la sección 2.5).

En estos términos, las funciones f_i , $i = 1, 3$ se escriben entonces en la forma:

$$f_1(U_n) = -\frac{3}{V}U_n \left[\Omega_{\oplus} (t - t_{b_n}) - 90^\circ \right], \quad (4.4.22)$$

$$f_2(W_n, t_{b_n}) = \frac{2}{V}W_n \cos s_{b_n}, \quad (4.4.23)$$

$$f_3(W_n, t_{b_n}) = \frac{2}{V}W_n \operatorname{sen} s_{b_n}. \quad (4.4.24)$$

Nótese que en la función f_1 no consideramos como variable el instante de realización de la maniobra, t_{b_n} , ya que, según vimos en la sección 2.3, éste no influye en el control de la longitud y se determina con la estrategia *perigeo hacia el Sol* aplicada, como hemos visto, en el mantenimiento del vector excentricidad.

La función inversa

$$\mathbf{f}^{-1}(\Delta\lambda_{\mathcal{T}_n}, \Delta e_{x_n}, \Delta e_{y_n}) = \begin{pmatrix} U_n \\ W_n \\ s_{b_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(\Delta\lambda_{\mathcal{T}_n}) \\ h_2(\Delta e_{x_n}, \Delta e_{y_n}) \\ h_3(\Delta e_{x_n}, \Delta e_{y_n}) \end{pmatrix} \quad (4.4.25)$$

queda determinada por las expresiones analíticas de sus componentes h_i , $i = 1, 3$, que se obtienen operando en (4.4.22) - (4.4.24):

$$h_1(\Delta\lambda_{\mathcal{T}_n}) = \frac{-\Delta\lambda_{\mathcal{T}_n} \cdot V}{3 \left[\Omega_{\oplus} (t - t_{b_n}) - 90^\circ \right]}, \quad (4.4.26)$$

$$h_2(\Delta e_{x_n}, \Delta e_{y_n}) = \frac{V}{2} \sqrt{\Delta e_{x_n}^2 + \Delta e_{y_n}^2}, \quad (4.4.27)$$

$$h_3(\Delta e_{x_n}, \Delta e_{y_n}) = \arctan \left(\frac{\Delta e_{y_n}}{\Delta e_{x_n}} \right). \quad (4.4.28)$$

Y, por último, escribimos la función que define el efecto de los impulsos calculados a partir del modelo numérico, en términos de los parámetros U_n y W_n , en la forma:

$$\mathbf{F}(U_n, W_n, t_{b_n}) = \begin{pmatrix} \Delta\lambda_{\mathcal{T}_n}^N \\ \Delta e_{x_{\mathcal{T}_n}}^N \\ \Delta e_{y_{\mathcal{T}_n}}^N \end{pmatrix}. \quad (4.4.29)$$

Obtención de las expresiones que proporcionan el proceso iterativo.

Los valores ΔV_1 , ΔV_2 y t_b que son solución de las ecuaciones $\mathbf{F}(\vec{X}) = \vec{Y}$ se determinan a partir de las sucesiones (U_n) , (W_n) y (t_{b_n}) , respectivamente. La forma de construir estas sucesiones se describe a continuación.

- Cálculo del término general de la sucesión (U_n) .

La expresión que permite obtener el término $(n + 1)$ -ésimo de la sucesión, (4.1.6), aparece en la forma:

$$U_{n+1} = f_1^{-1} (\Delta\lambda_{\mathcal{T}_n} + \Delta\lambda_{\mathcal{T}} - \Delta\lambda_{\mathcal{T}_n}^N) = h_1 (\Delta\lambda_{\mathcal{T}_n} + \Delta\lambda_{\mathcal{T}} - \Delta\lambda_{\mathcal{T}_n}^N), \quad (4.4.30)$$

y teniendo en cuenta la expresión para h_1 dada en (4.4.54) se tiene que:

$$U_{n+1} = \frac{-(\Delta\lambda_{\mathcal{T}_n} + \Delta\lambda_{\mathcal{T}} - \Delta\lambda_{\mathcal{T}_n}^N) V}{3 [\Omega_{\oplus} (t - t_{b_n}) - 90^\circ]}. \quad (4.4.31)$$

Por tanto, considerando la expresión para U_n dada por (4.4.25) y (4.4.54) y operando se obtiene para U_{n+1} la siguiente relación de recurrencia:

$$U_{n+1} = U_n + \frac{-(\Delta\lambda_{\mathcal{T}} - \Delta\lambda_{\mathcal{T}_n}^N) V}{3 [\Omega_{\oplus} (t - t_{b_n}) - 90^\circ]}, \quad (4.4.32)$$

en la que, al sustituir $\Delta\lambda_{\mathcal{T}}$ y $\Delta\lambda_{\mathcal{T}_n}^N$ por sus definiciones (4.4.2) y (4.4.4), y teniendo en cuenta que el criterio para la longitud objetivo se establece en $t = t_{b_n} + T$, queda finalmente en la forma:

$$U_{n+1} = U_n + \frac{V}{3} \cdot \frac{\lambda_{\mathcal{T}_n}^N (t_{b_n} + T) - \lambda_{\mathcal{T}} (t_b + T)}{\Omega_{\oplus} T - 90^\circ}. \quad (4.4.33)$$

- Cálculo del término general de la sucesión (W_n) .

La expresión del proceso iterativo (4.1.5), en este caso se escribe en la forma:

$$\begin{pmatrix} \Delta e_{x_{n+1}} \\ \Delta e_{y_{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta e_{x_n} + \Delta e_{x_{\mathcal{T}}} - \Delta e_{x_{\mathcal{T}_n}}^N \\ \Delta e_{y_n} + \Delta e_{y_{\mathcal{T}}} - \Delta e_{y_{\mathcal{T}_n}}^N \end{pmatrix}. \quad (4.4.34)$$

Si sustituimos las expresiones analíticas de las funciones f_2 y f_3 dadas en (4.4.23) y (4.4.24), y las componentes de los vectores $\Delta\vec{e}_T$ y $\Delta\vec{e}_{T_n}^N$ dadas por sus definiciones (4.4.6) y (4.4.15), resulta que:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{V}W_{n+1} \cos s_{b_{n+1}} \\ \frac{2}{V}W_{n+1} \operatorname{sen} s_{b_{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{V}W_n \cos s_{b_n} + e_{x_T}(t_b + T/2) - e_{x_T}^N(t_{b_n} + T/2) \\ \frac{2}{V}W_n \operatorname{sen} s_{b_n} + e_{y_T}(t_b + T/2) - e_{y_T}^N(t_{b_n} + T/2) \end{pmatrix}. \quad (4.4.35)$$

Aplicando a esta expresión la función h_2 (4.4.27), se tiene para el término $(n+1)$ -ésimo de la sucesión (W_n) la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= \frac{V}{2} \left\{ \frac{4}{V^2}W_n^2 + e_T^2(t_b + T/2) + e_{T_n}^{N^2}(t_{b_n} + T/2) + \right. \\ &+ \frac{4}{V}W_n \left[\cos s_{b_n} \left(e_{x_T}(t_b + T/2) - e_{x_T}^N(t_{b_n} + T/2) \right) + \right. \\ &+ \left. \operatorname{sen} s_{b_n} \left(e_{y_T}(t_b + T/2) - e_{y_T}^N(t_{b_n} + T/2) \right) \right] - \\ &\left. - 2 \left(e_{x_T}(t_b + T/2)e_{x_T}^N(t_{b_n} + T/2) + e_{y_T}(t_b + T/2)e_{y_T}^N(t_{b_n} + T/2) \right) \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (4.4.36)$$

donde $e_T(t_b + T/2) = |\vec{e}_T(t_b + T/2)|$ y $e_{T_n}^N(t_{b_n} + T/2) = |\vec{e}_{T_n}^N(t_{b_n} + T/2)|$.

Teniendo en cuenta la relación que existe entre el ángulo s_{b_n} y el vector $\Delta\vec{e}_n$, obtenida a partir de (4.4.25) y (4.4.28) y dada por las expresiones

$$\begin{aligned} \cos s_{b_n} &= \frac{\Delta e_{x_n}}{\Delta e_n}, \\ \operatorname{sen} s_{b_n} &= \frac{\Delta e_{y_n}}{\Delta e_n}, \end{aligned} \quad (4.4.37)$$

con $\Delta e_n = |\Delta \vec{e}_n|$, el término W_{n+1} aparece finalmente en la forma:

$$\begin{aligned}
W_{n+1} &= \frac{V}{2} \left\{ \frac{4}{V^2} W_n^2 + e_{x\tau}^2(t_b + T/2) + e_{y\tau}^2(t_{b_n} + T/2) + \right. \\
&+ \frac{4}{V} \frac{W_n}{\Delta e_n} \left[\Delta e_{x_n} \left(e_{x\tau}(t_b + T/2) - e_{x\tau}^N(t_{b_n} + T/2) \right) + \right. \\
&+ \left. \Delta e_{y_n} \left(e_{y\tau}(t_b + T/2) - e_{y\tau}^N(t_{b_n} + T/2) \right) \right] - \\
&\left. - 2 \left(e_{x\tau}(t_b + T/2) e_{x\tau}^N(t_{b_n} + T/2) + e_{y\tau}(t_b + T/2) e_{y\tau}^N(t_{b_n} + T/2) \right) \right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{4.4.38}$$

Por tanto, una vez determinados los valores de U_{n+1} y W_{n+1} , las magnitudes de los impulsos $\Delta V_{1_{n+1}}$ y $\Delta V_{2_{n+1}}$ se obtienen de manera inmediata a partir de (4.4.21), es decir, invirtiendo:

$$\begin{aligned}
\Delta V_{1_{n+1}} &= \frac{U_{n+1} + W_{n+1}}{2}, \\
\Delta V_{2_{n+1}} &= \frac{U_{n+1} - W_{n+1}}{2}.
\end{aligned} \tag{4.4.39}$$

- Cálculo del término general de la sucesión (s_{b_n}).

Una vez fijada la fecha de la primera maniobra, el instante de su realización lo determinamos a partir del tiempo sidéreo, s_{b_n} , cuya relación de recurrencia, obtenida aplicando la función h_3 (4.4.28) a la expresión (4.4.35), resulta ser:

$$s_{b_{n+1}} = \arctan \left(\frac{\frac{2}{V} W_n \sin s_{b_n} + e_{y\tau}(t_b + T/2) - e_{y\tau}^N(t_{b_n} + T/2)}{\frac{2}{V} W_n \cos s_{b_n} + e_{x\tau}(t_b + T/2) - e_{x\tau}^N(t_{b_n} + T/2)} \right). \tag{4.4.40}$$

Sustituyendo ahora el valor de W_n obtenido a partir de las expresiones (4.4.25) y (4.4.27), esta expresión queda finalmente en la forma:

$$s_{b_{n+1}} = \arctan \left(\frac{\sqrt{\Delta e_{x_n}^2 + \Delta e_{y_n}^2} \sin s_{b_n} + e_{y\tau}(t_b + T/2) - e_{y\tau}^N(t_{b_n} + T/2)}{\sqrt{\Delta e_{x_n}^2 + \Delta e_{y_n}^2} \cos s_{b_n} + e_{x\tau}(t_b + T/2) - e_{x\tau}^N(t_{b_n} + T/2)} \right). \tag{4.4.41}$$

La segunda maniobra se efectuará medio día sidéreo después.

Conviene observar que con este procedimiento se consigue que la longitud verdadera alcance en un instante prefijado un valor objetivo determinado a priori, pero no se garantiza que, en su evolución, se mantenga dentro de la ventana asignada en longitud. Lo único que se puede lograr es mejorar los resultados que se obtienen al aplicar el modelo lineal descrito en el capítulo 2.

Sin embargo, puesto que con un método iterativo podemos ser más exigentes al imponer condiciones objetivo para la longitud verdadera que optimicen el mantenimiento en estación, en la siguiente sección presentamos una forma de realizar el mantenimiento este-oeste que consigue controlar la longitud verdadera durante todo el ciclo.

4.4.2 Problema 2: $\max_{t_b \leq t \leq t_b + T} \lambda(t) - l_s = l_s - \min_{t_b \leq t \leq t_b + T} \lambda(t).$

Aquí replanteamos el problema del mantenimiento en estación este-oeste. El objetivo ahora es encontrar dos impulsos tangenciales de distinto signo para corregir simultáneamente el vector excentricidad y la longitud verdadera, cuyo efecto sea tal que esta última se mantenga simétrica respecto del valor de la longitud nominal, alcanzando su máximo en la mitad del ciclo y su mínimo al final del mismo. El control del vector excentricidad se va a realizar en las mismas condiciones que el caso anterior, por lo que nos centramos únicamente en el modelo matemático utilizado para el mantenimiento en estación de la longitud.

En estas condiciones, consideramos los vectores que intervienen ahora en el proceso; estos son:

$$\begin{aligned}
 \vec{X} &= (U, C), \\
 \vec{x}_n &= (U_n, C_n), \\
 \vec{Y} &= (\Delta\lambda_{M\tau}, \Delta\lambda_{m\tau}), \\
 \vec{y}_n &= (\Delta\lambda_{M\tau_n}, \Delta\lambda_{m\tau_n}), \\
 \vec{Y}_n &= (\Delta\lambda_{M\tau_n}^N, \Delta\lambda_{m\tau_n}^N),
 \end{aligned} \tag{4.4.42}$$

donde

- $U = \Delta V_1 + \Delta V_2,$ (4.4.43)

es el impulso necesario para corregir la longitud verdadera;

- $U_n = \Delta V_{1_n} + \Delta V_{2_n},$ (4.4.44)

es el análogo al anterior, pero determinado en la iteración n -ésima;

- $C = \max_{t_b \leq t \leq t_b + T} \lambda(t) - l_s = l_s - \min_{t_b \leq t \leq t_b + T} \lambda(t),$ (4.4.45)

es el parámetro que representa el criterio de simetría, ya que l_s representa el valor de la longitud nominal. Los valores máximo y mínimo no se conocen a priori y se podrán determinar a partir del límite de la sucesión (C_n) definida a continuación.

- $C_n = \max_{t_{b_n} \leq t \leq t_{b_n} + T} \lambda_n(t) - l_s = l_s - \min_{t_{b_n} \leq t \leq t_{b_n} + T} \lambda_n(t),$ (4.4.46)

es el análogo al anterior obtenido en la iteración n -ésima;

- $\Delta \lambda_{M\mathcal{T}} = \max_{t_b \leq t \leq t_b + T} \lambda(t) - \lambda_b^-,$ (4.4.47)

donde $\max_{t_b \leq t \leq t_b + T} \lambda(t)$ es el valor que satisface el criterio de simetría; y λ_b^- es el valor de la longitud verdadera antes de la maniobra;

- $\Delta \lambda_{M\mathcal{T}_n} = \max_{t_{b_n} \leq t \leq t_{b_n} + T} \lambda_n(t) - \lambda_b^-,$ (4.4.48)

donde $\lambda_n(t)$ es el valor de la longitud verdadera obtenido al calcular el efecto de la maniobra n -ésima con el modelo lineal;

- $\Delta \lambda_{M\mathcal{T}_n}^N = \max_{t_{b_n} \leq t \leq t_{b_n} + T} \lambda_n^N(t) - \lambda_b^-,$ (4.4.49)

donde $\lambda_n(t)^N$ es el valor de la longitud verdadera que incluye el efecto de la maniobra n -ésima, determinado mediante la propagación numérica de la órbita;

- $\Delta \lambda_{m\mathcal{T}} = \min_{t_b \leq t \leq t_b + T} \lambda(t) - \lambda_b^-,$ (4.4.50)

donde el valor $\min_{t_b \leq t \leq t_b + T} \lambda(t)$ es el que satisface el criterio de simetría;

- $\Delta \lambda_{m\mathcal{T}_n} = \min_{t_{b_n} \leq t \leq t_{b_n} + T} \lambda_n(t) - \lambda_b^-;$ (4.4.51)

- $\Delta \lambda_{m\mathcal{T}_n}^N = \min_{t_{b_n} \leq t \leq t_{b_n} + T} \lambda_n^N(t) - \lambda_b^-.$ (4.4.52)

Las funciones que intervienen en el proceso son las mismas que para el caso anterior. Recordemos que la función que define el modelo lineal tiene como expresión analítica (4.4.22), esto es,

$$f_1(U_n) = -\frac{3}{V}U_n \left[\Omega_{\oplus}(t - t_{b_n}) - 90^\circ \right], \quad (4.4.53)$$

la función inversa, h_1 , dada en (4.4.54), que tiene como expresión:

$$h_1(\Delta\lambda_{\mathcal{T}_n}) = \frac{-\Delta\lambda_{\mathcal{T}_n} \cdot V}{3 \left[\Omega_{\oplus}(t - t_{b_n}) - 90^\circ \right]}, \quad (4.4.54)$$

y la función que define el efecto de los impulsos calculados a partir de la propagación numérica de la órbita, escrita ahora como:

$$\mathbf{F}(U_n) = \Delta\lambda_{\mathcal{T}_n}^N. \quad (4.4.55)$$

Ahora bien, el modelo lineal sólo vincula variaciones de velocidad con variaciones de longitud (ver expresiones (4.4.22) y (4.4.54)). Por tanto, al no disponer de expresiones analíticas que involucren al parámetro C_n , es necesario, ahora, encontrar expresiones que relacionen $\Delta\lambda_n$, U_n y C_n .

Obtención de las expresiones que proporcionan el proceso iterativo.

En primer lugar consideramos la expresión del método iterativo (4.1.5),

$$\mathbf{f}(\vec{x}_{n+1}) = \mathbf{f}(\vec{x}_n) + \vec{Y} - \mathbf{F}(\vec{x}_n),$$

para el valor máximo de la longitud verdadera. Con un procedimiento similar al seguido en el caso anterior obtenemos una expresión análoga a (4.4.32), es decir,

$$U_{n+1} = U_n + \frac{-\left(\Delta\lambda_{M\mathcal{T}} - \Delta\lambda_{M\mathcal{T}_n}^N\right) V}{3 \left[\Omega_{\oplus}(t - t_{b_n}) - 90^\circ \right]}, \quad (4.4.56)$$

que, al sustituir (4.4.47) y (4.4.49) en ella, queda escrita en la forma:

$$U_{n+1} = U_n + \frac{V}{3} \cdot \frac{\max_{t_{b_n} \leq t \leq t_{b_n} + T} \lambda_n^N(t) - \max_{t_b \leq t \leq t_b + T} \lambda(t)}{\Omega_{\oplus}(t - t_{b_n}) - 90^\circ}. \quad (4.4.57)$$

Dado que el valor $\max_{t_b \leq t \leq t_b + T} \lambda(t)$ es el que verifica el criterio de simetría, C , (4.4.45), tenemos que:

$$U_{n+1} = U_n + \frac{V}{3} \cdot \frac{\max_{t_{b_n} \leq t \leq t_{b_n} + T} \lambda_n^N(t) - l_s - C}{\Omega_{\oplus}(t - t_{b_n}) - 90^\circ}. \quad (4.4.58)$$

Pero, puesto que, el valor de C no se conoce a priori, se calcula en cada iteración a la vez que se determina U_n . Por esta razón consideramos en la expresión anterior el término n -ésimo de una nueva sucesión (C_n) que converge al parámetro C . En estas condiciones podemos escribir (4.4.58) en la forma:

$$U_{n+1} = U_n + \frac{V}{3} \cdot \frac{\max_{t_{b_n} \leq t \leq t_{b_n} + T} \lambda_n^N(t) - l_s - C_n}{\Omega_{\oplus}(t - t_{b_n}) - 90^\circ}. \quad (4.4.59)$$

Repetiendo ahora el proceso para el valor mínimo de la longitud verdadera obtenemos una relación análoga a la anterior, esto es,

$$U_{n+1} = U_n + \frac{V}{3} \cdot \frac{\min_{t_{b_n} \leq t \leq t_{b_n} + T} \lambda_n^N(t) - l_s + C_n}{\Omega_{\oplus}(t - t_{b_n}) - 90^\circ}. \quad (4.4.60)$$

Consideremos ahora los parámetros auxiliares

$$U_{\max} = \frac{V}{3} \cdot \frac{\max_{t_{b_n} \leq t \leq t_{b_n} + T} \lambda_n^N(t) - l_s - C_n}{\Omega_{\oplus}(t - t_{b_n}) - 90^\circ}, \quad (4.4.61)$$

$$U_{\min} = \frac{V}{3} \cdot \frac{\min_{t_{b_n} \leq t \leq t_{b_n} + T} \lambda_n^N(t) - l_s + C_n}{\Omega_{\oplus}(t - t_{b_n}) - 90^\circ}, \quad (4.4.62)$$

que verifican:

a) en el instante $t = t_{b_n} + \frac{T}{2}$, es decir, en la mitad del ciclo,

$$U_{\max} \cdot \frac{3}{V} \cdot (\Omega_{\oplus} T / 2 - 90^\circ) = \lambda_n^N(t_{b_n} + T/2) - l_s - C_n; \quad (4.4.63)$$

b) en el instante $t = t_{b_n} + T$, es decir, en el final del ciclo,

$$U_{\min} \cdot \frac{3}{V} \cdot (\Omega_{\oplus} T - 90^\circ) = \lambda_n^N(t_{b_n} + T) - l_s + C_n. \quad (4.4.64)$$

Por otra parte, cuando se alcanzan los valores máximo y mínimo de la longitud que verifican el criterio de simetría, se tiene que $C_{n+1} \doteq C_n$, y esto ocurre en la mitad y el final del ciclo, respectivamente. Así pues, de las expresiones (4.4.59) y (4.4.60) obtenemos que

$$U_{n+1} = U_n + \frac{V}{3} \cdot \frac{\lambda_n^N (t_{b_n} + T/2) - l_s - C_{n+1}}{\Omega_{\oplus} T/2 - 90^\circ}, \quad (4.4.65)$$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{V}{3} \cdot \frac{\lambda_n^N (t_{b_n} + T) - l_s + C_{n+1}}{\Omega_{\oplus} T - 90^\circ}, \quad (4.4.66)$$

expresiones que, teniendo en cuenta las expresiones (4.4.63) y (4.4.64), se pueden escribir en la forma

$$U_{n+1} = U_n + \frac{V}{3} \cdot \frac{U_{\max} \frac{3}{V} (\Omega_{\oplus} T/2 - 90^\circ) + C_n - C_{n+1}}{\Omega_{\oplus} T/2 - 90^\circ}, \quad (4.4.67)$$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{V}{3} \cdot \frac{U_{\min} \frac{3}{V} (\Omega_{\oplus} T - 90^\circ) - C_n + C_{n+1}}{\Omega_{\oplus} T - 90^\circ}. \quad (4.4.68)$$

Introduciendo ahora la función

$$g(t) = \frac{3}{V} [\Omega_{\oplus} (t - t_{b_n}) - 90^\circ], \quad (4.4.69)$$

las expresiones (4.4.67) y (4.4.68) quedan en la forma:

$$U_{n+1} = U_n + \frac{U_{\max} g(t_{b_n} + T/2) + C_n - C_{n+1}}{g(t_{b_n} + T/2)}, \quad (4.4.70)$$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{U_{\min} g(t_{b_n} + T) - C_n + C_{n+1}}{g(t_{b_n} + T)}, \quad (4.4.71)$$

que resultan más apropiadas para su tratamiento algebraico.

Resolviendo finalmente el sistema de ecuaciones formado por ellas para $U_{n+1} - U_n$ y $C_{n+1} - C_n$, obtenemos en definitiva las relaciones de recurrencia para las sucesiones (U_n) y (C_n) . Estas, por tanto, son:

$$U_{n+1} = U_n + \frac{U_{\max} g(t_{b_n} + T/2) + U_{\min} g(t_{b_n} + T)}{g(t_{b_n} + T/2) + g(t_{b_n} + T)}, \quad (4.4.72)$$

$$C_{n+1} = C_n + (U_{\max} - U_{\min}) \frac{g(t_{b_n} + T/2) g(t_{b_n} + T)}{g(t_{b_n} + T/2) + g(t_{b_n} + T)}. \quad (4.4.73)$$

La magnitud de los impulsos ΔV_{1_n} y ΔV_{2_n} se obtendrá, igual que en el caso anterior, mediante la expresión (4.4.39).

El organigrama del proceso iterativo seguido en ambos problemas se representa en la figura (4.4.2). Se puede observar que, de manera análoga al caso del mantenimiento norte-sur, en cada iteración se introducen también las soluciones obtenidas, hasta que la respuesta del sistema es la que se requiere y, entonces, finaliza el proceso.

Cabe señalar también que el valor $2C_n$ representa el ancho de ventana que ocupa la longitud verdadera durante su evolución como resultado de la maniobra. Al conocer este valor, podemos ajustar de manera óptima esta evolución, maximizando el valor del control de la excentricidad, e_c . Esto implica que también podemos hacer menor la magnitud del impulso necesario para su mantenimiento, con el consiguiente ahorro de combustible. La simulación numérica de este hecho se presenta en el siguiente capítulo.

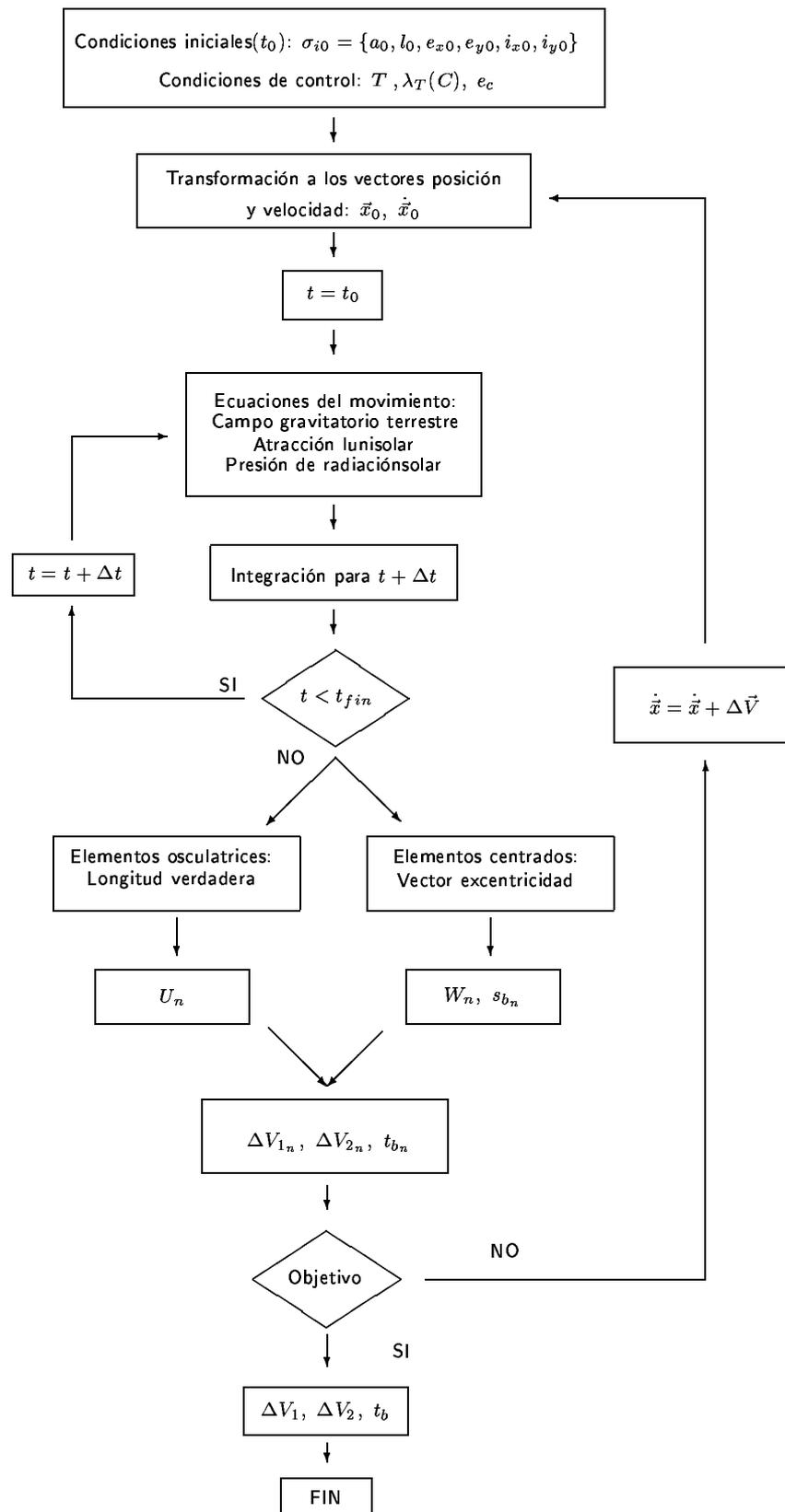


Figura 4.4.1: Proceso iterativo para el cálculo de maniobras este-oeste.

4.5 Conclusiones y resultados.

En este capítulo hemos desarrollado un método para la optimización del cálculo de las maniobras. Hemos combinado una teoría analítica con la integración numérica de las ecuaciones del movimiento, aprovechando las ventajas que presentan ambos métodos, para generar un método iterativo que proporciona de manera precisa impulsos y tiempos de realización de los mismos.

Este método utiliza técnicas de control “feedback”, ya que introducimos la solución obtenida en las ecuaciones del movimiento para analizar la respuesta del sistema.

En primer lugar se ha presentado el modelo matemático, estudiando su convergencia, y posteriormente lo hemos desarrollado para el mantenimiento en estación, tanto norte-sur, como este-oeste.

Los criterios objetivo para los vectores inclinación y excentricidad se han determinado de acuerdo con las estrategias, ya expuestas previamente, *dirección secular* y *perigeo hacia el Sol*, respectivamente. Sin embargo, para la longitud hemos propuesto dos maneras de establecer el criterio objetivo: en una primera forma, el criterio para la longitud objetivo ha sido el de alcanzar el valor del límite inferior de su ventana asignada en el final del ciclo; en la segunda forma, el objetivo ha sido conseguir que la longitud verdadera se mantenga simétrica respecto de la longitud nominal, con su máximo en la mitad del ciclo y su mínimo al final del mismo.

Para todos los casos se dan las relaciones de recurrencia que definen las sucesiones que permiten obtener los impulsos y tiempos, así como los esquemas de los procesos iterativos.

Capítulo 5

Simulación numérica. Resultados.

En este capítulo se presenta una simulación numérica del mantenimiento en estación de un satélite geostacionario situado en la longitud 30° Oeste.

Comenzamos con el mantenimiento norte-sur durante el año 2000 utilizando parámetros oscultrices obtenidos mediante la propagación numérica de la órbita y el método iterativo descrito en el capítulo anterior. Se analizan distintas formas de determinar el valor de la corrección para la inclinación para ciclos de 14 y 28 días, utilizando en todas ellas como estrategia común la ya estudiada *dirección secular*. Asimismo, se efectúa la simulación utilizando las expresiones del modelo lineal expuestas en el segundo capítulo con parámetros centrados.

Seguidamente, y de manera análoga, se lleva a cabo el mantenimiento en estación este-oeste, en este caso, durante tres meses. Se aplica el método iterativo para la longitud verdadera y el vector excentricidad centrado tratando los dos problemas expuestos en el capítulo 4 y planteados en función del criterio objetivo para la longitud verdadera (que alcance un valor concreto en un instante determinado o bien, que describa una parábola simétrica respecto de la longitud nominal). También se realiza la simulación con el modelo lineal y la longitud media, únicamente para el primero de ellos. En todos los casos se aplica la estrategia *perigeo hacia el Sol*.

Una vez calculadas las magnitudes de los impulso correctores, se comparan los dos métodos, iterativo y lineal, analizando cuál de ellos reduce la magnitud de la velocidad aplicada, y por tanto, el consumo de combustible. De esta forma, obtenemos que este objetivo se cumple controlando la longitud verdadera, el vector inclinación oscultriz y el vector excentricidad centrado con el método iterativo junto con la integración numérica de las ecuaciones del movimiento de satélite con el criterio de simetría para la longitud, en ciclos de 14 días de duración.

Finalmente, con este procedimiento se realiza la simulación combinando las maniobras norte-sur y este-oeste desde el 1 de enero al 31 de diciembre de 2000.

5.1 Datos para la simulación numérica.

Las características de la misión y del satélite geoestacionario para el que se efectúa la simulación numérica del mantenimiento en estación son las siguientes:

Longitud nominal:	$l_s = 30^\circ$ Oeste
Ventana en longitud:	$[-30^\circ.07, -29^\circ.93]$
Ventana en latitud:	$[-0^\circ.05, 0^\circ.05]$
Control en excentricidad:	$e_c = 1.6 \times 10^{-4}$ radianes
Control en inclinación:	$i_c = 0^\circ.05$
Mantenimiento norte-sur:	una maniobra sur
Mantenimiento este-oeste:	dos maniobras, la primera oeste y la segunda, este
Duración del ciclo:	$T = 14$ ó 30 días
Fecha:	año 2000
Características físicas del satélite:	
Relación área/masa:	$A/m = 0.04289 \text{ m}^2/\text{kg}$
Coeficiente de reflectividad:	$\mathcal{R} = 0.02$

Algunos de estos datos corresponden al satélite español de telecomunicaciones HISPASAT 1A.

5.2 Mantenimiento en estación norte-sur.

5.2.1 Proceso iterativo. Elementos osculatrices.

El mantenimiento en estación norte-sur se realiza efectuando periódicamente una maniobra sur. La magnitud del impulso y del instante de su realización se han calculado aplicando el método iterativo descrito en el capítulo anterior, para un valor del control de la inclinación $i_c = 0^\circ.05$. La tabla (5.2.1) muestra los resultados obtenidos en uno de los ciclos con este proceso iterativo. Como se observa en ella, la convergencia es muy rápida.

Iteración	ΔV_S (en m/s)	s_b (en radianes)	Fecha	Hora (TU)
6	1.61950	4.80143	20-05-2000	16 ^h 58 ^m 07 ^s .4
5	1.61950	4.80143	20-05-2000	16 ^h 58 ^m 07 ^s .4
4	1.61949	4.80143	20-05-2000	16 ^h 58 ^m 07 ^s .4
3	1.61952	4.80135	20-05-2000	16 ^h 58 ^m 06 ^s .3
2	1.61782	4.80219	20-05-2000	16 ^h 58 ^m 18 ^s .9
1	0.00000	0.00000	20-05-2000	0 ^h 00 ^m 00 ^s .0

Tabla 5.2.1: Resultado de una iteración.

A continuación se presentan dos formas distintas de realizar el mantenimiento en estación norte-sur, dependiendo de cómo se determina el vector inclinación objetivo, $\vec{i}_{\mathcal{T}}$. En ambas se utiliza la estrategia *dirección secular* para calcular este vector, cuya expresión viene dada por (2.4.3), esto es, por:

$$\begin{aligned} i_{x_{\mathcal{T}}} &= i_x^- - \Delta i \cos \Omega_{sec}, \\ i_{x_{\mathcal{T}}} &= i_x^- - \Delta i \sen \Omega_{sec}. \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

La diferencia entre ellas reside en que, mientras que en la primera el valor del módulo de la corrección, Δi , se determina a priori y se mantiene constante durante todo el año, en la segunda se calcula en cada ciclo a partir de la evolución del vector inclinación. El valor Ω_{sec} depende del año (véase la tabla (2.4.1)); al año 2000 le corresponde

$$\Omega_{sec} = 95^\circ.08. \quad (5.2.2)$$

A su vez, cada una de ellas se evalúa para ciclos de 14 y 28 días de duración.

Caso 1.a Δi constante para un ciclo de 14 días

En el capítulo 1 se estudió la evolución del vector inclinación bajo la acción de la fuerza lunisolar, obteniéndose que ésta tenía un término secular y términos periódicos. Su amplitud, en cortos periodos de tiempo, depende de la época del año. Como ejemplo, la figura (5.2.1) muestra la evolución de este vector durante 14 días para los seis primeros meses del año 2000, comenzando en el origen, (0,0). En ella se observa que la variación de la inclinación presenta diferencias de décimas de grado.

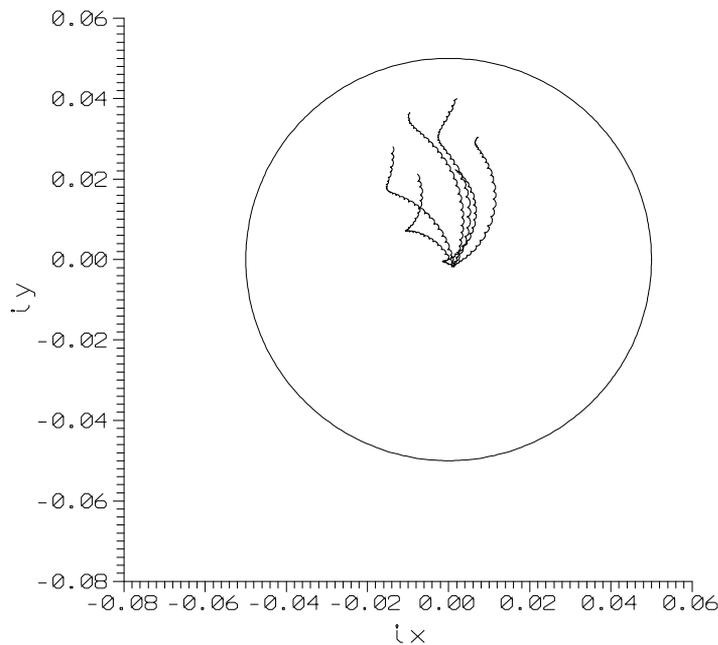


Figura 5.2.1: Evolución del vector inclinación según la época del año.

Teniendo en cuenta este hecho, el valor de Δi que interviene en las expresiones (5.2.1) se determina, en este caso, promediando las magnitudes de la variación que experimenta el vector \vec{i} en 14 días durante todo el año para el que se efectúa el mantenimiento en estación. El valor obtenido es:

$$\Delta i = 0^\circ.03. \quad (5.2.3)$$

A causa de la evolución que presenta el vector \vec{i} es necesario determinar un vector inicial apropiado que garantice su permanencia dentro del círculo de control durante los ciclos de mantenimiento en estación sin necesidad de realizar más maniobras que las programadas por la misión, siendo, en este caso, una maniobra sur cada 14 días.

Las figuras (5.2.2) muestran varios ciclos de mantenimiento en estación realizados en las mismas condiciones, para distintos vectores inclinación iniciales. Con ellas se pone de

manifiesto la importancia de una buena situación inicial del vector inclinación. En ellas se observa que el vector \vec{i} abandona su círculo de control de radio $i_c = 0^\circ.05$ en el tercer ciclo.

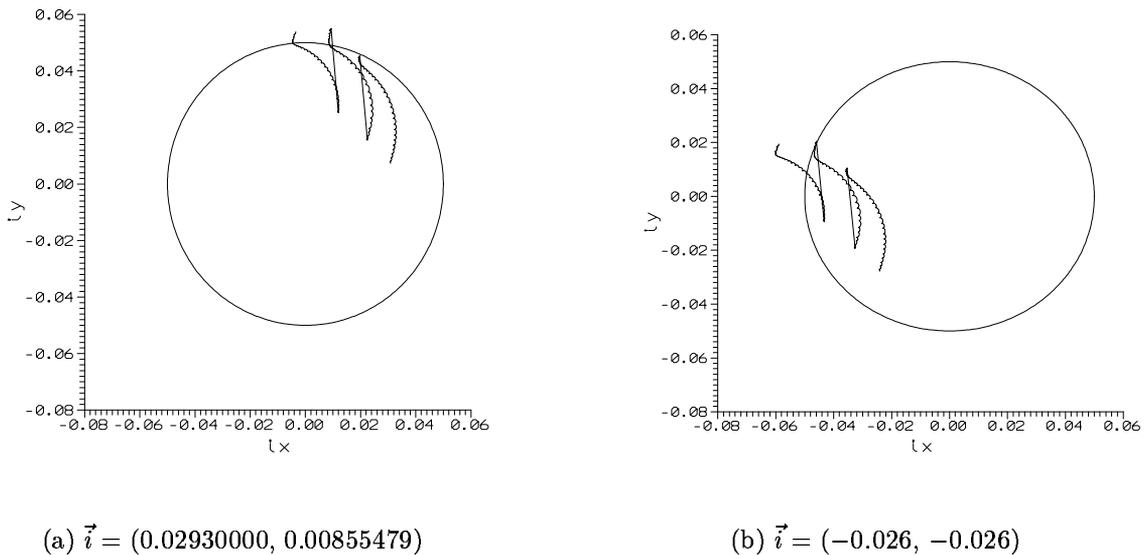


Figura 5.2.2: Influencia del vector inclinación inicial en el mantenimiento en estación.

El vector inclinación inicial elegido que garantiza la permanencia en el círculo tiene por componentes

$$\begin{aligned} i_x &= 0^\circ.0386660, \\ i_y &= -0^\circ.0255846. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Para el mantenimiento en estación efectuado desde el 1 de enero de 2000 hasta el 31 de diciembre de ese mismo año se han efectuado un total de 25 maniobras sur, con un periodo de 14 días. En la figura (5.2.3) se muestra el efecto de estas maniobras sobre el vector inclinación, y en la tabla (5.2.2) aparecen las fechas y horas de las maniobras junto con el valor del impulso determinado con el método iterativo descrito en el capítulo anterior. El incremento total de velocidad ΔV para todo el año ha sido de 40.26734 m/sg .

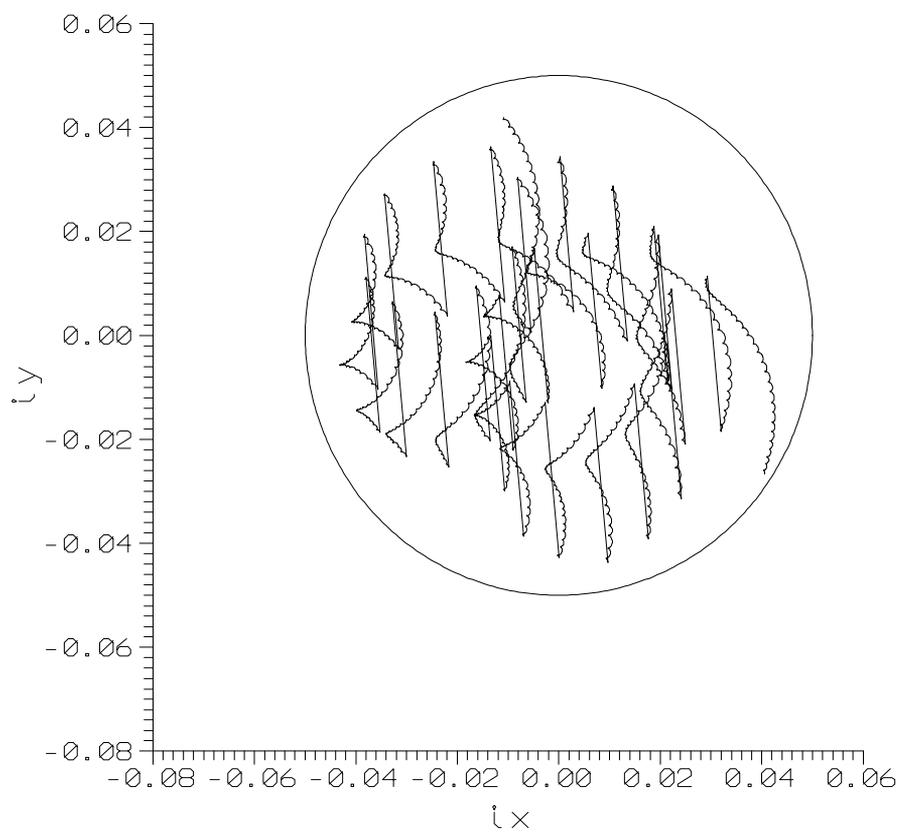


Figura 5.2.3: Mantenimiento en estación norte-sur durante el año 2000 para $\Delta i = 0^\circ.03$ y $T = 14$ días.

Fecha	Hora (TU)	ΔV_S (en m/s)
15-01-2000	00 ^h 45 ^m 36 ^s .5	1.61004
29-01-2000	23 ^h 47 ^m 16 ^s .9	1.61024
12-02-2000	22 ^h 53 ^m 33 ^s .4	1.61023
26-02-2000	22 ^h 00 ^m 33 ^s .9	1.61049
11-03-2000	21 ^h 08 ^m 17 ^s .5	1.61054
25-03-2000	20 ^h 16 ^m 46 ^s .4	1.61084
08-04-2000	19 ^h 26 ^m 00 ^s .4	1.61091
22-04-2000	18 ^h 36 ^m 01 ^s .9	1.61119
06-05-2000	17 ^h 46 ^m 51 ^s .6	1.61125
20-05-2000	16 ^h 58 ^m 32 ^s .2	1.61147
03-06-2000	16 ^h 11 ^m 05 ^s .4	1.61145
17-06-2000	15 ^h 24 ^m 34 ^s .2	1.61158
01-07-2000	14 ^h 39 ^m 00 ^s .6	1.61147
15-07-2000	13 ^h 54 ^m 27 ^s .7	1.61149
29-07-2000	13 ^h 10 ^m 56 ^s .4	1.61128
12-08-2000	12 ^h 28 ^m 30 ^s .0	1.61121
26-08-2000	11 ^h 47 ^m 07 ^s .4	1.61092
09-09-2000	11 ^h 06 ^m 50 ^s .5	1.61080
23-09-2000	10 ^h 27 ^m 36 ^s .5	1.61047
07-10-2000	09 ^h 49 ^m 24 ^s .9	1.61035
21-10-2000	09 ^h 12 ^m 10 ^s .7	1.61003
04-11-2000	08 ^h 35 ^m 50 ^s .4	1.60996
18-11-2000	08 ^h 00 ^m 17 ^s .5	1.60969
02-12-2000	07 ^h 25 ^m 25 ^s .5	1.60969
16-12-2000	06 ^h 51 ^m 06 ^s .0	1.60951
ΔV total		40.26734

Tabla 5.2.2: Tiempos y magnitudes de las maniobras sur para $\Delta i = 0^\circ.03$ y $T = 14$ días.

Caso 1.b Δi constante para un ciclo de 28 días

En este caso se considera un ciclo de mantenimiento en estación de 28 días de duración y un valor constante para Δi . Este valor se ha determinado de la misma forma que en el caso anterior, promediando la magnitud de la variación que experimenta el vector \vec{i} , pero esta vez durante 28 días. El valor obtenido es:

$$\Delta i = 0^\circ.06. \quad (5.2.5)$$

En la figura (5.2.4) se muestran la evolución de \vec{i} para seis meses, de enero a junio. En ella se aprecian de nuevo las distintas amplitudes que tiene su movimiento, dependiendo de la época del año.

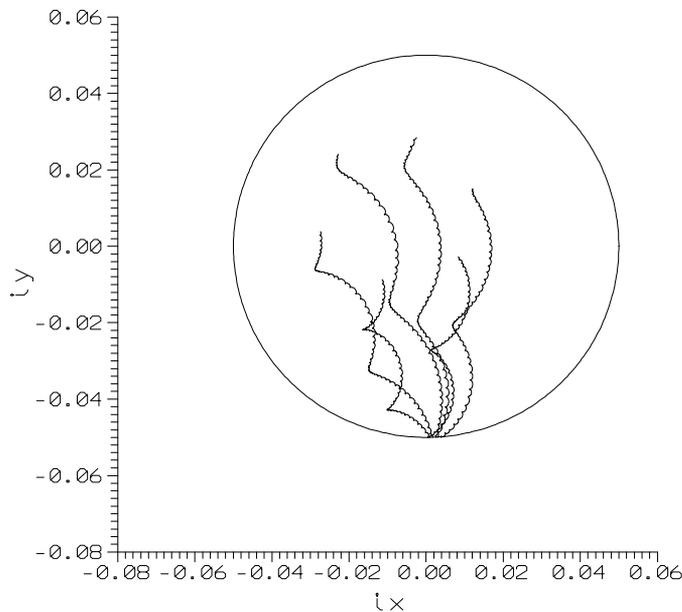


Figura 5.2.4: Evolución del vector inclinación según la época del año.

La figura (5.2.5) muestra el mantenimiento en estación norte-sur en las condiciones descritas. Debido al tamaño del círculo de control para la inclinación asignado en esta simulación, es imposible mantener en su interior al vector \vec{i} . Éste abandona su círculo en varias ocasiones, siendo necesario realizar impulsos adicionales, con una dirección distinta a la secular, antes de las fechas programadas.

Si se analiza esta misma estrategia para otros valores de Δi , $0^\circ.055$ y $0^\circ.065$, se obtiene el mismo comportamiento, es decir, que el vector \vec{i} no se puede mantener controlado. Este resultado se ilustra con las figuras (5.2.6).

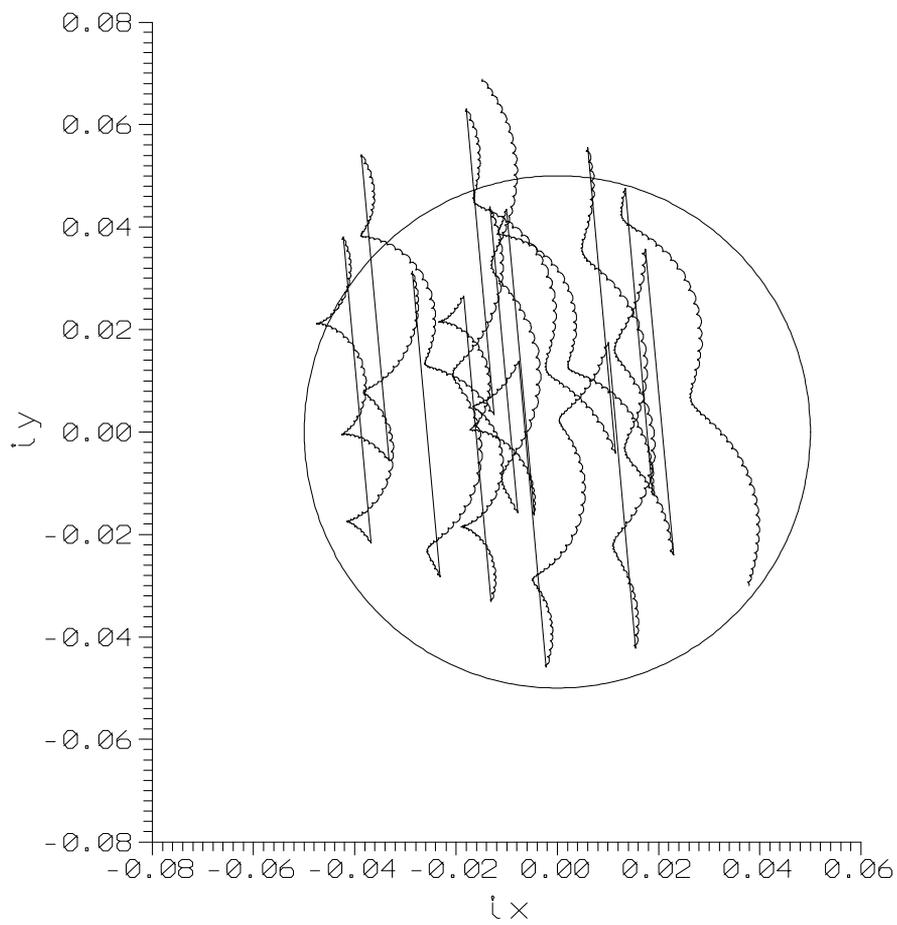
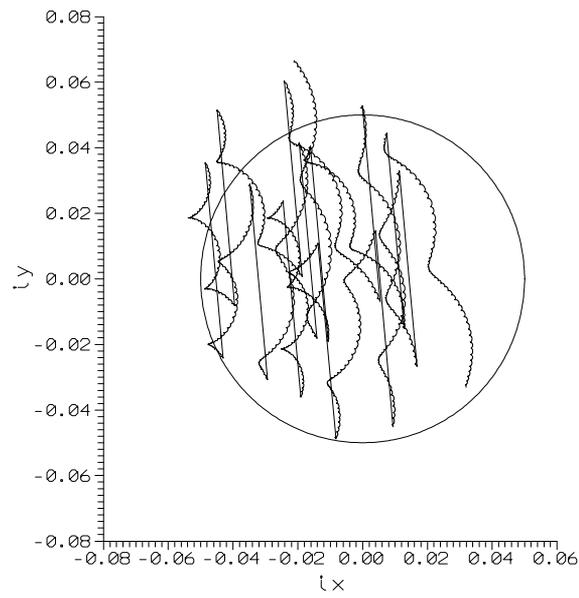
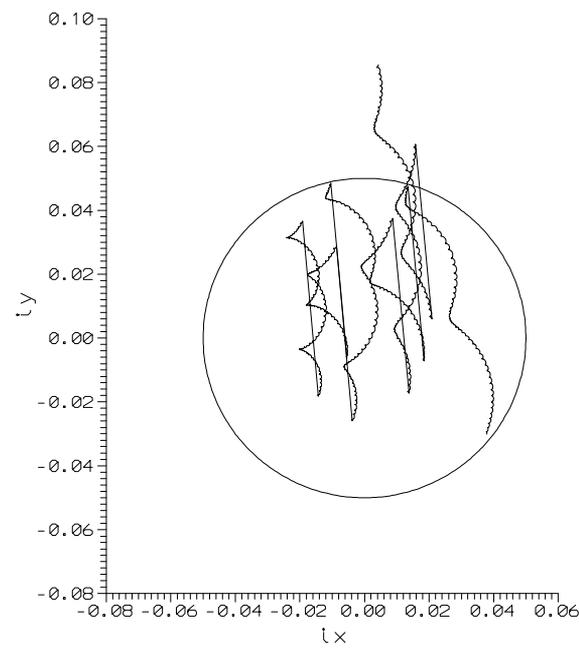


Figura 5.2.5: Mantenimiento en estación norte-sur durante el año 2000 para $\Delta i = 0^\circ.06$ y $T = 28$ días.

(a) $\Delta i = 0^\circ.065$ (b) $\Delta i = 0^\circ.055$ Figura 5.2.6: Mantenimiento en estación para distintos valores de Δi .

Caso 2.a Δi variable para un ciclo de 14 días

Debido a las distintas amplitudes que presenta la evolución del vector \vec{i} puede no resultar apropiado considerar, en cada maniobra, el mismo valor de la corrección para la inclinación, Δi . Por esta razón se realiza ahora el mantenimiento en estación norte-sur calculando los valores de Δi en cada ciclo, dependiendo de la variación que experimenta durante ese periodo de tiempo el vector inclinación. Igual que en el caso anterior, se han efectuado 25 maniobras sur con un periodo de 14 días desde el 1 de enero hasta el 31 de diciembre de 2000, comenzando con un vector inclinación de componentes

$$\vec{i} = (0^\circ.04, 0^\circ.00). \quad (5.2.6)$$

El resultado se muestra en la figura (5.2.7) y en la tabla (5.2.3), donde aparecen, igual que en el caso anterior, las fechas, horas de realización y magnitudes de los impulsos sur. El incremento total de velocidad ΔV para todo el año ha sido de 43.31311 m/sg .

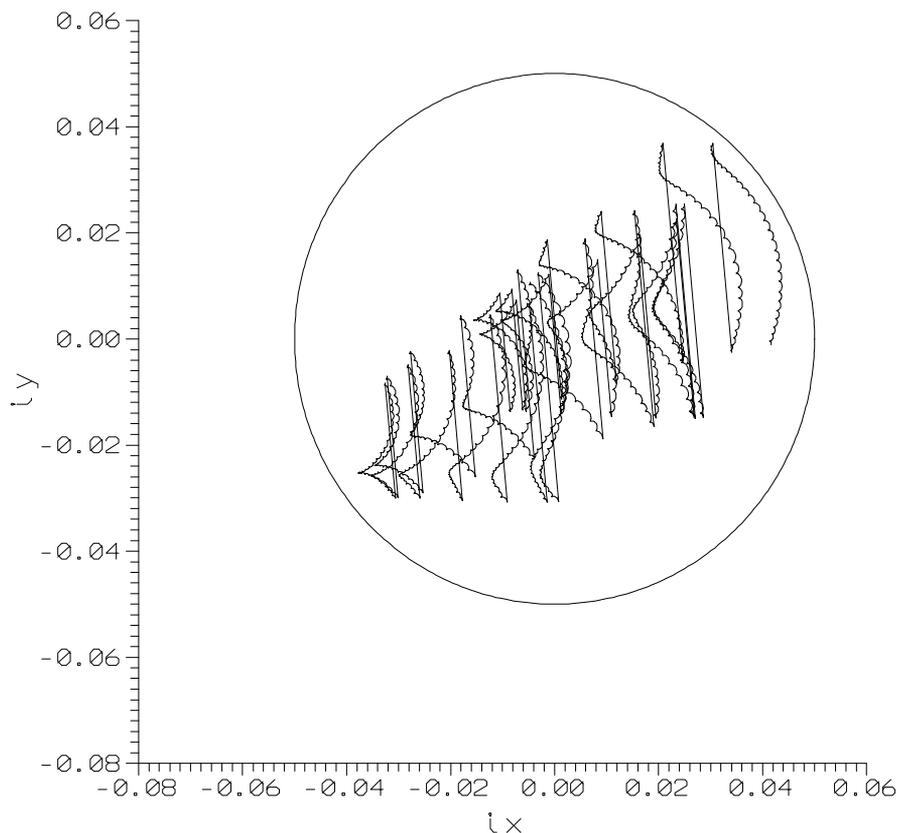


Figura 5.2.7: Mantenimiento en estación norte-sur durante el año 2000 para Δi variable y $T = 14$ días.

Fecha	Hora (TU)	ΔV_S (en m/s)
15-01-2000	00 ^h 45 ^m 36 ^s .6	2.12694
29-01-2000	23 ^h 47 ^m 17 ^s .3	2.23429
12-02-2000	22 ^h 53 ^m 34 ^s .6	1.74863
26-02-2000	22 ^h 00 ^m 36 ^s .1	1.62308
11-03-2000	21 ^h 08 ^m 20 ^s .6	1.22540
25-03-2000	20 ^h 16 ^m 50 ^s .4	1.20878
08-04-2000	19 ^h 26 ^m 05 ^s .0	1.13321
22-04-2000	18 ^h 36 ^m 06 ^s .7	1.40861
06-05-2000	17 ^h 46 ^m 56 ^s .7	1.59951
20-05-2000	16 ^h 58 ^m 37 ^s .6	1.87111
03-06-2000	16 ^h 11 ^m 11 ^s .2	2.02664
17-06-2000	15 ^h 24 ^m 41 ^s .0	2.17348
01-07-2000	14 ^h 39 ^m 08 ^s .4	2.18231
15-07-2000	13 ^h 54 ^m 37 ^s .3	2.19716
29-07-2000	13 ^h 11 ^m 08 ^s .1	2.03596
12-08-2000	12 ^h 28 ^m 44 ^s .1	1.92083
26-08-2000	11 ^h 47 ^m 24 ^s .1	1.63998
09-09-2000	11 ^h 07 ^m 10 ^s .0	1.43844
23-09-2000	10 ^h 27 ^m 58 ^s .5	1.23779
07-10-2000	09 ^h 49 ^m 49 ^s .1	1.16704
21-10-2000	09 ^h 12 ^m 36 ^s .8	1.35731
04-11-2000	08 ^h 36 ^m 18 ^s .4	1.52263
18-11-2000	08 ^h 00 ^m 47 ^s .0	1.89736
02-12-2000	07 ^h 25 ^m 56 ^s .4	2.01547
16-12-2000	06 ^h 51 ^m 38 ^s .4	2.32115
ΔV total		41.8767

Tabla 5.2.3: Tiempos y magnitudes de las maniobras sur para Δi variable y $T = 14$ días.

Sigue siendo de gran importancia la posición inicial del vector inclinación. La figura (5.2.8) muestra el mantenimiento en estación comenzando con un vector inclinación inicial de componentes:

$$\begin{aligned}i_x &= 0^\circ.0386660, \\i_y &= -0^\circ.0255846.\end{aligned}\tag{5.2.7}$$

Como se aprecia en la figura, sería necesaria la realización de un impulso con una dirección distinta a la establecida por la estrategia para evitar que el vector \vec{i} abandone su círculo de control por su parte izquierda.

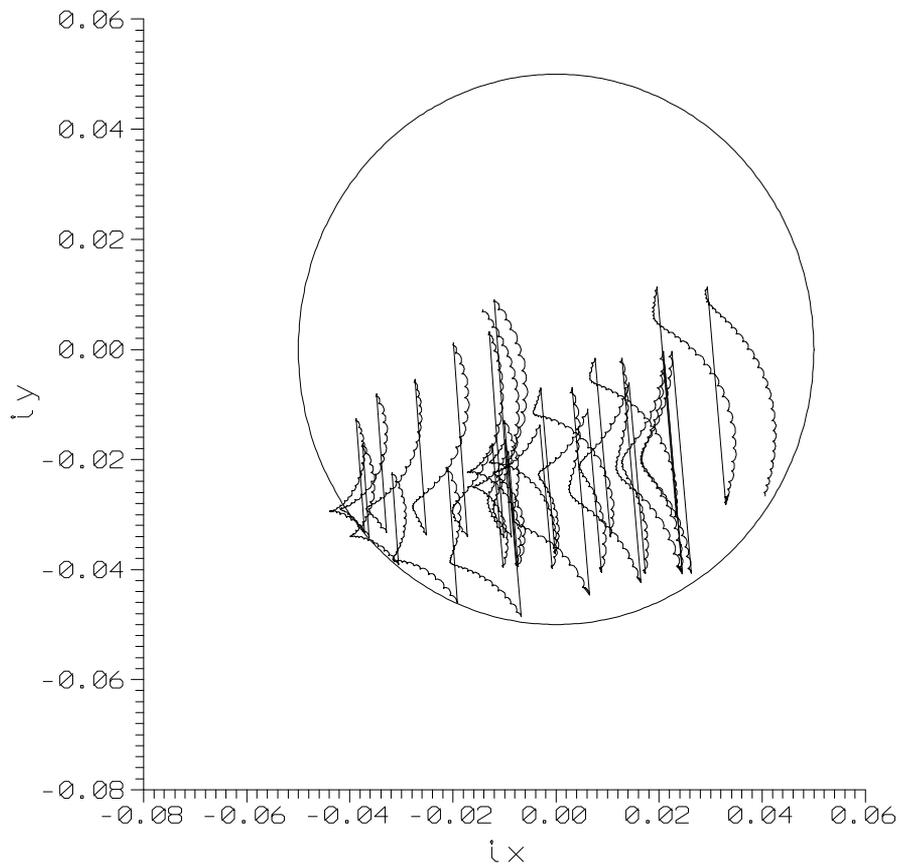


Figura 5.2.8: Mantenimiento en estación norte-sur durante el año 2000.

Caso 2.b Δi variable para un ciclo de 28 días

Este caso es análogo al anterior, pero el ciclo tiene ahora una duración de 28 días. En la figura (5.2.9) aparece representado el mantenimiento en estación realizado en estas condiciones, en el que se han aplicado 13 maniobras sur, empezando con un vector inclinación de componentes:

$$\vec{i} = (0^\circ.03694600, -0^\circ.02870633). \quad (5.2.8)$$

Como se aprecia en ella, resulta imposible mantener constante la dirección de la corrección Δi durante todo el año; el vector inclinación abandona su círculo tras la décima maniobra. En la tabla (5.2.4) aparecen las fechas, horas de realización y magnitudes de cada impulso, obteniéndose como incremento total de velocidad el valor $\Delta V = 39.67284 \text{ m/sg}$.

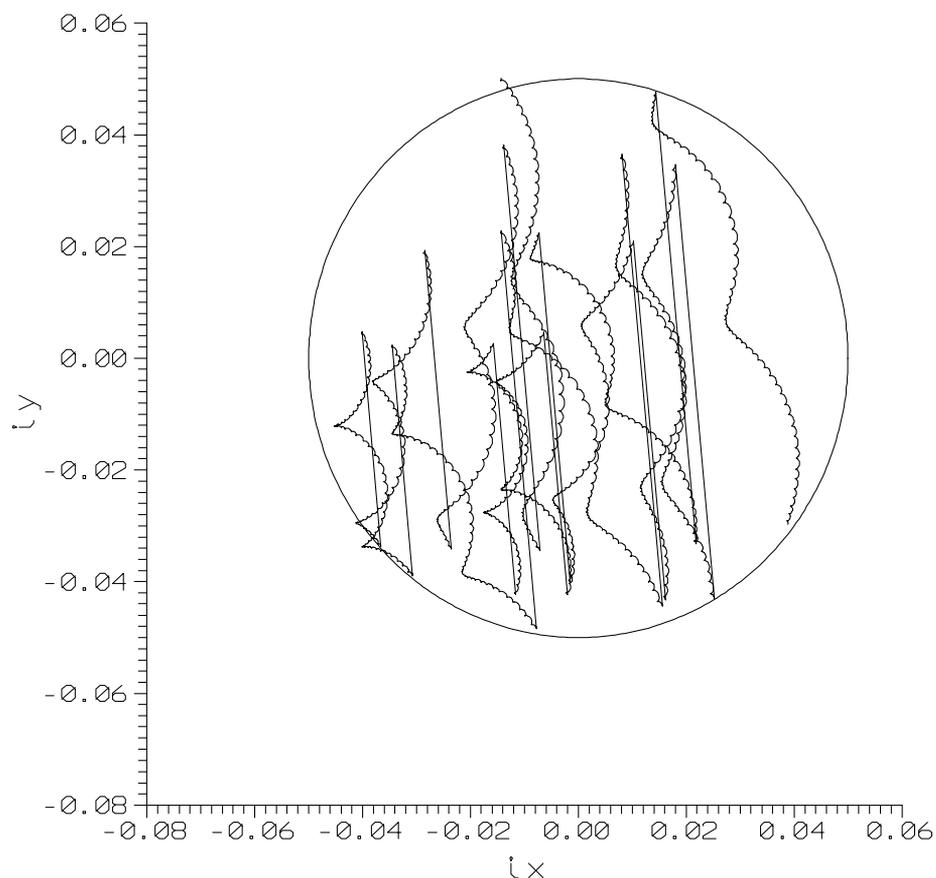


Figura 5.2.9: Mantenimiento en estación norte-sur durante el año 2000 para Δi variable y $T = 28$ días.

Fecha	Hora (TU)	ΔV_S (en m/s)
29-01-2000	23 ^h 47 ^m 16 ^s .3	4.36431
26-02-2000	22 ^h 00 ^m 38 ^s .3	3.36651
25-03-2000	20 ^h 16 ^m 58 ^s .1	2.42244
22-04-2000	18 ^h 36 ^m 21 ^s .6	2.53809
20-05-2000	16 ^h 59 ^m 01 ^s .0	3.46812
17-06-2000	15 ^h 25 ^m 15 ^s .5	4.19065
15-07-2000	13 ^h 55 ^m 27 ^s .1	4.36938
12-08-2000	12 ^h 29 ^m 53 ^s .5	3.84673
09-09-2000	11 ^h 08 ^m 42 ^s .1	2.22431
07-10-2000	09 ^h 51 ^m 43 ^s .6	2.07446
04-11-2000	08 ^h 38 ^m 34 ^s .0	2.88054
02-12-2000	07 ^h 28 ^m 31 ^s .3	3.91730
ΔV total		39.67284

Tabla 5.2.4: Tiempos y magnitudes de las maniobras sur para un Δi variable y $T = 28$ días.

Para poder hacer efectiva este tipo de estrategia, cumpliendo los requisitos de la misión en cuanto a control de inclinación, es preciso efectuar la décima corrección con una dirección distinta a la secular predeterminada. El resultado se muestra en la figura (5.2.10) y en la tabla (5.2.5), donde aparece resaltada la maniobra que tiene distinta dirección. El vector inclinación inicial ha sido el mismo que el anterior y el incremento total de velocidad ha resultado mayor, siendo ahora su valor $\Delta V = 40.45528$ m/sg.

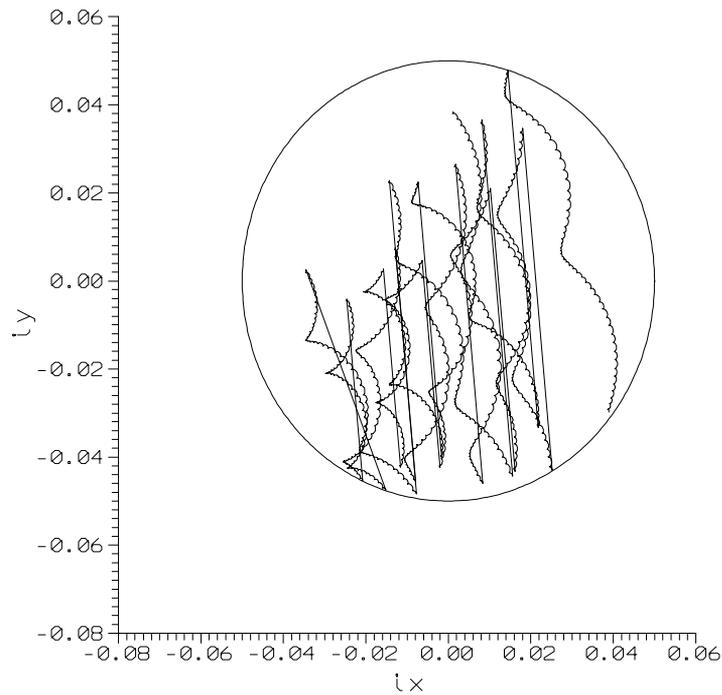


Figura 5.2.10: Mantenimiento en estación norte-sur durante el año 2000 para Δi variable y $T = 28$ días.

Fecha	Hora (TU)	ΔV_S (en m/s)
29-01-2000	23 ^h 47 ^m 16 ^s .3	4.36431
26-02-2000	22 ^h 00 ^m 38 ^s .3	3.36651
25-03-2000	20 ^h 16 ^m 58 ^s .1	2.42244
22-04-2000	18 ^h 36 ^m 21 ^s .6	2.53809
20-05-2000	16 ^h 59 ^m 01 ^s .0	3.46812
17-06-2000	15 ^h 25 ^m 15 ^s .5	4.19065
15-07-2000	13 ^h 55 ^m 27 ^s .1	4.36938
12-08-2000	12 ^h 29 ^m 53 ^s .5	3.84673
09-09-2000	12^h12^m18^s.4	2.87864
07-10-2000	09 ^h 51 ^m 44 ^s .9	2.21982
04-11-2000	08 ^h 38 ^m 36 ^s .8	2.87208
02-12-2000	07 ^h 28 ^m 35 ^s .5	3.90851
ΔV total		40.45528

Tabla 5.2.5: Tiempos y magnitudes de las maniobras sur para un Δi variable y $T = 28$ días.

La tabla (5.2.6) muestra un resumen de los casos estudiados que hacen posible el mantenimiento en estación norte-sur. Se observa que el que menos velocidad necesita, y como consecuencia, menos combustible gasta, es el descrito en el caso 1.a.

Valor de Δi	Duración del ciclo	ΔV_S total (en m/s)
0°.03	14 días	40.26734
variable	14 días	43.31311
variable	28 días	40.45528

Tabla 5.2.6: Incrementos totales de velocidad y estrategias.

5.2.2 Modelo lineal. Elementos centrados.

En este caso se realiza el mantenimiento en estación en las mismas condiciones que el caso 1.a ($\Delta i = 0^\circ.03$, $T = 14$ días) pero utilizando para el cálculo de la magnitud del impulso y su instante de realización las expresiones del modelo lineal descrito en el segundo capítulo. Se han utilizado elementos centrados en lugar de medios ya que, como se vio en la sección 3.6, las diferencias entre ellos no son significativas. En la figura (5.2.11) se muestra el efecto que tiene sobre el vector inclinación la aplicación de las 25 maniobras sur, y en la tabla (5.2.7) aparecen las fechas, horas y valores de los impulsos realizados. El incremento total de velocidad ΔV ha sido de 40.41633 m/sg .

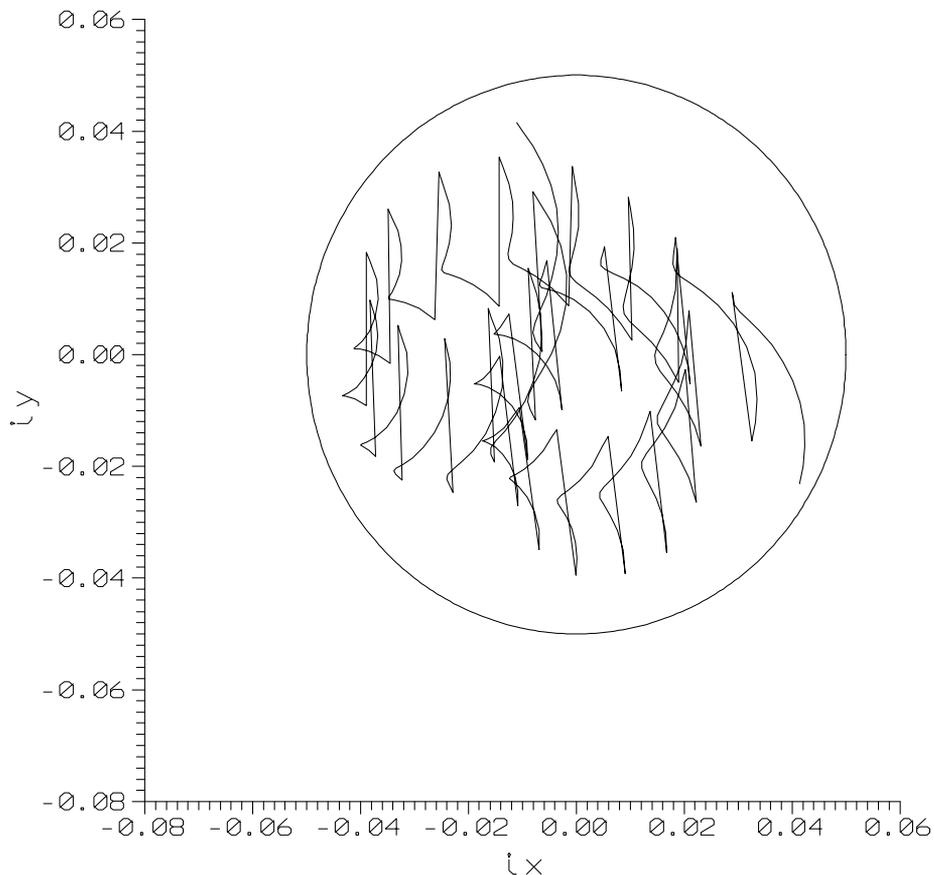


Figura 5.2.11: Mantenimiento en estación norte-sur durante el año 2000. Modelo lineal.

Fecha	Hora (TU)	ΔV_S (en m/s)
15-01-2000	00 ^h 44 ^m 41 ^s .8	1.60261
29-01-2000	23 ^h 46 ^m 22 ^s .0	1.61063
12-02-2000	22 ^h 51 ^m 56 ^s .8	1.61137
26-02-2000	21 ^h 59 ^m 58 ^s .2	1.61415
11-03-2000	21 ^h 06 ^m 45 ^s .9	1.61555
25-03-2000	20 ^h 16 ^m 16 ^s .2	1.61530
08-04-2000	19 ^h 24 ^m 40 ^s .2	1.62011
22-04-2000	18 ^h 35 ^m 38 ^s .1	1.61665
06-05-2000	17 ^h 45 ^m 52 ^s .2	1.62438
20-05-2000	16 ^h 58 ^m 18 ^s .9	1.61782
03-06-2000	16 ^h 10 ^m 35 ^s .9	1.62743
17-06-2000	15 ^h 24 ^m 35 ^s .2	1.61837
01-07-2000	14 ^h 39 ^m 06 ^s .0	1.62847
15-07-2000	13 ^h 56 ^m 37 ^s .8	1.61806
29-07-2000	13 ^h 14 ^m 24 ^s .9	1.62724
12-08-2000	12 ^h 32 ^m 40 ^s .9	1.61702
26-08-2000	11 ^h 52 ^m 54 ^s .7	1.62410
09-09-2000	11 ^h 12 ^m 58 ^s .6	1.61563
23-09-2000	10 ^h 35 ^m 34 ^s .8	1.61983
07-10-2000	09 ^h 57 ^m 25 ^s .6	1.61433
21-10-2000	09 ^h 22 ^m 08 ^s .4	1.61519
04-11-2000	08 ^h 45 ^m 38 ^s .5	1.61323
18-11-2000	08 ^h 11 ^m 59 ^s .4	1.61062
02-12-2000	07 ^h 36 ^m 52 ^s .0	1.61203
16-12-2000	07 ^h 04 ^m 10 ^s .1	1.60621
ΔV total		40.41633

Tabla 5.2.7: Tiempos y magnitudes de las maniobras sur para $\Delta i = 0^\circ.03$, $T = 14$ días. Modelo lineal.

5.2.3 Conclusiones.

A partir de la simulación numérica efectuada para el mantenimiento en estación norte-sur se concluye que la manera óptima de controlar el vector \vec{i} , en cuanto a gasto de combustible, es la realización de una maniobra sur cada 14 días que permita alcanzar un vector inclinación objetivo, \vec{i}_T , determinado a partir de un Δi constante calculado a priori. Además, el cálculo de la magnitud del impulso corrector y su instante de realización se efectúa con el método iterativo descrito en el capítulo 4 y utilizando elementos orbitales oscultrices obtenidos con la propagación numérica de la órbita.

Esta forma de actuar, frente a métodos que utilizan elementos centrados con modelos lineales para el cálculo de impulsos y sus instantes de realización, como el evaluado en el sección 5.2.2, consume menos combustible ya que la velocidad aplicada es menor, aunque la diferencia es poco significativa al estar utilizando, en ambos casos, una estrategia óptima.

5.3 Mantenimiento en estación este-oeste.

El mantenimiento este-oeste aquí se lleva a cabo de acuerdo con las conclusiones del capítulo anterior, esto es, mediante la aplicación de dos maniobras tangenciales de distinto signo separadas medio día sidéreo. Desde el punto de vista operativo resulta ventajoso tener ciclos de corrección periódicos y de duración constante. Por esta razón hemos elegido, igual que en el caso anterior, ciclos de 14 días.

Puesto que la simulación numérica se realiza para un satélite estacionado en la longitud 30° Oeste, primero efectuamos una maniobra oeste para evitar que el satélite abandone la ventana en longitud por el oeste. Medio día sidéreo después se aplica una maniobra este, de menor magnitud (véase la figura (2.5.1)). Con esta última, por un lado se corrige el exceso de velocidad que produce la primera maniobra sobre la longitud y, por otro, al tener sobre el vector excentricidad el mismo efecto que la maniobra oeste anterior, se incrementa la velocidad necesaria para corregir este vector.

5.3.1 Problema 1: $\lambda_{\mathcal{T}}(t_b + T) = l_s - \delta l$.

(a) Método iterativo. Longitud verdadera.

En este caso efectuamos el mantenimiento en estación mediante el método descrito en el primer problema expuesto en el capítulo 4. Con este procedimiento determinamos los límites de las sucesiones (U_n) , (W_n) y (s_{b_n}) que proporcionan, a su vez, la magnitud de los dos impulsos y el instante de realización del primero de ellos para corregir simultáneamente la longitud verdadera y el vector excentricidad centrado (el vector osculatriz presenta oscilaciones diurnas de gran amplitud que hacen imposible su utilización). Esta corrección se hace con las condiciones descritas en la sección 4.4.1:

- la longitud verdadera debe alcanzar el límite inferior de su ventana al final del ciclo, es decir,

$$\lambda_{\mathcal{T}}(t_b + T) = l_s - \delta l;$$

- el vector excentricidad debe tener la dirección del Sol en la mitad del ciclo como resultado de la aplicación de la estrategia *perigeo hacia el Sol* y su módulo, después de las maniobras, debe ser igual a e_c .

La tabla (5.3.1) muestra los resultados obtenidos en uno de los ciclos.

Iteración	U (en m/s)	W (en m/s)	s_b (en radianes)	Hora
7	-0.04324	0.14493	5.32418	21 ^h 49 ^m 52 ^s .5
6	-0.04324	0.14493	5.32418	21 ^h 49 ^m 52 ^s .5
5	-0.04325	0.14493	5.32411	21 ^h 49 ^m 51 ^s .6
4	-0.04265	0.14493	5.32388	21 ^h 49 ^m 48 ^s .3
3	-0.04327	0.14485	5.32212	21 ^h 49 ^m 24 ^s .3
2	-0.04536	0.13792	5.31001	21 ^h 49 ^m 38 ^s .9
1	0.00000	0.00000	1.69664	19 ^h 58 ^m 44 ^s .5

Tabla 5.3.1: Resultado de una iteración. Problema 1.

La ventana en longitud asignada en la misión simulada es $[-30^{\circ}.07, -29^{\circ}.93]$. No obstante, es necesario considerar en esta ventana limitaciones debidas a errores no controlados en la determinación de la órbita y de los impulsos. Por esta razón, hemos reducido la ventana a $[-30^{\circ}.05, -29^{\circ}.95]$. De esta forma garantizamos que no se sobrepasan los márgenes asignados.

El valor e_c considerado para el control en excentricidad es de 1.6×10^{-4} radianes. En la figura (5.3.1) se representa la evolución anual del vector excentricidad centrado durante el año 2000 y el círculo de control dentro del cual se tiene que mantener \vec{e} .

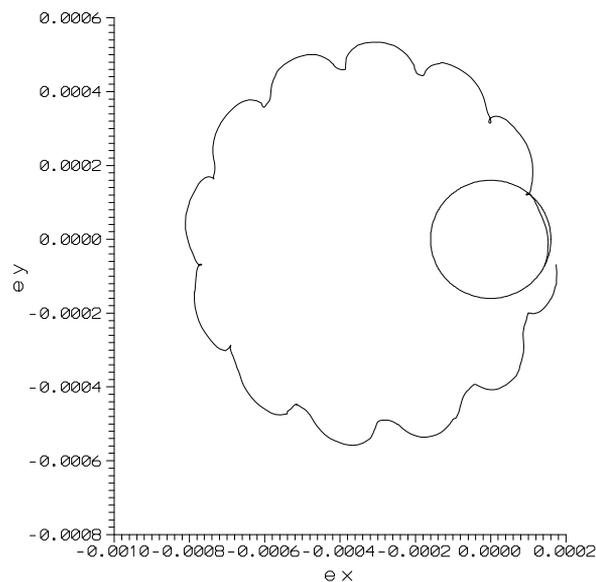
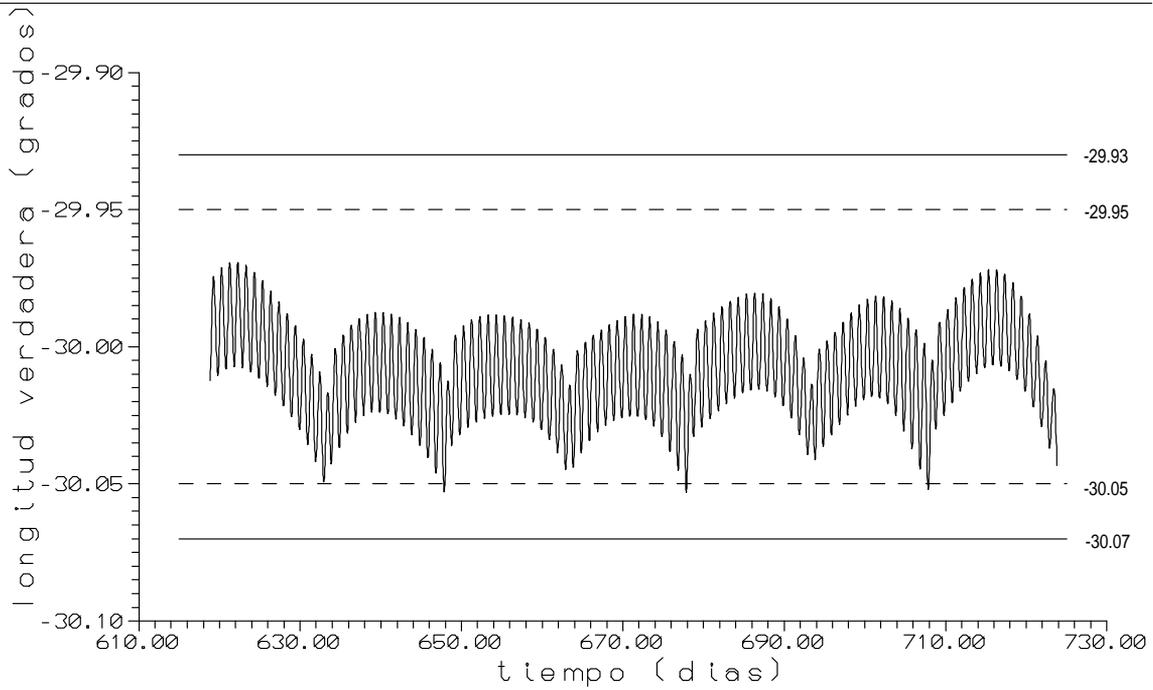


Figura 5.3.1: Evolución anual del vector excentricidad centrado y círculo de control.

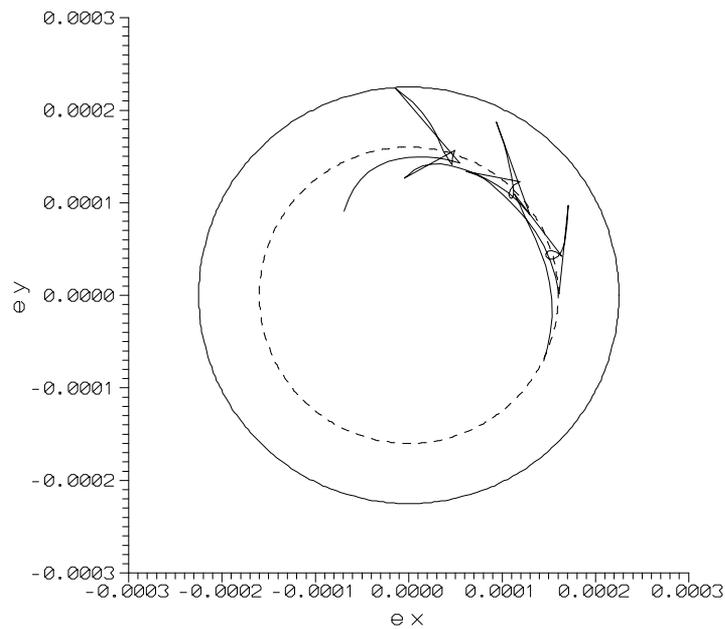
Hemos realizado la simulación desde el 15 de marzo hasta el 25 de junio de 2000 aplicando 12 impulsos tangenciales (seis impulsos este y seis oeste). Los elementos orbitales iniciales han sido:

$$\begin{aligned}a &= 42165.4258 \text{ km}, \\l &= -29^\circ.996075, \\e_x &= 0.00016062 \text{ radianes}, \\e_x &= -0.00011649 \text{ radianes}.\end{aligned}$$

En las figuras (5.3.2-(a)) y (5.3.2-(b)) se muestra el efecto de las maniobras realizadas sobre la longitud verdadera y el vector excentricidad, respectivamente. En la tabla (5.3.2) aparecen los valores de los impulsos este y oeste calculados con el método iterativo descrito en el problema 1 del capítulo anterior, ΔV , así como las fechas y horas de su realización. Como se vio en el capítulo 2, un incremento de velocidad negativo corresponde a una maniobra oeste, mientras que un incremento positivo corresponde a una este. También están los valores de los impulsos necesarios para corregir la longitud verdadera, U , y el vector excentricidad, W . El incremento total de velocidad ΔV aplicado para el mantenimiento en estación este-oeste durante este periodo de tiempo ha sido de 0.93735 m/sg .



(a) Longitud verdadera.



(b) Vector excentricidad centrado.

Figura 5.3.2: Mantenimiento en estación este-oeste para $e_c = 1.6 \times 10^{-4}$ radianes. Problema 1-a.

Fecha	Hora (TU)	ΔV (en m/s)	U (en m/s)	W (en m/s)
29-03-2000	21 ^h 49 ^m 52 ^s .5	-0.09409		
30-03-2000	09 ^h 51 ^m 50 ^s .5	0.05084		
			-0.04324	0.14493
13-04-2000	18 ^h 13 ^m 22 ^s .5	-0.11009		
14-04-2000	06 ^h 15 ^m 20 ^s .4	0.07661		
			-0.03348	0.18670
28-04-2000	22 ^h 44 ^m 38 ^s .6	-0.07191		
29-04-2000	10 ^h 46 ^m 36 ^s .5	0.03246		
			-0.03945	0.10437
13-05-2000	18 ^h 00 ^m 12 ^s .7	-0.11741		
14-05-2000	06 ^h 02 ^m 10 ^s .6	0.08552		
			-0.03189	0.20293
28-05-2000	23 ^h 31 ^m 51 ^s .6	-0.07477		
29-05-2000	11 ^h 33 ^m 49 ^s .5	0.03442		
			-0.04035	0.10919
12-06-2000	17 ^h 32 ^m 53 ^s .0	-0.11056		
13-06-2000	05 ^h 34 ^m 50 ^s .9	0.07866		
			-0.03190	0.18923
			ΔV total	0.93735

Tabla 5.3.2: Tiempos y magnitudes de las maniobras este-oeste para $e_c = 1.6 \times 10^{-4}$ radianes. Problema 1-a.

Como resultado de la aplicación de las maniobras tangenciales, el vector excentricidad se mantiene describiendo aproximadamente un círculo de radio $e_c = 1.6 \times 10^{-4}$ (círculo interior en la figura (5.3.2-(b))). No obstante, en tres ocasiones abandona este círculo, tomando como valor máximo 2.25×10^{-4} radianes (radio del círculo exterior). Esto es debido a que, en su evolución, no describe un círculo perfecto, sino que presenta bucles, como se observa en la figura (5.3.3) donde aparecen representadas la evolución anual del vector excentricidad centrado y del medio. Este último sí describe un círculo, de acuerdo con lo visto en la sección 1.5.

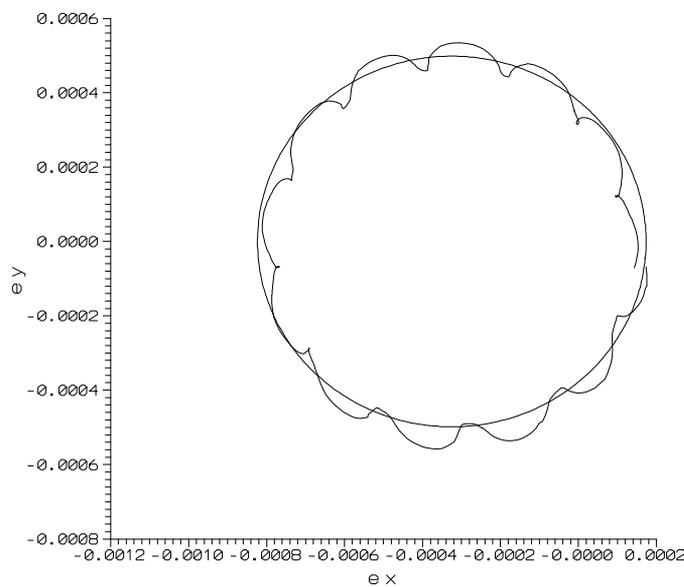


Figura 5.3.3: Evolución de los vectores excentricidad medio y centrado durante el año 2000.

En todo caso, el vector excentricidad está controlado. De hecho, aunque se actúa sobre el vector centrado, se consigue mantener al vector oscultriz dentro de un círculo de radio $r = 2.7 \times 10^{-4}$. La figura (5.3.4) muestra el efecto de los impulsos tangenciales sobre el vector oscultriz, y en la figura (5.3.5) aparece además superpuesta la evolución anual libre de dicho vector.

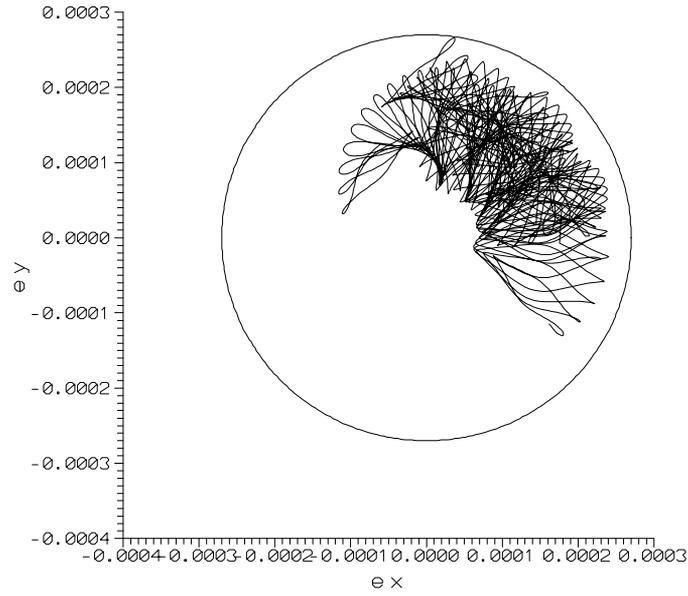


Figura 5.3.4: Mantenimiento del vector excentricidad osculatriz.

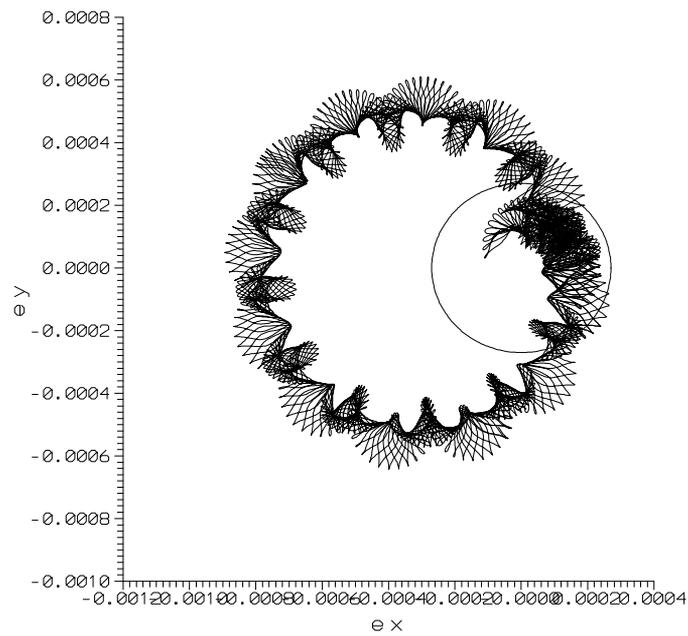


Figura 5.3.5: Mantenimiento del vector excentricidad osculatriz y evolución anual.

(b) Modelo lineal. Longitud media.

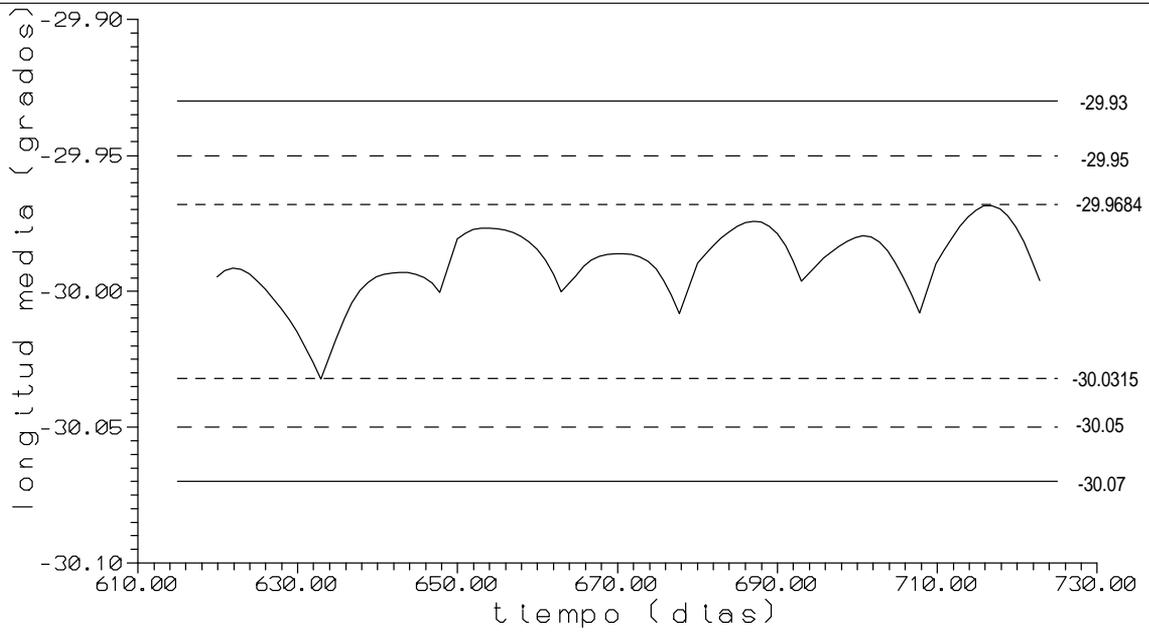
En este caso realizamos el mantenimiento en estación en las mismas condiciones que el caso anterior, pero calculando la magnitud de los impulsos y su instante de realización con las ecuaciones del modelo lineal descritas en el capítulo 2.

Al actuar ahora sobre la longitud media, en lugar de hacerlo sobre la verdadera, hemos tenido en cuenta dos restricciones más en la ventana en longitud:

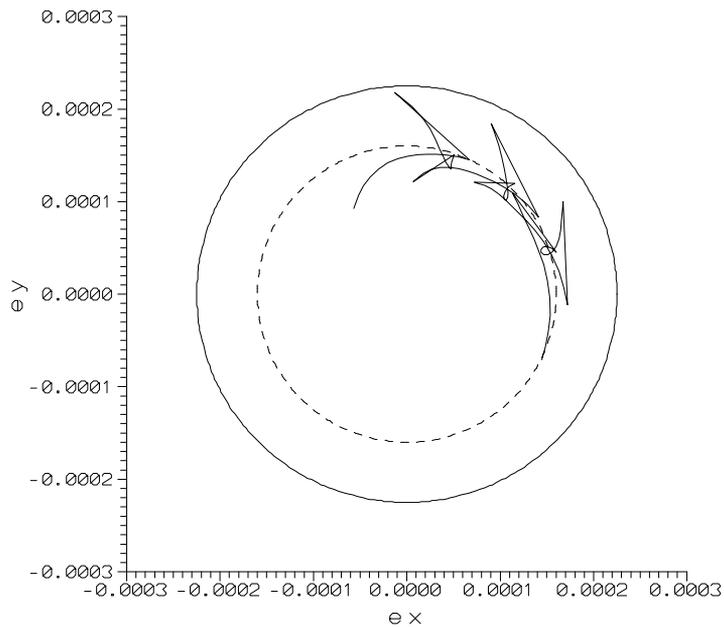
- un margen para las oscilaciones que produce la excentricidad ($2e_c$);
- un margen para las perturbaciones de corto periodo producidas por la acción gravitatoria de la Luna, que son menores que $0^\circ.004$ (véase la sección 1.4).

Así pues, la ventana queda ahora limitada, de forma que, para el valor del control en excentricidad $e_c = 1.6 \times 10^{-4}$ radianes, resulta que el intervalo es $[-30^\circ.0315, -29^\circ.9684]$.

En las figuras (5.3.6-(a)) y (5.3.6-(b)) se muestra el efecto de las maniobras de mantenimiento en estación obtenidas para este caso. En la figura correspondiente a la longitud media se aprecia que el criterio objetivo no se alcanza satisfactoriamente, aunque se mantiene dentro de sus límites. En la tabla (5.3.3) aparecen las fechas, horas y magnitudes de los impulsos. El incremento total de velocidad ΔV ha sido en este caso de 0.93228 m/sg .



(a) Longitud media.



(b) Vector excentricidad centrado.

Figura 5.3.6: Mantenimiento en estación este-oeste para $e_c = 1.6 \times 10^{-4}$ radianes. Problema 1-b.

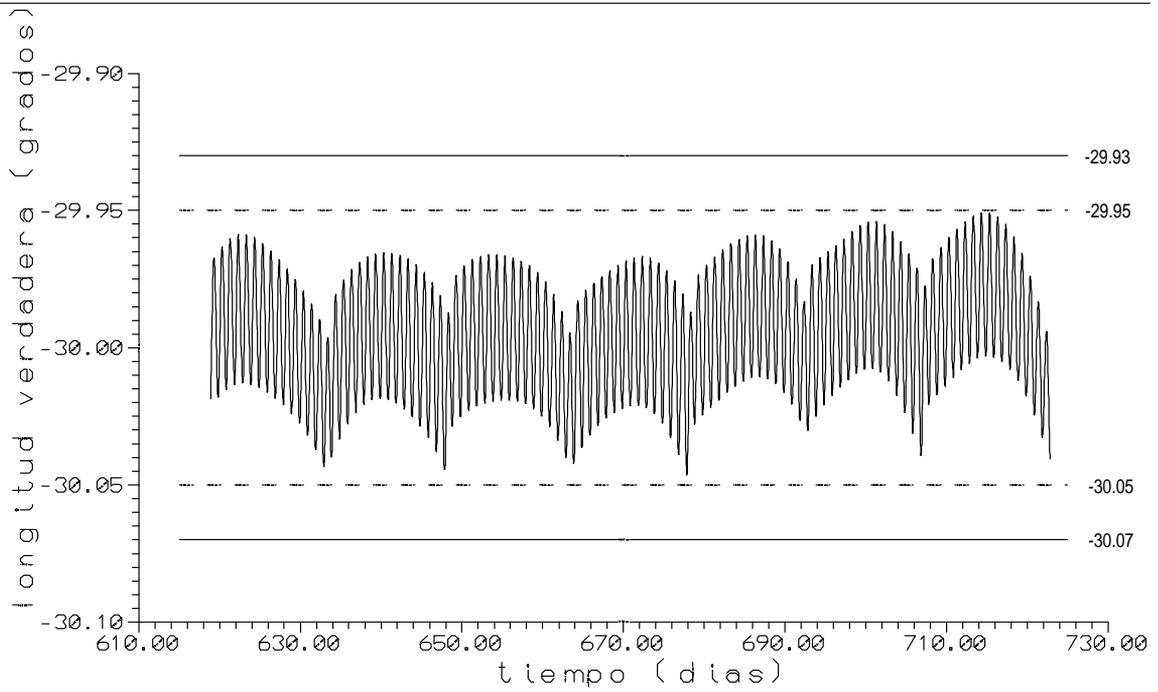
Fecha	Hora (TU)	ΔV (en m/s)	U (en m/s)	W (en m/s)
29-03-2000	21 ^h 46 ^m 41 ^s .8	-0.09384		
30-03-2000	09 ^h 48 ^m 39 ^s .7	0.04446		
			-0.04902	0.13793
13-04-2000	18 ^h 39 ^m 02 ^s .6	-0.11854		
14-04-2000	06 ^h 41 ^m 00 ^s .5	0.09231		
			-0.02623	0.21085
28-04-2000	23 ^h 13 ^m 53 ^s .4	-0.05989		
29-04-2000	11 ^h 51 ^m 51 ^s .3	0.02060		
			-0.03929	0.08049
13-05-2000	18 ^h 22 ^m 37 ^s .8	-0.12482		
14-05-2000	06 ^h 24 ^m 35 ^s .8	0.09035		
			-0.03447	0.21517
28-05-2000	23 ^h 47 ^m 14 ^s .8	-0.06564		
29-05-2000	11 ^h 49 ^m 12 ^s .8	0.02894		
			-0.03670	0.09458
12-06-2000	17 ^h 56 ^m 46 ^s .2	-0.11457		
13-06-2000	05 ^h 58 ^m 44 ^s .2	0.07869		
			-0.03589	0.19326
			ΔV total	0.93228

Tabla 5.3.3: Tiempos y magnitudes de las maniobras este-oeste para $e_c = 1.6 \times 10^{-4}$ radianes. Problema 1-b.

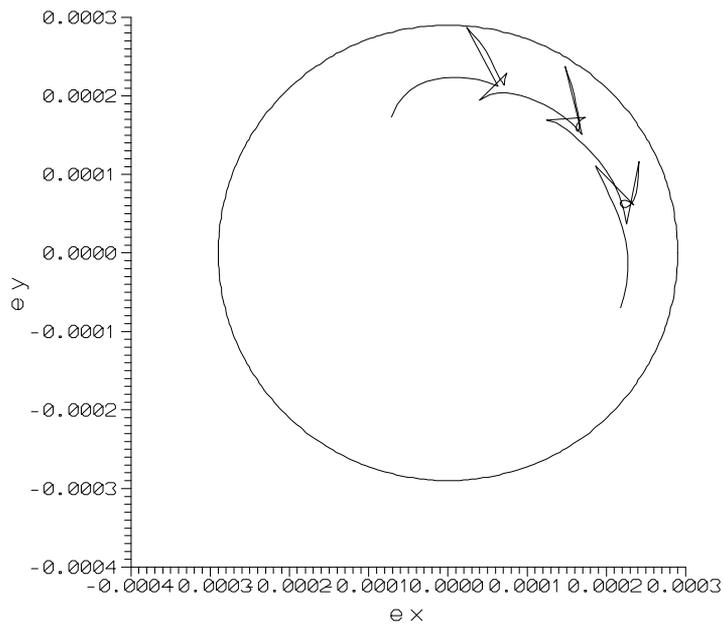
Al comparar ahora ambos casos se puede observar que el incremento total de velocidad es similar (la diferencia es del orden de $5 \times 10^{-5} m/s$) ya que el valor del control en excentricidad es el mismo, y es éste el que influye directamente en la determinación de la magnitud total del impulso corrector, W . Por tanto, para disminuir la velocidad utilizada es necesario aumentar el radio del círculo de control para el vector \vec{e} .

Si se efectúa el mantenimiento en estación según se describe en el problema 1, el valor máximo de e_c que mantiene la longitud verdadera dentro de sus límites es $e_c = 2.3 \times 10^{-4}$.

En la tabla (5.3.4) aparecen las fechas y magnitudes de los impulsos, siendo ahora el incremento total de velocidad $\Delta V = 0.81062 m/s$, y en las figuras (5.3.7-(a)) y (5.3.7-(b)) se muestra su efecto sobre λ y \vec{e} .



(a) Longitud verdadera.



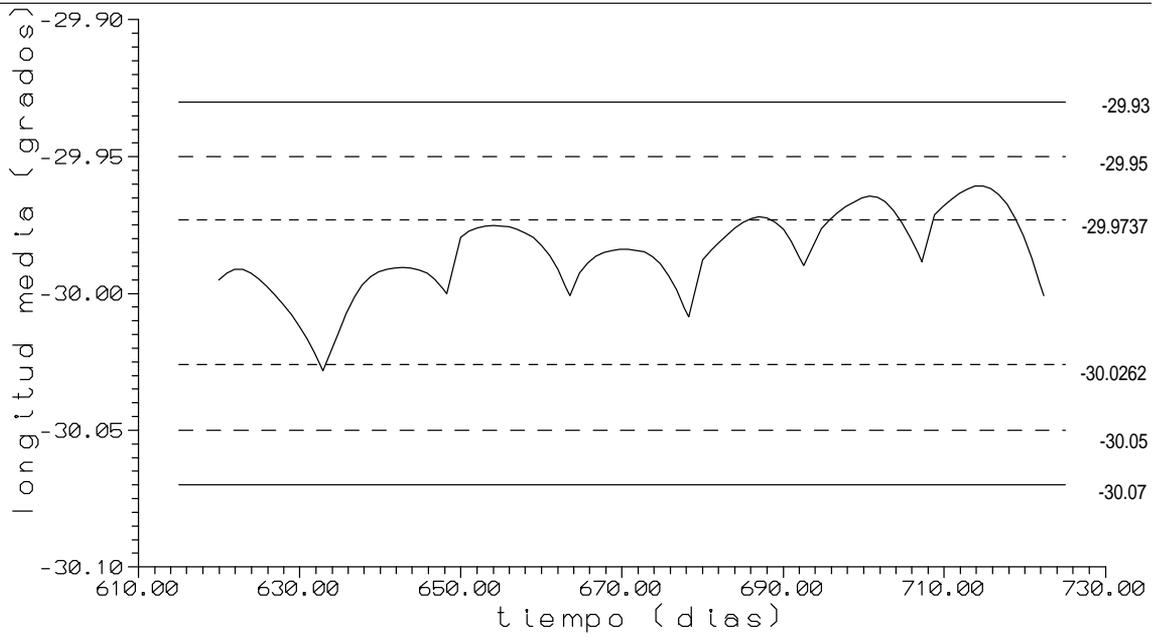
(b) Vector excentricidad centrado.

Figura 5.3.7: Mantenimiento en estación este-oeste para $e_c = 2.3 \times 10^{-4}$ radianes. Problema 1-a.

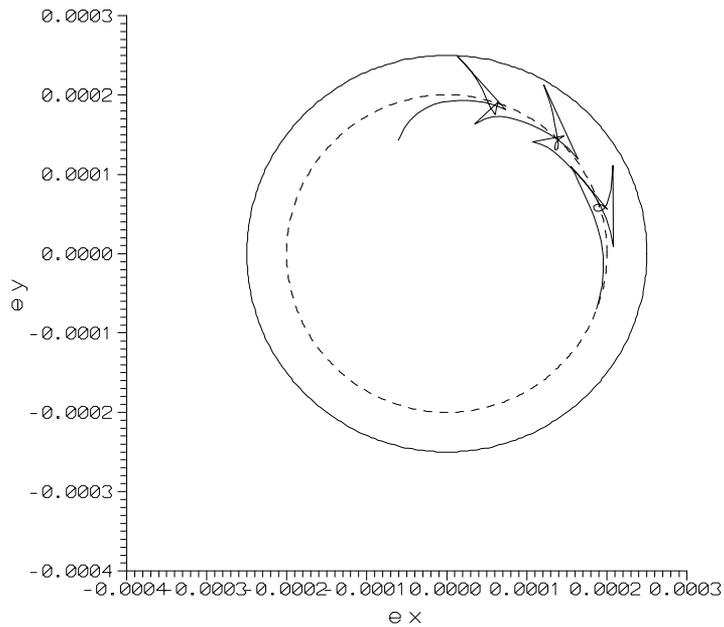
Fecha	Hora (TU)	ΔV (en m/s)	U (en m/s)	W (en m/s)
29-03-2000	22 ^h 12 ^m 29 ^s .1	-0.08096		
30-03-2000	10 ^h 14 ^m 27 ^s .0	0.04046		
			-0.04050	0.12143
13-04-2000	17 ^h 57 ^m 31 ^s .1	-0.09774		
14-04-2000	05 ^h 59 ^m 29 ^s .0	0.16368		
			-0.03179	0.16368
28-04-2000	23 ^h 31 ^m 49 ^s .0	-0.05989		
29-04-2000	11 ^h 33 ^m 46 ^s .9	0.02335		
			-0.04084	0.08753
13-05-2000	17 ^h 42 ^m 53 ^s .1	-0.10471		
14-05-2000	05 ^h 44 ^m 51 ^s .0	0.07361		
			-0.03110	0.17832
28-05-2000	00 ^h 30 ^m 50 ^s .7	-0.06564		
29-05-2000	12 ^h 32 ^m 48 ^s .6	0.03154		
			-0.03775	0.10083
11-06-2000	16 ^h 54 ^m 24 ^s .4	-0.09486		
12-06-2000	04 ^h 56 ^m 22 ^s .4	0.06397		
			-0.03089	0.15883
			ΔV total	0.81062

Tabla 5.3.4: Tiempos y magnitudes de las maniobras este-oeste para $e_c = 2.3 \times 10^{-4}$ radianes. Problema 1-a.

En el caso del cálculo de los impulsos mediante las expresiones del modelo lineal, un incremento del valor de e_c no resulta ventajoso. Aumentando tan solo al valor $e_c = 2 \times 10^{-4}$ radianes, la longitud media abandona su ventana (que ahora es $[-30.0262, -29.9737]$) en el sexto ciclo, según se observa en la figura (5.3.8-(a)), siendo necesario ajustar el valor de la longitud objetivo en el ciclo anterior. El vector excentricidad se mantiene controlado (véase la figura (5.3.8-(b))).



(a) Longitud media.



(b) Vector excentricidad centrado.

Figura 5.3.8: Mantenimiento en estación este-oeste para $e_c = 2 \times 10^{-4}$ radianes. Problema 1-b.

5.3.2 Problema 2: $\max_{t_b \leq t \leq t_b+T} \lambda(t) - l_s = l_s - \min_{t_b \leq t \leq t_b+T} \lambda(t).$

En este caso, el mantenimiento en estación se efectúa de acuerdo con el método tratado en el segundo problema descrito en el capítulo 4. El criterio objetivo para el vector excentricidad no se modifica; sin embargo, para la longitud verdadera, sí se pretende que ésta se mantenga simétrica respecto de la longitud nominal, $l_s = 30^\circ$ Oeste, alcanzando su valor máximo en la mitad del ciclo y su valor mínimo al final del mismo.

Con este método, además de calcular los valores a los que convergen las sucesiones (U_n) , (W_n) y (s_{b_n}) , también se determina el valor del criterio de simetría C (4.4.45) como el límite de la sucesión (C_n) . En la tabla (5.3.5) se muestran los resultados obtenidos en unos de los ciclos. Como se puede observar en ella, la convergencia es algo más lenta al imponerse más condiciones que en el problema anterior.

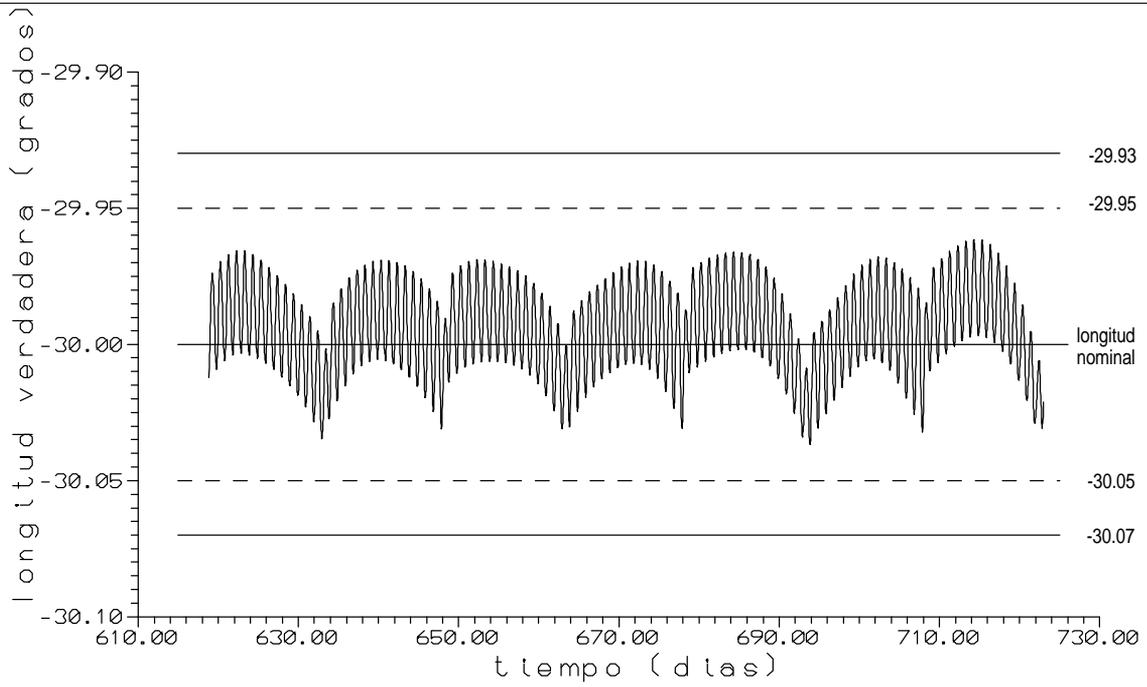
Iteración	U (en m/s)	W (en m/s)	C (en grados)	s_b (en radianes)	Hora
10	-0.03044	0.18671	0.03104	4.63487	18 ^h 13 ^m 15 ^s .2
9	-0.03044	0.18671	0.03104	4.63487	18 ^h 13 ^m 15 ^s .2
8	-0.03043	0.18671	0.03107	4.63488	18 ^h 13 ^m 15 ^s .2
7	-0.03044	0.18671	0.03101	4.63487	18 ^h 13 ^m 15 ^s .2
6	-0.03042	0.18671	0.03113	4.63489	18 ^h 13 ^m 15 ^s .4
5	-0.03058	0.18670	0.03088	4.63485	18 ^h 13 ^m 14 ^s .8
4	-0.02864	0.18671	0.04213	4.63439	18 ^h 13 ^m 08 ^s .5
3	-0.02135	0.18676	0.08224	4.63559	18 ^h 13 ^m 25 ^s .0
2	-0.06628	0.18760	0.19455	4.65214	18 ^h 17 ^m 11 ^s .4
1	0.00000	0.00000	0.00000	4.57010	19 ^h 58 ^m 39 ^s .3

Tabla 5.3.5: Resultado de una iteración. Problema 2.

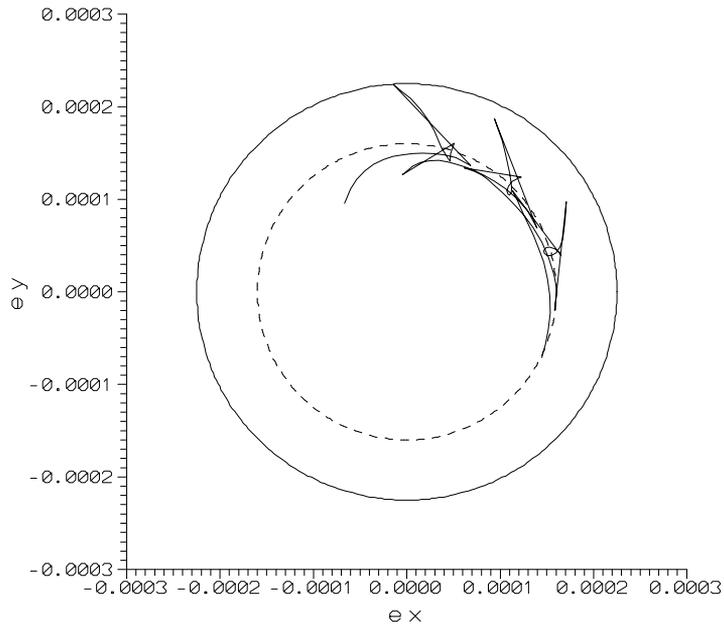
Aquí se ha realizado la simulación para el mismo periodo de tiempo que en los casos anteriores, esto es, del 15 de marzo al 25 de junio. La ventana en longitud reducida sigue siendo $[-30^\circ.05, -29^\circ.95]$; el valor del control en excentricidad es $e_c = 1.6 \times 10^{-4}$ radianes y los elementos orbitales iniciales considerados son:

$$\begin{aligned} a &= 42165.3466 \text{ km}, & e_x &= 0.00016062 \text{ radianes}, \\ l &= -29^\circ.995821, & e_y &= -0.00011648 \text{ radianes}. \end{aligned}$$

El resultado del mantenimiento en estación se muestra en las figuras (5.3.9-(a)) y (5.3.9-(b)), y en la tabla (5.3.6), donde aparecen calculados los impulsos, ΔV_1 y ΔV_2 , la fecha y hora de realización, la corrección para la longitud, U , la corrección para la excentricidad, W , y el criterio de simetría, C . El incremento total de velocidad ha sido $\Delta V = 0.93739 \text{ m/sg}$.



(a) Longitud verdadera.



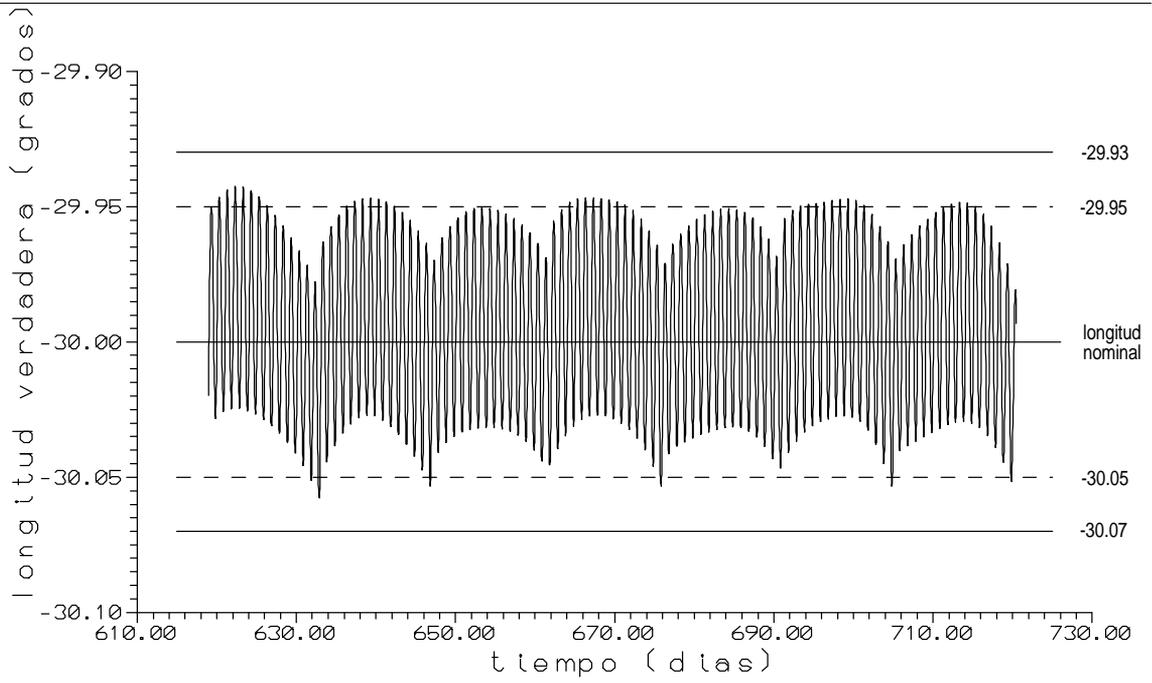
(b) Vector excentricidad centrado.

Figura 5.3.9: Mantenimiento en estación este-oeste para $e_c = 1.6 \times 10^{-4}$ radianes. Problema 2.

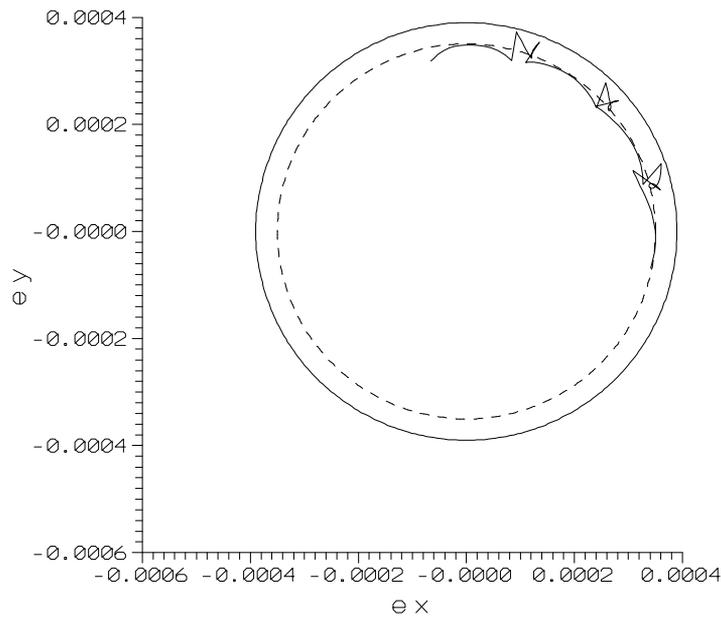
Fecha	Hora (TU)	ΔV (en m/s)	U (en m/s)	W (en m/s)	C (en grados)
29-03-2000	21 ^h 49 ^m 45 ^s .7	-0.09330			
30-03-2000	09 ^h 51 ^m 43 ^s .6	0.05164			
			-0.04167	0.14494	0.03092
13-04-2000	18 ^h 13 ^m 15 ^s .2	-0.10858			
14-04-2000	06 ^h 15 ^m 13 ^s .2	0.07813			
			-0.03044	0.18671	0.03104
28-04-2000	22 ^h 44 ^m 40 ^s .0	-0.07363			
29-04-2000	10 ^h 46 ^m 38 ^s .0	0.03075			
			-0.04288	0.10438	0.03067
13-05-2000	18 ^h 00 ^m 05 ^s .6	-0.11480			
14-05-2000	06 ^h 02 ^m 03 ^s .6	0.08812			
			-0.02668	0.20292	0.03382
28-05-2000	23 ^h 31 ^m 54 ^s .8	-0.07801			
29-05-2000	11 ^h 33 ^m 52 ^s .8	0.03119			
			-0.04682	0.10920	0.03210
12-06-2000	17 ^h 32 ^m 44 ^s .5	-0.10685			
13-06-2000	05 ^h 34 ^m 42 ^s .5	0.08239			
			-0.02446	0.18924	0.03853
ΔV total			0.93739		

Tabla 5.3.6: Tiempos y magnitudes de las maniobras este-oeste para $e_c = 1.6 \times 10^{-4}$ radianes. Problema 2

En el gráfico correspondiente a la longitud verdadera se aprecia que con este valor de e_c no se aprovecha en su totalidad la ventana en longitud. Como se ha visto ya en el estudio realizado en el problema anterior, un aumento de e_c genera oscilaciones de mayor amplitud en la longitud de modo que se ocuparán al máximo los márgenes permitidos y, además, se producirá una disminución en el incremento de velocidad utilizado. El máximo valor que mantiene la longitud verdadera dentro de sus límites es $e_c = 3.5 \times 10^{-4}$ radianes. En la tabla (5.3.7) aparecen ahora las magnitudes correspondientes a este caso, con un incremento de velocidad total considerablemente menor: $\Delta V = 0.60185$ m/sg. En las figuras (5.3.10-(a)) y (5.3.10-(b)) se muestra el efecto de estos impulsos. En esta ocasión se ocupa al máximo la ventana en longitud, llegando a sobrepasarla en algún caso (como máximo $0^\circ.003$) pero siempre dentro de los márgenes permitidos.



(a) Longitud verdadera.



(b) Vector excentricidad centrado.

Figura 5.3.10: Mantenimiento en estación este-oeste para $e_c = 3.5 \times 10^{-4}$ radianes. Problema 2.

Fecha	Hora (TU)	ΔV (en m/s)	U (en m/s)	W (en m/s)	C (en grados)
28-03-2000	22 ^h 56 ^m 51 ^s .3	-0.06875			
29-03-2000	10 ^h 58 ^m 49 ^s .2	0.02859			
			-0.04017	0.09734	0.05323
12-04-2000	16 ^h 37 ^m 03 ^s .7	-0.06960			
12-04-2000	04 ^h 39 ^m 01 ^s .6	0.03674			
			-0.03286	0.10634	0.04948
26-04-2000	23 ^h 44 ^m 33 ^s .5	-0.06146			
27-04-2000	11 ^h 46 ^m 31 ^s .5	0.02604			
			-0.03541	0.08750	0.05328
11-05-2000	16 ^h 05 ^m 54 ^s .7	-0.07097			
12-05-2000	04 ^h 07 ^m 52 ^s .7	0.03754			
			-0.03343	0.10851	0.04926
26-05-2000	00 ^h 41 ^m 53 ^s .1	-0.06508			
26-05-2000	12 ^h 43 ^m 51 ^s .1	0.02843			
			-0.03666	0.09351	0.05311
09-06-2000	15 ^h 05 ^m 20 ^s .6	-0.07046			
10-06-2000	03 ^h 07 ^m 18 ^s .6	0.03819			
			-0.03227	0.10865	0.05162
ΔV total			0.60185		

Tabla 5.3.7: Tiempos y magnitudes de las maniobras este-oeste para $e_c = 3.5 \times 10^{-4}$ radianes. Problema 2.

5.3.3 Conclusiones.

De la simulación numérica efectuada obtenemos como conclusión principal que la manera óptima de controlar el vector excentricidad centrado y la longitud verdadera se consigue calculando los impulsos y sus instantes de realización mediante el proceso iterativo combinado con una propagación numérica de la órbita. Además, el criterio para la longitud objetivo que minimiza la cantidad de velocidad aplicada es que la longitud verdadera se mantenga simétrica respecto de la longitud nominal, con su máximo en la mitad del ciclo y su mínimo en el final del mismo.

5.4 Comparación entre el modelo lineal y el proceso iterativo. Resultados numéricos.

A la vista de los resultados obtenidos en las secciones 5.2 y 5.3 podemos concluir que el mantenimiento en estación llevado a cabo con un modelo lineal utilizando parámetros centrados y longitud media para un satélite con una media de 10 años de vida (alrededor de 250 ciclos de 14 días de duración) necesita aproximadamente un incremento de velocidad de 443.0083 m/sg . Sin embargo, si se aplica el proceso iterativo con el criterio de simetría para la longitud (utilizando el vector inclinación osculatriz, el vector excentricidad centrado y la longitud verdadera), al poder aumentar el valor del control en excentricidad al valor $e_c = 3.5 \times 10^{-4}$ radianes sin que deje de cumplir los requerimientos de la misión, el incremento de velocidad ΔV empleado resulta, aproximadamente, ser de 427.7504 m/sg .

Con la aplicación del segundo método conseguimos, pues, que el gasto de combustible utilizado en el mantenimiento en estación este-oeste pase del 8.76 % al 5.86 % del total. Con relación al gasto total ocasionado durante la vida del satélite, esto supone un ahorro del 3.56 %, lo que se traduce en un aumento de 0.365 años de vida del satélite, esto es, de tres meses y medio, aproximadamente.

5.5 Mantenimiento en estación para el año 2000.

Aquí realizamos, finalmente, el mantenimiento en estación combinando maniobras norte-sur y este-oeste, desde el 1 de enero hasta el 31 de diciembre de 2000, utilizando el proceso iterativo para la determinación de las magnitudes de los impulsos y los instantes de su realización. La longitud verdadera, el vector inclinación osculatriz y el vector excentricidad centrado se han obtenido mediante la propagación numérica de la órbita. Se ha considerado un valor constante para la corrección de la inclinación, $\Delta i = 0^\circ.03$ y un valor para el control en excentricidad igual a $e_c = 3.5 \times 10^{-4}$ radianes. La longitud de estacionamiento sigue siendo 30° Oeste.

Los elementos orbitales iniciales han sido:

$$\begin{aligned} a &= 42164 \text{ km}, \\ l &= -30^\circ.007038, \\ e_x &= 0.00005831, \\ e_y &= -0.00037627, \\ i_x &= 0^\circ.038666, \\ i_y &= -0.020000. \end{aligned}$$

Las maniobras correctoras se han aplicado periódicamente, en ciclos de 14 días de duración. Cada ciclo comienza con la aplicación de una maniobra sur. Dado que los impulsos normales pueden presentar un componente en el plano ecuatorial que podría interferir en las maniobras tangenciales [Arluk & Virdee, 1985], después de la maniobra sur dejamos tres días para que se estabilice la órbita, y es entonces cuando se aplican los dos impulsos tangenciales, el primero oeste, y el segundo, de menor magnitud, este.

Se han realizado 25 ciclos, con un total de 75 maniobras aplicadas, cuyas magnitudes e instantes de realización aparecen en las tablas (5.5.1) y (5.5.2). El incremento total de velocidad ΔV ha sido de 42.85769 m/sg .

En la figura (5.5.1) se muestra el mantenimiento de la posición del satélite en longitud y latitud durante todo el año. Como se puede observar en ella, el satélite no abandona su ventana espacial. En las figuras (5.5.2), (5.5.3) y (5.5.4) se representan las evoluciones anuales de la longitud verdadera y de los vectores excentricidad e inclinación, respectivamente.

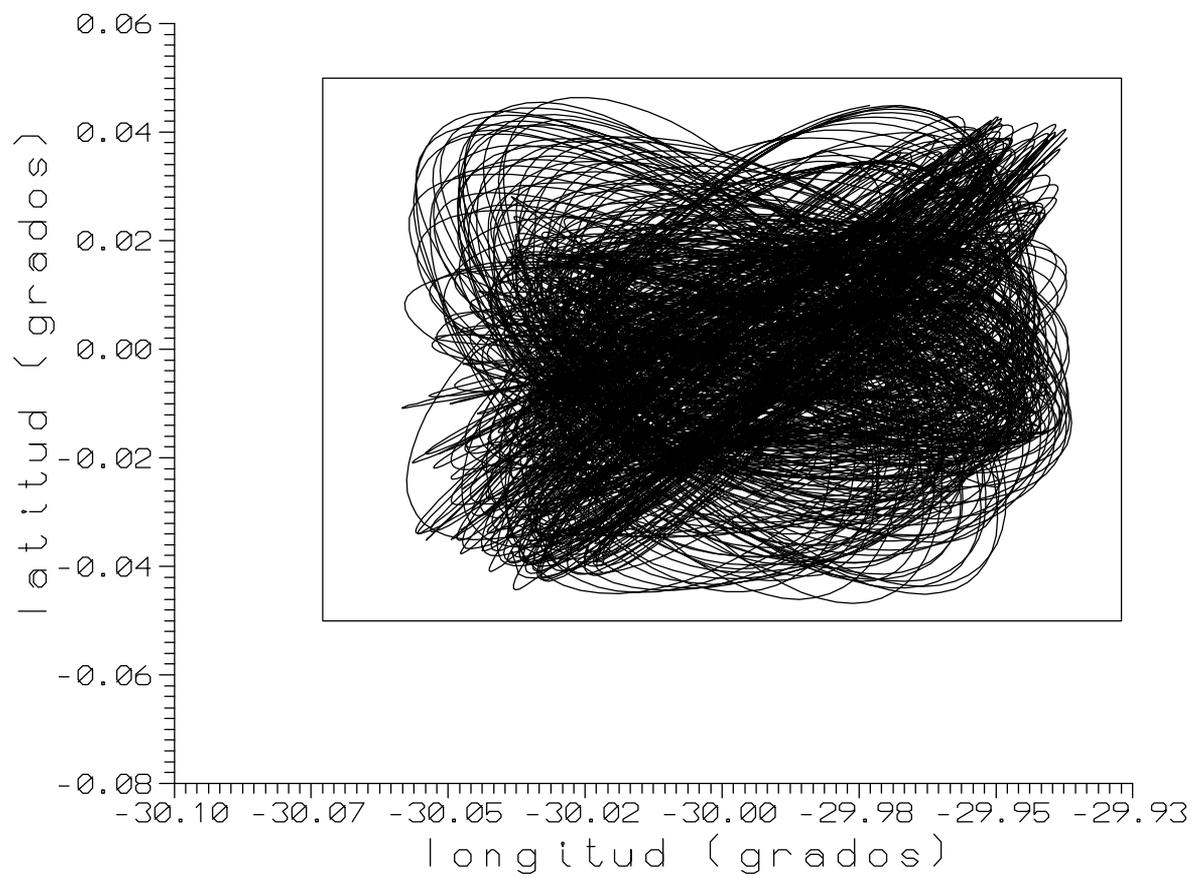


Figura 5.5.1: Mantenimiento en estación de la posición del satélite durante el año 2000.

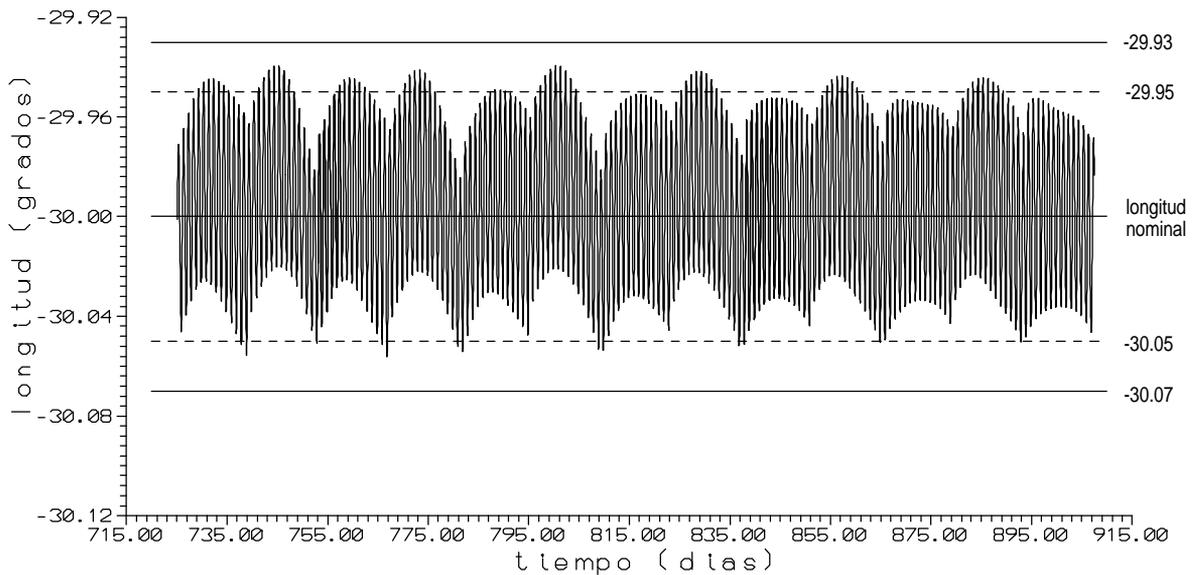
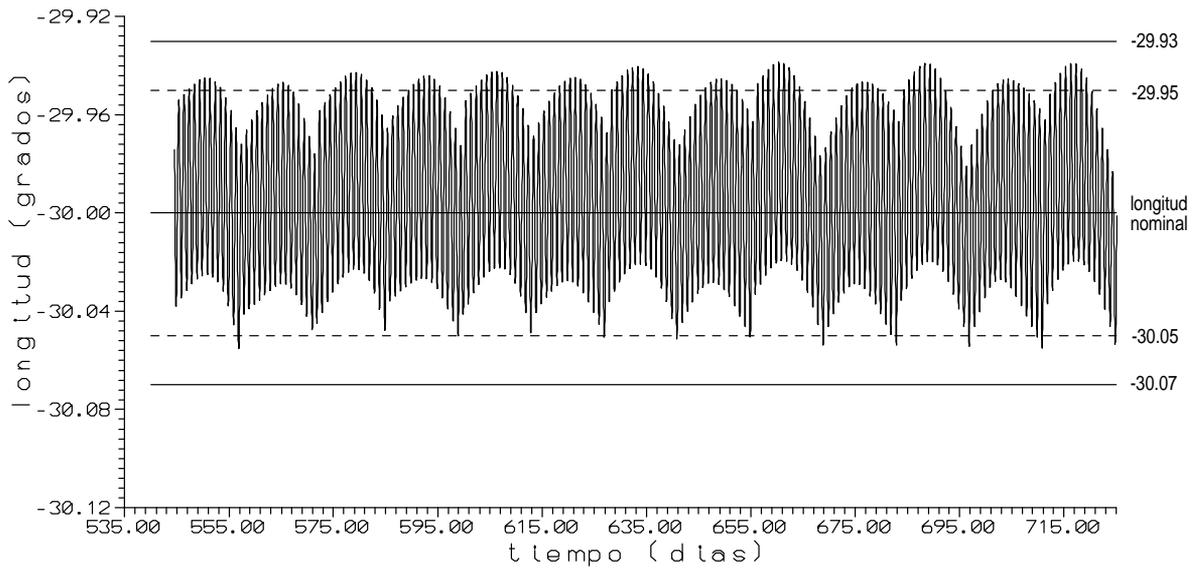


Figura 5.5.2: Mantenimiento de la longitud verdadera durante el año 2000.

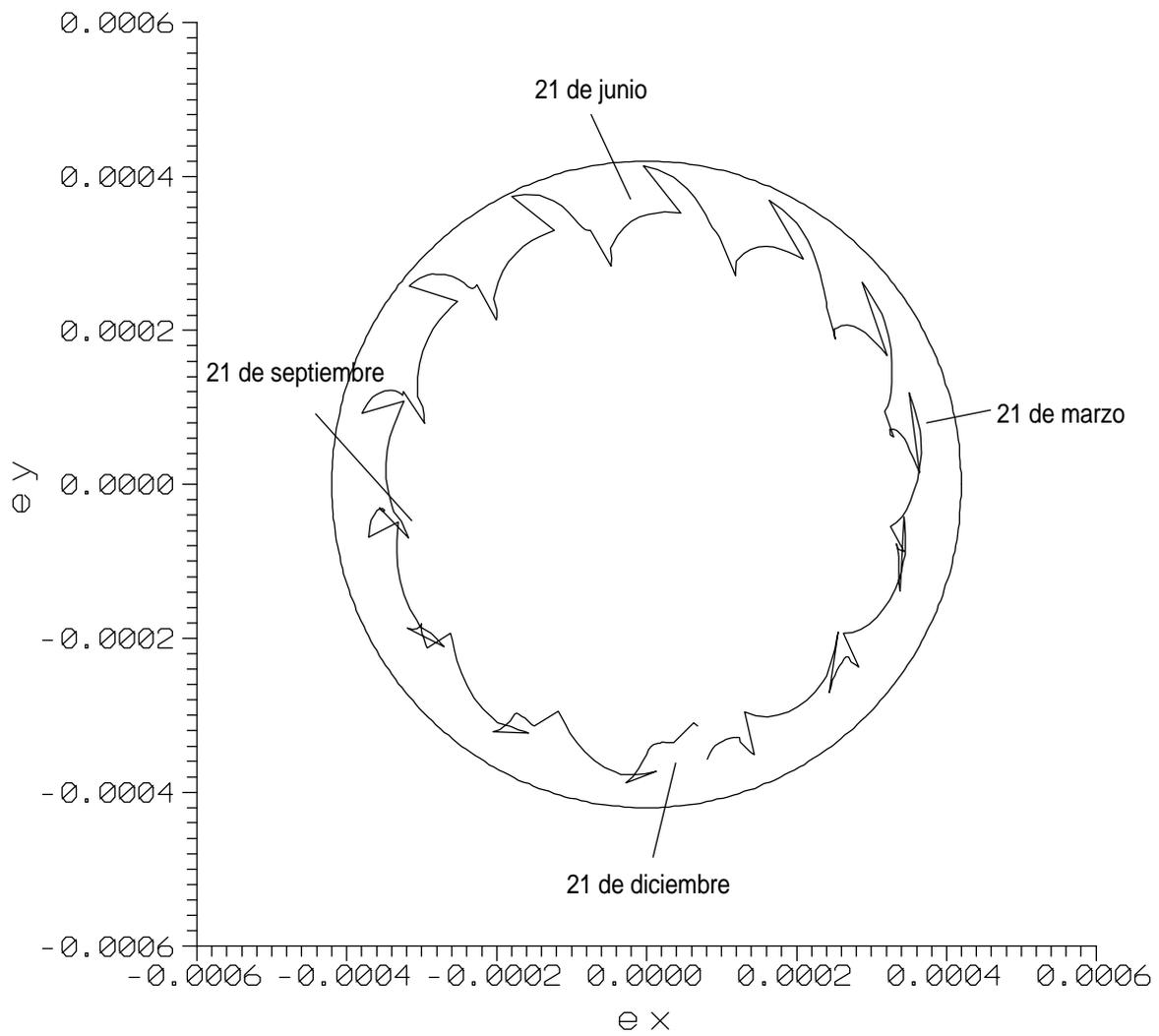


Figura 5.5.3: Mantenimiento del vector excentricidad centrado durante el año 2000.

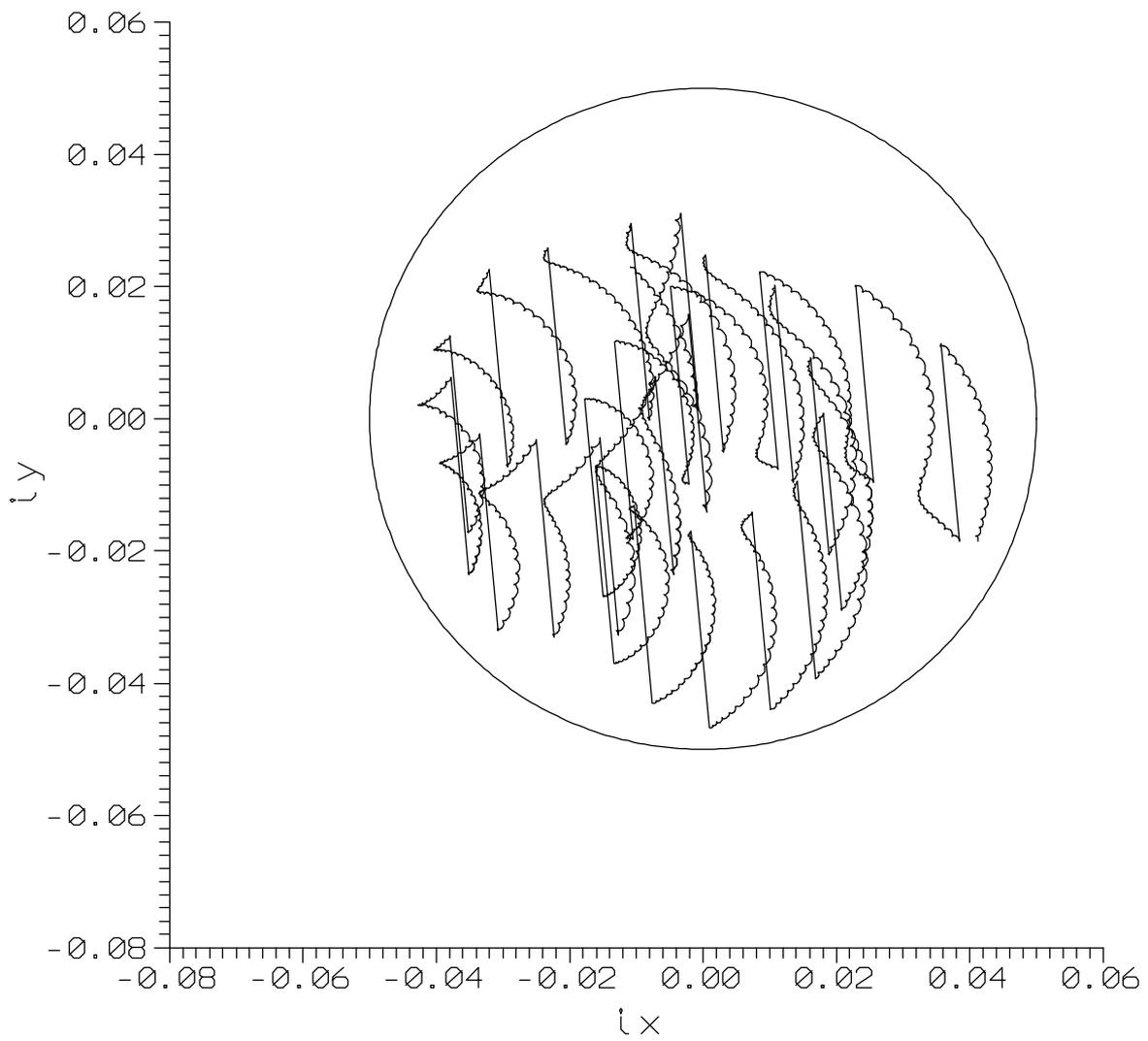


Figura 5.5.4: Mantenimiento del vector inclinación oscultriz durante el año 2000.

Fecha	Hora (TU)	ΔV_S (en m/s)	Fecha	Hora (TU)	$\Delta V_{E/O}$ (en m/s)
10-01-2000	01 ^h 05 ^m 24 ^s .6	1.60936	13-01-2000	14 ^h 12 ^m 12 ^s .5	-0.07528
			14-01-2000	02 ^h 14 ^m 10 ^s .5	0.03524
24-01-2000	00 ^h 10 ^m 18 ^s .8	1.60942	27-01-2000	22 ^h 54 ^m 53 ^s .5	-0.08713
			28-01-2000	10 ^h 56 ^m 51 ^s .5	0.05465
07-02-2000	23 ^h 11 ^m 18 ^s .8	1.60946	10-02-2000	13 ^h 17 ^m 10 ^s .3	-0.06436
			11-02-2000	01 ^h 19 ^m 08 ^s .2	0.02725
21-02-2000	22 ^h 16 ^m 14 ^s .4	1.60963	24-02-2000	21 ^h 31 ^m 25 ^s .1	-0.10113
			25-02-2000	09 ^h 33 ^m 23 ^s .1	0.06866
06-03-2000	21 ^h 21 ^m 11 ^s .5	1.60965	09-03-2000	11 ^h 51 ^m 41 ^s .1	-0.05181
			09-03-2000	23 ^h 53 ^m 39 ^s .3	0.01310
20-03-2000	20 ^h 26 ^m 07 ^s .6	1.60988	23-03-2000	20 ^h 26 ^m 51 ^s .4	-0.10576
			24-03-2000	08 ^h 28 ^m 49 ^s .3	0.07688
03-04-2000	19 ^h 31 ^m 06 ^s .3	1.60989	06-04-2000	09 ^h 09 ^m 47 ^s .2	-0.04604
			06-04-2000	21 ^h 11 ^m 45 ^s .2	0.00546
17-04-2000	18 ^h 36 ^m 02 ^s .9	1.61014	20-04-2000	19 ^h 28 ^m 16 ^s .7	-0.10056
			21-04-2000	07 ^h 30 ^m 14 ^s .6	0.07436
01-05-2000	17 ^h 41 ^m 02 ^s .8	1.61012	04-05-2000	06 ^h 23 ^m 23 ^s .9	-0.05199
			04-05-2000	18 ^h 25 ^m 21 ^s .9	0.01063
15-05-2000	16 ^h 46 ^m 00 ^s .6	1.61038	18-05-2000	18 ^h 26 ^m 24 ^s .9	-0.08995
			19-05-2000	06 ^h 28 ^m 22 ^s .9	0.06323
29-05-2000	15 ^h 51 ^m 01 ^s .0	1.61030	01-06-2000	04 ^h 37 ^m 12 ^s .0	-0.06000
			01-06-2000	16 ^h 39 ^m 10 ^s .0	0.01888
12-06-2000	14 ^h 55 ^m 59 ^s .6	1.61053	15-06-2000	17 ^h 18 ^m 20 ^s .3	-0.07990
			16-06-2000	05 ^h 20 ^m 18 ^s .3	0.05208
26-06-2000	14 ^h 01 ^m 00 ^s .2	1.61036	29-06-2000	02 ^h 57 ^m 48 ^s .6	-0.06385
			29-06-2000	14 ^h 59 ^m 46 ^s .5	0.02269

Tabla 5.5.1: Tiempos y magnitudes de las maniobras de mantenimiento en estación durante el año 2000.

Fecha	Hora (TU)	ΔV_S (en m/s)	Fecha	Hora (TU)	$\Delta V_{E/O}$ (en m/s)
10-07-2000	13 ^h 05 ^m 59 ^s .3	1.61053	13-07-2000	16 ^h 25 ^m 24 ^s .3	-0.07376
			14-07-2000	04 ^h 27 ^m 22 ^s .3	0.04433
24-07-2000	12 ^h 10 ^m 59 ^s .0	1.61028	27-07-2000	01 ^h 05 ^m 42 ^s .6	-0.06702
			27-07-2000	13 ^h 07 ^m 40 ^s .6	0.02687
07-08-2000	11 ^h 15 ^m 58 ^s .3	1.61038	10-08-2000	16 ^h 01 ^m 16 ^s .9	-0.06921
			11-08-2000	04 ^h 03 ^m 14 ^s .9	0.03736
21-08-2000	10 ^h 20 ^m 56 ^s .5	1.61010	24-08-2000	23 ^h 37 ^m 34 ^s .3	-0.06821
			25-08-2000	11 ^h 39 ^m 32 ^s .2	0.02585
04-09-2000	09 ^h 25 ^m 54 ^s .8	1.61014	07-09-2000	16 ^h 25 ^m 19 ^s .5	-0.06098
			08-09-2000	04 ^h 27 ^m 17 ^s .4	0.03392
18-09-2000	08 ^h 32 ^m 52 ^s .3	1.60986	21-09-2000	22 ^h 38 ^m 37 ^s .7	-0.07375
			22-09-2000	10 ^h 40 ^m 35 ^s .6	0.03165
02-10-2000	07 ^h 35 ^m 50 ^s .0	1.60989	05-10-2000	15 ^h 59 ^m 33 ^s .5	-0.05436
			06-10-2000	04 ^h 01 ^m 31 ^s .5	0.02636
16-10-2000	06 ^h 40 ^m 45 ^s .9	1.60964	19-10-2000	22 ^h 13 ^m 50 ^s .8	-0.07258
			20-10-2000	10 ^h 15 ^m 48 ^s .8	0.03347
30-10-2000	05 ^h 45 ^m 43 ^s .2	1.60966	02-11-2000	14 ^h 57 ^m 35 ^s .7	-0.04644
			03-11-2000	02 ^h 59 ^m 33 ^s .6	0.01649
13-11-2000	04 ^h 50 ^m 37 ^s .7	1.60946	16-11-2000	22 ^h 06 ^m 37 ^s .8	-0.06742
			17-11-2000	10 ^h 08 ^m 35 ^s .8	0.03060
27-11-2000	03 ^h 55 ^m 34 ^s .4	1.60948	30-11-2000	13 ^h 02 ^m 57 ^s .6	-0.04202
			01-12-2000	01 ^h 04 ^m 55 ^s .6	0.01009
11-12-2000	03 ^h 00 ^m 27 ^s .5	1.60936	14-12-2000	21 ^h 53 ^m 10 ^s .8	-0.06535
			15-12-2000	09 ^h 55 ^m 08 ^s .7	0.03030
ΔV total				42.85769	

Tabla 5.5.2: Tiempos y magnitudes de las maniobras de mantenimiento en estación durante el año 2000.

5.6 Conclusiones y resultados.

En este capítulo hemos presentado la simulación numérica del mantenimiento en estación de un satélite situado en la longitud 30° Oeste y una ventana de $0^\circ.14$ de amplitud para la longitud y, de $0^\circ.1$ para la latitud. Esta simulación se ha realizado, en primer lugar, considerando por separado el mantenimiento norte-sur y el este-oeste. Asimismo, en cada caso se han analizado distintas opciones en la determinación de los criterios objetivo de los elementos orbitales y se han calculado las magnitudes de los impulsos y sus instantes de realización aplicando, tanto las expresiones del modelo lineal, como las del proceso iterativo, junto con la propagación numérica de la órbita.

Se concluye, que en el mantenimiento norte-sur, la diferencia entre los incrementos totales de velocidad aplicados en las distintas opciones estudiadas son poco significativas, siendo mínima al utilizar el proceso iterativo aplicado sobre elementos oscultrices, con un valor constante para la corrección en inclinación y efectuando las maniobras cada 14 días. No obstante, ya se ha considerado una estrategia óptima para el control del vector inclinación al aplicar las correcciones con la dirección secular y utilizar elementos orbitales afectados por todas las perturbaciones periódicas debidas al efecto del Sol y de la Luna, en el caso de elementos oscultrices, y únicamente sin efectos de corto periodo (menor que el diurno), en el caso de elementos centrados.

Por el contrario, en el mantenimiento este-oeste sí existen diferencias importantes: la estrategia óptima para controlar el vector excentricidad centrado y la longitud verdadera resulta ser la de utilizar el proceso iterativo junto con el criterio de simetría para la longitud ya que, así, se puede ocupar al máximo la ventana en longitud aumentando el valor del control en excentricidad y, por tanto, disminuir la velocidad total utilizada para las maniobras.

La aplicación de este método óptimo frente al de un modelo lineal con parámetros centrados y longitud media genera un ahorro del 3.56% en el gasto total de combustible para un satélite con una media de 10 años de vida útil, lo que supone un aumento en ésta de tres meses y medio, aproximadamente.

Finalmente, se ha realizado de esta forma la simulación del mantenimiento en estación del satélite combinando impulsos sur con los impulsos tangenciales, primero este y después oeste, desde el 1 de enero hasta el 31 de diciembre de 2000.

Conclusiones Finales.

En la presente memoria se ha abordado el problema del mantenimiento en estación de un satélite geostacionario mediante la combinación de métodos numéricos precisos y modelos lineales simplificados con el objeto de optimizar el cálculo de maniobras y, así, minimizar el consumo de combustible.

A continuación se exponen las ideas generales, las teorías utilizadas, las aportaciones realizadas y las conclusiones obtenidas a lo largo de este trabajo.

Hemos comenzado con la presentación minuciosa de dicho problema, describiendo las principales características del satélite y analizando las acciones de las fuerzas que modifican su posición, a saber: la fuerza perturbadora gravitatoria terrestre, la fuerza lunisolar y la fuerza debida a la presión de radiación solar. Para ello se han integrado analíticamente las ecuaciones de Lagrange simplificadas escritas en función de unos elementos orbitales equinociales específicos, ya que este conjunto de elementos resulta más apropiado que el conjunto de los elementos orbitales clásicos debido a que, tanto la excentricidad, como la inclinación toman valores muy próximos a cero. Como resultado de la integración se ha verificado que:

- La fuerza perturbadora gravitatoria terrestre modifica principalmente el semieje y la longitud media. Además, que la evolución de esta última depende de la longitud de estacionamiento y que, desde el punto de vista cualitativo, aparecen los 4 puntos de equilibrio en la órbita geostacionaria, dos de ellos estables y dos inestables. Para ilustrar esta dependencia hemos determinado el tiempo de permanencia aproximado de un satélite, en su región asignada, en función de su longitud nominal.
- La fuerza lunisolar actúa fundamentalmente sobre el vector excentricidad. Su evolución presenta una componente secular, distinta para cada año, y términos periódicos, siendo dos de ellos los que tienen mayor amplitud: uno debido a la acción del Sol, con un periodo semianual y, otro, debido a la acción de la Luna, con un periodo de 13.66 días.
- La fuerza debida a la presión de radiación solar afecta al vector excentricidad oca-

sionando que éste describa un círculo anual cuyo radio depende, entre otros factores, de la reflectividad del satélite, de su área efectiva y de su masa.

Asimismo, hemos revisado los distintos tipos de maniobras estándar que se realizan para el mantenimiento en estación (norte-sur y este-oeste), analizando el efecto que cada una de ellas tiene sobre los elementos orbitales a partir de expresiones obtenidas con modelos lineales simplificados que, además, proporcionan la manera de calcular las magnitudes de los impulsos y su instante de realización. Se ha analizado cómo:

- una maniobra normal modifica el vector inclinación y hemos comprobado cómo su efecto depende de la hora a la que se efectúe y ésta, a su vez, de la época del año;
- una maniobra tangencial modifica el vector excentricidad y la longitud verdadera. Así, hemos comprobado que la corrección para el vector excentricidad también depende de la hora, mientras que la corrección para la longitud es independiente de la misma;
- una maniobra radial modifica únicamente el vector excentricidad.

De esta forma, concluimos que la aplicación de las dos primeras es suficiente para controlar la posición del satélite, por lo que hemos centrado nuestro estudio en la maniobras normales y tangenciales que, además, son la que comúnmente se utilizan en la práctica.

Dado que hemos elegido el caso de un satélite con grandes paneles solares, la magnitud del impulso necesario para corregir el vector excentricidad resulta mayor que la necesaria para corregir la longitud. Por esta razón ha resultado necesaria para el mantenimiento en estación este-oeste, la realización de dos impulsos tangenciales separados medio día sidéreo, de tal forma que su combinación corrija de manera eficaz ambos parámetros.

También hemos descrito las estrategias óptimas elegidas que aplicamos en este trabajo:

- la estrategia *dirección secular* para el control del vector inclinación, y
- la estrategia *perigeo hacia el Sol* para el control del vector excentricidad.

Basándonos en ambas estrategias hemos obtenido las expresiones para los vectores inclinación y excentricidad objetivo que utilizamos en los capítulos posteriores.

Con el fin de mejorar los resultados que se obtienen con la utilización de métodos analíticos para la obtención de elementos orbitales medios y las expresiones del modelo lineal para la determinación de la magnitud de los impulsos y sus instantes de realización, hemos planteado el mantenimiento en estación del satélite como un problema de control de

un sistema dinámico no lineal en el que el estado del sistema viene dado por los elementos orbitales del satélite. El efecto que las maniobras tienen sobre dichos elementos será la respuesta del sistema a la modificación de alguna de sus características, en este caso, un cambio en su velocidad.

Para conseguir el objetivo propuesto ha resultado necesario, en primer lugar, integrar con gran precisión las ecuaciones que definen el movimiento perturbado del satélite y, en segundo lugar, desarrollar un procedimiento que optimice el cálculo de las maniobras y sus instantes de realización.

Con este fin hemos desarrollado un método para la propagación numérica de la órbita en las siguientes condiciones:

- La fuerza gravitatoria terrestre se ha modelado a partir del desarrollo en armónicos esféricos del potencial gravitatorio terrestre. El modelo de geopotencial utilizado ha sido el GEM-T2 incluyendo armónicos hasta el orden y grado 4, resultado del estudio previo en el que se ha evaluado la magnitud de la fuerza con el modelo de geopotencial GEM-T1 y con armónicos hasta el orden y grado 5 (se han obtenido diferencias del orden de $10^{-10} m/s^2$).
- La fuerza lunisolar se ha determinado a partir de las expresiones del potencial perturbador del problema de los tres cuerpos, obtenida en función de las coordenadas cartesianas del Sol y de la Luna en un sistema de referencia geocéntrico referido al ecuador medio en la época t_0 , $R(O; XYZ)$. Hemos calculado estas coordenadas con teorías orbitales que incluyen perturbaciones de segundo orden y las hemos comparado con las efemérides LE2000 proporcionadas por el Jet Propulsion Laboratory, obteniendo diferencias menores que $10^{-9} m/s^2$ en las componentes de la fuerza.
- La presión de radiación solar se ha calculado a partir de su valor en función de las coordenadas cartesianas del Sol. En este caso, hemos calculado las coordenadas del Sol con la teoría analítica dada por Stumpff [Stumpff, 1980] en el que el máximo error para estas coordenadas es de 1.1×10^{-5} u.a., y las hemos comparado, a su vez, con las obtenidas mediante las teorías orbitales anteriormente citadas, obteniendo entre ellas diferencias del orden de 10 metros, lo que implica una diferencia del orden de $10^{-9} m/s^2$ en la magnitud de la fuerza.
- El intervalo de integración óptimo ha sido de $22^m 52^s .3$, que hemos obtenido tomando como referencia la ecuación del movimiento armónico simple. Con este paso de integración se garantiza una precisión del orden de 10 metros en las coordenadas cartesianas del satélite en $R(O; XYZ)$ para 14 días de predicción numérica.
- Las posiciones y velocidades iniciales necesarias para comenzar la integración numérica de las ecuaciones se han determinado a partir de elementos orbitales iniciales

mediante un algoritmo específico que hemos desarrollado para evitar las singularidades numéricas ocasionadas por los valores tan próximos a cero que toman la inclinación y la excentricidad.

- Hemos iniciado la integración numérica comenzando con el método de Runge-Kutta clásico de cuarto orden, para obtener algunos valores iniciales de la aceleración del satélite y aplicando, a continuación, el método de Herrick para elaborar una tabla inicial precisa.
- Hemos integrado las ecuaciones diferenciales del movimiento con el método de Gauss-Jackson, o Σ^2 , ya que, aunque es un método de tipo predictor-corrector, no necesita para este problema, según hemos comprobado, la fase correctora, si se elige de manera óptima el intervalo de integración. De esta forma hemos obtenido las posiciones y velocidades del satélite en $R(O; XYZ)$.
- Hemos utilizado el método de interpolación de Bower para obtener posiciones y velocidades del satélite en los tiempos de la maniobras porque este método mantiene la precisión del método de integración que hemos utilizado.
- Se han calculado los elementos orbitales oscultrices a partir de las posiciones y velocidades resultantes de la integración numérica. Para este cálculo de órbitas concreto, hemos desarrollado un algoritmo que también evita indeterminaciones numéricas. Estos elementos incluyen en cada instante la acción conjunta de todas las fuerzas perturbadoras que modifican la posición del satélite, sin efectuar simplificaciones.
- Asimismo, hemos obtenido elementos orbitales centrados mediante la aplicación de un filtro numérico que elimina cortos periodos.

Hemos comparado los elementos centrados obtenidos con este procedimiento con los elementos medios proporcionados por HISPASAT S.A. que han sido calculados con un programa basado en métodos analíticos. Las diferencias que hemos obtenido han sido de 10 metros para el semieje, 10^{-6} radianes para el vector excentricidad, 10^{-4} grados para el vector inclinación y 10^{-3} grados para la longitud media. Estos resultados garantizan la validez del método que hemos utilizado para la propagación numérica de la órbita en este caso.

Para el cálculo de las magnitudes de los impulsos y del instante óptimo de su realización hemos implementado un modelo matemático basado en técnicas de control “feedback” que combina la integración numérica anterior de las ecuaciones del movimiento con una teoría analítica que proporciona funciones fácilmente invertibles. Así se consigue un proceso iterativo que genera una sucesión de soluciones aproximadas convergentes a

los valores buscados. Esta forma de actuar resulta ventajosa frente a los métodos tradicionales utilizados para resolver este problema: además de determinar con gran precisión los elementos orbitales, en cada iteración se puede controlar si se han alcanzado los criterios objetivo impuestos a priori sobre los elementos orbitales. Así, puesto que el proceso finaliza cuando se cumplen estos objetivos, entonces alcanzamos de manera óptima las magnitudes e instantes de realización de los impulsos.

Los criterios objetivo se han establecido de la manera siguiente:

- el vector inclinación objetivo se determina mediante la aplicación de la estrategia *dirección secular*;
- el vector excentricidad objetivo se obtiene mediante las expresiones que resultan de aplicar la estrategia *perigeo hacia el Sol*;
- para la longitud verdadera se proponen dos maneras de establecer el criterio objetivo, suponiendo que se trata de un satélite al que le corresponde una aceleración de longitud negativa:
 - la longitud objetivo debe llegar al límite inferior de la ventana en longitud en el final del ciclo;
 - la longitud debe mantenerse, durante todo el ciclo, simétrica respecto del valor de la longitud de estacionamiento, con su máximo en la mitad del ciclo y su mínimo en el final del mismo.

En estas condiciones hemos obtenido los términos generales de las sucesiones que proporcionan:

- la magnitud del impulso norte-sur y su instante de realización;
- la magnitud de los impulsos este-oeste y el instante de realización del primero de ellos;
- el criterio de simetría para la longitud, cuando el criterio considerado para ésta sea el expuesto en segundo lugar.

Hemos simulado numéricamente este proceso para el mantenimiento en estación de un satélite estacionado en la longitud 30° Oeste cuya ventana espacial tiene una amplitud de 0°.14 en longitud y 0°.1 en latitud.

Para el mantenimiento norte-sur hemos analizado dos formas distintas de determinar la magnitud de la corrección para la inclinación, Δi , en un caso considerado constante,

y en otro caso, variable, para ciclos de 14 y 28 días. En los cuatro casos se han aplicado sobre el vector inclinación osculatriz, y hemos concluido que la forma óptima de realizar el mantenimiento ha sido la considerada en primer lugar, calculando el valor de Δi a partir de las variaciones que experimenta el vector inclinación durante 14 días a lo largo de todo el año. Para este caso, también hemos efectuado la simulación del mantenimiento en estación calculando la magnitud de los impulsos y su instante de realización con las expresiones del modelo lineal y con el vector inclinación centrado.

Hemos efectuado, asimismo, el mantenimiento en estación este-oeste para los dos criterios de la longitud objetivo descritos anteriormente, resultando óptimo el segundo de ellos ya que permite aumentar el valor del control en excentricidad sin que la longitud abandone su ventana asignada. Como consecuencia, la magnitud del incremento de velocidad utilizada se minimiza, al depender directamente de la corrección para la excentricidad, por ser ésta dominante frente a la corrección para la longitud. Los elementos orbitales utilizados han sido la longitud verdadera y el vector excentricidad centrado, ya que la gran amplitud de las oscilaciones diurnas que presenta el vector excentricidad osculatriz hacen imposible la utilización de este vector.

También hemos aplicado el modelo lineal para simular el mantenimiento este-oeste, pero únicamente para el primer criterio establecido sobre la longitud. Los resultados obtenidos han sido equivalentes a los obtenidos mediante la aplicación, en las mismas condiciones, del proceso iterativo. La desventaja del método lineal reside en que, al disponer de una ventana en longitud más reducida, al actuar en este caso sobre la longitud media y al no ajustar el valor de los impulsos, no es posible aumentar el valor del control en excentricidad y, por tanto, no se disminuye la cantidad de incremento de velocidad utilizada.

La comparación llevada a cabo entre el mantenimiento realizado con la aplicación del modelo lineal y el llevado a cabo con el proceso iterativo ha dado como resultado que, con este último, se puede conseguir aproximadamente un ahorro del 3.56 % en el consumo total de combustible para un satélite con 10 años de vida útil, lo cual se traduce en un aumento de ésta: el satélite prolongaría su misión durante tres meses y medio más, aproximadamente, con el consiguiente ahorro de coste que esto supone.

Finalmente, hemos aplicado globalmente el mantenimiento en estación óptimo desarrollado para el caso de un satélite en la posición 30° Oeste, consiguiendo controlar su posición durante todo el año 2000 y, por tanto, alcanzando el objetivo propuesto de mantenerlo en estación reduciendo el consumo de combustible respecto del correspondiente a los métodos lineales.

Referencias

- [Archinal, 1992] ARCHINAL B.A., Terrestrial Coordinates and the Rotation of the Earth, *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, Capítulo 4. Seidelmann P.K. (Ed.), University Science Books. Mill Valley, California, 1992.
- [Arluk & Virdee, 1985] ARLUK M.P. AND VIRDEE L., Longitudinal orbit control for INTELSAT V inclination station keeping maneuvers. *Space Dynamics for Geostationary Satellites*, CEPAD, Toulouse (1985), pp. 707-735.
- [Arsenault *et al.*, 1970] ARSENAULT J.L., FORD K.C. AND KOSKELA P.E., Orbit determination using analytic partial derivatives of perturbed motion. *AAIA Journal*, **8**, No. 1, (1970), pp. 4-12.
- [Berlin, 1988] BERLIN P., *The Geostationary Applications Satellite*. Cambridge University Press, EE.UU., 1988.
- [Broucke & Cefola, 1972] BROUCKE R.A. AND CEFOLA P.J., On the equinoctial orbit elements. *Celestial Mechanics*, **5**, (1972), pp. 303-310.
- [Brouwer & Clemence, 1971] BROUWER D. AND CLEMENCE G.M., *Methods of Celestial Mechanics*. Academic Press, 1971.
- [Cot, 1993] COT D., Evaluation of geostationary orbit determination accuracy by two-way time transfer technique. *Manuscripta geodaetica*, **18**, (1993), pp. 136-146.
- [Chan, 1999] CHAN J., Inclination control strategy for INTELSAT VIII satellites. *50th International Astronautical Congress*. October, 1999. Amsterdam, The Netherlands.
- [Danby, 1992] DANBY J.M.A., *Foundamentals of Celestial Mechanics*. MacMillen Co. New York, 1967.
- [Exertier, 1990] EXERTIER P., Precise determination of mean orbital elements from osculating elements, by semi-analytical filtering. *Manuscripta Geodaetica*, **15**, (1990), pp. 115-123.

- [Franklin *et al.*, 1991] FRANKLIN G.F., POWELL J.D. & EMANMI-NAEINI A., *Feedback Control of Dynamical Systems*. Addison-Wesley, 1991.
- [Fox, 1984] FOX K., Numerical Integration of the Equations of Motion of Celestial Mechanics. *Celestial Mechanics*, **33**, (1984), pp. 127-142.
- [Gear, 1971] GEAR C.W., *Numerical Initial Value Problem in Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, New Jersey, 1971.
- [Gambí *et al.*, 1996] GAMBÍ J.M. ROMERO, P. Y PATIÑO E., Influencia del campo gravitatorio terrestre en el diseño de una estrategia de control para un satélite geoestacionario. *Física de la Tierra*, **8**, Ed. Complutense, Madrid (1996), pp. 163-171.
- [Gantous, 1985] GANTOUS D.J., Eccentricity Control Strategy for Geosynchronous Communication Satellites. *Space Dynamics for Geostationary Satellites*, CEPAD, Toulouse (1985), pp. 693-706.
- [Gerald, 1984] GERALD C.F. AND WHEATLEY P.O., *Applied Numerical Analysis*. Addison-Wesley Publishing Company, 1984.
- [Heiskanen & Moritz, 1985] HEISKANEN W.A. Y MORITZ H., *Physical Geodesy*. W.H. Freeman & Co., San Francisco, U.S.A., 1967.
- [Hildebrand, 1974] HILDEBRAND F.B. *Introduction to Numerical Analysis*. McGraw-Hill, 1974.
- [Herrick, 1972] HERRICK S., *Astrodinamics* Vol. I y II . Van Nostrand Reinhold Co. New York, 1972.
- [Hobson, 1965] HOBSON E.W., *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. Chelsea Publishing Company. New York, 1965.
- [Hohenkeik *et al.*, 1992] HOHENKEIK C.Y., YALLOP B.D., SMITH C.A. AND SINCLAIR A.T., Celestial Reference Systems, *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, Capítulo 3. Seidelmann P.K. (Ed.), University Science Books, Mill Valley, California, 1992.
- [Jackson, 1924] JACKSON J., Note on the numerical integration of $d^2x/dt^2 = f(x,t)$. *Monthly Notices Royal Astronomy Society*, **84**, (1924), pp. 602-606.
- [Kamel *et al.*, 1973] KAMEL A., ECKMAN D. AND TIBBITS K., East-West station keeping requirements of nearly synchronous satellites due to Earth's triaxiality and luni-solar effects. *Celestial Mechanics*, **8**, (1973), pp. 129-148.

- [Kaula, 1966] KAULA W.H., *Theory of Satellite Geodesy* Blaisdell Publishing Company, Waltham Massachusetts, 1966.
- [Kelly et al., 1994] KELLY T.J., WHITE L.K, AND GAMBLE D.W., Stationkeeping of geostationary satellites with simultaneous eccentricity and longitude control. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **17**, No. 4, (1994), pp. 769-777.
- [Klotz & Prigge, 1985] KLOTZ H. & PRIGGE R., Station Keeping Strategy for DFS-Kopernikus. *Space Dynamics for Geostationary Satellites*, CEPAD, Toulouse (1985), pp. 615-630.
- [Kovalevsky, 1963] KOVALEVSKY J., *Introduction à la Mécanique Céleste*, Collection Armand Colin n. 370, Section de Mathématiques, Prís, 1963.
- [Legendre, 1980] LEGENDRE G., Le maintien à poste de satellites géostationnaires. *Cours de Technologie Spatiale: Le mouvement du véhicule spatial en orbite. Centre National D'études Spatiales*, Toulouse (1980), pp. 583-609.
- [Marsh et al., 1990] MARSH J.G., LERCH F.J., PUTNEY B.H., FELSENTRERGER T.L. Y SÁNCHEZ B.V., The GEM-T2 Gravitational Model. *Journal of Geophysical Research*, **95**, No. b13, (1990), pp. 22043-22071.
- [Metris, 1991] METRIS G., Théorie du Mouvement du Satellite Artificiel. Développement des Equations du Mouvement Moyen. Application a l'Etude des Longues Périodes. *Tesis Doctoral del Observatorio de París*, 1991.
- [Patiño et al., 1994] PATIÑO E., ZAMORANO P., ROMERO P. Y GAMBÍ J.M., A Comparative Numerical Prediction for the Station Keeping of the HISPASAT System. *Proceedings del Tercer Seminario Internacional sobre Astronomía de posición y Mecánica Celeste*. Cuenca (1994), pp. 353-359.
- [Perko, 1991] PERKO L., *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer Verlag, New York, 1991.
- [Pocha, 1978] POCHA J.J., *An Introduction to Mission Design for Geostationary Satellites*. Space Technology Library. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.
- [Romero et al., 1993] ROMERO P., GAMBÍ J.M., Y PATIÑO E., A Non Singular Determination of the Orbital Elements for Geostationary Orbits. *Proceedings del Second International Workshop on Positional Astronomy and Celestial Mechanics*, Valencia (1993), pp. 141-147.
- [Roy, 1978] ROY A.E., *Orbital motion*. Adam Hilger Ltd., Bristol, 1978.

- [Seidelmann *et al.*, 1992] SEIDELMAN P.K. (ED.), *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*. University Science Books, Mill Valley, California, 1992.
- [Sevilla, 1980] SEVILLA M.J., El sistema IAU(1976) de Constantes Astronómicas y su repercusión en la reducción de posiciones de estrellas. Pub. núm. 109 del *Instituto de Astronomía y Geodesia*, Madrid, 1980.
- [Sevilla, 1989] SEVILLA M.J., *Mecánica Celeste Clásica*. Instituto de Astronomía y Geodesia. Universidad Complutense de Madrid, No. 5, 1989.
- [Slavinskas, 1998] SLAVINSKAS D.D., DABBAGHI H. AND BENDEN W. J., Efficient inclination control for geostationary satellites. *Journal of Guidance*, **11**, No. 6, (1988), pp. 584-589.
- [Smart, 1953] SMART W.M., *Celestial Mechanics*. Longmans, 1953.
- [Simon *et al.*, 1994] SIMON J.L., BRETAGNON P., CHAPRONT J., CHAPRONT-TOZÉ M., FRANCOU G. AND LASKAR J., Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets. *Astronomy and Astrophysics*, **282**, (1994), pp. 663-683.
- [Soop, 1983] SOOP E.M., *Introduction to geostationary orbits*. ESA Scientific and Technical Publication, Ed. W.R. Burke, ESTEC, Noordwijk, The Netherlands, 1983.
- [Soop, 1994] SOOP E.M., *Handbook of geostationary orbits*. Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [Stumpff, 1980] STUMPF P., Two self-consistent FORTRAN subroutines for the computation of the Earth's motion. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, **41**, (1980), pp. 1-8.
- [Taff, 1985] TAFF L., *Celestial Mechanics*. John Wiley and sons. Inc. New York, 1985.
- [Torge *et al.*, 1989] TORGE W., SEVILLA, M.J. Y VIEIRA, R., *V Curso de Geodesia Superior: Mareas Terrestres y Fundamentos, Métodos y Problemas de la Gravimetría*. Instituto de Astronomía y Geodesia (U.C.M.-C.S.I.C.), Madrid, 1989.