

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Matemática Aplicada



**MULTIPLICIDADES ALGEBRAICAS Y TEORÍA DE
BIFURCACIÓN**

**MEMORIA PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO DE
DOCTOR POR**

Carlos Mora Corral

Bajo la dirección del Doctor:

Julián López Gómez

Madrid, 2004

ISBN: 84-669-2596-1

Universidad Complutense de Madrid

Departamento de Matemática Aplicada



Multiplicidades algebraicas y Teoría de bifurcación

Memoria presentada por

Carlos Mora Corral

para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Dirigida por **Julián López Gómez**

Madrid, febrero de 2004

Agradecimientos

A mi director Julián López Gómez, por iniciarme en la investigación matemática, por insuflarme su pasión por la teoría de multiplicidades y el análisis no lineal, por enseñarme que las buenas matemáticas se hacen estableciendo conexiones entre campos a priori separados, por su ejemplo y ánimo constantes, por el aliento que me ofreció para asistir a congresos y realizar estancias en otras universidades. También a todos los profesores del Departamento de Matemática Aplicada que con sus enseñanzas han contribuido a la realización de esta memoria.

Al Profesor Robert Magnus, por sus enseñanzas, su dedicación, por afianzar mi interés por las familias uniparamétricas de operadores, y por las conversaciones que mantuvimos sobre matemáticas y sobre música. A Kristján por su inestimable ayuda informática. A ambos por hacer deliciosa mi estancia en Reykjavík.

Al Profesor John Ball por sus enseñanzas, su notable paciencia conmigo, sus valiosos consejos matemáticos, por darme el ánimo necesario para continuar con nuestras investigaciones en la complicada teoría de elasticidad, y por iniciarme en el fascinante mundo del cálculo de variaciones. A Andrew, Elaine, Jon, José Carlos y Mathias. A todos ellos les debo una maravillosa estancia en Oxford repleta de matemáticas interesantes.

A mis compañeros de departamento: los dos Alejandros, Belén, los dos David, Fabricio, Mihaela, Pedro, Rafa, René y Teresa. Por sus ayudas informáticas, sus consejos y su apoyo desinteresado.

A mis padres y hermanos por su cariño, interés y apoyo.

A mis amigos. A Fernando por su amistad y apoyo de tantos años. A Noemí, Ana y Emma por su cariño y también por su ayuda con los idiomas. A Sara y Miguel por su interés.

En lo económico, a los proyectos del Ministerio de Ciencia y Tecnología BFM2000-0797 y REN2003-00707, y a la beca de Formación del Profesorado Universitario del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Índice general

Introducción	v
I Multiplicidad algebraica	1
1. Unicidad de la multiplicidad algebraica	3
1.1. Introducción	3
1.2. La multiplicidad de R. J. Magnus	4
1.3. Los teoremas de unicidad	5
1.4. Desarrollos ulteriores de la multiplicidad algebraica	10
2. Desarrollos de Laurent de la inversa y residuos logarítmicos	11
2.1. Introducción	11
2.2. La multiplicidad de J. Esquinas y J. López-Gómez	13
2.3. Un resultado clásico sobre series de Laurent	15
2.4. El operador traza	16
2.5. La multiplicidad algebraica como residuo logarítmico	19
2.6. Expansiones asintóticas en el caso real	23
2.7. La multiplicidad como residuo logarítmico en el caso real	24
2.8. Desarrollos de Laurent y cadenas de Jordan	27
2.9. Un ejemplo proveniente de una ecuación diferencial ordinaria	29
3. Caracterización de la existencia de la forma local de Smith	33
3.1. Introducción	33
3.2. Cadenas de Jordan	34
3.3. Conjuntos canónicos y forma local de Smith	35
3.4. Construcción de conjuntos canónicos de cadenas de Jordan	37
3.5. Caracterización de la existencia de la forma local de Smith	40
II Teoría de bifurcación	47
4. Caracterización de los autovalores no-lineales	49

4.1. Bifurcación local abstracta	49
4.2. El grado de Leray-Schauder	51
4.3. La multiplicidad como indicador de un cambio de índice	53
4.4. Una no linealidad explícita sin bifurcación	54
5. Contar soluciones de ecuaciones de bifurcación abstractas	57
5.1. Introducción	57
5.2. Familias admisibles y aplicaciones paridad inducidas	59
5.3. Entornos abiertos aislantes	62
5.4. El grado de \mathfrak{F} en términos de la aplicación paridad	65
5.5. Cotas inferiores de Card \mathcal{C}_λ	68
5.6. Puntos regulares, de retorno y de histéresis	72
5.7. Estructura de \mathcal{C} en el caso fuertemente regular	76
5.8. Estructura de \mathcal{C} en el caso regular	80
A. Notaciones	83
Bibliografía	85

Introducción

El concepto de multiplicidad de una raíz de un polinomio es bien conocido. Sean $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ y $P : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ un polinomio. Decimos que λ_0 es una raíz (o un cero) de P de multiplicidad $k \in \mathbb{N}$ cuando, en el anillo de los polinomios, $(\lambda - \lambda_0)^k$ divide a $P(\lambda)$, y $(\lambda - \lambda_0)^{k+1}$ no divide a $P(\lambda)$. Excepcionalmente, se dice que 0 es una raíz (o un cero) de orden infinito (o de multiplicidad infinita) del polinomio cero. Este concepto se puede generalizar con facilidad a funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ suficientemente regulares, donde Ω es un abierto de \mathbb{K} . Se dirá que $\lambda_0 \in \Omega$ es un cero de f de multiplicidad $k \in \mathbb{N}$ cuando $f(\lambda_0) = \dots = f^{(k-1)}(\lambda_0) = 0$ y $f^{(k)}(\lambda_0) \neq 0$. Equivalentemente, cuando la función

$$\lambda \mapsto \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^k} \quad (1)$$

sea continua en λ_0 , y la función

$$\lambda \mapsto \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{k+1}}$$

no lo sea. Se dirá que $\lambda_0 \in \Omega$ es un cero de f de orden infinito (o multiplicidad infinita) cuando $f^{(j)}(\lambda_0) = 0$ para todo $j \geq 0$. Equivalentemente, cuando la función (1) sea continua para todo $k \in \mathbb{N}$.

Hay otro concepto de multiplicidad igualmente familiar; a saber, el de multiplicidad algebraica de un autovalor de un operador compacto. Sea U un espacio de Banach sobre $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ y sea A un operador lineal y compacto de U en U . Sea $\lambda_0 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ un autovalor de A . Entonces existe un número $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$N[(A - \lambda_0 I)^i] \subsetneq N[(A - \lambda_0 I)^j] \subset N[(A - \lambda_0 I)^k] = N[(A - \lambda_0 I)^\ell], \quad 0 \leq i < j \leq k \leq \ell,$$

donde I es la identidad en U , y la multiplicidad del autovalor λ_0 del operador A se define como $\dim N[(A - \lambda_0 I)^k]$. Una definición equivalente es la que sigue. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ entonces U y A se complexifican de manera natural, con lo que sin pérdida de generalidad se puede considerar que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Se sabe que λ_0 es un punto aislado del espectro de A . Se toma una curva de Jordan γ en \mathbb{C} que sea rectificable, positivamente orientada y tal que el único punto del espectro de A que encierre γ en su interior sea λ_0 . Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda$$

es una proyección en U cuya imagen es $N[(A - \lambda_0 I)^k]$. Con lo cual, una definición equivalente de

la multiplicidad de λ_0 como autovalor de A es

$$\dim R \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda \right],$$

donde R denota el subespacio imagen. Nótese que para esta última caracterización es necesaria la teoría de funciones de variable compleja. En particular, si U tiene dimensión finita todo lo anterior es válido incluso para cuando el autovalor λ_0 vale 0. En este caso en que A es una matriz cuadrada y λ_0 es un autovalor suyo, la multiplicidad de λ_0 como autovalor de A también se puede definir equivalentemente como el orden (o multiplicidad) del polinomio

$$\lambda \mapsto \det(A - \lambda I)$$

en λ_0 . Todo esto es bien conocido; ver, por ejemplo, A. E. Taylor [66], N. Dunford and J. T. Schwartz [12], K. Yosida [70], o I. Gohberg et al. [24].

Existe un concepto de multiplicidad que generaliza y extiende a estos dos conceptos que hemos expuesto y que será estudiado en la Parte I de esta memoria.

Sea U un espacio de Banach sobre $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, Ω un abierto de \mathbb{K} , $\lambda_0 \in \Omega$ y $\mathcal{L} : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(U)$ una función de clase C^∞ tal que $\mathcal{L}(\lambda_0) \in \Phi_0(U)$. Aquí $\mathcal{L}(U)$ denotará el conjunto de aplicaciones lineales y continuas de U en U , y $\Phi_0(U) \subset \mathcal{L}(U)$ el subconjunto formado por aquellos operadores que son Fredholm de índice cero, es decir, operadores $T \in \mathcal{L}(U)$ tales que

$$\dim N[T] = \text{codim } R[T] < \infty. \quad (2)$$

La hipótesis de Fredholm de índice cero es básicamente una hipótesis de finitodimensionalidad, puesto que los operadores Fredholm de índice cero comparten muchas de las buenas propiedades de las que gozan las matrices cuadradas, ya que la propiedad (2) está detrás de gran parte de tales propiedades. Hay un concepto de multiplicidad de \mathcal{L} en λ_0 , denotado por $m[\mathcal{L}; \lambda_0]$, que viene caracterizado por el siguiente resultado, que constituye el teorema principal del Capítulo 1.

Teorema 1 *Sea \mathcal{S} el conjunto de funciones de clase C^∞ definidas en un entorno de λ_0 con valores en $\Phi_0(U)$. Existe una única aplicación*

$$m[\cdot; \lambda_0] : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$$

que cumple las siguientes propiedades:

M1. *Para cualesquiera $\mathcal{L}, \mathfrak{M} \in \mathcal{S}$, $m[\mathcal{L}\mathfrak{M}; \lambda_0] = m[\mathcal{L}; \lambda_0] + m[\mathfrak{M}; \lambda_0]$.*

M2. *Existe una proyección $P_0 \in \mathcal{L}(U)$ de rango 1 tal que $m[(\lambda - \lambda_0)P_0 + I_U - P_0; \lambda_0] = 1$.*

La propiedad M1 se conoce como *fórmula del producto*. La propiedad M2 es una simple normalización. La demostración del Teorema 1 se basa en una factorización de la familia debida a R. J. Magnus [49]. Esta multiplicidad m goza, entre otras, de las siguientes propiedades, siendo todas ellas consecuencia únicamente de M1 y M2:

- $m[\mathcal{L}; \lambda_0] \in \{0, 1, \dots, \infty\}$.

- Si $\dim U < \infty$ entonces $m[\mathcal{L}; \lambda_0]$ coincide con la multiplicidad (u orden) de λ_0 como raíz de $\det \mathcal{L}$.
- $m[\mathcal{L}; \lambda_0] = 0$ si y sólo si $\mathcal{L}(\lambda_0)$ es un isomorfismo.
- $m[\mathcal{L} \oplus \mathfrak{M}; \lambda_0] = m[\mathcal{L}; \lambda_0] + m[\mathfrak{M}; \lambda_0]$, donde $\mathfrak{M} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathcal{L}(V))$, $\mathfrak{M}(\lambda_0) \in \Phi_0(V)$ y V es un \mathbb{K} -espacio de Banach.
- $m[\mathcal{L}; \lambda_0] < \infty$ si y sólo si existe un entero $k \geq 0$ tal que $(\lambda - \lambda_0)^k \mathcal{L}(\lambda)^{-1}$ existe y es acotado en un entorno perforado de λ_0 . En particular, si \mathcal{L} es analítica, Ω es conexo y $\mathcal{L}(\lambda_1)$ es isomorfismo para algún $\lambda_1 \in \Omega$ entonces $m[\mathcal{L}; \lambda] < \infty$ para todo $\lambda \in \Omega$.
- Si $T \in \mathcal{L}(U)$ y $\mathcal{L}(\lambda) := \lambda I - T$, donde I es la identidad en U , entonces

$$m[\mathcal{L}; \lambda_0] = \sup_{k \in \mathbb{N}} \dim N[(\lambda_0 I - T)^k].$$

- $m[\mathcal{L}; \lambda_0] < \infty$ si y sólo si existe un entorno abierto Ω' de λ_0 contenido en Ω tal que \mathcal{L} admite una factorización de la forma

$$\mathcal{L}(\lambda) = \mathfrak{E}(\lambda) [\mathfrak{D}(\lambda) \oplus I_{U_1}] \mathfrak{F}(\lambda), \quad \lambda \in \Omega',$$

donde $\mathfrak{E}, \mathfrak{F} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega', \mathcal{L}(U))$, $\mathfrak{E}(\lambda_0), \mathfrak{F}(\lambda_0)$ son isomorfismos, $U = U_0 \oplus U_1$ con $\dim U_0 < \infty$ y U_1 es un subespacio cerrado de U cuyo operador identidad es I_{U_1} , y $\mathfrak{D} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathcal{L}(U_0))$ se expresa, respecto de cierta base, de la forma diagonal siguiente

$$\mathfrak{D}(\lambda) = \text{diag} \{ (\lambda - \lambda_0)^{k_1}, \dots, (\lambda - \lambda_0)^{k_n} \}$$

para ciertos enteros $n \geq 0$ y $k_1, \dots, k_n \geq 1$.

- Si $\mathcal{L}(\lambda) - I$ es compacto para todo $\lambda \in \Omega$ y $m[\mathcal{L}; \lambda_0] < \infty$ entonces el índice de Leray-Schauder $\text{Ind}(\mathcal{L}(\lambda), 0)$ de $\mathcal{L}(\lambda)$ en 0 cambia cuando λ cruza λ_0 si y sólo si $m[\mathcal{L}; \lambda_0]$ es impar. Dicho de otra manera,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0^-} \text{Ind}(\mathcal{L}(\lambda), 0) = (-1)^{m[\mathcal{L}; \lambda_0]} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0^+} \text{Ind}(\mathcal{L}(\lambda), 0).$$

El concepto de multiplicidad se remonta a la escuela rusa en la década de 1940, donde se introdujo en el caso holomorfo, es decir, cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ver M. V. Keldyš [33], A. S. Markus and E. I. Sigal [53], V. M. Eni [13], I. C. Gohberg and E. I. Sigal [29], I. C. Gohberg et al. [26] y las referencias allí citadas. Su teoría está basada en las cadenas de Jordan, construcción que expondremos en el Capítulo 3.

En el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la definición es más tardía; señalamos aquí las construcciones de P. Sarreither [63], J. Ize [30], R. J. Magnus [49], J. Esquinas and J. López-Gómez [15] y J. Esquinas [14], y P. J. Rabier [58]. P. Sarreither [63] y P. J. Rabier [58] acuden a las cadenas de Jordan, como explicaremos en el Capítulo 3. J. Ize [30] se basa en una reducción finitodimensional de la familia \mathcal{L} y define la multiplicidad de \mathcal{L} como la multiplicidad del determinante de la familia reducida.

R. J. Magnus [49] define, a partir de la familia \mathcal{L} , una sucesión de familias hasta que llega a una factorización de \mathcal{L} en un producto de familias más simples, factorización que le sirve para definir su multiplicidad. Esta teoría está parcialmente explicada en el Capítulo 1. J. Esquinas and J. López-Gómez [15], J. Esquinas [14] y J. López-Gómez [43] primero definen la multiplicidad para una familia *transversalizada*, y luego caracterizan aquellas familias que pueden ser transversalizadas mediante un cambio de variable. Explicaremos esta teoría en el Capítulo 2.

Esta memoria no pretende dar una descripción exhaustiva de las distintas definiciones de multiplicidad; para ello se pueden consultar J. Esquinas [14], P. M. Fitzpatrick and J. Pejsachowicz [18], o [55]. Se conoce la equivalencia de todas estas construcciones de la multiplicidad (ver P. J. Rabier [58] y J. López-Gómez [43, Chapter 5]). Nosotros explicaremos aquellas construcciones de la multiplicidad que nos sean útiles para probar los resultados de esta memoria.

La razón de disponer de una buena definición de multiplicidad viene avalada por la multitud de aplicaciones que tiene en diversas áreas de la matemática; entre otras, las construcciones de la multiplicidad algebraica se emplean en:

- Criterios sobre el cambio de grado topológico de una familia uniparamétrica de operadores cuando el parámetro cruza un autovalor de la familia. Criterios de existencia de autovalores no-lineales en ecuaciones muy generales en el marco de la teoría de bifurcación. Consultar P. Sarreither [63], J. Ize [30], R. J. Magnus [49], J. Esquinas and J. López-Gómez [16], J. Esquinas [14], P. J. Rabier [58], P. M. Fitzpatrick and J. Pejsachowicz [19].
- Clasificación local de familias de operadores; existencia y unicidad de la forma canónica de Smith. Ver I. C. Gohberg et al. [26].
- Teoría espectral local y global de familias de operadores. Ver I. C. Gohberg et al. [26], I. Gohberg et al. [25], J. López-Gómez [43].
- Criterios de completitud de los autovectores y autovectores generalizados de operadores y de familias de operadores. Ver A. Friedman and M. Shinbro [21], I. C. Gohberg and M. G. Kreĭn [27].
- Ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes; problemas de valor inicial y de valores en la frontera. Consultar I. Gohberg et al. [25], J. T. Wloka et al. [67].
- Ecuaciones en diferencias. Ver I. Gohberg et al. [25].
- Interpolación de familias de matrices. Ver J. A. Ball et al. [7].
- Teoría de sistemas lineales y de control en ingeniería. Ver B. F. Wyman et al. [69].

En este trabajo sólo se desarrollan dos de tales aplicaciones, a saber, la construcción de forma local de Smith que veremos en el Capítulo 3, y la aplicación a la teoría de bifurcación que veremos en la Parte II.

En el Capítulo 1 daremos teoremas de unicidad de la multiplicidad. Allí probaremos, entre otros, el Teorema 1 en el cual la multiplicidad queda axiomatizada por unas pocas de sus propiedades.

Hasta ahora hemos supuesto que la familia \mathcal{L} es de clase \mathcal{C}^∞ . Ésta es una hipótesis de simplificación pero no es realmente necesaria, como veremos en el desarrollo de esta memoria. Tampoco es necesario que \mathcal{L} tome valores en $\Phi_0(U)$; basta que lo haga en $\Phi_0(U, V)$ donde V es otro espacio de Banach.

El punto de partida del Capítulo 2 es el siguiente resultado, ya clásico, debido a I. C. Gohberg and E. I. Sigal [29]; consúltese también I. Gohberg et al. [24, Chapter XI].

Teorema 2 *Sea Ω un abierto conexo de \mathbb{C} y $\mathcal{L} : \Omega \rightarrow \Phi_0(U, V)$ una función holomorfa tal que $\mathcal{L}(\lambda_1)$ es un isomorfismo para algún $\lambda_1 \in \Omega$. Entonces el conjunto de autovalores $\Sigma := \{\lambda \in \Omega : \dim N[\mathcal{L}(\lambda)] \geq 1\}$ es discreto en Ω y la función \mathcal{L}^{-1} es holomorfa en $\Omega \setminus \Sigma$. Para cada $\lambda_0 \in \Sigma$, \mathcal{L}^{-1} admite un desarrollo de Laurent*

$$\mathcal{L}(\lambda)^{-1} = \sum_{n=-k}^{\infty} \mathfrak{R}_n(\lambda - \lambda_0)^n$$

para un cierto entero $k \geq 1$. Se cumple que $\mathfrak{R}_0 \in \Phi_0(V, U)$ y \mathfrak{R}_n es de rango finito para cada $-k \leq n \leq -1$. Es más, el desarrollo de Laurent de $\mathcal{L}'\mathcal{L}^{-1}$

$$\mathcal{L}'(\lambda)\mathcal{L}(\lambda)^{-1} = \sum_{n=-k}^{\infty} \mathfrak{M}_n(\lambda - \lambda_0)^n$$

cumple que \mathfrak{M}_n tiene rango finito para cada $-k \leq n \leq -1$, y su traza vale

$$\text{tr } \mathfrak{M}_n = \begin{cases} 0 & \text{si } -k \leq n \leq -2 \\ m[\mathcal{L}; \lambda_0] & \text{si } n = -1. \end{cases}$$

El objetivo del Capítulo 2 es generalizar el Teorema 2 al caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; la familia \mathcal{L} , pues, no será necesariamente analítica, sino de clase \mathcal{C}^r para un cierto natural r .

En vistas a una generalización del Teorema 2 al caso \mathcal{C}^r , parece que lo primero que debemos hacer es precisar lo que entendemos por desarrollo de Laurent, y dar condiciones suficientes para su existencia. La factorización de \mathcal{L} debida a R. J. Magnus [49] nos proporciona la herramienta para mostrar que, cuando la multiplicidad de \mathcal{L} en λ_0 es finita, entonces \mathcal{L}^{-1} admite una expresión de la forma

$$\mathcal{L}(\lambda)^{-1} = \sum_{n=p}^q \mathfrak{R}_n(\lambda - \lambda_0)^n + o((\lambda - \lambda_0)^q)$$

para ciertos enteros $p \leq q$. Sin embargo, la construcción de R. J. Magnus [49] no permite dar un criterio que decida cuándo la multiplicidad es finita. Para ello usamos la teoría de J. Esquinas and J. López-Gómez [15], J. Esquinas [14] y J. López-Gómez [43]. La siguiente definición se debe a J. López-Gómez [43].

Definición 3 *Sea $\mathcal{L} \in \mathcal{C}^r(\Omega, \mathcal{L}(U, V))$ tal que $\mathcal{L}(\lambda_0) \in \Phi_0(U, V)$. Dado un entero $k \geq 1$ decimos que λ_0 es un autovalor k -algebraico de \mathcal{L} cuando $\mathcal{L}(\lambda)$ es un isomorfismo en un entorno perforado de λ_0 , la familia $(\lambda - \lambda_0)^k \mathcal{L}(\lambda)^{-1}$ está acotada en un entorno perforado de λ_0 y la familia $(\lambda - \lambda_0)^{k-1} \mathcal{L}(\lambda)^{-1}$ no está acotada en ningún entorno perforado de λ_0 .*

En J. López-Gómez [43, Chapter 4] se prueba que si λ_0 es un autovalor k -algebraico de $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^r(\Omega, \mathcal{L}(U, V))$ y $k \leq r$ entonces la multiplicidad $m[\mathfrak{L}; \lambda_0]$ de \mathfrak{L} en λ_0 está definida y es finita. Una vez que tenemos un desarrollo de Laurent finito de \mathfrak{L}^{-1} , podemos pasar a estudiar los coeficientes de la parte singular del desarrollo de Laurent de $\mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1}$. Esto lo hacemos primero para familias \mathfrak{L} que son *transversales* en λ_0 , concepto definido en J. Esquinas and J. López-Gómez [15], y luego se hace para familias arbitrarias, gracias al resultado de J. López-Gómez [43] según el cual una familia $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^r$ puede ser transversalizada multiplicando por la derecha por una familia de isomorfismos si y sólo si λ_0 es un autovalor k -algebraico de \mathfrak{L} para algún $k \leq r$. Con todos estos ingredientes, en el Capítulo 2 llegamos al siguiente resultado.

Teorema 4 Sean $n \geq k \geq 1$ números enteros y $\lambda_0 \in \Omega$ un autovalor k -algebraico de $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^{n+k}(\Omega, \mathcal{L}(U, V))$, con $\mathfrak{L}(\lambda_0) \in \Phi_0(U, V)$. Entonces existen $n + 1$ operadores (definidos unívocamente) $\mathfrak{R}_i \in \mathcal{L}(V, U)$, $-k \leq i \leq n - k$ tales que

$$\mathfrak{L}(\lambda)^{-1} = \sum_{i=-k}^{n-k} \mathfrak{R}_i (\lambda - \lambda_0)^i + o((\lambda - \lambda_0)^{n-k}).$$

Se cumple que $\mathfrak{R}_0 \in \Phi_0(V, U)$ y \mathfrak{R}_i es de rango finito para cada $-k \leq i \leq -1$. Además

$$\mathfrak{L}'(\lambda)\mathfrak{L}(\lambda)^{-1} = \sum_{i=-k}^{n-k} \mathfrak{M}_i (\lambda - \lambda_0)^i + o((\lambda - \lambda_0)^{n-k})$$

cumple que \mathfrak{M}_i tiene rango finito para cada $-k \leq i \leq -1$, y su traza vale

$$\text{tr } \mathfrak{M}_i = \begin{cases} 0 & \text{si } -k \leq i \leq -2 \\ m[\mathfrak{L}; \lambda_0] & \text{si } i = -1. \end{cases}$$

Estrechamente relacionados con la construcción de la multiplicidad se encuentran los conceptos de cadenas de Jordan, multiplicidades parciales y forma canónica de Smith, conceptos ciertamente antiguos que se remontan a H. J. S. Smith [65] y a F. G. Frobenius [22, 23]. Las multiplicidades parciales de \mathfrak{L} en λ_0 son un concepto más refinado que el de multiplicidad y permiten describir el comportamiento de \mathfrak{L} en un entorno de λ_0 . El punto de partida del Capítulo 3 es el siguiente resultado clásico, sacado de I. Gohberg et al. [24, Theorem XI.8.1] (ver también I. C. Gohberg and E. I. Sigal [29] e I. C. Gohberg et al. [26]).

Teorema 5 Sea $\mathfrak{L} : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(U, V)$ una función holomorfa con $\mathfrak{L}(\lambda_0) \in \Phi_0(U, V)$ y tal que $\mathfrak{L}(\lambda_1)$ es un isomorfismo para algún punto λ_1 del abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$. Entonces existe una descomposición del espacio $U = U_0 \oplus U_1$ con $\dim U_0 = \dim N[\mathfrak{L}_0] = n$, y U_1 un subespacio cerrado de U , con respecto de la cual podemos expresar

$$\mathfrak{L}(\lambda) = \mathfrak{E}(\lambda) [\mathfrak{D}(\lambda) \oplus I_{U_1}] \mathfrak{F}(\lambda), \quad \lambda \in \Omega', \quad (3)$$

para un cierto abierto Ω' con $\lambda_0 \in \Omega' \subset \Omega$ y ciertas familias $\mathfrak{D} \in \mathcal{H}(\Omega', \mathcal{L}(U_0))$, $\mathfrak{F} \in \mathcal{H}(\Omega', \mathcal{L}(U))$ y $\mathfrak{E} \in \mathcal{H}(\Omega', \mathcal{L}(U, V))$ tales que $\mathfrak{E}(\lambda_0)$, $\mathfrak{F}(\lambda_0)$ son isomorfismos; además, existe una base en U_0 con respecto de la cual \mathfrak{D} se expresa en forma diagonal

$$\mathfrak{D}(\lambda) = \text{diag} \{ (\lambda - \lambda_0)^{k_1}, \dots, (\lambda - \lambda_0)^{k_n} \} \quad (4)$$

para ciertos enteros $k_1 \geq \cdots \geq k_n \geq 1$.

La factorización (3), así como la expresión diagonal (4) reciben el nombre de forma local de Smith. Se comprueba que los enteros k_1, \dots, k_n de (4) están determinados unívocamente, y se conocen como *multiplicidades parciales* de \mathcal{L} en λ_0 . También se demuestra que la multiplicidad de \mathcal{L} en λ_0 es precisamente $k_1 + \cdots + k_n$. La demostración del Teorema 5 se basa en

- una reducción finitodimensional de la que gozan todas las familias \mathcal{L} por el mero hecho de ser $\mathcal{L}(\lambda_0)$ Fredholm de índice cero; y
- un proceso de diagonalización de matrices cuadradas dependientes de un parámetro cuya idea básica (pivotar y hacer ceros) recuerda el método de eliminación gaussiana.

En cada uno de estos dos pasos hay una reducción. En el primero, un problema infinitodimensional se reduce a uno finitodimensional. En el segundo, un proceso inductivo permite, en cada paso, ir reduciendo la dimensión del problema en una unidad hasta llegar a un problema unidimensional donde se resuelve fácilmente. Por tanto, debemos encontrar un invariante que se conserve en estos procesos y garantice que, en cada paso, la nueva familia simplificada verifique las mismas hipótesis que la original. La forma usual de hacer esto (ver, por ejemplo, P. J. Rabier [58]) es mediante las cadenas de Jordan. Sin embargo, pensamos que era conveniente disponer de otro invariante más manejable e intrínseco a la familia \mathcal{L} , y, sobre todo, que no involucrara ninguna construcción, como ocurre con las cadenas de Jordan. Finalmente, éste vino dado por el concepto de autovalor algebraico (definición 3). Para reconstruir completamente la teoría hubo que relacionar la teoría de multiplicidad dada por cadenas de Jordan y la dada por transversalización. Todo esto se hace en el Capítulo 3 y llegamos a la siguiente versión del Teorema 5, válida para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Teorema 6 *Supongamos que $\mathcal{L} \in \mathcal{C}^r(\Omega, \mathcal{L}(U, V))$ con $\mathcal{L}(\lambda_0) \in \Phi_0(U, V)$ para algún $r \in \mathbb{N}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- \mathcal{L} admite una forma local de Smith en λ_0 , es decir, existen un entorno abierto $\Omega' \subset \Omega$ de λ_0 , familias $\mathfrak{E} \in \mathcal{C}(\Omega', \mathcal{L}(U, V))$, $\mathfrak{F} \in \mathcal{C}(\Omega', \mathcal{L}(U))$ tales que $\mathfrak{E}(\lambda_0)$ y $\mathfrak{F}(\lambda_0)$ son isomorfismos, una descomposición $U = U_0 \oplus U_1$ con $\dim U_0 = \dim N[\mathcal{L}(\lambda_0)] = n$ y U_1 un subespacio cerrado de U , de tal manera que (3) y (4) para ciertos enteros $1 \leq k_1, \dots, k_n \leq r$.
- λ_0 es un autovalor k -algebraico de \mathcal{L} para un cierto $k \leq r$.
- Las longitudes de las cadenas de Jordan de \mathcal{L} en λ_0 están acotadas por $k \leq r$.
- La multiplicidad $m[\mathcal{L}; \lambda_0]$ existe y es finita.

Los capítulos 1, 2 y 3 constituyen la parte de esta memoria dedicada a la multiplicidad algebraica. Los restantes capítulos 4 y 5 tratan de la teoría de bifurcación. Éste es un tema a la vez clásico y muy activo; los artículos dedicados a esta amplia teoría son innumerables; véanse por ejemplo las referencias citadas en las monografías de J. Ize [30], S. N. Chow and J. K. Hale [9], E. Zeidler [71], W. Krawcewicz and J. Wu [37], J. López-Gómez [43], B. Buffoni and J. Toland [8], o H. Kielhöfer

[35]. Nosotros trataremos sólo dos aspectos de la teoría de bifurcación, a saber: la aplicación de la forma local de Smith a la caracterización de autovalores no-lineales, y la estimación del número de soluciones de los continuos bifurcados.

Sean U un espacio de Banach real, y $\mathcal{L} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(U))$, $\mathfrak{N} \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times U, U)$ aplicaciones tales que

(HL) $\mathcal{L}(\lambda) - I$ es compacto para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, donde I es la identidad en U .

(HN) \mathfrak{N} es compacto y $\mathfrak{N}(\lambda, u) = o(u)$ uniformemente en intervalos acotados de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Consideramos la aplicación $\mathfrak{F} : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ definida por $\mathfrak{F}(\lambda, u) := \mathcal{L}(\lambda)u + \mathfrak{N}(\lambda, u)$, y la ecuación

$$\mathfrak{F}(\lambda, u) = 0. \quad (5)$$

Es inmediato ver que $\mathfrak{F}(\lambda, 0) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Aunque simplificando mucho, se puede decir que la teoría de bifurcación estudia las soluciones de (5) que, de una manera imprecisa, *emanan* de la recta de soluciones $\mathbb{R} \times \{0\}$.

Se dirá que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un punto de bifurcación de \mathfrak{F} , o de la ecuación (5), cuando

$$(\lambda, 0) \in \overline{\mathfrak{F}^{-1}(0) \cap [\mathbb{R} \times (U \setminus \{0\})]}.$$

Se comprueba que todo punto de bifurcación λ de \mathfrak{F} es un autovalor de \mathcal{L} , es decir, $N[\mathcal{L}(\lambda)] \neq \{0\}$; el recíproco no es cierto. Un autovalor de \mathcal{L} se dirá *no-lineal* si es un punto de bifurcación de \mathfrak{F} para cualquier \mathfrak{N} que cumpla (HN). El propósito del Capítulo 4 será dar una demostración no topológica y basada en la teoría de multiplicidad de la siguiente caracterización.

Teorema 7 *Sea λ_0 un autovalor aislado de \mathcal{L} . Entonces, λ_0 es un autovalor no-lineal de \mathcal{L} si y sólo si el índice de Leray-Schauder de 0 con respecto de $\mathcal{L}(\lambda)$ cambia cuando λ cruza λ_0 , es decir,*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0^-} \text{Ind}(\mathcal{L}(\lambda), 0) \neq \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0^+} \text{Ind}(\mathcal{L}(\lambda), 0). \quad (6)$$

Los conceptos de índice y grado de Leray-Schauder serán recordados en el Capítulo 4.

La prueba de que el cambio de índice la solución 0 de $\mathcal{L}(\lambda)$ implica un fenómeno de bifurcación se remonta a los trabajos de M. A. Krasnosel'skiĭ [36]; en P. H. Rabinowitz [59], J. Ize [30], R. J. Magnus [49], H. Kielhöfer [34], y J. López-Gómez [43] se encuentran generalizaciones y posteriores desarrollos de aquel resultado pionero. La demostración de la otra implicación del Teorema 7 es más moderna. J. Esquinas and J. López-Gómez [15, 16] y J. Esquinas [14] lo hicieron en el caso en que \mathcal{L} posee la regularidad suficiente para que la multiplicidad esté definida. La demostración topológica, más general, se debe a J. Ize [31], donde usa teoría de obstrucción.

La demostración que presentamos nosotros se basa en la existencia de la forma local de Smith del Teorema 6; esto permite convertir la ecuación (5) en una ecuación más simple para la cual, si la multiplicidad de \mathcal{L} en λ_0 es par (equivalentemente, si (6) no es cierto), se puede construir explícitamente una \mathfrak{N} que cumpla (HN) para la cual la ecuación (5) no exhiba bifurcación. Esta idea está tomada de J. Esquinas and J. López-Gómez [16] y J. Esquinas [14], pero nuestra demostración es más directa.

El Capítulo 5 está dedicado a la teoría global de bifurcación. Se puede decir que esta teoría nace con el siguiente resultado de P. H. Rabinowitz [59].

Teorema 8 Sea $\mathfrak{L}(\lambda) := I - \lambda K$, $\lambda \in \mathbb{R}$, donde $K \in \mathcal{L}(U)$ es compacto e I es la identidad en U . Sea λ_0 un autovalor de K de multiplicidad impar. Entonces, la componente \mathfrak{C} de $\overline{\mathfrak{F}^{-1}(0) \cap [\mathbb{R} \times (U \setminus \{0\})]}$ que contiene a $(\lambda_0, 0)$ satisface alguna de estas alternativas:

- \mathfrak{C} es no acotado;
- $(\lambda_1, 0) \in \mathfrak{C}$ para un cierto $\lambda_1 \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_0\}$.

Por supuesto, por *componente* entendemos *componente conexa*. Poco después, E. N. Dancer [10], J. Ize [30] y R. J. Magnus [49] generalizaron este resultado de la manera siguiente. Supongamos que el conjunto Σ de autovalores de \mathfrak{L} es discreto. Sea Σ_1 el subconjunto de Σ formado por aquellos λ_0 tales que (6), y $\Sigma_0 := \Sigma \setminus \Sigma_1$. Expresamos Σ_1 como $\Sigma_1 = \{\lambda_i\}_{i=r}^s$, con $r, s \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$, $r \leq s$, y $\lambda_{i-1} < \lambda_i$ para todo $i \in \mathbb{Z} \cap [r+1, s]$. Consideramos una aplicación $P : \Sigma \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ que cumpla las siguientes propiedades:

- $P(\lambda) = 0$ si $\lambda \in \Sigma_0$.
- $P(\lambda_i)P(\lambda_{i-1}) = -1$ para todo $i \in \mathbb{Z} \cap [r+1, s]$.

Se cumple entonces la siguiente mejora del Teorema 8 probada por R. J. Magnus [49].

Teorema 9 Sea \mathfrak{C} una componente acotada de $\overline{\mathfrak{F}^{-1}(0) \cap [\mathbb{R} \times (U \setminus \{0\})]}$. Entonces

$$\sum_{(\lambda, 0) \in \mathfrak{C}} P(\lambda) = 0.$$

En el Capítulo 5 probaremos una versión general del Teorema 9 válida para espectros Σ arbitrarios, es decir, sin imponer que Σ sea discreto. Para ello debemos redefinir la función P . Sean $r, s \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$ con $r \leq s$, y $\{J_i\}_{i=r}^s$ una familia localmente finita de intervalos abiertos no vacíos tales que $J_i \cap \Sigma = \emptyset$ para todo $i \in \mathbb{Z} \cap [r, s]$. Sea $a_i \in \{-1, 1\}$ el valor de $\text{Ind}(\mathfrak{L}(\lambda), 0)$ para $\lambda \in J_i$. Se define $P : \mathbb{Z} \cap [r+1, s] \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ mediante $P(i) = (a_i - a_{i-1})/2$. Finalmente, la familia de intervalos compactos $\{I_i\}_{i=r+1}^s$ viene definida por $I_i := [\sup J_{i-1}, \inf J_i]$. Con esto se prueba la siguiente versión del Teorema 9.

Teorema 10 Sea \mathfrak{C} una componente acotada de

$$\mathfrak{G} := \left[\overline{\mathfrak{F}^{-1}(0) \cap [\mathbb{R} \times (U \setminus \{0\})]} \right] \cup \left[\left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=r}^s J_i \right) \times \{0\} \right].$$

Sea

$$\mathcal{B} := \{i \in \mathbb{Z} \cap [r+1, s] : (I_i \times \{0\}) \cap \mathfrak{C} \neq \emptyset\}. \quad (7)$$

Entonces $\sum_{i \in \mathcal{B}} P(i) = 0$.

Lo que realmente se prueba en la demostración del Teorema 10 es una fórmula del grado topológico de $\mathfrak{F}(\lambda, \cdot)$ en un abierto que contiene a $\mathfrak{C}_\lambda := \{u \in U : (\lambda, u) \in \mathfrak{C}\}$ y está suficientemente ceñido a él, para cada $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$ en términos de la aplicación P . En realidad, dicha fórmula no sólo

es válida para componentes acotadas \mathfrak{C} de \mathfrak{S} , sino también para componentes *semiacotadas*, que se definen como las componentes acotadas de $\mathfrak{S} \cap ([\Lambda, \infty) \times U)$ para un cierto $\Lambda \in \mathbb{R}$. Puesto que el grado topológico sirve, de alguna manera, para contar o estimar el número de ceros de una función, los cálculos anteriores permiten concluir lo siguiente.

Teorema 11 *Sea \mathfrak{C} una componente acotada de $\mathfrak{S} \cap ([\Lambda, \infty) \times U)$. Sean (7) y $\lambda \in [\Lambda, \infty) \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$ tal que $D_u \mathfrak{F}(\lambda, u)$ existe y es un isomorfismo para cada $u \in \mathfrak{C}_\lambda$. Entonces $\text{Card } \mathfrak{C}_\lambda$ es par y*

$$\text{Card } \mathfrak{C}_\lambda \geq 2 \left| \sum_{\substack{i \in \mathcal{B} \\ \lambda < I_i}} P(i) \right|.$$

En el Capítulo 5 este resultado y otros del mismo espíritu permiten estudiar la estructura de las componentes semiacotadas que bifurcan desde la recta de soluciones $\mathbb{R} \times \{0\}$ de la ecuación (5).

Parte I

Multiplicidad algebraica

Capítulo 1

Unicidad de la multiplicidad algebraica

Dada una familia \mathcal{L} de clase \mathcal{C}^∞ de una variable (real o compleja) cuyos valores son operadores de Fredholm de índice cero en un espacio de Banach, hay varias definiciones de multiplicidad algebraica de la familia \mathcal{L} en un punto λ_0 del parámetro donde el operador $\mathcal{L}(\lambda_0)$ deja de ser invertible. Este capítulo muestra que la multiplicidad algebraica está determinada unívocamente por unas pocas de sus propiedades, independientemente de su construcción. Este capítulo está basado en [57].

1.1. Introducción

Dados $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\lambda_0 \in \mathbb{K}$, y una función definida en un entorno de λ_0 y con valores en \mathbb{K} , la multiplicidad de f en λ_0 se define como el orden de λ_0 como cero de f . En otras palabras, se dice que la multiplicidad de f en λ_0 es un entero $k \geq 0$ si $f^{(n)}(\lambda_0) = 0$ para todo $0 \leq n < k$ y $f^{(k)}(\lambda_0) \neq 0$, mientras que la multiplicidad de f en λ_0 es infinita cuando $f^{(n)}(\lambda_0) = 0$ para todo $n \geq 0$. Aunque este concepto es bien conocido, el problema de definir una multiplicidad para familias $\mathcal{L} : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(U)$, donde Ω es un abierto de \mathbb{K} y U es un espacio de Banach sobre \mathbb{K} , es más reciente y nada trivial. Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, parece que este problema se remonta a la escuela rusa (ver A. S. Markus and E. I. Sigal [53] o I. C. Gohberg and E. I. Sigal [29] y las referencias allí citadas), mientras que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, las primeras definiciones generales se deben a P. Sarreither [63], R. J. Magnus [49] y J. Ize [30]. Desde entonces, se han venido introduciendo otros conceptos de multiplicidad algebraica que han resultado ser todos ellos equivalentes.

El principal objetivo de este capítulo es mostrar que la multiplicidad algebraica está determinada unívocamente por unas pocas de sus propiedades, independientemente de la construcción.

Una de las primeras aplicaciones de la multiplicidad algebraica generalizada fue establecer una clasificación espectral local para familias de operadores (ver I. C. Gohberg et al. [26] y las referencias allí citadas, así como el Capítulo 3 de esta tesis). En el caso real, se ha empleado con éxito en el contexto de teoría de bifurcación para estudiar el conjunto de soluciones de ecuaciones no lineales abstractas (ver J. Ize [30], R. J. Magnus [49], P. J. Rabier [58], J. López-Gómez [43] y la Parte II de esta memoria).

Este capítulo se distribuye de la siguiente manera. En la Sección 1.2 se establece el marco

general del capítulo, y se presentan los resultados relativos a la multiplicidad de R. J. Magnus [49], que prueban la existencia de una multiplicidad que cumple unos axiomas bastante naturales. Los teoremas de unicidad, que dependen esencialmente de los resultados de la Sección 1.2, se presentan en la Sección 1.3. En la Sección 1.4 repasamos brevemente algunos desarrollos más avanzados de la teoría de la multiplicidad algebraica.

1.2. La multiplicidad de R. J. Magnus

En lo que sigue, se fija un espacio de Banach U sobre $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ con $\dim U \geq 1$. Denotamos por $\mathcal{L}(U)$ al conjunto de operadores lineales y continuos de U en sí mismo, y $\Phi_0(U)$ es el conjunto de $\mathcal{L}(U)$ formado por los operadores Fredholm de índice cero. Recordemos que el producto (la composición) de dos elementos de $\Phi_0(U)$ está de nuevo en $\Phi_0(U)$ (ver por ejemplo, I. Gohberg et al. [24, Theorem XI.3.2]) y que $\Phi_0(U)$ contiene todos los elementos invertibles de $\mathcal{L}(U)$; en particular, $I_U \in \Phi_0(U)$, donde I_U representa el operador identidad en U .

Sea Ω un abierto de \mathbb{K} . Vamos a manejar familias

$$\mathfrak{L} : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(U).$$

A lo largo de este capítulo se supondrá que esta familia es de clase C^∞ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, y holomorfa si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Esta hipótesis dista de ser necesaria, pero simplifica la exposición.

A partir de ahora se reserva la letra λ para la variable de \mathbb{K} y se considera fijo un $\lambda_0 \in \mathbb{K}$. Denotamos por \mathcal{S} al conjunto de todas las familias C^∞ definidas en un entorno de λ_0 con valores en $\Phi_0(U)$; dicho entorno puede depender de la función. Tomemos $\mathfrak{L} \in \mathcal{S}$. Si $\mathfrak{L}(\lambda_0)$ no es isomorfismo, λ_0 recibe el nombre de *autovalor* de \mathfrak{L} .

El producto $\mathfrak{L}\mathfrak{M} \in \mathcal{S}$ de dos familias $\mathfrak{L}, \mathfrak{M} \in \mathcal{S}$ se define mediante $(\mathfrak{L}\mathfrak{M})(\lambda) := \mathfrak{L}(\lambda)\mathfrak{M}(\lambda)$, para cada λ perteneciente a la intersección de los dominios de definición de \mathfrak{L} y \mathfrak{M} . También, si $\mathfrak{L}(\lambda_0)$ es un isomorfismo para algún $\mathfrak{L} \in \mathcal{S}$ entonces la función $\lambda \mapsto \mathfrak{L}(\lambda)^{-1}$ está bien definida y es C^∞ en un entorno de λ_0 . Por tanto, también $\mathfrak{L}^{-1} \in \mathcal{S}$.

En este contexto, R. J. Magnus [49] probó el siguiente resultado.

Teorema 1.2.1 *Sea $\mathfrak{L} \in \mathcal{S}$. Entonces ocurre alguna de las siguientes alternativas, mutuamente excluyentes:*

- (a) $\mathfrak{L}(\lambda_0)$ es un isomorfismo.
- (b) Existen ν proyecciones de rango finito $P_1, \dots, P_\nu \in \mathcal{L}(U) \setminus \{0\}$, para algún entero $\nu \geq 1$, tales que

$$\mathfrak{L}(\lambda) = \mathfrak{M}(\lambda) [(\lambda - \lambda_0)P_1 + I_U - P_1] \cdots [(\lambda - \lambda_0)P_\nu + I_U - P_\nu], \quad \lambda \simeq \lambda_0, \quad (1.1)$$

para una cierta familia $\mathfrak{M} \in \mathcal{S}$ que toma valores invertibles.

- (c) Para cada entero $\nu \geq 1$ existen ν proyecciones de rango finito $P_1, \dots, P_\nu \in \mathcal{L}(U) \setminus \{0\}$ y una familia $\mathfrak{M} \in \mathcal{S}$ tal que se cumple (1.1).

Es más, en el caso (b), el número $\sum_{i=1}^{\nu} \text{rank } P_i$ es independiente de las proyecciones P_1, \dots, P_{ν} escogidas.

Por supuesto, para cualquier $T \in \mathcal{L}(U)$, $\text{rank } T$ representa la dimensión de la imagen de T . Con esta teorema tiene sentido la siguiente definición debida a R. J. Magnus [49].

Definición 1.2.2 Siguiendo las notaciones del Teorema 1.2.1, la multiplicidad de \mathcal{L} en λ_0 se define por

$$\mu[\mathcal{L}; \lambda_0] := \begin{cases} 0 & \text{si ocurre (a),} \\ \sum_{i=1}^{\nu} \text{rank } P_i & \text{si ocurre (b),} \\ \infty & \text{si ocurre (c).} \end{cases}$$

Cuando lo veamos conveniente, escribiremos explícitamente la variable λ de la familia \mathcal{L} y así pondremos $\mu[\mathcal{L}(\lambda); \lambda_0]$ para referirnos a $\mu[\mathcal{L}; \lambda_0]$.

Se dispone de algunas otras definiciones de multiplicidad algebraica en la literatura. Entre ellas recordamos las construcciones de J. Ize [30], P. J. Rabier [58] y J. Esquinas and J. López-Gómez [15]. En P. J. Rabier [58] y en J. López-Gómez [43, Chapter 5] se prueba la equivalencia de estas cuatro multiplicidades. Véase también el Capítulo 3, donde demostramos la equivalencia de las construcciones de [58] y de [43].

Proposición 1.2.3 La multiplicidad de acuerdo a la Definición 1.2.2 verifica las siguientes propiedades:

M0. Para todo $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$, $\mu[\mathcal{L}; \lambda_0] \in \{0, 1, \dots, \infty\}$.

M1. Para cualesquiera $\mathcal{L}, \mathfrak{M} \in \mathcal{S}$, $\mu[\mathcal{L}\mathfrak{M}; \lambda_0] = \mu[\mathcal{L}; \lambda_0] + \mu[\mathfrak{M}; \lambda_0]$.

M2. Para cualquier $P \in \mathcal{L}(U)$ proyección de rango uno, $\mu[(\lambda - \lambda_0)P + I_U - P; \lambda_0] = 1$.

M3. Para cada $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ tal que $\mathcal{L}(\lambda_0)$ es un isomorfismo, $\mu[\mathcal{L}; \lambda_0] = 0$.

Demostración. Las propiedades M0 y M3 se siguen directamente de la Definición 1.2.2. La propiedad M1 está probada en R. J. Magnus [49, Theorem 2.4], mientras que M2 sale de la Definición 1.2.2, ya que se cumple (b) del Teorema 1.2.1 con $\nu = 1$, $P_1 = P$ y $\mathfrak{M}(\lambda) = I_U$. ■

1.3. Los teoremas de unicidad

Esta es la sección central de este capítulo, y está dedicada a los enunciados y las demostraciones de los teoremas de unicidad de la multiplicidad algebraica.

Primero vemos un resultado auxiliar sobre las proyecciones de rango finito en un espacio de Banach. La propiedad (familiar en dimensión finita) según la cual todas las proyecciones de rango uno son similares se generaliza aquí a dimensión infinita.

Lema 1.3.1 Sean $P, Q \in \mathcal{L}(U)$ dos proyecciones de rango uno. Entonces existe un isomorfismo $T \in \mathcal{L}(U)$ tal que $P = TQT^{-1}$.

Demostración. Como $P, Q \in \mathcal{L}(U)$ son proyecciones, tenemos las descomposiciones en suma directa

$$U = N[P] \oplus R[P] = N[Q] \oplus R[Q].$$

Tomemos $p \in R[P] \setminus \{0\}$ y $q \in R[Q] \setminus \{0\}$. A fin de construir el isomorfismo T distinguimos dos casos. En el primero se supone $N[P] = N[Q]$. Entonces definimos el operador

$$T : N[Q] \oplus R[Q] \rightarrow N[P] \oplus R[P]$$

como el único operador T que cumple

$$T|_{N[Q]} = I|_{N[Q]} = I|_{N[P]}, \quad Tq = p,$$

donde I es el operador identidad. Entonces $T \in \mathcal{L}(U)$ es un isomorfismo y $PT = TQ$.

Ahora supongamos $N[P] \neq N[Q]$. En el espacio de Banach $N[P]$ consideramos su subespacio cerrado $N[P] \cap N[Q]$, que tiene codimensión uno; en efecto, como Q tiene rango uno, podemos expresar

$$Qu = f(u)q, \quad u \in U, \tag{1.2}$$

para un cierto $f \in U' \setminus \{0\}$, donde U' es el dual topológico de U (ver por ejemplo, T. Kato [32, Section III. §4.3]). Entonces $f|_{N[P]} \in N[P]' \setminus \{0\}$. En efecto, es claro que $f|_{N[P]}$ es una forma lineal y continua en $N[P]$, y además, $f|_{N[P]} \neq 0$ ya que $N[P] \neq N[Q]$ y se cumple (1.2). Entonces

$$N[P] \cap N[Q] = \{u \in N[P] : f|_{N[P]}(u) = 0\}$$

es un hiperplano cerrado de $N[P]$. Por tanto, $N[P] \cap N[Q]$ posee un complemento topológico unidimensional en $N[P]$, digamos, U_0 . Por la misma razón, $N[P] \cap N[Q]$ admite un complemento topológico unidimensional en $N[Q]$, digamos, U_1 ,

$$N[P] = (N[P] \cap N[Q]) \oplus U_0, \quad N[Q] = (N[P] \cap N[Q]) \oplus U_1.$$

Tomemos $u_0 \in U_0 \setminus \{0\}$ y $u_1 \in U_1 \setminus \{0\}$. Definimos el operador

$$T : (N[P] \cap N[Q]) \oplus U_1 \oplus R[Q] \rightarrow (N[P] \cap N[Q]) \oplus U_0 \oplus R[P]$$

como el único operador T que cumple

$$T|_{N[P] \cap N[Q]} = I|_{N[P] \cap N[Q]}, \quad Tu_1 = u_0, \quad Tq = p.$$

Entonces $T \in \mathcal{L}(U)$ es un isomorfismo y $PT = TQ$. ■

El enunciado del Lema 1.3.1 sigue siendo cierto (con similar demostración) si suponemos que P, Q son proyecciones del mismo rango finito, pero dicha generalización no la vamos a usar.

Presentamos ahora el primero de los teoremas de unicidad.

Teorema 1.3.2 *Existe una única función*

$$m[\cdot; \lambda_0] : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$$

que cumple las siguientes propiedades:

M1. Para cualesquiera $\mathfrak{L}, \mathfrak{M} \in \mathcal{S}$, $m[\mathfrak{L}\mathfrak{M}; \lambda_0] = m[\mathfrak{L}; \lambda_0] + m[\mathfrak{M}; \lambda_0]$.

M2. Existe una proyección de rango uno $P_0 \in \mathcal{L}(U)$ con $m[(\lambda - \lambda_0)P_0 + I_U - P_0; \lambda_0] = 1$.

Demostración. La existencia de la función $m[\cdot; \lambda_0]$ está garantizada por la Proposición 1.2.3 y porque, gracias a que $\dim U \geq 1$ y al teorema de Hahn-Banach, hay proyecciones de rango uno. El resto de la demostración trata de la unicidad.

Sea $m[\cdot; \lambda_0]$ cualquier función que cumpla M1–M2. Se verifican entonces las siguientes propiedades:

P1. Si $\mathfrak{L} \in \mathcal{S}$ y $\mathfrak{L}(\lambda_0)$ es invertible entonces $m[\mathfrak{L}; \lambda_0] = 0$.

P2. Si $P \in \mathcal{L}(U)$ es una proyección de rango uno entonces $m[(\lambda - \lambda_0)P + I_U - P; \lambda_0] = 1$.

P3. Si $P \in \mathcal{L}(U) \setminus \{0\}$ es una proyección de rango finito entonces $m[(\lambda - \lambda_0)P + I_U - P; \lambda_0] = \text{rank } P$.

Probemos P1. Sea P_0 el operador que aparece en M2, y sea $\mathfrak{L} \in \mathcal{S}$ tal que $\mathfrak{L}(\lambda_0)$ es invertible. Entonces, por M2 y M1 tenemos

$$1 = m[(\lambda - \lambda_0)P_0 + I_U - P_0; \lambda_0] = 1 + m[\mathfrak{L}; \lambda_0] + m[\mathfrak{L}^{-1}; \lambda_0].$$

Como $m[\cdot; \lambda_0] \geq 0$, entonces $m[\mathfrak{L}; \lambda_0] = 0$, lo que pretendíamos.

Probemos ahora P2. Sea $P \in \mathcal{L}(U)$ una proyección de rango uno. Por el Lema 1.3.1, existe un operador invertible $T \in \mathcal{L}(U)$ tal que $P = TP_0T^{-1}$, donde P_0 es la proyección que aparece en M2. Entonces

$$(\lambda - \lambda_0)P + I_U - P = T [(\lambda - \lambda_0)P_0 + I_U - P_0] T^{-1},$$

luego $m[(\lambda - \lambda_0)P + I_U - P; \lambda_0] = 1$, gracias a M1, P1 y M2, lo que prueba P2.

Probemos ahora P3. Tomemos $P \in \mathcal{L}(U)$ una proyección de rango $n \geq 1$ finito; entonces podemos encontrar n proyecciones de rango uno mutuamente disjuntas, digamos $\Pi_1, \dots, \Pi_n \in \mathcal{L}(U)$ tales que $P = \sum_{i=1}^n \Pi_i$. Por consiguiente,

$$(\lambda - \lambda_0)P + I_U - P = [(\lambda - \lambda_0)\Pi_1 + I_U - \Pi_1] \cdots [(\lambda - \lambda_0)\Pi_n + I_U - \Pi_n]$$

y, gracias a M1 y P2, obtenemos

$$m[(\lambda - \lambda_0)P + I_U - P; \lambda_0] = \sum_{i=1}^n m[(\lambda - \lambda_0)\Pi_i + I_U - \Pi_i; \lambda_0] = n.$$

Ya tenemos todos los ingredientes necesarios para demostrar la unicidad. Tomemos un $\mathfrak{L} \in \mathcal{S}$ y consideremos las opciones (a), (b), (c) del Teorema 1.2.1. Si ocurre (a), tendríamos por P1 que $m[\mathfrak{L}; \lambda_0] = 0$.

Supongamos que ocurre (b) del Teorema 1.2.1. Entonces \mathfrak{L} se puede factorizar según (1.1), donde $P_1, \dots, P_\nu \in \mathcal{L}(U) \setminus \{0\}$ son proyecciones de rango finito y $\mathfrak{M} \in \mathcal{S}$ es invertible en λ_0 . Con esto vemos que

$$m[\mathfrak{L}; \lambda_0] = m[\mathfrak{M}; \lambda_0] + \sum_{i=1}^{\nu} m[(\lambda - \lambda_0)P_i + I_U - P_i; \lambda_0] = \sum_{i=1}^{\nu} \text{rank } P_i,$$

gracias a M1, P1 y P3.

Supongamos, por último, que ocurre (c) del Teorema 1.2.1. Entonces, para cada entero $\nu \geq 1$ la familia \mathfrak{L} se factoriza como (1.1), donde $P_1, \dots, P_\nu \in \mathcal{L}(U) \setminus \{0\}$ son proyecciones de rango finito y $\mathfrak{M} \in \mathcal{S}$. Así pues,

$$m[\mathfrak{L}; \lambda_0] = m[\mathfrak{M}; \lambda_0] + \sum_{i=1}^{\nu} \text{rank } P_i \geq \nu,$$

debido a M1, P3 y a que $m[\cdot; \lambda_0] \geq 0$. Como $\nu \geq 1$ es arbitrario, esto prueba que $m[\mathfrak{L}; \lambda_0] = \infty$ y concluye la demostración. ■

Para ciertos fines (véanse [55] o [57]), a veces es más conveniente una versión ligeramente distinta de este teorema. Necesitamos para ello la siguiente notación. Definimos \mathcal{T} como el subconjunto de \mathcal{S} formado por aquellas familias \mathfrak{L} con multiplicidad finita μ en λ_0 ,

$$\mathcal{T} := \{\mathfrak{L} \in \mathcal{S} : \mu[\mathfrak{L}; \lambda_0] < \infty\}.$$

La propiedad M1 de la Proposición 1.2.3 implica que el producto de dos elementos de \mathcal{T} vuelve a pertenecer a \mathcal{T} . Es más, la Definición 1.2.2 nos muestra que el conjunto $\mathcal{S} \setminus \mathcal{T}$ consta de aquellas familias \mathfrak{L} para las que ocurre la alternativa (c) del Teorema 1.2.1. Con esto, presentamos el segundo teorema de unicidad.

Teorema 1.3.3 *Existe una única función*

$$m[\cdot; \lambda_0] : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

que cumple las siguientes propiedades:

M1. Para cualesquiera $\mathfrak{L}, \mathfrak{M} \in \mathcal{T}$, $m[\mathfrak{L}\mathfrak{M}; \lambda_0] = m[\mathfrak{L}; \lambda_0] + m[\mathfrak{M}; \lambda_0]$.

M2. Existe una proyección de rango uno $P_0 \in \mathcal{L}(U)$ con $m[(\lambda - \lambda_0)P_0 + I_U - P_0; \lambda_0] = 1$.

M3. Si $\mathfrak{L} \in \mathcal{T}$ y $\mathfrak{L}(\lambda_0)$ es un isomorfismo entonces $m[\mathfrak{L}; \lambda_0] = 0$.

Demostración. La demostración es realmente parecida a la del Teorema 1.3.2, y por ello sólo será esbozada. La existencia de la función $m[\cdot; \lambda_0]$ está garantizada por la Proposición 1.2.3. Para probar la unicidad, sea $m[\cdot; \lambda_0]$ una función que cumpla M1–M3. Las siguientes propiedades se comprueban sin dificultad:

- Si $P \in \mathcal{L}(U)$ es una proyección de rango uno entonces $m[(\lambda - \lambda_0)P + I_U - P; \lambda_0] = 1$.
- Si $P \in \mathcal{L}(U) \setminus \{0\}$ es una proyección de rango finito entonces $m[(\lambda - \lambda_0)P + I_U - P; \lambda_0] = \text{rank } P$.

Ahora consideramos la alternativa del Teorema 1.2.1. Ya hemos visto que sólo pueden ocurrir las opciones (a), (b) del Teorema 1.2.1. El resto de la demostración sigue la del Teorema 1.3.2 palabra por palabra. ■

Nótese que en el Teorema 1.3.3 el conjunto $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ donde $m[\cdot; \lambda_0]$ toma sus valores no desempeña ningún papel esencial. Se puede sustituir por cualquier otro semigrupo que contenga a $\{0, 1, \dots\}$ como sub-semigrupo.

El Teorema 1.3.3 pudiera parecer poco satisfactorio a menos que se tenga un criterio explícito que distinga cuándo una familia $\mathfrak{L} \in \mathcal{S}$ pertenece a \mathcal{T} . Esto se hace en el siguiente teorema, debido a J. López-Gómez [43, Chapter 5]. Véase también el Capítulo 3 de esta tesis.

Teorema 1.3.4 *Sea $\mathfrak{L} \in \mathcal{S}$. Entonces, $\mathfrak{L} \in \mathcal{T}$ si y sólo si existen $\delta > 0$, $C > 0$ y un entero $k \geq 1$ tales que para cada $0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta$ el operador $\mathfrak{L}(\lambda)$ es un isomorfismo y $\|\mathfrak{L}(\lambda)^{-1}\| \leq C|\lambda - \lambda_0|^{-k}$.*

Presentamos ahora, sin demostración, otro resultado de unicidad que ha sido probado en [55] y en [56], en el que se usa la forma local de Smith que explicaremos en el Capítulo 3. Necesitamos la siguiente notación. Para cualquier espacio de Banach U , $\text{Sub}(U)$ designa el conjunto de todos los subespacios lineales cerrados no nulos de U con o bien dimensión finita o bien codimensión finita, y \mathcal{S}_U representa el conjunto de todas las familias \mathcal{C}^∞ definidas en un entorno de λ_0 con valores en $\Phi_0(U)$.

Teorema 1.3.5 *Sea U un espacio de Banach y supongamos que existe una función*

$$m[\cdot; \lambda_0] : \bigcup_{V \in \text{Sub}(U)} \mathcal{S}_V \rightarrow [0, \infty]$$

que cumple las siguientes propiedades:

M1. *Para cualesquiera $V \in \text{Sub}(U)$ y $\mathfrak{E}, \mathfrak{L}, \mathfrak{F} \in \mathcal{S}_V$,*

$$m[\mathfrak{E}\mathfrak{L}\mathfrak{F}; \lambda_0] \geq m[\mathfrak{L}; \lambda_0].$$

M2. *Si $V \in \text{Sub}(U)$ tiene dimensión uno, entonces $m[(\lambda - \lambda_0)^n I_V; \lambda_0] = n$ para cualquier entero $n \geq 1$.*

M3. *Existe $\mathfrak{L} \in \mathcal{S}_U$ tal que $m[\mathfrak{L}; \lambda_0] = 0$.*

M4. *Si $V \in \text{Sub}(U)$ cumple $V = V_1 \oplus V_2$ para ciertos $V_1, V_2 \in \text{Sub}(V)$ y $\mathfrak{L}_i \in \mathcal{S}_{V_i}$ para $i = 1, 2$ entonces*

$$m[\mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2; \lambda_0] = m[\mathfrak{L}_1; \lambda_0] + m[\mathfrak{L}_2; \lambda_0].$$

Entonces para cualesquiera $V \in \text{Sub}(U)$ y $\mathfrak{L} \in \mathcal{S}_V$,

$$m[\mathfrak{L}; \lambda_0] = \mu[\mathfrak{L}; \lambda_0].$$

En [57] y [55] estos teoremas de unicidad se utilizan para probar algunas fórmulas explícitas para la multiplicidad.

1.4. Desarrollos ulteriores de la multiplicidad algebraica

En este capítulo se ha definido la multiplicidad para familias \mathcal{C}^∞ . Esta hipótesis se puede simplificar fácilmente, como explicaremos en los Capítulos 2 y 3. Allí la multiplicidad estará definida para funciones \mathcal{C}^r , donde r es “suficientemente grande” dependiendo del comportamiento de \mathcal{L} (o, equivalentemente, de \mathcal{L}^{-1}) cerca del punto λ_0 donde se pretende definir la multiplicidad.

Una generalización fácil consiste también en definir una multiplicidad para familias cuyos valores están en $\Phi_0(U, V)$ en vez de $\Phi_0(U)$, donde V es otro espacio de Banach. El que $\Phi_0(U, V)$ sea no vacío implica que U y V son isomorfos, luego se puede definir fácilmente una multiplicidad para este tipo de funciones.

Cuando los valores de la familia son Fredholm de índice arbitrario, se puede llevar a cabo una construcción similar. Véanse R. Magnus [51] e I. C. Gohberg et al. [26]. En este último se muestra que las multiplicidades parciales junto con el índice de Fredholm constituyen un conjunto óptimo de invariantes para describir el comportamiento local de la familia cerca del punto.

También hay definiciones de multiplicidad para familias cuyos valores son operadores lineales no necesariamente continuos. Entre ellas, recordemos la construcción de B. Laloux and J. Mawhin [39, 40]. Ellos definen una noción de multiplicidad de un valor característico $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ de un par (L, A) , donde U, V son espacios normados, L es un operador Fredholm de índice cero de U en V no necesariamente continuo, $A \in \mathcal{L}(U, V)$ goza de ciertas propiedades de compacidad y $A(N[L] \setminus \{0\}) \cap R[L] = \emptyset$. En el lenguaje usado en este capítulo, esto equivale a definir una multiplicidad para la familia $\mathcal{L}(\lambda) := L - \lambda A$ en un autovalor λ_0 bajo las hipótesis recién mencionadas.

Finalmente, se dispone de una nada trivial extensión de la teoría de multiplicidad para familias cuyos valores son operadores lineales arbitrarios (no necesariamente Fredholm). En concreto, hay una teoría satisfactoria para familias holomorfas definidas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ con valores en $\mathcal{L}(U)$, donde U es un espacio de Banach complejo. Esta teoría está fuera de los objetivos de este trabajo. El lector interesado debe consultar R. Magnus [50], J. Arason and R. Magnus [4, 5, 6], y [52].

Capítulo 2

Desarrollos de Laurent de la inversa y residuos logarítmicos

Este capítulo generaliza al caso real (no analítico) algunas propiedades locales (en un entorno de un autovalor) de familias de operadores de Fredholm de índice cero que son clásicas en el caso holomorfo. Sean U, V dos espacios de Banach, y \mathcal{L} una familia suficientemente regular de un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}$ a $\mathcal{L}(U, V)$ tal que $\mathcal{L}(\lambda_0) \in \Phi_0(U, V)$ para un cierto $\lambda_0 \in \Omega$. Supongamos que \mathcal{L} tiene multiplicidad finita en λ_0 . Mostramos entonces que \mathcal{L}^{-1} posee un desarrollo de Laurent finito en λ_0 , es decir, \mathcal{L}^{-1} admite una expresión del siguiente estilo

$$\mathcal{L}(\lambda)^{-1} = \sum_{n=-k}^p \mathfrak{R}_n (\lambda - \lambda_0)^n + o((\lambda - \lambda_0)^p)$$

para ciertos enteros $k \geq 0$, $p \geq -k$, y ciertos $\mathfrak{R}_n \in \mathcal{L}(V, U)$, con $-k \leq n \leq p$. Una vez que se tiene un desarrollo de Laurent, se puede definir un residuo logarítmico de manera natural como el coeficiente $(\lambda - \lambda_0)^{-1}$ del desarrollo de Laurent de $\mathcal{L}'\mathcal{L}^{-1}$ en λ_0 . Mostramos entonces que la traza de este operador de rango finito es precisamente la multiplicidad de \mathcal{L} en λ_0 . Este capítulo está basado en [46].

2.1. Introducción

A lo largo de este capítulo, U, V y W serán espacios de Banach sobre $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$; el conjunto de los operadores lineales y continuos de U en V se denota por $\mathcal{L}(U, V)$, y $\Phi_0(U, V)$ representa el subconjunto de $\mathcal{L}(U, V)$ formado por los operadores Fredholm de índice cero. Nuestro principal objetivo es analizar ciertas propiedades locales de funciones $\mathcal{L} \in \mathcal{C}^r(\Omega, \Phi_0(U, V))$ en un autovalor $\lambda_0 \in \Omega \subset \mathbb{K}$. Por *autovalor* de \mathcal{L} entendemos un valor λ_0 para el cual $\mathcal{L}(\lambda_0)$ no es invertible. El conjunto de autovalores de \mathcal{L} será denotado por Σ . Estamos, por tanto, considerando dos clases de aplicaciones: familias holomorfas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, y familias \mathcal{C}^r si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Un autovalor aislado λ_0 se dice *autovalor algebraico* de \mathcal{L} si existen $C > 0$ y un entero $k \geq 1$ tales que

$$\|\mathcal{L}(\lambda)^{-1}\| \leq C|\lambda - \lambda_0|^{-k}, \quad \lambda \simeq \lambda_0, \quad \lambda \neq \lambda_0. \quad (2.1)$$

El concepto de autovalor algebraico fue introducido por J. López-Gómez [43] en conexión con una multiplicidad algebraica generalizada, que denotaremos por $\chi[\mathcal{L}; \lambda_0]$, que se remonta a J. Esquinas [14] y J. Esquinas and J. López-Gómez [16], que resulta un invariante óptimo en teoría de bifurcación local y global; véase también la Parte II de esta memoria. Se sabe que esta multiplicidad es la única que verifica los axiomas del Capítulo 1.

El primer resultado de este capítulo muestra que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces esta multiplicidad algebraica $\chi[\mathcal{L}; \lambda_0]$ viene dada por la traza del residuo logarítmico de la familia \mathcal{L} en el autovalor λ_0 , es decir,

$$\chi[\mathcal{L}; \lambda_0] = \operatorname{tr} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \mathcal{L}'(\lambda) \mathcal{L}(\lambda)^{-1} d\lambda, \quad (2.2)$$

donde γ es cualquier curva de Jordan rectificable que rodea a λ_0 en $\Omega \setminus \Sigma$, positivamente orientada y homótopa a λ_0 en $\Omega \setminus \Sigma$. Es más, la traza de los demás coeficientes singulares del desarrollo de Laurent de $\mathcal{L}'\mathcal{L}^{-1}$ en λ_0 es cero. Esto prueba que $\chi[\cdot; \lambda_0]$ coincide con la multiplicidad descrita en I. C. Gohberg and E. I. Sigal [29].

La principal contribución de este capítulo consiste en extender este resultado a familias reales $\mathcal{L} \in \mathcal{C}^r$ bajo la hipótesis (2.1). Se sabe que si \mathcal{L} es holomorfa, Ω es conexo y $\mathcal{L}(\lambda_1)$ es invertible para algún $\lambda_1 \in \Omega$, entonces el conjunto Σ de autovalores es discreto en Ω y todo $\lambda_0 \in \Sigma$ es un autovalor algebraico de \mathcal{L} . Este capítulo muestra que (2.1) es el único requerimiento para reconstruir toda la teoría holomorfa. En particular, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, λ_0 es un autovalor algebraico de $\mathcal{L} \in \mathcal{C}^r$, de tal manera que se cumpla (2.1), y $r \geq 2k - 1$, entonces

$$\mathcal{L}'(\lambda) \mathcal{L}(\lambda)^{-1} = \sum_{i=-k}^{-1} \mathfrak{R}_i (\lambda - \lambda_0)^i + o((\lambda - \lambda_0)^{-1}), \quad \lambda \simeq \lambda_0, \quad \lambda \neq \lambda_0, \quad (2.3)$$

donde todos los operadores \mathfrak{R}_i con $-k \leq i \leq -1$ tienen rango finito y

$$\chi[\mathcal{L}; \lambda_0] = \operatorname{tr} \mathfrak{R}_{-1}, \quad 0 = \operatorname{tr} \mathfrak{R}_i, \quad -k \leq i \leq -2. \quad (2.4)$$

Describimos ahora la distribución de este capítulo. En la Sección 2.2 fijamos ciertas notaciones y explicamos la teoría de transversalización y de la multiplicidad algebraica χ de J. López-Gómez [43]. En la Sección 2.3 presentamos un resultado clásico sobre el desarrollo de Laurent de la inversa de una aplicación holomorfa de operadores de Fredholm de índice cero (véase, por ejemplo, I. Gohberg et al. [24]). La Sección 2.4 recoge algunas propiedades conocidas sobre el concepto de traza (consúltese, por ejemplo, T. Kato [32]) y enseña ciertas propiedades de la traza de los coeficientes de Laurent de un producto de funciones cuyos valores son operadores. En la Sección 2.5 obtenemos (2.2), mostrando así que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces $\chi[\mathcal{L}; \lambda_0]$ es la misma multiplicidad que la descrita en I. C. Gohberg and E. I. Sigal [29]. El resto de las secciones tratan del caso real no analítico. En la Sección 2.6 probamos la existencia de un desarrollo de Laurent finito de \mathcal{L}^{-1} en un autovalor algebraico de \mathcal{L} . En la Sección 2.7 usamos la teoría de transversalización para probar (2.4). La Sección 2.8 generaliza (sin demostraciones) al caso real algunos resultados conocidos en el contexto de familias polinomiales (véase, por ejemplo, I. Gohberg et al. [25]) que relacionan los coeficientes de la expansión (2.3) con las cadenas de Jordan de \mathcal{L} en λ_0 . Finalmente, en la Sección 2.9 vemos un ejemplo que proviene de una ecuación diferencial ordinaria, en el cual el desarrollo de Laurent se puede calcular explícitamente.

2.2. La multiplicidad de J. Esquinas y J. López-Gómez

Además de las notaciones generales introducidas en la Sección 2.1, para cualquier espacio de Banach U , I_U representará la identidad en U , y, para cualquier elemento $T \in \mathcal{L}(U, V)$, denotaremos por $N[T]$ al núcleo de T , y por $R[T]$ a la imagen de T . En lo que sigue, fijamos un $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ y un entorno abierto Ω de λ_0 en \mathbb{K} , y trabajaremos con una familia de operadores

$$\mathfrak{L} : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(U, V)$$

tal que $\mathfrak{L}(\lambda_0) \in \Phi_0(U, V)$. Como el análisis llevado a cabo a lo largo de este capítulo es local, podemos suponer que

$$\mathfrak{L}(\Omega) \subset \Phi_0(U, V),$$

ya que $\Phi_0(U, V)$ es un abierto de $\mathcal{L}(U, V)$ (véanse, por ejemplo, T. Kato [32, Theorem IV.5.17], o I. Gohberg et al. [24, Theorem XI.4.1]). Como es usual, para cualquier entero $r \geq 1$, $\mathcal{C}^r(\Omega, \Phi_0(U, V))$ representa el espacio de aplicaciones de clase \mathcal{C}^r de Ω a $\Phi_0(U, V)$, y $\mathcal{H}(\Omega, \Phi_0(U, V))$ denota el espacio de funciones holomorfas de Ω a $\Phi_0(U, V)$. Para cualquier familia \mathfrak{L} de clase \mathcal{C}^r usaremos la siguiente notación

$$\mathfrak{L}_j := \frac{1}{j!} \mathfrak{L}^{(j)}(\lambda_0), \quad 0 \leq j \leq r,$$

es decir, \mathfrak{L}_j es el coeficiente j -ésimo del desarrollo de Taylor de \mathfrak{L} alrededor de λ_0 . Por supuesto, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ entonces $\mathcal{C}^r(\Omega, \Phi_0(U, V))$ es lo mismo que $\mathcal{H}(\Omega, \Phi_0(U, V))$.

Ahora recogemos los principales conceptos y resultados relativos a la multiplicidad algebraica introducida en J. Esquinas [14] y J. Esquinas and J. López-Gómez [16], y mejorada en J. López-Gómez [43]; las demostraciones detalladas de todos estos resultados se pueden encontrar en [43, Chapters 4 and 5], donde se supone que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pero las mismas construcciones y demostraciones siguen siendo válidas para cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. A lo largo de esta sección suponemos que $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^r(\Omega, \Phi_0(U, V))$ para un cierto $r \geq 1$.

Definición 2.2.1 *Dado un entero $1 \leq k \leq r$, se dice que λ_0 es un autovalor k -transversal de la familia \mathfrak{L} si*

$$\bigoplus_{j=1}^k \mathfrak{L}_j(N[\mathfrak{L}_0] \cap \cdots \cap N[\mathfrak{L}_{j-1}]) \oplus R[\mathfrak{L}_0] = V, \quad (2.5)$$

y

$$\mathfrak{L}_k(N[\mathfrak{L}_0] \cap \cdots \cap N[\mathfrak{L}_{k-1}]) \neq \{0\}.$$

El entero k recibe el nombre de orden de transversalidad de \mathfrak{L} en λ_0 , que claramente es único.

Por supuesto, un autovalor *transversal* será un autovalor k -transversal para algún entero k .

Definición 2.2.2 *Supongamos que λ_0 es un autovalor k -transversal de \mathfrak{L} . Entonces la multiplicidad algebraica de \mathfrak{L} en λ_0 se define como*

$$\chi[\mathfrak{L}; \lambda_0] := \sum_{j=1}^k j \cdot \dim \mathfrak{L}_j(N[\mathfrak{L}_0] \cap \cdots \cap N[\mathfrak{L}_{j-1}]).$$

El siguiente concepto caracteriza cuándo una familia \mathfrak{L} puede ser transversalizada por medio de un cambio de variable.

Definición 2.2.3 *El autovalor λ_0 se dice un autovalor algebraico de \mathfrak{L} si existen $\delta > 0$, $C > 0$ y un entero $k \geq 0$ tales que para cada λ que cumpla $0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta$ el operador $\mathfrak{L}(\lambda)$ es un isomorfismo, y*

$$\|\mathfrak{L}(\lambda)^{-1}\| \leq C |\lambda - \lambda_0|^{-k}. \quad (2.6)$$

El menor entero $k \geq 0$ para el cual se cumple esta estimación se llama el orden de λ_0 . Decimos entonces que λ_0 es k -algebraico para \mathfrak{L} . También, se dirá que λ_0 es 0-algebraico cuando \mathfrak{L}_0 es un isomorfismo.

El siguiente resultado nos permite extender el concepto de multiplicidad introducido en la Definición 2.2.2 al caso de familias generales de operadores (véase J. López-Gómez [43, Chapters 4 and 5]).

Teorema 2.2.4 *Sea $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^r(\Omega, \Phi_0(U, V))$. Entonces:*

1. *Si λ_0 es un autovalor k -algebraico de \mathfrak{L} con $0 \leq k < r + 1$, entonces existe una familia polinomial de operadores $\Phi : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{L}(U)$ tal que $\Phi(\lambda_0) = I_U$ y λ_0 es un autovalor k -transversal de $\mathfrak{L}\Phi$.*
2. *Para cualesquiera dos aplicaciones $\Phi, \Psi \in \mathcal{C}^r(\Omega, \mathcal{L}(U))$ que cumplan lo siguiente:*
 - a) $\Phi(\lambda_0)$ y $\Psi(\lambda_0)$ son isomorfismos,
 - b) λ_0 es un autovalor k_1 -transversal de $\mathfrak{L}^\Phi := \mathfrak{L}\Phi$ para algún $1 \leq k_1 \leq r$,
 - c) λ_0 es un autovalor k_2 -transversal de $\mathfrak{L}^\Psi := \mathfrak{L}\Psi$ para algún $1 \leq k_2 \leq r$,

se tiene que $k_1 = k_2$ y, para cada $1 \leq j \leq k_1 = k_2$,

$$\dim \mathfrak{L}_j^\Phi \left(\bigcap_{i=0}^{j-1} N[\mathfrak{L}_i^\Phi] \right) = \dim \mathfrak{L}_j^\Psi \left(\bigcap_{i=0}^{j-1} N[\mathfrak{L}_i^\Psi] \right).$$

En particular, $\chi[\mathfrak{L}^\Phi; \lambda_0] = \chi[\mathfrak{L}^\Psi; \lambda_0]$.

3. *Si λ_0 no es un autovalor algebraico de \mathfrak{L} , entonces no existe $\Phi \in \mathcal{C}(\Omega, \mathcal{L}(U))$ con $\Phi(\lambda_0)$ isomorfismo tal que λ_0 es un autovalor transversal de $\mathfrak{L}\Phi$.*

En consecuencia, el Teorema 2.2.4 muestra la consistencia del siguiente concepto de multiplicidad que extiende el introducido en la Definición 2.2.2.

Definición 2.2.5 *Supongamos que λ_0 es un autovalor algebraico de \mathfrak{L} de orden $1 \leq k \leq r$. Sea $\Phi \in \mathcal{C}^r(\Omega, \mathcal{L}(U))$ una familia tal que $\Phi(\lambda_0)$ es un isomorfismo y λ_0 es un autovalor k -transversal de $\mathfrak{L}\Phi$. Entonces la multiplicidad algebraica de \mathfrak{L} en λ_0 se define mediante*

$$\chi[\mathfrak{L}; \lambda_0] := \chi[\mathfrak{L}\Phi; \lambda_0].$$

Definimos además $\chi[\mathfrak{L}; \lambda_0] = 0$ cuando $\mathfrak{L}(\lambda_0)$ es un isomorfismo, y $\chi[\mathfrak{L}; \lambda_0] = \infty$ cuando λ_0 no es un autovalor algebraico de \mathfrak{L} . Dejamos $\chi[\mathfrak{L}; \lambda_0]$ sin definir si λ_0 es k -algebraico y \mathfrak{L} no es de clase C^k en λ_0 .

Esta definición de multiplicidad coincide con la dada en el Capítulo 1; véase J. López-Gómez [43, Theorem 5.3.1]. Con estos dos enfoques de la multiplicidad se puede mejorar el Teorema 1.2.1 sobre la factorización de las familias, y se consigue el siguiente resultado (consúltese J. López-Gómez [43, Chapter 5]).

Teorema 2.2.6 *Sea $\mathfrak{L} \in C^r(\Omega, \Phi_0(U, V))$ tal que $\lambda_0 \in \Omega$ es un autovalor k -algebraico de \mathfrak{L} , para un cierto $0 \leq k < r + 1$. Entonces existen k proyecciones de rango finito $P_1, \dots, P_k \in \mathcal{L}(U) \setminus \{0\}$ tales que para cualquier $\lambda \in \Omega$,*

$$\mathfrak{L}(\lambda) = \mathfrak{M}(\lambda) [(\lambda - \lambda_0)P_1 + I_U - P_1] \cdots [(\lambda - \lambda_0)P_k + I_U - P_k],$$

para una cierta familia $\mathfrak{M} \in C^{r-k}(\Omega, \mathcal{L}(U, V))$ tal que $\mathfrak{M}(\lambda_0)$ es un isomorfismo. Además,

$$\chi[\mathfrak{L}; \lambda_0] = \sum_{i=1}^k \text{rank } P_i.$$

2.3. Un resultado clásico sobre series de Laurent

El siguiente resultado, cuya demostración puede encontrarse en I. Gohberg et al. [24, Corollary XI.8.4], es clásico (véase también A. G. Ramm [61]). Uno de los principales objetivos de este capítulo es generalizarlo para cubrir el caso de familias no analíticas de operadores.

Teorema 2.3.1 *Sea Ω un abierto conexo de \mathbb{C} y $\mathfrak{L} \in \mathcal{H}(\Omega, \Phi_0(U, V))$ tal que $\mathfrak{L}(\lambda_1)$ es invertible para algún $\lambda_1 \in \Omega$. Entonces el conjunto de autovalores*

$$\Sigma := \{\lambda \in \Omega : \dim N[\mathfrak{L}(\lambda)] \geq 1\}$$

de la familia \mathfrak{L} es discreto en Ω , el operador inverso

$$\mathfrak{R}(\lambda) := \mathfrak{L}(\lambda)^{-1}, \quad \lambda \in \Omega \setminus \Sigma,$$

es holomorfo en $\Omega \setminus \Sigma$, y todo autovalor $\lambda_0 \in \Sigma$ es un polo de \mathfrak{R} . Para cada $\lambda_0 \in \Sigma$ existe un entorno perforado D_0 de λ_0 en el que $\mathfrak{R}(\lambda)$ posee un único desarrollo de Laurent

$$\mathfrak{R}(\lambda) = \sum_{n=-k}^{\infty} \mathfrak{R}_n(\lambda - \lambda_0)^n, \quad \lambda \in D_0,$$

uniformemente en subconjuntos compactos de D_0 . Entonces $\mathfrak{R}_0 \in \Phi_0(V, U)$, y para cada $-k \leq n \leq -1$, \mathfrak{R}_n tiene rango finito.

Gracias al Teorema 2.2.4, para cualquier $\lambda_0 \in \Sigma$, el orden del polo λ_0 de \mathcal{L}^{-1} es igual al orden de transversalidad de λ_0 de cualquier familia transversalizada de \mathcal{L} . En lo que sigue, para cada $n \geq -k$, escribiremos

$$c(\mathfrak{A}, \lambda_0, n) := \mathfrak{A}_n.$$

Más generalmente, si $\Omega \subset \mathbb{K}$ es abierto, $\lambda_0 \in \Omega$, $p \leq q$ son enteros, W es cualquier \mathbb{K} -espacio de Banach, y $\mathfrak{A} : \Omega \setminus \{\lambda_0\} \rightarrow W$ admite una expresión

$$\mathfrak{A}(\lambda) = \sum_{n=p}^q \mathfrak{A}_n (\lambda - \lambda_0)^n + o((\lambda - \lambda_0)^q), \quad \lambda \in \Omega \setminus \{\lambda_0\},$$

entonces los coeficientes $\mathfrak{A}_n \in W$, $p \leq n \leq q$, son únicos y denotaremos

$$c(\mathfrak{A}, \lambda_0, n) := \mathfrak{A}_n, \quad p \leq n \leq q.$$

También, dados $n \in \mathbb{Z}$ y $f : \Omega \setminus \{\lambda_0\} \rightarrow W$, se dirá que $f(\lambda) = o((\lambda - \lambda_0)^n)$ si

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^n} = 0.$$

2.4. El operador traza

Dados un espacio de Banach U sobre $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ y $T \in \mathcal{L}(U)$, se dice que T es de *rango finito* si $\dim R[T] < \infty$. Supongamos que T es de rango finito. Entonces el operador

$$T_R := T|_{R[T]} : R[T] \rightarrow R[T]$$

está bien definido y es finitodimensional, luego está definida su traza $\text{tr } T_R$. La traza de T , denotada por $\text{tr } T$, se define como la traza de T_R ,

$$\text{tr } T := \text{tr } T_R.$$

Aunque hay conceptos más generales de traza (véanse T. Kato [32, Chapter X] o I. Gohberg et al. [24, Chapter VII] y las referencias allí citadas), éste que hemos indicado es suficiente para nuestros propósitos. La traza goza de las siguientes propiedades, cuyas demostraciones se pueden encontrar, por ejemplo, en [32, Paragraph III-§4.3]:

1. Para cualquier subespacio finitodimensional M de U tal que $R[T] \subset M$, consideremos $T_M := T|_M : M \rightarrow M$. Entonces

$$\text{tr } T = \text{tr } T_M.$$

2. Para cualesquiera operadores de rango finito $T, P \in \mathcal{L}(U)$,

$$\text{tr}(T + P) = \text{tr } T + \text{tr } P.$$

3. Para cualquier operador de rango finito $T \in \mathcal{L}(U)$, y $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\text{tr}(\alpha T) = \alpha \text{tr } T.$$

4. Para toda proyección de rango finito $\Pi \in \mathcal{L}(U)$,

$$\text{tr } \Pi = \dim R[\Pi].$$

5. Para todo $B \in \mathcal{L}(V, U)$ y todo operador de rango finito $A \in \mathcal{L}(U, V)$,

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

Ahora vamos a obtener dos propiedades relativas a la traza de los coeficientes de Laurent de productos de familias meromorfas de operadores. En las Proposiciones 2.4.1 y 2.4.2, U, V y W serán espacios de Banach complejos, y Ω designa un abierto de \mathbb{C} .

Proposición 2.4.1 *Sea Ω un abierto de \mathbb{C} , tomemos $\lambda_0 \in \Omega$, y supongamos que $\mathfrak{R} \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{\lambda_0\}, \mathcal{L}(U, V))$ y $\mathfrak{S} \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{\lambda_0\}, \mathcal{L}(V, U))$ poseen desarrollos de Laurent alrededor de λ_0 de la forma*

$$\mathfrak{R}(\lambda) = \sum_{n=p}^{\infty} \mathfrak{R}_n(\lambda - \lambda_0)^n, \quad \mathfrak{S}(\lambda) = \sum_{n=q}^{\infty} \mathfrak{S}_n(\lambda - \lambda_0)^n,$$

donde $p, q \in \mathbb{Z}$, y los operadores \mathfrak{R}_n y \mathfrak{S}_m tienen rango finito para cada $p \leq n \leq -1$ y $q \leq m \leq -1$; no excluimos los casos $p \geq 0$ o $q \geq 0$. Entonces para cada $p + q \leq n \leq -1$, los operadores $c(\mathfrak{R}\mathfrak{S}, \lambda_0, n) \in \mathcal{L}(V)$ y $c(\mathfrak{S}\mathfrak{R}, \lambda_0, n) \in \mathcal{L}(U)$ tienen rango finito y

$$\text{tr } c(\mathfrak{R}\mathfrak{S}, \lambda_0, n) = \text{tr } c(\mathfrak{S}\mathfrak{R}, \lambda_0, n).$$

Demostración. Añadiendo, si es necesario, algunos coeficientes nulos, podemos suponer que $p, q \leq -1$. Un sencillo cálculo muestra los siguientes desarrollos de Laurent

$$\mathfrak{R}(\lambda)\mathfrak{S}(\lambda) = \sum_{n=p+q}^{\infty} \sum_{i=p}^{n-q} \mathfrak{R}_i \mathfrak{S}_{n-i} (\lambda - \lambda_0)^n, \quad \mathfrak{S}(\lambda)\mathfrak{R}(\lambda) = \sum_{n=p+q}^{\infty} \sum_{i=p}^{n-q} \mathfrak{S}_{n-i} \mathfrak{R}_i (\lambda - \lambda_0)^n.$$

Tomemos $p + q \leq n \leq -1$. Como \mathfrak{R}_i tiene rango finito para $p \leq i \leq -1$, \mathfrak{S}_{n-i} tiene rango finito para $n + 1 \leq i \leq n - q$, y $n \leq -1$, entonces los operadores $\mathfrak{R}_i \mathfrak{S}_{n-i}$ y $\mathfrak{S}_{n-i} \mathfrak{R}_i$ tienen rango finito para cada $p \leq i \leq n - q$, ya que o bien \mathfrak{R}_i o bien \mathfrak{S}_{n-i} tienen rango finito. Luego los operadores

$$c(\mathfrak{R}\mathfrak{S}, \lambda_0, n) = \sum_{i=p}^{n-q} \mathfrak{R}_i \mathfrak{S}_{n-i} \quad \text{y} \quad c(\mathfrak{S}\mathfrak{R}, \lambda_0, n) = \sum_{i=p}^{n-q} \mathfrak{S}_{n-i} \mathfrak{R}_i$$

tienen rango finito. Finalmente, gracias a las propiedades generales de la traza, obtenemos

$$\text{tr} \sum_{i=p}^{n-q} \mathfrak{R}_i \mathfrak{S}_{n-i} = \text{tr} \sum_{i=p}^{n-q} \mathfrak{S}_{n-i} \mathfrak{R}_i,$$

lo que concluye la demostración. ■

Proposición 2.4.2 Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, y $\mathfrak{M} \in \mathcal{H}(\Omega, \Phi_0(U, V))$, $\mathfrak{L} \in \mathcal{H}(\Omega, \Phi_0(V, W))$ dos aplicaciones holomorfas tales que $\lambda_0 \in \Omega$ es un autovalor k -algebraico de \mathfrak{L} y un autovalor ℓ -algebraico de \mathfrak{M} , para ciertos enteros $k, \ell \geq 0$. Entonces para cada $-k - \ell \leq n \leq -1$, los operadores $c((\mathfrak{L}\mathfrak{M})'(\mathfrak{L}\mathfrak{M})^{-1}, \lambda_0, n) \in \mathcal{L}(W)$, $c(\mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, n) \in \mathcal{L}(W)$ y $c(\mathfrak{M}'\mathfrak{M}^{-1}, \lambda_0, n) \in \mathcal{L}(V)$ tienen rango finito, y

$$\operatorname{tr} c((\mathfrak{L}\mathfrak{M})'(\mathfrak{L}\mathfrak{M})^{-1}, \lambda_0, n) = \operatorname{tr} c(\mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, n) + \operatorname{tr} c(\mathfrak{M}'\mathfrak{M}^{-1}, \lambda_0, n).$$

Demostración. Por la Definición 2.2.3, λ_0 es un autovalor algebraico de $\mathfrak{L}\mathfrak{M}$ de orden no mayor que $k + \ell$. Así pues, gracias al Teorema 2.3.1, $c((\mathfrak{L}\mathfrak{M})^{-1}, \lambda_0, n)$ tiene rango finito para cada $-k - \ell \leq n \leq -1$. Como $(\mathfrak{L}\mathfrak{M})' \in \mathcal{H}(\Omega, \mathcal{L}(U, W))$, se sigue de la Proposición 2.4.1 que $c((\mathfrak{L}\mathfrak{M})'(\mathfrak{L}\mathfrak{M})^{-1}, \lambda_0, n)$ tiene rango finito para cada $-k - \ell \leq n \leq -1$. Análogamente, para cada $-k - \ell \leq n \leq -1$, $c(\mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, n)$ tiene rango finito. De hecho, $c(\mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, n) = 0$ para $n < -k$. Por otra parte,

$$(\mathfrak{L}\mathfrak{M})'(\mathfrak{L}\mathfrak{M})^{-1} = \mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1} + \mathfrak{L}\mathfrak{M}'\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{L}^{-1}.$$

Luego para cada $-k - \ell \leq n \leq -1$, el operador $c(\mathfrak{L}\mathfrak{M}'\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, n)$ tiene rango finito y

$$\operatorname{tr} c((\mathfrak{L}\mathfrak{M})'(\mathfrak{L}\mathfrak{M})^{-1}, \lambda_0, n) = \operatorname{tr} c(\mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, n) + \operatorname{tr} c(\mathfrak{L}\mathfrak{M}'\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, n).$$

Así pues, para completar la demostración de la proposición nos falta ver que

$$\operatorname{tr} c(\mathfrak{L}\mathfrak{M}'\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, n) = \operatorname{tr} c(\mathfrak{M}'\mathfrak{M}^{-1}, \lambda_0, n), \quad -k - \ell \leq n \leq -1. \quad (2.7)$$

Tenemos que $\mathfrak{L}\mathfrak{M}' \in \mathcal{H}(\Omega, \mathcal{L}(U, W))$. Gracias al Teorema 2.3.1, λ_0 es un polo de orden ℓ de \mathfrak{M}^{-1} y para cada $-\ell \leq n \leq -1$, $c(\mathfrak{M}^{-1}, \lambda_0, n)$ tiene rango finito. Gracias a la Proposición 2.4.1, λ_0 es un polo de $\mathfrak{L}\mathfrak{M}'\mathfrak{M}^{-1}$ de orden menor o igual que ℓ , y $c(\mathfrak{L}\mathfrak{M}'\mathfrak{M}^{-1}, \lambda_0, n)$ tiene rango finito para cada $-\ell \leq n \leq -1$. De nuevo gracias al Teorema 2.3.1, λ_0 es un polo de orden k de \mathfrak{L}^{-1} y para cada $-k \leq n \leq -1$, el operador $c(\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, n)$ tiene rango finito. Por tanto, se sigue de la Proposición 2.4.1 que para cada $-k - \ell \leq n \leq -1$, los operadores $c(\mathfrak{L}\mathfrak{M}'\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, n)$ y $c(\mathfrak{M}'\mathfrak{M}^{-1}, \lambda_0, n)$ tienen rango finito y sus trazas coinciden. Esto muestra (2.7) y concluye la demostración. ■

Para el caso real necesitaremos la siguiente versión de la Proposición 2.4.1.

Proposición 2.4.3 Supongamos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y que

$$\mathfrak{L} : \Omega \setminus \{\lambda_0\} \rightarrow \mathcal{L}(V, U), \quad \mathfrak{M} : \Omega \setminus \{\lambda_0\} \rightarrow \mathcal{L}(U, V)$$

son dos aplicaciones tales que

$$\mathfrak{L}(\lambda) = \sum_{n=p_1}^{p_2} \mathfrak{L}_n(\lambda - \lambda_0)^n + o((\lambda - \lambda_0)^{p_2}), \quad \mathfrak{M}(\lambda) = \sum_{n=q_1}^{q_2} \mathfrak{M}_n(\lambda - \lambda_0)^n + o((\lambda - \lambda_0)^{q_2}),$$

cuando $\lambda \rightarrow \lambda_0$, donde $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ cumplen

- $p_1 \leq p_2, \quad q_1 \leq q_2, \quad p_1 + q_2 \geq -1, \quad p_2 + q_1 \geq -1.$
- Si $p_1 \leq -1$ entonces $p_2 \geq -1$ y \mathfrak{L}_n tiene rango finito para cada $p_1 \leq n \leq -1$.

- Si $q_1 \leq -1$ entonces $q_2 \geq -1$ y \mathfrak{M}_n tiene rango finito para cada $q_1 \leq n \leq -1$.

Entonces para cada $p_1 + q_1 \leq n \leq -1$, los operadores $c(\mathfrak{L}\mathfrak{M}, \lambda_0, n) \in \mathcal{L}(U)$ y $c(\mathfrak{M}\mathfrak{L}, \lambda_0, n) \in \mathcal{L}(V)$ tienen rango finito y

$$\text{tr } c(\mathfrak{L}\mathfrak{M}, \lambda_0, n) = \text{tr } c(\mathfrak{M}\mathfrak{L}, \lambda_0, n).$$

Demostración. Añadiendo coeficientes nulos podemos suponer sin pérdida de generalidad que $p_1 \leq -1$ y $q_1 \leq -1$. Pongamos

$$p := \text{mín}\{p_1 + q_2, p_2 + q_1\}.$$

Entonces, en un entorno de λ_0 tenemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\lambda)\mathfrak{M}(\lambda) &= \sum_{n=p_1+q_1}^p \sum_{j=\text{máx}\{p_1, n-q_2\}}^{n-q_1} \mathfrak{L}_j \mathfrak{M}_{n-j} (\lambda - \lambda_0)^n + o((\lambda - \lambda_0)^p), \\ \mathfrak{M}(\lambda)\mathfrak{L}(\lambda) &= \sum_{n=p_1+q_1}^p \sum_{j=\text{máx}\{p_1, n-q_2\}}^{n-q_1} \mathfrak{M}_{n-j} \mathfrak{L}_j (\lambda - \lambda_0)^n + o((\lambda - \lambda_0)^p). \end{aligned}$$

Como \mathfrak{L}_n tiene rango finito para $p_1 \leq n \leq -1$, y \mathfrak{M}_n tiene rango finito para $q_1 \leq n \leq -1$, cada uno de los operadores

$$\sum_{j=\text{máx}\{p_1, n-q_2\}}^{n-q_1} \mathfrak{L}_j \mathfrak{M}_{n-j}, \quad \sum_{j=\text{máx}\{p_1, n-q_2\}}^{n-q_1} \mathfrak{M}_{n-j} \mathfrak{L}_j,$$

tiene rango finito para $p_1 + q_1 \leq n \leq -1$ y sus trazas coinciden. ■

2.5. La multiplicidad algebraica como residuo logarítmico

A lo largo de esta sección supondremos lo siguiente:

1. U, V son espacios de Banach complejos,
2. Ω es un abierto conexo de \mathbb{C} ,
3. $\mathfrak{L} \in \mathcal{H}(\Omega, \Phi_0(U, V))$ es invertible en algún punto de Ω .

Bajo estas hipótesis generales, se sigue del Teorema 2.3.1 que el espectro Σ de \mathfrak{L} es discreto y que todo $\lambda_0 \in \Sigma$ es un polo de \mathfrak{L}^{-1} . Gracias al Teorema 2.2.4, el orden de este polo λ_0 es igual al orden de transversalidad de λ_0 de cualquiera de las familias transversalizadas de \mathfrak{L} .

Nuestro resultado principal muestra que la multiplicidad algebraica $\chi[\mathfrak{L}, \lambda_0]$ es igual a la traza del residuo logarítmico de la aplicación $\mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1}$ en $\lambda_0 \in \Sigma$. Este resultado muestra que $\chi[\mathfrak{L}, \lambda_0]$ coincide con la multiplicidad algebraica descrita en I. C. Gohberg and E. I. Sigal [29] usando el concepto de cadena de Jordan; la construcción de [29] la presentaremos en el Capítulo 3. El teorema principal de esta sección es el siguiente.

Teorema 2.5.1 *Supongamos las hipótesis 1,2,3 y tomemos $\lambda_0 \in \Sigma$. Sea k el orden del polo λ_0 de \mathcal{L}^{-1} . Entonces para cada $-k \leq n \leq -1$, el operador $c(\mathcal{L}'\mathcal{L}^{-1}, \lambda_0, n) \in \mathcal{L}(V)$ tiene rango finito, y*

$$\operatorname{tr} c(\mathcal{L}'\mathcal{L}^{-1}, \lambda_0, n) = \begin{cases} 0, & -k \leq n \leq -2, \\ \chi[\mathcal{L}; \lambda_0], & n = -1. \end{cases} \quad (2.8)$$

En particular,

$$\chi[\mathcal{L}; \lambda_0] = \operatorname{tr} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \mathcal{L}'(\lambda) \mathcal{L}(\lambda)^{-1} d\lambda, \quad (2.9)$$

donde γ es cualquier curva de Jordan rectificable, positivamente orientada que rodee a λ_0 y sea homótopa a λ_0 en $\Omega \setminus \Sigma$.

El resto de esta sección está dedicado a la demostración de este teorema. Primero lo probaremos para el caso especial en el que λ_0 es un autovalor k -transversal de \mathcal{L} . Luego lo concluiremos para aplicaciones generales. El siguiente resultado halla las proyecciones asociadas a la suma directa (2.5) en un autovalor transversal.

Lema 2.5.2 *Supongamos que $\lambda_0 \in \Sigma$ es un autovalor k -transversal de \mathcal{L} . Entonces por definición,*

$$V = R[\mathcal{L}_0] \oplus \mathcal{L}_1(N[\mathcal{L}_0]) \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_k\left(\bigcap_{j=0}^{k-1} N[\mathcal{L}_j]\right), \quad \dim \mathcal{L}_k\left(\bigcap_{j=0}^{k-1} N[\mathcal{L}_j]\right) \geq 1, \quad (2.10)$$

y, gracias a los Teoremas 2.2.4 y 2.3.1, el operador inverso $\mathfrak{R} := \mathcal{L}^{-1}$ (definido en $\Omega \setminus \Sigma$) admite una única expansión de la forma

$$\mathfrak{R}(\lambda) = \sum_{n=-k}^{\infty} \mathfrak{R}_n(\lambda - \lambda_0)^n, \quad (2.11)$$

donde $\mathfrak{R}_{-k} \neq 0$ y para cada $-k \leq n \leq -1$, $c(\mathcal{L}^{-1}, \lambda_0, n) = \mathfrak{R}_n$ tiene rango finito. Con estas notaciones, resulta que los operadores $\mathcal{L}_0\mathfrak{R}_0, \mathcal{L}_1\mathfrak{R}_{-1}, \dots, \mathcal{L}_k\mathfrak{R}_{-k} \in \mathcal{L}(V)$ son las proyecciones asociadas a cada uno de los factores de la suma directa (2.10). Dicho de manera precisa,

$$R[\mathcal{L}_0\mathfrak{R}_0] = R[\mathcal{L}_0], \quad R[\mathcal{L}_i\mathfrak{R}_{-i}] = \mathcal{L}_i\left(\bigcap_{j=0}^{i-1} N[\mathcal{L}_j]\right), \quad 1 \leq i \leq k, \quad (2.12)$$

y

$$\sum_{i=0}^k \mathcal{L}_i\mathfrak{R}_{-i} = I_V, \quad \mathcal{L}_i\mathfrak{R}_{-i}\mathcal{L}_j\mathfrak{R}_{-j} = \delta_{ij}\mathcal{L}_i\mathfrak{R}_{-i}, \quad 0 \leq i, j \leq k. \quad (2.13)$$

Demostración. Basta probar (2.12) y (2.13). Un cálculo directo nos proporciona

$$I_V = \mathcal{L}(\lambda)\mathcal{L}(\lambda)^{-1} = \mathcal{L}(\lambda)\mathfrak{R}(\lambda) = \sum_{n=-k}^{\infty} \sum_{i=0}^{n+k} \mathcal{L}_i\mathfrak{R}_{n-i}(\lambda - \lambda_0)^n$$

y, por la unicidad del desarrollo de Laurent, encontramos que

$$\sum_{i=0}^k \mathfrak{L}_i \mathfrak{R}_{-i} = I_V \quad (2.14)$$

y

$$\sum_{i=0}^{n+k} \mathfrak{L}_i \mathfrak{R}_{n-i} = 0, \quad -k \leq n \leq -1. \quad (2.15)$$

En particular, se cumple la primera identidad de (2.13). Afirmamos ahora que

$$R[\mathfrak{R}_{-k+i}] \subset \bigcap_{j=0}^{r-i} N[\mathfrak{L}_j], \quad 0 \leq i \leq r \leq k-1. \quad (2.16)$$

La demostración de (2.16) se hará por inducción sobre $0 \leq r \leq k-1$. Cuando $r = 0$, (2.16) es $R[\mathfrak{R}_{-k}] \subset N[\mathfrak{L}_0]$, lo cual es cierto puesto que $\mathfrak{L}_0 \mathfrak{R}_{-k} = 0$ gracias a (2.15) para $n = -k$. Supongamos ahora que (2.16) es cierto para un $r \leq k-2$ particular. Entonces, se particulariza (2.15) en $n = -k + r + 1$ y obtenemos

$$\mathfrak{L}_0 \mathfrak{R}_{-k+r+1} + \sum_{i=1}^{r+1} \mathfrak{L}_i \mathfrak{R}_{-k+r+1-i} = 0. \quad (2.17)$$

Por la hipótesis de inducción, tenemos que

$$R[\mathfrak{R}_{-k+i}] \subset \bigcap_{j=0}^{r-i} N[\mathfrak{L}_j], \quad 0 \leq i \leq r,$$

es decir, para cada $1 \leq i \leq r+1$, $R[\mathfrak{R}_{-k+r-1-i}] \subset \bigcap_{j=0}^{i-1} N[\mathfrak{L}_j]$, y así

$$R[\mathfrak{L}_i \mathfrak{R}_{-k+r-1-i}] \subset \mathfrak{L}_i \left(\bigcap_{j=0}^{i-1} N[\mathfrak{L}_j] \right), \quad 1 \leq i \leq r+1.$$

Gracias entonces a (2.10), se sigue de (2.17) que $\mathfrak{L}_i \mathfrak{R}_{-k+r+1-i} = 0$ para cada $0 \leq i \leq r+1$. En otras palabras, $\mathfrak{L}_{r+1-i} \mathfrak{R}_{-k+i} = 0$ para cada $0 \leq i \leq r+1$. Equivalentemente,

$$R[\mathfrak{R}_{-k+i}] \subset N[\mathfrak{L}_{r+1-i}], \quad 0 \leq i \leq r+1.$$

Por tanto,

$$R[\mathfrak{R}_{-k+i}] \subset \bigcap_{j=0}^{r+1-i} N[\mathfrak{L}_j], \quad 0 \leq i \leq r+1.$$

Esto completa la demostración de (2.16). En particular,

$$R[\mathfrak{R}_{-i}] \subset \bigcap_{j=0}^{i-1} N[\mathfrak{L}_j], \quad 1 \leq i \leq k,$$

luego

$$R[\mathfrak{L}_0\mathfrak{R}_0] \subset R[\mathfrak{L}_0], \quad R[\mathfrak{L}_i\mathfrak{R}_{-i}] \subset \mathfrak{L}_i\left(\bigcap_{j=0}^{i-1} N[\mathfrak{L}_j]\right), \quad 1 \leq i \leq k.$$

Así pues, gracias a (2.14) y a la unicidad de las proyecciones asociadas a cualquier suma directa, los operadores $\mathfrak{L}_0\mathfrak{R}_0, \mathfrak{L}_1\mathfrak{R}_{-1}, \dots, \mathfrak{L}_k\mathfrak{R}_{-k}$ son necesariamente las proyecciones asociadas a la descomposición en suma directa (2.10). Esto concluye la demostración del lema. ■

Ahora probamos el Teorema 2.5.1 en el caso especial en que λ_0 es un autovalor k -transversal de \mathfrak{L} . Gracias a (2.11) y a

$$\mathfrak{L}'(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\mathfrak{L}_{n+1}(\lambda - \lambda_0)^n,$$

tenemos que

$$\mathfrak{L}'(\lambda)\mathfrak{L}(\lambda)^{-1} = \sum_{n=-k}^{\infty} \sum_{i=1}^{n+k+1} i\mathfrak{L}_i\mathfrak{R}_{n+1-i}(\lambda - \lambda_0)^n.$$

Luego por (2.16), tenemos que $c(\mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, n) = 0$ para cada $-k \leq n \leq -2$. Es más, como

$$c(\mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, -1) = \sum_{i=1}^k i\mathfrak{L}_i\mathfrak{R}_{-i},$$

se sigue del Lema 2.5.2 que $c(\mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, -1)$ es efectivamente una combinación lineal de proyecciones de rango finito. Usando las propiedades de la traza enunciadas en la Sección 2.4, llegamos a que

$$\text{tr } c(\mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, -1) = \sum_{i=1}^k i \dim \mathfrak{L}_i\left(\bigcap_{j=0}^{i-1} N[\mathfrak{L}_j]\right) = \chi[\mathfrak{L}; \lambda_0].$$

Esto concluye la demostración del Teorema 2.5.1 cuando λ_0 es un autovalor k -transversal de \mathfrak{L} .

En el caso general, cuando λ_0 es un polo de orden k de \mathfrak{L}^{-1} aplicamos el Teorema 2.2.4. Entonces existe una familia polinomial $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{L}(U)$ tal que $\Phi(\lambda_0) = I_U$ y λ_0 es un autovalor k -transversal de la nueva familia $\mathfrak{L}^\Phi(\lambda) := \mathfrak{L}(\lambda)\Phi(\lambda)$, $\lambda \in \Omega$. Gracias a la Proposición 2.4.2, para cada $-k \leq n \leq -1$ tenemos que

$$\text{tr } c((\mathfrak{L}\Phi)'(\mathfrak{L}\Phi)^{-1}, \lambda_0, n) = \text{tr } c(\mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, n) + \text{tr } c(\Phi'\Phi^{-1}, \lambda_0, n).$$

Como $\Phi'\Phi^{-1}$ es holomorfa en λ_0 , $c(\Phi'\Phi^{-1}, \lambda_0, n) = 0$ para cada $n \leq -1$, luego

$$\text{tr } c((\mathfrak{L}^\Phi)'(\mathfrak{L}^\Phi)^{-1}, \lambda_0, n) = \text{tr } c(\mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, n), \quad -k \leq n \leq -1.$$

Puesto que λ_0 es un autovalor k -transversal de \mathfrak{L}^Φ , ya sabemos que

$$\text{tr } c((\mathfrak{L}^\Phi)'(\mathfrak{L}^\Phi)^{-1}, \lambda_0, n) = \begin{cases} 0, & -k \leq n \leq -2, \\ \chi[\mathfrak{L}^\Phi; \lambda_0], & n = -1. \end{cases}$$

Es más, por la Definición 2.2.5, $\chi[\mathfrak{L}^\Phi; \lambda_0] = \chi[\mathfrak{L}; \lambda_0]$. Con lo cual se cumple (2.8). La fórmula (2.9) es una simple consecuencia de los hechos anteriores y del teorema de los residuos. Esto completa la demostración del Teorema 2.5.1.

Obsérvese que la prueba del Teorema 2.5.1 se puede adaptar fácilmente para mostrar que

$$\operatorname{tr} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\lambda) \mathfrak{L}'(\lambda) \mathfrak{L}(\lambda)^{-1} d\lambda = f(\lambda_0) \chi[\mathfrak{L}; \lambda_0]$$

para cualquier $f \in \mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C})$. Además, el enunciado del Teorema 2.5.1 sigue siendo cierto si cambiamos $\mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1}$ por $\mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{L}'$. Por supuesto, en este último caso, $c(\mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{L}', \lambda_0, n) \in \mathcal{L}(U)$.

En I. C. Gohberg and E. I. Sigal [29] o I. Gohberg et al. [24, Section XI.9] se ve cómo la fórmula integral (2.9), conocida como *principio del argumento* o *teorema del residuo logarítmico*, resulta muy útil para probar la continuidad e invariancia por homotopía de la multiplicidad en un conjunto abierto, y también para probar la fórmula del producto.

2.6. Expansiones asintóticas en el caso real

A lo largo de esta sección, U , V y W son espacios de Banach reales, y Ω es un abierto de \mathbb{R} . El resultado principal de esta sección es la siguiente versión real del Teorema 2.3.1.

Teorema 2.6.1 *Tomemos un entero $n \geq 0$ y supongamos que para un cierto entero $k \geq 1$, $\lambda_0 \in \Omega$ es un autovalor k -algebraico de una familia $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^{k+n}(\Omega, \Phi_0(U, V))$. Entonces existen $n + 1$ operadores, únicos, $\mathfrak{R}_i \in \mathcal{L}(V, U)$, $-k \leq i \leq n - k$, tales que*

$$\mathfrak{R}(\lambda) := \mathfrak{L}(\lambda)^{-1} = \sum_{i=-k}^{n-k} \mathfrak{R}_i (\lambda - \lambda_0)^i + o((\lambda - \lambda_0)^{n-k})$$

cuando $\lambda \rightarrow \lambda_0$. Es más, \mathfrak{R}_i tiene rango finito cuando $-k \leq i \leq \min\{n - k, -1\}$; $\mathfrak{R}_{-k} \neq 0$, y, siempre que $n \geq k$, entonces $\mathfrak{R}_0 \in \Phi_0(V, U)$.

Demostración. La unicidad de los operadores \mathfrak{R}_i es inmediata. Para probar la existencia aplicamos el Teorema 2.2.6: existen k proyecciones de rango finito $\Pi_j \in \mathcal{L}(U)$, $0 \leq j \leq k - 1$, un intervalo abierto $D \subset \Omega$ con $\lambda_0 \in D$ y una familia invertible $\mathfrak{T} \in \mathcal{C}^n(D, \mathcal{L}(V, U))$ tales que

$$\mathfrak{L}(\lambda)^{-1} = [(\lambda - \lambda_0)^{-1}\Pi_0 + I_U - \Pi_0] \cdots [(\lambda - \lambda_0)^{-1}\Pi_{k-1} + I_U - \Pi_{k-1}] \mathfrak{T}(\lambda) \quad (2.18)$$

para $\lambda \in D \setminus \{\lambda_0\}$. En D se tiene que

$$\mathfrak{T}(\lambda) = \sum_{i=0}^n \mathfrak{T}_i (\lambda - \lambda_0)^i + o((\lambda - \lambda_0)^n).$$

Al multiplicar los primeros k factores del miembro de la derecha de (2.18) nos queda

$$[(\lambda - \lambda_0)^{-1}\Pi_0 + I_U - \Pi_0] \cdots [(\lambda - \lambda_0)^{-1}\Pi_{k-1} + I_U - \Pi_{k-1}] = \sum_{i=-k}^0 M_i (\lambda - \lambda_0)^i, \quad (2.19)$$

para ciertos operadores de rango finito $M_j \in \mathcal{L}(U)$, $-k \leq j \leq -1$, ya que Π_j tiene rango finito para $0 \leq j \leq k - 1$. Por otra parte, los operadores $I_U - \Pi_0, \dots, I_U - \Pi_{k-1}$ son Fredholm de índice cero, ya que Π_0, \dots, Π_{k-1} son proyecciones de rango finito. Así pues,

$$M_0 = [I_U - \Pi_0] \cdots [I_U - \Pi_{k-1}] \in \Phi_0(U),$$

por ser un producto de operadores de Fredholm de índice cero (consúltese, por ejemplo, I. Gohberg et al. [24, Theorem XI.3.2]). Con lo cual,

$$\mathfrak{L}(\lambda)^{-1} = \sum_{i=-k}^{n-k} \sum_{j=\max\{0,i\}}^{\min\{n,i+k\}} M_{i-j} \mathfrak{F}_j (\lambda - \lambda_0)^i + o((\lambda - \lambda_0)^{n-k})$$

en $D \setminus \{\lambda_0\}$, y para cada $i < 0$,

$$\mathfrak{R}_i := c(\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, i) = \sum_{j=0}^{\min\{n,i+k\}} M_{i-j} \mathfrak{F}_j \in \mathcal{L}(V, U)$$

tiene rango finito. Como k es el mínimo entero para el cual se cumple (2.6), se tiene que $\mathfrak{R}_{-k} \neq 0$.

Finalmente, supongamos que $n \geq k$. Entonces,

$$c(\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, 0) = M_0 \mathfrak{F}_0 + \sum_{j=1}^k M_{-j} \mathfrak{F}_j,$$

$M_0 \mathfrak{F}_0$ es Fredholm de índice cero, y $\sum_{j=1}^k M_{-j} \mathfrak{F}_j$ es un operador de rango finito. Por tanto, se sigue de T. Kato [32, Theorem IV.5.26], o de I. Gohberg et al. [24, Theorem XI.4.2], que el operador $c(\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, 0)$ es Fredholm de índice cero. Esto completa la demostración. ■

El siguiente corolario inmediato de los Teoremas 2.2.6 y 2.6.1 muestra que una condición suficiente para la continuidad de la familia $(\lambda - \lambda_0)^k \mathfrak{L}(\lambda)^{-1}$ es que esté acotada.

Corolario 2.6.2 *Supongamos que $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^r(\Omega, \Phi_0(U, V))$ para algún $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, y que $(\lambda - \lambda_0)^k \mathfrak{L}(\lambda)^{-1}$ existe y es acotado para λ en un entorno perforado de λ_0 , y para un cierto entero $k \leq r$. Entonces la función $\lambda \mapsto (\lambda - \lambda_0)^k \mathfrak{L}(\lambda)^{-1}$ es de clase \mathcal{C}^{r-k} en un entorno de λ_0 .*

2.7. La multiplicidad como residuo logarítmico en el caso real

Como en la Sección 2.6, U , V y W denotarán espacios de Banach reales, y Ω es un abierto de \mathbb{R} . El principal resultado de este capítulo es la siguiente versión real del Teorema 2.5.1.

Teorema 2.7.1 *Supongamos que $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^{2k-1}(\Omega, \Phi_0(U, V))$ y λ_0 es un autovalor k -algebraico de \mathfrak{L} . Entonces para cada $-k \leq n \leq -1$, el operador $c(\mathfrak{L}' \mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, n) \in \mathcal{L}(V)$ tiene rango finito y*

$$\text{tr } c(\mathfrak{L}' \mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, n) = \begin{cases} 0, & -k \leq n \leq -2, \\ \chi[\mathfrak{L}; \lambda_0], & n = -1. \end{cases}$$

El resto de esta sección está dedicado a la demostración del Teorema 2.7.1. Siguiendo el esquema general de la Sección 2.5, lo probaremos primero en el caso especial en que λ_0 es k -transversal y luego, para el caso general usaremos el Teorema 2.2.4.

Supongamos que λ_0 es un autovalor k -transversal de $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^{2k-1}(\Omega, \Phi_0(U, V))$. Entonces se cumple (2.10). Es más, usando las notaciones introducidas en la prueba del Teorema 2.6.1 y teniendo en cuenta (2.18) y (2.19), existe un entorno abierto D de λ_0 tal que

$$\mathfrak{L}(\lambda)^{-1} = \left[\sum_{n=-k}^0 M_n(\lambda - \lambda_0)^n \right] \mathfrak{T}(\lambda), \quad \lambda \in D \setminus \{\lambda_0\},$$

donde $\mathfrak{T} \in \mathcal{C}^{k-1}(D, \mathcal{L}(V, U))$ es una familia de operadores invertibles. Así, para cada $\lambda \in D \setminus \{\lambda_0\}$ se tiene que

$$\begin{aligned} I_V &= \mathfrak{L}(\lambda)\mathfrak{L}(\lambda)^{-1} = \left[\sum_{n=0}^k \mathfrak{L}_n(\lambda - \lambda_0)^n + o((\lambda - \lambda_0)^k) \right] \left[\sum_{n=-k}^0 M_n(\lambda - \lambda_0)^n \right] \mathfrak{T}(\lambda) \\ &= \left[\sum_{n=-k}^0 \sum_{i=0}^{n+k} \mathfrak{L}_i M_{n-i}(\lambda - \lambda_0)^n + o(1) \right] \mathfrak{T}(\lambda). \end{aligned}$$

Como $\mathfrak{T}(\lambda)$ es invertible, se verifica

$$\sum_{n=-k}^0 \sum_{i=0}^{n+k} \mathfrak{L}_i M_{n-i}(\lambda - \lambda_0)^n + o(1) = \mathfrak{T}(\lambda)^{-1}, \quad \lambda \in D,$$

luego

$$\sum_{i=0}^k \mathfrak{L}_i M_{-i} = \mathfrak{T}_0^{-1}, \quad \sum_{i=0}^{n+k} \mathfrak{L}_i M_{n-i} = 0, \quad -k \leq n \leq -1. \quad (2.20)$$

Por consiguiente, el mismo argumento que se usó para probar (2.16) muestra también que

$$R[M_{-k+i}] \subset \bigcap_{j=0}^{r-i} N[\mathfrak{L}_j], \quad 0 \leq i \leq r \leq k-1. \quad (2.21)$$

Por tanto, de la primera identidad de (2.20) sacamos que

$$\mathfrak{L}_0 M_0 \mathfrak{T}_0 + \sum_{i=1}^k \mathfrak{L}_i M_{-i} \mathfrak{T}_0 = I_V$$

con

$$R[\mathfrak{L}_0 M_0 \mathfrak{T}_0] \subset R[\mathfrak{L}_0], \quad R[\mathfrak{L}_i M_{-i} \mathfrak{T}_0] \subset \mathfrak{L}_i \left(\bigcap_{j=0}^{i-1} N[\mathfrak{L}_j] \right), \quad 1 \leq i \leq k.$$

Esto prueba que $\mathfrak{L}_i M_{-i} \mathfrak{T}_0 \in \mathcal{L}(V)$, $0 \leq i \leq k$, son las proyecciones asociadas a la suma directa (2.10).

Por otra parte, en un entorno perforado de λ_0 tenemos que

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}'(\lambda) &= \sum_{n=0}^{k-1} (n+1) \mathfrak{L}_{n+1}(\lambda - \lambda_0)^n + o((\lambda - \lambda_0)^{k-1}), \\ \mathfrak{L}(\lambda)^{-1} &= \sum_{n=-k}^0 M_n(\lambda - \lambda_0)^n \mathfrak{T}(\lambda), \quad \mathfrak{T}(\lambda) = \sum_{n=0}^{k-1} \mathfrak{T}_n(\lambda - \lambda_0)^n + o((\lambda - \lambda_0)^{k-1}), \end{aligned}$$

ya que \mathfrak{F} es de clase \mathcal{C}^{k-1} . Luego

$$\mathfrak{L}'(\lambda)\mathfrak{L}(\lambda)^{-1} = \sum_{n=-k}^{-1} \sum_{(a,b,c) \in S_n} (a+1)\mathfrak{L}_{a+1}M_b\mathfrak{F}_c(\lambda - \lambda_0)^n + o((\lambda - \lambda_0)^{-1}),$$

donde el conjunto S_n se define como

$$S_n := \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 : a + b + c = n, \ 0 \leq a \leq n + k, \ -k \leq b \leq n, \ 0 \leq c \leq n + k\}.$$

Gracias a (2.21), $c(\mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, n) = 0$ para cada $-k \leq n \leq -2$. Puesto que M_{-k}, \dots, M_{-1} tienen rango finito,

$$c(\mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, -1) = \sum_{(a,b,c) \in S_{-1}} (a+1)\mathfrak{L}_{a+1}M_b\mathfrak{F}_c$$

tiene rango finito. Es más, (2.21) implica

$$c(\mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, -1) = \sum_{i=1}^k i\mathfrak{L}_i M_{-i} \mathfrak{F}_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-j} i\mathfrak{L}_i M_{-i-j} \mathfrak{F}_j = \sum_{i=1}^k i\mathfrak{L}_i M_{-i} \mathfrak{F}_0,$$

y, por tanto, como la traza de una proyección coincide con su rango,

$$\text{tr } c(\mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, -1) = \sum_{i=1}^k i \dim \mathfrak{L}_i \left(\bigcap_{j=0}^{i-1} N[\mathfrak{L}_j] \right) = \chi[\mathfrak{L}; \lambda_0].$$

Esto completa la demostración del Teorema 2.7.1 en el caso en que λ_0 es un autovalor k -transversal de \mathfrak{L} .

Para completar la prueba en el caso general, consideramos un polinomio $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(U)$ tal que $\Phi(\lambda_0) = I_U$ y para el cual λ_0 es un autovalor k -transversal de $\mathfrak{L}^\Phi := \mathfrak{L}\Phi$. Tal polinomio existe por el Teorema 2.2.4. Puesto que

$$(\mathfrak{L}^\Phi)'(\mathfrak{L}^\Phi)^{-1} = \mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1} + \mathfrak{L}\Phi'\Phi^{-1}\mathfrak{L}^{-1}$$

y

$$\text{tr } c((\mathfrak{L}^\Phi)'(\mathfrak{L}^\Phi)^{-1}, \lambda_0, n) = \begin{cases} 0, & -k \leq n \leq -2, \\ \chi[\mathfrak{L}^\Phi; \lambda_0], & n = -1, \end{cases}$$

ya que λ_0 es un autovalor k -transversal de \mathfrak{L}^Φ , para completar la demostración del Teorema 2.7.1 basta mostrar que el coeficiente $c(\mathfrak{L}\Phi'\Phi^{-1}\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, n)$ tiene rango finito y

$$\text{tr } c(\mathfrak{L}\Phi'\Phi^{-1}\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, n) = 0$$

para cada $-k \leq n \leq -1$. En efecto, como \mathfrak{L} es \mathcal{C}^{2k-1} y Φ', Φ^{-1} son analíticos en λ_0 , existen $Q_n \in \mathcal{L}(U, V)$, $0 \leq n \leq 2k-1$, tales que

$$\mathfrak{L}(\lambda)\Phi'(\lambda)\Phi(\lambda)^{-1} = \sum_{n=0}^{2k-1} Q_n(\lambda - \lambda_0)^n + o((\lambda - \lambda_0)^{2k-1}).$$

Por otra parte, de acuerdo con el Teorema 2.6.1, es claro que

$$\mathfrak{L}(\lambda)^{-1} = \sum_{n=-k}^{-1} \mathfrak{R}_n(\lambda - \lambda_0)^n + o((\lambda - \lambda_0)^{-1}),$$

con \mathfrak{R}_n de rango finito, $-k \leq n \leq -1$. Luego al aplicar la Proposición 2.4.3 a $\mathfrak{L}\Phi'\Phi^{-1}$ y a \mathfrak{L}^{-1} con $p_1 = 0$, $p_2 = 2k - 1$, $q_1 = -k$, $q_2 = -1$, obtenemos que los operadores $c(\mathfrak{L}\Phi'\Phi^{-1}\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, n)$ y $c(\Phi'\Phi^{-1}, \lambda_0, n)$ tienen rango finito, y

$$\text{tr } c(\mathfrak{L}\Phi'\Phi^{-1}\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, n) = \text{tr } c(\Phi'\Phi^{-1}, \lambda_0, n), \quad -k \leq n \leq -1.$$

Por último, como Φ' y Φ^{-1} son analíticos en λ_0 , entonces $c(\Phi'\Phi^{-1}, \lambda_0, n) = 0$, $n \leq -1$. Esto concluye la demostración del Teorema 2.7.1.

Como ya se indicó al final de la Sección 2.5, la demostración del Teorema 2.7.1 también se puede adaptar fácilmente para mostrar que

$$\text{tr } c(f\mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1}, \lambda_0, -1) = f(\lambda_0)\chi[\mathfrak{L}; \lambda_0]$$

para cualquier función real f de clase \mathcal{C}^{k-1} en un entorno de λ_0 . De la misma manera, el enunciado del Teorema 2.7.1 sigue siendo cierto si se cambia $\mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1}$ por $\mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{L}'$.

Con esta representación de la multiplicidad como traza del residuo de $\mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1}$, se puede probar con facilidad la *fórmula del producto*, como se hace en [46], y que llega al siguiente resultado; compárese con R. J. Magnus [49, Theorem 2.4] y P. Sarreither [64].

Teorema 2.7.2 *Tomemos $k, \ell \geq 1$ números enteros. Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto que contiene a λ_0 ,*

$$\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^{2k+\ell-1}(\Omega, \Phi_0(V, W)), \quad \mathfrak{M} \in \mathcal{C}^{k+2\ell-1}(\Omega, \Phi_0(U, V)),$$

y λ_0 es un autovalor algebraico de \mathfrak{L} y de \mathfrak{M} de órdenes respectivos k y ℓ . Entonces λ_0 es un autovalor algebraico de $\mathfrak{L}\mathfrak{M}$ de orden p para un cierto $\max\{k, \ell\} \leq p \leq k + \ell$. Si, además, $\mathfrak{L}\mathfrak{M} \in \mathcal{C}^{2p-1}$, entonces

$$\chi[\mathfrak{L}\mathfrak{M}; \lambda_0] = \chi[\mathfrak{L}; \lambda_0] + \chi[\mathfrak{M}; \lambda_0].$$

Nótese que $\mathfrak{L}\mathfrak{M} \in \mathcal{C}^{2p-1}$ si $\mathfrak{L}, \mathfrak{M} \in \mathcal{C}^{2k+2\ell-1}$.

2.8. Desarrollos de Laurent y cadenas de Jordan

En esta sección estudiamos algunas relaciones entre los coeficientes de la parte singular de \mathfrak{L}^{-1} en λ_0 y las cadenas de Jordan de \mathfrak{L} en λ_0 . Vamos a obtener generalizaciones de resultados que son clásicos en el contexto de familias polinomiales. Nuestra referencia básica será I. Gohberg et al. [25]. Suponemos que el lector está familiarizado con las cadenas de Jordan; véanse [25] o el Capítulo 3 de esta memoria. Además de los resultados que relacionan cadenas de Jordan y desarrollos de Laurent, lo que pretende esta sección es mostrar que tenemos una poderosa herramienta (la

existencia de desarrollos de Laurent de \mathfrak{L}^{-1}) para generalizar al caso real algunos resultados que son conocidos en el caso holomorfo.

Es esta sección U, V son espacios de Banach sobre $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, y $\lambda_0 \in \Omega \subset \mathbb{K}$ con Ω abierto, si bien los resultados que presentamos son conocidos en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. No vamos a proporcionar demostraciones que estos resultados; para ello consúltese [46].

Sea $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^{2k}(\Omega, \Phi_0(U, V))$ tal que λ_0 es un autovalor k -algebraico de \mathfrak{L} . Entonces, por el Teorema 2.6.1,

$$\mathfrak{L}(\lambda)^{-1} = \sum_{n=-k}^0 \mathfrak{R}_n(\lambda - \lambda_0)^n + o(1)$$

para ciertos operadores $\mathfrak{R}_{-k}, \dots, \mathfrak{R}_0 \in \mathcal{L}(V, U)$.

Introducimos la siguiente notación. Dados $-k \leq m \leq -1$, el operador S_m se define mediante la siguiente descomposición triangular por bloques

$$S_m := \begin{pmatrix} \mathfrak{R}_{-k} & & & \\ \mathfrak{R}_{-k+1} & \mathfrak{R}_{-k} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathfrak{R}_m & \mathfrak{R}_{m-1} & \cdots & \mathfrak{R}_{-k} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(V^{m+k+1}, U^{m+k+1}).$$

Además, para $u_1, \dots, u_p \in U$, definimos

$$\text{col}[u_1, \dots, u_p] := \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} \in U^p.$$

Recordemos que el rango $\text{rank } u$ de un $u \in N[\mathfrak{L}_0] \setminus \{0\}$ es la longitud máxima de cadenas de Jordan de \mathfrak{L} en λ_0 que comienzan en u . Veremos en el Teorema 3.4.5 que $\sup_{u \in N[\mathfrak{L}_0] \setminus \{0\}} \text{rank } u = k$. Se cumple la siguiente generalización de I. Gohberg et al. [25, Proposition 1.17].

Proposición 2.8.1 *Siguiendo las notaciones anteriores,*

$$N[\mathfrak{L}_0] = \{u \in U : \text{col}[0, \dots, 0, u] \in R[S_{-1}]\}$$

y para cada $u \in N[\mathfrak{L}_0] \setminus \{0\}$,

$$\text{rank } u = \text{máx} \{r \in \{1, \dots, k\} : \text{col}[0, \dots, 0, u] \in R[S_{-r}]\}.$$

Si $u \in N[\mathfrak{L}_0] \setminus \{0\}$ con $\text{rank } u = r$ y $S_{-r} \text{col}[x_r, \dots, x_k] = \text{col}[0, \dots, 0, u]$ entonces (u_0, \dots, u_{r-1}) es una cadena de Jordan de \mathfrak{L} en λ_0 , donde

$$u_0 := u, \quad u_j := \sum_{n=r}^k \mathfrak{R}_{j-n} x_n, \quad 1 \leq j \leq r-1.$$

El siguiente resultado, de naturaleza general, nos permite reducir el problema de manejar una familia arbitraria al de tratar con una familia polinomial.

Proposición 2.8.2 Sean $\mathfrak{L}, \mathfrak{M} \in \mathcal{C}^r(\Omega, \Phi_0(U, V))$ tales que λ_0 es un autovalor k -algebraico de \mathfrak{L} . Se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. Si $r \geq k$ y $\mathfrak{L}_n = \mathfrak{M}_n$, $0 \leq n \leq k$, entonces λ_0 es k -algebraico para \mathfrak{M} , y las cadenas de Jordan de \mathfrak{L} y \mathfrak{M} coinciden.
2. Si $r \geq 2k - 1$ y $\mathfrak{L}_n = \mathfrak{M}_n$, $0 \leq n \leq 2k - 1$, entonces $\mathfrak{L}(\lambda)^{-1} - \mathfrak{M}(\lambda)^{-1} = o((\lambda - \lambda_0)^{-1})$ cuando $\lambda \rightarrow \lambda_0$.

La Proposición 2.8.2 e I. Gohberg et al. [25, Corollary 2.5] nos permiten concluir el siguiente resultado. El concepto de cadena de Jordan por la izquierda se define de manera natural (véase por ejemplo [25]).

Proposición 2.8.3 Supongamos que U es finitodimensional y sea $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^{2k-1}(\Omega, \mathcal{L}(U))$ tal que λ_0 es un autovalor k -algebraico de \mathfrak{L} . Entonces para cada conjunto canónico $\varphi_0^{(j)}, \dots, \varphi_{r_j-1}^{(j)}$, $1 \leq j \leq \alpha$, de cadenas de Jordan de \mathfrak{L} en λ_0 existe un conjunto canónico $z_0^{(j)}, \dots, z_{r_j-1}^{(j)}$, $1 \leq j \leq \alpha$, de cadenas de Jordan por la izquierda de \mathfrak{L} en λ_0 tal que

$$\mathfrak{L}(\lambda)^{-1} = \sum_{j=1}^{\alpha} \sum_{k=1}^{r_j} (\lambda - \lambda_0)^{-k} \sum_{r=0}^{r_j-k} \varphi_{r_j-k-r}^{(j)} \cdot z_r^{(j)} + o((\lambda - \lambda_0)^{-1}).$$

2.9. Un ejemplo proveniente de una ecuación diferencial ordinaria

El propósito de esta sección es mostrar un ejemplo de una familia infinitodimensional \mathfrak{L} de operadores de Fredholm de índice cero de tal manera que el desarrollo de Laurent de \mathfrak{L}^{-1} se pueda computar explícitamente.

Tomemos un entero $n \geq 1$, un intervalo abierto $D \subset \mathbb{R}$ que contenga al 0, una función $g \in \mathcal{C}^r(D, \mathbb{R})$ para un cierto $r \geq 1$ tal que $g(0) = 0$, otra función $h \in \mathcal{C}(D \times [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, y definamos

$$f(\lambda) := (n\pi)^2 + g(\lambda), \quad \lambda \in D.$$

Consideremos, para cada $\lambda \in D$, el siguiente problema de valores en la frontera no lineal unidimensional

$$\begin{cases} -u'' = f(\lambda)u + u^2 h(\lambda, x, u, u') & \text{en } (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (2.22)$$

donde se supone que u es de clase \mathcal{C}^2 . Si llamamos U al espacio de Banach del conjunto de funciones $u \in \mathcal{C}^2([0, 1]; \mathbb{R})$ tales que $u(0) = u(1) = 0$, y $V := \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ entonces el operador

$$\frac{d^2}{dx^2} : U \rightarrow V, \quad u \mapsto u''$$

es un isomorfismo, y por el teorema de Ascoli-Arzelà,

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} \right)^{-1} : V \rightarrow V$$

es compacto. Estos resultados son bien conocidos. Entonces (2.22) es equivalente a la ecuación no lineal

$$\mathfrak{L}(\lambda)u + \mathfrak{N}(\lambda, u) = 0, \quad (\lambda, u) \in D \times V, \quad (2.23)$$

donde

$$\mathfrak{L}(\lambda)u := u + f(\lambda) \left(\frac{d^2}{dx^2} \right)^{-1} u, \quad \mathfrak{N}(\lambda, u) := \left(\frac{d^2}{dx^2} \right)^{-1} (u^2 h(\lambda, \cdot, u, u')).$$

Es fácil comprobar que $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^r(D; \Phi_0(V))$, ya que $f \in \mathcal{C}^r(D; \mathbb{R})$ y $\mathfrak{L}(\lambda)$ es una perturbación compacta de la identidad. Por consiguiente, la ecuación (2.23) se ajusta al marco abstracto que describiremos en la Parte II de esta tesis. Aquí vamos a estudiar el operador inverso \mathfrak{L}^{-1} . Llamando

$$\omega := \sqrt{f(\lambda)}$$

e integrando el problema lineal asociado de valores en la frontera, es fácil ver que para cada $\lambda \in D$ tal que $\sin \omega \neq 0$, $v \in V$, y $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\lambda)^{-1}v(x) &= v(x) + \omega \cos(\omega x) \int_0^x \sin(\omega t)v(t)dt \\ &+ \left[-\frac{\omega \cos \omega}{\sin \omega} \int_0^1 \sin(\omega t)v(t)dt + \omega \int_0^1 \cos(\omega t)v(t)dt \right] \sin(\omega x). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Nótese que $N[\mathfrak{L}(\lambda_0)] = \text{span}[\sin(n\pi \cdot)]$, y que 0 es un autovalor aislado de la familia \mathfrak{L} si y sólo si 0 es un cero aislado de g .

Supongamos que 0 es un cero que orden $k \geq 1$ de g para un cierto k que cumpla $r \geq 2k - 1$, y, como es habitual, denotemos $g_k := (k!)^{-1}g^{(k)}(0)$. Entonces 0 es un cero de orden k de $\sin \omega$, luego se sigue de (2.24) que 0 es un autovalor k -algebraico de \mathfrak{L} . Por tanto, gracias al Teorema 2.6.1, existen k operadores, únicos, $\mathfrak{R}_i \in \mathcal{L}(V)$, $-k \leq i \leq -1$, de rango finito, tales que

$$\mathfrak{R}(\lambda) := \mathfrak{L}(\lambda)^{-1} = \sum_{i=-k}^{-1} \mathfrak{R}_i \lambda^i + o(\lambda^{-1}).$$

Es más, gracias al Teorema 2.7.1, para cada $-k \leq n \leq -1$, el operador $c(\mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1}, 0, n) \in \mathcal{L}(V)$ tiene rango finito y

$$\text{tr } c(\mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1}, 0, n) = \begin{cases} 0, & -k \leq n \leq -2, \\ \chi[\mathfrak{L}; 0], & n = -1. \end{cases}$$

Resulta que en este caso los coeficientes \mathfrak{R}_i se pueden calcular directamente a partir de (2.24). Por ejemplo, como

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^k (\sin \omega)^{-1} = (-1)^n 2n\pi g_k^{-1},$$

se sigue que para cada $v \in V$ y $x \in [0, 1]$,

$$\mathfrak{R}_{-k}v(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^k \mathfrak{L}^{-1}(\lambda)v(x) = -2n^2\pi^2 g_k^{-1} \int_0^1 \sin(n\pi t)v(t)dt \sin(n\pi x).$$

Análogamente, también se pueden calcular explícitamente todos los demás coeficientes \mathfrak{A}_i . Ahora,

$$\mathfrak{L}'(\lambda)\mathfrak{L}(\lambda)^{-1} = kg_k \left(\frac{d^2}{dx^2} \right)^{-1} \mathfrak{A}_{-k} \lambda^{-1} + o(\lambda^{-1})$$

y como

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} \right)^{-1} \sin(n\pi \cdot) = -(n\pi)^{-2} \sin(n\pi \cdot),$$

se sigue que

$$c(\mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1}, 0, -1)v(x) = 2k \int_0^1 \sin(n\pi t)v(t)dt \sin(n\pi x), \quad v \in V, \quad x \in [0, 1],$$

de donde $c(\mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1}, 0, -1)$ es un operador de rango uno cuya traza es k porque

$$c(\mathfrak{L}'\mathfrak{L}^{-1}, 0, -1) \sin(n\pi \cdot) = k \sin(n\pi \cdot).$$

Luego por el Teorema 2.7.1, $\chi[\mathfrak{L}; 0] = k$.

Capítulo 3

Caracterización de la existencia de la forma local de Smith

Este capítulo enseña las relaciones que hay entre las construcciones de la multiplicidad dada por transversalización (véase el Capítulo 2) y dada por cadenas de Jordan, para concluir que son equivalentes. Usamos esos resultados para caracterizar cuándo las longitudes de las cadenas de Jordan de una familia \mathcal{L} de clase C^r de operadores de Fredholm de índice cero están uniformemente acotadas superiormente, y cuándo existe una forma local de Smith en un autovalor λ_0 de \mathcal{L} dado. Nuestro resultado principal establece que existe una forma local de Smith si y sólo si λ_0 es un autovalor algebraico de \mathcal{L} . Este capítulo está basado en [45].

3.1. Introducción

Las cadenas de Jordan generalizadas fueron introducidas en la década de 1940 para desarrollar una teoría espectral dentro del contexto de las matrices polinomiales (véase por ejemplo, I. Gohberg et al. [25] y las referencias allí citadas). Desde entonces, se ha comprobado que constituyen una potente herramienta técnica en un gran número de áreas; entre ellas, para estudiar la estructura del conjunto de soluciones de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales (véase por ejemplo, J. T. Wloka et al. [67]), para analizar problemas de autovalores no-lineales en el contexto de teoría de bifurcación (consúltese P. J. Rabier [58]), o para estudiar la completitud de autovectores de familias no lineales (consúltese A. Friedman and M. Shinbrot [21]).

Las cadenas de Jordan aparecieron por primera vez definidas para familias polinomiales; desde entonces se han propuesto varias generalizaciones: para familias holomorfas (véase I. Gohberg and L. Rodman [28]), familias meromorfas (véase J. A. Ball et al. [7]), familias de clase C^∞ (véase P. J. Rabier [58]), y familias de clase C^r (véanse P. Sarreither [63] y también [45]). Nosotros seguiremos la construcción descrita en [45] y anticipada en [44].

Estrechamente relacionada con el concepto de cadena de Jordan está la construcción de la forma local de Smith. Aunque la extensión de la definición de cadena de Jordan al caso C^r es trivial, la construcción de la forma local de Smith para familias C^r , y especialmente la caracterización de su existencia, exhibe ciertas dificultades técnicas.

Cuando se trata de matrices polinomiales, la existencia de una *forma local de Smith* es un caso particular de la *forma global de Smith* descrita en I. Gohberg et al. [25, Chapter S1]. Aunque estas técnicas pueden adaptarse con facilidad para construir una forma local de Smith para familias de clase C^∞ en un autovalor λ_0 donde ninguna cadena de Jordan se puede prolongar indefinidamente (véase P. J. Rabier [58]), fue necesario utilizar la teoría de transversalización de J. López-Gómez [43, Chapter 4] descrita en la Sección 2.2 para proporcionar un criterio intrínseco que decidiera si las longitudes de las cadenas de Jordan de una familia C^∞ arbitraria están uniformemente acotadas superiormente, lo que, al mismo tiempo, caracteriza la existencia de una forma local de Smith en λ_0 .

En este capítulo se va a mostrar que una familia \mathcal{L} de clase C^r tal que $\mathcal{L}(\lambda_0)$ es Fredholm de índice cero posee una forma local de Smith en λ_0 si y sólo si λ_0 es un autovalor k -algebraico de \mathcal{L} para algún $k \leq r$. La clave de nuestro enfoque dado por transversalización reside en que la estructura de las cadenas de Jordan en un autovalor transversal es extremadamente simple.

Este capítulo se distribuye de la siguiente manera. En la Sección 3.2 recordamos el concepto de cadena de Jordan. La Sección 3.3 explica los conceptos de multiplicidades parciales, multiplicidad basada en cadenas de Jordan, y conjuntos canónicos de cadenas de Jordan, y mostramos que existe una forma local de Smith de una función C^∞ bajo la hipótesis de que no haya cadenas de Jordan arbitrariamente largas. En la Sección 3.4 explicamos las relaciones entre los conceptos de multiplicidad dada por cadenas de Jordan y dada por transversalización. Toda esta información será juntada en la Sección 3.5 para probar el resultado principal de este capítulo, a saber, la caracterización de la existencia de la forma local de Smith.

3.2. Cadenas de Jordan

En esta sección recordamos algunos conceptos y fijamos notación. A lo largo de este capítulo, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\Omega \subset \mathbb{K}$ es un abierto tal que $\lambda_0 \in \Omega$, U y V son dos espacios de Banach sobre \mathbb{K} , y $\mathcal{L} : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(U, V)$ es una aplicación de clase C^r , para algún $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, tal que $N[\mathcal{L}(\lambda_0)] \neq \{0\}$ y $\mathcal{L}(\lambda_0) \in \Phi_0(U, V)$. En lo que sigue, $\Phi_0(U, V) \subset \mathcal{L}(U, V)$ representa la clase de operadores de Fredholm de índice cero. Usaremos la siguiente notación para los coeficientes de Taylor de \mathcal{L} en λ_0

$$\mathcal{L}_j := \frac{1}{j!} \mathcal{L}^{(j)}(\lambda_0), \quad 0 \leq j < r + 1.$$

Definición 3.2.1 *Todo conjunto ordenado de $s+1$ vectores $(u_0, \dots, u_s) \in U^{s+1}$ con $0 \leq s < r+1$, $u_0 \neq 0$, y*

$$\sum_{i=0}^j \mathcal{L}_i u_{j-i} = 0, \quad 0 \leq j \leq s, \quad (3.1)$$

recibe el nombre de cadena de Jordan de longitud $s+1$ de la familia \mathcal{L} en λ_0 que comienza en u_0 .

Cuando $j = 0$, (3.1) se reduce a $\mathcal{L}_0 u_0 = 0$. Por eso λ_0 se dice *autovalor* de \mathcal{L} y u_0 se dice *autovector*.

Nótese también que en el caso especial en que $U \subset V$ y $\mathfrak{L}(\lambda) = \lambda i - T$, $\lambda \in \mathbb{K}$, donde $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $i \in \mathcal{L}(U, V)$ es la inclusión, entonces (3.1) se reduce a

$$Tu_0 = \lambda_0 u_0, \quad Tu_1 = \lambda_0 u_1 + u_0, \quad \dots, \quad Tu_s = \lambda_0 u_s + u_{s-1},$$

y, por tanto, (u_0, \dots, u_s) es una cadena de Jordan del operador T en el autovalor λ_0 en sentido clásico.

Observación 3.2.2 Si (u_0, \dots, u_s) es una cadena de Jordan, también lo es (u_0, \dots, u_p) para cualquier $0 \leq p \leq s$.

Definición 3.2.3 El rango de $u_0 \in N[\mathfrak{L}_0] \setminus \{0\}$, denotado por $\text{rank } u_0$, se define como la longitud máxima de las cadenas de Jordan que comienzan en u_0 si tales longitudes están acotadas superiormente, mientras que $\text{rank } u_0 := \infty$ en caso contrario.

Supongamos que $U = V$, $T \in \mathcal{L}(U)$ es compacto, y $\mathfrak{L}(\lambda) = \lambda I - T$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces para cada autovalor $\lambda_0 \neq 0$ de \mathfrak{L} y $u_0 \in N[T - \lambda_0 I] \setminus \{0\}$, el rango de u_0 está acotado superiormente por el ascendente algebraico de T en λ_0 , es decir, por el menor número natural $\nu \geq 1$ tal que $N[(T - \lambda_0 I)^\nu] = N[(T - \lambda_0 I)^{\nu+1}]$.

El siguiente ejemplo muestra que en general el rango de un autovector no es necesariamente finito: si $U = V = \mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\lambda_0 = 0$, y

$$\mathfrak{L}(\lambda) := \begin{cases} e^{-\lambda^{-2}} & \text{si } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{si } \lambda = 0, \end{cases}$$

entonces $\mathfrak{L}_j = 0$ para todo $j \geq 0$, luego $\text{rank } u_0 = \infty$ para todo $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ya que para cada $n \geq 1$, $(u_0, \dots, u_0) \in \mathbb{R}^n$ es una cadena de Jordan de longitud n de \mathfrak{L} en $\lambda_0 = 0$.

3.3. Conjuntos canónicos y forma local de Smith

Sea $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^r(\Omega, \mathcal{L}(U, V))$ para algún $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Esta sección supone que la longitud de todas las cadenas de Jordan de \mathfrak{L} en λ_0 está uniformemente acotada superiormente por un entero k_1 con $1 \leq k_1 \leq r$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que k_1 es óptimo, es decir, existe un $u_{0,1} \in N[\mathfrak{L}_0] \setminus \{0\}$ con $\text{rank } u_{0,1} = k_1$. Vamos a proceder inductivamente, así que suponemos que hemos elegido $i - 1$ vectores linealmente independientes, $u_{0,1}, \dots, u_{0,i-1}$, con $2 \leq i \leq n := \dim N[\mathfrak{L}_0]$, y tomamos $u_{0,i} \in C_i := N[\mathfrak{L}_0] \setminus \text{span}[u_{0,1}, \dots, u_{0,i-1}]$ tal que

$$\text{rank } u_{0,i} = k_i := \max\{\text{rank } u : u \in C_i\} \leq k_{i-1}.$$

Se repite este proceso hasta que se hayan elegido n elementos $u_{0,1}, \dots, u_{0,n}$. Ahora, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ sea $(u_{0,i}, u_{1,i}, \dots, u_{k_i-1,i})$ cualquier cadena de Jordan de \mathfrak{L} en λ_0 de longitud k_i que comience en $u_{0,i}$. La familia ordenada

$$[u_{0,1}, \dots, u_{k_1-1,1}; \dots; u_{0,i}, \dots, u_{k_i-1,i}; \dots; u_{0,n}, \dots, u_{k_n-1,n}]$$

recibe el nombre el conjunto canónico de cadenas de Jordan de \mathfrak{L} en λ_0 . Por construcción, $k_1 \geq \dots \geq k_n \geq 1$, y se obtiene el siguiente resultado; véase P. J. Rabier [58].

Proposición 3.3.1 *Los enteros k_1, \dots, k_n son independientes del conjunto canónico de cadenas de Jordan.*

Así pues, el siguiente concepto de multiplicidad es consistente; véase P. J. Rabier [58].

Definición 3.3.2 *Los enteros k_1, \dots, k_n reciben el nombre de multiplicidades parciales de \mathcal{L} en λ_0 , y $M[\mathcal{L}; \lambda_0] := \sum_{j=1}^n k_j$ se conoce como la multiplicidad de \mathcal{L} en λ_0 .*

Se sabe que este concepto de multiplicidad es el único que cumple los axiomas del Capítulo 1 (véase P. J. Rabier [58]); en particular, veremos en la Sección 3.4 que esta multiplicidad coincide con la definida en la Sección 2.2. Todos estos conceptos y resultados son clásicos (véanse M. V. Keldyš [33], A. S. Markus and E. I. Sigal [53], I. C. Gohberg and E. I. Sigal [29], I. Gohberg and L. Rodman [28], o I. Gohberg et al. [25]). El siguiente resultado muestra la invariancia de las multiplicidades parciales bajo multiplicación por familias de isomorfismos; está probado en I. Gohberg et al. [25, Proposition 1.11] para familias polinomiales, y en P. J. Rabier [58] para familias C^∞ , pero la misma demostración es válida para el caso C^r .

Proposición 3.3.3 *Sea $\mathcal{L} \in C^r(\Omega, \mathcal{L}(U, V))$ tal que la longitud de todas las cadenas de Jordan de \mathcal{L} en λ_0 está acotada superiormente por algún entero $k \leq r$. Sean \tilde{U}, \tilde{V} dos espacios de Banach y $\mathfrak{E} \in C^r(\Omega, \mathcal{L}(V, \tilde{V}))$, $\mathfrak{F} \in C^r(\Omega, \mathcal{L}(\tilde{U}, U))$ dos familias de operadores tales que $\mathfrak{E}(\lambda_0)$ y $\mathfrak{F}(\lambda_0)$ son isomorfismos. Entonces las multiplicidades parciales de \mathcal{L} en λ_0 son las mismas que las de $\mathfrak{E}\mathcal{L}\mathfrak{F}$. En particular, $M[\mathcal{L}; \lambda_0] = M[\mathfrak{E}\mathcal{L}\mathfrak{F}; \lambda_0]$.*

Necesitaremos una versión ligeramente diferente de este resultado de invariancia.

Proposición 3.3.4 *Supongamos que \tilde{U} es un espacio de Banach, y sean*

$$\mathcal{L} \in C^r(\Omega, \mathcal{L}(U, V)), \quad \mathfrak{M} \in C^r(\Omega, \mathcal{L}(U, \tilde{U})), \quad \mathfrak{E} \in C(\Omega, \mathcal{L}(\tilde{U}, V))$$

tales que $\mathfrak{E}(\lambda_0)$ es un isomorfismo, y $\mathcal{L} = \mathfrak{E}\mathfrak{M}$. Entonces para todo $0 \leq s < r + 1$, \mathcal{L} y \mathfrak{M} tienen las mismas cadenas de Jordan en λ_0 de longitud s .

Demostración. Por simetría será suficiente probar que toda cadena de Jordan de \mathfrak{M} en λ_0 es también una cadena de Jordan de \mathcal{L} en λ_0 . Sean $0 \leq s < r + 1$, y (u_0, \dots, u_s) una cadena de Jordan de \mathfrak{M} en λ_0 . Vamos a probar por inducción sobre s que (u_0, \dots, u_s) es una cadena de Jordan de \mathcal{L} en λ_0 . Para $s = 0$ esto es obvio ya que $\mathfrak{M}_0 u_0 = 0$ implica $\mathcal{L}_0 u_0 = \mathfrak{E}_0 \mathfrak{M}_0 u_0 = 0$.

Supongamos que el resultado es cierto para un cierto $s - 1$ con $s < r + 1$ y probémoslo para s . Tenemos entonces que (u_0, \dots, u_s) es una cadena de Jordan de \mathfrak{M} en λ_0 , y por la Observación 3.2.2 y la hipótesis de inducción, (u_0, \dots, u_{s-1}) es una cadena de Jordan de \mathfrak{M} y de \mathcal{L} en λ_0 . Sólo

hace probar, pues, que $\sum_{i=0}^s \mathfrak{L}_i u_{s-i} = 0$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^s \mathfrak{L}_i u_{s-i} &= \mathfrak{L}_0 u_s + \sum_{i=1}^s \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{\mathfrak{L}(\lambda) - \sum_{j=0}^{i-1} (\lambda - \lambda_0)^j \mathfrak{L}_j}{(\lambda - \lambda_0)^i} u_{s-i} \\
&= \mathfrak{L}_0 u_s + \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \left[\sum_{i=1}^s (\lambda - \lambda_0)^{-i} \mathfrak{L}(\lambda) u_{s-i} - \sum_{k=-s}^{-1} (\lambda - \lambda_0)^k \sum_{j=0}^{s+k} \mathfrak{L}_j u_{s+k-j} \right] \\
&= \mathfrak{L}_0 u_s + \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \sum_{i=1}^s (\lambda - \lambda_0)^{-i} \mathfrak{L}(\lambda) u_{s-i} \\
&= \mathfrak{L}_0 u_s + \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \left[\sum_{i=1}^s (\lambda - \lambda_0)^{-i} \mathfrak{E}(\lambda) \mathfrak{M}(\lambda) u_{s-i} - \mathfrak{E}(\lambda) \sum_{k=-s}^{-1} (\lambda - \lambda_0)^k \sum_{j=0}^{s+k} \mathfrak{M}_j u_{s+k-j} \right] \\
&= \mathfrak{L}_0 u_s + \sum_{i=1}^s \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \mathfrak{E}(\lambda) \frac{\mathfrak{M}(\lambda) - \sum_{j=0}^{i-1} (\lambda - \lambda_0)^j \mathfrak{M}_j}{(\lambda - \lambda_0)^i} u_{s-i} \\
&= \mathfrak{E}_0 \mathfrak{M}_0 u_s + \sum_{i=1}^s \mathfrak{E}_0 \mathfrak{M}_i u_{s-i} = \mathfrak{E}_0 \sum_{i=0}^s \mathfrak{M}_i u_{s-i} = 0.
\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. ■

En el siguiente resultado, y de hecho en todo este capítulo, vamos a identificar un operador lineal entre espacios de la misma dimensión finita con la matriz cuadrada que lo representa. En él se establece la existencia de la forma local de Smith para familias C^∞ de matrices cuadradas; véase P. J. Rabier [58] para una demostración.

Proposición 3.3.5 *Sea $\mathfrak{L} \in C^\infty(\Omega, \mathcal{L}(U, V))$, donde U y V tienen dimensión finita m . Supongamos que ninguna cadena de Jordan de \mathfrak{L} en λ_0 se puede prolongar indefinidamente. Entonces \mathfrak{L} posee una forma local de Smith en λ_0 , es decir, $\mathfrak{L}(\lambda)$ admite una descomposición de la forma*

$$\mathfrak{L}(\lambda) = \mathfrak{E}(\lambda) \mathfrak{D}(\lambda) \mathfrak{F}(\lambda), \quad \lambda \simeq \lambda_0, \quad (3.2)$$

donde \mathfrak{E} y \mathfrak{F} son matrices $m \times m$ de clase C^∞ tales que $\mathfrak{E}(\lambda_0)$ y $\mathfrak{F}(\lambda_0)$ son isomorfismos, y \mathfrak{D} es una matriz diagonal de la forma

$$\mathfrak{D}(\lambda) = \text{diag} \{ (\lambda - \lambda_0)^{k_1}, \dots, (\lambda - \lambda_0)^{k_n}, 1, \dots, 1 \},$$

donde $k_1 \geq \dots \geq k_n \geq 1$ son las multiplicidades parciales de \mathfrak{L} en λ_0 . Además, si \mathfrak{L} es analítica entonces \mathfrak{E} y \mathfrak{F} se pueden tomar analíticas.

3.4. Construcción de conjuntos canónicos de cadenas de Jordan

Es esta sección y en la siguiente usaremos la teoría de la multiplicidad algebraica χ descrita en la Sección 2.2. Véase J. López-Gómez [43, Section 4.2] para una demostración del siguiente resultado.

Proposición 3.4.1 *Supongamos que λ_0 es un autovalor k -transversal de $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^r(\Omega, \Phi_0(U, V))$, para un cierto entero $k \leq r$, y llamemos*

$$\ell_i := \dim \mathfrak{L}_i(N[\mathfrak{L}_0] \cap \cdots \cap N[\mathfrak{L}_{i-1}]), \quad 1 \leq i \leq k.$$

Entonces $\dim N[\mathfrak{L}_0] = \ell_1 + \cdots + \ell_k$, $\ell_k \neq 0$ y $N[\mathfrak{L}_0] \cap \cdots \cap N[\mathfrak{L}_k] = \{0\}$.

El siguiente resultado describe las cadenas de Jordan en autovalores transversales.

Proposición 3.4.2 *Supongamos que λ_0 es un autovalor k -transversal de $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^r(\Omega, \Phi_0(U, V))$ para un cierto $1 \leq k \leq r$. Entonces, para cada entero $0 \leq s \leq r$, el conjunto ordenado $(u_0, \dots, u_s) \in U^{s+1}$ es una cadena de Jordan de \mathfrak{L} en λ_0 si y sólo si $u_0 \neq 0$ y*

$$u_j \in \bigcap_{i=0}^{s-j} N[\mathfrak{L}_i], \quad 0 \leq j \leq s. \quad (3.3)$$

En particular, no hay cadenas de Jordan de longitud superior a k .

Demostración. Supongamos $0 \leq s \leq r$, $u_0 \neq 0$ y (3.3). Entonces

$$\sum_{i=0}^j \mathfrak{L}_{j-i} u_i = 0, \quad 0 \leq j \leq s, \quad (3.4)$$

luego (u_0, \dots, u_s) es una cadena de Jordan de \mathfrak{L} . Supongamos ahora que $0 \leq s \leq r$ y que (u_0, \dots, u_s) es una cadena de Jordan de \mathfrak{L} en λ_0 . Entonces $u_0 \neq 0$ y se cumple (3.4). Probemos (3.3) por inducción sobre s . Se sigue de (3.4) que $\mathfrak{L}_0 u_0 = 0$, luego se cumple (3.3) para $s = 0$. Supongamos que para cualquier cadena de Jordan (y_0, \dots, y_{s-1}) de longitud s se tenga

$$y_j \in \bigcap_{i=0}^{s-1-j} N[\mathfrak{L}_i], \quad 0 \leq j \leq s-1,$$

y sea (u_0, \dots, u_s) una cadena de Jordan de longitud $s+1$. Por la Observación 3.2.2, (u_0, \dots, u_{s-1}) es una cadena de Jordan de longitud s , luego por la hipótesis de inducción,

$$u_j \in \bigcap_{i=0}^{s-1-j} N[\mathfrak{L}_i], \quad 0 \leq j \leq s-1. \quad (3.5)$$

Por otra parte, al particularizar (3.4) en $j = s$ obtenemos

$$\mathfrak{L}_0 u_s + \sum_{i=1}^s \mathfrak{L}_i u_{s-i} = 0. \quad (3.6)$$

Gracias a (3.5) se tiene que

$$\mathfrak{L}_0 u_s \in R[\mathfrak{L}_0], \quad \mathfrak{L}_i u_{s-i} \in \mathfrak{L}_i (N[\mathfrak{L}_0] \cap \cdots \cap N[\mathfrak{L}_{i-1}]), \quad 1 \leq i \leq s.$$

Así pues, como λ_0 es un autovalor k -transversal de \mathfrak{L} , la Definición 2.2.1 y (3.6) implican que $\mathfrak{L}_{s-j}u_j = 0$, $0 \leq j \leq s$. Por la Proposición 3.4.1, este argumento también funciona cuando $s > k$. Al combinar estas relaciones con (3.5) obtenemos $u_j \in \bigcap_{i=0}^{s-j} N[\mathfrak{L}_i]$, $0 \leq j \leq s$, luego se cumple (3.3). Finalmente, por la Proposición 3.4.1, $\bigcap_{i=0}^k N[\mathfrak{L}_i] = \{0\}$, lo que implica que $s < k$. ■

El resto de los resultados de esta sección van a relacionar los invariantes de la teoría de la multiplicidad algebraica χ descrita en la Sección 2.2 con los de la teoría de las cadenas de Jordan de la Sección 3.3. Recordemos que $n = \dim N[\mathfrak{L}_0]$.

Proposición 3.4.3 *Supongamos que λ_0 es un autovalor k -transversal de $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^r(\Omega, \Phi_0(U, V))$ para ciertos $1 \leq k \leq r$. Pongamos*

$$\ell_j := \dim \mathfrak{L}_j(N[\mathfrak{L}_0] \cap \cdots \cap N[\mathfrak{L}_{j-1}]), \quad 1 \leq j \leq k.$$

Entonces todo conjunto canónico de cadenas de Jordan de \mathfrak{L} en λ_0 está formado exactamente por ℓ_j cadenas de Jordan de longitud j , para cada $j \in \{1, \dots, k\}$; en otras palabras, las multiplicidades parciales vienen dadas por

$$\underbrace{\underbrace{k, \dots, k}_{\ell_k}, \underbrace{k-1, \dots, k-1}_{\ell_{k-1}}, \dots, \underbrace{2, \dots, 2}_{\ell_2}, \underbrace{1, \dots, 1}_{\ell_1}}_{n = \ell_k + \dots + \ell_1}. \quad (3.7)$$

Demostración. Gracias a la Proposición 3.4.2, ya sabemos que \mathfrak{L} no admite cadenas de Jordan de longitud superior a k . Para cada $1 \leq i \leq k$ consideremos un subespacio finitodimensional $U_i \subset U$ tal que

$$N[\mathfrak{L}_0] \cap \cdots \cap N[\mathfrak{L}_{i-1}] = U_i \oplus (N[\mathfrak{L}_0] \cap \cdots \cap N[\mathfrak{L}_i]).$$

Es fácil ver entonces que $\mathfrak{L}_i(N[\mathfrak{L}_0] \cap \cdots \cap N[\mathfrak{L}_{i-1}]) = \mathfrak{L}_i(U_i)$ y $\ell_i = \dim \mathfrak{L}_i(U_i) = \dim U_i$ para $1 \leq i \leq k$. Por la Proposición 3.4.1, $N[\mathfrak{L}_0] = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ y $n = \ell_1 + \cdots + \ell_k$. Para cada $1 \leq j \leq k$, sea

$$\left\{ u_{\sum_{i=j+1}^k \ell_i + 1}, \dots, u_{\sum_{i=j}^k \ell_i} \right\}$$

una base de U_j . Entonces $\{u_1, \dots, u_n\}$ es una base de $N[\mathfrak{L}_0]$. Por la Proposición 3.4.2, es fácil ver que el siguiente conjunto ordenado es un conjunto canónico de cadenas de Jordan de \mathfrak{L} en λ_0

$$\left[\underbrace{u_1, 0, \dots, 0}_k; \cdots; \underbrace{u_{\ell_k}, 0, \dots, 0}_k; \underbrace{u_{\ell_k+1}, 0, \dots, 0}_{k-1}; \cdots; \underbrace{u_{\ell_k+\ell_{k-1}}, 0, \dots, 0}_{k-1}; \cdots; \right. \\ \left. \underbrace{u_{\ell_k+\dots+\ell_3+1}, 0}_2; \cdots; \underbrace{u_{\ell_k+\dots+\ell_3+\ell_2}, 0}_2; \underbrace{u_{\ell_k+\dots+\ell_3+\ell_2+1}}_1; \cdots; \underbrace{u_{\ell_k+\dots+\ell_2+\ell_1}}_1 \right],$$

y por tanto está formado por ℓ_k cadenas de Jordan de longitud k , ℓ_{k-1} cadenas de Jordan de longitud $k-1, \dots$, y ℓ_1 cadenas de Jordan de longitud 1. La Proposición 3.3.1 concluye la demostración. ■

El siguiente resultado es una consecuencia fácil de las Proposiciones 3.3.5 y 3.4.3.

Corolario 3.4.4 *Supongamos que U y V tienen dimensión finita m , y que λ_0 es un autovalor k -transversal de la familia \mathfrak{L} de clase C^∞ , para un cierto entero $k \geq 1$. Entonces \mathfrak{L} admite una forma local de Smith $\mathfrak{L} = \mathfrak{E}\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ con*

$$\mathfrak{D}(\lambda) = \text{diag} \left\{ \underbrace{(\lambda - \lambda_0)^k, \dots, (\lambda - \lambda_0)^k}_{\ell_k}, \dots, \underbrace{\lambda - \lambda_0, \dots, \lambda - \lambda_0}_{\ell_1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{m-n} \right\}, \quad (3.8)$$

es decir, las multiplicidades parciales de \mathfrak{L} en λ_0 vienen dadas por (3.7). En particular, $\det \mathfrak{L}$ tiene un cero en λ_0 de orden $M[\mathfrak{L}; \lambda_0] = \sum_{j=1}^k j\ell_j = \chi[\mathfrak{L}; \lambda_0]$.

Para autovalores generales (no transversales) se cumple el siguiente resultado, que relaciona los invariantes de las construcciones de la multiplicidad basada en una transversalización y de la basada en cadenas de Jordan. En particular, prueba que ambas multiplicidades coinciden.

Proposición 3.4.5 *Supongamos que λ_0 es un autovalor algebraico de \mathfrak{L} de orden $1 \leq k \leq r$, y sea $\Phi : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{L}(U)$ cualquier polinomio que cumpla $\Phi(\lambda_0) = I_U$ y para el cual λ_0 es un autovalor k -transversal de $\mathfrak{L}^\Phi := \mathfrak{L}\Phi$. Entonces las longitudes de las cadenas de Jordan de \mathfrak{L}^Φ en λ_0 en cualquier conjunto canónico coinciden con las de \mathfrak{L} en λ_0 . Por tanto, llamando*

$$\ell_j := \dim \mathfrak{L}_j^\Phi (N[\mathfrak{L}_0^\Phi] \cap \dots \cap N[\mathfrak{L}_{j-1}^\Phi]), \quad 1 \leq j \leq k,$$

se tiene que cualquier conjunto canónico de cadenas de Jordan de \mathfrak{L} posee ℓ_k cadenas de longitud k , ℓ_{k-1} cadenas de longitud $k-1, \dots$, y ℓ_1 cadenas de longitud 1. En particular, si U y V tienen dimensión finita m y \mathfrak{L} es de clase C^∞ entonces \mathfrak{L} admite una forma local de Smith $\mathfrak{L} = \mathfrak{E}\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ con (3.8).

Demostración. La existencia de Φ está garantizada por el Teorema 2.2.4, así como la independencia de ℓ_j con respecto de la familia transversalizadora Φ . Por la Proposición 3.4.3, todo conjunto canónico de cadenas de Jordan de \mathfrak{L}^Φ consta de ℓ_j cadenas de Jordan de longitud j para cada $1 \leq j \leq k$. Gracias a las Proposiciones 3.3.1 y 3.3.3, todo conjunto canónico de cadenas de Jordan de \mathfrak{L} consta de ℓ_j cadenas de Jordan de longitud j para cada $1 \leq j \leq k$. Con esto queda probada la primera parte del enunciado.

Ahora supongamos que $\dim U = \dim V = m$ y que la familia \mathfrak{L} es de clase C^∞ . Por el Corolario 3.4.4 tenemos entonces que \mathfrak{L}^Φ admite una forma local de Smith $\mathfrak{L}^\Phi = \mathfrak{E}\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ donde \mathfrak{D} viene dada por (3.8). Luego para $\lambda \simeq \lambda_0$ se tiene que

$$\mathfrak{L}(\lambda) = \mathfrak{L}^\Phi(\lambda)\Phi(\lambda)^{-1} = \mathfrak{E}(\lambda)\mathfrak{D}(\lambda)\mathfrak{F}(\lambda)\Phi(\lambda)^{-1},$$

lo que concluye la demostración. ■

3.5. Caracterización de la existencia de la forma local de Smith

Presentamos el principal resultado finitodimensional de este capítulo.

Teorema 3.5.1 *Supongamos que $\dim U = \dim V = m < \infty$.*

Si $\mathcal{L} \in C^\infty(\Omega, \mathcal{L}(U, V))$ entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

C1. *\mathcal{L} posee una forma local Smith en λ_0 , es decir, existen $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ familias C^∞ de matrices $m \times m$ definidas en un entorno de λ_0 tales que $\mathfrak{E}(\lambda_0)$ y $\mathfrak{F}(\lambda_0)$ son isomorfismos, $\mathcal{L}(\lambda) = \mathfrak{E}(\lambda)\mathfrak{D}(\lambda)\mathfrak{F}(\lambda)$ para $\lambda \simeq \lambda_0$, y*

$$\mathfrak{D}(\lambda) = \text{diag} \{ (\lambda - \lambda_0)^{k_1}, \dots, (\lambda - \lambda_0)^{k_n}, 1, \dots, 1 \} \quad (3.9)$$

para ciertos enteros $k_1, \dots, k_n \geq 1$, y $n = \dim N[\mathcal{L}_0]$.

C2. *$\det \mathcal{L}$ tiene un cero de orden finito en λ_0 .*

C3. *λ_0 es un autovalor algebraico de \mathcal{L} .*

C4. *Las longitudes de las cadenas de Jordan de \mathcal{L} en λ_0 están uniformemente acotadas superiormente, es decir,*

$$\sup_{u \in N[\mathcal{L}_0] \setminus \{0\}} \text{rank } u < \infty.$$

C5. *Ninguna cadena de Jordan de \mathcal{L} en λ_0 se puede prolongar indefinidamente, es decir, no existe ninguna sucesión u_0, u_1, \dots en U con $u_0 \neq 0$ tal que*

$$\sum_{i=0}^j \mathcal{L}_i u_{j-i} = 0, \quad j \geq 0.$$

C6. *La multiplicidad $\chi[\mathcal{L}; \lambda_0]$ es finita.*

Además, en este caso, y si \mathcal{L} es analítica, entonces podemos escoger \mathfrak{E} y \mathfrak{F} analíticas.

Cuando \mathcal{L} es de clase C^r para algún $r \in \mathbb{N}$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

D1. *\mathcal{L} posee una forma local de Smith en λ_0 , es decir, existen familias continuas $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ de matrices $m \times m$ definidas en un entorno de λ_0 tales que $\mathfrak{E}(\lambda_0)$ y $\mathfrak{F}(\lambda_0)$ son isomorfismos, $\mathcal{L}(\lambda) = \mathfrak{E}(\lambda)\mathfrak{D}(\lambda)\mathfrak{F}(\lambda)$ para $\lambda \simeq \lambda_0$, y (3.9) para ciertos enteros $1 \leq k_1, \dots, k_n \leq r$, y $n = \dim N[\mathcal{L}_0]$.*

D2. *λ_0 es un autovalor algebraico de \mathcal{L} de orden $k \leq r$.*

D3. *Las longitudes de todas las cadenas de Jordan de \mathcal{L} en λ_0 están acotadas superiormente por $k \leq r$.*

D4. *La multiplicidad $\chi[\mathcal{L}; \lambda_0]$ existe y es finita.*

Además, en este caso podemos escoger que \mathfrak{E} sea de clase C^{r-k} y \mathfrak{F} sea analítica.

Demostración. Primero suponemos que \mathfrak{L} es de clase \mathcal{C}^∞ y demostramos la equivalencia C1–C6.

C1 implica C2: Los hechos $\mathfrak{L} = \mathfrak{E}\mathfrak{D}\mathfrak{F}$ y (3.9) implican

$$\det \mathfrak{L}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{k_1 + \dots + k_n} \det \mathfrak{E}(\lambda) \det \mathfrak{F}(\lambda), \quad \lambda \in \Omega,$$

con $\det \mathfrak{E}(\lambda_0) \det \mathfrak{F}(\lambda_0) \neq 0$.

C2 implica C3: Supongamos que $\det \mathfrak{L}$ tiene un cero de orden $\chi \in \mathbb{N}$ en λ_0 . Entonces existe $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{K})$ tal que $a(\lambda_0) \neq 0$ y $\det \mathfrak{L}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^\chi a(\lambda)$ para $\lambda \in \Omega$. Por otra parte, la desigualdad de T. Kato [32, Remark I.4.2], nos dice que para cualquier norma en \mathbb{K}^m existe una constante $\gamma > 0$ tal que para cada $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m)$ invertible, se cumple la siguiente estimación

$$\|T^{-1}\| \leq \gamma \frac{\|T\|^{m-1}}{|\det T|}.$$

Con estos ingredientes es fácil ver que para algún $C > 0$, $\|\mathfrak{L}(\lambda)^{-1}\| \leq C|\lambda - \lambda_0|^{-\chi}$ para todo λ en un entorno perforado de λ_0 . Por tanto, λ_0 es un autovalor algebraico de \mathfrak{L} de orden $k \leq \chi$.

C3 implica C4: Supongamos que λ_0 es un autovalor k -algebraico de \mathfrak{L} . Gracias a la Proposición 3.4.5, la longitud de cualquier cadena de Jordan de \mathfrak{L} en λ_0 está acotada superiormente por k .

C4 implica C5 es obvio, *C5 implica C1* es la Proposición 3.3.5 y *C3 equivale a C6* es la Definición 2.2.5. Esto completa la demostración del teorema en el caso en que \mathfrak{L} es \mathcal{C}^∞ .

Ahora supongamos que \mathfrak{L} es de clase \mathcal{C}^r para un cierto $r \in \mathbb{N}$.

D1 implica D2: Si $\mathfrak{L} = \mathfrak{E}\mathfrak{D}\mathfrak{F}$, donde \mathfrak{E} y \mathfrak{F} son familias continuas de matrices $m \times m$ que son invertibles cerca de λ_0 , y (3.9), entonces

$$\mathfrak{D}(\lambda)^{-1} = \text{diag} \{ (\lambda - \lambda_0)^{-k_1}, \dots, (\lambda - \lambda_0)^{-k_n}, 1, \dots, 1 \}, \quad \lambda \simeq \lambda_0, \quad \lambda \neq \lambda_0,$$

y es fácil ver que $\|\mathfrak{L}(\lambda)^{-1}\| \leq C|\lambda - \lambda_0|^{-k}$ para cualquier λ en un entorno perforado de λ_0 , para una cierta constante $C > 0$, y $k := \max\{k_1, \dots, k_n\}$.

D2 implica D1: Definimos para $\lambda \simeq \lambda_0$,

$$\tilde{\mathfrak{L}}(\lambda) := \sum_{i=0}^k (\lambda - \lambda_0)^i \mathfrak{L}_i, \quad \tilde{\mathfrak{F}}(\lambda) := \tilde{\mathfrak{L}}(\lambda) \mathfrak{L}(\lambda)^{-1}.$$

Afirmamos que $\tilde{\mathfrak{F}}$ es de clase \mathcal{C}^{r-k} en un entorno de λ_0 . En efecto, $\tilde{\mathfrak{L}} - \mathfrak{L}$ es de clase \mathcal{C}^r y se anulan todas sus derivadas en λ_0 hasta orden k ; por tanto,

$$\mathfrak{R}(\lambda) := (\lambda - \lambda_0)^{-k} \left[\tilde{\mathfrak{L}}(\lambda) - \mathfrak{L}(\lambda) \right], \quad \lambda \simeq \lambda_0,$$

es de clase \mathcal{C}^{r-k} y $\mathfrak{R}(\lambda_0) = 0$. Así,

$$\tilde{\mathfrak{F}}(\lambda) = \left[\mathfrak{L}(\lambda) + (\lambda - \lambda_0)^k \mathfrak{R}(\lambda) \right] \mathfrak{L}(\lambda)^{-1} = I_V + (\lambda - \lambda_0)^k \mathfrak{L}(\lambda)^{-1} \mathfrak{R}(\lambda),$$

donde \mathfrak{R} es de clase \mathcal{C}^{r-k} , y también lo es la función $\lambda \mapsto (\lambda - \lambda_0)^k \mathfrak{L}(\lambda)^{-1}$ por el Corolario 2.6.2. Luego $\tilde{\mathfrak{F}}$ es de clase \mathcal{C}^{r-k} y $\tilde{\mathfrak{F}}(\lambda_0) = I_V$. Así pues, λ_0 es un autovalor k -algebraico de la función analítica $\tilde{\mathfrak{L}}$. Por las Proposiciones 3.3.5 y 3.4.5, existen dos familias analíticas $\tilde{\mathfrak{E}}, \tilde{\mathfrak{F}}$ de

matrices $m \times m$ definidas en un entorno de λ_0 tales que $\tilde{\mathfrak{E}}(\lambda_0)$ y $\tilde{\mathfrak{F}}(\lambda_0)$ son isomorfismos, $\tilde{\mathfrak{L}}(\lambda) = \tilde{\mathfrak{E}}(\lambda)\mathfrak{D}(\lambda)\tilde{\mathfrak{F}}(\lambda)$ para $\lambda \simeq \lambda_0$, y (3.9). Entonces $\mathfrak{L} = \tilde{\mathfrak{F}}^{-1}\tilde{\mathfrak{E}}\mathfrak{D}\tilde{\mathfrak{F}}$.

D3 implica D2: Definimos para $\lambda \simeq \lambda_0$,

$$\tilde{\mathfrak{L}}(\lambda) := \sum_{i=0}^k (\lambda - \lambda_0)^i \mathfrak{L}_i, \quad \tilde{\mathfrak{F}}(\lambda) := \mathfrak{L}(\lambda)\tilde{\mathfrak{L}}(\lambda)^{-1}.$$

Entonces $\tilde{\mathfrak{L}}$ es C^∞ y las longitudes de sus cadenas de Jordan están acotadas superiormente por k ; sea k_1 la cota óptima. Por la equivalencia C1–C6 de la primera parte del teorema, y la Proposición 3.4.5, λ_0 es un autovalor k_1 -algebraico de $\tilde{\mathfrak{L}}$. Ahora bien, $\tilde{\mathfrak{F}}$ es continua e invertible en λ_0 . En efecto,

$$\tilde{\mathfrak{F}}(\lambda) = \left[\tilde{\mathfrak{L}}(\lambda) + o((\lambda - \lambda_0)^k) \right] \tilde{\mathfrak{L}}(\lambda)^{-1} = I_V + o(1).$$

Entonces λ_0 es un autovalor k_1 -algebraico de \mathfrak{L} .

D2 implica D3: Definimos para $\lambda \simeq \lambda_0$,

$$\tilde{\mathfrak{L}}(\lambda) := \sum_{i=0}^k (\lambda - \lambda_0)^i \mathfrak{L}_i, \quad \tilde{\mathfrak{F}}(\lambda) := \tilde{\mathfrak{L}}(\lambda)\mathfrak{L}(\lambda)^{-1}.$$

Como ya hemos visto en la demostración de *D2 implica D1*, $\tilde{\mathfrak{F}}$ es continua e invertible en un entorno de λ_0 . En consecuencia, λ_0 es un autovalor k -algebraico de $\tilde{\mathfrak{L}}$, y por la Proposición 3.4.5, las longitudes de las cadenas de Jordan de $\tilde{\mathfrak{L}}$ en λ_0 están acotadas superiormente por k . Por la Proposición 3.3.4, \mathfrak{L} y $\tilde{\mathfrak{L}}$ tienen las mismas cadenas de Jordan en λ_0 . Por tanto, las longitudes de las cadenas de Jordan de \mathfrak{L} están acotadas superiormente por k .

D2 equivale a D4: Esto es la Definición 2.2.5. ■

El siguiente resultado nos permite reducir un problema infinitodimensional (con la condición de Fredholm) a un marco finitodimensional. Está sacado de I. Gohberg et al. [24, Section XI.8] (véase también I. C. Gohberg and E. I. Sigal [29]).

Lema 3.5.2 *Sea $\mathfrak{L} \in C^r(\Omega, \mathcal{L}(U, V))$ tal que $\mathfrak{L}(\lambda_0) \in \Phi_0(U, V)$. Entonces existen un entorno abierto $\Omega' \subset \Omega$ de λ_0 , una descomposición $U = U_0 \oplus U_1$ con $\dim U_0 < \infty$ y U_1 un subespacio cerrado de U , familias $\mathfrak{E} \in C^r(\Omega', \mathcal{L}(U, V))$, $\tilde{\mathfrak{F}} \in C^r(\Omega', \mathcal{L}(U))$, $\mathfrak{M} \in C^r(\Omega', \mathcal{L}(U_0))$ con $\mathfrak{E}(\lambda_0)$, $\tilde{\mathfrak{F}}(\lambda_0)$ isomorfismos tales que*

$$\mathfrak{L}(\lambda) = \mathfrak{E}(\lambda) [\mathfrak{M}(\lambda) \oplus I_{U_1}] \tilde{\mathfrak{F}}(\lambda), \quad \lambda \in \Omega'.$$

Demostración. Como $\tilde{\mathfrak{L}}(\lambda_0)$ es Fredholm de índice cero, existe un operador de rango finito $F \in \mathcal{L}(U, V)$ para el cual la nueva familia

$$\mathfrak{E}(\lambda) := \mathfrak{L}(\lambda) + F, \quad \lambda \in \Omega,$$

es un isomorfismo en un entorno de λ_0 (véase por ejemplo I. Gohberg et al. [24, Theorem XI.5.3]). Así, $\mathfrak{L}(\lambda) = \mathfrak{E}(\lambda)[I_U - \mathfrak{E}(\lambda)^{-1}F]$. Como F tiene rango finito, $N[F]$ posee un complemento topológico finitodimensional U_0 en U

$$U = U_0 \oplus N[F].$$

Sea $P \in \mathcal{L}(U)$ la proyección que cumple $R[P] = U_0$ y $N[P] = N[F]$. Entonces P tiene rango finito y $FP = F$, ya que $I_U - P$ es una proyección sobre $N[F]$. Así pues,

$$I_U - \mathfrak{E}(\lambda)^{-1}F = [I_U - P\mathfrak{E}(\lambda)^{-1}FP] [I_U - (I_U - P)\mathfrak{E}(\lambda)^{-1}FP].$$

Designemos para cada λ suficientemente cerca de λ_0 ,

$$\mathfrak{F}(\lambda) := I_U - (I_U - P)\mathfrak{E}(\lambda)^{-1}FP.$$

Esta familia \mathfrak{F} es de clase \mathcal{C}^r y es invertible en un entorno de λ_0 . De hecho,

$$\mathfrak{F}(\lambda)^{-1} = I_U + (I_U - P)\mathfrak{E}(\lambda)^{-1}FP, \quad \lambda \simeq \lambda_0.$$

Así pues,

$$\mathfrak{L}(\lambda) = \mathfrak{E}(\lambda) [I_U - P\mathfrak{E}(\lambda)^{-1}FP] \mathfrak{F}(\lambda), \quad \lambda \simeq \lambda_0.$$

Definamos $\mathfrak{G}(\lambda) := I_U - P\mathfrak{E}(\lambda)^{-1}FP$ para $\lambda \simeq \lambda_0$. Con respecto a la descomposición $U = R[P] \oplus N[P]$, la familia \mathfrak{G} se escribe como

$$\mathfrak{G}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}(\lambda)|_{U_0} & 0 \\ 0 & I_{N[F]} \end{pmatrix},$$

puesto que $\mathfrak{G}(\lambda)(U_0) \subset U_0$ y $\mathfrak{G}(\lambda)|_{N[F]} = I_{N[F]}$. Esto concluye la demostración. ■

El Lema 3.5.2 nos permite generalizar los resultados del Teorema 3.5.1 al caso infinitodimensional. Se obtiene así la siguiente caracterización.

Teorema 3.5.3 *Sea $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathcal{L}(U, V))$ con $\mathfrak{L}(\lambda_0) \in \Phi_0(U, V)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

C1. *\mathfrak{L} posee un forma local de Smith (infinitodimensional) en λ_0 , es decir, existen $\Omega' \subset \Omega$ un entorno abierto de λ_0 , familias $\mathfrak{E} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega', \mathcal{L}(U, V))$, $\mathfrak{F} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega', \mathcal{L}(U))$ tales que $\mathfrak{E}(\lambda_0)$ y $\mathfrak{F}(\lambda_0)$ son isomorfismos, una descomposición $U = U_0 \oplus U_1$ con $\dim U_0 < \infty$ y U_1 un subespacio cerrado de U tales que $\mathfrak{L}(\lambda) = \mathfrak{E}(\lambda)[\mathfrak{D}(\lambda) \oplus I_{U_1}]\mathfrak{F}(\lambda)$ para $\lambda \in \Omega'$, y*

$$\mathfrak{D}(\lambda) = \text{diag} \{ (\lambda - \lambda_0)^{k_1}, \dots, (\lambda - \lambda_0)^{k_n} \} \quad (3.10)$$

para ciertos enteros $k_1, \dots, k_n \geq 1$, y $n = \dim N[\mathfrak{L}_0]$.

C2. *Para cualquier descomposición de la forma*

$$\mathfrak{L}(\lambda) = \mathfrak{E}(\lambda) [\mathfrak{M}(\lambda) \oplus \mathfrak{N}(\lambda)] \mathfrak{F}(\lambda), \quad (3.11)$$

para λ en un entorno Ω' de λ_0 , donde $\mathfrak{E} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega', \mathcal{L}(\tilde{V}, V))$, $\mathfrak{F} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega', \mathcal{L}(U, \tilde{U}))$, $\tilde{U} = \tilde{U}_1 \oplus \tilde{U}_2$, $\tilde{V} = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_2$ con $\dim \tilde{U}_1 = \dim \tilde{V}_1 < \infty$, \tilde{U}_2 es un subespacio cerrado del espacio de Banach \tilde{U} , \tilde{V}_2 es un subespacio cerrado del espacio de Banach \tilde{V} , $\mathfrak{N} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega', \mathcal{L}(\tilde{U}_2, \tilde{V}_2))$, y $\mathfrak{M} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega', \mathcal{L}(\tilde{U}_1, \tilde{V}_1))$, entonces $\det \mathfrak{M}$ tiene un cero de orden finito en λ_0 .

C3. λ_0 es un autovalor algebraico de \mathfrak{L} .

C4. Las longitudes de todas las cadenas de Jordan de \mathfrak{L} en λ_0 están uniformemente acotadas superiormente.

C5. Ninguna cadena de Jordan de \mathfrak{L} en λ_0 se puede prolongar indefinidamente.

C6. La multiplicidad $\chi[\mathfrak{L}; \lambda_0]$ es finita.

Además, en este caso, y si \mathfrak{L} es analítica, entonces podemos escoger que las \mathfrak{E} y \mathfrak{F} de C1 sean analíticas.

Sea $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^r(\Omega, \mathcal{L}(U, V))$ con $\mathfrak{L}(\lambda_0) \in \Phi_0(U, V)$ para un cierto $r \in \mathbb{N}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

D1. \mathfrak{L} posee una forma local de Smith (infinitodimensional) en λ_0 , es decir, existen $\Omega' \subset \Omega$ un entorno abierto de λ_0 , familias $\mathfrak{E} \in \mathcal{C}(\Omega', \mathcal{L}(U, V))$, $\mathfrak{F} \in \mathcal{C}(\Omega', \mathcal{L}(U))$ tales que $\mathfrak{E}(\lambda_0)$ y $\mathfrak{F}(\lambda_0)$ son isomorfismos, una descomposición $U = U_0 \oplus U_1$ con $\dim U_0 < \infty$ y U_1 un subespacio cerrado de U tales que $\mathfrak{L}(\lambda) = \mathfrak{E}(\lambda)[\mathfrak{D}(\lambda) \oplus I_{U_1}]\mathfrak{F}(\lambda)$ para $\lambda \in \Omega'$, y (3.10) para ciertos enteros $1 \leq k_1, \dots, k_n \leq r$, y $n = \dim N[\mathfrak{L}_0]$.

D2. λ_0 es un autovalor algebraico de \mathfrak{L} de orden $k \leq r$.

D3. Las longitudes de las cadenas de Jordan de \mathfrak{L} en λ_0 están acotadas superiormente por $k \leq r$.

D4. La multiplicidad $\chi[\mathfrak{L}; \lambda_0]$ existe y es finita.

Además, en este caso podemos escoger que \mathfrak{E} sea de clase \mathcal{C}^{r-k} y \mathfrak{F} sea analítica.

Demostración. Supongamos que \mathfrak{L} es de clase \mathcal{C}^∞ .

C1 implica C3: Para cada λ en un entorno perforado de λ_0 ,

$$\mathfrak{L}(\lambda)^{-1} = \mathfrak{F}(\lambda)^{-1}[\mathfrak{D}(\lambda)^{-1} \oplus I_{U_1}]\mathfrak{E}(\lambda)^{-1},$$

y gracias a (3.10), $\|\mathfrak{L}(\lambda)^{-1}\| \leq C|\lambda - \lambda_0|^{-k}$, donde $C > 0$ es una cierta constante, $k := \max\{k_1, \dots, k_n\}$, y λ está en algún entorno perforado de λ_0 .

C5 implica C1: Usamos el Lema 3.5.2 y, siguiendo sus notaciones, $\mathfrak{L} = \mathfrak{E}(\mathfrak{M} \oplus I_{U_1})\mathfrak{F}$. Por la Proposición 3.3.3, ninguna cadena de Jordan de $\mathfrak{M} \oplus I_{U_1}$ se puede prolongar indefinidamente. Es fácil ver que las cadenas de Jordan de $\mathfrak{M} \oplus I_{U_1}$ en λ_0 son exactamente las de la forma

$$\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u_s \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

donde (u_0, \dots, u_s) es una cadena de Jordan de \mathfrak{M} en λ_0 . Por tanto, ninguna cadena de Jordan de la familia finitodimensional \mathfrak{M} se puede prolongar indefinidamente. Por el Teorema 3.5.1, \mathfrak{M} admite una forma local de Smith (finitodimensional). Esto nos permite concluir el resultado con facilidad.

C3 implica C2: Supongamos que se tiene (3.11) como se describe en C2. Entonces para λ en un entorno perforado de λ_0 ,

$$\mathfrak{M}(\lambda)^{-1} \oplus \mathfrak{N}(\lambda)^{-1} = \mathfrak{F}(\lambda)\mathfrak{L}(\lambda)^{-1}\mathfrak{E}(\lambda),$$

de donde $\|\mathfrak{M}(\lambda)^{-1}\| \leq C\|\mathfrak{L}(\lambda)^{-1}\|$ para una cierta constante $C > 0$. Entonces λ_0 es un autovalor algebraico de \mathfrak{M} , y por el Teorema 3.5.1, $\det \mathfrak{M}$ tiene un cero de orden finito en λ_0 .

C2 implica C3: Usamos el Lema 3.5.2 y, siguiendo sus notaciones, $\mathfrak{L} = \mathfrak{E}(\mathfrak{M} \oplus I_{U_1})\mathfrak{F}$. Entonces $\det \mathfrak{M}$ tiene un cero de orden finito en λ_0 . Por el Teorema 3.5.1, λ_0 es un autovalor algebraico de \mathfrak{M} , y por tanto de \mathfrak{L} .

C3 implica C4 sale de la Proposición 3.4.5, *C4 implica C5* es obvio, y *C3 equivale a C6* es la Definición 2.2.5. Esto completa la demostración en el caso en que \mathfrak{L} es C^∞ .

Ahora supongamos que \mathfrak{L} es de clase C^r para algún $r \in \mathbb{N}$.

D1 implica D2 es parecido a demostración de *C1 implica C3*. *D2 implica D3* sale de la Proposición 3.4.5. *D3 implica D1* es similar a la prueba de *C5 implica C1*. *D2 equivale a D4* es la Definición 2.2.5. Esto concluye la demostración. ■

Parte II

Teoría de bifurcación

Capítulo 4

Caracterización de los autovalores no-lineales

4.1. Bifurcación local abstracta

A lo largo de este capítulo consideramos un espacio de Banach real U , un intervalo abierto $\Omega \subset \mathbb{R}$, un entorno \mathcal{U} de $0 \in U$, una familia $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^r(\Omega, \mathcal{L}(U))$ para algún $r \geq 0$, y $\mathfrak{N} \in \mathcal{C}(\Omega \times \mathcal{U}, U)$ de tal manera que se cumplan las siguientes propiedades:

(HL) $\mathfrak{L}(\lambda) - I$ es compacto para todo $\lambda \in \Omega$.

(HN) \mathfrak{N} es compacto, es decir, \mathfrak{N} lleva acotados de $\Omega \times \mathcal{U}$ en relativamente compactos de U . Además, para cualquier compacto $K \subset \Omega$,

$$\lim_{u \rightarrow 0} \sup_{\lambda \in K} \frac{\mathfrak{N}(\lambda, u)}{\|u\|} = 0.$$

Definimos

$$\mathfrak{F} : \Omega \times \mathcal{U} \rightarrow U, \quad \mathfrak{F}(\lambda, u) = \mathfrak{L}(\lambda)u + \mathfrak{N}(\lambda, u). \quad (4.1)$$

Por supuesto, para cada $\lambda \in \Omega$, $\mathfrak{L}(\lambda)$ es precisamente $D_u \mathfrak{F}(\lambda, 0)$, la derivada de $\mathfrak{F}(\lambda, \cdot)$ en 0. Nuestras hipótesis implican que $\mathfrak{F}(\lambda, 0) = 0$ para todo $\lambda \in \Omega$. La teoría de bifurcación local estudia las soluciones de $\mathfrak{F}(\lambda, u) = 0$ para $u \neq 0$ pequeño. Un *punto de bifurcación* de \mathfrak{F} es un $\lambda \in \Omega$ tal que

$$(\lambda, 0) \in \overline{\mathfrak{F}^{-1}(0) \cap [\Omega \times (\mathcal{U} \setminus \{0\})]}.$$

Un *autovalor* de \mathfrak{L} es un $\lambda \in \Omega$ tal que $\mathfrak{L}(\lambda)$ no es invertible. El siguiente resultado es clásico (véase por ejemplo J. López-Gómez [43, Lemma 6.1.2]).

Lema 4.1.1 *Todo punto de bifurcación de \mathfrak{F} es un autovalor de \mathfrak{L} .*

Demostración. Sea λ_0 un punto de bifurcación de \mathfrak{F} . Entonces para cada entero $n \geq 1$ existen $\lambda_n \in \Omega$, $u_n \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$ tales que $\mathfrak{F}(\lambda_n, u_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda_0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Así, para cada n ,

$$[\mathfrak{L}(\lambda_n) - \mathfrak{L}(\lambda_0)] \frac{u_n}{\|u_n\|} + \frac{\mathfrak{N}(\lambda_n, u_n)}{\|u_n\|} = \mathfrak{L}(\lambda_0) \frac{u_n}{\|u_n\|},$$

luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{L}(\lambda_0) \frac{u_n}{\|u_n\|} = 0,$$

lo que prueba que $\mathfrak{L}(\lambda_0)$ no es isomorfismo. ■

El recíproco del Lema 4.1.1 es falso, como muestra el siguiente ejemplo: consideremos $U = \mathcal{U} = \Omega = \mathbb{R}$, $\mathfrak{L}(\lambda) = \lambda^2$, $\mathfrak{N}(\lambda, u) = u^3$. Entonces las únicas soluciones que la ecuación

$$\lambda^2 u + u^3 = 0$$

son $(\lambda, 0)$, luego \mathfrak{F} no tiene puntos de bifurcación. Pero sin embargo 0 es un autovalor de \mathfrak{L} .

Sea λ_0 un autovalor de \mathfrak{L} . Entonces siempre existe una \mathfrak{N} que cumple (HN) y tal que λ_0 es un punto de bifurcación, puesto que por ejemplo podemos tomar $\mathfrak{N}(\lambda, u) = 0$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 4.1.2 *Supongamos que \mathfrak{L} cumple (HL), y sea λ_0 un autovalor de \mathfrak{L} . Se dice entonces que λ_0 es autovalor no-lineal de \mathfrak{L} si λ_0 es un punto de bifurcación de la \mathfrak{F} definida en (4.1) para cualquier \mathfrak{N} que cumpla (HN).*

Se conoce una caracterización topológica de los autovalores no-lineales, al menos en el caso en que el autovalor es aislado. Ésta yace en el concepto del índice de Leray-Schauder de un isomorfismo lineal que es una perturbación compacta de la identidad. Este concepto, así como el grado de Leray-Schauder, será explicado en la Sección 4.2. La siguiente caracterización es ya clásica.

Teorema 4.1.3 *Sea λ_0 un autovalor aislado de \mathfrak{L} . Entonces λ_0 es un autovalor no-lineal de \mathfrak{L} si y sólo si $\text{Ind}(\mathfrak{L}(\lambda), 0)$ cambia cuando λ cruza λ_0 .*

El resultado según el cual un cambio de $\text{Ind}(\mathfrak{L}(\lambda), 0)$ cuando λ cruza λ_0 es una condición suficiente para que λ_0 sea un autovalor no-lineal se remonta a M. A. Krasnosel'skiĭ [36]; en P. H. Rabinowitz [59], J. Ize [30], R. J. Magnus [49], H. Kielhöfer [34], y J. López-Gómez [43] se pueden encontrar varias generalizaciones y desarrollos posteriores. La necesidad de dicha condición fue probada por J. Esquinas and J. López-Gómez [15, 16] y J. Esquinas [14] en el caso en que \mathfrak{L} es suficientemente regular, por medio del procedimiento de transversalización (descrito aquí en el Capítulo 2) que ellos desarrollaron. J. Ize [31] demostró este resultado con hipótesis más débiles de regularidad sobre \mathfrak{L} usando teoría de obstrucción.

Nuestro objetivo en este capítulo será usar la teoría de multiplicidad desarrollada en la Parte I de esta memoria para obtener demostraciones sencillas de los dos siguientes resultados conocidos:

- Siempre que la multiplicidad está definida, $\text{Ind}(\mathfrak{L}(\lambda), 0)$ cambia cuando λ cruza λ_0 si y sólo si la multiplicidad de \mathfrak{L} en λ_0 es impar.
- Existe una \mathfrak{N} que cumple (HN) tal que λ_0 no es un punto de bifurcación de \mathfrak{F} siempre que λ_0 sea un autovalor de \mathfrak{L} de multiplicidad algebraica par.

4.2. El grado de Leray-Schauder

No pretende esta sección construir el grado de Leray-Schauder [41], sino fijar notaciones y enunciar las propiedades del grado que usaremos a lo largo de este capítulo y del siguiente. Se pueden encontrar exposiciones del grado de Leray-Schauder, con un gran número de aplicaciones y con posteriores generalizaciones y extensiones, por ejemplo en los libros de N. G. Lloyd [42], K. Deimling [11], I. Fonseca and W. Gangbo [20], o W. Krawcewicz and J. Wu [37].

Probablemente la manera más rápida de introducir el grado de Leray-Schauder sea por medio del siguiente resultado, cuya parte de *existencia* se debe a J. Leray and J. Schauder [41], y la parte de *unicidad* se debe a H. Amann and S. A. Weiss [3]. Recordemos que I_U representa el operador identidad en U .

Teorema 4.2.1 *Sea U un espacio de Banach real. Llamemos \mathcal{D} al conjunto de pares (f, Ω) tales que $\Omega \subset U$ es abierto acotado, $f : D(f) \rightarrow U$ es continua, con $\bar{\Omega} \subset D(f) \subset U$, $0 \in U \setminus f(\partial\Omega)$, y $f - I_U$ es compacta. Entonces existe una única aplicación*

$$\text{Deg} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}$$

que cumple

1. Para cada $\Omega \subset U$ abierto acotado con $0 \in \Omega$,

$$\text{Deg}(I_U, \Omega) = 1.$$

2. Para todo $(f, \Omega) \in \mathcal{D}$ y todo par de abiertos disjuntos Ω_1, Ω_2 de Ω tales que $0 \in U \setminus f(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$,

$$\text{Deg}(f, \Omega) = \text{Deg}(f, \Omega_1) + \text{Deg}(f, \Omega_2).$$

3. Para todo $\Omega \subset U$ y toda $H : [0, 1] \times \bar{\Omega} \rightarrow U$ continua tal que $(H(t, \cdot), \Omega) \in \mathcal{D}$ para cada $t \in [0, 1]$,

$$\text{Deg}(H(0, \cdot), \Omega) = \text{Deg}(H(1, \cdot), \Omega).$$

El valor $\text{Deg}(f, \Omega)$ recibe el nombre de *grado de Leray-Schauder* (o *grado topológico* o sencillamente *grado*) de f en Ω .

Sean $D \subset U$ y $f : D \rightarrow U$ continua tal que $f - I_U$ es compacta. Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset U$ abiertos acotados que contengan a u_0 y estén contenidos en D tales que $f^{-1}(0) \cap \bar{\Omega}_1 = f^{-1}(0) \cap \bar{\Omega}_2 \subset \{u_0\}$. Entonces

$$\text{Deg}(f, \Omega_1) = \text{Deg}(f, \Omega_2),$$

y este valor recibe el nombre de $\text{Ind}(f, u_0)$, el índice (de Leray-Schauder) de f en u_0 , o también el índice de u_0 como cero de f . En otras palabras,

$$\text{Ind}(f, u_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \text{Deg}(f, B_r(u_0)),$$

donde $B_r(u_0) \subset U$ es la bola abierta de radio r centrada en u_0 .

Denotemos por $GL_c(U)$ al conjunto de isomorfismos lineales $A \in \mathcal{L}(U)$ tales que $A - I_U$ es compacto. Las siguientes propiedades serán usadas a lo largo de este capítulo y del siguiente.

Proposición 4.2.2 *Se cumplen las siguientes propiedades del grado de Leray-Schauder:*

1. Sean $a < b$ y \mathcal{O} un abierto acotado de $[a, b] \times U$. Sea $H : \bar{\mathcal{O}} \rightarrow U$ una aplicación continua tal que $H(t, \cdot) - I : \mathcal{O}_t \rightarrow U$ es compacta para cada $t \in [a, b]$, donde $\mathcal{O}_t := \{u \in U : (t, u) \in \mathcal{O}\}$. Si $H(t, u) \neq 0$ para cualquier (t, u) que cumpla $t \in [a, b]$ y $u \in \partial\mathcal{O}_t$, entonces

$$\text{Deg}(H(a, \cdot), \mathcal{O}_a) = \text{Deg}(H(b, \cdot), \mathcal{O}_b).$$

2. Sea $(f, \Omega) \in \mathcal{D}$. Entonces

$$\text{Deg}(f, \emptyset) = 0.$$

3. Sea $(f, \Omega) \in \mathcal{D}$ tal que $f^{-1}(0) \cap \bar{\Omega}$ es finito. Entonces

$$\text{Deg}(f, \Omega) = \sum_{x \in f^{-1}(0) \cap \bar{\Omega}} \text{Ind}(f, x).$$

4. Sea $(f, \Omega) \in \mathcal{D}$ tal que $Df(x)$, la derivada de f en x , existe y es un isomorfismo para cada $x \in f^{-1}(0) \cap \bar{\Omega}$. Entonces $f^{-1}(0) \cap \bar{\Omega}$ es finito y

$$\text{Deg}(f, \Omega) = \sum_{x \in f^{-1}(0) \cap \bar{\Omega}} \text{Ind}(Df(x), 0).$$

5. Si $T \in GL_c(U)$ entonces $\text{Ind}(T, 0) \in \{-1, 1\}$. Es más, la aplicación

$$\text{Ind}(\cdot, 0) : GL_c(U) \rightarrow \{-1, 1\}$$

es continua.

6. Sean $A, B \in GL_c(U)$. Entonces

$$\text{Ind}(AB, 0) = \text{Ind}(A, 0) \text{Ind}(B, 0).$$

7. Sean U_1, U_2 dos subespacios cerrados de U tales que $U = U_1 \oplus U_2$. Sea $T \in GL_c(U)$ tal que $T(U_i) \subset U_i$ para $i = 1, 2$. Entonces

$$\text{Ind}(T, 0) = \text{Ind}(T|_{U_1}, 0) \text{Ind}(T|_{U_2}, 0).$$

8. Si $T \in \mathcal{L}(U)$ y $\dim U < \infty$ entonces

$$\text{Ind}(T, 0) = \text{sign det } T.$$

4.3. La multiplicidad como indicador de un cambio de índice

El siguiente resultado está sacado de J. López-Gómez [43, Theorem 5.6.2], aunque versiones previas y menos generales de éste aparecieron ya en M. A. Krasnosel'skiĭ [36], P. H. Rabinowitz [59], P. Sarreither [63], E. N. Dancer [10], J. Ize [30] y R. J. Magnus [49]. Recordemos que $\chi[\mathfrak{L}; \lambda_0]$ designa la multiplicidad de \mathfrak{L} en λ_0 .

Proposición 4.3.1 *Supongamos que $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}^r(\Omega, \mathcal{L}(U))$ cumple (HL), y sea λ_0 un autovalor k -algebraico de \mathfrak{L} con $0 \leq k \leq r$. Entonces $\text{Ind}(\mathfrak{L}(\lambda), 0)$ cambia cuando λ cruza λ_0 si y sólo si $\chi[\mathfrak{L}; \lambda_0]$ es impar.*

Demostración. Si $k = 0$ entonces $\chi[\mathfrak{L}; \lambda_0] = 0$, $\mathfrak{L}(\lambda_0)$ es invertible, y el resultado es una consecuencia de la Proposición 4.2.2(5). Supongamos que $k \neq 0$; entonces $\mathfrak{L}(\lambda) \in \Phi_0(U)$ para todo $\lambda \in \Omega$, ya que $\mathfrak{L}(\lambda)$ es una perturbación compacta de la identidad (véase por ejemplo T. Kato [32, Theorem IV.5.26] o I. Gohberg et al. [24, Corollary XI.4.3]). Aplicamos el Teorema 2.2.6 y expresamos para un cierto $\delta > 0$,

$$\mathfrak{L}(\lambda) = \mathfrak{M}(\lambda)f_1(\lambda) \cdots f_k(\lambda), \quad |\lambda - \lambda_0| < \delta,$$

donde

$$f_i(\lambda) := (\lambda - \lambda_0)P_i + I_U - P_i, \quad |\lambda - \lambda_0| < \delta, \quad 1 \leq i \leq k,$$

$\mathfrak{M} \in \mathcal{C}((\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta), GL_c(U))$, y $P_1, \dots, P_k \in \mathcal{L}(U) \setminus \{0\}$ son proyecciones de rango finito. El hecho de que $\mathfrak{M}(\lambda)$ es una perturbación compacta de la identidad se sigue de que $\mathfrak{L}(\lambda)$ lo es; véase, si es necesario, J. López-Gómez [43, Theorem 5.6.2] para una demostración. Fijemos $0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta$. Entonces por la Proposición 4.2.2(6),

$$\text{Ind}(\mathfrak{L}(\lambda), 0) = \text{Ind}(\mathfrak{M}(\lambda), 0) \text{Ind}(f_1(\lambda), 0) \cdots \text{Ind}(f_k(\lambda), 0).$$

Ahora, por la Proposición 4.2.2(5) existe $\eta \in \{-1, 1\}$ tal que $\text{Ind}(\mathfrak{M}(\lambda), 0) = \eta$ para todo $|\lambda - \lambda_0| < \delta$. Fijemos $1 \leq i \leq k$; entonces

$$\begin{aligned} \text{Ind}(f_i(\lambda), 0) &= \text{Ind}(f_i(\lambda)|_{R[P_i]}, 0) \text{Ind}(f_i(\lambda)|_{N[P_i]}, 0) \\ &= \text{Ind}((\lambda - \lambda_0)I|_{R[P_i]}, 0) \text{Ind}(I|_{N[P_i]}, 0) \\ &= \text{sign det}((\lambda - \lambda_0)I|_{R[P_i]}) = (\lambda - \lambda_0)^{\dim R[P_i]}, \end{aligned}$$

donde hemos usado la Proposición 4.2.2(7,8) y el Teorema 4.2.1(1). Por tanto, por el Teorema 2.2.6,

$$\text{Ind}(\mathfrak{L}(\lambda), 0) = \text{sign}(\lambda - \lambda_0)^{\chi[\mathfrak{L}; \lambda_0]}, \quad 0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta,$$

lo que concluye la demostración. ■

4.4. Una no-linealidad explícita sin bifurcación

Supongamos que $\mathcal{L} \in \mathcal{C}^r(\Omega, \mathcal{L}(U))$ cumple (HL), y sea λ_0 un autovalor k -algebraico de \mathcal{L} para un cierto entero $1 \leq k \leq r$ y tal que $\chi[\mathcal{L}; \lambda_0]$ es par. En esta sección construimos una \mathfrak{N} explícita que cumple (HN) y tal que los únicos ceros en un entorno de $(\lambda_0, 0)$ de la \mathfrak{F} definida por (4.1) son los de la forma $(\lambda, 0)$. Este resultado se remonta a J. Esquinas and J. López-Gómez [15, 16] y J. Esquinas [14], quienes lo probaron usando el procedimiento de transversalización que ellos desarrollaron. Nuestra demostración está inspirada en la suya, pero creemos que la nuestra es más simple y transparente, aunque la idea básica es la misma: transformar la ecuación original en una equivalente y más fácil de manejar. También pensamos que nuestra demostración constituye una agradable aplicación de la forma local de Smith, teoría desarrollada en el el Capítulo 3. Cuando la familia \mathcal{L} tiene escasa regularidad y la multiplicidad no está definida, no se pueden aplicar ni nuestra demostración ni las de [15, 16, 14], pero J. Ize [31] desarrolló una prueba puramente topológica, usando teoría de obstrucción, del hecho de que si $\text{Ind}(\mathcal{L}(\lambda), 0)$ no cambia cuando λ cruza λ_0 entonces λ_0 no es un autovalor no-lineal de \mathcal{L} . Su demostración tiene la ventaja de ser más general pero la desventaja de no ser constructiva.

Así que supongamos que $\mathcal{L} \in \mathcal{C}^r(\Omega, \mathcal{L}(U))$ cumple (HL) y que λ_0 es un autovalor k -algebraico de \mathcal{L} para algún entero $1 \leq k \leq r$ tal que $\chi[\mathcal{L}; \lambda_0]$ es par. Vamos a construir una \mathfrak{N} que cumple (HN) de tal manera que los únicos ceros de \mathfrak{F} en un entorno de $(\lambda_0, 0)$ sean aquellos de la forma $(\lambda, 0)$. Por el Teorema 3.5.3, \mathcal{L} admite una forma local de Smith en λ_0 , es decir, existen Ω' un entorno abierto de λ_0 , familias $\mathfrak{E}, \mathfrak{G} \in \mathcal{C}(\Omega', \mathcal{L}(U))$ tales que

$$\mathcal{L}(\lambda) = \mathfrak{E}(\lambda) [\mathfrak{D}(\lambda) \oplus I_{U_1}] \mathfrak{G}(\lambda), \quad \lambda \in \Omega',$$

donde $\mathfrak{E}, \mathfrak{G}$ toman valores invertibles, U_0, U_1 son subespacios cerrados complementarios de U , y

$$\mathfrak{D}(\lambda) = \text{diag} \{ (\lambda - \lambda_0)^{k_1}, \dots, (\lambda - \lambda_0)^{k_n} \} \in \mathcal{L}(U_0), \quad \lambda \in \Omega',$$

para unos ciertos enteros $k_1, \dots, k_n \geq 1$, y $n = \dim N[\mathcal{L}_0] = \dim U_0$. Mediante el cambio de variables $u = \mathfrak{G}(\lambda)v$, es fácil ver que la ecuación

$$\mathcal{L}(\lambda)u + \mathfrak{N}(\lambda, u) = 0 \tag{4.2}$$

es equivalente en un entorno de $(\lambda_0, 0)$ a

$$[\mathfrak{D}(\lambda) \oplus I_{U_1}]v + \mathfrak{M}(\lambda, v) = 0, \tag{4.3}$$

donde $\mathfrak{M}(\lambda, v) := \mathfrak{E}(\lambda)\mathfrak{N}(\lambda, \mathfrak{G}(\lambda)v)$, en el sentido de que $\mathfrak{D} \oplus I_{U_1}$ cumple (HL), \mathfrak{M} cumple (HN), y que (λ, u) es solución de (4.2) si y sólo si $(\lambda, \mathfrak{G}(\lambda)^{-1}u)$ es solución de (4.3). En particular, λ_0 es punto de bifurcación de la ecuación (4.2) si y sólo si lo es de la ecuación (4.3). Por tanto, basta con mostrar una \mathfrak{M} que cumpla (HN) y tal que las únicas soluciones de (4.3) sean de la forma $(\lambda, 0)$.

Escribimos $v = x + y$ con $x \in U_0, y \in U_1$. Elegimos \mathfrak{M} cuya imagen yazca en U_0 . Entonces la ecuación (4.3) queda

$$\begin{cases} \mathfrak{D}(\lambda)x + \mathfrak{M}(\lambda, x) = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Luego hemos reducido el problema a encontrar un $\delta > 0$ y n funciones continuas $\mathfrak{M}_i : (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \times B_\delta(0) \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, donde $B_\delta(0)$ es la bola abierta de radio δ y centro $0 \in \mathbb{R}^n$, tales que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sup_{|\lambda - \lambda_0| < \delta} \frac{\mathfrak{M}_i(\lambda, x)}{\|x\|} = 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

y que las únicas soluciones de

$$\begin{pmatrix} (\lambda - \lambda_0)^{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & (\lambda - \lambda_0)^{k_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_1(\lambda, x) \\ \vdots \\ \mathfrak{M}_n(\lambda, x) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.4)$$

para $(\lambda, x) \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \times B_\delta(0)$ sean las de la forma $(\lambda, 0)$. Nótese que la hipótesis de compacidad de (HN) se cumple automáticamente, porque hemos escogido \mathfrak{M} para que su imagen yazca en un espacio finitodimensional.

Tomemos $1 \leq i \leq n$ tal que k_i es par. La ecuación i -ésima de (4.4) es

$$(\lambda - \lambda_0)^{k_i} x_i + \mathfrak{M}_i(\lambda, x) = 0.$$

Elegimos $\mathfrak{M}_i(\lambda, x) = x_i^3$ y obtenemos así que toda solución de esta ecuación cumple $x_i = 0$.

Como suponemos que $\chi[\mathcal{L}; \lambda_0] = k_1 + \dots + k_n$ es par, hay una cantidad par de k_i que son impares, luego podemos agruparlos de dos en dos. Sea pues k_i, k_j uno de tales pares. Entonces las ecuaciones i -ésima y j -ésima de (4.4) son

$$\begin{cases} (\lambda - \lambda_0)^{k_i} x_i + \mathfrak{M}_i(\lambda, x) = 0 \\ (\lambda - \lambda_0)^{k_j} x_j + \mathfrak{M}_j(\lambda, x) = 0. \end{cases}$$

Elegimos $\mathfrak{M}_i(\lambda, x) = x_j^3$ y $\mathfrak{M}_j(\lambda, x) = -x_i^3$, y concluimos que toda solución de esta ecuación cumple $x_i = x_j = 0$. Esto termina la construcción.

Por supuesto, la ecuación (4.4) se conoce en la literatura como una reducción de Lyapunov-Schmidt de nuestra ecuación original $\mathfrak{F}(\lambda, u) = 0$; véase por ejemplo S. N. Chow and J. K. Hale [9, Section 2.4], E. Zeidler [71, Section 8.6], o J. López-Gómez [43, Section 3.1]. La clave aquí es que existe una reducción de Lyapunov-Schmidt cuya parte lineal es diagonal.

Capítulo 5

Contar soluciones de ecuaciones de bifurcación abstractas

En este capítulo usamos el grado topológico para dar cotas inferiores del número de soluciones de las secciones (obtenidas fijando el valor del parámetro) de las componentes semiacotadas de las soluciones no-triviales de una ecuación no lineal uniparamétrica (con ciertas propiedades de compacidad) para la cual se conoce una recta de soluciones triviales. Una componente semiacotada será aproximadamente una componente que es acotada a lo largo de una dirección del parámetro. No se supone que el espectro de la linealización de la ecuación en la solución trivial sea discreto. Mientras que el Capítulo 4 estudiaba teoría local de bifurcación, éste está dedicado a la teoría global de bifurcación. Este capítulo está basado en [47] y en [48].

5.1. Introducción

A lo largo de este capítulo, U va a ser un espacio de Banach real, $\mathcal{L}(U)$ representa el conjunto de operadores lineales y continuos en U , y consideraremos una aplicación $\mathfrak{F} \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times U, U)$ de la forma

$$\mathfrak{F}(\lambda, u) = \mathfrak{L}(\lambda)u + \mathfrak{N}(\lambda, u),$$

donde

(HL) $\mathfrak{L} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{L}(U))$ y $\mathfrak{L}(\lambda) - I$ es compacto para todo $\lambda \in \mathbb{R}$; I es la identidad en U .

(HN) $\mathfrak{N} \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times U, U)$ es un operador compacto tal que para cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$,

$$\lim_{u \rightarrow 0} \sup_{\lambda \in K} \frac{\mathfrak{N}(\lambda, u)}{\|u\|} = 0.$$

Estas hipótesis implican que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{F}(\lambda, 0) = 0$, y $\mathfrak{L}(\lambda)$ es la diferencial de $\mathfrak{F}(\lambda, \cdot)$ en 0.

El objetivo principal de este capítulo será obtener cotas inferiores del cardinal de las secciones (obtenidas fijando λ) de las componentes semiacotadas del conjunto de soluciones no-triviales de

$$\mathfrak{F}(\lambda, u) = 0 \tag{5.1}$$

que bifurcan desde $\mathbb{R} \times \{0\}$. El conjunto de soluciones no-triviales será el conjunto de soluciones (λ, u) con $u \neq 0$ más algunas soluciones de la forma $(\lambda, 0)$ con λ un posible punto de bifurcación.

A lo largo de este capítulo llamaremos Σ al conjunto de $\sigma \in \mathbb{R}$ para los que $\mathcal{L}(\sigma)$ no es un isomorfismo, que se conoce con el nombre de *espectro* de \mathcal{L} . Es fácil ver que Σ es cerrado, y, recíprocamente, gracias a ciertos resultados conocidos sobre extensión de funciones continuas, para cada cerrado $\Sigma \subset \mathbb{R}$ es sencillo construir una familia \mathcal{L} que cumpla (HL) y tenga a Σ como espectro.

El Lema 4.1.1 demuestra que

$$\overline{\mathfrak{F}^{-1}(0) \cap [\mathbb{R} \times (U \setminus \{0\})]} \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) \subset \Sigma \times \{0\},$$

es decir, todo punto de bifurcación de \mathfrak{F} es un autovalor de \mathcal{L} .

El conjunto de soluciones no-triviales de la ecuación (5.1) será

$$\mathfrak{S} := [\mathfrak{F}^{-1}(0) \cap [\mathbb{R} \times (U \setminus \{0\})]] \cup (\Delta \times \{0\}),$$

donde Δ es un “agradable” cerrado de \mathbb{R} que contiene a Σ de tal manera que \mathfrak{S} sea cerrado. Una definición más precisa aparecerá en la Sección 5.2.

El principal objetivo de este capítulo es analizar la estructura de las componentes acotadas (luego compactas) de $\mathfrak{S} \cap (J \times U)$, donde

$$J \in \mathfrak{J} := \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, \Lambda] : \Lambda \in \mathbb{R}\} \cup \{[\Lambda, \infty) : \Lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Las componentes acotadas de $\mathfrak{S} \cap (J \times U)$ para algún $J \in \mathfrak{J}$ se llamarán componentes *semiacotadas* de \mathfrak{S} . En todo este capítulo *componente* querrá decir *componente conexa*. En lo que sigue, para cualquier subconjunto $S \subset \mathbb{R} \times U$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ denotaremos

$$S_\lambda := \{u \in U : (\lambda, u) \in S\}.$$

De manera más precisa, dado $J \in \mathfrak{J}$ y una componente acotada de \mathfrak{C} de $\mathfrak{S} \cap (J \times U)$, nuestro principal resultado proporciona una cota inferior de $\text{Card } \mathfrak{C}_\lambda$ para cada $\lambda \in J$ para el cual $(\lambda, 0) \notin \mathfrak{C}$. Esto se hará calculando el grado topológico de $\text{Deg}(\mathfrak{F}(\lambda, \cdot), \Omega_\lambda \setminus \bar{B}_\rho)$ en un entorno abierto adecuado Ω de \mathfrak{C} en $J \times U$, para $\rho > 0$ suficientemente pequeño. En todo este capítulo $B_\rho \subset U$ representa la bola abierta de radio $\rho > 0$ centrada en cero. El entero $\text{Deg}(\mathfrak{F}(\lambda, \cdot), \Omega_\lambda \setminus \bar{B}_\rho)$ será calculado por medio de un concepto de *paridad*, exclusivamente basado en la estructura del espectro Σ , que mide el cambio de índice de $\mathcal{L}(\lambda)$ en 0 cuando λ cruza un posible intervalo de bifurcación.

Las técnicas usadas para probar estos resultados adaptan las usadas por P. H. Rabinowitz [59] y R. J. Magnus [49]. En el marco de P. H. Rabinowitz [59], \mathcal{L} era de la forma $\mathcal{L}(\lambda) = I - \lambda K$ para algún operador compacto $K \in \mathcal{L}(U)$; él demostró que toda componente acotada \mathfrak{C} de soluciones no-triviales que emanan de un autovalor $\lambda_0 \in \Sigma$ de multiplicidad impar (equivalentemente, para el cual $\text{Ind}(\mathcal{L}(\lambda), 0)$ cambia cuando λ cruza λ_0) debe encontrarse con $(\lambda_1, 0)$, donde $\lambda_1 \in \Sigma \setminus \{\lambda_0\}$. Este resultado pionero ha constituido uno de los paradigmas en análisis no lineal debido a su gran cantidad de aplicaciones (consúltese, por ejemplo, H. Amann [2], P. M. Fitzpatrick and

J. Pejsachowicz [19], J. Mawhin [54], así como las referencias allí citadas). R. J. Magnus [49] probó que si Σ es discreto y \mathcal{C} es una componente acotada de soluciones no-triviales, entonces

$$\sum_{(\sigma,0) \in \mathcal{C}} P(\sigma) = 0,$$

donde $P : \Sigma \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ es una aplicación *paridad* que mide el cambio de $\text{Ind}(\mathcal{L}(\lambda), 0)$ cuando λ cruza algún punto de Σ . Nosotros generalizamos estos resultados en tres direcciones:

- Cubrimos el caso en el que Σ no es discreto.
- Estudiamos componentes semi-acotadas (no meramente acotadas).
- Damos estimaciones de $\text{Card } \mathcal{C}_\lambda$, donde \mathcal{C} es una componente semiacotada de soluciones no-triviales.

Este capítulo se organiza de la siguiente manera. En la Sección 5.2 definimos los conceptos de familia admisible de intervalos para Σ , y de aplicación paridad asociada. Estos conceptos nos proporcionan el marco y lenguaje necesarios para tratar con espectros Σ arbitrarios (no necesariamente discretos). En la Sección 5.3 mostramos la existencia de entornos abiertos aislantes para componentes semiacotadas. Básicamente, un entorno abierto aislante Ω es un entorno abierto de la componente \mathcal{C} de tal manera que no tenga soluciones no nulas de (5.1) en su frontera y que $\Omega \setminus \mathcal{C}$ sea pequeño. En la Sección 5.4 probamos nuestro resultado principal, que es una fórmula del grado de $\mathfrak{F}(\lambda, \cdot)$ en la sección λ de un entorno abierto aislante en términos de la aplicación paridad. En la Sección 5.5 usamos dicha fórmula para obtener estimaciones de $\text{Card } \mathcal{C}_\lambda$ bajo hipótesis adicionales de regularidad. De manera acorde, introducimos los conceptos de *signatura* de \mathcal{C} y de *cardinal mínimo*. El cardinal mínimo será una función con valores enteros y cuya variable será el parámetro λ que indicará una cota inferior de $\text{Card } \mathcal{C}_\lambda$ bajo hipótesis adicionales de regularidad; la signatura de \mathcal{C} consistirá en el conjunto de intervalos de bifurcación (junto con sus paridades) con los que se encuentra \mathcal{C} . Veremos que basta conocer la signatura para computar el cardinal mínimo. En la Sección 5.6 estudiamos el comportamiento local de la componente bajo la hipótesis de que consista en una curva regular; este análisis nos lleva a definir los conceptos de punto regular, punto de retorno y punto de histéresis. Finalmente, en las Secciones 5.7 y 5.8 estudiamos la estructura global de \mathcal{C} en el caso en que esté formado por arcos compactos de curva diferenciable bajo ciertas hipótesis de regularidad.

5.2. Familias admisibles y aplicaciones paridad inducidas

Antes de introducir el concepto de *familia admisible de intervalos* para Σ y su asociada *aplicación paridad*, es conveniente recordar algunos resultados elementales sobre familias localmente finitas. Dado un espacio topológico X , una familia \mathcal{A} cuyos elementos son subconjuntos de X se dice *localmente finita* si para cada $x \in X$ existe un entorno Ω de x en X tal que el conjunto $\{A \in \mathcal{A} : A \cap \Omega \neq \emptyset\}$ es finito. El siguiente lema recoge dos conocidas propiedades de familias localmente finitas.

Lema 5.2.1 *Para cualquier compacto $K \subset X$ y cualquier familia localmente finita \mathcal{A} , el conjunto $\{A \in \mathcal{A} : A \cap K \neq \emptyset\}$ es finito. Además, el conjunto $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ es cerrado si \mathcal{A} consta únicamente de conjuntos cerrados.*

El siguiente lema muestra que los miembros de una familia localmente finita de intervalos abiertos disjuntos pueden ser ordenados. En todo lo que sigue, dados A, B dos conjuntos no vacíos de \mathbb{R} , escribiremos $A < B$ cuando $a < b$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$. Si $A = \{a\}$, se dirá simplemente que $a < B$. Análogamente, escribiremos $A < b$ si $B = \{b\}$.

Lema 5.2.2 *Sea \mathcal{A} una familia localmente finita no vacía de intervalos abiertos no vacíos disjuntos de \mathbb{R} . Entonces \mathcal{A} es finito o numerable, y existen $r, s \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$ con $r \leq s$ tales que \mathcal{A} se puede expresar como $\mathcal{A} = \{J_i\}_{i=r}^s$, donde $J_{i-1} < J_i$ para todo $i \in \mathbb{Z} \cap [r+1, s]$.*

Demostración. Pongamos para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{A}_n := \{A \in \mathcal{A} : [-n, n] \cap A \neq \emptyset\}.$$

Gracias al Lema 5.2.1, \mathcal{A}_n es finito para cada $n \geq 1$. Luego \mathcal{A} es numerable, al ser $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{A}_n \neq \emptyset$. Por el Lema 5.2.1, \mathcal{A}_n consta de una cantidad finita de intervalos abiertos no vacíos y disjuntos, luego existen $p_0, q_0 \in \mathbb{Z}$ con $p_0 \leq q_0$ tales que

$$\mathcal{A}_n = \{J_{p_0}, J_{p_0+1}, \dots, J_{q_0}\} \quad \text{con} \quad J_{p_0} < \dots < J_{q_0}.$$

Es evidente que $\mathcal{A}_{n+1} = \{J_{p_1}, \dots, J_{q_1}\}$ para ciertos $p_1, q_1 \in \mathbb{Z}$ con $p_1 \leq p_0 \leq q_0 \leq q_1$ y $J_{p_1} < \dots < J_{q_1}$. Un argumento de inducción concluye la demostración. ■

Ya podemos introducir el concepto de familia admisible de intervalos para el cerrado Σ de \mathbb{R} que representa el espectro de una familia \mathcal{L} que cumple (HL).

Definición 5.2.3 *Sea \mathcal{A} una familia no vacía y localmente finita de intervalos abiertos de \mathbb{R} disjuntos y no vacíos tal que $A \cap \Sigma = \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Diremos que \mathcal{A} es una familia admisible de intervalos para Σ cuando, de acuerdo al Lema 5.2.2, hemos expresado para ciertos $r, s \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$ con $r \leq s$, $\mathcal{A} = \{J_i\}_{i=r}^s$, donde $J_{i-1} < J_i$ para todo $i \in \mathbb{Z} \cap [r+1, s]$.*

Sea $\mathcal{A} = \{J_i\}_{i=r}^s$ una familia admisible de intervalos para Σ . Por la Proposición 4.2.2(5), el índice $\text{Ind}(\mathcal{L}(\lambda), 0)$ es constante para $\lambda \in J_i$. Denotemos por $a_i \in \{-1, 1\}$ a este valor, $i \in \mathbb{Z} \cap [r, s]$. Ya estamos preparados para introducir el concepto de *aplicación paridad* asociada a cualquier familia admisible de intervalos.

Definición 5.2.4 *La aplicación paridad P asociada a la familia admisible $\mathcal{A} := \{J_i\}_{i=r}^s$ se define por*

$$P : \mathbb{Z} \cap [r+1, s] \rightarrow \{-1, 0, 1\}, \quad P(i) = \frac{a_i - a_{i-1}}{2}.$$

Nótese que, llamando

$$\Gamma_0 := \{i \in \mathbb{Z} \cap [r+1, s] : a_{i-1} = a_i\}, \quad \Gamma_1 := \{i \in \mathbb{Z} \cap [r+1, s] : a_{i-1} \neq a_i\},$$

la aplicación P de la Definición 5.2.4 cumple las siguientes propiedades:

- $P(i) = 0$ si $i \in \Gamma_0$.
- $P(i) \in \{-1, 1\}$ si $i \in \Gamma_1$.
- $P(i)P(j) = -1$ si $i, j \in \Gamma_1$ con $i < j$ y $(i, j) \cap \Gamma_1 = \emptyset$.

De hecho, P y $-P$ son las únicas aplicaciones definidas en $\mathbb{Z} \cap [r+1, s]$ que cumplen estas tres propiedades. Luego cada uno de los conjuntos Γ_0 y Γ_1 determina P salvo el signo. En las Secciones 5.4 y 5.5 veremos que esto basta para aplicar los resultados allí demostrados. Todos los capítulos anteriores de esta memoria, y especialmente la Proposición 4.3.1, han descrito cómo la multiplicidad algebraica puede calcular los conjuntos Γ_0 y Γ_1 cuando Σ es discreto y \mathcal{L} es suficientemente regular para que la multiplicidad esté definida. Por tanto, en ese caso tenemos una descripción de P sin tener de manejar el índice de Leray-Schauder.

A cada familia admisible $\{J_i\}_{i=r}^s$ para Σ se le asocia la familia de intervalos compactos $\{I_i\}_{i=r+1}^s$ definida mediante

$$I_i := [\sup J_{i-1}, \inf J_i], \quad i \in \mathbb{Z} \cap [r+1, s].$$

Estos I_i son no vacíos pero pueden estar formados por un único punto. Además, $I_i < I_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{Z} \cap [r+1, s-1]$.

En todo lo que sigue, para cualesquiera $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times U$ y $R > 0$, $B_R(\lambda, u) \subset \mathbb{R} \times U$ designará la bola abierta de radio R centrada en (λ, u) .

Lema 5.2.5 *La familia $\{I_i\}_{i=r+1}^s$ es localmente finita. Además, para cualquier compacto no vacío $K \subset \mathbb{R} \times U$ el conjunto*

$$\mathcal{B} := \{i \in \mathbb{Z} \cap [r+1, s] : (I_i \times \{0\}) \cap K \neq \emptyset\} \quad (5.2)$$

es finito, y existe $\alpha > 0$ tal que

$$\mathcal{B} = \{i \in \mathbb{Z} \cap [r+1, s] : (I_i \times \{0\}) \cap [K + B_\alpha(0, 0)] \neq \emptyset\}. \quad (5.3)$$

Demostración. Tomemos $x \in \mathbb{R}$. Como $\{J_i\}_{i=r}^s$ es localmente finita, existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < x < b$ tales que

$$\{i \in \mathbb{Z} \cap [r, s] : J_i \cap (a, b) \neq \emptyset\} \quad (5.4)$$

es finito. Si (5.4) es vacío entonces el conjunto $\{i \in \mathbb{Z} \cap [r+1, s] : I_i \cap (a, b) \neq \emptyset\}$ tiene como mucho un elemento. Supongamos, pues, que (5.4) es no vacío y sean i_0 y i_1 el mínimo y máximo, respectivamente, de este conjunto. Como $J_{i_0} \cap (a, b) \neq \emptyset$ y $J_{i_0-1} \cap (a, b) = \emptyset$ se tiene que $\sup J_{i_0-1} \leq a$. Sea ahora $i \in \mathbb{Z}$ con $I_i \cap (a, b) \neq \emptyset$. Entonces $i \geq i_0$. Análogamente, $b \leq \inf J_{i_1+1}$ y $i \leq i_1 + 1$. Con lo cual $\{I_i\}_{i=r+1}^s$ es localmente finito.

Sea ahora $K \subset \mathbb{R} \times U$ un compacto no vacío y consideremos el conjunto \mathcal{B} definido por (5.2). Como $\{I_i \times \{0\}\}_{i=r+1}^s$ es localmente finito en $\mathbb{R} \times U$, entonces \mathcal{B} es finito por el Lema 5.2.1. Ahora bien, el compacto K tiene intersección vacía con $\bigcup_{i \in \mathbb{Z} \cap [r+1, s] \setminus \mathcal{B}} (I_i \times \{0\})$, que es cerrado por el Lema 5.2.1. Luego existe $\alpha > 0$ tal que

$$[K + B_\alpha(0, 0)] \cap \bigcup_{i \in \mathbb{Z} \cap [r+1, s] \setminus \mathcal{B}} (I_i \times \{0\}) = \emptyset.$$

Esto muestra (5.3) y concluye la demostración. ■

Por último, a cada familia admisible de intervalos $\mathcal{A} = \{J_i\}_{i=r}^s$ para Σ se le asocia el correspondiente conjunto de soluciones no-triviales de (5.1) definido por

$$\mathfrak{S} := \left[\mathfrak{F}^{-1}(0) \cap [\mathbb{R} \times (U \setminus \{0\})] \right] \cup \left[\left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=r}^s J_i \right) \times \{0\} \right]. \quad (5.5)$$

Lema 5.2.6 *El conjunto \mathfrak{S} es cerrado, y todo cerrado y acotado de \mathfrak{S} es compacto.*

Demostración. Sea $S := \mathfrak{F}^{-1}(0) \cap [\mathbb{R} \times (U \setminus \{0\})]$. Por el Lema 4.1.1, $\bar{S} \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) \subset \Sigma \times \{0\}$. Como $\Sigma \subset \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=r}^s J_i$,

$$\bar{S} \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) \subset \left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=r}^s J_i \right) \times \{0\}.$$

Como S es cerrado en $\mathbb{R} \times (U \setminus \{0\})$ tenemos que $\bar{S} \cap [\mathbb{R} \times (U \setminus \{0\})] = S$, luego

$$\mathfrak{S} = \bar{S} \cup \left[\left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=r}^s J_i \right) \times \{0\} \right] \quad (5.6)$$

debe ser cerrado.

Por último, como todo cerrado y acotado de $(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=r}^s J_i) \times \{0\}$ es compacto, y por las hipótesis (HL) y (HN), todo cerrado y acotado de \bar{S} es compacto, concluimos a partir de (5.6) que todo cerrado y acotado de \mathfrak{S} es compacto. ■

Salvo cuando $\Sigma = \mathbb{R}$, siempre existen familias admisibles de intervalos \mathcal{A} para Σ , y hay una cantidad infinita de ellas. Una pregunta natural es cómo elegir las. Veremos en las Secciones 5.4 y 5.5 que, hablado de una manera imprecisa, cuanto más grande sea el conjunto $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, mayor información obtenemos. Hay una circunstancia en la que la familia \mathcal{A} se puede elegir de manera canónica, y es cuando Σ está formado por una familia localmente finita de intervalos cerrados. Aquí, el conjunto formado por un punto se considera como un intervalo cerrado, luego en particular un Σ discreto entra dentro de este marco. En este caso, las componentes conexas de $\mathbb{R} \setminus \Sigma$ forman una familia admisible de intervalos \mathcal{A} para Σ . Pero sin embargo no siempre es posible una elección canónica; por ejemplo, si Σ es el conjunto formado por una sucesión inyectiva junto con su límite.

5.3. Entornos abiertos aislantes

A partir de ahora, en todo este capítulo fijaremos una familia admisible $\mathcal{A} = \{J_i\}_{i=r}^s$ para Σ , un $\Lambda \in \mathbb{R}$, un $J \in \{\mathbb{R}, (-\infty, \Lambda], [\Lambda, \infty)\}$, y una componente acotada \mathfrak{C} de $\mathfrak{S} \cap (J \times U)$. Gracias al Lema 5.2.6, \mathfrak{C} es compacto. También vamos a considerar la familia asociada $\{I_i\}_{i=r+1}^s$ construida en la Sección 5.2, y denotaremos

$$\mathcal{B} := \{i \in \mathbb{Z} \cap [r+1, s] : (I_i \times \{0\}) \cap \mathfrak{C} \neq \emptyset\}. \quad (5.7)$$

Por el Lema 5.2.5, \mathcal{B} es finito; es más,

$$\left(J \cap \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i \right) \times \{0\} \subset \mathfrak{C},$$

ya que \mathcal{C} es una componente. Además, todo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=r}^s J_i$ con $(\lambda, 0) \in \mathcal{C}$ cumple $\lambda \in \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$, ya que \mathcal{C} es acotado. Así pues,

$$\mathcal{C} \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = \left(J \cap \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i \right) \times \{0\}. \quad (5.8)$$

El siguiente concepto va a desempeñar un papel importante en todo el análisis que vamos a llevar a cabo.

Definición 5.3.1 *Un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R} \times U$ se dice entorno abierto aislante de \mathcal{C} en $J \times U$ si se cumplen las siguientes condiciones:*

$$\mathcal{C} \subset \Omega, \quad \partial\Omega \cap \mathcal{G} \subset (\mathbb{R} \setminus J) \times U, \quad \mathcal{B} = \{i \in \mathbb{Z} \cap [r+1, s] : (I_i \times \{0\}) \cap \Omega \neq \emptyset\}, \quad (5.9)$$

donde \mathcal{B} es el conjunto definido por (5.7).

Por supuesto, la segunda relación de (5.9) quiere decir $\partial\Omega \cap \mathcal{G} = \emptyset$ en el caso $J = \mathbb{R}$.

Presentamos ahora, sin demostración, una propiedad topológica de la familia de los “teoremas de conexión/separación”, tradicionalmente atribuido a G. T. Whyburn [68], aunque parece que dicho resultado es considerablemente anterior. Consúltese K. Kuratowski [38, Chapter Five] para un compendio de resultados de este estilo, y J. C. Alexander [1] para una exposición bajo el punto de vista de la teoría de bifurcación.

Lema 5.3.2 *Sean M un espacio métrico compacto, y A, B dos subconjuntos cerrados no vacíos de M . Supongamos que no existe un conexo $C \subset M$ que cumpla $C \cap A \neq \emptyset$ y $C \cap B \neq \emptyset$. Entonces existen dos compactos disjuntos no vacíos de M , digamos M_A y M_B , tales que*

$$A \subset M_A, \quad B \subset M_B, \quad M = M_A \cup M_B.$$

El siguiente resultado establece la existencia de entornos abiertos aislantes que cumplen ciertas propiedades necesarias para calcular el grado topológico de \mathfrak{F} .

Proposición 5.3.3 *Supongamos que \mathcal{C} es una componente acotada de $\mathcal{G} \cap (J \times U)$. Entonces para cada $\beta > 0$, \mathcal{C} admite un entorno abierto aislante Ω en $J \times U$ tal que*

$$\Omega \subset \mathcal{C} + B_\beta(0, 0). \quad (5.10)$$

Además, para todo $\beta > 0$ suficientemente pequeño, todo entorno abierto aislante Ω de \mathcal{C} en $J \times U$ que cumpla (5.10), y todo $\varepsilon > 0$, existe $\rho^* = \rho^*(\varepsilon) > 0$ tal que para cada $0 < \rho \leq \rho^*$ y

$$\lambda \in J_\varepsilon := J \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{B}} [I_i + (-\varepsilon, \varepsilon)]$$

ocurre alguna de las siguientes alternativas: o bien $\bar{B}_\rho \cap \Omega_\lambda = \emptyset$ o bien $\{u \in \bar{B}_\rho : \mathfrak{F}(\lambda, u) = 0\} = \{0\}$.

Demostración. Por el Lema 5.2.5, existe $\alpha_0 > 0$ tal que para todo $\alpha \in (0, \alpha_0]$,

$$\mathcal{B} = \{i \in \mathbb{Z} \cap [r+1, s] : (I_i \times \{0\}) \cap [\mathfrak{C} + B_\alpha(0, 0)] \neq \emptyset\}. \quad (5.11)$$

Fijemos $\alpha \in (0, \alpha_0)$ y llamemos $\mathcal{U} := \mathfrak{C} + B_\alpha(0, 0)$. Si $\partial\mathcal{U} \cap \mathfrak{S} \subset (\mathbb{R} \setminus J) \times U$ entonces \mathcal{U} ya es un entorno abierto aislante de \mathfrak{C} en $J \times U$. Supongamos, pues, que $\partial\mathcal{U} \cap \mathfrak{S} \cap (J \times U) \neq \emptyset$ y llamemos

$$M := \bar{\mathcal{U}} \cap \mathfrak{S} \cap (J \times U), \quad A := \mathfrak{C}, \quad B := \partial\mathcal{U} \cap \mathfrak{S} \cap (J \times U).$$

Entonces M, A, B cumplen las hipótesis del Lema 5.3.2, ya que \mathfrak{C} es una componente de $\mathfrak{S} \cap (J \times U)$. Así pues, existen dos compactos disjuntos de M , digamos M_A y M_B , tales que $A \subset M_A$, $B \subset M_B$ y $M = M_A \cup M_B$. Entonces $\Omega := M_A + B_\eta(0, 0)$ es un entorno abierto aislante de \mathfrak{C} en $J \times U$ para todo $\eta > 0$ suficientemente pequeño. En efecto, por (5.7) y (5.11) se tiene que

$$\mathcal{B} = \{i \in \mathbb{Z} \cap [r+1, s] : (I_i \times \{0\}) \cap M_A \neq \emptyset\},$$

ya que $\mathfrak{C} = A \subset M_A \subset M \subset \mathfrak{C} + \bar{B}_\alpha(0, 0) \subset \mathfrak{C} + B_{\alpha_0}(0, 0)$. Luego por el Lema 5.2.5, Para todo $\eta > 0$ suficientemente pequeño,

$$\mathcal{B} = \{i \in \mathbb{Z} \cap [r+1, s] : (I_i \times \{0\}) \cap \Omega \neq \emptyset\}.$$

En consecuencia, como $\mathfrak{C} \subset M_A \subset \Omega$, para probar que Ω es un entorno abierto aislante de \mathfrak{C} basta ver que

$$\partial\Omega \cap \mathfrak{S} \subset (\mathbb{R} \setminus J) \times U. \quad (5.12)$$

Como M_A, M_B son compactos disjuntos con unión M , podemos reducir $\eta > 0$, si fuera necesario, para que

$$\partial\Omega \cap M = \emptyset. \quad (5.13)$$

Suponemos que a partir de ahora hemos escogido $\eta > 0$ de esa manera. Como

$$M = B \cup [\mathcal{U} \cap \mathfrak{S} \cap (J \times U)] \quad \text{y} \quad M_A \cap M_B = \emptyset,$$

es claro que $M_A \subset \mathcal{U}$, luego para $\eta > 0$ suficientemente pequeño, $\partial\Omega \subset \mathcal{U}$. Así pues,

$$\partial\Omega \cap \mathfrak{S} \cap (J \times U) = \partial\Omega \cap \mathcal{U} \cap \mathfrak{S} \cap (J \times U) \subset \partial\Omega \cap M = \emptyset,$$

debido a (5.13), lo que concluye la demostración de (5.12) y muestra que Ω es un entorno abierto aislante de \mathfrak{C} . Nótese que por construcción,

$$\Omega = M_A + B_\eta(0, 0) \subset \mathcal{U} + B_\eta(0, 0) = \mathfrak{C} + B_\alpha(0, 0) + B_\eta(0, 0) = \mathfrak{C} + B_{\alpha+\eta}(0, 0).$$

Como α y $\eta > 0$ se pueden tomar arbitrariamente pequeños, para cualquier $\beta > 0$ existe un entorno abierto aislante Ω de \mathfrak{C} en $J \times U$ que cumple (5.10). Esto concluye la demostración de la primera parte del enunciado.

Sea ahora Ω un entorno abierto de \mathfrak{C} en $J \times U$ tal que (5.10) para un cierto $\beta > 0$. Para probar la existencia de un $\rho^* > 0$ que cumpla los requisitos del enunciado, razonaremos por contradicción. Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada entero $n \geq 1$ existen

$$\rho_n > 0, \quad \lambda_n \in J_\varepsilon, \quad u_n \in \bar{B}_{\rho_n} \setminus \{0\},$$

que cumplen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0, \quad \bar{B}_{\rho_n} \cap \Omega_{\lambda_n} \neq \emptyset, \quad \mathfrak{F}(\lambda_n, u_n) = 0. \quad (5.14)$$

Si $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ fuera no acotado entonces $\Omega_{\lambda_k} = \emptyset$ para un cierto k , puesto que Ω es acotado, lo que es imposible porque $\bar{B}_{\rho_n} \cap \Omega_{\lambda_n} \neq \emptyset$. Luego $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ debe ser acotado, con lo que extrayendo una subsucesión adecuada, etiquetada de nuevo por n , podemos suponer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \sigma \in J_\varepsilon.$$

Nótese que J_ε es cerrado. Como

$$u_n \neq 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n, u_n) = (\sigma, 0),$$

entonces $(\sigma, 0)$ es un punto de bifurcación de (5.1) y, por el Lema 4.1.1, $\sigma \in \Sigma$. Puesto que $\sigma \in J_\varepsilon$, se tiene que $\sigma \notin \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$; se sigue entonces de (5.8) que $(\sigma, 0) \notin \mathfrak{C}$. Luego por (5.10) se tiene que $(\sigma, 0) \notin \Omega$ para $\beta > 0$ suficientemente pequeño. Gracias ahora a (5.14), para cada $n \geq 1$ existe $v_n \in \bar{B}_{\rho_n} \cap \Omega_{\lambda_n}$. Por construcción tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n, v_n) = (\sigma, 0) \quad \text{y} \quad (\lambda_n, v_n) \in \Omega, \quad n \geq 1.$$

Así pues, $(\sigma, 0) \in \bar{\Omega} \setminus \Omega = \partial\Omega$, y usando (5.9) obtenemos

$$(\sigma, 0) \in \partial\Omega \cap \mathfrak{S} \subset (\mathbb{R} \setminus J) \times U,$$

para $\beta > 0$ suficientemente pequeño, y por tanto $\sigma \notin J$, lo que es imposible puesto que $\sigma \in J_\varepsilon \subset J$. Esto concluye la demostración. ■

5.4. El grado de \mathfrak{F} en términos de la aplicación paridad

Mantendremos en esta sección las notaciones introducidas en las Secciones 5.2 y 5.3. Recordemos que P es la aplicación paridad de la Definición 5.2.4; por otra parte, siguiendo una convención habitual, un sumatorio sobre el conjunto vacío se define como cero. La sección está dedicada a la demostración del siguiente resultado.

Teorema 5.4.1 *Supongamos que \mathfrak{C} es una componente acotada de $\mathfrak{S} \cap (J \times U)$. Entonces existe $\beta_0 > 0$ tal que para cada $\beta \in (0, \beta_0)$, cualquier entorno abierto aislante $\Omega \subset \mathfrak{C} + B_\beta(0, 0)$ de \mathfrak{C} en $J \times U$ y cualquier $\lambda^* \in J \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$, existe $\rho^* > 0$ tal que para cada $0 < \rho \leq \rho^*$,*

$$\text{Deg}(\mathfrak{F}(\lambda^*, \cdot), \Omega_{\lambda^*} \setminus \bar{B}_\rho) = 2 \text{sign } J^* \sum_{i \in J^*} P(i), \quad (5.15)$$

donde

$$J^* := \begin{cases} \{i \in \mathcal{B} : I_i > \lambda^*\} & \text{si } J = [\Lambda, \infty), \\ \{i \in \mathcal{B} : I_i < \lambda^*\} & \text{si } J = (-\infty, \Lambda], \end{cases}$$

$$\text{sign } J^* := \begin{cases} 1 & \text{si } J^* = \{i \in \mathcal{B} : I_i > \lambda^*\}, \\ -1 & \text{si } J^* = \{i \in \mathcal{B} : I_i < \lambda^*\}, \end{cases}$$

y

$$J^* \in \{\{i \in \mathcal{B} : I_i > \lambda^*\}, \{i \in \mathcal{B} : I_i < \lambda^*\}\} \quad \text{si } J = \mathbb{R}.$$

En particular, si $J = \mathbb{R}$ entonces

$$\sum_{i \in \mathcal{B}} P(i) = 0. \quad (5.16)$$

Demostración. Supongamos $J = [\Lambda, \infty)$. Llamemos

$$J^* := \{i \in \mathcal{B} : I_i > \lambda^*\} = \{i_1, \dots, i_M\}, \quad i_1 < \dots < i_M.$$

No se excluye el caso $J^* = \emptyset$. Gracias a (5.8), existe $\delta > 0$ tal que

$$\bigcup_{i \in \mathcal{B}} (I_i \times \{0\}) + B_\delta(0, 0) \subset \Omega, \quad (5.17)$$

puesto que $\mathcal{C} \subset \Omega$, y Ω es abierto. Como además $\{I_i\}_{i \in \mathcal{B}}$ es una familia finita de intervalos compactos no vacíos, podemos tomar δ más pequeño para que $\{I_i + (-\delta, \delta)\}_{i \in \mathcal{B}}$ sea una familia de intervalos disjuntos, y

$$\lambda^* \notin \bigcup_{i \in \mathcal{B}} [I_i + (-\delta/2, \delta/2)],$$

ya que $\lambda^* \in J \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$. Tomemos un $\delta > 0$ que cumpla esos requisitos. Gracias entonces a la Proposición 5.3.3, existe $\rho^* = \rho^*(\delta/2) > 0$ tal que para cada $\rho \in (0, \rho^*]$ y

$$\lambda \in J_\delta := J \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{B}} [I_i + (-\delta/2, \delta/2)]$$

ocurre alguna de las siguientes alternativas: o bien $\bar{B}_\rho \cap \Omega_\lambda = \emptyset$ o bien $\{u \in \bar{B}_\rho : \mathfrak{F}(\lambda, u) = 0\} = \{0\}$. Fijemos $\rho \in (0, \rho^*]$ y llamemos

$$s_j^- := \inf I_{i_j} - \delta/2, \quad s_j^+ := \sup I_{i_j} + \delta/2, \quad 1 \leq j \leq M.$$

Entonces por la Proposición 4.2.2(1), para cada $1 \leq j \leq M$, $\text{Deg}(\mathfrak{F}(\lambda, \cdot), \Omega_\lambda)$ es constante en el intervalo $\lambda \in [s_j^-, s_j^+]$. En efecto, si $\lambda \in [s_j^-, s_j^+]$ para un cierto $1 \leq j \leq M$, y $(\lambda, u) \in \partial\Omega$, entonces $(\lambda, u) \notin \mathcal{S}$, por (5.9), y $\lambda \in J$. Por (5.17) tenemos además que $(\lambda, 0) \in \Omega$ y $u \neq 0$. Luego $\mathfrak{F}(\lambda, u) \neq 0$ y, por tanto,

$$\text{Deg}(\mathfrak{F}(s_j^-, \cdot), \Omega_{s_j^-}) = \text{Deg}(\mathfrak{F}(s_j^+, \cdot), \Omega_{s_j^+}), \quad 1 \leq j \leq M. \quad (5.18)$$

De nuevo por la Proposición 4.2.2(1), existen $d_0, \dots, d_M \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{aligned} \text{Deg}(\mathfrak{F}(\lambda, \cdot), \Omega_\lambda \setminus \bar{B}_\rho) &= d_j, & \lambda \in [s_j^+, s_{j+1}^-], & \quad 1 \leq j \leq M-1, \\ \text{Deg}(\mathfrak{F}(\lambda, \cdot), \Omega_\lambda \setminus \bar{B}_\rho) &= d_M, & \lambda \in [s_M^+, \infty), & \\ \text{Deg}(\mathfrak{F}(\lambda, \cdot), \Omega_\lambda \setminus \bar{B}_\rho) &= d_0, & \lambda \in [\lambda^*, s_1^-]. & \end{aligned} \quad (5.19)$$

Para probar (5.19) bastará ver que $\mathfrak{F}(\lambda, u) \neq 0$ si

$$\lambda \in [\lambda^*, s_1^-] \cup [s_M^+, \infty) \cup \bigcup_{j=1}^{M-1} [s_j^+, s_{j+1}^-] \quad \text{y} \quad u \in \partial(\Omega_\lambda \setminus \bar{B}_\rho). \quad (5.20)$$

Tomemos, pues, un (λ, u) que cumpla (5.20). Evidentemente, $u \neq 0$ y $\lambda \in J_\delta$. Por la Proposición 4.2.2, o bien $\bar{B}_\rho \cap \Omega_\lambda = \emptyset$ o bien $\{u \in \bar{B}_\rho : \mathfrak{F}(\lambda, u) = 0\} = \{0\}$. Supongamos que $\bar{B}_\rho \cap \Omega_\lambda = \emptyset$. Entonces $\Omega_\lambda \setminus \bar{B}_\rho = \Omega_\lambda$ y por lo tanto $(\lambda, u) \in \partial\Omega \cap (J \times U)$. Así pues, gracias a (5.9) tenemos $(\lambda, u) \notin \mathfrak{S}$, luego $\mathfrak{F}(\lambda, u) \neq 0$, ya que $u \neq 0$. Supongamos ahora que $\{u \in \bar{B}_\rho : \mathfrak{F}(\lambda, u) = 0\} = \{0\}$. Gracias a (5.20) se tiene que $u \in \partial(\Omega_\lambda \setminus \bar{B}_\rho) \subset \partial\Omega_\lambda \cup \partial B_\rho$ y, si $u \in \partial B_\rho$, entonces $\mathfrak{F}(\lambda, u) \neq 0$, mientras que si $u \in \partial\Omega_\lambda$ entonces $(\lambda, u) \in \partial\Omega \cap (J \times U)$, por lo que gracias a (5.9), $(\lambda, u) \notin \mathfrak{S}$. Con lo cual, $\mathfrak{F}(\lambda, u) \neq 0$, ya que $u \neq 0$, lo que concluye la demostración de (5.19).

Nótese además que $d_M = 0$, ya que Ω es acotado y aplicamos la Proposición 4.2.2(2). Por otra parte, para cada $\rho > 0$ suficientemente pequeño y $1 \leq j \leq M$, tenemos por el Teorema 4.2.1(2),

$$\text{Deg}(\mathfrak{F}(s_j^-, \cdot), \Omega_{s_j^-}) = d_{j-1} + \text{Ind}(\mathfrak{L}(s_j^-, 0)), \quad \text{Deg}(\mathfrak{F}(s_j^+, \cdot), \Omega_{s_j^+}) = d_j + \text{Ind}(\mathfrak{L}(s_j^+, 0)),$$

luego por la Definición 5.2.4, la identidad (5.18) se puede escribir de la forma

$$d_{j-1} - d_j = \text{Ind}(\mathfrak{L}(s_j^+, 0)) - \text{Ind}(\mathfrak{L}(s_j^-, 0)) = 2P(i_j), \quad 1 \leq j \leq M.$$

Sumando estas igualdades y usando que $d_M = 0$ obtenemos

$$d_0 = \sum_{j=1}^M (d_{j-1} - d_j) = 2 \sum_{j=1}^M P(i_j)$$

y entonces a partir de (5.19) sacamos que

$$\text{Deg}(\mathfrak{F}(\lambda^*, \cdot), \Omega_{\lambda^*} \setminus \bar{B}_\rho) = 2 \sum_{j=1}^M P(i_j).$$

Esto concluye la demostración en el caso $J = [\Lambda, \infty)$. Si $J = (-\infty, \Lambda]$ se procedería de manera completamente análoga.

Por último, supongamos que $J = \mathbb{R}$, sean \mathcal{C} una componente acotada de \mathfrak{S} , $\Omega \subset \mathcal{C} + B_\beta(0, 0)$ un entorno abierto aislante de \mathcal{C} en $\mathbb{R} \times U$, y $\lambda^* \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$. Tomemos $\Lambda \leq \lambda^*$ tal que $\Omega \subset [\Lambda, \infty) \times U$. Entonces \mathcal{C} es una componente de $\mathfrak{S} \cap ([\Lambda, \infty) \times U)$, y Ω es un entorno abierto aislante de \mathcal{C} en $[\Lambda, \infty) \times U$. Por tanto, la primera parte de la demostración nos dice que

$$\text{Deg}(\mathfrak{F}(\lambda^*, \cdot), \Omega_{\lambda^*} \setminus \bar{B}_\rho) = 2 \sum_{\substack{i \in \mathcal{B} \\ I_i > \lambda^*}} P(i).$$

Análogamente,

$$\text{Deg}(\mathfrak{F}(\lambda^*, \cdot), \Omega_{\lambda^*} \setminus \bar{B}_\rho) = -2 \sum_{\substack{i \in \mathcal{B} \\ I_i < \lambda^*}} P(i).$$

Esto prueba (5.16) y concluye la demostración. ■

5.5. Cotas inferiores de $\text{Card } \mathfrak{C}_\lambda$

Usamos el Teorema 5.4.1 para estimar el número de elementos de \mathfrak{C}_λ en ciertas circunstancias especiales. Veremos aquí que basta conocer la paridad P salvo el signo para aplicar los resultados de esta sección.

Teorema 5.5.1 *Sea \mathfrak{C} una componente acotada de $\mathfrak{S} \cap (J \times U)$. Supongamos que existen $\lambda^* \in J \setminus \bigcup_{i \in \mathfrak{B}} I_i$ y $n \in \mathbb{N}$ ceros aislados de $\mathfrak{F}(\lambda^*, \cdot)$, $u_j \in \mathfrak{C}_{\lambda^*}$, $1 \leq j \leq n$, todos ellos diferentes, tales que*

$$\text{Ind}(\mathfrak{F}(\lambda^*, \cdot), u_j) \in \{-1, 0, 1\}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (5.21)$$

Llamemos

$$n_\pm := \text{Card}\{j \in \{1, \dots, n\} : \text{Ind}(\mathfrak{F}(\lambda^*, \cdot), u_j) = \pm 1\}. \quad (5.22)$$

Entonces

$$\text{Card } \mathfrak{C}_{\lambda^*} \geq n + 1 \quad \text{si} \quad 2 \left| \sum_{i \in J^*} P(i) \right| \neq |n_+ - n_-|. \quad (5.23)$$

En particular, $\text{Card } \mathfrak{C}_{\lambda^*} \geq n + 1$ si $n_+ + n_-$ es impar.

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{C}_{\lambda^*} = \{u_1, \dots, u_n\}$. Por (5.8) se tiene que para cada $1 \leq j \leq n$ es $u_j \neq 0$, ya que $\lambda^* \in J \setminus \bigcup_{i \in \mathfrak{B}} I_i$. En particular, $\mathfrak{C}_{\lambda^*} \cap \bar{B}_\rho = \emptyset$ para $\rho > 0$ suficientemente pequeño. Observamos ahora que el conjunto

$$Z := \{\lambda^*\} \times \{u \in U \setminus \mathfrak{C}_{\lambda^*} : \mathfrak{F}(\lambda^*, u) = 0\}$$

es cerrado, ya que \mathfrak{C}_{λ^*} consta de ceros aislados de $\mathfrak{F}(\lambda^*, \cdot)$. Como $\mathfrak{C} \cap Z = \emptyset$ y \mathfrak{C} es compacto, existe $\beta > 0$ tal que $(\mathfrak{C} + B_\beta(0, 0)) \cap Z = \emptyset$. Gracias a la Proposición 5.3.3, existe un entorno abierto aislante $\Omega \subset \mathfrak{C} + B_\beta(0, 0)$ de \mathfrak{C} en $J \times U$. Como $\Omega \cap Z = \emptyset$,

$$\mathfrak{C}_{\lambda^*} = \{u \in \Omega_{\lambda^*} \setminus \bar{B}_\rho : \mathfrak{F}(\lambda^*, u) = 0\}.$$

Luego por la Proposición 4.2.2(3),

$$\text{Deg}(\mathfrak{F}(\lambda^*, \cdot), \Omega_{\lambda^*} \setminus \bar{B}_\rho) = \sum_{j=1}^n \text{Ind}(\mathfrak{F}(\lambda^*, \cdot), u_j).$$

A partir de (5.15) se obtiene que

$$2 \left| \sum_{i \in J^*} P(i) \right| = |n_+ - n_-|,$$

lo que concluye la demostración de (5.23). Por último, si $n_+ + n_-$ es impar, entonces $n_+ - n_-$ es también impar, con lo que se puede aplicar (5.23). Esto completa la demostración. ■

En lo que sigue manejaremos el siguiente concepto.

Definición 5.5.2 Supongamos que \mathfrak{C} es una componente de $\mathfrak{S} \cap (J \times U)$, y $\lambda^* \in J \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$. Se dice entonces que λ^* es un valor regular del parámetro para \mathfrak{C} si o bien \mathfrak{C}_{λ^*} es vacío o bien consta de $n \in \mathbb{N}$ ceros aislados de $\mathfrak{F}(\lambda^*, \cdot)$, digamos u_1, \dots, u_n , que cumplen (5.21). Si además, poniendo (5.22), se cumple $n = n_+ + n_-$, entonces se dirá que λ^* es un valor fuertemente regular del parámetro para \mathfrak{C} .

Nótese que por la Proposición 4.2.2(4,5), todo $\lambda^* \in J \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$ es un valor fuertemente regular del parámetro para \mathfrak{C} siempre que $D_u \mathfrak{F}(\lambda^*, u)$ exista y sea un isomorfismo para cada $u \in \mathfrak{C}_{\lambda^*}$. La siguiente consecuencia de los Teoremas 5.4.1 y 5.5.1 nos proporciona una cota inferior de Card \mathfrak{C}_{λ^*} en un valor regular del parámetro $\lambda^* \in J \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$.

Teorema 5.5.3 Sea \mathfrak{C} una componente acotada de $\mathfrak{S} \cap (J \times U)$, y $\lambda^* \in J \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$ un valor regular del parámetro para \mathfrak{C} . Entonces

$$\text{Card } \mathfrak{C}_{\lambda^*} \geq 2 \left| \sum_{i \in J^*} P(i) \right|.$$

Además Card \mathfrak{C}_{λ^*} es par si λ^* es un valor fuertemente regular del parámetro para \mathfrak{C} .

Demostración. Estamos suponiendo que \mathfrak{C}_{λ^*} está formado por $n \geq 0$ ceros aislados de $\mathfrak{F}(\lambda^*, \cdot)$, digamos u_j , $1 \leq j \leq n$. Como además $\lambda^* \in J \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$, se sigue de (5.8) que $0 \notin \mathfrak{C}_{\lambda^*}$. Adaptando la demostración del Teorema 5.5.1 obtenemos que

$$2 \left| \sum_{i \in J^*} P(i) \right| = \left| \sum_{j=1}^n \text{Ind}(\mathfrak{F}(\lambda^*, \cdot), u_j) \right| \leq \sum_{j=1}^n |\text{Ind}(\mathfrak{F}(\lambda^*, \cdot), u_j)| = n_+ + n_- \leq \text{Card } \mathfrak{C}_{\lambda^*},$$

donde n_+ y n_- se definen en (5.22).

Por último, si Card $\mathfrak{C}_{\lambda^*} = n_+ + n_-$, entonces por el último aserto del Teorema 5.5.1, $n_+ + n_-$ es par, lo que concluye la demostración. ■

El Teorema 5.5.3 motiva la siguiente definición.

Definición 5.5.4 Sea \mathfrak{C} una componente acotada de $\mathfrak{S} \cap (J \times U)$. Si $J \in \{(-\infty, \Lambda], [\Lambda; \infty)\}$ supongamos además que $\mathfrak{C}_\Lambda \neq \emptyset$ y que $\Lambda \notin \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$. Entonces:

Cuando $\mathcal{B} = \{i_1, \dots, i_N\}$ con $i_1 < \dots < i_N$, la *signatura* de \mathfrak{C} en $J \times U$ se define por

$$\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_N \\ P(i_1) & \cdots & P(i_N) \end{pmatrix},$$

mientras que la *signatura* de \mathfrak{C} en $J \times U$ es vacía si $\mathcal{B} = \emptyset$.

Cuando $\mathcal{B} = \{i_1, \dots, i_N\}$ con $i_1 < \dots < i_N$, el cardinal mínimo de \mathfrak{C} en $J \times U$ es la aplicación denotada por $\text{MC}_{[\mathfrak{C}; J \times U]}$, o simplemente por MC si es que \mathfrak{C} y J están claros por el contexto, definida por

$$\text{MC}_{[\mathfrak{C}; J \times U]} : J \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\text{MC}(\lambda) := \begin{cases} 2 \text{ máx} \left\{ 1, \left| \sum_{j=1}^N P(i_j) \right| \right\}, & \text{si } \lambda \in [\Lambda, \inf I_{i_1}), \\ 2 \text{ máx} \left\{ 1, \left| \sum_{j=k+1}^N P(i_j) \right| \right\}, & \text{si } \lambda \in (\sup I_{i_k}, \inf I_{i_{k+1}}), \quad 1 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{si } \lambda \in (\sup I_{i_N}, \infty), \end{cases}$$

si $J = [\Lambda, \infty)$, por

$$\text{MC}(\lambda) := \begin{cases} 2 \text{ máx} \left\{ 1, \left| \sum_{j=1}^N P(i_j) \right| \right\}, & \text{si } \lambda \in (\sup I_{i_N}, \Lambda], \\ 2 \text{ máx} \left\{ 1, \left| \sum_{j=1}^k P(i_j) \right| \right\}, & \text{si } \lambda \in (\sup I_{i_k}, \inf I_{i_{k+1}}), \quad 1 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{si } \lambda \in (-\infty, \inf I_{i_1}), \end{cases}$$

si $J = (-\infty, \Lambda]$, y por

$$\text{MC}(\lambda) := \begin{cases} 0, & \text{si } \lambda \in (-\infty, \inf I_{i_1}) \cup (\sup I_{i_N}, \infty), \\ 2 \text{ máx} \left\{ 1, \left| \sum_{j=1}^k P(i_j) \right| \right\}, & \text{si } \lambda \in (\sup I_{i_k}, \inf I_{i_{k+1}}), \quad 1 \leq k \leq N-1, \end{cases}$$

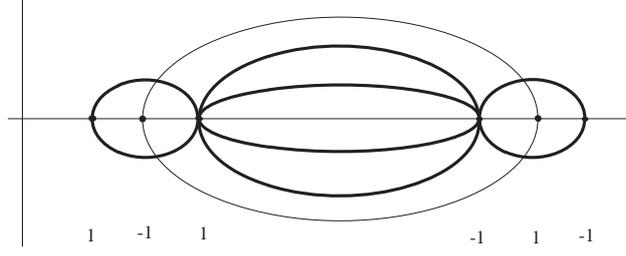
si $J = \mathbb{R}$, mientras que definiremos $\text{MC} := 0$ si $\mathcal{B} = \emptyset$.

Nótese que $\text{MC}_{[\mathcal{C}; J \times U]}$ está determinado unívocamente a partir de la signatura de \mathcal{C} en $J \times U$, una vez que se ha fijado una familia admisible \mathcal{A} para Σ . Con estos conceptos en mente, el Teorema 5.5.3 se puede reescribir de la siguiente manera: $\text{MC}_{[\mathcal{C}; J \times U]}(\lambda)$ es una cota inferior de $\text{Card } \mathcal{C}_\lambda$ para cualquier valor fuertemente regular del parámetro $\lambda \in J \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$ para \mathcal{C} .

Por el Teorema 5.5.3 o por la Definición 5.5.4, vemos que cuanto mayor sea

$$\left| \sum_{i \in J^*} P(i) \right|, \quad (5.24)$$

mayor es la información que tenemos. Sin embargo, en muchas situaciones, el número (5.24) es 0 o 1. Para que (5.24) fuera mayor que 1 haría falta que la $J^* = \{i_1, \dots, i_M\}$ definida en el Teorema 5.4.1 con $i_1 < \dots < i_M$ cumpliera que haya enteros $1 \leq j < k \leq M$ tales que $P(i_j) = P(i_k) \neq 0$ y $P(i_h) = 0$ para cada $j < h < k$. Supongamos que sea éste el caso. Entonces por supuesto, por la definición de aplicación paridad, debe existir un entero $i_j < \ell < i_k$ tal que $P(i_j) = -P(\ell)$, pero $(I_\ell \times \{0\}) \cap \mathcal{C} = \emptyset$. Gracias al Teorema 5.4.1 o a resultados conocidos en teoría de bifurcación (véase por ejemplo J. López-Gómez [43, Theorem 6.2.1]) existe un conexo $\tilde{\mathcal{C}}$ de \mathcal{S} que tiene soluciones non nulas y corta a $I_\ell \times \{0\}$, pero por construcción $\tilde{\mathcal{C}} \cap \mathcal{C} = \emptyset$. Esto es lo que pretende indicar la Figura 5.1: representamos λ en el eje horizontal, y Πu en el eje vertical, donde $\Pi \in \mathcal{L}(U)$ es una cierta proyección de rango uno. Hay seis autovalores y hemos escrito sus paridades respectivas: 1, -1, 1, -1, 1, -1. Aparecen dos componentes mutuamente disjuntas, y las hemos representado, respectivamente, con trazo grueso y con trazo fino. Desgraciadamente, no hemos encontrado ningún ejemplo en que esto ocurra. Cuando $U = \mathbb{R}$ esto es imposible, como muestra el siguiente resultado.

Figura 5.1: Dos componentes disjuntas de \mathfrak{S}

Proposición 5.5.5 Sea \mathfrak{C} una componente acotada de $\mathfrak{S} \cap (J \times \mathbb{R})$ tal que $\mathcal{B} = \{i_1, \dots, i_N\}$ con $i_1 < \dots < i_N$ para un cierto $N \geq 2$. Supongamos que existen $1 \leq j < k \leq N$ tales que $P(i_j)P(i_k) \neq 0$ y $P(i_h) = 0$ para cada $j < h < k$. Entonces

$$P(i_j) = -P(i_k),$$

y por tanto, $\text{MC}_{[\mathfrak{C}, J \times \mathbb{R}]} \in \{0, 2\}$.

Demostración. Para cada $1 \leq h \leq N - 1$, o bien

$$\mathfrak{C}_\lambda \cap (0, \infty) \neq \emptyset \quad \text{para todo } \lambda \in (\sup I_{i_h}, \inf I_{i_{h+1}}), \quad (5.25)$$

o bien

$$\mathfrak{C}_\lambda \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset \quad \text{para todo } \lambda \in (\sup I_{i_h}, \inf I_{i_{h+1}}). \quad (5.26)$$

Tomemos un $1 \leq h \leq N - 1$ que cumpla (5.26), y sea $\tilde{\mathfrak{F}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la familia reflejada a partir de \mathfrak{F} ,

$$\tilde{\mathfrak{F}}(\lambda, u) := \mathfrak{L}(\lambda)u + \tilde{\mathfrak{N}}(\lambda, u), \quad \tilde{\mathfrak{N}}(\lambda, u) := \begin{cases} \mathfrak{N}(\lambda, u) & \text{si } u \leq 0, \\ -\mathfrak{N}(\lambda, -u) & \text{si } u \geq 0. \end{cases}$$

Observamos que $\tilde{\mathfrak{F}}$ cumple las hipótesis (HL)-(HN) de la Sección 5.1, es impar en u , y su aplicación paridad P es la misma que la aplicación paridad de \mathfrak{F} , puesto que podemos tomar la misma familia admisible \mathcal{A} para Σ . Sea $\tilde{\mathfrak{S}}$ el conjunto de soluciones no-triviales de $\tilde{\mathfrak{F}}$ y denotemos por $\tilde{\mathfrak{C}}$ la componente de $\tilde{\mathfrak{S}}$ que contiene a $I_{i_h} \times \{0\}$; nótese que es acotada. Llamemos

$$S_h := (\sup I_{i_h}, \inf I_{i_{h+1}}) \cap \bigcup_{i \in P^{-1}(\{-1, 1\})} I_i$$

y sean $\tilde{\mathfrak{C}}_1, \dots, \tilde{\mathfrak{C}}_m$ las componentes de $\tilde{\mathfrak{S}}$ cuya intersección con $S_h \times \{0\}$ es no vacía. Estas componentes son necesariamente acotadas, ya que tiene intersección vacía con $\tilde{\mathfrak{C}}$, luego yacen dentro de alguna componente acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{\mathfrak{C}}$. Llamemos ahora $\tilde{\mathcal{B}}_\ell$ al conjunto (5.7) asociado a $\tilde{\mathfrak{C}}_\ell$, $1 \leq \ell \leq m$. Por la última afirmación del Teorema 5.4.1 tenemos que

$$\sum_{i \in \tilde{\mathcal{B}}_\ell} P(i) = 0, \quad 1 \leq \ell \leq m.$$

Así pues,

$$0 = \sum_{\ell=1}^m \sum_{i \in \tilde{\mathcal{B}}_\ell} P(i) = \sum_{I_i \subset S_h} P(i)$$

con lo que, $\text{Card}\{i \in \mathbb{Z} \cap [r+1, s] : I_i \subset S_h\}$ es par para cada $1 \leq h \leq N-1$ que cumple (5.25). El argumento anterior se adapta con facilidad al caso (5.25) y se llega a la misma conclusión. Por tanto,

$$\text{Card}\{i \in \mathbb{Z} \cap [r+1, s] : I_i \subset S_h\} \in 2\mathbb{N}, \quad 1 \leq h \leq N-1.$$

Con lo cual, se sigue de la definición de S_h que

$$\text{Card}\{i \in \mathbb{Z} \cap [r+1, s] : I_i \subset (\sup I_{i_j}, \inf I_{i_k}), P(i) \in \{-1, 1\}\} \in 2\mathbb{N},$$

lo que concluye la demostración. ■

5.6. Puntos regulares, de retorno y de histéresis

El objetivo de esta sección es proporcionar una condición suficiente para que el índice de una solución aislada pertenezca a $\{-1, 0, 1\}$. Analizamos también el comportamiento local del conjunto de soluciones en el caso en que éste forme una curva regular. Los conceptos de punto regular, de retorno y de histéresis aparecen así de manera natural.

En esta sección suponemos que \mathfrak{F} es de clase \mathcal{C}^1 en un entorno de $(\lambda_0, u_0) \in \mathbb{R} \times U$ con $\mathfrak{F}(\lambda_0, u_0) = 0$ y $D\mathfrak{F}(\lambda_0, u_0)$ sobreyectiva. También se supondrá que \mathcal{L} es diferenciable en λ_0 y \mathfrak{N} es diferenciable en (λ_0, u_0) .

Comenzamos por una construcción sencilla de análisis funcional.

Lema 5.6.1 *Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R} \times U, V)$ sobreyectiva con núcleo unidimensional. Supongamos que*

$$T|_{\{0\} \times U} : \{0\} \times U \rightarrow V \tag{5.27}$$

no es isomorfismo. Entonces existe una descomposición $U = X \oplus Y$ con $\dim X = 1$ tal que

$$T|_{\mathbb{R} \times Y} : \mathbb{R} \times Y \rightarrow V \tag{5.28}$$

es isomorfismo.

Demostración. Existe un hiperplano cerrado Y de U tal que $N[T] \cap (\mathbb{R} \times Y) = \{0\}$. En efecto, de lo contrario, todo hiperplano cerrado Y de U cumpliría $N[T] \subset \mathbb{R} \times Y$. Por el teorema de Hahn-Banach, la intersección de todos los hiperplanos cerrados en un espacio de Banach es el espacio cero. Luego $N[T] = \mathbb{R} \times \{0\}$ y esto implica que (5.27) es isomorfismo, en contra de nuestra hipótesis. Fijemos pues un hiperplano cerrado Y de U tal que $N[T] \cap (\mathbb{R} \times Y) = \{0\}$. Sea X un complemento unidimensional de Y en U . Entonces $\mathbb{R} \times Y$ es un complemento de $N[T]$ en $\mathbb{R} \times U$ y (5.28) es isomorfismo. ■

Observamos ahora que $D\mathfrak{F}(\lambda_0, u_0)$ es Fredholm de índice 1; en efecto, tenemos que

$$D\mathfrak{F}(\lambda_0, u_0) = (\mathcal{L}'(\lambda_0)u_0 + D_\lambda \mathfrak{N}(\lambda_0, u_0), \mathcal{L}(\lambda_0) + D_u \mathfrak{N}(\lambda_0, u_0)).$$

El operador $D_u\mathfrak{N}(\lambda_0, u_0)$ es compacto como derivada de una aplicación compacta; el operador $\mathcal{L}(\lambda_0)$ es Fredholm de índice 0. Por tanto, el operador $\mathcal{L}(\lambda_0) + D_u\mathfrak{N}(\lambda_0, u_0)$ es Fredholm de índice 0 por resultados conocidos sobre operadores de Fredholm (consúltese por ejemplo T. Kato [32, Theorem IV.5.26] o I. Gohberg et al. [24, Theorem XI.4.2]). Esto implica que $D\mathfrak{F}(\lambda_0, u_0)$ es Fredholm de índice 1.

Sea $\mathfrak{F} : \mathbb{R} \times U \rightarrow V$ tal que $D\mathfrak{F}(\lambda_0, u_0) : \mathbb{R} \times U \rightarrow V$ es sobreyectiva; como es Fredholm de índice 1, tiene un núcleo unidimensional. Supongamos que $D_u\mathfrak{F}(\lambda_0, u_0)$ no es isomorfismo. Por el Lema 5.6.1, existe una descomposición $U = X \oplus Y$ con $\dim X = 1$ tal que

$$D\mathfrak{F}(\lambda_0, u_0)|_{\mathbb{R} \times Y} : \mathbb{R} \times Y \rightarrow V$$

es un isomorfismo. A partir de ahora, identificamos U con $X \times Y$, y escribimos las variables como $(\lambda, x, y) \in \mathbb{R} \times X \times Y$. También escribimos $u_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$.

Aplicamos el teorema de la función implícita a $\mathfrak{F} : \mathbb{R} \times X \times Y \rightarrow V$ en (λ_0, x_0, y_0) y concluimos que existen dos funciones $\tilde{\lambda} \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ y $\tilde{y} \in \mathcal{C}^1([a, b], Y)$, con $x_0 \in (a, b)$, tales que $\mathfrak{F}(\tilde{\lambda}(x), x, \tilde{y}(x)) = 0$ para todo $x \in [a, b]$, y hay un entorno abierto \mathcal{U} de $(\lambda_0, x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times X \times Y$ tal que si $(\lambda, x, y) \in \mathcal{U}$ con $\mathfrak{F}(\lambda, x, y) = 0$ entonces $x \in (a, b)$, $\lambda = \tilde{\lambda}(x)$ e $y = \tilde{y}(x)$. En particular, $\tilde{\lambda}(x_0) = \lambda_0$ y $\tilde{y}(x_0) = y_0$. Tomemos ahora $a < a' < x_0 < b' < b$ tal que el compacto $\{(\tilde{\lambda}(x), x, \tilde{y}(x)) : x \in [a', b']\}$ esté contenido en el abierto \mathcal{U} . Entonces existe un abierto \mathcal{V} tal que

$$\{(\tilde{\lambda}(x), x, \tilde{y}(x)) : x \in [a', b']\} \subset \mathcal{V} \subset \bar{\mathcal{V}} \subset \mathcal{U}.$$

Definición 5.6.2 Si $D_u\mathfrak{F}(\lambda_0, u_0)$ es un isomorfismo entonces (λ_0, u_0) recibe el nombre de punto regular. Si $D_u\mathfrak{F}(\lambda_0, u_0)$ no es isomorfismo y $\tilde{\lambda}$ tiene un máximo o mínimo (locales) en x_0 entonces (λ_0, u_0) se llama punto de retorno. Si $D_u\mathfrak{F}(\lambda_0, u_0)$ no es isomorfismo y $\tilde{\lambda}$ no presenta ni máximo ni mínimo (locales) en x_0 entonces (λ_0, u_0) recibe el nombre de punto de histéresis.

El sencillo lema que presentamos ahora nos proporciona condiciones necesarias y condiciones suficientes para cada uno de estos conceptos. Denotemos en lo que sigue $\mathcal{P}_\lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R} \times U, \mathbb{R})$ a la aplicación $\mathcal{P}_\lambda(\lambda, u) = \lambda$.

Lema 5.6.3 Siguiendo las notaciones anteriores,

1. Si (λ_0, u_0) es un punto de retorno o de histéresis entonces $\tilde{\lambda}'(x_0) = 0$.
2. (λ_0, u_0) es un punto de retorno si y sólo si existe un entorno abierto \mathcal{O} de (λ_0, u_0) tal que o $\sup \mathcal{P}_\lambda(\mathfrak{F}^{-1}(0) \cap \mathcal{O}) = \lambda_0$ o $\inf \mathcal{P}_\lambda(\mathfrak{F}^{-1}(0) \cap \mathcal{O}) = \lambda_0$.
3. Si $D_u\mathfrak{F}(\lambda_0, u_0)$ no es isomorfismo y $\tilde{\lambda} - \lambda_0$ tiene un cero de orden par en x_0 entonces (λ_0, u_0) es un punto de retorno.
4. Si $D_u\mathfrak{F}(\lambda_0, u_0)$ no es isomorfismo y $\tilde{\lambda} - \lambda_0$ tiene un cero de orden impar en x_0 entonces (λ_0, u_0) es un punto de histéresis.

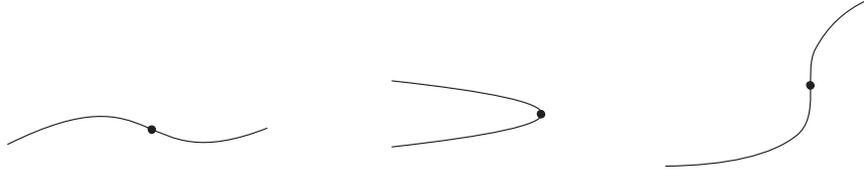


Figura 5.2: Un punto regular, uno de retorno, y uno de histéresis

Demostración. Probemos el primer enunciado. Llamemos $a_1(x) := D_\lambda \mathfrak{F}(\tilde{\lambda}(x), x, \tilde{y}(x)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, V)$, $a_2(x) := D_x \mathfrak{F}(\tilde{\lambda}(x), x, \tilde{y}(x)) \in \mathcal{L}(X, V)$ y $a_3(x) := D_y \mathfrak{F}(\tilde{\lambda}(x), x, \tilde{y}(x)) \in \mathcal{L}(Y, V)$ para $x \in (a, b)$. Siguiendo la convención usual dada por el hecho de que $\dim X = 1$, a veces identificaremos $\mathcal{L}(X, V)$ con V , y por tanto consideraremos $a_2(x)$ como un miembro de V . Sabemos que $(a_2(x_0), a_3(x_0)) \in \mathcal{L}(X \times Y, V)$ no es isomorfismo, pero $(a_1(x_0), a_3(x_0)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R} \times Y, V)$ sí lo es. También sabemos que

$$a_1(x)\tilde{\lambda}'(x) + a_2(x) + a_3(x)\tilde{y}'(x) = 0, \quad x \in (a, b). \quad (5.29)$$

Observamos que $R[(a_2(x_0), a_3(x_0))] = R[a_3(x_0)]$, puesto que una inclusión es trivial, y ambos conjuntos son hiperplanos cerrados de V . En particular, $R[a_2(x_0)] \subset R[a_3(x_0)]$ y por (5.29), hay un $y \in Y$ tal que $a_1(x)\tilde{\lambda}'(x_0) + a_3(x_0)y = 0$, luego $\tilde{\lambda}'(x_0) = 0$.

Las afirmaciones restantes son obvias. ■

En la Figura 5.2 hemos dibujado tres curvas: en la primera hemos representado un punto regular; en la segunda, un punto de retorno; y en la tercera, un punto de histéresis. Queremos calcular $\text{Ind}(\mathfrak{F}(\lambda_0, \cdot), u_0)$, caso de existir, en cada una de las situaciones dadas por la Definición 5.6.2.

Punto regular

Supongamos que (λ_0, u_0) es un punto regular. Entonces $D_u \mathfrak{F}(\lambda_0, u_0)$ es isomorfismo, y así u_0 es un cero aislado de $\mathfrak{F}(\lambda_0, \cdot)$. Por la Proposición 4.2.2(4,5),

$$\text{Ind}(\mathfrak{F}(\lambda_0, \cdot), u_0) = \text{Ind}(D_u \mathfrak{F}(\lambda_0, u_0), 0) \in \{-1, 1\}.$$

Punto de retorno

Supongamos ahora que (λ_0, u_0) es un punto de retorno. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\tilde{\lambda}$ tiene un máximo en x_0 . Primero analizamos el caso en que este máximo no es estricto, es decir, existe una sucesión inyectiva $x_n \rightarrow x_0$ tal que $\tilde{\lambda}(x_n) = \lambda_0$ para todo n . Entonces, por supuesto $\mathfrak{F}(\lambda_0, \cdot)^{-1}(0)$ es infinito y u_0 no es un punto aislado de $\mathfrak{F}(\lambda_0, \cdot)^{-1}(0)$, pero podemos decir más. Es fácil ver que $u_0 \neq 0$, luego la curva

$$\{(\tilde{\lambda}(x), x, \tilde{y}(x)) : x \in (a, b)\} \quad (5.30)$$

es un conexo contenido en \mathfrak{S} , al menos para a, b suficientemente cerca de x_0 . Sea \mathfrak{C} la componente de $\mathfrak{S} \cap (J \times Y)$ que contiene a (λ_0, u_0) , y supongamos que $\Lambda \neq \lambda_0$ si $J \in \{[\Lambda, \infty), (-\infty, \Lambda]\}$. Entonces para a, b suficientemente cerca de x_0 , (5.30) es un conexo contenido en $\mathfrak{S} \cap (J \times Y)$, luego contenido en \mathfrak{C} . Entonces, para n suficientemente grande, los elementos $(\tilde{\lambda}(x_n), x_n, \tilde{y}(x_n))$

están en \mathcal{C} . Con lo cual, $(x_n, \tilde{y}(x_n)) \in \mathcal{C}_{\lambda_0}$ es una sucesión inyectiva que converge a u_0 , con lo que u_0 no es un elemento aislado de \mathcal{C}_{λ_0} .

Supongamos ahora que $\tilde{\lambda}$ tiene un máximo estricto en x_0 . Podemos suponer que se han elegido a, b de tal manera que $\tilde{\lambda}(x) < \lambda_0$ para todo $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$. Afirmamos que existen α, β con $\alpha < \lambda_0 < \beta$ tal que el hecho $\tilde{\lambda}(x) \in [\alpha, \beta]$ con $x \in [a, b]$ implica $x \in [a', b']$. En efecto, supongamos que no. Entonces existe una sucesión $x_n \in [a, b] \setminus [a', b']$ con $\tilde{\lambda}(x_n) \rightarrow \lambda_0$ y $x_n \rightarrow x_1 \in [a, b] \setminus (a', b')$. Así, $\lambda_0 = \tilde{\lambda}(x_1)$, contradicción con la condición de máximo estricto. Fijemos, pues, α, β con esa propiedad.

Sea $\mathfrak{F}(\lambda, x, y) = 0$ con $(\lambda, x, y) \in \bar{\mathcal{V}}$ y $\lambda \in [\alpha, \beta]$. Entonces $x \in (a, b)$, $\lambda = \tilde{\lambda}(x)$ e $y = \tilde{y}(x)$. Por la elección de α, β obtenemos $x \in [a', b']$. Entonces $(\lambda, x, y) \in \mathcal{V}$. Esto prueba que $\mathfrak{F}(\lambda, x, y) \neq 0$ siempre que $(\lambda, x, y) \in \partial\mathcal{V}$ y $\lambda \in [\alpha, \beta]$. Por la Proposición 4.2.2(1), $\text{Deg}(\mathfrak{F}(\lambda, \cdot), \mathcal{V}_\lambda)$ es constante para $\lambda \in [\alpha, \beta]$. Por la condición de máximo estricto vemos que $\text{Deg}(\mathfrak{F}(\lambda_0, \cdot), \mathcal{V}_{\lambda_0}) = \text{Ind}(\mathfrak{F}(\lambda_0, \cdot), u_0)$ y $\text{Deg}(\mathfrak{F}(b, \cdot), \mathcal{V}_b) = 0$, por la Proposición 4.2.2(2), ya que $\mathfrak{F}(b, \cdot)$ no tiene ceros en \mathcal{V}_b . Por tanto, $\text{Ind}(\mathfrak{F}(\lambda_0, \cdot), u_0) = 0$.

Punto de histéresis

Supongamos por último que (λ_0, u_0) es un punto de histéresis. Como en la prueba del Lema 5.6.3, llamemos $a_1(x) := D_\lambda \mathfrak{F}(\tilde{\lambda}(x), x, \tilde{y}(x)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, V)$, $a_2(x) := D_x \mathfrak{F}(\tilde{\lambda}(x), x, \tilde{y}(x)) \in \mathcal{L}(X, V)$ y $a_3(x) := D_y \mathfrak{F}(\tilde{\lambda}(x), x, \tilde{y}(x)) \in \mathcal{L}(Y, V)$ para $x \in (a, b)$. Sabemos que

$$(a_2(x_0), a_3(x_0)) \in \mathcal{L}(X \times Y, V)$$

no es isomorfismo, pero $(a_1(x_0), a_3(x_0)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R} \times Y, V)$ sí lo es. Queremos probar que hay reales x arbitrariamente cerca de x_0 tales que $(a_2(x), a_3(x))$ es isomorfismo. Supongamos que no. Reduciendo (a, b) , podemos suponer que $(a_2(x), a_3(x))$ nunca es isomorfismo, pero $(a_1(x), a_3(x))$ sí lo es, para $x \in (a, b)$. Vemos que $R[(a_2(x), a_3(x))] = R[a_3(x)]$, puesto que una inclusión es trivial, y ambos conjuntos son hiperplanos cerrados de V . En particular, $R[a_2(x)] \subset R[a_3(x)]$. Entonces, gracias a (5.29), para cada $x \in (a, b)$ hay un $f(x) \in Y$ tal que $a_1(x)\tilde{\lambda}'(x) + a_3(x)f(x) = 0$, luego $\tilde{\lambda}'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces $\tilde{\lambda}$ es constante en un entorno de x_0 y por la Definición 5.6.2, x_0 es un punto de retorno, y no un punto de histéresis.

Supongamos que u_0 no es un cero aislado de $\mathfrak{F}(\lambda_0, \cdot)$. Entonces por supuesto $\mathfrak{F}(\lambda_0, \cdot)^{-1}(0)$ es infinito, pero podemos decir más. Existe una sucesión inyectiva $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ tal que $\mathfrak{F}(\lambda_0, x_n, y_n) = 0$ para todo n . Para n suficientemente grande se tiene que $x_n \in (a, b)$, $\lambda_0 = \tilde{\lambda}(x_n)$ e $y_n = \tilde{y}(x_n)$. Como ya se probó en el caso de punto de retorno, si \mathcal{C} es la componente de $\mathcal{S} \cap (J \times Y)$ que contiene a (λ_0, u_0) y $\Lambda \neq \lambda_0$ si $J \in \{[\Lambda, \infty), (-\infty, \Lambda]\}$, entonces para n suficientemente grande, $(\tilde{\lambda}(x_n), x_n, \tilde{y}(x_n))$ pertenece a \mathcal{C} . Por tanto, $(x_n, y_n) \in \mathcal{C}_{\lambda_0}$ es una sucesión inyectiva que converge a u_0 , y así u_0 no es un punto aislado de \mathcal{C}_{λ_0} .

Supongamos que u_0 es un cero aislado de $\mathfrak{F}(\lambda_0, \cdot)$. Elijiendo a, b suficientemente cerca de x_0 , y usando la continuidad de \tilde{y} , podemos suponer que $\mathfrak{F}(\lambda_0, x, \tilde{y}(x)) \neq 0$ para todo $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$.

Afirmamos ahora que existen α, β con $\alpha < \lambda_0 < \beta$ tal que el hecho $\tilde{\lambda}(x) \in [\alpha, \beta]$ con $x \in [a, b]$ implica $x \in [a', b']$. En efecto, de no ser cierto existiría una sucesión $x_n \in [a, b] \setminus [a', b']$ con $\tilde{\lambda}(x_n) \rightarrow \lambda_0$ y $x_n \rightarrow x_1 \in [a, b] \setminus (a', b')$. Entonces $\lambda_0 = \tilde{\lambda}(x_1)$ y $\mathfrak{F}(\lambda_0, x_1, \tilde{y}(x_1)) = 0$, contradicción. Fijemos, pues, α, β con esa propiedad.

Sea $\mathfrak{F}(\lambda, x, y) = 0$ con $(\lambda, x, y) \in \bar{\mathcal{V}}$ y $\lambda \in [\alpha, \beta]$. Entonces $x \in (a, b)$, $\lambda = \tilde{\lambda}(x)$ e $y = \tilde{y}(x)$. Por la elección de α, β obtenemos que $x \in [a', b']$, luego $(\lambda, x, y) \in \mathcal{V}$. Esto prueba que $\mathfrak{F}(\lambda, x, y) \neq 0$ siempre que $(\lambda, x, y) \in \partial\mathcal{V}$ y $\lambda \in [\alpha, \beta]$. Por la Proposición 4.2.2(1), $\text{Deg}(\mathfrak{F}(\lambda, \cdot), \mathcal{V}_\lambda)$ es constante para $\lambda \in [\alpha, \beta]$.

Ya hemos probado que existe $x_1 \in [a, b]$ arbitrariamente cerca de x_0 tal que $\tilde{\lambda}(x_1) \in [\alpha, \beta]$ y $(a_2(x_1), a_3(x_1)) \in \mathcal{L}(X \times Y, V)$ es isomorfismo. Desgraciadamente, necesitamos más información para concluir que

$$\begin{aligned} \text{Deg}(\mathfrak{F}(\tilde{\lambda}(x_1), \cdot, \cdot), \mathcal{V}_{\tilde{\lambda}(x_1)}) &= \text{Ind}(\mathfrak{F}(\tilde{\lambda}(x_1), \cdot, \cdot), (x_1, \tilde{y}(x_1))) \\ &= \text{Ind}(D_u \mathfrak{F}(\tilde{\lambda}(x_1), x_1, \tilde{y}(x_1)), 0) \in \{-1, 1\}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Cada una de las siguientes hipótesis es consecuencia de la siguiente, y cualquiera de ellas garantiza (5.31).

- $\tilde{\lambda}$ es inyectiva en $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ o en $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ para algún $\varepsilon > 0$.
- La multiplicidad de $\tilde{\lambda}$ en x_0 es finita (necesariamente impar por el Lema 5.6.3).
- $\tilde{\lambda}$ es analítica.
- \mathfrak{F} es analítica.

Como u_0 es un cero aislado de $\mathfrak{F}(\lambda_0, \cdot)$ entonces, siempre que \mathcal{V} sea suficientemente pequeño, $\text{Deg}(\mathfrak{F}(\lambda_0, \cdot), \mathcal{V}_{\lambda_0}) = \text{Ind}(\mathfrak{F}(\lambda_0, \cdot), u_0)$. Por tanto si se cumple (5.31) entonces $\text{Ind}(\mathfrak{F}(\lambda_0, \cdot), u_0) \in \{-1, 1\}$.

5.7. Estructura de \mathfrak{C} en el caso fuertemente regular

En toda esta sección, \mathfrak{C} es una componente acotada de $\mathfrak{S} \cap (J \times U)$. Si $J \in \{(-\infty, \Lambda], [\Lambda, \infty)\}$ suponemos además que

$$\Lambda \notin \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i \quad \text{y} \quad \mathfrak{C}_\Lambda \neq \emptyset. \quad (5.32)$$

También imponemos la siguiente *condición de no degeneración fuerte*:

(SND) $D_u \mathfrak{F}(\lambda, u)$ existe y es un isomorfismo para cada $(\lambda, u) \in \mathfrak{C} \cap [J \times (U \setminus \{0\})]$, y existe un entorno abierto \mathcal{O} de $\mathfrak{C} \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$ tal que la aplicación

$$\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{L}(U), \quad (\lambda, u) \mapsto D_u \mathfrak{F}(\lambda, u)$$

está bien definida y es continua.

Obsérvese que no suponemos que \mathfrak{F} sea \mathcal{C}^1 en sus dos variables.

Nuestro principal objetivo es estudiar cómo cambia $\text{Card } \mathfrak{C}_\lambda$ cuando λ va variando a lo largo de J . Aunque la mayoría de nuestros resultados están enunciados y demostrados para el caso $J = [\Lambda, \infty)$, debe estar claro cómo se adaptan a los restantes casos $J \in \{\mathbb{R}, (-\infty, \Lambda]\}$.

Usaremos en esta sección la siguiente versión del teorema de la función implícita. Consúltese por ejemplo E. Zeidler [71, Theorem 4.B].

Teorema 5.7.1 Sean Z, U, V tres espacios de Banach, Ω un abierto de $Z \times U$, y $G : \Omega \rightarrow V$ una aplicación continua con la propiedad de que $D_u G$ exista y sea continua en Ω . Supongamos que existe un punto $(z_0, u_0) \in \Omega$ tal que $G(z_0, u_0) = 0$ y $D_u G(z_0, u_0)$ es isomorfismo. Entonces existen abiertos $\mathcal{Z} \subset Z$, $\mathcal{U} \subset U$ tales que, para cada $z \in \mathcal{Z}$, existe un único $u = u(z) \in \mathcal{U}$ que cumple $G(z, u(z)) = 0$. Además, la aplicación $z \mapsto u(z)$ es continua.

El primer resultado es el siguiente.

Proposición 5.7.2 Supongamos (SND). Sea \mathfrak{C} una componente acotada de $\mathfrak{S} \cap (J \times U)$. Entonces $\text{Card } \mathfrak{C}_\lambda$ es finito y localmente constante para $\lambda \in J \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$. Por lo tanto, es constante en cada componente conexa de $J \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$.

Demostración. Para probar que \mathfrak{C}_λ es finito para cada $\lambda \in J \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$ es suficiente ver que es compacto y discreto. Como \mathfrak{C} es compacto, también lo es \mathfrak{C}_λ . El que \mathfrak{C}_λ es discreto se sigue de manera inmediata del Teorema 5.7.1, ya que $D_u \mathfrak{F}(\lambda, u)$ es un isomorfismo para cada $(\lambda, u) \in \mathfrak{C}$ con $\lambda \in J \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$.

Mostramos ahora que $\text{Card } \mathfrak{C}_\lambda$ es localmente constante en $J \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$. Tomemos $\lambda^* \in J \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$ y llamemos

$$r := \text{Card } \mathfrak{C}_{\lambda^*}, \quad \mathfrak{C}_{\lambda^*} = \{u_1^*, \dots, u_r^*\}.$$

Si $r = 0$, la compacidad de \mathfrak{C} muestra que $\mathfrak{C}_\lambda = \emptyset$ para $\lambda \simeq \lambda^*$. Supongamos, pues, que $r > 0$. Tenemos que $u_i^* \neq 0$ para cada $1 \leq i \leq r$. Gracias al Teorema 5.7.1, existen $\delta > 0$ y r aplicaciones continuas $u_i : (\lambda^* - \delta, \lambda^* + \delta) \rightarrow U$, $1 \leq i \leq r$, tales que $u_i(\lambda^*) = u_i^*$ y

$$\mathfrak{F}(\lambda, u_i(\lambda)) = 0, \quad |\lambda - \lambda^*| < \delta,$$

$1 \leq i \leq r$. Además, si $\mathfrak{F}(\lambda, u) = 0$ con $|\lambda - \lambda^*| < \delta$ y $|u - u_i^*| < \delta$ para un cierto $1 \leq i \leq r$, entonces $u = u_i(\lambda)$. Reduciendo $\delta > 0$ se puede suponer que $u_i(\lambda) \neq 0$ con $1 \leq i \leq r$, $|\lambda - \lambda^*| < \delta$, que $u_i(\lambda) \neq u_j(\lambda)$ si $1 \leq i < j \leq r$, y que $(\lambda^* - \delta, \lambda^* + \delta) \cap \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i = \emptyset$. Con lo cual, como \mathfrak{C} es una componente de $\mathfrak{S} \cap (J \times U)$,

$$\bigcup_{i=1}^r \{(\lambda, u_i(\lambda)) : |\lambda - \lambda^*| < \delta, \lambda \in J\} \subset \mathfrak{C}$$

y $\text{Card } \mathfrak{C}_\lambda \geq \text{Card } \mathfrak{C}_{\lambda^*} = r$ si $\lambda \in (\lambda^* - \delta, \lambda^* + \delta) \cap J$. Para completar la demostración de la constancia local de $\text{Card } \mathfrak{C}_\lambda$ razonaremos por contradicción. Supongamos pues que existen sucesiones $\{\lambda_n\}_{n \geq 1} \subset (\lambda^* - \delta, \lambda^* + \delta) \cap J$ y $\{v_n\}_{n \geq 1} \subset U$ tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda^*, \quad v_n \in \mathfrak{C}_{\lambda_n} \setminus \{u_1(\lambda_n), \dots, u_r(\lambda_n)\}, \quad n \geq 1.$$

Necesariamente, $|v_n - u_i^*| \geq \delta$ para $1 \leq i \leq r$ y $n \geq 1$. Por compacidad, se puede extraer una subsucesión, etiquetada de nuevo por n , tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n, v_n) = (\lambda^*, u^*) \in \mathfrak{C}$$

para un cierto $u^* \in \mathfrak{C}_{\lambda^*}$. Entonces $|u^* - u_i^*| \geq \delta$ para $1 \leq i \leq r$, luego $\text{Card } \mathfrak{C}_{\lambda^*} \geq r + 1$, lo cual es imposible. Esto completa la demostración. ■

Como consecuencia inmediata de la Proposición 5.7.2, cualquier cambio en $\text{Card } \mathfrak{C}_\lambda$ indica un fenómeno de bifurcación desde $\mathbb{R} \times \{0\}$. Además, gracias a (SND), se sigue de la Proposición 4.2.2(4,5) que todo $\lambda \in J \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$ es un valor fuertemente regular del parámetro para \mathfrak{C} de acuerdo a la Definición 5.5.2. Con estos hechos se puede llegar a obtener la estructura de la componente \mathfrak{C} . De hecho, \mathfrak{C} consta de una cantidad finita de curvas continuas que cumplen las propiedades establecidas en el siguiente teorema. Entre ellas, que $\text{MC}_{[\mathfrak{C}; J \times U]}$ nos proporciona una cota inferior de $\text{Card } \mathfrak{C}_\lambda$ para cada $\lambda \in J \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$, lo que muestra la consistencia de los conceptos introducidos en la Definición 5.5.4.

Teorema 5.7.3 *Supongamos que \mathfrak{C} es una componente acotada de $\mathfrak{S} \cap (J \times U)$ con $J = [\Lambda, \infty)$, (5.32) y (SND). Entonces $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Pongamos $\mathcal{B} = \{i_1, \dots, i_N\}$, $i_1 < \dots < i_N$. Entonces*

(a) $\mathcal{P}_\lambda \mathfrak{C} = [\Lambda, \sup I_{i_N}]$ y $\mathfrak{C}_{\sup I_{i_N}} = \{0\}$.

(b) $\text{Card } \mathfrak{C}_\lambda$ es un número par, y es constante para λ en cada uno de los intervalos $[\Lambda, \inf I_{i_1})$, $(\sup I_{i_j}, \inf I_{i_{j+1}})$, $1 \leq j \leq N - 1$.

(c) $\text{Card } \mathfrak{C}_\lambda \geq \text{MC}_{[\mathfrak{C}; J \times U]}(\lambda)$ para cada $\lambda \in [\Lambda, \sup I_{i_N}] \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$.

(d) \mathfrak{C} se expresa como

$$\mathfrak{C} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma([a_\gamma, b_\gamma]) \cup \bigcup_{i \in \mathcal{B}} (I_i \times \{0\}),$$

donde Γ es un conjunto finito de curvas continuas $\gamma : [a_\gamma, b_\gamma] \rightarrow \mathbb{R} \times U$, $a_\gamma < b_\gamma$, tales que

- $\gamma(a_\gamma) \in (\{\Lambda\} \times \mathfrak{C}_\Lambda) \cup \bigcup_{i \in \mathcal{B}} (I_i \times \{0\})$ y $\gamma(b_\gamma) \in \bigcup_{i \in \mathcal{B}} (I_i \times \{0\})$,
- $\mathcal{P}_\lambda(\gamma(\lambda)) = \lambda$ para cada $\lambda \in [a_\gamma, b_\gamma]$,
- $\gamma([a_\gamma, b_\gamma]) \cap [\bigcup_{i \in \mathcal{B}} (I_i \times \{0\}) \cup (\{\Lambda\} \times \mathfrak{C}_\Lambda)] = \emptyset$,
- $\gamma([a_\gamma, b_\gamma]) \cap \eta([a_\eta, b_\eta]) \subset \bigcup_{i \in \mathcal{B}} (I_i \times \{0\})$ para cualesquiera $\gamma, \eta \in \Gamma$ con $\gamma \neq \eta$.

Además, para cada $j \in \{1, \dots, N - 1\}$ y $a, b \in J$ tales que

$$\{i \in \mathcal{B} : [a, b] \cap I_i \neq \emptyset\} = \{i_j\}, \quad a < I_{i_j} < b, \quad (5.33)$$

se verifica

$$\text{Card } \mathfrak{C}_b + \mathfrak{h}[a, i_j] = \text{Card } \mathfrak{C}_a + \mathfrak{h}[b, i_j], \quad (5.34)$$

donde hemos denotado

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}[a, i_j] &:= \text{Card } \{\gamma \in \Gamma : a_\gamma < a < b_\gamma, b_\gamma \in I_{i_j}\}, \\ \mathfrak{h}[b, i_j] &:= \text{Card } \{\gamma \in \Gamma : a_\gamma < b < b_\gamma, a_\gamma \in I_{i_j}\}. \end{aligned}$$

Así, $\mathfrak{h}[a, i_j] + \mathfrak{h}[b, i_j] \geq 2$ es par. Además, $\mathfrak{h}[b, i_1] \geq 1$ si $N \geq 2$.

Demostración. Como $\mathcal{C}_\Lambda \neq \emptyset$ y $\mathcal{C}_\lambda = \emptyset$ para λ suficientemente grande, se sigue de la Proposición 5.7.2 que $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Pongamos $\mathcal{B} = \{i_1, \dots, i_N\}$, $i_1 < \dots < i_N$. Como \mathcal{C} es conexo, se sigue de (5.8) que $[\Lambda, \sup I_{i_N}] \subset \mathcal{P}_\lambda \mathcal{C}$. Gracias además a la Proposición 5.7.2, $\text{Card } \mathcal{C}_\lambda$ es constante para cada $\lambda > \sup I_{i_N}$; esta constante es necesariamente 0 ya que $\mathcal{C}_\lambda = \emptyset$ para λ suficientemente grande. Luego $\mathcal{P}_\lambda \mathcal{C} = [\Lambda, \sup I_{i_N}]$. El que $\mathcal{C}_{\sup I_{i_N}} = \{0\}$ se puede ver fácilmente por un argumento de prolongación usual basado en que $[\Lambda, \sup I_{i_N}] = \mathcal{P}_\lambda \mathcal{C}$. Esto muestra (a).

Las partes (b) y (c) son consecuencias inmediatas de la Proposición 5.7.2 y del Teorema 5.5.3. La parte (d) es una consecuencia fácil de lo anterior, usando un típico argumento de prolongación.

Supongamos ahora que $a, b \in J$ cumplen (5.33). Entonces hay exactamente $\mathfrak{h}[a, i_j]$ curvas de Γ que conectan $\mathfrak{h}[a, i_j]$ puntos de $\{a\} \times \mathcal{C}_a$ con $I_{i_j} \times \{0\}$. Por tanto, gracias a (SND) y a un argumento de prolongación usual basado en el Teorema 5.7.1, el resto de

$$R_a := \text{Card } \mathcal{C}_a - \mathfrak{h}[a, i_j]$$

puntos deben estar conectados mediante R_a curvas de Γ con R_a puntos de $\{b\} \times \mathcal{C}_b$. Análogamente, el resto de los puntos de $\{b\} \times \mathcal{C}_b$,

$$R_b := \text{Card } \mathcal{C}_b - R_a,$$

deben yacer en R_b curvas de Γ yendo hacia atrás hasta $I_{i_j} \times \{0\}$. Como ningún arco más de Γ puede conectar $I_{i_j} \times \{0\}$ con $\{b\} \times \mathcal{C}_b$, obtenemos que

$$R_b = \mathfrak{h}[b, i_j] = \text{Card } \mathcal{C}_b - \text{Card } \mathcal{C}_a + \mathfrak{h}[a, i_j],$$

lo que muestra (5.34). El que $\mathfrak{h}[a, i_j] + \mathfrak{h}[b, i_j] \in 2\mathbb{Z}$ se sigue fácilmente de (b) y de (5.34); no se puede anular porque $I_{i_j} \times \{0\} \subset \mathcal{C}$ y \mathcal{C} es conexo. Falta ver que $\mathfrak{h}[b, i_1] \geq 1$ si $N \geq 2$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $N \geq 2$ y $\mathfrak{h}[b, i_1] = 0$, y denotemos por Γ_1 al conjunto de $\gamma \in \Gamma$ tales que

$$(I_{i_1} \times \{0\}) \cap \gamma([a_\gamma, b_\gamma]) \neq \emptyset.$$

Entonces \mathcal{C} se descompone como una unión de

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma_1} \gamma([a_\gamma, b_\gamma]) \cup (I_{i_1} \times \{0\}) \quad \text{y} \quad \bigcup_{\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_1} \gamma([a_\gamma, b_\gamma]) \cup \bigcup_{j=2}^N (I_{i_j} \times \{0\}),$$

que son dos conjuntos cerrados, disjuntos, no vacíos de \mathcal{C} , lo que contradice que \mathcal{C} sea conexo. Por tanto, $\mathfrak{h}[b, i_1] \geq 1$, lo que concluye la demostración. ■

Nótese que $\mathfrak{h}[a, i_j]$ y $\mathfrak{h}[b, i_j]$ no dependen de a, b siempre y cuando $a \in (\sup I_{i_{j-1}}, \inf I_{i_j})$ (o $a \in [\Lambda, \inf I_{i_1}]$ si $j = 1$) y $b \in (\sup I_{i_j}, \inf I_{i_{j+1}})$.

Por ejemplo, en la Figura 5.3 hemos representado cuatro componentes \mathcal{C} de $\mathcal{S} \cap ([\Lambda, \infty) \times U)$ que cumplen las hipótesis del Teorema 5.7.3 con las siguientes condiciones adicionales: $\mathcal{B} = \{i_1, i_2\}$ con $i_1 < i_2$, $P(i_1) = P(i_2) \neq 0$, $\text{Card } \mathcal{C}_\Lambda = 4$ y $I_{i_1} = \{a\}$, $I_{i_2} = \{b\}$.

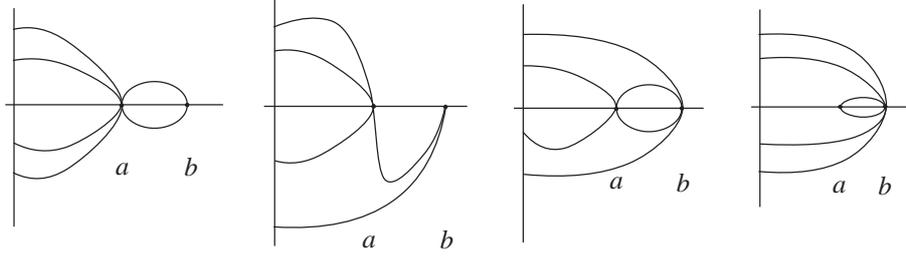


Figura 5.3: Cuatro componentes \mathcal{C} que cumplen el Teorema 5.7.3 con $\text{Card } \mathcal{C}_\Lambda = 4$

5.8. Estructura de \mathcal{C} en el caso regular

Es esta sección, \mathcal{C} es una componente acotada de $\mathfrak{S} \cap (J \times U)$. Si $J \in \{(-\infty, \Lambda], [\Lambda, \infty)\}$ imponemos además (5.32). Suponemos también la *condición de no degeneración*:

(ND) $D\mathfrak{F}(\lambda, u)$ existe y es sobreyectiva para cada $(\lambda, u) \in \mathcal{C} \cap [J \times (U \setminus \{0\})]$, y hay un entorno abierto \mathcal{O} de $\mathcal{C} \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$ para el cual la aplicación

$$\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R} \times U, U), \quad (\lambda, u) \mapsto D\mathfrak{F}(\lambda, u)$$

está bien definida y es continua.

Como en la Sección 5.7, estudiamos la estructura de \mathcal{C} . Aunque el siguiente resultado se enuncia y prueba para el caso $J = [\Lambda, \infty)$, se puede adaptar fácilmente a los restantes casos $J \in \{\mathbb{R}, (-\infty, \Lambda]\}$. En él se establece que \mathcal{C} consiste en un conjunto de arcos de curva cuyos extremos yacen en el conjunto

$$\mathcal{E} := (\{\Lambda\} \times \mathcal{C}_\Lambda) \cup \bigcup_{i \in \mathcal{B}} (I_i \times \{0\}).$$

Teorema 5.8.1 *Supongamos que \mathcal{C} es una componente acotada de $\mathfrak{S} \cap (J \times U)$ tal que $J = [\Lambda, \infty)$, (5.32) y (ND). Entonces \mathcal{C} se expresa como*

$$\mathcal{C} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(I_\gamma) \cup \bigcup_{i \in \mathcal{B}} (I_i \times \{0\}),$$

donde Γ es una familia (finita o numerable) de curvas continuas $\gamma \in \mathcal{C}(I_\gamma; \mathbb{R} \times U)$, para un cierto intervalo $I_\gamma \subset \mathbb{R}$, tal que para todo $\gamma \in \Gamma$,

1. $\gamma(\overset{\circ}{I}_\gamma) \cap \bigcup_{i \in \mathcal{B}} (I_i \times \{0\}) = \emptyset$.

2. El conjunto

$$\omega_\gamma := \left\{ z \in \mathbb{R} \times U : \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(t_n) = z \text{ para algún } \{t_n\}_{n \geq 1} \text{ con } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n \in \{\inf I_\gamma, \sup I_\gamma\} \right\}$$

está contenido en \mathcal{E} .



Figura 5.4: Dos componentes que cumplen el Teorema 5.8.1

3. $(\gamma(I_\gamma) \cup \omega_\gamma) \cap (\eta(I_\eta) \cup \omega_\eta) \subset \bigcup_{i \in \mathcal{B}} (I_i \times \{0\})$ si $\eta \in \Gamma \setminus \{\gamma\}$.
4. Para cada $\lambda \in J \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$, el conjunto $\{\gamma \in \Gamma : \lambda \in \mathcal{P}_\lambda(\gamma(I_\gamma))\}$ es finito.

Demostración. Como ya se vio en la Sección 5.6, para cada $(\lambda_0, u_0) \in \mathcal{C} \cap [J \times (U \setminus \{0\})]$ hay, localmente, una única curva \mathcal{C}^1 de ceros de \mathfrak{F} que pasa por (λ_0, u_0) . Esto nos permite un argumento de prolongación global. Tomemos cualquier $(\lambda_0, u_0) \in \mathcal{C} \cap [J \times (U \setminus \{0\})]$ y consideremos la curva \mathcal{C}^1 maximal $\gamma : \Omega \rightarrow J \times U$, para un cierto intervalo $\Omega \subset \mathbb{R}$ tal que $\gamma(0) = (\lambda_0, u_0)$ y $\mathfrak{F}(\gamma(t)) = 0$ para todo $t \in \Omega$, maximal con la propiedad $\gamma(\Omega) \cap \bigcup_{i \in \mathcal{B}} (I_i \times \{0\}) = \emptyset$. Si existen $\lim_{t \rightarrow \inf I} \gamma(t)$ o $\lim_{t \rightarrow \sup I} \gamma(t)$, extendemos γ con continuidad a esos puntos, y después de una reparametrización, obtenemos una curva continua γ definida en un cierto intervalo $I_\gamma \subset \mathbb{R}$. Sea $\tilde{\Gamma}$ el conjunto de curvas obtenidas de esta manera, para cada $(\lambda_0, u_0) \in \mathcal{C} \cap [J \times (U \setminus \{0\})]$. Declaramos que dos curvas en $\tilde{\Gamma}$ son equivalentes si una se puede obtener de la otra por medio una reparametrización (que puede conservar la orientación o no). Sea Γ un subconjunto de $\tilde{\Gamma}$ obtenido al elegir exactamente un miembro de cada clase de equivalencia. Entonces esta Γ satisface la propiedades 1–3.

Para probar que Γ es numerable bastará ver que para cualquier compacto K de $\mathcal{C} \cap [J \times (U \setminus \{0\})]$, el conjunto de curvas de Γ que cortan a K es finito. Así que sea K un compacto de $\mathcal{C} \cap [J \times (U \setminus \{0\})]$ y consideremos $\gamma_n \in \Gamma$ y $a_n \in \gamma_n(I_{\gamma_n}) \cap K$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $a \in K$ un punto de acumulación de la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces por la unicidad dada por el teorema de la función implícita, obtenemos que γ_n es la misma curva para n suficientemente grande.

Probemos ahora la propiedad 4. Supongamos que existan $\lambda_0 \in J \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$ y una sucesión $\gamma_n \in \Gamma$, $n \geq 1$, tales que $\lambda_0 \in \mathcal{P}_\lambda(\gamma_n(I_{\gamma_n}))$ para todo $n \geq 1$. Entonces para cada $n \geq 1$ existe $u_n \in \mathcal{C}_{\lambda_0}$ tal que $(\lambda_0, u_n) \in \gamma_n(I_{\gamma_n})$. Por compacidad, podemos suponer que

$$u_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \in \mathcal{C}_{\lambda_0}.$$

Necesariamente $u_\infty \neq 0$, ya que $\lambda_0 \notin \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$ y $(\lambda_0, u_\infty) \in \mathcal{C}$. La unicidad proporcionada por el teorema de la función implícita concluye que γ_n es la misma curva para n suficientemente grande. Esto termina la demostración. ■

El conjunto de curvas Γ dado por el Teorema 5.8.1 puede ser infinito, ya que por ejemplo, \mathcal{C} puede exhibir infinitas curvas cerradas que salen de $\bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i \times \{0\}$ y vuelven a él. Esto se ilustra en la Figura 5.4(1), donde $\mathcal{B} = \{i_1\}$ e $I_{i_1} = \{a\}$; se representa una sucesión de curvas cerradas

que “convergen” a $(a, 0)$. La Figura 5.4(2) muestra por qué $\text{Card } \mathfrak{C}_\lambda$ pudiera ser infinito para algún $\lambda \in J \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{B}} I_i$. Aquí una curva exhibe infinitos puntos de retorno.

Creemos que en el contexto del Teorema 5.8.1, el cardinal mínimo $\text{MC}_{[\mathfrak{C}; J \times U]}(\lambda)$ es también una cota inferior de \mathfrak{C}_λ , como ocurría en el Teorema 5.7.3. Desgraciadamente, no hemos sido capaces de probar esta afirmación, aunque los resultados de las Secciones 5.5 y 5.6 pueden ser útiles para probar este hecho en algunos casos particulares.

Por último, nótese que la hipótesis (ND) hecha en esta sección es *genérica*, gracias al teorema de Sard. Un enunciado más explícito de esta idea puede encontrarse en B. P. Rynne [62].

Apéndice A

Notaciones

Generales

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Los conjuntos de números naturales, enteros, reales y complejos
\mathbb{K}	Cualquiera de los cuerpos \mathbb{R} o \mathbb{C}
δ_{ij}	Delta de Kronecker: $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$
$\mathcal{C}^r(\Omega, V)$	Espacio de las funciones de clase \mathcal{C}^r de Ω a V
$\mathcal{H}(\Omega, V)$	Espacio de las funciones holomorfas de Ω en V
$o(\lambda - \lambda_0)^p$	Cualquier función definida en un entorno perforado de λ_0 tal que $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} (\lambda - \lambda_0)^{-p} f(\lambda) = 0$
$ a $	Valor absoluto de $a \in \mathbb{R}$, o módulo de $a \in \mathbb{C}$
$\text{sign } a$	Signo de $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; es decir, $\text{sign } a = a/ a $
$\text{Card } A$	Número de elementos del conjunto A , si A es finito, e ∞ si A es infinito

Espacios vectoriales

U, V, W	Espacios de Banach reales o complejos
$\ u\ $	Norma de $u \in U$
U_0, U_1	Subespacios vectoriales cerrados de U
$\mathcal{L}(U, V)$	Espacio de Banach de los operadores lineales y continuos de U en V
$\ T\ $	Norma de operadores de $T \in \mathcal{L}(U, V)$
$\det A$	Determinante de la matriz cuadrada A
$\text{tr } A$	Traza del operador de rango finito $A \in \mathcal{L}(U)$
$\mathcal{L}(U)$	$\mathcal{L}(U, U)$
$\Phi_0(U, V)$	Subconjunto de $\mathcal{L}(U, V)$ formado por los operadores de Fredholm de índice cero
$\Phi_0(U)$	$\Phi_0(U, U)$
I_U	Operador identidad en U
I	Operador identidad, cuando se sobreentienda el espacio
U'	Espacio dual de U , es decir, $\mathcal{L}(U, \mathbb{K})$
$GL_c(U)$	Subconjunto de $\Phi_0(U)$ formado por los isomorfismos T tales que $T - I_U$ es compacto

$N[T]$	Espacio núcleo de $T \in \mathcal{L}(U, V)$
$R[T]$	Espacio imagen de $T \in \mathcal{L}(U, V)$
$\text{rank } T$	$\dim R[T]$, donde $T \in \mathcal{L}(U, V)$
$\text{span}[u_1, \dots, u_n]$	Subespacio vectorial generado por $u_1, \dots, u_n \in U$
$\dim U_0$	Dimensión del espacio vectorial U_0
$\text{codim } U_1$	Codimensión en U del subespacio $U_1 \subset U$, es decir, $\dim(U/U_1)$
$\text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$	Matriz diagonal cuyos elementos diagonales son a_1, \dots, a_n
$B_r(u)$	Bola abierta de centro $u \in U$ y radio $r > 0$
B_r	$B_r(0)$
$B_r(\lambda, u)$	Bola abierta de centro $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times U$ y radio $r > 0$

Familias uniparamétricas de operadores lineales

Ω	Un abierto de \mathbb{K}
λ_0	Un punto de Ω
$\text{rank } u$	Rango de $u \in U$ como autovector de la familia \mathcal{L} en λ_0
Σ	Espectro (conjunto de autovalores) de una familia \mathcal{L}
\mathcal{L}_j	Coficiente j -ésimo del desarrollo de Taylor o de Laurent de \mathcal{L} en λ_0
$m[\mathcal{L}; \lambda_0], \chi[\mathcal{L}; \lambda_0],$ $\mu[\mathcal{L}; \lambda_0], M[\mathcal{L}; \lambda_0]$	Multiplicidad de \mathcal{L} en λ_0
$\{J_i\}_{i=r}^s$	Familia admisible de intervalos abiertos
$\{I_i\}_{i=r+1}^s$	Familia de intervalos compactos asociada a $\{J_i\}_{i=r}^s$
P	Aplicación paridad. Ver la Definición 5.2.4

Familias no lineales

$\text{Ind}(f, u_0)$	Índice de Leray-Schauder de la función f en el punto u_0
$\text{Deg}(f, \Omega)$	Grado de Leray-Schauder de la función f en el abierto Ω
\mathfrak{F}	Una aplicación de $\mathbb{R} \times U$ en U
$\mathcal{L}, \mathfrak{N}$	Partes lineal y no lineal, respectivamente, de \mathfrak{F}
$D\mathfrak{F}$	Diferencial de \mathfrak{F}
$D_u\mathfrak{F}$	Derivada parcial de \mathfrak{F} con respecto de la variable de U
\mathfrak{S}	Conjunto de soluciones no-triviales de \mathfrak{F}
J	Cualquiera de los conjuntos $\mathbb{R}, [\Lambda, \infty)$ o $(-\infty, \Lambda]$, para algún $\Lambda \in \mathbb{R}$
\mathfrak{C}	Una componente conexa de $\mathfrak{S} \cap (J \times U)$
\mathcal{B}	$\{i \in \mathbb{Z} \cap [r+1, s] : (I_i \times \{0\}) \cap \mathfrak{C} \neq \emptyset\}$
$J^*, \text{sign } J^*$	Véase el Teorema 5.4.1
MC	Función cardinal mínimo. Ver la Definición 5.5.4
S_λ	$\{u \in U : (\lambda, u) \in S\}$
\mathcal{P}_λ	La aplicación $\mathcal{P}_\lambda : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ dada por $\mathcal{P}_\lambda(\lambda, u) = \lambda$

Bibliografía

- [1] J. C. Alexander, A primer on connectivity. In *Fixed point theory*, pp. 455–483. Lecture Notes in Mathematics **886**. Springer, Berlin-New York, 1981.
- [2] H. Amann, Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces, *SIAM Review* **18** (1976) 620–709.
- [3] H. Amann and S. A. Weiss, On the Uniqueness of the Topological Degree. *Math. Z.* **130** (1973) 39–54.
- [4] J. Arason and R. Magnus, The universal multiplicity theory for analytic operator-valued functions. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **118** (1995) 315–320.
- [5] J. Arason and R. Magnus, An algebraic multiplicity theory for analytic operator-valued functions. *Math. Scand.* **82** (1998) 265–286.
- [6] J. Arason and R. Magnus, A multiplicity theory for analytic functions that take values in a class of Banach algebras. *J. Operator Theory* **45** (2001) 161–174.
- [7] J. A. Ball, I. Gohberg and L. Rodman, *Interpolation of Rational Matrix Functions*. Operator Theory: Advances and Applications 45, Birkhäuser, Basel 1990.
- [8] B. Buffoni and J. Toland, *Analytic theory of global bifurcation. An introduction*. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.
- [9] S. N. Chow and J. K. Hale, *Methods of bifurcation theory*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **251**. Springer, New York-Berlin, 1982.
- [10] E. N. Dancer, On the structure of solutions of non-linear eigenvalue problems, *Ind. Univ. Math. J.* **23** (1974) 1069–1076.
- [11] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*. Springer, Berlin, 1985.
- [12] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators. Part I*. Pure and Applied Mathematics **7**. Interscience Publishers, New York-London 1958.
- [13] V. M. Eni, Stability of the root number of an analytic operator-function and perturbations of its characteristic numbers and eigenvalues. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **173** (1967) 1251–1254. English trans.: *Soviet Math. Dokl.* **8** (1967) 542–545.

- [14] J. Esquinas, Optimal multiplicity in local bifurcation theory, II: General case. *J. Differential Equations* **75** (1988) 206–215.
- [15] J. Esquinas and J. López-Gómez, Resultados óptimos en teoría de bifurcación y aplicaciones, *Actas del IX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones*, Universidad de Valladolid, 1986, 159–162.
- [16] J. Esquinas and J. López-Gómez, Optimal multiplicity in local bifurcation theory, I: Generalized generic eigenvalues. *J. Differential Equations* **71** (1988) 72–92.
- [17] P. M. Fitzpatrick and J. Pejsachowicz, A local bifurcation theorem for C^1 -Fredholm maps. *Proc. Amer. Math. Soc.* **109** (1990) 995–1002.
- [18] P. M. Fitzpatrick and J. Pejsachowicz, Parity and generalized multiplicity. *Trans. Amer. Math. Soc.* **326** (1991) 281–305.
- [19] P. M. Fitzpatrick and J. Pejsachowicz, Orientation and the Leray-Schauder theory for fully nonlinear elliptic boundary value problems, *Mem. Amer. Math. Soc.* **483** (1993).
- [20] I. Fonseca and W. Gangbo, *Degree theory in analysis and applications*. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications **2**. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995.
- [21] A. Friedman and M. Shinbrot, Nonlinear eigenvalue problems. *Acta Math.* **121** (1968) 77–125.
- [22] G. Frobenius. Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten. *Jour. Reine Angew. Math.* **86** (1879) 146–208.
- [23] F. G. Frobenius, *Gesammelte Abhandlungen. Bände I*. (Edited by J.-P. Serre). Springer, Berlin-New York 1968.
- [24] I. Gohberg, S. Goldberg, and M. A. Kaashoek, *Classes of Linear Operators, vol. 1*, Operator Theory: Advances and Applications 49, Birkhäuser, Basel 1990.
- [25] I. Gohberg, P. Lancaster and L. Rodman, *Matrix polynomials*. Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press, New York 1982.
- [26] I. C. Gohberg, M. A. Kaashoek and D. C. Lay, Equivalence, Linearization, and Decomposition of Holomorphic Operator Functions. *J. Functional Analysis* **28** (1978) 102–144.
- [27] I. C. Gohberg and M. G. Kreĭn, *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators*. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 18. American Mathematical Society, Providence 1969.
- [28] I. Gohberg and L. Rodman, Analytic operator-valued functions with prescribed local data, *Acta Math. (Szeged)* **45** (1983) 189–299.

- [29] I. C. Gohberg and E. I. Sigal, An Operator Generalization of the Logarithmic Residue Theorem and the Theorem of Rouché. *Math. Sbornik* **84(126)** (1971), 607–629. English Trans.: *Math. USSR Sbornik* **13** (1971) 603–625.
- [30] J. Ize, Bifurcation theory for Fredholm operators. *Mem. Amer. Math. Soc.* **7** (1976).
- [31] J. Ize, Necessary and sufficient conditions for multiparameter bifurcation. *Rocky Mountain J. Math.* **18** (1988) 305–337.
- [32] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*. Second Edition, Springer, Berlin, 1976.
- [33] M. V. Keldyš, On the characteristic values and characteristic functions of certain classes of non-self-adjoint equations. (Russian) *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)* **77** (1951) 11–14.
- [34] H. Kielhöfer, Multiple eigenvalue bifurcation for Fredholm operators. *J. Reine Angew. Math.* **358** (1985) 104–124.
- [35] H. Kielhöfer, *Bifurcation theory. An introduction with applications to PDEs*. Applied Mathematical Sciences **156**. Springer, New York, 2004.
- [36] M. A. Krasnosel'skiĭ, *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations* Gos. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow, 1956. English trans.: Pergamon Press, New York, 1964.
- [37] W. Krawcewicz and J. Wu, *Theory of degrees with applications to bifurcations and differential equations*. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. John Wiley & Sons, New York, 1997.
- [38] K. Kuratowski, *Topology. Vol. II*. Academic Press, New York-London. PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw 1968.
- [39] B. Laloux and J. Mawhin, Coincidence index and multiplicity. *Trans. Amer. Math. Soc.* **217** (1976) 143–162.
- [40] B. Laloux and J. Mawhin, Multiplicity, Leray-Schauder formula, and bifurcation. *J. Differential Equations* **24** (1977) 309–322.
- [41] J. Leray and J. Schauder, Topologie et équations fonctionnelles. *Ann. Sci. École Norm. Sup. Sér. 3* **51** (1934) 45–78.
- [42] N. G. Lloyd, *Degree theory*. Cambridge Tracts in Mathematics **73**. Cambridge University Press. Cambridge-New York-Melbourne, 1978.
- [43] J. López-Gómez, *Spectral Theory and Nonlinear Functional Analysis*, CRC Press, Chapman and Hall RNM **426**, Boca Raton 2001.
- [44] J. López-Gómez and C. Mora-Corral, Characterizing the existence of local Smith forms for C^∞ families of matrix operators. *Contemporary Mathematics* **321**, Amer. Math. Soc., Providence, 2003, pp. 139–151.

- [45] J. López-Gómez and C. Mora-Corral, Characterizing the existence of local Smith forms for C^r families of operators. Preprint.
- [46] J. López-Gómez and C. Mora-Corral, Finite Laurent developments and the logarithmic residue theorem in the real non-analytic case, *Integral Equations and Operator Theory*, in press.
- [47] J. López-Gómez and C. Mora-Corral, Counting solutions of nonlinear abstract equations, *Top. Meth. in Nonl. Anal.* In Press.
- [48] J. López-Gómez and C. Mora-Corral, Minimal complexity of semi-bounded components bifurcating from a given solution in fixed point equations depending on a parameter. Preprint.
- [49] R. J. Magnus, A generalization of multiplicity and the problem of bifurcation. *Proc. London Math. Soc.* (3) **32** (1976) 251–278.
- [50] R. Magnus, On the multiplicity of an analytic operator-valued function. *Math. Scand.* **77** (1995) 108–118.
- [51] R. Magnus, Division formulas for holomorphic mappings with values in a Banach algebra. *Math. Scand.* **75** (1994) 293–319.
- [52] R. Magnus and C. Mora-Corral, Natural representations of the multiplicity of an analytic operator-valued function at an isolated point of the spectrum, *Integral Equations and Operator Theory*, in press.
- [53] A. S. Markus and E. I. Sigal, The multiplicity of the characteristic number of an analytic operator function. (Russian) *Mat. Issled.* **5** (1970) 129–147.
- [54] J. Mawhin, Leray-Schauder degree: A half century of extensions and applications, *Top. Meth. in Nonl. Anal.* **14** (1999) 195–228.
- [55] C. Mora-Corral, *Multiplicidades algebraicas y formas canónicas locales para familias de operadores de Fredholm de índice cero*, Trabajo de Investigación (Diploma de Estudios avanzados). Facultad de Ciencias Matemáticas. Departamento de Matemática Aplicada. Universidad Complutense de Madrid. Madrid, May 2002.
- [56] C. Mora-Corral, On the Uniqueness of the Algebraic Multiplicity. *J. London Math. Soc.* **69** (2004) 231–242.
- [57] C. Mora-Corral, Axiomatizing the multiplicity. To appear in *The first 60 years of Nonlinear Analysis of Jean Mawhin*. (M. Delgado, A. Suárez, J. López-Gómez and R. Ortega, editors). World Scientific.
- [58] P. J. Rabier, Generalized Jordan chains and two bifurcation theorems of Krasnoselskii. *Nonlinear Anal. TMA* **13** (1989) 903–934.
- [59] P. H. Rabinowitz, Some global results for nonlinear eigenvalue problems, *J. Funct. Anal.* **7** (1971) 487–513.

- [60] P. H. Rabinowitz, Some aspects of nonlinear eigenvalue problems, *Rocky Mountain J. of Maths.* **3** (1973) 161–202.
- [61] A. G. Ramm, Singularities of the inverses of Fredholm operators, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **102A** (1986) 117–121.
- [62] B. P. Rynne, The structure of Rabinowitz' global bifurcating continua for generic quasilinear elliptic equations. *Nonlinear Analysis TMA* **32** (1998) 167–181.
- [63] P. Sarreither, Transformationseigenschaften endlicher Ketten und allgemeine Verzweigungsaussagen. *Math. Scand.* **35** (1974) 115–128.
- [64] P. Sarreither, Zur algebraischen Vielfachheit eines Produktes von Operatorscharen. *Math. Scand.* **41** (1977) 185–192.
- [65] H. J. S. Smith. *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **151** (1861) 293–326.
- [66] A. E. Taylor, *Introduction to functional analysis*. John Wiley & Sons, New York; Chapman & Hall, London 1958.
- [67] J. T. Wloka, B. Rowley and B. Lawruk, *Boundary Value Problems for Elliptic Systems*, Cambridge University Press, Cambridge 1995.
- [68] G. T. Whyburn, *Topological Analysis*, Princeton University Press, Princeton 1958.
- [69] B. F. Wyman, M. K. Sain, G. Conte and A. M. Perdon, Poles and Zeros of Matrices of Rational Functions. *Linear Algebra Appl.* **157** (1991) 113–139.
- [70] K. Yosida, *Functional analysis*. Second edition. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **123**. Springer, New York 1968.
- [71] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications, I. Fixed-point theorems*. Springer, New York, 1986.