UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

ALGUNOS PROBLEMAS DE APROXIMACIÓN ÓPTIMA EN ESPACIOS NORMADOS

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Tijani Pakhorou

Bajo la dirección del doctor

José Mendoza Casas

Madrid, 2004

ISBN: 84-669-2597-X

Algunos problemas de aproximación óptima en espacios normados

Memoria que para obtener el título
de Doctor en Ciencias Matemáticas

Presenta : Tijani Pakhrou
Director : José Mendoza Casas

A todo el pueblo rifeño que ha sufrido la catástrofe del terremoto ocurrido el día 24 de Febrero del 2004 en la ciudad de Alhucemas.

También a las víctimas de los atentados del 11 de Marzo del 2004 en la ciudad de Madrid.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi padre, mi madre, mis hermanos, hermanas y a toda mi familia la confianza depositada en mí, y el apoyo recibido para realizar esta tesis doctoral. No quiero dejar de señalar cómo el sostén económico otorgado por mi padre ha hecho posible la conclusión de este trabajo.

No quiero perder la ocasión de agradecer a mi director de tesis, José Mendoza, por sus innumerables sugerencias y ayudas en la realización de esta memoria.

Gracias también a Pilar Cembranos y a Marcos Sánchez por sus sugerencias durante la redacción de esta tesis.

Mi más sincero agradecimiento a mis amigos, Alaa Eddine Oukheyar, Hicham Touzani, Monir Baraka y Tarik Jabba por el continuado aliento con que me han obsequiado.

También quiero agradecer a todos mis compañeros del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad Complutense de Madrid: Alejandro Montesinos, Daniel Azagra, David Pérez, Gustavo Muñoz, Ignacio Villanueva, José Luis Gámez, Mar Jiménez, Olivia Gutú, Raúl Romero y Víctor Sánchez, por el maravilloso clima de compañerismo y trabajo que siempre ha reinado entre nosotros.

Índice general

Introducción

La presente memoria se centra en problemas de aproximación y optimización en espacios normados.

El punto de partida ha sido un grupo de trabajos de Durier [15], [16], [17], [18] y [19] en los que se consideran problemas del tipo siguiente.

Supongamos que tenemos un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ y n puntos $a_1, \ldots, a_n$ en X (n es un número natural). Se trata de minimizar funciones del tipo

$$\begin{array}{rccl} \varphi_1 : & X & \longrightarrow & [0, +\infty) \\ & x & \longrightarrow & \|x - a_1\| + \ldots + \|x - a_n\| \end{array}$$

o

$$\begin{array}{rccl} \varphi_p : & X & \longrightarrow & [0, +\infty) \\ & x & \longrightarrow & \|x - a_1\|^p + \ldots + \|x - a_n\|^p \end{array}$$

o

$$\begin{array}{rccl} \varphi_\infty : & X & \longrightarrow & [0, +\infty) \\ & x & \longrightarrow & \max\, \big\{\|x - a_1\|, \ldots, \|x - a_n\|\big\}. \end{array}$$

o, en general, alguna función análoga a las anteriores

Evidentemente es un problema de optimización (mínimos de φ_1, φ_p, φ_∞, etc.) y también lo podemos ver como un problema de aproximación, de hecho de aproximación simultánea: queremos aproximar, en algún sentido, $a_1, \ldots, a_n$ "a la vez".

Este tipo de problemas tienen una larga historia. Si nos restringimos al plano euclídeo, podemos comenzar con el problema siguiente que planteó el abogado Fermat (1601-1665):

> "*Dados tres puntos en el plano euclídeo, encuéntrese un cuarto punto tal que la suma de sus distancias a los tres puntos dados sea mínima*"

Este problema fue resuelto de diferentes formas (véase, por ejemplo, el libro [6]). Pero la solución geométrica más conocida y que vamos a ver más tarde (ver sección 1.4) es anterior a 1640 y se debe al físico Torricelli según el libro [6], que cita la referencia [51].

No se dio importancia a este problema de Fermat en la vida real hasta que el economista Weber escribió, en 1909, el libro [56], donde planteó el problema de la búsqueda de la ubicación de un mercado en un territorio de modo que la suma de las distancias recorridas desde diferentes fuentes de suministro de material a dicho mercado sea mínima. Con esto el problema de Fermat pasó a tener una gran importancia en las aplicaciones reales.

El problema dual de Fermat aparece muy temprano, y fue planteado originalmente por Sylvester en 1857 (ver [48]), bajo la forma siguiente:

> "*Dados tres puntos en el plano euclídeo, determínese la ubicación de un cuarto punto de tal manera que se minimice la distancia euclídea de este punto al punto más lejano de los tres puntos dados*"

Este problema dual tiene la interpretación geométrica elegante que sigue: se trata de encontrar el menor círculo que contiene a estos tres puntos dados. El centro de dicho círculo es, precisamente, donde se sitúa el cuarto punto. Hemos incluido la solución en la sección 1.2.

Dejemos ahora a un lado lo que ocurre en el plano euclídeo pues, naturalmente, las versiones de este problema que se han estudiado en los últimos años se refieren a normas arbitrarias, dimensiones arbitrarias y a funciones a minimizar más y más generales.

Dentro del problema podemos considerar varias partes: ¿existe solución? ¿es única? ¿cuál es o cuáles son las soluciones? ¿cómo calcularlas? ¿podemos garantizar que algunas soluciones se encuentran en algún conjunto dado? ($\equiv$ problemas de "localización") etc.

En relación con la última de las preguntas anteriores hay una primera conjetura que en principio parece natural:

> (C) *Si el problema tiene solución, entonces tiene alguna solución en el espacio vectorial engendrado por* $\{a_1, \ldots, a_n\}$, *y más concretamente, en la envoltura convexa de* $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

De hecho, (C) se ha dado por supuesto en algún trabajo (ver [10]). Sin embargo (C) es falso en general.

Naturalmente, (C) es cierto cuando trabajamos con una norma euclídea, es decir, cuando nuestro espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un prehilbert (o IPS, Inner Product Space). Sin embargo, desde hace tiempo se conocen ejemplos muy sencillos (en $\mathbb{R}^3$ con la norma $\|\cdot\|_1$, ver Ejemplo 1.9.1) que prueban que (C) es falso en general.

Una parte de la investigación de Durier [15], [16] y [18] se ha dedicado a descubrir en qué condiciones (C) o condiciones análogas a (C) son ciertas.

Comentábamos más arriba que, por supuesto, (C) es cierto si X es un IPS. Lo que es más sorprendente es que ha ido quedando más y más claro a lo largo del tiempo que (C) es cierto *sólo* si X es un IPS. Por ello podemos decir que toda esta línea de trabajo se ha convertido en dar caracterizaciones de los espacios IPS.

Esto en realidad ya podemos encontrarlo en parte en la célebre caracterización de Jordan y Von Neumann (ver [28]), que puede ser enunciada de la siguiente forma (ver sección 1 de [1]):

Teorema (Jordan-Von Neumann 1935). *Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio normado que tiene dimensión mayor o igual que dos, si para cada tres puntos a_1,a_2,a_3 en X la función*

$$x\in X \quad \xrightarrow{\varphi_2} \quad \|x-a_1\|^2+\|x-a_2\|^2+\|x-a_3\|^2$$

alcanza su mínimo en $\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)$, entonces X es un IPS.

Años más tarde, a principios de los 60, encontramos una caracterización que de forma más clara se relaciona con la conjetura (C). Es el famoso Teorema de Garkavi [24] y Klee [34], que podemos enunciar así:

Teorema (Garkavi 1964-Klee 1960). *Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión mayor o igual que tres, si para cada tres puntos a_1,a_2,a_3 en X la función*

$$x\in X \quad \xrightarrow{\varphi_\infty} \quad \max\big\{\|x-a_1\|,\|x-a_2\|,\|x-a_3\|\big\}$$

tiene algún mínimo en la envoltura convexa de $\{a_1,a_2,a_3\}$, entonces X es un IPS.

El Teorema anterior motivó a Amir a profundizar en la condición que aparece en dicho teorema. La idea sería en lugar de considerar todos los conjuntos de tres puntos del espacio X, considerar solamente los conjuntos de tres puntos que están en la **esfera unidad** de X. Esto le llevó a considerar la condición siguiente [1], que es otra variante de la conjetura (C):

(15.14) *Para cada tres puntos a_1,a_2,a_3 en la esfera unidad X, si* $\mathbf{0}$ *es un mínimo de*

$$x\in X \quad \xrightarrow{\varphi_\infty} \quad \max\big\{\|x-a_1\|,\|x-a_2\|,\|x-a_3\|\big\}$$

entonces $\mathbf{0}$ *está en la envoltura convexa de $\{a_1,a_2,a_3\}$.*

(Hemos conservado el número (15.14) como en el libro de Amir [1]).

Amir afirma que (15.14) caracteriza a los IPS, y más tarde Durier [18] generaliza de dos maneras dicha caracterización.

Nuestra primer aportación en esta memoria consiste en dar un ejemplo para probar que la caracterización de Amir es falsa (y por tanto también son falsas las extensiones de Durier). Esto lo hacemos en el capítulo 2, después de un capítulo 1 de preliminares.

Una vez visto que la caracterización de Amir es falsa, surge la pregunta de si es posible modificarla para obtener verdaderas caracterizaciones. También en el capítulo 2, hemos comprobado que sí con las dos caracterizaciones siguientes:

Teorema. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado de dimensión mayor o igual que tres. Si* X *cumple la condición siguiente*:

$\left(\mathrm{GK}_\infty^S\right)$ *Para cada tres puntos* a_1, a_2, a_3 *en la esfera unidad* X*, la función*

$$x \in X \quad \xrightarrow{\varphi_\infty} \quad \text{máx}\left\{\|x-a_1\|, \|x-a_2\|, \|x-a_3\|\right\}$$

tiene algún mínimo en la envoltura convexa de $\{a_1, a_2, a_3\}$,

entonces X *es un* IPS.

Teorema. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado de dimensión mayor o igual que tres. Si* X *cumple la condición siguiente*:

$\left(\mathrm{A}_\infty^*\right)$ *Para cada tres puntos* a_1, a_2, a_3 *en la esfera unidad* X*, la función*

$$x \in X \quad \xrightarrow{\varphi_\infty} \quad \text{máx}\left\{\|x-a_1\|, \|x-a_2\|, \|x-a_3\|\right\}$$

tiene algún mínimo, y si $\mathbf{0}$ *es mínimo necesariamente está en la envoltura convexa de* $\{a_1, a_2, a_3\}$,

entonces X *es un* IPS.

Hasta ahora nos hemos centrado en las caracterizaciones de los IPS mediante la localización de los mínimos de la función φ_∞, en torno al Teorema de Garkavi y Klee. Desde hace tiempo se planteó el problema de caracterizar los IPS mediante los mínimos de la función φ_1 y de φ_p $(1 < p < +\infty)$, es decir obtener análogos al Teorema de Garkavi y Klee para estas funciones. Esto no se ha conseguido hasta muy recientemente, en que Benítez, Fernández y Soriano probaron las siguientes teoremas (ver [3], [4], [5]).

Teorema (Benítez-Fernández-Soriano 2002). *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado de dimensión mayor o igual que tres y sea* $p \in (1, +\infty)$. *Si para cada tres puntos* a_1, a_2, a_3 *en* X *la función*

$$x \in X \quad \xrightarrow{\varphi_p} \quad \|x - a_1\|^p + \|x - a_2\|^p + \|x - a_3\|^p$$

tiene algún mínimo en la envoltura convexa de $\{a_1, a_2, a_3\}$, *entonces* X *es un* IPS.

Teorema (Benítez-Fernández-Soriano 2002). *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado de dimensión mayor o igual que tres. Si para cada tres puntos* a_1, a_2, a_3 *en* X *la función*

$$x \in X \quad \xrightarrow{\varphi_1} \quad \|x - a_1\| + \|x - a_2\| + \|x - a_3\|$$

tiene algún mínimo en la envoltura convexa de $\{a_1, a_2, a_3\}$, *entonces* X *es un* IPS.

A la vista de los teoremas anteriores surge la pregunta siguiente ¿podemos dar caracterizaciones de los IPS del tipo de (GK_∞^S) y (A_∞^*) cambiando la función φ_∞ por φ_1 o φ_p?

Para la función φ_1 hemos obtenido una respuesta completamente satisfactoria. Esto es el contenido del capítulo 3, cuyos resultados principales son los dos teoremas siguientes:

Teorema. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado de dimensión mayor o igual que tres. Si* X *cumple la condición siguiente*:

$\left(\mathrm{GK}_1^S\right)$ *Para cada tres puntos* a_1, a_2, a_3 *en la esfera unidad de* X, *la función*

$$x \in X \quad \xrightarrow{\varphi_1} \quad \|x - a_1\| + \|x - a_2\| + \|x - a_3\|$$

tiene algún mínimo en la envoltura convexa de $\{a_1, a_2, a_3\}$,

entonces X *es un* IPS.

Teorema. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado de dimensión mayor o igual que tres. Si* X *cumple la condición siguiente*:

(A_1^*) *Para cada tres puntos a_1, a_2, a_3 en la esfera unidad de X, la función*

$$x \in X \quad \stackrel{\varphi_1}{\longrightarrow} \quad \|x - a_1\| + \|x - a_2\| + \|x - a_3\|$$

tiene algún mínimo, y si $\mathbf{0}$ es mínimo necesariamente está en la envoltura convexa de $\{a_1, a_2, a_3\}$,

entonces X es un IPS.

El capítulo 4 lo dedicamos al mismo tipo de problemas, esta vez con la función φ_p $(1 < p < +\infty)$. Hemos conseguido probar un teorema completamente análogo al primero de los anteriores:

Teorema. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión mayor o igual que tres y sea $p \in (1, +\infty)$, si X cumple la condición siguiente*

(GK_p^S) *Para cada tres puntos a_1, a_2, a_3 en la esfera unidad de X, la función*

$$x \in X \quad \stackrel{\varphi_p}{\longrightarrow} \quad \|x - a_1\|^p + \|x - a_2\|^p + \|x - a_3\|^p$$

tiene algún mínimo en la envoltura convexa de $\{a_1, a_2, a_3\}$,

entonces X es un IPS.

En lo que respecta a si es válida una caracterización mediante una condición del tipo (A_p^*), hemos tenido que dejarlo como problema abierto.

En el capítulo 4 también ofrecemos una demostración del primer Teorema de Benítez, Fernández y Soriano que citamos más arriba (la caracterización de los IPS mediante la localización de los mínimos de la función φ_p, donde $1 < p < +\infty$) distinta de la original de Benítez, Fernández y Soriano.

En el capítulo 5 estudiamos dos formulaciones de la conjetura (C) introducidas por Durier [18], que son más sofisticadas que las que hemos visto hasta ahora: $(CvHP)_n^\gamma$ y $(AfHP)_n^\gamma$. Completamos el estudio que había hecho ya Durier y probamos que también son caracterizaciones de los IPS.

Finalmente, en el capítulo 6 hemos estudiado dos tipos de problemas de aproximación simultánea óptima.

El primero ha sido estudiado por Hussein, Khalil y Saidi en [45] y tiene la forma siguiente.

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado e Y un subconjunto de X. Sea N una norma monótona en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, es decir, $N\big((t_i)_{1\leq i\leq n}\big) \leq N\big((s_i)_{1\leq i\leq n}\big)$

cuando $|t_i| \leq |s_i|$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Sea $x_1, \ldots, x_n$ una familia de n puntos en X. Se trata de minimizar la función

$$y \in Y \longrightarrow N\big(\|x_1 - y\|, \ldots, \|x_n - y\|\big)$$

sobre el subconjunto Y.

Cuando esta función admite un punto de mínimo, éste se llama una aproximación N-simultánea óptima de $x_1, \ldots, x_n$ en Y.

Como se ve, el objetivo de este problema es aproximar varios puntos "a la vez". En este sentido se parece a un problema de búsqueda de un mínimo de una función del tipo φ_∞ o φ_1 o φ_p $(1 < p < +\infty)$ que hemos visto anteriormente. La diferencia es que ahora, al igual que en los problemas de aproximación anteriores, queremos aproximar mediante puntos de un conjunto o subconjunto dado. Es decir, si tomamos $Y = X$ tenemos la definición análoga a la que hemos visto previamente al tratar de minimizar φ_∞ o φ_1 o φ_p. Naturalmente lo interesante es que $Y \neq X$: queremos aproximar puntos de X mediante puntos de Y. Tal problema, se aparta un poco de los anteriores pues no nos lleva a caracterizaciones de los IPS, sino a estudiar un concepto importante en aproximación simultánea que se denomina proximinalidad N-simultanea.

Se dice que Y es proximinal N-simultáneamente en X, si cualesquiera n puntos en X tienen una aproximación N-simultánea óptima en Y.

Nuestra aportación en este capítulo se centra en estudiar algunas condiciones para que un subespacio S de $L_1(\mu, X)$, sea proximinal N-simultáneamente en $L_1(\mu, X)$, donde X es un espacio de Banach y (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finita.

El principal resultado que hemos obtenido es el siguiente:

Teorema. *Sea N una norma monótona en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ y μ_0 una restricción de μ a una sub-σ-álgebra Σ_0 de Σ. Si X es reflexivo, entonces $L_1(\mu_0, X)$ es proximinal N-simultáneamente en $L_1(\mu, X)$.*

Queremos hacer notar que este resultado, por lo que sabemos, es nuevo incluso en el caso $X = \mathbb{R}$.

El segundo problema de aproximación simultánea óptima que hemos estudiado en este capítulo 6 tiene como punto de partida un grupo de trabajos de Li y Watson [36], [37]. En ellos se estudian problemas semejantes a los anteriores, pero con una noción de aproximación simultánea ligeramente diferente.

Capítulo 1

Resultados preliminares

1.1. ¿Qué son el radio y centro de Chebyshev?

Se define el radio de Chebyshev de un conjunto finito de puntos $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ $(n \geq 1)$ en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, como el menor de los reales $r \geq 0$ tal que existe un $x_0 \in X$ con $A \subset B(x_0, r)$. En este caso, x_0 se llama centro de Chebyshev de A, o dicho de otra forma, x_0 es un punto donde la función objetivo siguiente

$$x \in X \longrightarrow r(x, A) = \max_{1 \leq i \leq n} \|x - a_i\|$$

alcanza su mínimo sobre X, y el radio de Chebyshev es

$$r = r_X(A) = \inf_{x \in X} r(x, A).$$

El conjunto de los centros de Chebyshev del conjunto A (quizá vacío) se denota por

$$Z(A) = \Big\{x \in X : \ r(x, A) = \inf_{y \in X} r(y, A)\Big\}.$$

Por supuesto, si la dimensión de X es finita, entonces $Z(A)$ no es vacío.

1.2. Centro de Chebyshev de un triángulo en el plano euclídeo

Si el espacio X es un plano euclídeo, el centro de Chebyshev de $\Delta = \{a_1, a_2, a_3\}$ y el radio de Chebyshev $(r \geq 0)$ se hallan conforme a las figuras siguientes.

La figura (1.1) refleja el caso en que el triángulo es acutángulo (los ángulos del triángulo Δ son estrictamente menores que $\frac{\pi}{2}$). Entonces el centro de Chebyshev de Δ coincide con el circuncentro de este triángulo, y su radio de Chebyshev es el radio de esta circunferencia.

La figura (1.2) ilustra el caso en que el triángulo es o bien obtusángulo o bien rectángulo (uno de los ángulos de Δ es superior o igual a $\frac{\pi}{2}$). Entonces el centro de Chebyshev de Δ coincide con el punto medio del lado mayor de Δ, y su radio de Chebyhev es la mitad de la longitud de dicho lado.

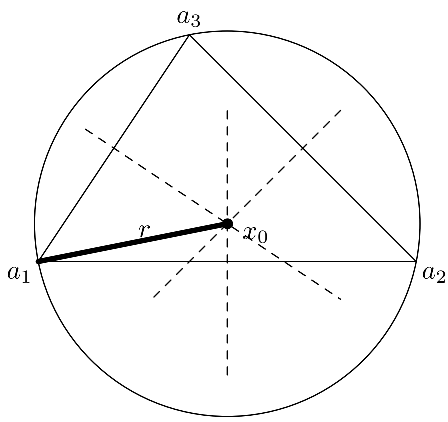

Figura 1.1: Caso 1

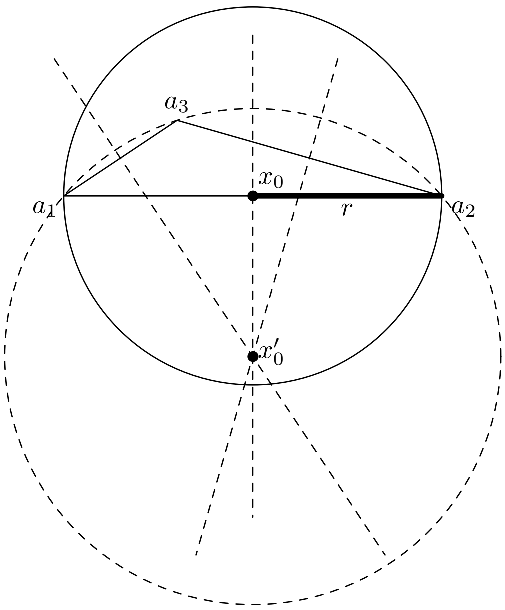

Figura 1.2: Caso 2

1.3. ¿Qué es un centro de Fermat?

Cuando definíamos el centro de Chebyshev de un conjunto de n ($n \geq 1$) puntos $a_1, \ldots, a_n$ en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, lo que se buscaba era encontrar el mínimo de la función

$$x \in X \longrightarrow \Big\| (\|x - a_1\|, \ldots, \|x - a_n\|) \Big\|_\infty,$$

donde $\|\cdot\|_\infty$ es la usual norma del máximo en $\mathbb{R}^n$.

Si en el planteamiento anterior sustituimos $\|\cdot\|_\infty$ por $\|\cdot\|_1$ (la usual norma de la suma en $\mathbb{R}^n$) lo que obtenemos es el centro de Fermat.

Con precisión: Un centro de Fermat de un conjunto finito $A \subset X$ formado por $a_1, \ldots, a_n$, es un punto donde la suma de las distancias de este punto a las puntos que forman tal conjunto sea mínima. Es decir, un punto donde la función objetivo siguiente

$$x \in X \longrightarrow r^1(x, A) = \sum_{i=1}^{n} \|x - a_i\|$$

alcanza su mínimo en X.

El conjunto de los centros de Fermat del conjunto A (quizá vacío) se denota por

$$Z^1(A) = \Big\{ x \in X : \; r^1(x, A) = \inf_{y \in X} r^1(y, A) \Big\}.$$

Por supuesto si la dimensión del espacio X es finita, entonces el conjunto $Z^1(A)$ no es vacío.

1.4. Centro de Fermat de un triángulo en el plano euclídeo

Si el espacio X es un plano euclidiano, la determinación del centro de Fermat de un conjunto de tres puntos se divide en dos casos.

La figura (1.3) refleja el caso en que los ángulos del triángulo Δ son estrictamente menores que $\frac{2\pi}{3}$. En esta situación tal punto fue encontrado por Torricelli antes de 1640, según el libro [6], que cita las referencias [51] y [22]. Este punto es la intersección de las circunferencias circunscritas a los triángulos equiláteros exteriores construidos sobre los lados del triángulo Δ, y se conoce como “ punto de Fermat ” o “ punto de Torricelli ”.

La figura (1.4) refleja el caso en que uno de los ángulos es superior o igual a $\frac{2\pi}{3}$. Este caso ha sido tratado por muchos autores, y el primero en enunciarlo explícitamente fue Cavalieri (antes de 1647, según el libro [6], que cita [8]). Tal punto es el vértice de dicho ángulo.

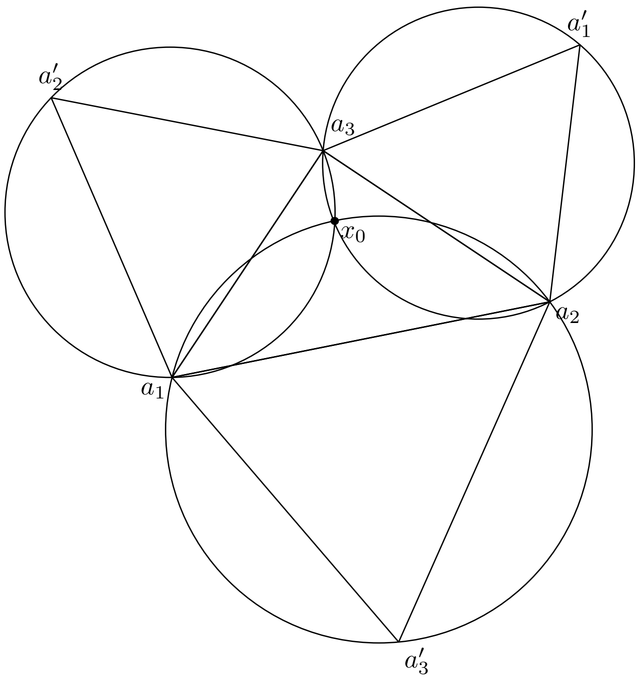

Figura 1.3: Caso 1

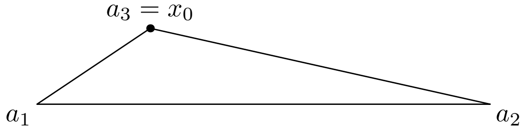

Figura 1.4: Caso 2

1.5. ¿Qué es un p-centro?

Si en el planteamiento de centros de Chebyshev (o en el de centros de Fermat) sustituimos $\|\cdot\|_\infty$ (o $\|\cdot\|_1$) por $\|\cdot\|_p$ (la usual norma de la p-suma en $\mathbb{R}^n$) lo que obtenemos es el p-centro.

En concreto: un p-centro de un conjunto finito $A \subset X$ formado por $a_1, \ldots, a_n$, es un punto donde la suma de las distancias con potencia $p \in (1, \infty)$ de este punto a las puntos que forman tal conjunto sea mínima. Es decir, un punto donde la función objetivo siguiente

$$x \in X \longrightarrow r^p(x, A) = \left(\sum_{i=1}^{n} \|x - a_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

alcanza su mínimo en X.

El conjunto de los p-centros del conjunto A (quizá vacío) se denota por

$$Z^p(A) = \left\{ x \in X : \; r^p(x, A) = \inf_{y \in X} r^p(y, A) \right\}.$$

Por supuesto si la dimensión del espacio X es finita, entonces el conjunto $Z^p(A)$ no es vacío.

1.6. 2-centro de un triángulo en el plano euclídeo

Si el espacio X es un plano euclídeo el 2-centro (o baricentro o centro de gravedad) del triángulo $\{a_1, a_2, a_3\}$, es el punto $x_0 = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$ como indica la figura siguiente.

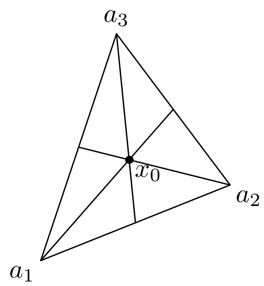

Figura 1.5:

1.7. Norma monótona

Se dice que una norma γ en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ es monótona si para cada $t = (t_i)_{1 \leq i \leq n}$ y $s = (s_i)_{1 \leq i \leq n}$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$, tales que $|t_i| \leq |s_i|$ para cada $i = 1, \ldots, n$, tenemos que

$$\gamma(t) \leq \gamma(s).$$

Una norma monótona en $\mathbb{R}^n$ será llamada una n-norma monótona.

Ejemplo 1.7.1. Las normas clásicas de ℓ_p para $1 \leq p \leq \infty$, son monótonas.

Lema 1.7.2 (Lema 2 de [45]). *Sea $n \geq 2$ y sea γ una n-norma monótona y sea $t = (t_i)_{1 \leq i \leq n}$ y $s = (s_i)_{1 \leq i \leq n}$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$. Si $|t_i| < |s_i|$ para cada $i = 1, \ldots, n$, entonces $\gamma(t) < \gamma(s)$.*

Demostración. Denotamos $\lambda_i = \left|\frac{t_i}{s_i}\right|$ para cada $i = 1, \ldots, n$ y $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i$. Por las hipótesis tenemos $\lambda_i \in [0, 1)$ para cada $i = 1, \ldots, n$, así que $\lambda < 1$. Por tanto $t_i \leq \lambda s_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Luego

$$\gamma(t_1, \ldots, t_n) \leq \gamma(\lambda s_1, \ldots, \lambda s_n) = \lambda\gamma(s_1, \ldots, s_n) < \gamma(s_1, \ldots, s_n).$$

□

1.8. ¿Qué es un γ-centro?

Si ahora, en vez de trabajar con $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ o $\|\cdot\|_p$ consideramos una norma monótona arbitraria γ lo que obtenemos es el γ-centro.

En concreto: un γ-centro de un conjunto finito $A \subset X$ formado por $a_1, \ldots, a_n$, es un punto donde la función objetivo siguiente

$$x \in X \longrightarrow G^\gamma(A)(x) = \gamma\big(\|x - a_1\|, \ldots, \|x - a_n\|\big)$$

alcanza su mínimo en X.

El conjunto de los γ-centros del conjunto A (quizá vacío) se denota por

$$M^\gamma(A) = \Big\{x \in X : \ G^\gamma(A)(x) = \inf_{y \in X} G^\gamma(A)(y)\Big\}.$$

Por supuesto si la dimensión del espacio X es finita, entonces el conjunto $M^\gamma(A)$ no es vacío.

Nota 1.8.1. *En este trabajo conservamos la notación empleada por Amir en su libro* [1] *para representar el conjunto de los centros de Chebyshev y la función que determina éstos. Asimismo, y con una notación análoga, representamos las funciones que determinan los centros de Fermat y los p-centros. Para ambos conjuntos de centros, seguimos las notaciones de Benítez, Fernández y Soriano en* [3], [4] *y* [5]. *Respecto a los γ-centros, y el conjunto que definen, conservamos la notación debida a Durier en* [18].

Nota 1.8.2. *Sea γ una n-norma monótona, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un subconjunto finito de X, y sea $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ una n-familia positiva.*

Se dice que $x_0 \in X$ es un γ-centro con pesos ω de A, si es un punto donde la función siguiente

$$x \in X \longrightarrow G_\omega^\gamma(A)(x) = \gamma(\omega_1\|x - a_1\|, \ldots, \omega_n\|x - a_n\|)$$

alcanza su mínimo en X.

El conjunto de los γ-centros del conjunto A (quizá vacío) se denota por

$$M_\omega^\gamma(A) = \Big\{x \in X : \; G_\omega^\gamma(A)(x) = \inf_{y\in X} G_\omega^\gamma(A)(y)\Big\}.$$

Observación 1.8.3. *Sea γ una n-norma monótona, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ una n-familia positiva y $t = (t_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$.*

(1) *Si $\gamma(t) = \|t\|_\infty = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |t_i|$ y $\omega_1 = \cdots = \omega_n = 1$, la función $G_\omega^\gamma(A)(\cdot)$ se denota por $r(\cdot, A)$, y $M_\omega^\gamma(A)$ por $Z(A)$, y es el conjunto de los centros de Chebyshev de A.*

(2) *Si $\gamma(t) = \|t\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |t_i|$, la función $G_\omega^\gamma(A)(\cdot)$ se denota por $r_\omega^1(\cdot, A)$ y $M_\omega^\gamma(A)$ por $Z_\omega^1(A)$, y es el conjunto de los centros de Fermat de A con pesos ω.*

(3) *Si $\gamma(t) = \|t\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |t_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ con $1 < p < \infty$, $G_\omega^\gamma(A)(\cdot)$ se denota por $r_\omega^p(\cdot, A)$, y $M_\omega^\gamma(A)$ por $Z_\omega^p(A)$, y es el conjunto de los p-centros de A con pesos ω.*

1.9. Localización del γ-centro

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Por sencillez supongamos $\dim(X) < +\infty$. Sea γ una n-norma monótona y tomamos un conjunto finito $\{a_1, \ldots, a_n\}$ en X. ¿Donde está el (o algún) γ-centro de $\{a_1, \ldots, a_n\}$?

La primera respuesta inocente que podíamos dar es que el conjunto tiene algún γ-centro en su envoltura convexa. De hecho esto se ha utilizado en la literatura (ver [10]). Sin embargo, es *falso*. En realidad es falso en situaciones muy sencillas.

Ejemplo 1.9.1. En $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1)$, si tomamos $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0)$ y $a_3 = (0, 0, 1)$.

Se verifica fácilmente que $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ es el centro de Chebyshev, de Fermat, y el p-centro de $\{a_1, a_2, a_3\}$. Sin embargo $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ *no está* en la envoltura convexa de $\{a_1, a_2, a_3\}$.

En las secciones siguientes vamos a ver que si podemos encontrar centros (γ-centros, p-centros, etc) de conjuntos finitos en su envoltura convexa en dos casos importantes: en los IPS y en espacios de dimensión dos.

Desde luego son hechos conocidos pero hemos incluido demostraciones por comodidad del lector, y en el segundo caso (espacio de dimensión dos) también porque no hemos encontrado pruebas sencillas y explícitas en la literatura.

Una vez que queda claro que en los IPS y los espacios bidimensionales podemos encontrar centros de los conjunto finitos en su envoltura convexa, el hecho notable es que *son los dos únicos casos en que esto sucede.*

En los capítulos 2, 3, 4 y 5 recogemos varios resultados conocidos que precisen esta idea y hacemos algunas aportaciones en esta dirección. En definitiva lo que se obtiene son distintos caracterizaciones de de los IPS en dimensión mayor o igual que tres.

Nota 1.9.2. *Aunque hemos mencionado conjuntos finitos en realidad vamos a trabajar casi exclusivamente con conjuntos de tres puntos, o lo que es lo mismo, con triángulos.*

Observamos que los conjuntos de uno o dos puntos son demasiado triviales. Si tomamos solamente un punto, evidentemente su centro (*sea cual sea*) *es él mismo. Si tomamos un par de puntos, es fácil probar que sus centros están siempre en su envoltura convexa, es decir, en el segmento que definen.*

Por otra parte, veremos que por la caracterización de los IPS *nos basta con conjuntos de tres puntos. No es preciso tomar más puntos.*

1.10. γ-centro de un conjunto finito en un IPS

Antes de nada recordemos un resultado de la proyección sobre un convexo cerrado en un IPS siguiente.

Teorema 1.10.1. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio* IPS *y sea* $K \subset X$ *un convexo cerrado no vacío. Entonces para todo* $x \in X$*, existe* $y_0 \in K$ *único tal que*

$$\|x - y_0\| = \inf_{y \in K} \|x - y\|.$$

El punto y_0*, se caracteriza por la propiedad:*

$$< x - y_0, y - y_0 > \leq 0 \quad \text{para todo} \;\; y \in K.$$

Se escribe $y_0 = P_K x =$ *Proyección de* x *sobre* K.

Además, se verifica

$$\|P_K x_1 - P_K x_2\| \leq \|x_1 - x_2\| \quad \text{para todo} \;\; x_1, x_2 \in X.$$

Demostración. Véase página 79-80 de [7]. □

La proposición siguiente es una consecuencia inmediata del teorema anterior.

Proposición 1.10.2. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio* IPS*, y sea* $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ *un conjunto en* X*. Entonces para cada* $x \in X$*, existe un punto* $x_0 \in \operatorname{conv}(A)$ *tal que*

$$\|x_0 - a_i\| \leq \|x - a_i\|$$

para cada $i = 1, \ldots, n$*.*

Demostración. Está claro que $\operatorname{conv}(A)$ es un convexo cerrado.

Sea $x \in X$. Por el Teorema 1.10.1, existe un único punto $x_0 \in \operatorname{conv}(A)$ tal que $P_{\operatorname{conv}(A)}(x) = x_0$, y

$$\|P_{\operatorname{conv}(A)}(x) - P_{\operatorname{conv}(A)}(a_i)\| \leq \|x - a_i\|$$

para cada $i = 1, \ldots, n$.

Por tanto

$$\|x_0 - a_i\| \leq \|x - a_i\|$$

para cada $i = 1, \ldots, n$. □

Proposición 1.10.3. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio* IPS*. Sea* $n \geq 2$*,* γ *una* n*-norma monótona,* ω *una* n*-familia positiva y sea* $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset X$*. Entonces, el conjunto* A *tiene un único* γ*-centro, además está en su envoltura convexa.*

Demostración. Probamos primero la existencia de un γ-centro de A. Sea $x \in X$. Por la Proposición 1.10.2, existe un $x_0 \in \operatorname{conv}(A)$ tal que

$$\|x_0 - a_i\| \leq \|x - a_i\|$$

para cada $i = 1, \ldots, n$.

Puesto que γ es una norma monótona, entonces

$$G_\omega^\gamma(A)(x_0) \leq G_\omega^\gamma(A)(x). \tag{1.1}$$

Está claro que $\operatorname{conv}(A)$ es un compacto y $G_\omega^\gamma(A)$ es una función continua.

Por tanto, el Teorema de Weirstrass garantiza que la función $G_\omega^\gamma(A)$ alcanza su mínimo sobre $\operatorname{conv}(A)$. Es decir, existe $y_0 \in \operatorname{conv}(A)$ tal que

$$G_\omega^\gamma(A)(y_0) \leq G_\omega^\gamma(A)(y) \quad \text{para todo} \quad y \in \operatorname{conv}(A).$$

Por la igualdad (1.1), tenemos que

$$G_\omega^\gamma(A)(y_0) \leq G_\omega^\gamma(A)(x_0) \leq G_\omega^\gamma(A)(x).$$

Puesto que x es un punto arbitrario en X, entonces y_0 es un mínimo absoluto de la función $G^{\gamma}_{\omega}(A)$. Además $y_0 \in \text{conv}(A)$.

Para la unicidad, veamos primero que la función $G^{\gamma}_{\omega}(A)$ es estrictamente convexa. En efecto: Sea $x, y \in X$ con $x \neq y$, y sea $\lambda \in (0,1)$.

Puesto que X es un espacio estrictamente convexo, y para cada $i = 1, \ldots, n$, $x - a_i$ y $y - a_i$ son linealmente independientes, entonces para cada $i = 1, \ldots, n$, tenemos que

$$\|\lambda(x - a_i) + (1-\lambda)(y - a_i)\| < \lambda\|x - a_i\| + (1-\lambda)\|y - a_i\|.$$

Por el Lema 1.7.2, obtenemos que

$$G^{\gamma}_{\omega}(A)(\lambda(x + (1-\lambda)y) < \lambda G^{\gamma}_{\omega}(A)(x) + (1-\lambda)G^{\gamma}_{\omega}(A)(y).$$

Ahora la unicidad de γ-centro con pesos ω, es una consecuencia directa de la convexidad estricta de la función $G^{\gamma}_{\omega}(A)$.

Por último, hemos visto en la existencia que la función $G^{\gamma}_{\omega}(A)$ tiene por lo menos un mínimo en la envoltura convexa de A y hemos visto también que este mínimo es único. Por lo tanto, el conjunto A tiente un único γ-centro y está en su envoltura convexa. $\square$

1.11. El Teorema de Helly. Una consecuencia

El teorema de Helly es una de los resultados fundamentales de la teoría de conjuntos convexos. Puede verse página 196 de [42].

Nos dice lo siguiente:

Teorema 1.11.1 (Helly). *Sea $\{C_i : i \in I\}$ una colección finita de conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$ (no necesariamente cerrados). Si cada subcolección de a lo sumo $n+1$ subconjuntos tiene intersección no vacía, entonces la colección entera tiene intersección no vacía.*

De este teorema se sigue la siguiente proposición, que ya se puede ver en Wendell y Hurter [57], Durier [18] y Benítez, Fernández y Soriano [4]. Aunque dan una demostración que no se apoya en el Teorema de Helly.

Como se verá la idea de la prueba es muy simple y ya aparece más o menos en Kakutani [30] página 97.

Proposición 1.11.2. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión dos, y sean $a_1, \ldots, a_n$ n puntos en X. Entonces para cada $x \in X$ existe un punto x_0 en la envoltura convexa de $\{a_1, \ldots, a_n\}$ tal que*

$$\|x_0 - a_i\| \leq \|x - a_i\|$$

para cada $i = 1, \ldots, n$.

Demostración. El resultado es evidente para $n \leq 2$, suponemos que $n \geq 3$.

Denotemos por T a la envoltura convexa de $\{a_1, \dots, a_n\}$. Sea $x \in X$, para $i = 1, \dots, n$, tomamos $r_i = \|a_i - x\|$, y denotamos

$$B_i = \{y \in X \ : \ \|a_i - y\| \leq r_i\}.$$

Es fácil comprobar que cada tres miembros de la familia de conjuntos convexos $\{B_1, \dots, B_n, T\}$ tenga intersección no vacía. Entonces el Teorema 1.11.1 de Helly en dimensión dos garantiza que la familia tiene intersección no vacía, es decir, existe $x_0 \in T \cap B_1 \cap \cdots \cap B_n$. Por tanto está claro que x_0 satisface la característica deseada. $\square$

1.12. Los γ-centros de un conjunto finito en un espacio de dimensión dos

La proposición siguiente es una consecuencia inmediata de la anterior.

Proposición 1.12.1. *Sea $n \geq 2$ y sea γ una n-norma monótona, ω una n-familia positiva. Sea $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ un conjunto en X. Entonces, si* $\dim(X) = 2$, *se tiene*

$$M^{\gamma}_{\omega}(A) \cap \operatorname{conv}(A) \neq \emptyset.$$

Demostración. Sea $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ un conjunto finito en el espacio X de dimensión dos. Por la proposición 1.11.2, tenemos que para cada $x \in X$ existe un punto $x_0 \in \operatorname{conv}(\Delta)$ tal que

$$\|x_0 - a_i\| \leq \|x - a_i\|,$$

para cada $i = 1, \dots, n$.

Puesto que la norma γ es monótona y ω es positiva, entonces

$$G^{\gamma}_{\omega}(A)(x_0) \leq G^{\gamma}_{\omega}(A)(x).$$

Por tanto

$$G^{\gamma}_{\omega}(A)(x_0) \leq \inf_{x \in \ X} G^{\gamma}_{\omega}(A)(x).$$

Luego

$$x_0 \in M^{\gamma}_{\omega}(A) \cap \operatorname{conv}(\Delta).$$

$\square$

Corolario 1.12.2. *En un espacio de dimensión dos, cada conjunto finito tiene un centro de Chebyshev (o ∞-centro), de Fermat (o 1-centro) y un p-centro $\big(p \in (1, \infty)\big)$ en su envoltura convexa.*

Nota 1.12.3. *La proposición precedente afirma que un conjunto finito en un espacio de dimensión dos, tiene un γ-centro en su envoltura convexa. Esto no significa que tal conjunto no pueda tener otro γ-centro fuera de su envoltura convexa.*

El ejemplo que viene a continuación expresa claramente que un conjunto de tres puntos en $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ tiene centros de Chebyshev en su envoltura convexa y fuera de ella como muestra la figura 1.6.

Ejemplo 1.12.4. En $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, si $a_1 = (1,0)$, $a_2 = (0,1)$, $a_3 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, entonces

$$Z(\{a_1, a_2, a_3\}) = \left\{(t,t) \ : \ 0 \leq t \leq \frac{3}{4}\right\} = [0, a], \quad \text{donde} \ \ a = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

Por tanto

$$\begin{aligned} &Z(\{a_1, a_2, a_3\}) \cap \operatorname{conv}(\{a_1, a_2, a_3\}) \neq \emptyset, \quad \text{y} \\ &Z(\{a_1, a_2, a_3\}) \not\subseteq \operatorname{conv}(\{a_1, a_2, a_3\}). \end{aligned}$$

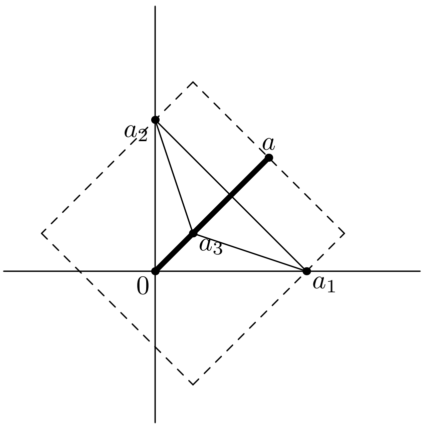

Figura 1.6:

1.13. γ-centros y espacios afines bidimensional

Vamos a destacar aquí una consecuencia sencilla pero importante de lo visto en las secciones 1.11 y 1.12. Naturalmente, es bien conocida en su versión general o en alguno de sus particulares (véase Corolario 1.13.3). Aparece o ha sido utilizado al menos en Wendell y Hurter [57], Durier [16] y [18] y Benítez, Fernández y Soriano [3], [4], [5].

Proposición 1.13.1. *Sea X un espacio normado y $A = \{a_1, a_2, a_3\} \subset X$. Sea γ una 3-norma monótona y ω una 3-familia positiva.*

$$M_\omega^\gamma(A) \cap \mathrm{aff}(A) \neq \emptyset \quad \textit{si y sólo si} \quad M_\omega^\gamma(A) \cap \mathrm{conv}(A) \neq \emptyset.$$

Demostración. Sea $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ un conjunto de X y sea ω una 3-familia positiva.

Por supuesto, si $M_\omega^\gamma(A) \cap \mathrm{conv}(A) \neq \emptyset$ entonces, $M_\omega^\gamma(A) \cap \mathrm{aff}(A) \neq \emptyset$, tenemos que probar solamente el inverso.

Tomando una translación en caso de necesidad, podemos suponer que el espacio afín generalizado por $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ pasa por $\mathbf{0}$ es decir que es un espacio vectorial de dimensión dos, lo denotemos Y.

Por nuestra hipótesis existe $x_0 \in Y$ tal que

$$G_\omega^\gamma(A)(x_0) \leq G_\omega^\gamma(A)(x)$$

para cada $x \in Y$.

Por la Proposición 1.11.2 existe $x_0' \in \mathrm{conv}(A)$ tal que

$$\|x_0' - a_i\| \leq \|x_0 - a_i\|$$

para $i = 1, 2, 3$.

Puesto que $\omega_i > 0$ para $i = 1, 2, 3$ y γ monótona, tenemos que

$$G_\omega^\gamma(A)(x_0') \leq G_\omega^\gamma(A)(x_0) \leq G_\omega^\gamma(A)(x),$$

para todo $x \in X$. Esto concluye nuestra prueba. □

Nota 1.13.2. *La notación $Z^\infty(A)$ significa el conjunto de los centros de Chebyshev (o ∞-centros) del conjunto A.*

Corolario 1.13.3. *Sea X un espacio normado y $A = \{a_1, a_2, a_3\} \subset X$. Sea $p \in [1, \infty]$.*

$$Z^p(A) \cap \mathrm{aff}(A) \neq \emptyset \quad \textit{si y sólo si} \quad Z^p(A) \cap \mathrm{conv}(A) \neq \emptyset.$$

Nota 1.13.4. *La notación $r_Y(\Delta)$ significa el radio de Chebyshev del conjunto $\Delta = \{a_1, a_2, a_3\}$ en el subconjunto Y, es decir,*

$$r_Y(\Delta) = \inf_{x \in Y} r(x, \Delta).$$

Corolario 1.13.5. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión dos, y $\Delta = \{a_1, a_2, a_3\}$ un conjunto de tres puntos en X. Entonces*

$$r_{\mathrm{conv}(\Delta)}(\Delta) = r_X(\Delta).$$

Demostración. Sea $\Delta = \{a_1, a_2, a_3\}$ un conjunto de tres puntos en el espacio X de dimensión dos. Por el Corolario 1.12.2, existe $x_0 \in \mathrm{conv}(\Delta)$ tal que

$$r(x_0, \Delta) = \inf_{x \in X} r(x, \Delta) \le \inf_{y \in \mathrm{conv}(\Delta)} r(y, \Delta) \le r(x_0, \Delta).$$

Por tanto

$$r_{\mathrm{conv}(\Delta)}(\Delta) = r_X(\Delta).$$

$\square$

Capítulo 2

Caracterización de IPS mediante centros de Chebyshev

2.1. Caracterización de Garkavi y Klee

La caracterización básica de los espacios IPS mediante el radio y centros de Chebyshev se debe a Garkavi y Klee (véase por ejemplo [24], [34] y la sección 15 de [1]). Recordamos aquí dos versiones de esta caracterización.

Nota 2.1.1. *Mantendremos en esta sección el número* (15.2) *asignado en el libro de* Amir [1].

Teorema 2.1.2 (Garkavi-Klee. Versión 1). *Sea X un espacio normado de dimensión al menos tres. Entonces X es un espacio* IPS *si y sólo si se cumple la condición siguiente:*

(15.2) *Para cada subespacio Y de X de dimensión dos y para cada conjunto $\Delta = \{a_1, a_2, a_3\} \subset Y$, $r_X(\Delta) = r_Y(\Delta)$.*

Demostración. Véase [1] página 119. □

Nótese que la condición $r_X(\Delta) = r_Y(\Delta)$ significa que Δ tiene el mismo radio de Chebyshev tanto si lo consideramos en el espacio bidimensional Y como si lo consideramos sumergido en todo X. Esto significa que si x_0 es centro de Chebyshev de Δ en Y también es centro de Chebyshev Δ en todo X. Pero como Y tiene dimensión dos, por el Corolario 1.12.2, podemos suponer que $x_0 \in \mathrm{conv}(\Delta)$. En resumen, (15.2) es equivalente a la siguiente condición.

(GK$_\infty$) *Cada conjunto de tres puntos en X tiene un centro de Chebyshev en su envoltura convexa.*

Por ello el Teorema anterior se puede escribir también de la siguiente forma:

Teorema 2.1.3 (Garkavi-Klee. Versión 2). *Sea X un espacio normado de dimensión al menos tres. Entonces, X es un* IPS *si y sólo si se cumple la condición siguiente:*

(GK$_\infty$) *Cada conjunto de tres puntos en X tiene un centro de Chebyshev en su envoltura convexa.*

2.2. Una caracterización de Amir errónea

Las propiedades (15.2) y (GK$_\infty$) motivaron que Amir diera el resultado que aparece a continuación. La condición de Garkavi y Klee se expresa mediante centros de Chebyshev de los conjuntos de tres puntos de X. La idea de Amir es trabajar en la misma línea, pero en lugar de utilizar todos los conjuntos de tres puntos, utiliza solamente los conjuntos de tres puntos *que están en la esfera unidad.*

Teorema 2.2.1 (Amir [1]). *Sea X un espacio normado de dimensión al menos tres. Entonces X es un espacio* IPS *si y sólo si se cumple la condición siguiente:*

(15.14) *Para cada tres puntos a_1, a_2, a_3 de norma uno en X, si $r_X(\{a_1, a_2, a_3\}) = \mathbf{1}$, entonces $\mathbf{0}$ está en la envoltura convexa de $\{a_1, a_2, a_3\}$.*

Puesto que a_1, a_2, a_3 tienen norma uno, $r_X(\{a_1, a_2, a_3\}) = \mathbf{1}$ señala que $\mathbf{0}$ es un centro de Chebyshev de $\{a_1, a_2, a_3\}$. Por lo tanto, la condición (15.14) se transforma en

(15.14') *Si a_1, a_2, a_3 tienen norma uno en X y $\mathbf{0}$ es centro de Chebyshev de $\{a_1, a_2, a_3\}$, entonces $\mathbf{0}$ está en su envoltura convexa.*

Nota 2.2.2. *El número* (15.14) *como en el libro de* Amir [1].

Cuando intentábamos entender bien la caracterización (15.14) descubrimos que no podíamos reproducir la prueba de Amir. Por supuesto, si X es un IPS, la condición (15.14) se cumple. El problema es cómo probar el inverso. Finalmente hemos descubierto que había un error: Veremos que el Teorema 2.2.1 de Amir *es falso.*

2.3. Dos caracterizaciones de Durier erróneas

La propiedad (15.14) de Amir motivó que Durier diera los resultados siguientes.

Teorema 2.3.1 (Parte (1) del Teorema 4.1 de [18]). *Supongamos que* $\dim(X) \geq 3$. *Sea* $n \geq 3$.

X es un IPS *si y sólo si, para cada conjunto A de n puntos en* S_X*, tenemos que*

$$0 \in Z(A) \;\Rightarrow\; 0 \in \mathrm{conv}(A).$$

Teorema 2.3.2 (Parte (1) del Teorema 4.2 de [18]). *Supongamos que* $\dim(X) \geq 3$. *Sea* $n \geq 3$ *y* γ *una n-norma monótona. X es un* IPS *si y sólo si, para cada conjunto A de n puntos en* S_X*, tenemos que*

$$\exists \;\; \omega \geq 0, \qquad 0 \in M_\omega^\gamma(A) \;\Rightarrow\; 0 \in \mathrm{conv}(A).$$

Puesto que estas caracterizaciones de Durier son unas extensiones de (15.14) de Amir y esta ultima es falsa, entonces las de Durier son *falsas* también.

2.4. ¿Dónde "falla" la demostración de Amir?

Expliquemos a continuación el problema que hemos encontrado en la demostración de Amir. Para la demostración del Teorema 2.2.1, Amir decía que "(15.14) *implica* (15.2) *es inmediato por el Lema* 15.1", que es el que aparece bajo la nota siguiente.

Nota 2.4.1. *La notación* $\mathrm{span}(s, \Delta)$ *significa el espacio vectorial generado por el punto s y el conjunto* Δ.

Lema 2.4.2 (Lema 15.1 de [1]). *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado. Si el conjunto* $\Delta = \{a_1, a_2, a_3\}$ *en X satisface* $r_X(\Delta) < r_{\mathrm{conv}(\Delta)}(\Delta)$*, entonces existe* $s \in X$ *tal que*

$$\begin{array}{ll} (i) & \|s - a_1\| = \|s - a_2\| = \|s - a_3\|, \\ (ii) & r(s, \Delta) = r_{\mathrm{span}(s,\Delta)}(\Delta) < r_{\mathrm{conv}(\Delta)}(\Delta). \end{array}$$

Como tanto el enunciado como la demostración de este lema presentan algunos dificultades, nos vamos a dedicar a ellos en detalle las subsecciones siguientes.

2.4.1. En torno al "Lema 15.1 de Amir"

En relación con este lema, resaltamos aquí dos cosas.

La primera, que su enunciado contiene una errata. Para ser más precisos, en [1] Amir dice $r(z, \Delta) = r_{\text{span}(z,\Delta)}(\Delta) < r_{\text{conv}(\Delta)}(\Delta)$ en vez de

$$r(p, \Delta) = r_{\text{span}(p,\Delta)}(\Delta) < r_{\text{conv}(\Delta)}(\Delta),$$

tal como lo hemos enunciado anteriormente. Pero el enunciado tal como está en [1] no tiene sentido. Es claramente falso:

Puesto que $z \in \Delta = \{x, y, z\}$, tendríamos

$$r(z, \Delta) = r_{\text{span}(z,\Delta)}(\Delta) < r_{\text{conv}(\Delta)}(\Delta) \leq r(z, \Delta),$$

lo que es imposible.

Leyendo la demostración que aparece en [1] resulta claro que la intención del autor era escribirlo tal como lo hemos escrito nosotros.

La segunda cosa que queremos resaltar sobre el lema se refiere a su demostración. Aunque la idea que empleó Amir en su demostración es cierta, tal como está expresada es bastante oscura. Además, contiene una errata también. Cuando dice que $r_{\text{conv}(\Delta)}(\Delta) > r_F(\Delta)$ para algún subespacio F de dimensión dos tal que $F \supset \Delta$, comete un error. Y esto porque, en dimensión dos por el corolario 1.13.5, se tiene que

$$r_{\text{conv}(\Delta)}(\Delta) = r_F(\Delta).$$

Puesto que la demostración de Amir de su Lema 15.1, como hemos dicho, es oscura y tiene una errata, vamos a ver aquí una demostración detallada.

Seguimos la idea de Amir, pero vamos a ver un resultado un poco más general que el suyo, que utilizaremos luego. De este resultado el Lema 15.1 de Amir será una consecuencia sencilla. Un lema previo nos servirá de ayuda.

Lema 2.4.3. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, sea $\Delta = \{a_1, a_2, a_3\}$ un conjunto en X y supongamos que Δ tiene un centro de Chebyshev s. Entonces el máximo $r(s, \Delta) = \max_{1\leq i\leq 3} \|a_i - s\|$ se alcanza por lo menos en dos puntos, es decir, existen $i_o, j_o \in \{1, 2, 3\}$, con $i_o \neq j_o$, tal que*

$$r(s, \Delta) = \max_{1\leq i\leq 3} \|a_i - s\| = \|a_{i_o} - s\| = \|a_{j_o} - s\|.$$

Demostración. Denotamos $r = r(s, \Delta)$ y suponemos por ejemplo que

$$\|s - a_1\| < \|s - a_3\| = r.$$

Debemos demostrar que $\|s - a_2\| = \|s - a_3\| = r$. Si asumimos que $\|s - a_2\| < \|s - a_3\| = r$, por la continuidad de la norma, existe $s' \in [s, a_3]$

tal que

$$\begin{aligned}\|s' - a_3\| &< \|s - a_3\|,\\ \|s' - a_2\| &< \|s - a_3\|,\\ \|s' - a_1\| &< \|s - a_3\|.\end{aligned}$$

Esto significa que $r(s', \Delta) < r(s, \Delta) = r$ cuál contradice que s es un centro de Chebyshev de Δ. □

Lema 2.4.4. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, y sea $\Delta = \{a_1, a_2, a_3\}$ un conjunto en X que tiene algún centro de Chebyshev.*
Si $r_X(\Delta) < r_{\mathrm{conv}(\Delta)}(\Delta)$, entonces Δ tiene un centro de Chebyshev x_0 que satisface

$$\|x_0 - a_1\| = \|x_0 - a_2\| = \|x_0 - a_3\|. \tag{2.1}$$

Demostración. Sea s un centro de Chebyshev del conjunto Δ que no está en su envoltura convexa. Denotamos $r = r(s, \Delta)$.

Supongamos que s no cumple (2.1). Por el Lema 2.4.3 podemos suponer, sin la pérdida de generalidad, que

$$\|s - a_1\| < \|s - a_2\| = \|s - a_3\| = r.$$

Nuestro objetivo ahora es encontrar otro centro de Chebyshev de Δ que no está en su envoltura convexa, y que satisface la condición (2.1).

Nótese primero que

$$\|a_2 + a_3\| \leq \|a_2 - s\| + \|s - a_3\| = 2r.$$

Por otra parte veamos que $\|a_2 + a_3\| = 2r$. Asumamos que esto no es el caso, entonces, puesto que $m = \frac{1}{2}(a_2 + a_3)$ es el punto mediado del segmento $[a_2, a_3]$, tenemos que

$$\|m - a_2\| = \|m - a_3\| < r.$$

En otras palabras, $m \in \overset{\circ}{B}(a_2, r) \cap \overset{\circ}{B}(a_3, r)$, donde $\overset{\circ}{B}(a, r)$ es la bola abierta de centro a y de radio r. Por lo tanto

$$[m, s) \subset \overset{\circ}{B}(a_2, r) \cap \overset{\circ}{B}(a_3, r).$$

Como $\|s - a_1\| < r$, entonces por la continuidad de la norma existe $\overline{s} \in [m, s)$ satisface

$$\|\overline{s} - a_1\| < r.$$

Por otra parte, tenemos $\overline{s} \in [m, s) \subset \overset{\circ}{B}(a_2, r) \cap \overset{\circ}{B}(a_3, r)$. Así que

$$\|\overline{s} - a_2\| < r \quad \text{y} \quad \|\overline{s} - a_3\| < r.$$

Sigue $r(\overline{s}, \Delta) < r(s, \Delta) = r$, cuál es una contradicción con el hecho de que s es un centro de Chebyshev de Δ. Esto demuestra que

$$\|a_2 - a_3\| = 2r,$$

y que

$$\|m - a_2\| = \|m - a_3\| = \frac{1}{2}\|a_2 - a_3\| = r.$$

Supongamos ahora $\|m - a_1\| \leq r$, entonces

$$\|m - a_1\| \leq \|m - a_2\| = \|m - a_3\| = r,$$

eso significa que m es un centro de Chebyshev de Δ, y como m está en la envoltura convexa de este triángulo, obtenemos una contradicción con el hecho de que $r_X(\Delta) < r_{\mathrm{conv}(\Delta)}(\Delta)$, por lo tanto

$$\|m - a_1\| > r.$$

La igualdad $\|a_2 - a_3\| = 2r$ implica que

$$B(a_2, r) \cap B(a_3, r) \subset \{x \in X \ : \ \|x - a_2\| = \|x - a_3\| = r\},$$

donde $B(a, r)$ es la bola cerrada de centro a y de radio r. Por tanto, como m, s pertenecen a $B(a_2, r) \cap B(a_3, r)$, conseguimos que

$$[m, s] \subset B(a_2, r) \cap B(a_3, r) \subset \{x \in X \ : \ \|x - a_2\| = \|x - a_3\| = r\}.$$

Para terminar consideramos una función f definida y continua sobre $[0, 1]$ de forma siguiente a cada $t \in [0, 1]$ asociamos

$$f(t) = \|t(s - a_1) + (1 - t)(m - a_1)\|,$$

tenemos $f(0) = \|m - a_1\| > r$ y $f(1) = \|s - a_1\| < r$, entonces por el Teorema de Bolzano existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que $f(t_0) = r$,

$$x_0 = t_0 s + (1 - t_0)m \in [m, s].$$

Por tanto

$$\|x_0 - a_1\| = \|x_0 - a_2\| = \|x_0 - a_3\| = r,$$

y además x_0 es un centro de Chebyshev de Δ. □

Ahora el "Lema 15.1 de Amir" es un simple corolario del Lema 2.4.4:

2.4.2. Demostración del "Lema 15.1 de Amir"

La condición $r_X(\Delta) < r_{\mathrm{conv}(\Delta)}(\Delta)$ implica que existe $x_0 \in X$ tal que

$$r(x_0, \Delta) < r_{\mathrm{conv}(\Delta)}(\Delta).$$

Tomemos $Y = \mathrm{span}(x_0, \Delta)$. Como $\dim(Y) < \infty$ (dimensión de Y es finito), entonces todo conjunto de tres puntos en Y tiene centro de Chebyshev en Y. Podemos aplicar el Lema 2.4.4. Por tanto existe $s \in Y$ centro de Chebyshev de Δ en Y tal que las condiciones (i) y (ii) del Lema 2.4.2 se cumplen.

2.4.3. La "demostración" que Amir dio de "(15.14) implica (15.2)"

En lo que sigue, reproducimos la demostración que Amir dio de "(15.14) implica (15.2)". En ella, y bajo su forma contrarrecíproca, dado un espacio X, se pretende demostrar que si existe un subespacio Y de dimensión dos, y un conjunto $\Delta = \{a_1, a_2, a_3\} \subset Y$ tal que $r_X(\Delta) \neq r_Y(\Delta)$, entonces existe un conjunto T, formado por tres puntos en la esfera unidad de X, tal que $\mathbf{0}$ es un centro de Chebyshev de T en X, y $\mathbf{0}$ no está en la envoltura convexa de T.

Se hace lo siguiente, supongamos que existen un subespacio Y de dimensión dos en X, y un conjunto $\Delta = \{a_1, a_2, a_3\} \subset Y$ tal que $r_X(\Delta) \neq r_Y(\Delta)$, es decir,

$$r_X(\Delta) < r_Y(\Delta) \leq r_{\mathrm{conv}(\Delta)}(\Delta).$$

Por el Lema 2.4.2 existe $s \in X$ tal que

$$\begin{array}{ll} (i) & \|s - a_1\| = \|s - a_2\| = \|s - a_3\|, \\ (ii) & r(s, \Delta) = r_{\mathrm{span}(s,\Delta)} < r_{\mathrm{conv}(\Delta)}(\Delta). \end{array}$$

La parte (ii) significa que s es un centro de Chebyshev de Δ en el subespacio $\mathrm{span}(s, \Delta)$, y $s \notin \mathrm{conv}(\Delta)$. Por la translación $x \longrightarrow \phi(x) = x - s$, se obtiene que $\mathbf{0}$ es un centro de Chebyshev del conjunto

$$\Delta_0 = \{a_1 - s, a_2 - s, a_3 - s\}$$

en $\mathrm{span}(s, \Delta)$, y $\mathbf{0} \notin \mathrm{conv}(\Delta_0)$. Si tomamos

$$u_1 = \frac{a_1 - s}{\|a_1 - s\|}\ , \quad u_1 = \frac{a_2 - s}{\|a_2 - s\|}\ , \quad u_1 = \frac{a_3 - s}{\|a_3 - s\|}\ .$$

Conseguimos que $\mathbf{0}$ sea un centro de Chebyshev en el subespacio $\mathrm{span}(s, \Delta)$, del conjunto $\mathrm{T} = \{u_1, u_2, u_3\}$ que está en la esfera unidad de X, y que $\mathbf{0}$ no esté en la envoltura convexa de T.

Hasta aquí todo funciona bien, es decir, tenemos la existencia de un conjunto T en la esfera unidad de X tal que $\mathbf{0}$ es su centro de Chebyshev en $\text{span}(s, \Delta)$, y $\mathbf{0}$ no está en la envoltura convexa de dicho conjunto. Sin embargo, el problema de esta demostración es tratar de demostrar que $\mathbf{0}$ es un centro de Chebyshev de T *en todo el espacio* X. Esto, en principio, no se puede garantizar.

Evidentemente, si $\dim(X) = 3$ entonces la idea anterior nos da la demostración de (15.14) implica (15.2). Veremos en la sección 1.6 en qué espacios, siguiendo la idea de Amir con alguna modificación del Lema 2.4.2, obtenemos también que (15.14) implica (15.2).

Con este problema en mente, hemos construido un ejemplo de un espacio normado que satisface la condición (15.14) sin que sea un IPS.

2.5. Contraejemplo a la caracterización (15.14) de Amir

Para construir nuestro ejemplo, necesitamos algunos resultados previos. Recordemos que si C es un conjunto convexo en un espacio vectorial X, el funcional de Minkowski (o gauge) μ_C asociada a C está definido para cada $x \in X$ por

$$\mu_C(x) = \inf\Big\{\rho > 0 \;:\; \frac{1}{\rho}x \in C\Big\}.$$

Vamos a usar lo fuertemente relacionados que están las (semi)normas y los funcionales de Minkowski de conjuntos convexos (véase por ejemplo 1.33, 1.34, 1.35 de [44]). En particular, utilizaremos el resultado bien conocido siguiente.

Lema 2.5.1. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y* $B_X = \{x \in X \;\; \|x\| \leq 1\}$ *su bola unidad, entonces*

$$\mu_{B_X}(x) = \|x\|$$

para cada $x \in X$.

Demostración. Por supuesto $\mu_{B_X}(0) = \|0\| = 0$. Ahora tomemos un vector $x \neq 0$. La igualdad $\big\|\frac{x}{\|x\|}\big\| = 1$ implica que $\frac{x}{\|x\|} \in B_X$, y $\mu_{B_X}(x) \leq \|x\|$. De otro lado, si $\frac{1}{\rho}x \in B_X$ esto significa que tenemos $\big\|\frac{1}{\rho}x\big\| = \frac{1}{\rho}\|x\| \leq 1$ y por lo tanto $\|x\| \leq \rho$. Así que $\|x\| \leq \mu_{B_X}(x)$. □

Podemos ahora probar nuestro lema principal. Su objetivo fundamental es el siguiente. Dados tres puntos de norma uno en un espacio normado, queremos ampliar el espacio normado pasando a otro "*mayor*", extendiendo la norma, de manera que en el nuevo espacio normado $\mathbf{0}$ *no* es centro de Chebyshev de estas tres puntos dados.

Lema 2.5.2. *Sea X un espacio vectorial y sea Y un hiperplano en X. Sea $\|\cdot\|$ una norma en Y y a_1, a_2, a_3 tres puntos deferentes que tienen norma uno en Y. Sea u un punto en $X \setminus Y$ y denotamos*

$$\alpha = \text{máx}\left\{\left\|\frac{a_i - a_j}{2}\right\| : 1 \leq i, j \leq 3\right\}.$$

Entonces existe una norma $\|\cdot\|_0$ en X tal que:

$$\begin{array}{lll} (i) & \|y\|_0 = \|y\| & \textit{para cada} \;\; y \in Y, \; y \\ (ii) & \|u - a_i\|_0 \leq \alpha & \textit{para cada} \;\; i = 1, 2, 3. \end{array}$$

Demostración. Sea B_Y la bola unidad cerrada de $(Y, \|\cdot\|)$, y tomemos

$$A = \bigcup_{i=1}^{3} \left\{ -\tfrac{1}{\alpha}(u - a_i), \tfrac{1}{\alpha}(u - a_i)\right\}, \quad \text{y} \quad B = \text{conv}(B_Y \cup A).$$

Esta claro que B es un conjunto equilibrado, absorbente y convexo en X además no contiene ningún subespacio no trivial. Por lo tanto, su *funcional de Minkowski* es una norma en X. Denotémosla $\|\cdot\|_0$. Obviamente, esta norma satisface (ii). Por lo tanto tenemos que demostrar solamente que satisface (i). Por eso hay que demostrar primero que B_y coincide con $B \cap Y$. Por supuesto, $B_Y \subseteq B \cap Y$. Por la otra inclusión. Note primero que B puede verla como la envoltura convexa de

$$B_Y \cup \text{conv}(A^+) \cup \text{conv}(A^-)$$

donde $A^+ = \{\frac{1}{\alpha}(u - a_1), \frac{1}{\alpha}(u - a_2), \frac{1}{\alpha}(u - a_3)\}$ y $A^- = -A^+$.

Sea $y \in B \cap Y$. Puesto y pertenece a B, existe $y_1 \in B_Y$, $y_2 \in \text{conv}(A^+)$ y $y_3 \in \text{conv}(A^-)$, y números no negativos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tal que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ y $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3$. Ahora, desde $y_2 \in \text{conv}(A^+)$ y $y_3 \in \text{conv}(A^-)$, deducimos que existen los números no negativos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, tal que $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = \sum_{i=1}^{3} \beta_i = 1$, $y_2 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \frac{1}{\alpha}(u - a_i)$ e $y_3 = \sum_{i=1}^{3} \beta_i \frac{1}{\alpha}(a_i - u)$. Por lo tanto, tenemos

$$y = \lambda_1 y_1 + \frac{\lambda_2}{\alpha} \sum_{i=1}^{3} \alpha_i (u - a_i) + \frac{\lambda_3}{\alpha} \sum_{j=1}^{3} \beta_j (a_j - u).$$

Así que

$$y = \lambda_1 y_1 + \frac{1}{\alpha}(\lambda_2 - \lambda_3) u + \frac{\lambda_3}{\alpha} \sum_{j=1}^{3} \beta_j a_j - \frac{\lambda_2}{\alpha} \sum_{i=1}^{3} \alpha_i a_i \; .$$

Desde y, y_1, a_1, a_2, a_3 pertenezcan a Y, y de u no pertenece a Y, se consigue que $\lambda_2 - \lambda_3 = 0$. Denotemos $\mu = \lambda_2 = \lambda_3$. Tenemos

$$y = \lambda_1 y_1 + \frac{\mu}{\alpha}\left(\sum_{j=1}^{3} \beta_j a_j - \sum_{i=1}^{3} \alpha_i a_i\right).$$

Por tanto $y = \lambda_1 y_1 + 2\mu y_0$, donde

$$y_0 = \frac{1}{2\alpha}\left(\sum_{j=1}^{3} \beta_j a_j - \sum_{i=1}^{3} \alpha_i a_i\right).$$

Para todo $i, j \in \{1, 2, 3\}$, puesto $y_{ij} = \frac{1}{2\alpha}(a_j - a_i)$. Es inmediato ver que

$$y_0 = \sum_{j=1}^{3} \beta_j \left(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i y_{ij}\right)$$

pero cada y_{ij} pertenece a B_Y, deducimos que y_0 pertenece a B_Y, también.

Ahora, desde la igualdad $y = \lambda_1 y_1 + 2\mu y_0$, y el hecho que $\lambda_1 + 2\mu = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, conseguimos que y pertenece a B_Y, como deseábamos. Finalmente, la igualdad $B \cap Y = B_Y$ implica que (i) se cumple. Note que dado $y \in Y$ y t un número real no nulo, esta claro que $ty \in B \cap Y$ si y solamente si $ty \in B$. Por tanto usando el Lema 2.5.1 obtenemos que para cada $y \in Y$

$$\begin{aligned} \|y\|_0 &= \inf\left\{\rho > 0 : \frac{1}{\rho} y \in B\right\} = \inf\left\{\rho > 0 : \frac{1}{\rho} y \in B \cap Y\right\} \\ &= \inf\left\{\rho > 0 : \frac{1}{\rho} y \in B_Y\right\} = \|y\|. \end{aligned}$$

□

Ahora agregamos la convexidad estricta al resultado precedente.

Lema 2.5.3. *Sea X un espacio vectorial y sea Y un hiperplano en X. Sea $\|\cdot\|$ una norma estrictamente convexa en Y y a_1, a_2, a_3 tres puntos diferentes que tienen norma uno en Y tal que $\mathbf{0} \notin \operatorname{conv}(\{a_1, a_2, a_3\})$. Sea u un punto en $X \setminus Y$ y denotamos*

$$\alpha = \text{máx}\left\{\left\|\frac{a_i - a_j}{2}\right\| \;:\; 1 \le i, j \le 3\right\}.$$

Entonces existe una norma estrictamente convexa $\|\cdot\|_s$ en X tal que:

(i) $\|y\|_s = \|y\|$ *para cada* $y \in Y$, *y*
(ii) $\|u - a_i\|_s < \frac{\alpha+1}{2}$ *para cada* $i = 1, 2, 3$.

Demostración. Según el Lema 2.5.2 existe una norma $\|\cdot\|_0$ en X verifica $\|y\|_0 = \|y\|$ para $y \in Y$ y $\|u - a_i\|_0 \le \alpha$ para $i = 1, 2, 3$. Entonces desde que Y es un hiperplano en X y u no pertenece a Y podemos definir en X la norma siguiente

$$|||y + \theta u||| = \left(\|y\|^2 + \theta^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

para $y \in Y$ y $\theta \in \mathbb{R}$. Esta norma es estrictamente convexa porque $\|\cdot\|$ es estrictamente convexa. Además, obviamente es una extensión de $\|\cdot\|$. Por otra parte, como $\mathbf{0} \notin \operatorname{conv}(\{a_1, a_2, a_3\})$, esta claro que $\mathbf{0} \neq a_i + a_j$ y $a_i \neq -a_j$ por $i, j = 1, 2, 3$. Por lo tanto, por la convexidad estricta de $\|\cdot\|$ se tiene que

$$\alpha < 1.$$

Tomamos un $\varepsilon > 0$ tal que

$$(1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon\sqrt{2} < \frac{1+\alpha}{2},$$

porque $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} (1-\lambda)\alpha + \lambda\sqrt{2} = \alpha < \frac{1+\alpha}{2}$.

Consideramos en X la norma siguiente

$$\|x\|_s = (1-\varepsilon)\|x\|_0 + \varepsilon |||x|||.$$

Esta norma es estrictamente convexa como consecuencia de la convexidad estricta de $|||\cdot|||$. Por otra parte, (i) se cumple porque $\|\cdot\|_0$ y $|||\cdot|||$ coinciden con $\|\cdot\|$ en Y.

Finalmente, para cada $i = 1, 2, 3$ tenemos

$$\|u - a_i\|_s \;=\; (1-\varepsilon)\|u - a_i\|_0 + \varepsilon|||u - a_i||| \leq (1-\varepsilon)\alpha + \varepsilon\sqrt{2} < \frac{1+\alpha}{2}$$

por lo tanto (ii) se tiene, también. □

Observación 2.5.4. *Como ya hicimos notar en la demostración anterior, gracias a la convexidad estricta de la norma tenemos $\alpha < 1$, y por tanto*

$$\frac{\alpha+1}{2} < 1.$$

Por esta última desigualdad, la parte (ii) del lema anterior implica que $\mathbf{0}$ no es centro de Chebyshev de $\{a_1, a_2, a_3\}$ en $(X, \|\cdot\|_s)$.

Podemos ahora dar la construcción de nuestro ejemplo.

Ejemplo: Existe un espacio normado real $(X, \|\cdot\|)$ tal que

(1) $(X, \|\cdot\|)$ *no* es un IPS.

(2) $(X, \|\cdot\|)$ *satisface* (15.14).

Utilizaremos la reformulación siguiente de (15.14) (o equivalente, (15.14')):

(15.14") *Si a_1, a_2, a_3 son tres puntos de norma uno en X tal que $\mathbf{0} \notin \operatorname{conv}(\{a_1, a_2, a_3\})$, entonces existe $u \in X$ tal que $\|u - a_i\| < 1$ para $i = 1, 2, 3$.*

2.5.1. La idea de la construcción del ejemplo

Primero explicaremos la idea de nuestra construcción. Tomamos como punto de partida un espacio normado estrictamente convexo de dimensión tres que no sea un IPS. Veremos en la sección 1.6 que para los espacios de dimisión finita, IPS es equivalente a (15.14”). Así que en el espacio tomado (15.14”) no se cumple. Por lo tanto, sabemos que en nuestro espacio existe lo que podemos llamar una “*mala terna* ” : es decir, tres puntos a_1, a_2, a_3 de norma uno en X tal que $\mathbf{0} \notin \mathrm{conv}(\{a_1, a_2, a_3\})$, y tales que no hay un $\boldsymbol{u}$ en nuestra espacio satisface $\|u - a_i\| < 1$ par $i = 1, 2, 3$. Pero deseamos que (15.14 ”) se cumpla, y no deseamos que “*mala terna* ” exista. Por eso podemos aplicar el Lema 2.5.3. Añadimos una dimensión a nuestro espacio de forma que a_1, a_2, a_3 ya no forman una “*mala terna* ”. Por supuesto esto no es suficiente porque nuestro espacio no solo tiene uno, si no tiene muchas “*malas ternas* ”. Usando la separabilidad del espacio podemos conseguir algo como la “*densidad* ” de la sucesión de “*malas ternas* ”, y esto nos conducirá a una construcción por inducción. Tenemos sin embargo un problema adicional: cada vez que añadimos una dimensión a nuestro espacio el conjunto de “*malas ternas* ” crece. Encontramos una construcción que soluciona estos problemas simultáneamente.

Comencemos con la construcción de nuestro ejemplo.

2.5.2. Construcción del ejemplo

Nuestro espacio X es el espacio vectorial de las sucesiones de números reales con una cantidad finita de términos no nulos. En este espacio vector consideramos el espacio vectorial de dimensión tres X_1 dado por

$$X_1 = \{(t_1, t_2, t_3, 0, 0, \dots) : t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}\}$$

que es un hiperplano en

$$X_2 = \{(t_1, t_2, t_3, t_4, 0, 0, \dots) : t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}\}.$$

En general, para cada número natural $n \geq 1$ que tomaremos

$$X_n = \{(t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}, t_{n+2}, 0, 0, \dots) : \quad t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}, t_{n+2} \in \mathbb{R}\}.$$

Así que

$$X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_n \subset X_{n+1} \subset \dots$$

y cada X_n es un hiperplano en X_{n+1}. El espacio X es la unión de esta sucesión creciente de estos espacios que tienen dimensión finita. Hemos dicho que tomamos como punto de partida “ *un espacio normado estrictamente convexo de dimensión tres y que no sea un* IPS ”. Tomamos en X_1 una norma estrictamente convexa no euclidiana, que denotamos por $\|\cdot\|_1$. Por supuesto, la norma $\|\cdot\|_1$ no tiene nada que ver con la norma de ℓ_1. (que no es estrictamente convexa). Por ejemplo, puede ser cualquiera de las normas de ℓ_p donde $1 < p < \infty$, $p \neq 2$.

Como la esfera unidad de $(X_1, \|\cdot\|_1)$ es separable, existe una sucesión

$$\left\{\left(a^1_{(1,k)}, a^2_{(1,k)}, a^3_{(1,k)}\right)\right\}_{k\geq 1}$$

de triples, de vectores que tienen norma uno en $(X_1, \|\cdot\|_1)$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ y cada triple (x^1, x^2, x^3) de vectores que tienen norma uno en $(X_1, \|\cdot\|_1)$, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|x^i - a^i_{(1,k)}\right\|_1 < \varepsilon$$

para $i = 1, 2, 3$. Claramente, podemos suponer que para cada $k \in \mathbb{N}$ las vectores $a^1_{(1,k)}, a^2_{(1,k)}, a^3_{(1,k)}$ son *linealmente independientes*. Por esto suposición tenemos $\mathbf{0} \notin \operatorname{conv}(\{a^1_{(1,k)}, a^2_{(1,k)}, a^3_{(1,k)}\})$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Para nuestra construcción inductiva, necesitamos una biyección π de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ verificando lo siguiente: para cada $n \in \mathbb{N}$, si denotamos $\pi(n) = (m, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tenemos $m \leq n$. Podemos tomar, por ejemplo, la enumeración usual de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, (véase por ejemplo, apéndice A: A6 de [11]): $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(3,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(4,1)$, $(5,1)$, $\ldots$

Ahora apliquemos el Lema 2.5.3 al espacio X_2. Tomamos X_1 como el hiperplano Y. La condición que verifica π garantiza que $\pi(1)$ tiene la forma $(1, k)$, por tanto el triple $(a^1_{\pi(1)}, a^2_{\pi(1)}, a^3_{\pi(1)})$ es un termino de la sucesión tomada arriba. Tomamos este triple, cuyos vectores son de norma uno, y $e_4 = (0, 0, 0, 1, 0, \ldots)$ como el punto u en $X \setminus Y$. Según el Lema, existe una norma estrictamente convexa $\|\cdot\|_2$ en X_2 tal que:

$$\begin{array}{lll} (i) & \|x\|_1 = \|x\|_2 & \text{para cada} \quad x \in X_1, \text{ y} \\ (ii) & \left\|e_4 - a^i_{\pi(1)}\right\|_2 < \frac{\alpha_{\pi(1)}+1}{2} & \text{para cada} \quad i = 1, 2, 3 \ , \end{array}$$

donde

$$\alpha_{\pi(1)} = \text{máx}\left\{\left\|\frac{a^i_{\pi(1)} - a^j_{\pi(1)}}{2}\right\|_1 : \ 1 \leq i, j \leq 3\right\}.$$

Repitamos el procedimiento anterior con $(X_2, \|\cdot\|_2)$. Existe una sucesión

$$\left\{\left(a^1_{(2,k)}, a^2_{(2,k)}, a^3_{(2,k)}\right)\right\}_{k\geq 1}$$

de triples, de vectores linealmente independientes, y que tienen norma uno en $(X_2, \|\cdot\|_2)$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ y cada triple (x^1, x^2, x^3) de vectores que tienen norma uno en $(X_2, \|\cdot\|_2)$, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|x^i - a^i_{(2,k)}\right\|_2 < \varepsilon$$

para $i = 1, 2, 3$. Note una vez más que la independencia lineal garantiza que $\mathbf{0} \notin \operatorname{conv}(\{a^1_{(2,k)}, a^2_{(2,k)}, a^3_{(2,k)}\})$. Por la condición que verifica π, el par $\pi(2)$ tiene cualquier forma $(1, k)$ o la forma $(2, k)$. Por lo tanto el triple $(a^1_{\pi(2)}, a^2_{\pi(2)}, a^3_{\pi(2)})$ es termino de las dos sucesiones tomadas arriba, y en cualquier caso las $a^i_{\pi(2)}$ tienen norma uno $(X_2, \|\cdot\|_2)$.

El Lema precedente nos garantiza la existencia de una norma $\|\cdot\|_3$ en X_3 estrictamente convexa tal que

$$\begin{array}{lll} (i) & \|x\|_2 = \|x\|_3 & \text{para cada} \quad x \in X_2 \ , \ \text{y} \\ (ii) & \left\| e_5 - a^i_{\pi(2)} \right\|_3 < \frac{\alpha_{\pi(2)}+1}{2} & \text{para cada} \quad i = 1, 2, 3, \end{array}$$

donde $e_5 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, \ldots)$, y

$$\alpha_{\pi(2)} = \text{máx}\left\{ \left\| \frac{a^i_{\pi(2)} - a^j_{\pi(2)}}{2} \right\|_2 : \ 1 \leq i, j \leq 3 \right\}.$$

Entonces, por la inducción, conseguimos en cada espacio vectorial X_n una norma $\|\cdot\|_n$ estrictamente convexa y una sucesión

$$\left\{ \left(a^1_{(n,k)}, a^2_{(n,k)}, a^3_{(n,k)} \right) \right\}_{k \geq 1}$$

de triples linealmente independientes y de norma uno en $(X_n, \|\cdot\|_n)$ tal que para cada triple (x^1, x^2, x^3) de norma uno en $(X_n, \|\cdot\|_n)$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| x^i - a^i_{(n,k)} \right\|_n < \varepsilon$$

para $i = 1, 2, 3$. Por esa construcción tenemos también:

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, la norma $\|\cdot\|_{n+1}$ es una extensión de $\|\cdot\|_n$, es decir, $\|x\|_{n+1} = \|x\|_n$ para todo $x \in X_n$, y

(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| e_{n+3} - a^i_{\pi(n)} \right\|_{n+1} < \frac{\alpha_{\pi(n)} + 1}{2}$$

para $i = 1, 2, 3$, donde $e_{n+3} = (\overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{n+2}, 1, 0, 0, \ldots)$ y

$$\alpha_{\pi(n)} = \text{máx}\left\{ \left\| \frac{a^i_{\pi(n)} - a^j_{\pi(n)}}{2} \right\|_n : \ 1 \leq i, j \leq 3 \right\}.$$

Como sabemos $\pi(n)$ tiene la forma (m, k) donde $1 \leq m \leq n$, los vectores $a^i_{\pi(n)}$ tienen norma uno en alguno de los espacios

$$(X_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (X_n, \|\cdot\|_n).$$

Por otra parte, puesto que cada norma es una extensión del anterior, podemos asegurar que $a^i_{\pi(n)}$ tienen norma uno en $(X_n, \|\cdot\|_n)$.

En $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, definimos una norma de forma siguiente

$$\|x\| = \|x\|_n$$

para $x \in X$. Esta norma coincide con $\|\cdot\|_n$ en cada X_n. Por lo tanto, esa norma es estrictamente convexa por definición.

Como $(X_1, \|\cdot\|_1)$ es un subespacio de $(X, \|\cdot\|)$, y que no es un IPS, esta claro que $(X, \|\cdot\|)$ tampoco es un IPS. Por lo tanto, satisface **(1)**.

Falta solamente demostrar que también **(2)** se cumple. Veamos que (15.14 ' ') está satisfecho. Sea (a^1, a^2, a^3) un triple de vectores que tienen norma uno en $(X, \|\cdot\|)$ tal que $\mathbf{0} \notin \operatorname{conv}(\{a^1, a^2, a^3\})$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que (a^1, a^2, a^3) es un triple unitario de vectores en $(X_m, \|\cdot\|_m)$. Como $\mathbf{0} \notin \operatorname{conv}(\{a^1, a^2, a^3\})$ y $\|\cdot\|$ es estrictamente convexo, tenemos

$$\alpha = \text{máx}\left\{\left\|\frac{a^i - a^j}{2}\right\| :\ 1 \leq i, j \leq 3\right\} < 1\ .$$

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha + 3\varepsilon < 1$, y sea $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|a^i - a^i_{(m,k)}\right\|_m = \left\|a^i - a^i_{(m,k)}\right\| < \varepsilon$$

para $i = 1, 2, 3$. Es inmediato ver que $\alpha_{(m,k)} < \alpha + \varepsilon$. Tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\pi(n) = (m, k)$. Recordamos que $m \leq n$. Por **(b)**, tenemos

$$\left\|e_{n+3} - a^i_{\pi(n)}\right\|_{n+1} = \left\|e_{n+3} - a^i_{(m,k)}\right\| < \frac{\alpha_{(m,k)} + 1}{2}\ ,$$

y por lo tanto, para $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}
\left\|a^i - e_{n+3}\right\| &\leq \left\|a^i - a^i_{(m,k)}\right\| + \left\|a^i_{(m,k)} - e_{n+3}\right\| \\
&< \varepsilon + \tfrac{\alpha_{(m,k)}+1}{2} \\
&< \varepsilon + \tfrac{\alpha+\varepsilon+1}{2} = \tfrac{\alpha+3\varepsilon+1}{2} < 1.
\end{aligned}$$

2.6. ¿Cuándo la condición (15.14) de Amir caracteriza un IPS?

Aquí vamos a probar siguiendo la idea de Amir, que la condición (15.14) implica que X es un IPS cuando cada conjunto de tres puntos en X tiene un centro de Chebyshev (por ejemplo si dimensión de X es finito, si X es reflexivo,...).

Presentamos ahora el Teorema de Amir con un hipótesis añadida.

Teorema 2.6.1 (Teorema (15.14) de [1] "corregido"). *Sea X un espacio normado de dimensión al menos tres. Supongamos que cada conjunto en X de tres puntos tiene un centro de Chebyshev. Entonces X es un espacio* IPS *si y sólo si se cumple la condición siguiente:*

(15.14) *Para cada tres puntos a_1, a_2, a_3 de norma uno en X, si $r_X(\{a_1, a_2, a_3\}) = 1$, entonces $\mathbf{0}$ está en la envoltura convexa de $\{a_1, a_2, a_3\}$.*

Demostración. Supongamos que X no es un IPS, entonces por el Teorema 2.1.2 existe un subespacio Y de X de dimensión dos y existe un triángulo $\Delta = \{a_1, a_2, a_3\} \subset Y$ tal que

$$r_X(\Delta) < r_{\mathrm{conv}(\Delta)}(\Delta).$$

Por el Lema 2.4.4 existe un centro de Chebyshev x_0 del triángulo Δ que no está en su envoltura convexa y que satisface

$$\|x_0 - a_1\| = \|x_0 - a_2\| = \|x_0 - a_3\|.$$

Denotamos ahora $\overline{a}_i = \frac{x_0 - a_i}{\|x_0 - a_i\|}$ para $i = 1, 2, 3$ y $\mathrm{T} = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3\}$. Esta claro que el triángulo T está en la esfera unidad de X. Como $x_0 \notin \mathrm{conv}(\Delta)$ conseguimos con una translación que, $\mathbf{0}$ no pertenece a la envoltura convexa de T y además $\mathbf{0}$ es un centro de Chebyshev de T en X, lo que concluí nuestra prueba. □

Corolario 2.6.2. *Sea X un espacio normado de dimensión al menos tres. Si* $\dim(X) < \infty$ *o X reflexivo, entonces X es un* IPS *si y sólo si se cumple la condición* (15.14).

2.7. Dos caracterizaciones de IPS mediante centros de Chebyshev de puntos de norma uno

Después de probar que la condición (15.14) de Amir no caracteriza un IPS es natural preguntarse si es posible modificar tal condición de manera que sí lo haga. Es decir, ¿podemos dar una caracterización expresada exclusivamente en términos del centro de Chebyshev de conjuntos de tres puntos *de norma uno*?, o más concretamente, ¿podemos dar una caracterización del tipo (GK_∞) del Teorema 2.1.3 de Garakavi y Klee *pero considerando solamente los puntos de norma uno*? y en la misma línea, ¿se puede añadir un requisito adicional a dicha condición de Amir a fin de obtener una caracterización de IPS?

En lo que sigue presentamos dos caracterizaciones de los IPS obtenidas al hilo de las preguntas mencionadas anteriormente. Para probar estos resultados expongamos un lema que será útil en la demostración. Tal lema está inspirado por el Lema 15.1 de [1].

Lema 2.7.1. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $\Delta = \{a_1, a_2, a_3\}$ un conjunto en X que tiene algún centro de Chebyshev. Entonces, se tiene uno de los asertos siguientes:*

(a) *Δ tiene un centro de Chebyshev equidistante a las tres puntos a_1, a_2, a_3, es decir, existe $s_o \in Z(\Delta)$ tal que*

$$\|a_1 - s_o\| = \|a_2 - s_o\| = \|a_3 - s_o\|.$$

(b) *Δ tiene un centro de Chebyshev en el punto medio de uno de las segmentos formados por a_1, a_2, a_3, es decir, existen $i_o, j_o \in \{1, 2, 3\}$ distintos tal que $\frac{a_{i_o}+a_{j_o}}{2} \in Z(\Delta)$.*

Demostración. Supongamos que (a) no se cumple. Tomamos $s \in Z(\Delta)$ y denotamos $r = r(s, \Delta)$. Por el Lema 2.4.3 podemos suponer, sin la pérdida de generalidad, que

$$\|s - a_1\| < \|s - a_2\| = \|s - a_3\| = r.$$

Nuestro objetivo ahora es demostrar que $m = \frac{1}{2}(a_2 + a_3)$ es un centro de Chebyshev de Δ. Esto terminará la prueba.

Notemos primero que

$$\|a_2 + a_3\| \leq \|a_2 - s\| + \|s - a_3\| = 2r.$$

Por otra parte veamos que $\|a_2 + a_3\| = 2r$. Asumamos que esto no es el caso, entonces, puesto que m es el punto mediano del segmento $[a_2, a_3]$, tenemos que

$$\|m - a_2\| = \|m - a_3\| < r.$$

En otras palabras, $m \in \overset{\circ}{B}(a_2, r) \cap \overset{\circ}{B}(a_3, r)$, por lo tanto

$$[m, s) \subset \overset{\circ}{B}(a_2, r) \cap \overset{\circ}{B}(a_3, r).$$

Como $\|s - a_1\| < r$, entonces existe $\overline{s} \in [m, s)$ satisface

$$\|\overline{s} - a_1\| < r.$$

Por otra parte, tenemos $\overline{s} \in [m, s) \subset \overset{\circ}{B}(a_2, r) \cap \overset{\circ}{B}(a_3, r)$. Por lo tanto

$$\|\overline{s} - a_2\| < r \quad \text{y} \quad \|\overline{s} - a_3\| < r.$$

Tenemos que $r(\overline{s}, \Delta) < r(s, \Delta) = r$, cuál es una contradicción con el hecho de que s es un centro de Chebyshev de Δ. Esto demuestra que

$$\|a_2 - a_3\| = 2r$$

y que

$$\|m - a_2\| = \|m - a_3\| = \frac{1}{2}\|a_2 - a_3\| = r.$$

Demostremos ahora que m es un centro de Chebyshev del conjunto Δ. Si $\|m - a_1\| \leq r$, la conclusión está clara. Por tanto asumimos que $\|m - a_1\| > r$, y decíamos una contradicción.

La igualdad $\|a_2 - a_3\| = 2r$ implica que

$$B(a_2, r) \cap B(a_3, r) \subset \{x \in X \ : \ \|x - a_2\| = \|x - a_3\| = r\}.$$

Por tanto, como m, s pertenecen a $B(a_2, r) \cap B(a_3, r)$, Sigue

$$[m, s] \subset B(a_2, r) \cap B(a_3, r) \subset \{x \in X \ : \ \|x - a_2\| = \|x - a_3\| = r\}.$$

La función $x \mapsto \|x - a_1\|$ toma en m un valor mayor que r, y en s un valor más pequeño que r, por lo tanto, se tiene que, por el Teorema de Bolzano, en un cierto punto $s_o \in [m, s]$, tenemos que $\|s_o - a_1\| = r$. Pero $[m, s] \subset B(a_2, r) \cap B(a_3, r) \subset \{x \in X \ : \ \|x - a_2\| = \|x - a_3\| = r\}$ implica que

$$\|s_o - a_1\| = \|s_o - a_2\| = \|s_o - a_3\| = r.$$

Ésta es la contradicción deseada porque estamos asumiendo que "(a) no cumple". $\square$

Presentamos ahora la primera caracterización nueva de un IPS.

Teorema 2.7.2. *Sea X un espacio normado de dimensión al menos tres. Entonces X es un espacio* IPS *si y sólo si se cumple la condición siguiente:*

$\left(\mathrm{GK}_\infty^S\right)$ *Cada conjunto de tres puntos en la esfera unidad de X tiene un centro de Chebyshev en su envoltura convexa.*

Demostración. Está claro que si X es un IPS, la condición $\left(\mathrm{GK}_\infty^S\right)$ se cumple. Recíprocamente, supongamos que X no es un IPS. Por el Teorema de Garkavi-Klee, esto significa que (GK_∞) no se cumple. Podemos encontrar un conjunto $\Delta = \{a_1, a_2, a_3\}$ en X tal que $Z(\Delta) \cap \mathrm{conv}(\Delta) = \emptyset$. Por lo tanto existe $y_0 \in X \setminus \mathrm{conv}(\Delta)$, tal que

$$r(y_0, \Delta) = \max_{1 \leq i \leq 3} \|a_i - y_0\| < r(x, \Delta) \quad \text{para todo} \ \ x \in \mathrm{conv}(\Delta).$$

Denotemos por Y el subespacio lineal generado por $\{a_1, a_2, a_3, y_0\}$, y sea $s \in Y$ un centro de Chebyshev de $\Delta = \{a_1, a_2, a_3\}$ en el subespacio Y de dimensión finita, es decir

$$r(s, \Delta) = \max_{1\le i\le 3} \|a_i - s\| \le r(y, \Delta) \quad \text{para todo} \;\; y \in Y.$$

En particular, tomando $y = y_0$ deducimos que

$$r(s, \Delta) \le r(y_0, \Delta) < r(x, \Delta) \quad \text{para todo} \;\; x \in \operatorname{conv}(\Delta). \tag{2.2}$$

Esta desigualdad implica que $s \notin \operatorname{conv}(\Delta)$. Por lo tanto, la condición (b) en el Lema 2.7.1 no se puede satisfacer, y así que su condición (a) se cumple. Por lo tanto podemos asumir que

$$r(s, \Delta) = \|a_1 - s\| = \|a_2 - s\| = \|a_3 - s\| \le r(x, \Delta) \quad \text{para todo} \;\; x \in Y.$$

Denotamos $r(s, \Delta) = r$ y tomamos $u_1 = \frac{a_1 - s}{r}$, $u_2 = \frac{a_2 - s}{r}$, $u_3 = \frac{a_3 - s}{r}$. Entonces $\Delta_0 = \{u_1, u_2, u_3\}$ es un triángulo en la esfera unidad de X. Observamos que Δ_0 se obtiene de Δ con una translación y una homotecia: para ser exactos $\Delta_0 = \phi(\Delta)$, donde $\phi(x) = \frac{x-s}{r}$. Así pues, por una verificación directa, conseguimos de (2.2) que

$$r(\mathbf{0}, \Delta_0) = r(\phi(s), \phi(\Delta)) < r(\phi(x), \phi(\Delta)) \quad \text{para todo} \;\; x \in \operatorname{conv}(\Delta).$$

Por tanto

$$r(\mathbf{0}, \Delta_0) < r(z, \Delta_0) \quad \text{para todo} \;\; x \in \operatorname{conv}(\Delta_0).$$

Por supuesto, esto implica que Δ_0 no tiene ningún centro de Chebyshev en su envoltura convexa, y éste significa que $\left(\mathrm{GK}_\infty^S\right)$ no se cumple.

$\square$

Aquí se da la segunda caracterización nueva de un IPS.

Teorema 2.7.3. *Sea X un espacio normado de dimensión al menos tres. Entonces X es un espacio* IPS *si y sólo si se cumple la condición siguiente:*

$\left(\mathrm{A}_\infty^*\right)$ *Si a_1, a_2, a_3 tienen norma uno en X, entonces el conjunto $\{a_1, a_2, a_3\}$ tiene algún centro de Chebyshev, y si $\mathbf{0}$ es su centro de Chebyshev, entonces $\mathbf{0}$ está en su envoltura convexa.*

Demostración. Está claro que si X es un IPS, la condición $\left(\mathrm{A}_\infty^*\right)$ se cumple. Por otra parte, probemos que $\left(\mathrm{A}_\infty^*\right)$ implica $\left(\mathrm{GK}_\infty^S\right)$. Sea $\Delta = \{a_1, a_2, a_3\}$ un conjunto de tres puntos en la esfera unidad de X. Deseamos demostrar que $Z(\Delta) \cap \operatorname{conv}(\Delta) \neq \emptyset$. La hipótesis implica que $Z(\Delta) \neq \emptyset$. Por tanto estamos en uno de los casos (a) o (b) descritos en el Lema 2.7.1. Si estamos en caso (b) entonces claramente $Z(\Delta) \cap \mathrm{conv}(\Delta) \neq \emptyset$, supongamos que estamos en caso (a). Esto significa que existe $s_o \in Z(\Delta)$ tal que

$$r(s_o, \Delta) = \|a_1 - s_o\| = \|a_2 - s_o\| = \|a_3 - s_o\|.$$

Denotamos $r(s_o, \Delta) = r$ y tomamos $u_1 = \frac{a_1 - s_o}{r}$, $u_2 = \frac{a_2 - s_o}{r}$, $u_3 = \frac{a_3 - s_o}{r}$. Entonces $\Delta_0 = \{u_1, u_2, u_3\}$ es un triángulo en la esfera unidad de X. Observamos que Δ_0 se obtiene de Δ con una translación y una homotecia: para ser exacto $\Delta_0 = \phi(\Delta)$, donde $\phi(x) = \frac{x - s_o}{r}$. Por lo tanto, una verificación directa demuestra que $\phi(s_o) = \mathbf{0} \in Z(\Delta_0)$. Nuestra hipótesis implica que $\phi(s_o) = \mathbf{0} \in \mathrm{conv}(\Delta_0) = \mathrm{conv}(\phi(\Delta))$. Por supuesto, sigue que $s_o \in \mathrm{conv}(\Delta)$. Por lo tanto conseguimos $Z(\Delta) \cap \mathrm{conv}(\Delta) \neq \emptyset$, como deseábamos.

$\square$

En el diagrama siguiente, resumimos las caracterizaciones de los espacios IPS, obtenidas usando algunas propiedades geométricas del conjunto formado por los centros de Chebyshev de un conjunto de tres puntos.

Sea X un espacio normado de dimensión al menos tres. Entonces tenemos que

$$\begin{array}{ccccc}
X \text{ satisface } (\mathrm{GK}_\infty) & \Longleftrightarrow & X \text{ satisface } \left(\mathrm{GK}_\infty^S\right) & \Longleftrightarrow & X \text{ satisface } \left(\mathrm{A}_\infty^*\right) \\
& & \Updownarrow & & \\
& & X \text{ es un IPS} & & \\
& & \Downarrow \not\Uparrow & & \\
& & X \text{ satisface } (15.14) & &
\end{array}$$

Capítulo 3

Caracterización de IPS mediante centros de Fermat

3.1. Una caracterización de IPS análoga a la de Garkavi y Klee

Recordemos aquí la caracterización de Garkavi y Klee:
Un espacio es IPS si y sólo si satisface la propiedad siguiente:

(GK_∞) Cada conjunto de tres puntos en X tiene un centro de Chebyshev en su envoltura convexa.

Si sustituimos en (GK_∞) "centros de Chebyshev" por "centros de Fermat" se obtiene la propiedad siguiente:

(GK_1) Cada conjunto de tres puntos en X tiene un centro de Fermat en su envoltura convexa.

De manera natural surgió el problema de decidir si la propiedad (GK_1) caracteriza los IPS.

Este problema fue presentado como problema abierto en innumerables trabajos (destaquemos, por ejemplo, [6] (página 274), [15], [57]).

La respuesta de dicha pregunta ha resistido hasta el año 2002, y fue respondida afirmativamente por Benítez, Fernández y Soriano en [5]. Recordemos aquí este resultado.

Teorema 3.1.1 (Teorema 15 de [5]). *Sea X un espacio normado de dimensión al menos tres. Entonces X es un* IPS *si y sólo si se cumple la condición siguiente:*

(GK_1) *Cada conjunto de tres puntos en X tiene un centro de Fermat en su envoltura convexa.*

3.2. Dos caracterizaciones de IPS mediante centros de Fermat de puntos de norma uno

Hemos visto que en el Teorema 2.1.3 de Garkavi y Klee cambiamos “centros de Chebyshev” por “centros de Fermat” seguimos teniendo una caracterización de los IPS: es el Teorema 3.1.1 de Benítez, Fernández y Soriano.

Es natural preguntarse si también podemos cambiar “centros de Chebyshev” por “centros de Fermat” en las caracterizaciones (GK_∞^S) y (A_∞^*) del capítulo anterior.

Veremos en esta sección que la respuesta es afirmativa (Teoremas 3.2.1 y 3.2.2). Así quedara claro que también ahora podemos dar caracterizaciones en las que aparecen solamente ternas de puntos de la esfera unidad.

Teorema 3.2.1. *Sea X un espacio normado de dimensión al menos tres. Entonces X es un espacio* IPS *si y sólo si se cumple la condición siguiente:*

$\left(\mathrm{GK}_1^S\right)$ *Cada conjunto de tres puntos en la esfera unidad de X tiene un centro de Fermat en su envoltura convexa.*

Teorema 3.2.2. *Sea X un espacio normado de dimensión al menos tres. Entonces X es un espacio* IPS *si y sólo si se cumple la condición siguiente:*

$\left(\mathrm{A}_1^*\right)$ *Si a_1, a_2, a_3 tienen norma uno en X, entonces el conjunto $\{a_1, a_2, a_3\}$ tiene algún centro de Fermat, y si $\mathbf{0}$ es su centro de Fermat, entonces $\mathbf{0}$ está en su envoltura convexa.*

Pero para probar estas teoremas necesitamos un trabajo previo, que hacemos es la sección siguiente.

3.3. Descripción geométrica del conjunto de los centros de Fermat

Una descripción geométrica del conjunto de los centros de Fermat, en un espacio de dimensión finita, fue obtenida por Durier y Michelot, usando técnicas de análisis convexo (véase [19]). En esta sección recordemos algunos resultados (véase [16] y [18]) de descripción geométrica de tal conjunto en un espacio normado arbitrario (de dimensión finita o infinita) debidos a Durier, basados en la teoría de *aproximación óptima*.

Una aproximación óptima se define de la forma siguiente. Se dice que un punto y_0 en un subespacio cerrado Y de X es una *aproximación óptima* de $x \in X$ a Y, si

$$\|x - y_0\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\|,$$

y se denota el conjunto de los aproximaciones óptimas de x a Y por

$$P_Y(x) = \Big\{ y \in Y : \ \|x - y\| = \inf_{z \in Y} \|x - z\| \Big\}.$$

El conjunto $P_Y(x)$ puede ser vacío. Por supuesto si Y es un subespacio de dimensión finita, entonces $P_Y(x)$ no es vacío.

Recordemos a continuación una caracterización del punto de aproximación óptimo. Tal caracterización se obtiene por un uso simple del teorema de Hahn-Banach, y resultará útil para demostrar el resultado de Durier.

Teorema 3.3.1. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de normado, Y un subespacio cerrado de X, $x \in X \setminus Y$ y sea $y_0 \in Y$. Tenemos $y_0 \in P_Y(x)$ si y sólo si existe $f \in X^*$ con las características siguientes:*

$$\begin{cases} \bullet \quad \|f\| = 1, \\ \bullet \quad f(y) = 0 \quad \textit{para todo} \;\; y \in Y, \\ \bullet \quad f(x - y_0) = \|x - y_0\|. \end{cases}$$

Demostración. véase [47] página 18. □

Para un estudio más profundo de esta teoría de mejor aproximación consultase, por ejemplo, [27] o [47].

Aquí daremos dos resultados de Durier y sus demostraciones. Aunque la demostración del primero está detallada en [16] y del segundo en [18], por comodidad al lector la recordamos aquí. Para ello, introducimos algunas notaciones que figuran en [16].

Sea $f \in B_{X^*}$. Denotemos por $N(f)$ el cono convexo

$$N(f) = \{x \in X \ : \ f(x) = \|x\|\}.$$

Se denota por X^n $(n \geq 2)$ al espacio producto dotado de la norma siguiente.

$$\text{Para} \;\; (x_1, \ldots, x_n) \in X^n \ , \quad |||(x_1, \ldots, x_n)|||_1 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|.$$

Y se denota por $\left(X^*\right)^n$ a su espacio dual dotado de la norma dual siguiente.

$$\text{Para} \;\; (f_1, \ldots, f_n) \in \left(X^*\right)^n \ , \quad |||(f_1, \ldots, f_n)|||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \|f_i\|,$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma del espacio dual X^* de X.

El producto escalar en la dualidad entre $\left(X^*\right)^n$ y X^n será definido para cada $F = (f_1, \ldots, f_n) \in \left(X^*\right)^n$ y cada $u = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ por

$$\ll F, u \gg = \sum_{i=1}^{n} < f_i, x_i >$$

donde $< \cdot, \cdot >$ se denota al producto escalar en la dualidad entre X^* y X.

Observación 3.3.2. *Sea $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ un conjunto en X. Se verifica inmediatamente que*

$$x_0 \in Z^1(A) \quad \textit{si y sólo si} \quad (x_0, \dots, x_0) \in P_{\mathrm{diag}(X^n)}(a_1, \dots, a_n).$$

Donde

$$\mathrm{diag}(X^n) = \big\{\underbrace{(x, \dots, x)}_{n} \ : \ x \in X\big\}.$$

Teorema 3.3.3 (Teorema 2 de [16]). *Sea $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ un conjunto finito en X.*

(1) *Si $Z^1(A)$ no es vacío, entonces existe $(f_1, \dots, f_n) \in (X^*)^n$ que satisface $\max\limits_{1\le i\le n} \|f_i\| = 1$ y $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i = 0$ tal que*

$$Z^1(A) = \bigcap_{i=1}^{n} \big(a_i - N(f_i)\big)$$

(2) *Si existe $(f_1, \dots, f_n) \in (X^*)^n$ satisface $\max\limits_{1\le i\le n} \|f_i\| = 1$ y $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i = 0$ tal que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \big(a_i - N(f_i)\big) \neq \emptyset$, entonces*

$$\bigcap_{i=1}^{n} \big(a_i - N(f_i)\big) = Z^1(A).$$

Demostración. (1) Puesto que $Z^1(A)$ no es vacío, tomemos un punto $x \in Z^1(A)$. Esto significa que

$$(x, \dots, x) \in P_{\mathrm{diag}(X^n)}(a_1 \dots, a_n).$$

Por el Teorema 3.3.1, esto es equivalente a la existencia de $(f_1, \dots, f_n) \in (X^*)^n$ tal que

$$\begin{aligned}
&|||(f_1, \dots, f_n)|||_\infty = \max_{1\le i\le n} \|f_i\| = 1,\\
&\ll (f_1, \dots, f_n), (y, \dots, y) \gg = \sum_{i=1}^{n} f_i(y) = 0 \quad \text{para todo} \quad y \in X,\\
&\ll (f_1, \dots, f_n), (a_1 - x, \dots, a_n - x) \gg = \sum_{i=1}^{n} f_i(a_i - x)\\
&\qquad\qquad = |||(a_1 - x, \dots, a_n - x)|||_1 = \sum_{i=1}^{n} \|a_i - x\|. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Como $\|f_i\| \leq 1$ para cada $i = 1, \ldots, n$, la igualdad (3.1) es equivalente a

$$f_i(a_i - x) = \|a_i - x\| \quad \text{para cada } i = 1, \ldots, n. \tag{3.2}$$

De otras palabras la igualdad (3.2) es equivalente a

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} \big(a_i - N(f_i)\big).$$

Esto concluye la prueba de la primera parte.

(2) Supongamos que existe $(f_1, \ldots, f_n) \in (X^*)^n$ satisface $\max\limits_{1\leq i\leq n} \|f_i\| = 1$ y $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i = 0$ tal que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \big(a_i - N(f_i)\big) \neq \emptyset$.

Sea $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \big(a_i - N(f_i)\big)$. Esto es equivalente a

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(a_i - x) = \sum_{i=1}^{n} \|a_i - x\|.$$

Por el Teorema 3.3.1, esto es equivalente a

$$(x, \ldots, x) \in P_{\mathrm{diag}(X^n)}(a_1 \ldots, a_n). \tag{3.3}$$

Dicho de otras palabras (6.2) es equivalente a decir que $x \in Z^1(A)$. $\square$

Corolario 3.3.4 (Corolario 2.3 de [18]). *Sea* $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ *y* A' *el conjunto formado por los puntos* a_i' *donde* $a_i' = \lambda_i a_i$ *para* $i = 1, \ldots, n$. *Supongamos que* $\mathbf{0} \in Z^1(A)$. *Entonces*

(1) *Si* $\lambda_i > 0$ *para todo* i, *entonces* $\mathbf{0} \in Z^1(A')$.

(2) *Si* $0 < \lambda_i \leq 1$ *para todo* i, *entonces* $\mathbf{0} \in Z^1(A') \subset Z^1(A)$.

(3) *Si* $\lambda_i = \lambda > 0$ *para todo* i, *entonces* $Z^1(A') = \lambda Z^1(A)$.

Demostración. Como $\mathbf{0} \in Z^1(A)$, tenemos por el Teorema 3.3.3, la existencia de $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ que satisfacen $\max\limits_{1\leq i\leq n} \|f_i\| = 1$ y $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i = 0$ tal que $Z^1(A) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \big(a_i - N(f_i)\big)$. Así que $\mathbf{0} \in a_i - N(f_i)$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Por tanto $\mathbf{0} = a_i - b_i$ donde $b_i \in N(f_i)$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Luego

$$f_i(a_i) = f_i(b_i) = \|b_i\| = \|a_i\| = 1,$$

para cada $i = 1, \ldots, n$. Además como $\max\limits_{1\leq i\leq n} \|f_i\| = 1$, tenemos $\|f_i\| = 1$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

(1) Como para cada $i = 1, \ldots, n$ existe $b_i \in N(f_i)$ tal que $\mathbf{0} = a_i - b_i$ y $\lambda_i > 0$, tenemos $\mathbf{0} = a_i' - \lambda_i b_i$ y $f_i(\lambda_i b_i) = \|\lambda_i b_i\|$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Lo que afirma que

$$\mathbf{0} \in \bigcap_{i=1}^{n} \big(a_i' - N(f_i)\big).$$

Aplicamos la parte (2) del Teorema 3.3.3 para obtener que

$$\mathbf{0} \in \bigcap_{i=1}^{n} \big(a_i' - N(f_i)\big) = Z^1(A').$$

(2) Desde la parte (1), tenemos $\mathbf{0} \in \bigcap_{i=1}^{n} \big(a_i' - N(f_i)\big) = Z^1(A')$. Si $x \in Z^1(A')$, entonces $x = a_i' - c_i$ donde $c_i \in N(f_i)$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Así que $x = a_i - (\lambda_i d_i + (1 - \lambda_i) a_i)$ donde $c_i = \lambda_i d_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Como para cada $i = 1, \ldots, n$ tenemos $d_i, a_i \in N(f_i)$, $0 < \lambda_i \leq 1$ y $N(f_i)$ convexo, entonces

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} \big(a_i - N(f_i)\big) = Z^1(A).$$

Por tanto $\mathbf{0} \in Z^1(A') \subseteq Z^1(A)$.

(3) Desde $r^1(\lambda x, \lambda A) = \lambda r^1(x, A)$, obtenemos $Z^1(A') = \lambda Z^1(A)$. □

3.4. Demostración de los Teoremas 3.2.1 y 3.2.2

Para probar los Teoremas 3.2.1 y 3.2.2 expongamos un lema que será útil en la demostración.

Nota 3.4.1. *La notación $Z_Y^1(A)$ significa el conjunto de los centros de Fermat en Y del conjunto A, es decir,*

$$Z_Y^1(A) = \Big\{ y \in Y : \ r^1(y, A) = \inf_{z \in Y} r^1(z, A) \Big\}.$$

Lema 3.4.2. *Sea X un espacio normado de dimensión por lo menos tres, y supongamos que X no es un* IPS*, entonces existe un subespacio Y de X y un conjunto Δ de tres puntos de norma uno en Y tal que $\mathbf{0} \in Z_Y^1(\Delta)$ y $Z_Y^1(\Delta) \cap \operatorname{conv}(\Delta) = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que X no es un IPS. Por el Teorema 3.1.1 de Benítez-Fernández-Soriano, existe un conjunto $\mathrm{T} = \{a_1, a_2, a_3\}$ en X tal que $Z^1(\mathrm{T}) \cap \operatorname{conv}(\mathrm{T}) = \emptyset$. Por lo tanto, existe $y_0 \in X$ tal que

$$r^1(y_0, \mathrm{T}) < r^1(x, \mathrm{T}) \quad \text{para todo} \ \ x \in \operatorname{conv}(\mathrm{T}).$$

Entonces, si denotamos por Y el subespacio generado por $\{a_1, a_2, a_3, y_0\}$, tenemos que

$$Z_Y^1(\mathrm{T}) \cap \mathrm{conv}(\mathrm{T}) = \emptyset,$$

Si aplicamos el Teorema de la separación de Hahn-Banach en Y al conjunto compacto convexo $Z_Y^1(\mathrm{T})$ y $\mathrm{conv}(\mathrm{T})$, Deducimos que existen una forma lineal y^* en Y y un cierto número real α tal que

$$y^*(y) \leq \alpha < y^*(x) \quad \text{para todo} \;\; y \in Z_Y^1(\mathrm{T}) \;\; \text{y todo} \;\; x \in \mathrm{conv}(\mathrm{T}).$$

Por supuesto, podemos asumir que existe $b \in Z_Y^1(\mathrm{T})$ tal que $y^*(b) = \alpha$. Por otra parte, por medio de la translación $x \mapsto x - b$, podemos suponer que $b = \mathbf{0}$ y $\alpha = 0$. Por tanto

$$y^*(y) \leq 0 < y^*(x) \quad \text{para todo} \;\; y \in Z_Y^1(\mathrm{T}) \;\; \text{y todo} \;\; x \in \mathrm{conv}(\mathrm{T}).$$

Nótese ahora que la desigualdad precedente implica que $a_i \neq \mathbf{0}$ para $i = 1, 2, 3$. Denotamos $\lambda = \text{mín}\{\|a_1\|, \|a_2\|, \|a_3\|\}$ y tomamos $a_i' = \frac{1}{\lambda} a_i$ para $i = 1, 2, 3$. Las partes (1) y (3) del corolario 3.3.4 garantizan que si denotamos $\Delta = \left\{ \frac{a_1'}{\|a_1'\|}, \frac{a_2'}{\|a_2'\|}, \frac{a_3'}{\|a_3'\|} \right\}$, entones $\mathbf{0} \in Z_Y^1(\Delta)$ y

$$y^*(y) \leq 0 < y^*(x) \quad \text{para todo} \;\; y \in Z_Y^1(\Delta) \;\; \text{y todo} \;\; x \in \mathrm{conv}(\Delta).$$

Por supuesto Δ es un conjunto de tres puntos en la esfera unidad de X. Finalmente, la desigualdad precedente implica que $Z_Y^1(\Delta)$ y $\mathrm{conv}(\Delta)$ son disjuntos y esto termina la prueba. $\square$

Ya podemos dar las demostraciones de las Teoremas 3.2.1 y 3.2.2.

3.4.1. Demostración del Teorema 3.2.1

Recordemos que lo que vamos a demostrar es que un espacio X es IPS si y sólo si se cumple la condición siguiente:

$\left(\mathrm{GK}_1^S\right)$ *Cada conjunto de tres puntos en la esfera unidad de X tiene un centro de Fermat en su envoltura convexa.*

En efecto, está claro que si X es un IPS, la condición $\left(\mathrm{GK}_1^S\right)$ se cumple. Recíprocamente, asumimos que X no es un IPS. Por el Lema 3.4.2, existe un subespacio Y de X y un conjunto Δ formado por tres puntos de norma uno en Y tal que $\mathbf{0} \in Z_Y^1(\Delta)$ y $Z_Y^1(\Delta) \cap \mathrm{conv}(\Delta) = \emptyset$. Por lo tanto

$$\text{mín}\{r^1(y, \Delta) \;:\; y \in Y\} < \text{mín}\{r^1(x, \Delta) \;:\; x \in \mathrm{conv}(\Delta)\}$$

Pero esto implica

$$\inf_{x \in X} \; r^1(x, \Delta) \leq \underset{y \in Y}{\text{mín}} \; r^1(y, \Delta) < \underset{x \in \; \mathrm{conv}(\Delta)}{\text{mín}} \; r^1(x, \Delta).$$

Entonces, sigue que $Z^1(\Delta)$ y $\mathrm{conv}(\Delta)$ son disjuntos, y esto termina la prueba.

3.4.2. Demostración del Teorema 3.2.2

En lo que sigue se prueba que un espacio X es IPS si y sólo si se cumple la condición siguiente:

> $\left(\mathrm{A}_1^*\right)$ *Si a_1, a_2, a_3 tienen norma uno en X, entoncesel conjunto $\{a_1, a_2, a_3\}$ tiene algún centro de Fermat, y si $\mathbf{0}$ es su centro de Fermat, entonces $\mathbf{0}$ está en su envoltura convexa.*

En efecto, está claro que si X es un IPS, la condición $\left(\mathrm{A}_1^*\right)$ se cumple.

Por otra parte, probemos que $\left(\mathrm{A}_1^*\right)$ implica $\left(\mathrm{GK}_1^S\right)$. Sea $\mathrm{T} = \{a_1, a_2, a_3\}$ un conjunto de tres puntos en la esfera unidad de X.

Debemos probar que $Z^1(\mathrm{T}) \cap \mathrm{conv}(\mathrm{T}) \neq \emptyset$. Por nuestra hipótesis tenemos que, $Z^1(\mathrm{T}) \neq \emptyset$. Tomamos $b \in Z^1(\mathrm{T})$ (asumimos que $b \neq a_i$ para $i = 1, 2, 3$, si no tendríamos trivialmente $Z^1(\mathrm{T}) \cap \mathrm{conv}(\mathrm{T}) \neq \emptyset$). Entonces $\mathbf{0} \in Z^1(\Delta)$, donde $\Delta = \{a_1 - b, a_2 - b, a_3 - b\}$.

Tomamos $\lambda = \mathrm{mín}\{\|a_1 - b\|, \|a_2 - b\|, \|a_3 - b\|\}$. Como λ es un número positivo, entonces podemos definir $a_i' = \frac{1}{\lambda}(a_i - b)$ para $i = 1, 2, 3$. Por la parte (1) del corolario 3.3.4, tenemos que $\mathbf{0} \in Z^1(\Delta')$, donde $\Delta' = \{a_1', a_2', a_3'\}$. Notemos que tenemos $\|a_i'\| \geq 1$ para $i = 1, 2, 3$. Por lo tanto, sigue las partes (1) y (2) del corolario 3.3.4, tenemos que

$$\mathbf{0} \in Z^1(\Delta'') \subset Z^1(\Delta'),$$

donde $\Delta'' = \left\{\frac{a_1'}{\|a_1'\|}, \frac{a_2'}{\|a_2'\|}, \frac{a_3'}{\|a_3'\|}\right\}$. La hipótesis implica que $\mathbf{0}$ pertenece al $\mathrm{conv}(\Delta'')$. Entonces podemos verificar fácilmente que b pertenece a $\mathrm{conv}(\mathrm{T})$. Esto termina la prueba de esta parte.

En el diagrama siguiente, resumimos las nuevas caracterizaciones de los espacios IPS, obtenidas usando algunas propiedades geométricas del conjunto formado por los centros de Fermat de un conjunto de tres puntos.

Sea X un espacio normado de dimensión al menos tres. Entonces tenemos que

$$\begin{array}{ccccc} X \text{ satisface } (\mathrm{GK}_1) & \Longleftrightarrow & X \text{ satisface } \left(\mathrm{GK}_1^S\right) & \Longleftrightarrow & X \text{ satisface } \left(\mathrm{A}_1^*\right) \\ & & \Updownarrow & & \\ & & X \text{ es un IPS} & & \end{array}$$

Capítulo 4

Caracterización de IPS mediante p-centros

4.1. Una caracterización de IPS análoga a la de Garkavi y Klee

En los capítulos anteriores hemos incluido las caracterizaciones de los IPS mediante centros de Chebyshev (Teorema 2.1.2 de Garkavi y Klee) y mediante centros de Fermat (Teorema 3.1.1 de Benítez, Fernández y Soriano).

Es natural preguntarse si también se puede caracterizar los IPS mediante p-centros de una forma análoga.

Este problema lo resolvieron igualmente Benítez, Fernández y Soriano de nuevo de forma afirmativa. Primero en el caso $p = 2$ en [3], y en segundo lugar en el caso $p \in (1, \infty)$ en [4].

Aquí daremos este resultado.

Teorema 4.1.1 (Teorema 7 de [4]). *Sea X un espacio normado de dimensión al menos tres y sea $1 < p < \infty$. Entonces X es un* IPS *si y sólo si se cumple la condición siguiente:*

(GK_p) *Cada conjunto de tres puntos en X tiene un p-centro de en su envoltura convexa.*

Si seguimos con las ideas de los capítulos anteriores, es natural preguntarse si la caracterización anterior es válida *si utilizamos solamente puntos de norma uno.* O más concretamente si son válidas caracterizaciones con condiciones análogas a las $\big(\mathrm{GK}^S_\infty\big)$, $\big(\mathrm{A}^*_\infty\big)$, $\big(\mathrm{GK}^S_1\big)$, $\big(\mathrm{A}^*_1\big)$, referidas ahora a los p-centros.

Hemos conseguido una respuesta parcial a esta pregunta, hemos visto que la condición análoga a $\left(\mathrm{GK}^S_\infty\right)$ o $\left(\mathrm{GK}^S_1\right)$ si nos da una caracterización, pero no sabemos qué ocurre en el otro caso. Es decir, probaremos el siguiente teorema:

Teorema 4.1.2. *Sea X un espacio normado de dimensión al menos tres y sea $p \in (1, \infty)$. Entonces X es un espacio* IPS *si y sólo si se cumple la condición siguiente:*

$\left(\mathrm{GK}^S_p\right)$ *Cada conjunto de tres puntos en la esfera unidad de X tiene un p-centro en su envoltura convexa.*

Problema abierto 4.1.3. *Dado un espacio normado X y $p \in (1, \infty)$ consideremos la condición*

$\left(\mathrm{A}^*_p\right)$ *Si a_1, a_2, a_3 tienen norma uno en X, entonces el conjunto $\{a_1, a_2, a_3\}$ tiene algún p-centro, y si $\mathbf{0}$ es su p-centro, entonces $\mathbf{0}$ está en su envoltura convexa.*

¿Es cierto que si X es un espacio normado de dimensión mayor o igual que tres y $p \in (1, \infty)$, X es un IPS *si y sólo si X cumple la condición $\left(\mathrm{A}^*_p\right)$?*

Benítez, Fernández y Soriano probaron el Teorema 4.1.1 (caracterización mediante p-centros) antes de su Teorema 3.1.1 (caracterización mediante centros de Fermat (o 1-centros)). Por ello las demostraciones que dan de estos dos teoremas son independientes. Nosotros también vamos a dar otra demostración independiente del Teorema 4.1.1 (ver sección 4.5).

Sin embargo, en realidad podemos ver el Teorema 4.1.1 (caracterización mediante p-centros) como una consecuencia del Teorema 3.1.1 (caracterización mediante centros de Fermat (o 1-centros)). Bastaría observar que nosotros obtenemos el Teorema 4.1.2 como consecuencia del Teorema 3.1.1 (caracterización mediante centros de Fermat (o 1-centros)), sin utilizar el Teorema 4.1.1 (caracterización mediante p-centros), y por este último teorema es, por supuesto, un corolario inmediato del Teorema 4.1.2.

Para todo esto necesitamos algún trabajo previo.

4.2. Notaciones y resultados preliminares

En esta capítulo $(X, \|\cdot\|)$ será un espacio normado, $p \in (1, \infty)$.

Se denota por $\ell^3_p(X)$ al espacio normado dotado de la norma siguiente.

$$\text{Para} \quad (x_1, x_2, x_3) \in \ell^3_p(X) \ , \quad |||(x_1, x_2, x_3)|||_p = \left(\sum_{i=1}^{3} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Es bien conocido que el dual de $\ell_p^3(X)$ es isometricamente isomorfo a $\ell_q^3(X^*)$ donde q el conjugado de p, e.d. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ y donde dado $u=(x_1,x_2,x_3)\in\ell_p^3(X)$ y $F=(f_1,f_2,f_3)\in\ell_q^3(X^*)$ la dualidad viene definida por

$$\ll F,u\gg=\sum_{i=1}^{n}<f_i,x_i>$$

donde $<\cdot,\cdot>$ se denota al producto escalar en la dualidad entre X^* y X.

Sea S_X y S_{X^*} las esferas unidades de X y de su espacio dual topológico X^*.

Sea $a\in X$ se denota por Ja al conjunto siguiente

$$Ja=\{f\in S_{X^*}\ :\ f(a)=\|a\|\}.$$

Por el Teorema de Hahn-Banach, se tiene que, para cada $a\in X$, el conjunto Ja no es vacío.

Observación 4.2.1. *Sea $\Delta=\{a_1,a_2,a_3\}$ un conjunto en X y sea $p\in(1,\infty)$. Sea $v=(a_1,a_2,a_3)$. Se verifica inmediatamente que*

$$x_0\in Z^p(\Delta)\quad \textit{si y sólo si}\quad u_0=(x_0,x_0,x_0)\in P_{\mathrm{diag}(X^3)}(v).$$

Donde

$$\mathrm{diag}(X^3)=\big\{u=(x,x,x)\ :\ x\in X\big\},$$

y

$$P_{\mathrm{diag}(X^3)}(v)=\Big\{u\in\mathrm{diag}(X^3)\ :|||v-u|||_p=\inf_{w\in\ \mathrm{diag}(X^3)}|||v-w|||_p\Big\}.$$

Aquí daremos dos resultados preliminares que figuran en [4]. El primer lema ha sido demostrada en [4] por el concepto de subdiferencial, nosotros en este trabajo lo vamos a demostrar usando la teoría de aproximación óptima, concretamente el Teorema 3.3.1. Veremos más tarde que el lema también es cierto si $p=1$ (ver el Lema 4.3.1).

Lema 4.2.2 (Lema 1 de [4]). *Sea $\Delta=\{a_1,a_2,a_3\}$ un conjunto en X y sea $p\in(1,\infty)$. Entonces $\mathbf{0}\in Z^p(\Delta)$ si y sólo si existen $f_i\in Ja_i$ para $i=1,2,3$ tal que*

$$\|a_1\|^{p-1}f_1+\|a_2\|^{p-1}f_2+\|a_3\|^{p-1}f_3=0.$$

Demostración. Por el Teorema 3.3.1, tenemos que $\mathbf{0}\in Z^p(\Delta)$ si y sólo si existen $g_1,g_2,g_3\in X^*$ satisfacen

$$\|g_1\|^q+\|g_2\|^q+\|g_3\|^q=1\quad\text{donde}\quad q=\frac{p}{p-1},\tag{4.1}$$

$$g_1(x)+g_2(x)+g_3(x)=0\quad\text{para todo}\quad x\in X,\tag{4.2}$$

$$g_1(a_1)+g_2(a_2)+g_3(a_3)=\big(\|a_1\|^p+\|a_2\|^p+\|a_3\|^p\big)^{\frac{1}{p}}.\tag{4.3}$$

Observamos primero que por las igualdades (4.1) y (4.2), puede ocurrir que como mucho una y sólo una de las funciones g_1, g_2 y g_3 se anula.

Caso 1: Supongamos que $g_i \neq 0$ para cada $i = 1, 2, 3$.

Usando las igualdades (4.1), (4.3) y la desigualdad de Hölder para conseguir que

$$\left(\sum_{i=1}^{3} \|a_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^{3} \|g_i\|\|a_i\| = \sum_{i=1}^{3} g_i(a_i). \tag{4.4}$$

Denotamos $f_i = \frac{g_i}{\|g_i\|}$ para cada $i = 1, 2, 3$. Por tanto, la igualdad (4.2) es equivalente a

$$\|g_1\|f_1 + \|g_2\|f_2 + \|g_3\|f_3 = 0, \tag{4.5}$$

donde $f_i \in S_{X^*}$ para cada $i = 1, 2, 3$.

Probamos ahora que

$$f_i \in Ja_i \;\text{ y }\; \|g_i\| = \frac{\|a_i\|^{p-1}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{3} \|a_i\|^p\right)^{\frac{1}{q}}} \quad \text{para cada } i = 1, 2, 3.$$

Por la segunda parte de la igualdad (4.4), obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{3} \|g_i\|\|a_i\| = \sum_{i=1}^{3} \|g_i\| f_i(a_i).$$

Por tanto

$$\sum_{i=1}^{3} \|g_i\|\big(f_i(a_i) - \|a_i\|\big) = 0.$$

Como $\|g_i\|\big(f_i(a_i) - \|a_i\|\big) \geq 0$ para cada $i = 1, 2, 3$ entonces tenemos

$$f_i(a_i) = \|a_i\| \;\text{ para cada }\; i = 1, 2, 3.$$

Por otra parte, como tenemos la igualdad en la desigualdad de Hölder para las sucesiones $\big(\|a_i\|\big)_{1\leq i\leq 3}$ y $\big(\|g_i\|\big)_{1\leq i\leq 3}$ entonces existe un $\alpha > 0$ tal que $\|a_i\|^p = \alpha\|g_i\|^q$ para cada $i = 1, 2, 3$, así que

$$\|g_i\| = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{q}}}\|a_i\|^{p-1} \;\text{ para cada }\; i = 1, 2, 3.$$

Usando la primera parte de la igualdad (4.4), para obtener que $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{3} \|a_i\|^p$. Por lo tanto

$$\|g_i\| = \frac{\|a_i\|^{p-1}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{3} \|a_i\|^p\right)^{\frac{1}{q}}} \quad \text{para cada } i = 1, 2, 3.$$

Sustituimos el valor de $\|g_i\|$ para cada $i = 1, 2, 3$ en (4.5) para obtener que

$$\|a_1\|^{p-1} f_1 + \|a_2\|^{p-1} f_2 + \|a_3\|^{p-1} f_3 = 0. \tag{4.6}$$

Caso 2: Sin perdida de generalidad, podemos suponer por ejemplo que $g_3 = 0$. Por tanto las igualdades (4.1) y (4.2) se simplifican respectivamente a

$$\|g_1\|^q + \|g_2\|^q = 1 \quad \text{y} \quad g_1 + g_2 = 0.$$

Así que

$$\|g_1\| = \|g_2\| = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Aplicamos ahora la desigualdad de Hölder a (4.3) para obtener que,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{3} \|a_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = g_1(a_1) + g_2(a_3) &\leq \|g_1\|\|a_1\| + \|g_2\|\|a_2\| \\ &= \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \|a_i\| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{2} \|a_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Así que $a_3 = 0$.

Por tanto, si en las hipótesis tenemos $a_3 \neq 0$, entonces lo que supuesto es falso. Sin embargo si en las hipótesis se tiene que $a_3 = 0$, entonces la igualdad (4.6) se simplifica a

$$\|a_1\|^{p-1} f_1 + \|a_2\|^{p-1} f_2 = 0. \tag{4.7}$$

□

Observación 4.2.3. *Sea $p \in (1, \infty)$, si $\mathbf{0}$ es un p-centro del conjunto $\{a_1, a_2, 0\}$, se ve claramente que por la igualdad* (4.7)*, se tiene que*

$$\|a_1\| = \|a_2\|.$$

Aunque la demostración del lema siguiente está bien detallada en [4], lo recordamos aquí para comodidad del lector.

Lema 4.2.4 (Lema 2 de [4]). *Sea $\Delta = \{a_1, a_2, a_3\}$ un conjunto en X, $p > 1$ y sea $\mathbf{0} \in Z^p(\Delta)$. Sea $f_i \in Ja_i$ para cada $i = 1, 2, 3$ tal que*

$$\|a_1\|^{p-1} f_1 + \|a_2\|^{p-1} f_2 + \|a_3\|^{p-1} f_3 = 0,$$

y sea $x \in Z^p(\Delta)$, entonces

$$x \in \ker(f_1) \cap \ker(f_2) \cap \ker(f_3),$$

y para cada $r, s, t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} \|a_1\| &= \|a_1 - rx\|, \quad f_1 \in J(a_1 - rx), \\ \|a_2\| &= \|a_2 - sx\|, \quad f_2 \in J(a_1 - sx), \\ \|a_3\| &= \|a_3 - tx\|, \quad f_3 \in J(a_1 - tx). \end{aligned}$$

Demostración. Puesto que 0 y $x \in Z^p(\Delta)$, entonces la función Ψ definida en $\mathbb{R}$ de forma siguiente:

$$t \in \mathbb{R} \longrightarrow \Psi(t) = \sum_{i=1}^{3} \|a_i - tx\|$$

alcanza su mínimo en $t = 0$ y $t = 1$.

Probamos primero que $\mathbf{0} \in Z^p(\{a_1 - rx, a_2 - rx, a_3 - rx\})$ para cada $r \in [0,1]$. En efecto, por la convexidad tenemos que,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} \|a_i - rx\|^p &= \sum_{i=1}^{3} \|r(a_i - x) + (1-r)a_i\|^p \\ &\leq r \sum_{i=1}^{3} \|a_i - x\|^p + (1-r) \sum_{i=1}^{3} \|a_i\|^p. \end{aligned}$$

Usando 0 y $x \in Z^p(\Delta)$, para obtener que,

$$\sum_{i=1}^{3} \|a_i - x\|^p \leq \sum_{i=1}^{3} \|a_i - rx - y\|^p \quad \text{para todo} \quad y \in X,$$

y

$$\sum_{i=1}^{3} \|a_i\|^p \leq \sum_{i=1}^{3} \|a_i - rx - y\|^p \quad \text{para todo} \quad y \in X.$$

Por tanto

$$\sum_{i=1}^{3} \|a_i - rx\|^p \leq \sum_{i=1}^{3} \|a_i - rx - y\|^p \quad \text{para todo} \quad y \in X.$$

Esto significa que $\mathbf{0} \in Z^p(\{a_1 - rx, a_2 - rx, a_3 - rx\})$.

Por otras palabras, para $r \in [0,1]$, $rx \in Z^p(\Delta)$. Así que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} \|a_i - rx\|^p &= \sum_{i=1}^{3} \|a_i\|^p = \sum_{i=1}^{3} \|a_i\|^{p-1} f_i(a_i) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \|a_i\|^{p-1} f_i(a_i - rx) \leq \sum_{i=1}^{3} \|a_i\|^{p-1} \|a_i - rx\|. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Por la desigualdad de Hölder, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} \|a_i\|^{p-1}\|a_i - rx\| &\leq \left(\sum_{i=1}^{3} \|a_i\|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{3} \|a_i - rx\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sum_{i=1}^{3} \|a_i\|^p\end{aligned}$$

con igualdad si y sólo si

$$\|a_i\| = \|a_i - rx\| \quad \text{para cada} \quad i = 1, 2, 3.$$

Por otra parte, de (4.8) obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{3} \|a_i\|^{p-1} f_i(a_i) = \sum_{i=1}^{3} \|a_i\|^{p-1} f_i(a_i - rx).$$

Así que

$$\sum_{i=1}^{3} \|a_i\|^{p-1}\Big(f_i(a_i) - f_i(a_i - rx)\Big) = 0.$$

Puesto que $f_i(a_i) - f_i(a_i - rx) \geq 0$ para cada $i = 1, 2, 3$, entonces

$$\|a_i\|^{p-1}\Big(f_i(a_i) - f_i(a_i - rx)\Big) = 0 \quad \text{para cada} \quad i = 1, 2, 3.$$

Podemos suponer que todos los punto a_1, a_2, a_3 no nulos (si a lo sumo uno de ellos es nulo el lema es trivial).

Por tanto

$$f_1(a_1) = f_1(a_1 - rx) = f_1(a_1) - rf_1(x).$$

Así que

$$rf_1(x) = 0.$$

Como r es un numero arbitrario en $[0, 1]$, se obtiene también

$$(1 - r)f_1(x) = 0.$$

Por tanto

$$f_1(x) = 0.$$

Para terminar, sabemos que

$$f_1(a_1 - rx) = f_1(a_1) = \|a_1\| = \|a_1 - rx\|.$$

Esto significa que

$$f_1 \in J(a_1 - rx).$$

Finalmente, por el mismo razonamiento se tiene que

$$\begin{aligned}&f_2(x) = 0 \quad \text{y} \quad f_2 \in J(a_2 - sx) \quad \text{para cada} \quad s \in [0, 1], \quad \text{y} \\ &f_3(x) = 0 \quad \text{y} \quad f_3 \in J(a_3 - tx) \quad \text{para cada} \quad t \in [0, 1].\end{aligned}$$

□

4.3. La relación entre los p-centros y centros de Fermat

Antes de examinar la relación existente entre los p-centros $\big(p \in (1,\infty)\big)$ y los centros de Fermat de un conjunto de tres puntos, recordemos un resultado que describe los centros de Fermat con pesos de tal conjunto análogo al Lema 4.2.2.

Lema 4.3.1 (Proposición 1 de [5]). *Sea $\Delta = \{a_1, a_2, a_3\}$ un conjunto en X, y sea $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ una familia de tres numeros positivos. Entonces, $\mathbf{0} \in Z^1_\omega(\Delta)$ si y sólo si existe $f_i \in Ja_i$ para cada $i = 1, 2, 3$ tal que*

$$\omega_1 f_1 + \omega_2 f_2 + \omega_3 f_3 = 0.$$

Demostración. Por el Teorema 3.3.1, se tiene que $\mathbf{0} \in Z^1_\omega(\Delta)$ si y sólo si existen $f_1, f_2, f_3 \in X^*$ satisfacen

$$|||(f_1, f_2, f_3)|||_\infty = \max\{\|f_1\|, \|f_2\|, \|f_3\|\} = 1 \tag{4.9}$$

$$\omega_1 f_1(x) + \omega_2 f_2(x) + \omega_3 f_3(x) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \in X, \tag{4.10}$$

$$\omega_1 f_1(a_1) + \omega_2 f_2(a_2) + \omega_3 f_3(a_3) = \omega_1\|a_1\| + \omega_2\|a_2\| + \omega_3\|a_3\|. \tag{4.11}$$

Por las igualdades (4.9) y (4.11) se tiene que, para cada $i = 1, 2, 3$,

$$f_i(a_i) = \|a_i\| \quad \text{y} \quad \|f_i\| = 1.$$

□

Lema 4.3.2 (Lema 5.2 de [18]). *Sea $\Delta = \{a_1, a_2, a_3\}$ un conjunto en X, tal que $\mathbf{0} \notin \Delta$ y $p > 1$. Sea $\omega = \big(\|a_1\|^{p-1}, \|a_2\|^{p-1}, \|a_3\|^{p-1}\big)$. Entonces,*

$$\mathbf{0} \in Z^p(\Delta) \quad \textit{si y sólo si} \quad \mathbf{0} \in Z^1_\omega(\Delta).$$

Demostración. Por el Lema 4.2.2 tenemos que $\mathbf{0} \in Z^p(\Delta)$ si y sólo si existen $f_i \in Ja_i$ para $i = 1, 2, 3$ tal que

$$\|a_1\|^{p-1} f_1 + \|a_2\|^{p-1} f_2 + \|a_3\|^{p-1} f_3 = 0. \tag{4.12}$$

La igualdad (4.12) es equivalente a

$$\omega_1 f_1 + \omega_2 f_2 + \omega_3 f_3 = 0.$$

Por tanto, el Lema 4.3.1 garantiza que esto es equivalente a $\mathbf{0} \in Z^1_\omega(\Delta)$. □

El corolario siguiente es un caso particular del lema anterior, es decir cuando $\omega = (1, 1, 1)$.

Corolario 4.3.3. *Sea X un espacio normado, y sea $\Delta = \{a_1, a_2, a_3\}$ en la esfera unidad de X y $p > 1$. Entonces,*

$$\mathbf{0} \in Z^p(\Delta) \quad \textit{si y sólo si} \quad \mathbf{0} \in Z^1(\Delta).$$

La proposición siguiente conecta entre el conjunto de los centros de Fermat y el conjunto de los p-centros bajo algunos condiciones concretas particulares.

Proposición 4.3.4. *Sea X un espacio normado, y sea $\Delta = \{a_1, a_2, a_3\}$ en la esfera unidad de X y $p > 1$. Si $\mathbf{0} \in Z^p(\Delta)$ entonces, $Z^p(\Delta) \subset Z^1(\Delta)$.*

Demostración. Tomamos $x \in Z^p(\Delta)$. El Lema 4.2.4 implica que

$$\|a_i\| = \|a_i - x\| \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Así que

$$r^1(\mathbf{0}, \Delta) = \|a_1\| + \|a_2\| + \|a_3\| = \|a_1 - x\| + \|a_2 - x\| + \|a_3 - x\| = r^1(x, \Delta).$$

Por lo tanto, $x \in Z^1(\Delta)$. □

4.4. Demostración del Teorema 4.1.2

Recordemos que lo que vamos a demostrar es que un espacio X es IPS si y sólo si se cumple la condición siguiente:

$\left(\mathrm{GK}_p^S\right)$ *Cada conjunto de tres puntos en la esfera unidad de X tiene un p-centro en su envoltura convexa.*

Es bien sabido que X es IPS implica $\left(\mathrm{GK}_p^S\right)$. Para el inverso, asumimos que X no es un IPS. Por el Lema 3.4.2, existen un subespacio Y de X y un triángulo Δ con vértices en la esfera unidad de Y tal que $\mathbf{0} \in Z_Y^1(\Delta)$ y $Z_Y^1(\Delta) \cap \operatorname{conv}(\Delta) = \emptyset$.

Puesto que $\mathbf{0} \in Z_Y^1(\Delta)$, entonces por el Corolario 4.3.3, tenemos que

$$\mathbf{0} \in Z_Y^p(\Delta).$$

Por tanto por la Proposición 4.3.4, se tiene que

$$Z_Y^p(\Delta) \cap \operatorname{conv}(\Delta) = \emptyset.$$

Así que

$$\text{mín}\{r^p(y, \Delta) \ : \ y \in Y\} < \text{mín}\{r^p(x, \Delta) \ : \ x \in \operatorname{conv}(\Delta)\}.$$

Pero eso implica que

$$\inf_{x \in X} r^p(x, \Delta) \leq \text{mín}_{y \in Y} r^p(y, \Delta) < \text{mín}_{x \in \operatorname{conv}(\Delta)} r^p(x, \Delta).$$

Entonces, sigue que $Z^p(\Delta)$ y $\operatorname{conv}(\Delta)$ son disjuntos, y esto termina la prueba.

4.5. Otra demostración del Teorema 4.1.1 de Benítez-Fernández-Soriano

La prueba original de este teorema se basa en el Teorema de Blaschke y Kakutani (Teorema 4.5.9) y en la caracterización geométrica del sitio donde está un p-centro de un conjunto de tres puntos; con precisión, en el Lema 4.2.2.

La demostración que daremos aquí es distinta. No utiliza caracterizaciones geométricas del sitio donde está un p-centro de un conjunto de tres puntos. En su lugar se base en la demostración directa de un lema (Lema 4.5.4) asegura que si fijamos un punto en el interior de la envoltura convexa de tres puntos dados, podemos "mover" dichos puntos de manera que el punto fijado se convierte en p-centro de los nuevos puntos. La demostración directa de este resultado usa argumentos de homotopía.

Por otra parte, en lugar de usar directamente el Teorema de Blaschke y Kakutani usamos un refinamiento de dicho teorema probado por Klee (véase Proposición 4.5.10). La ventaja de este refinamiento es que también nos va a ser útil para probar un resultado en el capítulo siguiente (véase Teorema 5.1.2).

Los resultados que emplearemos en nuestra prueba están recogidos en las subsecciones 4.5.1 y 4.5.3.

4.5.1. Unos resultados previos a la demostración

El Lema que aparece a continuación muestra que un punto de un conjunto formado por tres puntos es un p-centro ($p \in (1,\infty)$) de tal conjunto solamente en casos triviales.

Lema 4.5.1. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, ($p \in (1,\infty)$), y sea $\Delta = \{a_1, a_2, 0\}$ un conjunto en X.*

Si $\mathbf{0} \in Z^p(\Delta)$, entonces $\|a_1\| = \|a_2\|$ y $\left[\frac{a_1}{\|a_1\|}, -\frac{a_2}{\|a_2\|}\right] \subset S_X$.

Demostración. Obviamente, podemos suponer que X tiene dimensión dos. Por la Observación 4.2.3, tenemos que $\|a_1\| = \|a_2\|$.

Esta claro que podemos suponer que $\|a_1\| = \|a_2\| = 1$. Así que, probamos ahora que el segmento $[a_1, -a_2]$ esta en la esfera de X. Para eso basta probar que $\left\|\frac{a_1-a_2}{2}\right\| = 1$, en efecto, sea $\lambda \in [0,1]$ denotamos $m = \frac{a_1-a_2}{2}$ y supongamos que $\|m\| = 1$, tenemos

$$2m = \big(\lambda a_1 - (1-\lambda)a_2\big) + \big((1-\lambda)a_1 - \lambda a_2\big)$$

así que

$$2 \leq \|\lambda a_1 - (1-\lambda)a_2\| + \|(1-\lambda)a_1 - \lambda a_2\| \leq \|\lambda a_1 - (1-\lambda)a_2\| + 1$$

por tanto $\|\lambda a_1 - (1-\lambda)a_2\| = 1$.

Supongamos que

$$\left\|\frac{a_1 - a_2}{2}\right\| < 1 \ .$$

Denotamos

$$a_3 = \frac{a_1 - a_2}{\|a_1 - a_2\|}$$

y consideramos en X una nueva norma $\|\cdot\|_h$ que tiene el hexágono de vértices $a_1, a_2, a_3, -a_1, -a_2, -a_3$ como la bola unidad.

Por tanto $\|a_1\| = \|a_1\|_h$, $\|a_2\| = \|a_2\|_h$ y

$$\|x\| \leq \|x\|_h \ \text{ para todo } \ x \in X \ ,$$

por hipótesis, tenemos

$$\begin{aligned}
\|a_1\|_h^p + \|a_2\|_h^p &= \|a_1\|^p + \|a_2\|^p \\
&\leq \|x - a_1\|^p + \|x - a_2\|^p + \|x\|^p \\
&\leq \|x - a_1\|_h^p + \|x - a_2\|_h^p + \|x\|_h^p
\end{aligned}$$

para cada $x \in X$.

Esto significa que $\mathbf{0}$ es un p-centro del triángulo Δ en $(X, \|\cdot\|_h)$.

Pero $(X, \|\cdot\|_h)$ es isométrico a $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\alpha)$ por la isometría

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\alpha) & \longrightarrow & (X, \|\cdot\|_h) \\
(t_1, t_2) & \longrightarrow & t_1 a_1 + t_2 a_2
\end{array}$$

donde $\|\cdot\|_\alpha$ es la norma que tiene la bola unidad el hexágono de vértices

$$(1,0),\ (0,1),\ (1/\|a_1 - a_2\|, -1/\|a_1 - a_2\|)$$

$$(-1,0),\ (0,-1),\ (-1/\|a_1 - a_2\|, 1/\|a_1 - a_2\|) \ .$$

Podemos demostrar sin dificultades que

$$\|(t_1,t_2)\|_\alpha = \begin{cases} |t_1| + |t_2| & \text{si } t_1 t_2 \geq 0 \\ |t_1| + (\|a_1 - a_2\| - 1)|t_2| & \text{si } t_1 t_2 \leq 0 \text{ y } |t_1| \geq |t_2| \\ (\|a_1 - a_2\| - 1)|t_1| + |t_2| & \text{si } t_1 t_2 \leq 0 \text{ y } |t_1| \leq |t_2| \end{cases}$$

para cada $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$.

Por tanto, $\mathbf{(0,0)}$ es p-centro del triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ en $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\alpha)$. La función objetivo asociada al triángulo anterior en $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\alpha)$ tiene la forma siguiente:

$$r^p(t,s) = \|(t,s) - (1,0)\|_\alpha^p + \|(t,s) - (0,1)\|_\alpha^p + \|(t,s) - (0,0)\|_\alpha^p \ .$$

Ahora consideramos la función g como la restringida de r^p sobre la dirección $t = s$ donde $t \in \mathbb{R}$. Es decir

$$g(t) = \|(t,t) - (1,0)\|_\alpha^p + \|(t,t) - (0,1)\|_\alpha^p + \|(t,t) - (0,0)\|_\alpha^p \ .$$

Así conseguimos

$$g(t) = (2t)^p + 2\big(1 - (2 - \|a_1 - a_2\|)t\big)^p \text{ para cada } t \in \big(0, 1/2\big) \ .$$

Por tanto, g alcanza su mínimo sobre $\mathbb{R}$, en el único punto

$$t_0 = \frac{(1+\delta)^{1/p-1}}{2 + (1+\delta)^{p/p-1}} \quad \text{donde } \delta = 1 - \|a_1 - a_2\| \ .$$

Contradicción con que $\mathbf{0}$ es el punto donde g alcanza su mínimo sobre $\mathbb{R}$. □

Observación 4.5.2. *Recordamos que se dice que un espacio normado es estrictamente convexo si su esfera unidad no contiene ningún segmento no trivial. Por el Lema* 4.5.1*, está claro que en un espacio normado estrictamente convexo, las vértices no son p-centros de un triángulo.*

En la prueba del próximo Lema usaremos la noción de aplicaciones homótopas. A continuación recordamos la definición (para más información consúltese [12]).

Definición 4.5.3. *Sean E y F dos espacios topológicos.*

(1) *Se dice que dos aplicaciones continuas f_1, f_2 de E en F son homótopas en F, si existe una aplicación $H : E \times [0,1] \longrightarrow F$ tal que, para cada $x \in E$,*
$$H(x,0) = f_1(x) \quad y \quad H(x,1) = f_2(x).$$
H se llama la homotopía de f_1 a f_2 y decimos que f_1 es homótopa a f_2 en F.

(2) *Sea f un aplicación de E en F. Se dice que f es homótopa a cero en F si f es homótopa a un aplicación constante de E en F.*

(3) *Un aplicación continua Γ de $[0,1]$ en F, se llama un camino en F. $\Gamma(0)$ es la origen del camino Γ y llamamos a $\Gamma\big([0,1]\big)$ una curva en F de origen $\Gamma(0)$.*

(4) *Sea Γ un camino en F tal que $\Gamma(0) = \Gamma(1)$, y sea $y_0 \in F$. Se dice que Γ rodea a y_0 si Γ no es homótopa a cero en $F \setminus \{y_0\}$.*

Lema 4.5.4. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión dos, $p \in (1,\infty)$, y sea $\Delta = \{a_1, a_2, a_3\}$ un conjunto en X. Si el origen $\mathbf{0}$ está en el interior de* $\operatorname{conv}(\Delta)$*, entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ no negativos, a lo mas uno nulo, tal que $\mathbf{0}$ es p-centro del conjunto $\Delta' = \{\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \lambda_3 a_3\}$.*

Demostración. Será útil tratar aquí no solamente los triángulos pero en general los tríos arbitrarios (a_1, a_2, a_3), donde a_1, a_2, a_3 son puntos en X cuál pueden ser colineal e igualar puede que dos de ellos coinciden.

Note que la definición del p-centro dada en el sentido de los triángulos, se conserva también para los tríos. Para probar esta lema consideraremos dos casos.

Caso 1: $(X, \|\cdot\|)$ es estrictamente convexo. Observamos en este caso que cada triángulo tiene un único p-centro (basta observar que la función objetivo r^p es estrictamente convexa). Tomando una isometría en caso de necesidad, podemos suponer, sin la pérdida de generalidad, que

$$X = \mathbb{R}^2,\ a_1 = (1,0),\ a_2 = (0,1),\ \text{y}\ a_3 \in \{(t,s) \in \mathbb{R}^2\ :\ t+s<0\}$$

Consideramos ahora una función f definida sobre

$$T = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2\ :\ t,s \geq 0,\ t+s \leq 1\}$$

de forma siguiente:

$$\begin{array}{rccc} f: & T & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (t,s) & \longrightarrow & f(t,s) \end{array}$$

donde $f(t,s)$ es p-centro del trío $\big(ta_1, sa_2, (1-t-s)a_3\big)$. Por supuesto, la función f es continua.

Por el Corolario 1.12.2, $f(t,s)$ pertenece al envoltura convexa de

$$\{ta_1, sa_2, (1-t-s)a_3\}.$$

Así que obtenemos fácilmente que

$$f(1,0) = \beta a_1 = (\beta, 0),\ f(0,1) = \beta a_2 = (0,\beta)\ \text{ donde } \beta = \frac{1}{1+2^{1/p-1}}.$$

Deducimos que la imagen del segmento $[(1,0),(0,1)]$ por la aplicación f es una curva continua y incluida en la envoltura convexa del triángulo de vértices $a_1 = (1,0)$, $a_2 = (0,1)$, $(0,0)$, y conecta $(\beta,0)$ con $(0,\beta)$.

Por otra parte, la Observación 4.5.2, afirma que esta trayectoria no pasa por el punto (0,0).

Podemos ver que f actúa en los segmentos $[(0,1),(0,0)]$ y $[(0,0),(1,0)]$ de una manera análoga, y conseguimos que la imagen del borde ∂T de T por f es una curva cerrada continua no contiene el origen $(0,0)$.

Como ∂T es homótopa a cero en T, entonces $f(\partial T)$ es homótopa a cero en $f(T)$, y como $f(\partial T)$ no es homótopa a cero en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, tenemos $f(\partial T)$ rodea el punto $(0,0)$, así que $(0,0)$ debe pertenecer a $f(T \setminus \partial T)$. Por tanto existe $(t_0, s_0) \in T \setminus \partial T$ tal que $f(t_0, s_0) = (0,0)$, está claro que

$$\lambda_1 = t_0,\ \lambda_2 = s_0,\ \lambda_3 = 1 - t_0 - s_0$$

son números positivos que satisfacen la condición requerida.

Caso 2: Dado una norma $\|\cdot\|$, tomamos una sucesión de normas $\|\cdot\|_n$ estrictamente convexas tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|x\|_n = \|x\|, \text{ para todo } x \in X.$$

(basta tomar $\|\cdot\|_n = \|\cdot\| + \frac{1}{n}\|\cdot\|_s$, donde $\|\cdot\|_s$ es cualquiera norma estrictamente convexa, por ejemplo cualquier norma euclidiana).

Para cada n aplicamos el Caso 1, sabemos que hay tres números $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n$ positivos, tal que $\mathbf{0}$ es p-centro del triángulo $\{\lambda_1^n a_1, \lambda_2^n a_2, \lambda_3^n a_3\}$ en el espacio $(X, \|\cdot\|_n)$.

Por supuesto, podemos suponer que $\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y por la compacidad de $[0,1]$, suponemos que la sucesión $(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n)_{n\geq 1}$ converge a $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Es inmediato ver que $\mathbf{0}$ es p-centro del triángulo $\{\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \lambda_3 a_3\}$ en $(X, \|\cdot\|)$. Finalmente, desde $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, obtenemos que, por lo menos uno de los números λ_i debe ser positivo, y usando otra vez el aserto " βa_1 es p-centro del trío $(a_1, 0, 0)$", está claro que a lo mas uno de ellos puede ser igual a cero.

Nótese que por esta razón y la hipótesis en las a_i, los puntos de nuestro trío no son colineales y así que ellos son realmente vértices del triángulo. □

Observación 4.5.5. *Por la Observación* 4.5.2*, si* $(X, \|\cdot\|)$ *es estrictamente convexo, entonces todos números* λ_i *en el lema precedente son positivos.*

Observación 4.5.6. *El lema precedente no es verdad en el caso* $p = 1$.

En efecto, sea $\Delta = \{a_1, a_2, a_3\}$ un conjunto de tres puntos en un espacio normado de dimensión dos.

Supongamos que si el origen $\mathbf{0}$ está en el interior de $\mathrm{conv}(\Delta)$, entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ no negativos, a lo mas uno nulo, tal que $\mathbf{0}$ es centro de Fermat del conjunto $\Delta' = \{\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \lambda_3 a_3\}$.

En primer lugar, si las λ_i son positivas, entonces por la parte (1) del Corolario 3.3.4 se tiene que $\mathbf{0}$ es un centro de Fermat del conjunto Δ. Esto no es verdad siempre, se puede elegir adecuadamente tres puntos en un plano euclidiano de tal manera que el origen $\mathbf{0}$ está en la interior de la envoltura convexa de estos puntos sin que sea su centro de Fermat.

En segundo lugar, si por ejemplo $\lambda_3 = 0$, entonces por la parte (1) del Corolario 3.3.4 se tiene que $\mathbf{0}$ es un centro de Fermat del conjunto $\{a_1, a_2, 0\}$. Tampoco esto es verdad, se puede encontrar fácilmente en contraejemplo en un plano euclidiano.

4.5.2. Demostración del Lema 4.5.4 a partir del Lema 4.2.2

Hemos dado una demostración del Lema 4.5.4 independiente de los resultados de localización de p-centro, sin embargo conviene advertir que también lo podemos ver como una consecuencia del Lema 4.2.2. Para demostrarlo necesitamos el resultado previo siguiente.

Lema 4.5.7. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado de dimensión dos y* $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ *un conjunto en* X. *Sea* $f_i \in Ja_i$ *para* $i = 1, 2, 3$. *Si* $\mathbf{0}$ *está en el interior de* $\operatorname{conv}(A)$, *entonces existen* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$, *a lo más uno nulo, tal que*

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0.$$

Demostración. Obviamente, basta probar que $\mathbf{0} \in \operatorname{conv}(\{f_1, f_2, f_3\})$.

Puesto que $\mathbf{0}$ está en la interior de $\operatorname{conv}(A)$, entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ positivos con $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, tal que

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0 \quad \text{y} \quad a_i \neq 0 \quad \text{para cada} \quad i = 1, 2, 3.$$

Por tanto

$$\lambda_1 \|a_1\| \frac{a_1}{\|a_1\|} + \lambda_2 \|a_2\| \frac{a_2}{\|a_2\|} + \lambda_3 \|a_3\| \frac{a_3}{\|a_3\|} = 0.$$

Así que podemos suponer que $\|a_i\| = 1$ para cada $i = 1, 2, 3$.

Para probar que $\mathbf{0} \in \operatorname{conv}(\{f_1, f_2, f_3\})$, por el Teorema de Hanh-Banach basta probar que para todo $x^{**} \in X^{**}$, $0 \leq \max\limits_{1 \leq i \leq 3} x^{**}(f_i)$. O equivalentemente, puesto que estamos en dimensión finita, basta probar que para todo $x \in X$ existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tal que $0 \leq f_i(x)$.

Sea $x \in X$, podemos suponer que $x \neq 0$. Como $\mathbf{0}$ está en el interior de $\operatorname{conv}(\{a_1, a_2, a_3\})$, la semirrecta $\{\lambda x : \lambda > 0\}$ corta a alguno de los lados $[a_i, a_j]$ con $1 \leq i, j \leq 3$, $i \neq j$. Por tanto existe λ_0 tal que $\lambda_0 x$ pertenece a uno de estos lados. Evidentemente, si $0 \leq f_i(\lambda_0 x) = \lambda_0 f_i(x)$ se sigue $f_i(x) \geq 0$. Por lo tanto, podemos suponer $\lambda_0 = 1$. Por lo tanto supongamos por ejemplo $x \in [a_1, a_2]$. En este caso existe $\lambda \in [0, 1]$ tal que $x = \lambda a_1 + (1 - \lambda) a_2$, por lo tanto

$$f_1(x) = \lambda + (1 - \lambda) f_1(a_2) \ \text{ y } \ f_2(x) = \lambda f_2(a_1) + 1 - \lambda.$$

Así que

$$f_1(x) + f_2(x) = \lambda\big(1 + f_2(a_1)\big) + (1 - \lambda)\big(1 + f_1(a_2)\big).$$

Como $\|a_i\| = 1$ y $\|f_i\| = 1$ para $i = 1, 2$, entonces

$$1 + f_2(a_1) \geq 0 \ \text{ y } \ 1 + f_1(a_2) \geq 0.$$

Seguí

$$f_1(x) + f_2(x) \geq 0.$$

Por tanto

$$f_1(x) \geq 0 \ \text{ o } \ f_2(x) \geq 0.$$

□

Nota 4.5.8. *No es difícil dar ejemplos que muestran que en el lema anterior es esencial la palabra "interior".*

Demostración del Lema 4.5.4:

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión dos y sea $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ un conjunto en X tal que $\mathbf{0}$ está en el interior de $\mathrm{conv}(A)$. Tomemos $f_i \in Ja_i$ para cada $i = 1, 2, 3$.

Por el lema anterior existen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$ a lo más uno nulo tal que

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0.$$

Sea $\lambda_i \geq 0$ tal que

$$\|\lambda_i a_i\|^{p-1} = \alpha_i, \quad \text{para cada} \quad i = 1, 2, 3.$$

Por el Lema 4.2.2 tenemos que

$$\mathbf{0} \in Z^{p}\big(\{\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \lambda_3 a_3\}\big).$$

4.5.3. Teorema de Blaschke y Kakutani

El teorema de Blaschke y Kakutani es una de los resultados clásicos que caracterizan un IPS. Puede verse por ejemplo (12.4) de [1] y [30].

Nos dice lo siguiente:

Teorema 4.5.9 (Blaschke-Kakutani). *Un espacio normado X de dimensión por lo menos tres es un* IPS *si y sólo si para cada subespacio Y de X de dimensión dos existe una proyección de la norma uno de X sobre Y.*

La Proposición siguiente (véase [34]) es una profundización en el significado de la caracterización Blaschke y Kakutani.

Proposición 4.5.10 (Proposición 4 de [34]). *Sea X un espacio normado con $\dim(X) = 3$, H un hiperplano contiene el origen $\mathbf{0}$ en X, y sea K la intersección de la bola unidad B_X y uno de los semiespacios cerrados que determina H. Sea P la proyección de la norma más pequeña posible de X sobre H. Entonces tenemos una de las afirmaciones siguientes*

(1) $P(K) \subset K$ *con* $\|P\| = 1$,

(2) $\mathbf{0} \in \mathrm{Int}\big(\mathrm{conv}(P(K) \setminus K)\big)$ *con la interior es relativo a H.*

Observación 4.5.11. *Con X, H y K en la* Proposición de Klee, *tenemos: X no admite un proyección de norma uno sobre H si y solo si existe un proyección P de X sobre H tal que* $\mathbf{0} \in \mathrm{Int}\big(\mathrm{conv}(P(K) \setminus K)\big)$.

El lema siguiente es esencialmente una reformulación del resultado de Klee.

Lema 4.5.12. *Sea X un espacio normado con* $\dim(X) = 3$*, sea x^* una función linear no nula en X, y denotamos por Y al subespacio de dimensiones dos $\{x \in X : x^*(x) = 0\}$. Supongamos que no hay proyección de norma uno de X sobre Y. Entonces existe una proyección P de X sobre Y y existen tres vectores unitarias u_1, u_2, u_3 en $Y^+ = \{x \in X : x^*(x) \geq 0\}$ de una manera que*

$$\|P(u_i)\| > 1 \quad \textit{para } i = 1, 2, 3$$

y que $\mathbf{0}$ *esta en la interior (relativo a Y) del triángulo que tiene $P(u_1)$, $P(u_2)$, $P(u_3)$ como vértices.*

Demostración. Denotemos por B la bola unidad de X, y por B^+ el conjunto $B \cap Y^+$. Por la Proposición 4.5.10 de Klee, existe un proyección P de X sobre Y tal que $\mathbf{0}$ esta en la interior (relativo a Y) de la envoltura convexa de $P(B^+) \setminus B^+$. Por el Teorema de Carathéodory (Teorema 17.1 de [42]), deducimos que existen tres vectores v_1, v_2, v_3, en B^+ tal que

$$\|P(v_i)\| > 1 \quad \text{para } i = 1, 2, 3$$

y que $\mathbf{0}$ es una combinación convexa de $P(v_1)$, $P(v_2)$, $P(v_3)$. La desigualdad anterior implica que todas v_i no son nulas, así que podemos tomar $u_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$. Por supuesto, las vectores u_i tienen norma uno en $B^+ \subset Y^+$. Además

$$\|P(u_i)\| = \left\| P\left(\frac{v_i}{\|v_i\|}\right) \right\| = \frac{\|P(v_i)\|}{\|v_i\|} > \frac{1}{\|v_i\|} \geq 1 \ , \quad \text{para } i = 1, 2, 3$$

Por otra parte, desde que $\mathbf{0}$ es una combinación convexa de $P(v_1)$, $P(v_2)$, $P(v_3)$, es también una combinación convexa de

$$P(u_1) = \frac{1}{\|v_1\|} P(v_1), \ P(u_2) = \frac{1}{\|v_2\|} P(v_2), \ P(u_3) = \frac{1}{\|v_3\|} P(v_3) \ .$$

Para terminar nuestra prueba tenemos que demostrar solamente que $\mathbf{0}$ no es una combinación convexa de dos vectores $P(u_i)$, puesto que esto garantiza que $\mathbf{0}$ esta en la interior (relativo a Y) de la envoltura convexa de $P(u_1)$, $P(u_2)$, $P(u_3)$. Si asumimos, por ejemplo, que $\mathbf{0}$ es una combinación convexa de $P(u_1)$ y $P(u_2)$, entonces existe un $\lambda \in (0, 1]$ tal que

$$P(u_1) = -\lambda P(u_2) \ \text{ ó } \quad P(u_2) = -\lambda P(u_1).$$

Denotemos $x = P(u_1) = P(-\lambda u_2)$. Tomamos $w \in \mathrm{Ker}(P) \cap Y^+$, $w \neq 0$ (por ejemplo, $w = u_1 - P(u_1)$). Como u_1 pertenece a Y^+ y $-\lambda u_2$ pertenece a $Y^- = \{x \in X : x^*(x) \leq 0\}$, hay $\alpha, \beta > 0$ tal que

$$u_1 = x + \alpha w \ \text{ y } \ -\lambda u_2 = x - \beta w \ .$$

Por tanto x pertenece a $[u_1, -\lambda u_2]$. Pero u_1 y $-\lambda u_2$ están en la bola unidad, así que deducimos que x también esta en la bola unidad. Esto es una contradicción porque $\|x\| = \|P(u_1)\| > 1$. □

Ahora ya podemos dar nuestra prueba del Teorema 4.1.1 de Benítez, Fernández y Soriano.

4.5.4. Demostración del Teorema 4.1.1 de Benítez- Fernández-Soriano

Recordemos que lo que vamos a demostrar es que un espacio X es IPS si y sólo si se cumple la condición siguiente:

(GK_p) *Cada conjunto de tres puntos en X tiene un p-centro ($p \in (1,\infty)$) en su envoltura convexa.*

En efecto, supongamos que X no es un IPS. Podemos suponer que $\dim(X) = 3$. Por el Teorema 4.5.9 de Blaschke y Kakutani, existe un subespacio Y de dimensión dos de X, tal que X no admite ninguno proyección sobre Y de norma uno. Tomamos una función lineal x^* en X tal que $Y = \mathrm{Ker}(x^*)$. Por el Lema 4.5.12, existe un proyección P de X sobre Y y tres vectores unitarias u_1, u_2, u_3 en $Y^+ = \{x \in X : x^*(x) \geq 0\}$ de una manera tal que

$$\|P(u_i)\| > 1 \quad \text{para } i = 1, 2, 3$$

y que $\mathbf{0}$ esta en la interior (relativo a Y) del triángulo que tiene $P(u_1)$, $P(u_2)$, $P(u_3)$ como vértices. Denotamos $P(u_i) = x_i$. Por el Lema 4.5.4, existen tres números no negativos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a lo mas uno de ellos igual a cero, tal que $\mathbf{0}$ es p-centro de $\Delta = \{\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3\}$ en Y. Supongamos por ejemplo que $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 = 0$. Por el Lema 4.5.1, tenemos

$$\left[\frac{x_1}{\|x_1\|}, -\frac{x_2}{\|x_2\|}\right] \subset S_Y.$$

Como $\|x_1\|, \|x_2\| > 1$, si tomamos $\lambda \in [0,1]$, entonces conseguimos que,

$$\begin{aligned} \|\lambda x_1 - (1-\lambda)x_2\| &= \left\| \lambda\|x_1\|\frac{x_1}{\|x_1\|} - (1-\lambda)\|x_2\|\frac{x_2}{\|x_2\|} \right\| \\ &= \lambda\|x_1\| + (1-\lambda)\|x_2\| > 1 \end{aligned}$$

es decir

$$[x_1, -x_2] \cap B_Y = P\big([u_1, -u_2]\big) \cap B_Y = \emptyset.$$

Pero recordamos que $u_1, u_2 \in Y^+$, por tanto $[u_1, -u_2] \cap B_Y \neq \emptyset$, por supuesto eso implica que $[x_1, -x_2] \cap B_Y \neq \emptyset$, eso es la contradicción deseada.

Para acabar nuestra prueba observamos que $\mathbf{0}$ es p-centro del triángulo que tiene como vértices $\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3$ en Y, pero no es p-centro de tal triángulo en X. En efecto, tomamos $a \in \mathrm{Ker}(P) \cap Y^+$, $a \neq 0$ (por ejemplo, $a = u_1 - P(u_1)$), así que existen tres números positivos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tal que

$$u_i = x_i + \alpha_i a \quad \text{para } i = 1, 2, 3\ .$$

Como para cada $i = 1, 2, 3$

$$\|u_i\| = \|x_i + \alpha_i a\| = 1 < \|x_i\|$$

por la convexidad, deducimos que para cada $i = 1, 2, 3$ y para todo $t \in (0, \alpha_i]$,

$$\|x_i + ta\| < \|x_i\| \ .$$

Así que, si denotamos $\beta = \text{mín}\{\lambda_i \alpha_i \ : \ i = 1, 2, 3\}$, entonces

$$\|\lambda_i x_i + \beta a\| = \lambda_i \left\| x_i + \frac{\beta}{\lambda_i} a \right\| < \lambda_i \|x_i\| = \|\lambda_i x_i\| \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \ .$$

Por tanto

$$\|\lambda_1 x_1 + \beta a\|^p + \|\lambda_2 x_2 + \beta a\|^p + \|\lambda_3 x_3 + \beta a\|^p < \|\lambda_1 x_1\|^p + \|\lambda_2 x_2\|^p + \|\lambda_3 x_3\|^p \ .$$

Esto termina nuestra prueba.

En el diagrama siguiente, resumimos las caracterizaciones de los espacios IPS, obtenidas usando algunas propiedades geométricas del conjunto formado por los p-centros de un conjunto de tres puntos. Obsérvese que resumiendo lo visto en este capítulo y en los anteriores, las equivalencias siguientes y anteriores son validas para cualquiera $p \in [1, \infty]$.

Sea X un espacio normado de dimensión al menos tres. Entonces tenemos que

$$X \text{ satisface } (\mathrm{GK}_p) \iff X \text{ satisface } \left(\mathrm{GK}_p^S\right) \iff X \text{ es un IPS}$$

Capítulo 5

Caracterización de IPS mediante γ-centros

5.1. Las caracterizaciones (15.15) de Amir y la propiedad $(\mathbf{A}_\gamma)$

Amir da en [1] la caracterización siguiente de los IPS de dimensión mayor o igual que tres:

Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ *de dimensión mayor o igual que tres es* IPS *si y sólo si satisface la propiedad siguiente*:

(15.15) *Para cada tres puntos* a_1, a_2, a_3 *de norma uno en* X*, si* $\mathbf{0}$ *está en la envoltura convexa de* $\{a_1, a_2, a_3\}$*, entonces* $r_X(\{a_1, a_2, a_3\}) = \mathbf{1}$.

Nota 5.1.1. *Escribimos* (15.15) *como en* [1].

Observemos que (15.15) viene a ser una condición "dual" a (15.14) que estudiamos con detalles en el capítulo 2.

Amir indica que la demostración de la caracterización anterior "es inmediata por el Lema 15.1", sin embargo no hemos sido capaces de ver por qué. Y como además es el mismo argumento que empleaba en la condición (15.14) (que resulta ser falso, véase capítulo 2) hemos preferido dar una demostración completa y detallada. Esta demostración no usa el "Lema 15.1".

Para ser más precisos, veamos a probar un resultado más general que el de Amir, que nos dará la caracterización (15.15) como consecuencia inmediata.

Puesto que a_1, a_2, a_3 tienen norma uno, $r_X(\{a_1, a_2, a_3\}) = \mathbf{1}$ señala que $\mathbf{0}$ es un centro de Chebyshev de $\{a_1, a_2, a_3\}$. Por lo tanto, la condición (15.15) se transforma en

(15.15') *Para cada tres puntos* a_1, a_2, a_3 *de norma uno en* X, *si* $\mathbf{0}$ *está en la envoltura convexa de* $\{a_1, a_2, a_3\}$, *entonces* $\mathbf{0}$ *es centro de Chebyshev de* $\{a_1, a_2, a_3\}$.

Si cambiamos en (15.15') "centro de Chebyshev" por "γ-centro" (γ es 3-norma monótona) se obtiene la propiedad siguiente:

(A_γ) *Para cada tres puntos* a_1, a_2, a_3 *de norma uno en* X, *si* $\mathbf{0}$ *está en la envoltura convexa de* $\{a_1, a_2, a_3\}$, *entonces* $\mathbf{0}$ *es* γ*-centro de* $\{a_1, a_2, a_3\}$.

De manera natural surgió el problema de decidir si la propiedad (A_γ) caracteriza los IPS.

El resultado que aparece a continuación resuelve afirmativamente este problema.

Teorema 5.1.2. *Sea* X *un espacio normado con* $\dim(X) \geq 3$ *y sea* γ *una* 3*-norma monótona. Entonces* X *es un* IPS *si sólo si se cumple la condición siguiente:*

(A_γ) *Para cada tres puntos* a_1, a_2, a_3 *de norma uno en* X, *si* $\mathbf{0}$ *está en la envoltura convexa de* $\{a_1, a_2, a_3\}$, *entonces* $\mathbf{0}$ *es* γ*-centro de* $\{a_1, a_2, a_3\}$.

Demostración. Supongamos que X no es un IPS. Podemos suponer que tiene dimensión tres. Por el criterio de Kakutani-Blaschke (Teorema 4.5.9), tiene un subespacio de dos dimensiones Y, tal que X no admite ningún proyección de la norma uno sobre Y. Tomamos una función lineal x^* en X tales que $Y = \mathrm{Ker}(x^*)$. Por el Lema 4.5.12, existe un proyección P de X sobre Y y existen tres vectores unitarias u_1, u_2, u_3 en $Y^+ = \{x \in X : x^*(x) \geq 0\}$ de una manera tal que

$$\|P(u_i)\| > 1 \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3$$

y sea $\mathbf{0}$ esta la interior (en relación a Y) de la envoltura convexa del conjunto formado por los puntos $P(u_1)$, $P(u_2)$, $P(u_3)$. Denotamos

$$a_i = \frac{P(u_i)}{\|P(u_i)\|} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3\ .$$

Esta claro que $\mathbf{0}$ pertenece a la envoltura convexa de $\Delta = \{a_1, a_2, a_3\}$.

Para acabar nuestra prueba tenemos que demostrar solamente que $\mathbf{0}$ no es γ-centro del conjunto Δ. Tomamos un vector no nula a en $Y^+ \cap \mathrm{Ker}(P)$. Entonces hay números positivos $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ tales que $u_i = P(u_i) + \beta_i a$ para cada $i = 1, 2, 3$. Por lo tanto, tenemos

$$\|u_i\| = \|P(u_i) + \beta_i a\| = 1 < \|P(u_i)\| \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3\ .$$

Luego,

$$\left\| \frac{P(u_i)}{\|P(u_i)\|} + \frac{\beta_i}{\|P(u_i)\|} a \right\| = \|a_i + t_i a\| < 1$$

para $i = 1, 2, 3$, donde $t_i = \frac{\beta_i}{\|P(u_i)\|}$. Si $t \in (0, t_i]$, la convexidad de la aplicación $t \mapsto \|a_i + ta\|$ garantiza que $\|a_i + ta\| < 1$. Denotemos

$$\theta = \text{mín}\{t_i : \ i = 1, 2, 3\} \ .$$

Así que tenemos

$$\|a_i + \theta a\| < 1 \ \text{ para cada } \ i = 1, 2, 3 \ .$$

Por tanto, por el Lema 1.7.2 tenemos

$$\begin{aligned} G^\gamma(\Delta)(\theta a) &= \gamma(\|a_1 + \theta a\|, \|a_2 + \theta a\|, \|a_3 + \theta a\|) \\ &< \gamma(1, 1, 1) = \gamma(\|a_1\|, \|a_2\|, \|a_3\|) = G^\gamma(\Delta)(0). \end{aligned}$$

Es decir que **0** no es γ-centro del conjunto $\Delta = \{a_1, a_2, a_3\}$. □

Por el teorema anterior la caracterización (15.15) de Amir es una consecuencia inmediata, cuando $\gamma = \| \cdot \|_\infty$.

Corolario 5.1.3 (La caracterización (15.15) de Amir). *Sea X un espacio normado con* $\dim(X) \geq 3$. *Entonces X es un* IPS *si sólo si se cumple la condición siguiente:*

(15.15) *Para cada tres puntos a_1, a_2, a_3 de norma uno en X, si* **0** *está en la envoltura convexa de $\{a_1, a_2, a_3\}$, entonces* $r_X(\{a_1, a_2, a_3\}) = \mathbf{1}$.

5.2. Propiedades de la envoltura

En principio Durier estudió en [17] la descripción geométrica del conjunto de los γ-centros de un conjunto finito en un espacio normado. Posteriormente introdujo en [18], las propiedades siguientes que involucran dichos centros con la envoltura convexa y afín de tal conjunto.

Definición 5.2.1 (Definición 3.1 de [18]). *Sea $n \geq 2$ y sea γ una n-norma monótona. Decimos que X satisface $(CvHP)_n^\gamma$, que se llama la propiedad de la envoltura convexa* (respectivamente. *$(AfHP)_n^\gamma$, que se llama la propiedad de la envoltura afín*) *si para cada subconjunto A en X con n puntos y para cada n-familia positiva ω,*

$$M_\omega^\gamma(A) \cap \text{conv}(A) \neq \emptyset$$

$$\big(\text{respectivamente.} \quad M_\omega^\gamma(A) \cap \text{aff}(A) \neq \emptyset\big).$$

Nota 5.2.2. Hacemos notar aquí que los resultados de esta sección y la siguiente no son generalizaciones de los que están en los capítulos 2,3 y 4, pues nótese que en las definiciones se pide que se cumplan las condiciones *para toda n-familia positiva* ω.

Es inmediato ver que si X satisface $(CvHP)_n^\gamma$, entonces satisface $(AfHP)_n^\gamma$. Entonces es natural preguntar si el inverso es verdad o no.

Demostramos primero en esta sección que la respuesta es afirmativa para $n = 3$. A continuación, en la siguiente sección demostramos que estas propiedades son realmente características equivalentes para un número n arbitrario.

Proposición 5.2.3. *Las propiedades* $(CvHP)_3^\gamma$ *y* $(AfHP)_3^\gamma$ *son equivalentes.*

Demostración. Por supuesto $(CvHP)_3^\gamma$ implica $(AfHP)_3^\gamma$, tenemos que probar solamente el inverso.

Sea X un espacio normado que verifica $(AfHP)_3^\gamma$. Sea $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ un conjunto de X y sea ω una 3-familia positiva.

Tomando una translación en caso de necesidad, podemos suponer que el espacio afín generalizado por $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ pasa por $\mathbf{0}$ es decir que es un espacio vectorial de dimensión dos, lo denotemos Y.

Por nuestra hipótesis existe $x_0 \in Y$ tal que

$$G_\omega^\gamma(A)(x_0) \leq G_\omega^\gamma(A)(x)$$

para cada $x \in Y$. Por la Proposición 1.11.2 existe $x_0' \in \mathrm{conv}(A)$ tal que

$$\|x_0' - a_i\| \leq \|x_0 - a_i\|$$

para $i = 1, 2, 3$. Como $\omega_i > 0$ para $i = 1, 2, 3$ y γ monótona, obtenemos

$$G_\omega^\gamma(A)(x_0') \leq G_\omega^\gamma(A)(x_0) \leq G_\omega^\gamma(A)(x)$$

para todo $x \in X$. Esto concluye nuestra prueba. □

5.3. Dos caracterizaciones de Durier

Durier estudio en [18] las propiedades $(CvHP)_n^\gamma$ y $(AfHP)_n^\gamma$. Para la primera obtiene la siguiente caracterización:

Teorema 5.3.1 (Teorema 3.8 de [18]). *Sea* X *un espacio normado de dimensión por lo menos tres. Sea* $n \geq 3$ *y* γ *una* n*-norma monótona. Si* X *satisface* $(CvHP)_n^\gamma$*, entonces* X *es un* IPS.

Pero para la segunda obtiene caracterización solamente en un caso particular:

Teorema 5.3.2 (Teorema 3.5 de [18]). *Sea X un espacio normado de dimensión por lo menos tres. Sea $n \geq 3$ y $\|\cdot\|_1$ la usual norma de la suma en $\mathbb{R}^n$. Si X satisface $(AfHP)_n^{\|\cdot\|_1}$, entonces X es un* IPS.

Nosotros aquí, gracias al resultado de la sección anterior podemos dar la caracterización con completa generalidad.

Proposición 5.3.3. *Sea X un espacio normado con* $\dim(X) \geq 3$*, y sea γ una 3-norma monótona. Entonces son equivalentes:*

(i) X *satisface* $(AfHP)_3^\gamma$.
(ii) X *satisface* $(CvHP)_3^\gamma$.
(iii) X *es un* IPS.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) por la Proposición 5.2.3.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) por el Teorema 5.3.1.
(iii) $\Rightarrow$ (i) por la Proposición 1.10.3. □

Para probar que las propiedades $(CvHP)_n^\gamma$ y $(AfHP)_n^\gamma$ donde $n \geq 3$, son equivalentes y que caractericen un IPS, introducimos la proposición siguiente.

Proposición 5.3.4 (Proposición 3.3 de [18]). *Sea $n \geq 2$ y γ una n-norma monótona y Sea γ' una $(n-1)$-norma monótona en $\mathbb{R}^{n-1}$ dada como*

$$\gamma'(t_1, \ldots, t_{n-1}) = \gamma(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_{n-1}).$$

*Si X satisface $(CvHP)_n^\gamma$ $\big($*respectivamente. *$(AfHP)_n^\gamma$ $\big)$, entonces X satisface $(CvHP)_{n-1}^{\gamma'}$ $\big($*respectivamente. *$(AfHP)_{n-1}^{\gamma'}$ $\big)$.*

Demostración. Sea A' un subconjunto de $n-1$ puntos y $\omega' = (\omega'_1, \ldots, \omega'_{n-1})$ una familia de $n-1$ numeros positivos.

Elegimos un punto $b \in \operatorname{conv}(A')$ tal que $b \notin A'$, y consideramos $A = A' \cup \{b\}$ y $\omega = \left(\omega'_1, \ldots, \frac{\omega'_{n-1}}{2}, \frac{\omega'_{n-1}}{2}\right)$.

Por las hipótesis, existe un punto $x_b \in \operatorname{conv}(A) = \operatorname{conv}(A')$ donde la función $G_\omega^\gamma(A)$ alcanza su mínimo. Cuando b tiende a a_{n-1}, entonces la familia $(x_b)_{b \in \operatorname{conv}(A')}$ está incluida en el conjunto compacto $\operatorname{conv}(A')$, por tanto tiene un punto de aglomeración $\overline{x} \in \operatorname{conv}(A')$ donde la función $G_{\omega'}^\gamma(A')$ alcanza su mínimo.

El argumento es válido también por la propiedad de la envoltura afín en lugar de la propiedad de la envoltura convexa usando el hecho siguiente: Si $A \subset B(0,r)$, entonces $M_\omega^\gamma(A) \subset B(0,2r)$. □

Teorema 5.3.5. *Sea X un espacio normado con* $\dim(X) \geq 3$*, y sea γ una n-norma monótona donde $n \geq 3$. Entonces son equivalentes:*

(i) X *satisface* $(AfHP)_n^\gamma$.
(ii) X *satisface* $(CvHP)_n^\gamma$.
(iii) X *es un* IPS.

Demostración. Supongamos que (i) $\big($respectivamente, $(ii)\big)$ es satisfecho. Entonces por la Proposición 5.3.4 X satisface $(AfHP)_3^{\gamma'}$ $\big($respectivamente, $(CvHP)_3^{\gamma'}\big)$ para alguna 3-norma monótona γ'. En todos casos deducimos por la Proposición 5.3.3 que X es un IPS. Para la recíproco aplicamos la Proposición 1.10.3. $\square$

Corolario 5.3.6. *Sea X un espacio normado, n un número natural y sea γ una n-norma monótona, entonces tenemos:*

(1) *Si $n = 1$ o $n = 2$ entonces todo espacio normado X satisface $(AfHP)_n^{\gamma}$ y $(CvHP)_n^{\gamma}$.*

(2) *Si $n \geq 3$ entonces todo espacio normado X de dimensión dos satisface $(AfHP)_n^{\gamma}$ y $(CvHP)_n^{\gamma}$.*

(3) *Si $n \geq 3$ y $\dim(X) > 2$, entonces las propiedades $(AfHP)_n^{\gamma}$ y $(CvHP)_n^{\gamma}$ se cumplen solamente si el espacio es un* IPS.

Demostración. Es una consecuencia de las Proposiciones 5.3.4, 5.2.3 y el Teorema 5.3.5. $\square$

5.4. Una caracterización mediante γ-centros de tres puntos de norma uno

Usamos las mismas ideas de las características que están recogidas en la Definición 5.2.1. Podemos considerar la variación siguiente de dichas características.

Definición 5.4.1. *Sea $n \geq 2$, y sea γ una n-norma monótona. Decimos que X satisface la condición $S-(CvHP)_n^{\gamma}$, llamado la propiedad de la envoltura S-convexa $\big($resp. $S-(AfHP)_n^{\gamma}$, la propiedad de la envoltura S-afín $\big)$ si, para cada conjunto finito A de n puntos en la esfera unidad de X y para cada n-familia positiva ω, se tiene que*

$$M_{\omega}^{\gamma}(A) \cap \operatorname{conv}(A) \neq \emptyset \quad \big(\textit{resp.}\ \ M_{\omega}^{\gamma}(A) \cap \operatorname{aff}(A) \neq \emptyset\big).$$

Lema 5.4.2 (Corolario 2.5 de [18]). *Sea $n \geq 2$ y sea γ una n-norma monótona. Sea A un conjunto de n puntos en la esfera unidad de X y λ una n-familia positiva. Si $\mathbf{0} \in Z_{\lambda}^{1}(A)$, entonces existe una n-familia ω positiva tal que*

$$\mathbf{0} \in M_{\omega}^{\gamma}(A) \subseteq Z_{\lambda}^{1}(A).$$

Teorema 5.4.3. *Sea X un espacio normado de dimensión al menos tres, y sea γ una 3-norma monótona. Entonces son equivalentes.*

(i) X *es un* IPS.
(ii) X *satisface* $S-(CvHP)_3^{\gamma}$.
(iii) X *satisface* $S-(AfHP)_3^{\gamma}$.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) es bien sabido, véase por ejemplo la Proposición 1.10.3.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) es trivial.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Supongamos que X no es un IPS. Entonces por el Lema 3.4.2, existen un subespacio Y de X y un triángulo Δ en la esfera unidad de Y tal que $\mathbf{0} \in Z^1_Y(\Delta)$ y $Z^1_Y(\Delta) \cap \operatorname{conv}(\Delta) = \emptyset$. Está claro que por el Corolario 1.13.3, tenemos que $Z^1_Y(\Delta) \cap \operatorname{aff}(\Delta) = \emptyset$.

Por el Lema 5.4.2, existe una 3-familia ω positiva tal que

$$M^\gamma_{Y,\omega}(\Delta) = \left\{ z \in Y \ : \ G^\gamma_\omega(\Delta)(z) = \inf_{y \in Y} G^\gamma_\omega(\Delta)(y) \right\} \subset Z^1_Y(\Delta).$$

Por tanto

$$M^\gamma_{Y,\omega}(\Delta) \cap \operatorname{aff}(\Delta) = \emptyset.$$

Seguí

$$\inf_{y \in Y} G^\gamma_\omega(\Delta)(y) < G^\gamma_\omega(\Delta)(z) \quad \text{para cada} \quad z \in \operatorname{aff}(\Delta).$$

Así que

$$\inf_{x \in X} G^\gamma_\omega(\Delta)(x) \leq \inf_{y \in Y} G^\gamma_\omega(\Delta)(y) < G^\gamma_\omega(\Delta)(z) \quad \text{para cada} \quad z \in \operatorname{aff}(\Delta).$$

Concluimos que

$$M^\gamma_\omega(\Delta) \cap \operatorname{aff}(\Delta) = \emptyset.$$

Esto significa que X no satisface la condición $S - (AfHP)^\gamma_3$. $\square$

En el diagrama siguiente, resumimos las nuevas caracterizaciones de los espacios IPS, obtenidas usando algunas propiedades geométricas del conjunto formado por los γ-centros de un conjunto de tres puntos, donde γ es una 3-norma monótona.

Sea X un espacio normado de dimensión al menos tres. Entonces tenemos que

$$\begin{array}{ccc}
X \text{ satisface } (AfHP)^\gamma_3 & \Longleftrightarrow & X \text{ satisface } (CvHP)^\gamma_3 \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \\
X \text{ satisface } S-(AfHP)^\gamma_3 & \Longleftrightarrow & X \text{ satisface } S-(CvHP)^\gamma_3 \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \\
X \text{ es un IPS} & \Longleftrightarrow & X \text{ satisface } (\mathrm{A}_\gamma)
\end{array}$$

Capítulo 6

Proximinalidad simultánea en $L_1(\mu, X)$

6.1. ¿Qué es un aproximación simultánea óptima?

Hay varios tipos de aproximación simultánea. Para concretar comencemos con una definición que es la que usaremos primero.

Definición 6.1.1 (Definición 1 de [45]). *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado e Y un subconjunto de X. Sea $n \geq 2$, $x_1, \ldots, x_n$, n puntos en X y sea N una n-norma monótona en $\mathbb{R}^n$.*

Se dice que un punto y_0 en Y, es una aproximación N-simultánea óptima de $x_1, \ldots, x_n$ en Y, si y_0 minimiza

$$N\big(\|x_1 - y\|, \ldots, \|x_n - y\|\big), \tag{6.1}$$

sobre el subconjunto Y.

Como se ve, el objetivo de la aproximación simultánea, naturalmente, es aproximar varios puntos "a la vez". En este sentido se parece a un problema de búsqueda del centro de un conjunto de puntos del tipo de los problemas que hemos visto en los primeros capítulos. La diferencia es que ahora, al igual que en los problemas de aproximación usuales, queremos aproximar mediante puntos de un conjunto o subconjunto dado. Es decir, si en la definición anterior tomamos $Y = X$ tenemos la definición que ya vimos de N-centro. Naturalmente lo interesante es $Y \neq X$: queremos aproximar puntos de X mediante puntos de Y.

Un concepto importante en aproximación es el de subespacio proximinal, el concepto análogo en aproximación simultánea es el siguiente:

Definición 6.1.2. *Sea X un espacio normado e Y un subconjunto de X. Sea $n \geq 2$ y sea N una n-norma monótona en $\mathbb{R}^n$.*

Se dice que Y es proximinal N-simultáneamente en X, si cada n puntos en X, tienen una aproximación N-simultánea óptima en Y.

En este capítulo nos vamos a centrar en cuestiones de aproximación simultánea en el espacio $L_1(\mu, X)$ para ello empezaremos recordando lo fundamental sobre este espacio.

6.2. Algunos cuestiones sobre el espacio $L_1(\mu, X)$

A partir de ahora y durante lo que resta de este capítulo, $(X, \|\cdot\|)$ será un espacio de Banach real, Y un subespacio cerrado de X, (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita. Las cuestiones básicas sobre espacios del tipo $L_1(\mu, X)$ pueden verse en [14].

Definición 6.2.1. *Se dice que una función $f : \Omega \to X$ es μ-medible, si existe una sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ de funciones simples tal que $\lim_{n\to\infty} \big\|f(s) - f_n(s)\big\| = 0$ μ-en c.t.p.*

Notación 1. *Denotamos por $L_1(\mu, X)$ al espacio de Banach dotado de su norma usual de todas funciones definidas en Ω, con valores en X, μ-medibles y $\|f\|_1 < \infty$, donde*

$$\|f\|_1 = \int_\Omega \|f(s)\| d\mu.$$

Es decir,

$$L_1(\mu, X) = \big\{ f : \Omega \to X, \quad f \text{ es } \mu - \text{medible} \quad y\ \|f\|_1 < \infty \ \big\}.$$

Definición 6.2.2. *Se dice que una sucesión $(f_n)_{n\geq 1}$ en $L_1(\mu, X)$ es uniformemente integrable si*

$$\lim_{\mu(A)\to 0} \sup_{n\geq 1} \int_A \|f_n\| d\mu = 0 \ .$$

Un resultado muy conocido, inspirado en el resultado clásico de Dunford, nos da la siguiente caracterización de los débilmente relativamente compactos de $L_1(\mu, X)$ cuando X y X^* tienen la propiedad de Radon-Nikodým.

Teorema 6.2.3 (Teorema IV.2.1 de [14]). *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y X un espacio de Banach tal que X y X^* tienen la propiedad de Radon-Nikodým. Un conjunto K de $L_1(\mu, X)$ es débilmente relativamente compacto si y solo si*

(i) *K es acotado,*

(ii) *K es uniformemente integrable, y*

(iii) *para cada $A \in \Sigma$, el conjunto $\left\{ \int_A f d\mu \ : \ f \in K \right\}$ es débilmente relativamente compacto.*

Demostración. véase páginas 101-103 de [14]. □

Observación 6.2.4. *Las condiciones en que el Teorema precedente es válido han sido estudiados por C. Fierro,* [20], [21], *N. Ghoussoub y P. Saab* [25]*. Ellos probaron que la caracterización de los débilmente relativamente compactos de $L_1(\mu, X)$ que expresa tal teorema es válido para todo medida finita μ si y sólo si el espacio X y su dual X^* tienen la propiedad de Radon-Nikodým.*

Observación 6.2.5. *Todo espacio reflexivo tiene la propiedad de Radon-Nikodým (Corolario* 13*, página* 76 *de* [14]*).*

El lema que viene a continuación (Lema 2.1.3 de [9]) contiene un resultado que fue descubierto por Kadec y Pełczyński [29] y mejorado por Rosenthal [43].

Lema 6.2.6 (Kadec-Pełczyński-Rosenthal, [9]). *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita. Si $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión acotada en $L_1(\mu, X)$, entonces existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ y una sucesión $(A_k)_{k\geq 1}$ de conjuntos medibles y disjuntos dos a dos tal que $(f_{n_k}\chi_{A_k^c})_{k\geq 1}$ es uniformemente integrable.*

6.3. Proximinalidad simultánea en $L_1(\mu, X)$. Primer caso

Los subespacios S de $L_1(\mu, X)$ más estudiados son de la forma $S = L_1(\mu, Y)$ con Y subespacio de X o $S = L_1(\mu_0, Y)$ con μ_0 una restricción de μ a una sub-σ-álgebra Σ_0 de Σ.

En este tipo de subespacios de $L_1(\mu, X)$ es en los que se ha centrado el estudio de cuestiones de proximinalidad y proximinalidad simultánea.

Respeto a los subespacios de la forma $L_1(\mu, Y)$ se ha estudiado cuestiones de proximinalidad en [13], [31], [32], [33], [38], [39], [40], [58], y de proximinalidad simultánea en [45]. En esta última línea el principal resultado que tenemos es el siguiente:

Teorema 6.3.1 (Teorema 4 de [45]). *Sea N una n-norma monótona en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. Si Y es reflexivo, entonces $L_1(\mu, Y)$ es proximinal N-simultáneamente en $L_1(\mu, X)$.*

Respecto al subespacio $L_1(\mu_0, X)$ de $L_1(\mu, X)$, en el problema de la proximinalidad se estudió primero el caso $X = \mathbb{R}$ en [46], más tarde se extendió al caso vectorial (en el que X es un espacio reflexivo) en [41]. El principal resultado es el de Papageorgiou:

Teorema 6.3.2 (Teorema 1 de [41]). *Si X es un espacio reflexivo y Σ_0 es una sub- σ- álgebra de Σ, entonces $L_1(\mu_0, X)$ proximinal en $L_1(\mu, X)$*

Como no hemos encontrado en la literatura ningún resultado sobre proximinalidad simultánea para este tipo de subespacio, la pregunta natural que surge es:

> "*Sea N una n-norma monótona en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ y Σ_0 es una sub- σ- álgebra de Σ, ¿es $L_1(\mu_0)$ proximinal N-simultáneamente en $L_1(\mu)$? Más en general, si X es un espacio reflexivo ¿es $L_1(\mu_0, X)$ proximinal N-simultáneamente en $L_1(\mu, X)$?*"

Vamos a dedicar esta sección a responder a esta pregunta. Necesitamos una definición y algunos lemas previos:

Definición 6.3.3. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado real e Y un subespacio de X. Sea N una n-norma monótona en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ y sea $x_1, \ldots, x_n \in X$. Sea $(y_k)_{k\geq 1}$ una sucesión en Y.*

Decimos que $(y_k)_{k\geq 1}$ es una sucesión N-simultáneamente aproximadora de $x_1, \ldots, x_n$ en Y, si

$$\lim_{k\to\infty} N\big(\big\|x_1 - y_k\big\|, \ldots, \big\|x_n - y_k\big\|\big) = \inf_{z\in Y} N(\|x_1 - z\|, \ldots, \|x_n - z\|).$$

Lema 6.3.4. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado real e Y un subespacio de X. Sea N una n-norma monótona en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ y sea $x_1, \ldots, x_n \in X$. Sea $(y_k)_{k\geq 1}$ una sucesión en Y.*

Si $(y_k)_{k\geq 1}$ es una sucesión N-simultáneamente aproximadora de $x_1, \ldots, x_n$ en Y y converge débilmente a cierto punto $y_0 \in Y$, entonces y_0 es una aproximación N-simultánea óptima de $x_1, \ldots, x_n$ en Y.

Demostración. Por el Teorema de Hahn-Banach, sabemos que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $x_i^* \in S_{X^*}$ tal que

$$x_i^*(x_i - y_0) = \|x_i - y_0\|.$$

Puesto que $(y_k)_{k\geq 1}$ converge débilmente al punto $y_0 \in Y$, entonces

$$\begin{aligned} N\big(\|x_1 - y_0\|, \ldots, \|x_n - y_0\|\big) &= N\big(x_1^*(x_1 - y_0), \ldots, x_n^*(x_n - y_0)\big) \\ &= N\Big(\lim_{k\to\infty} x_1^*(x_1 - y_k), \ldots, \lim_{k\to\infty} x_n^*(x_n - y_k)\Big) \\ &= N\Big(\lim_{k\to\infty} \big(x_1^*(x_1 - y_k), \ldots, x_n^*(x_1 - y_k)\big)\Big). \end{aligned}$$

Como N es continua, entonces

$$N\big(\|x_1 - y_0\|, \dots, \|x_n - y_0\|\big) = \lim_{k\to\infty} N\big(x_1^*(x_1 - y_k), \dots, x_n^*(x_1 - y_k)\big).$$

Por otra parte, como N es n-norma monótona, tenemos que

$$N\big(x_1^*(x_1 - y_k), \dots, x_n^*(x_1 - y_k)\big) \leq N\big(\|x_1 - y_k\|, \dots, \|x_n - y_k\|\big),$$

para todo $k \geq 1$. Así que

$$\lim_{k\to\infty} N\big(x_1^*(x_1 - y_k), \dots, x_n^*(x_1 - y_k)\big) \leq \liminf_{k\to\infty} N\big(\|x_1 - y_k\|, \dots, \|x_n - y_k\|\big).$$

Por tanto

$$\begin{aligned} N\big(\|x_1 - y_0\|, \dots, \|x_n - y_0\|\big) &= \lim_{k\to\infty} N\big(x_1^*(x_1 - y_k), \dots, x_n^*(x_1 - y_k)\big) \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} N\big(\|x_1 - y_k\|, \dots, \|x_n - y_k\|\big) \\ &= \inf_{z\in Y} N(\|x_1 - z\|, \dots, \|x_n - z\|). \end{aligned}$$

Esto significa que y_0 es una aproximación N-simultánea óptima de $x_1, \dots, x_n$ en Y. □

Lema 6.3.5. *Sea N una n-norma monótona en $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), $f_1, \dots, f_n \in L_1(\mu, X)$ y sea $(g_k)_{k\geq 1} \subset L_1(\mu_0, X)$ una sucesión N-simultáneamente aproximadora de $f_1, \dots, f_n$ en $L_1(\mu_0, X)$.*

Si $(A_k)_{k\geq 1} \subset \Sigma_0$ tal que $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = 0$, entonces $(g_k \chi_{A_k^c})_{k\geq 1}$ también es una sucesión N-simultáneamente aproximadora de $f_1, \dots, f_n$ en $L_1(\mu_0, X)$.

Demostración. Sabemos que para cada $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq N\big(\|f_1 - g_k\chi_{A_k^c}\|_1, \dots, \|f_n - g_k\chi_{A_k^c}\|_1\big) \\ &\qquad - \inf_{h\in L_1(\mu_0,X)} N(\|f_1 - h\|_1, \dots, \|f_n - h\|_1) \\ &= N\left(\int_{A_k} \|f_1\| d\mu + \int_{A_k^c} \|f_1 - g_k\| d\mu, \dots, \int_{A_k} \|f_n\| d\mu + \int_{A_k^c} \|f_n - g_k\| d\mu\right) \\ &\qquad - \inf_{h\in L_1(\mu_0,X)} N(\|f_1 - h\|_1, \dots, \|f_n - h\|_1) \\ &\leq N\left(\int_{A_k} \|f_1\| d\mu, \dots, \int_{A_k} \|f_n\| d\mu\right) \\ &\qquad + N\left(\int_{A_k^c} \|f_1 - g_k\| d\mu, \dots, \int_{A_k^c} \|f_n - g_k\| d\mu\right) \\ &\qquad - \inf_{h\in L_1(\mu_0,X)} N(\|f_1 - h\|_1, \dots, \|f_n - h\|_1) \\ &\leq N\left(\int_{A_k} \|f_1\| d\mu, \dots, \int_{A_k} \|f_n\| d\mu\right) + \Big(N\big(\|f_1 - g_k\|_1, \dots, \|f_n - g_k\|_1\big) \\ &\qquad - \inf_{h\in L_1(\mu_0,X)} N(\|f_1 - h\|_1, \dots, \|f_n - h\|_1)\Big). \end{aligned}$$

Como $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = 0$ y $(g_k)_{k\geq 1} \subset L_1(\mu_0, X)$ es una sucesión N-simultáneamente aproximadora de $f_1, \ldots, f_n$ en $L_1(\mu_0, X)$, los dos sumando de la última expresión tienden a cero. Por tanto,

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty} N\big(\|f_1 - g_k\chi_{A_k^c}\|_1, \ldots, \|f_n - g_k\chi_{A_k^c}\|_1\big)\\ &\qquad = \inf_{h\in L_1(\mu_0,X)} N(\|f_1 - h\|_1, \ldots, \|f_n - h\|_1).\end{aligned}$$

Esto significa que $(g_n\chi_{A_n^c})_{n\geq 1}$ es una sucesión N-simultáneamente aproximadora de $f_1, \ldots, f_n$ en $L_1(\mu_0, X)$. □

Teorema 6.3.6. *Sea N una n-norma monótona en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ y $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ una sub-σ-álgebra de Σ. Si X es reflexivo, entonces $L_1(\mu_0, X)$ es proximinal N-simultáneamente en $L_1(\mu, X)$.*

Demostración. Sean $f_1, \ldots, f_n \in L_1(\mu, X)$ y sea $(g_k)_{k\geq 1} \subset L_1(\mu_0, X)$ una sucesión N-simultáneamente aproximadora de $f_1, \ldots, f_n$ en $L_1(\mu_0, X)$. Es decir,

$$\lim_{k\to\infty} N\big(\|f_1 - g_k\|_1, \ldots, \|f_2 - g_k\|_1\big) = \inf_{h\in L_1(\mu,X)} N(\|f_1 - h\|_1, \ldots, \|f_n - h\|_1).$$

Veamos que $(g_k)_{k\geq 1}$ es acotada en $L_1(\mu_0, X)$. Para ello, tenemos que, para cada $k \geq 1$, se tiene,

$$N(1, \ldots, 1)\|g_k\|_1 \leq N(\|f_1 - g_k\|_1, \ldots, \|f_n - g_k\|_1) + N(\|f_1\|_1, \ldots \|f_n\|_1).$$

Por tanto $(g_k)_{k\geq 1}$ es acotada en $L_1(\mu_0, X)$ puesto que el término de la derecha es una sucesión convergente.

Por el Lema 6.2.6 de Kadec-Pełczyński-Rosenthal, se tiene que existe una subsucesión $\big(g_{k_l}\big)_{l\geq 1}$ de $(g_k)_{k\geq 1}$ y una sucesión $(A_l)_{l\geq 1} \subset \Sigma_0$ de conjuntos medibles y disjuntos dos a dos tal que la sucesión $\big(g_{k_l}\chi_{A_l^c}\big)_{l\geq 1}$ es uniformemente integrable en $L_1(\mu_0, X)$.

Como
$$\sum_{l=1}^{\infty} \mu(A_l) = \mu\left(\bigcup_{l=1}^{\infty} A_l\right) \leq \mu(\Omega) < \infty,$$
entonces, tenemos que, $\lim_{l\to\infty} \mu(A_l) = 0$.

Usando el Lema 6.3.5, se obtiene que $\big(g_{k_l}\chi_{A_l^c}\big)_{l\geq 1}$ es una sucesión N-simultáneamente aproximadora de $f_1, \ldots, f_n$ en $L_1(\mu_0, X)$.

Por otra parte, como $(g_{k_l})_{l\geq 1}$ es acotada y para cada $l \geq 1$ tenemos que

$$\big\|g_{k_l}\chi_{A_l^c}\big\|_1 \leq \|g_{k_l}\|_1,$$

entonces, $\big(g_{k_l}\chi_{A_l^c}\big)_{l\geq 1}$ es acotada.

Por último observamos que para cada $B \in \Sigma$,

$$K = \left\{ \int_B g_{k_l} \chi_{A_l^c} d\mu \ : \ l \geq 1 \right\}$$

es acotado en X y por la reflexividad de X se tiene que K es débilmente relativamente compacto.

Así obtenemos por el Teorema 6.2.3, que $\left(g_{k_l} \chi_{A_l^c}\right)_{l \geq 1}$ es débilmente relativamente compacta en $L_1(\mu_0, X)$.

Por tanto $\left(g_{k_l} \chi_{A_l^c}\right)_{l \geq 1}$ tiene un subsucesión, que converge débilmente a cierta $g \in L_1(\mu, X)$. Podemos suponer que $g_{k_l} \chi_{A_l^c} \xrightarrow[l \to \infty]{\omega} g$ en $L_1(\mu, X)$.

Sabemos que $L_1(\mu_0, X)$ es cerrado y convexo. Por tanto es débilmente cerrado, así $g \in L_1(\mu_0, X)$.

Por el Lema 6.3.4 tenemos que g es un aproximación N-simultánea óptima de $f_1, \ldots, f_n$ en $L_1(\mu_0, X)$. $\square$

6.4. Aproximación simultánea en el sentido de Li y Watson

Li y Watson plantearon en [36] el problema siguiente:

Sea K un compacto, $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Sea $C(K, X)$ el espacio de funciones continuas de K en X y sea $\|\cdot\|_A$ una norma en $C(K, X)$. Sea $n \geq 2$, $\|\cdot\|_r$ una norma en $\mathbb{R}^n$ (no necesariamente monótona) y B_r la bola unida de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_r)$.

Dadas $f_1, \ldots, f_n \in C(K, X)$. El problema que han considerado Li y Watson en [36] es aproximar estas funciones simultáneamente por las funciones en un subespacio S de $C(K, X)$, en el sentido de minimizar la siguiente función:

$$h \in S \longrightarrow \max_{\alpha \in B_r} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (f_i - h) \right\|_A .$$

Si existía tal función h_0, Li y Watson la llamaban una aproximación simultánea óptima (best simultaneous approximation).

Li y Watson obtienen caracterizaciones de las aproximaciones simultáneas óptimas y estudian condiciones para tener unicidad de dichos aproximaciones.

Hacemos notar que se puede dar una versión más general de este tipo de aproximación simultánea en cualquier espacio normado, como muestra la definición siguiente:

Definición 6.4.1 (Li-Watson [37]). *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado e Y un subespacio de X. Sea $n \geq 2$ y $x_1, \ldots, x_n$, n puntos en X. Sea $\|\cdot\|_r$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y B_r la bola unidad de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_r)$.*

Se dice que un punto y_0 en Y, es una $\|\cdot\|_r$-aproximación simultánea óptima en el sentido de Li y Watson de $x_1, \ldots, x_n$, si y_0 minimiza

$$y \in Y \longrightarrow \max_{\alpha \in B_r} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - y) \right\|, \tag{6.2}$$

sobre el subespacio Y.

Observación 6.4.2. *Si $\|\cdot\|_r$ es la norma de ℓ_1 en $\mathbb{R}^n$, entonces (6.2) se simplifica a la expresión siguiente:*

$$\max_{1 \leq k \leq n} \|x_k - y\| = \max_{\alpha \in B_r} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - y) \right\|. \tag{6.3}$$

En este caso, la expresión (6.3) muestra que decir que un $y_0 \in Y$ es una $\|\cdot\|_r$-aproximación simultánea óptima en el sentido de Li y Watson de $x_1, \ldots, x_n \in X$, es lo mismo que decir que y_0 es una aproximación N-simultánea óptima de $x_1, \ldots, x_n \in X$, donde N es la norma $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^n$.

Sin embargo, dejando aparte el caso en que $\|\cdot\|_r$ coincide con la norma de ℓ_1, se puede ver que la noción de aproximación simultánea de Li y Watson es un concepto distinto del de N-aproximación simultánea que estudiamos en las secciones anteriores.

Uno de los conceptos importantes de este tipo de aproximación simultánea en el sentido de Li y Watson, es lo que vamos a llamar "la proximinalidad simultánea en el sentido de Li y Watson", que definimos de la manera siguiente:

Definición 6.4.3. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado e Y un subespacio de X. Sea $n \geq 2$. Sea $\|\cdot\|_r$ una norma en $\mathbb{R}^n$.*

Se dice que Y, es $\|\cdot\|_r$-proximinal simultáneamente en el sentido de Li y Watson en X, si para cada n puntos en X, tienen una $\|\cdot\|_r$-aproximación simultánea óptima en Y en el sentido de Li y Watson.

Igualmente como en la sección 6.3 nos vamos a centrar en cuestiones de proximinalidad simultánea en el sentido de Li y Watson en $L_1(\mu, X)$.

6.5. Proximinalidad simultánea en el sentido de Li y Watson en $L_1(\mu, X)$

Análogamente a la sección 6.3 vamos a estudiar los subespacios de la forma $S = L_1(\mu, Y)$ con Y subespacio de X y $S = L_1(\mu_0, Y)$ con μ_0 una restricción de μ a una sub-σ-álgebra Σ_0 de Σ.

No hemos encontrado en la literatura ningún resultado sobre proximinalidad simultánea en el sentido de Li y Watson en $L_1(\mu, X)$ (no se conoce ni para $X = \mathbb{R}$).

Vamos a tratar de inspirarnos en los resultados y en las técnicas que han servido para estudiar la proximinalidad simultánea en el sentido considerado en las secciónes 6.1 y 6.3. Por ello, nos parece natural examinar estas dos preguntas:

(1) *"Sea $\|\cdot\|_r$ una norma en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. Si un subespacio Y de X es reflexivo, ¿es $L_1(\mu, Y)$ $\|\cdot\|_r$-proximinal simultáneamente en el sentido de Li y Watson en $L_1(\mu, X)$?"*

(2) *"Sea $\|\cdot\|_r$ una norma en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. Si X es un espacio reflexivo y Σ_0 es una sub-σ-álgebra de Σ, ¿es $L_1(\mu_0, X)$ $\|\cdot\|_r$-proximinal simultáneamente en el sentido de Li y Watson en $L_1(\mu, X)$?"*

Observación 6.5.1. *Por simplificar las expresiones vamos a enunciar los resultados de esta sección con n puntos $(n \geq 2)$ y sus demostraciones sólo de dos puntos.*

Definición 6.5.2. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado e Y un subespacio de X. Sea $n \geq 2$, $\|\cdot\|_r$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y B_r la bola unidad de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_r)$. Sea $m \geq 1$.*

Definimos en $(X^m)^n$ una norma $|||\cdot|||_{1,m}$ de forma siguiente: para cada $\Big(x^1 = \big(x_i^1\big)_{1\leq i\leq m}, \ldots, x^n = \big(x_i^n\big)_{1\leq i\leq m}\Big) \in (X^m)^n$

$$\big|\big|\big|\big(x^1, \ldots, x^n\big)\big|\big|\big|_{1,m} = \max_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in B_r} \sum_{i=1}^{m} \big\|\alpha_1 x_i^1 + \ldots + \alpha_n x_i^n\big\|.$$

Denotamos $D_n^m(Y) = \big\{\underbrace{(y, \ldots, y)}_{n} \ : \ y \in Y^m\big\}$ a la diagonal de $(Y^m)^n$.

Comenzamos esta sección con la observación siguiente que nos va ser útil para desarrollar los resultados pretendidos.

Observación 6.5.3. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach e Y un subespacio de X. Sea $n \geq 2$, $\|\cdot\|_r$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y $m \geq 1$.*

(1) *Si $f_1 = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^1 \chi_{A_i}, \ldots, f_n = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^n \chi_{A_i}$ son n funciones simples en $L_1(\mu, X)$, entonces*

$$\max_{\alpha\in B_r} \|\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n\|_1 = \Big|\Big|\Big|\Big(\big(\mu(A_i)x_i^1\big)_{i=1}^m, \ldots, \big(\mu(A_i)x_i^n\big)_{i=1}^m\Big)\Big|\Big|\Big|_{1,m}.$$

(2) *Si Y es reflexivo, entonces* $\Big((Y^m)^n, |||\cdot|||_{1,m}\Big)$ *y* $\Big(D_n^m(Y), |||\cdot|||_{1,m}\Big)$ *son reflexivos.*

De la observación precedente obtenemos el lema siguiente:

Lema 6.5.4. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado e Y un subespacio de X. Sea $n \geq 2$ y $\|\cdot\|_r$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Si Y es reflexivo, entonces*

(1) *Para todo $m \geq 1$, $D_n^m(Y)$ es proximinal en $\big((X^m)^n, |||\cdot|||_{1,m}\big)$.*

(2) *Y es $\|\cdot\|_r$-proximinal simultáneamente en el sentido de Li y Watson en $(X, \|\cdot\|)$.*

Observación 6.5.5. *Sea X un espacio normado e Y un subespacio de X. Sea $n \geq 2$, $\|\cdot\|_r$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y $m \geq 1$.*

Si $\big((y_i^0)_{1\leq i\leq m}, \ldots, (y_i^0)_{1\leq i\leq m}\big) \in D_n^m(Y)$ es una aproximación óptima del punto $\big((x_i^1)_{1\leq i\leq m}, \ldots, (x_i^n)_{1\leq i\leq m}\big) \in (X^m)^n$ en $D_n^m(Y)$, entonces para todo $i = 1, \ldots, m$, se tiene que $y_i^0 = 0$ cuando $x_i^1 = \ldots = x_i^n = 0$.

Teorema 6.5.6. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach e Y un subespacio cerrado de X. Sea $n \geq 2$ y $\|\cdot\|_r$ una norma en $\mathbb{R}^n$.*

Si para todo $m \geq 1$, $D_n^m(Y)$ es proximinal en $\big((X^m)^n, |||\cdot|||_{1,m}\big)$, entonces cada n funciones simples $f_1, \ldots, f_n \in L_1(\mu, X)$ admiten una $g \in L_1(\mu, Y)$, que es $\|\cdot\|_r$-aproximación simultánea óptima en el sentido de Li y Watson.

Demostración. Para simplificar, supondremos $n = 2$. Por tanto, sean f_1, f_2 dos funciones simples en $L_1(\mu, X)$.

Entonces para cada $j = 1, 2$, $f_j(s) = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^j \chi_{A_i}(s)$, donde $(A_i)_{1\leq i\leq m}$ es una partición finito de Ω, y $x_i^j \in X$ para todo $i = 1, \ldots, m$.

Podemos suponer que $\mu(A_i) > 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Por las hipótesis del teorema, existe una aproximación óptima

$$\Big(\big(z_i^0\big)_{i=1}^m, \big(z_i^0\big)_{i=1}^m\Big) \in D_2^m(Y)$$

de

$$\Big(\big(\mu(A_i)x_i^1\big)_{i=1}^m, \big(\mu(A_i)x_i^2\big)_{i=1}^m\Big) \in (X^m)^2.$$

Si $y_i^0 = \frac{1}{\mu(A_i)} z_i^0$, entonces, $g_0 = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i^0 \chi_{A_i}$ es una función simple en $L_1(\mu, Y)$.

Por lo tanto

$$\Big|\Big|\Big|\Big(\big(\mu(A_i)(x_i^1 - y_i^0)\big)_{i=1}^m, \big(\mu(A_i)(x_i^2 - y_i^0)\big)_{i=1}^m\Big)\Big|\Big|\Big|_{1,m}$$

$$\leq \Big|\Big|\Big|\Big(\big(\mu(A_i)(x_i^1 - y_i)\big)_{i=1}^m, \big(\mu(A_i)(x_i^2 - y_i)\big)_{i=1}^m\Big)\Big|\Big|\Big|_{1,m}$$

para todo $h = \sum_{i=1}^{m} y_i \chi_{A_i} \in L_1(\mu, Y)$.

De otro lado tenemos que

$$\max_{\alpha \in B_r} \big\| \alpha_1(f_1 - g_0) + \alpha_2(f_2 - g_0) \big\|_1 \leq \max_{\alpha \in B_r} \big\| \alpha_1(f_1 - h) + \alpha_2(f_2 - h) \big\|_1 \tag{6.4}$$

para toda función $h = \sum_{i=1}^{m} y_i \chi_{A_i} \in L_1(\mu, Y)$.

Necesitamos demostrar que (6.4) se verifica para toda función simple $h \in L_1(\mu, Y)$.

Sea h una función simple en $L_1(\mu, Y)$. Entonces $h = \sum_{i=1}^{l} y_i \chi_{B_i}$, donde $(B_i)_{1 \leq i \leq l}$ es un partición finito de Ω. Así que

$$f_j = \sum_{1 \leqslant k \leqslant m}^{1 \leqslant i \leqslant l} x_{ki}^j \chi_{A_k \cap B_i} \quad j = 1, 2, \quad \text{y} \quad h = \sum_{1 \leqslant k \leqslant m}^{1 \leqslant i \leqslant l} y_{ki} \chi_{A_k \cap B_i}$$

donde, para todo $j = 1, 2$, y para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$,

$$x_{ki}^j = x_k^j \ \text{ para todo } \ i \in \{1, \ldots, l\}$$

y para todo $i \in \{1, \ldots, l\}$,

$$y_{ki} = y_i \ \text{ para todo } \ k \in \{1, \ldots, m\}.$$

Como $D_2^{ml}(Y)$ es proximinal en $\big(X^{ml}\big)^2$, entonces existe en $D_2^{ml}(Y)$, una aproximación óptima $\Big(\big(z_{ki}^*\big)_{1 \leqslant k \leqslant m}^{1 \leqslant i \leqslant l}, \big(z_{ki}^*\big)_{1 \leqslant k \leqslant m}^{1 \leqslant i \leqslant l} \Big)$ de

$$\bigg(\Big(\mu(A_k \cap B_i) x_{ki}^1 \Big)_{1 \leqslant k \leqslant m}^{1 \leqslant i \leqslant l}, \ \ \Big(\mu(A_k \cap B_i) x_{ki}^2 \Big)_{1 \leqslant k \leqslant m}^{1 \leqslant i \leqslant l} \bigg) \in \big(X^{ml}\big)^2.$$

Por la Observación 6.5.5, tenemos que $z_{ki}^* = 0$ cuando $\mu(A_k \cap B_i) x_{ki}^1 = \mu(A_k \cap B_i) x_{ki}^2 = 0$.

Denotamos $y_{ki}^* = \mu(A_k \cap B_i) z_{ki}^*$, $y_{ki}^* = 0$ si $z_{ki}^* = 0$. Entonces,

$$g^* = \sum_{1 \leqslant k \leqslant m}^{1 \leqslant i \leqslant l} y_{ki}^* \chi_{A_k \cap B_i} \ \in L_1(\mu, Y).$$

Por tanto, tenemos que

$$\Big|\Big|\Big| \Big(\big(\mu(A_k \cap B_i)(x_{ki}^1 - y_{ki}^*) \big)_{1 \leqslant k \leqslant m}^{1 \leqslant i \leqslant l}, \big(\mu(A_k \cap B_i)(x_{ki}^2 - y_{ki}^*) \big)_{1 \leqslant k \leqslant m}^{1 \leqslant i \leqslant l} \Big) \Big|\Big|\Big|_{1,ml}$$

$$\leq \Big|\Big|\Big| \Big(\big(\mu(A_k \cap B_i)(x_{ki}^1 - y_{ki}) \big)_{1 \leqslant k \leqslant m}^{1 \leqslant i \leqslant l}, \big(\mu(A_k \cap B_i)(x_{ki}^2 - y_{ki}) \big)_{1 \leqslant k \leqslant m}^{1 \leqslant i \leqslant l} \Big) \Big|\Big|\Big|_{1,ml}$$

Sea $\alpha \in B_r$. Denotamos $\lambda_{ki} = \frac{\mu(A_k \cap B_i)}{\mu(A_k)}$. Entonces $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_{ki} = 1$ y

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant m}^{1\leqslant i\leqslant l} \left\|\alpha_1(x_{ki}^1 - y_{ki}^*) + \alpha_2(x_{ki}^2 - y_{ki}^*)\right\|\mu(A_k \cap B_i) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{l} \left\|\alpha_1(x_{ki}^1 - y_{ki}^*) + \alpha_2(x_{ki}^2 - y_{ki}^*)\right\|\mu(A_k \cap B_i)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{l} \left\|\alpha_1(x_{ki}^1 - y_{ki}^*) + \alpha_2(x_{ki}^2 - y_{ki}^*)\right\|\mu(A_k)\lambda_{ki}\right].$$

Tenemos que

$$\sum_{i=1}^{l} \left\|\alpha_1(x_{ki}^1 - y_{ki}^*) + \alpha_2(x_{ki}^2 - y_{ki}^*)\right\|\lambda_{ki}$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \left\|\alpha_1(\lambda_{ki}x_{ki}^1 - \lambda_{ki}y_{ki}^*) + \alpha_2(\lambda_{ki}x_{ki}^2 - \lambda_{ki}y_{ki}^*)\right\|$$

$$\geq \left\|\alpha_1\Big(\sum_{i=1}^{l} \lambda_{ki}x_{ki}^1 - \sum_{i=1}^{l} \lambda_{ki}y_{ki}^*\Big) + \alpha_2\Big(\sum_{i=1}^{l} \lambda_{ki}x_{ki}^2 - \sum_{i=1}^{l} \lambda_{ki}y_{ki}^*\Big)\right\|$$

Sea $x_k^* = \sum\limits_{i=1}^{l} \lambda_{ki}y_{ki}^*$. Entonces

$$\left\|\alpha_1(x_k^1 - x_k^*) + \alpha_2(x_k^2 - x_k^*)\right\| \leq \sum_{i=1}^{l} \lambda_{ki}\left\|\alpha_1(x_{ki}^1 - y_{ki}^*) + \alpha_2(x_{ki}^2 - y_{ki}^*)\right\|.$$

Así que

$$\sum_{k=1}^{m} \left\|\alpha_1(x_k^1 - x_k^*) + \alpha_2(x_k^2 - x_k^*)\right\|\mu(A_k) \leq$$

$$\leq \sum_{1\leqslant k\leqslant m}^{1\leqslant i\leqslant l} \left\|\alpha_1(x_{ki}^1 - y_{ki}^*) + \alpha_2(x_{ki}^2 - y_{ki}^*)\right\|\mu(A_k \cap B_i).$$

Por tanto

$$\max_{\alpha\in B_r} \sum_{k=1}^{m} \left\|\alpha_1(x_k^1 - x_k^*) + \alpha_2(x_k^2 - x_k^*)\right\|\mu(A_k) \leq$$

$$\leq \max_{\alpha\in B_r} \sum_{1\leqslant k\leqslant m}^{1\leqslant i\leqslant l} \left\|\alpha_1(x_{ki}^1 - y_{ki}^*) + \alpha_2(x_{ki}^2 - y_{ki}^*)\right\|\mu(A_k \cap B_i).$$

Luego, tenemos que

$$\max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_1 - g_0) + \alpha_2(f_2 - g_0)\right\|_1 \leq \max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_1 - h) + \alpha_2(f_2 - h)\right\|_1.$$

Para toda función simple $h \in L_1(\mu, Y)$.

Sea $h \in L_1(\mu, Y)$. Existe una sucesión $(h_m)_{m\geq 1}$ de funciones simples en $L_1(\mu, Y)$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty} \|h - h_m\|_1 = 0$. Como para todo $m \geq 1$ se tiene

$$\max_{\alpha\in B_r} \big\|\alpha_1(f_1 - g_0) + \alpha_2(f_2 - g_0)\big\|_1 \leq \max_{\alpha\in B_r} \big\|\alpha_1(f_1 - h_m) + \alpha_2(f_2 - h_m)\big\|_1.$$

Entonces

$$\max_{\alpha\in B_r} \big\|\alpha_1(f_1 - g_0) + \alpha_2(f_2 - g_0)\big\|_1 \leq \max_{\alpha\in B_r} \big\|\alpha_1(f_1 - h) + \alpha_2(f_2 - h)\big\|_1$$

para todo $h \in L_1(\mu, Y)$. □

Observación 6.5.7. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach e Y un subespacio cerrado de X. Sea $n \geq 2$ y $\|\cdot\|_r$ una norma en $\mathbb{R}^n$.*

Si para todo $m \geq 1$, $D_n^m(Y)$ es proximinal en $(X^m)^n$, entonces cada n funciones simples $f_1, \ldots, f_n \in L_1(\mu, X)$ admiten una función simple $g \in L_1(\mu, Y)$ como una $\|\cdot\|_r$-aproximación simultánea óptima en el sentido de Li y Watson.

En el caso especial donde Y es un subespacio reflexivo del espacio X, obtenemos como consecuencia del Teorema 6.5.6, el resultado siguiente:

Corolario 6.5.8. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach e Y un subespacio cerrado de X. Sea $n \geq 2$ y $\|\cdot\|_r$ una norma en $\mathbb{R}^n$.*

Si Y es reflexivo, entonces cada n funciones simples $f_1, \ldots, f_n \in L_1(\mu, X)$ admiten una $g \in L_1(\mu, Y)$, que es $\|\cdot\|_r$-aproximación simultánea óptima en el sentido de Li y Watson.

Para resolver los dos problemas mencionados anteriormente introducimos el lema y la definición siguientes:

Definición 6.5.9. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado real e Y un subespacio de X. Sea $n \geq 2$ y $x_1, \ldots, x_n \in X$. Sea $\|\cdot\|_r$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y B_r la bola unidad de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_r)$. Sea $(y_k)_{k\geq 1}$ una sucesión en Y.*

Decimos que $(y_k)_{k\geq 1}$ es una sucesión $\|\cdot\|_r$-simultáneamente aproximadora de $x_1, \ldots, x_n$ en Y en el sentido de Li y Watson si

$$\lim_{k\to\infty} \max_{\alpha\in B_r} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_i - y_k) \right\| = \inf_{z\in Y} \max_{\alpha\in B_r} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_i - z) \right\|.$$

Lema 6.5.10. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado real e Y un subespacio de X. Sea $n \geq 2$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y sea $\|\cdot\|_r$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Sea $(y_k)_{k\geq 1}$ una sucesión en Y. Si $(y_k)_{k\geq 1}$ es una sucesión $\|\cdot\|_r$-simultáneamente aproximadora de $x_1, \ldots, x_n$ en Y en el sentido de Li y Watson y converge débilmente a cierto punto $y_0 \in Y$, entonces y_0 es una $\|\cdot\|_r$-aproximación simultánea óptima en el sentido de Li y Watson de $x_1, \ldots, x_n$ en Y.*

Demostración. Por el Teorema de Hahn-Banach, sabemos que para cada $\alpha \in B_r$, existe $x^*_\alpha \in S_{X^*}$ tal que

$$x^*_\alpha\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - y_0)\right) = \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - y_0)\right\|.$$

Puesto que $(y_k)_{k\geq 1}$ converge débilmente al punto $y_0 \in Y$, entonces para cada $\alpha \in B_r$, tenemos que

$$\left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - y_0)\right\| = \lim_{k\to\infty} x^*_\alpha\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - y_k)\right).$$

Por otra parte, para cada $\alpha \in B_r$ y cada $k \geq 1$, tenemos que

$$x^*_\alpha\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - y_k)\right) \leq \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - y_k)\right\|.$$

Así que, para cada $\alpha \in B_r$ y cada $k \geq 1$, tenemos que

$$x^*_\alpha\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - y_k)\right) \leq \max_{\alpha\in B_r} x^*_\alpha\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - y_k)\right) \leq \max_{\alpha\in B_r}\left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - y_k)\right\|.$$

Por tanto, para cada $\alpha \in B_r$ se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} x^*_\alpha\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - y_k)\right) \leq \liminf_{k\to\infty}\ \max_{\alpha\in B_r}\left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - y_k)\right\|.$$

Luego, para cada $\alpha \in B_r$, tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - y_0)\right\| &\leq \liminf_{k\to\infty}\ \max_{\alpha\in B_r}\left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - y_k)\right\| \\ &= \inf_{z\in\ Y}\max_{\alpha\in B_r}\left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - z)\right\|.\end{aligned}$$

Así que

$$\max_{\alpha\in B_r}\left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - y_0)\right\| \leq \inf_{z\in\ Y}\max_{\alpha\in B_r}\left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i(x_i - z)\right\|$$

Esto significa que y_0 es una $\|\cdot\|_r$-aproximación simultánea óptima en el sentido de Li y Watson de $x_1, \ldots, x_n$ en Y. □

Lema 6.5.11. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach e Y un subespacio cerrado de X. Sea $n \geq 2$ y sea $f_1, \ldots, f_n \in L_1(\mu, X)$. Sea $\|\cdot\|_r$ una norma en $\mathbb{R}^n$.*

Sea $(g_m)_{m\geq 1} \subset L_1(\mu, Y)$ una sucesión $\|\cdot\|_r$-simultáneamente aproximadora de $f_1, \ldots, f_n$ en $L_1(\mu, Y)$ en el sentido de Li y Watson y sea $(A_m)_{m\geq 1} \subset \Sigma$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty} \mu(A_m) = 0$, entonces $(g_m \chi_{A_m^c})_{m\geq 1}$ también es una sucesión $\|\cdot\|_r$-simultáneamente aproximadora de $f_1, \ldots, f_n$ en $L_1(\mu, Y)$ en el sentido de Li y Watson.

Demostración. Para simplificar, supondremos $n = 2$. Por tanto, sean f_1, f_2 dos funciones en $L_1(\mu, X)$.

Sabemos que para cada $m \geq 1$ existe $(\alpha_1^m, \alpha_2^m) \in B_r$ tal que

$$\begin{aligned}&\left\|\alpha_1^m(f_1 - g_m\chi_{A_m^c}) + \alpha_2^m(f_2 - g_m\chi_{A_m^c})\right\|_1\\ &\qquad = \max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_1 - g_m\chi_{A_m^c}) + \alpha_2(f_2 - g_m\chi_{A_m^c})\right\|_1.\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}0 &\leq \left\|\alpha_1^m(f_1 - g_m\chi_{A_m^c}) + \alpha_2^m(f_2 - g_m\chi_{A_m^c})\right\|_1\\ &\qquad - \inf_{h\in L_1(\mu,Y)} \max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_1 - h) + \alpha_2(f_2 - h)\right\|_1\\ &= \int_{A_m} \|\alpha_1^m f_1(s) + \alpha_2^m f_2(s)\| d\mu\\ &\qquad + \int_{A_m^c} \|\alpha_1^m(f_1(s) - g_m(s)) + \alpha_2^m(f_2(s) - g_m(s))\| d\mu\\ &\qquad - \inf_{h\in L_1(\mu,Y)} \max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_1 - h) + \alpha_2(f_2 - h)\right\|_1\\ &\leq \int_{A_m} \|\alpha_1^m f_1(s) + \alpha_2^m f_2(s)\| d\mu + \left\|\alpha_1^m(f_1 - g_m) + \alpha_2^m(f_2 - g_m)\right\|_1\\ &\qquad - \inf_{h\in L_1(\mu,Y)} \max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_1 - h) + \alpha_2(f_2 - h)\right\|_1\\ &\leq \int_{A_m} \|\alpha_1^m f_1(s) + \alpha_2^m f_2(s)\| d\mu + \max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_1 - g_m) + \alpha_2(f_2 - g_m)\right\|_1\\ &\qquad - \inf_{h\in L_1(\mu,Y)} \max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_1 - h) + \alpha_2(f_2 - h)\right\|_1.\end{aligned}$$

De la hipótesis $\lim\limits_{m\to\infty} \mu(A_m) = 0$, conseguimos que

$$\lim_{m\to\infty} \int_{A_m} \|\alpha_1^m f_1(s) + \alpha_2^m f_2(s)\| d\mu = 0,$$

y como $(g_m)_{m\geq 1} \subset L_1(\mu, Y)$ es una sucesión $\|\cdot\|_r$-simultáneamente aproximadora de f_1, f_2 en $L_1(\mu, Y)$ en el sentido de Li y Watson, entonces

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty} \max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_1 - g_m) + \alpha_2(f_2 - g_m)\right\|_1\\ &\qquad = \inf_{h\in L_1(\mu,Y)} \max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_1 - h) + \alpha_2(f_2 - h)\right\|_1.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\lim_{m\to\infty} \max_{\alpha\in B_r} \big\|\alpha_1(f_1 - g_m\chi_{A_m^c}) + \alpha_2(f_2 - g_m\chi_{A_m^c})\big\|_1$$
$$= \inf_{h\in L_1(\mu,Y)} \max_{\alpha\in B_r} \big\|\alpha_1(f_1-h)+\alpha_2(f_2-h)\big\|_1.$$

Luego $(g_m\chi_{A_m^c})_{m\geq 1}$ es una sucesión $\|\cdot\|_r$-simultáneamente aproximadora de f_1, f_2 en $L_1(\mu,Y)$ en el sentido de Li y Watson. □

Teorema 6.5.12. *Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach e Y un subespacio cerrado de X. Sea $n\geq 2$ y $\|\cdot\|_r$ una norma en $\mathbb{R}^n$.*

Si Y es reflexivo, entonces $L_1(\mu,Y)$ es $\|\cdot\|_r$-proximinal simultáneamente en el sentido de Li y Watson en $L_1(\mu,X)$.

Demostración. Para simplificar, supondremos $n=2$. Por tanto, sean f_1, f_2 dos funciones en $L_1(\mu,X)$.

Sean $(f_{1m})_{m\geq 1}$, y $(f_{2m})_{m\geq 1}$ dos sucesiones de funciones simples en $L_1(\mu,X)$ tales que

$$\lim_{m\to\infty} \|f_i - f_{im}\|_1 = 0, \text{ para } i=1,2. \tag{6.5}$$

Por el Corolario 6.5.8 obtenemos que, para todo $m\geq 1$, el par de funciones simples f_{1m}, f_{2m} admiten una $g_m\in L_1(\mu,Y)$, que es $\|\cdot\|_r$-aproximación simultánea óptima en el sentido de Li y Watson.

Por lo tanto tenemos que, para cada $m\geq 1$,

$$\max_{\alpha\in B_r} \big\|\alpha_1(f_{1m}-g_m)+\alpha_2(f_{2m}-g_m)\big\|_1 \leq \max_{\alpha\in B_r} \big\|\alpha_1(f_{1m}-h)+\alpha_2(f_{2m}-h)\big\|_1 \tag{6.6}$$

para todo $h\in L_1(\mu,Y)$.

Veamos que $(g_m)_{m\geq 1}$ es acotada en $L_1(\mu,Y)$. Usando la desigualdad (6.6) con $h\equiv 0$, se obtiene que, para cada $m\geq 1$,

$$\begin{aligned}\max_{\alpha\in B_r} |\alpha_1+\alpha_2|\big\|g_m\big\|_1 &\leq \max_{\alpha\in B_r} \big\|\alpha_1(f_{1m}-g_m)+\alpha_2(f_{2m}-g_m)\big\|_1 \\ &\quad + \max_{\alpha\in B_r} \big\|\alpha_1 f_{1m}+\alpha_2 f_{2m}\big\|_1 \\ &\leq 2\max_{\alpha\in B_r} \big\|\alpha_1 f_{1m}+\alpha_2 f_{2m}\big\|_1.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\max_{\alpha\in B_r} |\alpha_1+\alpha_2|\big\|g_m\big\|_1 &\leq 2\max_{\alpha\in B_r} \Big[|\alpha_1|\big\|f_{1m}-f_1\big\|_1 + |\alpha_2|\big\|f_{2m}-f_2\big\|_1\Big] \\ &\quad + 2\max_{\alpha\in B_r} \big\|\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2\big\|_1.\end{aligned}$$

Luego $(g_m)_{m\geq 1}$ es acotada en $L_1(\mu,Y)$ puesto que el término de la derecha es una sucesión convergente.

Aplicamos el Lema 6.2.6 de Kadec-Pełczyński- Rosenthal para obtener la existencia de una subsucesión $(g_{m_k})_{k\geq 1}$ de $(g_m)_{m\geq 1}$ y de una sucesión $(A_k)_{k\geq 1}$ de conjuntos medibles y disjuntos dos a dos tal que $(g_{m_k}\chi_{A_k^c})_{k\geq 1}$ es uniformemente integrable.

Como
$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \mu(\Omega) < \infty.$$
Entonces, se tiene que, $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k) = 0$.

Veamos ahora que $(g_{m_k})_{k\geq 1} \subset L_1(\mu, Y)$ es una sucesión $\|\cdot\|_r$-simultáneamente aproximadora de f_1, f_2 en $L_1(\mu, Y)$ en el sentido de Li y Watson.

Para ello, tenemos que, para cada $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
&\max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_1 - g_{m_k}) + \alpha_2(f_2 - g_{m_k})\right\|_1 \\
&\qquad\qquad \leq \max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_{1m_k} - g_{m_k}) + \alpha_2(f_{2m_k} - g_{m_k})\right\|_1 \\
&\qquad\qquad + \max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_{1m_k} - f_1) + \alpha_2(f_{2m_k} - f_2)\right\|_1.
\end{aligned}$$

Sea $h \in L_1(\mu, Y)$. De la desigualdad (6.6) obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_1 - g_{m_k}) + \alpha_2(f_2 - g_{m_k})\right\|_1 \\
&\qquad\qquad \leq \max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_{1m_k} - h) + \alpha_2(f_{2m_k} - h)\right\|_1 \\
&\qquad\qquad + \max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_{1m_k} - f_1) + \alpha_2(f_{2m_k} - f_2)\right\|_1.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
&\max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_1 - g_{m_k}) + \alpha_2(f_2 - g_{m_k})\right\|_1 \\
&\qquad\qquad \leq \max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_1 - h) + \alpha_2(f_2 - h)\right\|_1 \\
&\qquad\qquad + 2\max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_{1m_k} - f_1) + \alpha_2(f_{2m_k} - f_2)\right\|_1.
\end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned}
\max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_1 - g_{m_k}) + \alpha_2(f_2 - g_{m_k})\right\|_1 &\leq \max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_1 - h) + \alpha_2(f_2 - h)\right\|_1 \\
&+ 2\max_{\alpha\in B_r} \Big[|\alpha_1|\left\|f_{1m_k} - f_1\right\|_1 + |\alpha_2|\left\|f_{2m_k} - f_2\right\|_1\Big].
\end{aligned}$$

De la igualdad (6.5) conseguimos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} \max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_1 - g_{m_k}) + \alpha_2(f_2 - g_{m_k})\right\|_1 \\
&\qquad\qquad \leq \max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_1 - h) + \alpha_2(f_2 - h)\right\|_1.
\end{aligned}$$

Como h es arbitraria en $L_1(\mu, Y)$, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_1 - g_{m_k}) + \alpha_2(f_2 - g_{m_k})\right\|_1 \\ \leq \inf_{h\in L_1(\mu,Y)} \max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_1 - h) + \alpha_2(f_2 - h)\right\|_1.\end{aligned} \tag{6.7}$$

Por otra parte, tenemos que, para cada $k \geq 1$

$$\begin{aligned}\inf_{h\in L_1(\mu,Y)} \max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_1 - h) + \alpha_2(f_2 - h)\right\|_1 \\ \leq \max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_1 - g_{m_k}) + \alpha_2(f_2 - g_{m_k})\right\|_1.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\inf_{h\in L_1(\mu,Y)} \max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_1 - h) + \alpha_2(f_2 - h)\right\|_1 \\ \leq \lim_{k\to\infty} \max_{\alpha\in B_r} \left\|\alpha_1(f_1 - g_{m_k}) + \alpha_2(f_2 - g_{m_k})\right\|_1.\end{aligned} \tag{6.8}$$

Luego de las desigualdades (6.7) y (6.8) concluimos que $(g_{m_k})_{k\geq 1} \subset L_1(\mu, Y)$ es una sucesión $\|\cdot\|_r$-simultáneamente aproximadora de f_1, f_2 en $L_1(\mu, Y)$.

Usando el Lema 6.5.11 puede verse que $\left(g_{m_k}\chi_{A_k^c}\right)_{k\geq 1}$ es una sucesión $\|\cdot\|_r$-simultáneamente aproximadora de f_1, f_2 en $L_1(\mu, Y)$ en el sentido de Li y Watson.

Además $\left(g_{m_k}\chi_{A_k^c}\right)_{k\geq 1}$ es acotada porque $(g_{m_k})_{k\geq 1}$ es acotada y para cada $k \geq 1$

$$\left\|g_{m_k}\chi_{A_k^c}\right\|_1 \leq \|g_{m_k}\|_1.$$

Finalmente observamos que para cada $B \in \Sigma$,

$$K = \left\{ \int_B g_{m_k}\chi_{A_k^c} d\mu \;:\; k \geq 1\right\}$$

es acotado en Y y por la reflexividad de Y se tiene que K es débilmente relativamente compacto.

Así obtenemos por el Teorema 6.2.3, que $\left(g_{m_k}\chi_{A_k^c}\right)_{k\geq 1}$ es débilmente relativamente compacta en $L_1(\mu, Y)$.

Por tanto $\left(g_{m_k}\chi_{A_k^c}\right)_{k\geq 1}$ tiene un subsucesión, que converge débilmente a cierta $g \in L_1(\mu, X)$. Podemos suponer que $g_{m_k}\chi_{A_k^c} \xrightarrow[k\to\infty]{\omega} g$ en $L_1(\mu, X)$.

Sabemos que $L_1(\mu, Y)$ es cerrado y convexo. Por tanto es débilmente cerrado, así $g \in L_1(\mu, Y)$.

Por el Lema 6.5.10 tenemos que $g \in L_1(\mu, Y)$ es una $\|\cdot\|_r$-aproximación simultánea óptima en el sentido de Li y Watson del par $f_1, f_2 \in L_1(\mu, X)$. □

Lema 6.5.13. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y sea Σ_0 una sub-σ-álgebra de Σ. Sea $n \geq 2$ y sea $f_1, \ldots, f_n \in L_1(\mu, X)$. Sea $\|\cdot\|_r$ una norma en $\mathbb{R}^n$.*

Sea $(g_m)_{m\geq 1} \subset L_1(\mu_0, X)$ una sucesión $\|\cdot\|_r$-simultáneamente aproximadora de $f_1, \ldots, f_n$ en $L_1(\mu_0, X)$ en el sentido de Li y Watson y sea $(A_m)_{m\geq 1} \subset \Sigma_0$ tal que $\lim_{m\to\infty} \mu(A_m) = 0$, entonces $(g_m \chi_{A_m^c})_{m\geq 1}$ también es una sucesión $\|\cdot\|_r$-simultáneamente aproximadora de $f_1, \ldots, f_n$ en $L_1(\mu_0, X)$ en el sentido de Li y Watson.

Demostración. Es idéntico a la demostración del Lema 6.5.11. $\square$

Teorema 6.5.14. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y sea Σ_0 una sub-σ-álgebra de Σ. Sea $n \geq 2$ y $\|\cdot\|_r$ una norma en $\mathbb{R}^n$.*

Si X es reflexivo, entonces $L_1(\mu_0, X)$ es $\|\cdot\|_r$-proximinal simultáneamente en el sentido de Li y Watson en $L_1(\mu, X)$.

Demostración. Para simplificar, supondremos $n = 2$. Por tanto, sean f_1, f_2 dos funciones en $L_1(\mu, X)$. Sea $(g_m)_{m\geq 1} \subseteq L_1(\mu_0, X)$ una sucesión $\|\cdot\|_r$-simultáneamente aproximadora de f_1, f_2 en $L_1(\mu_0, X)$ en el sentido de Li y Watson. Es decir:

$$\begin{aligned}\inf_{h\in L_1(\mu_0,X)} \quad & \max_{\alpha\in B_r} \big\|\alpha_1(f_1 - h) + \alpha_2(f_2 - h)\big\|_1 \\ &= \lim_{m\to\infty} \max_{\alpha\in B_r} \big\|\alpha_1(f_1 - g_m) + \alpha_2(f_2 - g_m)\big\|_1.\end{aligned}$$

Veamos que $(g_m)_{m\geq 1}$ es acotada en $L_1(\mu_0, X)$. Para ello, tenemos que, para cada $m \geq 1$,

$$\begin{aligned}\max_{\alpha\in B_r} |\alpha_1 + \alpha_2| \big\|g_m\big\|_1 \leq & \max_{\alpha\in B_r} \big\|\alpha_1(f_1 - g_m) + \alpha_2(f_2 - g_m)\big\|_1 \\ & + \max_{\alpha\in B_r} \big\|\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\big\|_1.\end{aligned}$$

Por tanto $(g_m)_{m\geq 1}$ es acotada en $L_1(\mu_0, X)$ puesto que el término de la derecha es una sucesión convergente.

Por el Lema 6.2.6 Kadec-Pełczyński- Rosenthal, tenemos que, existe una subsucesión $(g_{m_k})_{k\geq 1}$ de $(g_m)_{m\geq 1}$ y una sucesión $(A_k)_{k\geq 1} \subset \Sigma_0$ de conjuntos medibles y disjuntos dos a dos tal que $(g_{m_k} \chi_{A_k^c})_{k\geq 1}$ es uniformemente integrable.

Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \mu(\Omega) < \infty.$$

Entonces, se tiene que, $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = 0$.

Por el Lema 6.5.13 se tiene que $\left(g_{m_k} \chi_{A_k^c}\right)_{k\geq 1}$ es una sucesión $\|\cdot\|_r$-simultáneamente aproximada de f_1, f_2 en $L_1(\mu_0, X)$ en el sentido de Li y Watson.

Por otra parte, como $(g_{m_k})_{k\geq 1}$ es acotada y para cada $k \geq 1$, tenemos que,

$$\left\| g_{m_k} \chi_{A_k^c} \right\|_1 \leq \| g_{m_k} \|_1$$

entonces, $\left(g_{m_k} \chi_{A_k^c} \right)_{k\geq 1}$ es acotada.

Finalmente observamos que para cada $B \in \Sigma$,

$$K = \left\{ \int_B g_{m_k} \chi_{A_k^c} d\mu \ : \ k \geq 1 \right\}$$

es acotado en X y por la reflexividad de X se tiene que K es débilmente relativamente compacto.

Así obtenemos por el Teorema 6.2.3, que $\left(g_{m_k} \chi_{A_k^c} \right)_{k\geq 1}$ es débilmente relativamente compacta en $L_1(\mu_0, X)$.

Por tanto $\left(g_{m_k} \chi_{A_k^c} \right)_{k\geq 1}$ tiene un subsucesión, que converge débilmente a cierta $g \in L_1(\mu, X)$. Podemos suponer que $g_{m_k} \chi_{A_k^c} \xrightarrow[k\to\infty]{\omega} g$ en $L_1(\mu, X)$.

Sabemos que $L_1(\mu_0, X)$ es cerrado y convexo. Por tanto es débilmente cerrado, así $g \in L_1(\mu_0, X)$.

Por el Lema 6.5.10 tenemos que $g \in L_1(\mu_0, X)$ es una $\| \cdot \|_r$-aproximación simultánea óptima en el sentido de Li y Watson del par $f_1, f_2 \in L_1(\mu, X)$. $\square$

Bibliografía

[1] D. Amir. *Characterizations of Inner Product Spaces*. Birkhäuser, Basel, 1986.

[2] M. Baronti, E. Casini and P. L. Papini. "Equilateral sets and theier central points". *Rend. Mat. Appl.* **13** (1993), 133–148.

[3] C. Benítez, M. Fernández and L. Soriano, M. "Location of the 2-Centers of Three Points". *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat.* **94** (2000), 515–517.

[4] C. Benítez, M. Fernández and L. Soriano, M. "Weighted p-Centers and the Convex Hull Property". *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.* **23** (2002), 39–45.

[5] C. Benítez, M. Fernández and M. L. Soriano. "Location of the Fermat-Torricelli Medians of Three Points". *Trans. Amer. Math. Soc* **304** (2002), 5027–5038.

[6] V. Boltyanski, H. Martini and V. Soltan. *Geometric Methods and Optimization Problems*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[7] H. Brézis. *Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications*. Masson, Paris, 1983.

[8] B. Cavalieri. *Exercitationes Geometricae*. Bologna, 1647.

[9] P. Cembranos and J. Mendoza. *Banach Spaces of Vector-Valued Functions*. Lecture Notes in Mathematics, 1676, Springer, 1997.

[10] D. Cieslik. "The Fermat-Steiner-Weber-problem in Minkowski Spaces". *Optimization* **19** (1988), 485–489.

[11] D. L. Cohn. *Measure Theory*. Birkhäuser, Basel, 1980.

[12] J. B. Conway. *Functions of One Complex Variable I*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.

[13] W. Deeb and R. Khalil. "Best approximation in $L(X,Y)$". *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc* **104** (1988), 527–531.

[14] J. Diestel and J. R. Uhl. *Vector Measures*. Math. Surveys Monographs, Vol. 15, Amer. Math. Soc, Providence, R I., 1977.

[15] R. Durier. "Convex Hull Properties in Location Theory". *Numer. Funct. Anal. Optim* **15** (1994), 567–582.

[16] R. Durier. "The Fermat-Weber Problem and Inner Product Spaces". *J. Approx. Theory* **78** (1994), 161–173.

[17] R. Durier. "The General One Center Location Problem". *Math. Oper. Res* **20** (1995), 400–414.

[18] R. Durier. "Optimal Locations and Inner Products". *J. Math. Anal. Appl.* **207** (1997), 220–239.

[19] R. Durier and C. Michelot. "Geometrical Properties of the Fermat-Weber Problem". *European J. Oper. Res* **20** (1985), 332–343.

[20] B. C. Fierro. "Weak compactness in spaces of bochner integrable functions, and the radon-nikodym property". *Rev. R. Acad. Cienc. Excatas Fís. Nat. Madr* **81** (1987), 707–712.

[21] C. Fierro. *Campacidad débil en espacios de funciones y medidas vectoriales*. Tesis doctorales ; 155/82. Univ. Compl. de Madrid Dpto. de Teoría de Funciones (1982).

[22] M. Filps. "Sur le point de torricelli". *Gazeta Mathematica XIII* (Bucarest ,1904), 68–71.

[23] A. Garkavi. "The Best Possible Net and the Best Possible Cross Section of a Set in a Normed Space". *Izv. Akad. Nauk. Ssr. (Russia)* **26** (1962), 87–106.

[24] A. Garkavi. "On the Chebyshev Center and Convex Hull of a Set". *Uspekhi Mat. Nauk USSR* **19** (1964), 139–145.

[25] N. Ghoussoub and P. Saab. "Weak Compactness in Spaces of Bochner Integrable Functions and the Radon- Nikodym Property". *Pac. J. Math* **110** (1984), 65–70.

[26] E. Helly. "Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten". *Deutsche Math. Ver* **32** (1923), 175–176.

[27] R. B. Holmes. *A Course in Optimization and Best Approximation*. Lecture Notes in Mathematics, 257. Springer, 1972.

[28] Jordan, P. and Von Neuman, J. "On inner products in linear, metric spaces". *Ann. of Math* **36** (1935), 719–723.

[29] M. I. Kadec and A. Peł czyński. "Bases, Lacunary Sequences and Complemented Subspaces in the Spaces L_p". *Studia Math* **21** (1962), 161–176.

[30] S. Kakutani. "Some characterizations of euclidean space". *Jap. J. Math* **16** (1939), 93–97.

[31] R. Khalil. "Best approximation in $L_p(I, X)$". *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc* **94** (1983), 277–279.

[32] R. Khalil and W. Deeb. "Best approximation in $L_p(\mu, X)$, II". *J, Approx, Theory* **59** (1989), 296–299.

[33] R. Khalil and F. Saidi. "Best approximation in $L_1(I, X)$". *Proc. Amer. Math. Soc* **123** (1995), 183–190.

[34] V. Klee. "Circumspheres and Inner Products". *Math. Scand* **8** (1960), 363–370.

[35] S. V. Konyagin. "A Remark on Renormings of Nonreflexive Spaces and the Existence of a Chebyshev Center". *Moscow Univ. Math. Bull.* **43** (1988), no. 2, 55–56.

[36] C. Li and G. A. Watson. "On Best Simultaneous Approximation". *J. Approx. Theory* **91** (1997), 332–348.

[37] C. Li and G. A. Watson. "Best simultaneous approximation of an infinite set of functions". *Comput. Math. Appl* **37** (1999), 1–9.

[38] W. A. Light. "Proximinality in $L_p(S, Y)$". *Rocky Mountain J. Math.* **19** (1989), 251–259.

[39] W. A. Light and E. W. Cheney. "Some best-approximation theorems in tensor product spaces". *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc* **89** (1981), 385–390.

[40] J. Mendoza. "Proximinality in $L_p(\mu, X)$". *J. Approx. Theory* **93** (1998), 331–343.

[41] N. S. Papageorgiou. "On Best Approximations in the Lebesgue-Bochner Space $L_1(X)$." *Tamkang J. Math* **24** (1993), 303 –307.

[42] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, 1970.

[43] H. P. Rosenthal. *Topics Course*. University of Paris VI, 1979, unpublished.

[44] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 1973.

[45] F. Saidi, D. Hussein and R. Khalil. "Best Simultaneous Approximation in $L_p(I, E)$". *J. Approx. Theory* **116** (2002), 369–379.

[46] T. Shintani and T. Ando. "Best approximations in L^1-space". *Z. Wahrshein Verw. Gabiete* **33** (1975), 33–39.

[47] I. Singer. *Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces*. Springer, N. York, 1970.

[48] J. J. Sylvester. "A question in the geometry of situation". *Quart. J. Pure. Appl. Math.* **1** (1857). 79.

[49] S. Tanimoto. "A Characterization of Best Simultaneous Approximations". *J. Approx. Theory* **59** (1989), 359–361.

[50] S. Tanimoto. "On Best Simultaneous Approximation". *Math. Japonica* **48** (1998), 275–279.

[51] E. Torricelli. *Opere,* Vol. I, Part 2, Faëza 1919, pp. 90-97*; Opere,* Vol. III, Faënza 1919, pp. 426-431.

[52] L. Veselý. "A Characterization of Reflexivity in the Terms of the Existence of Generalized Centers". *Extracta Math* **8** (1993), 125–131.

[53] L. Veselý. "Generalized Centers of Finite Sets in Banach Spaces". *Acta Math. Univ. Comenianae* **66** (1997), 83–115.

[54] G. A. Watson. "A Characterization of Best Simultaneous Approximation". *J. Approx. Theory* **75** (1989), 175–182.

[55] G. A. Watson. "A characterization of best simultaneous approximations". *J. Approx. Theory* **75** (1993), 350–366.

[56] A. Weber. *Über den Standort der Industrien*. 1909 (English Transl. The Theory of the Location of the Industries. Chicago University Press, Chicago, Il.1929).

[57] R. E. Wendell and A. P. Hurter. "Location Theory, Dominance and Convexity". *Oper. Res.* **21** (1973), 314–321.

[58] Y. Zhao-Yong and G. Tie-Xin. "Pointwise Best Approximation in the Space of Strongly Measurable Functions with Applications to Best Approximation in $L_p(\mu, X)$". *J. Approx. Theory* **78** (1994), 314–320.