

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Departamento de Matemática Aplicada



**ESTUDIO DE GENERALIZACIONES FRACCIONARIAS
DE LAS ECUACIONES ESTÁNDAR DE
DIFUSIÓN Y DE ONDAS**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Teresa Pierantozzi

Bajo la dirección del doctor:
Luís Vázquez Martínez

Madrid, 2006

- **ISBN: 978-84-669-2940-0**

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



Estudio de generalizaciones fraccionarias de las ecuaciones estándar de difusión y de ondas

Teresa Pierantozzi

TESIS DOCTORAL

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

Estudio de generalizaciones fraccionarias de las ecuaciones estándar de difusión y de ondas

Teresa Pierantozzi

Memoria presentada para optar al grado de Doctor
con mención de “Doctor Europeus”
por la Universidad Complutense de Madrid

Dirigida por el Profesor Luis Vázquez Martínez

6 de septiembre de 2006

*A mis padres,
que han hecho posible
el conseguir este logro:
Ida y Agostino*

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	11
Extended abstract and conclusions	13
1. Conceptos Preliminares	21
1.1. Breve perfil histórico del cálculo fraccionario	21
1.2. Operadores de derivación e integración fraccionaria	26
1.2.1. Integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville sobre un intervalo real finito	26
1.2.2. Integrales y derivadas fraccionarias de Liouville	28
1.2.3. Propiedades	29
1.2.4. Derivadas fraccionarias de Caputo	34
1.2.5. Transformadas de Laplace y de Fourier de las derivadas fraccionarias	38
1.2.6. Integrales y derivadas fraccionarias de funciones generalizadas en \mathcal{S}'	42
1.2.7. Potencial de Riesz y derivada fraccionaria de Riesz	44
1.3. Funciones especiales	48
2. Ecuación de Difusión Fraccionaria	53
2.1. Introducción	53
2.2. Con derivada de Caputo	56
2.3. Con derivadas de Riemann-Liouville	61
2.4. Soluciones de variables no separadas	69
2.5. Conclusiones	72
3. Ecuaciones de Evolución-Difusión Fraccionarias del tipo de Dirac	75
3.1. Introducción	75
3.2. Soluciones desacopladas y acopladas	80
3.3. Solución general del Problema de Cauchy	82
3.3.1. Soluciones desacopladas	82
3.3.2. Soluciones acopladas	85
3.4. Solución fundamental del problema de Cauchy	86
3.4.1. Técnica de las transformadas de Laplace y de Fourier	86
3.4.2. Técnica de las transformadas de Laplace y de Fourier: soluciones acopladas.	91
3.4.3. Solución fundamental con la técnica de Laplace	93
3.5. Problema de Cauchy fraccionario en tiempo y espacio	95
3.5.1. Soluciones desacopladas	95

3.5.2. Soluciones acopladas	97
3.6. Problema de Cauchy con $\alpha = 1/2$ y $\beta = 1$	98
3.7. Problema del tipo de Cauchy generalizado	101
3.7.1. Soluciones desacopladas	101
3.7.2. Soluciones acopladas	106
3.8. Problema de Cauchy generalizado con $\alpha = 1/2$ y $\beta = 1$	108
3.9. Ecuaciones de Dirac y de difusión fraccionarias	110
3.10. Problema de valores iniciales y de contorno	115
3.11. Conclusiones	119
4. Propiedades de Invariancia del Sistema de Dirac Fraccionario	121
4.1. Introducción	121
4.2. Simetrías de las ecuaciones fraccionarias de Dirac	122
4.2.1. Inversión espacial	122
4.2.2. Inversión temporal	124
4.2.3. Inversión espacio-temporal	128
4.2.4. Traslación espacio-temporal y transformación de Galileo: dos casos de asimetría interna	130
4.3. Cantidad conservada	132
4.4. Conclusiones	136
5. Resolución Numérica de la Ecuación de Dirac Fraccionaria	139
5.1. Introducción	139
5.2. Esquemas en diferencias finitas	142
5.2.1. Método de Diethelm	143
5.2.2. Método multipaso lineal fraccionario	145
5.2.3. Algoritmo predictor-corrector fraccionario	149
5.3. Análisis de estabilidad	152
5.4. Dispersión y disipación	165
5.5. Resultados numéricos	169
5.6. Conclusiones	175
6. Resolución Numérica de la Ecuación de Seno-Gordon Fraccionaria	179
6.1. Introducción	179
6.2. La ecuación de seno-Gordon fraccionaria	180
6.3. Construcción numérica de soluciones de tipo breathers	184
6.3.1. Ideas básicas	184
6.3.2. Algoritmo numérico para encontrar $u_0(x)$	186
6.3.3. Energía de la condición inicial	191
6.4. Resultados numéricos	194
6.5. Conclusiones	197
Conclusiones y Perspectivas	201

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1.	Gráfico de $D_0^\alpha x^2$ cuando $1 \leq \alpha \leq 2$ y $0,5 \leq x \leq 3$	33
3.1.	Solución $u_1^\lambda(t, x) = u_2^{-\lambda}(t, x)$ cuando $\lambda = 1$ (izquierda) y $\lambda = -1$ (derecha).	99
3.2.	Solución $u_1^*(t, x)$ cuando $ \lambda = 1$	100
3.3.	Solución $u_2^{*\lambda}(t, x)$ cuando $\lambda = 1$ (izquierda) y $\lambda = -1$ (derecha).	100
5.1.	Función $g(n, \alpha)$ al variar de n y α	155
5.2.	Función $v(n, \alpha)$ cuando $ A_\alpha / 2 - A_\alpha = 1,5$	156
5.3.	Función $v(n, \alpha)$ cuando $ A_\alpha / 2 - A_\alpha = 4$ y $ A_\alpha / 2 - A_\alpha = 8$	157
5.4.	Función $r(n, \alpha)$ al variar de n y α	164
5.5.	Función $t(n, \alpha)$ cuando $ S_\alpha / 2 - S_\alpha = 1,5$ y $ S_\alpha / 2 - S_\alpha = 4$	166
5.6.	Función $E_{\alpha,1}(t^\alpha)$ para $0 \leq t \leq 3$ y $\alpha = 0,2$, $\alpha = 0,5$, $\alpha = 0,8$ y $\alpha = 1$	171
5.7.	Función $u_\alpha(t, x) = e^{-x}E_{\alpha,1}(t^\alpha)$ cuando $\alpha = 0,1$, $\alpha = 0,5$ y $\alpha = 0,99$	172
5.8.	Función $u_\alpha(t, x) = e^{-x}E_{\alpha,1}(-t^\alpha)$ cuando $\alpha = 0,1$, $\alpha = 0,5$ y $\alpha = 0,99$	173
6.1.	Geometría “sandwich”: 1 - superconductor, 2 - capa túnel (dieléctrico).	181
6.2.	Geometría de la grieta en una placa superconductora fina.	181
6.3.	Interacción del kink y del antikink en el modelo de seno-Gordon (extraído del libro “Solitons and nonlinear wave equations” de R.K.Dodd, J.C.Eilbeck, J.D.Gibbon, H.C.Morris [41]).	183
6.4.	Solución de la ecuación (6.3.4) para (i) $\omega = 0,6$; (ii) $\omega = 0,8$; (iii) $\omega = 0,95$ y cuando: (a) $\alpha = 1$; (b) $\alpha = 1,5$	188
6.5.	Gráfico de $u_0(0)$ (máximo de $u_0(x)$, solución de la ecuación (6.3.4)) versus ω para $\alpha = 1$	189
6.6.	Evolución de la ecuación (6.2.6) con perfil inicial $u_0(x)$, solución de la ecuación (6.3.4), cuando $\omega = 0,8$ y $\alpha = 1$	195
6.7.	Evolución de la ecuación (6.2.6) con los datos iniciales $u_t(0, x) = 0$ y $u(0, x) = 3/\cosh 0,2x$ para $\alpha = 1$	196
6.8.	Evolución de la ecuación (6.2.6) con los datos iniciales $u_t(0, x) = 0$ y $u(0, x) = 2/\cosh 0,3x$ para $\alpha = 1$	196
6.9.	Choque entre las soluciones de la ecuación (6.2.7) de tipo 4π -kink y los 4π -antikink.	197
6.10.	Choque entre las soluciones de la ecuación (6.2.7) de tipo 4π -kink y dos soluciones del estado estacionario de tipo 2π -antikink.	198

AGRADECIMIENTOS

En numerosas ocasiones, a lo largo de la realización de esta tesis doctoral, he pensado que nunca conseguiría llegar a ponerle punto y final. Pero una vez más, afortunadamente, estaba equivocada.

Ahora, mirando atrás, quiero expresar mi más profunda gratitud a todas aquellas personas que han creído en ello desde el comienzo y que de una u otra manera me han enseñado, animado, acompañado y aguantado durante estos años.

Mi especial agradecimiento va dirigido al director de esta investigación, el Prof. Luis Vázquez Martínez, por la confianza que depositó en mi, por su dedicación, entrega y continuo respaldo tanto en lo científico como en lo humano. La naturalidad con la que desgrana lo complejo en lo simple, sus conocimientos en general y su inagotable y contagioso entusiasmo han sido en todo momento un paradigma para mi. A él le debo además su *Teorema de Existencia* y el haber aprendido que *dos rectas paralelas se encuentran en una estación de ferrocarril*.

Tampoco puedo olvidarme del Prof. Egor Alfimov, cuyas enseñanzas, colaboración y soporte durante un año de contacto, más breve de lo que yo y todos sus amigos habríamos querido, han sido tan enriquecedores que formarán parte no sólo de un capítulo de mi tesis, sino también del bagaje que llevaré siempre conmigo. Gracias Egor también por tu sentido práctico y “humor negro”, tan útiles para sobrellevar las paradojas de la vida real.

No quisiera dejar pasar la oportunidad de expresar mi agradecimiento a los Profesores J. Trujillo y A. Kilbas por sus sugerencias e indicaciones sobre distintos aspectos del trabajo. El contacto que siempre hemos mantenido a lo largo de estos años ha sido fuente de inspiración de muchas de las ideas presentes en la tesis, así como de algunas de las técnicas analíticas que en ella se han empleado. A Juan, además, quiero agradecerle el Teide.

También quiero agradecer al Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Complutense de Madrid y a todos sus integrantes, profesores, becarios y personal, por la acogida que siempre me han dispensado cuando he necesitado ayuda, desde el primer momento en el que entré a formar parte de él como becaria. Especialmente, dirijo mi más sincero agradecimiento a aquellos profesores que han dedicado tiempo y esfuerzo a los cursos de doctorado del programa que he cursado. Tampoco desearía olvidarme del Doctor Alejandro V., del “casi” Doctor David C. y de los Profesores David U. y Gerardo O. en cuya compañía he disfrutado de numerosas comidas repletas de charlas provechosas y de momentos de desahogo, así como de útiles sugerencias científicas.

Fuera del Departamento, de igual valor han sido las fructíferas conversaciones y experiencias intercambiadas con el Doctor Sergio H. y con los Profesores Salvador J. y Pedro P.

Además quiero acordarme de mi tutor del proyecto de fin de carrera, el Prof. Enzo

Orsingher de la universidad “La Sapienza” de Roma, a quién debo el haberme transmitido su inquietud incansable por un saber riguroso, y sobre todo su manera de hacer investigación y entender la universidad.

De igual modo deseo agradecer al Departamento de Matemática Aplicada de la University College Chester (UK) y al Centro de Ciências Matemáticas de la Universidad de Madeira (Portugal) por la hospitalidad y por haberme permitido el uso de sus instalaciones, tanto informáticas como bibliográficas, durante las estancias que en ellos he realizado.

Es de obligación mencionar también a las ayudas financieras que han subvencionado la presente investigación: la beca percibida durante los dos primeros años de doctorado en el marco del Proyecto Europeo *Control, Synchronization and Characterization of Spatially Extended Nonlinear Systems (COSYC OF SENSE) HPRN-CT-2000-00158*, la posterior beca, todavía vigente, en el marco del *Programa de Formación de Personal Investigador de la Comunidad de Madrid (Orden de convocatoria 5793/2002 de 7 de noviembre)*, el Proyecto titulado “La No Linealidad y la No Localidad: Cálculo Fraccionario y Aplicaciones” concedido a nuestro grupo de investigación por la Dirección General de Investigación del Ministerio de Ciencia y Tecnología (BFM 2002-02359), así como el Proyecto de Investigación “Modelos Fraccionarios de Evolución. Aplicaciones” concedido por el Ministerio de Educación y Ciencia (MTM 2005-05573).

Como no, los amigos tienen un hueco muy especial en este momento. Un recuerdo muy particular a Barbara y a Angela, a las que he podido dar la tabarra en toda libertad gracias al cariño inmenso y a la confianza que nos une. Los demás, para que no haya líos, voy a nombrarlos por orden alfabético; mis queridos amigos italianos Alessia, Cecilia, Chiara, Ilenia, Federica, Francesco, Mirlko, mis primas Giovanna, Liana, Nunzia y Silvia, y, finalmente, mis amigos aquí Pilar y Zaza.

No puedo concluir esta lista de personas dejando fuera a Rodolfo, cuyo aliento y estímulo han sido fundamentales en los momentos más duros de estos años, tanto profesionales como personales. A él le debo también que este trabajo haya tomado una forma gramatical ágil y comprensible excluyendo barbarismos innecesarios, permitiendo así que el intrépido que se disponga a leerlo no se pierda en mis “italianismos”.

Y por último, pero no en orden de importancia, unas palabras para mi familia. Mi madre Ida, mi padre Agostino, mi hermano Orlando, Lucia, Vanessa y mis abuelas Giovanna y Teresa: es difícil agradecerle algo a quien se lo tengo que agradecer casi todo. Han sido el puerto seguro en el que echar amarras durante todas las tempestades con las que me haya podido enfrentar a lo largo de mi camino hasta aquí. Siempre han demostrado una profunda confianza en mi capacidad para llevar este propósito a buen fin, especialmente en aquellos momentos en los que yo flaqueaba. Espero que perdonen la pérdida irreparable del tiempo que no pasamos juntos, pero que siempre quise dedicarles. Ellos son los verdaderos autores de mis hazañas, aunque, eso sí, los errores, sobre todo los de este trabajo, quedan de mi exclusiva competencia y responsabilidad.

A todos, por haber estado ahí, muchas gracias.

EXTENDED ABSTRACT AND CONCLUSIONS

In 1695 L'Hôpital inquired of Leibnitz, the father of the concept of the classical differentiation, what meaning could be ascribed to the derivative of order $1/2$. Leibnitz replied prophetically: "[...] this is an apparent paradox from which, one day, useful consequences will be drawn". Then, the present work can be considered as one of the consequences originated by the subsequent developments of this apparent paradox.

Indeed, the theory of the *fractional calculus*, a misnomer used in the literature to designate the study of integrals and derivatives of arbitrary order, has been the main tool we employed for reaching our goal: the study of different generalizations of the classical diffusion and wave equations. Actually, through fractional differential equations interpolating both these equations, we have analyzed how to switch continuously from the parabolic to the hyperbolic behavior, which are usually associated to very different families of physical phenomena.

In what follows, let us summarize the main results of the present investigation.

Chap.1: Due to the fact that this theory is still not much known, in Chapter 1 we have included a brief outline of the main properties of the fractional operators appearing along this work, in order to make it as self-contained as possible.

It is important to emphasize that in the literature there exist different definitions of integral and derivative of arbitrary order α , and that they all obey to the property of coinciding with the classical operators for integer values of α . Moreover, for non integer values of α , they all are *non local* operators with a property of *memory*, being expressed by means of a defined integral.

In this work we have focused our attention on the so called Riemann-Liouville and Caputo integrals and derivatives and on the fractional potential operators of the Riesz type. The Riemann-Liouville definition of the fractional derivative is commonly used in mathematical circles, while the Caputo definition is often preferable in problems of physical interest when initial conditions are expressed in terms of integer derivatives and Laplace transform methods are applied. On the other hand, the Riesz fractional operators work well in conjunction with the Fourier methods.

Chap.2: The first generalization of standard diffusion and wave equations we have considered in Chapter 2 has been the so called *fractional diffusion equation*, obtained from the classical diffusion equation by substituting the first order derivative with respect to time and/or the second order derivative with respect to space by a derivative of real

order:

$$(D_t^\alpha u)(t, x) = \lambda^2 (D_x^\beta u)(t, x) \quad (t > 0, -\infty < x < \infty, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad (0.0.1)$$

where $0 < \alpha \leq 2$ and $\beta > 0$. Varying continuously the indexes α and β , the diffusion and wave equations are devolved when $\alpha = 1, \beta = 2$, and $\alpha = 2, \beta = 2$ respectively.

This equation appears in many papers dealing with models describing the phenomenon of *anomalous* diffusion, since the behavior of the process associated to this equation is *sub-diffusive* when $0 < \alpha < 1$, diffusive in the classical sense when $\alpha = 1$ and *super-diffusive* when $1 < \alpha < 2$; $\alpha = 2$ is a discontinuity point for this equation because it switches from the parabolic condition to the hyperbolic one, typical of the wave process.

In the specific formulations of the fractional diffusion equation (0.0.1) we have considered in Chapter 2, we employed the Caputo and Riemann-Liouville definitions of fractional derivative. Then, in order to guarantee the existence and uniqueness of its solution, we have equipped this equation with the same basic problems for standard diffusion: the *Cauchy* and the *signalling* problems.

Both definitions of fractional derivative, the Riemann-Liouville and the Caputo ones, allow to easily solve these problems through the application of the Fourier and Laplace transform technique, as they only require the knowledge of fractional or integer initial conditions, respectively.

Among the known results we have collected in this chapter gathering them together from the literature about the fractional diffusion equation, we have included the solutions of the Cauchy and the Signalling problems for this equation with second order derivative in space and the Caputo fractional derivative of order $0 < \alpha \leq 2$ in time. They are expressed in terms of two of the special functions playing a very important role in the theory of differentiation of arbitrary order: the Mittag-Leffler and the Wright functions, both generalizing the exponential one. As well as it occurs with the fundamental solutions of these two problems when $\alpha = 1$, which are, respectively, the gaussian probability density in x and the Lévy unilateral probability density in t , the fundamental solutions of these same problems for the fractional diffusion equation (0.0.1) when $0 < \alpha < 2$ are still probability densities in x and t , respectively.

Once the solution of the signalling problem for the fractional diffusion equation was found, we also have been capable to deduce the solution of the same problem for the fractional diffusion equation with the Caputo fractional derivative in time and the classical Laplacian operator in a three dimensional space.

On the other hand, we have solved the “generalized” Cauchy problem (with fractional initial conditions) for the fractional diffusion equation with Riemann-Liouville derivative in time of order $0 < \alpha \leq 2$ and the Liouville one of order $\beta > 0$ in space; again, the solution has been expressed in terms of the Mittag-Leffler and Wright special functions and it returns the classical solutions of this problem for the diffusion and wave equations when $\alpha = 1, \beta = 2$ and $\alpha = 2, \beta = 2$, respectively. Unlike

the previous case, now the fundamental solution can be written as a probability density function in x only when $\alpha = 1$ and $\beta = 2$.

In relation with the “generalized” signalling problem for the fractional diffusion equation with the Riemann-Liouville derivative of order $0 < \alpha \leq 2$ in time and the second order derivative in space, we have found that the solution takes the same expression as the which one corresponding to the classical signalling problem for the fractional diffusion equation with Caputo derivative of order $0 < \alpha \leq 2$ in time and second order derivative in space. Specifically, the fundamental solution, that is a Lévy unilateral density with respect to time when $\alpha = 1$, is really an unilateral probability density in time for all $0 < \alpha < 2$.

Finally, at the end of the chapter we have searched for solutions expressed in terms of non separable variables (such as plain waves) for the fractional diffusion equation with left-sided and right-sided partial fractional derivatives of the Riemann-Liouville type. The solutions we have obtained still interpolate the classical results relative to the diffusion and wave equations, as it was to be expected. This confirms, once again, that the fractional differential operators allow to generalize lots of mathematical problems, typically formulated for the usual differential equations, leading to more general results containing the classical ones as particular cases.

Chap.3: Once this first part of the thesis was over, we have passed to consider in Chapter 3 a second type of generalization of the classical diffusion and wave equations. It consists of the following system of equations named *evolution-diffusion equations Dirac like*:

$$(AD_t^\alpha + \lambda BD_x^\beta)\psi(t, x) = 0, \quad \psi(t, x) = \begin{pmatrix} u_1(t, x) \\ u_2(t, x) \end{pmatrix}, \quad (0.0.2)$$

where $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $0 < \alpha \leq 1$, $\beta > 0$, and A and B are matrixes in the Pauli’s algebra satisfying the conditions

$$A^2 = I, \quad B^2 = -I, \quad AB + BA = 0. \quad (0.0.3)$$

The diffusion function $\psi(t, x)$ is made up by two components, named “diffunors”, each solving the fractional diffusion equation (0.0.1).

This system has been derived operating a type of square root of the fractional diffusion equation (0.0.1), generalizing the method used by Dirac to obtain is well-known equation for the free electron from the Klein-Gordon equation.

The system of fractional evolution equations (0.0.2) could be suitable to describe diffusion of particles with internal degrees of freedom. Moreover it can be regarded as an interpolation “from the interior” of the classical diffusion and wave equations, which are solved by both components of the vector solution of such a system when $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$ and $\alpha = 1$, $\beta = 1$, respectively.

When we restrict the attention to pure real matrixes among the possible ones in the formulation of the system (0.0.2), then it takes two possible expressions: one is in terms of separated components and the other is in terms of coupled components.

However, we have demonstrated that, through a matrix transformation, coupled solutions can be obtained as the half-sum of separated solutions. This fact allowed to firstly develop all the calculations concerning the analytical resolution of this system for the case of uncoupled equations and secondly for the case of coupled ones.

Specifically, we have searched for the two components of the analytical solution of the system of uncoupled fractional evolution equations together with the corresponding Cauchy and generalized Cauchy problems, when the fractional differential operator in time is specified according to Caputo or Riemann-Liouville definitions, and the fractional differential operator in space is expressed by the Liouville definition.

Among the results we gained, it has to be emphasized the establishment of the relation existing between the two components of the vector solution of the system of fractional equations Dirac like and the solution of the one dimensional fractional diffusion equation, that can be viewed as its square. In fact, the solution of the Cauchy problem for the fractional diffusion equation containing Caputo fractional derivative in time of order $0 < 2\alpha \leq 2$ and second order space derivative can be expressed, through a fractional generalization of the D'Alembert formula, in terms of the two solutions of the Cauchy problems associated to each one of the uncoupled equations making up the system of fractional evolution equations when it contains Caputo derivative in time of order $0 < \alpha \leq 1$ and first order space derivative.

In this case, indeed, the fractional diffusion solution turns out to be a linear combination of the two fractional uncoupled evolution-diffusion solutions Dirac like, as well as the D'Alembert solution of the classical wave equation is a linear combination of the solutions of the first order equations deriving from the decomposition of the wave operator into its roots. Once again, the validity of a classical result has been generalized and extended through a fractional formulation that includes the former classical one as a particular case.

Chap.4: On the other hand, driven by the analogy existing between the fractional evolution-diffusion equations and the classical Dirac equation, we also have studied in Chapter 4 the internal symmetries of the fractional system (0.0.2) when $0 < \alpha \leq 1$ and $\beta = 1$ with respect to certain space and/or time transforms. The aim of this study was to make known more details about the passage produced by the fractional formulation of these equations, from the parabolic condition (typical of the diffusion equation) to the hyperbolic one (typical of the wave equation).

We have found that the fractional system, as well as the classical diffusion and wave equations, is invariant under spatial inversion for all $0 < \alpha \leq 1$; nevertheless, an essential difference between the behavior of the latter two equations and of the former system has to be highlighted. In fact, on the contrary of what occurs in the case of classical diffusion and wave equations, the spatial symmetry of the fractional evolution equations Dirac like is a property of the system as a whole and not of each component of its vector solution.

As regards the time inversion, the system of fractional evolution equations Dirac like gathers the two characters, the parabolic and the hyperbolic ones, being at

the same time invariant under time inversion (as the classical wave equation is) for a certain set of values of α , and being not invariant (as the classical diffusion equation is not) for all the complementary values of α in $(0, 1]$. Moreover, as well as it occurred with spatial symmetry, the temporal symmetry is in general a property of the two component solutions of the system of fractional evolution equations as a whole and not of each singular component. However, in this case it exists a specific time inversion matrix leading to time symmetry of each component separately.

The behavior of the system of fractional evolution equations Dirac like with respect to space-time inversion is the same as the which one showed for only time inversion. On the other hand, the system never turns out to be invariant under time translation due to the non local property of the fractional time derivative that implies a change in the interval of integration when a translation is operated. The lack of invariance of the fractional system Dirac like with respect to time translations is a contrast to the well known invariance property of the classical Dirac system, but does not preserve the existence of a conserved quantity associated to the fractional system, analogous of the well known Hamiltonian for the Dirac case, that we named *fractional Hamiltonian*.

With respect to Galileo transform, it is interesting to observe that, even though in general the system of fractional evolution equations does not possess the invariance property, it is possible to find a restricted class of solutions for which this property holds.

Chap.5: In Chapter 5 we have completed the study concerning the system of fractional evolution equations Dirac like (0.0.2) with the construction of numerical schemes for its resolution, when $0 < \alpha \leq 1$ and $\beta = 1$.

The *non local* feature of the integral operators defining real order derivatives is different from the local behavior of the classical integer order derivatives, which can be evaluated considering values of the function under derivation in an arbitrary small interval around the variable. This property of *memory* of the fractional derivatives leads to very complex discretizations of these operators and, as a consequence, the arithmetic cost of the corresponding algorithms increases, with respect to the methods usually employed when dealing with differential equations of integer order.

In this thesis two different methods have been used, proposed by K. Diethelm and Ch. Lubich and based on convolution quadratures formulas, in order to construct formulas approximating fractional integrals and derivatives of the Riemann-Liouville type. For both methods, the convergence order of the approximating formula to the corresponding exact expression of the fractional derivative has been specified. In our case, as the index of the fractional derivative in time varies between 0 and 1, the Diethelm's method turns out to be advantageous with regard to Lubich's one, leading the former to approximations with a greater order of convergence than the latter.

Then, we constructed six different numerical schemes solving the fractional evolution-diffusion equation by employing Diethelm's or Lubich's formulas in the discretization

of the Riemann-Liouville derivative and the classical finite difference backward, centered or forward formulas when approximating the usual first order space derivative.

The discrete von Neumann type analysis we have carried out concerning each numerical scheme revealed pure necessary conditions of stability which, in general, are not sufficient. On the other hand, we have analyzed the dispersion-dissipation properties of the fractional evolution equation and of a particular scheme among the six ones we constructed to approximate the equation. The dispersion-dissipation relation we have obtained for the continuous equation has a very complex expression, implicit and involving time due to the non local character of the operator of fractional derivative. The same study for the numerical scheme has highlighted that it is dissipative when the necessary condition of stability derived from the Von Neumann type analysis is fulfilled. Also, the scheme has turned out to be dispersive, although this behavior could be not observed when, as it usually occurs, the dissipation hides the dispersion and the Fourier components moving at a wrong velocities are muffled. Once again the evolution-diffusion equation of the Dirac type, that represents a generalization of the classical diffusion and wave equations, shows a behavior in the middle between the parabolic (dissipative) and the hyperbolic one (non dissipative).

The results generated by the simulations of the fractional evolution equation of the Dirac type together with a particular initial-boundary values problem have revealed that the presence of a boundary condition produces, in some cases, a behavior of the algorithms which is very different from the stability results we obtained analytically. Indeed, from a theoretical point of view, when a Von Neumann type analysis is carried out on finite difference schemes associated to initial-boundary values problems for parabolic equations, then it leads to stability conditions that are both necessary and sufficient if the matrix associated to the scheme is symmetric. When dealing with schemes for hyperbolic equations, as in our case, almost never a symmetric matrix can be expected and so only pure necessary conditions are deduced.

Chap.6: Finally, in Chapter 6, the last of the thesis, we have dealt with the numerical study of what we named *fractional sine-Gordon equation*:

$$u_{tt}(t, x) - {}^F D_x^\alpha u(t, x) + \sin u(t, x) = 0. \quad (0.04)$$

It is a particular case of the non linear and non local Klein-Gordon equation whose non linearity is expressed by the sine function and the non locality in space is defined by the Feller-Riesz type fractional derivative operator of order $1 \leq \alpha \leq 2$. This equation, when $1 \leq \alpha \leq 2$, represents an interpolation between the non local sine-Gordon equation (also called *sine-Hilbert II equation*) obtained when $\alpha = 1$

$$u_{tt}(t, x) - H u_x(t, x) + \sin u(t, x) = 0, \quad (0.05)$$

and the classical local sine-Gordon equation corresponding to $\alpha = 2$

$$u_{tt}(t, x) - u_{xx}(t, x) + \sin u(t, x) = 0. \quad (0.06)$$

So it can be considered as a fractional generalization of a non linear waves propagation model, that changes from non local, when $1 \leq \alpha < 2$, into local when $\alpha = 2$.

The fractional sine-Gordon equation could be involved, for example, in the modelling of several problems arising from the nonlocal Josephson electrodynamics when high temperature superconductors are considered instead of the ordinary ones, as well as in the theory of nonlocal lattice models.

The switching from a local model to a non local one may result in significant changes of the properties of the solutions of the corresponding equations. This has induced us to verify if the fractional sine-Gordon equation possesses “breather” type solutions, localized in space and periodic in time, since we know that the classical local sine-Gordon equation has an exact solution of this type but, on the contrary, the sine-Hilbert II equation does not.

The numerical search for solutions of this type of the fractional sine-Gordon equation (0.0.4) when the Feller-Riesz fractional derivative in space varies as $1 \leq \alpha < 2$, has revealed the existence of long-lived breather-like objects which can be treated as periodic in time and localized in space for physical applications. We have made sure that these structures are quite *robust* and even can emerge from the evolution of initial states of rather different shapes. Nevertheless, the numerical simulations corresponding to the fractional sine-Gordon equation (0.0.4) when $\alpha = 1$ (this is, for the sine-Hilbert II equation (0.0.5)) have showed that no breather emerges if the initial energy of the pulse is below a critical value of the energy we have found analytically.

On the other hand, when the energy of the initial condition is bigger than this threshold, then the profile typically disintegrates into regular pulsations of great amplitude which can be viewed as breather like objects.

However, since our structures have been obtained numerically, their periodicity and localization cannot be claimed rigorously. Moreover, it seems quite probably that the situation here is similar to the local case of the non linear Klein-Gordon equation and that (generically) the fractional sine-Gordon equation (0.0.4) does not admit the solutions which satisfy these conditions in the mathematical sense.

Apart from the periodic breather-like structures, numerical simulations of the sine-Gordon equation when $1 \leq \alpha < 2$ have covered *quasiperiodic* localized structures. They can be described as “fast” periodic breather-like pulsations with slowly modulated envelope. The period of the envelope modulation is considerably greater than the period of the “fast” oscillations. Solutions with such a behavior can be regarded as analogues of exact sine-Gordon quasiperiodic breathers.

Then, after this study it seems quite reasonable to conclude that breather type structures are typical of several models described by non local Klein-Gordon equations and that, probably, the non linear term has a hand on the creation of these objects much more than the non local one.

1. CONCEPTOS PRELIMINARES

1.1. Breve perfil histórico del cálculo fraccionario

La idea de generalizar la noción de derivada para valores no enteros, surgió con el nacimiento del propio cálculo diferencial. En aquel entonces se planteó la cuestión del sentido que tendría una derivada de orden fraccionario; por ello se le asignó originalmente el nombre de cálculo fraccionario.

Más tarde se amplió el alcance de la pregunta anterior: “¿Puede ser n un número cualquiera, fraccionario, irracional o complejo?”. Sabiendo que la respuesta es afirmativa, el actual término de “cálculo fraccionario” resulta impropio y deberíamos sustituirlo por el de integración y diferenciación de orden arbitrario.

Fue el propio Leibnitz al inventar la notación $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$, y posiblemente un simple deseo de jugar con los símbolos, lo que empujó en 1695 al Marqués de L'Hôpital a preguntarle “¿Que sucedería en el caso de ser sustituida n por $1/2$?”. Leibnitz respondió de modo intuitivo que “esta aparente paradoja permitirá en el futuro extraer interesantes consecuencias”.

También en su correspondencia con Bernoulli, Leibnitz mencionó derivadas de “orden genérico”. En 1697, en referencia al producto infinito de Wallis por $\pi/2$, Leibnitz utilizó la notación $d^{1/2}$, y afirmó que era posible razonar con el cálculo diferencial fraccionario para alcanzar el mismo resultado.

La primera referencia en un texto a una derivada de orden arbitrario aparece en un libro del matemático francés Lacroix de 1819 [84], en el que dedicó a este tema dos páginas de las 700 que lo constituyen. Lacroix desarrolló un ejercicio meramente matemático generalizando el caso de orden entero, a la manera típica de los formalistas de aquel periodo.

Partiendo de $y = x^n$, procedió a determinar la derivada m -ésima:

$$\frac{d^m}{dx^m}y = \frac{n!}{(n-m)!} x^{n-m} \quad (1.1.1)$$

con m y n enteros positivos y $n \geq m$.

Utilizando la función Gamma para generalizar los factoriales, sustituyendo m por $1/2$, n por un número a real positivo cualquiera y suponiendo $x > 0$, obtuvo la siguiente fórmula:

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}y = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})} x^{a-\frac{1}{2}} \quad (1.1.2)$$

que representa la derivada de orden $1/2$ de la función x^a . Para $y = x$, obtuvo

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}x = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \quad (1.1.3)$$

al ser $\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Es interesante destacar que este resultado coincide con el que se obtendría mediante la actual definición de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville (cf. la Propiedad 1.2.10).

El paso siguiente lo dio Fourier en 1822, al sugerir la utilización de la igualdad

$$\frac{d^p}{dx^p} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^p d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\lambda x - t\lambda + p\frac{\pi}{2}) dt \quad (1.1.4)$$

para definir la derivada de orden p arbitrario de una función que se comportase “suficientemente bien”, sin ser necesariamente una función potencia. Pero, al igual que Euler, tampoco Fourier proporcionó ejemplos o aplicaciones.

El mérito de presentar la primera aplicación fue de Abel en 1823 [1, 2], utilizando la derivada de orden $1/2$ para resolver la ecuación integral:

$$\int_0^x (x-t)^{-1/2} f(t) dt = k, \quad (1.1.5)$$

resultante de la formulación del problema de la tautocronía, es decir, el problema de determinar la forma de una curva de modo tal que el tiempo de descenso de una masa puntual que se desliza por ella sin fricción y bajo el efecto de la gravedad sea independiente del punto de partida.

La ecuación integral (1.1.5), llamada de Abel, corresponde a un tiempo de deslizamiento constante y conocido; la integral que en ella aparece, a parte por el factor multiplicativo $1/\Gamma(1/2)$, es la integral fraccionaria de orden $1/2$ de Riemann-Liouville de la función $f(x)$. En realidad Abel estudió ecuaciones integrales más generales con núcleos tipo $(x-t)^\alpha$.

La solución de Abel fue tan elegante que atrajo la atención de Liouville, quien en 1832 [88, 89] hizo el primer gran intento de definir la derivada fraccionaria.

El punto de partida de Liouville fue el conocido resultado para las derivadas de orden entero m de la exponencial

$$D^m e^{ax} = a^m e^{ax}, \quad (1.1.6)$$

donde a es una constante real, que extendió de modo natural a las derivadas de orden p arbitrario

$$D^p e^{ax} = a^p e^{ax}. \quad (1.1.7)$$

Entonces asumió que la derivada de orden arbitrario de una función $f(x)$, que puede ser desarrollada en una serie del tipo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}, \quad (1.1.8)$$

tiene la forma

$$D^p f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^p e^{a_n x}. \quad (1.1.9)$$

Esta fórmula es conocida como la *primera definición de Liouville*, con la obvia desventaja de ser únicamente aplicable para aquellos valores de p para los cuales la serie (1.1.9) converge.

Liouville adoptó un segundo método para tratar funciones del tipo x^{-a} , para valores reales de $a > 0$ y donde $x > 0$. Para ello consideró la integral

$$I = \int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-xu} du, \quad (1.1.10)$$

que mediante el cambio de variable $xu = t$ proporciona el siguiente resultado

$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} I. \quad (1.1.11)$$

Entonces, operando con D^p en ambos miembros de (1.1.11), obtuvo

$$D^p x^{-a} = \frac{(-1)^p}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} u^{a+p-1} e^{-xu} du, \quad (1.1.12)$$

y llegó a su *segunda definición de derivada fraccionaria*

$$D^p x^{-a} = \frac{(-1)^p \Gamma(a+p)}{\Gamma(a)} x^{-a-p}, \quad a > 0. \quad (1.1.13)$$

Pero ninguna de estas dos definiciones estaba destinada a consagrarse, al ser válidas para un conjunto restringido de funciones. La atención se desplazó entonces hacia la integral fraccionaria, pensando que quizás de ésta se deduciría la definición de derivada como la de su operador inverso izquierdo, en analogía al caso entero.

En esos mismos escritos de 1832, Liouville obtuvo la siguiente fórmula:

$$(D^{-p} f)(x) = \frac{1}{(-1)^p \Gamma(p)} \int_0^{\infty} t^{p-1} f(x+t) dt, \quad Re(p) > 0, \quad (1.1.14)$$

que hoy en día, eliminado el factor $(-1)^p$, es conocida por la *definición de Liouville por la derecha de la integral fraccionaria de orden α* (cf. (1.2.11)).

Siguiendo esto, cabe mencionar un escrito de Riemann fechado en 1847, y de publicación póstuma en 1876 [140], en el que aparece la fórmula:

$$(D^{-p} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^x (x-t)^{p-1} f(t) dt + \phi(x) \quad (1.1.15)$$

para la integral de orden fraccionario.

Debido a la indefinición del extremo inferior de integración a , Riemann consideró oportuno añadir una función complementaria $\phi(x)$ de naturaleza indeterminada.

El primer trabajo que finalmente condujo a la actual definición de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville fue debido a N. Ya. Sonine en 1870 [156]; pero fue Laurent el que en 1884 [85] llegó a formularla de manera definitiva.

Para ello, tomaron como punto inicial la fórmula (también llamada *Fórmula de Cauchy para la integral repetida*), fácilmente demostrable por inducción, que reduce la integral de orden entero n de una función real a una única integral de convolución:

$$({}_a D_x^{-n} f)(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(t) dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt; \quad (1.1.16)$$

entonces, generalizando el factorial con la función Gamma, obtuvieron:

$$({}_a D_x^{-p} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^x (x-t)^{p-1} f(t) dt, \quad Re(p) > 0. \quad (1.1.17)$$

Cuando $x > a$ recuperamos de nuevo la definición de la integral fraccionaria de Riemann (cf.(1.2.2)), pero sin aparecer la función complementaria; mientras que para $a = -\infty$ obtenemos la definición de la integral fraccionaria de Liouville (cf.(1.2.10)).

La versión más utilizada de la expresión (1.1.17) es la que se obtiene haciendo $a = 0$, conocida como *integral fraccionaria de Riemann-Liouville*:

$$({}_0 D_x^{-p} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} f(t) dt, \quad Re(p) > 0. \quad (1.1.18)$$

En los mismos años, Grünwald (1867) [62] e Letnikov (1868) [86] afrontaron el problema de la diferenciación no entera, generalizando la definición de derivada de orden entero, basada en el concepto de cociente incremental, utilizando la siguiente fórmula

$$(D^\alpha f)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\nabla_h^\alpha f)(x)}{h^\alpha}, \quad (1.1.19)$$

donde $(\nabla_h^\alpha f)(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x-jh)$, con $n = [\alpha]$.

Con la llegada del siglo XX y los desarrollos del análisis matemático y de la teoría de funciones, aparecieron nuevas formas íntegro-diferenciales fraccionarias.

En 1917 Weyl [171] definió una integral fraccionaria adecuada a funciones periódicas:

$$({}_x W_\infty^{-p} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_x^\infty (t-x)^{p-1} f(t) dt \quad Re(p) > 0. \quad (1.1.20)$$

En 1936 Riesz [141, 142] consideró la integral fraccionaria de múltiples variables como un operador de tipo potencial. Uno de estos potenciales ha sido formalmente definido como la potencia $(-\Delta)^{\alpha/2}$ del Laplaciano.

Por otro lado, el académico Maravall [105, 106] con una serie de publicaciones que aparecieron a partir del año 1959, muchas acerca de la ingeniería de las oscilaciones, fue

el primero en España en mencionar unas particulares oscilaciones fraccionarias asociadas a ecuaciones diferenciales no enteras.

En 1967 [25] Caputo dio una nueva definición de derivada fraccionaria que permitía interpretar físicamente las condiciones iniciales de los cada vez más numerosos problemas aplicados que se estaba estudiando.

En el año 1974, tuvo lugar en Connecticut la primera conferencia internacional sobre el cálculo fraccionario, que sirvió de estímulo a numerosas publicaciones. La segunda conferencia tuvo lugar en 1984 en Escocia, y la tercera en 1989 en Tokyo.

Actualmente es difícil encontrar un ámbito de la ciencia o de la ingeniería que no considere conceptos del cálculo fraccionario y cada año tienen lugar varios acontecimientos que lo ponen de manifiesto.

Desde el punto de vista de la matemática, es fascinante ver como el campo de las generalizaciones “fraccionarias” es lugar de encuentro de varias disciplinas (véase, por ejemplo, [161] y [165]): entre otras, la teoría de las probabilidades y los procesos estocásticos, las ecuaciones integro-diferenciales, la teoría de las transformadas, las funciones especiales y el análisis numérico.

De relevante importancia son las aplicaciones físicas en la teoría de la visco-elasticidad, en el estudio del fenómeno de la difusión anómala y en la teoría electromagnética; pero podemos anticipar que también se va despertando un interés cada vez mayor en otros ámbitos muy distintos cuales, por ejemplo, el de la teoría de circuitos, de la biología o de la física de la atmósfera. Asimismo, entre los economistas se va consolidando el empleo de conceptos de cálculo fraccionario. Ya en 1996, en *Journal of Econometrics* apareció un número especial en el que se recogía una serie de artículos sobre el tema “Fractional Differencing and Long Memory Processes”.

Entre las variadas cuestiones abiertas sobre el cálculo fraccionario, ocupa un lugar prominente la de determinar si es posible encontrar una interpretación geométrica para la derivada fraccionaria. Una posible solución a este problema ha sido propuesta por I. Podlubny en un reciente artículo titulado “Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Differentiation” [136] en el que la interpretación física de estos operadores fraccionarios está basada en el empleo de dos tipos de tiempos, un tiempo *cósmico* y un tiempo *individual*, y viene estrechamente relacionada con la teoría de la relatividad.

1.2. Operadores de derivación e integración fraccionaria: cuestiones básicas

Como se ha visto en el apartado anterior, los hechos históricos que caracterizaron el surgimiento del cálculo fraccionario empezaron motivados por la curiosidad de entender el significado de la derivada de orden $1/2$ de una función. Durante muchos años la atención se centró principalmente en la derivada fraccionaria, dando origen a numerosas definiciones de la misma, para posteriormente desplazarse el foco de interés hacia la integral fraccionaria.

Por el contrario, la integral fraccionaria alcanzó relativamente pronto una definición universalmente aceptada que, aunque seguida de muchas otras, todavía se encuentra entre las más utilizadas.

El punto de partida para esta definición predominante de integral fraccionaria fue la fórmula (1.1.16) que reduce la integral múltiple de orden n a única integral de convolución, generalizada por medio de la función Gamma a un orden real o complejo cualquiera (1.1.17). Esta expresión coincide con la actual definición de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville.

Debido a que la integral de Riemann-Liouville (cf. Definición 1.2.1) satisface la propiedad del semigrupo

$$\left(I_{a+}^{\alpha} \left(I_{a+}^{\beta} f \right) \right) (x) = \left(I_{a+}^{\alpha+\beta} f \right) (x),$$

mientras que la derivada fraccionaria, en general, no cumple ésta propiedad, ni la menos restrictiva de la conmutación, en los desarrollos teóricos del cálculo fraccionario se ha invertido usualmente el orden histórico con el que estos dos operadores han surgido, definiendo antes la integral fraccionaria, para posteriormente deducir la derivada fraccionaria como su operador inverso izquierdo, como forma natural de realizar un desarrollo análogo al que se lleva a cabo en el caso entero.

Para la redacción de este capítulo se han utilizado fundamentalmente las referencias [146], [135], [74] y [59].

1.2.1. Integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville sobre un intervalo real finito

En las definiciones que siguen, se asumen las hipótesis:

$$[a, b] \subset \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0, n = -[-\alpha] = [\alpha], \quad (1.2.1)$$

donde $[\cdot]$ es la parte entera y $[\cdot]$ es la parte entera superior.

Definición 1.2.1 Sea $f \in L_1(a, b)$. Las integrales

$$\left(I_{a+}^{\alpha} f \right) (x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-z)^{\alpha-1} f(z) dz, \quad (x > a) \quad (1.2.2)$$

$$(I_{b-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (z-x)^{\alpha-1} f(z) dz, \quad (x < b) \quad (1.2.3)$$

son conocidas como integrales fraccionarias de Riemann-Liouville de orden α , por la izquierda y por la derecha, respectivamente.

Cuando $\alpha = n$, resulta:

$$(I_{a+}^n f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-z)^{n-1} f(z) dz = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(z) dz, \quad (x > a)$$

y

$$(I_{b-}^n f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_x^b (z-x)^{n-1} f(z) dz = \int_x^b dx_1 \int_{x_1}^b dx_2 \dots \int_{x_{n-1}}^b f(z) dz, \quad (x < b),$$

es decir, se obtienen de nuevo las fórmulas que reducen la integral de orden entero n de una función real, a una única integral de convolución.

Las integrales fraccionarias (1.2.2) y (1.2.3) siguen definidas para funciones $f \in L_p(a, b)$ con $1 \leq p \leq \infty$.

Definición 1.2.2 Para funciones $f(x)$ dadas en el intervalo $[a, b]$, las expresiones

$$({}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f)(x) = [D^n I_{a+}^{n-\alpha} f](x), \quad (1.2.4)$$

y

$$({}^{RL}D_{b-}^{\alpha} f)(x) = [(-D)^n I_{b-}^{n-\alpha} f](x), \quad (1.2.5)$$

representan las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville de orden α , por la izquierda y por la derecha, respectivamente.

Cuando $\alpha = n$, las (1.2.4) y (1.2.5) coinciden con las definición usuales de derivada, siendo $I_{a+}^0 = I_{b-}^0$ el operador identidad (cf. la Propiedad 1.2.1) y $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$ el operador de derivación entera de orden n . Una condición suficiente para que las (1.2.4) y (1.2.5) existan es que $f \in AC^{[n]}[a, b]$, donde $AC^n[a, b]$, con $n = 1, 2, \dots$, es el espacio de las funciones $f(x)$ con derivada continua hasta el orden $n-1$ en $[a, b]$ y tales que $f^{(n-1)}(x) \in AC[a, b]$.

Para el caso de una función f de dos o más variables, siempre que se verifiquen las condiciones necesarias planteadas para el caso unidimensional sobre la existencia de los operadores fraccionarios, con respecto a la variable de integración, las integrales y derivadas parciales fraccionarias de Riemann-Liouville (ver [146, Sección 24.2]), se definen como

$$({}_{a+}I_x^{\alpha} f)(t, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-z)^{\alpha-1} f(t, z) dz, \quad (x > a), \quad (1.2.6)$$

$$({}_xI_{b-}^{\alpha} f)(t, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (z-x)^{\alpha-1} f(t, z) dz, \quad (x < b), \quad (1.2.7)$$

y

$$({}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f)(t, x) = \left[\frac{\partial^n}{\partial x^n} {}_{a+}I_x^{n-\alpha} f \right] (t, x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_a^x \frac{f(t, z)}{(x-z)^{\alpha-n+1}} dz, \quad (x > a), \quad (1.2.8)$$

$$({}^{RL}D_{b-}^{\alpha} f)(t, x) = \left[(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} {}_{b-}I_x^{n-\alpha} f \right] (t, x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_x^b \frac{f(t, z)}{(z-x)^{\alpha-n+1}} dz, \quad (x < b), \quad (1.2.9)$$

y coinciden con las definiciones clásicas cuando $\alpha = n$.

Observación 1.2.1 *Contrariamente al caso entero, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville (así como las demás definiciones que daremos a continuación) es un operador no local, quedando definido por medio de una integral que depende de los valores que la función asuma en todo el intervalo de integración.*

1.2.2. Integrales y derivadas fraccionarias de Liouville

Las definiciones de integrales fraccionarias de Riemann-Liouville dadas en (1.2.2), (1.2.3) fueron extendidas por Liouville, de manera natural, a los semiejes $(-\infty, b]$ y $[a, \infty)$, y por lo tanto también al eje real cuando $a = -\infty$ y $b = +\infty$. Consideramos, en las definiciones que siguen, el caso del eje real.

Definición 1.2.3 *Sea $f \in L_1(\mathbb{R})$. Las integrales*

$$(I_+^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad (-\infty < x < \infty), \quad (1.2.10)$$

$$(I_-^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad (-\infty < x < \infty), \quad (1.2.11)$$

definen las integrales fraccionarias de orden α de Liouville, por la izquierda y por la derecha, respectivamente.

Muchos autores denominan estos operadores como integrales fraccionarias de Weyl, ya que éste fue el primero en utilizarlos sobre dominios de funciones periódicas.

Cuando $\alpha = n$, las expresiones (1.2.10) y (1.2.11) devuelven las fórmulas que reducen la integral de orden entero n de una función real a una única integral de convolución.

Las integrales fraccionarias (1.2.10) y (1.2.11) siguen definidas para funciones $f \in L_p(\mathbb{R})$, con $1 \leq p < 1/\alpha$.

Definición 1.2.4 *Para funciones $f(x)$ dadas en \mathbb{R} , las igualdades*

$$({}^L D_+^{\alpha} f)(x) = [D_+^n I_+^{n-\alpha} f](x), \quad (1.2.12)$$

y

$$({}^L D_-^{\alpha} f)(x) = (-1)^n [D_-^n I_-^{n-\alpha} f](x), \quad (1.2.13)$$

definen las derivadas fraccionaria de Liouville de orden α , por la izquierda y por la derecha, respectivamente.

Una condición suficiente para que existan las expresiones (1.2.12) y (1.2.13) es que $f \in AC^{[\alpha]}(\mathbb{R})$; cuando $\alpha = n$ coinciden con las definiciones usuales de derivada.

Las integrales y derivadas parciales fraccionarias de Liouville, generalizando las de Riemann-Liouville, se definen como

$$({}_{-\infty}I_x^\alpha f)(t, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-z)^{\alpha-1} f(t, z) dz, \quad (-\infty < x < \infty), \quad (1.2.14)$$

$$({}_xI_\infty^\alpha f)(t, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (z-x)^{\alpha-1} f(t, z) dz, \quad (-\infty < x < \infty), \quad (1.2.15)$$

y

$$({}_{-\infty}^L D_x^\alpha f)(t, x) = \left[\frac{\partial^n}{\partial x^n} {}_{-\infty}I_x^{n-\alpha} f \right](t, x), \quad (1.2.16)$$

$$({}_x^L D_\infty^\alpha f)(t, x) = \left[(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} {}_xI_\infty^{n-\alpha} f \right](t, x), \quad (1.2.17)$$

siempre que la función f verifique las condiciones necesarias planteadas para el caso unidimensional, con respecto a la variable de integración, para la existencia de los operadores fraccionarios correspondientes.

1.2.3. Algunas propiedades de las derivadas e integrales fraccionarias de Riemann-Liouville

En esta sección se enuncia una serie de propiedades básicas de los operadores de derivación y integración fraccionarios de Riemann-Liouville, y en algún caso de Liouville, con el fin de resaltar las principales diferencias y analogías entre el comportamiento de éstos y el de los operadores enteros clásicos. Tal exposición no pretende ser exhaustiva acerca de los operadores fraccionarios de Riemann-Liouville, sino que se centra principalmente en aquellas propiedades que se necesitarán a lo largo de los desarrollos sucesivos. Las demostraciones de dichas propiedades pueden ser buscadas en las referencias que se han mencionado al principio de esta sección.

En este apartado, utilizaremos por simplicidad la notación D_{a+}^α en lugar de ${}^{RL}D_{a+}^\alpha$, y pondremos $I_{a+}^{-\alpha} = D_{a+}^\alpha$ cuando $\alpha > 0$.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ que cumplen: $\alpha > 0, \beta > 0, n = -[-\alpha], m = -[-\beta]$ y $x > a$.

Propiedad 1.2.1 Sea $f \in L_1(a, b)$, entonces se verifica que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (I_{a+}^\alpha f)(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (D_{a+}^\alpha f)(x) = f(x), \quad (1.2.18)$$

casi para todo $x \in [a, b]$.

Propiedad 1.2.2 *Semigrupo o Ley de los exponentes.* Sea $f \in L_1(a, b)$, entonces

$$(I_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = (I_{a+}^{\alpha+\beta} f)(x), \quad (1.2.19)$$

casi para todo $x \in [a, b]$.

Propiedad 1.2.3 Sea $f \in L_1(a, b)$, entonces se verifica que

$$(D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x), \quad (1.2.20)$$

casi para todo $x \in [a, b]$.

La propiedad (1.2.20) refleja que, análogamente a lo que ocurre en el caso entero, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville es el operador inverso izquierdo de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville.

Propiedad 1.2.4 Sea $f \in L_1(a, b)$, entonces se verifica que

$$(D_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = (I_{a+}^{\alpha-\beta} f)(x), \quad \text{si } (\alpha \geq \beta), \quad (1.2.21)$$

$$(D_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = (D_{a+}^{\beta-\alpha} f)(x), \quad \text{si } (\alpha \leq \beta), \quad (1.2.22)$$

casi para todo $x \in [a, b]$.

Propiedad 1.2.5 Sea $f \in L_1(a, b)$ y $(I_{a+}^{n-\alpha} f)(x) \in AC^n[a, b]$ entonces

$$(I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x) - \sum_{j=1}^n (D_{a+}^{\alpha-j} f)(a+) \frac{(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}, \quad (1.2.23)$$

casi para todo $x \in [a, b]$.

La condición $(I_{a+}^{n-\alpha} f)(x) \in AC^n[a, b]$ equivale a imponer que f tenga derivada fraccionaria de orden α sumable. La propiedad (1.2.23) demuestra que el operador de integración de Riemann-Liouville, de modo análogo al caso entero, no es en general el inverso izquierdo de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.

Propiedad 1.2.6 Sean $r \in \mathbb{N}$ y $f \in L_1(a, b)$ tales que $(I_{a+}^{\alpha} f) \in AC^{r-1}[a, b]$, entonces se verifica que

$$D^r[(I_{a+}^{\alpha} f)(x)] = (I_{a+}^{\alpha-r} f)(x), \quad \text{si } (r \leq n), \quad (1.2.24)$$

$$D^r[(I_{a+}^{\alpha} f)(x)] = (D_{a+}^{r-\alpha} f)(x), \quad \text{si } (r > n), \quad (1.2.25)$$

casi para todo $x \in [a, b]$.

Propiedad 1.2.7 Sean $r \in \mathbb{N}$ y $f \in L_1(a, b)$ tales que $(I_{a+}^{n-\alpha} f) \in AC^{n+r-1}[a, b]$, entonces se verifica que

$$D^r[(D_{a+}^{\alpha} f)(x)] = (D_{a+}^{\alpha+r} f)(x), \quad (1.2.26)$$

casi para todo $x \in [a, b]$.

Propiedad 1.2.8 Sean $r \in \mathbb{N}$ y $f \in AC^{n+r-1}[a, b]$, entonces se verifica que

$$[D_{a+}^{\alpha}(D^r f)](x) = (D_{a+}^{\alpha+r} f)(x) - \sum_{j=1}^r (D^{r-j} f)(a+) \frac{(x-a)^{-(j+\alpha)}}{\Gamma(1-j-\alpha)}, \quad (1.2.27)$$

casi para todo $x \in [a, b]$.

Propiedad 1.2.9 Sean $f \in L_1(a, b)$ tal que $(I_{a+}^{m-\beta} f) \in AC^{m-1}[a, b]$ y $(I_{a+}^{n-(\alpha+\beta)} f) \in AC^{n-1}[a, b]$ si $(\alpha + \beta) < n$, ó $(I_{a+}^{\{\alpha+\beta\}} f) \in AC^{[\alpha+\beta]}[a, b]$ si $(\alpha + \beta) > n$, con $\{\alpha + \beta\}$ parte decimal de $(\alpha + \beta)$, entonces se verifica que

$$(D_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\beta} f)(x) = (D_{a+}^{\alpha+\beta} f)(x) - \sum_{j=1}^m (D_{a+}^{\beta-j} f)(a+) \frac{(x-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)}, \quad (1.2.28)$$

casi para todo $x \in [a, b]$.

En relación a la expresión (1.2.28) podemos observar que en general no se cumple la propiedad del semigrupo para la derivada fraccionaria, con la única excepción del caso en el que se verifique:

$$\left[D_{a+}^{\beta-j} f \right] (a+) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1.2.29)$$

Cómo veremos en la Sección 1.2.4, las condiciones (1.2.29) resultan ser equivalentes a las condiciones enteras

$$f^{(j)}(a+) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1, \quad (1.2.30)$$

siempre y cuando la función $f(x)$ sea $(m-1)$ veces diferenciable y con derivadas continuas en $[a, b]$ y $f^{(m)}(x)$ sea integrable en $[a, b]$, donde $m-1 < \beta \leq m$.

En la referencia [113, Cap.4] se define una clase restringida de funciones a la que aplicar el operador de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville para que se cumpla la ley de los exponentes. Este resultado queda resumido en el siguiente teorema:

Teorema 1.2.1 Sea $f(x)$ una función de clase C , es decir,

$$x^{\lambda} \eta(x) \quad (1.2.31)$$

ó

$$x^{\lambda} (\ln x) \eta(x) \quad (1.2.32)$$

donde $\lambda > -1$ y

$$\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (1.2.33)$$

tiene un radio de convergencia $R > 0$. Sea X un número positivo menor que R . Entonces

$$(D_{0+}^{\alpha} D_{0+}^{\beta} f)(x) = (D_{0+}^{\alpha+\beta} f)(x)$$

para todo $x \in (0, X]$ si:

(a) $\beta < \lambda + 1$ y α arbitraria

ó

(b) $\beta \geq \lambda + 1$, α es arbitraria y $a_k = 0$ para $k = 0, 1, \dots, m - 1$, con $m - 1 < \beta \leq m$.

Algunos ejemplos de funciones en C son x^λ , con $\lambda > -1$, los polinomios formados por estas potencias, las exponenciales, las funciones seno y coseno, y todas sus combinaciones lineales.

Las propiedades que siguen, presentan las expresiones obtenidas al calcular la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de algunas funciones elementales, con el fin de destacar cuáles funciones juegan, con respecto a este operador, el papel correspondiente al de las funciones constante y exponencial para la derivada clásica.

Propiedad 1.2.10 Si $\gamma > 0$ y $x > a$, se verifica que

$$I_{a+}^\alpha (x - a)^{\gamma-1} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma + \alpha)} (x - a)^{\gamma+\alpha-1}, \quad (1.2.34)$$

$$D_{a+}^\alpha (x - a)^{\gamma-1} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha)} (x - a)^{\gamma-\alpha-1}. \quad (1.2.35)$$

En particular, si $\gamma = \alpha$,

$$D_{a+}^\alpha (x - a)^{\alpha-j} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (1.2.36)$$

y si $\gamma = 1$

$$D_{a+}^\alpha (1) = \frac{(x - a)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}. \quad (1.2.37)$$

Es relevante observar que la expresión (1.2.37) refleja que la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de una constante no nula no es cero, y se hace nula cuando $a \rightarrow -\infty$; es decir, para la derivada fraccionaria de Liouville. Asimismo, la expresión (1.2.36) significa que las funciones $(x - a)^{\alpha-j}$ con $j = 1, 2, \dots, n$, desempeñan el mismo papel con respecto a la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, que el de la función constante con la derivación usual.

Por otro lado, hay que resaltar que la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de una función $f(x) = 0 \forall x \in [a, b]$ vale cero. En efecto, empleando la relación (1.2.49) que aparece más adelante, bajo ciertas hipótesis sobre la función f , resulta:

$$({}^{RL}D_{a+}^\alpha f)(x) = (I_{a+}^{n-\alpha} D^n f)(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a+)}{\Gamma(1 + j - \alpha)} (x - a)^{j-\alpha},$$

por lo que:

$$({}^{RL}D_{a+}^\alpha 0)(x) = 0, \quad (1.2.38)$$

al ser igual a cero la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de una función idénticamente nula en todo el intervalo $[a, b]$. En realidad, tendremos que, análogamente a la

integral clásica, la integral fraccionaria de Riemann-Liouville es cero sólo para funciones idénticamente nulas. En efecto, aplicando la Propiedad 1.2.20 y la (1.2.38), resulta:

$$(I_{a+}^{\alpha} f)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = ({}^{RL}D_{a+}^{\alpha} 0)(x) = 0. \quad (1.2.39)$$

Con el mero objetivo de mostrar, en un caso sencillo, cómo se comporta la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville con respecto a las derivadas ordinarias, en la Figura 1.1 se representa el comportamiento de $D_0^{\alpha} x^2$ cuando $1 \leq \alpha \leq 2$. Por la fórmula (1.2.35), sabemos que resulta $D_0^{\alpha} x^2 = x^{2-\alpha} 2/\Gamma(3-\alpha)$. Se puede observar que el resultado fraccionario interpola los resultados ordinarios, variando entre la recta $2x$ obtenida cuando $\alpha = 1$ y el valor constante 2 obtenido para $\alpha = 2$.

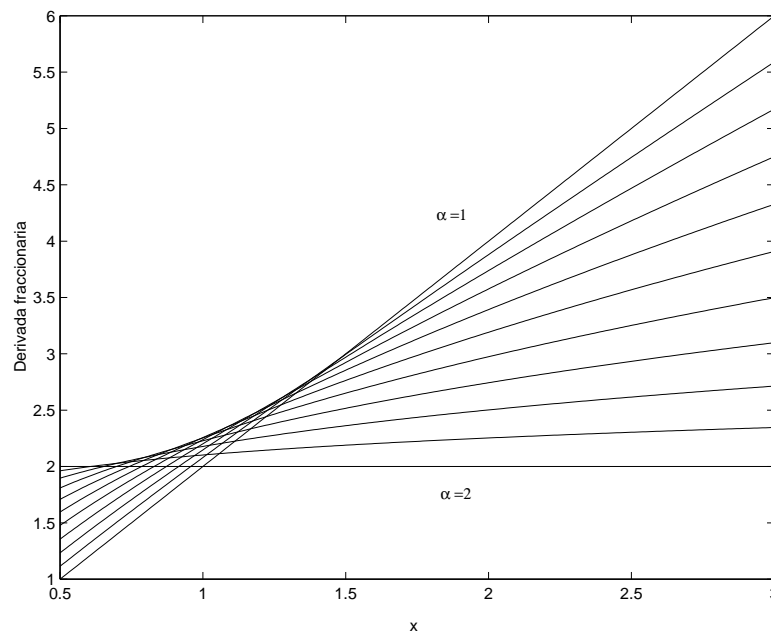


Fig. 1.1: Gráfico de $D_0^{\alpha} x^2$ cuando $1 \leq \alpha \leq 2$ y $0,5 \leq x \leq 3$

Volvemos ahora a las propiedades de los operadores fraccionarios.

Propiedad 1.2.11 *Se verifica que*

$$D_{a+}^{\alpha} e^{\lambda x} = \frac{e^{\lambda a}}{(x-a)^{\alpha}} E_{1,1-\alpha}(\lambda x - \lambda a) \quad (1.2.40)$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$, y

$${}^L D_{+}^{\alpha} e^{\lambda x} = \lambda^{\alpha} e^{\lambda x} \quad (1.2.41)$$

para $Re(\lambda) > 0$.

La función $E_{\alpha,\beta}(z)$ que aparece en (1.2.40) es la función especial de Mittag-Leffler que vendrá definida más adelante a través de la expresión (1.3.4). Esta propiedad evidencia que, en general, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville con extremo inferior a opera sobre la función exponencial de forma distinta que la derivada clásica; y que el

comportamiento de la derivada de orden entero con respecto a tal función se recupera para el caso de $a = -\infty$, es decir, con la derivada de Liouville.

En la propiedad que sigue, se analiza el valor de la derivada de Riemann-Liouville calculada para funciones que contienen la función especial de Mittag-Leffler que, como veremos en la Sección 1.3, generaliza la función exponencial en el sentido de que $E_{1,1}(z) = e^z$.

Propiedad 1.2.12 Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $Re(\mu) > 0$ y $\gamma \in \mathbb{C}$, se verifica que

$$D_{a+}^{\alpha} [(x-a)^{\gamma-1} E_{\mu,\gamma}(\lambda(x-a)^{\mu})] = (x-a)^{\gamma-\alpha-1} E_{\mu,\gamma-\alpha}(\lambda(x-a)^{\mu}) \quad (1.2.42)$$

y

$$D_{a+}^{\alpha} [(x-a)^{\gamma-1} E_{\alpha,\gamma}(\lambda(x-a)^{\alpha})] = \frac{(x-a)^{\gamma-\alpha-1}}{\Gamma(\gamma-\alpha)} + \lambda(x-a)^{\gamma-1} E_{\alpha,\gamma}(\lambda(x-a)^{\alpha}). \quad (1.2.43)$$

Una tabla exhaustiva de integrales fraccionarias de Riemann-Liouville se encuentra en el segundo volumen de la colección de *Bateman Project* [46], en el capítulo XIII dedicado a las integrales fraccionarias.

1.2.4. Derivadas fraccionarias de Caputo

La definición de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville tuvo un papel muy importante en el desarrollo de la teoría del cálculo fraccionario y de sus aplicaciones puramente matemáticas (solución de ecuaciones diferenciales de orden entero, definición de nuevas clases de funciones, suma de series, etc.).

Sin embargo, para los problemas que surgieron en aplicaciones modernas y en los que se disponía de condiciones iniciales físicas concretas expresadas en términos de derivadas clásicas, se prefirió otra definición de derivada fraccionaria, también introducida por Liouville pero utilizada por primera vez en este mismo contexto por Caputo en [25] y [26]. En efecto, esta definición tiene la clara ventaja de requerir únicamente el conocimiento de los valores iniciales de la función y de sus derivadas de orden entero, si es aplicada en conjunción con el método de la transformada de Laplace.

El operador de Caputo encontró, por ejemplo, una amplia aplicación en la teoría de la viscoelasticidad lineal, en la que numerosos trabajos se desarrollaron mediante derivadas fraccionarias que mejoraron la descripción de las propiedades del material, llegando a obtener ecuaciones diferenciales de orden fraccionario que, sin embargo, necesitaban la formulación de condiciones iniciales físicamente interpretables que contuviesen $f(a)$, $f'(a)$, etc.

La llamada derivada fraccionaria de Caputo se define como sigue:

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} f)(x) = (I_{a+}^{n-\alpha} D^n f)(x), \quad (x > a, n = -[-\alpha]) \quad (1.2.44)$$

y

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} ({}^C D_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x). \quad (1.2.45)$$

La expresión (1.2.44) vale para funciones f tales que $D^n f \in L_1(a, b)$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Según esto, cuando la función f verifica, con respecto a la variable de integración, las condiciones necesarias para la existencia del operador de derivación fraccionario vistas en el caso unidimensional, entonces la derivada parcial fraccionaria de Caputo se define como

$$({}^C_{a+}D_x^\alpha f)(t, x) = \left[{}_{a+}I_x^{n-\alpha} \frac{\partial^n}{\partial x^n} f \right] (t, x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a+}^x \frac{\frac{\partial^n}{\partial z^n} f(t, z)}{(x-z)^{\alpha+1-n}} dz \quad (1.2.46)$$

con $x > a$, $n = -[-\alpha]$ y

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} ({}^C_{a+}D_x^\alpha f)(t, x) = f(t, x). \quad (1.2.47)$$

En consecuencia,

$$({}^C_{a+}D_x^n f)(t, x) = \frac{\partial^n f(t, x)}{\partial x^n} \quad (1.2.48)$$

cuando $\alpha = n$.

Se puede demostrar que es cierta la siguiente identidad

$$({}^{RL}D_{a+}^\alpha f)(x) = ({}^C D_{a+}^\alpha f)(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a+)}{\Gamma(1+j-\alpha)} (x-a)^{j-\alpha}, \quad (1.2.49)$$

cuando se cumplen las condiciones adecuadas para f ; por ejemplo, es suficiente que, $\forall x \in [a, b]$, $f(x)$ sea $n-1$ veces derivable, con derivada continua en $[a, b]$, y que $f^n(x)$ sea integrable en $[a, b]$.

Para funciones derivables hasta orden $n-1$ en a y para las que exista $({}^{RL}D_{a+}^\alpha f)(x)$, podemos presentar una nueva definición de derivada fraccionaria de Caputo:

$$({}^C D_{a+}^\alpha f)(x) = {}^{RL}D_{a+}^\alpha \left[f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(a+) \frac{(x-a)^j}{j!} \right]. \quad (1.2.50)$$

La relación existente entre las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y de Caputo permite concluir que, bajo las condiciones en las que vale la igualdad (1.2.49), la condición fraccionaria

$$[{}^{RL}D_{a+}^\alpha f](a+) = 0, \quad (1.2.51)$$

equivale a las condiciones enteras

$$f^{(j)}(a+) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (1.2.52)$$

Para demostrar tal afirmación basta con ver que, si se cumple la expresión (1.2.52), entonces, cuando $x \rightarrow a$ en la fórmula (1.2.49), se obtiene directamente la condición (1.2.51); por otro lado, si se cumple (1.2.51), entonces multiplicando ambos miembros de la identidad (1.2.49) por $(x-a)^{\alpha-j}$, sucesivamente con $j = n-1, n-2, \dots, 1, 0$, y tomando los límites cuando $x \rightarrow a$, se obtiene la sucesión de resultados $f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n-2)}(a) = 0, \dots$, $f'(a) = 0$, $f(a) = 0$; es decir, las condiciones (1.2.52).

La equivalencia entre las condiciones (1.2.51) y (1.2.52) tiene una consecuencia importante en la formulación de problemas de valores iniciales para ecuaciones diferenciales

con derivadas fraccionarias. En efecto, cualquiera que sea la definición de derivada fraccionaria empleada, de Riemann-Liouville o de Caputo, en la formulación del problema de Cauchy correspondiente a la ecuación diferencial fraccionaria en cuestión, siempre podremos emplear condiciones iniciales enteras y, por lo tanto, físicamente interpretables, teniendo en cuenta que a cada condición fraccionaria de orden α corresponden n condiciones enteras. También, cabe concluir que la elección de la derivada de Caputo frente a la de Riemann-Liouville en aplicaciones de tipo físico es algo puramente formal y a menudo justificado por cuestiones de carácter práctico, resultando más manejable el método de la transformada de Laplace a la hora de solucionar el problema en cuestión.

Existen diferencias fundamentales entre las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y de Caputo; entre ellas cabe destacar, en primer lugar, que para la derivada fraccionaria de Caputo se verifica la siguiente propiedad:

Propiedad 1.2.13

$${}^C D_{a+}^{\alpha} (x - a)^k = 0, \quad (1.2.53)$$

siendo $\alpha > 0$, $n - 1 < \alpha \leq n$ y $k < n$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Esta propiedad evidencia que el valor de la derivada fraccionaria de Caputo, calculado para una constante, es cero.

También resaltamos que el papel jugado por la función de Mittag-Leffler (1.3.1) con respecto a la derivada fraccionaria de Caputo es parecido al de la función exponencial con respecto a la derivación clásica, como muestra la propiedad que sigue:

Propiedad 1.2.14

$${}^C D_{a+}^{\alpha} E_{\alpha,1}(\lambda(x - a)^{\alpha}) = \lambda E_{\alpha,1}(\lambda(x - a)^{\alpha}), \quad \alpha > 0, \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.2.54)$$

Volviendo a la comparación entre la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y la de Caputo, podemos mencionar, en segundo lugar, la diferencia existente en el intercambio entre los operadores de derivadas fraccionarias, de gran importancia para sus aplicaciones:

Propiedad 1.2.15

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} ({}^C D_{a+}^m f))(x) = ({}^C D_{a+}^m ({}^C D_{a+}^{\alpha} f))(x) = ({}^C D_{a+}^{\alpha+m} f)(x), \quad (1.2.55)$$

si $f^{(s)}(a) = 0$, $s = n, n + 1, \dots, m$, ($m = 0, 1, 2, \dots; n - 1 < \alpha < n$), y

$$({}^{RL} D_{a+}^{\alpha} ({}^{RL} D_{a+}^m f))(x) = ({}^{RL} D_{a+}^m ({}^{RL} D_{a+}^{\alpha} f))(x) = ({}^{RL} D_{a+}^{\alpha+m} f)(x), \quad (1.2.56)$$

si $f^{(s)}(a) = 0$, $s = 0, 1, 2, \dots, m$, ($m = 0, 1, 2, \dots; n - 1 < \alpha < n$).

Por lo tanto, en el caso de la derivada de Caputo, al contrario de lo que ocurre con la derivada de Riemann-Liouville, no tenemos restricciones sobre los valores $f^{(s)}(a)$, cuando $s = 0, 1, \dots, n - 1$.

En tercer lugar, las definiciones de Riemann-Liouville y de Caputo admiten distintas clases de funciones cuyo resultado es el mismo, bajo la aplicación de la derivada fraccionaria de orden α , con $n - 1 < \alpha \leq n$:

Propiedad 1.2.16

$$({}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f)(x) = ({}^{RL}D_{a+}^{\alpha} g)(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + \sum_{j=1}^n c_j (x-a)^{\alpha-j} \quad (1.2.57)$$

y

$$({}^CD_{a+}^{\alpha} f)(x) = ({}^CD_{a+}^{\alpha} g)(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + \sum_{j=1}^n c_j (x-a)^{n-j} \quad (1.2.58)$$

con c_j constantes arbitrarias.

Este resultado es consecuencia directa de las anteriores Propiedades 1.2.10 y 1.2.13.

Concluimos esta sección mostrando que las dos definiciones de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y de Caputo pueden interpretarse como generalizaciones del concepto de *derivación en el sentido generalizado*.

Introducimos la siguiente función *causal* generalizada,

$$\Phi_{\alpha}(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (1.2.59)$$

definida por Gel'fand y Shilov en [57] (cuando $x = 0$ el cociente debe ser interpretado como un límite). Entre las propiedades de la función (1.2.59) enunciadas en [57], hay que destacar la siguiente:

$$\lim_{\alpha \rightarrow -k} \Phi_{\alpha}(x) = \delta^{(k)}(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.2.60)$$

donde $\delta^{(k)}(x)$ denota la derivada generalizada (o derivada de la función generalizada) de orden k de la distribución delta de Dirac [57]. Como veremos en la Sección 1.2.6, la convolución de la derivada de orden k de esta función con una función $f(x)$ está dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) \delta^{(k)}(x-z) dz = f^{(k)}(x). \quad (1.2.61)$$

Entonces, volviendo a la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α , $\alpha > 0$,

$$({}^I_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-z)^{\alpha-1} f(z) dz, \quad (x > a),$$

esta expresión se puede considerar como la convolución de la función $f(x)$ (que se supone nula para $x < a$) con la $\Phi_{\alpha}(x)$ que aparece en (1.2.59), y escribir

$$({}^I_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x) * \Phi_{\alpha}(x). \quad (1.2.62)$$

La representación (1.2.62) sigue evidentemente siendo válida para las integrales de orden entero n , y también se puede extender formalmente a las derivadas enteras del

mismo orden si se utilizan las (1.2.60) y (1.2.61) (véase [59] y [135]). Se representa entonces la convolución *generalizada* de $\Phi_{-n}(x)$ con $f(x)$ como sigue:

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = D^n f(x) = f(x) * \Phi_{-n}(x) = \int_a^x f(z) \delta^{(n)}(x-z) dz, \quad (x > a), \quad (1.2.63)$$

y por consiguiente, una posible definición formal de la derivada fraccionaria de orden α , $\alpha > 0$, sería

$$f(x) * \Phi_{-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x \frac{f(z)}{(x-z)^{1+\alpha}} dz, \quad (x > a). \quad (1.2.64)$$

La integral (1.2.64) tiene un valor puramente formal, resultando generalmente divergente debido a que el núcleo $\Phi_{-\alpha}(x)$ no es integrable localmente en valor absoluto. Siguiendo el razonamiento utilizado en [59], se puede regularizar esta integral observando que, dado un entero m , con $m-1 < \alpha < m$, resulta $-\alpha = -m + (m-\alpha) = (m-\alpha) - m$, y

$$[\Phi_{-m}(x) * \Phi_{m-\alpha}(x)] * f(x) = \Phi_{-m}(x) * [\Phi_{m-\alpha}(x) * f(x)] = D^m (I_{a+}^{m-\alpha} f)(x), \quad (1.2.65)$$

$$[\Phi_{m-\alpha}(x) * \Phi_{-m}(x)] * f(x) = \Phi_{m-\alpha}(x) * [\Phi_{-m}(x) * f(x)] = (I_{a+}^{m-\alpha} D^m f)(x), \quad (1.2.66)$$

donde (1.2.65) y (1.2.66) coinciden con las definiciones vistas anteriormente de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y de Caputo, respectivamente.

1.2.5. Transformadas de Laplace y de Fourier de las derivadas fraccionarias

Vamos a empezar esta sección recordando las condiciones de existencia de la transformada de Laplace.

Una función $f(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ se dice *exponencial de orden ν* ($\nu > 0$) cuando $t \rightarrow \infty$, si existen dos constantes positivas M y T tales que

$$|f(t)| \leq M e^{\nu t} \quad \forall t \geq T. \quad (1.2.67)$$

Se puede afirmar que si una función es exponencial de orden $\nu > 0$, entonces no crece más rápidamente que $M e^{\nu t}$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Ahora, si una función $f(t)$ es continua, o continua a trozos en cada intervalo $(0, T)$, y es exponencial de orden $\nu > 0$, entonces la transformada de Laplace de $f(t)$

$$(\mathcal{L}f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (1.2.68)$$

existe para todo s con $Re(s) > \nu$.

La función original $f(t)$ puede ser recuperada a partir de su transformada de Laplace mediante la transformada de Laplace inversa:

$$f(t) = (\mathcal{L}_s^{-1} [(\mathcal{L}_t f)(s)])(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} (\mathcal{L}_t f)(s) ds, \quad c = \operatorname{Re}(s) > \nu. \quad (1.2.69)$$

Indicamos con $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$, donde $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, el espacio de las funciones continuas y exponenciales de orden $\nu > 0$ para las que existe la transformada de Laplace unidimensional, y cuya caracterización puede ser encontrada, por ejemplo, en los libros de Debnath [34], Ditkin y Prudnikov ([40, Capítulos I, II]) y Sneddon ([155, §3-§4]).

Adicionalmente, será útil recordar la siguiente propiedad:

Propiedad 1.2.17 *Dada una función $f(t)$ de variable $t \in \mathbb{R}_+$, continua con derivada continua hasta orden n , y tal que $f^{(h)}(t)$ sea exponencial de orden ν_h para todo $h = 0, 1, \dots, n-1$, entonces la transformada de Laplace de $f^{(n)}(t)$, está dada por:*

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f^{(n)}(t) dt = s^n (\mathcal{L}_t f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \quad (1.2.70)$$

para todo s con $\operatorname{Re}(s) > m$ y $m = \max_{h=0,1,\dots,n-1} \nu_h$.

Finalmente, vamos ahora a presentar las fórmulas de las transformadas de Laplace de las derivadas fraccionaria de Riemann-Liouville (véase, por ejemplo, [113] o [125]) y de Caputo (véase [25]) para el caso $a = 0$:

Propiedad 1.2.18 *Dada una función $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$, $\alpha > 0$, $n-1 < \alpha \leq n$, $f \in C^{n-1}(\mathbb{R}_+)$, resulta*

$$\int_0^{\infty} e^{-st} (({}^{RL}D_0^\alpha f)(t)) dt = s^\alpha (\mathcal{L}_t f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k ({}^{RL}D_0^{\alpha-k-1} f)(0), \quad (1.2.71)$$

si se cumple que $({}^{RL}D_0^{\alpha-k-1} f)(t)$ es exponencial de orden $\nu_k > 0$ para todo $k = 0, 1, \dots, n-1$ y $\operatorname{Re}(s) > m$, con $m = \max_{k=0,1,\dots,n-1} \nu_k$. Si también $f^{(n)} \in L_1(\mathbb{R}_+)$, entonces

$$\int_0^{\infty} e^{-st} (({}^CD_0^\alpha f)(t)) dt = s^\alpha (\mathcal{L}_t f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (1.2.72)$$

si se cumple que $f^{(k)}(t)$ es exponencial de orden $\nu_k > 0$ para todo $k = 0, 1, \dots, n-1$ y $\operatorname{Re}(s) > m$, con $m = \max_{k=0,1,\dots,n-1} \nu_k$.

Observación 1.2.2 *Es importante resaltar que, cuando $k = n-1$ en la fórmula (1.2.71), entonces resulta $\alpha - n < 0$ y por lo tanto ${}^{RL}D_0^{\alpha-n} = I_0^{n-\alpha}$; es decir, esta condición inicial es proporcionada por el valor de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $n - \alpha$ de la función f , calculada para $t = 0$.*

Introducimos una nueva notación para indicar los subespacios de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$ de las funciones para las cuales existe la transformada de Laplace de sus derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville (1.2.71) y de Caputo (1.2.72). En concreto, dado $\alpha > 0$ con $n - 1 < \alpha \leq n$, indicamos con ${}^{RL}\mathcal{L}^\alpha(\mathbb{R}_+)$ el siguiente espacio de funciones

$$\{f \in (C^{n-1}(\mathbb{R}_+) \cap \mathcal{L}(\mathbb{R}_+)) : ({}^{RL}D_0^{\alpha-k-1}f)(t) \text{ es exponencial de orden } \nu_k, k = 0, 1, \dots, n-1\}. \quad (1.2.73)$$

Asimismo, indicamos con ${}^C\mathcal{L}^\alpha(\mathbb{R}_+)$ el espacio de las funciones

$$\{f \in C^{n-1}(\mathbb{R}_+), f^{(n)} \in L_1(\mathbb{R}_+) : f^{(k)}(t) \text{ es exponencial de orden } \nu_k, k = 0, 1, \dots, n-1\}. \quad (1.2.74)$$

Cuando $\alpha = n$, ambos espacios coinciden con el espacio de las funciones para las cuales existe la transformada de Laplace de la derivada de orden n .

Como ya anunciamos, cuando se aplica la técnica de la transformada de Laplace hay una diferencia muy importante en la forma de las condiciones iniciales que deben acompañar a las ecuaciones diferenciales fraccionarias con derivada de Riemann-Liouville o de Caputo.

En efecto, podemos observar cómo el método de la transformada de Laplace, a menudo utilizado para solucionar problemas concretos, si es aplicado a un problema en el que aparece la derivada de Riemann-Liouville, sólo permite emplear condiciones iniciales fraccionarias del tipo

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a} (D_{a+}^{\alpha-1}f)(t) &= b_1, \\ \lim_{t \rightarrow a} (D_{a+}^{\alpha-2}f)(t) &= b_2, \\ &\dots \\ \lim_{t \rightarrow a} (D_{a+}^{\alpha-n}f)(t) &= b_n, \end{aligned} \quad (1.2.75)$$

donde b_k , con $k = 1, 2, \dots, n$, son constantes dadas, que pueden introducir problemas por falta de interpretación física. Al contrario, la fórmula de la transformada de Laplace de la derivada de Caputo generaliza la expresión (1.2.70), obtenida para la derivada entera de una función, y permite utilizar condiciones iniciales clásicas con clara interpretación física en la formulación del problema asociado.

Pasamos ahora a definir la transformada de Fourier de los operadores de derivación fraccionarios. En general, dada una función $f(x)$ de variable real $-\infty < x < \infty$, $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, su transformada de Fourier está dada por:

$$(\mathcal{F}_x f)(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x) dx, \quad (1.2.76)$$

mientras que la transformada de Fourier inversa es:

$$(\mathcal{F}_k^{-1}[(\mathcal{F}_x f)(k)])(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} (\mathcal{F}_x f)(k) dk. \quad (1.2.77)$$

Denotamos con $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ el espacio de las funciones para las cuales la transformada de Fourier unidimensional existe y nos referimos para su caracterización, por ejemplo, a los libros de Debnath [34], Ditkin y Prudnikov ([40, Capítulos I, II]) y Sneddon ([155, §3-§4]), como ya sugerimos para la transformada de Laplace.

Vamos ahora a recordar cual es el resultado de aplicar la transformada de Fourier a la derivada entera de orden n de una función.

Propiedad 1.2.19 *Dada una función $f(x)$ derivable con derivada continua hasta el orden n , y tal que resulte*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f^{(h)}(x) = 0, \quad h = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (1.2.78)$$

entonces

$$(\mathcal{F}_x f^{(n)})(k) = (-ik)^n (\mathcal{F}_x f)(k). \quad (1.2.79)$$

Finalmente, recogemos las fórmulas de las transformadas de Fourier de las integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville para el caso de $a = \infty$; es decir, de los operadores de Liouville $(I_+^\alpha f)(x)$ y $({}^L D_+^\alpha f)(x)$ definidos en (1.2.10) y (1.2.12) respectivamente.

Para poder definir la fórmula de la transformada de Fourier de la integral fraccionaria de Liouville para todo α , con $\alpha > 0$, es necesario introducir un espacio restringido de funciones cuya construcción se puede encontrar en [Cap.2, Sec.8.2][146].

Designemos con \mathcal{S} el espacio de Schwartz de las funciones infinitamente derivables en todo el eje real, las cuales, al igual que todas sus derivadas, tienden a cero para $|x| \rightarrow +\infty$ de forma más rápida que cualquier potencia de x^{-1} . En otras palabras, si $C_0^\infty(\mathbb{R})$ es el espacio de todas las funciones infinitamente derivables en todo el eje real tales que $f(x) \equiv 0$ en un entorno de los extremos $x = -\infty$ y $x = +\infty$, entonces el conjunto \mathcal{S} , con $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}$ se compone de aquellas, y sólo aquellas, funciones infinitamente diferenciables φ , para las cuales se cumple la condición

$$\mathcal{S} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^n \varphi^{(m)}(x) = 0\}, \quad (1.2.80)$$

cualesquiera que sean n y m enteros y no negativos.

Dentro del espacio de Schwartz, Lizorkin introdujo un subespacio de funciones $\Phi \subset \mathcal{S}$, invariante con respecto a la integración y a la derivación fraccionaria, en el sentido de que la función resultante de la aplicación de estos operadores fraccionarios siguiera perteneciendo al espacio Φ .

Definición 1.2.5 *Dado el espacio*

$$\Psi = \{\psi : \psi \in \mathcal{S}, \psi^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (1.2.81)$$

el conjunto de funciones de \mathcal{S} cuya transformada de Fourier pertenece al espacio Ψ se llama espacio de Lizorkin y se define como:

$$\Phi = \{\varphi : \varphi \in \mathcal{S}, (\mathcal{F}\varphi) \in \Psi\}. \quad (1.2.82)$$

El espacio de Lizorkin puede caracterizarse, de forma equivalente, como el espacio de las funciones de Schwartz $\varphi \in \mathcal{S}$ que resultan ser ortogonales a todos los polinomios:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \varphi(t) dt = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2.83)$$

Se puede ahora enunciar la siguiente propiedad:

Propiedad 1.2.20 *Dada una función $f(x)$ tal que $f(x) \in \Phi$ y α , con $\alpha > 0$, resulta*

$$(\mathcal{F}_x(I_+^\alpha f))(k) = (-ik)^{-\alpha} (\mathcal{F}_x f)(k) \quad (1.2.84)$$

y

$$(\mathcal{F}_x({}^L D_+^\alpha f))(k) = (-ik)^\alpha (\mathcal{F}_x f)(k). \quad (1.2.85)$$

En realidad se pueden suavizar las condiciones de existencia de la transformada de Fourier de la derivada fraccionaria, de la forma siguiente:

Propiedad 1.2.21 *Dada una función $f(x) \in C^{n-1}(\mathbb{R})$, $n - 1 < \alpha \leq n$, y tal que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f^{(h)}(x) = 0, \quad h = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (1.2.86)$$

entonces resulta

$$(\mathcal{F}_x({}^L D_+^\alpha f))(k) = (-ik)^\alpha (\mathcal{F}_x f)(k). \quad (1.2.87)$$

Debido a la validez de esta última propiedad, será muy útil introducir explícitamente un nuevo espacio, que contiene el espacio de Schwartz, y que definimos como:

$$\bar{\mathcal{S}} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi^{(m)}(x) = 0, m = 0, 1, 2, \dots\}. \quad (1.2.88)$$

En efecto, sobre este espacio se puede definir la transformada de Fourier de la derivada fraccionaria de Liouville de orden α , para todo $\alpha > 0$.

Es importante observar que, cuando se toma el extremo inferior $a = -\infty$ y se pide que $f(x)$ con todas sus derivadas se anulen para $x \rightarrow -\infty$; entonces, de acuerdo con las relaciones (1.2.49) y (1.2.52), las dos definiciones de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville (que en este caso llamamos de Liouville) y de Caputo coinciden, y por lo tanto la fórmula de sus transformadas de Fourier también.

1.2.6. Integrales y derivadas fraccionarias de funciones generalizadas en \mathcal{S}'

En esta sección repasamos unas nociones relativas al espacio de las funciones generalizadas \mathcal{S}' , dual topológico de \mathcal{S} , y a las expresiones de las integrales y derivadas fraccionarias de funciones en este espacio.

Definición 1.2.6 *Un funcional continuo lineal $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ se denomina función generalizada (o distribución) de crecimiento lento. El conjunto de todos los funcionales de esta índole se llama espacio de funciones generalizadas de crecimiento lento y se denota por \mathcal{S}' .*

Se denota con $\langle T, \varphi \rangle$ la imagen de una $\varphi \in \mathcal{S}$ bajo la acción de T , y se determina según la fórmula:

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} T(x)\varphi(x)dx. \quad (1.2.89)$$

Toda función $f(x)$, integrable en valor absoluto en todo el eje real, por ejemplo, genera un funcional continuo lineal sobre \mathcal{S} según la fórmula (1.2.89) que existe debido a la desigualdad

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)\varphi(x)| dx \leq \sup_{-\infty < x < +\infty} |\varphi(x)| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx,$$

donde toda función $\varphi \in \mathcal{S}$ está acotada.

En general, una distribución puede ser diferenciada un número arbitrario de veces y es cierto el siguiente resultado:

Propiedad 1.2.22 *Dada $\varphi \in \mathcal{S}$ y $k \in \mathbb{N}$,*

$$\langle T^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle. \quad (1.2.90)$$

En efecto, cualquiera que sea $k \in \mathbb{N}$, $T^{(k)}$ sigue siendo una distribución debido a que, si $\varphi \in \mathcal{S}$ también $\varphi^{(k)} \in \mathcal{S}$.

Asimismo, para la transformada de Fourier de una función generalizada se obtiene:

Propiedad 1.2.23 *Dada $\varphi \in \mathcal{S}$,*

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle. \quad (1.2.91)$$

También en este caso, el funcional $\mathcal{F}T$ sigue siendo un elemento de \mathcal{S}' gracias a que, si $\varphi \in \mathcal{S}$, entonces $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}$.

Si ahora consideramos el espacio de Lizorkin $\Phi \subset \mathcal{S}$ como espacio de las funciones test, se definen las integrales y derivadas fraccionarias de Liouville de una función generalizada $f \in \Phi'$ por medio de las fórmulas:

Propiedad 1.2.24 *Dadas $f \in \Phi'$, $\varphi \in \Phi$, α t.q $\alpha > 0$, resulta*

$$\langle I_{\pm}^{\alpha} f, \varphi \rangle = \langle f, I_{\mp}^{\alpha} \varphi \rangle \quad (1.2.92)$$

y

$$\langle {}^L D_{\pm}^{\alpha} f, \varphi \rangle = \langle f, {}^L D_{\mp}^{\alpha} \varphi \rangle. \quad (1.2.93)$$

Un ejemplo relevante de distribución en el espacio \mathcal{S}' es el de la función delta. Dirac fue el primero en introducir en 1926 una notación para esta función y en darle un sentido explícito desde el punto de vista físico como masa puntual (véase por ejemplo [57]).

Actualmente, la función delta de Dirac sirve en muchos problemas aplicados para representar impulsos instantáneos que podrían ser, por ejemplo, de tipo mecánico o eléctrico. El funcional *delta de Dirac* resulta definido sobre el espacio \mathcal{S} , junto con sus derivadas, mediante la expresión

$$\langle \delta^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(0), \quad (1.2.94)$$

mientras que el funcional más general *delta de Dirac en el punto x_0* , con $x_0 \in \mathbb{R}$, está definido por

$$\langle \delta^{(k)}(x - x_0), \varphi \rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(x_0). \quad (1.2.95)$$

Las fórmulas (1.2.91) y (1.2.95) permiten escribir el siguiente resultado para la transformada de Fourier de la función delta de Dirac:

$$\langle \mathcal{F}(\delta(x - x_0)), \varphi \rangle = \langle \delta(x - x_0), \mathcal{F}\varphi \rangle = (\mathcal{F}\varphi)(x_0). \quad (1.2.96)$$

En particular,

$$\langle \mathcal{F}\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}\varphi \rangle = (\mathcal{F}\varphi)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \varphi(x) dx \Big|_{k=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle \quad (1.2.97)$$

y, por lo tanto, se deduce que $\mathcal{F}\delta = 1$.

Observación 1.2.3 *Del mismo modo que el expuesto, se puede introducir el conjunto de todos los funcionales continuos y lineales $\bar{T} : \bar{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{C}$, indicarlo con $\bar{\mathcal{S}}'$, y determinar la imagen de una $\varphi \in \bar{\mathcal{S}}$ bajo la acción de una \bar{T} , $\langle \bar{T}, \varphi \rangle$ según una fórmula análoga de la (1.2.89). Este espacio es el dual topológico del espacio $\bar{\mathcal{S}}$ definido en (1.2.88). La función delta de Dirac también es una distribución en el espacio $\bar{\mathcal{S}}'$, y su transformada de Fourier, definida por la (1.2.97) sobre funciones $\varphi \in \bar{\mathcal{S}}$, sigue siendo un elemento de $\bar{\mathcal{S}}'$ gracias a que, si $\varphi \in \bar{\mathcal{S}}$ entonces $\mathcal{F}\varphi \in \bar{\mathcal{S}}$.*

1.2.7. Potencial de Riesz y derivada fraccionaria de Riesz

Consideramos en esta sección operadores de integración y derivación fraccionarios que resulten ser una potencia fraccionaria del operador de Laplace [49, 146]. La forma de definir tales operadores queda expresada de un modo sencillo en el espacio de las transformadas de Fourier para funciones $f \in \Phi$; es decir, el espacio de Lizorkin definido en (1.2.82). En efecto, se llama *integro-diferenciación de Riesz* a la operación:

$$((-\Delta)^{\alpha/2} f)(x) = (\mathcal{F}_k^{-1}(|k|^\alpha (\mathcal{F}_x f)(k)))(x) = \begin{cases} ({}^R D^\alpha f)(x) & \alpha > 0 \\ ({}^R I^{-\alpha} f)(x) & \alpha < 0 \end{cases}. \quad (1.2.98)$$

En el caso unidimensional, se llega a escribir la integral fraccionaria de Riesz de la siguiente forma explícita:

$$({}^R I^\alpha f)(x) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \cos(\alpha\pi/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{|\xi - x|^{1-\alpha}} d\xi, \quad \alpha > 0, \quad \alpha \neq 1, 3, 5, \dots, \quad (1.2.99)$$

y su operador inverso, la derivada fraccionaria de Riesz, cuando $0 < \alpha < 1$ está dado por:

$$({}^R D^\alpha f)(x) = \frac{1}{2\Gamma(-\alpha) \cos(\alpha\pi/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-\xi) - f(x)}{|\xi|^{1+\alpha}} d\xi. \quad (1.2.100)$$

Los operadores de integración fraccionarios con extremos de integración constantes, en analogía con los de la física matemática, se llaman de tipo *potencial*, y por esto la integral (1.2.99) es también denominada *potencial de Riesz*.

El operador ${}^R I^\alpha f$ resulta definido para funciones $f \in L_p(\mathbb{R})$ si $1 \leq p < 1/\alpha$ cuando $0 < \alpha < 1$, y en estas condiciones es válida la propiedad del semigrupo

$$({}^R I^\alpha ({}^R I^\beta f))(x) = ({}^R I^{\alpha+\beta} f)(x), \quad (1.2.101)$$

si $(\alpha + \beta) < 1$, pero es necesario el espacio de Lizorkin Φ definido en (1.2.82), invariante con respecto al operador de Riesz, para que se verifique esta misma propiedad para todo α y β con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

Se puede expresar el operador de integración (1.2.99) como combinación lineal con coeficientes constantes, de los operadores correspondientes de Liouville. En efecto resulta:

$$({}^R I^\alpha \phi)(x) = \left(\frac{I_+^\alpha + I_-^\alpha}{2 \cos(\alpha\pi/2)} \phi \right) (x), \quad \alpha \neq 1, 3, 5, \dots, \quad \alpha > 0. \quad (1.2.102)$$

A partir del potencial de Riesz, expresado según la fórmula (1.2.102), se puede fácilmente definir un nuevo operador integral fraccionario [146], generalización del anterior, como una combinación lineal de los operadores integrales fraccionarios de Liouville I_+^α y I_-^α

$$(M_{u,v}^\alpha \phi)(x) = (u I_+^\alpha \phi + v I_-^\alpha \phi) (x), \quad (1.2.103)$$

en la que u y v son constantes arbitrarias. Asimismo, el operador (1.2.103) puede ser escrito en la forma

$$(M_{u,v}^\alpha \phi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_1 + c_2 \operatorname{sign}(x-\xi)}{|\xi-x|^{1-\alpha}} \phi(\xi) d\xi, \quad (1.2.104)$$

si $c_1 = \frac{u+v}{2}$ y $c_2 = \frac{u-v}{2}$. El operador (1.2.103) se llama *potencial de Feller* ya que fue introducido por primera vez por Feller [49] en 1952, con las particulares constantes

$$u = \frac{\sin(\frac{\alpha\pi}{2} - \alpha\gamma)}{\sin(\alpha\pi)}, \quad v = \frac{\sin(\frac{\alpha\pi}{2} + \alpha\gamma)}{\sin(\alpha\pi)}, \quad (1.2.105)$$

es decir, cuando toma la forma

$$({}^F I_\gamma^\alpha \phi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \sin(\alpha\pi)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\{\alpha[\pi/2 + \gamma \operatorname{sign}(\xi-x)]\}}{|\xi-x|^{1-\alpha}} \phi(\xi) d\xi, \quad (1.2.106)$$

donde $\alpha > 0$ y $\alpha \neq 1, 2, 3, \dots$ si γ es una constante arbitraria no nula.

Cuando $\gamma = 0$ en (1.2.105), entonces resulta $u = v = \frac{1}{2\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}$, y el potencial de Feller (1.2.106) está definido para todo $\alpha \neq 1, 3, 5, \dots$, $\alpha > 0$ y coincide con el de Riesz (1.2.99), es decir

$$({}^F I_0^\alpha \phi)(x) = ({}^R I^\alpha \phi)(x), \quad \alpha > 0, \quad \alpha \neq 1, 3, 5, \dots \quad (1.2.107)$$

De forma análoga al anterior operador de Riesz, el potencial de Feller (1.2.103), con $0 < \alpha < 1$, resulta definido para funciones $f \in L_p(\mathbb{R})$ si $1 \leq p < 1/\alpha$, y en estas condiciones se cumple el semigrupo

$$(M_{u,v}^\alpha (M_{u,v}^\beta f))(x) = (M_{u,v}^{\alpha+\beta} f)(x), \quad (1.2.108)$$

si $(\alpha + \beta) < 1$. Cuando $0 < \alpha < 1$ y $f \in L_1(\mathbb{R})$, también resulta

$$(\mathcal{F}_x (M_{u,v}^\alpha f))(k) = \left[(u+v) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + i(u-v) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2} \text{sign}(k)\right) \right] \frac{(\mathcal{F}_x f)(k)}{|k|^\alpha}, \quad (1.2.109)$$

y, en particular, si u y v están dadas por la (1.2.105),

$$(\mathcal{F}_x ({}^F I_\gamma^\alpha f))(k) = e^{(i \text{sign}(k)\alpha\gamma)} \frac{(\mathcal{F}_x f)(k)}{|k|^\alpha}. \quad (1.2.110)$$

Se puede demostrar [146] que el operador inverso del potencial de Feller (1.2.103) cuando $0 < \alpha < 1$ está dado por

$$((M_{u,v}^\alpha)^{-1}\phi)(x) = \frac{1}{A\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_1 + c_2 \text{sign}(x-\xi)}{|\xi-x|^{1+\alpha}} [\phi(x) - \phi(\xi)] d\xi, \quad (1.2.111)$$

con $c_1 = \frac{u+v}{2}$, $c_2 = \frac{u-v}{2}$ y $A = 4[c_1^2 \cos^2(\alpha\pi/2) + c_2^2 \sin^2(\alpha\pi/2)]$ y su transformada de Fourier tendrá la misma fórmula que (1.2.109) cambiando α con $-\alpha$. En particular, si indicamos con $({}^F I_\gamma^\alpha)^{-1}$ el operador de derivación inverso al de integración ${}^F I_\gamma^\alpha$ en (1.2.106), entonces tendremos:

$$(\mathcal{F}_x (({}^F I_\gamma^\alpha)^{-1} f))(k) = e^{(-i \text{sign}(k)\alpha\gamma)} (\mathcal{F}_x f)(k) |k|^\alpha, \quad (1.2.112)$$

con $\alpha \neq 1, 2, 3, \dots$, $\alpha > 0$ si $\gamma \neq 0$.

En su artículo del 1952 [49], Feller optó por utilizar como operador de derivación fraccionario el opuesto del inverso del potencial de Feller (1.2.106), es decir, un operador ${}^F D_\gamma^\alpha$ tal que:

$${}^F D_\gamma^\alpha = -({}^F I_\gamma^\alpha)^{-1}, \quad (1.2.113)$$

con $\alpha \neq 1, 2, 3, \dots$, $\alpha > 0$ si $\gamma \neq 0$, y para el cual resulta

$$(\mathcal{F}_x ({}^F D_\gamma^\alpha f))(k) = -|k|^\alpha e^{(-i \text{sign}(k)\alpha\gamma)} (\mathcal{F}_x f)(k). \quad (1.2.114)$$

A este operador se le suele llamar *derivada fraccionaria de Feller-Riesz*.

La razón de esta elección puede explicarse de la siguiente manera. Es bien sabido que la ecuación de difusión estándar

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0,$$

cuando se asume la delta de Dirac (1.2.94) como condición inicial, $u(0, x) = \delta(x)$, tiene la densidad gaussiana como solución fundamental (o función de Green). Feller se planteó generar todas las distribuciones de probabilidad llamadas de *Lévy estrictamente estables* [49, 50, 97] con respecto al espacio y que evolucionan en el tiempo, como funciones de Green de un problema de Cauchy para una ecuación de difusión generalizada obtenida reemplazando en la ecuación de difusión estándar la derivada segunda con respecto al espacio con el operador pseudo-diferencial (1.2.113). En efecto, la función de Green del problema de Cauchy

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = {}^F D_\gamma^\alpha u(t, x), \quad u(0, x) = \delta(x) \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

donde ${}^F D_\gamma^\alpha$ opera sobre el espacio, resulta expresada en términos de su transformada de Fourier, por

$$(\mathcal{F}_x u)(t, k) = \exp(-t |k|^\alpha e^{-i \operatorname{sign}(k) \alpha \gamma}). \quad (1.2.115)$$

con $\alpha \neq 1, 2, 3, \dots$, $\alpha > 0$ si $\gamma \neq 0$.

La expresión (1.2.115), cuando $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$, y con oportunas restricciones sobre $\gamma \neq 0$, coincide con la forma canónica de Feller de la función característica de una clase de distribuciones de Lévy llamadas estrictamente estables en x . Las distribuciones estables fueron así llamadas por el matemático francés Paul Lévy que las introdujo, alrededor del año 1920, con el fin de generalizar el concepto de distribución normal o Gaussiana. En efecto, la función característica (o transformada de Fourier) de la distribución de Gauss es obtenida a partir de la (1.2.115) para $\gamma = 0$ y $\alpha = 2$, siendo su densidad

$$u(t, x) = (\mathcal{F}_k^{-1} \exp(-t |k|^2))(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right). \quad (1.2.116)$$

Cuando $\gamma = 0$, la expresión (1.2.115) representa la función característica de distribuciones estrictamente estables simétricas.

En muchas referencias (por ejemplo [97]) se suele adoptar la siguiente notación para la función característica de las distribuciones de Lévy estrictamente estables en x , cuando $0 < \alpha \leq 2$, $\alpha \neq 1$, ligeramente diferente con respecto de la (1.2.115),

$$(\mathcal{F}_x u)(t, k) = \hat{p}_\alpha(t, k; \theta) = \exp(-t |k|^\alpha e^{i \operatorname{sign}(k) \theta \frac{\pi}{2}}) \quad (1.2.117)$$

obtenida poniendo $\gamma = -\frac{\theta\pi}{2\alpha}$ en (1.2.105) y en todas las fórmulas que derivan de ella, con θ parámetro de asimetría que cumple las siguientes restricciones:

$$|\theta| \leq \begin{cases} \alpha & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ 2 - \alpha & \text{si } 1 < \alpha < 2 \end{cases}. \quad (1.2.118)$$

Dicha notación será la que se utilizará en las aplicaciones que siguen, al resultar más cómoda de manejar que la primera.

Entre los pocos casos en los que se conoce la expresión explícita de una densidad de probabilidad estable, está el de la *densidad de Lévy unilateral*

$$p_{1/2}(t, x; -\frac{1}{2}) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} x^{-3/2} e^{-t^2/(4x)} \quad x > 0, \quad (1.2.119)$$

obtenida invirtiendo la (1.2.117) cuando $\alpha = 1/2$ y $\theta = -1/2$, con respecto a la transformación de Fourier.

El caso de $\theta = 0$ y $\alpha = 1$, aunque excluido de la representación canónica (1.2.117) debido a las dificultades que presenta, es tratado separadamente y resulta muy importante porque corresponde a otra distribución de Lévy estable para la cual se conoce su densidad de probabilidad explícita, la distribución de Cauchy-Lorentz:

$$p_1(t, x; 0) = (\mathcal{F}_k^{-1} \exp(-t|k|))(t, x) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{(x^2 + t^2)}. \quad (1.2.120)$$

En los desarrollos del Capítulo 6, se empleará el particular operador de derivación fraccionaria de Feller-Riesz ${}^F D_\gamma^\alpha$ correspondiente a $\gamma = 0$. Aplicando su definición (1.2.113) y la identidad (1.2.107), dicho operador puede ser escrito como

$$({}^F D_0^\alpha f)(x) = -({}^R D^\alpha f)(x) = -\frac{1}{2\Gamma(-\alpha) \cos(\alpha\pi/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-\xi) - f(x)}{|\xi|^{1+\alpha}} d\xi, \quad (1.2.121)$$

cuando $0 < \alpha < 1$; además, para $\alpha > 0$ y $\alpha \neq 1, 3, 5, \dots$, resulta

$$(\mathcal{F}_x({}^F D_0^\alpha f))(k) = -|k|^\alpha (\mathcal{F}_x f)(k), \quad (1.2.122)$$

y, en particular,

$$(\mathcal{F}_x({}^F D_0^2 f))(k) = -|k|^2 (\mathcal{F}_x f)(k), \quad (1.2.123)$$

lo que implica

$$({}^F D_0^2 f)(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x), \quad (1.2.124)$$

debido a la unicidad de la transformada de Fourier.

El caso singular $\alpha = 1$ en la definición (1.2.121) ha sido tratado explícitamente en [49] por Feller a través de la transformada de Hilbert y la integral de Poisson. En particular, será útil conocer que

$$({}^F D_0^1 \phi)(x) = -({}^R D^1 \phi)(x) = \left(\frac{d}{dx} H \right) \phi(x), \quad \alpha = 1, \quad (1.2.125)$$

donde H es la transformada de Hilbert

$$(H\phi)(x) \equiv v.p. \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\xi)}{\xi - x} d\xi, \quad (1.2.126)$$

y la integral ha de ser entendida en el sentido de los valores principales de Cauchy.

1.3. Algunas funciones especiales asociadas al cálculo fraccionario

En esta sección se introducen brevemente las funciones especiales llamadas de Mittag-Leffler y de Wright, que juegan un papel relevante en las aplicaciones del cálculo fraccionario, debido a que aparecen de forma natural en la resolución de ecuaciones íntegro-diferenciales fraccionarias. Acerca de la relación existente entre los polinomios especiales,

sus representaciones integrales y los operadores fraccionarios, pueden consultarse, entre otras, las referencias [31, 32, 33].

La *función de Mittag-Leffler* $E_\alpha(z)$, con $\alpha > 0$ $z \in \mathbb{C}$, fue introducida por el matemático sueco G. M. Mittag-Leffler [115]-[119] al principio del siglo pasado, y se define por medio de las siguientes expresiones en serie y en forma integral:

$$E_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \frac{e^\sigma \sigma^{\alpha-1}}{\sigma^\alpha - z} d\sigma, \quad (1.3.1)$$

donde Ha es el contorno de Hankel, es decir, una curva que empieza y acaba en $-\infty$ y que rodea al disco $|\sigma| \leq |z|^{1/\alpha}$ en el sentido positivo $|\arg \sigma| \leq \pi$. Esta definición sigue siendo válida [118] si $\alpha \in \mathbb{C}$ con $Re(\alpha) > 0$.

La función de Mittag-Leffler proporciona una generalización de la función exponencial sustituyendo en la expresión en serie de esta última el $n! = \Gamma(n + 1)$ por $\Gamma(\alpha n + 1)$, y resultando, por lo tanto, $E_1(z) = e^z$.

También pueden recuperarse otras funciones elementales como casos particulares de la función de Mittag-Leffler [48]:

$$E_2(+z^2) = \cosh z, \quad E_2(-z^2) = \cos z, \quad (1.3.2)$$

$$E_{1/2}(\pm z^{1/2}) = e^z [1 + \operatorname{erf}(\pm z^{1/2})] = e^z \operatorname{erfc}(\mp z^{1/2}), \quad (1.3.3)$$

donde, en (1.3.3), se asume el valor principal de la raíz cuadrada de z en el plano complejo cortado a lo largo del eje real negativo; y las funciones de los errores y su complementar se definen como

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^z e^{-u^2} du, \quad \operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z).$$

En 1953 Agarwal propuso en [3] y [68] una sencilla generalización de la función de Mittag-Leffler sustituyendo la constante 1 en el argumento de la función Gamma, por un nuevo parámetro complejo β . Esta función fue llamada *función de Mittag-Leffler generalizada o de dos parámetros* y para ella se utiliza la siguiente notación:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \frac{e^\sigma \sigma^{\alpha-\beta}}{\sigma^\alpha - z} d\sigma. \quad (1.3.4)$$

Claramente, se cumple que $E_\alpha(z) = E_{\alpha,1}(z)$. Una propiedad que será muy útil para los desarrollos futuros es la siguiente (véase [135, Sección 1.2.], por ejemplo)

$$mz^n E_{m\alpha,\beta+n\alpha}(z^m) = \sum_{\nu=0}^{m-1} e^{\frac{i2\pi\nu(m-n)}{m}} E_{\alpha,\beta}(ze^{\frac{i2\pi\nu}{m}}), \quad (1.3.5)$$

con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y enteros $m \geq 1$, $n \geq 0$; una consecuencia de la propiedad (1.3.5) es la llamada *fórmula de duplicación*, que asume la forma

$$E_{2\alpha,\beta}(z^2) = \frac{1}{2} [E_{\alpha,\beta}(z) + E_{\alpha,\beta}(-z)]. \quad (1.3.6)$$

En la aplicación del método de la transformada de Laplace para solucionar ecuaciones diferenciales fraccionarias, también resultará esencial conocer la relación existente entre la función de Mittag-Leffler y la integral de Laplace.

En general resulta:

$$\left(\mathcal{L}_t(t^{\alpha h + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(h)}(\mu t^\alpha))\right)(s) = \frac{h! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha - \mu)^{h+1}} \quad (\operatorname{Re}(s) > |\mu|^{1/\alpha}), \quad (1.3.7)$$

donde $t > 0$, μ es una constante y $E_{\alpha, \beta}^{(h)}(z) = \frac{d^h}{dz^h} E_{\alpha, \beta}(z)$.

Pasamos ahora a definir la segunda función especial de la que hablamos, la llamada función de Wright, que resultará fundamental en la resolución de las ecuaciones fraccionarias de evolución y difusión, y que, cómo veremos, está relacionada con la función de Mittag-Leffler.

La *función de Wright*, introducida por Wright [174], puede ser definida por medio de las siguientes fórmulas en serie e integral (véase [48, 18.1(27)], [135, (1.156)])

$$W(z; \alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta) n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \frac{e^{\sigma + z\sigma^{-\alpha}}}{\sigma^\beta} d\sigma, \quad (1.3.8)$$

para argumentos complejos $z \in \mathbb{C}$, e índices $\alpha > -1$, $\beta > 0$. En realidad, la expresión (1.3.8) sigue definida cuando $\beta = 0$, resultando:

$$W(z; \alpha, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n) n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n) n!}, \quad (1.3.9)$$

al ser $\Gamma(0) = \infty$.

La función de Wright, así como la de Mittag-Leffler, también representa una generalización de la función exponencial, siendo $W(z; 0, 1) = e^z$. Otro caso particular de esta función que será muy útil conocer, es él que fue considerado por Mainardi [99]:

$$W\left(-z; -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}, \quad (1.3.10)$$

y que resulta proporcional a la densidad normal dada en (1.2.116) con $t = 1$.

En [175] y [177] Wright investigó el comportamiento asintótico de esta función en el infinito en los casos $\alpha > 0$ y $-1 < \alpha < 0$; mientras que Mainardi y Tomirotti [102] estudiaron el comportamiento asintótico de la función de Wright $W(z; \alpha, \beta)$ para el caso particular de $\alpha = -\nu$ y $\beta = 1 - \nu$, con $0 < \nu < 1$, y cuando su argumento z es real y negativo. En efecto, si $r > 0$, cuando $r \rightarrow +\infty$ resulta

$$W\left(-\frac{r}{\nu}; -\nu, 1 - \nu\right) \sim a(\nu) r^{(\nu-1/2)/(1-\nu)} \exp\left[-b(\nu) r^{1/(1-\nu)}\right], \quad (1.3.11)$$

donde $a(\nu) = 1/\sqrt{2\pi(1-\nu)}$, $b(\nu) = (1-\nu)/\nu$.

Es fácil demostrar que se cumple la siguiente propiedad:

$$W(-z; -\nu, 1 - \nu) = \frac{1}{\nu z} W(-z; -\nu, 0), \quad (1.3.12)$$

si $z \neq 0$ y $0 < \nu < 1$.

Como habíamos anunciado, existe una interesante relación, expresada en términos de la transformada de Laplace, entre las funciones de Mittag-Leffler y de Wright:

$$(\mathcal{L}_t W(t; \alpha, \beta))(s) = s^{-1} E_{\alpha, \beta}(s^{-1}) \quad (1.3.13)$$

$$(\mathcal{L}_t W(-t; \alpha, \beta))(s) = s^{-1} E_{\alpha, \beta}(-s^{-1}) \quad (1.3.14)$$

con $t > 0$ y $\alpha > -1$, $\beta > 0$. En particular, resulta:

$$(\mathcal{L}_t W(-t; -\nu, 1 - \nu))(s) = E_{\nu, 1}(-s). \quad (1.3.15)$$

con $t > 0$ y $0 < \nu < 1$, siendo

$$s^{-1} E_{-\alpha, 1-\alpha}(\pm s^{-1}) = \mp E_{\alpha, 1}(\pm s),$$

cuando $0 < \alpha < 1$.

Asimismo, será de utilidad apuntar otra relación existente entre la función de Wright y su transformada de Laplace, fácil de demostrar:

$$(\mathcal{L}_t t^{\beta-1} W(\gamma t^\alpha; \alpha, \beta))(s) = s^{-\beta} e^{\gamma/s^\alpha} \quad (1.3.16)$$

con $t > 0$, γ constante real y $\alpha > -1$, $\beta > 0$.

Por último, concluimos esta sección mostrando la relación [45, 101] existente entre unas funciones de Wright particulares y una subclase del conjunto de las densidades de Lévy estrictamente estables $p_\alpha(x; \theta)$ cuya función característica está dada por

$$(\mathcal{F}_x p_\alpha)(k; \theta) = \hat{p}_\alpha(k; \theta) = \exp(-|k|^\alpha e^{i \operatorname{sign}(k) \theta \frac{\pi}{2}}), \quad (1.3.17)$$

con $0 < \alpha \leq 2$, $\alpha \neq 1$.

En efecto, resulta, para $x > 0$:

$$\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} W(-x^{-\alpha}; -\alpha, 1 - \alpha) = \frac{1}{x} W(-x^{-\alpha}; -\alpha, 0) = p_\alpha(x; -\alpha), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1.3.18)$$

y

$$\frac{1}{\alpha} W(-x; -\frac{1}{\alpha}, 1 - \frac{1}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha} W(-x; -\frac{1}{\alpha}, 0) = p_\alpha(x; \alpha - 2), \quad 1 < \alpha \leq 2. \quad (1.3.19)$$

Estas relaciones se obtienen a partir de las expresiones en serie convergentes que Feller desarrolló en [49] para las distribuciones estables $p_\alpha(x; \theta)$, cuando $x > 0$.

Hay que resaltar que la $p_\alpha(x; -\alpha)$ que aparece en (1.3.18), con $0 < \alpha < 1$, es una densidad de probabilidad estable unilateral, con soporte en $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, y por lo tanto resulta:

$$\int_0^\infty p_\alpha(x; -\alpha) dx = 1, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (1.3.20)$$

Por otro lado, la $p_\alpha(x; \alpha - 2)$ que aparece en (1.3.19), con $1 < \alpha \leq 2$, es una densidad de probabilidad estable cuyo soporte es todo \mathbb{R} , y que en (1.3.19) queda restringida al eje positivo, por lo que resulta:

$$\int_0^\infty p_\alpha(x; \alpha - 2) dx = \frac{1}{\alpha}, \quad 1 < \alpha \leq 2. \quad (1.3.21)$$

2. ECUACIÓN DE DIFUSIÓN FRACCIONARIA

2.1. Introducción

Entre las ecuaciones fundamentales de la física se encuentran las ecuaciones de difusión y de ondas.

La *ecuación de difusión estándar*, en su forma más sencilla, viene dada por

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t, x), \quad (2.1.1)$$

donde λ^2 es una constante positiva llamada “coeficiente de difusión” y $u(t, x)$ es una función que asumimos nula para $t < 0$.

El fenómeno físico típicamente relacionado con esta ecuación es el de la difusión del calor a lo largo de una varilla semi-infinita, donde $u(t, x)$ es la variable temperatura en el tiempo t , a una distancia x del extremo.

La *ecuación de ondas*, cuando consideramos las oscilaciones de una cuerda no acotada, toma la forma más sencilla

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t, x) = \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t, x), \quad (2.1.2)$$

con λ velocidad de ondas y $u(t, x)$ la desviación longitudinal de la cuerda del eje x .

Estas dos ecuaciones son los ejemplos más simples de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, de tipo parabólico e hiperbólico respectivamente, y siempre han sido asociadas a familias muy distintas de fenómenos físicos. El objeto de este capítulo es mostrar como en los últimos años se ha ido abandonando esta diferenciación gracias a la posibilidad de establecer una interpolación entre las dos ecuaciones, mediante la utilización de derivadas fraccionarias que permitan estudiar la transición de la condición parabólica a la hiperbólica desde un punto de vista puramente matemático, y que permitirá también encontrar la interpretación física de los fenómenos asociados.

Dado el problema de Cauchy obtenido considerando las condiciones iniciales

$$u(0+, x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad (2.1.3)$$

para la ecuación (2.1.1), es bien sabido que su solución cuando $g(x) = \delta(x)$ (solución fundamental o función de Green) es la densidad de probabilidad normal o de Gauss en el espacio

$$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t \lambda}} e^{-\frac{x^2}{4\lambda^2 t}}, \quad (2.1.4)$$

donde $\lambda > 0$.

El movimiento irregular de una partícula en un plano, que se difunde según la ley (2.1.1), puede ser descrito mediante el movimiento Browniano, así llamado por el botánico escocés Robert Brown [22] que lo observó en 1827 estudiando al microscopio el desplazamiento de las partículas de polen en suspensión en un fluido, que se mueven bajo el efecto de los rápidos impactos sucesivos y aleatorios de las partículas cercanas. El tratamiento matemático del movimiento Browniano se debe principalmente a Norbert Wiener [172], que demostró que sus trayectorias son casi en todos puntos continuas pero en casi ningún punto diferenciables. Este movimiento puede ser modelizado mediante un camino aleatorio en el plano (CTRW, “*continuous time random walk*”), donde las variables aleatorias “longitud de los saltos” y “tiempo de espera entre cada salto” son independientes y tienen densidad de probabilidad Gaussiana y Markoviana; el proceso es *local* en el sentido de que el pasado no afecta el futuro ya que resulta determinado sólo por el inmediato presente. El concepto de camino aleatorio fue formalmente introducido por Karl Pearson [128] en 1905.

La ley gaussiana (2.1.4) de la variable aleatoria de la longitud de los saltos X , asegura que todos sus momentos existen y son finitos, gracias a su decaimiento exponencial en el infinito. En particular, su momento segundo $\langle X^2 \rangle$ es proporcional a la potencia primera del tiempo.

Un camino aleatorio puede ser caracterizado mediante los momentos de la variable que describe los saltos y , cuando el proceso es *no-local* o con memoria en el tiempo de espera entre saltos, el momento segundo de la variable X es proporcional a la potencia de orden α del tiempo, t^α , cuando t es suficientemente grande.

En estos casos hablamos de procesos de difusión anómalos y se dividen en *sub-difusión*, *difusión normal* y *super-difusión* cuando $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$, y $\alpha > 1$ respectivamente.

El primero en hablar de difusión anómala fue Richardson [139] en su tratado de 1926 sobre difusión turbulenta. En el ámbito de la teoría de transporte, se ha estudiado la difusión anómala a partir de los años '60. En particular, Scher y Montroll [149] condujeron un estudio teórico del tema en la descripción que hicieron del transporte con dispersión en semiconductores amorfos, un sistema para el cual los métodos tradicionales suelen fallar. Contribuciones fundamentales al tema fueron también las de Weiss [170] y Shlesinger [154].

Hasta el día de hoy, la realidad y los resultados experimentales han demostrado cómo muchos de los procesos asociados con sistemas complejos tienen dinámicas anómalas en varias disciplinas, incluyendo la física, química, ingeniería, geología, biología, economía, meteorología y astrofísica entre otras. Ejemplos de ello son fenómenos de transporte a través de un medio fractal poroso, procesos de difusión ultra-rápidos y ultra-lentos, propiedades de super conductividad de algunos materiales en condiciones especiales, propiedad de visco-elasticidad de muchos polímeros, transmisión de señales en medios porosos o visco-elásticos, procesos de relajación anómalos, dinámicas de procesos muy próximos a la turbulencia, resonancia magnético nuclear, difusión de los cosméticos a través de la piel y dinámicas de absorción de las proteínas por parte de las células, movimiento de las bacterias, transporte de contaminantes por medio de flujos líquidos, dinámicas de difusión y procesos de ondas en el plasma confinado en campos magnéticos, etc.

Los modelos que aplican derivadas clásicas no describen de forma exhaustiva tales

comportamientos anómalos y, por consiguiente, de modo paralelo, se han ido desarrollando herramientas alternativas que satisfagan tales requisitos.

En los últimos 30 años, la difusión anómala, en presencia o ausencia de un campo exterior de velocidades o de fuerzas, ha sido modelado recurriendo extensamente a conceptos de la física estadística que generalizaran los de la física clásica: movimiento Browniano fraccionario, debido a Mandelbrot [104], método del CTRW (véase por ejemplo [77], [149], [130], [183], [19], [78]) que involucra distribuciones estables de Lévy en lugar de la distribución Gaussiana, ecuaciones de difusión generalizadas [126], ecuaciones de Langevin generalizadas (véase por ejemplo [153], [53], [168]).

Hace unos 10 años se empezó a formalizar la conexión existente entre estos modelos estadísticos y las ecuaciones diferenciales fraccionarias. En efecto, las características de no-localidad y larga-memoria en el tiempo, típicos de muchos de estos procesos de dinámicas complejas, son las mismas que poseen los operadores de integración y derivación fraccionarios, a cambio de perder importantes propiedades de la derivada ordinaria como la interpretación geométrica usual, la propiedad del semigrupo, la regla de la cadena, etc. Se puede obtener esta conexión de muchas formas, pero una de las más utilizadas generaliza el propagador del modelo mediante las transformadas de Fourier y/o de Laplace, y sustituye la función característica de la densidad de probabilidad, que incluye la función exponencial e^x en el caso clásico, por las funciones especiales de Mittag-Leffler, Wright o Fox que satisfacen algunas de las principales propiedades de e^x .

De momento, entre los modelos más estudiados, relacionados con los procesos de difusión anómala, están los que contienen las versiones fraccionarias de las ecuaciones de difusión así como de las ecuaciones de Fokker-Plank, de Langevin y de Kramer entre otras.

No es la intención del presente estudio hacer un análisis bibliográfico del tema; para los que estén interesados en ello, se debe comentar que, entre las referencias útiles más recientes, están los artículos de Metzler y Klafter [111] y [112].

Vamos a centrar el interés en los modelos que describen procesos de difusión anómala y que involucran la, así llamada, *ecuación de difusión fraccionaria* obtenida sustituyendo en la ecuación de difusión clásica (2.1.1), la derivada primera con respecto del tiempo y/o la derivada segunda con respecto del espacio, por una derivada fraccionaria.

En su forma más general, esta ecuación esta dada por

$$(D_t^\alpha u)(t, x) = \lambda^2 (D_x^\beta u)(t, x) \quad (t > 0, -\infty < x < \infty, \lambda \in \mathbb{R}_+), \quad (2.1.5)$$

con $0 < \alpha \leq 2$, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, $\beta > 0$, y representa una interpolación entre las ecuaciones clásicas de difusión (2.1.1) y de ondas (2.1.2), que en efecto son devueltas para $\alpha = 1$ y $\beta = 2$ y $\alpha = 2$ y $\beta = 2$ respectivamente.

Muchos autores, incluyendo Engler [45], Fujita [55], Kilbas, Srivastava y Trujillo [74], Gorenflo, Luchko y Mainardi [61], Gorenflo y Mainardi [60], Mainardi [99] y [100], Mainardi y otros colaboradores [101],[102], Prüss [138], Saichev y Zaslavsky [145], Samko y colaboradores [146], Schneider y Wyss [150], Wyss [180] han tratado algunos aspectos matemáticos de problemas de contorno y/o de valores iniciales para la ecuación (2.1.5) (con derivadas fraccionarias de Caputo, de Riemann-Liouville y inversa del potencial de Riesz entre otras) y para otras ecuaciones de este tipo.

Por otro lado, las ecuaciones en derivadas parciales fraccionarias del tipo de (2.1.5) fueron utilizadas con éxito para modelizar procesos físicos relevantes, como se puede ver,

por ejemplo, en los trabajos de Caputo [27], Giona y Roman [58], Hilfer [67], Mainardi y Tomirotti [103], Matignon y Montseny [107], Metzler y colaboradores [110], Nigmatullin [123], Pipkin [133] y Podlubny [135].

En este capítulo se enuncian algunos de los resultados ya conocidos en la literatura acerca de la ecuación (2.1.5), así como extensiones de ellos y resultados nuevos que han sido obtenidos por el autor de esta tesis.

En los desarrollos concretos que vamos a presentar relativos a la ecuación (2.1.5) se especifican los operadores fraccionarios según las definiciones de Caputo y de Riemann-Liouville que se han presentado en el Capítulo 1, asignándoles las condiciones iniciales enteras o fraccionarias necesarias, según lo dicho en la Sección 1.2.4. Muchos de los contenidos aquí reunidos serán indispensables en el ámbito del Capítulo 3, cuando se construirá una nueva interpolación entre las ecuaciones de ondas y de difusión por medio de un sistema de ecuaciones fraccionarias de evolución, obtenido operando un tipo de raíz cuadrada de la ecuación (2.1.5), generalizando el método usado por Dirac para obtener su famosa ecuación para el electrón libre a partir de la ecuación de Klein-Gordon.

2.2. Ecuación de difusión fraccionaria en el tiempo con derivada de Caputo: algunos resultados conocidos.

La ecuación (2.1.5) en la forma

$$({}^C_0D_t^\alpha u)(t, x) = \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}; \lambda^2 \in \mathbb{R}_+), \quad (2.2.1)$$

con $0 < \alpha \leq 2$, y $({}^C_0D_t^\alpha u)(t, x)$ la derivada parcial fraccionaria definida en (1.2.46), es la llamada *ecuación de difusión fraccionaria en el tiempo con derivada de Caputo*.

Una primera recopilación de los aspectos teóricos generales del empleo de la derivada de Caputo en una ecuación diferencial fraccionaria, con aplicaciones a la viscoelasticidad, fue escrita por Caputo y Mainardi [28] en 1971. Posteriormente, Mainardi y sus colaboradores mantuvieron la derivada fraccionaria de Caputo, frente a la de Riemann-Liouville, en muchos de los trabajos que realizaron acerca de la difusión anómala, debido principalmente a la facilidad de manipulación que la primera derivada presenta cuando se le aplica la transformada de Laplace, como se ha evidenciado en la Sección 1.2.5. Vamos a presentar algunos de los principales resultados, relacionados con la ecuación (2.2.1), obtenidos por estos autores en varios de los artículos que hemos citado anteriormente (entre ellos véase, por ejemplo [99], [102], [59] y [101]).

Para garantizar la existencia y la unicidad de la solución de la ecuación (2.2.1) que se obtiene mediante la técnica de las transformadas de Laplace y de Fourier, se proveen condiciones iniciales adecuadas, que serán de tipo clásico, por lo dicho en la Sección 1.2.4.

Los dos principales problemas que se plantean para la ecuación de difusión son el de Cauchy y el de la “propagación de señales”, cuya formulación respectiva es:

a) problema de Cauchy

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = 0, \quad t > 0; \quad u(0+, x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.2.2)$$

b) problema de la propagación de señales

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(t, x) = 0; \quad u(0+, x) = 0, \quad x > 0; \quad u(t, 0+) = h(t), \quad t > 0. \quad (2.2.3)$$

Estos dos problemas resultan bien definidos en el caso de $0 < \alpha \leq 1$, ya que la ecuación (2.2.1) resulta ser de tipo parabólico, mientras que es necesaria otra condición inicial cuando $1 < \alpha \leq 2$ a causa del carácter hiperbólico de la misma.

Por lo tanto, para $1 < \alpha \leq 2$, se asume la siguiente condición adicional

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right]_{t=0} = 0, \quad (2.2.4)$$

la cual asegura que pasando de $\alpha = 1^-$ a $\alpha = 1^+$, la solución depende de forma continua del parámetro α .

La solución general $u(t, x)$ del *problema de Cauchy* (2.2.2) y (2.2.4) para la ecuación (2.2.1), utilizando la técnica de las transformadas de Fourier y de Laplace acaba expresada de forma implícita en términos de su transformada de Fourier inversa

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\alpha,1}(-(\lambda k)^2 t^\alpha) G(k) e^{-ikx} dk, \quad (2.2.5)$$

donde $E_{\alpha,\beta}(z)$ es la función de Mittag-Leffler definida en (1.3.4) y $G(k)$ es la transformada de Fourier de la condición inicial $g(x)$.

Se ha de añadir en este punto que, teniendo en cuenta la representación (1.3.4) e intercambiando el orden de la integración y de la serie (lo que es posible gracias a la convergencia uniforme de la serie que representa la función de Mittag-Leffler), la ecuación (2.2.5) puede reescribirse de forma equivalente como

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-(\lambda k)^2 t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} \right] G(k) e^{-ikx} dk = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-ik)^{2j} G(k) e^{-ikx} dk. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Recordando ahora la conocida fórmula para la transformada de Fourier de las derivadas enteras (1.2.79), deducimos la siguiente expresión en serie de la solución $u(t, x)$:

$$u(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} g^{(2j)}(x). \quad (2.2.7)$$

Observación 2.2.1 De acuerdo con la condición (1.2.78), la fórmula (2.2.7) proporciona la solución $u(t, x)$ del problema dado por (2.2.2) y (2.2.4) para la ecuación (2.2.1) a condición de que $g(x)$ sea una función analítica de $x \in \mathbb{R}$, que la serie (2.2.7) converja

para cualquier $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, y que $g(x)$ junto con todas sus derivadas $g^{(2j)}(x)$ tiendan a cero en el infinito:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} g^{(2j)}(x) = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

En [99], [101] se considera también el problema de valores iniciales (2.2.2) y (2.2.4) para la ecuación (2.2.1) en el cual $g(x)$ es la función delta de Dirac dada en (1.2.94):

$$\begin{aligned} ({}^C_0D_t^\alpha u)(t, x) &= \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}; \lambda^2 \in \mathbb{R}_+, 0 < \alpha \leq 2), \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(t, x) &= 0, \quad u(0+, x) = \delta(x), \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right]_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

La solución $u(t, x)$ de este problema se llama solución fundamental o función de Green y, gracias al resultado (1.2.97) relativo a la Delta de Dirac, se puede escribir $G(k) = 1$ en la identidad (2.2.5) obteniendo la solución fundamental del problema (2.2.8) en la forma

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\alpha,1}(-(\lambda k)^2 t^\alpha) e^{-ikx} dk, \quad (2.2.9)$$

y también llegar a la representación explícita de $u(t, x)$ en términos de la función de Wright (1.3.8):

$$u(t, x) = \frac{1}{2\lambda t^{\alpha/2}} W\left(-\frac{|x|}{t^{\alpha/2}\lambda}; -\alpha/2, 1 - \alpha/2\right), \quad (2.2.10)$$

cuando $0 < \alpha < 2$ y $\lambda > 0$.

La ecuación (2.2.10) devuelve la Gaussiana en el caso de $\alpha = 1$

$$u(t, x) = \frac{1}{2\lambda\sqrt{t}} W\left(-\frac{|x|}{\sqrt{t}\lambda}; -\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\lambda\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t\lambda^2}}, \quad (2.2.11)$$

y se demuestra en [99] y [101] que para el caso extremo $\alpha = 2$, también se reobtiene el resultado conocido

$$u(t, x) = \frac{\delta(x - \lambda t) + \delta(x + \lambda t)}{2}. \quad (2.2.12)$$

La solución fundamental (2.2.10) verifica que

$$u(t, x) \geq 0, \quad \forall t > 0; \quad \int_{\mathbb{R}} u(t, x) dx = 1,$$

para todo $0 < \alpha < 2$ y $\lambda > 0$, y, por consiguiente, como para el caso de la difusión clásica correspondiente a $\alpha = 1$, sigue siendo una distribución de probabilidad en x bilateral y simétrica con respecto del origen, pero ya no de tipo Gaussiano.

En particular, utilizando la identidad (1.3.19) en (2.2.10), se puede ver que, cuando $1 \leq \alpha < 2$ y $\lambda > 0$, cada rama de la solución fundamental $u(t, x)$ resulta proporcional en x a la rama positiva de una distribución de Lévy estable de grado $\frac{2}{\alpha}$ y parámetro $\theta = \frac{2}{\alpha} - 2$:

$$u(t, x) = \frac{1}{2\lambda t^{\alpha/2}} \frac{2}{\alpha} p_{\frac{2}{\alpha}}\left(\frac{|x|}{\lambda t^{\alpha/2}}; \frac{2}{\alpha} - 2\right). \quad (2.2.13)$$

También es útil recordar los momentos, en forma explícita, de la solución fundamental encontrada, siempre y cuando estos existan, vista la importancia que tiene conocerlos para la clasificación del tipo de difusión anómala.

El comportamiento asintótico (1.3.11) de la función de Wright (1.3.8) asegura que, cuando $0 < \alpha < 2$ y $\lambda > 0$, todos los momentos de orden positivo de la solución fundamental $u(t, x)$ dada en (2.2.10) existan y sean finitos, y valen

$$\langle X^{2n} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} u(t, x) dx = \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(\alpha n+1)} (\lambda^2 t^\alpha)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.2.14)$$

De acuerdo con lo dicho para los procesos de difusión anómala, el momento segundo asociado a la densidad de probabilidad $u(t, x)$ resulta proporcional a t^α y por lo tanto se habla de difusión “lenta” si $0 < \alpha < 1$, y “rápida” si $1 < \alpha < 2$.

Pasamos ahora a hablar del segundo de entre los dos mencionados principales problemas que se plantean para la ecuación de difusión.

El *problema de la propagación de señales* (2.2.3) debe su nombre al hecho de que la función $h(t)$, dada en $x = 0$ es como una señal que se difunde hacia $x > 0$.

Enunciamos los principales resultados encontrados por Mainardi y colaboradores ([99], [101]), relacionados con el problema constituido por la ecuación de difusión fraccionaria (2.2.1), cuando $0 < \alpha \leq 2$, $x \in \mathbb{R}_+$, $t > 0$, junto con las condiciones iniciales (2.2.3) y (2.2.4).

Aplicando esta vez únicamente la técnica de la transformada de Laplace empleando la fórmula (1.2.72) y solucionando la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden resultante, la solución general transformada viene dada por

$$(\mathcal{L}_t u)(s, x) = (\mathcal{L}_t h)(s) e^{-(x/\lambda)s^{\alpha/2}}, \quad (2.2.15)$$

donde λ tiene que ser positiva para que la solución sea localizada. La solución fundamental, obtenida cuando $h(t) = \delta(t)$, tiene la forma explícita

$$u(t, x) = \frac{\alpha x}{2t^{\alpha/2+1}\lambda} W\left(-\frac{x}{t^{\alpha/2}\lambda}; -\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right), \quad (2.2.16)$$

cuando $0 < \alpha < 2$ y $\lambda > 0$.

En el caso de la difusión estándar $\alpha = 1$, a partir de la ecuación (2.2.16) se vuelve a obtener el resultado clásico

$$u(t, x) = \frac{x}{2t\sqrt{t}\lambda} W\left(-\frac{x}{\sqrt{t}\lambda}; -\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{x}{2t\sqrt{t\pi}\lambda} e^{-\frac{x^2}{4\lambda^2 t}}, \quad (2.2.17)$$

con $x > 0$, $t > 0$ y $\lambda > 0$, que representa la densidad de probabilidad (1.2.119) de una distribución de Lévy unilateral con respecto a t , y también la *distribución del tiempo de primer paso por x de un movimiento Browniano estándar*. En realidad, se puede interpretar la expresión (2.2.16) como una densidad de probabilidad unilateral en el tiempo, para todo $0 < \alpha < 2$; ya que, aplicando la identidad (1.3.18) resulta

$$u(t, x) = \left(\frac{\lambda}{x}\right)^{\frac{2}{\alpha}} p_{\frac{\alpha}{2}}\left(t\left(\frac{\lambda}{x}\right)^{\frac{2}{\alpha}}; -\frac{\alpha}{2}\right), \quad (2.2.18)$$

con $0 < \alpha < 2$ y $\lambda > 0$, y donde $p_{\frac{\alpha}{2}}\left(t\left(\frac{\lambda}{x}\right)^{\frac{2}{\alpha}}; -\frac{\alpha}{2}\right)$ es una distribución de Lévy estable de grado $\frac{\alpha}{2}$ y parámetro $\theta = -\frac{\alpha}{2}$. Para el caso extremo $\alpha = 2$ resulta

$$u(t, x) = \delta\left(t - \frac{x}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0 \quad (2.2.19)$$

que corresponde a la transformada de Laplace inversa de $e^{-\left(\frac{sx}{\lambda}\right)}$ con $\lambda > 0$.

A la vista de los resultados conocidos que se han presentados acerca del problema de propagación de señales para la ecuación de difusión fraccionaria, se ha deducido una primera consecuencia importante que, hasta donde sabemos, no había sido puesta en evidencia con anterioridad.

Si consideramos la ecuación de difusión en un espacio tridimensional, podemos escribirla, en su forma más sencilla como

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, x) = \Delta\varphi(t, x), \quad (x \in \mathbb{R}^3, t > 0), \quad (2.2.20)$$

donde Δ es el operador Laplaciano.

Pasando a coordenadas radiales, es sabido que el Laplaciano asume la siguiente forma

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\varphi + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\varphi, \quad (r \in \mathbb{R}_+), \quad (2.2.21)$$

por lo que la ecuación (2.2.20) se transforma en

$$r\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, r) = r\frac{\partial^2}{\partial r^2}\varphi(t, r) + 2\frac{\partial}{\partial r}\varphi(t, r), \quad (r \in \mathbb{R}_+, t > 0), \quad (2.2.22)$$

que, operando el cambio $r\varphi = \psi$, pasa a ser una ecuación de difusión unidimensional

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t, r) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\psi(t, r), \quad (r \in \mathbb{R}_+, t > 0). \quad (2.2.23)$$

Ahora, si generalizamos la ecuación (2.2.20), sustituyendo la derivada temporal por la derivada fraccionaria (1.2.46) en el tiempo, con $0 < \alpha < 2$, obtenemos la *ecuación de difusión fraccionaria en el tiempo, con derivada de Caputo, en el espacio tridimensional*

$$({}^C_0D_t^\alpha\varphi)(t, x) = \Delta\varphi(t, x), \quad (x \in \mathbb{R}^3, t > 0), \quad (2.2.24)$$

que, cuando pasamos a coordenadas radiales y operamos el cambio $r\varphi = \psi$, queda reducida a

$$({}^C_0D_t^\alpha\psi)(t, r) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\psi(t, r), \quad (r \in \mathbb{R}_+, t > 0, 0 < \alpha < 2). \quad (2.2.25)$$

De acuerdo con lo expuesto arriba, se conoce la solución de la ecuación (2.2.25) junto con las condiciones (2.2.3) y (2.2.4) escritas en términos de r y con $h(t) = \delta(t)$ (problema de la propagación de señales para la ecuación de difusión radial); en particular, su solución fundamental $\psi(t, r) = r\varphi(t, r)$ puede ser obtenida sabiendo que

$$\varphi(t, r) = \frac{\alpha}{2t^{\alpha/2+1}\lambda}W\left(-\frac{r}{t^{\alpha/2}}; -\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{r^{\frac{2}{\alpha}+1}p_{\frac{\alpha}{2}}}\left(t\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{2}{\alpha}}; -\frac{\alpha}{2}\right), \quad (2.2.26)$$

cuando $0 < \alpha < 2$.

2.3. Ecuación de difusión fraccionaria en el tiempo y en el espacio con derivadas de Riemann-Liouville

A partir de esta sección vamos a presentar los que han sido los resultados fruto de la investigación propia del autor de esta tesis.

Empecemos por considerar unas generalizaciones inmediatas de los problemas de Cauchy y de propagación de las señales para la ecuación de difusión-onda que se han presentados en la sección anterior. Dichas generalizaciones han sido obtenidas empleando las definiciones de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y Liouville en la ecuación de difusión fraccionaria general (2.1.5).

Llamamos *problema del tipo de Cauchy generalizado* al siguiente:

$$({}^{RL}_0 D_t^\alpha u)(t, x) = \lambda^2 ({}^L_{-\infty} D_x^\beta u)(t, x) \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}; \lambda^2 \in \mathbb{R}_+), \quad (2.3.1)$$

$$({}^{RL}_0 D_t^{\alpha-1} u)(0+, x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad (2.3.2)$$

$$({}^{RL}_0 D_t^{\alpha-2} u)(0+, x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.3.3)$$

con $0 < \alpha \leq 2$, $\beta > 0$ y donde la derivada parcial fraccionaria de Riemann-Liouville es la definida en (1.2.8) y la derivada parcial fraccionaria de Liouville en (1.2.16).

Las condiciones que aparecen en (2.3.2) y (2.3.3), del tipo de las que se han dado en (1.2.75), son todas necesarias cuando $1 < \alpha \leq 2$, mientras que sólo se necesita la condición (2.3.2) de orden $\alpha - 1$ cuando $0 < \alpha \leq 1$. Es importante evidenciar que, de acuerdo con lo dicho en la Observación 1.2.2, cuando $0 < \alpha \leq 1$ resulta $({}^{RL}_0 D_t^{\alpha-1} u)(0+, x) = ({}_0 I_t^{1-\alpha} u)(0+, x)$, donde $({}_0 I_t^\alpha u)(t, x)$ es la integral parcial fraccionaria de Riemann-Liouville definida en (1.2.6), mientras que, cuando $1 < \alpha \leq 2$ tenemos $({}^{RL}_0 D_t^{\alpha-2} u)(0+, x) = ({}_0 I_t^{2-\alpha} u)(0+, x)$.

Debido al buen comportamiento de los operadores de diferenciación fraccionarios con respecto a las transformadas de Laplace y de Fourier, y análogamente a cuanto se ha hecho en la literatura con los problemas de Cauchy y de propagación de señales de la sección anterior, también en este contexto se ha optado por buscar la solución del problema del tipo de Cauchy generalizado, (2.3.1), (2.3.2), (2.3.3), en un subespacio contenido en el espacio $\mathcal{LF} = \mathcal{L}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, de funciones $u(t, x)$ para las cuales existen la transformada de Laplace respecto a t para cualquier $x \in \mathbb{R}$ fijo, y la transformada de Fourier respecto a x para cualquier $t \in \mathbb{R}_+$ fijo. En particular, de acuerdo con cuanto se ha enunciado en la Propiedad 1.2.21 de la Sección 1.2.5, para poder definir la fórmula de la transformada de Fourier de la derivada fraccionaria de Liouville de orden β , para todo $\beta > 0$, se puede elegir el espacio $\bar{\mathcal{S}}$ definido en (1.2.88), que contiene el espacio de Schwartz \mathcal{S} dado en (1.2.80). Asimismo, de acuerdo con la (1.2.71), se restringe el espacio \mathcal{L} al subespacio $\bar{\mathcal{L}} = {}^{RL}\mathcal{L}^\alpha$, definido en (1.2.73), de la funciones $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$ para las cuales, dado $0 < \alpha \leq 1$, la función $({}^{RL}_0 D_t^{\alpha-k-1} u)(t, x)$ es exponencial en t de orden ν_k para $k = 0$, mientras que, si $1 < \alpha \leq 2$, la función $({}^{RL}_0 D_t^{\alpha-k-1} u)(t, x)$ es exponencial en t de orden ν_k para $k = 0$ y $k = 1$, según la definición de funciones exponenciales dada en (1.2.67).

Enunciamos ahora el primer resultado de esta sección en el que, bajo condiciones muy generales, se encuentra la solución del problema del tipo de Cauchy generalizado, (2.3.1), (2.3.2), (2.3.3), en forma implícita.

Teorema 2.3.1 *Dado el problema del tipo de Cauchy generalizado (2.3.2) para la ecuación (2.3.1) cuando $0 < \alpha \leq 1$, con $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $G(k) = (\mathcal{F}_x g)(k)$ y $F(k) = (\mathcal{F}_x f)(k)$, su solución $u(t, x) \in \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathcal{S}} = \bar{\mathcal{L}}(\mathbb{R}_+) \times \bar{\mathcal{S}}$ está dada por*

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda^2(-ik)^\beta t^\alpha) F(k) e^{-ikx} dk, \quad (2.3.4)$$

a condición de que la integral en el lado derecho de la (2.3.4) exista. Cuando $1 < \alpha \leq 2$, el problema del tipo de Cauchy generalizado (2.3.2) y (2.3.3) para la ecuación (2.3.1), con $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $G(k) = (\mathcal{F}_x g)(k)$ y $F(k) = (\mathcal{F}_x f)(k)$, tiene la siguiente solución $u(t, x) \in \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathcal{S}} = \bar{\mathcal{L}}(\mathbb{R}_+) \times \bar{\mathcal{S}}$:

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{\alpha-2} E_{\alpha, \alpha-1}(\lambda^2(-ik)^\beta t^\alpha) G(k) e^{-ikx} dk + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda^2(-ik)^\beta t^\alpha) F(k) e^{-ikx} dk, \quad (2.3.5)$$

a condición de que las integrales en el lado derecho de la (2.3.5) existan.

Demostración. Buscando la solución $u(t, x)$ de (2.3.1), en el espacio $\bar{\mathcal{L}}\bar{\mathcal{S}}$ queda asegurado que, aplicando la transformada de Laplace (1.2.68) y la transformada de Fourier (1.2.76) a dicha ecuación junto con las condiciones oportunas, el resultado exista.

Utilizando la notación

$$\hat{u}(s, k) \equiv (\mathcal{F}_x \mathcal{L}_t u)(s, k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-st} e^{ikx} u(t, x) dt dx, \quad (2.3.6)$$

para indicar la transformada de Laplace y de Fourier de la función $u(t, x)$, si aplicamos la fórmula (1.2.71) que proporciona, cambiando la derivada ordinaria por la derivada parcial, la transformada de Laplace de la derivada de Riemann-Liouville (1.2.8), y la fórmula (1.2.87) para la transformada de Fourier de la derivada de Liouville (1.2.16) de orden $\beta > 0$, y teniendo en cuenta las condiciones (2.3.2) y (2.3.3), se obtienen las siguientes relaciones que proporcionan la expresión explícita de $\hat{u}(s, k)$:

$$\hat{u}(s, k) = \frac{F(k)}{s^\alpha - \lambda^2(-ik)^\beta}, \quad (2.3.7)$$

cuando $0 < \alpha \leq 1$, y

$$\hat{u}(s, k) = \frac{s G(k)}{s^\alpha - \lambda^2(-ik)^\beta} + \frac{F(k)}{s^\alpha - \lambda^2(-ik)^\beta}, \quad (2.3.8)$$

cuando $1 < \alpha \leq 2$.

Aplicando a las expresiones (2.3.7) y (2.3.8) las transformadas de Fourier y Laplace inversas (1.2.77) y (1.2.69), y teniendo en cuenta la relación existente entre la función de Mittag-Leffler y la integral de Laplace (1.3.7), expresamos la solución $u(t, x)$ como transformada inversa de Fourier de la siguiente forma:

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} (\lambda^2 (-ik)^\beta t^\alpha) F(k) e^{-ikx} dk, \quad (2.3.9)$$

cuando $0 < \alpha \leq 1$, y

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{\alpha-2} E_{\alpha, \alpha-1} (\lambda^2 (-ik)^\beta t^\alpha) G(k) e^{-ikx} dk + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} (\lambda^2 (-ik)^\beta t^\alpha) F(k) e^{-ikx} dk, \quad (2.3.10)$$

cuando $1 < \alpha \leq 2$.

Estas expresiones coinciden con las buscadas para la solución (2.3.5); además, si existen la integral del lado derecho de (2.3.9) y las integrales del lado derecho de (2.3.10), la solución es única debido a las propiedades de la transformada de Fourier. ■

Podemos observar que, de forma análoga a lo que ocurría con los problemas considerados para la ecuación de difusión fraccionaria con derivada de Caputo en el tiempo, aquí también, si se asume en la condición inicial (2.3.3) que $g(x) = 0$, entonces la solución del problema de Cauchy generalizado (2.3.2) y (2.3.3) para la ecuación (2.3.1) depende de forma continua del parámetro α , pasando de $\alpha = 1^-$ a $\alpha = 1^+$.

Suponemos ahora que las funciones $g(x)$ y $f(x)$ pertenecen también al espacio $\bar{\mathcal{S}}$. Entonces la solución dada por (2.3.9) y (2.3.10) puede escribirse en forma explícita, de acuerdo con lo enunciado en el siguiente Corolario.

Corolario 2.3.1 Sean $g(x) \in \bar{\mathcal{S}}$ y $f(x) \in \bar{\mathcal{S}}$. Entonces, la solución $u(t, x) \in \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathcal{S}}$ del problema del tipo de Cauchy generalizado (2.3.2) para la ecuación (2.3.1) con $0 < \alpha \leq 1$, asume la forma

$$u(t, x) = t^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j + \alpha)} ({}^L D_x^{\beta j} f)(x) \quad (2.3.11)$$

a condición de que la serie en (2.3.11) converja para todo $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

La solución $u(t, x) \in \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathcal{S}}$ del problema del tipo de Cauchy generalizado (2.3.2) y (2.3.3) para la ecuación (2.3.1) con $1 < \alpha \leq 2$, asume la forma

$$u(t, x) = t^{\alpha-2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j + \alpha - 1)} ({}^L D_x^{\beta j} g)(x) + t^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j + \alpha)} ({}^L D_x^{\beta j} f)(x) \quad (2.3.12)$$

a condición de que las series en (2.3.12) converjan para todo $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

Demostración. Demostramos el caso de $1 < \alpha \leq 2$, siendo el de $0 < \alpha \leq 1$ fácilmente deducible a partir de éste. Si en la expresión (2.3.10) se expresa la función de Mittag-Leffler mediante su representación en serie (1.3.4), entonces intercambiando el orden de

las integraciones y de las serie (lo que es posible gracias a la convergencia uniforme de la serie que representa la función de Mittag-Leffler), tenemos

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= \frac{t^{\alpha-2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2(-ik)^{\beta}t^{\alpha})^j}{\Gamma(\alpha j + \alpha - 1)} \right] G(k) e^{-ikx} dk + \\
&+ \frac{t^{\alpha-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2(-ik)^{\beta}t^{\alpha})^j}{\Gamma(\alpha j + \alpha)} \right] F(k) e^{-ikx} dk = \\
&= t^{\alpha-2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t^{\alpha})^j}{\Gamma(\alpha j + \alpha - 1)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-ik)^{\beta j} G(k) e^{-ikx} dk + \\
&+ t^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t^{\alpha})^j}{\Gamma(\alpha j + \alpha)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-ik)^{\beta j} F(k) e^{-ikx} dk. \tag{2.3.13}
\end{aligned}$$

Si ahora se utiliza la fórmula (1.2.87) de la transformada de Fourier de la derivada fraccionaria de Liouville en el resultado (2.3.13), se llega a escribir la $u(t, x)$ en la forma (2.3.12). ■

Antes de seguir, vamos a introducir las siguientes funciones

$$v(t, x; \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{\alpha-2} E_{\alpha, \alpha-1} (\lambda^2(-ik)^{\beta}t^{\alpha}) e^{-ikx} dk, \tag{2.3.14}$$

$$w(t, x; \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} (\lambda^2(-ik)^{\beta}t^{\alpha}) e^{-ikx} dk, \tag{2.3.15}$$

que serán útiles para los desarrollos que siguen.

Cuando $\beta = 2$ en la ecuación (2.3.1), hablamos de *ecuación de difusión fraccionaria en el tiempo con derivada de Riemann-Liouville*. La solución $u(t, x)$ del problema del tipo de Cauchy generalizado (2.3.2) para esta ecuación, cuando $0 < \alpha \leq 1$, puede escribirse en forma explícita a través de la convolución dada en el siguiente Teorema.

Teorema 2.3.2 *La solución $u(t, x) \in \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathcal{S}}$ del problema dado por (2.3.2) para la ecuación (2.3.1) con $\beta = 2$, $0 < \alpha \leq 1$ y $\lambda > 0$ resulta expresada en la forma*

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) \frac{t^{\alpha/2-1}}{2\lambda} W \left(-\frac{|y|}{t^{\alpha/2}\lambda}; -\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} \right) dy. \tag{2.3.16}$$

Demostración. Si en (2.3.15) ponemos $\beta = 2$ y escribimos la función de Mittag-Leffler mediante su representación integral (1.3.4), se obtiene

$$\begin{aligned} w(t, x; \alpha, 2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \frac{t^{\alpha-1}}{2\pi i} \int_{Ha} \frac{e^{\sigma}}{\sigma^{\alpha} + (\lambda k)^2 t^{\alpha}} d\sigma dk = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \frac{e^{\sigma} \sigma^{-\alpha/2} t^{\alpha/2-1}}{2\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \frac{\frac{\sigma^{\alpha/2}}{t^{\alpha/2}\lambda}}{\pi \left[\left(\frac{\sigma^{\alpha/2}}{t^{\alpha/2}\lambda} \right)^2 + k^2 \right]} dk d\sigma. \end{aligned}$$

Ahora, observando que, cuando $\lambda > 0$, la expresión interna en la última integral es la transformada de Fourier con respecto a la variable k , y calculada en $-x$, de la densidad de la distribución de probabilidad de Lévy estable llamada de Cauchy, dada en (1.2.120), podemos escribir:

$$w(t, x; \alpha, 2) = \frac{t^{\alpha/2-1}}{2\lambda} \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \frac{e^{\sigma - \frac{|x|}{t^{\alpha/2}\lambda} \sigma^{\alpha/2}}}{\sigma^{\frac{\alpha}{2}}} d\sigma = \frac{t^{\alpha/2-1}}{2\lambda} W \left(-\frac{|x|}{t^{\alpha/2}\lambda}; -\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} \right),$$

para $0 < \alpha \leq 1$ y $\lambda > 0$, donde, para la última identidad, se ha utilizado la representación integral (1.3.8) de la función de Wright. ■

Consecuencia directa del Teorema 2.3.2 es el siguiente corolario:

Corolario 2.3.2 *La solución $u(t, x) \in \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathcal{S}}$ del problema dado por (2.3.1), (2.3.2) con $\beta = 2$ y $0 < \alpha \leq 1$, $f(x) = \delta(x)$ y $\lambda > 0$ tiene la expresión*

$$u(t, x) = \frac{t^{\alpha/2-1}}{2\lambda} W \left(-\frac{|x|}{t^{\alpha/2}\lambda}; -\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} \right). \quad (2.3.17)$$

La función Delta de Dirac (1.2.94) que aparece en este corolario, es una función generalizada en el espacio $\bar{\mathcal{S}}'$ introducido en la Observación 1.2.3.

Como cabe esperar, los resultados presentados incluyen a las soluciones fundamentales conocidas en los casos clásicos de difusión ($\alpha = 1$, $\beta = 2$) y de ondas ($\alpha = 2$, $\beta = 2$). En efecto, para obtener la solución de la ecuación (2.3.1) cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 2$, junto con las condiciones iniciales $u(0, x) = \delta(x)$ y $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = 0$, hay que tener en cuenta la propiedad (1.3.10) junto con la expresión (2.3.16) para llegar a la expresión de la Gaussiana:

$$u(t, x) = w(t, x; 1, 2) = \frac{1}{2\lambda\sqrt{t}} W \left(-\frac{|x|}{\sqrt{t}\lambda}; -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2\lambda\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t\lambda^2}}. \quad (2.3.18)$$

Para obtener la solución fundamental de ondas clásica cuando

$$u(0+, x) = \delta(x), \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right]_{t=0} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = 0,$$

hay que volver a la solución general en la forma (2.3.5) y considerar el caso extremo $\alpha = 2$, $\beta = 2$, junto con $F(k) = 0$ y $G(k) = 1$. Entonces, como en (2.2.12), tenemos

$$u(t, x) = v(t, x; 2, 2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{2,1}(-(\lambda k)^2 t^2) e^{-ikx} dk = \frac{\delta(x - \lambda t) + \delta(x + \lambda t)}{2}, \quad (2.3.19)$$

siendo $E_{2,1}(-z^2) = \cos z$, según la identidad (1.3.2).

Enunciamos ahora los resultados relativos a los momentos de las funciones $v(t, x; \alpha, \beta)$ y $w(t, x; \alpha, \beta)$ definidas en (2.3.14) y (2.3.15) respectivamente, para poder deducir los momentos de la solución general (2.3.5) cuando se combinan las condiciones $f(x) = \delta(x)$ ó $f(x) = 0$ con $g(x) = \delta(x)$ ó $g(x) = 0$.

Teorema 2.3.3 *Los momentos de las funciones $v(t, x; \alpha, \beta)$ y $w(t, x; \alpha, \beta)$ definidas en (2.3.14) y (2.3.15), están dados por*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(t, x; \alpha, \beta) dx = \frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}, \quad (2.3.20)$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(t, x; \alpha, \beta) dx = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (2.3.21)$$

cuando $n = 0$ y $\beta > 0$, mientras que, para $n \geq 1$, $\beta > 0$, resulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n v(t, x; \alpha, \beta) dx = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & n < \beta \\ \neq & n > \beta \end{array} \right\} \text{ si } \beta \neq r$$

$$\left. \begin{array}{ll} 0 & n \neq rm \\ (-1)^{rm} t^{\alpha-2} (\lambda^2 t^\alpha)^m \frac{\Gamma(rm+1)}{\Gamma(\alpha m + \alpha - 1)} & n = rm \end{array} \right\} \text{ si } \beta = r \quad (2.3.22)$$

donde $r = 1, 2, 3, \dots$, $m = 1, 2, 3, \dots$, y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n w(t, x; \alpha, \beta) dx = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & n < \beta \\ \neq & n > \beta \end{array} \right\} \text{ si } \beta \neq r$$

$$\left. \begin{array}{ll} 0 & n \neq rm \\ (-1)^{rm} t^{\alpha-1} (\lambda^2 t^\alpha)^m \frac{\Gamma(rm+1)}{\Gamma(\alpha m + \alpha)} & n = rm \end{array} \right\} \text{ si } \beta = r \quad (2.3.23)$$

Demstración. Para calcular los momentos de las funciones $v(t, x; \alpha, \beta)$ y $w(t, x; \alpha, \beta)$ aplicamos la siguiente propiedad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n u(t, x) dx = (-i)^n \left[\frac{\partial^n}{\partial k^n} (\mathcal{F}_x u)(t, k) \right]_{k=0} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.3.24)$$

A partir de las expresiones (2.3.14) y (2.3.15), podemos escribir:

$$(\mathcal{F}_x v)(t, k; \alpha, \beta) = t^{\alpha-2} E_{\alpha, \alpha-1}(\lambda^2 (-ik)^\beta t^\alpha), \quad (2.3.25)$$

$$(\mathcal{F}_x w)(t, k; \alpha, \beta) = t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda^2 (-ik)^\beta t^\alpha). \quad (2.3.26)$$

Sustituyendo la identidad (2.3.25) en la fórmula (2.3.24) y teniendo en cuenta la definición (1.3.4), se puede escribir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n v(t, x; \alpha, \beta) dx = (-i)^n t^{\alpha-2} \left[\frac{\partial^n}{\partial k^n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 (-ik)^\beta)^j t^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j + \alpha - 1)} \right]_{k=0},$$

que conduce a los resultados (2.3.20) y (2.3.22).

Poniendo la identidad (2.3.26) en la fórmula (2.3.24) y operando con idéntico procedimiento obtenemos las expresiones (2.3.21) y (2.3.23). ■

Observación 2.3.1 *Los momentos de $u(t, x) \in \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathcal{S}}$, solución del problema (2.3.2) para la ecuación (2.3.1) cuando $0 < \alpha \leq 1$ y $f(x) = \delta(x)$ dada en (2.3.17), son los que se han calculado para la función $w(t, x; \alpha, \beta)$. Los momentos de $u(t, x) \in \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathcal{S}}$, solución dada en (2.3.5) del problema (2.3.2) y (2.3.3) para la ecuación (2.3.1) cuando $1 < \alpha \leq 2$, cuando se toman las tres combinaciones de condiciones iniciales: $f(x) = 0$ y $g(x) = \delta(x)$, ó $f(x) = \delta(x)$ y $g(x) = 0$, ó $f(x) = \delta(x)$ y $g(x) = \delta(x)$, coinciden respectivamente con los momentos de la $v(t, x; \alpha, \beta)$, con los momentos de la $w(t, x; \alpha, \beta)$, y con la suma de ellos. En general, resultará por lo tanto $\int_{\mathbb{R}} u(t, x) dx \neq 1$, debido a los resultados (2.3.20) y (2.3.21), por lo que se puede afirmar que dicha función $u(t, x)$ nunca es una densidad de probabilidad en x . La única excepción es la del caso $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $f(x) = \delta(x)$ y $g(x) = 0$, cuando la solución fundamental coincide con la densidad gaussiana (2.3.18).*

Concluimos esta sección presentando la generalización del segundo problema que se ha considerado para la ecuación de difusión fraccionaria (2.3.1) con $\beta = 2$ en el semieje espacial positivo, al que se le ha llamado de *propagación de las señales generalizado*:

$$({}^{RL}D_t^\alpha u)(t, x) = \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) \quad (t > 0, x > 0; \lambda^2 \in \mathbb{R}_+), \quad (2.3.27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = 0, \quad t > 0; \quad u(t, 0+) = h(t), \quad t > 0, \quad (2.3.28)$$

$$({}^{RL}D_t^{\alpha-1} u)(0+, x) = 0, \quad x > 0, \quad (2.3.29)$$

$$({}^{RL}D_t^{\alpha-2} u)(0+, x) = 0, \quad x > 0, \quad (2.3.30)$$

con $0 < \alpha \leq 2$.

Una vez más hay que subrayar que las condiciones que aparecen en (2.3.29) y (2.3.30), del tipo de las que se han dado en (1.2.75), son todas necesarias cuando $1 < \alpha \leq 2$, mientras que sólo se necesita la condición (2.3.29) cuando $0 < \alpha \leq 1$. Además, cuando

$0 < \alpha \leq 1$ resulta $({}^{RL}_0 D_t^{\alpha-1} u)(0+, x) = ({}_0 I_t^{1-\alpha} u)(0+, x)$, donde $({}_0 I_t^\alpha u)(t, x)$ es la integral parcial fraccionaria de Riemann-Liouville definida en (1.2.6), mientras que, cuando $1 < \alpha \leq 2$ tenemos $({}^{RL}_0 D_t^{\alpha-2} u)(0+, x) = ({}_0 I_t^{2-\alpha} u)(0+, x)$.

Se puede fácilmente ver que la solución de este problema $u(t, x) \in \bar{\mathcal{L}}(\mathbb{R}_+) \times (\mathbb{R}_+)$, con $\bar{\mathcal{L}}(\mathbb{R}_+)$ espacio de funciones definido en (1.2.73), coincide con la expresión de la solución que ha sido encontrada por Mainardi y colaboradores ([99], [101]) para la ecuación de difusión fraccionaria (2.2.1), cuando $0 < \alpha \leq 2$, $x \in \mathbb{R}_+$, $t > 0$, junto con las condiciones iniciales (2.2.3) y (2.2.4).

En efecto, empleando la técnica de la transformada de Laplace en la ecuación (2.3.27) junto con las condiciones iniciales (2.3.28), (2.3.29) cuando $0 < \alpha \leq 1$ y las condiciones (2.3.28), (2.3.29) y (2.3.30) cuando $1 < \alpha \leq 2$, y teniendo en cuenta la fórmula (1.2.71) que proporciona la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de una función, se tiene

$$s^\alpha (\mathcal{L}_t u)(s, x) = \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mathcal{L}_t u)(s, x),$$

para todo $0 < \alpha \leq 2$.

Entonces la solución general transformada de esta ecuación diferencial ordinaria de segundo orden viene dada por la misma expresión (2.2.15), que puede escribirse en forma explícita a través de la siguiente integral de convolución:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_0^t h(t-z) \frac{1}{z} W\left(-\frac{x}{z^{\alpha/2}\lambda}; -\frac{\alpha}{2}, 0\right) dz = \\ &= \int_0^t h(t-z) \frac{\alpha x}{2\lambda z^{\frac{\alpha}{2}+1}} W\left(-\frac{x}{z^{\alpha/2}\lambda}; -\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right) dz, \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

cuando $0 < \alpha < 2$ y $\lambda > 0$, gracias a las propiedades (1.3.16) y (1.3.12) de la función de Wright.

Por consiguiente, la solución fundamental, obtenida cuando $h(t) = \delta(t)$, tiene la forma explícita

$$u(t, x) = \frac{\alpha x}{2t^{\alpha/2+1}\lambda} W\left(-\frac{x}{t^{\alpha/2}\lambda}; -\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right), \quad (2.3.32)$$

cuando $0 < \alpha < 2$, $\lambda > 0$; mientras que para el caso extremo $\alpha = 2$ resulta

$$u(t, x) = \delta\left(t - \frac{x}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0,$$

que corresponde a la transformada de Laplace inversa de $e^{-\left(\frac{sx}{\lambda}\right)}$ con $\lambda > 0$.

Recordando la identidad (2.2.18), volvemos a subrayar que la solución fundamental (2.3.32) es una densidad de probabilidad unilateral en el tiempo, para todo $0 < \alpha < 2$.

En particular, para el caso de la difusión estándar $\alpha = 1$, a partir de la expresión (2.3.32) se vuelve a obtener el resultado clásico (2.2.17), es decir

$$u(t, x) = \frac{x}{2t\sqrt{t\lambda}} W\left(-\frac{x}{\sqrt{t\lambda}}; -\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{x}{2t\sqrt{t\pi\lambda}} e^{-\frac{x^2}{4\lambda^2 t}},$$

con $\lambda > 0$, que representa la densidad de probabilidad (1.2.119) de una distribución de Lévy unilateral con respecto a t .

2.4. Soluciones de variables no separadas

En esta sección se muestra como algunas de las cuestiones que se plantean para las ecuaciones del calor o de ondas, siguen teniendo sentido y, sobre todo, solución matemática, cuando las consideramos en relación a una ecuación de difusión fraccionaria que las interpola.

En concreto, vamos a buscar una clase de soluciones en variables no separadas $u(t, x) = \varphi(\omega t - kx)$, por ejemplo *ondas planas* $u(t, x) = e^{(\omega t - kx)}$, para la ecuación de ondas en la forma

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x), \quad (2.4.1)$$

y para la ecuación del calor

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x), \quad (2.4.2)$$

con $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Si se pone $\omega t - kx = z$, entonces, para que la $\varphi(z)$ verifique la ecuación (2.4.1), en el caso no trivial de $\omega \neq \pm k$, tendría que cumplirse:

$$\varphi''(z) = 0. \quad (2.4.3)$$

Asimismo, la $\varphi(z)$ verifica la ecuación (2.4.2) si

$$\omega \varphi'(z) = k^2 \varphi''(z). \quad (2.4.4)$$

Vamos a ver como se transforma este mismo problema si lo consideramos para la ecuación de difusión fraccionaria (2.1.5) en la que las derivadas parciales en el tiempo y en el espacio se sustituyen por las derivadas parciales fraccionarias de Riemann-Liouville, por la izquierda y por la derecha, definidas en (1.2.8) y (1.2.9), $({}_{a+}^{RL}D_x^\alpha u)(t, x)$, y $({}^{RL}D_{b-}^\alpha u)(t, x)$, con extremos de integración a y b distintos de cero. Por comodidad, utilizamos en este contexto las notaciones simplificadas $({}_a D_x^\alpha u)(t, x)$ y $({}_x D_b^\alpha u)(t, x)$ para indicar las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville por la izquierda y por la derecha, respectivamente.

Consideramos la ecuación de difusión fraccionaria:

$$\left(\frac{kx}{\omega} D_t^\alpha u\right)(t, x) = ({}_x D_{\frac{\omega t}{k}}^\beta u)(t, x), \quad \omega t - kx > 0, \quad \omega > 0, \quad k > 0, \quad (2.4.5)$$

donde $1 < \alpha \leq 2$, $1 < \beta \leq 2$, y buscamos para ella soluciones de variables separadas $u(t, x) = \varphi(\omega t - kx)$.

Hay que resaltar que la ecuación (2.4.5) sigue interpolando las ecuaciones de difusión y de ondas, siendo $\frac{kx}{\omega} D_t^1 = \frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{kx}{\omega} D_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ y ${}_x D_{\frac{\omega t}{k}}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Si evaluamos el lado izquierdo de la identidad (2.4.5) para $u(t, x) = \varphi(\omega t - kx)$, resulta:

$$\frac{kx}{\omega} D_t^\alpha \varphi(\omega t - kx) = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\frac{kx}{\omega}}^t (t - \tau)^{1 - \alpha} \varphi(\omega \tau - kx) d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= (\omega\tau - kx = s) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{1}{\omega^{2-\alpha}} \int_0^{\omega t - kx} (\omega t - kx - s)^{1-\alpha} \varphi(s) ds = \\
&= (\omega t - kx = z) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{\omega^{-\alpha}} \int_0^z (z-s)^{1-\alpha} \varphi(s) ds = \\
&= \frac{1}{\omega^{-\alpha}} {}_0D_z^\alpha \varphi(z), \tag{2.4.6}
\end{aligned}$$

mientras que, para el lado derecho tenemos:

$$\begin{aligned}
&{}_x D_{\frac{\omega t}{k}}^\beta \varphi(\omega t - kx) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_x^{\frac{\omega t}{k}} (y-x)^{1-\beta} \varphi(\omega t - ky) dy = \\
&= (\omega t - ky = s) = \frac{1}{k^{2-\beta}} \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{\omega t - kx} (\omega t - kx - s)^{1-\beta} \varphi(s) ds = \\
&= (\omega t - kx = z) = \frac{1}{k^{-\beta}} \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \frac{d^2}{dz^2} \int_0^z (z-s)^{1-\beta} \varphi(s) ds = \\
&= \frac{1}{k^{-\beta}} {}_0D_z^\beta \varphi(z). \tag{2.4.7}
\end{aligned}$$

Estudiamos entonces las condiciones que la función $\varphi(z)$ tiene que cumplir para que resulte satisfecha la ecuación

$$\frac{1}{\omega^{-\alpha}} {}_0D_z^\alpha \varphi(z) = \frac{1}{k^{-\beta}} {}_0D_z^\beta \varphi(z) \tag{2.4.8}$$

Caso A: $\alpha = \beta$.

En este caso tiene que cumplirse

$$\omega^\alpha {}_0D_z^\alpha \varphi(z) = k^\alpha {}_0D_z^\alpha \varphi(z), \tag{2.4.9}$$

y por lo tanto una primera posibilidad sería que $\omega = k$ si $(-1)^\alpha = -1$, $\omega = \pm k$ si $(-1)^\alpha = 1$. Si ω no cumple estas condiciones con respecto de k , entonces tendrá que ser

$${}_0D_z^\alpha \varphi(z) = 0, \quad z > 0. \tag{2.4.10}$$

Si consideramos, junto con esta ecuación diferencial fraccionaria homogénea, las siguientes condiciones iniciales fraccionarias, del tipo de las que se han dado en (1.2.75),

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} {}_0D_z^{\alpha-k} \varphi(z) = b_k, \quad (k = 1, 2), \tag{2.4.11}$$

entonces podemos solucionar rápidamente el problema del tipo de Cauchy generalizado resultante, mediante el método de la transformada de Laplace.

Aplicamos la transformada de Laplace (1.2.68) a la ecuación (2.4.10) junto con las condiciones (2.4.11) y utilizamos la fórmula (1.2.71) que proporciona la transformada de Laplace de la derivada de Riemann-Liouville (1.2.4) que aquí, en lugar de con ${}^{RL}D_0^\alpha$ la estamos indicando con la notación ${}_0D_z^\alpha$ para que estén claros los extremos de integración. Resulta entonces

$$\Phi(s) = \frac{b_1}{s^\alpha} + \frac{sb_2}{s^\alpha}, \quad (2.4.12)$$

donde $\Phi(s) = (\mathcal{L}\varphi)(s)$, y aplicando la transformada inversa de Laplace tenemos

$$\varphi(z) = b_1 \frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + b_2 \frac{z^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}. \quad (2.4.13)$$

Observación 2.4.1 Cuando $\alpha = \beta = 2$, se obtiene la solución

$$\varphi(z) = b_1 z + b_2,$$

que coincide con la solución de la ecuación (2.4.3) junto con las condiciones

$$\left[\frac{d}{dz} \varphi(z) \right]_{z=0} = b_1, \quad \varphi(0) = b_2.$$

Caso B: $\alpha \neq \beta$.

En este caso, vamos a solucionar el problema de Cauchy generalizado constituido por la ecuación (2.4.8) junto con las condiciones iniciales fraccionarias siguientes

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} {}_0D_z^{\alpha-k} \varphi(z) = a_k, \quad (k = 1, 2), \quad (2.4.14)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} {}_0D_z^{\beta-k} \varphi(z) = b_k, \quad (k = 1, 2). \quad (2.4.15)$$

Aplicando el método de la transformada de Laplace, siguiendo los pasos del caso anterior, llegamos a la siguiente expresión para $\Phi(s) = (\mathcal{L}\varphi)(s)$

$$\Phi(s) = \frac{k^{-\beta} a_1 - b_1 \omega^{-\alpha}}{[s^\alpha k^{-\beta} - s^\beta \omega^{-\alpha}]} + \frac{s [a_2 k^{-\beta} - b_2 \omega^{-\alpha}]}{[s^\alpha k^{-\beta} - s^\beta \omega^{-\alpha}]}. \quad (2.4.16)$$

Para seguir con la resolución del problema, es conveniente pasar a distinguir los dos casos $\alpha < \beta$ y $\alpha > \beta$.

Caso B1: $\alpha < \beta$.

Antes de operar la inversión de la transformada de Laplace en (2.4.16), reescribimos esta expresión de la siguiente forma

$$\Phi(s) = \frac{-s^{-\alpha}}{\left[s^{\beta-\alpha} - \frac{k^{-\beta}}{\omega^{-\alpha}} \right]} \left(\frac{k^{-\beta} a_1}{\omega^{-\alpha}} - b_1 \right) + \frac{-s^{1-\alpha}}{\left[s^{\beta-\alpha} - \frac{k^{-\beta}}{\omega^{-\alpha}} \right]} \left(\frac{k^{-\beta} a_2}{\omega^{-\alpha}} - b_2 \right). \quad (2.4.17)$$

Aplicando ahora la trasformada inversa de Laplace (1.2.69), teniendo en cuenta la (1.3.7), podemos escribir

$$\begin{aligned} \varphi(z) = & - \left[\frac{k^{-\beta} a_1}{\omega^{-\alpha}} - b_1 \right] z^{\beta-1} E_{\beta-\alpha, \beta} \left(\frac{k^{-\beta} z^{\beta-\alpha}}{\omega^{-\alpha}} \right) + \\ & - \left[\frac{k^{-\beta} a_2}{\omega^{-\alpha}} - b_2 \right] z^{\beta-2} E_{\beta-\alpha, \beta-1} \left(\frac{k^{-\beta} z^{\beta-\alpha}}{\omega^{-\alpha}} \right). \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

Caso B2: $\alpha > \beta$.

Análogamente a todo lo hecho para el caso B1, empezamos por reescribir la expresión (2.4.16) en la forma adecuada para ser invertida

$$\begin{aligned} \Phi(s) = & \frac{s^{-\beta}}{\left[s^{\alpha-\beta} - \frac{\omega^{-\alpha}}{k^{-\beta}} \right]} \left(a_1 - \frac{\omega^{-\alpha} b_1}{k^{-\beta}} \right) \\ & + \frac{s^{1-\beta}}{\left[s^{\alpha-\beta} - \frac{\omega^{-\alpha}}{k^{-\beta}} \right]} \left(a_2 - \frac{\omega^{-\alpha} b_2}{k^{-\beta}} \right), \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

y entonces tenemos la solución de forma directa, si aplicamos la propiedad (1.3.7)

$$\begin{aligned} \varphi(z) = & \left[a_1 - \frac{\omega^{-\alpha} b_1}{k^{-\beta}} \right] z^{\alpha-1} E_{\alpha-\beta, \alpha} \left(\frac{\omega^{-\alpha} z^{\alpha-\beta}}{k^{-\beta}} \right) + \\ & + \left[a_2 - \frac{\omega^{-\alpha} b_2}{k^{-\beta}} \right] z^{\alpha-2} E_{\alpha-\beta, \alpha-1} \left(\frac{\omega^{-\alpha} z^{\alpha-\beta}}{k^{-\beta}} \right). \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

2.5. Conclusiones

En este capítulo, se ha centrado la atención en los modelos que describen procesos de difusión anómala y que involucran la, así llamada, *ecuación de difusión fraccionaria* obtenida sustituyendo en la ecuación de difusión clásica (2.1.1), la derivada primera con respecto del tiempo y/o la derivada segunda con respecto del espacio, por una derivada fraccionaria.

Esta ecuación de difusión fraccionaria permite establecer una interpolación entre las ecuaciones clásicas del calor y de ondas, dos de los ejemplos más simples de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden de tipo *parabólico* y *hiperbólico* respectivamente, que siempre han sido asociadas a familias muy distintas de fenómenos físicos.

El empleo de las derivadas fraccionarias hace que estas dos familias se acerquen, en el sentido de que, desde un punto de vista puramente matemático, se puede pasar de una a otra de forma continua. En realidad, los resultados ya conocidos en la literatura y presentes en los numerosos estudios realizados sobre la difusión anómala, muestran como el proceso asociado a la ecuación de difusión fraccionaria (2.1.5) cuando el orden α de la derivada temporal varía entre 1 y 2, mantiene un carácter de tipo difusivo (superdifusivo)

para todo $1 \leq \alpha < 2$ mientras que $\alpha = 2$ es un punto de discontinuidad para esta ecuación y marca la transición de la condición parabólica a la hiperbólica, asociada al proceso ondulatorio.

Al principio del capítulo se ha presentado una pequeña recopilación de los resultados ya conocidos relativos a la resolución de los problema de Cauchy y de propagación de señales para la ecuación de difusión fraccionaria (2.1.5), cuando la derivada fraccionaria en el tiempo es la de Caputo de orden $0 < \alpha \leq 2$, y con derivada segunda en el espacio. En ambos casos la solución queda expresada en términos de las funciones especiales de Mittag-Leffler y de Wright, generalizaciones de la función exponencial. Como ocurre con las soluciones fundamentales de estos dos problemas cuando $\alpha = 1$, que son, respectivamente, la densidad de probabilidad gaussiana en x y la densidad de probabilidad de una distribución de Lévy unilateral con respecto a t , las soluciones fundamentales de estos dos problemas para todo $0 < \alpha < 2$ siguen siendo densidades de probabilidad en x y en t , respectivamente.

El conocimiento de la solución del problema de propagación de señales para la ecuación (2.1.5), permite deducir la solución de este mismo problema para la ecuación de difusión fraccionaria en el tiempo, con derivada de Caputo, en el espacio tridimensional.

La finalidad con la que se expone esta primera parte del capítulo, reside en los desarrollos del Capítulo 3, en el que se construirá una nueva interpolación entre las ecuaciones de ondas y de difusión por medio de un sistema de ecuaciones fraccionarias de evolución obtenido operando una especie de raíz cuadrada de la ecuación (2.1.5), generalizando el método usado por Dirac para obtener su famosa ecuación para el electrón libre a partir de la de Klein-Gordon. Será por lo tanto muy útil conocer la solución del cuadrado de este sistema, la misma ecuación (2.1.5), y buscar la relación existente entre ésta y la solución de las ecuaciones del tipo de Dirac fraccionarias, que se pueden considerar ser sus raíces.

En concreto, en el Capítulo 3 se estudia el sistema de ecuaciones fraccionarias del tipo de Dirac cuando se especifican los operadores fraccionarios según las definiciones de Caputo y/o de Riemann-Liouville; por lo que, en el presente capítulo, se ha desarrollado una segunda parte dedicada a la resolución de los problemas de Cauchy y de propagación de las señales “generalizados” (con condiciones iniciales fraccionarias) para la ecuación de difusión fraccionaria (2.1.5) con derivada de Riemann-Liouville en el tiempo y de Liouville en el espacio. Operando con la técnica de las transformadas de Laplace y de Fourier sobre el problema de Cauchy generalizado para la ecuación de difusión fraccionaria (2.1.5), se encuentra una vez más que la solución puede ser expresada en términos de las funciones de Mittag-Leffler y de Wright y que devuelve las soluciones conocidas de las ecuaciones de difusión y de ondas para este mismo problema cuando $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\alpha = 2$, $\beta = 2$, respectivamente. A diferencia del caso anterior, ahora la solución fundamental puede ser escrita como densidad de probabilidad sólo cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 2$.

Para el problema de propagación de señales generalizado que se ha solucionado en este capítulo para $\beta = 2$ y con el método de la transformada de Laplace, se ha encontrado la misma expresión de la solución del problema de propagación de señales en su formulación clásica para la ecuación de difusión fraccionaria con $\beta = 2$. En particular, la solución fundamental, que es una distribución de Lévy unilateral con respecto a t cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 2$, es una densidad de probabilidad unilateral en el tiempo para todo $0 < \alpha < 2$ y

$\beta = 2$.

El capítulo se concluye mostrando como, cuestiones matemáticas que típicamente son planteadas para las ecuaciones diferenciales usuales pueden ser generalizadas a través de los operadores diferenciales fraccionarios y llevar a resultados que incluyen a los clásicos como casos particulares. En concreto se desarrolla la búsqueda de soluciones de variables no separadas, tipo ondas planas por ejemplo, para la ecuación de difusión fraccionaria (2.1.5) en la que las derivadas parciales en el tiempo y en el espacio son sustituidas por las derivadas parciales fraccionarias de Riemann-Liouville, por la izquierda y por la derecha. Las soluciones obtenidas siguen interpolando los resultados relativos a las ecuaciones del calor o de ondas, como cabía esperar.

3. ECUACIONES DE EVOLUCIÓN-DIFUSIÓN FRACCIONARIAS DEL TIPO DE DIRAC

3.1. Introducción

La ecuación de Dirac puede interpretarse como la raíz cuadrada de la ecuación de Klein-Gordon y surge, en el ámbito de la Mecánica Cuántica Relativista, de la búsqueda de una ecuación de ondas para el electrón (véase [152] y [109], por ejemplo). Como ilustración, consideremos el sistema que define la ecuación de Dirac clásica en el caso unidimensional y sin masa:

$$(A\partial_t + B\partial_x)\psi(t, x) = 0, \quad \psi(t, x) = \begin{pmatrix} u_1(t, x) \\ u_2(t, x) \end{pmatrix}, \quad (3.1.1)$$

donde A y B son matrices, llamadas de *Pauli*, de orden 2×2 que satisfacen las condiciones

$$A^2 = I, \quad B^2 = -I, \quad AB + BA = 0, \quad (3.1.2)$$

siendo I el operador identidad, y $\psi(t, x)$ es una función de onda de dos componentes, cada una llamada *espinor*.

En efecto, siendo A y B matrices de Pauli, elevando al cuadrado el operador que aparece en el sistema (3.1.1), resulta

$$(A\partial_t + B\partial_x)^2 \psi(t, x) = \begin{cases} (\partial_t^2 - \partial_x^2)u_1(t, x) = 0 \\ (\partial_t^2 - \partial_x^2)u_2(t, x) = 0 \end{cases},$$

lo cual indica que cada componente de $\psi(t, x)$ satisface la ecuación de ondas.

Morinaga y Nono [120], en un contexto más amplio, analizaron la raíz de orden entero s de ecuaciones diferenciales en la forma

$$\sum_{|I|=s} a_I \frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I} \phi = \phi, \quad (3.1.3)$$

y mostraron que, dicha raíz, puede ser expresada por medio del sistema de primer orden

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \Phi \quad (3.1.4)$$

donde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son matrices que, desde el punto de vista físico, describen los *grados internos de libertad* del sistema asociado.

Una generalización natural de esta forma de operar, lleva a considerar raíces cuadradas de ecuaciones diferenciales de orden cualquiera, que deben ser expresadas mediante sistemas de ecuaciones diferenciales en las que intervengan derivadas de orden real.

En esta línea se enmarcan los recientes trabajos de Vázquez et al., [160], [166], que introducen una definición de la raíz cuadrada de la ecuación de difusión estándar unidimensional, $\partial_t u(t, x) - \partial_{xx} u(t, x) = 0$, de la forma siguiente:

$$(A\partial_t^{1/2} + B\partial_x)\psi(t, x) = 0, \quad \psi(t, x) = \begin{pmatrix} u_1(t, x) \\ u_2(t, x) \end{pmatrix} \quad (3.1.5)$$

donde A y B son matrices de Pauli que satisfacen las condiciones (3.1.2) y $\psi(t, x)$ es una función de difusión de dos componentes, cada una de las cuales satisface la ecuación de difusión estándar. Tales componentes pueden interpretarse como *densidades de probabilidad con estructura interna asociada a los grados internos de libertad del sistema*, y son denominadas *difunores* en analogía con el término de *espinor* de las componentes de la función de onda de la ecuación de Dirac clásica.

Cabe mencionar que Oldham y Spanier (véase [124] y [125]) fueron de los primeros autores en derivar una formulación que involucraba el operador matemático de semi-diferenciación en sustitución de las leyes de Fick, en un trabajo del 1970, pero en un contexto escalar y sin considerar grados de libertad internos.

Hay que subrayar que la representación (3.1.5) de la raíz cuadrada de la ecuación de difusión estándar es válida si se usa la propiedad $\partial_t^{1/2}\partial_t^{1/2}f(t, x) = \partial_t f(t, x)$, que se cumple para funciones $f(t, x)$ “suficientemente buenas”, de acuerdo con lo visto en el Capítulo 1; por ejemplo, para funciones $f(t, x)$ continuas y con $f(0, x) = 0$ ó funciones en la clase restringida C caracterizada en el Teorema 1.2.1.

Dando un paso más en el proceso de generalización del método utilizado por Dirac para obtener su ecuación a partir de la ecuación de Klein-Gordon, se puede considerar la raíz cuadrada de la ecuación de difusión fraccionaria generalizada (2.1.5) (véase [71], [72] y [131]), que aquí volvemos a escribir de la forma siguiente:

$$(D_t^{2\alpha}u)(t, x) = \lambda^2(D_x^{2\beta}u)(t, x) \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}, \lambda^2 \in \mathbb{R}_+), \quad (3.1.6)$$

con $0 < \alpha \leq 1$ y $\beta > 0$, incluyendo así, como caso particular, el modelo propuesto por Vázquez et al. en [160], [166].

En consonancia con lo arriba descrito, una posible definición de la raíz cuadrada de la ecuación de difusión fraccionaria unidimensional (3.1.6), está dada por:

$$(AD_t^\alpha + \lambda BD_x^\beta)\psi(t, x) = 0, \quad \psi(t, x) = \begin{pmatrix} u_1(t, x) \\ u_2(t, x) \end{pmatrix}, \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad (3.1.7)$$

con $0 < \alpha \leq 1$ y $\beta > 0$, donde A y B son matrices de Pauli que satisfacen las condiciones (3.1.2), y $\psi(t, x)$ es una función de difusión fraccionaria de dos componentes, cada una de las cuales verifica la ecuación de difusión fraccionaria (3.1.6). El sistema (3.1.5) se obtiene a partir de (3.1.7) cuando $\alpha = 1/2$ y $\beta = 1$.

Una vez más, hay que destacar la necesidad de que se cumpla la propiedad del semigrupo cuando se aplica la derivada fraccionaria a las funciones u_1 y u_2 , al fin de poder mantener la representación (3.1.7) como raíz cuadrada de la ecuación de difusión fraccionaria.

El sistema (3.1.7) puede ser interpretado como una interpolación “desde el interior” de las ecuaciones clásicas de difusión (2.1.1) y de ondas (2.1.2), que, en efecto, tienen como solución a las componentes u_1 y u_2 cuando $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$ y $\alpha = 1$, $\beta = 1$, respectivamente.

En el álgebra formada por las matrices de Pauli que verifican las condiciones (3.1.2), restringiremos el estudio a aquellas parejas de matrices A y B reales, de entre las 6 posibles. Estas son 2 parejas de matrices que dan lugar a sistemas no equivalentes de ecuaciones. En concreto: la matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1.8)$$

introducidas en el sistema (3.1.7) lo reducen a las siguientes ecuaciones de componentes u_1 y u_2 separadas

$$(D_t^\alpha u_1)(t, x) - \lambda(D_x^\beta u_1)(t, x) = 0, \quad (3.1.9)$$

$$(D_t^\alpha u_2)(t, x) + \lambda(D_x^\beta u_2)(t, x) = 0, \quad (3.1.10)$$

mientras que, la pareja de matrices

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1.11)$$

conduce al sistema

$$(D_t^\alpha u_1)(t, x) + \lambda(D_x^\beta u_2)(t, x) = 0, \quad (3.1.12)$$

$$(D_t^\alpha u_2)(t, x) + \lambda(D_x^\beta u_1)(t, x) = 0, \quad (3.1.13)$$

en el que las componentes u_1 y u_2 no son separadas.

En realidad, aunque nos encontramos con estos dos sistemas no equivalentes de ecuaciones, en la primera sección de este capítulo veremos como, a través de una transformación matricial se pueden obtener las soluciones acopladas del sistema de ecuaciones (3.1.12) y (3.1.13) a partir de las soluciones no acopladas de las ecuaciones (3.1.9) y (3.1.10). Este resultado permite restringir la resolución analítica que se aborda en este capítulo únicamente a las ecuaciones (3.1.9) y (3.1.10); para ambas vamos a emplear la notación única

$$(D_t^\alpha u)(t, x) = \lambda(D_x^\beta u)(t, x) \quad (t > 0, -\infty < x < \infty, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad (3.1.14)$$

con $0 < \alpha \leq 1$ y $\beta > 0$, cambiando luego oportunamente λ con $-\lambda$ a la hora de encontrar u_1 y u_2 .

El operador D_t^α vendrá expresado por las definiciones de Riemann-Liouville y de Caputo enunciadas en el Capítulo 1, mientras que se ha elegido la definición de Liouville para D_x^β , puesto que el dominio de x es todo el eje real.

Debido a su buen comportamiento con respecto a la propiedad del semigrupo, la derivada fraccionaria de Feller-Riesz, definida en (1.2.113), podría haber sido elegida para expresar el operador de derivación fraccionario en el espacio; el problema que nos encontramos al utilizar la integral hipersingular que la define, es que ésta no coincide con la derivada entera cuando $\beta = 1$, resultando, según la propiedad (1.2.125), $({}^F D_0^1 u)(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} H u(t, x)$, siendo H la transformada de Hilbert (1.2.126). Es evidente, por lo tanto, que tal elección nos hubiera impedido interpretar el sistema (3.1.7) como raíz cuadrada de la ecuación de difusión fraccionaria para todo $\beta > 0$.

La ecuación (3.1.14), cuando $\beta = 1$ y $\beta = 2$, toma, respectivamente, las formas:

$$(D_t^\alpha u)(t, x) = \lambda \partial_x u(t, x) \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, 0 < \alpha \leq 1), \quad (3.1.15)$$

$$(D_t^\alpha u)(t, x) = \lambda \partial_x^2 u(t, x) \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, 0 < \alpha \leq 1). \quad (3.1.16)$$

La (3.1.15) es comúnmente llamada *ecuación de evolución fraccionaria* y la (3.1.16), como ya sabemos, *ecuación de difusión fraccionaria en el tiempo*, por lo que llamaremos a (3.1.14) *ecuación fraccionaria de evolución-difusión del tipo de Dirac*.

De los trabajos que se han dirigido al estudio de problemas para ecuaciones diferenciales fraccionarias, algunos citados al principio del Capítulo 2, pocos han incluido ecuaciones de evolución fraccionarias en las que los dos operadores de derivación sean de orden menor o igual a 1. Entre ellos, cabe destacar el de H. Berens y U. Westphal [18] que, en 1968, consideraron el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} ({}^{RL}D_t^\alpha \omega)(t, x) + \partial_x \omega(t, x) &= 0, & x > 0, t > 0, 0 < \alpha < 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \|\omega(t, x) - f(t)\|_{L^p} &= 0, & 1 \leq p < \infty \end{aligned}, \quad (3.1.17)$$

restringido a funciones de clase $L^p(0, \infty)$ con respecto a t . El operador que aparece, ${}^{RL}D_t^\alpha$, es la derivada parcial fraccionaria de Riemann-Liouville definida en (1.2.8). Aplicando la teoría de semigrupos y la técnica de la transformada de Laplace, encontraron la solución $\omega(t, x) = [W_\gamma(x)f](t)$, donde $\{W_\gamma(x); x \geq 0\}$ es un semigrupo de clase C_0 [127] en $L^p(0, \infty)$. Para el caso particular de $\gamma = 1/2$, dieron la solución en forma explícita

$$[W_{1/2}(x)f](t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t f(t-u) u^{-3/2} e^{-\frac{x^2}{4u}} du$$

con $f \in L^p(0, \infty)$. El problema (3.1.17) fue tratado desde un punto de vista puramente matemático, con el objetivo de estudiar un problema de Cauchy para una ecuación de ondas generalizada, análogo al definido para una ecuación de ondas unidimensional estándar.

Volviendo a nuestro estudio, hay que distinguir entre dos tipos de problemas relativos a la ecuación (3.1.14). El primero es el constituido por la ecuación (3.1.14) cuando ésta asume la forma

$$({}^C D_t^\alpha u)(t, x) = \lambda ({}^L D_x^\beta u)(t, x) \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}), \quad (3.1.18)$$

junto con las condiciones inicial entera y de contorno

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = 0, \quad u(0+, x) = g(x), \quad (3.1.19)$$

donde $0 < \alpha \leq 1$, $\beta > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

Para este caso, el operador $({}^C_{a+}D_t^\alpha u)(t, x)$ es la derivada parcial fraccionaria de Caputo definida en (1.2.46), mientras que $({}^L_{-\infty}D_x^\beta u)(t, x)$ es la derivada parcial fraccionaria de Liouville de orden $\beta > 0$ definida en (1.2.16).

Hablaremos de problema de Cauchy para la ecuación (3.1.18) y su solución se dirá *localizada*, debido a que verifica la propiedad $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = 0$.

En la sección 3.3, utilizando la técnica de las transformadas de Laplace y de Fourier, se solucionará el problema (3.1.18), (3.1.19) para el caso particular de $\beta = 1$, es decir,

$$({}^C_0D_t^\alpha u)(t, x) = \lambda \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}, \quad (3.1.20)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = 0, \quad u(0+, x) = g(x). \quad (3.1.21)$$

Cuando $g(x) = \delta(x)$, donde $\delta(x)$ es la función delta de Dirac, la solución del problema de Cauchy (3.1.18), (3.1.19) es la llamada *solución fundamental*. En la sección 3.4, se encontrará la solución fundamental del problema (3.1.20), (3.1.21) a través de la aplicación conjunta de las transformadas de Laplace y de Fourier. También, como alternativa, mediante la sola técnica de la transformada de Laplace, evidenciando como en el primer caso es necesario trabajar con espacios de funciones generalizadas al calcular la transformada de Fourier de la función delta de Dirac, mientras que esto no ocurre con el segundo. Los dos métodos conducen a la misma solución, siendo ésta única, y se expresa en términos de la función especial de Wright cuando $\alpha \neq 1$. También se calculan los momentos de esta solución fundamental y se demuestra que es una densidad de probabilidad en x , y que puede ser expresada mediante una función de densidad del tipo de Lévy estable.

Asimismo, en la sección 3.5, se busca la solución general del problema (3.1.18), (3.1.19), mediante la técnica de las transformadas de Laplace y de Fourier, y se calculan sus momentos.

La sección 3.6 trata explícitamente la solución fundamental del problema de Cauchy (3.1.20), (3.1.21) obtenida cuando $\alpha = 1/2$, siendo ésta una componente de la función de difusión que aparece en el sistema (3.1.5) y también solución de la ecuación de difusión estándar.

El segundo problema que se analiza es el siguiente:

$$({}^{RL}_0D_t^\alpha u)(t, x) = \lambda ({}^L_{-\infty}D_x^\beta u)(t, x) \quad (t > 0, -\infty < x < \infty), \quad (3.1.22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = 0, \quad ({}^{RL}_0D_t^{\alpha-1}u)(0+, x) = f(x), \quad (3.1.23)$$

donde $0 < \alpha \leq 1$, $\beta > 0$, $\lambda \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\lambda \neq 0$. Las derivadas parciales fraccionarias son de Riemann-Liouville, definida en (1.2.8), y de Liouville, definida en (1.2.16). Además, siendo $0 < \alpha \leq 1$ resulta $({}^{RL}_0D_t^{\alpha-1}u)(0+, x) = ({}_0I_t^{1-\alpha}u)(0+, x)$, donde $({}_0I_t^\alpha u)(t, x)$ es la integral parcial fraccionaria de Riemann-Liouville definida en (1.2.6).

Debido a que aparecen condiciones iniciales fraccionarias, nos referiremos al problema dado por (3.1.22), (3.1.23) como del *tipo de Cauchy generalizado*.

La técnica para solucionar el problema (3.1.22), (3.1.23) será la misma utilizada para el caso anterior, basada esencialmente en las transformadas de Laplace y de Fourier. De

forma paralela a lo realizado en las secciones previas, en la sección 3.7 se presentará la solución fundamental del problema (3.1.22) y (3.1.23), que queda expresada mediante la función de Wright cuando $\alpha \neq 1$. Asimismo, se calculan los momentos de esta solución y se encuentra la función normalizada asociada, que resulta expresada en términos de una densidad de probabilidad en t del tipo de Lévy estable unilateral.

También para este problema se presenta explícitamente en la sección 3.8 la solución fundamental obtenida cuando $\alpha = 1/2$ y $\beta = 1$, por el interés que tiene este caso.

Como ya se ha resaltado, todas las soluciones de los problemas de Cauchy o de Cauchy generalizado que se han mencionado hasta aquí son una componente de la función de dos componentes que soluciona el sistema de ecuaciones desacopladas del tipo de (3.1.9) y (3.1.10) con oportunas elecciones de los operadores de derivación fraccionarios. A partir de estos resultados, las dos componentes que son la solución de estos mismos problemas para un sistema de ecuaciones acopladas de evolución-difusión fraccionarias del tipo de (3.1.12) y (3.1.13) vienen deducidas fácilmente aplicando la relación obtenida en la sección 3.2.

La sección 3.9 pondrá en evidencia un resultado muy importante relativo a la interpretación de las dos componentes u_1 y u_2 , cuando bien son soluciones del sistema de ecuaciones acopladas (3.1.9) y (3.1.10), o bien del sistema de ecuaciones desacopladas (3.1.12) y (3.1.13), en relación con la solución de la ecuación de difusión fraccionaria unidimensional (3.1.6).

Finalmente, la sección 3.10 cierra el capítulo; en ella se analiza un problema de valores iniciales y de contorno para una ecuación fraccionaria de evolución, cuando la variable espacial no pertenece ya a todo el eje real, sino que está limitada a un semieje $[a, +\infty)$. Estos resultados serán muy útiles para los desarrollos numéricos del Capítulo 5, dedicado a la construcción de soluciones aproximadas de una ecuación fraccionaria de evolución en una malla discreta espacio-temporal; también podrían ser de utilidad en la búsqueda de soluciones de simetría esférica en tres dimensiones.

3.2. Soluciones desacopladas y acopladas del sistema de ecuaciones fraccionarias de evolución-difusión

En esta sección se encuentra la relación existente entre las soluciones del sistema de ecuaciones acopladas (3.1.12) (3.1.13), que aquí indicamos con u_1^* y u_2^* , y las soluciones no acopladas u_1 y u_2 de las ecuaciones (3.1.9) y (3.1.10), de forma que, en lo que sigue, se pueda restringir el estudio analítico de dichas ecuaciones únicamente al segundo tipo con componentes separadas, más fácil de manejar.

Teorema 3.2.1 Sean u_1 y u_2 las soluciones únicas del sistema de ecuaciones (3.1.9) y (3.1.10) y u_1^* y u_2^* , respectivamente, las soluciones de las ecuaciones (3.1.12) y (3.1.13).

Entonces, resultará

$$u_1^* = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad (3.2.1)$$

$$u_2^* = \frac{u_2 - u_1}{2}. \quad (3.2.2)$$

Demostración. Empezamos con buscar, si existen, dos matrices

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{pmatrix}$$

para las cuales resulte

$$MA_1N = A_2, \quad MB_1N = B_2. \quad (3.2.3)$$

Desarrollando los cálculos, nos encontramos con que M y N cumplen las condiciones (3.2.3) si $m_1 = -m_3$, $m_2 = m_4$ y $n_1 = -n_2 = \frac{1}{2m_2}$ y $n_3 = n_4 = \frac{1}{2m_1}$, es decir, cuando:

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ -m_1 & m_2 \end{pmatrix}, \quad N = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/m_2 & -1/m_2 \\ 1/m_1 & 1/m_1 \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, podría elegirse

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, sea $\psi(t, x)$ la solución única del sistema de ecuaciones desacopladas (3.1.9) y (3.1.10), que indicamos con

$$A_1 D_t^\alpha \psi(t, x) + \lambda B_1 D_x^\beta \psi(t, x) = 0, \quad \psi(t, x) = \begin{pmatrix} u_1(t, x) \\ u_2(t, x) \end{pmatrix}, \quad (3.2.4)$$

o, de forma equivalente, como

$$D_t^\alpha u_2(t, x) + \lambda D_x^\beta u_2(t, x) = 0, \quad (3.2.5)$$

$$D_t^\alpha u_1(t, x) - \lambda D_x^\beta u_1(t, x) = 0; \quad (3.2.6)$$

y buscamos la solución $\psi^*(t, x)$ del sistema de ecuaciones acopladas (3.1.12) y (3.1.13), que escribimos como

$$A_2 D_t^\alpha \psi^*(t, x) + \lambda B_2 D_x^\beta \psi^*(t, x) = 0, \quad \psi^*(t, x) = \begin{pmatrix} u_1^*(t, x) \\ u_2^*(t, x) \end{pmatrix}. \quad (3.2.7)$$

Entonces, si se cumplen las condiciones (3.2.3) para A_2 y B_2 , se puede reescribir el sistema (3.2.7) de la siguiente forma

$$M(A_1 N D_t^\alpha \psi^*(t, x) + \lambda B_1 N D_x^\beta \psi^*(t, x)) = 0, \quad \psi^*(t, x) = \begin{pmatrix} u_1^*(t, x) \\ u_2^*(t, x) \end{pmatrix}; \quad (3.2.8)$$

por lo tanto, $\psi^*(t, x)$ tendrá que verificar las condiciones (3.2.1) y (3.2.2) para ser la solución de (3.2.7), es decir, para que se tenga

$$A_1 N D_t^\alpha \psi^*(t, x) + \lambda B_1 N D_x^\beta \psi^*(t, x) = 0,$$

puesto que esto equivale a pedir que

$$\frac{1}{2m_1} (D_t^\alpha (u_1^*(t, x) + u_2^*(t, x)) + \lambda D_x^\beta (u_1^*(t, x) + u_2^*(t, x))) = 0, \quad (3.2.9)$$

$$\frac{1}{2m_2} ((D_t^\alpha (u_1^*(t, x) - u_2^*(t, x)) - \lambda D_x^\beta (u_1^*(t, x) - u_2^*(t, x))) = 0, \quad (3.2.10)$$

y cada ecuación se hace nula si se cumplen las relaciones (3.2.1) y (3.2.2), al ser u_1 y u_2 las soluciones de las ecuaciones (3.2.5) y (3.2.6). ■

Como ya anunciamos, este resultado permite que, en lo que sigue, se enfoque en un primer momento el atención sobre problemas de Cauchy y de Cauchy generalizados para ecuaciones de evolución-difusión fraccionarias de componentes separadas del tipo de (3.1.9) y (3.1.10), y que en un segundo tiempo se obtengan los mismos resultados relativos a las ecuaciones de componentes acopladas (3.1.12) y (3.1.13) empleando las relaciones (3.2.1) y (3.2.2).

3.3. Solución general del Problema de Cauchy con derivada fraccionaria en el tiempo

3.3.1. Soluciones desacopladas

El siguiente resultado perseguido en este capítulo presenta en forma implícita la solución $u(t, x)$ del problema de valores iniciales (3.1.20), (3.1.21) en el espacio $\mathcal{LF} = \mathcal{L}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ (caracterizado en la Sección 1.2.5) de las funciones para las cuales existen las transformadas de Laplace en el tiempo y de Fourier en el espacio.

La ecuación (3.1.20) es una posible especificación de las ecuaciones (3.1.9) y (3.1.10) que componen el sistema de ecuaciones de componentes separadas (3.1.7) cuando $A = A_1$ y $B = B_1$ son las matrices especificadas en (3.1.8).

Teorema 3.3.1 *Dado el problema de Cauchy (3.1.20), (3.1.21), con $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $G(k) = (\mathcal{F}_x g)(k)$, su solución $u(t, x) \in \mathcal{LF}$ está dada por*

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} s^{\alpha-1} ds \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(k)}{s^\alpha + i\lambda k} e^{-ikx} dk, \quad (\gamma \in \mathbb{R}), \quad (3.3.1)$$

ó, en la forma equivalente,

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\alpha,1}(-i\lambda kt^\alpha) G(k) e^{-ikx} dk, \quad (3.3.2)$$

a condición de que las integrales (3.3.1) y (3.3.2) existan.

Demostración. Indicamos con la notación

$$\widehat{u}(s, k) \equiv (\mathcal{F}_x \mathcal{L}_t u)(s, k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-st} e^{ikx} u(t, x) dt dx, \quad (3.3.3)$$

la transformada de Laplace y de Fourier de la función $u(t, x)$.

Si aplicamos la transformada de Laplace (1.2.68) a la ecuación (3.1.20) y utilizamos la fórmula (1.2.72), que proporciona la transformada de Laplace de la derivada parcial fraccionaria de Caputo (1.2.46) cuando $0 < \alpha < 1$, y la fórmula conocida para la derivada ordinaria cuando $\alpha = 1$; entonces, teniendo en cuenta la condición $u(0+, x) = g(x)$, resulta

$$s^\alpha (\mathcal{L}_t u)(s, x) - s^{\alpha-1} g(x) = \lambda \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{L}_t u)(s, x). \quad (3.3.4)$$

Si a esta última expresión le aplicamos la transformada de Fourier (1.2.76), considerando la fórmula para la transformada de Fourier de derivadas enteras (1.2.79), obtenemos

$$s^\alpha \widehat{u}(s, k) - s^{\alpha-1} G(k) = (-i\lambda k) \widehat{u}(s, k), \quad (3.3.5)$$

y de aquí se deduce la relación que explicita $\widehat{u}(s, k)$:

$$\widehat{u}(s, k) = \frac{s^{\alpha-1} G(k)}{s^\alpha + i\lambda k}. \quad (3.3.6)$$

Por medio de las transformadas de Fourier y Laplace inversas (1.2.77) y (1.2.69), obtenemos la solución del problema de valores iniciales (3.1.20), (3.1.21) en la forma (3.3.1).

También, se puede aplicar la transformada de Laplace inversa a la ecuación (3.3.6) y, utilizando la relación (1.3.7) con $\mu = -i\lambda k$, $h = 0$ y $\beta = 1$, obtenemos

$$(\mathcal{F}_x u)(t, k) = E_{\alpha, 1}(-i\lambda k t^\alpha) G(k), \quad (3.3.7)$$

que conduce al resultado (3.3.2). ■

Si $G(k)$ satisface algunas condiciones adicionales, podemos aplicar el teorema de los residuos para evaluar la integral interior en (3.3.1) (véase [40, Capítulo 2, §1]).

En el caso en que $g(x)$ pertenezca al subespacio del espacio de Schwartz indicado con $\bar{\mathcal{S}}$ y definido en (1.2.88), entonces la (3.3.2) puede escribirse en forma explícita mediante la función especial de Mittag-Leffler.

Corolario 3.3.1 *Sea $g(x) \in \bar{\mathcal{S}}$. Entonces, la solución $u(t, x) \in \mathcal{LF}$ del problema de Cauchy (3.1.20), (3.1.21) toma la forma*

$$u(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} g^{(j)}(x), \quad (3.3.8)$$

a condición de que la serie en (3.3.8) converja para todo $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

Demostración. Teniendo en cuenta la representación (1.3.4) e intercambiando en (3.3.2) la integración con el sumatorio (lo que es posible gracias a la convergencia uniforme de la serie que representa la función de Mittag-Leffler), se puede escribir

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-i\lambda k t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} \right] G(k) e^{-ikx} dk = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-ik)^j G(k) e^{-ikx} dk. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Recordando ahora la fórmula (1.2.79) de la transformada de Fourier de la derivada de orden entero de una función en el espacio $\bar{\mathcal{S}}$, deducimos la expresión (3.3.8) para la solución $u(t, x)$. ■

Un ejemplo de problema que cumple las condiciones del Corolario 3.3.1 es el siguiente:

$$\begin{aligned} ({}^C_0 D_t^\alpha u)(t, x) &= \lambda \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(t, x) &= 0, \quad u(0+, x) = e^{-\mu|x|}, \quad (\mu > 0) \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

con $0 < \alpha \leq 1$, y su solución (3.3.8) está dada por

$$u(t, x) = e^{-\mu|x|} E_{\alpha, 1}(-\text{sign}(x)\mu\lambda t^\alpha). \quad (3.3.11)$$

Observemos que, si asumimos el dato inicial analítico para $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-\mu x}$, ($\mu > 0$), entonces la función

$$u(t, x) = e^{-\mu x} E_{\alpha, 1}(-\mu\lambda t^\alpha) \quad (3.3.12)$$

es una solución no localizada del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} ({}^C_0 D_t^\alpha u)(t, x) &= \lambda \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}), \\ u(0+, x) &= e^{-\mu x}, \quad (\mu > 0), \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

con $0 < \alpha \leq 1$.

Observación 3.3.1 *Se verifica directamente que si $g(x)$ es una función analítica de $x \in \mathbb{R}$, y la serie en (3.3.8) converge, entonces la fórmula (3.3.8) representa la solución explícita del problema*

$$({}^C_0 D_t^\alpha u)(t, x) = \lambda \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}), \quad u(0+, x) = g(x), \quad (3.3.14)$$

con $0 < \alpha \leq 1$.

En particular, cuando $\alpha = 1$, la serie (3.3.8) coincide con la solución clásica $u(t, x) = g(x + \lambda t)$ del problema

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}), \quad u(0+, x) = g(x). \quad (3.3.15)$$

Concluimos observando que, si indicamos con $u_1(t, x) = u_1^\lambda(t, x)$ la solución del problema (3.1.20), (3.1.21), entonces la solución de este mismo problema (3.1.21) para la ecuación

$$({}^C_0D_t^\alpha u)(t, x) + \lambda \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = 0, \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}), \quad (3.3.16)$$

será $u_2(t, x) = u_1^{-\lambda}(t, x)$.

3.3.2. Soluciones acopladas

Como consecuencia del Teorema 3.2.1, vamos a obtener las soluciones u_1^* y u_2^* del sistema de ecuaciones de componentes acopladas (3.1.12) y (3.1.13) cuando $D_t^\alpha = {}^C_0D_t^\alpha$ y $D_x^\beta = \partial/\partial x$, es decir

$$({}^C_0D_t^\alpha u_1^*)(t, x) + \lambda \frac{\partial u_2^*(t, x)}{\partial x} = 0, \quad (3.3.17)$$

$$({}^C_0D_t^\alpha u_2^*)(t, x) + \lambda \frac{\partial u_1^*(t, x)}{\partial x} = 0, \quad (3.3.18)$$

$0 < \alpha \leq 1$, junto con las condiciones iniciales y de contorno

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_1^*(t, x) = 0, \quad u_1^*(0+, x) = g(x), \quad (3.3.19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_2^*(t, x) = 0, \quad u_2^*(0+, x) = 0. \quad (3.3.20)$$

Corolario 3.3.2 Dado el problema de Cauchy (3.3.19), (3.3.20) para el sistema de ecuaciones (3.3.17), (3.3.18), con $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $G(k) = (\mathcal{F}_x g)(k)$, las soluciones $u_1^*(t, x) \in \mathcal{LF}$ y $u_2^*(t, x) \in \mathcal{LF}$ están dadas por

$$u_1^*(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{2\alpha, 1}(-\lambda^2 k^2 t^{2\alpha}) G(k) e^{-ikx} dk, \quad (3.3.21)$$

$$u_2^*(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (i\lambda k t^\alpha) E_{2\alpha, \alpha+1}(-\lambda^2 k^2 t^{2\alpha}) G(k) e^{-ikx} dk, \quad (3.3.22)$$

a condición de que las integrales (3.3.21) y (3.3.22) existan.

Demostración. Las expresiones (3.3.21) y (3.3.22) resultan de aplicar las relaciones (3.2.1) y (3.2.2) teniendo en cuenta la expresión (3.3.2) de la solución $u_1 = u_1^\lambda$ y que $u_2 = u_1^{-\lambda}$; también se han empleado la definición (1.3.4) y las propiedades (1.3.5) y (1.3.6) de la función de Mittag-Leffler. ■

Observación 3.3.2 La solución u_1^* coincide exactamente con la solución del problema de Cauchy (2.2.2) y (2.2.4) para la ecuación de difusión fraccionaria en el tiempo con derivada de Caputo (2.2.1); en efecto, en el Capítulo 2, dicha solución viene expresada mediante la forma implícita (2.2.5), equivalente a la (3.3.21).

Volviendo al problema concreto (3.3.13) que se ha solucionado en la sección anterior; siendo su solución $u_1^\lambda(t, x)$ expresada por la fórmula (3.3.12) y $u_2^\lambda = u_1^{-\lambda}(t, x)$ la solución del mismo problema (3.3.13) en el que se sustituye λ por $-\lambda$, y empleando una vez más las relaciones (3.2.1) y (3.2.2) resultará que las soluciones de las ecuaciones de componentes acopladas (3.3.17) y (3.3.18), junto con las condiciones iniciales

$$u_1^*(0+, x) = e^{-\mu x}, \quad (3.3.23)$$

$$u_2^*(0+, x) = 0, \quad (3.3.24)$$

donde $\mu > 0$, serán

$$u_1^*(t, x) = e^{-\mu x} E_{2\alpha, 1}(\mu^2 \lambda^2 t^{2\alpha}), \quad (3.3.25)$$

$$u_2^*(t, x) = \mu \lambda t^\alpha E_{2\alpha, \alpha+1}(\mu^2 \lambda^2 t^{2\alpha}), \quad (3.3.26)$$

para todo $0 < \alpha \leq 1$.

3.4. Solución fundamental del problema de Cauchy con derivada fraccionaria en el tiempo

3.4.1. Técnica de las transformadas de Laplace y de Fourier: soluciones desacopladas.

En esta sección se busca la solución fundamental del problema de valores iniciales (3.1.20), (3.1.21) cuando $g(x) = \delta(x)$ es la función Delta de Dirac definida en (1.2.94); es decir

$$\begin{aligned} ({}^C_0 D_t^\alpha u)(t, x) &= \lambda \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}; 0 < \alpha \leq 1) \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(t, x) &= 0, \quad u(0+, x) = \delta(x) \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

El primer resultado que se enuncia es un corolario del Teorema 3.3.1 y presenta la solución de (3.4.1) obtenida con el método de las transformadas de Fourier y de Laplace. Hay que resaltar que, tratando con la $\delta(x)$ definida, por ejemplo, en el espacio \mathcal{S}' , dual topológico del espacio de Schwartz \mathcal{S} introducido en (1.2.80), habrá que recurrir a la definición de transformada de Fourier de una función generalizada, dada en la Propiedad 1.2.23.

Corolario 3.4.1 La solución fundamental $u(t, x) \in \mathcal{LF}$ del problema (3.4.1) está dada por

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} s^{\alpha-1} ds \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s^\alpha + i\lambda k} e^{-ikx} dk, \quad (\gamma \in \mathbb{R}), \quad (3.4.2)$$

o, en la forma equivalente,

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\alpha,1}(-i\lambda kt^\alpha) e^{-ikx} dk, \quad (3.4.3)$$

a condición de que las integrales (3.4.2) y (3.4.3) existan.

Demostración. Gracias a la propiedad (1.2.97) podemos escribir $G(k) = 1$ en (3.3.1) y (3.3.2), obteniendo la solución fundamental del problema (3.4.1) en las dos formas (3.4.2) y (3.4.3). ■

Aplicamos ahora el teorema de los residuos para evaluar la integral interna en (3.4.2) (véase, por ejemplo, [40, Capítulo 2, §1]) y llegar a una forma explícita para la solución fundamental $u(t, x)$ cuando $\alpha \neq 1$.

Teorema 3.4.1 *La solución fundamental $u(t, x) \in \mathcal{LF}$ del problema (3.4.1), cuando $\alpha \neq 1$, tiene la forma*

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \frac{1}{\lambda t^\alpha} W\left(\frac{x}{\lambda t^\alpha}; -\alpha, 1 - \alpha\right) & x \leq 0 \end{cases} \quad (3.4.4)$$

para $\lambda > 0$, y

$$u(t, x) = \begin{cases} -\frac{1}{\lambda t^\alpha} W\left(\frac{x}{\lambda t^\alpha}; -\alpha, 1 - \alpha\right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (3.4.5)$$

para $\lambda < 0$.

Demostración. Si $x < 0$, entonces la integral interna en (3.4.2) puede reescribirse de la forma:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s^\alpha + i\lambda k} e^{-ikx} dk &= 2\pi i \operatorname{res}_{k=is^\alpha/\lambda} \left[\frac{1}{s^\alpha + i\lambda k} e^{-ikx} \right] = \\ &= \begin{cases} \frac{2\pi}{\lambda} e^{s^\alpha x/\lambda} & \lambda > 0 \\ 0 & \lambda < 0 \end{cases}, \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

mientras que, para $x > 0$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s^\alpha + i\lambda k} e^{-ikx} dk &= -2\pi i \operatorname{res}_{k=is^\alpha/\lambda} \left[\frac{1}{s^\alpha + i\lambda k} e^{-ikx} \right] = \\ &= \begin{cases} 0 & \lambda > 0 \\ -\frac{2\pi}{\lambda} e^{s^\alpha x/\lambda} & \lambda < 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Sustituyendo estas expresiones en (3.4.2), llegamos a escribir la solución del problema (3.4.1) como sigue:

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ -\frac{i}{2\pi\lambda} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} s^{\alpha-1} e^{s^\alpha x/\lambda} ds & x < 0 \end{cases}, \quad (3.4.8)$$

cuando $\lambda > 0$, mientras que, para $\lambda < 0$, resulta

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{i}{2\pi\lambda} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} s^{\alpha-1} e^{s^\alpha x/\lambda} ds & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}. \quad (3.4.9)$$

Estas fórmulas demuestran que el problema (3.4.1) tiene solución fundamental nula $u(t, x) = 0$ para los casos $x > 0$, $\lambda > 0$ y $x < 0$, $\lambda < 0$.

Introducimos ahora la siguiente notación

$$z(t, x) = \frac{i}{2\pi\lambda} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} s^{\alpha-1} e^{s^\alpha x/\lambda} ds. \quad (3.4.10)$$

Desarrollando en serie de Taylor la función exponencial $e^{s^\alpha x/\lambda}$, intercambiando el orden de integración con el del sumatorio (siendo esto posible gracias a la convergencia uniforme de la serie exponencial), tenemos

$$z(t, x) = \frac{i}{2\pi\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} s^{\alpha n + \alpha - 1} e^{st} ds, \quad (\gamma \in \mathbb{R}). \quad (3.4.11)$$

Aplicando la sustitución $st = \sigma$, transformando el contorno de Hankel ([47, Sección 1.6]) y utilizando la representación de la función Gamma sobre el contorno de Hankel ([47, Sección 1.6(2)]),

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{0+} e^{t-tz} dt, \quad |\arg(t)| \leq \pi, \quad (3.4.12)$$

obtenemos

$$z(t, x) = -\frac{1}{\lambda t^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(-\alpha n + 1 - \alpha) n!} \left(\frac{x}{\lambda t^\alpha}\right)^n. \quad (3.4.13)$$

Tomando en cuenta la fórmula (1.3.8), deducimos la siguiente representación explícita de $z(t, x)$ en términos de la función de Wright:

$$z(t, x) = -\frac{1}{\lambda t^\alpha} W\left(\frac{x}{\lambda t^\alpha}; -\alpha, 1 - \alpha\right), \quad (3.4.14)$$

válida si $0 < \alpha < 1$, y que está en acuerdo con la propiedad (1.3.16) que enunciamos sin demostrar.

Por consiguiente las expresiones (3.4.8) y (3.4.9) asumen la forma

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \frac{1}{\lambda t^\alpha} W\left(\frac{x}{\lambda t^\alpha}; -\alpha, 1 - \alpha\right) & x < 0 \end{cases} \quad (3.4.15)$$

y

$$u(t, x) = \begin{cases} -\frac{1}{\lambda t^\alpha} W\left(\frac{x}{\lambda t^\alpha}; -\alpha, 1 - \alpha\right) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (3.4.16)$$

para $\lambda > 0$ y $\lambda < 0$, respectivamente.

Al fin de determinar el valor de las soluciones en $x = 0$, punto en el cual se pierde el carácter analítico, hay que imponer la condición inicial $u(0, x) = \delta(x)$.

Para que tal condición se verifique, $u(t, x)$ tendrá que tomar las formas (3.4.4) y (3.4.5).

En efecto, si se utiliza la representación integral (1.3.8) de la función de Wright sobre el contorno de Hankel, se puede evaluar $u(0, x)$ cuando $\lambda > 0$ como

$$u(0, x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \frac{e^\sigma}{\lambda t^\alpha \sigma^{1-\alpha}} e^{\frac{x\sigma^\alpha}{\lambda t^\alpha}} d\sigma \Big|_{t=0} & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ +\infty & x = 0 \end{cases}$$

y, cuando $\lambda < 0$, como

$$u(0, x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} \frac{e^\sigma}{\lambda t^\alpha \sigma^{1-\alpha}} e^{\frac{x\sigma^\alpha}{\lambda t^\alpha}} d\sigma \Big|_{t=0} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} +\infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} .$$

■

En el teorema que sigue, se proporcionan los momentos de la solución fundamental $u(t, x)$.

Teorema 3.4.2 *Los momentos de la solución fundamental $u(t, x) \in \mathcal{LF}$ del problema (3.4.1) valen*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n u(t, x) dx = (-\lambda t^\alpha)^n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha n + 1)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.4.17)$$

Demostración. Calculamos los momentos de la solución fundamental del problema (3.4.1), aplicando la propiedad (2.3.24), la relación (3.3.7) con $G(k) = 1$ y teniendo en cuenta la notación (1.3.4), lo que implica:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n u(t, x) dx &= (-i)^n \left[\frac{\partial^n}{\partial k^n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-i\lambda k)^j t^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j + 1)} \right]_{k=0} = \\ &= (-i)^n \left[\sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-i\lambda)^j k^{j-n} t^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j + 1)} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-n+1)} \right]_{k=0} . \end{aligned}$$

El único término no nulo de la serie anterior es el correspondiente a $j = n$, que conduce al resultado (3.4.17). ■

A partir de la expresión (3.4.17), deducimos la fórmula para los momentos pares:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} u(t, x) dx = \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2\alpha n + 1)} (\lambda t^\alpha)^{2n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.4.18)$$

El hecho de que los momentos impares de la solución fundamental del problema (3.4.1) no sean cero es una consecuencia del carácter asimétrico, en el espacio, de la misma.

Observación 3.4.1 Si en (3.4.18) se sustituye $\nu = 2\alpha$, $0 < \nu < 2$, la fórmula resultante representa los momentos pares (2.2.14) de la solución fundamental del problema de Cauchy (2.2.8) para la ecuación de difusión fraccionaria respecto al tiempo con derivada de Caputo de orden $\alpha = \nu$.

Se presenta ahora un resultado, en parte consecuencia del Teorema 3.4.2, que permite interpretar como densidades de probabilidad cada una de las dos componentes de la solución $\psi(t, x)$ del sistema (3.1.7) cuando éste queda reducido a las ecuaciones (3.1.9) y (3.1.10), especificadas según la expresión (3.1.20), y solucionadas junto con las condiciones (3.1.21) cuando $g(x) = \delta(x)$.

Teorema 3.4.3 La solución fundamental del problema (3.4.1) verifica

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx = 1, \quad u(t, x) \geq 0 \quad \forall t > 0, \quad 0 < \alpha < 1,$$

por lo que resulta ser una densidad de probabilidad en x para todo $t > 0$ y $0 < \alpha < 1$. En particular, cuando $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$,

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \frac{1}{|\lambda|t^\alpha} p_{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{|x|}{|\lambda|t^\alpha}; \frac{1}{\alpha} - 2 \right) & x \leq 0 \end{cases}, \quad (3.4.19)$$

para $\lambda > 0$, y

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{|\lambda|t^\alpha} p_{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{|x|}{|\lambda|t^\alpha}; \frac{1}{\alpha} - 2 \right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}, \quad (3.4.20)$$

para $\lambda < 0$; donde $p_\alpha(x; \theta)$ es una densidad de Lévy estrictamente estable cuya función característica está dada por la expresión (1.2.117).

Demostración Como consecuencia directa del Teorema 3.4.2, el momento de orden cero (la integral en \mathbb{R}) de la $u(t, x)$ vale 1.

Para demostrar que la función $u(t, x)$, expresada en las formas (3.4.4), (3.4.5), es no negativa cuando $0 < \alpha \leq 1$, se puede recurrir a la representación integral (1.3.8) de la función de Wright, especificando la estructura del contorno de Hankel. Para la expresión (3.4.4) por ejemplo, se puede escribir

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} \frac{e^\sigma}{\lambda t^\alpha \sigma^{1-\alpha}} e^{\frac{x\sigma^\alpha}{\lambda t^\alpha}} d\sigma = \\ &= \frac{1}{2\pi i \lambda t^\alpha} \left[\int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{e^\sigma}{\sigma^{1-\alpha}} e^{\frac{x\sigma^\alpha}{\lambda t^\alpha}} d\sigma + \int_{C_\varepsilon} \frac{e^\sigma}{\sigma^{1-\alpha}} e^{\frac{x\sigma^\alpha}{\lambda t^\alpha}} d\sigma + \int_{\varepsilon}^{-\infty} \frac{e^\sigma}{\sigma^{1-\alpha}} e^{\frac{x\sigma^\alpha}{\lambda t^\alpha}} d\sigma \right] \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

si $x \leq 0$ y $\lambda > 0$; donde C_ε es un círculo de radio $\varepsilon > 0$ centrado en el origen.

Ahora mostramos como la integral sobre C_ε se anula cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. En efecto, siendo $\sigma = \varepsilon e^{i\theta}$ sobre este contorno, con $\theta = \arg(\sigma)$, se pueden escribir los desarrollos que siguen:

$$\left| \int_{C_\varepsilon} \frac{e^\sigma}{\sigma^{1-\alpha}} e^{\frac{x\sigma^\alpha}{\lambda t^\alpha}} d\sigma \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| e^{\varepsilon e^{i\theta}} e^{\frac{x\varepsilon^\alpha e^{i\theta\alpha}}{\lambda t^\alpha}} e^{i\theta\alpha} \varepsilon^\alpha d\theta \right| = \int_0^{2\pi} e^{\varepsilon \cos(\theta)} e^{\frac{x\varepsilon^\alpha \cos(\theta\alpha)}{\lambda t^\alpha}} \varepsilon^\alpha d\theta \leq \varepsilon^\alpha e^{\varepsilon + \frac{x\varepsilon^\alpha m}{\lambda t^\alpha}}$$

donde $m = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \cos(\theta\alpha)$, para cada $0 < \alpha < 1$ fijado.

Resulta entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{e^\sigma}{\sigma^{1-\alpha}} e^{\frac{x\sigma^\alpha}{\lambda t^\alpha}} d\sigma = 0,$$

y la fórmula (3.4.21) puede ser reescrita, para $\varepsilon \rightarrow 0$, en la forma siguiente

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi i \lambda t^\alpha} \left[\int_{-\infty}^0 \frac{e^\sigma}{\sigma^{1-\alpha}} e^{\frac{x\sigma^\alpha}{\lambda t^\alpha}} d\sigma - \int_{-\infty}^0 \frac{e^\sigma}{\sigma^{1-\alpha}} e^{\frac{x\sigma^\alpha}{\lambda t^\alpha}} d\sigma \right] \quad (3.4.22)$$

si $x \leq 0$ y $\lambda > 0$. Ahora, siendo $\sigma = |y| e^{-i\pi}$ y $\sigma = |y| e^{i\pi}$ en la primera y en la segunda integral respectivamente, con $y \in \mathbb{R}$, resulta

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{\pi \lambda t^\alpha} \left[\int_{-\infty}^0 \frac{e^y}{|y|^{1-\alpha}} e^{\frac{x y^\alpha}{\lambda t^\alpha}} \left(\frac{e^{i\pi(1-\alpha)} - e^{-i\pi(1-\alpha)}}{2i} \right) dy \right] = \\ &= \frac{1}{\pi \lambda t^\alpha} \left[\int_{-\infty}^0 \frac{e^y}{|y|^{1-\alpha}} e^{\frac{x y^\alpha}{\lambda t^\alpha}} \sin(\pi(1-\alpha)) dy \right] \end{aligned}$$

y, por consiguiente, la $u(t, x)$ dada por la fórmula (3.4.4), cuando $\lambda > 0$, resulta ser no negativa en x para todo $t > 0$ y $0 < \alpha < 1$.

El mismo resultado vale cuando $\lambda < 0$ y $u(t, x)$ está expresada por medio de la igualdad (3.4.5).

Volviendo a la expresión de $u(t, x)$ en términos de las formas (3.4.4), (3.4.5), utilizando la relación (1.3.19) existente entre unas funciones de Wright particulares y una subclase de las densidades de Lévy estrictamente estables, obtenemos las representaciones (3.4.19) y (3.4.20). ■

Como también resaltamos en la sección anterior, si indicamos con $u_1(t, x) = u_1^\lambda(t, x)$ la solución del problema de valores iniciales (3.1.20), (3.1.21) cuando $g(x) = \delta(x)$, es decir, del problema (3.4.1), entonces la solución de este mismo problema para la ecuación (3.3.16) será obtenida como $u_2(t, x) = u_1^{-\lambda}(t, x)$.

3.4.2. Técnica de las transformadas de Laplace y de Fourier: soluciones acopladas.

Una vez más, empleando los resultados del Teorema 3.2.1 podemos deducir la expresión de las soluciones fundamentales u_1^* y u_2^* del sistema de ecuaciones de componentes

acopladas (3.3.17) y (3.3.18) junto con las condiciones iniciales y de contorno (3.3.19) y (3.3.20) cuando $g(x) = \delta(x)$.

Corolario 3.4.2 *Dado el problema de Cauchy (3.3.19), (3.3.20) para el sistema de ecuaciones (3.3.17), (3.3.18), con $g(x) = \delta(x)$ y $g \in \mathcal{S}'$, las soluciones $u_1^*(t, x) \in \mathcal{LF}$ y $u_2^*(t, x) \in \mathcal{LF}$ están dadas por*

$$u_1^*(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{2\alpha, 1}(-\lambda^2 k^2 t^{2\alpha}) e^{-ikx} dk, \quad (3.4.23)$$

$$u_2^*(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (i\lambda k t^\alpha) E_{2\alpha, \alpha+1}(-\lambda^2 k^2 t^{2\alpha}) e^{-ikx} dk, \quad (3.4.24)$$

para $0 < \alpha \leq 1$, a condición de que las integrales (3.3.21) y (3.3.22) existan.

Demostración. Gracias a la propiedad (1.2.97) podemos escribir $G(k) = 1$ en (3.3.21) y (3.3.22), obteniendo así las soluciones fundamentales (3.4.23) y (3.4.24). ■

Cuando $\alpha \neq 1$, también conocemos una forma explícita para las soluciones fundamentales u_1^* y u_2^* .

Corolario 3.4.3 *Las soluciones fundamentales del problema (3.3.19), (3.3.20) para el sistema de ecuaciones (3.3.17) y (3.3.18) con $g(x) = \delta(x)$, cuando $\alpha \neq 1$, toman la forma*

$$u_1^*(t, x) = \frac{1}{2|\lambda|t^\alpha} W\left(-\frac{|x|}{|\lambda|t^\alpha}; -\alpha, 1 - \alpha\right), \quad (3.4.25)$$

y

$$u_2^*(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2|\lambda|t^\alpha} W\left(-\frac{|x|}{|\lambda|t^\alpha}; -\alpha, 1 - \alpha\right) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{1}{2|\lambda|t^\alpha} W\left(-\frac{|x|}{|\lambda|t^\alpha}; -\alpha, 1 - \alpha\right) & x < 0 \end{cases}, \quad (3.4.26)$$

para $\lambda > 0$, y

$$u_2^*(t, x) = \begin{cases} -\frac{1}{2|\lambda|t^\alpha} W\left(-\frac{|x|}{|\lambda|t^\alpha}; -\alpha, 1 - \alpha\right) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{1}{2|\lambda|t^\alpha} W\left(-\frac{|x|}{|\lambda|t^\alpha}; -\alpha, 1 - \alpha\right) & x < 0 \end{cases}, \quad (3.4.27)$$

para $\lambda < 0$.

Demostración. Las soluciones u_1^* y u_2^* , en las formas (3.4.25) y (3.4.26), (3.4.27) son obtenidas de modo inmediato si se aplican las relaciones (3.2.1) y (3.2.2), teniendo en cuenta las expresiones (3.4.4) y (3.4.5) de la solución $u_1(t, x) = u_1^\lambda(t, x)$ y que $u_2(t, x) = u_1^{-\lambda}(t, x)$. ■

Observación 3.4.2 *Es importante resaltar que la función u_1^* definida por (3.4.25) es continua en x , contrariamente a la solución u_1 dada por las expresiones (3.4.4) y (3.4.5), que presenta una discontinuidad en $x = 0$. Además, la solución (3.4.25) coincide exactamente con la solución fundamental (2.2.10) del problema de Cauchy (2.2.8) para la ecuación de difusión fraccionaria en el tiempo con derivada de Caputo (2.2.1), que hemos visto ser una distribución de probabilidad en x bilateral y simétrica con respecto del origen.*

En particular, recordando la relación (2.2.13) que se ha obtenido para la solución fundamental (2.2.10); utilizando la identidad (1.3.19), se puede afirmar que, cuando $1/2 \leq \alpha < 1$, cada rama de la solución fundamental $u_1^(t, x)$ dada por la expresión (3.4.25) resulta proporcional en x a la rama positiva de una distribución de Lévy estable. Por el contrario, la solución u_2^* , que tiene las formas (3.4.26) y (3.4.27), nunca podrá ser una distribución de probabilidad debido a que no es una función no negativa.*

3.4.3. Técnica de la transformada de Laplace

Esta sección pretende ilustrar como también sería posible solucionar el problema de valores iniciales (3.4.1) aplicando únicamente el método de la transformada de Laplace y así buscar la solución en el espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}$ de las funciones para las cuales existe la transformada de Laplace con respecto al tiempo t , para cualquier $x \in \mathbb{R}$ fijo.

Consideramos entonces el problema de Cauchy (3.4.1) y buscamos su solución fundamental aplicando la transformada de Laplace (1.2.68). Utilizando la fórmula (1.2.72) que proporciona la transformada de Laplace de la derivada parcial fraccionaria de Caputo (1.2.46) cuando $0 < \alpha < 1$, y la fórmula conocida para la derivada ordinaria cuando $\alpha = 1$, resulta:

$$s^\alpha(\mathcal{L}_t u)(s, x) - s^{\alpha-1}\delta(x) = \lambda \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{L}_t u)(s, x). \quad (3.4.28)$$

En particular, cuando $x \neq 0$, la ecuación (3.4.28) se reduce a la ecuación diferencial ordinaria

$$s^\alpha(\mathcal{L}_t u)(s, x) = \lambda \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{L}_t u)(s, x), \quad (3.4.29)$$

cuya solución general es del tipo

$$(\mathcal{L}_t u)(s, x) = \tau(s) \exp\left(\frac{s^\alpha x}{\lambda}\right),$$

donde $\tau(s)$ es una función de s que quedará determinada imponiendo las condiciones de contorno.

En este contexto resulta $Re(s) > 0$, y los valores principales de la función s^α (analítica en el semiplano derecho complejo) están elegidos de forma que resulte $s^\alpha > 0$ en el caso de valores de α reales.

Volviendo a la determinación del termino $\tau(s)$, recordamos que buscamos soluciones *localizadas*; es decir, tienen que cumplirse las condiciones de contorno:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (\mathcal{L}_t u)(s, x) = 0$$

y esto implica que resulte:

$$(\mathcal{L}_t u)(s, x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \tau(s) \exp\left(\frac{s^\alpha x}{\lambda}\right) & x < 0 \end{cases}, \quad (3.4.30)$$

para $\lambda > 0$, y

$$(\mathcal{L}_t u)(s, x) = \begin{cases} \tau(s) \exp\left(\frac{s^\alpha x}{\lambda}\right) & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad (3.4.31)$$

para $\lambda < 0$.

Si ahora calculamos la integral en \mathbb{R} de la expresión (3.4.28), utilizando el hecho de que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$, y que nuestra solución es una función localizada, obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^\alpha (\mathcal{L}_t u)(s, x) dx = s^{\alpha-1}$$

y esta igualdad se cumple si

$$\tau(s) = \begin{cases} \frac{s^{\alpha-1}}{\lambda} & \lambda > 0 \\ -\frac{s^{\alpha-1}}{\lambda} & \lambda < 0 \end{cases}. \quad (3.4.32)$$

Ahora la solución fundamental del problema (3.4.1) en términos de la transformada de Laplace inversa, está dada por

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} (\mathcal{L}_t u)(s, x) ds, \quad (\gamma \in \mathbb{R}), \quad (3.4.33)$$

y, sustituyendo en ella las fórmulas (3.4.30) y (3.4.31) junto con (3.4.32), llegamos a escribir la solución del problema (3.4.1) cuando $x \neq 0$:

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ -\frac{i}{2\pi\lambda} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} s^{\alpha-1} e^{s^\alpha x/\lambda} ds & x < 0 \end{cases} \quad (3.4.34)$$

para $\lambda > 0$, mientras que, para $\lambda < 0$

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{i}{2\pi\lambda} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} s^{\alpha-1} e^{s^\alpha x/\lambda} ds & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}. \quad (3.4.35)$$

Como cabía esperar, estas fórmulas son idénticas a las expresiones (3.4.8) y (3.4.9) de la sección anterior, obtenidas con la técnica de las transformadas de Fourier y de Laplace, y por lo tanto conducen a las mismas soluciones fundamentales (3.4.4), (3.4.5) del problema (3.4.1).

3.5. Solución del problema de Cauchy con derivadas fraccionarias en el tiempo y en el espacio

3.5.1. Soluciones desacopladas

En esta sección se analiza un problema de Cauchy en el que ambas derivadas, en el tiempo y en el espacio, son de tipo fraccionario.

En concreto se busca la solución del problema de Cauchy (3.1.18), (3.1.19) en el espacio $\mathcal{L}\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{L}(\mathbb{R}_+) \times \bar{\mathcal{S}}$, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$; donde $\bar{\mathcal{S}}$, definido en (1.2.88), es la ampliación del espacio de Schwartz \mathcal{S} dado en (1.2.80), en el cual se puede definir la fórmula de la transformada de Fourier de la derivada fraccionaria de Liouville de orden β , para todo $\beta > 0$.

Teorema 3.5.1 *Dado el problema de Cauchy (3.1.18), (3.1.19), con $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $G(k) = (\mathcal{F}_x g)(k)$, su solución $u(t, x) \in \mathcal{L}\bar{\mathcal{S}}$ está dada por*

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} s^{\alpha-1} ds \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(k)}{s^\alpha - \lambda(-ik)^\beta} e^{-ikx} dk, \quad (\gamma \in \mathbb{R}), \quad (3.5.1)$$

o, en la forma equivalente,

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(k) E_{\alpha,1}(\lambda(-ik)^\beta t^\alpha) e^{-ikx} dk, \quad (3.5.2)$$

a condición de que las integrales (3.5.1) y (3.5.2) existan.

Demostración. Si aplicamos las expresiones (1.2.68) y (1.2.76) a la ecuación (3.1.18) y utilizamos la fórmula (1.2.72) que proporciona la transformada de Laplace de la derivada parcial fraccionaria de Caputo (1.2.46) cuando $0 < \alpha < 1$, y la fórmula conocida para la derivada usual cuando $\alpha = 1$; entonces, teniendo en cuenta la condición $u(0+, x) = g(x)$ y la fórmula (1.2.87) de la transformada de Fourier de la derivada de Liouville de orden $\beta > 0$, obtenemos la siguiente representación para $\hat{u}(s, k)$ definida en (3.3.3):

$$\hat{u}(s, k) = \frac{s^{\alpha-1} G(k)}{s^\alpha - \lambda(-ik)^\beta}. \quad (3.5.3)$$

Invirtiendo las transformadas de Laplace y de Fourier a través de las fórmulas (1.2.69) y (1.2.77), obtenemos la solución del problema (3.1.18), (3.1.19) en la forma (3.5.1).

Si al aplicar la transformada de Laplace inversa a la ecuación (3.5.3), se utiliza la relación (1.3.7) con $\mu = \lambda(-ik)^\beta$, $h = 0$, se obtiene

$$(\mathcal{F}_x u)(t, k) = E_{\alpha,1}(\lambda(-ik)^\beta t^\alpha) G(k), \quad (3.5.4)$$

que conduce a la expresión (3.5.2). ■

Si también la función $g(x)$ pertenece al espacio $\bar{\mathcal{S}}$, entonces la fórmula (3.5.2) puede escribirse en forma explícita mediante la función especial de Mittag-Leffler.

Corolario 3.5.1 Sea $g(x) \in \bar{\mathcal{S}}$. Entonces, la solución $u(t, x) \in \mathcal{L}\bar{\mathcal{S}}$ del problema de Cauchy (3.1.18), (3.1.19) toma la forma

$$u(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} ({}^L D_x^{\beta j} g)(x), \quad (3.5.5)$$

a condición de que la serie en (3.5.5) converja para todo $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

Demostración. Teniendo en cuenta la representación (1.3.4) e intercambiando en (3.5.2) la integración con el sumatorio (lo que es posible gracias a la convergencia uniforme de la serie que representa la función de Mittag-Leffler), se puede escribir

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda(-ik)^{\beta} t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} \right] G(k) e^{-ikx} dk = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-ik)^{\beta j} G(k) e^{-ikx} dk. \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Recordando ahora la fórmula (1.2.87) de la transformada de Fourier de la derivada de Liouville de orden $\beta j > 0$ de una función en el espacio $\bar{\mathcal{S}}$, deducimos la expresión (3.5.5) para la solución $u(t, x)$ del problema (3.1.18), (3.1.19). ■

Cuando $g(x) = \delta(x)$ es una función generalizada definida en $\bar{\mathcal{S}}'$ y tal que $G(k) = 1$ debido a la propiedad (1.2.97), la solución fundamental del problema (3.1.18), (3.1.19) toma las siguientes formas:

Corolario 3.5.2 La solución fundamental $u(t, x) \in \mathcal{L}\bar{\mathcal{S}}$ del problema (3.1.18), (3.1.19) cuando $g(x) = \delta(x) \in \bar{\mathcal{S}}'$, está dada por

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} s^{\alpha-1} ds \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s^\alpha - \lambda(-ik)^\beta} e^{-ikx} dk, \quad (\gamma \in \mathbb{R}), \quad (3.5.7)$$

o, en la forma equivalente,

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\alpha,1}(\lambda(-ik)^\beta t^\alpha) e^{-ikx} dk, \quad (3.5.8)$$

a condición de que las integrales (3.5.7) y (3.5.8) existan.

Se calculan ahora los momentos de la solución fundamental dada en el Corolario 3.5.2.

Teorema 3.5.2 Los momentos de la solución fundamental $u(t, x) \in \mathcal{L}\bar{\mathcal{S}}$ del problema (3.1.18), (3.1.19) cuando $g(x) = \delta(x) \in \bar{\mathcal{S}}'$, están dados por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx = 1, \quad (3.5.9)$$

cuando $n = 0$ y $\beta > 0$, mientras que, para $n \geq 1$, $\beta > 0$, resulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n u(t, x) dx = \begin{cases} \begin{matrix} 0 & n < \beta \\ \neq & n > \beta \end{matrix} & \text{si } \beta \neq r \\ \begin{matrix} 0 & n \neq rm \\ (-1)^{rm} (\lambda t^\alpha)^m \frac{\Gamma(rm+1)}{\Gamma(\alpha m+1)} & n = rm \end{matrix} & \text{si } \beta = r \end{cases}, \quad (3.5.10)$$

donde $r = 1, 2, 3, \dots$, $m = 1, 2, 3, \dots$

Demostración. Calculamos los momentos de la solución fundamental mediante la fórmula (2.3.24). A partir de la expresión (3.5.8), podemos escribir la siguiente relación:

$$(\mathcal{F}_x u)(t, k) = E_{\alpha,1} (\lambda(-ik)^\beta t^\alpha), \quad (3.5.11)$$

y sustituyendo este resultado en (2.3.24), tenemos, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n u(t, x) dx = (-i)^n \left[\frac{\partial^n}{\partial k^n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-ik)^{\beta j} (\lambda t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} \right]_{k=0},$$

y unos cálculos sencillos conducen a las expresiones (3.5.9) y (3.5.10). ■

Observación 3.5.1 Cuando $0 < \beta < 1$, sólo existe el momento nulo de la solución fundamental $u(t, x) \in \mathcal{LS}$ del problema (3.1.18), (3.1.19) cuando $g(x) = \delta(x) \in \bar{\mathcal{S}}'$, y vale 1.

Como hemos hecho previamente, para los desarrollos de la sección que sigue indicamos con $u_1(t, x) = u_1^\lambda(t, x)$ la solución del problema de Cauchy (3.1.18), (3.1.19) y con $u_2(t, x) = u_1^{-\lambda}(t, x)$ la solución del mismo problema (3.1.19) para la ecuación (3.1.18), pero esta vez con $-\lambda$ en lugar de λ .

3.5.2. Soluciones acopladas

Buscamos ahora las soluciones u_1^* y u_2^* del sistema de ecuaciones de componentes acopladas (3.1.12) y (3.1.13) cuando $D_t^\alpha = {}^C_0 D_t^\alpha$ y $D_x^\beta = {}^L_{-\infty} D_x^\beta$, es decir

$$({}^C_0 D_t^\alpha u_1^*)(t, x) + \lambda ({}^L_{-\infty} D_x^\beta u_2^*)(t, x) = 0, \quad (3.5.12)$$

$$({}^C_0 D_t^\alpha u_2^*)(t, x) + \lambda ({}^L_{-\infty} D_x^\beta u_1^*)(t, x) = 0, \quad (3.5.13)$$

$0 < \alpha \leq 1$, junto con las condiciones iniciales y de contorno (3.3.19), (3.3.20).

Aplicando una vez más las relaciones (3.2.1) y (3.2.2), teniendo en cuenta la expresión (3.5.2) de la solución $u_1 = u_1^\lambda$ y que $u_2 = u_1^{-\lambda}$, así como las propiedades (1.3.5) y (1.3.6) de la función de Mittag-Leffler, llegamos al siguiente resultado:

Corolario 3.5.3 Dado el problema de Cauchy (3.3.19), (3.3.20) para el sistema de ecuaciones (3.5.12), (3.5.13), con $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $G(k) = (\mathcal{F}_x g)(k)$, las soluciones $u_1^*(t, x) \in \mathcal{LS}$

y $u_2^*(t, x) \in \mathcal{LS}$ están dadas por

$$u_1^*(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(k) E_{2\alpha,1}(\lambda^2(-k^2)^\beta t^{2\alpha}) e^{-ikx} dk, \quad (3.5.14)$$

$$u_2^*(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-\lambda(-ik)^\beta t^\alpha) E_{2\alpha,\alpha+1}(\lambda^2(-k^2)^\beta t^{2\alpha}) G(k) e^{-ikx} dk, \quad (3.5.15)$$

a condición de que las integrales (3.5.14) y (3.5.15) existan.

En particular, las soluciones fundamentales del problema de Cauchy (3.3.19), (3.3.20) para el sistema de ecuaciones (3.5.12), (3.5.13), con $g(x) = \delta(x)$ y $g \in \mathcal{S}'$, son obtenidas a partir de las expresiones (3.5.14) y (3.5.15) sustituyendo $G(k) = 1$.

3.6. Problema de Cauchy con $\alpha = 1/2$ y $\beta = 1$

Empecemos con proporcionar las soluciones desacopladas del sistema de ecuaciones de componentes separadas (3.1.9) y (3.1.10) cuando $D_t^\alpha = {}^C_0D_t^{1/2}$, $D_x^\beta = \partial/\partial x$ y consideramos un problema de Cauchy determinado.

En concreto, dado el problema de Cauchy (3.1.20), (3.1.21) con $\alpha = 1/2$ y $g(x) = \delta(x)$:

$$({}^C_0D_t^{1/2}u)(t, x) = \lambda \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}, \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}), \quad (3.6.1)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(t, x) = 0, \quad u(0, x) = \delta(x), \quad (3.6.2)$$

su solución fundamental está dada por

$$u_1(t, x) = u_1^\lambda(t, x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \frac{1}{\lambda\sqrt{t\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda^2 t}\right) & x \leq 0 \end{cases}, \quad (3.6.3)$$

y

$$u_1(t, x) = u_1^\lambda(t, x) = \begin{cases} -\frac{1}{\lambda\sqrt{t\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda^2 t}\right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}, \quad (3.6.4)$$

para $\lambda > 0$ y $\lambda < 0$ respectivamente, de acuerdo con las expresiones (3.4.4) y (3.4.5), y teniendo en cuenta la propiedad (1.3.10), relativa a un valor particular de la función de Wright.

Además, sus momentos según la fórmula (3.4.17) están dados por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n u(t, x) dx = (-\lambda\sqrt{t})^n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma[(n+2)/2]} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.6.5)$$

Asimismo, la solución del problema (3.6.1) y (3.6.2) en el que se cambia λ por $-\lambda$ es la función $u_2^\lambda(t, x) = u_1^{-\lambda}(t, x)$.

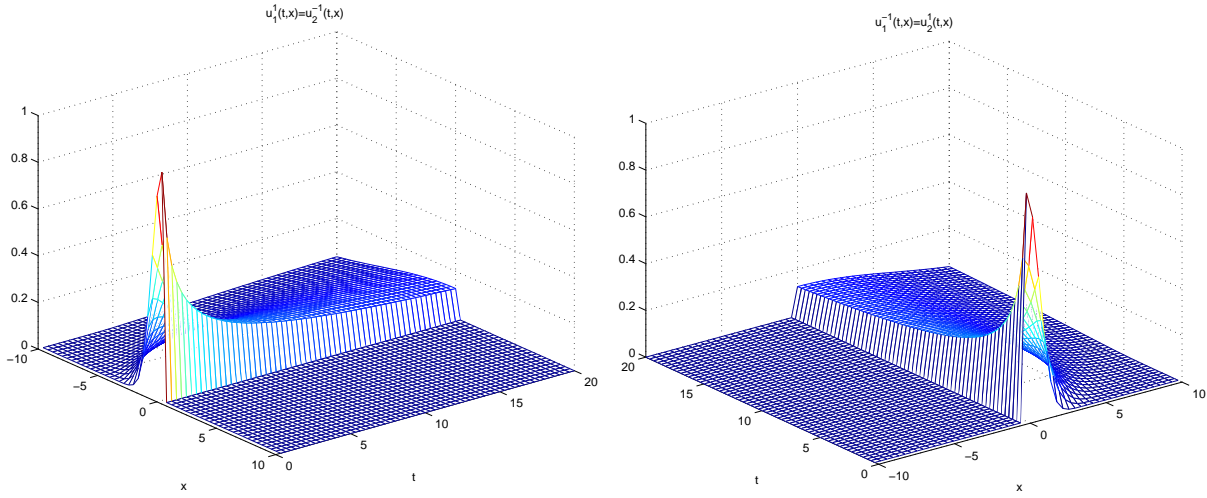


Fig. 3.1: Solución $u_1^\lambda(t, x) = u_2^{-\lambda}(t, x)$ cuando $\lambda = 1$ (izquierda) y $\lambda = -1$ (derecha).

Por otro lado, las soluciones desacopladas del sistema de ecuaciones

$$({}^C_0D_t^{1/2}u_1^*)(t, x) + \lambda \frac{\partial}{\partial x}u_2^*(t, x) = 0, \quad (3.6.6)$$

$$({}^C_0D_t^{1/2}u_2^*)(t, x) + \lambda \frac{\partial}{\partial x}u_1^*(t, x) = 0, \quad (3.6.7)$$

con $0 < \alpha \leq 1$, junto con las condiciones iniciales y de contorno (3.3.19), (3.3.20) con $g(x) = \delta(x)$, son

$$u_1^*(t, x) = \frac{1}{2|\lambda|\sqrt{t\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\lambda^2 t}}, \quad (3.6.8)$$

y

$$u_2^*(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2|\lambda|\sqrt{t\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\lambda^2 t}} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{1}{2|\lambda|\sqrt{t\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\lambda^2 t}} & x < 0 \end{cases}, \quad (3.6.9)$$

para $\lambda > 0$, y

$$u_2^*(t, x) = \begin{cases} -\frac{1}{2|\lambda|\sqrt{t\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\lambda^2 t}} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{1}{2|\lambda|\sqrt{t\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\lambda^2 t}} & x < 0 \end{cases}, \quad (3.6.10)$$

para $\lambda < 0$.

Volvemos a subrayar que la solución $u_1^*(t, x)$ dada en (3.6.8) coincide con la solución fundamental del problema de Cauchy (2.1.3) para la ecuación de difusión clásica (2.1.1).

En la Figura 3.1 se ha representado la solución $u_1^\lambda(t, x) = u_2^{-\lambda}(t, x)$ que toma las dos formas (3.6.3) y (3.6.4), para $\lambda = \pm 1$; en la Figura 3.2 tenemos la gráfica de la solución $u_1^*(t, x)$ dada en (3.6.8) para $|\lambda| = 1$; finalmente, la Figura 3.3 presenta la gráfica de la solución $u_2^{\lambda}(t, x)$ cuyas expresiones son (3.6.9) y (3.6.10), cuando $\lambda = \pm 1$.

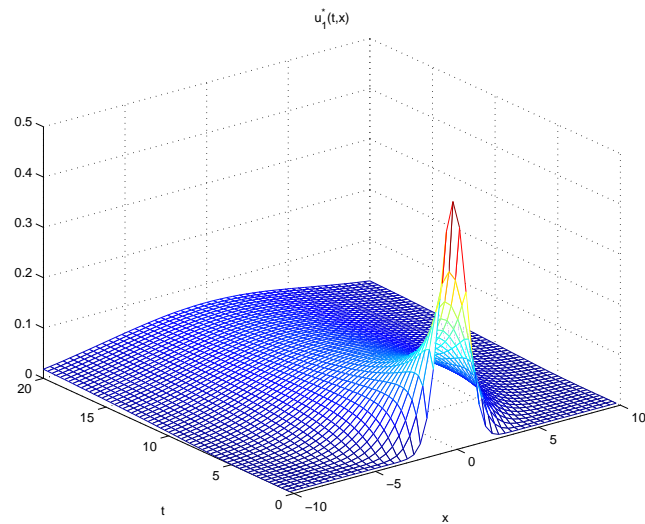


Fig. 3.2: Solución $u_1^*(t, x)$ cuando $|\lambda| = 1$.

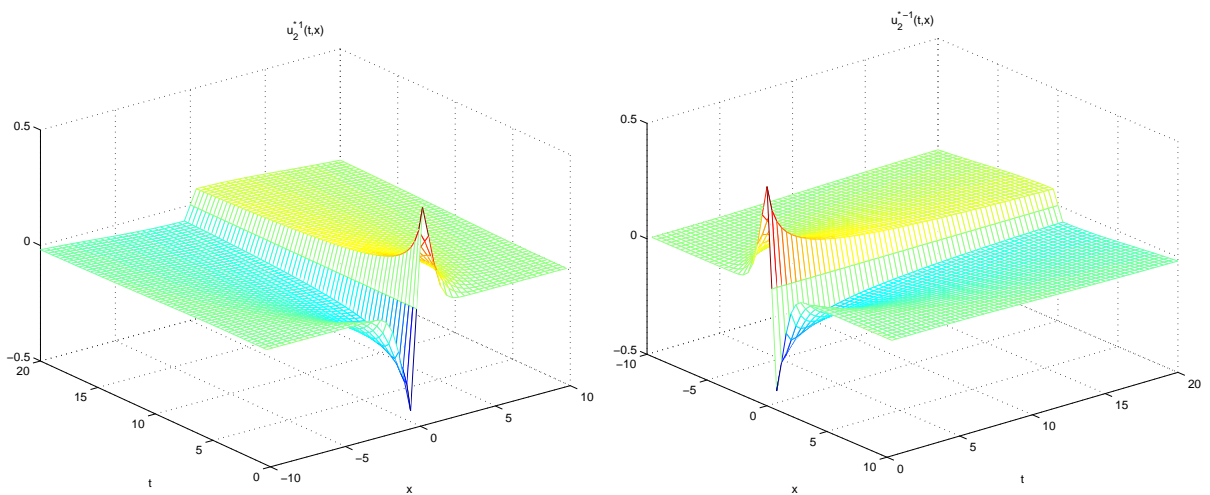


Fig. 3.3: Solución $u_2^{\lambda}(t, x)$ cuando $\lambda = 1$ (izquierda) y $\lambda = -1$ (derecha).

Se puede observar como las cuatro soluciones combinan de forma distinta las dos ramas, correspondientes a los semiejes positivo y negativo, de la solución $u(t, x) = \frac{1}{|\lambda|\sqrt{t\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\lambda^2 t}}$.

3.7. Problema del tipo de Cauchy generalizado

3.7.1. Soluciones desacopladas

En esta sección se estudia el problema de Cauchy generalizado (3.1.22), (3.1.23), buscando su solución en el espacio $\tilde{\mathcal{L}}\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{R}_+) \times \tilde{\mathcal{S}}$, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. El espacio $\tilde{\mathcal{S}}$ viene caracterizado por (1.2.88) y permite definir la fórmula de la transformada de Fourier de la derivada fraccionaria de Liouville de orden β , para todo $\beta > 0$; mientras que el espacio $\tilde{\mathcal{L}} = {}^{RL}\mathcal{L}^\alpha$, definido en (1.2.73), de las funciones $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$ para las cuales la función $({}^{RL}D_t^{\alpha-1}u)(t, x)$, dado $0 < \alpha \leq 1$, es exponencial en t de orden ν , según la definición de funciones exponenciales dada en (1.2.67), permite definir la transformada de Laplace de una derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden α , con $0 < \alpha \leq 1$.

La ecuación (3.1.22) representa una posible determinación de las ecuaciones (3.1.9) y (3.1.10) que componen el sistema de ecuaciones de componentes separadas (3.1.7) cuando $A = A_1$ y $B = B_1$ son las matrices especificadas en (3.1.8).

Enunciamos el primer resultado, relativo a la solución de la ecuación obtenida sustituyendo $\beta = 1$ en la formulación (3.1.22), es decir,

$$({}^{RL}D_t^\alpha u)(t, x) = \lambda \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}, 0 < \alpha \leq 1), \quad (3.7.1)$$

junto con las condiciones (3.1.23).

Teorema 3.7.1 *Dado el problema de Cauchy generalizado (3.7.1), (3.1.23), con $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $F(k) = (\mathcal{F}_x f)(k)$, su solución $u(t, x) \in \tilde{\mathcal{L}}\tilde{\mathcal{S}}$ está dada por*

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} ds \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(k)}{s^\alpha + i\lambda k} e^{-ikx} dk, \quad (\gamma \in \mathbb{R}), \quad (3.7.2)$$

o, en la forma equivalente,

$$u(t, x) = \frac{t^{\alpha-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\alpha, \alpha}(-i\lambda k t^\alpha) F(k) e^{-ikx} dk, \quad (3.7.3)$$

a condición de que las integrales (3.7.2) y (3.7.3) existan.

Demostración. Aplicamos las fórmulas (1.2.68) y (1.2.76) al problema del tipo Cauchy generalizado (3.7.1), (3.1.23) y obtenemos la siguiente relación para $\hat{u}(s, k)$ definida en (3.3.3):

$$\hat{u}(s, k) = \frac{F(k)}{s^\alpha + i\lambda k}, \quad (3.7.4)$$

utilizando la fórmula (1.2.71) que, cambiando la derivada ordinaria por la derivada parcial, proporciona la transformada de Laplace de la derivada de Riemann-Liouville (1.2.8) y también la fórmula (1.2.79) para la transformada de Fourier de la derivada ordinaria.

Invirtiendo las transformadas de Laplace y de Fourier, y utilizando el resultado (1.3.7), obtenemos la solución en las formas (3.7.2) y (3.7.3). ■

Una vez más, si el dato inicial $f(x)$ también pertenece al espacio $\bar{\mathcal{S}}$, entonces la expresión (3.7.3) puede escribirse en forma explícita mediante la función especial de Mittag-Leffler.

Corolario 3.7.1 *Sea $f(x) \in \bar{\mathcal{S}}$. Entonces, la solución $u(t, x) \in \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathcal{S}}$ del problema de Cauchy generalizado (3.7.1), (3.1.23), toma la forma*

$$u(t, x) = t^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j + \alpha)} f^{(j)}(x), \quad (3.7.5)$$

a condición de que la serie en (3.7.5) converja para todo $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

Demostración. Teniendo en cuenta la representación (1.3.4) y intercambiando en la expresión (3.7.3) el orden de la integración con el de la serie (lo que es posible gracias a la convergencia uniforme de la serie que representa la función de Mittag-Leffler), se puede escribir

$$u(t, x) = t^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j + \alpha)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-ik)^j F(k) e^{-ikx} dk. \quad (3.7.6)$$

Recordando ahora la fórmula (1.2.79) de la transformada de Fourier de la derivada de orden $j > 0$ de una función en el espacio $\bar{\mathcal{S}}$, deducimos la formulación (3.7.5) para la solución $u(t, x)$ del problema (3.7.1), (3.1.23). ■

Se puede aplicar, por ejemplo, el resultado del Corolario 3.7.1 al problema dado por (3.7.1) y (3.1.23), cuando $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $f(x) = e^{-\mu|x|}$, ($\mu > 0$), es decir:

$$\begin{aligned} ({}^{RL}_0 D_t^\alpha u)(t, x) &= \lambda \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(t, x) &= 0, \quad ({}^{RL}_0 D_t^{\alpha-1} u)(0+, x) = e^{-\mu|x|}, \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

y su solución está dada por

$$u(t, x) = e^{-\mu|x|} t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-(\text{sign}(x))\mu\lambda t^\alpha). \quad (3.7.8)$$

Observación 3.7.1 *Se verifica directamente que si $f(x)$ es una función analítica de $x \in \mathbb{R}$ y la serie en (3.7.5) converge, entonces la fórmula (3.7.5) representa la solución explícita del problema*

$$({}^{RL}_0 D_t^\alpha u)(t, x) = \lambda \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}), \quad ({}^{RL}_0 D_t^{\alpha-1} u)(0+, x) = f(x). \quad (3.7.9)$$

En particular, cuando $\alpha = 1$, la fórmula (3.7.5) coincide con la solución clásica $u(t, x) = f(x + \lambda t)$ del problema (3.3.15).

Escribimos ahora la solución fundamental del problema dado por (3.7.1) y (3.1.23), cuando $f(x) = \delta(x)$ está definida en el espacio \mathcal{S}' , dual topológico del espacio \mathcal{S} caracterizado en (1.2.80), y por lo tanto resulta $F(k) = 1$ en la expresión (3.7.3), gracias a la propiedad (1.2.97).

Corolario 3.7.2 *La solución fundamental $u(t, x) \in \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathcal{S}}$ del problema de Cauchy generalizado dado por (3.7.1) y (3.1.23) cuando $f(x) = \delta(x) \in \mathcal{S}'$, tiene la expresión*

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} ds \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s^\alpha + i\lambda k} e^{-ikx} dk, \quad (\gamma \in \mathbb{R}), \quad (3.7.10)$$

o la forma equivalente,

$$u(t, x) = \frac{t^{\alpha-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\alpha, \alpha}(-i\lambda k t^\alpha) e^{-ikx} dk, \quad (3.7.11)$$

a condición de que las integrales (3.7.10) y (3.7.11) existan.

Si se aplica el teorema de los residuos para evaluar la integral interna en la expresión (3.7.10), de forma análoga a lo hecho en la demostración del Teorema 3.4.1, se puede llegar a una forma explícita para la solución fundamental $u(t, x)$ cuando $\alpha \neq 1$ en términos de la función de Wright.

Teorema 3.7.2 *La solución fundamental $u(t, x) \in \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathcal{S}}$ del problema de Cauchy generalizado (3.7.1), (3.1.23) cuando $f(x) = \delta(x) \in \mathcal{S}'$, $\alpha \neq 1$, tiene la forma*

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \frac{1}{\lambda t} W\left(\frac{x}{\lambda t^\alpha}; -\alpha, 0\right) & x \leq 0 \end{cases}, \quad (3.7.12)$$

para $\lambda > 0$, y

$$u(t, x) = \begin{cases} -\frac{1}{\lambda t} W\left(\frac{x}{\lambda t^\alpha}; -\alpha, 0\right) & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad (3.7.13)$$

para $\lambda < 0$.

Los momentos de la solución fundamental, calculados aplicando la propiedad (2.3.24) junto con la expresión (3.7.11) que permite conocer su transformada de Fourier, y teniendo en cuenta la expresión en serie de la función de Mittag-Leffler (1.3.4), están dados en el siguiente teorema:

Teorema 3.7.3 *Los momentos de la solución fundamental $u(t, x) \in \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathcal{S}}$ del problema de Cauchy generalizado dado por (3.7.1) y (3.1.23) cuando $f(x) = \delta(x) \in \mathcal{S}'$, son los siguientes:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n u(t, x) dx = (-\lambda)^n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha n + \alpha)} t^{\alpha n + \alpha - 1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.7.14)$$

Se presenta ahora un resultado análogo del presentado en el Teorema 3.4.3, que muestra cómo cada una de las dos componentes del vector de soluciones $\psi(t, x)$ del sistema (3.1.7) es proporcional a una densidad de probabilidad en x , cuando el sistema (3.1.7) queda reducido a las ecuaciones (3.1.9) y (3.1.10), y cada una de ellas es especificada según la formulación (3.7.1) y solucionada junto con las condiciones (3.1.23) cuando $f(x) = \delta(x)$.

Teorema 3.7.4 *La función $w(t, x) = \Gamma(\alpha)/t^{\alpha-1}u(t, x)$, donde $u(t, x)$ es la solución fundamental del problema dado por (3.7.1) y (3.1.23) cuando $f(x) = \delta(x)$, verifica*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(t, x) dx = 1, \quad w(t, x) \geq 0 \quad \forall t > 0, \quad 0 < \alpha < 1,$$

por lo que resulta ser una densidad de probabilidad en x para todo $t > 0$ y $0 < \alpha < 1$.

Demostración. El Teorema 3.7.3 implica que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Para demostrar que la solución fundamental $u(t, x)$ del problema de Cauchy generalizado dado por (3.7.1) y (3.1.23), cuando $f(x) = \delta(x)$, es no negativa para $0 < \alpha < 1$, utilizaremos las formulas (3.7.12), (3.7.13) y la simbología ${}^{RL}u(t, x)$ para indicarla. Si denotamos con ${}^C u(t, x)$ la solución fundamental del problema (3.4.1), expresada a través de las fórmulas (3.4.4), (3.4.5); teniendo en cuenta la propiedad (1.3.12) para la función de Wright, resulta:

$${}^{RL}u(t, x) = \left(\frac{|x|^\alpha}{|\lambda| t} \right) {}^C u(t, x).$$

Utilizando ahora la no negatividad de ${}^C u(t, x)$ enunciada en el Teorema 3.4.3, queda pues también demostrada la no negatividad de ${}^{RL}u(t, x)$, por lo que la función normalizada $w(t, x) = (\Gamma(\alpha)/t^{\alpha-1}) {}^{RL}u(t, x)$ resulta ser una densidad de probabilidad en x para todo $t > 0$ y $0 < \alpha < 1$. ■

Volviendo a la expresión de la $u(t, x)$ en términos de las expresiones (3.7.12), (3.7.13), utilizando la relación (1.3.18) existente entre unas funciones de Wright particulares y una subclase de las densidades de Lévy estrictamente estables, se puede enunciar el siguiente teorema:

Teorema 3.7.5 *Sea $u(t, x)$ la solución fundamental del problema de Cauchy generalizado dado por (3.7.1) y (3.1.23) cuando $f(x) = \delta(x)$. Entonces la función normalizada $n(t, x) = |\lambda| u(t, x)$ resulta ser una densidad de probabilidad en t para todo $x \in \mathbb{R}$ y $0 < \alpha < 1$. En particular,*

$$n(t, x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \frac{|\lambda|^{1/\alpha}}{|x|^{1/\alpha}} p_\alpha \left(\frac{|\lambda|^{1/\alpha} t}{|x|^{1/\alpha}}; -\alpha \right) & x \leq 0 \end{cases}, \quad (3.7.15)$$

para $\lambda > 0$, y

$$n(t, x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{|\lambda|^{1/\alpha}}{|x|^{1/\alpha}} p_\alpha \left(\frac{|\lambda|^{1/\alpha} t}{|x|^{1/\alpha}}; -\alpha \right) & x \geq 0 \end{cases}, \quad (3.7.16)$$

para $\lambda < 0$, donde $p_\alpha(x; \theta)$ es una densidad de Lévy estrictamente estable cuya función característica está dada por la representación (1.2.117).

Observación 3.7.2 Obsérvese que la función $n(t, x)$ dada en las expresiones (3.7.15) y (3.7.16), en el semieje en el que resulta ser no nula coincide con la solución fundamental (2.3.32) del problema de propagación de las señales generalizado constituido por la ecuación (2.3.27) junto con las condiciones iniciales (2.3.28), (2.3.29) y (2.3.30).

Los resultados enunciados en esta sección para el problema general dado por (3.1.22) y (3.1.23) cuando $\beta = 1$, pueden extenderse al caso más general de $\beta > 0$.

Teorema 3.7.6 La solución $u(t, x) \in \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathcal{S}}$ del problema de Cauchy generalizado dado por (3.1.22) y (3.1.23), con $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $F(k) = (\mathcal{F}_x f)(k)$, tiene la expresión

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} ds \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(k)}{s^\alpha - \lambda(-ik)^\beta} e^{-ikx} dk \quad (\gamma \in \mathbb{R}), \quad (3.7.17)$$

o la forma equivalente,

$$u(t, x) = \frac{t^{\alpha-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) E_{\alpha, \alpha}(\lambda(-ik)^\beta t^\alpha) e^{-ikx} dk, \quad (3.7.18)$$

a condición de que las integrales (3.7.17) y (3.7.18) existan.

Cuando $f(x) \in \bar{\mathcal{S}}$, teniendo en cuenta la representación (1.3.4), intercambiando el orden de la integración y de la serie en la formulación (3.7.18), y recordando la fórmula (1.2.87) de la transformada de Fourier de la derivada de Liouville de orden $\beta j > 0$, una vez más, la solución general (3.7.18) puede ser reescrita en términos de una serie:

Corolario 3.7.3 Sea $f(x) \in \bar{\mathcal{S}}$. Entonces, la solución $u(t, x) \in \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathcal{S}}$ del problema de Cauchy generalizado dado por (3.1.22) y (3.1.23), toma la forma

$$u(t, x) = t^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j + \alpha)} ({}^L D_x^{\beta j} f)(x), \quad (3.7.19)$$

a condición de que la serie en (3.7.5) converja para todo $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

Si $f(x) = \delta(x) \in \bar{\mathcal{S}}'$ obtenemos la solución fundamental poniendo $F(k) = 1$ en las integrales (3.7.17) y (3.7.18), es decir:

Teorema 3.7.7 La solución fundamental $u(t, x) \in \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathcal{S}}$ del problema de Cauchy generalizado dado por (3.1.22) y (3.1.23) cuando $f(x) = \delta(x) \in \bar{\mathcal{S}}'$, tiene la forma

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} ds \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s^\alpha - \lambda(-ik)^\beta} e^{-ikx} dk \quad (\gamma \in \mathbb{R}) \quad (3.7.20)$$

o, equivalentemente,

$$u(t, x) = \frac{t^{\alpha-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(-ik)^{\beta} t^{\alpha}) e^{-ikx} dk, \quad (3.7.21)$$

a condición de que las integrales (3.7.20) y (3.7.21) existan.

Los momentos de la solución fundamental (3.7.21) están recogidos en el siguiente teorema, cuya demostración se omite por la estrecha similitud con los teoremas anteriores relativos al cálculo de los momentos (véase por ejemplo el Teorema 3.5.2).

Teorema 3.7.8 *Los momentos de la solución fundamental $u(t, x) \in \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathcal{S}}$ del problema (3.1.22), (3.1.23) cuando $f(x) = \delta(x) \in \bar{\mathcal{S}}'$, están dados por*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t, x) dx = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (3.7.22)$$

cuando $n = 0$ y $\beta > 0$, mientras que, para $n \geq 1$, $\beta > 0$, resulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n u(t, x) dx = \left\{ \begin{array}{ll} \begin{array}{l} 0 \quad n < \beta \\ \neq \quad n > \beta \end{array} & \text{si } \beta \neq r \\ \begin{array}{l} 0 \quad n \neq rm \\ (-1)^{rm} t^{\alpha-1} (\lambda t^{\alpha})^m \frac{\Gamma(rm+1)}{\Gamma(\alpha m + \alpha)} \quad n = rm \end{array} & \text{si } \beta = r \end{array} \right. , \quad (3.7.23)$$

donde $r = 1, 2, 3, \dots$ y $m = 1, 2, 3, \dots$

Observación 3.7.3 *Cuando $0 < \beta < 1$, el único momento que existe de la solución fundamental (3.7.21), es el de orden cero.*

Concluimos especificando la notación que vamos a emplear en la siguiente sección: indicamos con $u_1(t, x) = u_1^{\lambda}(t, x)$ la solución del problema de Cauchy generalizado (3.1.22), (3.1.23), y con $u_2(t, x) = u_1^{-\lambda}(t, x)$ la solución de este mismo problema (3.1.23) para la ecuación (3.1.22) cuando se sustituye λ por $-\lambda$.

3.7.2. Soluciones acopladas

Empleando una vez más los resultados del Teorema 3.2.1, vamos a obtener las soluciones u_1^* y u_2^* del sistema de ecuaciones de componentes acopladas (3.1.12) y (3.1.13) cuando $D_t^{\alpha} = {}^{RL}D_t^{\alpha}$ y $D_x^{\beta} = {}^L D_x^{\beta}$, es decir

$$({}^{RL}D_t^{\alpha} u_1^*)(t, x) + \lambda ({}^L D_x^{\beta} u_2^*)(t, x) = 0, \quad (3.7.24)$$

$$({}^{RL}D_t^{\alpha} u_2^*)(t, x) + \lambda ({}^L D_x^{\beta} u_1^*)(t, x) = 0, \quad (3.7.25)$$

$0 < \alpha \leq 1$, $\beta > 0$, junto con las condiciones iniciales y de contorno

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_1^*(t, x) = 0, \quad ({}^{RL}D_t^{\alpha-1} u_1^*)(0+, x) = f(x), \quad (3.7.26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_2^*(t, x) = 0, \quad ({}^{RL}D_t^{\alpha-1} u_2^*)(0+, x) = 0. \quad (3.7.27)$$

Corolario 3.7.4 Dado el problema de Cauchy generalizado (3.7.26), (3.7.27) para el sistema de ecuaciones (3.7.24), (3.7.25), con $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $F(k) = (\mathcal{F}_x f)(k)$, las soluciones $u_1^*(t, x) \in \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathcal{S}}$ y $u_2^*(t, x) \in \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathcal{S}}$ están dadas por

$$u_1^*(t, x) = \frac{t^{\alpha-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{2\alpha, \alpha}(\lambda^2(-ik)^{2\beta} t^{2\alpha}) F(k) e^{-ikx} dk, \quad (3.7.28)$$

$$u_2^*(t, x) = \frac{t^{2\alpha-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-\lambda(-ik)^\beta) E_{2\alpha, 2\alpha}(\lambda^2(-ik)^{2\beta} t^{2\alpha}) F(k) e^{-ikx} dk, \quad (3.7.29)$$

a condición de que las integrales (3.7.28) y (3.7.29) existan.

Demostración. Las expresiones (3.7.28) y (3.7.29) se deducen aplicando las relaciones (3.2.1) y (3.2.2) teniendo en cuenta la expresión (3.7.18) de la solución $u_1 = u_1^\lambda$ y que $u_2 = u_1^{-\lambda}$; también se han empleado las propiedades (1.3.5) y (1.3.6) de la función de Mittag-Leffler. ■

Observación 3.7.4 Es evidente que, solucionando el sistema de ecuaciones de Dirac fraccionarias (3.1.7) cuando $D_t^\alpha = {}^{RL}D_t^\alpha$ y $D_x^\beta = {}^L D_x^\beta$ y las matrices A y B son especificadas según las formas (3.1.8) ó (3.1.11), nos encontramos con una diferencia sustancial con respecto de lo que ocurriría cuando la derivada fraccionaria temporal era la de Caputo. En efecto, de entre todas las soluciones de este sistema, $u_1^\lambda(t, x)$, $u_2(t, x) = u_1^{-\lambda}(t, x)$, $u_1^*(t, x)$ y $u_2^*(t, x)$, cuyas expresiones son obtenidas en (3.7.18), (3.7.28) y (3.7.29), ninguna coincide con la solución dada por (2.3.4) ó (2.3.5); por esto, podemos suponer que los problemas de Cauchy generalizados (3.1.22)-(3.1.23) ó (3.7.24)-(3.7.25)-(3.7.26)-(3.7.27) no corresponden exactamente a la formulación del que sería el problema “raíz cuadrada” del problema de Cauchy generalizado (2.3.2)-(2.3.3) para la ecuación de difusión fraccionaria (2.3.1). Veremos el detalle de esta afirmación en la sección 3.9.

Cuando $\beta = 1$ y $f(x) = \delta(x)$, conocemos explícitamente las soluciones fundamentales del problema de Cauchy generalizado (3.7.26), (3.7.27) para el sistema de ecuaciones (3.7.24), (3.7.25), cuando $0 < \alpha < 1$.

Corolario 3.7.5 Las soluciones fundamentales del problema de Cauchy generalizado (3.7.26), (3.7.27) para el sistema de ecuaciones (3.7.24), (3.7.25) con $\beta = 1$ y $f(x) = \delta(x)$, cuando $0 < \alpha < 1$, toman la forma

$$u_1^*(t, x) = \frac{1}{2|\lambda|t} W\left(-\frac{|x|}{|\lambda|t^\alpha}; -\alpha, 0\right) = \frac{\alpha|x|}{2\lambda^2 t^{\alpha+1}} W\left(-\frac{|x|}{|\lambda|t^\alpha}; -\alpha, 1-\alpha\right), \quad (3.7.30)$$

para todo $\lambda \neq 0$ y

$$u_2^*(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2|\lambda|t} W\left(-\frac{|x|}{|\lambda|t^\alpha}; -\alpha, 0\right) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{1}{2|\lambda|t} W\left(-\frac{|x|}{|\lambda|t^\alpha}; -\alpha, 0\right) & x < 0 \end{cases}, \quad (3.7.31)$$

para $\lambda > 0$, y

$$u_2^*(t, x) = \begin{cases} -\frac{1}{2|\lambda|t} W\left(-\frac{|x|}{|\lambda|t^\alpha}; -\alpha, 0\right) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{1}{2|\lambda|t} W\left(-\frac{|x|}{|\lambda|t^\alpha}; -\alpha, 0\right) & x < 0 \end{cases}, \quad (3.7.32)$$

para $\lambda < 0$.

Demostración. Para obtener las soluciones u_1^* y u_2^* en las formas (3.7.30), (3.7.31) y (3.7.32) basta con aplicar las relaciones (3.2.1) y (3.2.2), teniendo en cuenta las expresiones (3.7.12) y (3.7.13) de la solución $u_1(t, x) = u_1^\lambda(t, x)$ y que $u_2(t, x) = u_1^{-\lambda}(t, x)$. ■

Observación 3.7.5 Obsérvese que la función $z_1(t, x) = 2|\lambda|u_1^*(t, x)$, con $u_1^*(t, x)$ dada en (3.7.30), coincide en el semieje positivo, así como en el negativo, con la solución fundamental (2.3.32) del problema de propagación de las señales generalizado constituido por la ecuación (2.3.27) junto con las condiciones iniciales (2.3.28), (2.3.29) y (2.3.30). Lo mismo ocurre con la función $z_2(t, x) = 2|\lambda|u_2^*(t, x)$, con $u_2^*(t, x)$ definida por (3.7.31) y (3.7.32), en el semieje en el que resulta ser no nula.

3.8. Problema del tipo de Cauchy generalizado con $\alpha = 1/2$ y $\beta = 1$

Buscamos primero las soluciones desacopladas del sistema de ecuaciones de componentes separadas (3.1.9) y (3.1.10) cuando $D_t^\alpha = {}^{RL}D_t^{1/2}$, $D_x^\beta = \partial/\partial x$, y consideramos un problema de Cauchy generalizado determinado.

En concreto, consideremos el Problema del tipo de Cauchy generalizado obtenido sustituyendo $\alpha = 1/2$ en el problema dado por (3.7.1) y (3.1.23) con $f(x) = \delta(x)$:

$$({}^{RL}D_t^{1/2}u)(t, x) = \lambda \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}), \quad (3.8.1)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(t, x) = 0, \quad ({}^{RL}D_t^{-1/2}u)(0+, x) = \delta(x), \quad (3.8.2)$$

donde $({}^{RL}D_t^{-1/2}u)(0+, x) = ({}_0I_t^{1/2}u)(0+, x)$, con $({}_0I_t^\alpha u)(t, x)$ integral parcial fraccionaria de Riemann-Liouville definida en (1.2.6). De acuerdo con las expresiones (3.7.12) y (3.7.13), y utilizando la propiedad (1.3.10) de la función de Wright, la solución fundamental que se obtiene es la siguiente:

$$u_1(t, x) = u_1^\lambda(t, x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ -\frac{xt^{-3/2}}{2\lambda^2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda^2t}\right) & x \leq 0 \end{cases} \quad (3.8.3)$$

y

$$u_1(t, x) = u_1^\lambda(t, x) = \begin{cases} \frac{xt^{-3/2}}{2\lambda^2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda^2t}\right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (3.8.4)$$

para $\lambda > 0$ y $\lambda < 0$, respectivamente.

A partir de la expresión (3.7.14) derivamos los momentos de la solución fundamental

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n u_1(t, x) dx = (-\lambda)^n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma((n+1)/2)} t^{(n-1)/2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.8.5)$$

Los resultados (3.8.3) y (3.8.4) representan la solución explícita del sistema (3.1.5), junto con las condiciones (3.1.23), cuando $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$, si asumimos $\partial_t^{1/2} = {}^{RL}D_t^{1/2}$.

Observación 3.8.1 De acuerdo con lo obtenido en la expresión (3.7.18), la solución fundamental del problema dado por (3.1.22), (3.1.23) con $\alpha = 1/2$, es decir,

$$({}^{RL}D_t^{1/2}u)(t, x) = \lambda({}^L D_x^\beta u)(t, x) \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}, \beta > 0, \lambda \neq 0), \quad (3.8.6)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(t, x) = 0, \quad ({}^{RL}D_t^{-1/2}u)(0+, x) = \delta(x), \quad (3.8.7)$$

vale

$$u_1(t, x) = u_1^\lambda(t, x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{1/2, 1/2} \left(\lambda(-ik)^\beta \sqrt{t} \right) e^{-ikx} dk. \quad (3.8.8)$$

Asimismo, la solución del problema (3.8.1) y (3.8.2) en el que se cambia λ por $-\lambda$ es la función $u_2^\lambda(t, x) = u_1^{-\lambda}(t, x)$.

Por otro lado, las soluciones desacopladas del sistema de ecuaciones

$$({}^{RL}D_t^{1/2}u_1^*)(t, x) + \lambda \frac{\partial}{\partial x} u_2^*(t, x) = 0, \quad (3.8.9)$$

$$({}^{RL}D_t^{1/2}u_2^*)(t, x) + \lambda \frac{\partial}{\partial x} u_1^*(t, x) = 0, \quad (3.8.10)$$

junto con las condiciones iniciales y de contorno (3.7.26), (3.7.27) con $\alpha = 1/2$ y $f(x) = \delta(x)$, son

$$u_1^*(t, x) = \frac{|x|t^{-3/2}}{4\lambda^2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda^2t}\right), \quad (3.8.11)$$

y

$$u_2^*(t, x) = \begin{cases} \frac{|x|t^{-3/2}}{4\lambda^2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda^2t}\right) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{|x|t^{-3/2}}{4\lambda^2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda^2t}\right) & x < 0 \end{cases}, \quad (3.8.12)$$

para $\lambda > 0$, y

$$u_2^*(t, x) = \begin{cases} -\frac{|x|t^{-3/2}}{2\lambda^2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda^2t}\right) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{|x|t^{-3/2}}{2\lambda^2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda^2t}\right) & x < 0 \end{cases}, \quad (3.8.13)$$

para $\lambda < 0$.

3.9. Relación entre las soluciones del sistema de ecuaciones de Dirac fraccionarias y la solución de la ecuación de difusión fraccionaria

En esta sección se pretende reunir aquellos resultados de las secciones anteriores que permitan establecer la relación existente entre las soluciones del sistema (3.1.7), que representa un tipo de raíz cuadrada de la ecuación de difusión fraccionaria (3.1.6), y la solución de esta última.

Una vez más, se demuestra que se puede extender a la gran mayoría de las generalizaciones fraccionarias los resultados conocidos para los caso clásico incluidos en ellas. Para aclarar esta afirmación, vamos a presentar el resultado clásico concreto al cual nos referimos y cuya validez se pretende demostrar para el equivalente fraccionario.

Es bien conocido que, cuando se define el siguiente problema de Cauchy para la ecuación de ondas unidimensional, con velocidad inicial nula,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t, x) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t, x) = 0 \\ u(0, x) = \varphi(x) \\ u_t(0, x) = 0 \end{cases}, \quad (3.9.1)$$

su solución general está dada por la fórmula de D'Alembert

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)]. \quad (3.9.2)$$

Desde el punto de vista físico, este resultado se interpreta como sigue: la configuración en el tiempo t de una vibración creada por una deformación inicial es la superposición de dos ondas de forma idéntica a la inicial y que viajan en direcciones opuestas.

Si se descompone el operador de ondas de la forma siguiente,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t, x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t, x), \quad (3.9.3)$$

entonces se puede ver como $\varphi(x + ct)$, que representa la onda que se mueve hacia la izquierda, es la solución de

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t, x) = 0 \\ u(0, x) = \varphi(x) \end{cases},$$

mientras que $\varphi(x - ct)$, es decir, la onda que se mueve hacia la derecha, es la solución de

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t, x) = 0 \\ u(0, x) = \varphi(x) \end{cases},$$

y la solución de D'Alembert es una combinación lineal de las dos soluciones con coeficientes iguales y de valor $1/2$.

Pasamos ahora a considerar la ecuación de difusión fraccionaria (3.1.6) con $\beta = 1$, que reescribimos de la forma

$$\left(D_t^{2\alpha} - \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t, x) = 0 \quad (t > 0, -\infty < x < \infty, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad (3.9.4)$$

con $0 < \alpha \leq 1$, y que vemos que coincide con la ecuación de ondas cuando $\alpha = 1$. Si descomponemos el operador que aparece en (3.9.4) en sus raíces cuadradas, de forma equivalente a lo que se ha hecho en (3.9.3) para la ecuación de ondas y como hemos visto en la introducción de este capítulo, entonces se obtiene un sistema de ecuaciones del tipo de Dirac generalizadas (3.1.7), con $\beta = 1$. Se quiere demostrar que la solución general $u(t, x)$ de la ecuación de difusión fraccionaria (3.9.4), función de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ en x , resulta ser combinación lineal de las dos soluciones $u_1(t, x)$ y $u_2(t, x)$ del sistema (3.1.7) con $\beta = 1$, de forma análoga a lo visto para la ecuación de ondas.

Como ya se ha puesto en evidencia varias veces a lo largo de este capítulo, el sistema de ecuaciones de evolución-difusión fraccionarias del tipo de Dirac (3.1.7) tiene dos expresiones posibles, no equivalentes, dependiendo de la forma que toman las matrices de Pauli A y B . En particular, cuando $A = A_1$ y $B = B_1$ son las matrices definidas en (3.1.8), entonces tenemos el sistema de ecuaciones de componentes separadas (3.1.9) y (3.1.10) que, cuando $\beta = 1$ reescribimos como

$$D_t^\alpha u_1(t, x) - \lambda \frac{\partial}{\partial x} u_1(t, x) = 0, \quad (3.9.5)$$

$$D_t^\alpha u_2(t, x) + \lambda \frac{\partial}{\partial x} u_2(t, x) = 0, \quad (3.9.6)$$

donde $0 < \alpha \leq 1$. Por otro lado, la elección de las matrices $A = A_2$ y $B = B_2$ definidas en (3.1.11) conduce al sistema de ecuaciones de componentes separadas (3.1.12) y (3.1.13) que, cuando $\beta = 1$, volvemos a escribir de la siguiente manera:

$$D_t^\alpha u_1^*(t, x) + \lambda \frac{\partial}{\partial x} u_2^*(t, x) = 0, \quad (3.9.7)$$

$$D_t^\alpha u_2^*(t, x) + \lambda \frac{\partial}{\partial x} u_1^*(t, x) = 0, \quad (3.9.8)$$

con $0 < \alpha \leq 1$.

En la Sección 3.3 se ha solucionado el problema de Cauchy (3.1.21):

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_1(t, x) = 0, \quad u_1(0+, x) = g(x)$$

para la ecuación (3.9.5) con derivada parcial fraccionaria en el tiempo de Caputo $D_t^\alpha = {}_0^C D_t^\alpha$, es decir, la ecuación (3.1.20). En concreto, el Teorema 3.3.1 proporciona su solución general, que indicamos con ${}^C u_1(t, x; \alpha)$, en términos de su transformada de Fourier inversa (3.3.2):

$${}^C u_1(t, x; \alpha) = {}^C u_1^\lambda(t, x; \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\alpha,1}(-i\lambda k t^\alpha) G(k) e^{-ikx} dk, \quad (3.9.9)$$

donde $E_{\alpha,\beta}(z)$ es la función de Mittag-Leffler definida en (1.3.4) y $G(k)$ es la transformada de Fourier de la condición inicial $g(x)$.

Asimismo, es inmediato ver que la solución ${}^C u_2(t, x; \alpha)$ de la ecuación (3.9.6) con derivada parcial fraccionaria en el tiempo de Caputo $D_t^\alpha = {}_0^C D_t^\alpha$ y junto con el problema de Cauchy (3.1.21) para la función u_2 , vale ${}^C u_2^\lambda(t, x; \alpha) = {}^C u_1^{-\lambda}(t, x; \alpha)$, es decir:

$${}^C u_2(t, x; \alpha) = {}^C u_2^\lambda(t, x; \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\alpha,1}(i\lambda k t^\alpha) G(k) e^{-ikx} dk. \quad (3.9.10)$$

Por otro lado, las soluciones acopladas de las ecuaciones (3.9.7) y (3.9.8) con derivada parcial fraccionaria en el tiempo de Caputo $D_t^\alpha = {}^C_0D_t^\alpha$, es decir, (3.3.17) y (3.3.18), junto con el problema de Cauchy (3.3.19) y (3.3.20):

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_1^*(t, x) = 0, \quad u_1^*(0+, x) = g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_2^*(t, x) = 0, \quad u_2^*(0+, x) = 0,$$

son proporcionadas por las fórmulas (3.3.21) y (3.3.22) del Corolario 3.3.2. En concreto, resulta:

$${}^C u_1^*(t, x; \alpha) = \frac{{}^C u_1(t, x; \alpha) + {}^C u_2(t, x; \alpha)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{2\alpha, 1}(-\lambda^2 k^2 t^{2\alpha}) G(k) e^{-ikx} dk, \quad (3.9.11)$$

$${}^C u_2^*(t, x; \alpha) = \frac{{}^C u_2(t, x; \alpha) - {}^C u_1(t, x; \alpha)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (i\lambda k t^\alpha) E_{2\alpha, \alpha+1}(-\lambda^2 k^2 t^{2\alpha}) G(k) e^{-ikx} dk. \quad (3.9.12)$$

Recordamos ahora que, de entre los resultados ya conocidos en la literatura y que se han recogido en la Sección 2.2 del Capítulo 2, está la solución del problema de Cauchy (2.2.2), (2.2.4):

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = 0, \quad t > 0; \quad u(0+, x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.9.13)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right]_{t=0} = 0, \quad (3.9.14)$$

para la ecuación de difusión fraccionaria (3.9.4) con derivada de Caputo en el tiempo; es decir (2.2.1) si en ella cambiamos α , donde $0 < \alpha \leq 2$, por 2α con $0 < \alpha \leq 1$. En términos de su transformada de Fourier inversa, dicha solución está dada por la expresión (2.2.5), que escribimos como:

$${}^C u^D(t, x; \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{2\alpha, 1}(-\lambda^2 k^2 t^{2\alpha}) G(k) e^{-ikx} dk. \quad (3.9.15)$$

Resaltamos que en el caso de $0 < \alpha \leq 1/2$, ya que la ecuación de difusión fraccionaria (3.9.4) con derivada de Caputo en el tiempo resulta ser de tipo parabólico, es necesaria únicamente la condición (3.9.13); mientras que hay que proporcionar otra condición inicial cuando $1/2 < \alpha \leq 1$ a causa del orden de la derivada temporal y el carácter hiperbólico de la ecuación.

Entonces, se puede escribir el siguiente Teorema.

Teorema 3.9.1 *La solución del problema de Cauchy (2.2.2), (2.2.4) para la ecuación de difusión fraccionaria (3.9.4) con derivada de Caputo en el tiempo $D_t^\alpha = {}^C_0D_t^\alpha$, queda expresada por la siguiente Fórmula de D'Álembert fraccionaria:*

$${}^C u^D(t, x; \alpha) = \frac{1}{2} [{}^C u_1(t, x; \alpha) + {}^C u_2(t, x; \alpha)], \quad (3.9.16)$$

para todo $0 < \alpha \leq 1$, siendo ${}^C u_1(t, x; \alpha)$ y ${}^C u_2(t, x; \alpha)$ las soluciones del problema de Cauchy (3.1.21) para las ecuaciones fraccionarias de evolución del tipo de Dirac (3.9.5) y (3.9.6) con derivada parcial fraccionaria en el tiempo de Caputo $D_t^\alpha = {}^C_0 D_t^\alpha$.

También resulta

$${}^C u^D(t, x; \alpha) = {}^C u_1^*(t, x; \alpha) = {}^C u_2^*(t, x; \alpha) + {}^C u_1(t, x; \alpha), \quad (3.9.17)$$

para todo $0 < \alpha \leq 1$ y donde ${}^C u_1^*(t, x; \alpha)$ y ${}^C u_2^*(t, x; \alpha)$ son las soluciones del problema de Cauchy (3.3.19) y (3.3.20) para las ecuaciones de evolución fraccionaria del tipo de Dirac (3.3.17) y (3.3.18).

Cambiamos ahora el tipo de derivada fraccionaria temporal que aparece en las ecuaciones (3.9.5), (3.9.6), (3.9.7) y (3.9.8), pasando de la definición de Caputo a la de Riemann-Liouville; analizamos lo que ocurre con las soluciones de dichas ecuaciones y la relación de éstas con la solución de la ecuación de difusión fraccionaria en la que aparece el mismo operador temporal.

En la Sección 3.7 se ha estudiado el problema de Cauchy generalizado (3.1.23):

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_1(t, x) = 0, \quad ({}^{RL}_0 D_t^{\alpha-1} u_1)(0+, x) = f(x), \quad (3.9.18)$$

donde $0 < \alpha \leq 1$, para la ecuación (3.9.5) con derivada parcial fraccionaria en el tiempo de Riemann-Liouville $D_t^\alpha = {}^{RL}_0 D_t^\alpha$, es decir, la ecuación (3.7.1). En el Teorema 3.7.1 se encuentra que su solución ${}^{RL} u_1(t, x; \alpha)$, es proporcionada en términos de su transformada de Fourier inversa por la fórmula (3.7.3), es decir:

$${}^{RL} u_1(t, x; \alpha) = {}^{RL} u_1^\lambda(t, x; \alpha) = \frac{t^{\alpha-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\alpha, \alpha}(-i\lambda k t^\alpha) F(k) e^{-ikx} dk. \quad (3.9.19)$$

Con lo cual, la solución de este mismo problema para la ecuación (3.9.6) con derivada parcial fraccionaria en el tiempo de Riemann-Liouville $D_t^\alpha = {}^{RL}_0 D_t^\alpha$, será ${}^{RL} u_2(t, x; \alpha) = {}^{RL} u_1^{-\lambda}(t, x; \alpha)$ y vale

$${}^{RL} u_2(t, x; \alpha) = {}^{RL} u_2^\lambda(t, x; \alpha) = \frac{t^{\alpha-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\alpha, \alpha}(i\lambda k t^\alpha) F(k) e^{-ikx} dk. \quad (3.9.20)$$

También, a partir del Corolario 3.7.4 se deduce que las soluciones de las ecuaciones (3.9.7) y (3.9.8) con derivada parcial fraccionaria en el tiempo de Riemann-Liouville $D_t^\alpha = {}^{RL}_0 D_t^\alpha$ y junto con el problema de Cauchy generalizado (3.7.26) y (3.7.27):

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_1^*(t, x) = 0, \quad ({}^{RL}_0 D_t^{\alpha-1} u_1^*)(0+, x) = f(x), \quad (3.9.21)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_2^*(t, x) = 0, \quad ({}^{RL}_0 D_t^{\alpha-1} u_2^*)(0+, x) = 0, \quad (3.9.22)$$

están dadas por:

$${}^{RL}u_1^*(t, x; \alpha) = \frac{t^{\alpha-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{2\alpha, \alpha}(-\lambda^2 k^2 t^{2\alpha}) F(k) e^{-ikx} dk, \quad (3.9.23)$$

$${}^{RL}u_2^*(t, x; \alpha) = \frac{t^{2\alpha-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (i\lambda k) E_{2\alpha, 2\alpha}(-\lambda^2 k^2 t^{2\alpha}) F(k) e^{-ikx} dk. \quad (3.9.24)$$

Por otro lado, en el Teorema 2.3.1 se han encontrado las fórmulas (2.3.4) y (2.3.5) de la solución del problema del tipo de Cauchy generalizado (2.3.2) y (2.3.3):

$$({}^{RL}D_t^{2\alpha-1}u)(0+, x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad (3.9.25)$$

$$({}^{RL}D_t^{2\alpha-2}u)(0+, x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.9.26)$$

para la ecuación de difusión fraccionaria (3.9.4) con derivada de Riemann-Liouville en el tiempo $D_t^\alpha = {}^{RL}D_t^\alpha$; es decir la ecuación (2.3.1) con $\beta = 2$ y si en ella cambiamos α , donde $0 < \alpha \leq 2$, por 2α con $0 < \alpha \leq 1$.

En particular, cuando $0 < \alpha \leq 1/2$, esta solución vale:

$${}^{RL}u^D(t, x; \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2\alpha-1} E_{2\alpha, 2\alpha}(-\lambda^2 k^2 t^{2\alpha}) F(k) e^{-ikx} dk, \quad (3.9.27)$$

mientras que, si $1/2 < \alpha \leq 1$, vale:

$$\begin{aligned} {}^{RL}u^D(t, x; \alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2\alpha-2} E_{2\alpha, 2\alpha-1}(-\lambda^2 k^2 t^{2\alpha}) G(k) e^{-ikx} dk + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2\alpha-1} E_{2\alpha, 2\alpha}(-\lambda^2 k^2 t^{2\alpha}) F(k) e^{-ikx} dk. \end{aligned} \quad (3.9.28)$$

Una vez más hay que poner en evidencia que en el caso de $0 < \alpha \leq 1/2$ es necesaria únicamente la condición (3.9.25) para solucionar la ecuación de difusión fraccionaria (3.9.4) con derivada de Riemann-Liouville en el tiempo; mientras que hay que proporcionar la otra condición (3.9.26) cuando $1/2 < \alpha \leq 1$.

Entonces, de acuerdo con lo dicho en la Observación 3.7.4, cuando $0 < \alpha < 1$, en general no se puede establecer una relación del tipo de la fórmula de D'Álembert fraccionaria dada en el Teorema 3.9.1 entre las soluciones del sistema de ecuaciones de evolución-difusión fraccionarias del tipo de Dirac (3.1.7), con $\beta = 1$ y con derivada de Riemann-Liouville en el tiempo $D_t^\alpha = {}^{RL}D_t^\alpha$, y la solución del problema de Cauchy generalizado (3.9.25), (3.9.26) para la ecuación de difusión fraccionaria (3.9.4) con derivada de Riemann-Liouville en el tiempo. El único caso en el que esto sí es posible es cuando $\alpha = 1$. En efecto, si $\alpha = 1$ y $F(k) = 0$ en la solución (3.9.28), y si la función $G(k)$ que aparece en la expresión (3.9.28) coincide con la función $F(k)$ incluida en las definiciones de las soluciones ${}^{RL}u_1(t, x; 1)$, ${}^{RL}u_2(t, x; 1)$, ${}^{RL}u_1^*(t, x; 1)$ y ${}^{RL}u_2^*(t, x; 1)$, entonces resulta:

$$\begin{aligned} {}^{RL}u^D(t, x; 1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{2,1}(-\lambda^2 k^2 t^2) G(k) e^{-ikx} dk = \frac{1}{2} [g(x - \lambda t) + g(x + \lambda t)] = \\ &\frac{1}{2} [{}^{RL}u_1(t, x; 1) + {}^{RL}u_2(t, x; 1)] = {}^{RL}u_1^*(t, x; 1) = {}^{RL}u_2^*(t, x; 1) + {}^{RL}u_1(t, x; 1), \end{aligned} \quad (3.9.29)$$

siendo $E_{2,1}(-z^2) = \cos z$, según la identidad (1.3.2).

Para entender este comportamiento hay que analizar los problemas de Cauchy generalizados que se han formulado tanto para las ecuaciones de evolución-difusión fraccionarias del tipo de Dirac como para la ecuación de difusión fraccionaria. En efecto, en el primer caso, nos encontramos con una condición fraccionaria de orden $\alpha - 1$, tal y como aparece en el problema (3.9.18) para todo $0 < \alpha \leq 1$; en el segundo caso tenemos una o ambas condiciones iniciales fraccionarias (3.9.25) y (3.9.26), dependiendo de si $0 < \alpha \leq 1/2$ ó $1/2 < \alpha \leq 1$.

Pues, en general no habrá correspondencia entre el primer problema (3.9.18) y el segundo (3.9.25) y (3.9.26) en el sentido de que el primero no es la formulación adecuada para el problema asociado a las ecuaciones de Dirac fraccionarias con derivada de Riemann-Liouville en el tiempo si queremos que éste conduzca a soluciones que sean raíces del segundo problema para la ecuación de difusión fraccionaria con derivada de Riemann-Liouville en el tiempo. Como ejemplo de lo que ocurre, se puede considerar el caso de $\alpha = 1/2$, para el cual el problema (3.9.18) contiene la condición inicial $({}^{RL}_0 D_t^{-1/2} u)(0+, x) = f(x)$, mientras que el problema (3.9.25) y (3.9.26) sólo incluye la condición entera $u(0+, x) = f(x)$. Cuando la derivada fraccionaria en el tiempo era la de Caputo, teníamos la misma condición entera $u(0+, x) = f(x)$ tanto en el primero como en el segundo problema, lo que permitía llegar a encontrar una relación entre las soluciones de ellos.

Por el contrario, si $\alpha = 1$, el problema (3.9.18) contiene la condición inicial entera $u(0+, x) = f(x)$ y el problema (3.9.25) y (3.9.26) las condiciones enteras $u(0+, x) = g(x)$ y $u_t(0+, x) = f(x)$, por lo que hay correspondencia en la tipología de las condiciones empleadas.

La elección de condiciones iniciales de tipo fraccionario en la formulación de los problemas de Cauchy generalizados (3.9.25) y (3.9.26) ó (3.9.18) ha sido guiada por el hecho de querer emplear la técnica de la transformada de Laplace en la resolución de dichos problemas. Nada impide que se formulen problemas de Cauchy con condiciones iniciales enteras también para ecuaciones que contienen la derivada parcial fraccionaria en el tiempo de Riemann-Liouville $D_t^\alpha = {}^{RL}_0 D_t^\alpha$, con oportunos cambios en la técnica de resolución de los mismos.

3.10. Solución general de un problema de valores iniciales y de contorno

Esta última sección del capítulo está dedicada al estudio de un problema de valores iniciales y de contorno para una ecuación fraccionaria de evolución, cuando la variable espacial no pertenece ya a todo el eje real, sino que está limitada a un semieje $[a, +\infty)$.

Hemos analizado este tipo de problema debido a que se le tratará numéricamente en el Capítulo 5, donde habrá que construirse una malla espacio-temporal en un intervalo espacial cerrado $[a, b]$, y sobre la cual se calculará la solución aproximada de la ecuación fraccionaria de evolución. Para ello, habrá que proporcionar el valor de la solución en el primer punto espacial de la malla, para poder facilitar los cálculos de las iteraciones sucesivas.

En concreto, vamos a presentar la solución de la ecuación de evolución (3.1.20), que aquí volvemos a escribir, en su nuevo dominio, de la siguiente manera:

$$({}^C_0D_t^\alpha u)(t, x) + \lambda \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = 0, \quad x > a, t > 0, \quad (3.10.1)$$

con las condiciones inicial y de contorno

$$u(0+, x) = u_0(x), \quad x > a, \quad (3.10.2)$$

$$u(t, a+) = r(t), \quad t > 0 \quad (3.10.3)$$

donde $0 < \alpha \leq 1$ y $a \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

De forma análoga a cuanto hecho en la sección 3.4.3, buscamos la solución $u(t, x)$ en el espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+) \times [a, +\infty)$ de las funciones para las cuales existe la transformada de Laplace en el tiempo, para cualquier $x \in [a, +\infty)$ fijo.

Aplicamos la transformada de Laplace (1.2.68) a la ecuación (3.10.1) y utilizamos la fórmula (1.2.72), que proporciona la transformada de Laplace de la derivada parcial fraccionaria de Caputo (1.2.46) cuando $0 < \alpha < 1$, y la fórmula conocida para la derivada ordinaria cuando $\alpha = 1$; entonces, teniendo en cuenta la condición inicial $u(0+, x) = u_0(x)$, resulta

$$s^\alpha (\mathcal{L}_t u)(s, x) - s^{\alpha-1} u_0(x) + \lambda \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{L}_t u)(s, x) = 0. \quad (3.10.4)$$

Multiplicando esta última expresión por $e^{xs^\alpha/\lambda}$ e integrando entre a y x , se obtiene

$$\lambda e^{\frac{xs^\alpha}{\lambda}} (\mathcal{L}_t u)(s, x) - \lambda e^{\frac{as^\alpha}{\lambda}} (\mathcal{L}_t r)(s) - \int_a^x s^{\alpha-1} e^{\frac{xs^\alpha}{\lambda}} u_0(x) dx = 0, \quad (3.10.5)$$

siendo $(\mathcal{L}_t u)(s, a+) = (\mathcal{L}_t r)(s)$.

Ahora, a partir de la fórmula (3.10.5), vamos a ver que forma asume la solución para distintas expresiones de la condición inicial.

Empecemos con suponer que la condición inicial sea una constante $u_0(x) = u_0$. Entonces, resulta, para $x > a$:

$$(\mathcal{L}_t u)(s, x) = e^{\frac{(a-x)s^\alpha}{\lambda}} (\mathcal{L}_t r)(s) + \frac{u_0}{s} - \frac{e^{\frac{(a-x)s^\alpha}{\lambda}}}{s} u_0. \quad (3.10.6)$$

Antes de aplicar la transformada de Laplace inversa (1.2.69) a la ecuación (3.10.6), presentamos unos resultados necesarios para seguir con nuestros desarrollos. La fórmula (1.3.16) junto con la propiedad (1.3.12) inducen la siguiente relación

$$\left(\mathcal{L}_t \left(\frac{1}{t} W\left(-\frac{\gamma}{t^\alpha}; -\alpha, 0\right) \right) \right) (s) = e^{-\gamma s^\alpha} \quad (3.10.7)$$

cuando $\gamma \neq 0$, y $0 < \alpha < 1$. Por otro lado, si, $\alpha = 1$, entonces resulta

$$(\mathcal{L}_t \delta(t - \gamma))(s) = e^{-\gamma s}, \quad (3.10.8)$$

de acuerdo con la definición (1.2.95) de la función Delta de Dirac en el punto γ .

Es importante resaltar que, el resultado (3.10.8) puede ser obtenido a partir de (3.10.7) cuando $\gamma \neq 0$ y $\alpha \rightarrow 1$. En efecto, teniendo en cuenta la propiedad (1.2.60), tenemos:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{t} W\left(-\frac{\gamma}{t^\alpha}; -\alpha, 0\right) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^n \frac{t^{-\alpha n - 1}}{\Gamma(-\alpha n)} = \delta(t - \gamma), \quad (3.10.9)$$

siendo $t^{-n-1}/\Gamma(-n) = \delta^{(n)}(t)$ por la propiedad (1.2.60), con $\delta^{(n)}(t)$ derivada generalizada de orden n de la distribución Delta de Dirac, y representando la serie la expansión de Taylor de la función $\delta(t - \gamma)$.

Aplicando ahora el resultado (3.10.9), podemos invertir la ecuación (3.10.6) cuando $x > a$ y obtener:

$$u(t, x) = \int_0^t r(t - \tau) \frac{1}{\tau} W\left(-\frac{(x-a)}{\lambda \tau^\alpha}; -\alpha, 0\right) d\tau + u_0 - u_0 \int_0^t \frac{1}{\tau} W\left(-\frac{(x-a)}{\lambda \tau^\alpha}; -\alpha, 0\right) d\tau, \quad (3.10.10)$$

si $0 < \alpha < 1$, y

$$u(t, x) = \int_0^t r(t - \tau) \delta\left(\tau - \frac{(x-a)}{\lambda}\right) d\tau + u_0 - u_0 \int_0^t \delta\left(\tau - \frac{(x-a)}{\lambda}\right) d\tau, \quad (3.10.11)$$

para $\alpha = 1$. En particular, si $\alpha = 1$, se puede reescribir y completar la solución (3.10.11) con los valores inicial y de contorno de la manera que sigue:

$$u(t, x) = \begin{cases} u_0 & 0 \leq t < \frac{(x-a)}{\lambda} \\ r\left(t - \frac{(x-a)}{\lambda}\right) & t \geq \frac{(x-a)}{\lambda} > 0 \end{cases}, \quad (3.10.12)$$

cuando $\lambda > 0$, y

$$u(t, x) = \begin{cases} u_0 & x > a, t \geq 0 \\ r(t) & x = a, t > 0 \end{cases}, \quad (3.10.13)$$

cuando $\lambda < 0$, teniendo que resultar $r(0) = u_0$ para que la solución sea continua.

Pasamos a considerar ahora el caso de una condición inicial que no sea constante en x ; por ejemplo, $u_0(x) = e^{-\mu x}$.

Introduciendo esta función en la ecuación (3.10.5), tenemos, cuando $x > a$:

$$\begin{aligned} & e^{\frac{x s^\alpha}{\lambda}} (\mathcal{L}_t u)(s, x) - e^{\frac{a s^\alpha}{\lambda}} (\mathcal{L}_t r)(s) - \frac{e^{\frac{x s^\alpha}{\lambda}}}{s} e^{-\mu x} + \\ & + \frac{e^{\frac{a(s^\alpha - \mu\lambda)}{\lambda}}}{s} - \frac{\mu\lambda}{s} \frac{e^{\frac{x s^\alpha}{\lambda}} e^{-\mu x}}{(s^\alpha - \mu\lambda)} + \frac{\mu\lambda e^{\frac{a(s^\alpha - \mu\lambda)}{\lambda}}}{s(s^\alpha - \mu\lambda)} = 0 \end{aligned}, \quad (3.10.14)$$

que conduce a la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_t u)(s, x) = & e^{\frac{-(x-a)s^\alpha}{\lambda}} (\mathcal{L}_t r)(s) + \frac{e^{-\mu x}}{s} - \frac{e^{\frac{-(x-a)s^\alpha}{\lambda}} e^{-\mu a}}{s} + \\ & + \frac{\mu\lambda}{s} \frac{e^{-\mu x}}{(s^\alpha - \mu\lambda)} - \frac{\mu\lambda e^{\frac{-(x-a)s^\alpha}{\lambda}} e^{-\mu a}}{s(s^\alpha - \mu\lambda)} \end{aligned}. \quad (3.10.15)$$

Antes de aplicar la transformada de Laplace inversa a la ecuación (3.10.15), apuntamos que la propiedad (1.3.7) implica las siguientes identidades para $t > 0$:

$$(\mathcal{L}_t(t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\mu\lambda t^\alpha)))(s) = \frac{1}{(s^\alpha - \mu\lambda)}, \quad (3.10.16)$$

$$(\mathcal{L}_t(t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\mu\lambda t^\alpha)))(s) = \frac{1}{s(s^\alpha - \mu\lambda)}. \quad (3.10.17)$$

Por lo tanto, invirtiendo (3.10.15) obtenemos, cuando $x > a$:

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \int_0^t r(t-\tau) \frac{1}{\tau} W(-\frac{(x-a)}{\lambda\tau^\alpha}; -\alpha, 0) d\tau + e^{-\mu x} - e^{-\mu a} \int_0^t \frac{1}{\tau} W(-\frac{(x-a)}{\lambda\tau^\alpha}; -\alpha, 0) d\tau + \\ & + e^{-\mu x} \mu\lambda t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\mu\lambda t^\alpha) - \mu\lambda e^{-\mu a} \int_0^t \frac{(t-\tau)^\alpha}{\tau} E_{\alpha,\alpha+1}(\mu\lambda(t-\tau)^\alpha) W(-\frac{(x-a)}{\lambda\tau^\alpha}; -\alpha, 0) d\tau, \end{aligned} \quad (3.10.18)$$

si $0 < \alpha < 1$, y

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \int_0^t r(t-\tau) \delta(\tau - \frac{(x-a)}{\lambda}) d\tau + e^{-\mu x} - e^{-\mu a} \int_0^t \delta(\tau - \frac{(x-a)}{\lambda}) d\tau + \\ & + e^{-\mu x} e^{\mu\lambda t} - e^{-\mu x} - e^{-\mu a} \int_0^t (e^{\mu\lambda(t-\tau)} - 1) \delta(\tau - \frac{(x-a)}{\lambda}) d\tau, \end{aligned} \quad (3.10.19)$$

si $\alpha = 1$, teniendo en cuenta que: $\mu\lambda t E_{1,2}(\mu\lambda t) = e^{\mu\lambda t} - 1$.

Así como se ha operado con el caso anterior, si $\alpha = 1$ se puede reescribir y completar la solución (3.10.19) con los valores inicial y de contorno de la manera que sigue:

$$u(t, x) = \begin{cases} e^{-\mu(x-\lambda t)} & 0 \leq t < \frac{(x-a)}{\lambda} \\ r(t - \frac{(x-a)}{\lambda}) & t \geq \frac{(x-a)}{\lambda} > 0 \end{cases}, \quad (3.10.20)$$

cuando $\lambda > 0$, y

$$u(t, x) = \begin{cases} e^{-\mu(x-\lambda t)} & x > a, t \geq 0 \\ r(t) & x = a, t > 0 \end{cases}, \quad (3.10.21)$$

cuando $\lambda < 0$, teniendo que resultar $r(0) = e^{-\mu a}$ para que la solución sea continua.

Finalmente, observando que resulta

$$\mu\lambda t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\mu\lambda t^\alpha) = E_{\alpha,1}(\mu\lambda t^\alpha) - 1,$$

volvemos a escribir la solución (3.10.18), con $x > a$ y $0 < \alpha < 1$, de la siguiente forma:

$$u(t, x) = e^{-\mu x} E_{\alpha,1}(\mu\lambda t^\alpha) + \int_0^t (r(t-\tau) - e^{-\mu a} E_{\alpha,1}(\mu\lambda(t-\tau)^\alpha)) \frac{1}{\tau} W(-\frac{(x-a)}{\lambda\tau^\alpha}; -\alpha, 0) d\tau, \quad (3.10.22)$$

que pone en evidencia que, cuando $r(t) = e^{-\mu a} E_{\alpha,1}(\mu\lambda t^\alpha)$, la solución queda reducida a:

$$u(t, x) = e^{-\mu x} E_{\alpha,1}(\mu\lambda t^\alpha), \quad (3.10.23)$$

para todo $x \geq a$ y $t \geq 0$, de acuerdo con el resultado obtenido acerca de la solución del particular problema de Cauchy (3.3.13) presentado en la Sección 3.3.

3.11. Conclusiones

El presente capítulo ha sido dedicado a la construcción y estudio analítico de una interpolación alternativa, con respecto a las muchas que se han presentado en la literatura, entre las ecuaciones de ondas y de difusión clásicas.

Generalizando el método utilizado por Dirac para obtener su ecuación a partir de la ecuación de Klein-Gordon, se ha considerado la raíz cuadrada de la ecuación de difusión fraccionaria (3.1.6) definida por medio del sistema de ecuaciones (3.1.7), que hemos llamado de evolución-difusión fraccionarias del tipo de Dirac. Este sistema puede ser interpretado como una interpolación “desde el interior” de las ecuaciones clásicas de difusión (2.1.1) y de ondas (2.1.2), que son resueltas por las componentes, llamadas *difunores*, de la función de dos componentes que aparece en (3.1.7) cuando $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$ y $\alpha = 1$, $\beta = 1$, respectivamente.

El sistema de ecuaciones (3.1.7) tiene dos expresiones posibles, dependiendo de la forma que toman las matrices de Pauli A y B que contiene. En efecto, debido al hecho de querer atribuir significado físico a las componentes que resuelven el sistema, en el álgebra formada por las matrices de Pauli se ha restringido el estudio a aquellas parejas de matrices A y B reales; dentro de este subconjunto de matrices, solo 2 parejas dan lugar a dos sistemas no equivalentes de ecuaciones, uno de componentes separadas y el otro de componentes acopladas.

En realidad, aunque nos encontramos con estos dos sistemas no equivalentes de ecuaciones, se ha demostrado que, a través de una transformación matricial, se pueden obtener las soluciones acopladas como semisuma u semidiferencia de las soluciones no acopladas. Este resultado permite desarrollar los cálculos relativos a la resolución analítica del sistema de ecuaciones de evolución-difusión fraccionarias del tipo de Dirac únicamente para el caso de ecuaciones desacopladas, y pasar en un segundo tiempo a conocer las soluciones acopladas de forma inmediata con un sencillo cálculo.

En particular, se ha buscado la solución analítica del sistema de ecuaciones desacopladas (3.1.7) cuando el operador fraccionario en el tiempo ha sido especificado según las definiciones de Caputo o de Riemann-Liouville y el operador fraccionario en el espacio según la definición de Liouville, y se añaden la usual condición de contorno consistente en que la solución sea una función localizada y una condición inicial clásica o fraccionaria, dependiendo del operador temporal fraccionario utilizado.

Ambos problemas para las ecuaciones fraccionarias del tipo de Dirac, de Cauchy y de Cauchy generalizado, han sido solucionados con la técnica de las transformadas de Laplace y de Fourier y las soluciones que se han obtenido (únicas por las propiedades del método utilizado para encontrarlas) resultan expresadas en términos de las funciones especiales de Mittag-Leffler o de Wright.

Hay que destacar que, cuando en (3.1.7) se han considerado la derivada de Caputo en el tiempo de orden $0 < \alpha < 1$ y la derivada primera en el espacio, se ha encontrado que las dos componentes que representan la solución fundamental del problema de Cauchy para las ecuaciones fraccionarias del tipo de Dirac son densidades de probabilidad en x expresadas mediante una función de densidad del tipo de Lévy estable, que pueden interpretarse como distribuciones asociadas a los grados internos de libertad del sistema. Por el contrario, cuando en el sistema (3.1.7) la derivada temporal fraccionaria de orden

$0 < \alpha < 1$ es la de Riemann-Liouville y la derivada espacial es la derivada primera, entonces hay que normalizar las dos componentes, soluciones fundamentales del problema de Cauchy generalizado para este sistema, con el fin de que resulten expresadas en términos de densidades de probabilidad en t del tipo de Lévy estables unilaterales.

Entre los resultados más destacados de este capítulo, está la determinación de la relación existente entre las dos componentes u_1 y u_2 , soluciones del sistema de ecuaciones de Dirac fraccionarias (3.1.7) acopladas o desacopladas, y la solución de la ecuación de difusión fraccionaria unidimensional (3.1.6). En concreto, cuando se ha solucionado el problema de Cauchy asociado a cada una de las ecuaciones del sistema (3.1.7) en el que se han considerado la derivada de Caputo en el tiempo de orden $0 < \alpha \leq 1$ y la derivada primera en el espacio, se ha visto que sus soluciones representan distintas combinaciones lineales, con coeficientes positivos, negativos u nulos, de las dos ramas correspondientes a los ejes negativos y positivos de la solución del problema de Cauchy para la ecuación de difusión fraccionaria (3.1.6) con derivada de Caputo en el tiempo de orden $0 < \alpha \leq 1$ y derivada segunda en el espacio. En particular, la solución de difusión fraccionaria puede ser expresada en términos de las componentes de Dirac desacopladas a través de una generalización fraccionaria de la Fórmula de D'Álembert. Efectivamente, la solución de difusión fraccionaria, en este caso, resulta ser combinación lineal de las soluciones de evolución-difusión fraccionarias del tipo de Dirac desacopladas, del mismo modo que la solución de D'Álembert de la ecuación de ondas clásica es combinación lineal de las soluciones de las ecuaciones de primer orden, obtenidas de la descomposición del operador de ondas de segundo orden mediante los correspondientes operadores de orden 1. Una vez más, el valor de un resultado clásico, cual es la fórmula de D'Álembert para la solución de un determinado problema de Cauchy para la ecuación de ondas, ha sido extendido al caso fraccionario que lo generaliza y lo incluye como caso particular.

Dicha relación no se ha mantenido válida cuando se ha empleado la definición de Riemann-Liouville para el operador de derivación fraccionario en el tiempo, tanto en el sistema de ecuaciones de Dirac fraccionarias (3.1.7) como en la ecuación de difusión fraccionaria (3.1.6). La razón de este comportamiento ha de buscarse en el hecho de haber empleado condiciones iniciales fraccionaria en los problemas de Cauchy generalizados asociados a ellas, y en que las derivadas fraccionarias, en general, no satisfacen la propiedad del semigrupo.

4. ALGUNAS PROPIEDADES DE INVARIANCIA DEL SISTEMA DE ECUACIONES FRACCIONARIAS DE EVOLUCIÓN-DIFUSIÓN DEL TIPO DE DIRAC

4.1. Introducción

Este capítulo está dedicado al estudio de algunas propiedades de invariancia del sistema de ecuaciones fraccionarias de evolución del tipo de Dirac [131] introducido en (3.1.5) y generalizado en (3.1.7), y que aquí reescribimos cuando $\lambda = 1$:

$$(AD_t^\alpha + B\partial_x)\psi(t, x) = 0, \quad \psi(t, x) = \begin{pmatrix} u_1(t, x) \\ u_2(t, x) \end{pmatrix}, \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}), \quad (4.1.1)$$

con $0 < \alpha \leq 1$, y donde A y B son matrices 2×2 que satisfacen las condiciones del Algebra de Pauli (3.1.2).

Una vez más se especificará el operador de derivación fraccionaria D_t^α que aparece en (4.1.1), de acuerdo con las dos definiciones de Riemann-Liouville (1.2.8) y de Caputo (1.2.46).

En la introducción del Capítulo 3, se ha demostrado como el sistema (3.1.7), de forma análoga a la ecuación fraccionaria de difusión (2.1.5), también puede interpretarse como una interpolación, esta vez “desde el interior”, de las ecuaciones clásicas de difusión (2.1.1) y de ondas (2.1.2), que de hecho son resueltas por las componentes u_1 y u_2 cuando $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$ y $\alpha = 1$, $\beta = 1$, respectivamente.

Como consecuencia de ello, cabe entonces preguntarse cuáles comportamientos de tipo parabólico y cuáles de tipo hiperbólico, típicos de las ecuaciones de difusión y de ondas respectivamente, son manifestados por este sistema de ecuaciones fraccionarias de evolución-difusión del tipo de Dirac que las interpola.

La Sección 3.9 del Capítulo 3 ha presentado un primer resultado en este sentido, demostrando que la solución de la ecuación fraccionaria de difusión, con derivada de Caputo en el tiempo, es proporcionada por una fórmula de D’Alembert fraccionaria, generalizando así el comportamiento de la solución de la ecuación de ondas (hiperbólica). En efecto, la solución mencionada resulta ser combinación lineal de las soluciones del sistema de ecuaciones fraccionarias desacopladas de evolución-difusión del tipo de Dirac, con derivada de

Caputo en el tiempo, del mismo modo que la solución de D'Álembert de la ecuación de ondas clásica es combinación lineal de las soluciones de las ecuaciones de primer orden, obtenidas de la descomposición del operador de ondas de segundo orden en los correspondientes operadores de orden 1.

Buscando más analogías con los comportamientos de tipo difusivo y ondulatorio, en la Sección 4.2 se analizan las propiedades de invariancia del sistema (4.1.1) con respecto a las transformaciones de inversión y traslación espacial y/o temporal, y a la transformación de Galileo, mostrando resultados de tipo hiperbólico o parabólico dependiendo del valor del índice α . Finalmente, en la sección 4.3 se encontrará una cantidad conservada asociada al sistema (4.1.1), análoga del Hamiltoniano para la ecuación de Dirac clásica, a pesar de no resultar el sistema fraccionario invariante por traslación temporal para todo $0 < \alpha < 1$. Acerca de sistemas hamiltonianos con derivada fraccionaria en el tiempo véase también la referencia [159].

4.2. Simetrías de las ecuaciones fraccionarias de Dirac

En esta sección se analizan las simetrías del sistema de ecuaciones (4.1.1) con respecto a las inversiones y traslaciones espaciales y/o temporales, y a la transformación de Galileo.

La derivada fraccionaria de una función, cómo se ha visto numerosas veces a lo largo de la tesis, está expresada por medio de una integral definida y, por lo tanto, depende de los valores de la función en todo el intervalo de definición. Por esta razón, este operador surge cómo una herramienta natural para modelizar sistemas con interacciones de largo alcance en el espacio y/o en el tiempo (memoria), así como procesos que involucran varias escalas espacio-temporales.

La presencia de este operador no local en el sistema (4.1.1) influirá en las propiedades de invariancia con respecto a las transformaciones de tipo temporal, mostrando una diferencia sustancial entre el comportamiento del mismo y el del sistema de Dirac clásico local.

4.2.1. Inversión espacial

Teorema 4.2.1 *El sistema (4.1.1) resulta ser invariante, con respecto a la inversión espacial*

$$x' = -x, \quad \psi'(t, x') = S\psi(t, x(x')), \quad (4.2.1)$$

para todo α tal que $0 < \alpha \leq 1$, y cuando D_t^α es especificada según cualquiera de las dos definiciones de Riemann-Liouville (1.2.8) o de Caputo (1.2.46). Las matrices de simetría espacial son $S = A$ y $S = B$.

Demostración. Buscamos, si existe, una matriz de simetría espacial S de forma que la función multicomponentes transformada $\psi'(t, x')$, siga verificando el sistema de ecuaciones (4.1.1); es decir, que resulte:

$$AD_t^\alpha \psi'(t, x') + B\partial_{x'} \psi'(t, x') = 0, \quad \psi'(t, x') = S \begin{pmatrix} u_1(t, x(x')) \\ u_2(t, x(x')) \end{pmatrix}. \quad (4.2.2)$$

Siendo

$$\partial_{x'}\psi'(t, x') = S\partial_{x'}\psi(t, x(x')) = -S\partial_x\psi(t, x) \quad (4.2.3)$$

se puede escribir:

$$AD_t^\alpha\psi'(t, x') + B\partial_{x'}\psi'(t, x') = ASD_t^\alpha\psi(t, x) - BS\partial_x\psi(t, x), \quad (4.2.4)$$

para el operador D_t^α especificado según cualquiera de las dos definiciones de Riemann--Liouville (1.2.8) o de Caputo (1.2.46).

Ahora, para que se verifique la ecuación (4.2.2), tendrá que resultar

$$S^{-1}ASD_t^\alpha\psi(t, x) - S^{-1}BS\partial_x\psi(t, x) = 0,$$

y sabiendo que $\psi(t, x)$ verifica la expresión (4.1.1), habrá que pedir que resulte

$$\left\{ \begin{array}{l} S^{-1}AS = A \\ S^{-1}BS = -B \end{array} \right. ; \text{ es decir, } \left\{ \begin{array}{l} AS = SA \\ BS + SB = 0 \end{array} \right. , \quad (4.2.5)$$

o, alternativamente, que

$$\left\{ \begin{array}{l} S^{-1}AS = -A \\ S^{-1}BS = B \end{array} \right. ; \text{ es decir, } \left\{ \begin{array}{l} AS + SA = 0 \\ BS = SB \end{array} \right. . \quad (4.2.6)$$

La matriz $S = A$ cumple los primeros requisitos (4.2.5) mientras que la matriz $S = B$ verifica los segundos (4.2.6), ya que ambas satisfacen las condiciones (3.1.2). ■

Observación 4.2.1 *La invariancia del sistema (4.1.1) por inversión espacial es válida no sólo con las dos definiciones de derivada fraccionaria en el tiempo mencionadas en el Teorema 4.2.1, sino que con cualquiera de las definiciones existentes en la literatura.*

Por lo tanto, la ecuación generalizada (4.1.1) resulta ser invariante por inversión espacial para todo $0 < \alpha \leq 1$, así como lo son las ecuaciones de difusión y de ondas clásicas, aunque exista una diferencia sustancial entre el comportamiento de estas últimas dos ecuaciones y el de la primera. En el caso de la ecuación de Dirac generalizada (4.1.1) la simetría espacial es una propiedad del sistema y no de cada componente u_1 y u_2 de su solución.

Para ilustrar esta afirmación es necesario recordar la expresión que toman las matrices de Pauli A y B que aparecen en el sistema (4.1.1). De acuerdo con cuanto expuesto en la introducción del capítulo anterior, nos restringimos, de entre todas las matrices de Pauli posibles, a aquellas parejas de matrices que sean reales. Entonces, tenemos 2 parejas de matrices que conducen a sistemas no equivalentes de ecuaciones, que son: A_1 y B_1 , A_2 y B_2 , definidas respectivamente en (3.1.8) y (3.1.11). En concreto, si se introducen las matrices A_1 y B_1 en el sistema (4.1.1), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones de componentes u_1 y u_2 separadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_t^\alpha u_1)(t, x) - (\partial_x u_1)(t, x) = 0 \\ (D_t^\alpha u_2)(t, x) + (\partial_x u_2)(t, x) = 0 \end{array} \right. ; \quad (4.2.7)$$

mientras que con las matrices A_2 y B_2 , se llega a escribir

$$\begin{cases} (D_t^\alpha u_2^*)(t, x) + (\partial_x u_1^*)(t, x) = 0 \\ (D_t^\alpha u_1^*)(t, x) + (\partial_x u_2^*)(t, x) = 0 \end{cases}, \quad (4.2.8)$$

que es un sistema en el que las componentes u_1^* y u_2^* no son separables.

Ahora bien, si especificamos la matriz de simetría espacial como $S = A$ en la ecuación (4.2.4), tenemos

$$ASD_t^\alpha \psi(t, -x') + BS\partial_{x'}\psi(t, -x') = D_t^\alpha \psi(t, -x') + BA\partial_{x'}\psi(t, -x') = 0, \quad (4.2.9)$$

que, cuando $A = A_1$ y $B = B_1$, se traduce en

$$\begin{cases} (D_t^\alpha u_1)(t, -x') + (\partial_{x'} u_1)(t, -x') = 0 \\ (D_t^\alpha u_2)(t, -x') - (\partial_{x'} u_2)(t, -x') = 0 \end{cases}, \quad (4.2.10)$$

mientras que si $A = A_2$ y $B = B_2$, equivale a

$$\begin{cases} (D_t^\alpha u_1^*)(t, -x') - (\partial_{x'} u_2^*)(t, -x') = 0 \\ (D_t^\alpha u_2^*)(t, -x') - (\partial_{x'} u_1^*)(t, -x') = 0 \end{cases}. \quad (4.2.11)$$

Por consiguiente, comparando los dos sistemas (4.2.7) y (4.2.10) y recordando la unicidad de las soluciones u_1 y u_2 , podemos concluir que resulta

$$\begin{cases} u_1(t, -x) = u_2(t, x) \\ u_2(t, -x) = u_1(t, x) \end{cases}. \quad (4.2.12)$$

Asimismo, a partir de los dos sistemas de ecuaciones (4.2.8) y (4.2.11) obtenemos las propiedades:

$$\begin{cases} u_2^*(t, -x) = -u_2^*(t, x) \\ u_1^*(t, -x) = u_1^*(t, x) \end{cases}. \quad (4.2.13)$$

Si repetimos los cálculos introduciendo la segunda matriz de simetría $S = B$ en la ecuación (4.2.4), llegamos a los mismos sistemas (4.2.10) y (4.2.11).

Estos resultados confirman cuanto dicho anteriormente: la simetría espacial del sistema de ecuaciones de Dirac generalizadas (4.1.1) es una propiedad del conjunto de las dos componentes de su solución y no de cada componente. Además, las relaciones (4.2.12) y (4.2.13) están de acuerdo con los resultados analíticos del capítulo anterior. Por ejemplo, esto aparece reflejado en las gráficas de las soluciones u_1 , u_2 , u_1^* y u_2^* que se han reproducido en las Figuras 3.1, 3.2 y 3.3.

4.2.2. Inversión temporal

Teorema 4.2.2 *El sistema (4.1.1) resulta ser invariante, con respecto a la inversión temporal*

$$t^* = -t, \quad \psi^*(t^*, x) = T\psi(t(t^*), x), \quad (4.2.14)$$

cuando D_t^α es especificada según cualquiera de las dos definiciones de Riemann-Liouville (1.2.8) o de Caputo (1.2.46) con extremo inferior de integración $a = 0$, y resulta

$$\alpha = \frac{1 + 2k}{1 + 2n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad n = k, k + 1, k + 2, \dots, \quad (4.2.15)$$

ó

$$\alpha = \frac{2k}{1+2n}; \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad n = k, k+1, k+2, \dots \quad (4.2.16)$$

En el caso (4.2.15) las matrices de simetría temporal son $T = A$ y $T = B$; en el caso (4.2.16) la matriz de simetría temporal es $T = AB = -BA$.

Demostración. Se busca, si existe, una matriz de simetría temporal T de forma que $\psi^*(t^*, x)$ siga verificando el sistema de ecuaciones (4.1.1). Esta vez, para poder desarrollar los cálculos, habrá que especificar la expresión de la D_t^α utilizada.

Asumiendo en la expresión (4.1.1) la definición de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville (1.2.4), reescrita como ${}^aRLD_t^\alpha$ para evidenciar la dependencia del operador con el t , se tiene que verificar, a fin de mantener la invariancia, que

$$A {}^aRLD_{t^*}^\alpha \psi^*(t^*, x) + B \partial_x \psi^*(t^*, x) = 0, \quad \psi^*(t^*, x) = T \begin{pmatrix} u_1(t(t^*), x) \\ u_2(t(t^*), x) \end{pmatrix}. \quad (4.2.17)$$

Siendo $\psi^*(t^*, x)$ una función de dos componentes, habría que operar con la derivada fraccionaria separadamente sobre cada una de ellas; se adopta la forma de escritura compacta equivalente:

$$\begin{aligned} {}^aRLD_{t^*}^\alpha \psi^*(t^*, x) &= T {}^aRLD_{t^*}^\alpha \psi(t(t^*), x) = T \frac{d}{dt^*} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^{t^*} \frac{\psi(-\tau, x)}{(t^* - \tau)^\alpha} d\tau = \\ &= -T \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^{-t} \frac{\psi(-\tau, x)}{(-t - \tau)^\alpha} d\tau = T \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-a}^t \frac{\psi(z, x)}{(z - t)^\alpha} dz. \end{aligned}$$

Resulta por lo tanto,

$${}^aRLD_{t^*}^\alpha \psi^*(t^*, x) = T(-1)^\alpha {}^aRLD_t^\alpha \psi(t, x). \quad (4.2.18)$$

y en particular, cuando $a = 0$:

$${}_0RLD_{t^*}^\alpha \psi^*(t^*, x) = T(-1)^\alpha {}_0RLD_t^\alpha \psi(t, x). \quad (4.2.19)$$

Si se repiten los cálculos para $D_t^\alpha = {}^C_aD_t^\alpha$ en el sistema (4.1.1), se llega al mismo resultado

$${}^C_aD_{t^*}^\alpha \psi^*(t^*, x) = T(-1)^\alpha {}^C_aD_t^\alpha \psi(t, x), \quad (4.2.20)$$

y, en particular,

$${}_0^C D_{t^*}^\alpha \psi^*(t^*, x) = T(-1)^\alpha {}_0^C D_t^\alpha \psi(t, x), \quad (4.2.21)$$

de forma que se puede elegir operar con cualquiera de las dos definiciones de derivada fraccionaria sin perder generalidad.

El sistema en (4.2.17) asume entonces la forma

$$A {}^aRLD_{t^*}^\alpha \psi^*(t^*, x) + B \partial_x \psi^*(t^*, x) = (-1)^\alpha AT {}^aRLD_t^\alpha \psi(t, x) + BT \partial_x \psi(t, x), \quad (4.2.22)$$

y el único caso en el que esta expresión pueda resultar nula es para $a = 0$; ya que para $a \neq 0$, el operador diferencial fraccionario ${}^R D_t^\alpha$ es sustancialmente distinto de ${}^R D_t^\alpha$ por el hecho de considerar los valores de la misma función en un intervalo más amplio.

Volviendo al caso particular de $a = 0$, podemos escribir:

$$A {}^R D_t^\alpha \psi^*(t^*, x) + B \partial_x \psi^*(t^*, x) = (-1)^\alpha A T {}^R D_t^\alpha \psi(t, x) + B T \partial_x \psi(t, x)$$

y, siendo $\psi(t, x)$ solución de (4.1.1), esta expresión vale cero si

$$\begin{cases} (-1)^\alpha A T = T A \\ B T = T B \end{cases}, \quad \text{ó} \quad \begin{cases} (-1)^\alpha A T = -T A \\ B T = -T B \end{cases}. \quad (4.2.23)$$

Ahora bien, mientras resulte $(-1)^\alpha = -1$; es decir, si

$$(-1)^\alpha = e^{i(\pi+2n\pi)\alpha} = -1 = e^{i(\pi+2k\pi)}, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

con $\{n, k\} \in \{\mathbb{N} \cup \{0\}\}$, o, de forma equivalente, si

$$\alpha = \frac{1+2k}{1+2n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad n = k, k+1, k+2, \dots,$$

entonces las condiciones (4.2.23) son equivalentes a las condiciones (4.2.5) y (4.2.6) y las matrices de simetría son $T = A$ y $T = B$.

Por otro lado, si $(-1)^\alpha = 1$, es decir, si

$$\alpha = \frac{2k}{1+2n}; \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad n = k, k+1, k+2, \dots,$$

entonces la matriz de simetría del sistema es $T = AB = -BA$. ■

Algunos valores de α particulares, para los cuales el sistema (4.1.1) resulta invariante por inversión temporal, son:

$$\alpha = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{9}, \dots, \frac{5}{7}, \frac{5}{9}, \frac{5}{11}, \dots,$$

y

$$\alpha = \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \dots, \frac{4}{5}, \frac{4}{7}, \frac{4}{9}, \dots, \frac{6}{7}, \frac{6}{9}, \frac{6}{11}, \dots,$$

donde el primer conjunto de valores de α es obtenido empleando la condición (4.2.15) y el segundo a partir de la condición (4.2.16).

Observación 4.2.2 Desde el punto de vista operacional, puede resultar útil puntualizar el siguiente aspecto. Es evidente que todos los valores de α definidos por las condiciones (4.2.15) y (4.2.16) son fraccionarios del tipo $\alpha = \frac{m}{n}$, con m y n enteros no nulos. Esto hace que, para estos valores, la expresión $(-1)^\alpha$ pueda reescribirse como $(-1)^\alpha = \sqrt[n]{(-1)^m}$, que es una función multiforme, es decir, toma varios valores determinados para cada determinación de α ; en efecto, esta función tiene n raíces en el campo complejo, entre las que está la raíz puramente real -1 ó 1 , dependiendo de si α satisface (4.2.15) ó (4.2.16),

respectivamente. El problema es que dicha raíz real podría no ser el valor principal de $(-1)^\alpha$; con lo cual, al calcular esta expresión con una calculadora o un programa de cálculo en un ordenador, hay que saber que, al estar generalmente todas las máquinas programadas para proporcionar el valor principal de funciones de este tipo, obtendríamos como resultado un número distinto del que buscamos. En efecto, si por ejemplo calculamos $(-1)^{1/3}$, tenemos las siguientes tres raíces:

$$\begin{aligned} &\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3), \\ &\cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1, \\ &\cos(5\pi/3) + i \sin(5\pi/3), \end{aligned}$$

de las cuales la primera, imaginaria, es el valor principal de nuestra expresión y el resultado que proporcionan las calculadoras.

Volviendo a la propiedad de simetría temporal; es importante resaltar que la ecuación fraccionaria de difusión en el tiempo con derivada de Riemann-Liouville, dada por la (2.3.1) cuando $\beta = 2$, es invariante por inversiones temporales cuando $(-1)^{2\alpha} = 1$, que se cumple para

$$\alpha = \frac{k}{1 + 2n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, 2n + 1,$$

es decir,

$$\alpha = 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \dots, \frac{6}{7}, \frac{1}{9}, \dots$$

Lo mismo puede decirse de la ecuación fraccionaria de difusión en el tiempo con derivada de Caputo (2.2.1).

Este resultado está de acuerdo con la conocida no invariancia por inversión temporal de la ecuación de difusión clásica (2.1.1), coincidente con las ecuaciones (2.3.1) y (2.2.1) cuando $\beta = 2$ y $\alpha = 1$.

Por lo tanto, la ecuación generalizada (4.1.1) reúne ambos comportamientos, el parabólico y el hiperbólico, al ser al mismo tiempo invariante por inversión temporal para un conjunto infinito de valores de α (así como lo es la ecuación de ondas clásica) y al no ser invariante para el conjunto obtenido como diferencia entre éste y el intervalo de valores $0 < \alpha \leq 1$ (así como no lo es la ecuación de difusión clásica).

No obstante, de forma análoga a lo que ocurría con la simetría espacial, cuando se introducen la matriz de simetría $T = A$ en la ecuación (4.2.22) con $a = 0$, se obtiene

$$AT {}^RLD_{t^*}^\alpha \psi(-t^*, x) + BT \partial_x \psi(-t^*, x) = {}^RLD_{t^*}^\alpha \psi(-t^*, x) + BA \partial_x \psi(-t^*, x) = 0, \quad (4.2.24)$$

por lo que, resultando invariados los cálculos de la sección anterior, podemos concluir inmediatamente que resulta

$$\begin{cases} u_1(-t, x) = u_2(t, x) \\ u_2(-t, x) = u_1(t, x) \end{cases}, \quad (4.2.25)$$

cuando empleamos las matrices A_1 y B_1 , y

$$\begin{cases} u_2^*(-t, x) = -u_2^*(t, x) \\ u_1^*(-t, x) = u_1^*(t, x) \end{cases}, \quad (4.2.26)$$

con las matrices A_2 y B_2 . Las mismas relaciones (4.2.25) y (4.2.26) son obtenidas para la matriz de simetría $T = B$.

Entonces, con las matrices de simetría $T = A$ y $T = B$ la simetría temporal, así como la espacial, es una propiedad del conjunto de las dos componentes de la solución del sistema de ecuaciones de Dirac generalizadas (4.1.1), y no de cada componente.

Esto no ocurre igual cuando la matriz de simetría es $T = AB$. En efecto, sustituyendo esta matriz en el sistema (4.2.22) con $a = 0$, tenemos

$$AT_0^{RL}D_{t^*}^\alpha \psi(-t^*, x) + BT\partial_x \psi(-t^*, x) = B_0^{RL}D_{t^*}^\alpha \psi(-t^*, x) + A\partial_x \psi(-t^*, x) = 0, \quad (4.2.27)$$

que, cuando $A = A_1$ y $B = B_1$, se traduce en

$$\begin{cases} (D_{t^*}^\alpha u_2)(-t^*, x) + (\partial_x u_2)(-t^*, x) = 0 \\ -(D_{t^*}^\alpha u_1)(-t^*, x) + (\partial_x u_1)(-t^*, x) = 0 \end{cases}, \quad (4.2.28)$$

mientras que si $A = A_2$ y $B = B_2$, equivale a

$$\begin{cases} (D_{t^*}^\alpha u_2^*)(-t^*, x) + (\partial_x u_1^*)(-t^*, x) = 0 \\ -(D_{t^*}^\alpha u_1^*)(-t^*, x) - (\partial_x u_2^*)(-t^*, x) = 0 \end{cases}. \quad (4.2.29)$$

Confrontando ahora los dos sistemas (4.2.7) y (4.2.28), y los dos sistemas (4.2.8) y (4.2.29), recordando la unicidad de las soluciones u_1 y u_2 , podemos concluir que resulta

$$\begin{cases} u_1(-t, x) = u_1(t, x) \\ u_2(-t, x) = u_2(t, x) \end{cases}, \quad \begin{cases} u_1^*(-t, x) = u_1^*(t, x) \\ u_2^*(-t, x) = u_2^*(t, x) \end{cases}. \quad (4.2.30)$$

Por consiguiente, cuando la matriz de invariancia es $T = AB$, la propiedad de simetría temporal es ya, no solo del sistema de ecuaciones de Dirac generalizadas (4.1.1), sino que también de cada una de las componentes u_1 y u_2 ó u_1^* y u_2^* de su solución.

Observación 4.2.3 *Al considerar un problema de Cauchy asociado al sistema de ecuaciones de Dirac generalizadas (4.1.1), para aquellos valores de α para los cuales ambas componentes de la solución de dicho sistema resultan invariantes por inversión temporal, se podría escribir la condición inicial relativa a cada componente como $u(0, x)$ en lugar de $u(0+, x)$, gracias a la simetría temporal.*

4.2.3. Inversión espacio-temporal

Teorema 4.2.3 *El sistema (4.1.1) resulta ser invariante, con respecto a la inversión espacio-temporal*

$$x' = -x, t^* = -t, \quad \bar{\psi}(t^*, x') = R\psi(t(t^*), x(x')), \quad (4.2.31)$$

cuando D_t^α es especificada según cualquiera de las dos definiciones de Riemann-Liouville (1.2.8) o de Caputo (1.2.46) con extremo inferior de integración $a = 0$, para los dos conjuntos siguientes de valores de α :

$$\alpha = \frac{1 + 2k}{1 + 2n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad n = k, k + 1, k + 2, \dots,$$

ó

$$\alpha = \frac{2k}{1+2n}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad n = k, k+1, k+2, \dots$$

En el primer caso la matriz de invariancia es $R = AB$, mientras que en el segundo lo son $R = A$ y $R = B$.

Demostración. El sistema de ecuaciones (4.1.1) es invariante por inversión espacio-temporal (4.2.31), si existe una matriz R de forma que $\bar{\psi}(t^*, x')$ verifique, para el caso $D_t^\alpha = {}_a^{RL}D_t^\alpha$, lo siguiente:

$$A {}_a^{RL}D_{t^*}^\alpha \bar{\psi}(t^*, x') + B \partial_{x'} \bar{\psi}(t^*, x') = 0, \quad \bar{\psi}(t^*, x') = R \begin{pmatrix} u_1(t(t^*), x(x')) \\ u_2(t(t^*), x(x')) \end{pmatrix}. \quad (4.2.32)$$

De acuerdo con los resultados (4.2.3) y (4.2.18), si se vuelve a restringir el estudio al caso de $a = 0$ en el extremo de integración del operador de derivación fraccionario, se obtiene

$$A {}_0^{RL}D_{t^*}^\alpha \bar{\psi}(t^*, x') + B \partial_{x'} \bar{\psi}(t^*, x') = (-1)^\alpha A R {}_0^{RL}D_t^\alpha \psi(t, x) - B R \partial_x \psi(t, x)$$

y entonces $\bar{\psi}(t^*, x')$ verifica (4.2.32), si se cumple

$$(-1)^\alpha R^{-1} A R {}_0^{RL}D_t^\alpha \psi(t, x) - R^{-1} B R \partial_x \psi(t, x) = 0, \quad (4.2.33)$$

o, en una forma equivalente, si

$$\begin{cases} (-1)^\alpha AR = RA \\ BR + RB = 0 \end{cases}, \quad \text{ó} \quad \begin{cases} (-1)^\alpha AR + RA = 0 \\ BR = RB \end{cases}. \quad (4.2.34)$$

Ahora, como también hemos operado en el estudio de la simetría temporal, hay que distinguir dos casos:

- si $(-1)^\alpha = -1$; es decir, si

$$\alpha = \frac{1+2k}{1+2n}; \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad n = k+1, k+2, k+3, \dots,$$

hay invariancia espacio-temporal del sistema (4.1.1), siendo la matriz $R = AB = -BA$.

- si $(-1)^\alpha = 1$; es decir, si

$$\alpha = \frac{2k}{1+2n}; \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad n = k, k+1, k+2, \dots,$$

hay invariancia espacio-temporal del sistema (4.1.1), siendo $R = A$ ó $R = B$.

Todo permanece invariado cuando se utiliza la derivada fraccionaria de Caputo, debido a los resultados (4.2.20) y (4.2.21) de la sección anterior. ■

Empleando un razonamiento idéntico al que se ha conducido en la sección anterior sobre la simetría temporal, una vez más hay que resaltar que, cuando las matrices de

invariancia son $R = A$ o $R = B$, la simetría espacio-temporal del sistema de ecuaciones de Dirac generalizadas (4.1.1) es una propiedad del conjunto de las dos componentes de su solución y no de cada componente, al resultar

$$\begin{cases} u_1(-t, -x) = u_2(t, x) \\ u_2(-t, -x) = u_1(t, x) \end{cases}, \quad (4.2.35)$$

cuando empleamos las matrices A_1 y B_1 , y

$$\begin{cases} u_2^*(-t, -x) = -u_2^*(t, x) \\ u_1^*(-t, -x) = u_1^*(t, x) \end{cases}, \quad (4.2.36)$$

con las matrices A_2 y B_2 .

Por el contrario, cuando la matriz de invariancia es $R = AB$, entonces resulta

$$\begin{cases} u_1(-t, -x) = u_1(t, x) \\ u_2(-t, -x) = u_2(t, x) \end{cases}, \quad \begin{cases} u_1^*(-t, -x) = u_1^*(t, x) \\ u_2^*(-t, -x) = u_2^*(t, x) \end{cases} \quad (4.2.37)$$

y la simetría espacio-temporal es ya una propiedad no solo del sistema de ecuaciones de Dirac generalizadas (4.1.1), sino que también de cada una de las componentes u_1 y u_2 ó u_1^* y u_2^* de su solución.

4.2.4. Traslación espacio-temporal y transformación de Galileo: dos casos de asimetría interna

En esta sección se presentan dos casos de asimetría interna de las ecuaciones fraccionarias de evolución (4.1.1) cuando se opera sobre ellas con una transformación que involucra a la variable temporal.

Una traslación espacio-temporal consiste en los cambios de variables $t^* = t + t_0$, $x' = x + x_0$, con t_0 y x_0 constantes, y en asumir

$$\tilde{\psi}(t^*, x') = V\psi(t(t^*), x(x')). \quad (4.2.38)$$

Entonces, el sistema de ecuaciones (4.1.1) es invariante con respecto a esta transformación si existe una matriz V de forma que $\tilde{\psi}(t^*, x')$ verifique, si elegimos por ejemplo $D_t^\alpha = {}^C D_t^\alpha$, que

$$A {}^C D_{t^*}^\alpha \tilde{\psi}(t^*, x') + B \partial_{x'} \tilde{\psi}(t^*, x') = 0, \quad \tilde{\psi}(t^*, x') = V \begin{pmatrix} u_1(t(t^*), x(x')) \\ u_2(t(t^*), x(x')) \end{pmatrix}. \quad (4.2.39)$$

Resulta

$$\partial_{x'} \tilde{\psi}(t^*, x') = V \partial_x \psi(t, x),$$

y

$${}^C D_{t^*}^\alpha \tilde{\psi}(t^*, x') = V {}^C D_{t^*}^\alpha \psi(t(t^*), x(x')) = V {}_{a-t_0}^C D_t^\alpha \psi(t, x),$$

por lo que sólo puede tenerse invariancia con respecto a la traslación espacial, es decir, cuando $t_0 = 0$. En este caso, entonces, una V cualquiera es una matriz de simetría para

el sistema (4.1.1) al ser $\psi(t, x)$ su solución y solución del mismo sistema multiplicado por la matriz V por la derecha. Se repiten los mismos resultados cuando $D_t^\alpha = {}^R L D_t^\alpha$.

Esta asimetría interna de las ecuaciones fraccionarias de evolución con respecto a la traslación temporal es debida al carácter no-local de la derivada fraccionaria en el tiempo, y contrasta con la invariancia de la ecuación de Dirac clásica bajo la misma transformación, necesaria para que el principio de relatividad quede verificado.

Otra transformación importante en el marco de la física es la de Galileo, que consiste en operar el cambio de variables

$$\begin{cases} x' = x + vt \\ t' = t \end{cases}, \quad (4.2.40)$$

con $v > 0$ constante, y expresar

$$\hat{\psi}(t', x') = W\psi(t, x(x', t)) \quad (4.2.41)$$

en (4.1.1). El sistema resulta ser invariante bajo esta transformación si existe una matriz W de forma que, cuando $D_t^\alpha = {}^C D_t^\alpha$, $\hat{\psi}(t', x')$ verifique que

$$A {}^C D_{t'}^\alpha \hat{\psi}(t', x') + B \partial_{x'} \hat{\psi}(t', x') = 0, \quad \hat{\psi}(t', x') = W \begin{pmatrix} u_1(t, x(x', t)) \\ u_2(t, x(x', t)) \end{pmatrix}. \quad (4.2.42)$$

Resulta

$$\partial_{x'} \hat{\psi}(t', x') = W \frac{\partial}{\partial x} \psi(t, x),$$

y

$$\begin{aligned} {}^C D_{t'}^\alpha \hat{\psi}(t', x') &= W {}^C D_t^\alpha \psi(t, x(x', t)) = W \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{\partial}{\partial \tau} \psi(\tau, x(x', \tau)) \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} d\tau = \\ &= W \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \left[\frac{\psi_\tau(\tau, x)}{(t-\tau)^\alpha} - v \frac{\psi_x(\tau, x)}{(t-\tau)^\alpha} \right] d\tau = W {}^C D_t^\alpha \psi(t, x) - v W {}_a I_t^{1-\alpha} \psi_x(t, x), \end{aligned}$$

donde ${}_a I_t^\alpha$ es la integral de Riemann-Liouville de orden α definida en (1.2.2).

Utilizando estos resultados en (4.2.42), se obtiene

$$\begin{aligned} A {}^C D_{t'}^\alpha \hat{\psi}(t', x') + B \partial_{x'} \hat{\psi}(t', x') &= \\ &= A W {}^C D_t^\alpha \psi(t, x) - v A W {}_a I_t^{1-\alpha} \psi_x(t, x) + B W \partial_x \psi(t, x). \end{aligned} \quad (4.2.43)$$

La expresión (4.2.43) se repite cuando elegimos la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, aplicando la propiedad (1.2.50) para $f \in AC(a, \infty)$.

Ahora bien, el sistema

$$A W {}_a I_t^{1-\alpha} \psi_x(t, x) = 0 \quad (4.2.44)$$

tiene siempre la solución idénticamente nula

$${}_a I_t^{1-\alpha} \psi_x(t, x) = 0,$$

que, debido a la propiedad (1.2.39), implica $\psi_x(t, x) = 0$; es decir, $\psi(t, x) = \psi(t)$ función constante en x para todo α , donde $0 < \alpha < 1$. Pero si $\psi(t, x) = \psi(t)$, entonces pierde de sentido realizar la transformación de Galileo sobre el sistema (4.1.1), ya que ésta dejaría al sistema invariado.

Pasamos pues a considerar el caso en el que el sistema (4.2.44) no tenga la solución idénticamente nula. Entonces, cuando $A = A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ó $A = A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, de acuerdo con las definiciones (3.1.8) y (3.1.11), si indicamos con $W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$ la matriz W , el sistema (4.2.44), en ambos casos, se reduce a

$$\begin{cases} w_{21a} I_t^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} u_1(t, x) + w_{22a} I_t^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} u_2(t, x) = 0 \\ w_{11a} I_t^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} u_1(t, x) + w_{12a} I_t^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} u_2(t, x) = 0 \end{cases} ;$$

entonces, si W es una matriz cuyo determinante es nulo, es decir, $w_{12}w_{21} - w_{11}w_{22} = 0$, el sistema (4.2.44) tiene solución $\frac{\partial}{\partial x} u_1(t, x) = -\frac{w_{22}}{w_{21}} \frac{\partial}{\partial x} u_2(t, x)$ que implica $u_1(t, x) = -\frac{w_{22}}{w_{21}} u_2(t, x) + c(t)$, con $c(t)$ función contante en x . Entonces, para soluciones $\psi(t, x)$ del sistema (4.1.1) cuyas componentes u_1 y u_2 cumplan estos requisitos, tenemos que el sistema (4.2.43) vale cero para cualquiera elección de la matriz W cuyo determinante sea nulo.

Se puede pues concluir que, en general, el sistema de ecuaciones (4.1.1) no presenta invariancia con respecto a la transformación de Galileo, del mismo modo que no lo hace el sistema de Dirac clásico. No obstante, bajo ciertas hipótesis sobre las funciones u_1 y u_2 , se puede tener tal invariancia. Esto pasa si $\frac{\partial}{\partial x} u_1(t, x) = -\frac{w_{22}}{w_{21}} \frac{\partial}{\partial x} u_2(t, x)$ y la matriz de invariancia W es una matriz cualquiera de orden 2×2 con determinante nulo.

4.3. Cantidad conservada para las ecuaciones fraccionarias de Dirac

Se puede demostrar fácilmente que el sistema de ecuaciones clásicas de Dirac, obtenido a partir de la expresión (4.1.1) cuando $\alpha = 1$, resulta ser invariante bajo la traslación espacio-temporal, pero no bajo la transformación de Galileo. La invariancia con respecto a traslaciones temporales está relacionada con la existencia de una cantidad conservada: el Hamiltoniano o energía.

En efecto, es conocido [109, 152] que la densidad de Lagrange para esta ecuación clásica está dada por

$$\mathcal{L}(t, x) = \bar{\psi} A \partial_t \psi + \bar{\psi} B \partial_x \psi,$$

donde $\psi = \psi(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x))^T$; $\bar{\psi} = \bar{\psi}(t, x) = \psi^+ A$, y $\psi^+ = \psi^+(t, x) = (u_1^+(t, x), u_2^+(t, x))$ es el complejo conjugado de ψ que verifica la ecuación conjugada de (4.1.1) con $\alpha = 1$:

$$\partial_t \psi^+ A^+ + \partial_x \psi^+ B^+ = 0.$$

La densidad Hamiltoniana será por lo tanto

$$\mathcal{H}(t, x) = \frac{\partial \mathcal{L}(t, x)}{\partial(\partial_t \psi)} \partial_t \psi - \mathcal{L}(t, x) = \bar{\psi} A \partial_t \psi - \mathcal{L}(t, x) = -\psi^+ C \partial_x \psi, \quad (4.3.1)$$

con $C = AB = -BA$. El Hamiltoniano viene definido por

$$H(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(t, x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^+ C \partial_x \psi dx, \quad (4.3.2)$$

y su derivada temporal,

$$\frac{d}{dt} H(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x [\psi^+ \partial_x \psi] dx, \quad (4.3.3)$$

si se restringe el estudio a las matrices A y B exclusivamente reales, de forma que valga $\partial_t \psi^+ = -\partial_x \psi^+ C$. En este caso, asumiendo, como ejemplo, la condición inicial $\psi^+ \partial_x \psi \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$, se puede concluir que existe una cantidad conservada asociada a la ecuación (4.1.1) cuando $\alpha = 1$, dada por el Hamiltoniano (4.3.2).

En el Teorema que sigue se muestra cómo, de forma análoga al caso de Dirac clásico, es posible encontrar una cantidad conservada asociada al sistema de ecuaciones fraccionarias de evolución del tipo de Dirac (4.1.1) cuando $0 < \alpha < 1$, a pesar de que éste no presente simetría temporal para todos los valores de α en el intervalo en consideración.

Teorema 4.3.1 *Sea (4.1.1) un sistema de ecuaciones en el que las matrices A y B son reales y verifican la condición (3.1.2), y sea la derivada fraccionaria D_t^α especificada indistintamente según las definiciones de Riemann-Liouville (1.2.8) o de Caputo (1.2.46); si $u_1(t, x)$ y $u_2(t, x)$ pertenecen al espacio $\mathbb{R}^+ \times \bar{\mathcal{S}}$, donde $\bar{\mathcal{S}}$ está definido en (1.2.88), entonces existe una cantidad conservada asociada a (4.1.1) cuando $0 < \alpha < 1$, dada por*

$$H_\alpha(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^T C \partial_x \psi dx.$$

Demostración. De forma análoga a lo hecho en el caso de Dirac clásico, se empieza con definir formalmente una *densidad de Lagrange fraccionaria* asociada a (4.1.1)

$$\mathcal{L}^\alpha(t, x) = \bar{\psi} A \partial_t^\alpha \psi + \bar{\psi} B \partial_x \psi, \quad (4.3.4)$$

y una *densidad Hamiltoniana fraccionaria* formal

$$\mathcal{H}_\alpha(t, x) = \frac{\partial \mathcal{L}^\alpha(t, x)}{\partial (\partial_t^\alpha \psi)} \partial_t^\alpha \psi - \mathcal{L}^\alpha(t, x) = \bar{\psi} A \partial_t^\alpha \psi - \mathcal{L}^\alpha(t, x) = -\psi^+ C \partial_x \psi. \quad (4.3.5)$$

Se habla de definiciones *formales* porque no se ha verificado un principio variacional para ellas.

La expresión (4.3.5) resulta ser equivalente a la (4.3.1); y para matrices A y B reales, dicha expresión puede ser simplificada observando que, si ψ es solución de (4.1.1), también lo será ψ^+ , y por lo tanto siempre se puede encontrar una solución real de la misma.

Asumiremos entonces que ψ es una solución real de (4.1.1), por lo que se define el *Hamiltoniano fraccionario* de la forma siguiente:

$$H_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_\alpha(t, x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^T C \partial_x \psi dx \quad (4.3.6)$$

y su derivada temporal como

$$\frac{d}{dt}H_\alpha(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} [\partial_t \psi^T C \partial_x \psi + \psi^T C \partial_x \partial_t \psi] dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x [\psi^T C \partial_t \psi] dx. \quad (4.3.7)$$

En la última igualdad se ha utilizado la equivalencia $\partial_t \psi^T C \partial_x \psi = \partial_x \psi^T C \partial_t \psi$ debido al hecho de que la matriz $C = AB$, con A y B reales, sólo puede ser de dos tipos:

$$C_1 = A_1 B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad C_2 = A_2 B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

de acuerdo con las definiciones dadas en (3.1.8) y (3.1.11).

Ahora, cuando $D_t^\alpha = {}^{RL}D_t^\alpha$, se cumple la igualdad

$$({}^{RL}D_t^\alpha \psi)(t, x) = ({}_0I_t^{1-\alpha} \partial_t \psi)(t, x) + \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \psi(0, x), \quad (4.3.8)$$

donde

$$({}^{RL}D_t^\alpha \psi(0, x))(t, x) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \psi(0, x),$$

de acuerdo con la equivalencia (1.2.50); asimismo, al aplicar la definición de la derivada de Caputo, para $D_t^\alpha = {}^C D_t^\alpha$ resulta:

$$({}^C D_t^\alpha \psi)(t, x) = ({}_0I_t^{1-\alpha} \partial_t \psi)(t, x). \quad (4.3.9)$$

Si ahora se introduce la derivada de Riemann-Liouville en el sistema (4.1.1), obtenemos

$$A({}^{RL}D_t^\alpha \psi)(t, x) + B \partial_x \psi(t, x) = 0, \quad \text{donde} \quad \psi(t, x) = \begin{pmatrix} u_1(t, x) \\ u_2(t, x) \end{pmatrix}. \quad (4.3.10)$$

Recordando que esta derivada fraccionaria es el operador inverso izquierdo de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville y teniendo en cuenta la expresión (4.3.8) junto con las propiedades (1.2.20) y (1.2.35), se deduce que

$$\begin{aligned} (\partial_t \psi)(t, x) &= -C \partial_x ({}^{RL}D_t^{1-\alpha} \psi)(t, x) - A ({}^{RL}D_t^{1-\alpha} \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \psi(0, x))(t, x) = \\ &= -C \partial_x ({}^{RL}D_t^{1-\alpha} \psi)(t, x). \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

De acuerdo con la definición (4.3.9), cuando la derivada fraccionaria que aparece en el sistema (4.1.1) es la de Caputo, éste sistema conduce de nuevo al mismo resultado obtenido con la derivada de Riemann-Liouville:

$$(\partial_t \psi)(t, x) = -C \partial_x ({}^{RL}D_t^{1-\alpha} \psi)(t, x). \quad (4.3.12)$$

Para el caso particular de $\alpha = 1/2$, con ambas definiciones se verifica la siguiente igualdad

$$(\partial_t \psi)(t, x) = C^2 (\partial_x^2 \psi)(t, x) = (\partial_x^2 \psi)(t, x). \quad (4.3.13)$$

Por consiguiente, si volvemos a calcular la derivada temporal (4.3.7) del Hamiltoniano fraccionario, debido a las equivalencias (4.3.11) y (4.3.12) su resultado será el mismo si utilizamos la derivada de Riemann-Liouville o la de Caputo. En concreto, resulta:

$$\frac{d}{dt}H_\alpha(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x [\psi^T C \partial_t \psi] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x [\psi^T \partial_x {}^{RL}D_t^{1-\alpha} \psi] dx, \quad (4.3.14)$$

donde $0 < \alpha < 1$; para $\alpha = 1/2$ tenemos el caso particular

$$\frac{d}{dt}H_{1/2}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} -\partial_x [\psi^T C \partial_x^2 \psi] dx. \quad (4.3.15)$$

Podemos entonces concluir que, para $0 < \alpha < 1$ y si se verifica la condición

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H_\alpha(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x [\psi^T \partial_x {}^{RL}D_t^{1-\alpha} \psi] dx = \\ &= [u_1 \partial_x {}^{RL}D_t^{1-\alpha} u_1 + u_2 \partial_x {}^{RL}D_t^{1-\alpha} u_2] \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = 0, \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

existe una cantidad conservada asociada a la ecuación (4.1.1) dada por el Hamiltoniano fraccionario (4.3.6).

Para que exista la cantidad conservada $H_{1/2}(t)$, se puede deducir una segunda condición equivalente a (4.3.16). En efecto, a partir de la expresión (4.3.15), tenemos:

$$\frac{d}{dt}H_{1/2}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} -\partial_x [\psi^T C \partial_x^2 \psi] dx = -\psi^T C \partial_x^2 \psi \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = 0,$$

que se puede expresar como

$$(u_1 \partial_x^2 u_1 - u_2 \partial_x^2 u_2) \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = 0, \quad (4.3.17)$$

cuando $C = C_1$, y como

$$(u_1 \partial_x^2 u_2 + u_2 \partial_x^2 u_1) \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = 0, \quad (4.3.18)$$

cuando $C = C_2$.

Las condiciones (4.3.16), (4.3.17) y (4.3.18) se satisfacen si las funciones $u_1(t, x)$ y $u_2(t, x)$ pertenecen al espacio $\mathbb{R}^+ \times \bar{\mathcal{S}}$, donde $\bar{\mathcal{S}}$ viene definido en (1.2.88). ■

Observación 4.3.1 *En el Teorema 3.4.1, se ha encontrado la solución fundamental localizada $u_1^\lambda(t, x)$ en las formas (3.4.4) y (3.4.5) del problema de Cauchy (3.4.1), cuando $\alpha \neq 1$. Dicho problema, con $\lambda = 1$, es equivalente al constituido por la primera de las dos ecuaciones de componentes separadas en el sistema (4.2.7) cuando $D_t^\alpha = {}^C_0D_t^\alpha$ junto con las condiciones:*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi(t, x) = 0, \quad \psi(0+, x) = \delta(x).$$

La solución de la otra ecuación del sistema (4.2.7) cuando $D_t^\alpha = {}^C_0D_t^\alpha$, y conjuntamente al mismo problema de Cauchy, será $u_2^\lambda(t, x) = u_1^{-\lambda}(t, x)$ calculada para $\lambda = 1$.

La matriz C asociada al sistema de ecuaciones (4.2.7) vale

$$C = A_1 B_1 = C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

las funciones $u_1(t, x) = u_1^\lambda(t, x)$ y $u_2(t, x) = u_2^\lambda(t, x)$ son las que hemos llamado soluciones no acopladas del sistema de ecuaciones fraccionarias de Dirac (4.1.1).

El resultado (1.3.11) sobre el comportamiento asintótico de la función de Wright $W(z; \alpha, \beta)$ para el caso particular de $z < 0$ real, $\alpha = -\nu$, $\beta = 1 - \nu$ y $0 < \nu < 1$, asegura un decaimiento asintótico de tipo exponencial de las funciones u_1 y u_2 ; por lo tanto, se cumple que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |u_h(t, x)| = 0$ para $h = 1, 2$, lo cual está en consonancia con el requisito de que estas dos funciones sean localizadas.

Para demostrar que la cantidad (4.3.6) se conserva para $0 < \alpha < 1$, es necesario analizar el comportamiento de $\partial_x {}^{RL}_0D_t^{1-\alpha} u_h(t, x)$ para $h = 1, 2$.

Resulta la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} {}^{RL}_0D_t^{1-\alpha} \left(\frac{1}{t^\alpha} W \left(-\frac{|x|}{t^\alpha}; -\alpha, 1 - \alpha \right) \right) &= \partial_t I_t^\alpha \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-(|x|)^k t^{-\alpha k - \alpha}}{k! \Gamma(-\alpha k + 1 - \alpha)} \right] = \\ &= \partial_t \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-(|x|)^k t^{-\alpha k}}{k! \Gamma(1 - \alpha k)} \right] = \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-(|x|)^k t^{-\alpha k - 1}}{k! \Gamma(-\alpha k)} \right] = \\ &= \frac{1}{t} W \left(-\frac{|x|}{t^\alpha}; -\alpha, 0 \right) = \frac{\alpha |x|}{t^{\alpha+1}} W \left(-\frac{|x|}{t^\alpha}; -\alpha, 1 - \alpha \right) \end{aligned}$$

donde se ha empleado la propiedad (1.3.12) de la función de Wright; es decir, $W(-z; -\nu, 1 - \nu) = 1/(\nu z) W(-z; -\nu, 0)$. En consecuencia, la propiedad (1.3.11) asegura que ${}^{RL}_0D_t^{1-\alpha} u_h(t, x)$ y $\partial_x {}^{RL}_0D_t^{1-\alpha} u_h(t, x)$ tengan un decaimiento de tipo exponencial cuando $|x| \rightarrow \infty$ para $h = 1, 2$.

Por otro lado, las soluciones $u_1^*(t, x)$ y $u_2^*(t, x)$ de las dos ecuaciones acopladas del sistema (4.2.8) cuando $D_t^\alpha = {}^C_0D_t^\alpha$ y junto con el problema de Cauchy (3.3.19), (3.3.20) están dadas, cuando $\alpha \neq 1$, por las expresiones (3.4.25) y (3.4.26) con $\lambda = 1$. Al ser estas $u_1^*(t, x)$ y $u_2^*(t, x)$ combinación lineal de las soluciones no acopladas (3.4.4) y (3.4.5) por el resultado presentado en el Teorema 3.2.1, siguen cumpliendo las condiciones (4.3.16), asegurando así que la cantidad (4.3.6) se mantenga conservada, para todo $0 < \alpha < 1$.

Observación 4.3.2 La restricción asumida, de considerar sólo soluciones del sistema (4.1.1) que sean reales, permite interpretar físicamente sus componentes como los ya mencionados “difunores”, análogos a los “espinores” de la Mecánica Cuántica.

4.4. Conclusiones

En este capítulo se estudian nuevos aspectos de la que es una generalización posible de la ecuación clásica libre de Dirac (en ausencia de campos); esto es, el sistema de ecuaciones

fraccionarias de evolución-difusión del tipo de Dirac (4.1.1), ya introducidas y estudiadas analíticamente en el Capítulo 3. De forma análoga a la ecuación fraccionaria de difusión (2.1.5), este sistema puede interpretarse como una interpolación, en este caso “desde el interior”, de las ecuaciones clásicas de difusión (2.1.1) y de ondas (2.1.2). Resulta, por lo tanto, interesante conocer algún detalle sobre el ámbito en el que el comportamiento de tipo parabólico (propio de la ecuación de difusión) y el de tipo hiperbólico (propio de las ecuaciones de ondas y de Dirac) se conservan tras la extensión fraccionaria.

En particular, siguiendo con la analogía entre la ecuación fraccionaria de evolución-difusión y la ecuación de Dirac clásica, se han estudiado las simetrías internas del sistema fraccionario con respecto a ciertas transformaciones en el espacio y/o en el tiempo.

El sistema fraccionario presenta invariancia por inversión espacial para todo $0 < \alpha \leq 1$, así como las ecuaciones de difusión y de ondas clásicas; no obstante, hay que resaltar una diferencia sustancial entre el comportamiento de estas últimas dos ecuaciones y el de la primera. En efecto, contrariamente a lo que ocurre con las ecuaciones de difusión y de ondas clásicas, en el caso de las ecuaciones de Dirac generalizadas (4.1.1) la simetría espacial es una propiedad del sistema y no de cada componente u_1 y u_2 de su solución.

En relación a la inversión temporal; la ecuación generalizada (4.1.1) reúne ambos comportamientos, el parabólico y el hiperbólico, al ser al mismo tiempo invariante por inversión temporal para un conjunto infinito de valores de α (así como lo es la ecuación de ondas clásica) y al no ser invariante para el conjunto obtenido como diferencia entre éste y el intervalo de valores $0 < \alpha \leq 1$ (así como no lo es la ecuación de difusión clásica). No obstante, para una cierta elección de las matrices de inversión temporal, de forma análoga a lo que ocurría con la simetría espacial, la simetría temporal es una propiedad del conjunto de las dos componentes de la solución del sistema de ecuaciones de Dirac generalizadas (4.1.1), y no de cada componente. Pero esta vez sí existe una determinada matriz de inversión temporal para la cual la propiedad de simetría temporal es ya, no solo del sistema de ecuaciones de Dirac generalizadas (4.1.1), sino que también de cada una de las componentes de su solución.

El comportamiento del sistema de ecuaciones de Dirac fraccionarias (4.1.1) con respecto a la inversión espacio-temporal es el mismo que presenta frente a la inversión exclusivamente temporal; en efecto, posee simetría espacio-temporal para el mismo conjunto infinito de valores de α para los cuales tiene simetría temporal, variando únicamente las matrices de inversión correspondientes a cada determinación de α .

Por otro lado, el sistema (4.1.1) nunca resulta ser invariante por traslación temporal debido a la propiedad de no-localidad de la derivada fraccionaria en el tiempo que hace que una traslación de este tipo en la variable temporal modifique el intervalo de integración del operador fraccionario. La falta de invariancia del sistema fraccionario del tipo de Dirac con respecto a la traslación temporal contrasta con la bien conocida invariancia del sistema de Dirac clásico, pero no impide la existencia de una cantidad conservada asociada al sistema fraccionario, análoga del Hamiltoniano para el sistema de Dirac clásico, y que denominamos *Hamiltoniano fraccionario*.

Con respecto a la transformación de Galileo, resulta interesante observar que aunque en general el sistema de ecuaciones fraccionarias de evolución no presente invariancia, se puede encontrar una clase restringida de funciones para las cuales sí es válida esta propiedad del sistema.

5. RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES FRACCIONARIAS DE EVOLUCIÓN DEL TIPO DE DIRAC

5.1. Introducción

A la hora de construir esquemas numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias, juega un papel fundamental el carácter de *no localidad* de los operadores integrales que definen las derivadas de orden real arbitrario.

En efecto, el hecho de que el valor de la derivada fraccionaria $({}_a D_t^\alpha u)(t)$, que resulta expresada mediante una integral definida, dependa de los valores de la función u en el intervalo $[a, t]$, es decir, de toda su historia, contrasta con el comportamiento local de la derivada clásica de orden entero, que puede ser evaluada a partir de valores de u en un intervalo arbitrariamente pequeño alrededor de t . Esta propiedad de *memoria* de las derivadas fraccionarias hace que toda discretización que se use para su aproximación tenga una estructura compleja que aumenta el coste computacional del algoritmo correspondiente con respecto a los métodos similares para las ecuaciones diferenciales de orden entero.

Una primera fórmula de aproximación para la derivada fraccionaria ${}_a D_t^\alpha$, fue propuesta por Grünwald [62] y Letnikov [86] que definieron este operador generalizando el concepto clásico de derivación como límite de un cociente incremental, utilizando la fórmula

$$({}^G L D_t^\alpha u)(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\nabla_h^\alpha u)(t)}{h^\alpha}. \quad (5.1.1)$$

El mismo operador en forma de diferencias finitas generalizadas,

$$\frac{(\nabla_h^\alpha u)(t)}{h^\alpha} = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{\alpha}{j} \frac{u(t - j h)}{h^\alpha}, \quad \left[\frac{t - a}{h} \right] = n, \quad (5.1.2)$$

fue utilizado como equivalente discreto del operador $({}^G L D_t^\alpha u)(t)$.

En algunas aplicaciones de la fórmula de aproximación de Grünwald y Letnikov para la derivada fraccionaria (véase por ejemplo [134]) se ha utilizado un principio llamado de *memoria corta*, que consiste en tener en cuenta sólo el pasado reciente de la función integrada; es decir, se considera únicamente un intervalo $[t - L, t]$ de amplitud $L < t - a$, debido a que la expresión de los coeficientes en (5.1.2) hace que pese menos el comportamiento de $u(t)$ cerca del punto inicial $t = a$, y que por lo tanto se pueda omitir esta parte de la historia de la función.

El operador de Grünwald y Letnikov coincide con el de Riemann-Liouville (véase [113]) para una amplia clase de funciones que aparecen en aplicaciones reales de la física y la ingeniería: las funciones $u(t) \in C^{m-1}(a, \infty)$, con $u^{(m)}(t) \in L_1(a, \infty)$, siendo α el orden de la derivada fraccionaria y $m - 1 < \alpha \leq m$.

Debido a tal equivalencia, en la literatura relacionada con la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales fraccionarias se ha utilizado preferentemente la definición de Riemann-Liouville en la formulación de los problemas que involucran a tales ecuaciones, y luego se ha pasado a la definición de Grünwald y Letnikov para obtener la solución numérica.

Posteriormente se han ido desarrollando métodos alternativos para la construcción de fórmulas de aproximación de integrales y derivadas fraccionarias, muchos de ellos basados en la utilización de *fórmulas de cuadratura*.

Oldham y Spanier [125], en su libro sobre el Cálculo Fraccionario del 1974, obtenían una aproximación para la derivada de Riemann-Liouville de una función u , integrando n veces por partes su definición (1.2.4), y aproximando sucesivamente la integral que contiene la $u^{(n)}(z)$. Este método de discretización es llamado L2. Recientemente, Lynch y otros colaboradores [98] han desarrollado una variante llamada L2C, en la que asumen una fórmula de aproximación simétrica de la integral que contiene la $u^{(n)}(z)$.

Sin embargo, de entre las teorías basadas en el empleo de fórmulas de cuadratura para la aproximación de los operadores de derivación e integración fraccionarios de Riemann-Liouville, la que más aplicaciones ha tenido hasta ahora es probablemente la llamada teoría del *Cálculo Fraccionario discretizado*. Dicha teoría fue sintetizada por Lubich a partir del año 1985 [92, 93, 94, 95], cuando publicó una serie de artículos sobre el tratamiento numérico de ecuaciones integrales fraccionarias, en particular lineales y no lineales del tipo de Abel de primera y de segunda especie, y también de ecuaciones integro-diferenciales ordinarias con operadores integrales fraccionarios.

Algunas aplicaciones de este método se encuentran por ejemplo en los artículos del mismo Lubich [96], de Sanz-Serna [148], de López Marcos [90] y de Xu-Da [181].

En [23] y [87] se recogen numerosas referencias a métodos numéricos para integrales fraccionarias, dentro del ámbito del estudio de las ecuaciones integrales del tipo de Abel-Volterra.

Otro algoritmo de aproximación de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville que aplica una fórmula de cuadratura, es el construido por Diethelm en [35], y que junto con el de Lubich será utilizado en los desarrollos de este capítulo, y detallado más adelante.

Aunque existan varios métodos numéricos diferentes para aproximar las soluciones de las ecuaciones diferenciales fraccionarias ordinarias, son pocos los trabajos acerca de la resolución numérica de ecuaciones diferenciales fraccionarias en derivadas parciales, y menos los que involucran ecuaciones de evolución con derivadas fraccionarias de primer grado en el tiempo y derivada clásica de primer grado en el espacio.

Este capítulo está dedicado a la resolución numérica de la ecuación de evolución-difusión del tipo de Dirac con derivada fraccionaria de Caputo (1.2.46) en el tiempo,

$$({}_0^C D_t^\alpha u)(t, x) + \lambda \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = 0 \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}; 0 < \alpha < 1), \quad (5.1.3)$$

junto con la condición inicial

$$u(0+, x) = u_0(x), \quad (5.1.4)$$

donde $u_0(x)$ es una función conocida, y $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

En el Capítulo 3 se ha obtenido analíticamente la solución del problema de valores inicial y de contorno (3.10.1), (3.10.2) y (3.10.3); esta información será muy útil para obtener una estimación del error asociado al método numérico empleado para encontrar la solución aproximada de (5.1.3) junto con (5.1.4).

Es importante volver a subrayar que, como se ha resaltado en el ámbito del Capítulo 1, la derivada fraccionaria de Caputo puede ser considerada como una versión regularizada de la de Riemann-Liouville. En efecto, para funciones f derivables hasta orden $n-1$ en x y para las que exista $({}^{RL}D_{a+}^\alpha f)(x)$, se puede demostrar que es cierta la identidad (1.2.50) que aquí volvemos a escribir como sigue

$$({}^C D_{a+}^\alpha f)(x) = {}^{RL}D_{a+}^\alpha \left[f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(a+) \frac{(x-a)^j}{j!} \right], \quad (5.1.5)$$

donde $n-1 < \alpha \leq n$.

Por consiguiente, cualquier aproximación de la derivada de Caputo de una función puede ser expresada en términos de una aproximación de la derivada de Riemann-Liouville de la función y de las condiciones iniciales enteras. Esta equivalencia entre los dos operadores de derivación fraccionarios ha permitido que en la literatura se desarrollaran las fórmulas discretas que aproximan el operador de derivación fraccionario siempre a partir de la definición de la derivada de Riemann-Liouville, para luego aplicarlas también en la aproximación del operador de Caputo.

En la sección 5.2 se presentarán dos tipos de esquemas en diferencias finitas que aproximan la ecuación (5.1.3), contruidos, respectivamente, aplicando el método de Diethelm y el método multipaso fraccionario de Lubich, para obtener distintas fórmulas discretas de tipo cuadratura convolutiva, que evalúen el operador de derivación fraccionario de Riemann-Liouville. En relación con ambos métodos, se especifica también el orden de convergencia de la fórmula de aproximación de la derivada fraccionaria que se ha obtenido frente a la correspondiente expresión exacta; viendo cómo, en general, resulta ventajoso el método de Diethelm frente al de Lubich, al conducir este primero a aproximaciones con un orden de convergencia mayor cuando el índice de la derivada fraccionaria está comprendido entre 0 y 1.

La Sección 5.2.3 presentará un algoritmo para la resolución numérica de la ecuación (5.1.3) junto con la condición (5.1.4), que resulta ser una generalización del *método clásico de Adams-Bashforth-Moulton en un paso* (también llamado *predictor-corrector*), ampliamente aplicado en la literatura clásica a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Este método ha sido recientemente aplicado, con las debidas modificaciones, a la resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias ordinarias; aquí se formula su expresión para el caso de ecuaciones de evolución fraccionarias en derivadas parciales.

En la Sección 5.3 se desarrollará el estudio de la estabilidad de los esquemas numéricos obtenidos con los métodos de Diethelm y multipaso lineal fraccionario presentados en las secciones 5.2.1 y 5.2.2, mediante un análisis del tipo de von Neumann discreto. La Sección 5.4 desarrolla un breve estudio de las propiedades de disipación y dispersión de

un esquema numérico de entre los anteriormente construidos para aproximar la ecuación (5.1.3). Finalmente, la Sección 5.5 reúne los resultados de las simulaciones numéricas de la ecuación fraccionaria de evolución (5.1.3) junto con la condición inicial (5.1.4) y con una oportuna condición de contorno, obtenidos con los esquemas descritos anteriormente. La exactitud de los métodos es verificada en un caso concreto para el cual se conoce la expresión analítica de la solución de la ecuación de evolución (5.1.3) en estudio.

5.2. Esquemas en diferencias finitas

La propiedad de no localidad de todos los operadores de derivación fraccionarios tiene como consecuencia fundamental un aumento importante en el coste y en la complejidad del algoritmo para aproximarlos. De hecho, en general, la fórmula discreta para evaluar este operador involucra una matriz triangular inferior.

En efecto, si se quiere aproximar por diferencias finitas el valor del operador de derivación de Riemann-Liouville $({}^{RL}_0D_t^\alpha u)(t, x)$ cuando $t \in [0, T]$ y $x \in [a, b]$, se puede proceder de la manera siguiente. Se introducen los puntos de integración temporal equidistantes Δt : $t_n = n\Delta t$, con $n = 0, \dots, N$, $t_0 = 0$, $t_N = T$ y $0 \leq t_n \leq T$; y los puntos espaciales equidistantes Δx : $x_l = a + l\Delta x$ para $l = 0, \dots, M$ con $M = (b - a)/\Delta x$, donde $a \leq x_l \leq b$. Bajo estas hipótesis, u_l^n es la aproximación numérica de $u(t_n, x_l)$, resultando $u_0^n = u(t_n, a) = r(t_n)$ y $u_l^0 = u(0, x_l) = u_0(x_l)$, donde $r(t)$ es una función conocida, del mismo modo que $u_0(x)$ que aparece en (5.1.4).

Entonces, para cada punto espacio-temporal (t_n, x_l) , el valor de la derivada de Riemann-Liouville puede aproximarse como

$$({}^{RL}_0D_{t_n}^\alpha u)(t_n, x_l) \approx \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=0}^n \omega_{n,j} u_l^j, \quad (5.2.1)$$

donde por Δt^α debe entenderse la potencia $(\Delta t)^\alpha$, y los pesos $\omega_{n,j}$ vendrán especificados según el método utilizado. Gracias a la relación (5.1.5), la correspondiente aproximación de la derivada de Caputo será

$$({}^C_0D_{t_n}^\alpha u)(t_n, x_l) \approx \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=0}^n \omega_{n,j} u_l^j - \frac{t_n^{-\alpha} u_0(x_l)}{\Gamma(1 - \alpha)} \quad (5.2.2)$$

cuando $n \neq 0$ (si $n = 0$ $({}^{RL}_0D_{t_n}^\alpha u)(t_n, x_l) = ({}^C_0D_{t_n}^\alpha u)(t_n, x_l) = 0$).

En general, la discretización de $({}^{RL}_0D_t^\alpha u)(t, x)$ sobre los puntos t_0, t_1, \dots, t_N puede por tanto escribirse mediante el siguiente producto matricial que involucra a una matriz triangular inferior:

$$\frac{1}{\Delta t^\alpha} \begin{pmatrix} \omega_{0,0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \omega_{1,0} & \omega_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \omega_{N-1,0} & \cdots & \cdots & \omega_{N-1,N-1} & 0 \\ \omega_{N,0} & \cdots & \cdots & \cdots & \omega_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t_0, x) \\ u(t_1, x) \\ \vdots \\ u(t_{N-1}, x) \\ u(t_N, x) \end{pmatrix}.$$

Por lo que concierne a la discretización en el espacio de la ecuación (5.1.3), se opera como en el caso clásico; por ejemplo, aproximando la derivada primera espacial $\partial/\partial x u(t, x)$ a través de una fórmula en diferencias finitas de Euler explícita o implícita, o una fórmula centrada, como se detallará más adelante.

En lo que sigue, se describen los dos métodos propuestos por Diethelm y por Lubich para encontrar la expresión exacta de los pesos que aparecen en (5.2.1) y (5.2.2).

5.2.1. Método de Diethelm

El primer método del cual se describen las líneas principales, es el de Diethelm, introducido en [35] y basado en una variante fraccionaria del método de Euler regresivo. Está construido a partir de la observación, hecha por D. Elliot [44], de que los operadores de derivación y de integración que aparecen en la definición de la derivada de Riemann-Liouville (1.2.8) pueden intercambiarse, obteniéndose la integral

$$({}^{RL}D_t^\alpha u)(t, x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t \frac{u(\tau, x)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^1 \frac{u(t-t\omega, x)}{\omega^{\alpha+1}} d\omega, \quad (5.2.3)$$

que va interpretada en el sentido de la parte finita de Hadamard.

Si se introduce una malla de puntos uniformemente distribuidos $t_n = \frac{n}{N}$, entonces se puede reescribir la expresión (5.2.3) para cada punto espacio-temporal (t_n, x_l) , con $n = 1, \dots, N$, $l = 0, \dots, M$, como sigue

$$\frac{t_n^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^1 \frac{u(t_n - t_n\omega, x_l)}{\omega^{\alpha+1}} d\omega = \frac{(\frac{n}{N})^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^1 \frac{u(\frac{n}{N} - \frac{n}{N}\omega, x_l)}{\omega^{\alpha+1}} d\omega \quad (5.2.4)$$

y aplicar la fórmula de cuadratura compuesta de primer grado

$$Q_n[g] := \sum_{j=0}^n \beta_{j,n} g(j/n) \approx \int_0^1 g(\tau) \tau^{-\alpha-1} d\tau, \quad (5.2.5)$$

donde los pesos $\beta_{j,n}$ pueden escribirse según la expresión dada en [35, Lemma 2.1]. De aquí, con las oportunas simplificaciones, se puede sustituir (5.2.4) por una fórmula de cuadratura del tipo de (5.2.1), donde

$$\Gamma(2-\alpha)\omega_{n,j} = \begin{cases} 1 & j = n \\ (n-j-1)^{1-\alpha} - 2(n-j)^{1-\alpha} + (n-j+1)^{1-\alpha} & 1 \leq j \leq n-1 \\ (n-1)^{1-\alpha} - (\alpha-1)n^{-\alpha} - n^{1-\alpha} & j = 0 \end{cases} \quad (5.2.6)$$

si $n = 1, \dots, N$ y $\omega_{0,0} = 0$.

Se ha demostrado en [35] que el orden de convergencia de la fórmula de discretización (5.2.1) con los pesos de Diethelm (5.2.6) es $O(\Delta t)^{2-\alpha}$.

En conjunción con esta fórmula de aproximación para el operador de derivación fraccionario en el tiempo, hemos verificado las siguientes discretizaciones del término espacial $\partial/\partial x u(t, x)$:

- la fórmula de Euler hacia adelante

$$\frac{u_{l+1}^n - u_l^n}{\Delta x}, \quad (5.2.7)$$

- la fórmula de diferencias centrada

$$\frac{u_{l+1}^n - u_{l-1}^n}{2\Delta x}, \quad (5.2.8)$$

- la fórmula de Euler regresiva

$$\frac{u_l^n - u_{l-1}^n}{\Delta x}. \quad (5.2.9)$$

Entonces, si en lugar de la ecuación (5.1.3) se escribe la siguiente ecuación integral con núcleo fuertemente singular

$$\frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t \frac{u(\tau, x)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau - \frac{t^{-\alpha} u_0(x)}{\Gamma(1-\alpha)} + \lambda \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = 0, \quad (5.2.10)$$

la ecuación en diferencias finitas correspondiente, cuando se emplean la fórmula (5.2.1) con pesos (5.2.6) en el tiempo y una de las discretizaciones (5.2.7), (5.2.8) y (5.2.9) en el espacio, será respectivamente

$$u_{l+1}^n = \left(1 - \omega_{n,n} \frac{\Delta x}{\lambda \Delta t^\alpha} \right) u_l^n + \frac{\Delta x}{\lambda} \left[\frac{u_0(x_l) t_n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\omega_{n,j}}{\Delta t^\alpha} u_l^j \right], \quad (5.2.11)$$

$$u_{l+1}^n = -\frac{2\Delta x}{\lambda \Delta t^\alpha} \omega_{n,n} u_l^n + u_{l-1}^n + \frac{2\Delta x}{\lambda} \left[\frac{u_0(x_l) t_n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\omega_{n,j}}{\Delta t^\alpha} u_l^j \right] \quad (5.2.12)$$

y

$$u_{l+1}^n = \left[u_l^n + \frac{\Delta x}{\lambda} \left(\frac{u_0(x_{l+1}) t_n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\omega_{n,j}}{\Delta t^\alpha} u_{l+1}^j \right) \right] / \left(1 + \omega_{n,n} \frac{\Delta x}{\lambda \Delta t^\alpha} \right), \quad (5.2.13)$$

para todo $l = 0, \dots, M$ y $n = 1, \dots, N$.

Acerca del análisis de las singularidades de una particular ecuación diferencial fraccionaria no lineal puede mirarse la referencia [162].

Observación 5.2.1 La fórmula de diferencias centrada (5.2.12) no permite calcular los primeros pasos temporales $u_1^n, \forall n = 1, \dots, N$, al no conocerse el valor de u_{-1}^n . Para obviar a este inconveniente, podría utilizarse una de las fórmulas (5.2.11) ó (5.2.13) para calcular estos N pasos, y la expresión (5.2.12) para calcular todos los demás $N \times (M - 1)$ puntos.

De acuerdo con el resultado presentado en [35], el error de las fórmulas discretas (5.2.11) y (5.2.13) que aproximan la solución de la ecuación (5.1.3) junto con (5.1.4), es $O(\Delta t)^{2-\alpha} + O(\Delta x)$; mientras que el error de la fórmula discreta (5.2.12) es $O(\Delta t)^{2-\alpha} + O(\Delta x)^2$.

5.2.2. Método multipaso lineal fraccionario

El segundo método que se ha aplicado en este capítulo es el de Lubich [92, 93], que fue el primero en utilizar la idea de un método multipaso lineal fraccionario para aproximar la integral fraccionaria de Riemann-Liouville.

En efecto, dada la integral de Riemann-Liouville de orden α

$$({}_0I_x^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy, \quad x \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad (5.2.14)$$

este método busca una aproximación numérica de ella en términos de una fórmula de cuadratura de convolución de este tipo

$$(I_h^\alpha f)(x) = h^\alpha \sum_{j=0}^n \omega_{n-j} f(jh) + h^\alpha \sum_{j=0}^s w_{n,j} f(jh) \quad (x = nh), \quad n \geq 0 \quad (5.2.15)$$

donde los *pesos de convolución* ω_j , $j = 0, \dots, n$, ($n \geq 0$), y los *pesos iniciales* $w_{n,j}$, $j = 0, \dots, s$, con s fijo, no dependen de h .

Las cuadraturas de convolución (5.2.15) pueden interpretarse como una extensión natural a ecuaciones del tipo de Abel de los métodos multipaso lineales para ecuaciones diferenciales ordinarias. En efecto, si se considera el problema

$$y'(x) = f(x), \quad y(0) = 0 \quad \iff \quad y(x) = \int_0^x f(s) ds \quad (5.2.16)$$

y se aplica un método multipaso lineal (ρ, σ) para solucionarlo, donde ρ y σ denotan los polinomios generadores del método (véase por ejemplo [66]), entonces la solución numérica de (5.2.16), que indicamos con $(I_h f)(x)$, puede escribirse (véase [91], [108], [173]) como una cuadratura de convolución (5.2.15) con $\alpha = 1$ y pesos ω_j dados por los coeficientes de

$$\omega(\xi) = \frac{\sigma(1/\xi)}{\rho(1/\xi)}, \quad (5.2.17)$$

donde se denota con $\omega(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j \xi^j$ la serie de potencias generadora de la sucesión $\{\omega_j\}_{j=0, \dots, \infty}$.

Ahora, para aproximar la integral de orden entero positivo m ,

$$(I^m f) = \underbrace{II \dots I}_m f,$$

se puede aplicar repetidamente m veces la fórmula $(I_h f)(x)$ que aproxima numéricamente la solución $y = If$ de la ecuación (5.2.16); de esta manera, se obtiene la aproximación

$$I_h^m f = \underbrace{I_h I_h \dots I_h}_m f$$

como una fórmula de cuadratura convolutiva del tipo de (5.2.15) donde $\alpha = m$ y los pesos de convolución resultan ser los coeficientes de la serie de potencias $\omega^{(m)}(\xi) = (\omega(\xi))^m$, con $\omega(\xi)$ dada por la fórmula (5.2.17). Esta forma de operar lleva a la construcción de potencias de orden m de los métodos lineales multipaso.

En [93] también se han considerado potencias de orden real α de los métodos multipaso lineales y se les ha llamado *métodos multipaso lineales fraccionarios*. Además, a través de los Teoremas 2.4, 2.5 y 2.6 de dicha referencia, se ha demostrado que, dada la potencia de orden α

$$\omega^\alpha(\xi) = (\omega(\xi))^\alpha, \quad (5.2.18)$$

de un método multipaso lineal $\omega = (\rho, \sigma)$ que converge con orden p a $({}_0I_x f)(x)$ y que verifica ciertas condiciones adicionales, se pueden construir unos pesos iniciales $w_{n,j}$ de forma que la fórmula de cuadratura $(I_h^\alpha f)(x)$ en (5.2.15), en la que los pesos de convolución ω_j son los coeficientes de (5.2.18), converja con orden p a $({}_0I_x^\alpha f)(x)$.

Debido a que las funciones generadoras verifican

$$\omega^{(\alpha+\beta)}(\xi) = (\omega^{(\alpha)}\omega^{(\beta)})(\xi), \quad (5.2.19)$$

las fórmulas de cuadratura fraccionarias (5.2.15) poseen, cuando $f(0) = 0$, la propiedad del semigrupo

$$(I_h^{(\alpha+\beta)} f)(x) = (I_h^{(\alpha)} I_h^{(\beta)} f)(x). \quad (5.2.20)$$

En efecto, si $f(0) = 0$, se puede poner $s = 0$ en la segunda serie de (5.2.15) que involucra a los pesos iniciales y así eliminarla, mientras que, si $f(0) \neq 0$, entonces es necesario mantener este término de corrección en (5.2.15), por lo que falla el semigrupo. Este mismo comportamiento es presentado por la discretización $D_h^\alpha f(x)$ obtenida con el método de Lubich de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.

En la aplicación que aquí se presenta del método de Lubich o multipaso fraccionario, se utiliza el así llamado *Método de Euler Fraccionario* definido a través de la función generadora

$$\omega^{(\alpha)}(\xi) = (1 - \xi)^{-\alpha}, \quad (5.2.21)$$

por lo que la parte de convolución en la expresión (5.2.15) asume la forma

$$h^\alpha \sum_{j=0}^n \omega_j f(x - jh) = h^\alpha \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{-\alpha}{j} f(x - jh). \quad (5.2.22)$$

Para valores de α negativos, la expresión (5.2.22) coincide con la fórmula de aproximación de la derivada fraccionaria propuesta por Grünwald e Letnikov y que se ha introducido en (5.1.2).

Cuando $\alpha = n$, $n = 1, 2, \dots$, la fórmula (5.2.21) es la función generadora del análogo discreto de la fórmula de cuadratura rectangular izquierda aplicada n veces, mientras que para $\alpha = -n$, $n = 1, 2, \dots$, es la función generadora de la fórmula de diferencias regresiva de orden n , usualmente indicada con (BDF_n) por el nombre inglés “backward difference formula”. En el caso particular de $\alpha = -1$, el método se reduce a la conocida fórmula de diferencias regresiva de 2 puntos, (BDF_1) , que aparece en (5.2.9). Siendo la (BDF_1) una fórmula de orden 1 que satisface las asunciones del Teorema 2.6 en [93] (véase por

ejemplo [66, §5]), el método fraccionario $(BDF_1)^\alpha$ correspondiente es también convergente de orden 1.

Como se había anunciado, una vez calculados los pesos de convolución que aparecen en (5.2.15) a partir de un método multipaso fraccionario, se pueden construir los pesos iniciales $w_{n,j}$ de forma que la (5.2.15) sea del mismo orden del método multipaso lineal que hay detrás. Para ello, estos pesos son obtenidos resolviendo el sistema lineal

$$h^\alpha \sum_{j=0}^s w_{n,j} (jh)^\gamma = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{nh} (nh - \tau)^{\alpha-1} \tau^\gamma d\tau - h^\alpha \sum_{j=0}^n \omega_{n-j} (jh)^\gamma, \quad (5.2.23)$$

donde $\gamma \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A} := \{\gamma = j + l\alpha : j, l \in \{0, 1, 2, \dots\}, 0 \leq \gamma \leq p - 1\}$, $(s + 1) = \text{card}(\mathcal{A})$ y $p \geq 1$ es el orden de precisión de la parte convolutiva de (5.2.15). La (5.2.23) equivale a pedir que la (5.2.15) sea exacta cuando $f(x) = x^\gamma$.

Si se utiliza en (5.2.15) un término de convolución de orden $p = 1$, por ejemplo la (5.2.22), entonces resulta $\gamma = 0$ y $s = 0$ y el sistema (5.2.23) consta sólo de una ecuación

$$h^\alpha w_{n,0} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{nh} (nh - \tau)^{\alpha-1} d\tau - h^\alpha \sum_{j=0}^n \omega_{n-j}, \quad (5.2.24)$$

que es muy sencilla de resolver.

En el caso de métodos de orden $p \geq 2$, el lado derecho en (5.2.23), para valores de n grandes, puede ser calculado sólo con grande error relativo, debido a la cancelación de los dígitos principales. Además, la matriz de los coeficientes $a_{i,j} = (h^\alpha (jh)^\gamma)$ del lado izquierdo del sistema (5.2.23) es, en general, mal-condicionada y también presenta una especial estructura del tipo de Vandermonde exponencial (que es una matriz de Vandermonde generalizada con exponentes reales [143]).

En [36], se estudian las propiedades de los métodos multipaso fraccionarios y se analizan los problemas potenciales que se encuentran en el desarrollo de esquemas de orden superior al primero.

Volviendo a la aplicación que se hace en esta tesis del método de Lubich, el empleo de las fórmulas (5.2.22) y (5.2.24) para calcular respectivamente los pesos de convolución e iniciales llevan a la siguiente fórmula de aproximación de la integral de Riemann-Liouville (5.2.14),

$$(I_h^\alpha f)(x) = h^\alpha \sum_{j=0}^n \omega_{n-j}^{(\alpha)} f(jh) + h^\alpha w_{n,0}^{(\alpha)} f(0) \quad (x = nh), \quad n \geq 0, \quad (5.2.25)$$

donde $\omega_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{-\alpha}{j}$, $w_{n,0}^{(\alpha)} = \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \sum_{j=0}^n \omega_j^{(\alpha)}$, y se ha escrito $\omega_j^{(\alpha)}$ y $w_{n,0}^{(\alpha)}$ en lugar de ω_j y $w_{n,0}$ con el fin de evidenciar la dependencia de estos pesos con α .

Ahora, a partir de la (5.2.25), se puede deducir la correspondiente fórmula de cuadratura convolutiva $D_h^\alpha f(x)$ para el operador de derivación de Riemann-Liouville ${}^{RL}_0 D_x^\alpha f(x)$, con $0 < \alpha < 1$. En efecto, resulta

$$(D_h^\alpha f)(x) = \left(\frac{d}{dx} I_h^{1-\alpha} f \right)(x) = \frac{(I_h^{1-\alpha} f)(nh) - (I_h^{1-\alpha} f)((n-1)h)}{h} =$$

$$= \frac{1}{h^\alpha} \left[\sum_{j=0}^n \omega_j^{(1-\alpha)} f(nh - jh) - \sum_{j=1}^n \omega_{j-1}^{(1-\alpha)} f(nh - jh) + (w_{n,0}^{(1-\alpha)} - w_{n-1,0}^{(1-\alpha)}) f(0) \right]$$

y, siendo

$$(-1)^j \binom{\alpha-1}{j} - (-1)^{j-1} \binom{\alpha-1}{j-1} = (-1)^j \binom{\alpha}{j},$$

y

$$w_{n,0}^{(1-\alpha)} - w_{n-1,0}^{(1-\alpha)} = \frac{n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - \omega_n^{(1-\alpha)} = \frac{n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - (-1)^n \binom{\alpha-1}{n},$$

se puede escribir

$$D_h^\alpha f(x) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^n \bar{\omega}_j^{(\alpha)} f(x - jh) \quad (5.2.26)$$

donde

$$\begin{cases} \bar{\omega}_j^{(\alpha)} = \omega_j^{(-\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j} & j = 0, 1, \dots, n-1 \\ \bar{\omega}_n^{(\alpha)} = (-1)^n \binom{\alpha}{n} + \frac{n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - (-1)^n \binom{\alpha-1}{n} & j = n \end{cases}. \quad (5.2.27)$$

De aquí, se deducen directamente las fórmulas de aproximación del tipo de (5.2.2) para $({}^{RL}D_t^\alpha u)(t, x)$ y $({}^C D_t^\alpha u)(t, x)$, que con el método de Lubich, para cada punto espacio-temporal (t_n, x_l) , tienen respectivamente la forma:

$$({}^{RL}D_{t_n}^\alpha u)(t_n, x_l) \approx \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=0}^n \bar{\omega}_j^{(\alpha)} u_l^{n-j}, \quad (5.2.28)$$

y

$$({}^C D_{t_n}^\alpha u)(t_n, x_l) \approx \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=0}^n \bar{\omega}_j^{(\alpha)} u_l^{n-j} - \frac{t_n^{-\alpha} u_0(x_l)}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad (5.2.29)$$

con los pesos $\bar{\omega}_j^{(\alpha)}$ dados en (5.2.27), donde $n \neq 0$.

El orden de convergencia de la fórmula (5.2.28) a ${}^{RL}D_t^\alpha u(t, x)$, (véase por ejemplo [37]) es $O(\Delta t)^\alpha$ por lo que se puede concluir que el método de Diethelm resulta ventajoso con respecto al de Lubich cuando $0 < \alpha < 1$.

Para cumplir con el objetivo de este capítulo, que es la resolución numérica de la ecuación de evolución fraccionaria del tipo de Dirac (5.1.3), se ha construido el equivalente discreto de esta ecuación utilizando la fórmula (5.2.29) para aproximar la componente temporal y, de forma análoga a lo hecho en el apartado anterior, se ha elegido una entre las fórmulas (5.2.7), (5.2.8) y (5.2.9) para la derivada de orden uno en el espacio. Los esquemas numéricos que proporcionan la solución aproximada de (5.1.3), resultantes de la aplicación de las fórmulas dichas, son, respectivamente, los siguientes:

$$u_{l+1}^n = \left(1 - \bar{\omega}_0^{(\alpha)} \frac{\Delta x}{\lambda \Delta t^\alpha} \right) u_l^n + \frac{\Delta x}{\lambda} \left[\frac{u_0(x_l) t_n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\omega}_j^{(\alpha)}}{\Delta t^\alpha} u_l^{n-j} \right], \quad (5.2.30)$$

$$u_{l+1}^n = -\frac{2\Delta x}{\lambda\Delta t^\alpha} \bar{\omega}_0^{(\alpha)} u_l^n + u_{l-1}^n + \frac{2\Delta x}{\lambda} \left[\frac{u_0(x_l)t_n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\omega}_j^{(\alpha)}}{\Delta t^\alpha} u_l^{n-j} \right], \quad (5.2.31)$$

y

$$u_{l+1}^n = \frac{\left[u_l^n + \frac{\Delta x}{\lambda} \left(\frac{u_0(x_{l+1})t_n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\omega}_j^{(\alpha)}}{\Delta t^\alpha} u_{l+1}^{n-j} \right) \right]}{\left(1 + \bar{\omega}_0^{(\alpha)} \frac{\Delta x}{\lambda\Delta t^\alpha} \right)}, \quad (5.2.32)$$

para todo $l = 0, \dots, M$ y $n = 1, \dots, N$.

Es evidente que para el esquema (5.2.31) sigue aplicándose la Observación 5.2.1 de la sección anterior, por lo que se podrá utilizar una entre las fórmulas (5.2.30) y (5.2.32) para calcular los primeros pasos temporales u_1^n , $\forall n = 1, \dots, N$, y la (5.2.31) para calcular todos los demás $N \times (M - 1)$ puntos.

Siendo $O(\Delta t)^\alpha$ el orden de convergencia de la fórmula (5.2.28) a ${}^{RL}_0 D_t^\alpha u(t, x)$, (véase [37]), el error asociado a las fórmulas discretas (5.2.30) y (5.2.32) que aproximan la solución de la ecuación (5.1.3) junto con (5.1.4) es $O(\Delta t)^\alpha + O(\Delta x)$, mientras que el error de la fórmula discreta (5.2.31) es $O(\Delta t)^\alpha + O(\Delta x)^2$.

5.2.3. Algoritmo predictor-corrector fraccionario

En esta sección se presenta un algoritmo para la resolución numérica de la ecuación (5.1.3) junto con las condiciones (5.1.4), que resulta ser una generalización del *método clásico de Adams-Bashforth-Moulton en un paso* (también llamado predictor-corrector), ampliamente aplicado en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (véase por ejemplo [64] y [65]).

Para ilustrar las ideas básica del método de Adams-Bashforth-Moulton, hay que centrar la atención en el siguiente problema de valores iniciales para la ecuación diferencial de primer orden:

$$Dy(t) = f(t, y(t)), \quad (5.2.33)$$

$$y(0) = 0, \quad (5.2.34)$$

donde la función f es tal que existe una solución única, en algún intervalo $[0, T]$, del problema en cuestión.

Entonces, según el método predictor-corrector de Adams, una vez definida la malla uniforme de puntos $\{t_j = jh : j = 0, 1, \dots, N\}$ con N entero y $h = T/N$ y después de haber previamente calculado las aproximaciones $y_j \approx y(t_j)$ para $j = 1, 2, \dots, n$, se busca la aproximación y_{n+1} mediante la ecuación

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(z, y(z)) dz. \quad (5.2.35)$$

Esta ecuación es el resultado de integrar (5.2.33) en el intervalo $[t_n, t_{n+1}]$. Si en (5.2.35) se reemplaza la integral por una fórmula de cuadratura trapezoidal de dos puntos,

$$\int_a^b g(z) dz \approx \frac{b-a}{2} (g(a) + g(b)), \quad (5.2.36)$$

y se sustituye, cuando aparece, el valor exacto desconocido de $y(t_n)$ por su aproximación y_n , entonces se obtiene la siguiente ecuación para la aproximación y_{n+1}

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})], \quad (5.2.37)$$

que define el método implícito en un paso de Adams-Moulton.

En general, la función f es de tipo no lineal, por lo que no se puede resolver directamente (5.2.37) y encontrar y_{n+1} debido a que esta cantidad desconocida aparece en ambos lados de la igualdad y hay que resolver una ecuación implícita.

Este problema se resuelve tomando una aproximación preliminar de y_{n+1} , la llamada predicción y_{n+1}^P , en el lado derecho de (5.2.37) y luego calculando una aproximación mejorada de y_{n+1} mediante la ecuación

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}^P)]. \quad (5.2.38)$$

La predicción requerida y_{n+1}^P es obtenida de forma similar a la y_{n+1} a partir de (5.2.35), sustituyendo la fórmula de cuadratura trapezoidal por una fórmula rectangular

$$\int_a^b g(z)dz \approx (b-a)g(a), \quad (5.2.39)$$

lo que conduce al método explícito de Euler progresivo o de Adams-Bashforth en un paso:

$$y_{n+1}^P = y_n + h f(t_n, y_n). \quad (5.2.40)$$

El método definido por las ecuaciones (5.2.40) y (5.2.38) es convergente de orden 2 (véase [64]), es decir:

$$\max_{n=0,1,\dots,N} |y(t_n) - y_n| = O(h^2). \quad (5.2.41)$$

Los conceptos básicos de este método han sido aplicados por Diethelm, Ford y Freed ([38] y [39]) para construir la solución numérica de una ecuación diferencial fraccionaria ordinaria, con derivada de Caputo, del tipo:

$${}^C_0D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad \alpha > 0, \quad (5.2.42)$$

en un intervalo $[0, T]$, junto con las condiciones iniciales

$$y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5.2.43)$$

donde $m = \lceil \alpha \rceil$, los $y_0^{(k)}$ son números reales y la función f tiene que ser continua con respecto a ambos argumentos y verificar una condición de tipo Lipschitz con respecto al segundo argumento.

Bajo estas condiciones, el problema definido por (5.2.42) y (5.2.43) es equivalente a la ecuación de Volterra del segundo tipo con núcleo débilmente singular

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} y_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-z)^{\alpha-1} f(z, y(z)) dz, \quad (5.2.44)$$

que proporciona la siguiente ecuación para calcular la aproximación y_{n+1} :

$$y(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{m-1} y_0^{(k)} \frac{(t_{n+1})^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - z)^{\alpha-1} f(z, y(z)) dz. \quad (5.2.45)$$

Con el algoritmo obtenido por Diethelm y colaboradores (véase [38]), llamado de *Adams-Bashforth-Moulton fraccionario* (o *predictor-corrector fraccionario*), la fórmula de corrección es una variante fraccionaria del método implícito en un paso de Adams-Moulton (5.2.38), obtenida sustituyendo la integral en (5.2.45) por una fórmula de cuadratura trapezoidal del tipo de (5.2.1) con pesos de Diethelm (5.2.6) en la que hay que reemplazar α por $-\alpha$. En efecto, resulta

$$y_{n+1} = \sum_{k=0}^{m-1} y_0^{(k)} \frac{(t_{n+1})^k}{k!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(2 + \alpha)} f(t_{n+1}, y_{n+1}^P) + h^\alpha \sum_{j=0}^n \omega_{n+1,j}^{(-\alpha)} f(t_j, y_j), \quad (5.2.46)$$

con $\omega_{n+1,j}^{(\alpha)} = \omega_{n+1,j}$ pesos dados en (5.2.6) para los cuales se ha evidenciado la dependencia de α .

Para obtener la fórmula de predicción que calcula el valor de y_{n+1}^P , se generaliza el método de Adams-Bashforth en un paso (5.2.40) reemplazando la integral en (5.2.45) por una fórmula rectangular del tipo

$$\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1} - z)^{\alpha-1} g(z) dz \approx \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} g(t_j), \quad (5.2.47)$$

donde (véase [38])

$$b_{j,n+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((n+1-j)^\alpha - (n-j)^\alpha), \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (5.2.48)$$

El valor de y_{n+1}^P es por lo tanto determinado mediante el método de Adams-Bashforth fraccionario:

$$y_{n+1}^P = \sum_{k=0}^{m-1} y_0^{(k)} \frac{(t_{n+1})^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, y_j). \quad (5.2.49)$$

El análisis del algoritmo de Adams-Bashforth-Moulton fraccionario desarrollado en [39] revela que el error se comporta de la siguiente manera:

$$\max_{n=0,1,\dots,N} |y(t_n) - y_n| = O(h^p), \quad (5.2.50)$$

donde $p = \min(2, 1 + \alpha)$.

Vamos ahora a construir, basándonos en el algoritmo visto de Adams-Bashforth-Moulton fraccionario, un método para la resolución numérica de la ecuación (5.1.3) junto con las condiciones (5.1.4). Esta vez, tratamos con un problema de orden fraccionario para una ecuación en derivadas parciales que podemos reescribir en la forma siguiente:

$$({}^{RL}D_t^\alpha u)(t, x) - \frac{u_0(x)t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \lambda \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = 0 \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}; 0 < \alpha < 1). \quad (5.2.51)$$

El equivalente del método implícito en un paso de Adams-Moulton (5.2.37) para calcular la aproximación u_{l+1}^n , está dado por la siguiente expresión:

$$({}^{RL}D_{t_n}^\alpha u)(t_n, x_{l+1}) - \frac{u_0(x_{l+1})t_n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \lambda \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \Big|_{t=t_n, x=x_{l+1}} = 0, \quad (5.2.52)$$

que, tomando la fórmula (5.2.9) de Euler regresiva para aproximar la derivada parcial espacial y la fórmula de cuadratura (5.2.1) con pesos de Diethelm (5.2.6) para la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville en el tiempo, se transforma en la siguiente fórmula de corrección:

$$u_{l+1}^n = u_l^n + \frac{\Delta x}{\lambda} \left[-\frac{\omega_{n,n}}{\Delta t^\alpha} {}^P u_{l+1}^n - \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{n,j} u_{l+1}^j + \frac{u_0(x_{l+1})t_n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right]. \quad (5.2.53)$$

Análogamente, con la fórmula (5.2.9) de Euler regresiva para aproximar la derivada parcial espacial y la fórmula de cuadratura (5.2.28) con pesos de Lubich (5.2.27) para la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville en el tiempo, la ecuación (5.2.52) conduce a la siguiente fórmula de corrección:

$$u_{l+1}^n = u_l^n + \frac{\Delta x}{\lambda} \left[-\frac{\bar{\omega}_0^{(\alpha)}}{\Delta t^\alpha} {}^P u_{l+1}^n - \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=1}^n \bar{\omega}_j^{(\alpha)} u_{l+1}^{n-j} + \frac{u_0(x_{l+1})t_n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right]. \quad (5.2.54)$$

El valor del término ${}^P u_{l+1}^n$ que aparece en ambas expresiones (5.2.53) y (5.2.54), será determinado a través de la fórmula de predicción

$${}^P u_{l+1}^n = u_l^n + \frac{\Delta x}{\lambda} \left[-\frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{j=0}^{n-1} b_{j,n}^* u_{l+1}^j + \frac{u_0(x_{l+1})t_n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right], \quad (5.2.55)$$

donde los pesos $b_{j,n}^*$ están dados por

$$b_{j,n}^* = \frac{((n-j)^{-\alpha} - (n-j-1)^{-\alpha})}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5.2.56)$$

La expresión (5.2.55) ha sido obtenida a partir de la ecuación (5.2.52) sustituyendo la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville en el tiempo, dada por la expresión (5.2.3), por una fórmula rectangular del tipo de (5.2.47), análogamente a como se procede con el método de Adams-Bashforth-Moulton fraccionario, y tomando la fórmula (5.2.9) de Euler regresiva para aproximar la derivada parcial en el espacio.

Concluimos esta sección resaltando que, a la luz del análisis matemático del algoritmo de Adams-Bashforth-Moulton fraccionario desarrollado en [39], el error de la solución numérica de la ecuación (5.1.3) junto con las condiciones (5.1.4), obtenida a través del esquema predictor-corrector (5.2.53) y (5.2.55), resulta ser $O(\Delta t)^{1+\alpha} + O(\Delta x)$.

5.3. Análisis de la estabilidad de los métodos de Diethelm y multipaso lineal fraccionarios

Esta sección está dedicada al estudio de la estabilidad de los esquemas numéricos obtenidos con los métodos de Diethelm y multipaso lineal fraccionarios presentados en las

secciones 5.2.1 y 5.2.2, mediante un análisis del tipo de von Neumann discreto (véase por ejemplo [121] y [157]).

Empecemos por analizar el esquema en diferencias finitas (5.2.11), obtenido aplicando el método de Diethelm para calcular numéricamente la derivada parcial fraccionaria de Riemann-Liouville en el tiempo y la fórmula de Euler progresiva para calcular la derivada parcial en el espacio. El resultado de este estudio queda expresado en el siguiente teorema:

Teorema 5.3.1 *Dado el esquema numérico (5.2.11) que aproxima la solución de la ecuación de evolución fraccionaria (5.1.3) con la condición inicial (5.1.4), una condición necesaria para que éste resulte estable para todo α , con $0 < \alpha < 1$, es que se verifique:*

$$\frac{\Delta x}{\lambda \Delta t^\alpha \Gamma(2 - \alpha)} \leq 1. \quad (5.3.1)$$

Demostración. Dada la ecuación (5.2.11), que aquí volvemos a escribir por comodidad,

$$u_{l+1}^n = \left(1 - \omega_{n,n} \frac{\Delta x}{\lambda \Delta t^\alpha} \right) u_l^n + \frac{\Delta x}{\lambda} \left[\frac{u_0(x_l) t_n^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\omega_{n,j}}{\Delta t^\alpha} u_l^j \right],$$

con pesos de Diethelm $\omega_{n,j}$ dados en (5.2.6), sustituimos en ella la componente discreta de Fourier

$$u_l^n = \tau^n e^{ilQ\Delta x}, \quad (5.3.2)$$

donde suponemos que $Q = m\pi$ con m entero tal que $0 \leq m \leq M$ y el superíndice del término τ es un exponente multiplicativo; dividimos luego por $e^{ilQ\Delta x}$, lo que conduce a

$$\tau^n \left(e^{iQ\Delta x} - 1 + \frac{\Delta x}{\lambda \Delta t^\alpha \Gamma(2 - \alpha)} \right) = - \sum_{j=0}^{n-1} \bar{\omega}_{n,j} \tau^j \quad (5.3.3)$$

donde

$$\bar{\omega}_{n,j} = \begin{cases} \frac{\Delta x}{\lambda \Delta t^\alpha} \omega_{n,j} = - \frac{\Delta x ((n-j)^{1-\alpha} - (n-j-1)^{1-\alpha} - ((n-j+1)^{1-\alpha} - (n-j)^{1-\alpha}))}{\lambda \Delta t^\alpha \Gamma(2-\alpha)} & j = 1, \dots, n-1 \\ - \frac{\Delta x}{\lambda \Delta t^\alpha} \left(\frac{n-\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} - \omega_{n,0} \right) = - \frac{\Delta x (n^{1-\alpha} - (n-1)^{1-\alpha})}{\lambda \Delta t^\alpha \Gamma(2-\alpha)} & j = 0 \end{cases}. \quad (5.3.4)$$

Ahora, si suponemos

$$L = \left(e^{iQ\Delta x} - 1 + \frac{\Delta x}{\lambda \Delta t^\alpha \Gamma(2 - \alpha)} \right), \quad (5.3.5)$$

podemos escribir la expresión (5.3.3), $\tau^n = -\frac{1}{L} \sum_{j=0}^{n-1} \bar{\omega}_{n,j} \tau^j$, de la siguiente forma equivalente:

$$\tau^n = -\frac{\bar{\omega}_{n,0}}{L} \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\bar{\omega}_{n,j}}{L} \right). \quad (5.3.6)$$

Si sustituimos

$$A_\alpha = \frac{\Delta x}{\lambda \Delta t^\alpha \Gamma(2 - \alpha)} \quad (5.3.7)$$

en la expresión de L , resulta:

$$|1 - |1 - A_\alpha|| \leq |L| = |L(Q)| \leq 1 + |1 - A_\alpha|, \quad \forall Q. \quad (5.3.8)$$

El resultado (5.3.6), junto con (5.3.8), permite encontrar el máximo de $|\tau|^n$ (en función de Q) al variar de Q y escribir de forma explícita la siguiente desigualdad fundamental para nuestro estudio de estabilidad:

$$|\tau(Q)|^n \leq \frac{|A_\alpha| z(n, \alpha)}{|1 - |1 - A_\alpha||} \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \frac{|A_\alpha| s(j, \alpha)}{|1 - |1 - A_\alpha||} \right), \quad (5.3.9)$$

válida para todo Q y donde

$$z(n, \alpha) = (n^{1-\alpha} - (n-1)^{1-\alpha}), \quad (5.3.10)$$

$$s(j, \alpha) = ((n-j)^{1-\alpha} - (n-j-1)^{1-\alpha} - ((n-j+1)^{1-\alpha} - (n-j)^{1-\alpha})), \quad (5.3.11)$$

con $j = 1, \dots, n-1$; es evidente que $s(j, \alpha)$ es una función definida a partir de $n \geq 2$. Siendo $z(n, \alpha)$ una función no negativa y decreciente al aumentar n para todo $0 < \alpha < 1$, también la función $s(j, \alpha)$ resulta ser no negativa para todo $j = 1, \dots, n-1$ y $0 < \alpha < 1$. En realidad, será útil resaltar que estas dos funciones son no negativas para todo $0 \leq \alpha \leq 1$.

Entonces, como consecuencia del resultado (5.3.9), podemos distinguir tres comportamientos de la función $|\tau|^n$ al variar de Q , correspondientes a distintos intervalos de valores de A_α , función de Δx , Δt^α y λ definida en (5.3.7):

- si $A_\alpha < 1$

$$|\tau(Q)|^n \leq z(n, \alpha) \prod_{j=1}^{n-1} (1 + s(j, \alpha)), \quad \forall Q, \quad (5.3.12)$$

- si $A_\alpha = 1$

$$|\tau(Q)|^n = z(n, \alpha) \prod_{j=1}^{n-1} (1 + s(j, \alpha)), \quad \forall Q, \quad (5.3.13)$$

- si $A_\alpha > 1$

$$|\tau(Q)|^n \leq \frac{|A_\alpha| z(n, \alpha)}{|2 - A_\alpha|} \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \frac{|A_\alpha| s(j, \alpha)}{|2 - A_\alpha|} \right), \quad \forall Q. \quad (5.3.14)$$

La expresión $|A_\alpha| / |2 - A_\alpha|$ que aparece en (5.3.14) resulta ser mayor que 1 si $A_\alpha > 1$.

Siguiendo ahora con el análisis de von Neumann discreto, e imponiendo la restricción sobre τ de forma que resulte $|\tau| \leq 1$ para todo Q , se obtiene una condición necesaria (véase [157]) para que el esquema numérico (5.2.11) obtenido con el método de Diethelm resulte estable, es decir, que pequeños errores en las condiciones iniciales provoquen pequeños errores en la solución. Esta condición excluye la posibilidad de que los coeficientes de Fourier discretos de cualquier componente crezcan sin límite.

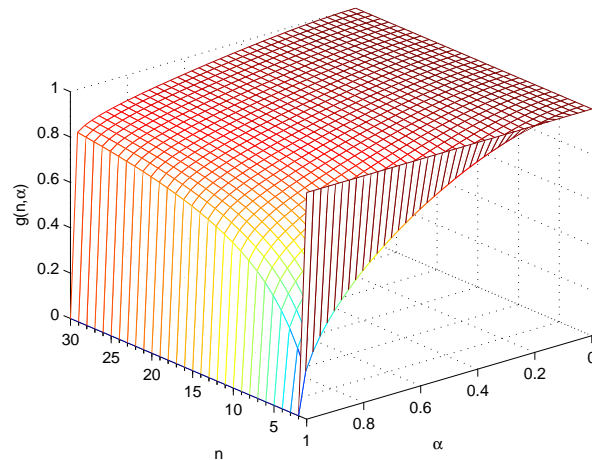


Fig. 5.1: Función $g(n, \alpha)$ al variar de n y α .

Vamos a ver como este criterio, llamado de von Neumann discreto, se reduce, en nuestro caso, a requerir que resulte $A_\alpha \leq 1$.

En efecto, calculando numéricamente la siguiente función:

$$g(n, \alpha) = \left(z(n, \alpha) \prod_{j=1}^{n-1} (1 + s(j, \alpha)) \right)^{1/n}, \quad (5.3.15)$$

que representa el valor de $\max_{Q=0, \pi, \dots, M\pi} |\tau(Q)|$ al variar de n y α cuando $A_\alpha \leq 1$, se ha podido observar que su gráfica no supera 1 para todo n y α , con $0 \leq \alpha \leq 1$. Como ejemplo, en la Figura 5.1 se ha reproducido la función $g(n, \alpha)$ para $n = 1, 2, \dots, 30$ y $\alpha = 0, h, 2h, \dots, 1$, donde $h = 1/40$. En la Figura 5.1 se han incluido los valores de la función $g(n, \alpha)$ en los extremos $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$ porque conocerlos será de utilidad, más adelante, para mostrar como este estudio de estabilidad, conducido para el caso fraccionario de $0 < \alpha < 1$, también proporciona los resultados clásicos cuando α vale los enteros 0 ó 1.

Contrariamente a lo que ocurre con la función $g(n, \alpha)$, la función

$$v(n, \alpha) = \left(\frac{|A_\alpha| z(n, \alpha)}{|2 - A_\alpha|} \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \frac{|A_\alpha| s(j, \alpha)}{|2 - A_\alpha|} \right) \right)^{1/n} \quad (5.3.16)$$

que aparece en (5.3.14) y que retorna el valor de $\max_{Q=0, \pi, \dots, M\pi} |\tau(Q)|$ al variar de n y α cuando $A_\alpha > 1$, queda por encima del valor 1 en un intervalo de valores de α que crece al aumentar $|A_\alpha| / |2 - A_\alpha| > 1$, como se puede observar en las Figuras 5.2 y 5.3 obtenidas para $n = 1, 2, \dots, 40$, $\alpha = 0, h, 2h, \dots, 1$, con $h = 1/30$, y distintos valores de $|A_\alpha| / |2 - A_\alpha| > 1$.

Se puede por lo tanto concluir que una condición necesaria para que el esquema numérico (5.2.11) resulte estable para todo α , con $0 < \alpha < 1$, es que A_α verifique la condición (5.3.1). ■

Como se ha mencionado previamente, la condición (5.3.9) válida para todo α , con

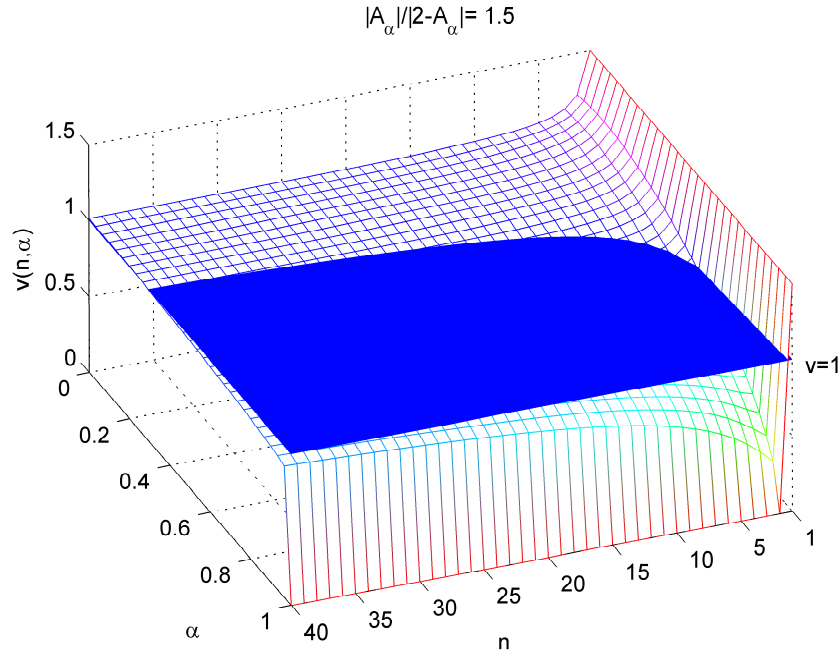


Fig. 5.2: Función $v(n, \alpha)$ cuando $|A_\alpha| / |2 - A_\alpha| = 1,5$.

$0 < \alpha < 1$, coincide con los resultados clásicos obtenidos desarrollando el equivalente análisis de estabilidad de von Neumann discreto para los casos límites $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$.

Empecemos con especificar la forma que asume la ecuación continua (5.1.3), que hemos llamado de evolución-difusión del tipo de Dirac con derivada fraccionaria de Caputo (1.2.46) en el tiempo y que es el objeto del estudio numérico de este capítulo, cuando el índice de la derivada fraccionaria vale los enteros 1 ó 0.

En virtud de la propiedad (5.1.5) y utilizando la condición inicial (5.1.4), la ecuación (5.1.3) puede ser reescrita como sigue

$$({}^{RL}_0 D_t^\alpha u)(t, x) - \frac{u_0(x)t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \lambda \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = 0, \quad (5.3.17)$$

por lo que, en el límite de $\alpha = 1$, queda reducida a la siguiente expresión

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = 0, \quad (5.3.18)$$

mientras que coincide con la ecuación

$$u(t, x) - u_0(x) + \lambda \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = 0, \quad (5.3.19)$$

cuando $\alpha = 0$, si se aplican las propiedades básicas de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville $({}^{RL}_0 D_t^1 u)(t, x) = \partial u(t, x) / \partial t$ y $({}^{RL}_0 D_t^0 u)(t, x) = u(t, x)$.

Pasamos ahora a analizar los esquemas discretos que se obtienen a partir de la ecuación en diferencias finitas (5.2.11) construida con el método de Diethelm para aproximar la

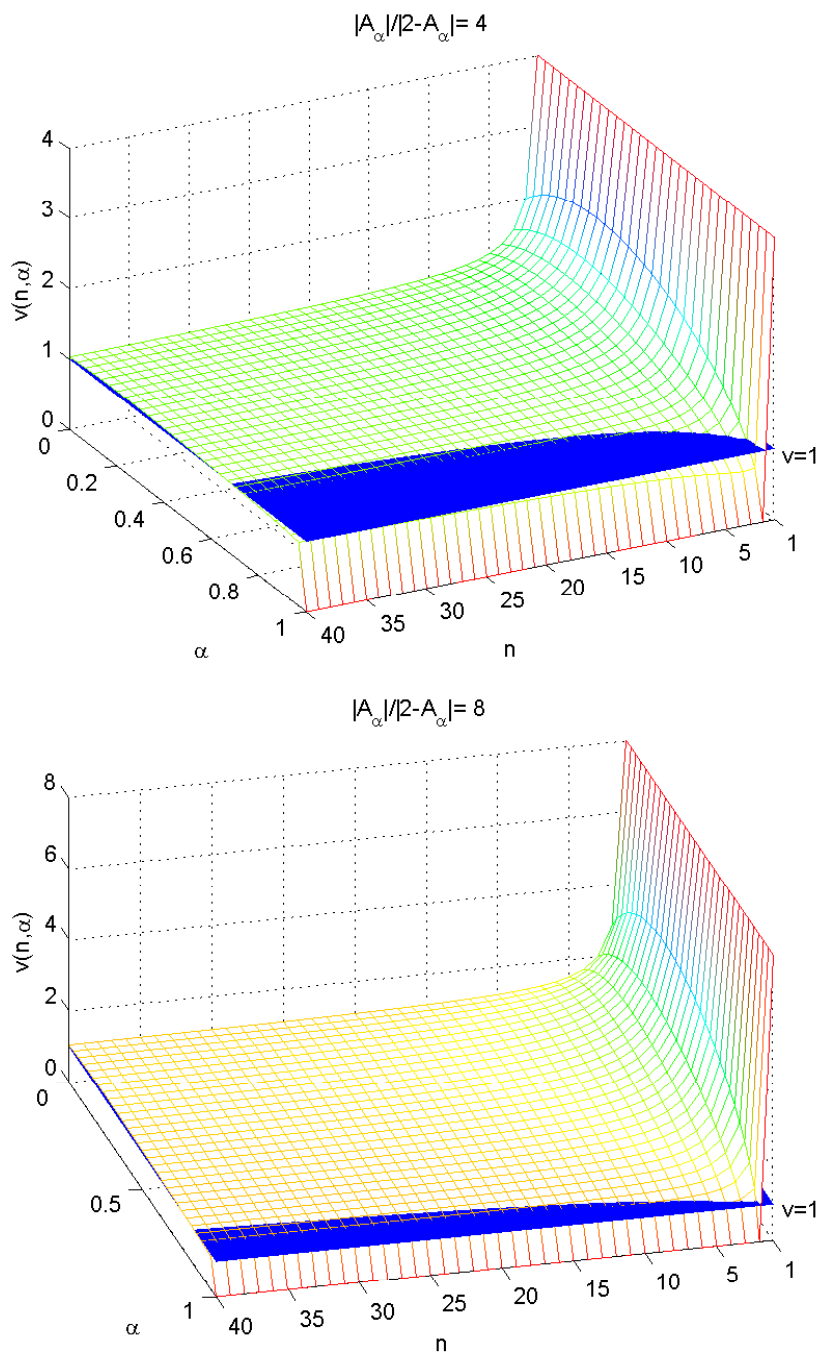


Fig. 5.3: Función $v(n, \alpha)$ cuando $|A_\alpha|/|2-A_\alpha|=4$ y $|A_\alpha|/|2-A_\alpha|=8$.

solución de (5.3.17), cuando el índice de la derivada fraccionaria es un entero que vale 0 ó 1.

En primer lugar, es de utilidad resaltar que los pesos de Diethelm $\omega_{n,j}$ dados en (5.2.6) verifican, cuando $\alpha = 1$, que $\omega_{n,j} = 0$ para todo $j = 0, 1, \dots, n-2$ mientras que $\omega_{n,n} = 1$ y $\omega_{n,n-1} = -1$. Asimismo, cuando $\alpha = 0$, resulta $\omega_{n,j} = 0$ para todo $j = 0, 1, \dots, n-1$ mientras que $\omega_{n,n} = 1$. Entonces, la ecuación en diferencias finitas (5.2.11), es decir,

$$u_{l+1}^n = \left(1 - \omega_{n,n} \frac{\Delta x}{\lambda \Delta t^\alpha}\right) u_l^n + \frac{\Delta x}{\lambda} \left[\frac{u_0(x_l) t_n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\omega_{n,j}}{\Delta t^\alpha} u_l^j \right],$$

cuando $\alpha = 1$ se reduce a

$$u_{l+1}^n = \left(1 - \frac{\Delta x}{\lambda \Delta t}\right) u_l^n + \frac{\Delta x}{\lambda \Delta t} u_l^{n-1}, \quad (5.3.20)$$

siendo $\frac{u_0(x_l) t_n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \Big|_{\alpha=1} = 0$, mientras que, cuando $\alpha = 0$ se convierte en

$$u_{l+1}^n = \left(1 - \frac{\Delta x}{\lambda}\right) u_l^n + \frac{\Delta x}{\lambda} u_0(x_l). \quad (5.3.21)$$

El esquema (5.3.20) es exactamente el que hubiésemos obtenido utilizando la fórmula de Euler progresiva en el espacio y en el tiempo para discretizar la ecuación de evolución-difusión (5.3.18), así como (5.3.21) coincide con el esquema que se obtendría si aplicáramos la fórmula de Euler progresiva para discretizar el espacio en la ecuación (5.3.19).

Si ahora realizamos un análisis de estabilidad de von Neumann discreto del esquema en diferencias finitas (5.3.20), sustituyendo en él la componente discreta de Fourier (5.3.2), se llega a la siguiente ecuación para τ :

$$\tau^n \left(e^{iQ\Delta x} - 1 + \frac{\Delta x}{\lambda \Delta t} \right) = \frac{\Delta x}{\lambda \Delta t} \tau^{n-1}, \quad (5.3.22)$$

que es equivalente a

$$\tau^n = \left[\frac{A_1}{(e^{iQ\Delta x} - 1 + A_1)} \right]^n, \quad (5.3.23)$$

donde $A_1 = \Delta x / (\lambda \Delta t) = A_\alpha \Big|_{\alpha=1}$, con A_α función definida en (5.3.7).

De aquí se deduce la siguiente desigualdad válida para $|\tau|$ al variar de Q :

$$|\tau(Q)| \leq \frac{|A_1|}{|1 - |1 - A_1||}, \quad \forall Q, \quad (5.3.24)$$

por lo que resulta:

- si $A_1 < 1$

$$|\tau(Q)| \leq 1, \quad \forall Q, \quad (5.3.25)$$

- si $A_1 = 1$

$$|\tau(Q)| = 1, \quad \forall Q, \quad (5.3.26)$$

- si $A_1 > 1$

$$|\tau(Q)| \leq \frac{|A_1|}{|2 - A_1|}, \quad \forall Q. \quad (5.3.27)$$

Entonces, una condición necesaria para la estabilidad del esquema (5.3.20) es que resulte $|\tau| \leq 1$ y esto queda verificado siempre que sea $A_1 = \Delta x / (\lambda \Delta t) \leq 1$.

Como cabía esperar, la desigualdad (5.3.24) se puede obtener a partir de la (5.3.9) debido a que la función $z(n, \alpha)$ definida en (5.3.10) verifica que $z(n, 1) = 1$ si $n = 1$, $z(n, 1) = 0$ si $n \geq 2$. También, observando la Figura 5.1, se puede ver como la función

$$g(n, \alpha) = \max_{Q=0, \pi, \dots, M\pi} |\tau(Q)|$$

cuando $A_\alpha \leq 1$, en correspondencia de $\alpha = 1$ asume el valor 1 para $n = 1$ y 0 para $n \geq 2$, restituyendo así los resultados (5.3.25) y (5.3.26), es decir

$$\max_{Q=0, \pi, \dots, M\pi} |\tau(Q)| = 1$$

cuando $A_1 \leq 1$. Asimismo, la Figura 5.2 y la Figura 5.3 muestran que la función

$$v(n, \alpha) = \max_{Q=0, \pi, \dots, M\pi} |\tau(Q)|$$

cuando $A_\alpha > 1$, vale $|A_\alpha| / |2 - A_\alpha|$ si $\alpha = 1$, de acuerdo con la desigualdad (5.3.27) según la cual

$$\max_{Q=0, \pi, \dots, M\pi} |\tau(Q)| = |A_1| / |2 - A_1|$$

cuando $A_1 > 1$.

Pasamos ahora a analizar el caso clásico de $\alpha = 0$. Desarrollando el análisis de von Neumann discreto del esquema (5.3.20), se llega a la siguiente ecuación para τ :

$$\tau^n \left(e^{iQ\Delta x} - 1 + \frac{\Delta x}{\lambda} \right) = \frac{\Delta x}{\lambda} \quad (5.3.28)$$

que es equivalente a

$$\tau = \left[\frac{A_0}{(e^{iQ\Delta x} - 1 + A_0)} \right]^{1/n}, \quad (5.3.29)$$

donde $A_0 = \Delta x / \lambda = A_\alpha |_{\alpha=0}$, con A_α función definida en (5.3.7).

Se puede por lo tanto escribir la desigualdad válida para $|\tau|$ al variar de Q :

$$|\tau(Q)| \leq \left[\frac{|A_0|}{|1 - |1 - A_0||} \right]^{1/n}, \quad \forall Q, \quad (5.3.30)$$

lo que implica:

- si $A_0 < 1$

$$|\tau(Q)| \leq 1, \quad \forall Q, \quad (5.3.31)$$

- si $A_0 = 1$

$$|\tau(Q)| = 1, \quad \forall Q, \quad (5.3.32)$$

- si $A_0 > 1$

$$|\tau(Q)| \leq \left[\frac{|A_0|}{|2 - A_0|} \right]^{1/n}, \quad \forall Q. \quad (5.3.33)$$

Una vez más, encontramos la condición necesaria para la estabilidad del esquema (5.3.21) restringiendo los valores de τ de forma que resulte $|\tau| \leq 1$ y esto se cumple si $A_0 = \Delta x / \lambda \leq 1$.

Como ocurre para el caso de $\alpha = 1$, la desigualdad (5.3.9) devuelve la (5.3.30) cuando $\alpha = 0$ gracias a que la función $z(n, \alpha)$ definida en (5.3.10) verifica que $z(n, 0) = 1$ para todo $n \geq 1$, mientras que $s(n, \alpha)$ dada en (5.3.11), definida a partir de $n \geq 2$, cumple $s(j, 0) = 0$ para todo $j = 1, \dots, n - 1$.

En efecto, en la Figura 5.1 se puede ver como la función

$$g(n, \alpha) = \max_{Q=0, \pi, \dots, M\pi} |\tau(Q)|,$$

cuando $A_\alpha \leq 1$, asume el valor 1 para todo n en correspondencia de $\alpha = 0$, de acuerdo con los resultados (5.3.31) y (5.3.32), es decir $\max_{Q=0, \pi, \dots, M\pi} |\tau(Q)| = 1$ cuando $A_0 \leq 1$. También, la función

$$v(n, \alpha) = \max_{Q=0, \pi, \dots, M\pi} |\tau(Q)|,$$

cuando $A_\alpha > 1$, vale $(|A_\alpha| / |2 - A_\alpha|)^{1/n}$ si $\alpha = 0$, en conformidad con la desigualdad (5.3.33) según la cual

$$\max_{Q=0, \pi, \dots, M\pi} |\tau(Q)| = (|A_0| / |2 - A_0|)^{1/n}$$

cuando $A_0 > 1$, y de acuerdo con las gráficas que aparecen en la Figura 5.2 y en la Figura 5.3.

Repetimos ahora, de forma análoga a lo hecho con el esquema (5.2.11), el análisis de estabilidad de von Neumann discreto del esquema en diferencias finitas (5.2.12) obtenido aplicando el método de Diethelm para calcular numéricamente la derivada parcial fraccionaria de Riemann-Liouville en el tiempo y la fórmula de diferencias centrada para calcular la derivada parcial en el espacio.

Teorema 5.3.2 *Dado el esquema numérico (5.2.12) que aproxima la solución de la ecuación de evolución fraccionaria (5.1.3) con la condición inicial (5.1.4), éste resulta incondicionalmente estable para todo α , con $0 < \alpha < 1$.*

Demostración. Vamos a repetir los pasos fundamentales de la demostración del Teorema 5.3.1, sin entrar en el detalle de todos los cálculos. Sea

$$u_{l+1}^n = -\frac{2\Delta x}{\lambda \Delta t^\alpha} \omega_{n,n} u_l^n + u_{l-1}^n + \frac{2\Delta x}{\lambda} \left[\frac{u_0(x_l) t_n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\omega_{n,j}}{\Delta t^\alpha} u_l^j \right],$$

la ecuación en diferencias finitas (5.2.12), con pesos de Diethelm $\omega_{n,j}$ dados en (5.2.6); sustituyendo en ella la componente discreta de Fourier (5.3.2) y dividiéndola por $e^{ilQ\Delta x}$, ésta resultará equivalente, después de alguna manipulación ulterior, a la siguiente ecuación:

$$\tau^n = -\frac{\bar{\omega}_{n,0}}{C} \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\bar{\omega}_{n,j}}{C}\right), \quad (5.3.34)$$

donde

$$C = \left(e^{iQ\Delta x} - e^{-iQ\Delta x} + \frac{2\Delta x}{\lambda\Delta t^\alpha \Gamma(2-\alpha)} \right), \quad (5.3.35)$$

y los pesos $\bar{\omega}_{n,j}$ son los definidos en (5.3.4).

Recordando la definición de A_α dada en (5.3.7), resulta:

$$|C(Q)| = \sqrt{\sin^2(Q\Delta x) + A_\alpha^2} \geq |A_\alpha| \quad \forall Q, \quad (5.3.36)$$

por lo que se puede escribir la siguiente desigualdad fundamental:

$$\begin{aligned} |\tau(Q)|^n &\leq \frac{|A_\alpha| z(n, \alpha)}{\sqrt{\sin^2(Q\Delta x) + A_\alpha^2}} \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \frac{|A_\alpha| s(j, \alpha)}{\sqrt{\sin^2(Q\Delta x) + A_\alpha^2}} \right) \leq \\ &\leq z(n, \alpha) \prod_{j=1}^{n-1} (1 + s(j, \alpha)), \end{aligned} \quad (5.3.37)$$

válida para todo Q y α , con $0 < \alpha < 1$ y donde $z(n, \alpha)$ y $s(j, \alpha)$ son las funciones definidas en (5.3.10) y (5.3.11).

Entonces, una condición necesaria para la estabilidad del esquema numérico (5.2.12) es obtenida imponiendo que se cumpla $|\tau| \leq 1$ para todo Q , con lo cual, en este caso, se puede concluir que el esquema es incondicionalmente estable debido a que la función $g(n, \alpha)$, definida en (5.1), se ha visto que no supera el valor 1 para todo n y α , con $0 < \alpha < 1$. ■

Finalmente, enunciamos sin demostrar, debido a la estrecha analogía con las demostraciones de los dos teoremas anteriores, el resultado relativo a la estabilidad del esquema en diferencias finitas (5.2.13), obtenido aplicando el método de Diethelm para aproximar numéricamente la derivada parcial fraccionaria de Riemann-Liouville en el tiempo y la fórmula de Euler regresiva para calcular la derivada parcial en el espacio. Una vez más, la herramienta matemática utilizada ha sido el análisis de von Neumann discreto.

Teorema 5.3.3 *Dado el esquema numérico (5.2.13) que aproxima la solución de la ecuación de evolución fraccionaria (5.1.3) con la condición inicial (5.1.4), una condición necesaria para que éste resulte estable para todo α , con $0 < \alpha < 1$, es que se verifique:*

$$\frac{\Delta x}{\lambda\Delta t^\alpha \Gamma(2-\alpha)} \geq -1. \quad (5.3.38)$$

Hay que puntualizar que, así como ocurría con el esquema numérico (5.2.11), también los resultados del análisis de estabilidad de Von Neumann discreto de los esquemas (5.2.12) y (5.2.13), válidos para todo α con $0 < \alpha < 1$, reproducen los resultados clásicos obtenidos desarrollando el equivalente análisis de estabilidad de los mismos esquemas resultantes para los casos límites de $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$.

Concluimos esta sección enunciando los resultados del análisis de estabilidad de von Neumann discreto de los esquemas numéricos (5.2.30), (5.2.31) y (5.2.32) obtenidos con el método multipaso lineal fraccionario propuesto por Lubich y que se han presentado en la sección 5.2.2.

Teorema 5.3.4 *Dado el esquema numérico (5.2.30) que aproxima la solución de la ecuación de evolución fraccionaria (5.1.3) con la condición inicial (5.1.4), una condición necesaria para que éste resulte estable para todo α , con $0 < \alpha < 1$, es que se verifique:*

$$\frac{\Delta x}{\lambda \Delta t^\alpha} \leq 1. \quad (5.3.39)$$

Teorema 5.3.5 *Dado el esquema numérico (5.2.31) que aproxima la solución de la ecuación de evolución fraccionaria (5.1.3) con la condición inicial (5.1.4), éste resulta incondicionalmente estable para todo α , con $0 < \alpha < 1$.*

Teorema 5.3.6 *Dado el esquema numérico (5.2.32) que aproxima la solución de la ecuación de evolución fraccionaria (5.1.3) con la condición inicial (5.1.4), una condición necesaria para que éste resulte estable para todo α , con $0 < \alpha < 1$, es que se verifique:*

$$\frac{\Delta x}{\lambda \Delta t^\alpha} \geq -1. \quad (5.3.40)$$

Para que sirva de ejemplo, vamos a escribir la demostración del Teorema 5.3.4; las otras demostraciones se omiten por la estrecha analogía con ésta y con las anteriores, relativas a los esquemas obtenidos con el método de Diethelm.

Demostración del Teorema 5.3.4.

Sea

$$u_{l+1}^n = \left(1 - \bar{\omega}_0^{(\alpha)} \frac{\Delta x}{\lambda \Delta t^\alpha} \right) u_l^n + \frac{\Delta x}{\lambda} \left[\frac{u_0(x_l) t_n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\omega}_j^{(\alpha)}}{\Delta t^\alpha} u_l^{n-j} \right],$$

la ecuación (5.2.30) con pesos de Lubich $\bar{\omega}_j$ dados en (5.2.27); si sustituimos en ella la componente discreta de Fourier (5.3.2) y dividimos la expresión resultante por $e^{iQ\Delta x}$, entonces tenemos

$$\tau^n \left(e^{iQ\Delta x} - 1 + \frac{\Delta x}{\lambda \Delta t^\alpha} \right) = - \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{\omega}_{n-j} \tau^j \quad (5.3.41)$$

donde

$$\tilde{\omega}_j = \begin{cases} \frac{\Delta x}{\lambda \Delta t^\alpha} \bar{\omega}_j = \frac{\Delta x}{\lambda \Delta t^\alpha} (-1)^j \binom{\alpha}{j} & j = 1, \dots, n-1 \\ \frac{\Delta x}{\lambda \Delta t^\alpha} \left(\bar{\omega}_n - \frac{n^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right) = -\frac{\Delta x}{\lambda \Delta t^\alpha} (-1)^{n-1} \binom{\alpha-1}{n-1} & j = n \end{cases}. \quad (5.3.42)$$

Ahora, sustituyendo

$$W = \left(e^{iQ\Delta x} - 1 + \frac{\Delta x}{\lambda\Delta t^\alpha} \right), \quad (5.3.43)$$

podemos escribir la expresión (5.3.41), $\tau^n = -\frac{1}{W} \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{\omega}_{k-j} \tau^j$, de la siguiente forma equivalente:

$$\tau^n = -\frac{\tilde{\omega}_n}{W} \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\tilde{\omega}_j}{W} \right). \quad (5.3.44)$$

Si sustituimos

$$S_\alpha = \frac{\Delta x}{\lambda\Delta t^\alpha} \quad (5.3.45)$$

en la expresión de W , tenemos el siguiente resultado

$$|1 - |1 - S_\alpha|| \leq |W(Q)| \leq 1 + |1 - S_\alpha|, \quad \forall Q, \quad (5.3.46)$$

por lo que se puede acotar el máximo de $|\tau|^n$ con respecto a Q como sigue:

$$|\tau(Q)|^n \leq \frac{|S_\alpha| p(n, \alpha)}{|1 - |1 - S_\alpha||} \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \frac{|S_\alpha| q(j, \alpha)}{|1 - |1 - S_\alpha||} \right). \quad (5.3.47)$$

Las funciones

$$p(n, \alpha) = (-1)^{n-1} \binom{\alpha-1}{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.3.48)$$

y

$$q(j, \alpha) = \left| (-1)^j \binom{\alpha}{j} \right|, \quad j = 1, \dots, n-1, n \geq 2, \quad (5.3.49)$$

son ambas no negativas para todo $0 \leq \alpha \leq 1$.

A partir de la desigualdad (5.3.47), se pueden distinguir tres comportamientos de la función $|\tau|^n$ al variar de Q , correspondientes a distintos intervalos de valores de S_α :

- si $S_\alpha < 1$

$$|\tau(Q)|^n \leq p(n, \alpha) \prod_{j=1}^{n-1} (1 + q(j, \alpha)), \quad \forall Q, \quad (5.3.50)$$

- si $S_\alpha = 1$

$$|\tau(Q)|^n = p(n, \alpha) \prod_{j=1}^{n-1} (1 + q(j, \alpha)), \quad \forall Q, \quad (5.3.51)$$

- si $S_\alpha > 1$

$$|\tau(Q)|^n \leq \frac{|S_\alpha| p(n, \alpha)}{|2 - S_\alpha|} \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \frac{|S_\alpha| q(j, \alpha)}{|2 - S_\alpha|} \right), \quad \forall Q. \quad (5.3.52)$$

La expresión $|S_\alpha|/|2 - S_\alpha|$ que aparece en (5.3.52) resulta ser mayor que 1 si $S_\alpha > 1$.

Siguiendo ahora con el análisis de von Neumann discreto, imponiendo la restricción sobre τ de forma que resulte $|\tau| \leq 1$ para todo Q , se obtiene una condición necesaria para que el esquema numérico (5.2.30) obtenido con el método de Lubich resulte estable. El criterio de von Neumann discreto, para este caso, equivale a requerir que se cumpla $S_\alpha \leq 1$. Vamos a justificar esta afirmación.

Calculando numéricamente la siguiente función:

$$r(n, \alpha) = \left(p(n, \alpha) \prod_{j=1}^{n-1} (1 + q(j, \alpha)) \right)^{1/n}, \quad (5.3.53)$$

que representa el valor de $\max_{Q=0, \pi, \dots, M\pi} |\tau(Q)|$ al variar de n y α cuando $S_\alpha \leq 1$, con $\tau(Q)$ dado en (5.3.44), se ha podido observar que su gráfica es prácticamente igual a la de la función $g(n, \alpha)$ definida en (5.3.15). En efecto, en la Figura 5.4 se ha reproducido la función $r(n, \alpha)$ para $n = 1, 2, \dots, 30$ y $\alpha = 0, h, 2h, \dots, 1$, donde $h = 1/40$ y se puede ver que no supera 1 para todo n y α , con $0 \leq \alpha \leq 1$. También en los extremos $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$, la función $z(n, \alpha)$ repite el comportamiento de la función $g(n, \alpha)$ que aparece en la Figura 5.1.

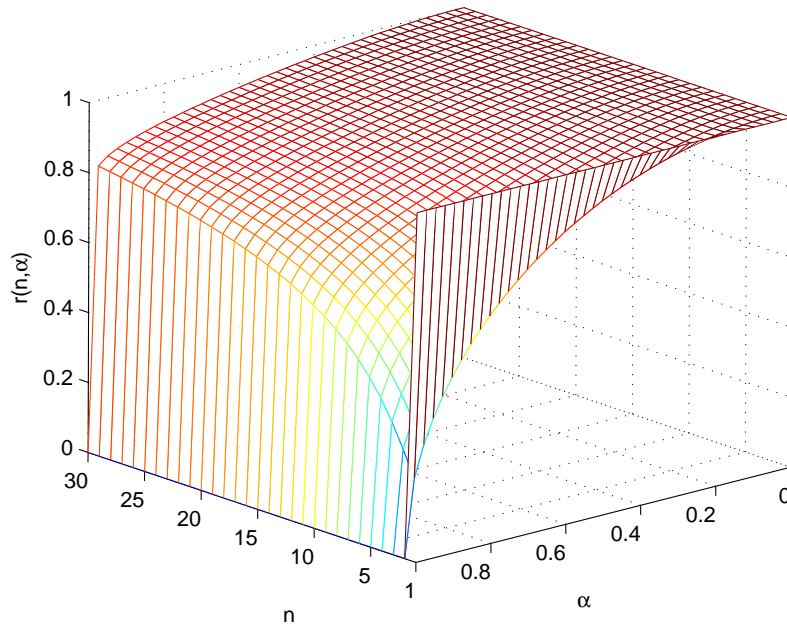


Fig. 5.4: Función $r(n, \alpha)$ al variar de n y α .

Como ocurría con la función $v(n, \alpha)$ definida en (5.3.16), si indicamos con

$$t(n, \alpha) = \left(\frac{|S_\alpha| p(n, \alpha)}{|2 - S_\alpha|} \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \frac{|S_\alpha| q(j, \alpha)}{|2 - S_\alpha|} \right) \right)^{1/n} \quad (5.3.54)$$

la función $\max_{Q=0,\pi,\dots,M\pi} |\tau(Q)|$ al variar de n y α cuando $S_\alpha > 1$ y $\tau(Q)$ dado en (5.3.44), su valor supera el límite de estabilidad 1 en un intervalo de valores de α que crece al aumentar de $|S_\alpha|/|2 - S_\alpha| > 1$, como se puede observar en la figura 5.5 obtenida para $n = 1, 2, \dots, 40$, $\alpha = 0, h, 2h, \dots, 1$, con $h = 1/30$, y distintos valores de $|S_\alpha|/|2 - S_\alpha| > 1$.

Las funciones $v(n, \alpha)$ y $t(n, \alpha)$ tienen el mismo comportamiento al variar de n y α , como se puede ver observando la Figura 5.5 y las Figuras 5.2 y 5.3.

Se puede por lo tanto concluir que el esquema numérico (5.2.30) resulta estable para todo α , con $0 < \alpha < 1$, si S_α verifica la condición (5.3.1). ■

Finalmente puntualizamos que, tal y como ocurría con los resultados relativos a los métodos de Diethelm (5.2.11), (5.2.12) y (5.2.13), todos los resultados del análisis de estabilidad de Von Neumann discreto de los esquemas obtenidos con el método de Lubich (5.2.30), (5.2.31) y (5.2.32), válidos para todo α con $0 < \alpha < 1$, coinciden con los resultados clásicos obtenidos desarrollando el equivalente análisis de estabilidad de los mismos esquemas para los casos límites de $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$. Sin volver a demostrar esta afirmación, sólo indicamos que los pesos de Lubich $\bar{\omega}_j$ dados en (5.2.27), cumplen $\bar{\omega}_0 = 1$ y $\bar{\omega}_1 = -1$ si $\alpha = 1$, mientras que $\bar{\omega}_0 = 1$ y $\bar{\omega}_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$ si $\alpha = 0$, con lo cual, por ejemplo, la ecuación en diferencias finitas (5.2.30) se reconduce a los esquemas (5.3.21) y (5.3.20) cuando $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$ respectivamente.

Observación 5.3.1 *Los resultados de esta sección ponen en evidencia que los dos esquemas de Diethelm (5.2.12) y de Lubich (5.2.31), obtenidos utilizando la fórmula de diferencias centrada (5.2.8) para aproximar la derivada primera en el espacio, resultan ser mucho más convenientes que los otros obtenidos con las fórmulas de Euler regresiva (5.2.9) y progresiva (5.2.7), al no depender su estabilidad de los valores elegidos para λ , Δx y Δt . Más adelante veremos que esta ventaja teórica se pierde a la hora de construir esquemas numéricos para la misma ecuación de evolución fraccionaria (5.1.3) pero esta vez junto con una condición inicial y una condición de contorno tipo Dirichlet.*

5.4. Dispersión y disipación de un esquema que aproxima la ecuación de evolución-difusión del tipo de Dirac fraccionaria

Cuando se soluciona analíticamente una ecuación en derivadas parciales, a menudo (véase por ejemplo [157]) se introduce en ella una ecuación que describe una onda en el tiempo y en el espacio dada por

$$u(t, x) = \hat{u} e^{i(\omega t + \beta x)}, \quad (5.4.1)$$

y se busca la relación que tiene que existir entre los dos parámetros ω y β para que la expresión (5.4.1) sea solución de la ecuación en derivadas parciales de partida.

Dicha relación $\omega = \omega(\beta)$ toma el nombre de *relación de dispersión* (aunque habría que llamarla *relación de dispersión-disipación*) [164]; ω es la frecuencia de la onda, β es el número de onda y $\gamma = 2\pi/\beta$ es la longitud de onda.

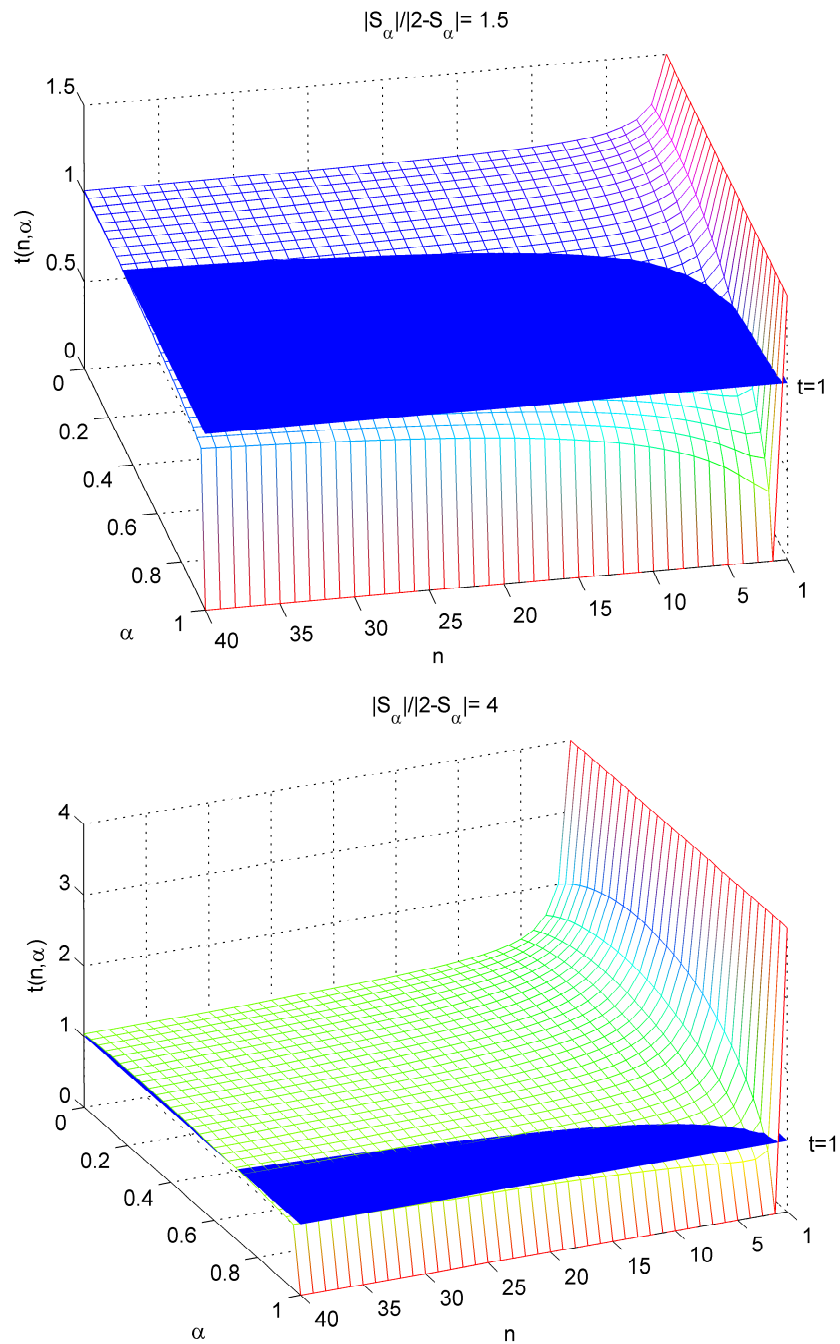


Fig. 5.5: Función $t(n, \alpha)$ cuando $|S_\alpha|/|2 - S_\alpha| = 1,5$ y $|S_\alpha|/|2 - S_\alpha| = 4$.

Si consideramos las dos ecuaciones en derivadas parciales que tanto hemos nombrado a lo largo de este trabajo, la ecuación de difusión parabólica

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) - \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t, x) = 0, \quad (5.4.2)$$

y la ecuación de evolución hiperbólica

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) + \lambda \frac{\partial}{\partial x}u(t, x) = 0, \quad (5.4.3)$$

entonces la función (5.4.1) soluciona la ecuación (5.4.2) si $\omega = i\nu\beta^2$, y soluciona la ecuación (5.4.3) si $\omega = -\lambda\beta$.

Por consiguiente, la solución de tipo onda de la ecuación (5.4.2) toma la forma

$$u(t, x) = \hat{u} e^{-\nu\beta^2 t} e^{i\beta x}, \quad (5.4.4)$$

por lo que no se mueve en el espacio y decae con el tiempo si $\nu > 0$. Este comportamiento es típico de las soluciones de tipo onda de las ecuaciones parabólicas.

Asimismo, la solución (5.4.1) de la ecuación (5.4.3) asume la siguiente expresión

$$u(t, x) = \hat{u} e^{i\beta(x-\lambda t)}, \quad (5.4.5)$$

que es una onda que se propaga a lo largo del eje x con velocidad $\lambda = -\omega/\beta$ y sin decaimiento de amplitud. En particular, cuando ω es lineal en β , la velocidad de propagación es independiente de la frecuencia.

El decaimiento y la propagación de los distintos términos de Fourier son una componente muy importante del comportamiento de la solución de una ecuación en derivadas parciales. Además, cuando utilizamos una ecuación en diferencias finitas para aproximar la solución de dicha ecuación diferencial, podemos explicar el comportamiento de las soluciones numéricas obtenidas analizando si el decaimiento y la propagación de las componentes de Fourier del esquema numérico coinciden con los observados para la ecuación en derivadas parciales.

En primer lugar, hay que resaltar que el esquema será inestable si alguna componente de Fourier crece sin límite.

Las soluciones de una ecuación en derivadas parciales son *disipativas* cuando las componentes de Fourier no crecen con el tiempo y al menos una decae; este es el caso por ejemplo de las soluciones (5.4.4) de la ecuación de difusión (5.4.2) que, cuando $\nu > 0$, disipan todas a excepción de la solución constante $u(t, x) = \hat{u}$ asociada al número de onda $\beta = 0$ y que queda indeterminada por la ecuación (5.4.2). Las soluciones se llaman *no disipativas* cuando las componentes de Fourier no decaen ni crecen, como ocurre con las ondas (5.4.5) que solucionan la ecuación de evolución (5.4.3).

Finalmente, las soluciones de una ecuación en derivadas parciales se definen *dispersivas* si los términos de Fourier con distinta longitud de onda se propagan con distinta velocidad; este es el caso, por ejemplo, de las soluciones de ecuaciones que sólo involucran derivadas parciales en x de orden impar mayor que 1.

En el caso de nuestra ecuación de evolución-difusión del tipo de Dirac con derivada fraccionaria de Caputo en el tiempo dada en (5.1.3), al pedir que la función de onda (5.4.1)

sea su solución, se obtiene una relación de dispersión con una forma mucho más compleja que la que aparece en los ejemplos anteriores. En efecto, recordando las propiedades (1.2.40) y (1.2.50) y la definición de la función de Mittag-Leffler (1.3.4), tenemos:

$${}_0^C D_t^\alpha (\hat{u} e^{i(\omega t + \beta x)}) = \hat{u} t^{-\alpha} e^{i\beta x} E_{1,1-\alpha}(i\omega t) - \hat{u} \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} e^{i\beta x} = \hat{u}(i\omega) t^{1-\alpha} e^{i\beta x} E_{1,2-\alpha}(i\omega t),$$

por lo que la relación de dispersión asociada a la ecuación (5.1.3) está dada por la siguiente relación:

$$\omega t^{1-\alpha} E_{1,2-\alpha}(i\omega t) = -\lambda \beta e^{i\omega t}. \quad (5.4.6)$$

Cuando $\alpha = 1$, la expresión (5.4.6) coincide con la relación encontrada para la ecuación de evolución (5.4.3), pero en general, cuando $\alpha \neq 1$, no es posible despejar ω en función de β . Además, por el carácter no local del operador de derivación fraccionario, nos encontramos con que $\omega = \omega(\beta, t)$, es decir, la relación de dispersión involucra al tiempo. Debido a la enorme dificultad que representa seguir con el estudio de esta relación de dispersión para la ecuación en derivadas parciales fraccionarias, pasamos a considerar el comportamiento de un esquema numérico que la aproxime.

En concreto, vamos a estudiar, como ejemplo, el esquema en diferencias finitas (5.2.11), obtenido aplicando el método de Diethelm para calcular numéricamente la derivada parcial fraccionaria de Riemann-Liouville en el tiempo y la fórmula de Euler progresiva para calcular la derivada parcial en el espacio.

Empecemos con proporcionar el análogo discreto de la componente de Fourier (5.4.1), es decir:

$$u_l^n = \hat{u} e^{i\omega n \Delta t} e^{i\beta \Delta x}, \quad (5.4.7)$$

y, como en el caso continuo, buscamos la relación $\omega = \omega(\beta)$ gracias a la cual (5.4.7) soluciona (5.2.11). Teniendo en cuenta los desarrollos hechos en la demostración del Teorema 5.3.1, y en particular el resultado (5.3.6), podemos escribir

$$e^{i\omega \Delta t} = -\frac{\bar{\omega}_{1,0}}{(e^{i\beta \Delta x} - 1 + A_\alpha)} = \frac{A_\alpha}{(e^{i\beta \Delta x} - 1 + A_\alpha)} = \frac{A_\alpha}{L}, \quad (5.4.8)$$

donde el peso $\bar{\omega}_{1,0}$ es obtenido a partir de la definición (5.3.4), la forma de A_α ha sido definida en (5.3.7) y la expresión de L es la dada en (5.3.5), cambiando Q por β .

Si ahora escribimos $\omega = a + ib$, resulta $e^{i\omega \Delta t} = e^{ia\Delta t} e^{-b\Delta t}$, donde

$$b = -\frac{1}{\Delta t} \ln \frac{|A_\alpha|}{|L|}. \quad (5.4.9)$$

Por consiguiente, todas las ondas de la forma dada en (5.4.7), con $\beta \neq 0$, decaen cuando $b > 0$, es decir si $\frac{|A_\alpha|}{|L|} < 1$, que se cumple para $A_\alpha = \frac{\Delta x}{\lambda \Delta t^\alpha \Gamma(2-\alpha)} < 1$. En este caso, entonces, el esquema es disipativo y se cumple la condición necesaria para la estabilidad (5.3.1) dada por el Teorema 5.3.1. Si $\beta = 0$, la componente de Fourier no crece ni decae, y el esquema es no disipativo. Cuando $b < 0$, el esquema es inestable porque algunas componentes de Fourier no están acotadas.

Por otro lado, resulta

$$e^{ia\Delta t} = \frac{A_\alpha}{L} \frac{|L|}{|A_\alpha|} = \frac{A_\alpha}{|A_\alpha|} \left(\frac{\cos \beta \Delta x + A_\alpha - 1 - i \sin \beta \Delta x}{|L|} \right), \quad (5.4.10)$$

y, siendo $e^{ia\Delta t} = \cos a\Delta t + i \sin a\Delta t$, tenemos

$$\tan a\Delta t = -\frac{\sin \beta\Delta x}{\cos \beta\Delta x + A_\alpha - 1}, \quad (5.4.11)$$

con lo cual a resulta expresada como sigue

$$a = -\frac{1}{\Delta t} \arctan \left(\frac{\sin \beta\Delta x}{A_\alpha - 2 \sin^2 \frac{\beta\Delta x}{2}} \right). \quad (5.4.12)$$

Al ser a no lineal en β , el esquema es dispersivo.

Generalmente, cuando un esquema numérico presenta disipación y dispersión, la disipación suele esconder la dispersión y las componentes de Fourier que intentan moverse a la velocidad equivocada vienen amortiguadas. Al observar los resultados numéricos, suponemos que esto mismo pase para nuestro caso concreto, aunque no podamos confirmarlo analíticamente, ya que esto requeriría el estudio conjunto del comportamiento de $e^{-b\Delta t}$, para ver cómo la solución disipa, y del error en la velocidad de propagación de la componente de Fourier que contiene $\beta\Delta x$, para todo $0 \leq \beta\Delta x \leq \pi$. Dicho error sería la diferencia entre la velocidad exacta de propagación de la onda (5.4.1) que soluciona la ecuación (5.1.3), es decir, la función de β dada por $-\omega/\beta$, que conoceríamos si pudiéramos encontrar la expresión explícita de ω en función de β a partir de la relación (5.4.6), y la velocidad de propagación de la componente discreta de Fourier (5.4.7), dada por

$$-a/\beta = \frac{1}{\beta\Delta t} \arctan \left(\frac{\sin \beta\Delta x}{A_\alpha - 2 \sin^2 \frac{\beta\Delta x}{2}} \right),$$

para todo $0 \leq \beta\Delta x \leq \pi$.

5.5. Resultados numéricos

Para poder empezar con el cálculo de cualquiera de las ecuaciones en diferencias finitas presentadas en este capítulo y asociadas a la ecuación de evolución fraccionaria (5.1.3), siendo el dominio de éstas la malla de puntos que se defina estableciendo un intervalo temporal $[0, T]$, un paso temporal Δt , un intervalo espacial $[a, b]$ y un paso espacial Δx , será necesario proporcionar, además de una condición inicial $u_0(x)$, también una condición de contorno de tipo Dirichlet

$$u(t, a) = r(t), \quad (5.5.1)$$

con $r(t)$ función dada en el primer punto espacial de la malla $x = a$.

Al tratar con un esquema asociado a un problema de valores iniciales y de contorno, nos encontramos con un problema clásico; en general, el análisis de estabilidad de von Neumann discreto de dicho esquema, basado en el empleo de la componente de Fourier (5.3.2), no proveerá ningún tipo de información sobre la estabilidad de la condición de contorno y conducirá por lo tanto a una condición de estabilidad para el esquema numérico que sólo resultará ser necesaria. En efecto, tal estudio de estabilidad es el mismo que se conduciría sobre el mismo esquema cuando se incluyen sólo valores iniciales.

En particular, cuando se trata con esquemas en diferencias finitas asociados a problemas de valores iniciales y de contorno para ecuaciones parabólicas, el análisis de estabilidad de von Neumann discreto conduce a condiciones de estabilidad necesarias y suficientes sólo cuando la matriz correspondiente a dicho esquema es simétrica. Por otro lado, al trabajar con esquemas para ecuaciones hiperbólicas, casi nunca (o nunca) se obtienen matrices simétricas, lo que explica porque, para estos casos, generalmente sólo se pueden deducir condiciones de estabilidad que sean necesarias.

Para llegar a obtener una condición de estabilidad que sea también suficiente, habría que realizar un análisis de von Neumann discreto “generalizado” basado, en lugar que en la tradicional componente (5.3.2), en funciones apropiadas cuya forma puede ser deducida aplicando el método discreto de la separación de variables al problema en estudio (véase [157, Capítulo 3]). Otro método que, teniendo en cuenta las condiciones de contorno, conduce a condiciones de estabilidad más fuertes es el llamado “GKSO” que se detalla en [158]. Ambos desarrollos representarían una carga de trabajo adicional que excede los objetivos y el alcance establecidos para esta tesis, y que incluso adquieren dimensiones para desarrollos post-doctorales.

De todas formas, en nuestro caso se puede considerar generalmente satisfactoria la condición de estabilidad *necesaria* a la que llegamos en la sección 5.3, al no emplearse condiciones de contorno que sean muy dominantes.

Con esta premisa, vamos a presentar los resultados de las simulaciones numéricas obtenidas con los esquemas descritos anteriormente, del siguiente problema de valores inicial y de contorno para la ecuación de evolución fraccionaria (5.1.3):

$$\begin{aligned}({}_0^C D_t^\alpha u)(t, x) + \lambda \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} &= 0, \quad x > a, t > 0, \\ u(0+, x) &= e^{-\mu x}, \quad x > a, \\ u(t, a+) &= e^{-\mu a} E_{\alpha, 1}(\mu \lambda t^\alpha), \quad t > 0\end{aligned}\tag{5.5.2}$$

con $a \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$ y $0 < \alpha < 1$.

La solución analítica de este problema ha sido presentada en la fórmula (3.10.23) de la sección 3.10, y vale

$$u_\alpha(t, x) = e^{-\mu x} E_{\alpha, 1}(\mu \lambda t^\alpha).\tag{5.5.3}$$

Gracias a la propiedad (1.3.3) de la función de Mittag-Leffler, la solución (5.5.3) del problema (5.5.2), cuando $\alpha = 1/2$, toma la forma siguiente:

$$u_{1/2}(t, x) = e^{-\mu x} e^{\mu^2 \lambda^2 t} \operatorname{erfc}(-\mu \lambda \sqrt{t}).\tag{5.5.4}$$

Calculada para el caso límite $\alpha = 1$, la función (5.5.3) queda reducida a la solución

$$u_1(t, x) = e^{-\mu(x-\lambda t)},\tag{5.5.5}$$

debido a que la función de Mittag-Leffler $E_{\alpha, 1}(\mu \lambda t^\alpha)$ es la exponencial $e^{\mu \lambda t}$ cuando $\alpha = 1$.

Ahora, ya que la función de Mittag-Leffler está definida por medio de una serie infinita, en la práctica se calcula el valor de la expresión $E_{\alpha, 1}(\mu \lambda t^\alpha)$ solucionando numéricamente la ecuación diferencial ordinaria siguiente:

$$({}_0^C D_t^\alpha u)(t) - \mu \lambda u(t) = 0,\tag{5.5.6}$$

junto con la condición inicial $u(0) = 1$. En efecto, la propiedad (1.2.54) del operador de derivación de Caputo indica que la función $E_{\alpha,1}(\mu\lambda t^\alpha)$ es solución de la ecuación (5.5.6) con condición inicial $u(0) = 1$.

En la Figura 5.6 se presenta la gráfica de la función $E_{\alpha,1}(\mu\lambda t^\alpha)$ para $\mu = \lambda = 1$, $t \in [0, 3]$ y cuando $\alpha = 0,2$, $\alpha = 0,5$, $\alpha = 0,8$ y $\alpha = 1$; el comportamiento de la solución analítica exacta (5.5.3) del problema (5.5.2) cuando $x \in [-2, 2]$ y $t \in [0, 4]$ es presentado para $\alpha = 0,1$, $\alpha = 0,5$ y $\alpha = 0,99$ en la Figura 5.7 cuando $\mu = \lambda = 1$ y en la Figura 5.8 cuando $\mu = 1$ y $\lambda = -1$.

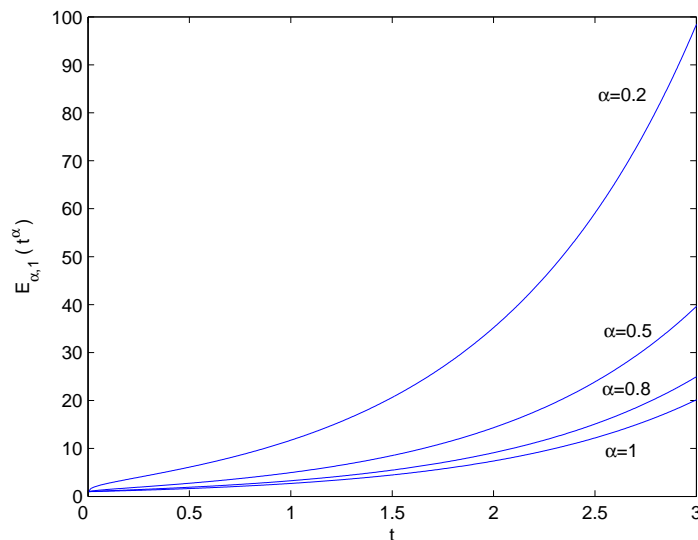


Fig. 5.6: Función $E_{\alpha,1}(t^\alpha)$ para $0 \leq t \leq 3$ y $\alpha = 0,2$, $\alpha = 0,5$, $\alpha = 0,8$ y $\alpha = 1$

En relación al comportamiento de los 6 esquemas analizados, obtenidos cada uno aplicando el método de Diethelm o de Lubich para aproximar la derivada parcial fraccionaria de Riemann-Liouville en el tiempo y una entre las tres fórmulas (5.2.7), (5.2.8) y (5.2.9) para la derivada parcial en el espacio, es de resaltar que dos de ellos han tenido un comportamiento muy variable, con respecto a los resultados teóricos que se había obtenido sobre su estabilidad, a la hora de emplearlos en la resolución del problema de valores inicial y de contorno (5.5.2).

En efecto, los dos esquemas de Diethelm (5.2.12) y de Lubich (5.2.31), obtenidos utilizando la fórmula de diferencias centrada (5.2.8) para aproximar la derivada primera en el espacio, a pesar de ser los únicos dos, entre los seis en consideración, que según la teoría de von Neumann discreta resultan ser incondicionalmente estables en la aproximación del problema de valor inicial (5.5.2), en la práctica, si también se introduce la condición de contorno (5.5.1) en los dos esquemas, su estabilidad dependerá estrictamente de esta condición y de los valores elegidos para λ , a , b , T , Δx y Δt . Esta anomalía en el comportamiento de los esquemas (5.2.12) y (5.2.31) está también justificada por el hecho de que, de acuerdo con lo dicho en la Observación 5.2.1, cuando se trabaja con ellos hay que emplear otro método numérico distinto para calcular la aproximación de los primeros pasos temporales u_1^n , para todo $n = 1, \dots, N$. En nuestro caso, se utilizan las

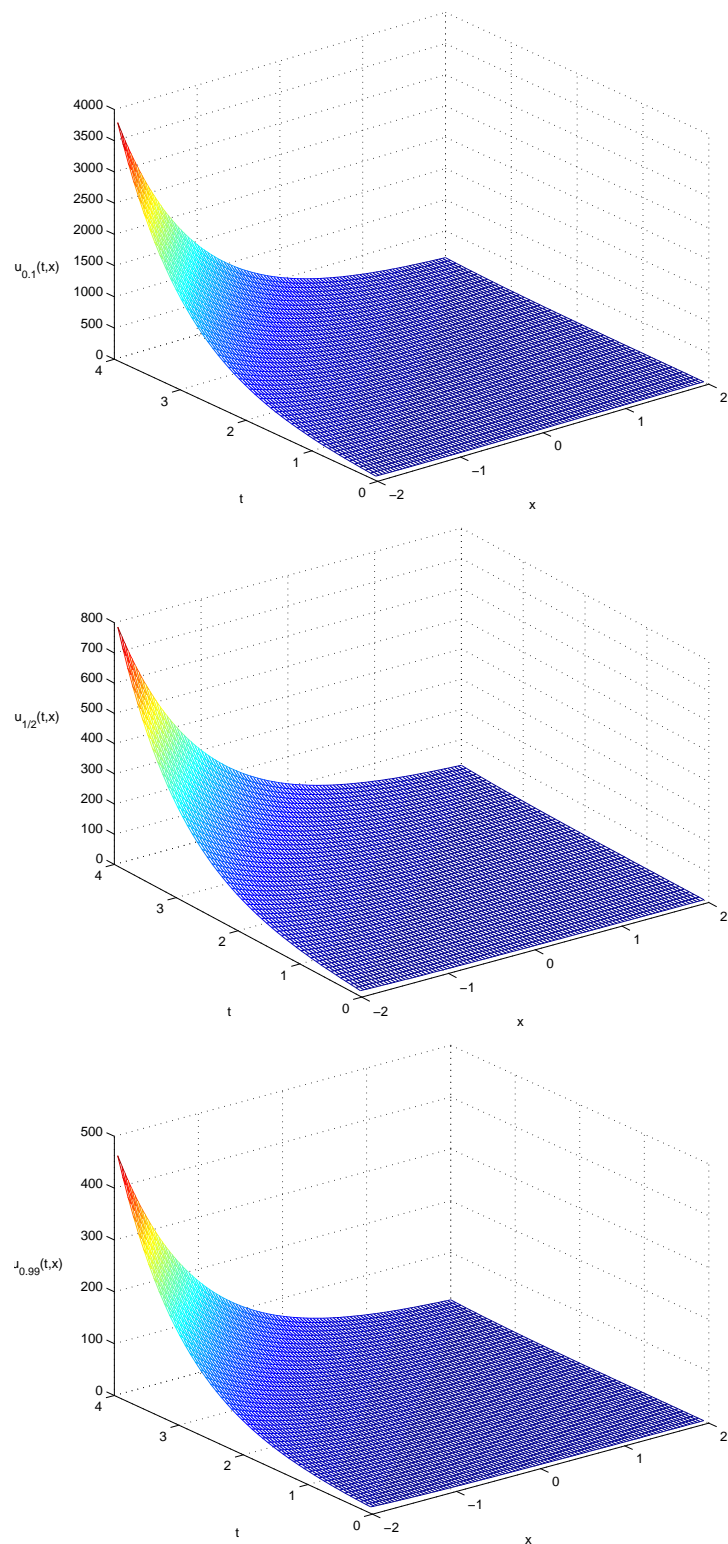


Fig. 5.7: Función $u_\alpha(t, x) = e^{-x} E_{\alpha,1}(t^\alpha)$ cuando $\alpha = 0,1$, $\alpha = 0,5$ y $\alpha = 0,99$.

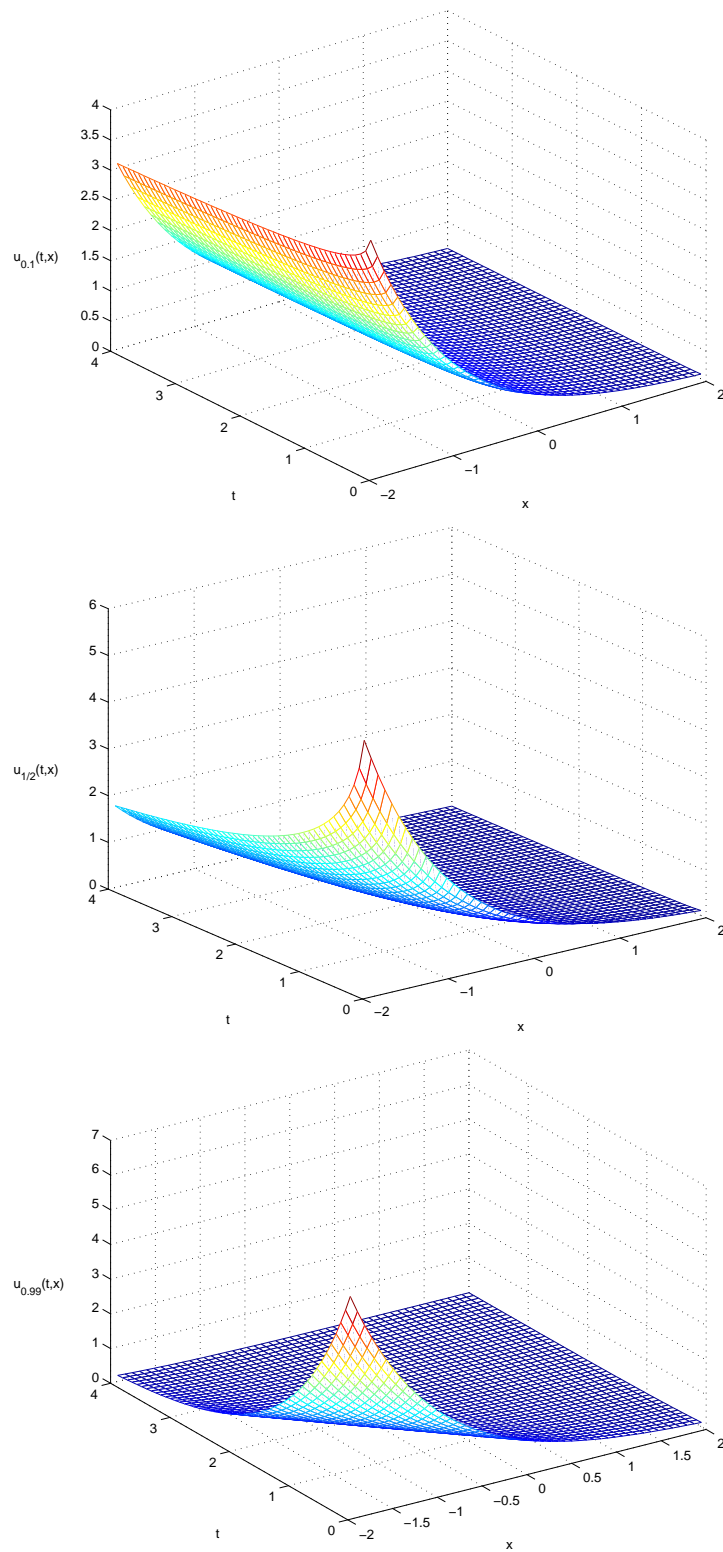


Fig. 5.8: Función $u_\alpha(t,x) = e^{-x} E_{\alpha,1}(-t^\alpha)$ cuando $\alpha = 0,1$, $\alpha = 0,5$ y $\alpha = 0,99$.

α	DFF	DCF	DBF	DPC	LFF	LCF	LBF	LPC
0.1	0.1189	0.0505	0.1165	0.1094	0.1127	0.0538	0.1225	0.1160
0.5	0.0241	<i>nc</i>	0.0236	0.4016	0.0184	<i>nc</i>	0.0292	0.0239
0.9	<i>nc</i>	<i>nc</i>	0.0137	<i>nc</i>	<i>nc</i>	<i>nc</i>	0.0162	<i>nc</i>

Tab. 5.1: Errores absolutos de los métodos numéricos aplicados al problema (5.5.2), (5.5.1), cuando $\mu = \lambda = 1$, $x \in [1, 3,5]$, $\Delta x = 0,025$, $t \in [0, 2]$, $\Delta t = 0,0125$, para distintos valores de α .

fórmulas numéricas (5.2.11) y (5.2.30), respectivamente, para el cálculo de los primeros pasos temporales en los esquemas (5.2.12) y (5.2.31), y, como se ha visto, ambos son condicionalmente estables.

Concluimos esta sección presentando algunos de los resultados de nuestras simulaciones numéricas. Utilizando el programa Matlab7.0 con doble precisión para implantar los métodos numéricos en cuestión, se han desarrollado varios cálculos que han permitido una confrontación entre las aproximaciones producidas y la solución exacta del problema (5.5.2); dicha confrontación queda expresada en términos de los errores absolutos obtenidos, para distintos valores de α , Δx , Δt y λ . Como ya se ha resaltado, los valores de la solución analítica (5.5.3) sobre los puntos de la malla espacio-temporal considerada no son exactos, sino que se han calculado numéricamente a través de un esquema que, resolviendo la ecuación (5.5.6) junto con la condición inicial $u(0) = 1$, aproxima la función de Mittag-Leffler $E_{\alpha,1}(\mu\lambda t^\alpha)$.

En lo que sigue, utilizamos las notaciones DFF, DCF y DBF, para indicar, respectivamente, los esquemas (5.2.11), (5.2.12) y (5.2.13), obtenidos con el método de Diethelm, y la notación DPC para el esquema predictor-corrector de Diethelm (5.2.53)-(5.2.55); análogamente, indicamos con LFF, LCF y LBF, respectivamente, los esquemas que aplican el método de Lubich (5.2.30), (5.2.31) y (5.2.32) y con LPC el esquema predictor-corrector de Lubich (5.2.54)-(5.2.55). En presentar los resultados numéricos, escribimos *nc* cuando el esquema no ha convergido y, por lo tanto, se ha encontrado un error absoluto no acotado.

En el Cuadro 5.1 se han tabulado los valores de los errores absolutos calculados entre las soluciones del problema (5.5.2), (5.5.1) obtenidas con los métodos de Diethelm y de Lubich, y la aproximación numérica de su solución analítica (5.5.3), cuando $\mu = \lambda = 1$, $x \in [1, 3,5]$, $\Delta x = 0,025$, $t \in [0, 2]$, $\Delta t = 0,0125$, y para distintos valores de α .

Este ejemplo resulta interesante por el hecho de confirmar que las condiciones de estabilidad encontradas en la Sección 5.3 son *necesarias*.

En efecto, de acuerdo con las condiciones de estabilidad que se han proporcionado en los Teoremas 5.3.3 y 5.3.6, los dos métodos de Diethelm y de Lubich, DBF y LBF que aplican la fórmula de Euler regresiva para aproximar la derivada espacial, resultan ser siempre estables para este caso, al ser $\lambda > 0$ y por consiguiente $\frac{\Delta x}{\Delta t^\alpha \Gamma(2-\alpha)} \geq -1$ para todo α , con $0 < \alpha < 1$. Por el contrario, según los Teoremas 5.3.1 y 5.3.4, los esquemas DFF y LFF que aplican la fórmula de Euler progresiva para aproximar la derivada espacial, son sujetos, respectivamente, a las condiciones necesarias de estabilidad $\frac{\Delta x}{\Delta t^\alpha \Gamma(2-\alpha)} \leq 1$ y $\frac{\Delta x}{\Delta t^\alpha} \leq 1$, para todo α , con $0 < \alpha < 1$. Ahora, dichas condiciones quedan cumplidas si $\alpha = 0,1$ y $\alpha = 0,5$, pero son violadas cuando $\alpha = 0,9$ al ser $\Delta x = 0,025$, $\Delta t^{0,9} = 0,0194$ y $\Gamma(1,1) = 0,9513$. Todo esto queda reflejado en el Cuadro 5.1, el cual también muestra que,

α	λ	DFE	DCF	DBF	DPC
0.1	1	3.20e-04	3.54e-07	3.20e-04	1.52e-04
	-1	1.02e-06	1.01e-09	1.02e-06	3.53e-06
0.5	1	7.03e-05	7.77e-08	7.03e-05	7.83e-05
	-1	1.43e-06	1.32e-09	1.43e-06	8.64e-06
0.9	1	4.81e-05	5.32e-08	4.81e-05	3.17e-04
	-1	1.18e-06	1.60e-09	1.81e-06	1.80e-05
α	λ	LFF	LCF	LBF	LPC
0.1	1	0.0540	0.0544	0.0547	0.0545
	-1	7.81e-04	7.82e-04	7.83e-04	7.85e-04
0.5	1	0.0457	0.0458	0.0458	0.0457
	-1	0.0032	0.0032	0.0032	0.0032
0.9	1	0.0170	0.0170	0.0171	0.0167
	-1	0.0017	0.0017	0.0017	0.0018

Tab. 5.2: Errores absolutos de los métodos numéricos aplicados al problema (5.5.2), cuando $\mu = 1$, $x \in [1, 1,1]$, $\Delta x = 0,0001$, $t \in [0, 3]$, $\Delta t = 0,2$, para distintos valores de α .

como ya habíamos anunciado, los dos esquemas de Diethelm y de Lubich DCF y LCF que aplican la fórmula centrada para aproximar la derivada espacial, al resultar inestables cuando $\alpha = 0,5$ y $\alpha = 0,9$, tienen un comportamiento muy distinto del teórico, que asegura estabilidad incondicional para todo α . Sobre los dos esquemas del tipo predictor-corrector no disponemos de resultados teóricos de estabilidad que probar.

Si se simulan las soluciones del anterior problema (5.5.2) con los mismos datos $\mu = 1$, $x \in [1, 3,5]$, $\Delta x = 0,025$, $t \in [0, 2]$, $\Delta t = 0,0125$, pero asumiendo esta vez $\lambda = -1$, se encuentra que convergen todos los esquemas sólo cuando $\alpha = 0,1$, mientras que divergen si $\alpha = 0,5$ ó $\alpha = 0,9$.

Las repetidas simulaciones que se han llevado a cabo para distintos valores de α , Δx , Δt y λ , inducen a pensar que las condiciones de estabilidad necesarias y suficientes para los métodos que estamos considerando, tienen que ser mucho más restrictivas que las que hemos encontrado en la Sección 5.3, que son sólo necesarias.

En el Cuadro 5.2 se presentan los resultados que se han obtenido simulando la solución del problema (5.5.2), (5.5.1), con $\mu = 1$, $x \in [1, 1,1]$, $\Delta x = 0,0001$, $t \in [0, 3]$, $\Delta t = 0,2$, y $\lambda = \pm 1$. El tener un Δx del orden de 10^{-4} , frente a un Δt del orden de 10^{-1} ha implicado la convergencia de todos los métodos; para tener un paso espacial de este orden ha sido necesario considerar un intervalo espacial $[a, b]$ muy pequeño, debido a las limitaciones del programa de calculo que se ha utilizado para este trabajo.

5.6. Conclusiones

En el presente capítulo se han construido esquemas numéricos para la resolución de la ecuación de evolución-difusión del tipo de Dirac (5.1.3), con derivada fraccionaria de Caputo (1.2.46) en el tiempo, y junto con la condición inicial (5.1.4). Para ello, se han previamente encontrado varias aproximaciones posibles del operador de derivación fraccionario de Riemann-Liouville, que resulta ser equivalente al de Caputo según la identidad (5.1.5); por consiguiente, cualquier aproximación de la derivada de Caputo de una función puede ser expresada en términos de una aproximación de la derivada de Riemann-Liouville de la función y de las condiciones iniciales enteras.

El carácter de *no localidad* de los operadores integrales que definen las derivadas de orden real cualquiera, es decir, el hecho de que el valor de la derivada fraccionaria $({}_a D_t^\alpha u)(t)$ (cualquiera que sea su definición) dependa de todos los valores de la función u sobre el intervalo de integración $[a, t]$, contrasta con el comportamiento local de la derivada clásica de orden entero, que puede ser evaluada a partir de valores de u en un intervalo arbitrariamente pequeño alrededor de t . Esta propiedad de *memoria* de las derivadas fraccionarias hace que toda discretización que se use para aproximarlas tenga una estructura compleja que aumenta el coste aritmético del algoritmo correspondiente, con respecto a los métodos usuales para las ecuaciones diferenciales de orden entero.

En la sección 5.2 de este capítulo se han presentado dos métodos, propuestos por K. Diethelm y por Ch. Lubich, para la construcción de fórmulas de aproximación de integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville basados en la utilización de *fórmulas de cuadratura*. Para ambos métodos, se ha especificado el orden de convergencia de la fórmula de aproximación de la derivada fraccionaria que se ha obtenido a la correspondiente expresión exacta, viendo cómo, para nuestro caso concreto en el cual el índice de la derivada fraccionaria está entre 0 y 1, resulta ventajoso el método de Diethelm frente al de Lubich, conduciendo este primero a aproximaciones con un orden de convergencia mayor.

Entonces, empleando las fórmulas de Diethelm o de Lubich para discretizar la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y utilizando las fórmulas en diferencias finitas clásicas, progresiva, centrada o regresiva, por lo que concierne a la aproximación de la derivada primera espacial, se han construido seis esquemas distintos que solucionan numéricamente la ecuación (5.1.3), que se han indicado respectivamente con DFF, DCF, DBF, LFF, LCF y LBF.

En la Sección 5.3 se ha desarrollado el análisis de estabilidad del tipo de von Neumann discreto de dichos esquemas numéricos asociados al problema de valores iniciales (5.1.3) y (5.1.4). Este tipo de análisis ha determinado condiciones de estabilidad que son necesarias pero, en general, no suficientes, para todos los esquemas a excepción de los dos que emplean la fórmula en diferencias centrada para aproximar la derivada primera espacial, DCF y LCF, que resultan ser incondicionalmente estables.

La Sección 5.4 está dedicada al estudio de las propiedades de dispersión y disipación de la ecuación de evolución-difusión del tipo de Dirac fraccionaria (5.1.3), y de un particular esquema, el DFF, de entre los que se han construido para aproximarla.

La relación de dispersión-disipación que se ha obtenido para la ecuación continua (5.1.3) tiene una expresión muy compleja, implícita y que involucra al tiempo debido al carácter no local del operador de derivación fraccionario. Este mismo estudio, conducido para el esquema numérico DFF, ha puesto en evidencia que éste es disipativo o no disipativo cuando se cumple la condición necesaria para su estabilidad, obtenida en la Sección 5.3. Asimismo, el esquema resulta ser dispersivo, aunque puede que este comportamiento no se observe cuando, como suele ocurrir, la disipación esconde la dispersión y las componentes de Fourier que intentan moverse a la velocidad equivocada vienen amortiguadas.

Una vez más, la ecuación de evolución-difusión del tipo de Dirac fraccionaria (5.1.3), generalización de las ecuaciones clásicas de difusión y de ondas, manifiesta un comportamiento intermedio entre el parabólico (disipativo) y el hiperbólico (no disipativo).

En la Sección 5.5 se han recogido los resultados de las simulaciones de la solución del particular problema de valores inicial y de contorno (5.5.2), en donde la condición

de contorno es necesaria numéricamente para conocer el valor de la función $u(t, x)$ en el primer punto espacial $x = a$ de la malla uniforme que se construye sobre $[a, b] \times [0, T]$.

El hecho de pasar de un problema de valores iniciales a un problema de valores inicial y de contorno, no modifica, en este caso, los resultados de estabilidad. En efecto, cuando se conduce un estudio del tipo de von Neumann discreto sobre esquemas en diferencias finitas asociados a problemas de valores iniciales y de contorno para ecuaciones parabólicas, ello conduce a condiciones de estabilidad necesarias y suficientes si la matriz correspondiente a dicho esquema es simétrica. Al trabajar con esquemas para ecuaciones hiperbólicas, casi nunca (o nunca) se obtienen matrices simétricas, con lo cual, para estos casos, sólo se pueden deducir condiciones de estabilidad que sean necesarias.

De todas formas, hay que subrayar que en nuestras simulaciones la presencia de una condición de contorno ha provocado, en algunos casos, un comportamiento muy variable de los algoritmos con respecto a los resultados teóricos que se había obtenido sobre su estabilidad. Por ejemplo, se ha perdido la estabilidad incondicional de los dos métodos DCF y LCF.

Concluimos diciendo que en la Sección 5.2.3 se ha presentado otro algoritmo, llamado predictor-corrector fraccionario, para la resolución numérica de la ecuación (5.1.3) junto con la condición (5.1.4). Este método resulta ser una generalización del *método clásico de Adams-Bashforth-Moulton en un paso* (también llamado predictor-corrector), ampliamente aplicado en la literatura clásica en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Ha sido recientemente aplicado, con las debidas modificaciones, en la resolución de ecuaciones diferenciales fraccionarias ordinarias y, en ese contexto, ha sido analizada su estabilidad; aquí se formula su expresión en el caso de la ecuación de evolución fraccionaria en derivadas parciales (5.1.3), cuando se emplean las fórmulas discretas de Diethelm (método indicado con DPC) o de Lubich (método indicado con LPC) en la formulación de la ecuación de corrección, y se omite su estudio de estabilidad. Los resultados numéricos han evidenciado que, la mayor complejidad aritmética de los dos métodos predictor-corrector no queda reflejada en una mejora evidente de la precisión en los cálculos con respecto a los otros métodos.

6. RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE SENO-GORDON FRACCIONARIA

6.1. Introducción

Las ecuaciones que describen los modelos locales relacionan las funciones y sus derivadas en el mismo instante de tiempo y en el mismo punto del espacio. Sin embargo, y como hemos ido afirmando a lo largo de todo este trabajo de investigación, en muchos casos esta aproximación es insuficiente y es necesario tomar en consideración la *no localidad* del problema. Desde el punto de vista matemático, volvemos a subrayar que esto significa incluir términos integrodiferenciales en las ecuaciones que describen el modelo.

El objeto de estudio de este capítulo serán las ecuaciones del tipo de Klein-Gordon no lineal y no local

$$u_{tt} - L[u] + F(u) = 0, \quad (6.1.1)$$

donde L es el operador integrodiferencial

$$L[f](x, t) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - x') f_{x'}(x', t) dx'. \quad (6.1.2)$$

La ecuación (6.1.1) proporciona uno de los modelos básicos para describir la evolución de ondas que se propagan en medios que presentan, a la vez, tanto no localidad como no linealidad (véase [81] y [147], por ejemplo). A partir de la ecuación (6.1.1), la ecuación de Klein-Gordon clásica, local y no lineal,

$$u_{tt} - u_{xx} + F(u) = 0, \quad (6.1.3)$$

se obtiene, cuando $L[u] = \partial^2/\partial x^2 u$, como caso límite correspondiente a $G(\xi) = \delta(\xi)$, donde $\delta(\xi)$ es la función Delta de Dirac definida en (1.2.94). Dentro de esta familia de ecuaciones, la particular ecuación de Klein-Gordon no lineal

$$u_{tt} - u_{xx} + u - u^3 = 0, \quad (6.1.4)$$

fue propuesta por primera vez en las referencias [17] y [82] para describir sistemas que sufren transiciones de fase estructurales. Acerca de esta ecuación, también llamada ϕ^4 , pueden consultarse adicionalmente las referencias [79], [80] y [144].

Cuando en la ecuación (6.1.3) sustituimos $F(u) = \sin u$, entonces obtenemos la ecuación de seno-Gordon

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0, \quad (6.1.5)$$

que fue propuesta por J. Frenkel y T. Kontorova [54] para describir la relación entre la dinámica de las dislocaciones y la deformación plástica de un cristal. Sucesivamente, esta ecuación ha tenido aplicación en campos diversos de la física [41], siendo empleada, entre otras cosas, en modelos de partículas [129] que interactúan según próximos vecinos (modelo local), para el estudio del movimiento de las paredes de dominios ferromagnéticos, para modelar efectos de transparencia autoinducida en óptica no lineal, así como para describir flujos de cuantos en líneas de transmisión de Josephson [70].

En general, se puede afirmar que el ámbito de aplicación de la ecuación de Klein-Gordon no lineal (6.1.3) es muy amplio (véase, por ejemplo, [41]). No obstante, como ya mencionamos, hay situaciones en las que una formulación local no es suficiente para describir el fenómeno ondulatorio en cuestión. Por ejemplo, es necesario un término no local para describir modelos discretos de redes en las que se observan interacciones de largo alcance entre los nodos [5], cuyo límite continuo son ecuaciones locales y no lineales del tipo de (6.1.3). También, el término no local $L[u]$ aparece de forma natural cuando la dispersión del medio no responde a la ley cuadrática. Existen redes metálicas cuyas fuerzas interatómicas tienen una relación de dispersión lineal que no coincide con la habitual de próximos vecinos $\omega = k^2$ [76, Cap. 3-5]. Asimismo, dicho término puede ser originado en la formulación de problemas iniciales asociados a modelos que presentan geometría curvilínea [56]. Adicionalmente, dichas generalizaciones no locales aparecen en la electrodinámica de las uniones de Josephson [10], en la hidrodinámica [122], en la teoría de condensación de Bose - Einstein [30], en los modelos de las redes cristalinas [56], entre otros. Estudios previos [5] de las soluciones del tipo “kink” descritas por la ecuación (6.1.1) han puesto en evidencia que el pasar de un modelo local a un modelo no local puede implicar cambios significativos de las propiedades de dichas soluciones, cuales, por ejemplo, el fenómeno de discretización de las velocidades de los kinks.

La generalización no local de la ecuación (6.1.5):

$$u_{tt} - L[u] + \sin u = 0, \quad (6.1.6)$$

ha sido empleada para modelar varios problemas no locales de las electrodinámicas de Josephson [69, 16, 63, 114, 9, 14] en los que se pasa de superconductores tradicionales a superconductores de alta temperatura; véase también las referencias [29, 163] para ulteriores aplicaciones de la ecuación (6.1.6).

Dos ejemplos de geometrías de un contacto de Josephson son proporcionados por la geometría de tipo “sandwich” y por la de una grieta en una placa superconductora fina, ambas ilustradas, respectivamente, en la Figura 6.1 y en la Figura 6.2.

La notación empleada en la Figura 6.1 es la siguiente: D_0 es el espesor de la capa túnel central y d es el espesor de los dos superconductores. La función $u(t, x)$ que soluciona la ecuación de seno-Gordon no local (6.1.6) en los problemas de contactos de Josephson, representa una diferencia de fase normalizada de la función de ondas sobre los dos lados del contacto.

6.2. La ecuación de seno-Gordon fraccionaria

Dentro de la familia de ecuaciones de Klein-Gordon no lineales y no locales (6.1.1), restringimos el presente estudio a aquellas ecuaciones en las que el operador no local L

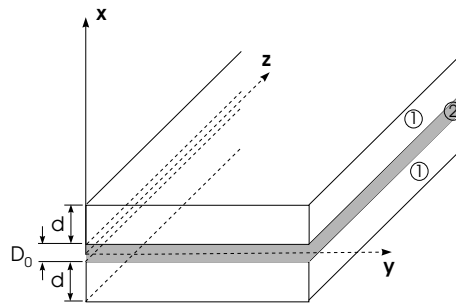


Fig. 6.1: Geometría “sandwich”: 1 - superconductor, 2 - capa túnel (dieléctrico).

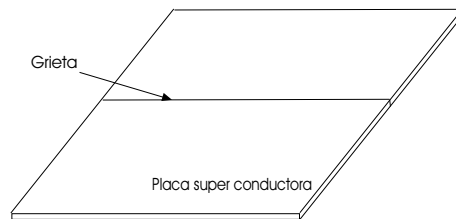


Fig. 6.2: Geometría de la grieta en una placa superconductora fina.

toma la forma

$$L[u](t, x) = ({}^F D_x^\alpha u)(t, x), \quad 0 < \alpha \leq 2, \tag{6.2.1}$$

donde con la notación ${}^F D_x^\alpha$ hemos indicado el operador de derivación fraccionario en el espacio de Feller-Riesz ${}^F D_0^\alpha$, definido en (1.2.121).

Recordamos que, debido a la propiedad (1.2.125) de la derivada fraccionaria de Feller-Riesz, cuando $\alpha = 1$ resulta

$$L[u](t, x) = ({}^F D_x^1 u)(t, x) = \left(\frac{\partial}{\partial x} H u\right)(t, x), \tag{6.2.2}$$

donde H es la transformada de Hilbert

$$(Hf)(t, x) \equiv \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t, x') dx'}{x' - x}, \tag{6.2.3}$$

que ya introducimos, para el caso unidimensional, en (1.2.126). Por otro lado, cuando $\alpha = 2$, de acuerdo con la propiedad (1.2.124) del operador de derivación fraccionario de Feller-Riesz, el operador no local dado en (6.2.1) se reduce al operador local clásico de derivación segunda, es decir

$$L[u](t, x) = ({}^F D_x^2 u)(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x). \tag{6.2.4}$$

El operador integrodiferencial en su forma general (6.1.2) conduce a la expresión (6.2.2) si, por ejemplo, $G(\xi) \sim \ln |\xi|$, es decir, el núcleo contiene una singularidad logarítmica (véase, por ejemplo, [63]). Será fundamental tener presente que el operador de derivación fraccionaria de Feller-Riesz definido en (6.2.1) puede expresarse en el espacio de Fourier, de

acuerdo con la propiedad dada en (1.2.122), como $(\mathcal{F}_x({}^F D_x^\alpha u))(t, k) = -|k|^\alpha (\mathcal{F}_x u)(t, k)$; esta peculiar característica puede significar que en los problemas lineales derivados de una ecuación que contenga el término no local (6.2.1), la relación de dispersión sea $\omega \sim |k|^\alpha$, con $0 < \alpha \leq 2$, en lugar de $\omega = k^2$, típica de ecuaciones en las que aparece el habitual operador local de derivada segunda.

Una vez introducido el operador no local L de derivación fraccionaria de Feller-Riesz definido en (6.2.1) en la ecuación (6.1.1), volvemos a operar una ulterior restricción al considerar el funcional

$$F(u) = \sin u; \quad (6.2.5)$$

entonces se obtiene la *ecuación de seno-Gordon fraccionaria* [8],

$$u_{tt} - {}^F D_x^\alpha u + \sin u = 0. \quad (6.2.6)$$

Esta ecuación, cuando $1 \leq \alpha \leq 2$, representa una interpolación entre la *ecuación de seno-Gordon no local* (también denominada *ecuación de seno-Hilbert II* en la referencia [11])

$$u_{tt} - H u_x + \sin u = 0, \quad (6.2.7)$$

y la ecuación de seno-Gordon clásica (local) (6.1.5); como tal, puede considerarse como una generalización fraccionaria de un modelo de propagación de ondas no lineal, que pasa de ser no local ($1 \leq \alpha < 2$) a ser local ($\alpha = 2$).

La ecuación de seno-Gordon no local (6.2.7) aparece en muchas aplicaciones físicas [63, 114, 15, 10, 11, 12] como el análogo no local de la ecuación de seno-Gordon clásica (6.1.5).

La ecuación (6.1.5) tiene infinitas leyes de conservación y solución para todo dato inicial. Las dos soluciones exactas más importantes son el 2π -*kink* (*antikink*) viajero

$$u(t, x) = 4 \arctan \left[\exp \left\{ \pm \frac{x - ct}{\sqrt{1 - c^2}} \right\} \right], \quad c^2 < 1 \quad (6.2.8)$$

y el *breather*

$$u_\omega(t, x) = 4 \arctan \left[\frac{\sqrt{1 - \omega^2} \cos(\omega t)}{\omega \cosh \sqrt{1 - \omega^2} x} \right], \quad 0 < \omega < 1. \quad (6.2.9)$$

El “breather” toma el nombre del hecho de ser una función localizada en el espacio, es decir,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = 0, \quad (6.2.10)$$

y periódica en el tiempo,

$$u(t, x) = u(t + T, x); \quad (6.2.11)$$

ambas propiedades inducen un comportamiento muy parecido al de un objeto que “respira”, y de allí el nombre de “breather”.

La propiedad de integrabilidad que posee la ecuación (6.1.5) implica un comportamiento elástico de las interacciones entre sus soluciones de tipo kink y de tipo breathers; es decir, éstas restablecen sus formas y velocidades después de dicha interacción, que suele llamarse de tipo solitónica debido a sus características. Un ejemplo de este comportamiento es mostrado en la Figura 6.3.

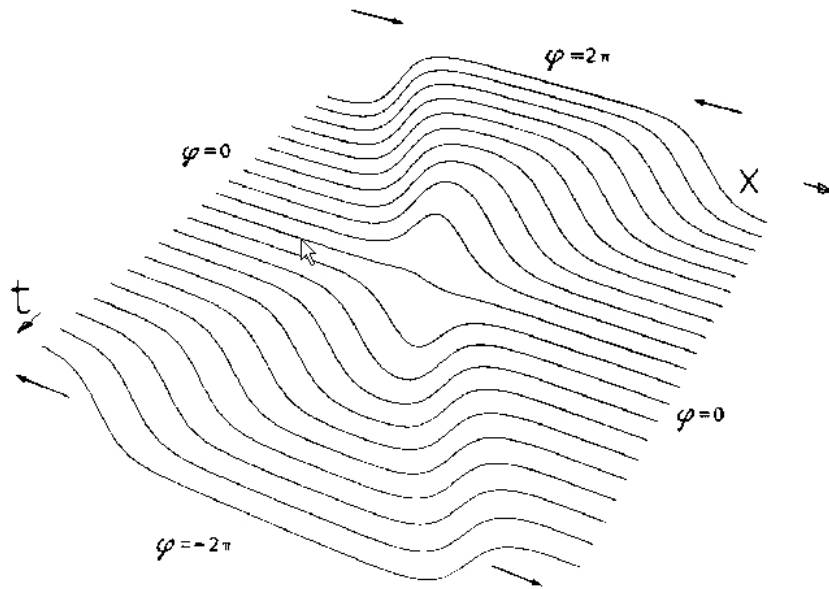


Fig. 6.3: Interacción del kink y del antikink en el modelo de seno-Gordon (extraído del libro “Solitons and nonlinear wave equations” de R.K.Dodd, J.C.Eilbeck, J.D.Gibbon, H.C.Morris [41]).

La ecuación de seno-Gordon no local (6.2.7) ha sido bastante menos estudiada que la ecuación (6.1.5). Se sabe que la integral de la energía para la ecuación (6.2.7) es

$$\mathcal{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} u H u_x + 1 - \cos u \right\} dx; \quad \frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0, \quad (6.2.12)$$

y que posee algunas soluciones exactas. Estas son: el 2π -kink (antikink) del estado estacionario $u_t(t, x) \equiv 0$ [63]:

$$u(t, x) = \pi \pm 2 \arctan x; \quad (6.2.13)$$

el 4π -kink (antikink) viajero [15]:

$$u(t, x) = \pm 4 \arctan(x \mp t); \quad (6.2.14)$$

y algunas estructuras viajeras y periódicas [10]. Para algunas de estas soluciones, se puede resolver el problema espectral asociado de la estabilidad de forma completa y explícita [12]. Hay que resaltar que no toda solución exacta de la ecuación de seno-Hilbert II (6.2.7) tiene su equivalente entre las soluciones de la ecuación de seno-Gordon (6.1.5), como por ejemplo ocurre con el 4π -kink (antikink) viajero (6.2.14), así como la solución exacta de tipo “breather” (6.2.9) de la ecuación de seno-Gordon (6.1.5) no tiene correspondencia entre las soluciones exactas de la ecuación de seno-Hilbert II (6.2.7).

En este capítulo nos centramos en la búsqueda numérica de soluciones de tipo “breathers” para la ecuación de seno-Gordon fraccionaria (6.2.6) cuando $1 \leq \alpha < 2$.

El problema de la existencia de soluciones exactas de tipo “breathers” para la ecuación de Klein-Gordon no lineal tradicional (6.1.3) ha sido ampliamente tratado en la literatura. Es conocido ([42], [43] y [83]) que generalmente la ecuación (6.1.3) no admite soluciones de

este tipo aunque, como acabamos de ver, éstas pueden existir para particulares elecciones de la no linealidad $F(u)$, como es el caso de $F(u) = \sin u$.

Por otro lado, la ecuación (6.1.3) puede describir soluciones que son “pseudo-breathers”, es decir, pulsaciones que tienen vidas muy largas y que son casi periódicas en el tiempo y localizadas en el espacio.

Objetos de este tipo serán los que se buscarán de entre todos los que describe la ecuación de seno-Gordon fraccionaria (6.2.6). Veremos como, en efecto, el estudio numérico de dicha ecuación pondrá en evidencia la existencia de “pseudo-breathers” de larga vida que pueden ser tratados, en las aplicaciones físicas, como periódicos en el tiempo y localizados en el espacio. Estos objetos son bastante robustos y pueden desarrollarse en el curso de la evolución de estados iniciales de perfiles muy distintos. No obstante, el hecho de que estas estructuras hayan sido obtenidas sólo numéricamente, no permite afirmar rigurosamente su periodicidad y localización; pero sí estas propiedades tienen validez en la escala computacional observada. Además, parece bastante probable que el problema que estamos tratando sea muy parecido al del caso local [6] y que, en general, la ecuación (6.2.6) no admita soluciones que cumplan las condiciones (6.2.10)-(6.2.11) en un sentido estrictamente matemático.

6.3. Construcción numérica de soluciones de tipo breathers

6.3.1. Ideas básicas

Para construir numéricamente las soluciones de tipo breathers de la ecuación de seno-Gordon fraccionaria (6.2.6) cuando $1 \leq \alpha < 2$, vamos a emplear el método llamado de *aproximación por ondas rotatorias* [52]; en la literatura este enfoque ha sido aplicado con éxito a la construcción de breathers discretos en redes no lineales [52], [21], de breathers radiales de la ecuación de seno-Gordon multidimensional [132], [6], de solitones espaciados (“gap solitons”) [7], y en otros problemas no lineales.

Los puntos principales de este método pueden resumirse de la siguiente manera. Siendo la no linealidad que aparece en la ecuación (6.2.6) de tipo impar (función seno) y la solución de tipo breather periódica en el tiempo por definición, se puede pensar escribir dicha solución como una serie de Fourier con respecto a t , que incluya sólo los términos con cosenos impares

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \cos((2n + 1)\omega t) \quad (6.3.1)$$

donde ω , con $0 < \omega < 1$, es la frecuencia temporal.

Assumiendo la forma (6.3.1) para nuestra solución de tipo breather y sustituyéndola en la ecuación (6.2.6), obtenemos el siguiente sistema infinito de ecuaciones no locales para

los armónicos $u_n(x)$:

$$\begin{aligned} {}^F D_x^\alpha u_0 + \omega^2 u_0 &= F_0(u_0, u_1, \dots); \\ {}^F D_x^\alpha u_1 + 9\omega^2 u_1 &= F_1(u_0, u_1, \dots); \\ &\vdots \\ {}^F D_x^\alpha u_n + (2n+1)^2 \omega^2 u_n &= F_n(u_0, u_1, \dots); \\ &\vdots \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

donde $F_m(u_0, u_1, \dots)$ es el coeficiente que multiplica $\cos((2m+1)\omega t)$ en la expansión de Fourier de la no linealidad $\sin(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \cos((2n+1)\omega t))$.

Ahora bien, las soluciones de los sistemas finitos que se obtienen truncando (6.3.2) pueden ser tomadas como aproximaciones del mismo sistema completo, y, en algunos casos, hasta un solo armónico $u_0(x)$ proporciona una buena aproximación de $u(t, x)$. En esta idea se basa el método de la aproximación por ondas rotatorias.

Entonces, suponiendo que la solución de tipo breather puede ser bien descrita por un solo armónico temporal, es decir:

$$u(t, x) \sim u_0(x) \cos(\omega t), \tag{6.3.3}$$

la ecuación de partida (6.2.6) queda reducida a la siguiente ecuación para la amplitud $u_0(x)$:

$${}^F D_x^\alpha u_0(x) + \omega^2 u_0(x) - 2J_1(u_0(x)) = 0, \tag{6.3.4}$$

donde $J_1(\xi)$ es la función de Bessel. Esta aproximación puede ser mejorada, si es necesario, incluyendo los términos correspondientes a $\cos(3t)$, $\cos(5t)$, etc. Para llegar a tener la expresión (6.3.4) se ha aproximado el valor de la función $\sin(u_0(x) \cos(\omega t))$ a través del primer armónico de Galerkin de su correspondiente serie de Fourier con respecto a t , escrita en términos de los cosenos impares. Es decir, se ha asumido:

$$\sin(u_0(x) \cos(\omega t)) \sim a_1 \cos(\omega t),$$

donde el coeficiente a_1 vale:

$$a_1 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sin(u_0(x) \cos(\omega t)) \cos(\omega t) dt \sim 2 J_1(u_0(x)).$$

Una vez se haya solucionado la ecuación (6.3.4) y se haya encontrado $u_0(x)$, el paso siguiente consiste en realizar simulaciones numéricas de la ecuación (6.2.6) con las condiciones iniciales

$$u(0, x) = u_0(x); \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right|_{t=0} = 0, \tag{6.3.5}$$

con el objetivo de verificar que la solución es, en efecto, periódica en el tiempo y localizada en el espacio y por lo tanto adecuada para aproximar a un breather.

6.3.2. Algoritmo numérico para encontrar $u_0(x)$

Con el fin de obtener numéricamente la solución de la ecuación (6.3.4), vamos a considerar el siguiente problema de valores propios no lineal auxiliar:

$$\mathcal{L}v = \lambda \mathcal{N}_0(\beta v); \quad (6.3.6)$$

donde

$$\mathcal{L}v \equiv {}^F D_x^\alpha v - (1 - \omega^2)v,$$

es un operador lineal y

$$\mathcal{N}_0(\beta v) \equiv 2J_1(\beta v) - \beta v,$$

es un operador no lineal con $\beta > 0$ parámetro externo.

Suponemos además que la solución $v(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ y que

$$\|v\|^2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} v^2(x) dx = 1. \quad (6.3.7)$$

Evidentemente, si $\beta = 1/\lambda$, la función $u_1 = \beta v$ satisface la ecuación (6.3.4). Entonces, para encontrar la solución numérica de la ecuación (6.3.4) combinamos dos procedimientos. El primero encuentra el valor propio $\lambda(\beta)$ y la función propia $v(x; \beta)$ del problema (6.3.6)-(6.3.7) cuando se supone que β es conocido. El segundo busca una raíz de la ecuación

$$\lambda(\beta) = 1/\beta. \quad (6.3.8)$$

En concreto, debido a que el operador \mathcal{L} , tal y como lo hemos construido, es siempre no positivo, en el primer procedimiento se puede resolver el problema (6.3.6) con β dado y bajo la restricción (6.3.7), aplicando el método iterativo *de las potencias inverso* [137] que detallamos a continuación.

Dada la condición inicial $\tilde{v}_0(x)$, se calcula $v_0(x) = \tilde{v}_0(x)/\|\tilde{v}_0(x)\|$, siendo $\|\tilde{v}\| = \left[\int_{-\infty}^{\infty} v^2(x) dx \right]^{1/2}$; entonces se encuentra la primera iteración $\tilde{v}_1(x) = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{N}_0(\beta v_0(x)))$ y su normalización $v_1(x) = \tilde{v}_1(x)/\|\tilde{v}_1(x)\|$, con $\lambda_1 = 1/\|\tilde{v}_1(x)\|$. Para ello, hay que invertir el operador lineal \mathcal{L} , lo cual es obtenido aplicando en cada iteración una rutina FFT (*Fast Fourier Transform*), siendo la imagen en el espacio de Fourier del operador \mathcal{L} fácil de calcular gracias a que, para el operador de derivación fraccionario de Feller-Riesz resulta: $(\mathcal{F}_x({}^F D_x^\alpha u))(t, k) = -|k|^\alpha (\mathcal{F}_x u)(t, k)$. Para completar esta rutina y proporcionar la solución $\tilde{v}_1(x)$ en el espacio de partida, es necesario conocer el valor propio asociado a la versión discreta del operador \mathcal{L} .

Para ello, supongamos que una función $f(x)$ pueda ser escrita (exacta o aproximadamente) en términos de la siguiente serie de Fourier en forma compleja:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega n x},$$

y aproximamos el valor del operador de derivada segunda en una dimensión espacial, $d^2/dx^2v(x)$, en cada punto espacial hn , donde $n \geq 1$ y h es el paso espacial, con la fórmula en diferencias finitas siguiente:

$$\Delta_h = \frac{v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}}{h^2};$$

entonces el valor propio asociado a cada función propia $e^{inh\omega}$ del operador Δ_h será

$$- \left[4 \left(\sin^2 \frac{\omega h}{2} \right) / h^2 \right], \quad (6.3.9)$$

que retorna el valor $-\omega^2$ cuando $h \rightarrow 0$.

Ahora, hay que recordar que el operador de derivación fraccionario de Feller-Riesz está definido como una potencia fraccionaria del operador de Laplace, es decir, como $-(-\Delta)^{\alpha/2}$. Entonces, obteniendo la potencia de orden $\alpha/2$ del opuesto de la expresión (6.3.9), llegamos a obtener la siguiente fórmula del autovalor asociado a la versión discreta del operador \mathcal{L} :

$$\mu = - \left| 2 \frac{\sin \frac{\omega h}{2}}{h} \right|^\alpha - (1 - \omega^2).$$

Para $n \geq 1$, el método iterativo de las potencias inverso repite los siguientes pasos:

I) se resuelve la ecuación

$$\mathcal{L}\tilde{v}_{n+1} = \mathcal{N}_0(\beta v_n); \quad (6.3.10)$$

II) se normaliza la solución

$$v_{n+1} = \tilde{v}_{n+1} / \|\tilde{v}_{n+1}\|, \quad (6.3.11)$$

y se asume:

$$\lambda_{n+1} = 1 / \|\tilde{v}_{n+1}\|. \quad (6.3.12)$$

Este algoritmo se parará en el paso N si

$$\sqrt{\sum_{n=0}^N (v_{n+1} - v_n)^2} < \varepsilon,$$

siendo $\varepsilon > 0$ una tolerancia máxima lo suficientemente pequeña como para poder suponer que $v_{N+1} \sim v_N$ e indicar ambas funciones con w . Entonces, si empleamos la notación λ^* para indicar el valor final λ_{N+1} que nos ha proporcionado este algoritmo, resultará:

$$(\mathcal{L}v_{N+1})/\lambda_{N+1} = \mathcal{N}_0(\beta v_N) \sim \mathcal{L}w = \lambda^* \mathcal{N}_0(\beta w),$$

que cuando $\beta = 1/\lambda^*$, proporciona la solución $u_0(x) = \beta w(x)$ de la ecuación (6.3.4).

Una vez obtenido el primer $\lambda^*(\beta_1)$ correspondiente a nuestro valor de β_1 inicial mediante la aplicación del primer procedimiento, se proporciona un segundo valor de β , digamos β_2 , y, repitiendo todo lo dicho igual, se llega a encontrar el correspondiente valor de $\lambda^*(\beta_2)$. Entonces, con estos datos se inicia el segundo procedimiento de este desarrollo

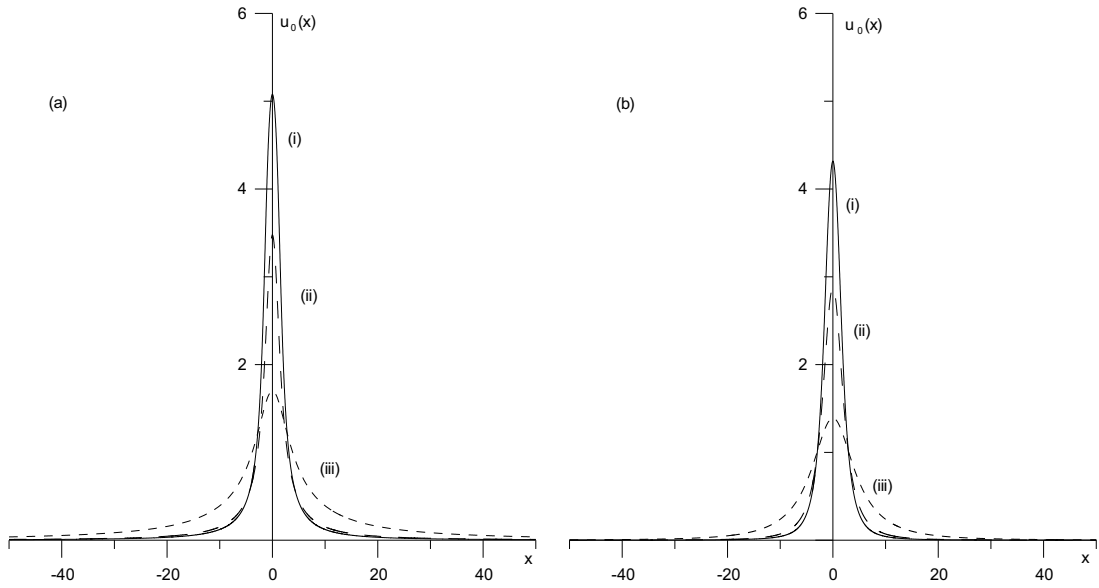


Fig. 6.4: Solución de la ecuación (6.3.4) para (i) $\omega = 0,6$; (ii) $\omega = 0,8$; (iii) $\omega = 0,95$ y cuando: (a) $\alpha = 1$; (b) $\alpha = 1,5$.

numérico que soluciona la ecuación (6.3.8) a través del método de la secante. Este algoritmo también es de tipo iterativo; en cada iteración aplica una fórmula discreta para calcular un nuevo punto β , aproximación del cero de la función

$$\lambda(\beta) - 1/\beta = 0,$$

y vuelve a recurrir al primer procedimiento para solucionar el problema (6.3.6)-(6.3.7) y encontrar el valor de $\lambda^*(\beta)$ correspondiente.

Los resultados que se han obtenido han demostrado que el método numérico definido por el conjunto de los dos procedimientos descritos arriba, converge bastante rápidamente para la mayoría de valores de β que se han considerado, y no es sensible a la elección del dato inicial $v_0(x)$. Esto implica que para la gran mayoría de valores de β , el resultado del primer procedimiento numérico, que es el conjunto de valores de $\lambda(\beta)$ correspondiente, no depende del dato inicial, sino que es un objeto bien definido.

Vamos a presentar ahora algún resultado concreto obtenido acerca de la solución $u_0(x)$.

La figura 6.4 presenta los perfiles de las soluciones de la ecuación (6.3.4) para ciertos valores del orden α de la derivada fraccionaria de Feller-Riesz y de la frecuencia ω .

Cabe resaltar que la amplitud de $u_0(x)$, es decir, su valor máximo $u_0(0)$, tiende a cero cuando ω se aproxima a 1, como se ilustra en la Fig 6.5 para $\alpha = 1$.

Además, todas las soluciones correspondientes a $1 \leq \alpha < 2$ son pares, positivas y decaen asintóticamente a cero. En particular, cuando $\alpha = 1$, la solución presenta un decaimiento de tipo algebraico cuando $x \rightarrow \infty$ [20]:

$$u_0(x) \sim C/x^2, \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (6.3.13)$$

En realidad, suponemos que este comportamiento asintótico sea válido para todo $1 \leq \alpha < 2$, es decir:

$$u_0(x) \sim C/x^{\alpha+1}, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (6.3.14)$$

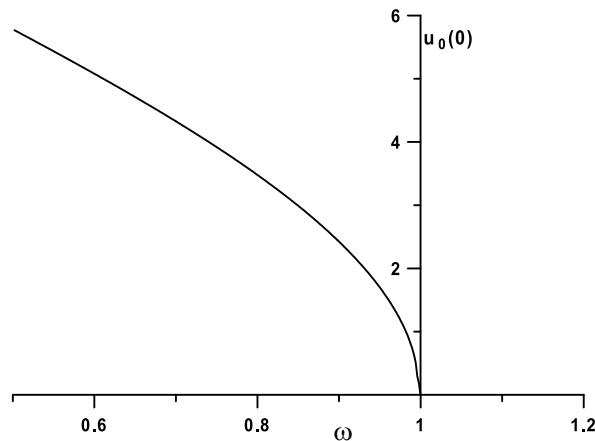


Fig. 6.5: Gráfico de $u_0(0)$ (máximo de $u_0(x)$, solución de la ecuación (6.3.4)) versus ω para $\alpha = 1$.

pero dicha afirmación no ha sido confirmada analíticamente de manera exacta.

Lo que sí se puede demostrar es una estimación del comportamiento asintótico de la función $u_0(x)$ obtenida con el ayuda de resultados conocidos, presentados en la referencia [20], y que aquí volvemos a escribir por comodidad:

Teorema 3.1.2. [20]: Sea $f \in L_\infty$ con $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ una solución de la ecuación de convolución

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-t)G(f(t))dt \equiv k * G(f),$$

donde la función medible G satisface $|G(u)| \leq |u|^r$ para todo $u \in \mathbb{R}$ y una constante $r > 1$, y el núcleo k es también una función medible que cumple la condición $\hat{k} \in H^s$ para algún $s > \frac{1}{2}$, con \hat{k} transformada de Fourier de k . Entonces $f \in L_1 \cap L_2$ y existe una constante l , con $0 < l < s$, tal que $|x|^l f(x) \in L_2 \cap L_\infty$. ■

El espacio $H^s = H^s(\mathbb{R})$ que aparece en este teorema está definido como un espacio de Sobolev que, para todo $s \in \mathbb{R}$, consiste de todas aquellas funciones f tales que

$$\|f\|_{(s)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\zeta|^2)^s |\hat{f}(\zeta)|^2 d\zeta \right)^{1/2} < \infty.$$

Teorema 3.1.5. [20]: Sea $f = k * G(f)$, donde f, k y G satisfacen las condiciones del Teorema 3.1.2. Supongan también que existe una constante $m > 1$ tal que $\lim_{|x| \rightarrow \pm\infty} |x|^m k(x) = C_\pm$, donde $C_+, C_- \in \mathbb{C}$ y los signos \pm corresponden a los límites $+\infty$ y $-\infty$, respectivamente. Entonces, resulta

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x|^m f(x) = C_\pm \int_{-\infty}^{\infty} G(f(t))dt.$$

■

Vamos ahora a presentar el resultado del que hablamos.

Teorema 6.3.1 *Sea $u_0(x)$ la solución localizada de la ecuación (6.3.4) con $1 \leq \alpha < 2$, $0 < \omega < 1$. Entonces*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{\alpha+1} u_0(x) = \frac{\sqrt{2} \Gamma(\alpha + 1) \sin \frac{\pi\alpha}{2}}{\sqrt{\pi}(1 - \omega^2)^2} \int_{-\infty}^{\infty} N(u_0(x)) dx, \quad (6.3.15)$$

donde $N(\cdot) = -\mathcal{N}_0(\cdot)$ y \mathcal{N}_0 es el operador no local definido en (6.3.7)

Demostración. Para poder demostrar este resultado, vamos a reescribir la ecuación (6.3.4) a través de la siguiente convolución: $u(x) = K(x) * N(u(x))$, donde $K(x)$ es el operador cuya imagen en el espacio de Fourier es: $(\mathcal{F}_x(K))(k) = \frac{1}{|k|^{\alpha+(1-\omega^2)}}$. Invirtiendo esta expresión, tenemos:

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx} dk}{(1 - \omega^2) + |k|^\alpha} = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{ikx} dk}{(1 - \omega^2) + k^\alpha} \right],$$

y si introducimos la parametrización $k = it$, resulta:

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{2t^\alpha \sin \frac{\pi\alpha}{2} e^{-tx} dt}{\left((1 - \omega^2) + e^{\frac{i\pi\alpha}{2}} t^\alpha \right) \left((1 - \omega^2) + e^{-\frac{i\pi\alpha}{2}} t^\alpha \right)}. \quad (6.3.16)$$

Ahora, multiplicando ambos lados de esta ecuación por $x^{\alpha+1}$, resulta

$$\begin{aligned} K(x)x^{\alpha+1} &= \frac{2 \sin \frac{\pi\alpha}{2}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{(xt)^\alpha e^{-tx} d(tx)}{\left((1 - \omega^2) + e^{\frac{i\pi\alpha}{2}} t^\alpha \right) \left((1 - \omega^2) + e^{-\frac{i\pi\alpha}{2}} t^\alpha \right)} \\ &= \frac{2 \sin \frac{\pi\alpha}{2}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{y^\alpha e^{-y} dy}{\left((1 - \omega^2) + e^{\frac{i\pi\alpha}{2}} \left(\frac{y}{x}\right)^\alpha \right) \left((1 - \omega^2) + e^{-\frac{i\pi\alpha}{2}} \left(\frac{y}{x}\right)^\alpha \right)}, \end{aligned}$$

donde en la última integral hemos puesto $y = tx$. Cuando x tiende a infinito, la expresión $\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha$ se hace nula, por lo que se puede concluir que:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} K(x)x^{\alpha+1} = \frac{2 \sin \frac{\pi\alpha}{2}}{\sqrt{2\pi}(1 - \omega^2)^2} \int_0^{\infty} y^\alpha e^{-y} dy = \frac{2 \sin \frac{\pi\alpha}{2} \Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{2\pi}(1 - \omega^2)^2}. \quad (6.3.17)$$

Este resultado, junto con el Teorema 3.1.5 de la referencia [20], proporciona la estimación (6.3.15). ■

Es importante observar que la presencia del factor $\sin \frac{\pi\alpha}{2}$ en la fórmula (6.3.15) determina la diferencia entre el comportamiento asintótico correspondiente a $\alpha = 2$ (que en efecto, es de tipo exponencial) y el de $1 \leq \alpha < 2$ (decaimiento algebraico).

Es evidente que la solución de la ecuación (6.3.4) posee un comportamiento asintótico $u_0(x) \sim C/x^{\alpha+1}$ si

$$\int_{-\infty}^{\infty} N(u_0(x)) dx \neq 0. \quad (6.3.18)$$

Aunque todas las evidencias apunten a que la condición (6.3.18), en general, se cumple, de momento no disponemos de una argumentación rigurosa para demostrarlo. Por otro lado, podría esbozarse la siguiente explicación “no rigurosa” para el caso de $\omega \sim 1$.

Supongamos que la solución localizada $u_0(x)$ de (6.3.4) exista; entonces, si $\omega \sim 1$, la amplitud de $u_0(x)$ es pequeña, como ya hemos visto, y podemos escribir la aproximación:

$$u_0(x) = \varepsilon U \left(\left(\frac{\varepsilon^2}{8} \right)^{1/\alpha} x \right); \quad \omega^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{8}; \quad (6.3.19)$$

donde $U(\xi)$ es la solución localizada de la ecuación

$${}^F D_\xi^\alpha [U(\xi)] - U(\xi) + U^3(\xi) = 0, \quad (6.3.20)$$

tal y como hemos detallado en la demostración del Teorema 6.3.2. De acuerdo con los resultados presentados en [169, 4] la función $U(\xi)$ existe y es positiva, por lo que $u_0(x)$ es pequeña y positiva. Por otro lado:

$$N(u_0(x)) \approx \frac{1}{8} u_0^3(x)$$

y por lo tanto es natural esperar que sea $\int_{-\infty}^{\infty} N(u(x)) dx \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{8} u_0^3(x) dx > 0$.

6.3.3. Energía de la condición inicial

En esta sección queremos detallar un resultado analítico muy relevante que se ha encontrado para la condición inicial $u(0, x) = u_0(x)$ de la solución de la ecuación (6.2.6) junto con las condiciones iniciales (6.3.5); este perfil puede tener formas muy distintas, entre ellas la que es proporcionada por la solución numérica de la ecuación (6.3.4), que en este contexto indicamos con $\tilde{u}_0(x)$ para distinguirla de otras expresiones posibles de $u_0(x)$.

El resultado es el siguiente:

Teorema 6.3.2 *Cuando $\alpha = 1$ y la ecuación (6.2.6) queda reducida a la ecuación de seno-Hilbert II, entonces existe un valor límite de la energía asociada al perfil inicial $u(0, x) = u_0(x)$ de la solución de esta ecuación junto con las condiciones iniciales (6.3.5) cuando la amplitud de $u_0(x)$ tiende a cero. Dicho límite es*

$$\mathcal{H}_{0\text{mín}} \approx 9,876. \quad (6.3.21)$$

Por el contrario, cuando $1 < \alpha < 2$, la energía del perfil inicial $u(0, x) = u_0(x)$ de la solución de la ecuación (6.2.6) junto con las condiciones iniciales (6.3.5) tiende a cero cuando la amplitud de $u_0(x)$ tiende a cero.

Demostración. Para demostrar esta afirmación, empezamos con decir que la ecuación (6.2.6) posee la siguiente integral de energía:

$$\mathcal{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} u_t^2(t, x) - \frac{1}{2} u(t, x) {}^F D_x^\alpha u(t, x) + 1 - \cos(u(t, x)) \right\} dx. \quad (6.3.22)$$

En efecto, para poder escribir la expresión (6.3.22) basta con tener en cuenta que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_t(t, x) {}^F D_x^\alpha u(t, x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (u(t, x) {}^F D_x^\alpha u(t, x))_t dx - \int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) {}^F D_x^\alpha u_t(t, x) dx,$$

y que

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) {}^F D_x^\alpha u_t(t, x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(t, x) {}^F D_x^\alpha u(t, x) dx,$$

aplicando la definición de derivada fraccionaria de Feller-Riesz dada en (1.2.121) a una función $u(t, x)$ localizada. Cuando $\alpha = 1$, la integral (6.3.22) coincide con la energía dada en (6.2.12) para la ecuación de seno-Hilbert II.

Ahora, sea la amplitud A del perfil inicial $u_0(x)$ pequeña; si se aproxima $u_0(x)$ con la solución de la ecuación (6.3.4), entonces resulta $A = \tilde{u}_0(0)$, que es pequeña cuando $\omega \sim 1$.

Vamos a calcular la energía correspondiente a este estado inicial, bajo las condiciones (6.3.5). Expandiendo la función de Bessel $J_1(\eta)$, para valores de η pequeños, en la serie de potencias

$$J_1(\eta) \approx \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{16}\eta^3, \quad (6.3.23)$$

podemos reemplazar la ecuación (6.3.4) por la ecuación

$${}^F D_x^\alpha u_0(x) - (1 - \omega^2)u_0(x) + \frac{1}{8}u_0^3(x) = 0. \quad (6.3.24)$$

Si realizamos el cambio de variable:

$$u_0(x) = \delta U(\gamma x), \quad (6.3.25)$$

donde $\delta > 0$ es un parámetro pequeño, la ecuación (6.3.24) se transforma en la siguiente:

$$\delta \gamma^\alpha {}^F D_{\gamma x}^\alpha U(\gamma x) - (1 - \omega^2)\delta U(\gamma x) + \frac{\delta^3}{8} U^3(\gamma x) = 0, \quad (6.3.26)$$

donde se ha empleado la propiedad ${}^F D_x^\alpha u(\gamma x) = \gamma^\alpha {}^F D_{\gamma x}^\alpha u(\gamma x)$, fácil de demostrar si se escribe la derivada fraccionaria de Feller-Riesz en la forma (1.2.121).

Entonces, si se pide que los coeficientes de la ecuación (6.3.26) verifiquen la igualdad:

$$\delta \gamma^\alpha = (1 - \omega^2)\delta = \frac{\delta^3}{8},$$

tenemos:

$$\omega^2 = 1 - \frac{\delta^2}{8}, \quad (6.3.27)$$

$$\gamma = \left(\frac{\delta^2}{8}\right)^{1/\alpha}, \quad (6.3.28)$$

y

$$u_0(x) = \delta U \left(\left(\frac{\delta^2}{8}\right)^{1/\alpha} x \right), \quad (6.3.29)$$

donde $U(\xi)$ es una solución localizada de la ecuación

$${}^F D_\xi^\alpha [U(\xi)] - U(\xi) + U^3(\xi) = 0. \quad (6.3.30)$$

El estudio de la solución $U(\xi)$ puede encontrarse en las referencias [169, 4] y, para el caso particular de $\alpha = 1$, en [13].

Ahora, si indicamos con \mathcal{H}_0 el valor de la integral de energía (6.3.22) calculado para $t = 0$ cuando tomamos las condiciones iniciales (6.3.5), tendremos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{2} u_0(x) {}^F D_x^\alpha u_0(x) + 1 - \cos(u_0(x)) \right\} dx \approx \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{2} u_0(x) {}^F D_x^\alpha u_0(x) + 1 - (1 - \frac{1}{2} u_0(x)^2) \right\} dx, \end{aligned} \quad (6.3.31)$$

que, cuando $u_0(x)$ es escrita en la forma (6.3.29), se transforma en la expresión:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &\approx \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{\delta}{2} U \left(\left(\frac{\delta^2}{8} \right)^{1/\alpha} x \right) {}^F D_x^\alpha \left[\delta U \left(\left(\frac{\delta^2}{8} \right)^{1/\alpha} x \right) \right] + \frac{\delta^2}{2} U^2 \left(\left(\frac{\delta^2}{8} \right)^{1/\alpha} x \right) \right\} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{\delta^4}{16} \left[U^2 \left(\left(\frac{\delta^2}{8} \right)^{1/\alpha} x \right) - U^4 \left(\left(\frac{\delta^2}{8} \right)^{1/\alpha} x \right) \right] + \frac{\delta^2}{2} U^2 \left(\left(\frac{\delta^2}{8} \right)^{1/\alpha} x \right) \right\} dx, \end{aligned} \quad (6.3.32)$$

donde en la última igualdad se ha deducido la expresión de ${}^F D_\xi^\alpha [U(\xi)]$ de la ecuación (6.3.30). Entonces, con el cambio de variable $\xi = \left(\frac{\delta^2}{8} \right)^{1/\alpha} x$, reescribimos la integral en (6.3.32) como:

$$\mathcal{H}_0 \approx \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \underbrace{-\frac{\delta^2}{2} \left(\frac{\delta^2}{8} \right)^{1-\frac{1}{\alpha}} [U^2(\xi) - U^4(\xi)]}_{I_1} + \underbrace{\frac{\delta^2}{2} \left(\frac{8}{\delta^2} \right)^{1/\alpha} U^2(\xi)}_{I_2} \right\} d\xi. \quad (6.3.33)$$

Ahora, siendo $1 - \frac{1}{\alpha} \geq 0$ debido a que $1 \leq \alpha < 2$, cuando $\delta \rightarrow 0$ el término I_1 tiende a cero para todo $1 \leq \alpha < 2$, mientras que el término I_2 tiende a cero si $\alpha > 1$ y tiende al límite

$$\mathcal{H}_{0\text{mín}} \approx 4 \int_{-\infty}^{\infty} U^4(\xi) d\xi \approx 9,876,$$

si $\alpha = 1$. Para calcular el valor numérico de esta integral se ha empleado el algoritmo de simulación de la solución $U(\xi)$ propuesto en [13]. ■

Por consiguiente, el caso $\alpha = 1$ es un caso muy especial, porque cabe esperar la existencia de un umbral de energía asociada al estado inicial, para que, de la evolución de éste, se genere un breather. En la referencia [51] se ha estudiado un problema parecido, el de la búsqueda de un umbral de energía para las soluciones de tipo breather en modelos de redes discretas.

Cuando $1 < \alpha < 2$ no hay que esperar la existencia de ningún umbral, tal y como ocurre cuando $\alpha = 2$; en efecto, la energía de las soluciones (6.2.9) de tipo breather de la ecuación de seno-Gordon clásica local decrece con la amplitud y puede ser arbitrariamente pequeña.

Ambos comportamientos, de presencia o ausencia de un valor mínimo de energía asociado al estado inicial para que de su evolución aparezca un breather, han sido confirmados numéricamente. Esto es mostrado en la sección siguiente, donde se analiza la evolución de perfiles iniciales que no tuvieron relación ninguna con las estructuras buscadas, por ejemplo, funciones tipo secantes hiperbólicas o parecidas.

6.4. Resultados numéricos relativos a la búsqueda de breathers

En esta sección referimos los resultados de las simulaciones numéricas de la ecuación (6.2.6) cuando $1 \leq \alpha < 2$. En concreto, se ha solucionado numéricamente esta ecuación empleando dos tipos de condiciones iniciales. En un primer momento se han utilizado los datos iniciales (6.3.5) con $u_0(x)$ solución de la ecuación (6.3.4), con el fin de verificar que el objeto resultante es, en efecto, periódico en el tiempo y localizado en el espacio. En un segundo momento se han testado unas condiciones iniciales que no tienen relación alguna con las primeras, por ejemplo

$$u(0, x) = a \operatorname{sech}(bx), \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right|_{t=0} = 0, \quad (6.4.1)$$

con a y b constantes, para poder estudiar la creación espontanea de los breathers.

Los resultados numéricos que se han observado pueden ser resumidos como sigue:

- La solución de la ecuación (6.3.4) proporciona una *buena aproximación* del perfil inicial del breather para todo α , con $1 \leq \alpha < 2$, si ω está razonablemente cerca a 1.

El resultado presentado en la Fig. 6.6 es obtenido para el perfil inicial $u_0(x)$ correspondiente a $\omega = 0,8$ y $\alpha = 1$, pero prácticamente la misma gráfica es obtenida cuando, por ejemplo, $\omega = 0,8$ y $\alpha = 1,5$. Se ha visto que el comportamiento de la solución con respecto a la variable temporal es muy cercano al periódico. En realidad, un análisis más fino muestra que después de un tiempo de asentamiento, la periodicidad temporal se vuelve más pronunciada, con frecuencia de pulsación $\omega \approx 0,79$.

Además, el análisis de Fourier temporal de la solución $u(t, x)$ muestra que los armónicos correspondientes a $\cos(3\omega t)$ y $\cos(5\omega t)$ vienen débilmente excitadas. No obstante, no se observan en el espectro los otros armónicos, correspondientes por ejemplo a los cosenos pares, lo que implica que la serie (6.3.1) describe adecuadamente el objeto en consideración.

- Las simulaciones numéricas de la ecuación (6.2.6) con $\alpha = 1$ que son iniciadas por datos con perfil de secante hiperbólica no dan origen a ninguna estructura de tipo breather cuando la energía del dato inicial está por debajo, es igual o incluso es un

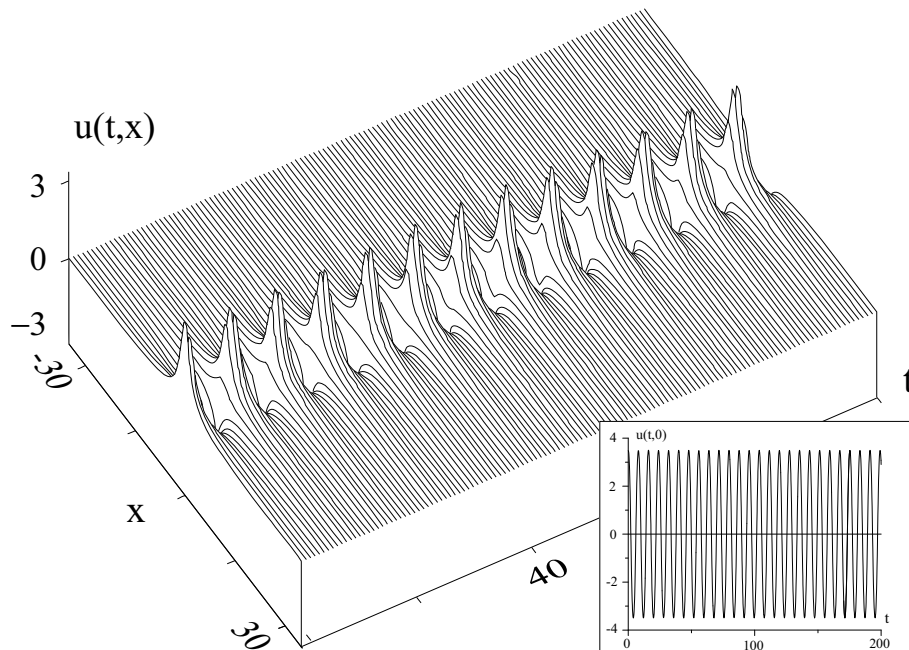


Fig. 6.6: Evolución de la ecuación (6.2.6) con perfil inicial $u_0(x)$, solución de la ecuación (6.3.4), cuando $\omega = 0,8$ y $\alpha = 1$.

poco mayor que el valor mínimo (6.3.21). En concreto, en este caso el perfil inicial decae en ondas de pequeña amplitud y no aparece ninguna estructura regular. Este resultado soporta la hipótesis acerca de la existencia de un valor mínimo de energía inicial necesaria para que se cree un breather.

Por el contrario, si la energía del estado inicial es mayor que el umbral $\mathcal{H}_{0\text{mín}}$, entonces, típicamente este perfil se desintegra en pulsaciones regulares de gran amplitud. En ocasiones, también aparece algún rizo de ondas relativamente pequeñas que se mueven hacia el infinito por la izquierda y por la derecha, como se puede apreciar, por ejemplo, en la Fig 6.7.

- Los objetos de tipo breather que emergen son bastante *robustos*. Suponemos que sean estables (al menos dentro de algún intervalo de valores de ω para cada α , con $1 \leq \alpha < 2$), aunque no se ha estudiado el problema de estabilidad lineal correspondiente, en el que aparece un potencial dependiente del tiempo. Además, estos objetos de tipo breather pueden ser generados incluso a partir de datos iniciales que no tengan relación alguna con estas estructuras, cuales son por ejemplo los datos que hemos escrito en (6.4.1); ejemplos de este comportamiento son presentados en las Fig 6.7 y Fig 6.8. Una gráfica muy parecida a la que sale en la Fig 6.7 es la correspondiente, por ejemplo, a la evolución de las condiciones iniciales $u_t(0, x) = 0$ y $u(0, x) = 3 / \cosh 0,56x$ cuando $\alpha = 1,5$.
- Además de objetos periódicos de tipo breather, las simulaciones numéricas de la ecuación (6.2.6), cuando $1 \leq \alpha < 2$, evidencian la existencia de estructuras *cuasi*periódicas localizadas que pueden ser descritas como pulsaciones periódicas de tipo breather “rápidas” envueltas en unas modulaciones con periodo considerablemente

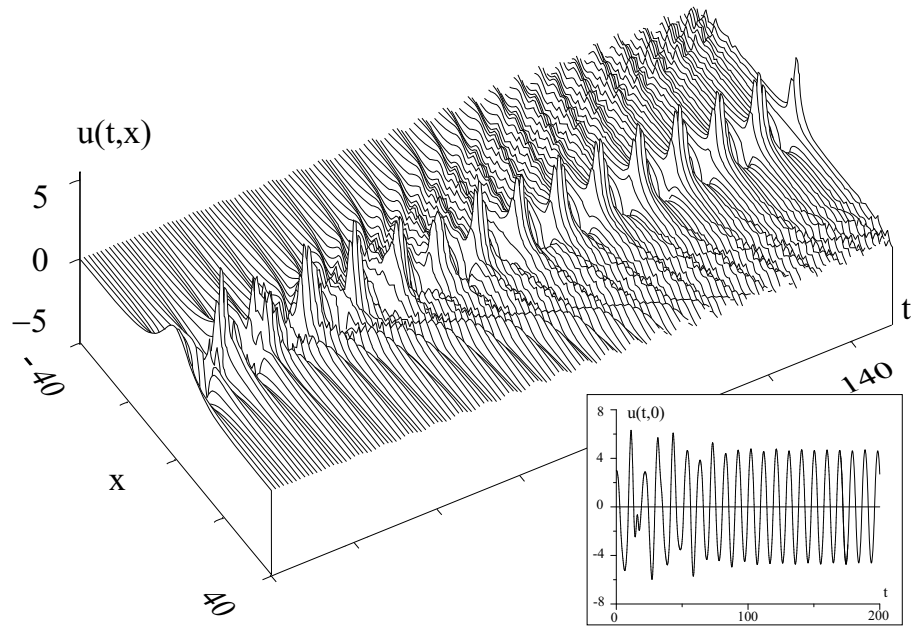


Fig. 6.7: Evolución de la ecuación (6.2.6) con los datos iniciales $u_t(0, x) = 0$ y $u(0, x) = 3/\cosh 0,2x$ para $\alpha = 1$.

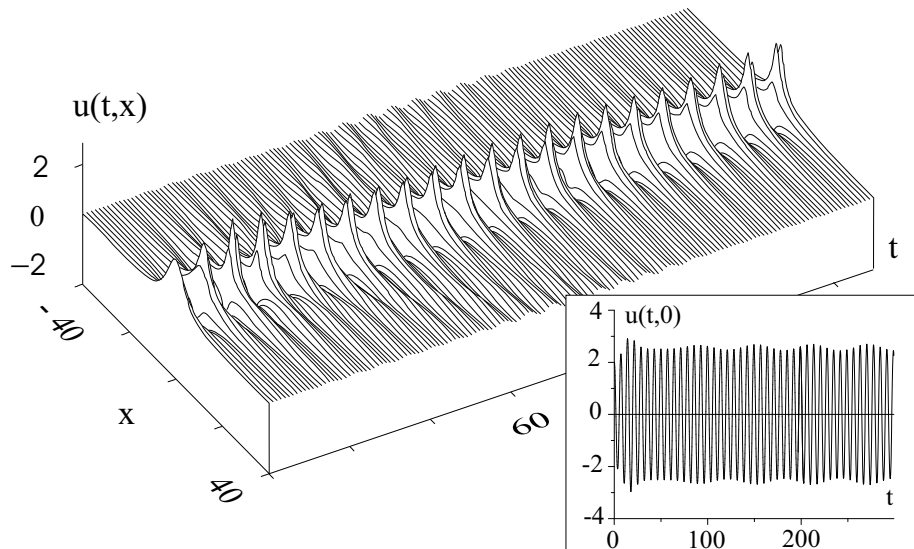


Fig. 6.8: Evolución de la ecuación (6.2.6) con los datos iniciales $u_t(0, x) = 0$ y $u(0, x) = 2/\cosh 0,3x$ para $\alpha = 1$.

mayor. Una de estas estructuras es presentada en la Fig. 6.8 y otra, muy parecida a esta, podría ser obtenida, por ejemplo, de la evolución de los datos iniciales $u_t(0, x) = 0$ y $u(0, x) = 3/\cosh 0,7x$ cuando $\alpha = 1,5$. Las soluciones con estas características pueden ser consideradas como el análogo de las soluciones exactas de tipo breather cuasiperiódicas de la ecuación de seno-Gordon.

Concluimos esta sección mencionando algunos resultados numéricos que se han obtenido acerca del comportamiento de la ecuación de seno-Hilbert II relacionados con la integrabilidad.

La existencia de varias soluciones exactas de la ecuación (6.2.7) y sus conexiones con la ecuación de seno-Gordon clásica (6.1.5) que es integrable, llevan a preguntarse si también la ecuación de seno-Hilbert II (6.2.7) es integrable. Se sabe que una indicación indirecta de la integrabilidad de una ecuación es el carácter elástico de las interacciones entre entidades descritas por ella.

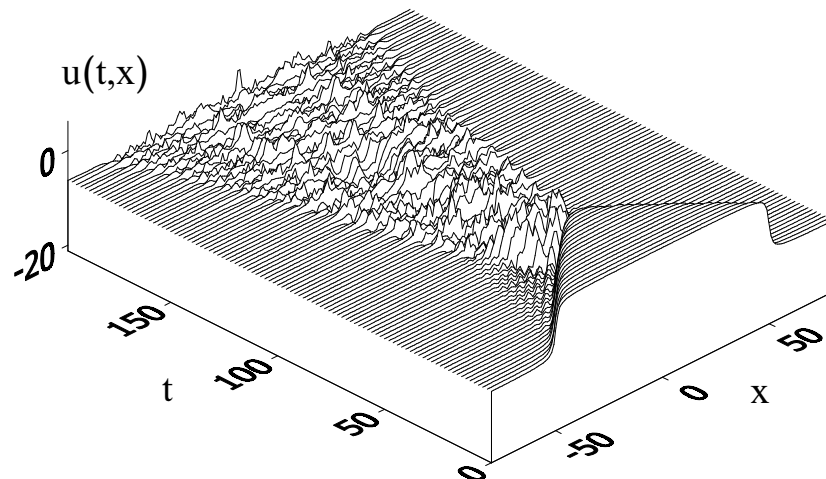


Fig. 6.9: Choque entre las soluciones de la ecuación (6.2.7) de tipo 4π -kink y los 4π -antikink.

Para aclarar este aspecto, se han realizado simulaciones numéricas del choque entre la solución de tipo 4π -kink viajero (6.2.14) y el correspondiente antikink (véase la Fig. 6.9), así como del choque entre la solución 4π -kink viajera (6.2.14) y la suma de dos soluciones del estado estacionario de tipo 2π -antikink (6.2.13) (véase la Fig. 6.10).

Observando las dos figuras se deduce que los objetos que son involucrados en ellas vienen destruidos en el transcurso de los choques, por lo que cabe pensar que la ecuación (6.2.7) difícilmente sea integrable.

6.5. Conclusiones

La ecuación de Klein-Gordon no lineal y no local proporciona uno de los modelos básicos para describir la evolución de ondas que se propagan en medios que presentan, a

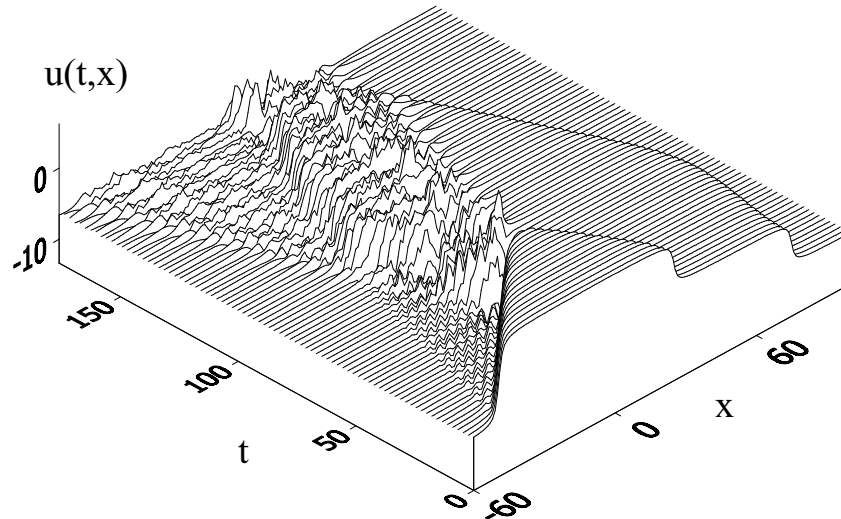


Fig. 6.10: Choque entre las soluciones de la ecuación (6.2.7) de tipo 4π -kink y dos soluciones del estado estacionario de tipo 2π -antikink.

la vez, tanto no localidad como no linealidad. Dentro de esta familia de ecuaciones hemos llamado con el nombre de *ecuación de seno-Gordon fraccionaria* a la que se obtiene cuando la no linealidad es la función $\sin u$, y la no localidad está definida por el operador de derivación fraccionario de Feller-Riesz ${}^F D_0^\alpha$ en el espacio.

Esta ecuación, cuando $1 \leq \alpha \leq 2$, representa una interpolación entre la *ecuación de seno-Gordon no local* (también denominada *ecuación de seno-Hilbert II*) y la ecuación de seno-Gordon clásica local; como tal, puede considerarse como una generalización fraccionaria de un modelo de propagación de ondas no lineal, que pasa de ser no local ($1 \leq \alpha < 2$) a ser local ($\alpha = 2$).

El término no local aparece en aquellas situaciones en las que una formulación local no es suficiente para describir el fenómeno ondulatorio en cuestión. Por ejemplo, es necesario un término no local para describir modelos discretos de redes en las que se observan interacciones de largo alcance entre los nodos. También, el término no local aparece de forma natural cuando la dispersión del medio no responde a la ley cuadrática.

En concreto, la ecuación de seno-Gordon fraccionaria puede ser empleada para modelar varios problemas no locales de las electrodinámicas de Josephson en los que se pasa de superconductores tradicionales a superconductores de alta temperatura.

El pasaje de un modelo local a un modelo no local puede implicar cambios significativos de las propiedades de las soluciones de las ecuaciones correspondientes. Prueba de ello es, por ejemplo, que no toda solución exacta de la ecuación no local de seno-Hilbert II tiene su equivalente entre las soluciones de la ecuación local de seno-Gordon clásica, como es el caso de la solución exacta de tipo “breather” de la ecuación de seno-Gordon, que no tiene correspondencia entre las soluciones exactas de la ecuación de seno-Hilbert II.

Objeto de estudio de este capítulo ha sido la búsqueda numérica de soluciones de tipo

“breather” para la ecuación de seno-Gordon fraccionaria cuando $1 \leq \alpha < 2$, es decir, de soluciones que son localizadas en el espacio y periódicas en el tiempo.

Para construir numéricamente este tipo de estructuras, se ha empleado el método llamado de *aproximación por ondas rotatorias* que consiste en aproximar dicha solución periódica a través del primer armónico de la serie de Fourier con respecto a t correspondiente, que incluye sólo los términos con cosenos impares al ser la no linealidad de la ecuación de seno-Gordon fraccionaria de tipo impar.

Este primer armónico, para todo $1 \leq \alpha < 2$, ha resultado ser par, positivo y poseer asintóticamente un decaimiento de tipo algebraico hacia el cero, contrariamente a lo que ocurre en el caso local, descrito por $\alpha = 2$, de la ecuación de seno-Gordon clásica, cuando el decaimiento típico del perfil del breather es exponencial.

Asimismo, se ha encontrado un resultado analítico muy relevante relativo al estado inicial $u(0, x) = u_0(x)$ de la solución de la ecuación de seno-Gordon fraccionaria, que puede ser, o no, aproximado por el primer armónico arriba mencionado. Cuando $\alpha = 1$, existe un valor límite $\mathcal{H}_{0\text{mín}}$ de la energía asociada al perfil inicial $u(0, x) = u_0(x)$ de la ecuación de seno-Hilbert II, obtenido junto con la condición $u_t(0, x) = 0$ y cuando la amplitud de $u_0(x)$ tiende a cero. Por el contrario, cuando $1 < \alpha < 2$, la energía del perfil inicial $u(0, x) = u_0(x)$ de la ecuación de seno-Gordon fraccionaria, obtenido junto con la condición $u_t(0, x) = 0$, tiende a cero cuando la amplitud de $u_0(x)$ tiende a cero. Como consecuencia de ello, se ha identificado al caso de la ecuación de seno-Hilbert II correspondiente a $\alpha = 1$ como muy especial, porque cabe esperar la existencia de un umbral de energía asociada al estado inicial, para que, de la evolución de éste, se genere un breather. Por el contrario, cuando $1 < \alpha < 2$ no hay que esperar la existencia de ningún umbral de energía, tal y como ocurre cuando $\alpha = 2$ debido a que la energía de las soluciones de tipo breather de la ecuación de seno-Gordon clásica local decrece con la amplitud y puede ser arbitrariamente pequeña.

En el paso siguiente de este estudio se han realizado las simulaciones numéricas de la ecuación de seno-Gordon fraccionaria, con $1 \leq \alpha < 2$, empleando dos tipos de condiciones iniciales distintas. Por un lado se han utilizado datos iniciales en los que $u(0, x)$ coincide con el primer armónico encontrado con el método previamente descrito de la aproximación por ondas rotatorias, con el fin de verificar que el objeto resultante es, en efecto, periódico en el tiempo y localizado en el espacio. Por otro lado se han verificado unas condiciones iniciales que no tienen relación alguna con las primeras, por ejemplo con perfil de secante hiperbólica, para poder estudiar la creación espontánea de estructuras de tipo breather.

Las simulaciones han puesto en evidencia la existencia de “pseudo-breathers” de larga vida que pueden ser tratados, en las aplicaciones físicas, como periódicos en el tiempo y localizados en el espacio. Estos objetos son bastante robustos y pueden desarrollarse en el curso de la evolución de estados iniciales de perfiles muy distintos, cuales son, por ejemplo, los dos que se han empleado. No obstante, como cabía esperar, las simulaciones numéricas de la ecuación de seno-Gordon fraccionarias con $\alpha = 1$ han demostrado que datos iniciales con perfil de secante hiperbólica no originan ninguna estructura de tipo breather cuando la energía del dato inicial está por debajo, es igual o incluso un poco mayor que el valor mínimo de la energía $\mathcal{H}_{0\text{mín}}$. Por el contrario, si la energía del estado inicial es mayor que este umbral, entonces, típicamente este perfil se desintegra en pulsaciones regulares de gran amplitud que pueden ser asimiladas a estructuras de tipo breather.

El hecho de que estas estructuras hayan sido obtenidas sólo numéricamente, no permite afirmar rigurosamente su periodicidad y localización. Además, parece bastante probable que el problema que estamos tratando sea muy parecido al de la ecuación local de Klein-Gordon no lineal tradicional y que, en general, la ecuación de seno-Gordon fraccionaria no admita soluciones que cumplan las condiciones de periodicidad y localización en un sentido estrictamente matemático. En realidad, para poder contestar rigurosamente a la pregunta de si estos objetos existen también como soluciones exactas de la ecuación de seno-Gordon fraccionaria, habría que desarrollar un estudio analítico detallado del sistema de todas las infinitas ecuaciones no locales, cada una relativa a un armónico de la serie de Fourier completa empleada para escribir la solución de tipo breather. Este estudio excede los objetivos de esta tesis y está incluido en el conjunto de los temas que quedan abiertos para investigaciones futuras.

Además de objetos periódicos de tipo breather, las simulaciones numéricas de la ecuación de seno-Gordon fraccionaria con $1 \leq \alpha < 2$, han evidenciado la existencia de estructuras *cuasiperiódicas* localizadas que pueden ser descritas como pulsaciones periódicas de tipo breather “rápidas” envueltas en unas modulaciones con periodo considerablemente mayor. Las soluciones con estas características pueden ser consideradas como el análogo de las soluciones exactas de tipo breather cuasiperiódicas de la ecuación de seno-Gordon.

Finalmente, la existencia de varias soluciones exactas de la ecuación de sin-Hilbert II y sus conexiones con la ecuación de seno-Gordon clásica que es integrable, han conducido a plantear la pregunta de si también la ecuación de seno-Hilbert II es integrable. Esto implicaría la existencia de algún método regular para encontrar todas sus soluciones analíticas.

Debido a que una indicación indirecta de la integrabilidad de una ecuación es el carácter elástico de las interacciones entre entidades descritas por ella, se han realizado simulaciones numéricas de los choques entre las soluciones exactas de tipo 4π -kink y antikink viajeras, así como del choque entre la solución 4π -kink viajera y la suma de dos soluciones del estado estacionario de tipo 2π -antikink. Los resultados han revelado que los objetos involucrados vienen destruidos en el transcurso de los choques, por lo que cabe pensar que la ecuación de sin-Hilbert II no sea integrable.

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Estas últimas páginas del trabajo resumen de forma esquemática los principales resultados obtenidos en los capítulos previos, sintetizando la pequeña contribución que se ha aportado al conocimiento global de los temas tratados, y mediante la cual se intenta dar algo más de luz a algunas de las múltiples cuestiones que todavía quedan por resolver.

En 1695 el Marqués de L'Hôpital trasladó a Leibnitz, el padre del concepto de la diferenciación clásica, una pregunta acerca del sentido matemático que podría tener la derivada de orden $1/2$, aportando éste último la siguiente respuesta intuitiva: “[...] esta aparente paradoja permitirá en el futuro extraer interesantes consecuencias”. El presente trabajo puede ser considerado una consecuencia más de los desarrollos posteriores de esta aparente paradoja.

En efecto, la teoría del *cálculo fraccionario*, donde por ella hay que entender, en este contexto, el estudio de las derivadas e integrales de orden real cualesquiera, ha sido la herramienta que ha permitido alcanzar el objetivo que nos habíamos propuesto para esta tesis: estudiar distintas generalizaciones de las ecuaciones clásicas de difusión y de ondas mediante ecuaciones que contuvieran derivadas de orden real, y que interpolaran de forma continua ambas ecuaciones, de tipo parabólico e hiperbólico respectivamente, que siempre han estado asociadas a familias muy distintas de fenómenos físicos. En lo que sigue, vamos a resumir los principales resultados de nuestra investigación en este sentido.

Cap.1: Debido a que esta teoría, en los términos actuales, es relativamente novedosa, y que todavía hay pocos textos que la tratan, y aún menos, presentes en nuestras bibliotecas, se ha llevado a cabo a lo largo del Capítulo 1 una breve recopilación de algunas de las distintas definiciones de operadores de derivación y integración fraccionarios existentes y de sus propiedades, con el objetivo de aportar una mayor autoconsistencia al trabajo realizado.

Es importante destacar que no hay univocidad en las definiciones disponibles de un operador de este tipo, y que la elección de una u otra debe ser guiada por las propiedades que la caracterizan y que resulten ser las más adecuadas para describir el modelo concreto que se pretende estudiar. Lo que sí es común a todas las definiciones de integral y derivada fraccionaria de orden α real, es su coincidencia con las definiciones clásicas para el caso de valores de α enteros, y el hecho de que sean operadores *no locales* con propiedad de *memoria* para todos los valores de α no enteros, al ser expresados mediante una integral definida.

Cap.2: Como introducción, en el Capítulo 2 se han considerado algunos aspectos de la generalización de las ecuaciones clásicas de difusión y de ondas llamada *ecuación de difusión fraccionaria*, que ha sido ampliamente estudiada en la literatura y que

es obtenida sustituyendo en la ecuación de difusión estándar la derivada primera con respecto del tiempo y/o la derivada segunda con respecto del espacio, por una derivada fraccionaria de orden real. Esta ecuación, muy a menudo involucrada en la descripción de procesos de difusión llamados *anómalos*, permite establecer una interpolación entre las ecuaciones clásicas del calor y de ondas, en el sentido de que, al menos desde un punto de vista puramente formal, se puede pasar de una a la otra de forma continua variando el orden de derivación. En realidad, los resultados ya conocidos de estudios previos sobre la difusión anómala, muestran cómo el proceso asociado a la ecuación de difusión fraccionaria mantiene un carácter de tipo difusivo para todo orden α de la derivada temporal entre 0 y 2, siendo *subdifusivo* cuando $0 < \alpha < 1$, difusivo en el sentido clásico para $\alpha = 1$ y *superdifusivo* si $1 < \alpha < 2$; $\alpha = 2$ es un punto de discontinuidad para esta ecuación y marca la transición de la condición parabólica a la hiperbólica asociada al proceso de propagación de ondas.

En los desarrollos concretos que se han presentado sobre la ecuación de difusión fraccionaria, se han empleado las definiciones de los operadores fraccionarios de Caputo y de Riemann-Liouville, y se han planteado dos de los principales problemas que se pueden formular para esta ecuación y para la ecuación de difusión clásica: el de Cauchy y el de la “propagación de señales”.

La elección de estas dos definiciones de derivada fraccionaria ha sido motivada por el hecho de que permiten solucionar los problemas asociados a través de la técnica de las transformadas conjuntas de Fourier y de Laplace, sobre las que ambos operadores presentan un buen comportamiento al requerir únicamente el conocimiento de condiciones iniciales enteras o fraccionarias. En realidad, la relación que existe entre las dos definiciones de derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y de Caputo permitiría emplear siempre condiciones iniciales enteras y, por lo tanto, físicamente interpretables, en la formulación de los problemas relativos a ecuaciones diferenciales fraccionarias.

En la recopilación de los resultados ya conocidos relativos a la resolución de los problemas de Cauchy y de propagación de señales para la ecuación de difusión fraccionaria cuando la derivada fraccionaria en el tiempo es la de Caputo de orden $0 < \alpha \leq 2$, y con derivada segunda en el espacio, se ha mostrado que en ambos casos la solución queda expresada en términos de las funciones especiales de Mittag-Leffler y de Wright, generalizaciones de la función exponencial. Como ocurre con las soluciones fundamentales de estos dos problemas cuando $\alpha = 1$, que son, respectivamente, la densidad de probabilidad gaussiana en x y la densidad de probabilidad de una distribución de Lévy unilateral con respecto a t , las soluciones fundamentales de estos dos problemas para todo $0 < \alpha < 2$ siguen siendo densidades de probabilidad en x y en t , respectivamente. El conocimiento de la solución del problema de propagación de señales para la ecuación de difusión fraccionaria nos ha permitido deducir la solución de este mismo problema para la ecuación de difusión fraccionaria en el espacio tridimensional, con derivada de Caputo en el tiempo.

Por otro lado, la resolución del problema de Cauchy “generalizado” (con condiciones iniciales fraccionarias) para la ecuación de difusión fraccionaria con derivada de Riemann-Liouville en el tiempo de orden $0 < \alpha \leq 2$ y de Liouville de orden $\beta > 0$

en el espacio, ha mostrado una vez más que la solución puede ser expresada en términos de las funciones especiales de Mittag-Leffler y de Wright, y que coincide con la solución conocida de las ecuaciones de difusión y de ondas para este mismo problema cuando $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\alpha = 2$, $\beta = 2$, respectivamente. A diferencia del caso anterior, ahora la solución fundamental puede ser escrita como densidad de probabilidad en x , sólo cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 2$.

En relación al problema de propagación de señales generalizado para la ecuación de difusión fraccionaria con derivada de Riemann-Liouville de orden $0 < \alpha \leq 2$ en el tiempo y derivada segunda en el espacio, se ha encontrado la misma expresión de la solución del problema de propagación de señales en su formulación clásica para la ecuación de difusión fraccionaria con derivada de Caputo de orden $0 < \alpha \leq 2$ en el tiempo y derivada segunda en el espacio. En particular, en este caso la solución fundamental, que es una distribución de Lévy unilateral con respecto a t cuando $\alpha = 1$, es una densidad de probabilidad unilateral en el tiempo para todo $0 < \alpha < 2$.

Finalmente, se ha desarrollado la búsqueda de soluciones de variables no separadas, como podrían ser las ondas planas, para la ecuación de difusión fraccionaria, en la que las derivadas parciales en el tiempo y en el espacio son sustituidas por las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville por la izquierda y por la derecha. Las soluciones obtenidas siguen interpolando los resultados relativos a las ecuaciones del calor y de ondas, como cabía esperar, y se ha confirmado, una vez más, que a través de los operadores diferenciales fraccionarios se pueden generalizar cuestiones matemáticas que típicamente son planteadas para las ecuaciones diferenciales usuales y obtener resultados que incluyen a los resultados clásicos como casos particulares.

Cap.3: Una vez concluida esta primera parte del trabajo, se ha considerado en el Capítulo 3 una segunda generalización de las ecuaciones clásicas de difusión y de ondas, que hemos indicado con el nombre de *ecuaciones de evolución-difusión del tipo de Dirac fraccionarias* y que podrían describir la difusión de partículas con grados internos de libertad. Este sistema de ecuaciones fraccionarias de evolución, propuesto por primera vez por L. Vázquez, ha sido obtenido considerando un tipo de raíz cuadrada de la ecuación de difusión fraccionaria, generalizando el método usado por Dirac para obtener su famosa ecuación para el electrón libre a partir de la ecuación de Klein-Gordon.

El conjunto de las dos ecuaciones fraccionarias de evolución con derivada de orden $0 < \alpha \leq 1$ en el tiempo y $\beta > 0$ en el espacio, puede ser interpretado como una interpolación “desde el interior” de las ecuaciones clásicas de difusión y de ondas, que son resueltas por las dos componentes de la solución de este sistema, llamadas *difunores*, cuando $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$ y $\alpha = 1$, $\beta = 1$, respectivamente.

Este sistema de ecuaciones tiene dos expresiones posibles, no equivalentes, dependiendo de la forma que toman las matrices de Pauli A y B que contiene, cuando pedimos que éstas sean reales con el fin de atribuir un significado físico a las componentes que lo resuelven. Por consiguiente, nos encontramos con un sistema de ecuaciones de componentes separadas, y con otro de ecuaciones de componentes

acopladas.

En realidad, se ha demostrado que, a través de una transformación matricial, se pueden obtener las soluciones acopladas como semisuma o semidiferencia de las soluciones no acopladas, por lo que se han podido desarrollar los cálculos relativos a la resolución analítica del sistema de ecuaciones de evolución-difusión fraccionarias del tipo de Dirac únicamente para el caso de ecuaciones desacopladas, y pasar en una segunda etapa a conocer las soluciones acopladas.

En concreto, se han buscado las dos componentes de la solución analítica del sistema de ecuaciones de evolución fraccionarias desacopladas cuando el operador fraccionario en el tiempo ha sido especificado según las definiciones de Caputo o de Riemann-Liouville, y el operador fraccionario en el espacio según la definición de Liouville, junto con los correspondientes problemas de Cauchy y de Cauchy generalizado.

De entre los resultados obtenidos, hay que destacar la determinación de la relación existente entre las dos componentes de la solución del sistema de ecuaciones de Dirac fraccionarias y la solución de la ecuación de difusión fraccionaria unidimensional. En concreto, cuando se ha solucionado el problema de Cauchy asociado a cada una de las ecuaciones desacopladas de este sistema en el que se han puesto la derivada de Caputo en el tiempo de orden $0 < \alpha \leq 1$ y la derivada primera en el espacio, se ha visto que la solución del problema de Cauchy para la ecuación de difusión fraccionaria con derivada de Caputo en el tiempo de orden $0 < 2\alpha \leq 1$ y derivada segunda en el espacio, puede ser expresada en términos de las componentes de Dirac desacopladas a través de una generalización fraccionaria de la fórmula de D'Álembert.

Efectivamente, en este caso, la solución de difusión fraccionaria resulta ser combinación lineal de las soluciones de evolución-difusión fraccionarias del tipo de Dirac desacopladas, del mismo modo que la solución de D'Álembert de la ecuación de ondas clásica es combinación lineal de las soluciones de las ecuaciones de primer orden, obtenidas de la descomposición del operador de ondas de segundo orden, mediante los correspondientes operadores de orden 1. Una vez más, el valor de un resultado clásico ha sido extendido al caso fraccionario que lo generaliza y lo incluye como caso particular.

Cap.4: Empujados por la analogía existente entre las ecuaciones fraccionarias de evolución-difusión y la ecuación de Dirac clásica, en el Capítulo 4 se han estudiado también las simetrías internas del sistema fraccionario, con derivada de orden α en el tiempo y derivada primera en el espacio, con respecto a ciertas transformaciones en el espacio y/o en el tiempo. La finalidad de este estudio ha sido conocer algún detalle más sobre el ámbito en el que el comportamiento de tipo parabólico (propio de la ecuación de difusión) y el de tipo hiperbólico (propio de las ecuaciones de ondas y de Dirac) se conserva tras la extensión fraccionaria.

Se ha encontrado que el sistema fraccionario, así como las ecuaciones de difusión y de ondas clásicas, presenta invariancia por inversión espacial para todo $0 < \alpha \leq 1$; no obstante, hay que resaltar una diferencia sustancial entre el comportamiento de estas últimas dos ecuaciones y el del sistema. En efecto, contrariamente a lo que

ocurre con las ecuaciones de difusión y de ondas clásicas, en el caso de las ecuaciones de Dirac generalizadas la simetría espacial es una propiedad del sistema y no de cada componente de su solución.

En cuanto a la inversión temporal, el sistema de ecuaciones de evolución-difusión fraccionarias reúne ambos comportamientos, el parabólico y el hiperbólico, al ser al mismo tiempo invariante por inversión temporal para un conjunto infinito de valores de α (así como lo es la ecuación de ondas clásica), y al no ser invariante para el conjunto obtenido como diferencia entre éste y el intervalo de valores $0 < \alpha \leq 1$ (así como no lo es para la ecuación de difusión clásica). Además, para una cierta elección de la matriz de inversión temporal, de forma análoga a lo que ocurría con la simetría espacial, la simetría temporal es una propiedad del conjunto de las dos componentes de la solución del sistema de ecuaciones de Dirac generalizadas, y no de cada componente. Pero esta vez sí existe una determinada matriz de inversión temporal para la cual la propiedad de simetría temporal es ya, no sólo del sistema de ecuaciones de Dirac generalizadas, sino también de cada una de las componentes de su solución.

El comportamiento del sistema de ecuaciones de Dirac fraccionarias con respecto a la inversión espacio-temporal es el mismo que presenta frente a la inversión exclusivamente temporal; en efecto, posee simetría espacio-temporal para el mismo conjunto infinito de valores de α para los cuales tiene simetría temporal, variando únicamente las matrices de inversión correspondientes a cada determinación de α . Por otro lado, el sistema nunca resulta ser invariante por traslación temporal debido a la propiedad de no-localidad de la derivada fraccionaria en el tiempo que hace que una traslación de este tipo en la variable temporal modifique el intervalo de integración del operador fraccionario. La falta de invariancia del sistema fraccionario del tipo de Dirac con respecto a la traslación temporal, contrasta con la bien conocida invariancia del sistema de Dirac clásico, pero no impide la existencia de una cantidad conservada asociada al sistema fraccionario, análoga del Hamiltoniano para el sistema de Dirac clásico, y que denominamos *Hamiltoniano fraccionario*.

Con respecto a la transformación de Galileo, resulta interesante observar que aunque en general no exista invariancia del sistema de ecuaciones fraccionarias de evolución, se puede encontrar una clase restringida de funciones para las cuales sí es válida esta propiedad del sistema.

Cap.5: El estudio del sistema de ecuaciones de evolución-difusión fraccionarias del tipo de Dirac ha sido completado en el Capítulo 5 con la construcción de esquemas numéricos para su resolución.

El carácter de *no localidad* de los operadores integrales que definen las derivadas de orden real cualquiera contrasta con el comportamiento local de la derivada clásica de orden entero, que puede ser evaluada a partir de valores de la función objeto de derivación en un intervalo arbitrariamente pequeño alrededor de la variable. Esta propiedad de *memoria* de las derivadas fraccionarias hace que toda discretización que se use para aproximarlas tenga una estructura compleja que aumenta el coste aritmético del algoritmo correspondiente, con respecto a los métodos usuales para

las ecuaciones diferenciales de orden entero. Nosotros hemos empleado dos métodos, propuestos por K. Diethelm y por Ch. Lubich, para la construcción de fórmulas de aproximación de integrales y derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville basados en la utilización de *fórmulas de cuadratura*. Para ambos métodos, se ha especificado el orden de convergencia de la fórmula de aproximación de la derivada fraccionaria que se ha obtenido a la correspondiente expresión exacta, viendo cómo, para nuestro caso concreto en el cual el índice de la derivada fraccionaria está entre 0 y 1, resulta ventajoso el método de Diethelm frente al de Lubich, conduciendo este primero a aproximaciones con un orden de convergencia mayor.

Entonces, empleando las fórmulas de Diethelm o de Lubich para discretizar la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville y utilizando las fórmulas en diferencias finitas clásicas, progresiva, centrada o regresiva, por lo que concierne a la aproximación de la derivada primera espacial, se han construido seis esquemas distintos que solucionan numéricamente la ecuación de evolución-difusión fraccionaria.

El análisis de estabilidad del tipo de von Neumann discreto ha determinado condiciones que son necesarias pero, en general, no suficientes para que dichos esquemas numéricos resulten estables. Por otro lado, se han analizado las propiedades de dispersión y disipación de la ecuación de evolución-difusión del tipo de Dirac fraccionaria y de un particular esquema numérico, de entre los que se han construido para aproximarla.

La relación de dispersión-disipación que se ha obtenido para la ecuación continua tiene una expresión muy compleja, implícita y que involucra al tiempo debido al carácter no local del operador de derivación fraccionario. Este mismo estudio, conducido para el esquema numérico, ha puesto en evidencia que éste es disipativo o no disipativo cuando se cumple la condición necesaria para su estabilidad, obtenida con el análisis de estabilidad del tipo de von Neumann discreto. Asimismo, el esquema resulta ser dispersivo, aunque puede que este comportamiento no se observe cuando, como suele ocurrir, la disipación esconde la dispersión, y las componentes de Fourier que intentan moverse a la velocidad equivocada vienen amortiguadas.

Una vez más, la ecuación de evolución-difusión del tipo de Dirac fraccionaria, generalización de las ecuaciones clásicas de difusión y de ondas, manifiesta un comportamiento intermedio entre el parabólico (disipativo) y el hiperbólico (no disipativo).

Los resultados de las simulaciones de la evolución de la ecuación de Dirac fraccionaria junto con un particular problema de valores inicial y de contorno, han puesto en evidencia que la presencia de una condición de contorno ha provocado, en algunos casos, un comportamiento de los algoritmos muy distinto con respecto a los resultados de estabilidad que se habían obtenido. En efecto, desde el punto de vista teórico, cuando se conduce un estudio del tipo de von Neumann discreto sobre esquemas en diferencias finitas asociados a problemas de valores iniciales y de contorno para ecuaciones parabólicas, ello conduce a condiciones de estabilidad necesarias y suficientes si la matriz correspondiente a dicho esquema es simétrica. Al trabajar, como en nuestro caso, con esquemas para ecuaciones hiperbólicas, casi nunca (o nunca) se obtienen matrices simétricas, con lo cual, para estos casos, sólo

se pueden deducir condiciones de estabilidad que son necesarias.

Cap.6: Finalmente, el Capítulo 6 ha concluido la tesis con el estudio numérico de la que hemos llamado *ecuación de seno-Gordon fraccionaria*, que es una particular ecuación de Klein-Gordon no lineal y no local en la que la no linealidad es la función seno y la no localidad está definida por el operador de derivación fraccionario de Feller-Riesz de orden $1 \leq \alpha \leq 2$ en el espacio. Esta ecuación, cuando $1 \leq \alpha \leq 2$, representa una interpolación entre la *ecuación de seno-Gordon no local* (también denominada *ecuación de seno-Hilbert II*) y la ecuación de seno-Gordon clásica local; como tal, puede considerarse como una generalización fraccionaria de un modelo de propagación de ondas no lineal, que pasa de ser no local ($1 \leq \alpha < 2$) a ser local ($\alpha = 2$).

La ecuación de seno-Gordon fraccionaria puede ser empleada para modelar varios problemas no locales de las electrodinámicas de Josephson en los que se pasa de superconductores tradicionales a superconductores de alta temperatura.

El paso de un modelo local a un modelo no local puede implicar cambios significativos de las propiedades de las soluciones de las ecuaciones correspondientes, lo que nos ha inducido a querer verificar si para la ecuación de seno-Gordon fraccionaria existen soluciones de tipo “breather”, es decir, localizadas en el espacio y periódicas en el tiempo, sabiendo ya que la solución exacta de tipo “breather” de la ecuación de seno-Gordon no tiene correspondencia entre las soluciones exactas de la ecuación de seno-Hilbert II.

La búsqueda numérica de este tipo de soluciones para la ecuación de seno-Gordon fraccionaria cuando $1 \leq \alpha < 2$, ha puesto en evidencia la existencia de “pseudo-breathers” de larga vida que pueden ser tratados, en las aplicaciones físicas, como periódicos en el tiempo y localizados en el espacio. Estos objetos son bastante robustos y pueden desarrollarse en el curso de la evolución de estados iniciales de perfiles muy distintos. No obstante, las simulaciones numéricas de la ecuación de seno-Gordon fraccionarias con $\alpha = 1$ han demostrado que datos iniciales con energía por debajo, igual, o incluso un poco mayor que un valor mínimo de energía que hemos encontrado analíticamente, no dan origen a ninguna estructura de tipo breather. Por el contrario, si la energía del estado inicial es mayor que este umbral, entonces, típicamente este perfil se desintegra en pulsaciones regulares de gran amplitud que pueden ser asimiladas a estructuras de tipo breather.

El hecho de que estas estructuras hayan sido obtenidas sólo numéricamente, no permite afirmar rigurosamente su periodicidad y localización. Además, parece bastante probable que el problema que se ha tratado sea muy parecido al de la ecuación local de Klein-Gordon no lineal tradicional y que, en general, la ecuación de seno-Gordon fraccionaria no admita soluciones que cumplan las condiciones de periodicidad y localización en un sentido estrictamente matemático.

Además de objetos periódicos de tipo breather, las simulaciones numéricas de la ecuación de seno-Gordon fraccionaria con $1 \leq \alpha < 2$, han evidenciado la existencia de estructuras *cuasiperiódicas* localizadas que pueden ser descritas como pulsaciones periódicas de tipo breather “rápidas” envueltas en unas modulaciones con periodo

considerablemente mayor. Las soluciones con estas características pueden ser consideradas como el análogo de las soluciones exactas de tipo breather cuasiperiódicas de la ecuación de seno-Gordon.

Parece entonces razonable concluir que las estructuras de tipo breather son típicas de muchos modelos descritos por ecuaciones de Klein-Gordon no locales, y que probablemente, lo que realmente determina la creación de estos objetos es más bien el término no lineal antes que la no localidad, la cual, en este caso, venía representada por la derivada fraccionaria de Feller-Riesz de orden $1 \leq \alpha < 2$.

Pasamos ahora a citar algunas de las cuestiones que han surgido en este trabajo y que, aunque hayan sido en parte ya abordadas, presentan todavía muchos aspectos abiertos para desarrollos posteriores:

1. En relación con el estudio que se ha realizado del sistema de ecuaciones de evolución-difusión fraccionarias del tipo de Dirac:
 - En primera instancia, nuestro objetivo será la aplicación de los resultados obtenidos a modelos concretos de procesos de difusión acopladas. Por ejemplo, esta familia de ecuaciones fraccionarias permite definir un conjunto de distribuciones de probabilidad que proporciona una herramienta analítica para una aproximación al estudio de problemas como la distribución de partículas suspendidas en la atmósfera y la caracterización de la influencia que esta distribución induce en la radiación que llega a la superficie de la Tierra.
 - Empleando la misma técnica con la que se ha construido este sistema de ecuaciones, queremos buscar las raíces de otras ecuaciones de distintos ordenes, con el fin de relacionar familias de ecuaciones que corresponden a fenómenos físicos muy variados. Por ejemplo, particular interés nos despierta el estudio de la ecuación de Timoshenko, que surge en la descripción de modelos de membranas móviles:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) - \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(t, x) = 0,$$

y que podría generalizarse como

$$\frac{\partial^{2\alpha}}{\partial t^{2\alpha}} u(t, x) - \frac{\partial^{4\beta}}{\partial x^{4\beta}} u(t, x) = 0,$$

con $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$, de modo que su raíz representara una nueva interpolación entre las ecuaciones de difusión y de ondas clásicas.

- Teniendo en cuenta los resultados obtenidos con el estudio de algunas de las propiedades de invariancia del sistema, pretendemos buscar para estas ecuaciones métodos numéricos que sean conservativos con respecto al Hamiltoniano fraccionario que se ha encontrado, y realizar el estudio de estabilidad de los mismos, así como verificar las simetrías de los esquemas discretos.

- Para los métodos numéricos que se han desarrollado en el Capítulo 5, podría conducirse un estudio de estabilidad con el método llamado “GKSO”, que se detalla en [158] y que, teniendo en cuenta las condiciones de contorno, conduce a condiciones de estabilidad más fuertes que las que encontramos con el análisis de von Neumann discreto. Asimismo, quedaría por verificar las simetrías de dichos esquemas discretos.
2. En relación con el estudio numérico de ecuaciones del tipo de Klein-Gordon no locales y no lineales:

- Aplicando el método de aproximación que se ha desarrollado para la ecuación de seno-Gordon fraccionaria, queremos acabar un estudio, ya empezado, sobre la búsqueda de soluciones de tipo breathers para la ecuación ϕ^4 no local

$$u_{tt} - Hu_x + u - u^3 = 0,$$

que es el análogo no local de la ecuación clásica ϕ^4

$$u_{tt} - u_{xx} + u - u^3 = 0.$$

Se sabe que la ecuación ϕ^4 no local no admite soluciones de tipo “breather” que satisfagan estrictamente la condición de localización. No obstante, la investigación del problema está revelando que esta ecuación admite soluciones de tipo “quasibreather”, que tienen un tiempo de vida considerable si la amplitud del perfil inicial es suficientemente pequeña. Para estos objetos, esperamos encontrar que acaben desapareciendo o bien descomponiéndose en ondas planas, o bien por colapso en tiempo finito.

- Asimismo, se pretende concluir la búsqueda, ya iniciada, de soluciones de tipo breather para la ecuación

$$u_{tt} - Hu_x + u - u^3 + \beta u^5 = 0,$$

con el fin de mostrar como la presencia del término u^5 con un coeficiente $\beta > 0$ en la no linealidad, bajo oportunas restricciones sobre β , pueda prevenir el colapso en tiempo finito de este tipo de soluciones.

LISTA DE PUBLICACIONES

1. A. Kilbas, T. Pierantozzi, J. Trujillo and L. Vázquez, “On the solution of fractional evolution equations”. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37, 3271-3283 (2004).
2. G. Alfimov, T. Pierantozzi and L. Vázquez, “Numerical study of non-local sine-Gordon equation”. Libro: “Nonlinear Waves, Classical and Quantum Aspects” pp. 121-128 (2004). Editores: V.V. Konotop y F. Abdullaev. Editorial: NATO Science Series, Kluwer Academic Publishers. * ISBN 1-4020-2189-5(PB).
3. A. Kilbas, T. Pierantozzi, J. Trujillo and L. Vázquez, “On generalized fractional evolution-diffusion equations”. *Fractional Differentiation And its Applications*, A. Le Mahaute, J. A. Tenreiro Machado, J. C. Trigeassou y J. Sabatier (Eds), UBooks Verlag, Neusäß, 137-152 (2006).
4. G. Alfimov, T. Pierantozzi and L. Vázquez, “Numerical study of a fractional Sine-Gordon equation”. *Fractional Differentiation And its Applications*, A. Le Mahaute, J. A. Tenreiro Machado, J. C. Trigeassou y J. Sabatier (Eds), UBooks Verlag, Neusäß, 153-162 (2006).
5. L. Vázquez and T. Pierantozzi, “No localidad y Cálculo Fraccionario”. Libro dedicado a la memoria del Prof. José María Fraile Peláez (2006, en prensa).
6. T. Pierantozzi and L. Vázquez, “An interpolation between the Wave and Diffusion equations through the Fractional Evolution equations Dirac like”. *Journal of Mathematical Physics*, 46, 113512-113523 (2005).
7. T. Pierantozzi and L. Vázquez, “Stability bounds for numerical schemes approximating fractional evolution-diffusion equations Dirac like”, *Appl. Math. and Comp.*, (2006 enviado).

BIBLIOGRAFÍA

- [1] *Abel N.H.*, Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies, *Gesammelte mathematische Werke*, Leipzig: Teubner, 1, 1881, 11-27. (Publicado por primera vez en *Mag. Naturvidenskaberne*, Aargang, 1 (2), Christiania, 1823).
- [2] *Abel N.H.*, Auflösung einer mechanischen Aufgabe, *J. für reine und angew. Math.*, 1, 1826, 153-157.
- [3] *Agarwal R.P.*, A propos d'une note de M. Pierre Humbert, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 236, 1953, 1467-1468.
- [4] *Albert J.P.*, *Bona J.L.* y *Saut J.C.*, Model equations for waves in stratified fluids, *Proc.R.Soc.Lond.A*, 453, 1997, 1233-1260.
- [5] *Alfimov G.L.*, *Eleonsky V.M.* y *Lerman L.M.*, Solitary wave solutions of nonlocal sine-Gordon equations, *Chaos*, 8 (1), 1998, 257-271.
- [6] *Alfimov G.L.*, *Evans W.A.B.* y *Vázquez L.*, On radial sine-Gordon breathers, *Nonlinearity*, 13, 2000, 1657-1680.
- [7] *Alfimov G.L.* y *Konotop V.*, On existence of gap solitons, *Physica D*, 146, 2000, 3307-327.
- [8] *Alfimov G.L.*, *Pierantozzi T.* y *Vázquez L.*, Numerical study of a fractional Sine-Gordon equation, *Fractional Differentiation And its Applications*, A. Le Mahaute, J. A. Tenreiro Machado, J. C. Trigeassou and J. Sabatier (Eds), UBooks Verlag, Neusäß, 2006, 153-162.
- [9] *Alfimov G.L.* y *Popkov A.F.*, Magnetic vortices in a distributed Josephson junction with electrodes of finite thickness, *Phys.Rev.B*, 52, 1995, 4503-4510.
- [10] *Alfimov G.L.* y *Silin V.P.*, Small-scale spatially periodic Josephson structures, *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 79 (2), 1994, 369-376.
- [11] *Alfimov G.L.* y *Silin V.P.*, On Small Perturbation of Stationary States in a Nonlinear Nonlocal Model of a Josephson Junction, *Phys.Lett.A*, 198 (2), 1995, 105-112.
- [12] *Alfimov G.L.* y *Silin V.P.*, Excitations in small-scale Abrikosov-Josephson vortex structures, *J.Exp.Theor.Phys.*, 81, 1995, 915-924.
- [13] *Alfimov G.L.*, *Usero D.* y *Vázquez L.*, On complex singularities of solutions of the equation $\mathcal{H}u_x - u + u^p = 0$, *J.Phys.A: Math.Gen.*, 33, 2000, 6707-6720.

- [14] *Aliiev Yu.M., Ovchinnikov K.N., Silin V.P. y Uryupin S.A.*, Nonlocal Josephson electrodynamics of layered structures, *J.Exp.Theor.Phys.*, 80, 1995, 551-559.
- [15] *Aliiev Yu.M. y Silin V.P.*, Travelling 4π -kink in nonlocal Josephson electrodynamics, *Phys.Lett.A*, 177, 1993, 259-262.
- [16] *Aliiev Yu.M., Silin V.P. y Uryupin S.A.*, *Superconductivity*, 5, 1992, p.230.
- [17] *Aubry S.*, A Unified Approach to the Interpretation of Displacive and Order-Disorder Systems. I. Thermodynamical Aspects, *J. Chem. Phys.*, 62 (8), 1975, 3217-3229.
- [18] *Berens H. y Westphal U.*, A Cauchy problem for a generalized wave equation, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 29, 1968, 93-106.
- [19] *Berkowitz B. y Scher H.*, Theory of anomalous chemical transport in random fracture networks, *Phys. Rev. E*, 57, 1998, 5858-5869.
- [20] *Bona J.L. y Li Yi.A.*, Decay and analyticity of solitary waves, *J.Math.Pures Appl.*, 76, 1997, 377-430.
- [21] *Bountis T., Capel H.W., Kollmann M. et al.*, Multibreathers and homoclinic orbits in 1-dimensional nonlinear lattices, *Physics Letters A*, 268, 2000, 50-60.
- [22] *Brown R.*, *Phil. Mag.*, 4, 1828, p.161; *Ann. Phys. Chem.*, 14, 1828, p.294.
- [23] *Brunner H. y van der Houwen P.J.*, *The Numerical Solution of Volterra Equations*, North Holland, Amsterdam, 1986.
- [24] *Brychkov Yu.A. y Prudnikov A.P.*, *Integral Transforms of Generalized Functions*, Gordon and Breach, New York, 1989.
- [25] *Caputo M.*, Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. II, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 13, 1967, 529-539.
- [26] *Caputo M.*, *Elasticità e dissipazione*, Zanichelli, Bologna, 1969.
- [27] *Caputo M.*, The Green function of the diffusion of fluids in porous media with memory, *Rend. Fis. Acc. Lincei (Ser.9)*, 7, 1996, 243-250.
- [28] *Caputo M. y Mainardi F.*, Linear models of dissipation in anelastic solids, *Riv. Nuovo Cimento (Ser. II)*, 1, 1971, 161-198.
- [29] *Cunha M.D., Konotop V.V. y Vázquez L.*, Small-amplitude solitons in a nonlocal sine-Gordon model, *Phys.Lett.A*, 221, 1996, 317-322.
- [30] *Dalfovo F., Giorgini S., Pitaevskii L.P. y Stringari S.*, Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases, *Rev.Mod.Phys.*, 71, 1999, 463-512.
- [31] *Dattoli G., Cesarano C., Ricci P.E. y Vázquez L.*, Fractional Operators, Integral Representations and Special Polynomials, *International Journal of Applied Mathematics*, 10, 2002, 131-139.

- [32] *Dattoli G., Cesarano C., Ricci P.E. y Vázquez L.*, Special Polynomials and Fractional Calculus, *Mathematical and Computational Modelling*, 37, 2003, 729-733.
- [33] *Dattoli G., Ricci P.E., Cesarano C. y Vázquez L.*, Fractional Derivatives: Integral Representations and Generalized Polynomials, *Journal of Concrete and Applicable Mathematics*, 1, 2004, 59-66.
- [34] *Debnath L.*, Integral Transforms and Their Applications, CRC Press, Boca Raton, 1995.
- [35] *Diethelm K.*, An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order, *Elect. Transact. Numer. Anal.*, 5, 1997, 1-6.
- [36] *Diethelm K., Ford J.M., Ford N.J. y Weilbeer M.*, Pitfalls in fast numerical solvers for fractional differential equations, Technical Report, TU Braunschweig, 2003.
- [37] *Diethelm K., Ford J.M., Ford N.J. y Weilbeer M.*, A comparison of backward differentiation approaches for ordinary and partial differential equations of fractional order. *Proceedings of the 1st IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*, Bourdeaux, France, 2004.
- [38] *Diethelm K., Ford N.J. y Freed A.D.*, A Predictor-Corrector Approach for the Numerical Solution of Fractional Differential Equations, *Nonlinear Dynamics*, 29, 2002, 3-22.
- [39] *Diethelm K., Ford N.J. y Freed A.D.*, Detailed error analysis for a fractional Adams method, *Numerical Algorithms*, 36, 2004, 31-52.
- [40] *Dithin V.A. y Prudnikov A.P.*, Integral Transforms and Operational Calculus, Pergamon Press, Oxford, 1965.
- [41] *Dodd R.K., Eilbeck L.C., Gibbon J.D. y Morris H.C.*, Solitons and Nonlinear Wave Equations, Academic London, 1982.
- [42] *Eleonsky V.M.*, Problems of Existence of Nontopological Solitons (Breathers) for Nonlinear Klein-Gordon Equations, *Asymptotics beyond All Orders*. Edited by H. Segur et al., Plenum Press, New York, 1991, 357-363.
- [43] *Eleonsky V.M., Kulagin N.E., Novozhilova N.S. y Silin V.P.*, Spatially Self-localized and Periodic Solutions of Wave Equations, *Selecta Mathematica Sovietica*, 7, 1, 1988, 1-14.
- [44] *Elliot D.*, An asymptotic analysis of two algorithms for certain Hadamard finite-part integrals, *IMA J. Numer. Anal.*, 13, 1993, 445-462.
- [45] *Engler H.*, Similarity solutions for a class of hyperbolic integrodifferential equations, *Differential Integral Eqns*, 10, (5), 1997, 815-840.
- [46] *Erdelyi A. (Editor)*, Tables of Integral Transforms, Bateman Project, Vols. 1-2, McGraw-Hill, New York, 1953-1954.

- [47] Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F. y Tricomi F.G., Higher Transcendental Functions, Vol.1, McGraw-Hill Book Corp., New York, 1953.
- [48] Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F. y Tricomi F.G., Higher Transcendental Functions, Vol.3, McGraw-Hill Book Corp., New York, 1953.
- [49] Feller W., On a generalization of Marcel Riesz'potentials and the semigroups generated by them, *Meddelanden Lunds Universitets Matematiska Seminarium, Tome suppl.*, 21, 1952, 72-81.
- [50] Feller W., An introduction to Probability theory and its applications, Vol.II, New York: Wiley, 1971.
- [51] Flach S., Breathers on lattices with long range interaction, *Phys. Rev. E*, 58, 1998, R4116-R4119.
- [52] Flach S. y Willis C.R., Discrete breathers, *Physics Reports*, 295, 1998, 181-264.
- [53] Fogedby H.C., Langevin equations for continuous time Lévy flights, *Phys. Rev. E*, 50, 1994, 1657-1660.
- [54] Frenkel J. y Kontorova T., On the theory of Plastic Deformation and Twinning, *J. Phys. (USSR)*, 1, 1939, 137-149.
- [55] Fujita Y., Integrodifferential equation which interpolates the heat and the wave equations, *Osaka J. Math.*, 27, 1990, 309-321, 797-804.
- [56] Gaididei Yu.B., Mingaliev S.F., Christiansen P.L. y Rasmussen K.O., Effects of nonlocal dispersive interactions on self-trapping excitations, *Phys.Rev.E*, 55, 1997, 6141-6150.
- [57] Gelfand I.M. y Shilov G.F., Generalized Functions, Vol.1, Academic Press, New York-London, 1964.
- [58] Giona M. y Roman H.E., A theory of transport phenomena in disordered systems, *The Chemical Engineering Journal*, 49, 1992, 1-10.
- [59] Gorenflo R. y Mainardi F., Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order , *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, A. Carpinteri and F. Mainardi (Eds), Springer Verlag, Wien and New York, 1997, 223-276.
- [60] Gorenflo R. y Mainardi F., Fractional calculus and stable probability distributions, *The Archives of Mechanics*, 50, 1998, 377-388.
- [61] Gorenflo R., Luchko Yu. y Mainardi F., Analytical properties and applications of the Wright function, *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 2, 1999, 383-414.
- [62] Grünwald A.K., Über "begrenzte" Derivationen und deren Anwendung, *Zeit. angew. Math. Physik*, 12, 1867, 441-480.

- [63] *Gurevich A.*, Nonlocal Josephson electrodynamics and pinning in superconductors, *Phys.Rev.B*, 46 (5), 1992, 3187-3190.
- [64] *Hairer E., Nørsett S.P. y Wanner G.*, Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems, 2nd revised edition, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [65] *Hairer E. y Wanner G.*, Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [66] *Henrici P.*, Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations, John Wiley, New York, 1962.
- [67] *Hilfer R.*, Exact solutions for a class of fractal time random walks, *Fractals*, 3, 1995, 211-216.
- [68] *Humbert P. y Agarwal R.P.*, Sur la fonction de Mittag-Leffler et quelques-unes de ses généralisations, *Bull. Sci. Math. (Ser. II)*, 77, 1953, 180-185.
- [69] *Ivanchenko Yu.M. y Soboleva T.K.*, Nonlocal interaction in Josephson junctions, *Phys. Lett.A*, 147, 1990, 65-69.
- [70] *Josephson B.*, Supercurrents through barriers, *Adv. Phys.*, 14, 1965, 419-451.
- [71] *Kilbas A.A., Pierantozzi T., Trujillo J.J. y Vázquez L.*, On the solution of fractional evolution equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37, 2004, 3271-3283.
- [72] *Kilbas A.A., Pierantozzi T., Trujillo J.J. y Vázquez L.*, On generalized fractional evolution-diffusion equations. *Fractional Differentiation And its Applications*, A. Le Mahaute, J. A. Tenreiro Machado, J. C. Trigeassou and J. Sabatier (Eds), UBooks Verlag, Neusäß, 2006, 137-152.
- [73] *Kilbas A.A., Saigo M. y Trujillo J.J.*, On the generalized Wright function, *Frac. Calc. Appl. Anal.*, 5, 2002, n. 4, 437-460.
- [74] *Kilbas A.A., Srivastava H.M. y Trujillo J.J.*, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematics Studies, Volume 204, Elsevier Academic Press, 2006.
- [75] *Kilbas A.A. y Trujillo J.J.*, Differential Equations of Fractional Order: Methods, Results and Problems-II, *Appl. Anal.*, 81(2), 2002, 435-493.
- [76] *Kittel C.*, Introduction to Solid State Physics, John Wiley & Sons, New York, 1966.
- [77] *Klafter J., Shlesinger M.F. y Zumofen G.*, Beyond Brownian motion, *Phys. Today*, 49, (2), 1996, 33-39.
- [78] *Klafter J., Blumen A. y Shlesinger M.F.*, Stochastic pathway to anomalous diffusion, *Phys. Rev. A*, 35, 1987, 3081-3085.

- [79] Konotop V.V., Sánchez A. y Vázquez L., Dynamics of a ϕ^4 kink in the Presence of Strong Potential Fluctuations, Dissipation and Boundaries, *Physical Review A*, 44, 1991, 1086-1103.
- [80] Konotop V.V., Sánchez A. y Vázquez L., Kink Dynamics in the Weakly Stochastic ϕ^4 Model, *Physical Review B*, 44, 1991, 2554-2566.
- [81] Konotop V.V. y Vázquez L., Wave Propagation in Disordered Media, *Encyclopedia of Nonlinear Science*, NL3307, 2005, 990-993.
- [82] Krumhansl J.A. y Schieffer J.R., Dynamics and Statistical Mechanics of a One-Dimensional Model Hamiltonian for structural Phase Transitions, *Phys. Rev. B*, 11 (9), 1975, 3535-3545.
- [83] Kruskal M. y Segur H., Nonexistence of small-amplitude breather solutions in ϕ^4 theory, *Phys. Rev. Lett.*, 58, 1987, 747-750.
- [84] Lacroix S.F., *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*. 3 ed., Paris: Courcier, 1820.
- [85] Laurent H., Sur le calcul des dérivées a indices quelconques, *Nouv. Ann. Math.*, 3 (3), 1884, 240-252.
- [86] Letnikov A.V., Theory of differentiation with an arbitrary index, *Mat. Sb.*, 3, 1868, 1-66.
- [87] Linz P., *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*, SIAM, Philadelphia, 1985.
- [88] Liouville J., Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions, *J. l'École Roy. Polytechn.*, 13, Sect. 21, 1832, 1-69.
- [89] Liouville J., Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques, *Ibid.*, 1832, 71-162.
- [90] López-Marcos J.C., A difference scheme for a nonlinear partial integrodifferential equation, *SIAM J. Numer. Anal.*, 27, 1990, 20-31.
- [91] Lubich Ch., On the stability of linear multistep methods for Volterra convolution equations, *IMA J. Numer. Anal.*, 3, 1983, 439-465.
- [92] Lubich Ch., Fractional linear multistep methods for Abel-Volterra integral equations of the second kind, *Math. Computation*, 45, 1985, 463-469.
- [93] Lubich Ch., Discretized fractional calculus, *SIAM J. Math. Anal.*, 17, 1986, 704-719.
- [94] Lubich Ch., A stability analysis of convolution quadratures for Abel-Volterra integral equations, *IMA J. Numerical Analysis*, 6, 1986, 87-101.

- [95] *Lubich Ch.*, Convolution quadrature and discretized operational calculus, Part I in *Numer. Math.*, 52, 1988, 129-145, Part II in *Numer. Math.*, 52, 1988, 413-425.
- [96] *Lubich Ch., Sloan I.H. y Thomée V.*, Nonsmooth data error estimates for approximations of an evolution equation with a positive-type memory term, *Math. Computation*, 65, 1996, 1-17.
- [97] *Lukacs E.*, Stable distributions and their characteristic functions, *Jahresbericht DMV*, 71, Washington 1969, 84-114.
- [98] *Lynch V.E., Carreras B.A., del-Castillo-Negrete D., Ferreira-Mejías K.M. y Hicks H.R.*, Numerical methods for the solution of partial differential equations of fractional order, *Journal of Computational Physics*, 192, 2003, 406-421.
- [99] *Mainardi F.*, On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation, in S. Rionero and T. Ruggeri (Eds), *Waves and Stability in Continuous Media*, World Scientific, Singapore, 1994, 246-251.
- [100] *Mainardi F.*, Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics, in: A.Carpinteri and F.Mainardi (Eds), *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, Springer Verlag, Wien, 1997, 291-348.
- [101] *Mainardi F., Paradisi P. y Gorenflo R.*, Probability distributions generated by fractional diffusion equations, *Econophysics: an Emerging Science*, Kertesz J. and Kondor I. (Eds), Dordrecht: Kluwer, 1999.
- [102] *Mainardi F. y Tomirotti M.*, On a special function arising in the time fractional diffusion-wave equation, in P.Rusev, I.Dimovski and V.Kiryakova (Eds), *Transform Methods and Special Functions, Sofia 1994*, Science Culture Technology, Singapore, 1995, 171-183.
- [103] *Mainardi F. y Tomirotti M.*, Seismic pulse propagation with constant Q and stable probability distributions, *Annali di Geofisica*, 40, 1997, 1311-1328.
- [104] *Mandelbrot B.B.*, The Fractal Geometry of Nature, Freeman, New York, 1983.
- [105] *Maravall D.*, Ingeniería de las Oscilaciones, Editorial Dossat, 1959.
- [106] *Maravall D.*, *Rev. Ac. Ci. Madrid*, 65, 1971, 245-258.
- [107] *Matignon D. y Montseny G. (Eds)*, Fractional Differential Systems: Models, Methods and Applications, *Proceedings of the Colloquium FDS'98, ESAIM (European Ser.Appl.& Ind. Maths) Proceedings*, 5, 1996.
- [108] *Matthys J.*, A-stable linear multistep methods for Volterra integro-differential equations, *Numer. Math.*, 27, 1976, 85-94.
- [109] *Messiah A.*, Mecánica Cuántica, Tomo II, Editorial Tecnos, Madrid 1965.

- [110] Metzler R., Glöckle W.G. y Nonnenmacher T.F., Fractional model equation for anomalous diffusion, *Physica A*, 211, 1994, 13-24.
- [111] Metzler R. y Klafter J., The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamic approach, *Phys. Rep.*, 339, 2000, 1-77.
- [112] Metzler R. y Klafter J., The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 37, 2004, R161-R208.
- [113] Miller S.K. y Ross B., An introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons Inc., New York, 1993.
- [114] Mints R.G. y Snapiro I.B., Dynamics of Josephson pancakes in layered superconductors, *Phys.Rev.B*, 49, 1994, 6188-6192.
- [115] Mittag-Leffler G.M., Sur l'intégrale de Laplace-Abel, *C. R. Acad. Sci. Paris, (ser. II)*, 136, 1902, 937-939.
- [116] Mittag-Leffler G.M., Une généralisation de l'intégrale de Laplace-Abel, *C. R. Acad. Sci. Paris, (ser. II)*, 137, 1903, 537-539.
- [117] Mittag-Leffler G.M., Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$ intégrale de Laplace-Abel, *C. R. Acad. Sci. Paris, (ser. II)*, 137, 1903, 554-558.
- [118] Mittag-Leffler G.M., Sopra la funzione $E_\alpha(x)$, *R. Accad. Lincei, Rend. (ser. V)*, 13, 1904, 3-5.
- [119] Mittag-Leffler G.M., Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène, *Acta Math.*, 29, 1905, 101-181.
- [120] Morinaga K. y Nono T., On the linearization of a form of higher degree and its representation, *J. Sci. Hiroshima Univ. (A)*, 1952, 13-41.
- [121] Morton K.W. y Mayers D.F., Numerical Solution of Partial Differential Equations, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [122] Naumkin P.I. y Shishmarev I.A., Nonlinear Nonlocal Equations in the Theory of Waves, *Translations of Mathematical Monographs*, 133, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1994.
- [123] Nigmatullin R.R., The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry, *Phys. Stat. Sol. B*, 133, 1986, 425-430.
- [124] Oldham K.B. y Spanier J., The replacement of Fick's laws by a formulation involving semidifferentiation, *J. Electroanalyt. Chem.*, 26, 1970, 331-341.
- [125] Oldham K.B. y Spanier J., The Fractional Calculus, Academic Press, New York-London, 1974.

- [126] O'Shaughnessy B. y Procaccia I., Analytical solutions for diffusion on fractal objects, *Phys. Rev. Lett.*, 54, 1985, 455-458.
- [127] Pazy A., Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, *Applied Mathematical Sciences*, 44, Springer Verlag, New York, 1983.
- [128] Pearson K., The problem of random walk, *Nature*, 72, 1905, 294-342.
- [129] Perring J.K. y Skyrme T.R.H., A Model Unified Field Equation, *Nucl. Phys.*, 31, 1962, 550-555.
- [130] Pfister G. y Scher H., Dispersive (non-Gaussian) transient transport in disordered solids, *Adv. Phys.*, 27, 1978, 747-798.
- [131] Pierantozzi T. y Vázquez L., An interpolation between the Wave and Diffusion equations through the Fractional Evolution equations Dirac like, *Journal of Mathematical Physics*, 46, 2005, 113512-113523.
- [132] Piette B. y Zakrzewski W.J., Metastable stationary solutions of the radial d -dimensional sine-Gordon model, *Nonlinearity*, 11, 1998, 1103-1110.
- [133] Pipkin A.C., Lectures on Viscoelastic Theory, Springer Verlag, New York, 1986.
- [134] Podlubny I., Numerical methods of the fractional calculus, *Transactions of the Technical University of Kosice*, 4 (3-4), 1994, 200-208.
- [135] Podlubny I., Fractional Differential Equations, *Mathematics in Science and Engineering*, 198, Academic Press, San-Diego, 1999.
- [136] Podlubny I., Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Differentiation, *Fractional Differentiation And its Applications*, A. Le Mahaute, J. A. Tenreiro Machado, J. C. Trigeassou and J. Sabatier (Eds), UBooks Verlag, Neusäß, 2006, 3-18.
- [137] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. y Flannery B.P., Numerical Recipes in Fortran 77, Cambridge University Press, 1992.
- [138] Prüss J., Evolutionary Integral Equations and Applications, Birkhäuser, Basel, 1993.
- [139] Richardson L.F., Atmospheric Diffusion Shown on a Distance-Neighbour Graph, *Proc. Roy. Soc. London (Series A)*, 110, 1926, 709-737.
- [140] Riemann B., Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation, *Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher*, Leipzig: Teubner, 1876, 331-344.
- [141] Riesz M., Potentiels de divers ordres et leurs fonctions de Green, *C. R. Congrès Intern. Math.*, Oslo, 2, 1936, 62-63.

- [142] *Riesz M.*, L'intégrales de Riemann-Liouville et solution invariante du problème de Cauchy pour l'équation des ondes, *Ibid*, 1936, 44-45.
- [143] *Robbin J.W. y Salamon D.A.*, The exponential Vandermonde matrix, *Linear Algebra Appl.*, 317, 2000, 225-226.
- [144] *Rodríguez M.J. y Vázquez L.*, Additive and Multiplicative Perturbations on ϕ^4 kinks, *Physical Review B*, 41, 1990, 11437-11448.
- [145] *Saichev A. y Zaslavsky G.*, Fractional kinetic equations: solutions and applications, *Chaos*, 7, 1997, 753-764.
- [146] *Samko S.G., Kilbas A.A. y Marichev O.I.*, Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon, 1993.
- [147] *Sánchez A. y Vázquez L.*, Nonlinear Wave Propagation in Disordered Media, *International Journal of Modern Physics B (Invited Reviews)*, 5, 1991, 2825-2885.
- [148] *Sanz-Serna J.M.*, A numerical method for a partial integro-differential equation, *SIAM J. Numer. Anal.*, 25, 1988, 319-327.
- [149] *Scher H. y Montroll E.W.*, Anomalous transit-time dispersion in amorphous solids, *Phys. Rev. B*, 12, 1975, 2455-2477.
- [150] *Schneider W.R. y Wyss W.*, Fractional diffusion and wave equations, *J. Math. Phys.*, 30, 1989, 134-144.
- [151] *Schwartz L.*, Theorie des Distributions, Vol.1-2, Hermann, Paris, 1950.
- [152] *Schweber S.S.*, An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, Harper Int. Ed. New York, 1966.
- [153] *Seshadri V. y West B.J.*, Fractal Dimensionality of Levy Processes, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, USA, 79, 1982, 4501-4505.
- [154] *Shlesinger M.F.*, Asymptotic solutions of continuous time random walks, *J. Stat. Phys.*, 10, 1974, 421.
- [155] *Sneddon I.*, Fourier Transforms, Dever Publication, New York, 1995.
- [156] *Sonine N.Ya.*, Report on differentiation with an arbitrary index (Russian), *Proc. Second Congress of Russian Naturalists*, 2, 1870, 18-21.
- [157] *Thomas J.W.*, Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, Texts in Applied Mathematics, 22, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [158] *Thomas J.W.*, Numerical Partial Differential Equations: Conservation Laws and Elliptic Equations, Texts in Applied Mathematics, 33, Springer-Verlag, New York, 1999.

- [159] Turchetti G., Usero D. y Vázquez L., Hamiltonian Systems with Fractional Time Derivative, *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences*, 18, 2002, 31-44.
- [160] Vázquez L., Fractional diffusion equation with internal degrees of freedom, *Journal of Computational Mathematics*, 21, 2003, 491-494.
- [161] Vázquez L., Una Panorámica del Cálculo Fraccionario y sus Aplicaciones, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 98, 2004, 17-25.
- [162] Vázquez L., Singularity Analysis of a Nonlinear Fractional Differential Equation, *Revista de la Real Academia de Ciencias Serie A Matemáticas*, 99 (2), 2005, 211-217.
- [163] Vázquez L., Evans W.A.B. y Rickayzen G., Numerical investigation of a non-local sine-Gordon model, *Phys.Lett.A*, 189, 1994, 454-459.
- [164] Vázquez L. y Jiménez S., Dispersion Relations, *Encyclopedia of Nonlinear Science*, NL3301, 2005, 222-223.
- [165] Vázquez L. y Pierantozzi T., No localidad y Cálculo Fraccionario, *Libro dedicado a la memoria del Prof. José María Fraile Peláez*, Universidad Complutense de Madrid, 2006 (en prensa).
- [166] Vázquez L. y Vilela Mendes R., Fractionally coupled solutions of the diffusion equation, *Applied Mathematics and Computation*, 141, 2003, 125-130.
- [167] Vladimirov V.S., Generalized Functions in Mathematical Physics, Nauka, Moscow, 1979.
- [168] Wang K.G. y Tokuyama M., Nonequilibrium statistical description of anomalous diffusion, *Physica A*, 265, 1999, 341-351.
- [169] Weinstein M.I., Existence and dynamic stability of solitary wave solutions of equations arising in long wave propagation. *Comm. in partial differential equations*, 12 (10), 1987, 1133-1173.
- [170] Weiss G.H. y Rubin R.J., Random walks: theory and selected applications, *Adv. Chem. Phys.*, 52, 1983, 363-475.
- [171] Weyl H., Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung. *Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 62 (1-2), 1917, 296-302.
- [172] Wiener N., *J. Math. and Phys.* (MIT), 2, 1923, p.131; *Bull. Soc. math.* (France), 52, 1924, p.569; *Acta Math.*, 55, 1930, p.117; *Amer. J. Math.*, 60, 1938, p.897.
- [173] Wolkenfelt P.H.M., The Numerical Analysis of Reducible Quadrature Methods for Volterra Integral and Integro-Differential Equations, Thesis, Math. Centrum, Amsterdam, 1981.

- [174] *Wright E.M.*, On the coefficients of power series having exponential singularities, *J. London Math. Soc.*, 8, 1933, 71-79.
- [175] *Wright E.M.*, The asymptotic expansion of the generalized Bessel function, *Proc. London Math. Soc.*, 38 (2), 1934, 257-270.
- [176] *Wright E.M.*, The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function, *J. London Math. Soc.*, 10, 1935, 286-293.
- [177] *Wright E.M.*, The generalized Bessel function of order greater than one, *Quart. J. Math.*, 11, 1940, 36-48.
- [178] *Wright E.M.*, The asymptotic expansion of integral functions defined by Taylor series, *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A*, 238, 1940, 423-451.
- [179] *Wright E.M.*, The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function, *Proc. London Math. Soc. (2)*, 46, 1940, 389-408.
- [180] *Wyss W.*, Fractional diffusion equation, *J. Math. Phys.*, 27, 1986, 2782-2785.
- [181] *Xu Da*, On the discretization in time for a parabolic integrodifferential equation with a weakly singular kernel, *Appl. Math. Comp.*, 58, 1993, 1-60.
- [182] *Zemanian A.H.*, Generalized Integral Transformations, *Pure Appl. Math.*, 18, Wiley & Sons, New York, 1968.
- [183] *Zumofen G., Blumen A. y Klafter J.*, Current flow under anomalous-diffusion conditions: Lévy walks, *Phys. Rev. A*, 41, 1990, 4558-4561.