NUEVOS METODOS Y RESULTADOS EN LA TEORIA DE DIFERENCIACION DE INTEGRALES

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

DEPARTAMENTO DE ANALISIS MATEMATICO

NUEVOS METODOS Y RESULTADOS EN LA TEORIA DE DIFERENCIACION DE INTEGRALES

Memoria que presenta Angel Jiménez Hernández
para optar al Grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas

Dirigida por el Prof. Baldomero Rubio

Madrid, Mayo 1994

INDICE

PROLOGO

La teoria de Diferenciación de Integrales tiene su origen en el teorema de Lebesgue de diferenciación, y constituye una materia con problemática propia y fuertemente ligada a otras ramas del Análisis.

El clásico teorema de Vitali de cubrimiento para intervalos cúbicos de $\mathbb{R}^n$ permite probar que los promedios integrales de una función f localmente integrable para una sucesión de intervalos cúbicos Q_k que se contraen a x convergen a f(x). En cambio, si en lugar de intervalos cúbicos tomamos otra sucesión de medibles acotados R_k, el problema es muy diferente y la posibilidad de convergencia radica fundamentalmente en la geometría de los conjuntos R_k, de forma que se precisan unas propiedades mínimas de cubrimiento, que en algún sentido se parezcan a las de Vitali, para que el resultado de Lebesgue siga siendo válido al menos en un espacio razonable de funciones.

Junto a los intervalos cúbicos, la familia de los intervalos, con lados paralelos a los ejes, por una parte, y la familia de los rectángulos o paralelepípedos, por otra, constituyen las bases clásicas o modelos de referencia con singulares características, sobre los que la teoría de diferenciación de integrales ha elaborado a lo largo de este siglo un cúmulo de resultados positivos, no exento de numerosos problemas abiertos, fruto del trabajo de matemáticos de reconocido prestigio y donde la contribución de matemáticos españoles ha sido notable.

Cabe señalar, precisamente, que a partir de los años setenta y gracias a la aportación de matemáticos españoles entre los que figuran M. de Guzmán, B. Rubio, I. Peral, A. Córdoba, R. Moriyón, F. Soria, y otros, la diferenciación de integrales toma nuevo impulso, tal vez al observar la estrecha relación entre la propiedad de Lebesgue de diferenciación y ciertas estimaciones del operador maximal de Hardy-Littlewood, y alguna de sus variantes.

Mediante este operador se controla el supremo de los promedios integrales de una función localmente integrable f sobre los medibles de una determinada familia que contengan a un punto x. Propiedades de continuidad del operador maximal, cuando opera en un espacio de funciones, se corresponden con propiedades en diferenciación.

En particular, la caracterización de Busemann y Feller [1934] para las bases de densidad invariantes por homotecias se puede interpretar cono una acotación de tipo débil del correspondiente operador maximal, cuando se restringe a funciones características de medibles acotados. La acotación anterior tiene una versión geométrica sugestiva y permite asociar a cada medible E de medida finita su λ-halo, formado por la unión de los elementos de la base que con respecto a E tengan una densidad media mayor que λ. La máxima desproporción entre el λ-halo de E con respecto a E determina la llamada función de halo η, que en términos precisos para una base $\mathfrak{B}$ viene así definida

$$\eta(1/\lambda) = \sup \left\{ \frac{|\cup\{R \in \mathfrak{B}: \; |R \cap E| > \lambda |R|\}|}{|E|} \right\}$$

donde el supremo está tomado sobre los medibles E que tengan medida Lebesgue $|E|$ finita.

En el caso de bases como los intervalos cúbicos o los intervalos en $\mathbb{R}^n$ hay una coincidencia entre la función de halo η y el espacio de derivación $\eta(L)$, y el problema conocido como la conjetura de la función de halo propone que, para las bases invariantes por homotecias, la función de halo determine el mayor espacio de derivación. Esta cuestión constituye el punto más atractivo en la teoría de diferenciación de integrales. Por el momento, y salvo el caso en que la función de halo se comporte como la funcion identidad (R. Moriyón [1978]) el problema del halo permanece abierto. No obstante, se considera de interés cualquier procedimiento que permita deducir espacios amplios de derivación de una base si se conoce su función de halo. Desde otro punto de vista el problema equivale a obtener la mejor acotación del operadr maximal, o de operadores subaditivos en general, a partir de acotaciones de tipo débil restringido.

Son muy numerosos los trabajos que en relación con el tema de diferenciación de integrales se han publicado en los últimos años, algunos de ellos se exponen en la bibliografía que se indica al final de esta memoria. En particular, es de destacar la monografía de M. Guzmán [1975], donde se recogen la mayor parte de los resultados relacionados con esta teoría y su evolución histórica, así como numerosas sugerencias y cuestiones abiertas. Igualmente en la obra del mismo autor M. Guzmán [1981], se presentan diversas técnicas que pueden utilizarse en el tratamiento de operadores tanto en teoría de diferenciación como en otros campos del Análisis de Fourier.

De la lectura de estas obras y después de seguir el desarrollo de un curso de doctorado, impartido por los profesores M. Guzmán y B. Rubio en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, surgió la idea, animado por el profesor B. Rubio que dirige este trabajo, de intentar resolver alguna de las cuestiones abiertas que se indicaban en los citados textos. En particular, parecía oportuno analizar el problema de la diferenciación de integrales en el marco de los espacios de Orlicz, generalizar a estos espacios los resultados ya conocidos en relación con la dualidad entre propiedades de cubrimiento y derivación, hacer uso del método de linealización del operador maximal para obtener propiedades de cubrimiento en espacios mas generales que los L^p. En relación con el problema del halo, buscar caracterizaciones de una base en términos de cubrimiento a partir de su función de halo y utilizarlas al objeto de acceder a espacios amplios de derivación.

Con el programa previo se lleva a cabo el trabajo que aquí presentamos distribuido en cinco capítulos que a su vez están organizados por secciones.

Iniciamos esta Memoria dando en el capítulo I un criterio de derivación, teorema 1.1., para medidas no negativas, localmente finitas y absolutamente continuas respecto de la de Lebesgue. Mediante el criterio anterior la derivabilidad de una medida μ respecto de una base de diferenciación $\mathfrak{B}$ queda condicionada a la siguiente propiedad: siempre que para cada punto x de un medible acotado A exista una sucesión R_k en $\mathfrak{B}$ que se concentre en x y respecto a la cual μ tenga una densidad media uniformemente acotada por λ, entonces la densidad media de μ sobre A esta también acotada por λ.

La propiedad anterior permite reconocer de una forma natural y directa si una base deriva la integral de una función o un espacio de funciones, evitando el argumento usual relativo a la proximidad respecto a funciones continuas. Cuando el criterio que venimos comentando se aplica a una base regular respecto a intervalos cúbicos se obtienen dos resultados básicos del Análisis real: el teorema de Radon-Nikodym y el teorema de Lebesgue de diferenciación.

Los espacios o clases de funciones cuyas integrales pueden tener propiedades de diferenciación en el sentido de Lebesgue respecto de una base, han de estar contenidos en el espacio de las funciones localmente integrables $L(\mathbb{R}^n)$. De éstos posiblemente los espacios de Orlicz $\varphi(L)$ junto con los espacios de Lorentz $L(p,q)$ resultan los más apropiados. En la sección I.3. del capítulo I se describen las propiedades específicas de lo que en esta Memoria se ha de entender por función de Orlicz y por espacio de Orlicz. Igualmente se señala el significado concreto que se da a una función de Young y a la relación de conjugación entre funciones de Young.

El capítulo II se dedica al estudio de las propiedades de derivación de una base de densidad, es decir, de aquellas bases que, al menos, derivan las integrales de las funciones características de los conjuntos medibles. En el teorema 2.1. se ofrece una prueba directa de que el espacio de derivación de una base de densidad contiene a L^∞.

En el teorema 2.2. se dan diversos criterios que permiten reconocer si una base de densidad deriva la integral de una función localmente integrable. Se destaca entre éstos una propiedad de cubrimiento que contiene como caso particular la propiedad de cubrimiento de De Possel [1936]. No menos interesante resulta también la propiedad que permite asegurar la derivabilidad de la integral de una función localmente integrable, siempre que la derivada superior sea esencialmente nula en los conjuntos donde dicha función se anule. En la sección tercera de este capítulo se extiende a espacios de Orlicz la dualidad, observada por Hayes [1976], entre propiedades de cubrimiento de tipo Vitali de una base y el espacio de derivación asociado.

En el capítulo III se introduce una extensión del operador maximal de Hardy-Littlewood, es decir, respecto a una familia de abiertos acotados. La estrecha relación entre propiedades de diferenciación de una base y propiedades de acotación débil del correspondiente operador maximal ya fueron observadas en los trabajos de B.Rubio [1971] y I.Peral [1974], que aquí se recogen en los teoremas 3.1 y 3.4. El resto de este capítulo se orienta al análisis de la interacción que existe entre propiedades de cubrimiento de los elementos de una familia de abiertos acotados y propiedades de acotación de tipo débil del operador maximal asociado. El método inductivo de Hayes por una parte (teorema 3.6.), y el método de linealización de A. Córdoba, por otra, (teorema 3.9.) sirven de referencia para obtener resultados de gran alcance en el marco de los espacios de Orlicz.

En el capítulo IV se analizan las propiedades del operador maximal asociado al producto cartesiano de familias de medibles, al menos, si una de ellas se comporta como los intervalos cúbicos. Utilizando como recurso el procedimiento natural por el cual el operador maximal definido en $L(\mathbb{R}^n)$ y asociado a una familia $\mathfrak{K}$ admite una extensión al espacio $L(\mathbb{R}^{n+m})$, se consigue un resultado, teorema 4.2, que contiene como caso particular al conocido strong maximal theorem de Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund, relativo a la acotación del operador maximal para intervalos en $\mathbb{R}^n$.

Merece especial interés la propiedad de cubrimiento que se deduce para una familia de medibles que tengan alguna componente de naturaleza diádica (teorema 4.4.) de la que resulta, en particular, el resultado de A.Córdoba referente a la propiedad de cubrimiento exponencial para intervalos diádicos en $\mathbb{R}^2$. La propiedad de cubrimiento obtenida para los intervalos con proyección diádica permite obtener una prueba alternativa del strong maximal theorem.

En el capítulo V se exponen varias cuestiones en relación con el problema de la función de halo. Salvando el resultado de R. Moriyón [1978] recogido en el teorema 5.1., donde la invarianza por homotecias de la base juega un papel decisivo en la verificación de la conjetura de la función de halo, cuando ésta se comporta como la función identidad, el objeto de este capítulo se centra en la búsqueda de la mejor y más amplia acotación de tipo débil que puede deducirse para un operador que sea de tipo débil restringido y se comporte como el operador maximal.

La observación que queremos hacer aquí es que para obtener que una base deriva el espacio $\varphi(L)$ es suficiente observar si el operador maximal correspondiente M se comporta localmente de forma continua en $\varphi(L)$, por ejemplo, si

$$\int_A Mf_k \longrightarrow 0$$

cuando $\|\varphi(f_k)\|_1 \longrightarrow 0$. En este sentido tiene interés el comportamiento local del operador M

En la sección 2 de este capítulo se indican caracterizaciones de la propiedad de acotación débil restringida de un operador en tèrminos de integrabilidad local (teoremas 5.2. y 5.3.) que en ocasiones resultan de fácil manejo y permiten, como en el caso de bases cuya función de halo tiene una convexidad parcial de grado mayor que uno, propiedades de cubrimiento interesantes (teoremas 5.6. y 5.8.) De igual modo, y haciendo uso de las caracterizaciones anteriores, el teorema 5.11. garantiza a un operador que sea de tipo débil restringido φ_s para $\varphi_s(u) = u\,(1 + \lg^+u)^s$, $s \geq 0$, la acotación débil en el espacio $\varphi_{s+1}(L^1)$. El resultado anterior se mejora en el teorema 5.12., donde la acotación débil se amplia al espacio $\varphi_{s+t}(L^1)$ para t mayor que 0. En el primer caso la lectura de cara al problema de la función de halo coincide con la obtenida por M. Guzmán [1975] mediante el método de extrapolación de Yano.

Merece destacar de manera especial, en el estudio sobre medias de operadores que se hace en la sección 5 de este capítulo, el refinamiento y ampliación a espacios de Orlicz (teorema 5.14.) que se da al lema de E.M. Stein y N.J. Weiss [1969], relativo a medias discretas de funciones uniformemente acotadas en $L(1,\infty)$. La nueva versión permite de forma simple (teorema 5.18.) probar que, si un operador con las propiedades del operador maximal es de tipo débil restringido (1,1), entonces es de tipo débil ϕ, siendo $\phi(u) = u\,[1 + \lg^+(\lg^+u)]$. En consecuencia, si la función de halo de una base se comporta como la función identidad, el espacio de derivación es, al menos, $L[1 + \lg^+(\lg^+L)]$. Resultado éste obtenido por R. Moriyón [1978] tras observar que el anterior lema de Stein y Weiss permitía deducir ciertas propiedades de continuidad al operador maximal de tipo débil restringido (1,1) en el espacio $L[1 + \lg^+(\lg^+L)]$

En la última sección del capítulo V se presentan los espacios que hemos llamado $L[\vartheta_s]$ y $L[\bar{\vartheta}_s]$, definidos mediante quasinormas asociadas a la función de distribución y que vienen sugeridos por la modificación que se ha hecho al lema de Stein y Weiss. El interés de estos espacios, que son del tipo de los espacios de Lorentz, queda reflejado en el teorema 5.20., donde se expone que si un operador T con las propiedades del operador maximal es de tipo débil restringido φ_s, entonces verifica la siguiente acotación

$$|\{x:\ Tf(x) > \lambda\}| \le c\ \varphi_s\Big[\|f/\lambda\|_{\bar{\vartheta}_s}\Big].$$

La acotación anterior trae como consecuencia que, si la función de halo de una base no supera a φ_s, entonces el espacio de derivación es mayor que el espacio $L(1 + lg^{+}L)^{s}[1 + lg^{+}(lg^{+}L)]$, tal como se expone en el trabajo de F. Soria [1985], después de obtener acotaciones locales del operador maximal.

Quiero expresar aquí mi más sincero agradecimiento al profesor Baldomero Rubio, de quien he recibido la máxima colaboración y ayuda, que ha hecho posible la realización de este trabajo.

Igualmente hago constar mi gratitud al profesor Miguel de Guzmán y a los profesores del Departamento de Análisis Matemático de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense por tantas muestras de apoyo y oriención recibidas.

CAPITULO I

INTRODUCCION

I.1. Derivada de una medida

El punto de partida para todos los resultados que aparecen en esta Memoria es el teorema clásico de Vitali [1908], cuya demostración puede verse en De Guzmán [1975]. Nos referiremos a $\mathbb{R}^n$, y la medida de Lebesgue de E se designa $|E|$. En $\mathbb{R}^n$ vamos a considerar también otras medidas, y suponemos que son reales aunque muchos resultados tienen validez asimismo para medidas complejas. Si no se indica otra cosa, las expresiones *medible* y *casi todo punto* se refieren a la medida de Lebesgue.

Una **base de diferenciación** queda determinada cuando a cada x de $\mathbb{R}^n$ se asigna una colección $\mathfrak{B}(x)$ de conjuntos acotados de medida positiva a los que x pertenece, y tal que para cada $\rho > 0$ existe algún elemento en $\mathfrak{B}(x)$ que tiene diámetro menor que ρ. La clase formada por las colecciones $\mathfrak{B}(x)$ cuando x recorre $\mathbb{R}^n$, así como la unión de todas ellas, se designan $\mathfrak{B}$. Por ejemplo, $\mathfrak{B}(x)$ puede ser la colección de todos los intervalos cúbicos de centro x. Si $\mathfrak{B}(x)$ es la colección de todos los intervalos cúbicos a los que x pertenece, sea o no su centro, estamos considerando otra base de diferenciación.

Llamaremos base de diferenciación de Busseman-Feller la que está constituida por abiertos acotados de medida positiva, siendo $\mathfrak{B}(x)$ la colección de todos aquellos a los que x pertenece. En general, en esta Memoria nos vamos a referir a bases de Busseman-Feller. Si no se dice otra cosa, así lo supondremos aunque no se indique explícitamente.

Cuando una sucesión R_k de elementos de $\mathfrak{B}(x)$ es tal que sus diámetros convergen a cero, se dice que R_k **se contrae** a x.

Si A es un conjunto arbitrario y $\mathfrak{B}(A)$ es una subcolección de $\mathfrak{B}$ que contiene al menos una sucesión que se contrae a cada punto de A, se dice que $\mathfrak{B}(A)$ es un cubrimiento de Vitali (o una clase de Vitali) para A de elementos de $\mathfrak{B}$.

El teorema de Vitali establece lo siguiente:

Si $\mathfrak{Q}(A)$ es una clase de Vitali para un conjunto A constituida por intervalos cúbicos, entonces existe una sucesión disjunta Q_k de elementos de $\mathfrak{Q}(A)$ tal que

$$|A - \cup Q_k| = 0.$$

Además, fijado $\varepsilon > 0$, la sucesión Q_k puede elegirse para que la medida exterior del conjunto $\cup Q_k - A$ sea menor que ε.

La colección $\mathfrak{Q}$ de todos los intervalos cúbicos de $\mathbb{R}^n$ es la base de diferenciación fundamental, y a ella nos vamos a referir principalmente en este capítulo. El teorema de Vitali es igualmente válido para otras bases $\mathfrak{B}$ que denominaremos **regulares** respecto de $\mathfrak{Q}$ o, simplemente, **regulares**. Esto significa que existe un número positivo α tal que para cada R de $\mathfrak{B}$ hay algún intervalo cúbico Q que contiene a R y verifica $|Q| \le \alpha|R|$.

Suponemos ahora que μ es una medida localmente finita cuya σ-álgebra contiene a la de Lebesgue, y que $\mathfrak{B}$ es una base de diferenciación. Para cada sucesión R_k de elementos de $\mathfrak{B}$ que se contrae a x podemos considerar la sucesión de cocientes

$$\frac{\mu(R_k)}{|R_k|}.$$

Si esta sucesión tiene límite, y es el mismo para cualquier sucesión R_k que se contrae a x, éste se denomina **derivada de μ en x respecto de $\mathfrak{B}$** y se designa $D_{\mathfrak{B}}(\mu,x)$, o simplemente $D(\mu,x)$ si no hay peligro de confusión. Suponiendo que μ es real, esta derivada puede ser finita o no, y es claro, además, que μ es derivable si lo son sus partes positiva y negativa, por lo cual será suficiente analizar la derivabilidad de medidas no negativas.

Un caso especialmente sencillo es que μ sea la integral indefinida de una función continua g. Si $R_k \to x$, puesto que

$$\left[|R_k|^{-1} \int_{R_k} g(y)dy\right] - g(x) = |R_k|^{-1} \int_{R_k} [g(y)-g(x)]dy,$$

resulta también

$$\left|\left[|R_k|^{-1}\int_{R_k} g(y)dy\right] - g(x)\right| \le |R_k|^{-1}\int_{R_k} |g(y)-g(x)|dy,$$

y lo último es menor que ε si el diámetro de R_k es suficientemente pequeño. Esto prueba que la derivada es en este caso la función g. Si μ es la integral de una función localmente integrable, el problema es muy diferente.

En cualquier caso, siempre podemos definir las derivadas superior e inferior de μ respecto de $\mathfrak{B}$, de la forma siguiente:

$$\overline{D}(\mu,x) = \sup\left\{\lim\sup \frac{\mu(R_k)}{|R_k|}\right\}$$

$$\underline{D}(\mu,x) = \inf\left\{\lim\inf \frac{\mu(R_k)}{|R_k|}\right\}$$

en donde el supremo y el ínfimo están tomados sobre todas las sucesiones R_k que se contraen a x. Naturalmente, $\underline{D}(\mu,x) \le \overline{D}(\mu,x)$ y, si se verifica la igualdad, el valor común es la derivada.

Suponiendo que μ tiene derivada finita respecto de una base $\mathfrak{B}$ para casi todo x de $\mathbb{R}^n$, ésta es una función f, y la pregunta natural es si μ es la integral indefinida de f, es decir, si

$$\mu(E) = \int_E f$$

para cada medible E. Cuando así sucede, decimos que **$\mathfrak{B}$ deriva μ**. Debemos destacar, pues, que con la expresión "$\mathfrak{B}$ deriva μ" indicamos no solamente que existe derivada finita para casi todo punto, sino también que la integral indefinida de ésta es μ.

El siguiente teorema ofrece una caracterización de la propiedad anterior para medidas μ que sean absolutamente continuas respecto de la de Lebesgue. Este teorema lo usaremos después en muchas ocasiones, y nos parece un criterio muy útil de diferenciabilidad. Una construcción con algunas analogías, pero realizada en un contexto diferente, puede encontrarse en Mattila [1986].

1.1. Teorema

Sea $\mathfrak{B}$ una base de diferenciación y μ una medida no negativa, localmente finita y absolutamente continua respecto de la de Lebesgue. Las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $\mathfrak{B}$ deriva μ.

b) Si A y B son medibles acotados tales que $A \subset \{x: \overline{D}(\mu,x) \geq \lambda\}$ y $B \subset \{x: \underline{D}(\mu,x) \leq \lambda\}$, $(\lambda > 0)$, entonces

$$|A| \leq \frac{1}{\lambda}\,\mu(A)\ , \quad |B| \geq \frac{1}{\lambda}\,\mu(B).$$

Demostración.

Es inmediato ver que a) implica b), puesto que salvo conjuntos de medida nula se tiene que $A \subset \{x: D(\mu,x) \geq \lambda\}$ y $B \subset \{x: D(\mu,x) \leq \lambda\}$. Así

$$\mu(A) = \int_A D(\mu,.) \geq \lambda|A|, \qquad \mu(B) = \int_B D(\mu,.) \leq \lambda|B|.$$

Suponemos ahora que b) es cierto, y hay que probar, en primer lugar, que μ tiene derivada finita para casi todo punto. Para ello consideramos los conjuntos

$$\{x: \underline{D}(\mu,x) < \overline{D}(\mu,x) < \infty\}, \quad \{x: \overline{D}(\mu,x) = \infty\},$$

y será suficiente demostrar que es 0 la medida de Lebesgue de cada subconjunto acotado M del primero, y de cada subconjunto acotado N del segundo.

A su vez, M es unión numerable de los conjuntos

$$M_{r,s} = \{x \in M : \underline{D}(\mu,x) \leq r < s \leq \overline{D}(\mu,x) < \infty\}$$

en donde r y s son racionales positivos. Por la condición b) resulta

$$(s - r)|M_{r,s}| \leq \mu(M_{r,s}) - \mu(M_{r,s}) = 0$$

y, por ser $s > r$, ha de ser $|M_{r,s}| = 0$ y también $|M| = 0$.

En cuanto a N, está contenido en

$$\{x: \overline{D}(\mu,x) \geq k\}$$

siendo k cualquier número natural, por lo que se verifica

$$|N| \leq \underline{\tfrac{1}{k}\,\mu(N) < \infty}$$

para cada k, y esto prueba que $|N| = 0$.

Así pues, $D(\mu,x)$ existe y es finita para casi todo x.

Veremos ahora que para cada medible E se verifica

$$\mu(E) = \int_E D(\mu,x)dx,$$

y podemos suponer que E es acotado.

Fijado $\rho > 1$, consideramos los conjuntos

$$E_k = \{x \in E : \rho^k \le D(\mu,x) < \rho^{k+1}\}$$

en donde k recorre los números enteros, y también

$$E^0 = \{x \in E : D(\mu,x) = 0\}, \qquad E_\infty = \{x \in E : D(\mu,x) = \infty\}.$$

Salvo un conjunto de medida de Lebesgue 0, la unión de todos ellos es E.

Por lo que ya hemos probado, y por ser μ absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue, será

$$\mu(E_\infty) = |E_\infty| = 0$$

y, puesto que E^0 está contenido en $\{x\colon D(\mu,x) < 1/k\}$ para todo k, resulta

$$\mu(E^0) \le \frac{1}{k}\,|E^0|$$

y así $\mu(E^0) = 0$. Por estas razones,

$$\mu(E) = \sum \mu(E_k).$$

Teniendo b) otra vez en cuenta, resulta también

$$\rho^k|E_k| \le \mu(E_k) \le \rho^{k+1}|E_k|,$$

y

$$\int_E D(\mu,x)dx = \sum \int_{E_k} D(\mu,x)dx \le \sum \rho^{k+1}|E_k| \le \rho \sum \mu(E_k) = \rho\ \mu(E).$$

En el sentido inverso,

$$\int_E D(\mu,x)dx = \sum \int_{E_k} D(\mu,x)dx \ge \sum \rho^k|E_k| \ge \frac{1}{\rho} \sum \mu(E_k) = \frac{1}{\rho}\ \mu(E).$$

Si $\rho \to 1$, de estas dos desigualdades resulta finalmente

$$\mu(E) = \int_E D(\mu, x)dx.$$

Esto completa la demostración.

Si f es una función no negativa y localmente integrable, su integral indefinida $\int f$ es una medida no negativa, localmente finita y absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue. Para $\int f$ se puede utilizar el teorema anterior, y la condición b) es en este caso la siguiente:

Si A y B son medibles acotados tales que $A \subset \{x: \overline{D}(\int f, x) \geq \lambda\}$ y $B \subset \{x: \underline{D}(\int f, x) \leq \lambda\}$, $(\lambda > 0)$, entonces

$$|A| \leq \frac{1}{\lambda} \int_A f, \quad |B| \geq \frac{1}{\lambda} \int_B f.$$

El teorema expresa que esta condición es equivalente a que la base $\mathfrak{B}$ deriva a $\int f$, es decir, que existe y es finita para casi todo x la dederivada $D(\int f, x)$ y la integral indefinida de ésta es f. Nótese que ello significa que $D(\int f, x) = f(x)$ para casi todo x, pues vamos a probar a continuación que dos funciones no negativas f y g que tienen la misma integral indefinida coinciden en casi todo punto. Es suficiente comprobar que tienen medida de Lebesgue 0 los medibles acotados E contenidos en los conjuntos

$$\{x: g(x) \leq r < s \leq f(x)\}, \quad \{x: g(x) \geq s > r \geq f(x)\},$$

en donde se supone que r y s son positivos. Si E está contenido en el primero, resulta

$$0 \leq s|E| \leq \int_E f = \int_E g \leq r|E| < \infty,$$

y si E está contenido en el segundo,

$$\infty > r|E| \geq \int_E f = \int_E g \geq s|E| \geq 0.$$

En ambos casos, por ser $s > r$, todos los términos de las desigualdades deben ser ceros, y también $|E| = 0$.

La condición $\mathfrak{B}$ **deriva** $\int f$ significa, pues, que para casi todo x existe la derivada y $D(\int f, x) = f(x)$.

Del análisis del teorema 1.1. se deducen las observaciones siguientes:

1. Si lo que se pretende es probar solamente que $\int f$ tiene derivada respecto de una base $\mathfrak{B}$ pero no que la derivada coincida con f, basta encontrar una función g no negativa y localmente integrable tal que, si A y B son acotados medibles que verifican

$$A \subset \{x: \overline{D}(\int f, x) > \lambda\}, \qquad B \subset \{x: \underline{D}(\int f, x) < \lambda\},$$

resulte

$$|A| \le \frac{1}{\lambda} \int_A g, \qquad |B| \ge \frac{1}{\lambda} \int_B g.$$

En tal caso la derivada de $\int f$ coincide con g en casi todo punto.

2. Si de una base $\mathfrak{B}$ conocemos alguna propiedad, por ejemplo, que deriva las integrales de funciones acotadas, entonces el criterio establecido en el teorema 1.1. para asegurar que $\mathfrak{B}$ deriva a la integral de una función f no negativa y localmente integrable puede simplificarse un poco. En esta situación, puesto que f puede aproximarse mediante una sucesión no decreciente f_k de funciones acotadas, resulta que $f_k \le \underline{D}(\int f)$ para cada k, por lo cual también es $f \le \underline{D}(\int f)$ y de aquí se obtiene fácilmente que se verifica el citado criterio por lo que respecta a la derivada inferior. Sólo resta, pues, probar lo relativo a la derivada superior.

3. Si suponemos ahora que la base $\mathfrak{B}$ contiene una subbase que deriva $\int f$, entonces resultará que $\underline{D}(\int f) \le f \le \overline{D}(\int f)$ en casi todo punto, por lo que la derivada será f si es que existe. En casos como éste es aplicable la observación efectuada en 1. Para una base invariante por homotecias se puede utilizar lo anterior, ya que contiene a la subbase de los homotéticos de un conjunto fijado y ésta es regular respecto de los intervalos cúbicos.

I.2. Derivación respecto de intervalos cúbicos. Los teoremas de Lebesgue y de Radon-Nikodym

Nos referiremos ahora a la base $\mathfrak{Q}$ de los intervalos cúbicos, o a cualquier otra $\mathfrak{B}$ que sea regular respecto de ella. Como hemos indicado antes, estas bases verifican el teorema de Vitali, y en ello nos vamos a apoyar para obtener un resultado de diferenciación del mayor alcance posible. Consideramos de nuevo una medida no negativa μ localmente finita y absolutamente continua respecto de la de Lebesgue. Si $\mathfrak{B}(E)$ es una clase de Vitali para E, podemos extraer de ella una sucesión disjunta R_k tal que $|E - \cup R_k| = 0$. Vamos a ver ahora que cuando E es un medible acotado se puede conseguir además, fijado $\varepsilon > 0$, que sea $\mu(\cup R_k - E) < \varepsilon$, es decir, la sucesión R_k cubre a casi todo E y lo que excede tiene μ-medida arbitrariamente pequeña. En términos precisos el resultado es el siguiente:

1.2. Teorema

Sea $\mathfrak{B}$ una base de diferenciación regular respecto de la base de los intervalos cúbicos, y sea μ una medida no negativa, localmente finita y absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue. Entonces, fijados $\varepsilon > 0$ y un medible acotado E, de cada clase de Vitali para E contenida en $\mathfrak{B}$ se puede extraer una sucesión disjunta R_k tal que

$$|E - \cup R_k| = 0, \quad \mu(\cup R_k - E) < \varepsilon.$$

Demostración.

Consideramos un intervalo abierto acotado I que contenga a E. Para la restricción de la medida μ a I la continuidad absoluta significa que existe algún $\delta > 0$ tal que $\mu(P) < \varepsilon$ si P está contenido en I y $|P| < \delta$. Se toma entonces un abierto G tal que $E \subset G \subset I$ y $|G - E| < \delta$, y restringimos la clase de Vitali de E que estamos considerando para que todos sus miembros estén contenidos en G. La aplicación del teorema de Vitali nos proporciona entonces una sucesión disjunta R_k tal que $|E - \cup R_k| = 0$ y el conjunto $\cup R_k - E$ está contenido en G-E, por lo cual

$$\mu(\cup R_k - E) \leq \mu(G-E) < \varepsilon.$$

Esto completa la demostración.

Los dos teoremas anteriores los vamos a utilizar para obtener de forma muy directa el siguiente resultado, que expresa la propiedad de diferenciación que tienen las bases regulares respecto de intervalos cúbicos.

1.3. Teorema

Si $\mathfrak{B}$ es una base regular respecto de intervalos cúbicos y μ es una medida localmente finita y absolutamente continua respecto de la de Lebesgue, entonces $\mathfrak{B}$ deriva μ.

Demostración.

De acuerdo con la observación que hicimos antes, podemos suponer que μ es no negativa, y utilizaremos el criterio establecido en el teorema 1.1.

Sea $\lambda > 0$, y A un medible acotado contenido en $\{x: \overline{D}(\mu,x) \geq \lambda\}$. Siendo δ cualquier número positivo menor que λ, la familia

$$\mathfrak{B}(A) = \{R \in \mathfrak{B}: \quad \mu(R) > (\lambda-\delta)|R|\}$$

es una clase de Vitali para A. Fijado $\varepsilon > 0$, existe una sucesión disjunta R_k de miembros de $\mathfrak{B}(A)$ tal que

$$|A-\cup R_k| = 0; \quad \mu(\cup R_k - A) < \varepsilon; \qquad \mu(R_k) > (\lambda-\delta)|R_k| \quad \text{para cada k}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |A| \leq |\cup R_k| &= \sum |R_k| \leq \frac{1}{\lambda-\delta} \sum \mu(R_k) = \frac{1}{\lambda-\delta}\, \mu(\cup R_k) \\ &= \frac{1}{\lambda-\delta}\, \mu(\cup R_k - A) + \frac{1}{\lambda-\delta}\, \mu(\cup R_k \cap A) \\ &= \frac{1}{\lambda-\delta}\, \mu(\cup R_k - A) + \frac{1}{\lambda-\delta}\, \mu(A) - \frac{1}{\lambda-\delta}\, \mu(A-\cup R_k) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\lambda-\delta} + \frac{1}{\lambda-\delta}\, \mu(A). \end{aligned}$$

Puesto que ε y δ son arbitrarios, resulta

$$|A| \leq \frac{1}{\lambda}\, \mu(A).$$

Sea ahora B un medible acotado contenido en $\{x: \underline{D}(\mu,x) \leq \lambda\}$. Si δ es un número positivo arbitrario, la familia

$$\mathfrak{B}(B) = \{R \in \mathfrak{B}: \mu(R) < (\lambda+\delta)|R|\}$$

es una clase de Vitali para B. Fijado $\varepsilon > 0$, existe en $\mathfrak{B}(B)$ una sucesión disjunta R_k tal que

$$|B-\cup R_k| = 0, \quad |\cup R_k - B| < \varepsilon, \quad \mu(R_k) < (\lambda+\delta)|R_k| \quad \text{para cada } k\ ,$$

y al ser μ absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue, también es $\mu(B-\cup R_k) = 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\mu(B) &\le \mu(\cup R_k) = \sum \mu(R_k) \\
&\le (\lambda+\delta) \sum |R_k| = (\lambda+\delta)|\cup R_k| \\
&= (\lambda+\delta)|\cup R_k - B| + (\lambda+\delta)|B| - (\lambda+\delta)|B-\cup R_k| \\
&\le (\lambda+\delta)\varepsilon + (\lambda+\delta)|B|
\end{aligned}$$

Puesto que ε y δ son arbitrarios, resulta

$$\mu(B) \le \lambda|B|.$$

Esto completa la demostración.

Del teorema anterior se obtienen dos consecuencias. Por una parte, si μ es una medida localmente finita y absolutamente continua respecto de la de Lebesgue, existe su derivada $D(\mu,x)$ respecto de intervalos cúbicos para casi todo x, y esta derivada es una función f tal que

$$\mu(E) = \int_E f$$

para cada medible E. Este es el teorema de Radon-Nikodym

Por otra parte, si f es localmente integrable, la integral indefinida de f, es decir, la medida $\int f$ tal que $(\int f)(E) = \int_E f$ para cada medible E, es localmente finita y absolutamente continua respecto de la de Lebesgue. Existe por tanto la derivada $D(\int f,x)$ respecto de intervalos cúbicos para casi todo x, y

$$\left(\int f\right)(E) = \int_E f = \int_E D\left(\int f,x\right)dx$$

para cada medible E. En consecuencia, es $D(\int f,x) = f(x)$ para casi todo x. Este es el teorema de Lebesgue de diferenciación.

I.3. Espacios de Orlicz

En esta Memoria vamos a considerar distintos espacios de funciones localmente integrables y, en particular, pondremos especial énfasis en espacios de Orlicz, de los que vamos a describir ahora las propiedades que usaremos.

Llamaremos función de Orlicz a una función φ definida en $\mathbb{R}^+$ y con valores en $\mathbb{R}^+$ tal que para cada α del intervalo $[0,1]$ y cada $u \geq 0$ verifica

$$\varphi(\alpha u) \leq \alpha\, \varphi(u) \tag{1}$$

De la condición anterior resulta

a) $\varphi(0) = 0$.

b) φ es no decreciente, puesto que si $u \leq v$, entonces

$$\varphi(u) = \varphi\left[\frac{u}{v}\, v\right] \leq \frac{u}{v}\, \varphi(v) \leq \varphi(v).$$

c) La función $\bar{\varphi}$ definida por $\bar{\varphi}(0) = 0$ y $\bar{\varphi}(u) = \varphi(u)/u$ para $u > 0$ es también no decreciente ya que, si $0 < u \leq v$, entonces

$$\bar{\varphi}(u) = \frac{\varphi(u)}{u} = \frac{\varphi[(u/v)v]}{u} \leq \frac{(u/v)\varphi(v)}{u} = \frac{\varphi(v)}{v} = \bar{\varphi}(v).$$

La propiedad c) caracteriza a las funciones de Orlicz puesto que, si $\bar{\varphi}$, definida en $\mathbb{R}^+$ y con valores en $\mathbb{R}^+$, es no decreciente y no nula, entonces la función

$$\varphi(u) = u\, \bar{\varphi}(u) \tag{1'}$$

verifica claramente la condición (1). Esto permite manejar las funciones de Orlicz de la forma que se indica en (1'). En un sentido más amplio, si $\bar{\varphi}$ es no decreciente y no nula, la función φ definida por

$$\varphi(u) = u^p\, \bar{\varphi}(u), \tag{2}$$

siendo $p \geq 1$, la llamaremos también función de Orlicz, y para cada α del intervalo $[0,1]$ y cada $u \geq 0$ se verifica ahora

$$\varphi(\alpha u) \leq \alpha^p\, \varphi(u).$$

Y recíprocamente, si φ es una función que verifica esta última propiedad, entonces admite una expresión de la forma indicada en (2).

Son ejemplos de funciones de Orlicz

$$\varphi(u) = u^p(1 + \lg^+ u)^s, \qquad \varphi(u) = u^{p-1} \exp (u^s)$$

donde es $p \geq 1$ y $s \geq 0$.

En cambio, funciones no decrecientes como, por ejemplo,

$$\varphi(u) = u^{1/2}; \quad \varphi(u) = \exp(-1/u)$$

no serán consideradas en esta Memoria funciones de Orlicz.

Como es habitual, designaremos $L(\mathbb{R}^n)$, o bien L, el espacio de las funciones definidas en $\mathbb{R}^n$ que son localmente integrables, y $L^1(\mathbb{R}^n)$ o L^1 designa al espacio de las que tienen integral finita en $\mathbb{R}^n$.

Dada una función de Orlicz φ, el espacio de las funciones f definidas en $\mathbb{R}^n$ tales que $\varphi(|f|)$ es localmente integrables se designa $\varphi(L)$. Es decir,

$$\varphi(L) = \{f: \varphi(|f|) \in L\},$$

y nos referiremos a él como la clase o el espacio de Orlicz asociado a φ. Análogamente, $\varphi(L^1)$ designará al espacio de funciones f tales que $\varphi(|f|)$ tiene integral finita en $\mathbb{R}^n$.

El comportamiento en el infinito de dos funciones de Orlicz decide la posible inclusión de los correspondientes espacios.

1.4. Teorema

Sean $\varphi(L)$ y $\psi(L)$ los espacios de Orlicz asociados a las funciones φ y ψ. Son equivalentes

i) existen $c > 0$ y u_0 tales que $\psi(u) \leq c\,\varphi(u)$ si $u \geq u_0$,

ii) $\varphi(L) \subset \psi(L)$.

Demostración

Para probar que i) implica ii) elegimos f en $\varphi(L)$ y E de medida finita, y consideramos el conjunto $A = \{x \in E: |f(x)| \geq u_0\}$. Se tiene

$$\int_E \psi(|f|) = \int_{E-A} \psi(|f|) + \int_A \psi(|f|) \leq$$

$$\leq \psi(u_0)\ |E-A| + c \int_A \varphi(|f|) < \infty,$$

lo que prueba ii).

Si i) es falso y $\varphi(1) \neq 0$, para $k = 1, 2, \ldots$ existe $u_k > 1$, tal que

$$\psi(u_k) > 2^k \varphi(u_k).$$

Podemos elegir en la bola unidad B una sucesión disjunta de medibles B_k tales que

$$|B_k| = \frac{\varphi(1)}{2^k \varphi(u_k)}.$$

Si ahora tomamos $f = \sum u_k \chi_{B_k}$, resulta

$$\int_B \varphi(f) = \sum \varphi(u_k) |B_k| = \sum \frac{\varphi(1)}{2^k} \le \varphi(1)$$

$$\int_B \psi(f) = \sum \psi(u_k) |B_k| \ge \sum 2^k \varphi(u_k) |B_k| = \infty$$

y ii) es falso.

Como consecuencia inmediata del teorema precedente resulta que

$$\varphi(L) \subset L$$

para cualquier función de Orlicz φ, puesto que si $c = \bar{\varphi}(u_0) \neq 0$, resulta

$$\varphi(u) = u\,\bar{\varphi}(u) \ge c\,u\,; \qquad u \ge u_0.$$

Es deseable en muchas ocasiones que el espacio de Orlicz $\varphi(L)$ sea un espacio vectorial, y así sucede si φ verifica la propiedad *del doble*, es decir, existen $c > 0$ y u_0 tales que

$$\varphi(2u) \le c\,\varphi(u); \qquad u \ge u_0.$$

Se dice entonces que φ verifica la condición Δ_2, o que φ es Δ_2.

1.5. Teorema

Sea φ una función de Orlicz. Son equivalentes

i) φ es Δ_2

ii) $\varphi(L)$ es un espacio vectorial.

Demostración

Supongamos que φ es Δ_2, y fijemos E de medida finita y funciones f y g en $\varphi(L)$. Consideramos el conjunto

$$A = \{x \in E:\ |f(x)| \leq |g(x)|\}.$$

Resulta

$$\int_E \varphi(|f| + |g|) \leq \int_A \varphi(2|g|) + \int_{E-A} \varphi(2|f|)$$
$$\leq c\int_E \varphi(|g|) + c\int_E \varphi(|f|) < \infty .$$

Por otra parte, si $\lambda > 0$ y tomamos un entero k tal que $\lambda \leq 2^k$, resulta $\varphi(\lambda u) \leq \varphi(2^k u) \leq c^k\varphi(u)$, lo cual permite probar que, si $f \in \varphi(L)$, entonces $\lambda f \in \varphi(L)$. Así se obtiene que $\varphi(L)$ es un espacio vectorial.

Recíprocamente, si $f \in \varphi(L)$, entonces $2f \in \varphi(L)$; esto significa que, si tomamos $\varphi_1(u) = \varphi(2u)$, resulta $\varphi(L) \subset \varphi_1(L)$ y por el teorema 1.4. existen $c > 0$ y u_0 tales que

$$\varphi_1(u) = \varphi(2u) \leq c\varphi(u); \quad u \geq u_0,$$

por lo cual φ es Δ_2.

I.4. Funciones de Young.

Dos funciones de Orlicz distintas pueden dar lugar al mismo espacio de Orlicz. Las funciones $\varphi_1(u) = u$ y $\varphi_2(u) = u \exp(-1/u)$ definen ambas el mismo espacio L, puesto que son asintóticamente iguales. Una función de Orlicz φ diremos que es una *función de Young* si la función no decreciente $\varphi(u)/u$ es además no acotada, por lo que

$$\lim_{u \to \infty} \frac{\varphi(u)}{u} = \infty.$$

Por tanto, una función de Young puede expresarse bajo la forma

$$\varphi(u) = u\, \bar{\varphi}(u)$$

donde $\bar{\varphi}$ es no decreciente y no acotada.

Por aplicación del teorema 1.4. es claro que, si φ es una función de Young, entonces $\varphi(L) \subset L$. Este contenido es además estricto, puesto que si $L = \varphi(L)$ existirían $c > 0$ y u_0 tales que $\varphi(u) \le c\, u$; $u \ge u_0$, lo cual contradice la condición exigida a φ.

El comentario anterior no se opone al siguiente resultado.

1.6. Teorema

Si $f \in L^1$, existe una función de Young φ tal que $f \in \varphi(L^1)$. Es decir, $L^1 = \cup\{ \varphi(L^1)$: φ función de Young$\}$

Demostración

Sean $A = \{x: |f(x)| < 1\}$; $B = \{x: |f(x)| \ge 1\}$. Para $k = 1, 2, \dots$ consideramos los conjuntos

$$B_k = \{x \in B: 2^{k-1} \le |f(x)| < 2^k\}.$$

Puesto que $f \in L^1$, la serie $\sum 2^k |B_k|$ converge, ya que

$$\sum 2^k |B_k| = 2 \sum 2^{k-1} |B_k| \le 2 \int_B |f| < \infty.$$

Existe una sucesión no decreciente y no acotada u_k de números reales tal que $u_k \ge 1$ para cada k y que verifica

$$\sum 2^k \, u_k \, |B_k| < \infty.$$

Si consideramos ahora la función $\varphi(u) = u \, \bar{\varphi}(u)$, siendo

$$\bar{\varphi}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le u \le 1 \\ u_k & \text{si} \quad 2^{k-1} < u \le 2^k \end{cases},$$

resulta

$$\begin{aligned} \int \varphi(|f|) &= \int_A \varphi(|f|) + \int_B \varphi(|f|) \\ &\le \int_A |f| + \sum \varphi(2^k) \, |B_k| \\ &\le \int_A |f| + \sum 2^k \, u_k \, |B_k| < \infty . \end{aligned}$$

Así $f \in \varphi(L_1)$ y el teorema es cierto.

Con el mismo razonamiento que en el teorema precedente se prueba que L^p, $p \ge 1$, se puede considerar como la unión de los espacios $\varphi(L^1)$ cuando φ recorre las funciones de Young de la forma

$$\varphi(u) = u^p \, \bar{\varphi}(u),$$

siendo $\bar{\varphi}$ no decreciente y no acotada.

Diremos que dos funciones de Young φ, ψ *son complementarias* si verifican la desigualdad

$$u \, v \le \varphi(u) + \psi(v) \; ; \quad u \ge u_0 \quad v \ge v_0$$

llamada *desigualdad de Young.*

A una función de Young ψ, podemos asociar su *conjugada Young* φ que viene definida por

$$\varphi(u) = \sup_{v \ge 0} \{u \, v - \psi(v)\}.$$

Es fácil ver que φ es tambien función de Young y tiene por conjugada a la propia ψ. En consecuencia, dos funciones son complementarias si una de ellas mayora la conjugada Young de la otra.

Los siguientes ejemplos son pares de funciones conjugadas Young

i) $\varphi(u) = u^p/p, \quad p > 1$

$\psi(v) = v^q/q, \quad p+q = pq$

ii) $\varphi(u) = u \log^+ u$

$$\psi(v) = \begin{cases} \exp(v-1) & \text{si } v > 1 \\ v & \text{si } 0 \leq v \leq 1 \end{cases} .$$

En general no resulta fácil determinar la conjugada Young de una función, salvo en ejemplos como los anteriores. En cambio, no resulta difícil reconocer si dos funciones son complementarias. A continuación se expone una condición necesaria para que dos funciones sean conjugadas, y una condición suficiente para que dos funciones sean complementarias.

1.7. Teorema

Si dos funciones Young φ, ψ continuas por la izquierda son conjugadas, entonces verifican la siguiente relación

$$\psi\left[\frac{\varphi(u)}{u}\right] \leq \varphi(u) \; ; \quad u \geq 0.$$

Demostración

Se observa, en primer lugar, que la relación establecida en el teorema es equivalente a la siguiente

$$\bar{\psi}\,[\bar{\varphi}(u)] \leq u; \; u \geq 0,$$

donde $\bar{\psi}$, $\bar{\varphi}$ son las funciones no decrecientes y no acotadas asociadas a ψ y a φ de la forma

$$\psi(u) = u\,\bar{\psi}(u); \quad \varphi(u) = u\,\bar{\varphi}(u)$$

y que ahora suponemos además continuas por la izquierda.

Fijado $u \geq 0$, el conjunto $A = \{v: \psi(v) > uv\}$ no es vacío por ser $\bar{\psi}$ no acotada. Si $\bar{v}$ es el ínfimo de A, dada la continuidad de ψ por la izquierda, ha de ser $\psi(\bar{v}) \leq u\,\bar{v}$. Resulta

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \sup_{v \geq 0} [uv - \psi(v)] \\ &\leq \sup_{v \leq \bar{v}} [uv - \psi(v)] + \sup_{v > \bar{v}} [uv - \psi(v)]\end{aligned}$$

$$\le \sup_{v \le \bar{v}} [uv - \psi(v)] \le u\bar{v}$$

De lo anterior se obtiene que $\bar{\varphi}(u) \le \bar{v}$, y de ser $\bar{\psi}$ no decreciente resulta que $\bar{\psi}\ [\bar{\varphi}(u)] \le \bar{\psi}(\bar{v}) \le u$. Esto completa la demostración.

1.8. Teorema

Si dos funciones de Young φ y ψ verifican la relación

$$\psi\left[\frac{\varphi(u)}{u}\right] \ge \varphi(u), \qquad u \ge u_0,$$

entonces son complementarias y cumplen la desigualdad de Young, siendo en este caso $uv \le \varphi(u) + \psi(v)$ para $u \ge u_0$ y $v \ge 0$.

Demostración

La relación expresada en el teorema equivale a la siguiente

$$\bar{\psi}\ [\bar{\varphi}(u)] \ge u, \quad u \ge u_0.$$

Sean $u \ge u_0$ y $v \ge 0$. Si $v \le \bar{\varphi}(u)$, es claro que $uv \le u\,\bar{\varphi}(u)$. Si $v > \bar{\varphi}(u)$, entonces $\bar{\psi}(v) \ge \bar{\psi}\ [\bar{\varphi}(u)] \ge u$, por lo cual es $v\,\bar{\psi}(v) \ge vu$. En cualquier caso se verifica para $u \ge u_0$ y $v \ge 0$

$$uv \le \varphi(u) + \psi(v)$$

y el teorema es cierto.

Como aplicación de lo anterior resulta que, si $\bar{\varphi}$ es no decreciente y no acotada, podemos definir su inversa *generalizada* $\bar{\psi}$ de la siguiente forma

$$\bar{\psi}(v) = \text{ínf}\ \{u > 0:\ \bar{\varphi}(u) > v\}\ ; \quad v \ge 0.$$

Resulta que $\bar{\psi}$ es también no decreciente y no acotada y se tiene que

$$\bar{\psi}\ [\bar{\varphi}(u)] \ge u.$$

En consecuencia, las funciones

$$\varphi(u) = u\,\bar{\varphi}(u)\ ; \quad \psi(u) = u\,\bar{\psi}(u)$$

son complementarias.

En particular, si $s > 0$, las funciones de la forma

$$\varphi(u) = u\,(\lg^{+}u)^{s} \quad ; \qquad \psi(v) = v\,\exp(v^{1/s})$$

verifican la desigualdad de Young.

1.9 Teorema

Sean φ una función de Young continua y ψ su conjugada. Consideramos la función de Young ψ_1 que verifica

$$\psi_1\left[\frac{\varphi(u)}{u}\right] = \varphi(u), \quad u \geq u_0.$$

Entonces ψ_1 y φ son complementarias y resulta además

$$\psi(v) \leq \psi_1(v) \leq \psi(2v); \quad v \geq v_0.$$

Demostración

Por el teorema 1.8. es claro que ψ_1 y φ son complementarias. Por tanto ψ_1 mayora a ψ. Por otra parte, a cada $\bar{v} \geq 0$ podemos asociar el número $\bar{u}$ definido por

$$\bar{u} = \inf\{u:\ \varphi(u) > \psi(2\bar{v})\}.$$

Por la continuidad ha de ser $\varphi(\bar{u}) = \psi(2\bar{v})$. Además

$$\bar{u}\,2\bar{v} \leq \varphi(\bar{u}) + \psi(2\bar{v}) = 2\,\varphi(\bar{u}).$$

es decir

$$\bar{v} \leq \varphi(\bar{u})/\bar{u}$$

Si consideramos los valores de $\bar{v}$ para los que $\bar{u}$ es mayor que u_0, se tiene

$$\psi_1(\bar{v}) \leq \psi_1[\varphi(\bar{u})/\bar{u}\ ] = \varphi(\bar{u}) = \psi(2\bar{v}).$$

Esto completa la demostración

De lo anterior se deduce que a una función de Young φ continua podemos asociar su conjugada Young ψ y la conjugada Young *trivializada* ψ_1 que viene dada por

$$\psi_1\left[\frac{\varphi(u)}{u}\right] = \varphi(u).$$

Las funciones ψ y ψ_1 son asintóticamente iguales si ψ es Δ_2. En cualquier caso se relacionan de la forma

$$\psi(v) \le \psi_1(v) \le \psi(2v)$$

tal como se indica en el teorema, lo que permite sustituir en la mayoría de los casos una función por otra.

Para la función $\varphi(u) = u \log^+ u$, su conjugada Young es

$$\psi(v) = \exp(v-1) \ , \ v > 1,$$

y la conjugada Young trivializada es

$$\psi_1(v) = v \exp(v).$$

CAPITULO 2

PROPIEDADES DE DERIVACION Y DE CUBRIMIENTO DE LAS BASES DE DENSIDAD

Una mínima condición que se debe pedir a una base de diferenciación es que derive a las integrales de las funciones características de los conjuntos medibles. Si así sucede, se dice que es una base de densidad.

Es decir, si $\mathfrak{B}$ es base de densidad, E es medible, y R_k es una sucesión de elementos de $\mathfrak{B}$ que se contrae a x, resulta para casi todo x

$$\lim \frac{|R_k \cap E|}{|R_k|} = \lim \frac{1}{|R_k|} \int_{R_k} \chi_E = \chi_E(x).$$

Es claro que la base $\mathfrak{Q}$ de los intervalos cúbicos en $\mathbb{R}^n$, así como cualquier base regular respecto de $\mathfrak{Q}$, es de densidad. Para otras familias de conjuntos, aunque tengan propiedades geométricas simples, no resulta en general fácil ver si tienen la propiedad de densidad.

Desde que Banach [1924] y casi al mismo tiempo Bohr prueban que la base de intervalos de $\mathbb{R}^2$ no verifica la propiedad de Vitali de cubrimiento, la teoria de diferenciación de integrales inicia la búsqueda de técnicas nuevas que permitan deducir las posibilidades de diferenciación de una base tomando como referencia la de los intervalos de $\mathbb{R}^n$. El primer resultado positivo fue obtenido por Saks [1933], que confirma la propiedad de densidad para los intervalos (strong density theorem) y establece, dos años más tarde, una limitación a la capacidad de derivación de esta base probando que para casi toda (en el sentido de las categorías de Baire) función de L^1 la derivada superior es infinita (Saks rarity theorem).

Sin embargo, la familia de los rectángulos en $\mathbb{R}^2$ no es base de densidad, resultado que aparece relacionado con la construcción de ciertos conjuntos medibles de original geometría (árbol de Perron y conjunto de

Nikodym). No trataremos en esta Memoria los interesantes problemas que se plantean en relación con la base de los rectángulos de $\mathbb{R}^n$.

Las bases de densidad fueron caracterizadas por De Posell [1936] mediante una propiedad de cubrimiento análoga a la de Vitali. Este resultado hizo pensar en la existencia de cierta relación de dualidad entre las propiedades de diferenciación y las de cubrimiento de una base. Trataremos en este capítulo estas cuestiones, presentadas en un marco de relativa generalidad.

En primer lugar, se ofrece una caracterización de las bases de densidad que afecta a las derivadas superior e inferior de la función característica de un conjunto medible, y se da una prueba muy sencilla de que una base de densidad deriva las integrales de funciones de L_∞.

En segundo lugar, se analizan las condiciones precisas para que una base de densidad derive a una medida localmente finita y absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue (o bien, a la integral de una función localmente integrable). Se va a obtener como consecuencia la propiedad de De Possel de cubrimiento, así como un criterio de derivación que impone una acotación local de tipo débil (1,1) a la derivada superior.

Por último, se generaliza a funciones de Young la estrecha relación que existe entre las propiedades de derivación de una base y las propiedades de cubrimiento de sus elementos.

II.1. Bases de densidad. Caracterización

En el teorema que sigue se exponen distintos criterios que permiten reconocer si una base es de densidad.

2.1. Teorema

Sea $\mathfrak{B}$ una base de diferenciación en $\mathbb{R}^n$. Son equivalentes:

a) $\mathfrak{B}$ es base de densidad

b) $\mathfrak{B}$ deriva las integrales de las funciones de L_∞

c) Si E es medible, entonces $\overline{D}(\int\chi_E,x) = 0$ ctx $\in R^n-E$

d) Si E es medible, entonces $\underline{D}(\int\chi_E,x) = 1$ ctx $\in$ E.

Demostración

Sea $\mathfrak{B}$ base de densidad, y $f \in L_\infty$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $0 \le f < 1$. Existe una sucesión no decreciente $\{s_k\}$ de funciones simples no negativas (combinaciones lineales finitas de conjuntos no necesariamente de medida finita) que converge uniformemente a f. por tanto, para $\varepsilon > 0$, existe k tal que $s_k \le f < s_k + \varepsilon$, y puesto que $\mathfrak{B}$ deriva también a las integrales de funciones simples, resulta para casi todo x

$$\begin{aligned}\overline{D}(\int f,x) &\le \overline{D}(\int(s_k+\varepsilon),x)\\ &= s_k(x) + \varepsilon\\ &\le f(x) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Asímismo

$$\begin{aligned}\underline{D}(\int f,.x) &\ge \underline{D}(\int s_k,x)\\ &= s_k(x) > f(x) - \varepsilon.\end{aligned}$$

Se concluye de lo anterior que $D(\int f,x) = f(x)$ para casi todo x, por lo que b) es cierto.

Que b) implica c) es inmediato, porque χ_E es acotada y evidentemente resulta para casi todo x de $\mathbb{R}^n- E$

$$\overline{D}(\int\chi_E,x) = D(\int\chi_E,x) = \chi_E(x) = 0.$$

Para probar que c) implica d) basta observar que

$$\frac{|R\cap E|}{|R|} + \frac{|R\cap(\mathbb{R}^n - E)|}{|R|} = 1,$$

por lo cual se obtiene

$$\underline{D}(\int\chi_E, x) + \overline{D}(\int\chi_{\mathbb{R}^n - E}, x) = 1$$

y teniendo en cuenta c)

$$\underline{D}(\int\chi_E, x) = 1 - \overline{D}(\int\chi_{\mathbb{R}^n - E}, x) = 1$$

para casi todo x de E.

Por último, si c) es cierto y E es medible, resulta para casi todo x de E

$$1 = \underline{D}(\int\chi_E, x) \le \overline{D}(\int\chi_E, x) \le 1.$$

Así $D(\int\chi_E, x) = 1$, y por paso al complementario se tiene también para casi todo x de $\mathbb{R}^n - E$ que $D(\int\chi_E, x) = 0$, por lo que a) se cumple. Esto completa la demostración.

II.2. Bases de densidad. Derivada de una medida

Para cualquier sucesión de medibles R_k podemos considerar la función de solapamiento

$$\sigma = \sum_k \chi_{R_k} - \chi_{\cup R_k}$$

Si es $\sigma = 0$, entonces la sucesión R_k es disjunta. Cuando $\sigma \in L_\infty$, cada elemento de $\mathbb{R}^n$ está a lo más en un número finito y fijo de términos de la sucesión. La propiedad de cubrimiento de Vitali para una base $\mathfrak{B}$ regular respecto a intervalos cúbicos puede formularse así

"Dados A medible acotado, $\mathfrak{B}(A)$ clase de Vitali para A contenida en $\mathfrak{B}$, y $\varepsilon > 0$, existe una sucesión R_k en $\mathfrak{B}(A)$ tal que, si σ es la función de solapamiento, se verifica

$$|A - \cup R_k| = 0, \qquad |\cup R_k - A| < \varepsilon, \qquad \|\sigma\|_\infty \le \varepsilon \text{"}$$

La propiedad de cubrimiento de De Possel anteriormente citada, que caracteriza las bases de densidad, es del mismo tipo que la de Vitali, con la diferencia que ahora la función σ tiene norma en L^1 acotada por ε. El próximo teorema ofrece varios criterios para reconocer si la integral de una función localmente integrable tiene derivada respecto de una base que, al menos, sea de densidad. Entre estos criterios figura una propiedad de cubrimiento del que se obtiene como consecuencia el resultado de De Possel.

2.2. Teorema

Sea $\mathfrak{B}$ una base de densidad en $\mathbb{R}^n$ y f no negativa y localmente integrable. Son equivalentes:

a) $\mathfrak{B}$ deriva $\int f$

b) Si E es medible, entonces $\overline{D}(\int f\chi_E, x) = 0$ para casi todo x de $\mathbb{R}^n - E$

c) Dados A de medida finita, $\mathfrak{B}(A)$ clase de Vitali para A contenida en $\mathfrak{B}$, y $\varepsilon > 0$, existe en $\mathfrak{B}(A)$ una sucesión R_k tal que, si σ es la función de solapamiento, se verifica

$$\text{i) } |A - \cup R_k| = 0, \quad \text{ii) } |\cup R_k - A| < \varepsilon, \quad \text{iii) } \int (f\sigma) < \varepsilon$$

d) Si A es acotado medible contenido en $\{x: \overline{D}(\int f, x) \ge \lambda\}$, $(\lambda > 0)$ entonces

$$|A| \le \frac{1}{\lambda} \int_A f$$

Demostración

Supongamos que a) es cierto. Para obtener b) consideramos para cada número natural k el conjunto $E_k = \{x: f(x) < k\}$ y descomponemos f de la forma $f = f_k + g_k$, donde f_k es la restricción de f a E_k. Puesto que f_k es acotada y $\mathfrak{B}$ deriva la integral de f, resulta que $\mathfrak{B}$ deriva también la integral de g_k. Fijados E medible y $\lambda > 0$, consideramos el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n - E : \bar{D}(\int(f\chi_E), x) > \lambda\}.$$

Probaremos que A tiene medida cero, y podemos suponer que A es acotado. Al ser f_k una sucesión no decreciente que converge puntualmente a f, resulta que, dado $\varepsilon > 0$, existe k tal que

$$\int_A (f-f_k) = \int_A g_k < \varepsilon$$

y, puesto que $f\chi_E = f_k\chi_E + g_k\chi_E$, es claro que A está contenido en la unión de los conjuntos

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R}^n - E : \bar{D}(\int(f_k\chi_E), x) > \lambda/2 \}$$

y

$$A_2 = \{x \in \mathbb{R}^n - E : \bar{D}(\int(g_k\chi_E), x) > \lambda/2 \}.$$

A_1 tiene medida nula, ya que $\mathfrak{B}$ deriva a la integral de $f_k\chi_E$ y esta función se anula en $\mathbb{R}^n - E$. Por ser $g_k\chi_E \le g_k$, se obtiene, salvo un conjunto de medida nula,

$$A_2 \subset \{x: \bar{D}(\int g_k, x) > \lambda/2 \}$$

y, puesto que $\mathfrak{B}$ deriva la integral de g_k, ha de ser

$$|A_2| \le \frac{2}{\lambda} \int_{A_2} g_k < \frac{2}{\lambda}\, \varepsilon.$$

Así b) es cierto.

Supongamos ahora b) y sean A, $\mathfrak{B}(A)$ y ε los elementos que se fijan en c). Elegimos un abierto que contenga a A tal que $|G-A| < \varepsilon$, y suponemos que los elementos de $\mathfrak{B}(A)$ están contenidos en G. Así la condición ii) se verifica para cualquier sucesión elegida en $\mathfrak{B}(A)$.

Sea α tal que $2\alpha|G| < \varepsilon$. Pretendemos elegir en $\mathfrak{B}(A)$ una sucesión

$\{R_k\}$ tal que, si σ_k es la función de solapamiento de la colección finita

$$\{R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_k\}$$

y B_k es la unión de los miembros de ésta, se verifique

$$\int (f\sigma_k) \le 2\alpha |B_k|, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots$$

Además, en cada etapa se elegirá R_k de manera que su medida esté en un sector más alto de las medidas de los que se consideran elegibles.

A tal efecto, sea

$$a_0 = \sup\ \{|R|:\ R \in \mathfrak{B}(A)\}.$$

Elegimos R_1 en $\mathfrak{B}(A)$ tal que $|R_1| > \frac{3}{4}\, a_0$. Es claro entonces que

$$\int (f\sigma_1) < 2\alpha |R_1|,$$

por lo cual, si $|A-R_1| = 0$, el proceso de selección termina.

Supongamos elegidos $R_1, \ldots, R_h$ de manera que

$$\int (f\sigma_h) \le 2\alpha |B_h|$$

y que $|A-B_h| > 0$. La familia

$$\mathfrak{B}_h = \{R \in \mathfrak{B}(A):\ |R \cap B_h| < \tfrac{1}{2}|R| \quad \text{y} \quad \int_R (f\chi_{B_h}) < \alpha |R|\}$$

no es vacía, debido a que $\mathfrak{B}$ es base de densidad, a la hipótesis b), y a que $|A-B_h| > 0$. Sea $R \in \mathfrak{B}_h$, y designamos χ_j la función característica de R_j, y σ'_h la función de solapamiento de la colección $\{R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_h,\ R\}$.
Se verifica

$$|R-B_h| \ge \frac{1}{2}\ |R|$$

y

$$\begin{aligned}
\int (f\sigma'_h) &= \int f(\chi_1 + \ldots + \chi_h + \chi_R - \chi_{R\cup B_h}) \\
&= \int_{B_h - R} f\sigma_h + \int_{B_h \cap R} f(\chi_1 + \ldots + \chi_h) = \\
&= \int f\sigma_h + \int_R f\chi_{B_h} \\
&\le 2\alpha |B_h| + \alpha |R|
\end{aligned}$$

$$\leq 2\alpha|B_h| + 2\alpha|R-B_h|$$

$$= 2\alpha|B_h \cup R|$$

Ahora elegimos R_{h+1} en $\mathcal{B}_h$ tal que $|R_{h+1}| > \frac{3}{4} a_h$, siendo a_h el supremo de $\{|R|: R \in \mathcal{B}_h\}$. De lo anterior se obtiene

$$\int(f\sigma_{h+1}) \leq 2\alpha|B_{h+1}|.$$

Siguiendo este proceso resulta que, si existe un k para el cual $|A-B_k| = 0$, entonces i), ii) y iii) de c) se verifican para la sucesión finita $\{R_1, R_2, \ldots, R_k\}$ al ser $2\alpha|B_k| \leq 2\alpha|G| < \varepsilon$.

Supongamos que el proceso es infinito, y por tanto para cada k es $|A-B_k| > 0$. Sea B la unión de todos los R_k, y vamos a probar que $|A-B| = 0$. De no ser así, consideramos la familia no vacía:

$$\mathcal{B}_\infty = \{R \in \mathcal{B}: |R \cap B| < \frac{1}{2}|R| \quad y \quad \int_R f\chi_B < \alpha|R|\}.$$

Es claro que $\mathcal{B}_\infty \subset \mathcal{B}_k$ para todo k, y si $R \in \mathcal{B}_\infty$, entonces ha de ser

$$|R| \leq a_k < \frac{4}{3}|R_{k+1}|$$

para cada k, lo que supone que $|R| = 0$ y que $\mathcal{B}_\infty$ es vacía, puesto que

$$\sum |R_k| \leq 2\left[|R_1| + \sum_{k>1}|R_k - B_{k-1}|\right] = 2|B| \leq 2|G|$$

y como consecuencia $|R_k|$ converge a 0.

Por otra parte, si σ es la función de solapamiento de la sucesión infinita R_k, se tiene también

$$\int f\sigma = \lim \int f\sigma_k \leq \lim 2\alpha|B_k| \leq 2\alpha|G| < \varepsilon$$

y así queda probado c).

Supongamos que c) es cierto, y sea $\lambda > 0$ y A acotado medible contenido en $\{x: \bar{D}(\int f, x) > \lambda\}$. Probaremos que $\lambda|A| \leq \int_A f$. Para ello elegimos un abierto acotado G que contenga a A y consideramos la familia

$$\mathcal{B}(A) = \{R \in \mathcal{B}: \int_R f > \lambda|R| \quad y \quad R \subset G\},$$

que es una clase de Vitali para A. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $F \subset G$ y $|F| < \delta$, entonces $\int_F f < \varepsilon$. Tomemos $\delta' = \min\{\delta, \varepsilon\}$ y apliquemos a $(A, \mathfrak{B}(A), \delta')$ la hipótesis c); se obtiene así una sucesión R_k que verifica

$$\text{i) } |A - \cup R_k| = 0, \quad \text{ii) } |\cup R_k - A| < \delta', \quad \text{iii) } \int (f\sigma) < \delta'; \quad \text{iv) } \int_{R_k} f > \lambda |R_k|.$$

Resulta entonces

$$\begin{aligned} |A| &\le |\cup R_k| \le \sum |R_k| \le \frac{1}{\lambda} \int f \sum \chi_k \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[\int f\sigma + \int f(\chi_{\cup R_k} - \chi_A) + \int_A f \right] \\ &\le \frac{1}{\lambda} [\delta' + \varepsilon + \int_A f] \\ &\le \frac{1}{\lambda} [2\varepsilon + \int_A f], \end{aligned}$$

en donde se ha tenido en cuenta que por i) y ii) es

$$|\cup R_k - A| = |\cup R_k| - |A| < \delta'.$$

Puesto que ε es arbitrario, se obtiene d).

Por último, si d) es cierto, para obtener a) bastará, de acuerdo con el teorema 1.2., probar que, para $\lambda > 0$ y B acotado medible contenido en $\{x: \underline{D}(\int f, x) \le \lambda\}$, se tiene $\lambda |B| \ge \int_B f$, y esto se verifica para cada f no negativa localmente integrable por ser $\mathfrak{B}$ base de densidad. En efecto, sea f_k una sucesión no decreciente de funciones acotadas que converge puntualmente a f. Dado $\varepsilon > 0$, existe k tal que $\int_B f_k > \int_B f - \varepsilon$, y se tiene

$$B \subset \{x: \underline{D}(\int f, x) \le \lambda\} \subset \{x: \underline{D}(\int f_k, x) \le \lambda\}.$$

Puesto que $\mathfrak{B}$ deriva $\int f_k$, ha de ser

$$\lambda |B| \ge \int_B f_k > \int_B f - \varepsilon$$

El teorema queda así probado.

2.3. Corolario

Si una base de densidad deriva $\int f$, y $0 \le g \le f$, entonces deriva tambien $\int g$.

Basta observar el apartado b) ó el c) del teorema anterior.

2.4. Corolario (Teorema de De Possel)

La propiedad de densidad para una base $\mathcal{B}$ es equivalente a la siguiente propiedad de cubrimiento:

Dados A de medida finita, una clase de Vitali $\mathcal{B}(A)$ para A contenida en $\mathcal{B}$, y $\varepsilon > 0$, existe en $\mathcal{B}(A)$ una sucesión R_k tal que, si σ es su función de solapamiento, se verifica

$$|A - \cup R_k| = 0, \qquad |\cup R_k - A| < \varepsilon, \qquad \int \sigma < \varepsilon.$$

Demostración

Supuesto que $\mathcal{B}$ es base de densidad, la propiedad de cubrimiento a la que nos referimos la establece el apartado c) del teorema anterior cuando f es la función característica de $\mathbb{R}^n$.

Para la prueba recíproca bastará probar, teniendo en cuenta el teorema 2.1, que si E es medible, $\lambda > 0$ y A acotado medible contenido en $\{x \in \mathbb{R}^n - E: \bar{D}(\int \chi_E, x) > \lambda\}$, entonces $|A| = 0$. Para ello consideramos en $\mathcal{B}$ la familia

$$\mathcal{V} = \{R: \int_R \chi_E > \lambda\ |R|\}$$

que es una clase de Vitali para A . Fijado $\varepsilon > 0$, por hipótesis, existe en $\mathcal{V}$ una sucesión R_k que verifica

$$|A - \cup R_k| = 0; \qquad |\cup R_k - A| < \varepsilon; \qquad \int \sigma < \varepsilon.$$

donde σ es la función de solapamiento de R_k. En consecuencia, si llamamos χ_k a la función característica de R_k, se tiene

$$\begin{aligned} |A| &\le |\cup R_k| \le \Sigma |R_k| \le \frac{1}{\lambda} \Sigma \int_{R_k} \chi_E = \frac{1}{\lambda} \int \chi_E\, \Sigma \chi_k \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[\int \chi_E\, \sigma + \int \chi_E\, (\chi_{\cup R_k} - \chi_A) + \int \chi_E\, \chi_A \right] \\ &\le \frac{2\,\varepsilon}{\lambda} \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $A \cap E = \emptyset$ y que $|\cup R_k| - |A| = |\cup R_k - A|$. Puesto que ε es arbitrario, el corolario queda probado.

2.5. Corolario

Sean $\mathfrak{B}$ una base de diferenciación y $\mathfrak{F}$ una clase de funciones que contiene a las funciones características de los conjuntos medibles. Entonces, $\mathfrak{B}$ deriva las integrales de las funciones de $\mathfrak{F}$ si y sólo si para cada f de $\mathfrak{F}$ y cada medible E se verifica que $\bar{D}(\int f\chi_E, x) = 0$ para casi todo x de $\mathbb{R}^n - E$.

En efecto, si $\mathfrak{B}$ deriva las integrales de las funciones de $\mathfrak{F}$, entonces es base de densidad y basta con observar los apartados a) y b) del teorema 2.2. En el sentido inverso, si la condición expresada en el corolario se cumple, resulta que tomando en particular como f la función característica de $\mathbb{R}^n$, y teniendo en cuenta ahora el teorema 2.1., se obtiene que $\mathfrak{B}$ es base de densidad. De nuevo la equivalencia entre los apartados a) y b) del teorema 2.2. permite concluir que $\mathfrak{B}$ deriva las integrales de las funciones de $\mathfrak{F}$.

II.3. Propiedades de cubrimiento de las bases de densidad

La propiedad de Vitali, que permite la diferenciación de las integrales de las funciones localmente integrables, y la de De Possel, que caracteriza las bases de densidad, admiten un tratamiento más general.

Denominamos propiedad V_q de cubrimiento, $1 \le q \le \infty$, para una base la análoga a la de Vitali, pero la desigualdad relativa a la función de solapamiento se refiere a la norma en L^q.

Es fácil probar que de la propiedad V_q se deduce la diferenciación de las integrales de funciones de L^p, siendo $1/p + 1/q = 1$. La desigualdad de Hölder es el principal recurso que permite la prueba.

El problema inverso, que es cierto para $p = \infty$, (bases de densidad), quedó abierto durante algún tiempo, y una primera aproximación al mismo fue obtenida por Hayes y Pauc [1955], y tratada también por de Guzmán [1972] con el siguiente resultado:

"Si una base deriva las integrales de las funciones de L^p, $1 < p < \infty$, entonces verifica la propiedad $V_{q'}$ para cada q' menor que q."

Más tarde, un nuevo refinamiento permitió al propio Hayes [1976] completar la demostración del teorema para $1 < p < \infty$. Simultáneamente A. Córdoba [1976], utilizando el operador maximal de Hardy-Littlewood y mediante una técnica de linealización realmente novedosa, consiguió el mismo resultado. El caso $p = 1$, fue resuelto magistralmente por R.Moriyón [1978] para bases invariantes por homotecias.

En los próximos teoremas se da un tratamiento general, usando la conjugación de Young, a la dualidad entre las propiedades de diferenciación de una base y las propiedades de cubrimiento de sus elementos. En el teorema 2.6, en donde a partir de una propiedad de derivación se obtiene una de cubrimiento, se sigue la idea de Hayes. En los capítulos siguientes se analizan las propiedades del operador maximal en relación con la teoria de diferenciación, y se utilizará con frecuencia la técnica de A. Córdoba.

Si ψ es una función de Orlicz, diremos que una base tiene la propiedad de cubrimiento V_ψ si se verifica una propiedad como la de Vitali, pero la acotación de la función σ de solapamiento se refiere a la norma en L^1 de $\psi(\sigma)$. Puesto que ψ es esencialmente mayor que la identidad, se concluye que si una base tiene una propiedad de cubrimiento V_ψ entonces es base de densidad.

2.6. Teorema

Sean φ, ψ dos funciones Young complementarias. Si una base $\mathfrak{B}$ verifica la propiedad de cubrimiento V_ψ , entonces deriva las integrales de las funciones de $\varphi(L)$.

Demostración

Por lo que antes se ha comentado resulta que $\mathfrak{B}$ es base de densidad. No es una restrición suponer tambien que $\psi(1) = \varphi(1) = 1$. De acuerdo con el teorema 2.2., será suficiente probar que, si f es una función no negativa de $\varphi(L)$ y A es un medible acotado contenido en $\{x: \bar{D}(\int f, x) > \lambda > 0\}$, entonces $\lambda|A| \le \int_A f$.

Para ello tomamos un abierto acotado G que contenga a A y consideramos la familia

$$\mathfrak{B}(A) = \{R \in \mathfrak{B}: \int_R f > \lambda|R|,\ R \subset G\}$$

que es una clase de Vitali para A. Fijado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $F \subset G$ y $|F| < \delta$, entonces $\int_F \varphi(f) < \varepsilon$. Elegimos $\delta' = \text{mín}\,\{\delta, \varepsilon\}$ y aplicamos la hipótesis a la terna $(A, \mathfrak{B}(A), \delta')$. Se consigue así una sucesión R_k contenida en G tal que, si σ es la función de solapamiento, se verifica

$$\text{i) } |A - \cup R_k| = 0, \quad \text{ii) } |\cup R_k - A| < \delta', \quad \text{iii) } \int \psi(\sigma) < \delta', \quad \text{iv) } \int_{R_k} f > \lambda|R_k|.$$

De iii) y de ser $|\{\sigma \ge 1\}| \le \int \sigma \le \int \psi(\sigma) < \delta'$ se tiene

$$\text{iii)'} \int (f\sigma) = \int_{\{\sigma \ge 1\}} (f\sigma) \le \int_{\{\sigma \ge 1\}} \varphi(f) + \int \psi(\sigma) \le \varepsilon + \delta' \le 2\varepsilon.$$

donde se ha tenido en cuenta que φ y ψ son complementarias.

De i) y ii) se obtiene también

$$\text{ii)'} \int f(\chi_{\cup R_k} - \chi_A) = \int f\chi_{\cup R_k - A} \le \int_{\cup R_k - A} \varphi(f) < \varepsilon.$$

Por tanto,

$$|A| \le |\cup R_k| \le \sum |R_k| \le \frac{1}{\lambda} \int f \sum \chi_k$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left[\int(f\sigma) + \int f(\chi_{\cup R_k} - \chi_A) + \int_A f\right]$$

$$\leq \frac{1}{\lambda}\left[3\varepsilon + \int_A f\right].$$

Puesto que ε es arbitrario, resulta que $|A| \leq \frac{1}{\lambda}\int_A f$, lo que completa la demostración.

Es un problema abierto demostrar si el recíproco del resultado anterior es cierto. Es muy posible que para bases generales solamente pueda afirmarse lo que se indica en el siguiente teorema, donde la idea de Hayes se aplica a dos funciones de Orlicz que no verifican necesariamente la desigualdad de Young.

Para una función de Orlicz ψ la *variación* de ψ es la función $\Delta\psi$ definida mediante

$$\Delta\psi(u) = \psi(u+1) - \psi(u).$$

2.7. Teorema

Sean φ y ψ funciones de Orlicz. Admitamos que $\Delta\psi$ es no decreciente y que existe $c > 0$ tal que para $u \geq 1$ se verifica

$$\varphi[\Delta\psi(u)] \leq c\ \psi(u)$$

Resulta que, si $\mathfrak{B}$ es una base que deriva las integrales de las funciones de $\varphi(L)$, entonces $\mathfrak{B}$ tiene la propiedad de cubrimiento de tipo V_ψ.

Demostración

Supongamos dados un conjunto medible A de medida finita, una clase de Vitali $\mathfrak{B}(A)$ para A contenida en $\mathfrak{B}$, y $\varepsilon > 0$. Probaremos que existe en $\mathfrak{B}(A)$ una sucesión R_k tal que, si σ es la función de solapamiento correspondiente, resulta

$$\text{i) } |A-\cup R_k| = 0, \quad \text{ii) } |\cup R_k - A| < \varepsilon, \quad \text{iii) } \int\psi(\sigma) < \varepsilon.$$

Para ello elegimos un abierto G que contenga a A y verifique $|G-A| < \varepsilon$. Suponemos que los elementos de $\mathfrak{B}(A)$ están contenidos en G; así ii) se cumple para cualquier sucesión elegida en $\mathfrak{B}(A)$. Tomemos α tal que $0 < \alpha < 1$ y $2\alpha|G| < \varepsilon$. Se pretende construir una sucesión $\{R_k\}$ elegida en $\mathfrak{B}(A)$ cuyos elementos tengan la mayor medida posible y que para cada k = 1, 2, ... se verifique siempre la acotación

$$\int \psi(\sigma_k) \le 2\alpha |B_k|$$

donde σ_k es la función de solapamiento de la colección finita $\{R_1,..,R_k\}$, y B_k representa su unión.

A tal efecto, sea $a_0 = \sup\{|R|:R \in \mathfrak{B}(A)\}$. Elegimos R_1 en $\mathfrak{B}(A)$ tal que $|R_1| > (3/4)a_0$. Aquí es claro que $\int\psi(\sigma_1) < 2\alpha|R_1|$. Si $|A-R_1| = 0$, el proceso de elección se termina. En otro caso continuamos como se indica a continuación.

Supongamos elegidos R_1, R_2, .., R_h de manera que $\int\psi(\sigma_h) \le 2\alpha|B_h|$ y que $|A-B_h| > 0$. Entonces consideramos la familia

$$\mathfrak{B}_h=\{\ R \in \mathfrak{B}:\ |R \cap B_h| < \tfrac{1}{2}\ |R| \ \ \text{y} \ \ \int_R \Delta[\psi(\sigma_h)] < \alpha|R|\ \},$$

que no es vacía por ser $\mathfrak{B}$ base de densidad y $|A-B_h| > 0$. Además, la función

$$\Delta[\psi(\sigma_h)] = \psi(\sigma_h+\chi_{B_h}) - \psi(\sigma_h)$$

se anula en $A-B_h$ y pertenece a $\varphi(L)$ puesto que

$$\int\varphi[\Delta(\psi(\sigma_h))] = \int_{\{\sigma_h=0\}} \varphi[\psi(1)]\ \chi_{B_h} + \int_{\{\sigma_h\ge 1\}} \varphi\ [\Delta(\psi(\sigma_h)]$$

$$\le c_1|B_h| + c\int\psi(\sigma_h) \le (c_1+ 2\alpha c)|B_h|.$$

Para cada R de $\mathfrak{B}_h$, si σ' es la función de solamiento de $\{R_1, \ldots,R_h, R\}$, resulta

$$|R-B_h| > (1/2)|R|,$$

y si χ_j es la función característica de R_j se tiene

$$\int\psi(\sigma') = \int\psi(\chi_1 + \ldots + \chi_h + \chi_R - \chi_{R\cup B_h})$$

$$= \int_{B_h-R} \psi(\sigma) + \int_{B_h\cap R} \psi(\chi_1 + \ldots + \chi_h) =$$

$$= \int\psi(\sigma) + \int_R [\psi(\chi_1 + \ldots + \chi_h) - \psi(\sigma)]$$

$$= \int \psi(\sigma) + \int_R \Delta[\psi(\sigma)]$$

$$\le 2\alpha|B_h| + \alpha|R|$$

$$\le 2\alpha|B_h| + 2\alpha|R-B_h| = 2\alpha|B_h \cup R|.$$

Nos interesa elegir R_{h+1} en $\mathfrak{B}_h$ de manera que $|R_{h+1}| > (3/4)a_h$, siendo $a_h = \sup\{|R|: R \in \mathfrak{B}_h\}$. De lo anterior se obtiene

$$\int \psi(\sigma_{h+1}) \le 2\alpha|B_{h+1}|.$$

Siguiendo el proceso anteriormente descrito resulta que, si existe un k para el que $|A-B_k| = 0$, entonces existe una sucesión finita que verifica i) ii) y iii), al ser $2\alpha|B_k| \le 2\alpha|G| < \varepsilon$.

Supongamos que para cada k es $|A-B_k| > 0$. Veamos que para la sucesión, ahora infinita, R_k se verifica también i) y iii). Sea σ la función de solapamiento de esta sucesión, y B la unión de sus elementos. Por la monotonía de la sucesión σ_k y la función ψ, resulta

$$\int \psi(\sigma) = \lim_k \int \psi(\sigma_k) \le \lim_k 2\alpha|\cup R_k| \le 2\alpha|G| < \varepsilon .$$

Así iii) es cierto.

Si fuera $|A - B| > 0$, podemos considerar la familia no vacía

$$\mathfrak{B}_\infty = \{R \in \mathfrak{B}: \ |R \cap B| < \frac{1}{2}|R| \ \text{y} \ \int_R \Delta[\psi(\sigma)] < \alpha|R|\}.$$

Puesto que $\Delta\psi$ es no decreciente, es claro que $\mathfrak{B}_\infty \subset \mathfrak{B}_k$ para cada k, y si R pertenece a $\mathfrak{B}_\infty$, entonces $|R| \le a_k \le (4/3)|R_{k+1}|$ para cada k, lo que supone que $|R| = 0$ y que $\mathfrak{B}_\infty$ es vacía, ya que $\lim|R_k| = 0$ al ser

$$\sum|R_k| < 2\left[|R_1| + \sum_{k=2}^{\infty}|R_k - B_{k-1}|\right] = 2|\cup R_k| \le 2|G|.$$

Esta contradicción prueba que i) es también cierto, y así queda probado el teorema.

2.8. Corolario

Sean φ y ψ funciones conjugadas Young continuas por la izquierda tales que φ es Δ_2 y ψ verifica para algún $c > 0$

$$\psi(u+1) - \psi(u) \le c\ \psi(u)/u, \quad u \ge 1.$$

Entonces, una base $\mathcal{B}$ deriva las integrales de las funciones de $\varphi(L)$ si y sólo si $\mathcal{B}$ tiene la propiedad de cubrimiento V_ψ.

En efecto, si tenemos en cuenta el teorema 1.7., resulta que las funciones φ y ψ verifican la condición exigida en el teorema anterior. Por otra parte, dado que φ y ψ son complementarias, es de aplicación el teorema 2.6.

En particular, tomando $\psi(u) = u^q$, $q > 1$, resulta

$$\Delta\psi(u) = (u+1)^q - u^q \le q\ (u+1)^{q-1} \le q\ 2^{q-1}\ u^{q-1} = c_q\psi(u)/u,$$

lo cual justifica el siguiente resultado

2.9. Corolario

La condición necesaria y suficiente para que una base $\mathcal{B}$ derive las integrales de las funciones de L^p, $p > 1$, es que $\mathcal{B}$ verifique la propiedad de cubrimiento V_q, $1/p + 1/q = 1$.

La relación exigida a las funciones φ y ψ en el teorema 2.7. no supone, en general, que éstas cumplan la desigualdad de Young. En estos casos la propiedad de cubrimiento que se obtiene sólo es necesaria. En particular, si tomamos para $s \ge 0$ las funciones

$$\varphi(u) = u\ (1 + \log^+ u)^s$$

$$\psi(u) = \exp\ [u^{1/(s+1)}],$$

la relación del teorema 2.7. se verifica, y esto justifica el siguiente resultado

2.10. Corolario

Si una base $\mathcal{B}$ deriva las integrales de las funciones de $L(1 + \log^+ L)^s$, $s \ge 0$, entonces verifica la propiedad de cubrimiento V_ψ para

$$\psi(u) = \exp\ [u^{1/(s+1)}].$$

CAPITULO III

EL OPERADOR MAXIMAL DE HARDY-LITTLEWOOD

A una familia $\mathfrak{R}$ de medibles acotados de $\mathbb{R}^n$ podemos asociar el operador M (operador maximal de Hardy-Littlewood) definido en el espacio de las funciones localmente integrables mediante

$$Mf(x) = \sup \frac{1}{|R|} \int_R |f|$$

si x pertenece a algún miembro de la familia $\mathfrak{R}$, y $Mf(x) = 0$ en otro caso. El supremo se refiere a todos los miembros de $\mathfrak{R}$ a los que x pertenece.

Es claro que M verifica las propiedades

$$Mf \geq 0, \quad M(f+g) \leq Mf + Mg, \quad M(\lambda f) = |\lambda| Mf,$$

es decir, M es positivo, subaditivo, y positivamente homogéneo. Además, si $|f| \leq |g|$, entonces $Mf \leq Mg$.

El conjunto $\{x: Mf(x) > \lambda\}$ es la unión de todos los miembros R de $\mathfrak{R}$ tales que $\int_R |f| > \lambda |R|$, por lo que, si $\mathfrak{R}$ es una colección de abiertos, también $\{x: Mf(x) > \lambda\}$ lo es, y así Mf es medible.

En general, un operador T definido en L^p, $1 \leq p \leq \infty$, se dice de tipo fuerte (p,q) (o bien, acotado de L^p en L^q), $1 \leq q \leq \infty$, si Tf pertenece a L^q cuando $f \in L^p$, y existe $c > 0$ tal que, para cada $f \in L^p$

$$\|Tf\|_q \leq c \; \|f\|_p$$

En particular, el operador M es de tipo (∞,∞).

Cuando q es finito, de la acotación anterior resulta, siendo

$$A_\lambda = \{x: |Tf(x)| > \lambda\},$$

$$|A_\lambda| \leq \int_A \frac{|Tf|}{\lambda} \leq \int \frac{|Tf|^q}{\lambda^q} \leq c^q \lambda^{-q} \; \|f\|_p^q = \left[\frac{c\|f\|_p}{\lambda}\right]^q$$

desigualdad que puede escribirse también de la forma

$$\sup_{\lambda>0} \{\lambda |\{x: \ |Tf(x)| > \lambda\}|^{1/q}\} \le c \ \|f\|_p$$

y, cuando así sucede, se dice que T es de tipo débil (p,q), o acotado de L^p en el espacio de Lorentz $L(q,\infty)$.

La acotación de tipo débil para un operador T puede ampliarse a espacios de Orlicz. Si φ es una función de Orlicz, de acuerdo con lo establecido en el capítulo I, $\varphi(L)$ representa el conjunto de funciones f localmente integrables tales que $\varphi(|f|)$ también lo es. Reservaremos, en cambio, la notación $\varphi(L^1)$ para las funciones f tales que $\varphi(|f|)$ sea de L^1. Es claro que, si $f \in \varphi(L)$ y A es acotado medible, entonces $f\chi_A \in \varphi(L^1)$.

Un operador T se dice de tipo débil-φ si está definido en $\varphi(L^1)$ y existe $c > 0$ tal que, para $\lambda > 0$ y $f \in \varphi(L^1)$ se verifica

$$|\{x: \ |Tf(x)| > \lambda\}| \le c\int \varphi \ [|f|/\lambda].$$

En particular, para $\varphi(u) = u^p$, $1 \le p <\infty$, ser de tipo débil-φ significa ser de tipo débil (p,p).

III.1. Derivación y acotación débil del operador maximal

Los teoremas que siguen ponen de manifiesto la estrecha relación que existe entre propiedades de acotación de tipo débil del operador maximal y propiedades de diferenciación de la base.

3.1. Teorema

Sea $\mathcal{B}$ una base de diferenciación en $\mathbb{R}^n$ y φ una función de Orlicz y Δ_2. Si el operador maximal asociado a $\mathcal{B}$ es de tipo débil φ, entonces $\mathcal{B}$ deriva $\varphi(L)$.

Demostración

Será suficiente probar, de acuerdo con el Corolario 2.5. que, si E es medible y $f \in \varphi(L)$, $f \geq 0$, entonces $\overline{D}(\int f\chi_E, x) = 0$ para casi todo x de $\mathbb{R}^n$-E.

Para ello sean A acotado medible y $\lambda > 0$ tales que

$$A \subset \{x \in \mathbb{R}^n\text{-}E\colon \overline{D}(\textstyle\int f\chi_E, x) > \lambda\}.$$

Elegimos una sucesión decreciente de abiertos acotados G_j que contengan a A y $|G_j - A| \longrightarrow 0$. Para cada j, si $x \in A$, existe en la base un elemento R que contiene a x, está contenido en G_j y verifica

$$\int_R f\chi_E\chi_j = \int_R f\chi_E > \lambda|R|$$

donde χ_j representa la función característica de G_j. Por tanto,

$$\begin{aligned} |A| &\leq |\{x\colon M(f\chi_E\chi_j)(x) > \lambda\}| \\ &\leq c\int \varphi[(f\chi_E\chi_j)/\lambda] \\ &= c\int_{G_j\cap E} \varphi(f/\lambda) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $|G_j \cap E| \leq |G_j - A| \longrightarrow 0$. Así el teorema es cierto.

Conviene observar que en el teorema anterior la acotación débil-φ del operador maximal puede ser sustituida por la condición siguiente: Si

$f \in \varphi(L)$, $\lambda > 0$, y A_j es una sucesión de medibles tales que $|A_j| \longrightarrow 0$, entonces

$$|\{x:\ Mf\chi_j(x) > \lambda\}| \longrightarrow 0.$$

Por otra parte, si la base $\mathfrak{B}$ deriva $\varphi(L)$, es claro que se verifica

$$|\{x:\ \overline{D}(\int(f\chi_j),x) > \lambda\}| \longrightarrow 0$$

y esto es equivalente a decir que

$$|\{x:\ M_j(f\chi_j)(x) > \lambda\}| \longrightarrow 0,$$

donde M_j representa el operador maximal asociado a los elementos de la base cuyos diámetros son menores que $1/j$.

El razonamiento anterior nos lleva al siguiente resultado obtenido por I. Peral [1974]

3.2 Teorema

Una base de diferenciación deriva $\varphi(L)$ si y sólo si el operador maximal asociado verifica la siguiente condición de convergencia: si $f \in \varphi(L)$, $\lambda > 0$ y A_j es una sucesión de medibles, tales que $|A_j| \longrightarrow 0$, entonces

$$|\{x:\ M_j(f\chi_j)(x) > \lambda\}| \longrightarrow 0.$$

Para bases invariantes por homotecias que derivan $\varphi(L)$ la acotación débil-φ del operador maximal resulta también una condición necesaria.

En 1934 Busemann y Feller publican un resultado válido para bases de abiertos y acotados invariantes por homotecias por el cual la propiedad de densidad resulta equivalente a una propiedad de tipo débil del operador maximal restringido a funciones características de medibles acotados. A estas bases queda asociada una función (función de halo) que mide, para cada $\lambda \in (0,1)$, la máxima desproporción que con respecto a un medible E tiene el "λ-halo" $\mathcal{H}(E,\lambda)$ de E, siendo

$$\mathcal{H}(E,\lambda) = \cup\{R:\ |R \cap E| > \lambda|R|\}.$$

En el capítulo V se analizarán las propiedades de diferenciación de una base en relación con su función de halo. El teorema de Buseman y Feller que antes se ha comentado, cuya demostración puede verse en De Guzmán

[1975], dice lo siguiente:

3.3 Teorema

Sean $\mathcal{B}$ una base de diferenciación en $\mathbb{R}^n$ invariante por homotecias y M el operador maximal. Son equivalentes

a) $\mathcal{B}$ es base de densidad

b) Dado $\lambda \in (0,1)$ existe $c(\lambda) > 0$ tal que para cada E medible de medida finita se verifica

$$|\{x:\ M\chi_E(x) > \lambda\}| \le c(\lambda)\ |E|.$$

Buseman y Feller hacen uso en la prueba de la propiedad de cubrimiento que permite, salvo conjuntos de medida nula, cubrir un abierto acotado por una sucesión disjunta y uniformemente acotada de homotéticos de un compacto.

B.Rubio [1971] probó que para las bases invariantes por homotecias la diferenciación del espacio $\varphi(L)$ es equivalente a la propiedad de tipo débil-φ de su operador maximal. La versión que se da a continuación difiere poco de la anteriormante citada.

3.4 Teorema

Sean $\mathcal{B}$ una base de diferenciación invariante por homotecias, M el operador maximal y φ una función de Orlicz con la condición Δ_2. Son equivalentes

a) $\mathcal{B}$ deriva $\varphi(L)$

b) M es de tipo débil-φ.

Demostración

El teorema 3.1 prueba que b) implica a). En el sentido inverso podemos suponer que $\varphi(1) = 1$, y bastará comprobar que existe c>0 tal que, si $f \in \varphi(L^1)$, se verifica

$$|\{x:\ Mf(x) > 1\}| \le c\int\varphi(f).$$

Si la acotación anterior es falsa, entonces para cada $k = 1,2,\dots$ existe f_k en $\varphi(L^1)$ tal que

$$|\{x:\ Mf_k(x) > 1\}| > 2^{k+1}\int\varphi(f_k)$$

Elegimos un compacto C_k que verifique

$$C_k \subset \{x: Mf_k(x) > 1\} \quad ; \quad |C_k| > 2^{k+1}\int\varphi(f_k).$$

Puesto que los elementos de la base son abiertos, asociado al compacto C_k existe una familia finita $\mathcal{F}_k$ formada por los elementos R de la base que recubren C_k y verifican $\int_R f_k > |R|$. Sea r_k el máximo de los diámetros de los miembros de $\mathcal{F}_k$.

Podemos recubrir el intervalo cúbico unidad Q mediante una sucesión disjunta C_{kj} de homotéticos de C_k, cuyas razones de homotecia α_{kj} verifiquen la siguiente acotación: $\alpha_{kj}r_k < 1/k$. Para cada k y j definimos las funciones f_{kj} de la forma

$$f_{kj} = f_k \circ \pi^{-1}_{kj}$$

donde π_{kj} representa la homotecia que transforma C_k en C_{kj} . Se tiene

$$\frac{1}{|C_{kj}|}\int\varphi(f_{kj}) = \frac{1}{|C_k|}\int\varphi(f_k) \le \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Por tanto,

$$\sum_{k,j}\int\varphi(f_{kj}) \le \sum_k \left[\sum_j \frac{1}{2^{k+1}} |C_{kj}| \right] = \sum_k \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} .$$

Si tomamos $h = \sup_{k,j} f_{kj}$, se tiene que $h \in \varphi(L)$, puesto que

$$\int\varphi(h) \le \sum_{k,j}\int\varphi(f_{kj}) \le \frac{1}{2} . \qquad [1]$$

Por otra parte, para casi todo $x \in Q$, y fijado k, existe j tal que $x \in C_{kj}$ y, si $z = \pi^{-1}_{kj}(x)$, entonces $z \in C_k$ y existe en $\mathcal{F}_k$ un elemento R tal que $z \in R$ y $\delta(R) \le r_k$ y que verifica

$$\frac{1}{|R|}\int_R f_k > 1$$

Siendo R' el homotético de R en la homotecia π_{kj}, resulta que $x \in R'$, $\delta(R') < 1/k$, y se tiene

$$\frac{1}{|R'|}\int_{R'} h \ge \frac{1}{|R'|}\int_{R'} f_{kj} = \frac{1}{|R|}\int_R f_k > 1.$$

De lo anterior se deduce que, salvo conjuntos de medida nula, Q está contenido en el conjunto $\{x: \overline{D}(\int h,x) > 1\}$ y, si $\mathfrak{B}$ deriva $\varphi(L)$, entonces Q está contenido también en el conjunto $\{x: \varphi(h)(x) > 1\}$, de lo que resulta

$$1 = |Q| \le \int \varphi(h),$$

que contradice a [1]. Esto completa la demostración.

III.2. Cubrimientos y acotación débil del operador maximal

De los teoremas anteriores se desprende que el problema de la diferenciación de integrales queda reducido al análisis de las propiedades de acotación débil del operador maximal.

Como es sabido, el teorema de Besicovitch [1945] de cubrimiento permite probar que el operador maximal para intervalos cúbicos es de tipo débil (1,1). En general, si una familia de medibles verifica una propiedad de cubrimiento de tipo Besicovitch, cuya función de solapamiento está acotada en L^q, $1 < q \le \infty$, entonces el operador maximal asociado es de tipo débil (p,p), siendo $1/p + 1/q = 1$. Ver De Guzmán [1981]

Se analizará a continuación, para los espacios de Orlicz, la dualidad que parece existir entre las propiedades de cubrimiento de una familia de medibles acotados y propiedades de acotación débil del operador maximal asociado. La propiedad de cubrimiento de tipo Besicovitch que antes se ha comentado puede expresarse con mayor generalidad de la forma que sigue, en donde ψ es una función de Orlicz.

Una familia $\mathfrak{R}$ de abiertos acotados verifica la propiedad B_ψ de cubrimiento significa que existen constantes positivas c y $\bar{c}$ tales que para cualquier familia finita $\{R_1,..,R_k\}$ en $\mathfrak{R}$ es posible elegir una subfamilia $\{S_1,..,S_h\}$ que verifica

i) $|R_1 \cup \dots \cup R_k| \le c|S_1 \cup \dots \cup S_h|$

ii) $\int \psi[\chi_1 + \dots + \chi_h] \le \bar{c}\ |S_1 \cup \dots \cup S_h|$,

donde χ_j representa la función característica de S_j.

3.5 Teorema

Sean $\mathfrak{R}$ una familia de abiertos acotados en $\mathbb{R}^n$ y M el operador maximal asociado. Sean φ y ψ funciones Young complementarias. Si la familia $\mathfrak{R}$ verifica la propiedad B_ψ, entonces existe c > 0 tal que, si f es una función positiva localmente integrable, se tiene

$$|\{x\colon Mf(x) > 1\}| \le \int \varphi(cf)$$

En consecuencia, si φ es Δ_2, M es de tipo débil-φ

Demostración

Si $Mf(x) > 1$, existe R en $\mathfrak{R}$ tal que $x \in R$ y $\int_R f > |R|$. Tomemos una familia finita $\{R_1,..,R_k\}$ que verifique

$$\int_{R_i} f > |R_i|; \quad i = 1, \ldots, k .$$

Por hipótesis existe una subfamilia $\{S_1,..,S_h\}$ tal que

$$\text{i)} \ |R_1 \cup \ldots \cup R_k| \le c|S_1 \cup \ldots \cup S_h|$$

$$\text{ii)} \ \int \psi[\chi_1 + \ldots + \chi_h] \le \bar{c}|S_1 \cup \ldots \cup S_h|,$$

donde χ_j representa la función característica de S_j. Designamos por ξ la suma $\chi_1 + \ldots + \chi_h$, y elegimos $\alpha \le 1$ tal que $\alpha\bar{c} \le 1/2$. Resulta

$$|R_1 \cup \ldots \cup R_k| \le c|S_1 \cup \ldots \cup S_h| \le c\left[\int_{S_1} f + \ldots + \int_{S_h} f\right]$$

$$= c\int (f\xi) = \int\left(\frac{c\,f}{\alpha}\,\alpha\xi\right) \le \int \varphi(cf/\alpha) + \int \psi(\alpha\xi)$$

$$\le \int \varphi(\frac{c}{\alpha} f) + \alpha\bar{c}|S_1 \cup \ldots \cup S_h|$$

$$\le \int \varphi(\frac{c}{\alpha} f) + \frac{1}{2}\,|R_1 \cup \ldots \cup R_k|.$$

De aquí se obtiene

$$|R_1 \cup \ldots \cup R_k| \le 2\int \varphi(\frac{c}{\alpha} f) \le \int \varphi(Cf),$$

por lo cual

$$|\{x\colon Mf(x) > 1\}| \le \int \varphi(Cf),$$

y es claro que si φ es Δ_2 entonces M es de tipo débil-φ, puesto que

$$|\{x\colon Mf(x) > \lambda\}| \le \int \varphi(Cf/\lambda) \le \bar{c}\int \varphi(f/\lambda)$$

y el teorema es cierto.

A continuación se analiza la posibilidad de obtener para una familia de abiertos acotados propiedades de cubrimiento de tipo B_ψ a partir de propiedades de acotación débil-φ de su operador maximal.

En el teorema 3.6. se sigue la técnica usada por Hayes [1976] que se caracteriza por la construción por via inductiva de una sucesión de solapamiento óptimo. La relación entre las funciones φ y ψ no es necesariamente la conjugación de Young en todos los casos.

En el teorema 3.9. se hace uso del método de linealización del operador maximal, utilizado por A. Córdoba [1976], consiguiendo una situación donde la relación entre las funciones φ, ψ es la conjugación de Young.

3.6. Teorema

Sean $\mathfrak{R}$ una familia de abiertos acotados y M el operador maximal asociado. Sean φ, ψ funciones de Orlicz, tales que φ es Δ_2 y verifican la relación

$$\varphi[\psi(u+1)-\psi(u)] \leq c\ \psi(u); \quad u \geq 1.$$

Entonces, si M es de tipo débil φ, $\mathfrak{R}$ verifica una propiedad de cubrimiento de tipo B_ψ.

Demostración

Se probará que existen constantes $c \geq 1$ y $\bar{c} \geq 1$ tales que, cualquiera que sea la familia finita $\mathcal{F} = \{R_1,\ldots,R_k\}$ en $\mathfrak{R}$, se puede elegir una subfamilia de ésta $\{S_1, \ldots, S_h\}$ de forma que, si B es la unión de sus elementos y χ_j es la función característica de S_j, se verifica

$$\text{i) } |R_1\cup \ldots \cup R_k| \leq c|B|, \quad \text{ii) } \int\psi(\chi_1+ \ldots \chi_h) \leq \bar{c}|B|.$$

Podemos suponer que $\psi(1) = 1$. De ser ψ función de Orlicz se obtiene entonces que $[\psi(u+1) - \psi(u)] \geq \psi(u)/u \geq 1$; $u \geq 1$.

El proceso de selección de la familia $\{S_1, \ldots,S_h\}$ es como sigue:

Tomamos $S_1= R_1$. Es claro que $\int\psi(\chi_1) = |S_1| < 2|S_1|$. Admitamos que hemos elegido $\{S_1, \ldots, S_r\}$ que verifican

$$\int\psi(\xi_r) \leq 2|B_r|,$$

donde B_r designa a $S_1\cup \ldots\cup S_r$, y ξ_r a $\chi_1+ \ldots + \chi_r$. Consideramos entonces la familia

$$\mathcal{F}_r= \left\{ R \in \mathcal{F}\colon \int_R \Delta\psi(\xi_r) \leq \frac{1}{2}|R| \right\},$$

donde

$$\Delta\psi(\xi_r) = \psi(\xi_r + \chi_{B_r}) - \psi(\xi_r).$$

Si $\mathcal{F}_r$ no es vacía, tomamos como S_{r+1} un elemento cualquiera $R \in \mathcal{F}_r$. Observemos que, si $R \in \mathcal{F}_r$, entonces

$$|R \cap B_r| \le \int_R \Delta\psi(\xi_r) \le \frac{1}{2}|R|,$$

es decir,

$$|R - B_r| \ge \frac{1}{2}|R|.$$

Además,

$$\int\psi(\xi_r + \chi_R) = \int_{B_r - R} \psi(\xi_r) + \int_{B_r \cap R} \psi(\xi_r + \chi_R) + \int_{R - B_r} \psi(\xi_r)$$

$$\le \int\psi(\xi_r) + \int_R [\psi(\xi_r + \chi_{B_r}) - \psi(\xi_r)] + |R - B_r|$$

$$\le 2|B_r| + \frac{1}{2}|R| + |R-B_r|$$

$$\le 2|B_r| + 2|R-B_r|$$

$$= 2|B_r \cup R|.$$

De lo anterior resulta

$$\int\psi(\chi_1 + \ldots + \chi_r + \chi_{r+1}) \le 2|S_1 + \ldots + S_r + S_{r+1}|,$$

y el proceso sigue.

Si $\mathfrak{F}_r$ es vacía, resulta que para todo R de $\mathcal{F}$ es

$$\int_R \Delta\psi(\xi_r) > \frac{1}{2}|R|.$$

y en consecuencia con la hipótesis ha de ser

$$|R_1 \cup \ldots \cup R_k| \le |\{x\colon\ M\Delta\psi(\xi_r)(x) > \tfrac{1}{2}\}|$$

$$\le c\int\varphi[2\Delta\psi(\xi_r)] \le c\int\psi(\xi_r)$$

$$\leq 2c|B_r| = \bar{c}|S_1 \cup \ldots \cup S_r|$$

y el teorema se verifica para la familia $\{S_1,\ldots,S_r\}$. En cualquier caso el proceso termina al cabo de un número finito de pasos, y el teorema es cierto.

3.7. Corolario

Sean φ, ψ funciones conjugadas Young continuas por la izquierda tales que φ es Δ_2 y ψ verifica para un $c > 0$ que

$$\psi(u+1) - \psi(u) \leq c\, \psi(u)/u \ ; \ u \geq 1.$$

Entonces, el operador maximal asociado a una familia $\mathfrak{K}$ de abiertos acotados es de tipo débil-φ, si y sólo si la familia $\mathfrak{K}$ verifica la propiedad de cubrimiento B_ψ.

En efecto, si tenemos en cuenta el teorema 1.7., resulta que las funciones φ, ψ verifican la condición exigida en el teorema anterior. Por otra parte es de aplicación también el teorema 3.5.

En particular, si $\psi(u) = u^q$, $q > 1$, se tiene para $u \geq 1$

$$\begin{aligned} \psi(u+1) - \psi(u) &= (u+1)^q - u^q \\ &\leq q\,(u+1)^{q-1} \\ &\leq q\, 2^{q-1}u^{q-1} \\ &= c_q \psi(u)/u, \end{aligned}$$

lo cual justifica el siguiente resultado.

3.8. Corolario

La condición necesaria y suficiente para que el operador maximal asociado a una familia $\mathfrak{K}$ de abiertos acotados sea de tipo débil (p,p), $p > 1$, es que la familia $\mathfrak{K}$ verifique una propiedad de cubrimiento de tipo B_ψ , siendo $\psi(u) = u^q$ y $1/p + 1/q = 1$.

III.3. Operador lineal asociado a familias separadas

En lo que queda de este capítulo haremos uso del método de linealización utilizado por A.Córdoba [1976], por el cual se obtienen también propiedades de cubrimiento a partir de propiedades de acotación débil del operador maximal, tomando como punto de partida una sucesión de medibles cuya función de solapamiento pertenece, al menos, a L^1. Esta técnica permitió a A. Córdoba probar que las bases que derivan L^p, $p > 1$, son aquellas que verifican la propiedad de cubrimiento tipo Vitali V_q; $1/p + 1/q = 1$.

Las ideas fundamentales del método de A. Córdoba son las siguientes. Si el operador maximal M asociado a una familia $\mathfrak{R}$ es de tipo débil-φ *restringido* (limitado a funciones características de medibles acotados) podemos siempre elegir en una familia $\{R_1, \ldots, R_k\}$ de $\mathfrak{R}$ una subfamilia $\{S_1, \ldots, S_h\}$ que verifique

$$\text{i)} \quad |R_1 \cup \ldots \cup R_k| \le c_1 |S_1 \cup \ldots \cup S_h|$$

y que esté "1/2-separada", es decir,

$$\text{ii)} \quad |S_j - (S_1 \cup \ldots \cup S_{j-1})| \ge \frac{1}{2} |S_j|; \qquad j = 2,\ldots,h.$$

La construcción se realiza de la siguiente forma:

Tomamos $S_1 = R_1$. Supongamos elegidos $S_1,\ldots,S_r$ verificando la condición ii) para $j = 2,\ldots,r$, y sea B_r su unión. Consideramos la familia

$$\mathfrak{F}_r = \{R: \ |R \cap B_r| \le 1/2 \ |R| \ \}.$$

Si $\mathfrak{F}_r$ es vacía, entonces

$$|R_1 \cup \ldots \cup R_k| \le |\{x: \ M\chi_{B_r}(x) > 1/2\}|$$
$$\le c \int \varphi(2\chi_{B_r}) = \bar{c} \ |B_r|$$

y el resultado es cierto para $\{S_1,\ldots,S_r\}$. Si $\mathfrak{F}_r$ no es vacía, tomamos S_{r+1} en $\mathfrak{F}_r$ y es claro que para $j = r+1$ se verifica ii). El proceso termina en un número finito de pasos. De la condición ii) se obtiene

$$|S_1| + \ldots + |S_h| \le 2 \ |S_1 \cup \ldots \cup S_h|.$$

A una familia 1/2-separada como la anterior podemos asociar el operador lineal T definido en el espacio L de las funciones localmente integrables de la forma siguiente, donde hemos designado por S_j^* la diferencia $S_j - (S_1 \cup \ldots \cup S_{j-1})$.

$$Tf = \sum_1^h \left[\frac{1}{|S_j|} \int_{S_j} f \right] \chi_{S_j^*}$$

Es claro que $Tf \le Mf$. Además

$$\int Tf = \sum_1^h \frac{|S_j^*|}{|S_j|} \int_{S_j} f \ge \frac{1}{2} \sum_1^h \int_{S_j} f = \frac{1}{2} \int f.\xi$$

donde llamamos ξ a la suma de las funciones características de los S_j. Con estos recursos podemos abordar el siguiente resultado

3.9. Teorema

Sean $\mathfrak{K}$ una familia de abiertos acotados en $\mathbb{R}^n$ y M el operador maximal asociado. Sean φ y ψ funciones conjugadas Young continuas, al menos por la izquierda. Suponemos que φ es Δ_2 y verifica para algún p > 1 la condición

$$\varphi(au) \le a^p \varphi(u); \quad 0 \le a \le 1 .$$

Son equivalentes

a) M es de tipo débil-φ

b) La familia $\mathfrak{K}$ verifica la propiedad de cubrimiento B_ψ.

Demostración

Que b) implica a) es claro por el teorema 3.5. Para probar que a) implica b), haremos uso del siguiente lema

Lema. Sea M un operador positivo y positivamente homogéneo, y φ una función con las condiciones exigidas en el teorema. Son equivalentes

1) M es de tipo débil-φ

2) Existe c > 0 tal que, si $f \in \varphi(L^1)$ y A es acotado medible contenido en el conjunto $\{x: Mf(x) > 1\}$, entonces

$$\int_A Mf \le c \, \|\varphi(f)\|_1^{1/p} \, |A|^{1/q} \; ; \quad 1/p + 1/q = 1.$$

Demostración del lema

Para probar que 1) implica 2) basta observar que para cualquier $N \geq 1$ se tiene

$$\int_A Mf = \int_0^{\infty} |\{x\in A:\ Mf(x) > \sigma\}|\ d\sigma$$

$$\leq N\ |A| + \int_N^{\infty} |\{x:\ Mf(x) > \sigma\}|\ d\sigma$$

$$\leq N\ |A| + c\int_N^{\infty} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \varphi[f(x)/\sigma]\ dx \right] d\sigma$$

$$\leq N\ |A| + c\int_{\mathbb{R}^n} \varphi[f(x)]dx \int_N^{\infty} (1/\sigma)^p\ d\sigma$$

$$= N\ |A| + \frac{c}{p-1}\ N^{1-p} \int \varphi(f).$$

Puesto que $A \subset \{x:\ Mf(x) > 1\}$, ha de ser $|A| \leq c\ \|\varphi(f)\|_1$ y existe $N \geq 1$ tal que $N^p|A| = c\ \|\varphi(f)\|_1$. Para este N se tiene

$$\int_A Mf \leq c^{1/p}\ \|\varphi(f)\|_1^{1/p}\ |A|^{1/q} + \frac{1}{p-1}\ c^{1/p}\ \|\varphi(f)\|_1^{1/p}\ |A|^{1/q}$$

$$= \bar{c}\ \|\varphi(f)\|_1^{1/p}\ |A|^{1/q},$$

lo cual prueba 2).

Recíprocamente, sean $f \in \varphi(L^1)$ y A acotado medible contenido en el conjunto $\{x:\ Mf(x) > 1\}$. Se tiene

$$|A| \leq \int_A Mf \leq \bar{c}\ \|\varphi(f)\|_1^{1/p}\ |A|^{1/q}.$$

Por tanto, $|A| \leq c\ \|\varphi(f)\|_1$ y en consecuencia

$$|\{x:\ Mf(x) > 1\}| \leq c\int\varphi(f).$$

De aquí resulta, por ser M positivamente homogéneo, que M es de tipo débil φ.

Podemos ahora seguir con la prueba del teorema, en cuanto a que a) implica b). Consideramos en $\mathfrak{R}$ una familia finita $\mathcal{F} = \{R_1, .., R_k\}$. Puesto que M es, en particular, de tipo débil restringido, podemos seleccionar de la familia $\mathcal{F}$ una subfamilia $\{S_1,\ \ldots,\ S_h\}$ separada, es decir, que verifica

$$\text{i)}\quad |R_1\cup \dots \cup R_k| \le c_1|S_1\cup \dots \cup S_h|$$

$$\text{i')}\quad |S_j - (S_1\cup \dots\cup S_{j-1})| > \frac{1}{2}\,|S_j|;\ j = 2,\ \dots,\ h.$$

(La diferencia $S_j - (S_1\cup \dots\cup S_{j-1})$ se designa S_j^*). Sólo queda probar que, si S es la unión de todos los S_j y ξ es suma de la funciones características de los conjuntos $\{S_1,\ \dots,\ S_h\}$, se tiene

$$\text{ii)}\ \int \psi(\xi) \le \bar{c}\ |S|.$$

Para ello consideramos el operador T asociado a la familia $\{S_1,\dots,S_h\}$ que, como antes se ha dicho, verifica las propiedades

$$T(f) \le M(f); \qquad \int f.\xi \le 2\int_S Tf$$

Se deduce de lo anterior que

$$\int\psi(\xi) = \int \frac{\psi(\xi)}{\xi}\,\xi$$

$$\le 2\int_S T[\psi(\xi)/\xi] \le 2\int_S M[\psi(\xi)/\xi].$$

Utilizamos ahora el lema, que puede aplicarse ya que podemos suponer que $\psi(1) = 1$ y en S se verifica

$$M[\psi(\xi)/\xi] \ge T[\psi(\xi)/\xi] \ge 1,$$

por lo que resulta

$$\int\psi(\xi) \le c\|\varphi[\psi(\xi)/\xi]\|_1^{1/p}\ |S|^{1/q}$$

$$\le \bar{c}\|\psi(\xi)\|_1^{1/p}\ |S|^{1/q}\ ,$$

donde se ha tenido en cuenta, de acuerdo con el teorema 1.7., que φ y ψ verifican la desigualdad

$$\varphi[\psi(u)/u] \le \psi(u).$$

Se concluye de lo anterior que

$$\int\psi(\xi) \le c_2|S|$$

y así ii) es cierto y el teorema queda probado.

CAPITULO IV

EL OPERADOR MAXIMAL PARA INTERVALOS

IV.1.- Extensión del operador de $L(\mathbb{R}^n)$ a $L(\mathbb{R}^{n+m})$

El objetivo que se persigue en este capítulo es establecer las propiedades de acotación débil que corresponden al operador maximal asociado al producto cartesiano de dos familias de medibles si una de ellas se comporta como los intervalos cúbicos. Los resultados serán de aplicación a la familia de los intervalos en $\mathbb{R}^n$ como producto que son de intervalos de $\mathbb{R}$. Los recursos que frecuentemente se van a utilizar son el teorema de Fubini y un procedimiento natural para extender a $L(\mathbb{R}^{n+m})$ la actuación de un operador maximal definido en $L(\mathbb{R}^n)$, que se describe a continuación.

Si M_n es el operador maximal definido en el espacio $L(\mathbb{R}^n)$, asociado a una familia $\mathscr{S}$ de medibles acotados de $\mathbb{R}^n$, podemos definir en el espacio $L(\mathbb{R}^{n+m})$ un operador M_n^{n+m}, de la siguiente forma:

Si $f \in L(\mathbb{R}^{n+m})$ y $(s,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

$$M_n^{n+m} f(s,t) = \sup_{s\in S} \frac{1}{|S|} \int_S |f(x,t)|\, dx; \qquad S \in \mathscr{S}.$$

Vamos a probar que cuando M_n es de tipo débil-φ en $L(\mathbb{R}^n)$ resulta que M_n^{n+m} también es de tipo débil-φ en $L(\mathbb{R}^{n+m})$. Para ello consideramos el conjunto $\{(s,t)\colon M_n^{n+m} f(s,t) > \lambda\}$. Si fijamos t en $\mathbb{R}^m$ y tomamos el conjunto $P_t = \{s\colon (s,t) \in P\}$, puesto que M_n coincide con la restricción de M_n^{n+m} al espacio $L(\mathbb{R}^n \times \{t\})$, resulta

$$|P_t| = |\{s\colon M_n f(s,t) > \lambda\}| \le c \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left[\frac{|f(x,t)|}{\lambda}\right] dx.$$

Por tanto,

$$|P| \le c \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \varphi(|f|/\lambda).$$

Un primer resultado que podemos obtener de la idea anterior, y que contiene ya los elementos técnicos que se pondrán en juego en el resto del capítulo, es el que se expone a continuación, donde se establece que el operador maximal asociado a la familia de los intervalos de $\mathbb{R}^n$ es de tipo debil restringido. A su vez, y teniendo en cuenta el teorema 3.3, queda garantizada la propiedad de densidad para esta familia.

4.1. Teorema

El operador maximal M_n asociado a los intervalos de $\mathbb{R}^n$ es de tipo débil restringido (n,n). Es decir, existe $c_n > 0$ tal que, si E es medible de medida finita en $\mathbb{R}^n$ y $0 < \lambda < 1$, entonces

$$|\{x\colon M_n\chi_E(x) > \lambda\}| \le \frac{c_n}{\lambda^n} |E|.$$

Demostración

El teorema es cierto para $n = 1$, ya que, por la propiedad de cubrimiento de Besicovitch, el operador maximal asociado a los intervalos de $\mathbb{R}$ es de tipo débil (1,1).

Supongamos que para $n = h$ el enunciado del teorema es cierto, y expresamos cada intervalo R de $\mathbb{R}^{h+1}$ como producto de un intervalo I de $\mathbb{R}^h$ y uno J de $\mathbb{R}$. Consideramos las extensiones M_1^{h+1} y M_h^{h+1}, que son de tipo débil restringido (1,1) y (h,h), respectivamente. Si E es de medida finita y $\lambda \in (0,1)$, tratamos de acotar la medida del conjunto

$$A = \{(s,t) \in \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}\colon M_{h+1}\chi_E(s,t) > \lambda\}.$$

Para ello consideramos los conjuntos

$$B = \{(s,t)\colon M_1^{h+1}\chi_E(s,t) > \lambda/2\}$$

$$C = \{(s,t)\colon M_h^{h+1}\chi_B(s,t) > \lambda/2\}$$

Se tiene

$$|B| \le \frac{2c_1}{\lambda} |E|$$

$$|C| \le \frac{2c_h}{\lambda^h} |B|,$$

por tanto

$$|C| \le \frac{4c_1c_h}{\lambda^{h+1}} |E| = \frac{c_{h+1}}{\lambda^{h+1}} |E|$$

Veamos que $A \subset C$, lo que concluye la prueba del teorema.

Si $(s,t) \notin C$ y $R = I\times J$ es un intervalo con $s \in I$ y $t \in J$, se tiene

$$\frac{1}{|R|}\int_R \chi_E = \frac{1}{|I|}\int_I \left[\frac{1}{|J|}\int_J \chi_E(x,y)\ dy\ \right] dx$$

$$\leq \frac{1}{|I|}\int_I M_1^{h+1}\chi_E(x,t)\ dx$$

$$= \frac{1}{|I|}\int_I [\chi_B\ M_1^{h+1}\chi_E](x,t)\ dx\ +$$

$$+\ \frac{1}{|I|}\int_I [\chi_{\mathbb{R}^n - B}\ M_1^{h+1}\chi_E](x,t)\ dx$$

Teniendo en cuenta que en $\mathbb{R}^n$-B $M_1^{h+1}\chi_E$ es menor que $\lambda/2$ y, en cualquier caso, es siempre menor o igual que 1, resulta

$$\frac{1}{|R|}\int_R \chi_E \leq \frac{1}{|I|}\int_I \chi_B(x.t)\ dx\ +\ \lambda/2$$

$$\leq M_h^{h+1}\chi_B(s,t)\ +\ \lambda/2 \leq \lambda/2\ +\ \lambda/2\ =\ \lambda.$$

Así (s,t) no pertenece a A y el teorema es cierto.

IV.2. Operador maximal asociado al producto de familias de medibles

Se analizarán a continuación las propiedades de acotación del operador maximal asociado al producto de familias de medibles. El resultado de Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund [1935] relativo al operador maximal de los intervalos en $\mathbb{R}^n$ se obtendrá como consecuencia.

4.2. Teorema

Sea $\mathcal{S}$ una familia de abiertos acotados en $\mathbb{R}^n$ cuyo operador maximal es de tipo débil (1,1), y sea $\mathcal{T}$ una familia de abiertos acotados en $\mathbb{R}^m$ cuyo operador maximal es de tipo débil-φ, siendo φ una función de Orlicz y Δ_2. En $\mathbb{R}^{n+m}$ se considera el producto $\mathcal{R} = \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ de los elementos de $\mathcal{S}$ y los elementos de $\mathcal{T}$. Se verifica

i) El operador maximal M asociado a la familia $\mathcal{R}$ es de tipo débil Φ, siendo $\Phi(u) = \varphi(u)(1 + \lg^+ u)$.

ii) Si la función φ verifica la siguiente propiedad:
"existe $p > 1$ tal que $\varphi(au) \le a^p\varphi(u)$ para cada $a \in (0,1)$",
entonces M es también de tipo débil φ.

Demostración

La prueba consiste en estimar para $f \in L(\mathbb{R}^{n+m})$ y $\lambda > 0$ la medida del conjunto

$$A = \{(s,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : Mf(s,t) > \lambda\}.$$

Podemos suponer $f \ge 0$, y consideramos las extensiones a $L(\mathbb{R}^{n+m})$ de los operadores maximales definidos en $L(\mathbb{R}^n)$ y $L(\mathbb{R}^m)$ asociados a las familias $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$, es decir, los operadores M_n^{n+m} y M_m^{n+m} definidos por

$$M_n^{n+m} f(s,t) = \sup_{s \in S} \frac{1}{|S|} \int_S f(x,t)\, dx; \qquad S \in \mathcal{S}$$

$$M_m^{n+m} f(s,t) = \sup_{t \in T} \frac{1}{|T|} \int_T f(s,y)\, dy; \qquad T \in \mathcal{T}$$

que son de tipo débil (1,1) y de tipo débil φ respectivamente. Los operadores anteriores permiten definir los conjuntos

$$B = \{(s,t): M_m^{n+m}f(s,t) > \lambda/2\}$$

$$C = \{(s,t): M_n^{n+m}[\chi_B\, M_m^{n+m}f](s,t) > \lambda/2\}$$

El operador M puede obtenerse mediante una cierta relación de composición entre los operadores M_n^{n+m}, M_m^{n+m} y se concreta en que A está contenido en C, que a continuación vamos a probar.

Si $(s,t) \in A$, existe en $\mathcal{R}$ un elemento $R = S\times T$ tal que $s \in S$, $t \in T$ y

$$\frac{1}{|R|}\int_R f > \lambda.$$

Resulta entonces

$$M_n^{n+m}[\chi_B\, M_m^{n+m}f](s,t) \geq \frac{1}{|S|}\int_S [\chi_B\, M_m^{n+m}f](x,t)\, dx$$

$$= \frac{1}{|S|}\int_S M_m^{n+m}f(x,t)\, dx - \frac{1}{|S|}\int_S [\chi_{\mathbb{R}^n - B}\, M_m^{n+m}f](x,t)\, dx$$

Teniendo en cuenta que en $\mathbb{R}^n - B$ $M_m^{n+m}f$ es menor que $\lambda/2$, se obtiene

$$M_n^{n+m}\, [\chi_B\, M_m^{n+m}f](s,t) \geq$$

$$\geq \frac{1}{|S|}\int_S \left[\frac{1}{|T|}\int_T f(x,y)\, dy\right] dx - \lambda/2$$

$$= \frac{1}{|R|}\int_R f - \lambda/2 > \lambda - \lambda/2 = \lambda/2.$$

Así (s.t) pertenece a C, y el problema queda reducido a estimar $|C|$, para lo cual haremos uso de los siguientes lemas.

Lema 1

Sea T un operador definido en $L(\mathbb{R}^n)$, positivo, subaditivo, positivamente homogéneo y de tipo (∞,∞) de constante 1. Sea φ una función de Orlicz Δ_2 y $\Phi(u) = \varphi(u)(1 + \lg^+ u)$. Si T es de tipo débil φ existe $c > 0$ tal que, si $f \in \Phi(L^1)$, $\lambda > 0$ y E acotado medible contenido en $\{x: Tf(x) > \lambda\}$, resulta

$$\int_E Tf \leq c\lambda \int \Phi(|f/\lambda|)$$

Lema 2

Sea T un operador positivo y positivamnte homogéneo definido en $L(\mathbb{R}^n)$ y sea φ una función de Orlicz Δ_2 con la siguiente propiedad: Existe $p > 1$ tal que $\varphi(au) \le a^p\varphi(u)$ para cada $a \in (0,1)$.
Son equivalentes:

i) T es de tipo débil-φ

ii) Existe $c > 0$ tal que, si $f \in \varphi(L^1)$, $\lambda > 0$ y E es acotado medible contenido en $\{x: Tf(x) > \lambda\}$, entonces

$$\int_E Tf \le c\lambda \int\varphi(|f/\lambda|)$$

Supongamos de momento ciertos estos lemas y sigamos con la prueba del teorema y la estimación de $|C|$. Por ser M_n^{n+m} de tipo débil (1,1) ha de ser

$$|C| \le \frac{c}{\lambda}\int\chi_B\, M_m^{n+m}f = \frac{c}{\lambda}\int_B M_m^{n+m}f$$

y, puesto que M_m^{n+m} es de tipo débil-φ, teniendo en cuenta el lema 1 ó el lema 2, dado que $B = \{(s,t): M_m^{n+m}f(s,t) > \lambda/2\}$, resulta una de estas dos alternativas

$$\text{i)}\quad |C| \le \bar{c}\int\Phi(f/\lambda) = \bar{c}\int\varphi(f/\lambda)\ (1 + \lg^+(f/\lambda))$$

$$\text{ii)}\quad |C| \le \bar{c}\int\varphi(f/\lambda)$$

y el teorema queda probado.

Demostración del lema 1

Podemos suponer $f \ge 0$. Será suficiente probar que, si pertenece a L^1 la función $\varphi(f)(1 + \lg^+ f)$ y E es medible acotado contenido en el conjunto $\{x : Tf(x) > 1\}$, resulta

$$\int_E Tf \le c\int \varphi(f)(1 + \lg^+ f).$$

Haciendo uso de la fórmula de integración mediante la función de distribución se tiene

$$\int_E Tf = \int_0^\infty |\{x\in E:\ Tf(x) > \sigma\}|\ d\sigma \le |E| + \int_1^\infty |\{x:\ Tf(x) > \sigma\}|\ d\sigma.$$

Para cada $\sigma \geq 1$ consideramos el conjunto $A(\sigma) = \{x\colon f(x) > \sigma/2\}$ y descomponemos f de la forma $f = f^{(\sigma} + g$, siendo

$$f^{(\sigma} = f\chi_{A(\sigma)}$$

Por ser T subaditivo y de tipo (∞,∞), resulta

$$|\{x\colon Tf(x) > \sigma\}| \leq |\{x\colon Tf^{(\sigma}(x) > \sigma/2\}|$$

y se obtiene

$$\int_E Tf \leq |E| + \int_1^\infty |\{x\colon Tf^{(\sigma}(x) > \sigma/2\}|\, d\sigma \leq$$

$$\leq |E| + \bar{c}\int_1^\infty \left[\int_{A(\sigma)} \varphi[2f(x)/\sigma]\, dx\right] d\sigma$$

$$\leq |E| + \bar{c}\int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_1^{2f(x)} \varphi[2f(x)/\sigma]\, d\sigma\right] dx.$$

Puesto que $\sigma \geq 1$ y φ es función de Orlicz podemos escribir

$$\varphi[2f(x)/\sigma] \leq 1/\sigma\ \varphi[2f(x)]$$

Por tanto

$$\int_E Tf \leq |E| + \bar{c}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi[2f(x)] \left[\int_1^{2f(x)} \frac{1}{\sigma}\, d\sigma\right] dx =$$

$$= |E| + \bar{C}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi[f(x)]\ \lg^+ f(x)\, dx$$

y teniendo en cuenta que $|E| \leq \bar{c}\int\varphi(f)$, se tiene finalmente que

$$\int_E Tf \leq \bar{c}\int\varphi(f) + \bar{C}\int\varphi(f)\ \lg^+ f = c\int\varphi(f)(1 + \lg^+ f)$$

Así queda probado el lema 1.

Demostración del lema 2

Para probar que i) implica ii) tomemos $f \in \varphi(L^1)$ y sea E acotado medible contenido en $\{x\colon Tf(x) > 1\}$. Se tiene

$$\int_E Tf = \int_0^\infty |\{x\in E\colon Tf(x) > \sigma\}|\, d\sigma \leq$$

$$\leq |E| + \int_1^{\infty} |\{x:\ Tf(x) > \sigma\}|\ d\sigma$$

$$\leq |E| + \bar{c} \int_1^{\infty} \left[\int \varphi[|f(x)|/\sigma]\ dx \right] d\sigma.$$

Tenemos en cuenta ahora que por la condición exigida a φ y por ser $\sigma \geq 1$ resulta para cada x que $\varphi[|f(x)|/\sigma] \leq (1/\sigma)^p\ \varphi[|f(x)|]$. Por tanto

$$\int_E Tf \leq |E| + \bar{c}\int \varphi(|f(x)|\ \left[\int_1^{\infty} \sigma^{-p}\ d\sigma \right]\ dx$$

$$= |E| + \frac{\bar{c}}{p-1} \int \varphi(|f|),$$

y, dado que además es $|E| \leq \bar{c} \int \varphi(|f|)$, se tiene finalmente

$$\int_E Tf \leq c\int \varphi(|f|).$$

En el caso en que $E \subset \{x:\ Tf(x) > \lambda\}$, bastará en la desigualdad anterior cambiar f por f/λ y, puesto que T es positivamente homogéneo, se obtiene

$$\int_E Tf \leq c\lambda \int \varphi(|f/\lambda|).$$

Que ii) implica i) es inmediato ya que, si E es acotado medible contenido en $\{x:\ Tf(x) > \lambda\}$, entonces

$$|E| \leq \frac{1}{\lambda} \int_E Tf \leq c\int \varphi(|f/\lambda|).$$

Así queda probado el lema 2.

4.3-Corolario (Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund)

El operador maximal asociado a los intervalos de $\mathbb{R}^n$ es de tipo débil-φ para $\varphi(u) = u(1+\lg^+u)^{n-1}$.

El resultado es cierto prara n = 1 por la propiedad de cubrimiento de Besicovitch, y el teorema previo permite pasar del caso n-1 al caso n.

IV.3. Propiedades de cubrimiento mediante medibles con componente diádica.

Existe una via alternativa de obtener el resultado del corolario anterior (strong maximal theorem) mediante una propiedad de cubrimiento que afecta a los intervalos de $\mathbb{R}^n$ o, al menos, a los intervalos de $\mathbb{R}^n$ que tienen alguna componente de naturaleza diádica.

Mediante un método geométrico A. Córdoba y R. Feferman [1975] demuestran que la familia de los intervalos diádicos en $\mathbb{R}^2$ verifica una propiedad de cubrimiento de tipo exponencial. Esta propiedad permite afirmar (teorema 3.5) que el operador maximal correspondiente es de tipo débil-φ para $\varphi(u) = u(1 + \lg^+ u)$ y de esto se deduce que la familia de los intervavalos de $\mathbb{R}^2$ deriva el espacio $L(1+\lg^+L)$

A continuación, y mediante un procedimiento algo diferente al utilizado por Córdoba y Fefferman, se ofrece un resultado donde se analizan las condiciones que permiten concluir propiedades de cubrimiento que afectan al producto de dos familias de medibles.

4.4. Teorema

Consideremos en $\mathbb{R}^n$ una familia $\mathcal{D}$ de intervalos cúbicos diádicos y en $\mathbb{R}^m$ una familia $\mathcal{T}$ de abiertos acotados cuyo operador maximal es de tipo débil-φ, donde φ es una función de Orlicz Δ_2. Si ψ es una función de Orlicz cuya variación $\Delta\psi$ es no decreciente y para una constante positiva c se verifica

$$\varphi[\Delta\psi(u)] = \varphi[\psi(u + 1) - \psi(u)] \le c\ \psi(u); \qquad u \ge 1$$

entonces la familia $\mathcal{R} = \mathcal{D} \times \mathcal{T}$ en $\mathbb{R}^{n+m}$ verifica la propiedad de cubrimiento B_ψ

Demostración

Se probará que existen constantes positivas c_1 y c_2 tales que de cada familia finita $\mathcal{F} = \{R_1, \ldots, R_k\}$ en $\mathcal{R}$ es posible obtener una subfamilia $\{S_1, \ldots, S_h\}$ que verifica

$$\text{i)}\ |R_1 \cup \ldots \cup R_k| \le c_1 |S_1 \cup \ldots \cup S_h|$$

$$\text{ii)} \int \psi(\chi_1 + \dots + \chi_h) \le c_2 |S_1 \cup \dots \cup S_h|.$$

donde χ_j es la función característica de S_j, $1 \le j \le h$.

Para ello supongamos que los elementos de la familia $\mathcal{F}$ han sido ordenados de mayor a menor según su componente diádica. Procedemos de igual forma que en el teorema 3.6. y selecionamos la familia $\{S_1, \dots, S_h\}$ así: $S_1 = R_1$. Admitamos que hemos elegido $\{S_1, .., S_r\}$ que verifican la condición ii) para $h = r$ y $c_2 = 2$. Tomamos entonces para S_{r+1} el primer elemento de la familia

$$\mathcal{F}_r = \left\{ R \in \mathcal{F}: \int_R \Delta\psi(\chi_1 + \dots + \chi_r) \le \frac{|R|}{2} \right\}$$

donde

$$\Delta\psi(\chi_1 + \dots + \chi_r) = \psi[\chi_1 + \dots + \chi_r + \chi_{S_1 \cup \dots \cup S_r}] - \psi(\chi_1 + \dots + \chi_r),$$

y se consigue ii) para $h = r+1$. El proceso finaliza si $\mathcal{F}_r$ es vacía.

La familia $\{S_1, \dots S_h\}$ finalmente obtenida por el proceso anterior verifica la condición ii), está ordenada según la componente diádica, y para cada $R \in \mathcal{F}$ se tiene

$$\int_R \Delta\psi(\chi_1 + \dots + \chi_h) > \frac{1}{2} |R|.$$

Veamos que también en este caso se verifica i).

Fijado $R = D \times T$ en $\mathcal{F}$ y $(s, t) \in R$, sea $r \le h$ el primer índice tal que

$$\int_R \Delta\psi(\chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_r) > \frac{1}{2} |R|.$$

Por el criterio seguido en la selección resulta que R ha sido elegible en las etapas 1, 2,...,r-1. Por tanto ha de ser $|D_1| \ge |D_2| \ge .. \ge |D_r| \ge |D|$, donde D_j y D representan las componentes diádicas de S_j y R respectivamente. Además, si llamamos $\xi_r = \chi_1 + \dots + \chi_r$, en los puntos $(x, y) \in D \times T = R$ se verifica

$$\xi_r(x, y) = \xi_r(s, y)$$

puesto que si existiera (x, y) en $D \times T$ tal que $\xi_r(x, y) > \xi_r(s, y)$, existiría S_j, $1 \le j \le r$, tal que

$$(x,y) \in S_j \ ; \quad (s,y) \notin S_j$$

que significa, por una parte que los intervalos cúbicos diádicos D y D_j se cortan y, por otra, que D no está contenido en D_j, y esto es contradictorio, al ser $|D| \le |D_j|$. El mismo razonamiento sirve para negar que $\xi_r(x,y)$ es menor que $\xi_r(s,y)$. De lo anterior se concluye que si $(x,y) \in R$ se tiene

$$\Delta\psi(\xi_r)(x,y) = \Delta\psi(\xi_r)(s,y)$$

En consecuencia, si M_m^{n+m} es la ampliación a $L(\mathbb{R}^{n+m})$ del operador asociado a la familia $\mathcal{T}$ y definido en $L(\mathbb{R}^m)$, resulta

$$\begin{aligned} M_m^{n+m}\Delta\psi(\xi_r)(s,t) &\ge \frac{1}{|T|}\int_T \Delta\psi(\xi_r)(s,y)\ dy \\ &= \frac{1}{|D|}\int_D \left[\frac{1}{|T|}\int_T \Delta\psi(\xi_r)(x,y)\ dy \right] dx \\ &= \frac{1}{|R|}\int_R \Delta\psi(\xi_r) > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

lo que significa que R está contenido en el conjunto

$$\{(s,t)\colon\ M_m^{n+m}\Delta\psi(\xi_r)(s,t) > 1/2\}$$

Cambiando en el conjunto anterior r por h, y puesto que $\Delta\psi$ es no decreciente, se obtiene que tanto R como $R_1 \cup \ldots \cup R_k$ están contenidos en

$$\{(s,t)\colon\ M_m^{n+m}\Delta\psi(\xi_h)(s,t) > 1/2\}$$

y, puesto que M_m^{n+m} es de tipo débil-φ, se concluye finalmente que

$$|R_1 \cup \ldots \cup R_k| \le c\int \varphi[2\Delta\psi(\xi_h)] \le \bar{c}\int \psi(\xi_h) \le c_2|S_1 \cup \ldots \cup S_h|.$$

Así se verifica i) y el teorema es cierto.

4.5-Corolario

La familia de los intervalos en $\mathbb{R}^2$ tales que una de sus proyeccciones es diádica verifica una propiedad de cubrimiento de tipo exponencial. El operador maximal asociado a la familia de los intervalos (diádicos ó no) de $\mathbb{R}^2$ es de tipo débil-φ, para $\varphi(u) = u\ (1+\lg^+ u)$.

En efecto. Los intervalos en $\mathbb{R}^2$ con una proyección diádica resultan del producto cartesiano de intervalos de $\mathbb{R}$ por intervalos diádicos de $\mathbb{R}$. Por tanto podemos aplicar el teorema para $\varphi(u) = u$, y la función ψ debe verificar la condición

$$\psi(u+1) - \psi(u) \leq c\ \psi(u).$$

En particular podemos tomar $\psi(u) = u\ e^u$, y en consecuencia con el Teorema 3.5. el operador maximal $\bar{M}$ asociado a los intervalos de R^2 con una proyección diádica es de tipo débil-φ para $\varphi(u) = u(1+\lg^+ u)$.

Consideremos ahora la familia de los intervalos (diádicos ó no) de $\mathbb{R}^2$, y sea M el operador maximal asociado. Probaremos que existen constantes c_1 y c_2 tales que

$$|\{x\colon\ Mf(x) > \lambda\}| \leq c_1 |\{x\colon\ \bar{M}f(x) > \lambda/c_2\}|.$$

Para justificar esto, sea I un intervalo en $\mathbb{R}^2$ que verifica

$$\int_I f > \lambda |I|.$$

Podemos encontrar dos intervalos D_1 y D_2 con proyección diádica y consecutivos tales que

$$I \subset D_1 \cup D_2; \qquad \frac{1}{2}\ |D_1| = \frac{1}{2}\ |D_2| \leq |I|$$

y para alguno de ellos, que llamamos D, se ha de verificar que

$$\int_D f > \frac{\lambda}{4}\ |D|.$$

Por otra parte, es claro que

$$I \subset D_1 \cup D_2 \subset \mathcal{H}(D;\ 1/3)$$

donde $\mathcal{H}(D; 1/3)$ representa el halo-1/3 de D respecto a la familia $\mathfrak{I}$ de los intervalos de $\mathbb{R}^2$, es decir,

$$\mathcal{H}(D;\ 1/3) = \cup\{I \in \mathfrak{I}\colon\ |I \cap D| > (1/3)|I|\}.$$

Por el teorema 4.1. se tiene que $|\mathcal{H}(D;\ 1/3)| \leq c_1 |D|$. Además, si $\{E_\alpha\}$ es una familia arbitraria de medibles, es siempre cierto que

$$\cup\{\mathcal{H}(E_\alpha;\ \lambda)\} \subset \mathcal{H}\ [(\cup\ E_\alpha);\ \lambda].$$

De todo lo anterior resulta

$$|\{x\colon\ Mf(x) > \lambda\}| = |\ \cup\{I\colon \int_I f > \lambda |I|\}| \leq$$

$$\leq |\ \cup\{\mathcal{H}(D;\ 1/3)\colon \int_D f > \frac{\lambda}{4}\ |D|\}|$$

$$\leq |\mathcal{H}\,[\cup\{D: \int_D f > \frac{\lambda}{4}\,|D|\};\ 1/3]|$$

$$\leq c_1 |\cup\{D: \int_D f > \frac{\lambda}{4}\,|D|\}|$$

$$\leq c_1 |\{x: \overline{M}\, f(x) > \frac{\lambda}{4}\}|.$$

Así el corolario es cierto.

CAPITULO V

LA FUNCION DE HALO

V.1. Acotación de tipo débil restringido del operador maximal. La función de halo.

Si una base de diferenciación formada por abiertos acotados e invariante por homotecias deriva $\varphi(L)$, entonces el operador maximal es de tipo débil-φ (teorema 3.4). En particular dicho operador es de tipo débil-φ restringido a funciones características de conjuntos medibles de medida finita. Es decir, si E es medible de medida finita y $\lambda \in (0,1)$, entonces

$$|\{x:\ M\chi_E(x) > \lambda\}| \le c\ \varphi(1/\lambda)\ |E|.$$

Recíprocamente, si el operador maximal asociado a una base verifica una acotación de tipo débil-φ restringido, como la anterior, ¿se puede afirmar que la base deriva $\varphi(L)$?. ¿Cuál es la mejor acotación que puede obtenerse para un operador maximal que sea de tipo débil-φ restringido?

El resultado de Buseman-Feller (teorema 3.3) nos garantiza que el operador maximal asociado a una base invariante por homotecias es de tipo débil restringido. Esto justifica la siguiente definición

Sea $\mathfrak{B}$ una base cuyo operador maximal M es de tipo débil restringido. Llamamos función de halo de $\mathfrak{B}$ a la función η definida así

$$\eta(u) = \sup\left\{\frac{|x:\ M\chi_E(x) > 1/u|}{|E|}\ ;\ 0<|E|<\infty\right\}\ ;\ u > 1$$

Si $0 \le u \le 1$, podemos tomar $\eta(u) = u$.

Para la base formada por los intervalos cúbicos es fácil observar que la función de halo η verifica la acotación

$$u \le \eta(u) \le cu\ ;\ u \ge 1$$

A su vez, la función de halo correspondiente a la base de los intervalos en $\mathbb{R}^2$ verifica la acotación

$$u(1 + \lg^{+}u) \le \eta(u) \le cu(1 + \lg^{+}u);\ u \ge 1$$

De hecho, las bases anteriores derivan los espacios L y $L(1 + \lg^{+}L)$ respectivamente. Podría pensarse, entonces, que para una base con función de halo η el espacio máximo de derivación debe ser $\eta(L)$. Esta cuestión es conocida como *la conjetura de la función de halo.* Desde otro punto de vista, el el problema consiste en determinar las condiciones por las cuales la acotación débil-φ restringida para el operador maximal supone la acotación débil-φ.

R.Moriyón [1978] probó la validez de esta conjetura para el supuesto de una base invariante por homotecias cuya función de halo η verifique la acotación $\eta(u) \le cu$. El resultado es el siguiente:

5.1. Teorema

Sea $\mathfrak{B}$ una base de abiertos acotados en $\mathbb{R}^n$ invariante por homotecias y M el operador maximal correspondiente. Son equivalentes:

i) M es de tipo débil (1,1) restringido

ii) M es de tipo débil (1,1).

La idea fundamental de la prueba consiste en observar que, como consecuencia de la acotación débil restringida de M y la invarianza por homotecias, el conjunto K formado por la unión de los elementos de la base que contienen a un punto y tienen medida 1 es un conjunto acotado en $\mathbb{R}^n$. De esta forma, la base resulta ser regular respecto a los homotéticos de K y se comporta como la base de los intervalos cúbicos.

En este capítulo se exponen algunos resultados en relación con la acotación de tipo débil restringido del operador maximal, así como propiedades de cubrimiento que vienen asociadas a aquélla. Como ya se indicó en III.1, si el operador maximal M asociado a una familia $\mathfrak{R}$ de abiertos acotados es de tipo débil restringido, y $\{R_1,..,R_k\}$ es una familia finita en $\mathfrak{R}$, es posible obtener una subfamilia $\{S_1,..,S_h\}$ que verifica

$$\text{i)}\ |R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_k| \le c\ |S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_h|$$

$$\text{ii)}\ |S_j^*| \ge \frac{1}{2}\ |S_j|\ ,\ j = 2,..,h$$

siendo $S_1^* = S_1$ y $S_j^* = S_j - (S_1 \cup \ldots \cup S_{j-1})$ para cada j mayor que 1. Por la condición ii) decimos que la familia $\{S_1, \ldots , S_h\}$ es 1/2- separada.

Para la suma $\xi = \chi_1 + \chi_2 + .. + \chi_h$ de las funciones características de los S_j resulta, teniendo en cuenta que los S_j^* son disjuntos, se tiene

$$\begin{aligned}\int \xi &= |S_1| + \ldots + |S_h| \\ &\le |S_1| + 2|S_2^*| + \ldots + 2|S_h^*| \\ &\le 2|S_1 \cup \ldots \cup S_h|.\end{aligned}$$

Por tanto, si el operador maximal M asociado a una familia $\mathfrak{K}$ es de tipo débil restringido, la familia $\mathfrak{K}$ verifica una propiedad de cubrimiento en la que la función de solapamiento ξ pertenece, al menos, a L^1. Una información más valiosa sería conocer el comportamiento local de la función ξ que, como a continuación se indica, está relacionado con el comportamiento local del operador M.

A una familia $\{S_1,\ldots,S_h\}$ 1/2-separada, como la anterior, podemos asociar el operador lineal T definido en $L(\mathbb{R}^n)$ de la forma

$$Tf = \sum_j^h \Big[\frac{1}{|S_j|}\int_{S_j} f\Big]\, \chi_{S_j^*}$$

Es claro que T está mayorado por M y si $f \in L(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\int f.\xi = \sum_j \int_{S_j} f \le 2 \sum_j \frac{|S_j^*|}{|S_j|}\int_{S_j} f = 2\int Tf$$

En particular si E es medible de medida finita y llamamos S a la unión de los S_j, resulta

$$\int_E \xi \le 2\int_S T\chi_E \le 2\int_S M\chi_E$$

Las consideraciones anteriores se tendrán en cuenta con bastante frecuencia en los resultados que se exponen en el presente capítulo.

V.2. Acotación de tipo débil restringido e integrabilidad local.

La acotación de tipo débil restringido de un operador puede ser sustituida en algunos casos por una condición de integrabilidad local que resulta más manejable.

5.2. Teorema

Sea T un operador positivo y de tipo (∞,∞), definido en $L(\mathbb{R}^n)$. Son equivalentes

i) T es de tipo débil restringido (p,p); $p > 1$.

ii) existe $c > 1$ tal que, si A y E son medibles de medida finita, se verifica

$$\int_A T\chi_E \leq c\ |E|^{1/p}\ |A|^{1/q}$$

siendo $1/p + 1/q = 1$.

Demostración

Probemos que i) implica ii). En principio la desigualdad de ii) es cierta para $c = 1$ si $|A| \leq |E|$, puesto que

$$\int_A T\chi_E \leq |A| = |A|^{1/p}\ |A|^{1/q} \leq |E|^{1/p}\ |A|^{1/q}.$$

En otro caso, y para cualquier $a \in (0,1)$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_A T\chi_E &= \int_0^1 |\{x \in A:\ T\chi_E(x) > \sigma\}|\ d\sigma \\ &\leq a\ |A| + \int_a^1 |\{x:\ T\chi_E(x) > \sigma\}|\ d\sigma \\ &\leq a\ |A| + \bar{c}\ |E| \int_a^1 (1/\sigma)^p\ d\sigma \\ &\leq a\ |A| + \frac{\bar{c}}{p-1}\ |E|\ a^{1-p}. \end{aligned}$$

Podemos ahora elegir a que verifique $a^p|A| = |E|$ y de lo anterior resulta

$$\int_A T\chi_E \leq |E|^{1/p}\ |A|^{1/q} + \frac{\bar{c}}{p-1}\ |E|^{1/p}\ |A|^{1/q} = c\ |E|^{1/p}\ |A|^{1/q}.$$

Así ii) es cierto.

Reciprocamente. Sea E de medida finita $\lambda \in (0,1)$ y A acotado medible tales que

$$A \subset \{x:\ T\chi_E(x) > \lambda\}$$

Teniendo en cuenta ii), se tiene

$$|A| \le \frac{1}{\lambda} \int_A T\chi_E \le \frac{1}{\lambda}\ c\ |E|^{1/p}\ |A|^{1/q}$$

Así resulta

$$|A| \le (c/\lambda)^p |E|$$

lo cual supone i) y completa la demostración.

La idea anterior puede utilizarse para obtener un resultado más amplio, válido para funciones de Orlicz que tengan una propiedad de convexidad parcial de tipo p, $p > 1$.

5.3. Teorema

Sea T un operador positivo y de tipo (∞,∞) definido en $L(\mathbb{R}^n)$. Sea φ una función de Orlicz Δ_2 que verifica:

Existe $p > 1$ tal que $\varphi(au) \le a^p \varphi(u)$ para cada $a \in (0,1)$.

Son equivalentes

i) T es de tipo débil-φ restringido

ii) Existe $c > 0$ tal que, si A y E son medibles de medida finita y $a \in (0,1)$, entonces

$$\int_A T\chi_E \le a|A| + c|E|\ a\ \varphi(1/a).$$

Demostración

Observamos en primer lugar que la condición exigida a φ permite escribir ésta de la forma

$$\varphi(u) = u^p\ \bar{\varphi}(u)$$

donde $\bar{\varphi}$ es no decreciente.

Supongamos i) y sean A y E medibles de medida finita y $a \in (0,1)$. Resulta

$$\int_A T\chi_E = \int_0^1 |\{x \in A:\ T\chi_E(x) > \sigma\}|\ d\sigma$$

$$\leq a\ |A| + \bar{c}\ |E| \int_a^1 \varphi(1/\sigma)\ d\sigma$$

$$\leq a\ |A| + \bar{c}\ |E|\ \bar{\varphi}(1/a) \int_a^1 (1/\sigma)^p\ d\sigma$$

$$\leq a\ |A| + \frac{\bar{c}}{p-1}\ |E|\ \bar{\varphi}(1/a)\ a^{1-p}$$

$$= a\ |A| + c\ |E|\ a\ \varphi(1/a),$$

y se obtiene ii).

Recíprocamente, si la desigualdad expresada en ii) es cierta, tomamos E medible de medida finita y $\lambda \in (0,1)$. Sea A acotado medible tal que

$$A \subset \{x:\ T\chi_E(x) > \lambda\}.$$

Se tiene

$$|A| \leq \frac{1}{\lambda} \int_A T\chi_E \leq \frac{1}{\lambda} [a|A| + c|E|\ \varphi(1/a)\ a]$$

Si tomamos $a = \lambda/2$, resulta

$$|A| \leq \frac{1}{2}\ |A| + \frac{1}{2}\ c\ |E|\ \varphi(2/\lambda)$$

Por tanto

$$|A| \leq \bar{c}\ \varphi(1/\lambda)\ |E|$$

que completa la demostración.

Para funciones de Orlicz que no verifiquen la condición de convexidad-p, $p > 1$, la integrabilidad local de $T\chi_E$ puede expresarse en la forma

$$\int_A T\chi_E \leq a|A| + c\ |E|\ \varphi(1/a)\ a\ \lg(1/a); \qquad a \in (0,1)$$

condición que no asegura, ahora, la acotación débil-φ para T. Aún en estos casos puede ser útil el siguiente criterio

5.4. Teorema

Sea T un operador positivo y de tipo (∞,∞) definido en $L(\mathbb{R}^n)$. Si T es de tipo débil-φ restringido, donde φ es una función de Orlicz Δ_2, entonces para cada $p > 1$ existe $c > 0$ tal que, si A y E son medibles de medida finita y $a \in (0,1)$, se verifica

$$\int_A [T\chi_E]^{1/p} \le a|A| + c|E|\ \varphi(1/a^p)\ a$$

Recíprocamente, si la desigualdad anterior se verifica para algún p > 1 entonces T es de tipo débil-φ restringido.

Demostración

Elegidos $p > 1$, A y E medibles de medida finita y $a \in (0,1)$, se tiene

$$\int_A [T\chi_E]^{1/p} = \int_0^1 |x\in A:\ T\chi_E(x) > \sigma^p|\ d\sigma \le$$

$$\le a\ |A| + c\ |E| \int_a^1 \varphi(1/\sigma^p)\ d\sigma \le$$

$$\le a\ |A| + \frac{c}{p-1}\ |E|\ \bar{\varphi}(1/a^p)\ a^{1-p} =$$

$$= a|A| + \bar{c}\ |E|\ \varphi(1/a^p)\ a$$

donde se ha tenido en cuenta que $\varphi(u) = u\ \bar{\varphi}(u)$, y $\bar{\varphi}$ es no decreciente.

Reciprocamente. Supongamos que la desigualdad anterior se verifi- para un $p > 1$. Dados E medible de medida finita y $\lambda \in (0,1)$, consideramos un acotado medible A tal que

$$A \subset \{x:\ T\chi_E(x) > \lambda\} = \{x:\ [T\chi_E]^{1/p}(x) > \lambda^{1/p}\}$$

y se tiene

$$|A| \le \frac{1}{\lambda^{1/p}} \int_A [T\chi_E]^{1/p} \le \frac{1}{\lambda^{1/p}}\ [a\ |A| + c\ |E|\ \varphi(1/a^p)\ a]$$

Si tomamos $a = \lambda^{1/p}/2$, resulta

$$|A| \le \frac{1}{2}\ |A| + \frac{1}{2}\ c\ |E|\ \varphi(2^p/\lambda)$$

es decir

$$|A| \le \bar{c}\ \varphi(1/\lambda)\ |E|$$

lo cual indica que T es de tipo débil restringido y así el teorema queda probado.

El teorema anterior para $\varphi(u) = u$ toma una forma simple

5.5. Corolario

Si T es de tipo débil (1,1) restringido, entonces para $p > 1$ existe $c > 0$ tal que, si A y E son medibles de medida finita se verifica

$$\int_A [T\chi_E]^{1/p} \leq c\ |E|^{1/p}\ |A|^{1/q}; \qquad 1/p + 1/q = 1$$

Reciprocamente. Si esta desigualdad se verifica para algún $p > 1$, entonces T es de tipo débil (1,1) restringido.

III.-Acotación de tipo débil restringido y propiedades de cubrimiento.

Los criterios de integrabilidad local, obtenidos en la sección anterior, aplicados al operador maximal asociado a una familia de abiertos acotados, permiten obtener interesantes propiedades de cubrimiento.

5.6. Teorema

Sea $\mathfrak{R}$ una familia de abiertos acotados, M el operador maximal y p > 1. Son equivalentes:

a) M es de tipo débil (p,p) restringido

b) $\mathfrak{R}$ verifica una propiedad de cubrimiento de tipo débil B_q. Es decir, una propiedad de cubrimiento de tipo Besicovitch, en la que la función de solapamiento está acotada en $L(q,\infty)$, siendo $1/p + 1/q = 1$.

c) M es acotado de $L(p,1)$ en $L(p,\infty)$

Demostración

Para probar que a) implica b), supongamos dada en $\mathfrak{R}$ la familia finita $\{R_1,..,R_k\}$. Por ser M de tipo débil restringido, tal como se ha comentado en la sección I de este capítulo, podemos seleccionar de ella una subfamilia $\{S_1,..,S_h\}$ 1/2-separada, es decir, que verifique:

$$\text{i)}\ |R_1\cup R_2\cup\ldots\cup R_k| \le c\ |S_1\cup S_2\cup\ldots\cup S_h|$$

$$\text{ii)}\ |S_j^*| = |S_j - \bigcup_{i<j} S_i| \ge \frac{1}{2}\ |S_j|\ ,\ j = 2,..,h$$

Consideramos el operador T asociado a $\{S_j\}$ que, como es sabido, verifica las propiedades:

$$\text{i)}\ T(f) \le M(f); \qquad \text{ii)}\ \int f.\xi \le 2\int_S Tf$$

donde f es localmente integrable y hemos llamado S a la unión de los S_j y ξ a la suma de las funciones características de los S_j.

Sea E acotado medible, $\lambda > 0$, tal que

$$E \subset \{x:\ \xi(x) > \lambda\}$$

Teniendo en cuenta el teorema 5.2., se tiene

$$|E| \le \frac{1}{\lambda}\int_E \xi \le \frac{2}{\lambda}\int_S T\chi_E \le \frac{2}{\lambda}\int_S M(\chi_E)$$

$$\le \frac{2}{\lambda}\,\bar{c}\ |E|^{1/p}\ |S|^{1/q}$$

De lo anterior resulta que

$$|E| \le \left(\frac{c}{\lambda}\right)^q |S|$$

y así se obtiene que

$$|x:\ \xi(x) > \lambda\ | \le \left(\frac{c}{\lambda}\right)^q |S_1\cup\ldots\cup S_h|$$

por tanto

$$\|\xi\|_{q,\infty} = \sup_{\lambda>0} \lambda|x:\ \xi(x) > \lambda|^{1/q} \le c|S_1\cup\ldots S_h|^{1/q}$$

que prueba b).

Para probar que b) implica c), tomamos $f \in L(p,1)$, $f \ge 0$ y consideramos para $\lambda > 0$ el conjunto

$$\{x:\ Mf(x) > \lambda\ \} = \cup\{R:\ \int_R f > \lambda\ |R|\}$$

Sea $\{R_1,..,R_k\}$ una familia finita en $\Re$ del conjunto anterior. Por b) podemos disponer de una subfamilia $\{S_1,..,S_h\}$ tal que, si ξ es la suma de las funciones características de los S_j, entonces

i) $|R_1\cup R_2\cup..\cup R_k| \le C|S_1\cup S_2\cup..\cup S_h|$

ii) $\|\xi\|_{q,\infty} \le c|S_1\cup S_2\cup..\cup S_h|^{1/q}$

iii) $\int_{S_j} f > \lambda|S_j|$; $j=1,2,..,h$.

Por tanto:

$$|R_1\cup R_2\cup..\cup R_k| \le C\sum_1^h |S_j| \le \frac{C}{\lambda}\sum_1^h \int_{S_j} f =$$

$$= \frac{C}{\lambda}\int f.\xi \le \frac{C}{\lambda}\|f\|_{p,1}\|\xi\|_{q,\infty} \le$$

$$\le \frac{c}{\lambda}\|f\|_{p,1}\ |S_1\cup S_2\cup..\cup S_h|^{1/q}$$

Así obtenemos que

$$|R_1\cup R_2\cup..\cup R_k| \le (c/\lambda)^p\ \|f\|_{p,1}^p$$

lo que significa que

$$|x:\ Mf(x) > \lambda| \le (c/\lambda)^p \ \|f\|^p_{p,1}$$

En consecuencia

$$\|Mf\|_{p,\infty} = \sup_{\lambda>0} \lambda |x:\ Mf(x) > \lambda|^{1/p} \le c \ \|f\|_{p,1}$$

y queda probado c).

Por último, es claro que c) implica a), puesto que para $f = \chi_E$ se tiene:

$$\|M\chi_E\|_{p,\infty} \le c \ \|\chi_E\|_{p,1} = c|E|^{1/p}$$

Así:

$$|x:\ M\chi_E(x) > \lambda| \le \left(\frac{c}{\lambda} \right)^p |E|$$

y queda probado el teorema.

Se deduce del teorema anterior que si la función de halo η de una base verifica la acotación

$$\eta(u) \le c\ u^p;\ u \ge 1$$

entonces deriva el espacio de funciones que están localmente en $L(p,1)$. Basta observar que si $f \in L(p,1)$ y A_j es una sucesión de medibles tales que $|A_j| \longrightarrow 0$, entonces

$$|x:\ Mf\chi_j(x) > \lambda| \le (c/\lambda)^p \ \|f\chi_j\|_{p,1} \longrightarrow 0$$

y el resultado es consecuencia del teorema 3.2

El corolario que sigue, muestra un espacio de Orlicz como espacio de derivación para una base con función de halo del tipo anterior.

5.7. Corolario

Si $\mathfrak{B}$ es una base cuya función de halo η verifica la acotación $\eta(u) \le c\ u^p$, $p > 1$, entonces deriva el espacio $L^p(1 + \lg^+ L)^s$ para cualquier $s > p-1$

Demostración

Bastará comprobar que si $s > p-1$ y $\varphi(u) = u^p(1 + \lg^+ u)^s$ el espacio $\varphi(L)$ está contenido en el espacio de funciones que están localmente en

L(p,1). Sea $f \in \varphi(L)$ y E acotado medible. Consideramos los conjuntos disjuntos

$$E_0 = \{x \in E: f(x) < 1\}; \qquad E_k = \{x \in E: 2^{k-1} \le f(x) < 2^k\}, \; k = 1,2,..$$

Se tiene

$$\|f\chi_E\|_{p,1} \le |E_0|^{1/p} + \sum_k 2^k |E_k|^{1/p} =$$

$$= |E_0|^{1/p} + 2 \sum_k 2^{k-1} k^{s/p} |E_k|^{1/p} k^{-s/p}$$

y aplicando la desigualdad de Hölder a la suma anterior, resulta

$$\|f\chi_E\|_{p,1} \le |E_0|^{1/p} + 2 \left[\sum_k 2^{(k-1)p} k^s |E_k| \right]^{1/p} \left[\sum_k k^{-sq/p} \right]^{1/q}$$

De ser $sq/p > 1$, para una constante c que solo depende de s y p, se tiene

$$\|f\chi_E\|_{p,1} \le |E_0|^{1/p} + c \left[\int_E f^p (1 + \lg^+ f)^s \right]^{1/p}$$

que prueba que $f\chi_E$ pertenece a L(p,1) y el teorema es cierto.

El teorema 5.6 admite una tratamiento más general, al menos en lo que se refiere a la propiedad de cubrimiento de tipo débil, que aparece relacionada con la acotación de tipo débil del operador maximal. Recordamos que a una función de Young continua φ podemos asociar su conjugada Young trivializada ψ (Teorema 1.9.) tal que son complementarias y se relacionan de forma que las funciones $\bar{\varphi}$ y $\bar{\psi}$ son inversas.

5.8. Teorema

Sea $\mathfrak{K}$ una familia de abiertos acotados en $\mathbb{R}^n$ y M el operador maximal asociado. Sean φ función de Young continua y Δ_2 que para un p > 1 verifica:

$$\text{"}\varphi(au) \le a^p \varphi(u); \qquad 0 \le a \le 1\text{"}$$

Son equivalentes:

i) M es de tipo débil-φ restringido

ii) Existen constantes C > 0, c > 0 tal que, si $\{R_1,..,R_k\}$ es una familia finita en $\mathfrak{K}$, es posible elegir una subfamilia $\{S_1,..S_h\}$ de forma que, llamando S a la unión de sus elementos y ξ a la suma de las funciones características de los S_j, se tiene

1) $|R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_k| \leq C|S|$

2) Si E es medible de medida finita y a $\in$ (0,1), entonces

$$\int_E \xi \leq 2[a|S| + c|E|\ \varphi(1/a)\ a]$$

3) Si ψ es la conjugada Young trivializada de φ, entonces

$$|x:\ \xi(x) > \lambda| \leq \frac{|S|}{\psi(\lambda/2c)}$$

En particular $\mathfrak{R}$ verifica una propiedad de cubrimiento de tipo débil B_ψ

Demostración

Supongamos i) y sea en $\mathfrak{R}$ la familia $\{R_1,..,R_k\}$. Podemos elegir de ésta una subfamilia 1/2-separada $\{S_1,..,S_h\}$, de forma que si S es su unión se verifica la condición 1). Consideremos el operador lineal T asociado a $\{S_j\}$ de la misma forma que en el teorema 5.6. Si E es medible de medida finita entonces, teniendo en cuenta el teorema 5.3, para cualquier a $\in$ (0,1) se tiene

$$\int_E \xi \leq 2\int_S T(\chi_E) = 2\int_S M(\chi_E) \leq$$
$$\leq 2[a|S| + \bar{c}|E|\ \varphi(1/a)\ a]$$

y resulta 2). Por otra parte, si E es medible acotado y $\lambda > 1$ tal que

$$E \subset \{x:\ \xi(x) > \lambda\}$$

ha de ser

$$|E| \leq \frac{1}{\lambda}\int_E \xi \leq \frac{2}{\lambda}\ [a|S| + \bar{c}|E|\ \varphi(1/a)\ a]$$

Puesto que E está contenido en S existe a $\in$ (0,1) tal que

$$\varphi(1/a)|E| = |S|$$

Resulta

$$|E| \leq \frac{2}{\lambda}\ c\ |E|\ \varphi(1/a)\ a = \frac{2}{\lambda}\ c\ |E|\ \bar{\varphi}(1/a)$$

Es decir

$$\lambda/2c \leq \bar{\varphi}(1/a)$$

Por tanto

$$\psi(\lambda/2c) \leq \psi[\bar{\varphi}(1/a)] = \varphi(1/a) = \frac{|S|}{|E|}$$

de donde se obtiene

$$|E| \le \frac{|S|}{\psi(\lambda/2c)}$$

lo que permite concluir que

$$|\{x:\ \xi(x) > \lambda\}| \le \frac{|S|}{\psi(\lambda/2c)}$$

y se obtiene 3)

Probemos ahora que ii) implica i). Sea E medible de medida finita y consideramos para $\lambda \in (0,1)$ el conjunto

$$\{x:\ M\chi_E(x) > \lambda\} = \cup\{R:\ |R \cap E| > \lambda|R|\}$$

Tomamos una familia finita $\{R_1,..,R_k\}$ que verifique

$$|R_j \cap E| > \lambda|R_j| \ ;\ j = 1,..,k$$

Por ii) existe una subfamilia $\{S_1,..,S_h\}$ que verifica la condiciónes 1) y 2). Se tiene

$$|R_1 \cup \ldots \cup R_k| \le C\Big[|S_1| + \ldots + |S_h|\Big] \le$$

$$\le \frac{C}{\lambda}\sum_1^h |S_j \cap E| = \frac{C}{\lambda}\int_E \xi \le$$

$$\le \frac{2C}{\lambda}\,[a|S| + c|E|\ \varphi(1/a)\ a]$$

Si tomamos $a = \lambda/4c$, resulta

$$|R_1 \cup \ldots \cup R_k| \le \frac{1}{2}\ |S| + \frac{1}{2}\ c\ |E|\ \varphi(4c/\lambda)$$

es decir

$$|R_1 \cup \ldots \cup R_k| \le \bar{c}\ \varphi(1/\lambda)\ |E|$$

que termina la prueba del teorema.

Si el operador maximal es de tipo débil-φ restringido, donde φ es una función de Orlioz que no tiene la condición de p-convexidad, $p > 1$, como en el teorema precedente, entonces también puede obtenerse una propiedad de integrabilidad local y una propiedad de cubrimiento de tipo débil, salvo que ahora estas propiedades no aseguran la acotación débil-φ de partida.

Siguiendo la misma idea que en el teorema anterior se obtiene el resultado que sigue.

5.9. Teorema

Sea $\mathfrak{K}$ una familia de abiertos acotados y M el operador maximal. Supongamos que M es de tipo débil-φ restringido, donde φ es una función de Orlicz continua y Δ_2. Se verifica

i) Existe $c \geq 0$ tal que, si A y E son medibles de medida finita y $a \in (0,1]$ entonces

$$\int_A M\chi_E \leq a\ |A| + c\ |E|\ \varphi(1/a)\ a\ \lg(1/a)$$

ii) Si $\{S_1,..,S_h\}$ es una familia 1/2-separada en $\mathfrak{K}$ y llamamos S a la unión y ξ a la suma de las funciones características de los $\{S_j\}$, se tiene

$$|x:\ \xi(x) > \lambda| \leq \frac{|S|}{\psi(\lambda/2c)}$$

donde ψ es la conjugada Young trivializada de $\Phi(u) = \varphi(u)\lg^{*}u$. En particular $\mathfrak{K}$ verifica una propiedad de cubrimiento de tipo débil B_ψ.

Si el operador maximal es de tipo débil (1,1) se obtiene el resultado siguiente

5.10. Corolario

Si el operador maximal M asociado a una familia $\mathfrak{K}$ es de tipo débil (1,1) restringido, entonces $\mathfrak{K}$ verifica una propiedad de cubrimiento de tipo exponencial y en consecuencia M es, al menos, de tipo débil-φ, para $\varphi(u) = u(1+\lg^{+}u)$. En particular, si la función de halo η de una base $\mathfrak{B}$ verifica la acotación $\eta(u) \leq c\ u,\ u \geq 1$; entonces $\mathfrak{B}$ deriva, al menos, el espacio $L(1 + \lg^{+}L)$.

Demostración

Bastará aplicar el teorema 5.9 para $\varphi(u) = u$. La conjugada Young trivializada de $\Phi(u) = u\ \lg^{+}u$ es $\psi(v) = v\ e^{v}$, para valores de u y v mayores que 1.

Si $\{S_1,..,S_h\}$ es una familia 1/2-separada se obtiene que

$$|x:\ \xi(x) > \lambda| \le \frac{|S|}{\exp(\lambda/2c)}$$

Veamos que la desigualdad anterior permite probar que la integral de la función $\exp(\xi/4c)$ es finita. En efecto.

$$\begin{aligned}\int_S \exp(\xi/4c) &\le |S| + \int_1^\infty |x:\ \exp(\xi/4c) > \sigma|\ d\sigma \le \\ &\le |S| + \int_1^\infty |x:\ \xi > 4c\ \lg \sigma\ |\ d\sigma \le \\ &\le |S| + |S| \int_1^\infty (1/\sigma)^2\ d\sigma = \\ &= c|S|\end{aligned}$$

Así obtenemos que $\mathfrak{R}$ verifica una propiedad de cubrimiento exponencial y los teoremas 3.5. y 3.1. justifican el resto del Corolario.

V.4. Aproximaciones al problema del halo

En la sección anterior se han obtenido, mediante propiedades de cubrimiento, algunos resultados que permiten deducir espacios amplios de derivación de una base si se conoce su función de halo. La técnica que se ha seguido, siguiendo a A. Córdoba [1976], no es otra que el uso sistemático del operador lineal asociado a una familia separada de medibles, junto con la acotación local del operador maximal.

En la teoría de Diferenciación de Integrales han sido siempre de sumo interés cada uno de los métodos que han proporcionado una respuesta, aunque fuera parcial, a la conjetura de la función de halo. En rigor, salvando el trabajo de R. Moriyón recogido en el teorema 5.1., que utiliza de manera efectiva la invarianza por homotecias de la base, todos ellos están orientados a conseguir la mejor acotación de un operador, con las propiedades del operador maximal, que sea de tipo débil restringido. En particular, se considera interesante el caso en que el operador maximal sea de tipo débil restringido φ_s, siendo $\varphi_s(u) = u\ (1 + \lg^{+}u)^{s}$; $s \geq 0$.

El primer resultado que en esta linea constituye una aproximación a la conjetura de la función de halo fué obtenido por Hayes [1955]. Concretamente Hayes consigue probar que, si la función de halo η de una base verifica la acotación $\eta(u) \leq c\ \varphi_s(u)$, entonces la base deriva, al menos, el espacio

$$\varphi_{s+t}(L) = L\ (1 + \lg^{+}L)^{s+t}\ ;\ t > 1$$

M. Guzmán [1975] mejora lo obtenido por Hayes, y utilizando el método de extrapolación de Yano [1951], prueba que en las condiciones anteriores el espacio de derivación alcanza $L(1 + \lg^{+}L)^{s+1}$.

Más tarde R. Moriyón [1978], utilizando un conocido lema de E. M. Stein y N. J. Weiss [1969], sobre medias discretas de funciones de $L(1,\infty)$, prueba que el espacio de derivación para una base, no necesariamente invariante por homotecias, cuya función de halo verifique la acotación $\eta(u) \leq c.u$, puede ampliarse hasta $L[1 + \lg^{+}(\lg^{+}L)]$, y F. Soria [1985], mediante el mismo lema de Stein y Weiss, generaliza el resultado de Moriyón y prueba que si la función de halo de una base no supera a φ_s el espacio de derivación correspondiente contiene a $L(1 + \lg^{+}L)^{s}\ [1 + \lg^{+}(\lg^{+}L)]$.

En esta sección y en la siguiente se analiza el problema del halo en el caso en que la función de halo esté acotada por la función φ_s, y se exponen algunos métodos que permiten obtener alternativamente los resultados que antes se han mencionado. En el teorema 5.11. se utiliza la acotacion local del operador maximal y se consigue obtener el mismo resultado que por el método de extrapolación de Yano. En el teorema 5.12. se consigue un notable refinamiento del teorema anterior, al hacer uso de una propiedad de acotación local del operador maximal equivalente a la acotación débil restringida. En la siguiente sección una nueva versión del lema de Stein y Weiss nos va a permitir obtener de forma simple los resultados de R. Moriyón y F. Soria.

5.11. Teorema

Si la función de halo η de una base de diferenciación $\mathfrak{B}$ verifica para un $s \geq 0$ la acotación

$$\eta(u) \leq c\, u\, (1 + \lg u)^s$$

entonces $\mathfrak{B}$ deriva el espacio $L(1 + \lg^+ L)^{s+1}$.

Demostración

Sea M el operador maximal asociado a $\mathfrak{B}$. Se probará que M es de tipo débil-φ, para $\varphi(u) = u(1 + \lg^+ u)^{s+1}$.

En principio, si A y E tienen medida finita y $a \in (0,1]$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_A M\chi_E &= \int_0^1 |\{x \in A\colon M\chi_E(x) > \sigma\}|\, d\sigma \\ &\leq a|A| + c|E| \int_a^1 \frac{1}{\sigma} \left[1 + \lg \frac{1}{\sigma} \right]^s d\sigma \\ &\leq a|A| + c|E| \left[1 + \lg \frac{1}{a} \right]^s \int_a^1 \frac{1}{\sigma}\, d\sigma \\ &\leq a|A| + c|E| \left[1 + \lg \frac{1}{a} \right]^{s+1}. \end{aligned}$$

Sea ahora $f \in \varphi(L^1)$, $f \geq 0$. Consideramos los conjuntos

$$E_0 = \{x\colon 0 \leq f(x) < 1\}$$

$$E_k = \{x\colon 2^{k-1} \leq f(x) < 2^k\}; \quad k = 1, 2, \ldots$$

que permiten acotar f en la forma

$$\sum 2^{k-1}\chi_{E_k} \le f \le \chi_{E_0} + \sum 2^k \chi_{E_k}.$$

Puesto que M es subaditivo, positivamente homogéneo y de tipo (∞,∞), para un medible acotado A y para $a_k \in (0,1]$, se tiene

$$\int_A Mf \le \int_A M\chi_{E_0} + \sum 2^k \int_A M\chi_{E_k}$$

$$\le |A| + \sum 2^k\Big[a_k|A| + c|E_k|\Big(1 + \lg \frac{1}{a_k}\Big)^{s+1}\Big].$$

Tomamos ahora $a_k = 3^{-k}$. Resulta

$$\int_A Mf \le c_1|A| + c \sum 2^k(1 + k \lg 3)^{s+1}|E_k|$$

$$\le c_1|A| + \bar{c} \sum 2^{k-1} k^{s+1}|E_k|$$

$$\le c_1|A| + \bar{c} \int f(1 + \lg^+ f)^{s+1},$$

y puesto que para un $N > 0$ arbitrario se tiene que

$$\int_A Mf = N \int_A M(f/N)$$

podemos escribir

$$\int_A Mf \le N c_1|A| + \bar{c} \int f(1 + \lg^+ f/N)^{s+1}.$$

Finalmente, si fijado $\lambda > 0$ tomamos A acotado medible tal que

$$A \subset \{x: Mf(x) > \lambda\},$$

entonces

$$|A| \le \frac{1}{\lambda} \int_A Mf \le \frac{N}{\lambda} c_1|A| + \bar{c} \int \frac{f}{\lambda} \Big(1 + \lg^+ f/N\Big)^{s+1},$$

y tomando N tal que $(N c_1)/\lambda = 1/2$, resulta para una nueva constante $\bar{c}$

$$|A| \le \frac{1}{2}|A| + \bar{c} \int \frac{f}{\lambda} \Big(1 + \lg \frac{f}{\lambda}\Big)^{s+1},$$

lo que significa que

$$|\{x: Mf(x) > \lambda\}| \le c \int \varphi(f/\lambda)$$

y se concluye que M es de tipo débil φ para $\varphi(u) = u\ (1 + lg^{+}u)^{s+1}$. Por tanto la base deriva el espacio $L(1 + lg^{+}L)^{s+1}$ y el teorema queda probado.

Del teorema anterior se desprende, en particular. que si la función de halo η de una base $\mathfrak{B}$ verifica la acotación $\eta(u) \le cu$, entonces la base deriva, al menos, $L(1 + lg^{+}L)$.

En el teorema que sigue se mejora notablemente el resultado del teorema 5.11.

5.12. Teorema

Si la función de halo η de una base de diferenciación $\mathfrak{B}$ verifica para un $s \ge 0$ la acotación

$$\eta(u) \le c\ u\ (1 + lg\ u)^{s}$$

entonces la base deriva, para cada $t > 0$, el espacio $L(1 + lg^{+}L)^{s+t}$

Demostración

La prueba utiliza el criterio equivalente a la acotación de tipo débil restringido de un operador, que se expone en el Corolario 5.4.

Se probará que, si $t > 0$, entonces M es de tipo débil φ_{s+t} siendo $\varphi_{s+t}(u) = u\ (1 + lg^{+}u)^{s+t}$.

Fijemos $t > 0$ y sea $p = 1 + t/2$. Si $f \in \varphi_{s+t}(L^{1})$, $f \ge 0$, consideramos los conjuntos

$$E_0 = \{x:\ 0 \le f(x) < 1\}; \qquad E_k = \{x:\ 2^{k-1} \le f(x) < 2^{k}\}, \qquad k = 1,2,..$$

que nos permiten acotar f de la forma

$$\sum 2^{k-1}\chi_{E_k} \le f \le \chi_{E_0} + \sum 2^{k}\ \chi_{E_k}.$$

Puesto que M es subaditivo, positivamente homogéneo y de tipo (∞,∞) y la función $u^{1/p}$ es también subaditiva, elegido un acotado medible A se tiene para cualquier sucesión a_k en $(0,1]$ lo siguiente

$$\int_A [Mf]^{1/p} \le \int_A [M\chi_{E_0}]^{1/p} + \sum 2^{k/p} \int_A [M\chi_{E_k}]^{1/p}$$

$$\le |A| + \sum 2^{k/p} \left[a_k |A| + c\ \eta(1/a_k{}^{p})\ a_k |E_k|\right]$$

Tomamos ahora a_k tal que $2^{k/p}\, a_k = k^{-2}$. Resulta

$$\int [Mf]^{1/p} \le c_1 |A| + c \sum k^{-2}\, \eta(2^k\, k^{2p}) |E_k|$$

$$= c_1 |A| + c \sum 2^k\, k^{2(p-1)} \left(1 + \lg 2^k\, k^{2p}\right)^s |E_k|$$

Puesto que $2(p-1) = t$, se tiene para una constante c que depende de s y p

$$\int_A [Mf]^{1/p} \le c_1 |A| + c \sum 2^{k-1}\, k^t\, k^s\, |E_k|$$

$$\le c_1 |A| + c \int f(1 + \lg^+ f)^{s+t}$$

$$= c_1 |A| + c \int \varphi_{s+t}(f)$$

Para cualquier $r > 0$ se verifica que

$$[M\, f]^{1/p} = r^{-1/p}\, [\, M(rf)]^{1/p}$$

tomando en particular $r = (2\, c_1)^p$, se consigue para una nueva constante C

$$\int_A [Mf]^{1/p} \le \frac{1}{2}\, |A| + C \int \varphi_{s+t}(f)$$

Sea ahora A un acotado medible tal que

$$A \subset \{x\colon\ Mf(x) > 1\} \subset \{x\colon\ [Mf(x)]^{1/p} > 1\}.$$

Resulta

$$|A| \le \int_A [Mf]^{1/p} \le \frac{1}{2} |A| + C \int \varphi_{s+t}(f)$$

de donde fácilmente se obtiene para una nueva constante C que

$$|A| \le C \int \varphi_{s+t}(f)$$

es decir que

$$|\{x\colon\ Mf(x) > 1\}| \le C \int \varphi_{s+t}(f),$$

y basta ahora cambiar f por f/λ en la desigualdad anterior para que el teorema quede probado.

V.5. Medias de operadores

Si $\{f_k\}$ es una sucesión de funciones uniformemente acotadas en el espacio de Banach $L(p,\infty)$ con $p > 1$, entonces $\Sigma a_k f_k$ pertenece también a dicho espacio, siempre que la serie numérica Σa_k sea absolutamente convergente.

Lo anterior es aplicable a una sucesión de operadores T_k de tipo débil (p,p), $p > 1$, uniformemente en k, respecto de un operador de la forma $\Sigma a_k T_k$. Los teoremas que siguen tienen por objeto obtener la acotación de tipo débil que corresponde a un operador que se obtenga como media de una familia de operadores de tipo débil- φ, donde φ es una función de Orlicz. Los resultados son diferentes, al igual que ocurre en otras situaciones, según que φ sea, o no, p-convexa para $p > 1$, es decir, que exista p mayor que uno tal que, si $a \in (0.1)$ entonces $\varphi(au) \le a^p\, \varphi(u)$.

5.13. Teorema

Sea (Ω,μ) un espacio medible y $\{f_\alpha\colon \alpha \in \Omega\}$ una familia de funciones reales, medibles, no negativas, definidas en $\mathbb{R}^n$, que verican para cada $\lambda > 0$ la siguiente acotación

$$|\{x\colon f_\alpha(x) > \lambda\}| \le c(\alpha)\, \varphi(1/\lambda)$$

donde $c(\alpha) > 0$ y φ es una función de Orlicz Δ_2 y p-convexa, $p > 1$. Si la función f dada por

$$f(x) = \int_\Omega w(\alpha)\, f_\alpha(x)\, d\mu$$

está bien definida para $w(\alpha) > 0$, y las integrales

$$\int_\Omega w(\alpha)\, d\mu \quad , \qquad \int_\Omega w(\alpha)\, c(\alpha)\, d\mu$$

son finitas, entonces existe $c > 0$ tal que

$$|\{x\colon f(x) > \lambda\}| \le c\, \varphi(1/\lambda).$$

Demostración

En principio, fijado α y elegidos A acotado medible y $N > 0$, si tenemos en cuenta que por ser φ p-convexa podemos escribir $\varphi(u) = u^p\, \bar{\varphi}(u)$ y $\bar{\varphi}$ es no decreciente, se tiene

$$\begin{aligned}\int_A f_\alpha &\le N|A| + \int_N^\infty |\{x:\ f_\alpha(x) > \sigma\}|\ d\sigma \\ &\le N|A| + c(\alpha) \int_N^\infty \varphi(1/\sigma)\ d\sigma \\ &\le N|A| + c(\alpha)\ \bar{\varphi}(1/N) \int_N^\infty \left(\frac{1}{\sigma}\right)^p d\sigma \\ &= N|A| + \frac{c(\alpha)}{p-1} N\ \varphi(1/N).\end{aligned}$$

Sea ahora A acotado medible contenido en $\{x:\ f(x) > \lambda\}$. Por aplicación del teorema de Fubini, resulta

$$\begin{aligned}|A| &\le \frac{1}{\lambda} \int_A f(x)\ dx = \frac{1}{\lambda} \int_A \left[\int_\Omega w(\alpha)\ f_\alpha(x)\ d\mu \right] dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_\Omega w(\alpha) \left[\int_A f_\alpha(x)\ dx \right] d\mu \\ &\le \frac{1}{\lambda} [c_1 N|A| + c_2 N\ \varphi(1/N)].\end{aligned}$$

Si tomamos $N = \lambda/(2c_1)$ de lo anterior se obtiene

$$|A| \le \frac{1}{2}|A| + \bar{c}\ \varphi(1/\lambda)$$

y para una constante c resulta finalmente

$$|\{x:\ f(x) > \lambda\}| \le c\ \varphi(1/\lambda),$$

que completa la prueba del teorema.

Del teorema anterior se tiene, en particular, que si $\{T_\alpha:\ \alpha \in \Omega\}$ es una familia de operadores positivos de tipo débil-φ y constante $c(\alpha)$ positiva, donde φ es p-convexa, $p > 1$, entonces el operador T definido por

$$Tf(x) = \int_\Omega w(\alpha)\ T_\alpha f(x)\ d\mu$$

es de tipo débil-φ, siempre que se verifiquen las condiciones exigidas en el teorema anterior para las funciones $w(\alpha)$, $c(\alpha)$.

Asímismo, y para el caso discreto, resulta que, si $\{T_k\}$ es una sucesión de operadores positivos de tipo débil-φ y constante $c_k > 0$, donde φ es p-convexa, $p > 1$, entonces el operador $T = \Sigma w_k T_k$ es de tipo débil-φ, si las series Σw_k, $\Sigma w_k c_k$ son convergentes.

El resultado anterior puede utilizarse, como prueba alternativa al teorema 5.6, y obtener que si un operador, con las propiedades del operador maximal, es de tipo débil restringido (p,p), $p > 1$, entonces es acotado de $L(p,1)$ en $L(p,\infty)$.

Para funciones de Orlicz que no sean p-convexas, $p > 1$, el teorema 5.13. no es válido. La referencia obligada para el caso $p = 1$ es un lema de E.M. Stein. y N.J. Weiss [1969] que indica en qué condiciones una media de funciones de $L(1,\infty)$ pertenece a este espacio y dice lo siguiente.

Si $\{f_k\}$ es una sucesión de funciones no negativas en $\mathbb{R}^n$ que verifican para cada $k = 1,2,..$

$$|\{x\colon f_k(x) > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda}$$

y $\{a_k\}$ es una sucesión de números positivos de suma menor o igual que 1 y tal que la serie $E = \Sigma\, a_k \lg 1/a_k$ es finita, entonces

$$|\{x\colon \Sigma\, a_k\, f_k(x) > \lambda\}| \leq \frac{4\,c}{\lambda}\,[1 + E].$$

Haciendo uso del lema anterior R. Moriyón [1978] consigue demostrar, aún salvando algunas dificultades técnicas, que si la función de halo η de una base de diferenciación $\mathfrak{B}$ verifica la acotación $\eta(u) \leq c\,u$, en-entonces $\mathfrak{B}$ deriva el espacio $L\,[1 + \lg^+(\lg^+ L)]$, resultado que supera considerablemente los obtenidos por otros métodos.

Del mismo modo F. Soria [1985] utiliza el lema para obtener acotaciones locales del operador maximal cuando éste es de tipo débil restringido φ_s donde $\varphi_s(u) = u(1 + \lg^+ u)^s$, $s \geq 0$, y consigue también buenas aproximaciones en el problema del halo.

En el teorema que sigue se va a obtener una generalización y un refinamiento al lema de Stein y Weiss que antes se ha mencionado y puede ser aplicado a medias discretas de operadores de tipo débil φ cuando φ es una función de Orlicz. En particular, permite obtener, como se verá en la próxima sección, acotaciones en espacios del tipo de los espacios de Lorentz para el operador maximal si éste es de tipo débil restringido φ_s. Como consecuencia de ello se obtendrá, que si la función de halo se comporta como φ_s, entonces el espacio de derivación supera al espacio

$$L\,(1 + \lg^+ L)^s\,[1 + \lg^+(\lg^+ L)]$$

5.14. Teorema

Sea $\{f_k\}$ una sucesión de funciones en $\mathbb{R}^n$ no negativas que verifican para cada k y cada $\lambda > 0$ la siguiente acotación

$$|\{x:\ f_k(x) > \lambda\}| \le c\ \varphi(1/\lambda)$$

donde φ es una función de Orlicz y c es independiente de k. Sean $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ sucesiones numéricas positivas, de suma menor o igual que 1 y tal que la cantidad E definida por la serie

$$\Sigma\ a_k\ \lg 1/b_k$$

es finita. Se verifica

$$|\{x:\ \Sigma\ a_k\ f_k(x) > \lambda\}| \le 2c\ \varphi(2/\lambda)\ [1 + E].$$

Demostración

Para cada k consideramos los conjuntos

$$A_k = \{x:\ f_k(x) \le \lambda/2\}$$

$$B_k = \{x:\ \lambda/2 < f_k(x) \le \lambda/(2b_k)\}$$

$$C_k = \{x:\ f_k(x) > \lambda/(2b_k)\}$$

y escribimos f_k en la forma

$$f_k = u_k + v_k + w_k$$

donde u_k, v_k, w_k representan la restricción de f_k a los conjuntos A_k, B_k, C_k, respectivamente. Si ahora tomamos las funciones f, u, v, w de la forma

$$f = \Sigma\ a_k\ f_k\ ;\quad u = \Sigma\ a_k\ u_k\ ;\quad v = \Sigma\ a_k v_k\ ;\quad w = \Sigma\ a_k\ w_k$$

es claro que $f = u + v + w$, y resulta

$$|\{x:\ f(x) > \lambda\}| \le$$

$$|\{x:\ u(x) > \lambda/2\}| + |\{x:\ v(x) > \lambda/2\}| + |\{x:\ w(x) > 0\}|.$$

Analicemos cada uno de los sumandos del segundo miembro.

En primer lugar, puesto que

$$u = \Sigma\ a_k\ u_k \le (\lambda/2)\ \Sigma\ a_k \le \lambda/2,$$

se tiene que

$$|\{x:\ u(x) > \lambda/2\}| = 0. \qquad [1]$$

Por otra parte es claro que

$$
\begin{aligned}
|\{x\colon w(x) > 0\}| &\le \Sigma\ |\{x\colon w_k(x) > 0\}| \\
&= \Sigma\ |\{x\colon f_k(x) > \lambda/(2b_k)\}| \\
&\le \Sigma\ c\ \varphi(2b_k/\lambda) \\
&\le c\ \varphi(2/\lambda)\ \Sigma\ b_k \\
&\le c\ \varphi(2/\lambda) \qquad\qquad [2]
\end{aligned}
$$

donde hemos tenido en cuenta que por ser φ función de Orlicz verifica la propiedad de convexidad parcial: $\varphi(a\ u) \le a\ \varphi(u)$, $a \in [0,1]$.

Finalmente, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\int v = \Sigma\ a_k \int v_k &= \Sigma\ a_k \int_{B_k} f_k \\
&\le \Sigma\ a_k \left[\ (\lambda/2)|B_k| + \int_{\lambda/2}^{\lambda/(2b_k)} |\{x\colon f_k(x) > \sigma\}|\ d\sigma \right] \\
&\le \Sigma\ a_k \left[\ (\lambda/2)\ c\ \varphi(2/\lambda) + \int_{\lambda/2}^{\lambda/(2b_k)} c\ \varphi(1/\sigma)\ d\sigma \right] \\
&\le \Sigma\ a_k\ [c\ \bar{\varphi}\ (2/\lambda) + c\ \bar{\varphi}\ (2/\lambda)\ \lg 1/b_k\ ] \\
&\le c\ \bar{\varphi}\ (2/\lambda) + c\ \bar{\varphi}\ (2/\lambda)\ \Sigma\ a_k\ \lg 1/b_k \\
&= c\ \bar{\varphi}\ (2/\lambda)\ [1 + E],
\end{aligned}
$$

donde $\bar{\varphi}$ es la función asociada a la función de Orlicz φ que, como es sabido, es no decreciente y $\varphi(u) = u\ \bar{\varphi}\ (u)$.

Del cálculo anterior se deduce que si $H = \{x\colon v(x) > \lambda/2\}$, entonces

$$
\begin{aligned}
|H| &\le \frac{2}{\lambda} \int v \\
&\le \frac{2}{\lambda}\ c\ \bar{\varphi}\ (2/\lambda)\ [1 + E] \\
&= c\ \varphi(2/\lambda)\ [1 + E] \qquad\qquad [3]
\end{aligned}
$$

De [1], [2] y [3] se obtiene finalmente

$$
|\{x\colon f(x) > \lambda\}| \le c\ \varphi(2/\lambda)\ [2 + E]
$$

y el teorema queda probado.

Si en el teorema anterior tomamos $\varphi(u) = u$ y $b_k = a_k$, se obtiene el lema ya citado de Stein y Weiss. Podemos elegir también para la sucesión b_k los términos normalizados de la serie convergente $\Sigma\, k^{-2}$. Así resulta que, salvo constante, E viene determinado por la serie

$$\Sigma\, a_k \lg k.$$

Obtenemos, en particular, los resultados siguientes

5.15. Corolario

Si $\{f_k\}$ es una sucesión de funciones en $\mathbb{R}^n$ no negativas que verifican $k = 1,2,..$ la acotación

$$|\{x\colon f_k(x) > \lambda\}| \le c\, \varphi(1/\lambda)$$

para una función de Orlicz φ, y $\{a_k\}$ es una sucesión numérica positiva de suma menor ó igual que 1, entonces existe una constante positiva $\bar{c}$ tal que

$$|\{x\colon \Sigma\, a_k f_k(x) > \lambda\}| \le \bar{c}\, c\, \varphi(2/\lambda)\, [1 + \Sigma\, a_k \lg k].$$

5.16. Corolario

Si T_k es una sucesión de operadores positivos de tipo débil-φ con cota c uniformemente en k, y a_k una sucesión numérica positiva, tal que $\Sigma_k a_k \le 1$ y la cantidad $E = \Sigma\, a_k \lg k$ es finita, entonces el operador $T = \Sigma\, a_k T_k$ es de tipo débil φ y la cota es del orden de $(1 + E)$

5.17. Corolario

Sea T un operador positivo, subaditivo y positivamente homogéneo y f_k una sucesión de funciones no negativas tales que para $k = 1,2,..$ se tiene

$$|\{x\colon Tf_k(x) > \lambda\}| \le c\, \varphi(1/\lambda)$$

Entonces si $f = \Sigma\, a_k f_k$, donde a_k es una sucesión numérica positiva de suma menor ó igual que 1, existe $\bar{c} > 0$ tal que

$$|\{x\colon Tf(x) > \lambda\}| \le \bar{c}\, c\, \varphi(2/\lambda)\, [1 + \Sigma\, a_k \lg k].$$

Aplicaremos ahora la nueva versión del lema de Stein y Weiss para obtener algunos resultados en relación con el problema del halo.

5.18. Teorema

Sea T un operador definido en $L(\mathbb{R}^n)$, positivo, subaditivo, positivamente homogéneo y de tipo (∞,∞). Admitamos también que si $0 \le f \le g$ entonces $Tf \le Tg$. Si T es de tipo débil restringido (1,1), entonces es de tipo débil ϕ, donde $\phi(u) = u\,[1 + \lg^+(\lg^+ u)]$

Demostración

En principio elegimos $h \ge 0$ en $\phi(L^1)$ con la condición

$$|\{x:\ 0 < h(x) \le 2\}| = 0$$

y consideramos para k = 2, 3,.. los conjuntos $E_k = \{x:\ 2^{k-1} < h(x) \le 2^k\}$ que nos permiten acotar h de la forma

$$\sum 2^{k-1}\chi_k \le h \le \sum 2^k\chi_k$$

donde χ_k es la función característica de E_k. Tomamos la sucesión numérica

$$a_k = \frac{2^{k-1}}{\|h\|_1}\,|E_k| \ ;\ k = 2,3,..$$

cuya suma es menor o igual que 1, y consideramos las funciones

$$h_k = (2^k/a_k)\chi_k$$

Por la hipótesis sobre T resulta

$$|\{x:\ Th_k(x) > \lambda\}| = |\{x:\ T\chi_k(x) > \lambda a_k 2^{-k}\}|$$

$$\le \frac{c}{\lambda}\, 2^k a_k^{-1}|E_k| = \frac{2\ c}{\lambda}\,\|h\|_1.$$

De las propiedades del operador T se tiene

$$Th \le \sum T(2^k\chi_k) \le \sum a_k T\,(2^k a_k^{-1}\chi_k) = \sum a_k Th_k$$

y por el corolario anterior resulta

$$|\{x:\ Th(x) > 2\}| \le \bar{c}\ \|h\|_1\big[1 + \sum a_k\ \lg\,(k-1)\big]$$

$$= \bar{c}\ \|h\|_1 + \bar{c} \sum 2^{k-1}\ \lg\ (k-1)\ |E_k|$$

$$\le \bar{c}\ \|h\|_1 + \bar{c} \int h\ [\lg\ (\lg\ h)]$$

$$= \bar{c} \int h\ [1 + \lg^+(\lg^+ h)]$$

$$= \bar{c} \int \phi(h).$$

Tomamos ahora $f \ge 0$ en $\phi(L^1)$ y $\lambda > 0$. Si f_1 es la restricción de f al conjunto $\{x: f(x) > \lambda/2\}$ se tiene, por ser T de tipo $(\infty.\infty)$ y por la subaditividad que

$$|\{x: Tf(x) > \lambda\}| \le |\{x: Tf_1(x) > \lambda/2\}|.$$

Si $h = 4f_1/\lambda$, resulta que

$$|\{x: 0 < h(x) \le 2\}| = |\{x: 0 < f_1(x) \le \lambda/2\}| = 0.$$

Por tanto

$$|\{x: Tf_1(x) > \lambda/2\}| = |\{x: Th(x) > 2\}|$$
$$\le \bar{c} \int \phi(h) \le C \int \phi(f_1/\lambda) \le C \int \phi(f/\lambda)$$

que demuestra el teorema.

5.19. Corolario

Si la función de halo η de una base de diferenciación $\mathfrak{B}$ verifica la acotación $\eta(u) \le cu$; $u \ge 1$, entonces $\mathfrak{B}$ deriva el espacio $L[1 + \lg^+(\lg^+ L)]$.

V.6. Los espacios $L[\vartheta s]$, $L[\bar{\vartheta} s]$

En relación con el problema de la función de halo es de destacar aquí el trabajo de F. Soria [1985], en el que se analiza la extensión de la acotación débil restringida del operador maximal en el marco de unos espacios funcionales que son del tipo de los espacios de Lorentz y que parecen ser los más apropiados cuando la función de halo se comporta como la función

$$\varphi_s(u) \le c\, u(1 + \lg^+ u)^s \;; \quad s \ge 0$$

Los resultados que se exponen a continuación siguen esencialmente las ideas de F. Soria, aunque la modificación que hemos dado al lema de E.M. Stein y N.J. Weiss, teorema 5.14, y su versión para medias de operadores, Corolario 5.17, nos van a permitir utilizar unos espacios de fácil manejo y obtener con ellos acotaciones globales de tipo débil para el operador maximal.

Asociada a la función φ_s consideramos la función

$$\vartheta s(v) = v\,(1 + \lg^+ 1/v)^s; \quad s \ge 0$$

Es claro que ϑs es no decreciente, subaditiva, mayor o igual que la identidad y verifica

$$\begin{aligned} \varphi_s\Big[\frac{1}{\vartheta s(v)}\Big] &= \frac{1}{\vartheta s(v)}\,\Big(1 + \lg^+ \frac{1}{\vartheta s(v)}\Big)^s \\ &\le \frac{1}{\vartheta s(v)}\,\Big(1 + \lg^+ \frac{1}{v}\Big)^s \\ &= \frac{1}{v} \end{aligned}$$

Definimos los espacios $L[\vartheta s]$ y $L[\bar{\vartheta} s]$ de la forma siguiente

$$L[\vartheta s] = \Big\{ f \in L^1 : \ \|f\|_{\vartheta s} = \int_0^\infty \vartheta s[y_f(t)]\, dt \ < \infty \Big\}$$

$$L[\bar{\vartheta} s] = \Big\{ f \in L^1 : \ \|f\|_{\bar{\vartheta} s} = \int_0^\infty \vartheta s[y_f(t)]\, \big[1 + \lg^+(\lg^+ t)\big]\, dt < \infty \Big\}$$

donde $y_f(t)$ es la función de distribución de f. Es fácil ver que $\|\cdot\|_{\vartheta s}$ y $\|\cdot\|_{\bar{\vartheta} s}$ son quasinormas que coinciden para funciones f tales que $\|f\|_\infty \le e$. Mediante un proceso habitual de discretización las quasinormas anteriores pueden ser estimadas, respectivamente, por las siguientes sumas

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\ \vartheta s[y_f(2^k)]\ ; \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\ [1 + lg^+(lg^+2^k)]\ \vartheta s[y_f(2^k)]$$

Una función f de soporte compacto pertenece a los espacios $L[\vartheta s]$, $L[\bar{\vartheta}s]$ si, y solo si, las sumas anteriores respectivas son finitas para $k \geq 1$, o bién si las integrales que definen las quasinormas son finitas en el intervalo $(1,\infty)$

Los espacios $L[\vartheta s]$ y $L[\bar{\vartheta}s]$ contienen localmente a los espacios de Orlicz $\varphi_s(L) = L(1 + lg^+L)^s$, $\phi_s(L) = L(1 + lg^+L)^s\ [1 + lg^+(lg^+L)]$ respectivamente.

En efecto. Sea g en $\varphi_s(L)$ y E de medida finita y llamemos $f = g\chi_E$. Observamos en primer lugar que puesto que $f \in \varphi_s(L^1)$ entonces

$$\int_1^{\infty} y_f(t)\ (1 + lg^+t)^s\ dt < \infty$$

Sean los conjuntos $A = \{t > 1:\ y_f(t) \leq t^{-2}\}$; $B = \{t > 1:\ t \notin A\}$. Resulta

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \vartheta s[y_f(t)]\ dt &\leq |E| + \int_1^{\infty} \vartheta s[y_f(t)]\ dt \\ &= |E| + \int_A \vartheta s(y_f(t))\ dt + \int_B \vartheta s[y_f(t)]\ dt \\ &\leq |E| + \int_A \frac{(1 + 2\ lg\ t)^s}{t^2} dt + \int_B y_f(t)\ (1 + 2\ lg\ t)^s dt \end{aligned}$$

De las dos últimas integrales, la primera es convergente en $(1,\infty)$ y la segunda es finita por hipótesis. De lo anterior se deduce que $g\chi_E$ pertenece a $L[\vartheta s]$. Con una prueba análoga se obtiene que si $g \in \phi_s(L)$ entonces g está localmente en $L[\bar{\vartheta}s]$.

5.20. Teorema

Sea T un operador definido en $L(\mathbb{R}^n)$, positivo, subaditivo, positivamente homogeneo, de tipo (∞,∞) y tal que $Tf \leq Tg$ cuando $0 \leq f \leq g$. Si T es de tipo débil restringido φ_s entonces existe $C > 0$ tal que, si $f \in L[\bar{\vartheta}s]$ y $\lambda > 0$ se verifica

$$|x:\ Mf(x) > \lambda| \leq C\ \varphi_s\left[\|f/\lambda\|_{\bar{\vartheta}s}\right]$$

Demostración

Observamos en primer lugar que para $s = 0$ φ_s y ϑs coinciden con la identidad y los espacios $L[\bar{\vartheta}o]$ y $L[1 + lg^+(lg^+L)]$ tienen normas equivalentes, por lo que el teorema 5.18 es un caso particular de éste.

Tomamos en principio h en $L[\bar{\vartheta}s]$, $h \geq 0$, con la condición

$$|x:\ 0 < h(x) \leq 2| = 0$$

Consideramos para $k = 2,3,\ldots$ los conjuntos $E_k = \{x:\ 2^{k-1} < h(x) \leq 2^k\}$, que nos permiten acotar h de la forma

$$\sum 2^{k-1}\chi_k \leq h \leq \sum 2^k\,\chi_k\,, \quad k = 2,3,..$$

donde χ_k representa la función característica de E_k. Sean

$$S = \sum 2^{k-1}\vartheta s(|E_k|)\ ; \qquad a_k = \frac{2^{k-1}\vartheta s(|E_k|)}{S}$$

Puesto que $S \leq \|h\|_{\vartheta s} \leq \|h\|_{\bar{\vartheta}s} < \infty$, se tiene que $\sum a_k \leq 1$. Tomamos las funciones $h_k = (2^k/a_k)\chi_k$. Por la hipótesis sobre T resulta

$$\begin{aligned}|x:\ Th_k(x) > \lambda| &= |x:\ T\chi_k(x) > \lambda a_k/2^k|\\ &\leq c\ \varphi_s\Big[\frac{2\,S}{\lambda\ \vartheta s(|E_k|)}\Big]|E_k|\\ &\leq c\ \varphi_s(2S/\lambda)\end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que $\varphi_s(u.v) \leq \varphi_s(u)\ \varphi_s(v)$ y que $\varphi_s\big[1/\vartheta s(v)\big] \leq 1/v$. De las propiedades del operador T se tiene

$$Th \leq \sum T(2^k\chi_k) = \sum a_k T(\frac{2^k}{a_k}\,\chi_k) = \sum a_k Th_k$$

y por el lema de Stein y Weiss en la versión del corolario 5.17 resulta

$$\begin{aligned}|x:\ Th(x) > 2| &\leq \bar{c}\ \varphi_s(S)\ [1 + \sum a_k\ lg\ (k-1)]\\ &= \bar{c}\ \varphi_s(S)\ \frac{1}{S}\ \Big[\ \sum 2^{k-1}[1 + lg\ (k-1)]\ \vartheta_s(|E_k|)\Big]\\ &\leq \bar{c}\ \bar{\varphi}_s(S)\ \|h\|_{\bar{\vartheta}s} \leq \bar{c}\ \varphi_s\big[\|h\|_{\bar{\vartheta}s}\big]\end{aligned}$$

Tomamos ahora $f \geq 0$ en $L[\bar{\vartheta}s]$ y $\lambda > 0$ y sea f_1 la restricción de f al conjunto $\{x: f(x) > \lambda/2\}$. Si $h = 4f_1/\lambda$, resulta

$$|x: 0 < h(x) \leq 2| = |x: 0 < f_1(x) \leq \lambda/2| = 0$$

y de ser T subaditivo y de tipo (∞,∞) se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} |x: Mf(x) > \lambda| &\leq |x: Mf_1(x) > \lambda/2| \\ &= |x: Mh(x) > 2| \\ &\leq C\ \varphi_s\left[\|f/\lambda\|_{\bar{\vartheta}s}\right] \end{aligned}$$

que demuestra el teorema.

De lo anterior se obtiene, en particular, que si la función de halo η de una base $\mathfrak{B}$ es como φ_s, entonces $\mathfrak{B}$ deriva las funciones que están localmente en $L[\bar{\vartheta}s]$, y por tanto deriva el espacio $\phi_s(L)$. Así queda justificado el siguiente resultado.

5.21. Corolario

Si la función de halo η de una base $\mathfrak{B}$ verifica la acotación

$$\eta(u) \leq c\ u\ (1 + \lg^+ u)^s;\ s \geq 0$$

entonces $\mathfrak{B}$ deriva el espacio $L(1 + \lg^+ L)^s\ [1 + \lg^+(\lg^+ L)]$.

Bibliografia

ALSEN, E.M. [1965].: Some coverings of Vitali type. Math. Ann. 159 (1965), 203-216.

BANACH, S. [1924].: Sur un théoreme de M. Vitali. Fund. Math. 5 (1924), 130-136.

BESICOVITCH, A.S. [1945].:A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions. Proc. Cambridge Philos. Soc. 41 (1945), 103-110.

BOURGAIN, J. [1986].: On high dimensional maximal functions associated to convex bodies. Amer. J. Math. 108 (1986), 1467-1476.

BOURGAIN, J. [1986]*.: On L^p- bounds for the maximal functions associated to convex bodies in $\mathbb{R}^n$. Israel J. Math. 54, 3 (1986), 257-265.

BRUCKNER, A.M. [1971].: Differentiation of integrals. Amer. Math. Monthly. 78 (1971), (Slaught Memorial Paper no. 12).

BUSEMANN, H and FELLER, W. [1934].: Zur Differentiation der Lebesgueschen integrale. Fund. Math. 22 (1934), 226-256.

CALDERON, C.P. [1973].: Differentiation through starlike sets in $\mathbb{R}^n$. Studia Math. 48 (1973), 1-13.

CALDERON, A.P and ZIGMUND, A. [1952].: On the existence of certain singular integrals. Acta Math. 88 (1952), 85-139.

CARLSSON, H. [1984].: A new proof of the Hardy-Littlewood maximal theorem. Bull. London. Math. Soc. 16 (1984), 595-596.

CARRILLO, M.T. [1979].: Operadores maximales de convolución. Tesis doctoral. Uni. Complutense de Madrid. 1979.

CHIARENZA, F and VILLANI, A. [1986].: Weak convergence of measures and weak type (1,q) of maximal convolution operators. Proc. A.M.S. 97 (1986), 609-616.

COIFMAN, R. and de GUZMAN, M. [1970].: Singular integrals and multipliers homogeneous spaces. Rev. Uni. Mat. Argentina. 25 (1970), 137-143.

CORDOBA, A. [1976].: On the Vitali covering properties of a differentiation basis. Studia Math. 57 (1976), 91-95

CORDOBA, A. [1978].: The Theorem s x t x ϕ(s,t). Mittag-Leffler Institut. Report No. 9 (1978).

CORDOBA, A and FEFFERMAN, C. [1976].: A weighted nom inequality for singular integrals. Studia Math. 57 (1976), 97-101.

CORDOBA, A and FEFFERMAN, R. [1975].: A geometric proof of the strong maximal theorem. Ann. of Math. 102 (1975).

CORDOBA, A and FEFFERMAN, R. [1977].: On differentiation of integrals. Pro. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 74 (1977) 2211-2213.

CORDOBA, A and FEFFERMAN, R. [1977]*.: On the equivalence between the boundedness of certain classes of maximal and multiplier operators in Fourier analysis. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 74 (1977), 423-425.

FEFFERMAN, C. [1971].: The multiplier problem for the ball. Ann of Math. 94 (1971), 330-336.

FEFFERMAN, R. [1974].: A theory of entropy in Fourier analysis. Tesis doctoral. Princeton Uni. 1974.

FEFFERMAN, R. [1981].: Strong differentiation with respec to measures. Amer. J. Math. 103 (1981), 33-40.

de GUZMAN, M. [1970].: A covering lemma with applications to differentiability of measures and singular int. operators. Studia Math. 34 (1970), 299-317.

de GUZMAN, M. [1970]*.: Singular integrals with generalized homogeneity. Rev. Acad. Ci. Madrid. 64 (1970). 77-137.

de GUZMAN, M. [1972].: An inequality for the Hardy-Littlewood maximal operator with respect to a product of differentiation basis. Studia Math. 49 (1972), 185-194.

de GUZMAN, M. [1972]*.: On the derivation and covering properties of a direntiation basis. Studia Math. 44 (1972), 359-364.

de GUZMAN, M. [1972]**.: An extension of Sard's theorem. Bol. Soc. Brasileira. Mat. 3 (1972), 133-136.

de GUZMAN, M. [1975].: Differentiation of integrals in $\mathbb{R}^n$. Lecture Notes in Math. 481. (Springer. Berlin. 1975).

de GUZMAN, M. [1981].: Real variable methods in Fourier analysis. North-Holland. Math. Stud. 46 (North-Holland. Amsterdam. 1981).

de GUZMAN, M and WELLAND, G.V. [1971].: On the differentiation of integrals. Rev. Uni. Mat. Argentina. 25 (1971), 253-276.

HARDY, G.H and LITTLEWOOD, J.E. [1930].: A maximal theorem with function theoretic applications. Acta Math. 54 (1930) 81-116.

HAYES, C.A. [1952].: Differentiation of some classes of set functions. Proc. Cambridge. Philos. Soc. 48 (1952), 374-382.

HAYES, C.A. [1952]*.: Differentiation with respect to ϕ-pseudo-strong blankets and related problems. Pro. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 283-296.

HAYES, C.A. [1958].: A sufficient condition for the differentiation of certain classes of set functions. Proc. Cambridge Philos. Soc. 54 (1958), 346-353

HAYES, C.A. [1966].: A condition of halo type for the differentiation of classes of integrals. Canad. J. Math. 18 (1966), 1015-1023.

HAYES. C.A. [1976].:Derivation of the integrals of L^q-functions. Pacific. J. Math. 64 (1976), 173-180.

HAYES, C.A and PAUC, C.Y. [1955].: Full individual and class differentiation theorems in their relations to halo and Vitali properties. Canad. J. Math. 7 (1955), 221-274.

HAYES, C.A and PAUC, C.Y. [1970].: Derivation and martingales. (Springer. Berlin. 1970).

HUNT, R. [1966].: On L(p,q) spaces. L'ens. Mathematique. 12 (1966), 249-276.

JESSEN, B. MARCINKIEWICZ, J and ZIGMUND, A. [1935].: Note on the differentiability of multiple integrals. Fund. Math. 25 (1935), 217-234.

LEBESGUE, H. [1904].: Leçons sur l'integration et la recherche des fonctions primitives. (Gauthier-Villars. Paris. 1904).

MORIYON, R. [1978].: El halo en la teoría de diferenciación de integrales. Tesis doctoral. (Uni. Complutense de Madrid. 1978).

MORSE, A.P. [1944].: A theory of covering and differentiation. Trans. Amer. Math. Soc. 55 (1944), 205-235.

NIKODYM. O. [1927].: Sur la mesure des ensembles plans dont tous les points sont rectilinéairement accesibles. Fund. Math. 10 (1927), 116-168.

PERAL, I. [1974].: Nuevos métodos en diferenciación. Tesis doctoral. Uni. Complutense de Madrid. 1974).

PERAL, I. [1977].: A general result on the equivalence between derivation of integral and weak inequalities for the Hardy-Littlewood maximal operator. Studia Math. 60 (1977), 91-96.

POSSEL, R. [1936].: Sur la dérivation abstraite des fonctions d'ensemble. J. Math. Pures Appl. 15 (1936) 391-409.

RUBIO, B. [1971].: Propiedades de derivación y el operador maximal de Hardy-Littlewood. Tesis doctoral. (Univ. Complutense de Madrid. 1971).

RUBIO, B. [1976].: The property of weak type (p,p) for the Hardy-Littlewood maximal operator and derivation of integrals. Studia Math. 57 (1976), 251-255.

SAKS, S. [1933].: Théorie de l'intégrale. (warszawa. 1933).

SAKS, S. [1934].: Remaks on the differentiability of the Lebesgue indefinite integral. Fund. Math. 22 (1934), 257-261.

SJOGREN, P. [1983].: A remark on the maximal function for measures in $\mathbb{R}^n$. Amer. J. Math. 105 (1983), 1231-1233.

SORIA, F. [1985].: Note on differentiation of integrals and the halo conjeture. Studia Math. 81 (1985).

SORIA, F. [1985]*.: Examples and counterexamples to a conjeture in the theory of differentiation of integrals. Annals of Math. 123 (1985)

STEIN, E.M. [1961].: On limits of sequences of operators. Ann. of Math. 74 (1961), 140-170.

STEIN, E.M. [1969].: Note on the class L lgL. Studia Math. 31 (1969), 305-310.

STEIN, E.M. [1970].: Singular integral operators and differentiability properties of functions. Princeton Uni. Press. (1970).

STEIN, E.M and STROMBERG, J. [1983].: Behavior of maximal function in $\mathbb{R}^n$ for large n. Arkiv. Math. 21 (1983), 259-269.

STEIN, E.M and WEIS, G. [1959].: An extension of a theorem of Marcinkiewicz and some of its applications. J. Math. Mech. 8 (1959), 263-284.

STEIN, E. M. and WEISS, G. [1971].: Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces. Princeton Uni. Press. (1971).

STEIN, E.M. and WEISS, N. J. [1969].: On the convergence of Poisson integrals. Trans. A.M.S. 140 (1969), 34-54.

STEIN, E. M and WAINGER, S. [1978].: Problems in harmonic analysis related to curvature. Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1978), 1239-1295.

STRONBERG, J. [1976].: Maximal functions for rectangles with given directions. Thesis. (Mittag-Leffler Institute. Djursholm. Sweden. 1976).

VITALI, G. [1908].: Sui gruppi di punti e sulle funzione di variabili reali. Acad. Sci. Torino 43 (1908), 75-92.

YANO, S. [1951].: An extrapolation theorem. J. Math. Soc. Japan. 3 (1951), 296-305.

ZYGMUND, A. [1929].: Sur les fontions conjuguées. Fun. Math. 13 (1929), 284-303.

ZYGMUND, A. [1934].: On the differentiability of multiple integrals. Fund. Math. 23 (1934), 143-149.

ZYGMUND, A. [1959].: Trigonometric Series. Cambridge Univ. Press. (1959),

ZYGMUND, A. [1967].: A note on the differentiability of integrals. Colloq. Math. 16 (1967), 199-204.
