UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación

EL GRADO DE ABSTRACCIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CAMBIO DE SUMA Y RESTA EN CONTEXTOS RURAL Y URBANO

MEMORIA PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR POR

Juan José Díaz Díaz de León

Bajo la dirección del Doctor:

Vicente Bermejo

Madrid, 2004

ISBN: 84-669-2498-1

Universidad Complutense de Madrid

Facultad de Educación

Dpto. Psicologia Evolutiva y de la Educación

El grado de abstracción en la resolución de problemas de Cambio de suma y resta en contextos rural y urbano

Tesis Doctoral

Juan José Diaz Diaz de León

Director de Tesis: Dr. Vicente Bermejo

Madrid, España **Enero 2004**

INDICE

Agradecimientos

Al terminar una meta no sabe uno si debe mirar hacia atrás, hacia delante, pero yo prefiero ver hacia un lado y encuentro a quienes han estado apoyándome en este objetivo desde el principio hasta el final.

Para ellos es justo expresar mi agradecimiento por haber compartido conmigo los logros y las dificultades que se encontraron en el transcurso del camino.

En principio, deseo agradecer al Dr. Vicente Bermejo por haber dirigido esta tesis de doctorado con su calidad científica, experiencia de alto nivel y criterios metodológicos que han encausado mi formación como investigador, sin olvidar sus virtudes humanas.

Enseguida, agradezco a mi esposa Amy y nuestra hija Almudena Lucía quienes estuvieron siempre brindándome el apoyo moral, al compartir los momentos agradables y difíciles en la distancia y estancia durante estos 4 años de preparación académica.

También, expreso mi agradecimiento a los directores, profesores y, especialmente, a las alumnas y alumnos de las escuelas del estado de Zacatecas, México que participaron en este estudio.

Así mismo, quiero dar las gracias a la Universidad Complutense de Madrid por haberme dado la oportunidad de realizar el doctorado “Psicología escolar y desarrollo”.

Por último, expreso mi reconocimiento a la Unidad Académica de Psicología de la Universidad Autónoma de Zacatecas y al Programa de Mejoramiento del Profesorado quienes otorgaron la descarga académica y la beca de estudios con lo cual ha sido posible mejorar mi perfil profesional.

Introducción

Considerando la problemática del bajo aprovechamiento escolar en matemáticas resulta importante investigar en este campo, sobretodo en las primeras operaciones aritméticas como la suma y la resta. En México, las notorias desigualdades sociales que existen entre el contexto urbano y el contexto rural requieren estudiar las competencias matemáticas que presupondrían la existencia de diferencias en el rendimiento entre los niños de ambos contextos. El propósito general de la investigación es estudiar las diferencias en la competencia de solución de los problemas de Cambio de suma y resta tanto fáciles como difíciles con distinto grado de abstracción con alumnos de primero hasta cuarto curso de educación primaria en un contexto rural como dentro de un contexto urbano. La hipótesis general supone la existencia de diferencias en la solución de estos problemas según el nivel evolutivo y el contexto escolar. Esta suposición se prueba mediante un diseño mixto de medidas repetidas.

La fundamentación teórica se basa en un marco constructivista que plantea la construcción del pensamiento matemático infantil. Los niños aprenden a resolver problemas aritméticos mediante la elaboración de estrategias cognitivas de una manera activa e informal en un período temprano del desarrollo. El grado de abstracción de la tarea implica un proceso que parte del nivel concreto hacia el nivel abstracto, de lo inferior a lo superior, de lo simple a lo complejo. Así mismo, la noción de contexto se comprende desde el punto de vista sociocultural según el cual un conjunto de interacciones y situaciones sociales específicas modelan el desarrollo individual.

Esta línea de investigación referida a los problemas de Cambio de suma y resta cuenta con un abundante número de investigaciones enfocadas hacia la estructura semántica, el grado de dificultad, el nivel evolutivo, las estrategias utilizadas y los errores cometidos por los alumnos. Sin embargo, es notoria la escasez en la literatura de estudios que aborden el grado de abstracción y el tipo de contexto social de los escolares que resuelven las tareas mencionadas.

En la primera parte de esta investigación se expone el marco teórico sobre el tema en varias secciones.

La sección 1 trata sobre el planteamiento central de la investigación. Los resultados respecto al rendimiento escolar en matemáticas son preocupantes en los piases occidentales. La construcción espistemológica de este campo de acuerdo con el marco constructivista precisa las aportaciones relevantes en América y Europa, así como las categorías principales en debate dentro de la literatura. Además, se señala el desarrollo de la investigación sobre los distintos aspectos que convergen sobre el tema tales como los problemas verbales, y los procedimientos de solución. La justificación del estudio se sustenta con relación a las variables investigadas.

La sección 2 presenta la construcción del pensamiento matemático infantil necesario para la solución de las tareas de suma y resta. Las propiedades que caracterizan a la suma y la resta son requisitos previos a la solución de tales tareas. El esquema parte-todo representa una explicación necesaria para los problemas de Cambio (Sophian y McCorgary, 1994).

En la sección 3 se aborda la categorización de los problemas verbales siguiendo las clasificaciones propuestas por Vergnaud (1982), Carpenter y Moser (1982), Riley y Greeno (1983) y Bermejo y otros (1998). Todas mantienen en común la estructura semántica de los problemas distinguiendo cuatro tipos: Cambio, Combinación, Comparación e Igualación.

La sección 4 abarca los modelos de simulación de los problemas verbales más conocidos como el modelo de Briars y Larkin (1982), el modelo de Kintsch y Greeno (1983), el modelo de Riley y Greeno (1983) y el modelo de De Corte (1985). El primero se basa en el procesamiento de la información mediante el programa CHIPS. El segundo parte de la estructura del texto verbal. El tercero se representa a través de redes semánticas. El cuarto plantea la reformulación de los problemas verbales.

En la sección 5 se considera el grado de dificultad de los problemas verbales según la estructura semántica, el lugar de la incógnita y la jerarquía (Bermejo y Rodríguez, 1998).

La sección 6 expone las estrategias de solución que los niños suelen construir para resolver los problemas de suma y resta. Carpenter y Moser (1982) describieron las estrategias de modelado directo, las estrategias de conteo y las estrategias hechos numéricos tanto en la suma como en la resta. Además, se agrega la especificación que Baroody (1987) realiza con respecto a las estrategias de modelado y conteo en la suma.

En la sección 7 se describen los tipos de errores que los niños cometen en los problemas de suma y resta. Los errores conceptuales, procedimentales y de ejecución categorizan las fallas encontradas en tales problemas (Bermejo, Lago, Rodríguez, Dopico y Lozano, 2002).

La sección 8 fundamenta sobre el grado de abstracción. El conocimiento es comprendido como un proceso continuo de lo concreto a lo abstracto (Kamii, et al., 2001). Cuatro niveles de abstracción son establecidos para resolver las tareas: concreto, pictórico, numérico y verbal. En cada nivel se exponen las investigaciones realizadas al respecto.

En la sección 9 se explica el contexto a partir del enfoque sociocultural. La cognición y el contexto se relacionan mediante el conocimiento informal. Este conocimiento, en el ámbito de las matemáticas, se desarrolla dentro de la cognición cotidiana a través de las interacciones sociales y el uso de instrumentos requeridos para solucionar los problemas. Las competencias matemáticas de los niños urbanos son comparadas con las de sus iguales rurales. Los estudios de Saxe (1991) y Nunes (1985) son representativos del enfoque.

La sección 10 expone los programas de intervención en la educación de las matemáticas. Dada la importancia de vincular la investigación con la enseñanza en este dominio, varios programas han sido elaborados. El programa Instrucción Guiada Cognitivamente (Carpenter, 1993), el programa Educación de las Matemáticas Realistas (De Corte, 1990) y el programa Evolutivo Instruccional (Bermejo y otros, 2002) representan la perspectiva constructivista.

La sección 11 hace una representación breve sobre la enseñanza de la suma y la resta en la educación primaria en México. La reforma educativa impulsada en el actual sexenio presidencial es una manifestación de la política educativa vigente. La programación de los contenidos curriculares forma parte del curriculum educativo en este nivel de enseñanza. La descripción de los libros de texto desde primero hasta cuarto grado escolar es un bosquejo de las clases de matemáticas impartidas por los profesores para el aprendizaje de los alumnos respecto a los problemas aritméticos mencionados.

La parte de la metodología experimental integra los objetivos, el diseño experimental, el método, y el análisis y discusión de los resultados.

Los objetivos del estudio son definidos de acuerdo al grado de abstracción de la tarea, el contexto escolar, las estrategias de solución y los tipos de errores. La primera hipótesis plantea la existencia de diferencias evolutivas en el rendimiento, el grado de abstracción, las estrategias de solución y los errores cometidos entre los alumnos de primero a cuarto curso en cada contexto. La segunda hipótesis consiste en la suposición que existen diferencias en el rendimiento, el grado de abstracción, las estrategias de solución y el tipo de errores cometidos entre los alumnos de ambos contextos.

Estas hipótesis son probadas mediante un diseño experimental mixto de medidas repetidas que incluye el contexto y el curso escolar como las variables intersujetos, mientras que el tipo de problema, el tipo de operación y el lugar de la incógnita se identifican como las variables intrasujetos. Las variables dependientes son: el rendimiento, las estrategias y los errores manifestados por los participantes.

La metodología sigue el método clínico piagetiano puesto que los niños fueron entrevistados en la solución de cada problema. La muestra aleatoria del estudio consistió de 192 participantes siendo 96 alumnos del contexto rural divididos en 4 grupos formados de 24 alumnos por cada curso escolar. Los otros 96 escolares corresponden al contexto urbano divididos de igual manera que sus iguales rurales.

El material presentado a los alumnos fueron 16 problemas de Cambio. Ocho son problemas de suma y los otros 8 son problemas de resta. En cada serie hubo 4 problemas con la incógnita al final y 4 problemas con la incógnita al inicio. La tarea consiste que los participantes resuelvan y expliquen el procedimiento de solución de los problemas presentados durante las dos sesiones.

El análisis y discusión de los resultados comienza con el rendimiento, luego con el tipo de estrategia, y, al final, con el tipo de error. Los patrones de respuesta obtenidos por los alumnos de cada contexto se analizan según el curso escolar, el tipo de problema, el tipo de operación y el lugar de la incógnita, y se realiza una comparación de las respuestas entre ambos contextos. Este análisis se sustenta en los datos descriptivos, las pruebas estadísticas paramétricas, los efectos principales, las interacciones significativas y los efectos simples. La discusión de los resultados confirma los hallazgos de otros autores y los planteamientos constructivistas.

El análisis cualitativo de las estrategias propone un sistema de categorías general para los cuatro niveles de abstracción según el tipo de operación y el lugar de la incógnita. Así como, un sistema de categorías específico para cada nivel de abstracción. También se define el período temprano de manifestación de cada estrategia. El análisis mencionado se complementa con un estudio de caso sobre las estrategias utilizadas por un alumno más experto y un niño menos experto. El análisis cualitativo de los errores sigue el mismo proceso realizado con las estrategias.

Por último, las conclusiones hacen referencia a los postulados básicos de la teoría, los descubrimientos relevantes, las implicaciones educativas y la propuesta de nuevas líneas de investigación.

Parte I

Marco teórico

1. Planteamiento

En esta sección fundamentamos el planteamiento de la investigación a partir del rendimiento en matemáticas dentro del contexto internacional. Además, presentamos los centros de investigación relevantes y los avances en la construcción de las categorías que sustentan este estudio desde un marco de referencia epistemológica bajo una aproximación constructivista. Por último, justificamos la importancia del tema de investigación.

1. Rendimiento escolar en matemáticas

El interés por la investigación sobre el desarrollo del pensamiento matemático se ha considerado tanto a nivel teórico como práctico. Las razones teóricas, por una parte, se centran en la naturaleza jerárquico-secuencial de los contenidos matemáticos que favorecen el estudio evolutivo de su adquisición. En este nivel se examina la relación entre las representaciones y las estrategias, así como la incidencia de la semántica (significado) en la sintaxis (reglas procedimentales). Por otra, desde mediados de la década de los setenta los planteamientos teóricos en esta temática se distanciaron claramente de las posiciones piagetianas adoptando perspectivas propias del paradigma del procesamiento de la información. Actualmente, las investigaciones suelen enmarcarse dentro de la corriente cognitiva, tal como acontece en los demás ámbitos de la psicología.

Las implicaciones prácticas son relevantes en el curriculum escolar y el rendimiento laboral debido a los altos índices de fracaso escolar en el área de las matemáticas. Este problema práctico requiere profundizar la investigación sobre los aspectos más importantes, tales como, la enseñanza de las matemáticas, el aprendizaje significativo para la construcción del conocimiento matemático, la formulación de los problemas verbales y las estrategias de solución empleadas por los alumnos.

Hembree (1992) ha señalado que la primera implicación educativa se manifiesta cuando el Consejo Nacional de Supervisores de Matemáticas (*National Council of Supervisors of Mathematics*, NCSM, 1977) declara a los problemas verbales entre las diez prioridades esenciales.

Asimismo, el cuestionamiento sobre la enseñanza tradicional de las matemáticas se dirige sobre la presentación exclusiva del algoritmo, la cual genera un aprendizaje memorístico, repetitivo y sin comprensión. Bajo este tipo de enseñanza, los alumnos manifiestan una baja motivación y el rechazo hacia los contenidos de las matemáticas. Los alumnos creen que éstas son difíciles, formales y aburridas. (Brown, Collins y Duguid, 1989; Fennema, Peterson y Carpenter, 1987; McLeod, 1989; Meyer, 1989).

El rendimiento matemático de los alumnos se diferencía entre los países desarrollados. Los primeros sitios se han ocupado por las naciones asiáticas. Estos resultados son motivo de estudio por parte de algunos investigadores. Así, distintos estudios comparativos encuentran un rendimiento inferior de los niños de Estados Unidos en relación con sus iguales de Japón, China, etc. (Mayer, Tajika y Stanley, 1991; Stevenson, Lee y Stigler, 1986; Uttal, Lummis y Stevenson, 1988).

La Evaluación Nacional del Progreso Educativo (*National Assessment of Educational Progress*) del año 2000 informa de un progreso en este rendimiento con respecto al obtenido por los alumnos en 1990. No obstante, la prioridad que se ha dado en la pasada década aún se encuentran índices bajos en el nivel de eficiencia, incluso el nivel básico apenas supera mínimamente el promedio.

Los países de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) han realizado evaluaciones periódicas sobre distintos aspectos en los sistemas educativos (*Education at a Glance*), entre ellos, las destrezas en matemáticas.

Tabla 1.1

Rendimiento en la escala de matemáticas PISA 2000

PAÍS	MEDIA	D.E.
Australia	533	(3.5)
Austria	515	(2.5)
Bélgica	520	(3.9)
Canadá	533	(1.4)
R. Checa	498	(2.8)
Dinamarca	514	(2.4)
Finlandia	536	(2.2)
Francia	517	(2.7)
Alemania	490	(2.5)
Grecia	447	(5.6)
Hungría	488	(4.0)
Islandia	514	(2.3)
Irlanda	503	(2.7)
Italia	457	(2.9)
Japón	557	(5.5)
Corea	547	(2.8)
Luxemburgo	446	(2.0
México	387	(3.4)
Nueva Zelandia	537	(3.1)
Noruega	499	(2.8)
Polonia	470	(5.5)
Portugal	454	(4.1)
España	476	(3.1)
Suecia	510	(2.5)
Suiza	529	(4.4)
Reino Unido	529	(2.5)
Estados Unidos	493	(7.6)
OCDE total	498	(2.1)
OCDE promedio	500	(0.7)
Brasil	334	(3.7)
Letonia	463	(4.5)
Liechtenstein	514	(7.0)
Rusia	478	(5.5)

Nota. Fuente: base de datos PISA, OCDE 2001.

El proyecto PISA (*Programme for International Student Assessment*) valora un conjunto de indicadores del rendimiento en matemáticas. Este rendimiento se mide mediante una escala que contiene varias tareas con distinto grado de dificultad según la complejidad del procedimiento y la comprensión necesaria para resolver los problemas.

La evaluación PISA 2000 muestra diferencias amplias entre los países miembros de la OCDE (ver Tabla 1.1). Los alumnos de Japón y Corea obtuvieron las puntuaciones más altas. En esta evaluación, la puntuación más baja correspondió a México (387 puntos). Las diferencias en el rendimiento son notables al interior de los países. Japón, Corea, Finlandia y Canadá tienen la menor distribución desigual entre sus propios alumnos, mientras que lo contrario ocurre con Alemania, Grecia, Hungría y Polonia.

1.2. Marco referencial

En este apartado abordamos la epistemología científica con la cual la psicología construye las explicaciones del pensamiento matemático infantil siguiendo el marco teórico constructivista.

El estudio científico de las matemáticas se desarrolla ampliamente bajo el paradigma constructivista. Los estudios de Piaget sobre la clasificación y la noción de número dieron paso, en los años 80s, a los nuevos planteamientos sobre las competencias matemáticas. En este sentido, la concepción general del desarrollo del conocimiento se supera por la concepción del desarrollo cognitivo específico a través de los modelos teóricos que han elaborado los seguidores del paradigma cognitivo (Demetriou, 1988; Demetriou, Shayer y Efklide, 1992), por ejemplo, la "teoría de los operadores constructivos" de Pascual-Leone (1970), el modelo de Case (1985), la "teoría de las habilidades" de Fisher (1980) y el "modelo de evaluación de reglas" de Siegler (1983). A partir de entonces, una expansión de las investigaciones constructivistas se manifiesta con particularidades teóricas, aunque mantienen en común el método clínico piagetiano.

La construcción del conocimiento científico sobre las matemáticas en general y el pensamiento matemático infantil, en particular, se elabora con una serie de categorías relevantes como: la estructura semántica de los problemas verbales, el aprendizaje significativo, la representación cognitiva, el desarrollo del pensamiento matemático, la enseñanza constructivista, el método microgenético, las estrategias de solución, los modelos de simulación, etc.

Estas categorías se respaldan con la solidez y la consistencia de las evidencias empíricas en las investigaciones publicadas. El avance epistemológico tiene sus pilares principales en los trabajos de investigación que se realizan en los Estados Unidos por el Centro para la Investigación Educativa en Wisconsin MA. (*Wisconsin Center for Research Education*) que dirige Th. Carpenter; en Europa por el Centro para la Investigación y el Aprendizaje (*Center for Learning Research*) de la Universidad de Leuven de Bélgica que dirige E. De Corte y el Grupo de Investigación de Psicología Evolutiva y de la Educación de la Universidad Complutense de Madrid en España bajo la dirección de V. Bermejo.

Las aportaciones de la investigación se han publicado en las revistas de la comunidad científica tales como *Journal for Research in Mathematics Education, Arithmetic Teacher, Learning and Cognition, Cognition and Instruction, Development Cognition, Child Development, Educational Psychology,* entre otras.

La construcción de este ámbito de la psicología junto con las necesidades tecnológicas que exigen un mejor rendimiento en el dominio de las matemáticas produce un impacto positivo en las implicaciones educativas sobre el curriculum de las matemáticas. Esto se reconoce fundamentalmente por el Consejo Nacional de los Profesores de Matemáticas (NCTM) en los Estados Unidos.

1.2.1. *Centros de Investigación*

En este apartado planteamos la investigación fundamental que se desarrolla por los Centros de Investigación relevantes en el tema de estudio: El Centro para la Investigación Educativa de Wisconsin, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas, el Centro para la Psicología Instruccional y Tecnología, el Grupo de Psicología Evolutiva y el Grupo Internacional de Psicología de la Educación en las Matemáticas.

El Centro para la Investigación Educativa de Wisconsin (*Wisconsin Center for Education Research*) se establece en 1964 como uno de los primeros centros de investigación universitarios. Sus líneas de investigación abordan los cuatro elementos comunes de la educación: el profesor, el alumno, el contexto organizativo y el curriculum. Las investigaciones han mostrado: 1) los niños aprenden ideas más complejas en las etapas más tempranas, contrario a lo que se supone tradicionalmente, 2) el rendimiento de los estudiantes no puede estar separado del desarrollo profesional de los profesores y 3) los profesores necesitan una formación más sustancial acerca del pensamiento de los alumnos.

Los descubrimientos sobre el rendimiento de los alumnos indican que sus capacidades están más allá de las respuestas que se requieren en los libros de texto y test estandarizados. Los escolares comprenden las ideas matemáticas, usan su conocimiento en situaciones diferentes al contexto formal de aprendizaje y acceden más pronto al razonamiento matemático. A partir de estas ideas surge un cuestionamiento hacia la enseñanza tradicional de las matemáticas.

En cuanto al desarrollo profesional de los profesores se señala la relación de la valoración sobre el pensamiento matemático de sus alumnos con el rendimiento en el aula. Así, la enseñanza para la comprensión involucra una reorientación de las creencias de los profesores y la adquisición de pedagogía y conocimientos nuevos sobre los contenidos escolares.

Los resultados relacionados con el cambio docente apoyan la idea de que las comunidades profesionales sirven de soporte estructural para el cambio educativo de una enseñanza tradicional a un modelo constructor de conocimiento.

Entre sus aportaciones principales sobresalen los conceptos sobre la estructura semántica de los problemas verbales de suma y resta y el programa de intervención educativa conocido como Instrucción Guiada Cognitivamente (*Cognitively Guided Instruction*).

Los investigadores del Centro han tenido roles claves en el desarrollo de los estándares para las matemáticas (NCTM) y contribuyen al diseño de nuevas formas de valoración (PISA). Actualmente, dirigen el Centro Nacional para el Mejoramiento de los alumnos sobre el Aprendizaje y el Rendimiento en Matemáticas y Ciencias.

El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (*National Council of Teachers Mathematics*, *NCTM*) se funda en 1920 dentro de los Estados Unidos y es la mayor organización mundial de profesores de matemáticas. Establece en *Agenda for Action* (1980) que "la resolución de problemas debe ser el núcleo de las matemáticas escolares" (p. 1). Asimismo, el NCTM enfatiza la importancia de la resolución de problemas en el *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM, 1989), el cual orienta la enseñanza de matemáticas, en cuanto a los contenidos, la didáctica y la evaluación desde preescolar hasta secundaria.

Las creencias básicas que postulan su concepción sobre la educación de las matemáticas son: 1) Cada alumno debe ser enseñado por maestros calificados que tengan un conocimiento sólido de las matemáticas y conozcan como los niños aprenden a partir de sus expectativas mutuas. 2) Las destrezas de cálculo y la comprensión son componentes esenciales del curriculum. 3) Los maestros guían los procesos de aprendizaje en el aula. 4) El aprendizaje de las matemáticas se incrementa cuando los profesores se centran en el pensamiento matemático y los contenidos se ubican en un contexto específico. 5) Los alumnos emplean distintas estrategias de resolución, las cuales los profesores deben conocer para ayudarles a desarrollar una mejor comprensión de las matemáticas. 6) La valoración en matemáticas es paralela a los contenidos enseñados y 7) El cambio de los programas requiere los esfuerzos de cooperación entre los maestros participantes. Las publicaciones mencionadas del NTCM han tenido un significado especial para el desarrollo curricular y la investigación en los Estados Unidos.

El Centro para la Psicología Instruccional y Tecnología (*Centre for Instruccional Psychology and Technology)* que dirige E. de Corte ha desarrollado dos principales líneas de investigación. La primera investiga el aprendizaje y la enseñanza en dominios específicos, especialmente en matemáticas. El énfasis se pone en el rol de las variables cognitivas, metacognitivas y afectivas en los procesos de enseñanza-aprendizaje. La segunda se centra en el desarrollo y validez de los entornos de aprendizaje favorables para la adquisición de las destrezas cognitivas.

Algunos proyectos de investigación enmarcan el análisis de las normas sociales y socio-matemáticas en el aula en relación con las creencias de alumnos y profesores. Además, en este centro se investigan los aspectos afectivos a partir de la interacción de las creencias, las emociones y el esfuerzo invertido en la solución de problemas.

Entre sus aportaciones principales resaltamos la reformulación de los problemas verbales como un modelo alternativo a la formulación clásica de estos problemas.

El Grupo de Investigación de Psicología Evolutiva en la Universidad Complutense de Madrid en España bajo la dirección de V. Bermejo se ha orientado al desarrollo del pensamiento matemático infantil. A partir de un marco constructivista se abordan las siguientes líneas de investigación: 1) la habilidad de contar y los principios del conteo, 2) el grado de dificultad de los problemas verbales, 3) la propuesta de un modelo sobre la cardinalidad, 4) las estructuras semánticas de los problemas verbales de suma y resta y 5) la propuesta de un programa de intervención educativa sobre la enseñanza de las matemáticas (PEI).

Entre sus aportaciones resaltamos un modelo sobre la cardinalidad, la secuencia del grado de dificultad de los problemas verbales y el programa evolutivo de la educación en matemáticas (PEI).

El Grupo Internacional de Psicología de la Educación en las Matemáticas *(International Group for the Psychology of Mathematics Education)* se establece en Karlsruhe en 1976 y sus objetivos son: 1) la promoción de los contactos internacionales y el intercambio de la información científica en la psicología de la educación de las matemáticas, 2) el impulso a la investigación interdisciplinaria con la cooperación de psicólogos, matemáticos y profesores de matemáticas y 3) el debate sobre las implicaciones educativas de las investigaciones en cuanto a los aspectos psicológicos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

1.2.2. *Construcción de las categorías científicas*

En la literatura existe un debate con respecto a las siguientes categorías: clasificación de los problemas verbales, el desarrollo numérico temprano, el grado de abstracción, el conocimiento formal e informal, los tipos de estrategias y la intervención educativa en las matemáticas.

Aunque existe un consenso general dentro de la comunidad científica en cuanto a los tipos de problemas verbales, la literatura muestra una selectividad entre una aproximación constructivista (Bermejo, 1990; Bermejo y otros, 2002; Carpenter y Moser, 1982; Riley, Greeno y Heller, 1983) y la teoría del procesamiento de la información (Mayer, 1985).

En cuanto al desarrollo temprano, el debate surge entre las ideas innatistas sobre la habilidad de contar como una activación de principios numéricos (Gelman y Gallistel, 1978; Wynn, 1990) y el planteamiento sobre la construcción de esquemas para comprender las relaciones numéricas (Bermejo, 1990; Shopian, 1992).

Por un lado, el grado de abstracción se discute a partir del desarrollo de los niveles inferiores, concretos, hacia los niveles superiores, abstractos (Kamii et al., 2001). Por otro, el modelo de las representaciones múltiples (Mayer, 1985) considera la representación visual, auditiva y verbal como vías del procesamiento de la información, además separa el conocimiento conceptual del procedimiento de solución.

Algunos autores (Nunes, 1993; Resnick, 1983) apoyan la idea de que la construcción del conocimiento informal matemático está distante del conocimiento formal, pero otros (Ashcraft, 1982) consideran la habilidad de cálculo en función de la memoria de trabajo como un principal mecanismo del aprendizaje matemático. Los problemas verbales se expresan como un vínculo entre los contextos formales e informales (Baranes et al. 1989; Carraher, Carraher y Schliemann, 1987; Verschaffel, De Corte y Lasure, 1994).

Con relación a las estrategias, los procedimientos de solución de la suma y la resta se explican desde un marco constructivista (Bermejo, 1990; Carpenter y Moser, 1982) o una posición asociacionista (Siegler, 1988).

El debate sobre los programas de intervención educativa se genera entre los planteamientos constructivistas (Carpenter y Fennema, 1992), socioculturales (CTGV, 1990) y la aproximación integradora (Bermejo y otros, 2002; Cobb, 1996).

3. Líneas de investigación

En este apartado veremos las líneas de investigación sobre las cuales se asientan las bases de esta tesis. Estas líneas son: los problemas verbales, las estrategias de solución y la enseñanza de las matemáticas.

Con respecto a la primera, Carpenter y Moser (1983) clasifican los problemas verbales de suma y resta de acuerdo con la estructura semántica en las categorías de Cambio, Combinación, Comparación e Igualación. Estos problemas se distinguen por el lugar que ocupa la incógnita: en el resultado, al inicio o en el segundo subconjunto.

Carpenter y Moser (1982), Nesher (1982) y Vergnaud (1982) estudian si los niños solucionan los problemas verbales antes de la instrucción formal y el uso de las estrategias para cada problema.

En cuanto a la estructura semántica, la mayoría de los trabajos (Bermejo y Rodríguez, 1987, 1990a, 1990b; Carpenter y Moser, 1982, 1983, 1984; De Corte y Verschaffel, 1987) indican que los problemas más fáciles son los de Cambio, luego los de Combinación, después los de Igualación y, por último, los problemas de Comparación son los más complicados. Lo mismo sucede con los problemas verbales reformulados (De Corte, Verschaffel y de Win, 1985).

Con relación a las estrategias, Carpenter y Moser (1982, 1983, 1984) proponen tres categorías de estrategias que los niños emplean en la resolución de problemas de suma y resta: el modelado directo (Baroody,1987; Carpenter, Levi, Fennema, Ansell y Franke, 1995), el conteo (Baroody, 1987; Baroody y Ginsburg, 1986; Bermejo y Rodríguez, 1987; Carpenter y Moser, 1984; De Corte y Verschaffel, 1985; Fuson, 1988; Secada, Fuson y Hall, 1983; Siegler, 1987, 1988) y los hechos numéricos (Aschraft, 1982; Baroody, 1984; Baroody y Standinfer, 1993; Bermejo, Lago y Rodríguez, 1998). Desde otra aproximación, De Corte y

Verschaffel (1987) plantean tres tipos de estrategias para los problemas verbales reformulados: materiales, verbales y mentales.

Las investigaciones encuentran que los errores son frecuentes en las cuatro categorías de problemas (Bermejo y Rodríguez, 1990a, 1990b; Brown y Van Lehn, 1982; Carpenter y Moser, 1981, 1983; Cummins, 1991; De Corte y Verschaffel, 1985, 1987; Resnick, 1982).

En cuanto a la enseñanza, Carpenter y colaboradores (1996) presentan un proyecto de instrucción-intervención centrado en el profesor. Asimismo otros autores elaboran distintos programas de intervención (Bermejo y otros, 1995b, 2000, 2002; De Corte, 1987).

Finalmente, Lester (1994) realiza una revisión de la metodología de la investigación sobre los problemas verbales, la cual se muestra en la Tabla 1.2.

Tabla 1.2

Enfasis y metodología de la investigación sobre la solución de problemas: 1970-1994

Fechas	Enfasis de la investigación en la solución de problemas	Metodología de la investigación
1970-1982	-Determinantes claves de la dificultad del problema. -Identificación de las características de los alumnos exitosos. -Entrenamiento heurístico.	-Análisis de regresión estadístico. -Experimentos de enseñanza.
1978-1985	-Comparación de solucionadores de problemas exitosos y no exitosos. (expertos vs. novatos). -Entrenamiento de estrategias	-Estudio de caso. -Análisis del protocolo verbal
1982-1990	-Metacognición. -Relación de creencias y afectos para solucionar problemas. -Entrenamiento metacognitivo.	-Estudio de caso. -Análisis del protocolo verbal
1990-1994	- Influencia social. -Solución del problema en el contexto. (solución de problema situado)	-Métodos etnográficos.

(Lestler, 1994, p. 64).

4. Justificación

En este estudio investigaremos la relación entre los contextos escolares a partir del grado de abstracción en los problemas de suma y resta: desde los objetos, los dibujos, los algoritmos y los problemas verbales. Este planteamiento es relevante debido a la escasez de estudios en esta dirección.

Algunos autores (Bermejo y Lago, 1988; Carpenter y Moser, 1982) encuentran que los objetos o dibujos facilitan la representación dando lugar a un mejor rendimiento infantil, especialmente en los primeros niveles de escolaridad. Carpenter y Moser (1982), Gelman (1982), Nesher (1982), Starkey y Gelman (1982) y Vergnaud (1982) examinan la forma en que los niños representan los problemas mediante el uso de objetos, dibujos, algoritmos y problemas verbales.

El contexto se considera como un entorno cultural donde el desarrollo individual progresa mediante el intercambio de las experiencias individuales, sociales y cognitivas en una situación específica en función de los instrumentos sociales creados por un grupo de población dentro de un determinado territorio durante el transcurso de su historia.

Este contexto social se concibe en dos tipos de progreso y, por tanto, de oportunidades para el desarrollo ontogenético: rural y urbano. El primero tiene pendiente satisfacer una serie de carencias y se encuentra entre las poblaciones pequeñas, las cuales tienen un progreso limitado, es un contexto informal El segundo cuenta con un nivel de vida suficiente para el progreso social y se ubica en las ciudades, es un contexto formal.

La cuestión de esta investigación reside en indagar las diferencias entre los niños de ambos contextos en torno a la solución de los problemas de Cambio de suma y resta. La extensión del contexto se delimita al campo de la educación, por tanto el contexto educativo implica el contexto social.

En virtud de que el desarrollo del pensamiento matemático se construye tempranamente, la competencia para realizar la suma y resta en un entorno informal entra en contradicción con el fracaso escolar en las matemáticas. Por esta razón, el estudio abarca la participación de los alumnos de primero hasta cuarto curso escolar con un rango de edad entre los 7 y 10 años.

La suma y la resta son operaciones aritméticas que se enseñan tradicionalmente mediante la presentación de algoritmos, no obstante las estrategias infantiles cambian cuando los problemas se presentan de otra manera.

En este sentido, Bermejo, Lago y Rodríguez (1988) plantean que desde los inicios de la década de los ochenta se insiste en la relevancia de los problemas verbales para la formación matemática de los niños desplazando el interés que se ha prestado al aprendizaje del algoritmo (Carpenter et al., 1989, 1995, 1996).

Los problemas con la incógnita en el resultado son más fáciles que cuando la incógnita se encuentra al inicio del problema. Debido a esto estudiaremos las respuestas infantiles ante los problemas de Cambio tanto con la incógnita en el resultado como en el primer término.

El grado de abstracción se analiza en las tareas con materiales concretos, dibujos, algoritmos y problemas verbales. El proceso se considera un escalonamiento de los procesos cognitivos inferiores hacia los niveles superiores. La razón del estudio es investigar las dimensiones específicas del grado de abstracción durante la resolución de las tareas.

Los problemas de suma y resta se formularán según la estructura semántica de los problemas de Cambio. Esta estructura implica una relación dinámica entre las cantidades.

Entonces, los problemas elegidos contrastan el rendimiento según el lugar de la incógnita. Los problemas de Cambio con la incógnita al inicio tienen un interés particular porque son los más difíciles en esta categoría y evidencian el esquema parte-todo de los niños preescolares y de primer curso para resolverlos (Riley y Greeno, 1988).

En los problemas con la incógnita al final una cantidad inicial conocida se incrementa o decrementa por una cantidad específica y la meta consiste en determinar el resultado. Estos son los problemas más fáciles. La importancia de su estudio reside en investigar este dominio con una muestra de niños mexicanos como punto de partida para futuras investigaciones en México sobre el desarrollo del pensamiento matemático infantil.

En resumen, esta investigación examina las diferencias entre los grupos socioculturales con respecto a las estrategias empleadas en los problemas de Cambio de suma y resta según el grado de abstracción de la tarea y el nivel escolar de los participantes.

2. Desarrollo del pensamiento matemático infantil

En esta sección presentamos la adquisición de dos contenidos del pensamiento matemático en la infancia: las nociones de suma y resta y el esquema parte-todo. Estos aspectos cognitivos se relacionan con la competencia de solución de problemas de suma y resta.

2.1. Noción de suma y resta

En este apartado veremos los planteamientos sobre las nociones de suma y resta, la concepción unaria y binaria de la suma, la adquisición de la solución de los problemas y los principios básicos de ambas operaciones.

El trabajo de Piaget sobre la suma y la resta consta de tres experimentos (Piaget, 1952). En el primero se investigaba si el niño sabía que un número permanecía constante al descomponerse en partes. Piaget encontró que los niños (5 y 6 años) fallan en la etapa I; en la etapa II solucionaban correctamente la tarea sólo después de verificar por conteo o correspondencia uno-a-uno, y, en la etapa III, los niños de 7 años contestaban la tarea sin verificación. Piaget concluye que los niños de la etapa III conceden cierta comprensión de la suma cuando comprenden que $(4 + 3) + (4 - 3) = 8$.

En el segundo experimento se estudiaba la habilidad de los niños para construir con objetos dos conjuntos iguales a partir de dos conjuntos desiguales (8 vs 14). Los niños de la primera etapa transferían objetos desde el conjunto mayor, pero sólo comparaban los conjuntos construidos nuevamente. Los niños de la etapa II construían configuraciones para comparar e igualar los dos conjuntos, y los niños de la etapa III elaboraban conjuntos equivalentes por medio de una descomposición previa de los conjuntos. Piaget concluye que la suma y la resta son operaciones numéricas sólo en los niños de la etapa III. Unicamente, estos niños son capaces de usar la reversibilidad por inversión.

El tercer experimento analizaba la habilidad para construir dos conjuntos iguales a partir de un conjunto simple. Los patrones de respuesta de los niños de la etapa I y II eran similares a los del segundo experimento. Los niños de la etapa III solucionaban la tarea por medio de la correspondencia uno-a-uno construyendo ambos conjuntos.

Piaget concluye que la comprensión operacional de la suma y la resta no está presente al menos que el niño realice la enumeración y el conjunto como una función del otro. El argumento es que la unión de estos dos procesos dentro de uno simple resulta necesaria para comprender la correspondencia uno-a-uno, la cual es el vínculo entre ambos procesos. Entonces, la suma y la resta son operacionales siempre y cuando el niño reconozca que ambas se invierten.

Wynn (1990) revela que los niños proporcionan un número después de la secuencia de conteo cuando se les pregunta, "¿cuántos son?". Estos niños distinguen entre el conteo correcto e incorrecto. Muestran que comprenden las relaciones entre el conteo exacto y la última palabra dada en la mayoría de los casos (84%). Sin embargo, otros niños daban respuestas con la última palabra (25%) tanto en los aciertos como los errores. La habillidad de los niños para contar objetos se manifiesta en una etapa temprana del desarrollo. Los niños de 2 años tienen una representación abstracta de la habillidad de contar que vá más allá de las características particulares del conteo.

En cuanto al aprendizaje de la suma y la resta en el primer año de vida, Wakeley, Rivera y Langer (2000) encuentran que las reacciones de los bebés a las exposiciones de sumas y restas son variables y, por tanto, las competencias numéricas de estos niños no son suficientes. Esta conclusión implica que la suma y la resta se desarrollan gradualmente a través de la infancia temprana.

Los datos de la investigación ponen de relieve que los niños de edades tempranas poseen una considerable cantidad de conocimientos y estrategias informales para resolver las operaciones aritméticas básicas. (Bermejo, Lago y Rodríguez, 1994; Bermejo y Rodríguez, 1987, 1990, 1993; Carpenter y Moser, 1984; De Corte y Verschaffel, 1987; Resnick y Singer, 1993; Rodríguez, 1992). Estos conocimientos informales se adquieren fuera de la escuela sin mediación del aprendizaje formal.

Hasta los tres años, aproximadamente, aparecen los primeros intentos de llevar a cabo acciones aditivas acompañadas del uso del conteo. Los niños suman N + 1 siendo N un número relativamente bajo. Sin embargo, esto no significa que ellos comprenden la operación de la suma, ya que dominan habitualmente esta operación hasta los 4 años.

En cuanto a la concepción unaria y binaria de la suma exponemos brevemente las ideas centrales.

En un principio el niño posee una concepción unaria de la suma en el sentido de que un conjunto inicial se hace mayor por un proceso de incremento. Por ejemplo, la adición 5 + 4 se interpreta de la siguiente manera: a un conjunto inicial de 5 elementos se le añaden sucesivamente 4 elementos más. Esta operación sería diferente a la de sumar 4 + 5, ya que en esta ocasión, un conjunto inicial de 4 elementos se incrementaría adicionalmente con 5 elementos más.

Después, los niños conciben la adición como la combinación de dos conjuntos disjuntos o cardinales distintos (concepción binaria). Ahora la suma de 6 + 3 se entiende como la combinación de los cardinales 6 y 3, de modo que se establece que 3 + 6 y 6 + 3 son operaciones equivalentes ya que conducen a un mismo resultado. A partir de esta concepción de la suma, el niño comprende el significado de la propiedad conmutativa.

Además, Wilkins, Baroody y Tiilikainen (2001) investigan la concepción unaria y binaria de la conmutatividad aditiva en 53 niños preescolares de 5 y 6 años. Los resultados son inconsistentes con los modelos unarios y binarios. Los datos sugieren que la conmutatividad se comprende mejor con los problemas de Cambio que con los problemas parte-parte-todo.

2.1.1. *Adquisición de la solución de problemas de suma y resta*

Existe evidencia de que aprender a solucionar juntos los problemas de suma y resta antes que separados facilita su adquisición (Buckingham, 1927).

Los primeros informes (McLaughlin, 1935; Mott, 1945; Woody, 1931) mencionan el uso del conteo por los niños para solucionar los problemas de suma y resta. Ilg y Ames (1951) encuentran que el conteo es frecuente en los niños de 5 años cuando solucionan problemas de suma y resta que involucran conjuntos de objetos y que la habilidad de contar cambia siendo más eficiente entre los 5 y 8 años. Los niños de 5 años cuentan desde el cardinal de uno de los números, un número de veces igual al cardinal del otro sumando. Cuando los objetos no están disponibles se utilizan los dedos para contar. Los niños de 6 años inician con el cardinal del sumando mayor y cuentan un número de veces igual al cardinal del sumando menor.

En los problemas de resta, los niños de 5 años cuentan desde el cardinal del minuendo y luego cuentan hacia atrás un numero de veces igual al cardinal del sustraendo. Los niños de

6 y 7 años cuentan hacia atrás desde el minuendo un numero de veces igual al cardinal del sustraendo.

Por un lado, los trabajos que emplean materiales concretos (Bjonerud, 1960; Dutton, 1963; McLaughlin, 1935; Richard, 1964; Williams, 1965) demuestran que los niños de 4 y 5 años solucionan algunos de los problemas más simples, especialmente los que involucran sólo números pequeños.

En un estudio relacionado, Groen y Resnick (1977) han enseñado a niños de 4,5 años a resolver problemas de suma con objetos mediante el conteo de dos conjuntos iguales a los cardinales de los dos sumandos. Enseguida, los conjuntos de objetos se combinaban y se obtenía la respuesta. La mitad de los niños utilizó espontáneamente una habilidad más eficiente que no se enseñó por el experimentador. Esta nueva habilidad consiste en contar desde el cardinal del sumando mayor. Estos autores proporcionan la evidencia de que algunos niños de 4,5 años emplean espontáneamente una habilidad de conteo que no se había reportado en niños menores de 6 años.

Además, los niños de 4 y 5 años usaban el conteo cuando los objetos se presentaban visualmente. Algunos niños empleaban los dedos para representar el objeto visto y otros contaban en voz alta. Sin embargo, otros niños no contaban aunque daban respuestas correctas en los problemas con números grandes (14 + 1 = ?). Un tercer grupo de niños solucionaba sólo algunos problemas con números pequeños. Estos resultados indican que algunos niños preescolares pueden contar los conjuntos a partir de su exploración visual.

Starkey y Gelman (1982) investigaron la comprensión de los niños sobre la suma y la resta. Se supone que la habilidad de restar es una adquisición propia de los primeros años escolares. Sin embargo, se conoce que los niños de 3 y 4 años son capaces de determinar la cantidad sustraída a un conjunto cuando la sustracción comprende de 2 a 5 objetos. Por tanto, los niños, antes de iniciar la escuela, realizan tareas sencillas de resta sin que esto signifique una comprensión completa de esta operación. Además, esta capacidad se limita a aquellas situaciones en las que se pueden manipular objetos para representar la acción o las relaciones descritas en el problema. En concreto, estas primeras competencias constituyen el nivel primario caracterizado por las estrategias “separar de”, “separar a”, etc.

A medida que tales procedimientos se flexibilizan aparecen las estrategias de conteo y, posteriormente, las estrategias de hechos numéricos. Además, esta flexibilidad se manifiesta en la elección de una estrategia para cada situación concreta. Por ejemplo, los niños optan por las estrategias de contar “hacia atrás” o “hacia delante” en función de los valores del minuendo y el sustraendo.

Por otro, Wynn (2002) refiere que los procesos de sumar y restar se relacionan con las preferencias cognitivas de los niños cuando los problemas son familiares o novedosos.

En esta dirección, Cohen y Marks (2002) describen el proceso de suma y resta de manera similar a los trabajos de Wynn (1992). En un primer experimento, un grupo de niños de 5 meses resolvía dos tareas: una de suma y otra de resta. Los datos indican un modelo de dos procesos. Los bebes tienden a buscar el conjunto más grande o se orientan por las características familiares de los objetos. En otros dos experimentos examinaron este modelo y encontraron que las preferencias familiares son más relevantes que el tamaño del conjunto.

2.1.2. *Principios básicos*

Dos principios básicos de las operaciones aritméticas mencionadas son que la suma aumenta la cantidad y la resta la disminuye. Smedslund (1966a) ha demostrado esto al presentar conjuntos con un número igual de objetos a los niños de 5 y 6 años. El niño es capaz de designar correctamente el conjunto que contiene más objetos cuando uno de los conjuntos se transforma sumando o restando un objeto,.

Los mismos descubrimientos se han obtenido con niños de 4 y 5 años por Brush (1978), también con niños de 3, 4 y 5 años por Cooper, Starkey, Blevins, Goth y Leitner (1978), y resultados similares en la suma se encontraron por Beilin (1968) y Mehler y Bever (1967). Los descubrimientos relatados por Gelman (1972a, 1972b, 1977) y Cooper et al. (1978) indican que los niños de 3, 4 y 5 años infieren la transformación de una suma o resta al comparar las cantidades antes y después del cambio de los conjuntos.

Bermejo y otros (1998) plantean que a medida que los niños comienzan a resolver algoritmos aditivos descubren las propiedades de la suma: identidad, conmutatividad y asociatividad. La primera establece que cualquier número más el elemento neutro (el cero) da lugar a ese mismo número. La segunda refiere que el orden en que sean agregados los sumandos no altera el resultado de la suma. Finalmente, la tercera alude a los distintos agrupamientos que se realizan para resolver una suma con múltiples sumandos.

Resnick (1983) aborda el desarrollo de la intuición matemática. Esta implica complementar la suma y resta con flexibilidad al pensar, por ejemplo, el número 9 como un todo o una descomposición en sus partes 2 y 7. La interpretación del problema sucede cuando se descubre la otra parte, ya sea restando la parte conocida del todo o se inicia con una parte y se determina cuanto falta para alcanzar el todo. Esta interpretación parte-todo se plantea como una versión informal del principio matemático de la composición aditiva del numero.

En los procedimientos de conteo en la resta existe evidencia de que los niños vinculan su conocimiento del conteo al esquema parte-todo cuantitativo, el cual es la versión de los niños preescolares sobre la composición aditiva (Resnick, 1989; Morgan, 1982).

En cambio, la comprensión de la resta sucede cuando el niño adquiere los cuatro principios básicos: la composición aditiva de las cantidades, el valor posicional, la realización de cálculos con las partes y la recomposición y conservación del minuendo (Resnick y Omanson, 1987; Cauley, 1988).

En relación al primer principio, para resolver la resta 8 - 5 se precisa conocer que el minuendo se descompone en 5 y 3. Con respecto al segundo principio, los niños comprenden que los dígitos adoptan valores diferentes dependiendo del lugar que ocupen, de modo que en el caso de 101 el primer y último "1" tiene un valor diferente siendo equivalentes a 100 y a 1, respectivamente. El tercero y cuarto principio están vinculados entre sí; el primero permite que se opere entre las unidades, las decenas, las centenas y así sucesivamente, mientras que el segundo señala que en caso de que el sustraendo sea mayor que el minuendo se tomaría prestada una unidad de la columna siguiente para evitar que el resultado sea negativo en algunas de las columnas.

Bryant, Christie y Rendu (1999) investigan en dos experimentos la comprensión de los niños sobre la relación entre la suma y la resta en cuanto a la inversión, la identidad y la descomposición. Los resultados del primer experimento muestran que los niños de 5 y 6 años recurren al principio de inversión incluso cuando el sumando o el sustraendo son la misma cantidad, pero involucran material diferente. En el segundo se encuentra que los niños de 6 a 8 años también usan la inversión en combinación con la descomposición para resolver los problemas del tipo a + b - b (b + 1). Los niños de 6 años comprenden las relaciones entre la suma y la resta independiente de sus destrezas de cálculo.

Baroody (1999) experimenta con niños sobre el conocimiento relacional de la suma y la resta. La comprensión de las combinaciones en la suma facilita el aprendizaje de las mismas en la resta (8 – 5 = ? se contesta pensando que 5 + ? = 8). De acuerdo con el modelo de Siegler (1987) un efecto asociativo es común en las respuestas de la resta, incluso en su fase más temprana del desarrollo. El experimento contó con la participación de 25 preescolares y 15 alumnos de primer curso y el segundo involucró 21 niños de primer curso. A los participantes se presentó una serie de problemas como 4 + 5 = 9 y 9 – 4 = ?, y se les preguntó si el primer problema ayudó a contestar el segundo.

Los resultados indican que los niños de preescolar menos expertos no reconocen el uso de una ecuación de suma relacionada para determinar la diferencia. Contrario al modelo de Siegler (1987) estos niños responden correctamente a los problemas en pocas ocasiones, mientras que los niños más expertos resuelven todos los problemas.

Entonces, la relación complementaria entre la suma y la resta no es obvia para los niños. Más bien, primero se desarrolla con las combinaciones de resta relacionadas a los dobles de suma porque éstas combinaciones se memorizan más pronto. Esto genera que los niños conecten su conocimiento de la resta al esquema parte-todo

También, Canobi, Reeve y Pattison (2002) investigan el conocimiento de los principios composición aditiva, conmutatividad y asociatividad en dos estudios. En el primero, 24 niños de 4 a 5 años y 25 niños de 5 a 6 años determinaban la equivalencia de problemas de suma y resta presentados con objetos. En el segundo, 45 niños de 5 a 6 años resolvían sólo problemas de suma. Los datos en ambos estudios revelan que los principios en su versión concreta se comprenden por la mayoría de los niños. Sin embargo, la asociatividad es más difícil que la conmutatividad. Las diferencias entre los grupos se manifiestan cuando los niños mayores reconocen la composición aditiva más que los niños menores. Además, el conocimiento de la conmutatividad se relaciona con el empleo de estrategias más avanzadas.

2.2. Esquema parte-todo

En este apartado expondremos la noción del esquema parte-todo, su comprensión y relación con los problemas de Cambio.

El esquema parte-todo tiene un rol central en la investigación sobre la solución de los problemas aritméticos (Briars y Larkin, 1984; Riley y Greeno, 1988). Por ejemplo, Riley y Greeno (1988) presentan un modelo para explicar las diferencias en la dificultad de las clases de problemas aritméticos y la secuencia del desarrollo. La culminación de este desarrollo es el esquema parte-todo que capacita a los niños para la solución de los problemas verbales más difíciles.

De acuerdo con esto, los niños empiezan la instrucción formal solucionando los problemas aritméticos con objetos. Este método de solución funciona para los problemas más simples, pero para otras clases de problemas necesitan aprender a representar no sólo los conjuntos en sí mismos, sino también las relaciones entre ellos, particularmente, las relaciones parte-todo.

2.2.1. *Noción del esquema parte-todo*

Esta noción corresponde al concepto de inclusión de clase en la investigación del desarrollo cognitivo piagetiano. La cuestión crítica no es identificar los conjuntos individuales involucrados en el problema, sino coordinarlos con otros y comprender como su combinación forma el todo. Tal noción está dentro de las capacidades de los preescolares (Markman, 1979; McGarrigle, Grieve y Hughes, 1978). Entonces, la inclusión se concibe en términos de suma y resta de clases (Winer, 1980).

Riley y Greeno (1988) explican que el rendimiento incorrecto no refleja la carencia del conocimiento parte-todo, sino que este conocimiento restringe sólo las relaciones ordinales entre el todo y las partes, no las cantidades específicas asignadas a ellas. La cuestión radica en ver como el desarrollo del esquema parte-todo explicaría la comprensión sobre la solución de los problemas aritméticos durante los años escolares tempranos.

En este sentido, Sophian y McCorgary (1994) plantean que los niños comprenden las relaciones parte-todo al responder con un número en la dirección correcta. Específicamente, en un experimento predicen que si los niños solucionan para la parte contestarían con un número menor al todo en el problema (respuesta de decremento), pero si solucionan para el todo contestarían con un número más grande que los números dados para las partes en el problema (respuesta de incremento).

El principal descubrimiento es que los niños de 5 años son sensibles a la estructura parte-todo de los problemas aritméticos. Estos niños muestran un conocimiento limitado de las combinaciones de los números que se necesitan para generar las respuestas precisas, pero distinguen entre los problemas de suma y resta en términos de la dirección de la respuesta requerida. Esto apoya la conclusión de que las dificultades de los niños al solucionar los problemas aritméticos en la escuela elemental no se atribuyen a la carencia del esquema parte-todo (Cummins, 1991).

Asimismo, Sophian y McCorgary (1994) postulan que los niños progresan en la solución del problema desde el modelado directo hasta el uso de las relaciones parte-todo en los años tempranos de la escuela elemental. En la solución del problema resulta apropiada la habilidad para identificar las relaciones parte-todo entre los conjuntos y el uso de estas relaciones para elegir una operación aritmética.

Para responder a los problemas aritméticos, los niños parecen accesar algo similar a una línea numérica mental (Resnick, 1983, 1989). Ellos usan su conocimiento cuantitativo acerca de las relaciones entre los conjuntos para determinar en que dirección moverse a lo largo de este línea numérica y, entonces, generan una solución. Los niños de 5 años no muestran mejor rendimiento que los de 4 años, así se indica por la estimación de las relaciones parte-todo en los problemas. Este rendimiento superior refleja la instrucción que los niños reciben comúnmente en el primer curso escolar. Estos alumnos encuentran los problemas con la incógnita al principio más difíciles que con la incógnita al final.

Sophian y Vong (1995) plantean que la comprensión de la suma y la resta con el esquema parte-todo precisa saber que los números pueden descomponerse en números pequeños o combinarse con otros para formar números más grandes. La composición numérica, los valores de las partes y el todo pueden derivarse a partir de otros números para sumar o restar, sobre todo cuando tales problemas no se pueden resolver por el modelado de la situación del problema (Riley y Greeno,1988).

También, Canobi et al. (2002) plantean la necesidad de examinar el conocimiento temprano de los principios de la suma en relación con el esquema parte-todo y el desarrollo del pensamiento matemático de los niños.

Recientemente, Baroody, Wilkins y Tiilikainen (2003) discuten los problemas de la generalidad y coherencia del esquema parte-todo teniendo en cuenta el principio de la conmutatividad aditiva.

2.2.2. *Esquema parte-todo en los problemas de Cambio*

En cuanto a esto, Sophian y McCorgary (1994) analizan las respuestas de los niños a los problemas de Cambio con la incógnita al inicio y el reconocimiento de las relaciones parte-todo para determinar si el valor de la incógnita es mayor o menor que el valor del resultado. Sophian y McCorgary han encontrado que los niños de 5 años respondían de acuerdo con estas restricciones, pero no los de 4 años. Como no estuvo claro si la carencia del conocimiento parte-todo era un factor en el rendimiento Shopian y Vong (1995) estudiaron las combinaciones de números grandes, las cuales pueden haber limitado la comprensión de las relaciones parte-todo. Para remediar este problema, en otro experimento se usaron problemas de suma o resta con conjuntos no mayores de 6. En lugar de un conjunto de objetos, dos representaciones se proporcionaban para cada problema: una con un dibujo que representaba la cantidad inicial y otra con objetos para la cantidad final.

Los niños mejoraron en los problemas que se representaban con “un monstruo” (resta con la incógnita al final y suma con la incógnita al inicio) que en los problemas representados con “un amigo” (suma con la incógnita al final y resta con la incógnita al inicio). Sin embargo, la diferencia entre las dos operaciones es relevante sólo en los problemas con la incógnita al final. Las respuestas de los niños a los problemas con la incógnita al inicio se consideraban incrementos siempre y cuando sean mayores que el número del resultado y decrementos si eran menores que esta cantidad. Similarmente, las respuestas a los problemas con la incógnita al final se clasificaban como incrementos o decrementos según su relación con la cantidad inicial.

En los problemas con la incógnita al inicio o al final, las respuestas de incremento resultaban apropiadas para los problemas de suma, mientras que las respuestas de decremento lo eran para la resta. Los niños de 5 años mostraban este patrón muy claramente en ambos problemas. Por el contrario, los niños de 4 años no lo hicieron, pero su patrón en los problemas con la incógnita al final se caracterizaba por una preponderancia de las respuestas de decremento sobre las de incremento en los problemas de resta que en la suma, lo cual refleja alguna distinción entre los tipos de problemas.

Los cambios en el diseño de la investigación de Sophian y McCorgary (1994) simplificaron la tarea con los niños de 4 y 5 años para responder apropiadamente a los problemas con la incógnita al final. De este modo, la comprensión de los niños sobre los problemas con la incógnita al inicio requiere un razonamiento parte-todo (Riley y Greeno, 1988). La conclusión es que la habilidad para tener en cuenta las relaciones parte-todo entre los conjuntos en los problemas verbales aritméticos se desarrolla a partir del período preescolar y tiene un rol significativo en los niños de 5 años.

En resumen, las nociones de sumar y restar se construyen en una fase temprana mediante el conteo de conjuntos pequeños y familiares. Al principio, el niño concibe la suma en un sentido unario y después bajo una concepción binaria. Entonces, el pensamiento matemático se desarrolla de manera informal y las estrategias se adquieren en un contexto informal sin alguna enseñanza específica. Estas estrategias se emplean con mayor frecuencia cuando se disponen de objetos. Por tanto, los principios básicos de la suma y la resta se comprenden mejor conforme se resuelven los problemas aritméticos.

Finalmente, el esquema parte-todo se desarrolla en los niños de preescolar para comprender las relaciones entre las partes y el todo. La construcción de este esquema es relevante para solucionar los problemas de Cambio.

3. Tipos de problemas verbales

Los problemas verbales se identifican a partir de su estructura semántica. En este sentido, varios autores plantean su clasificación que difiere en forma, pero no en contenido. Por tanto, existe un consenso general en torno a la clasificación básica de tales problemas. Así, en esta sección expondremos las clasificaciones propuestas por Vergnaud (1982), Carpenter y Moser (1982), Riley et al. (1983) y Bermejo (1998, 2002).

1. Clasificación general

En términos generales, los problemas verbales se diferencian entre sí dependiendo de que describan situaciones dinámicas (los de Cambio) o estáticas (los de Combinación y Comparación). Bermejo y otros (1998) consideran que se presentan cuatro tipos de problemas verbales según su estructura semántica. A continuación presentamos brevemente las categorías propuestas: Cambio, Combinación, Comparación e Igualación.

Los problemas de Cambio se caracterizan por la presencia de una acción implícita o explícita que modifica una cantidad inicial. Un ejemplo aditivo es: *“Luis tiene 8 galletas. Silvia le da 4 galletas más. ¿Cuántas galletas tiene ahora Luis?”*, mientras que un ejemplo de resta sería: *“Luis tiene 8 galletas. Le da 4 galletas a Silvia. ¿Cuántas galletas tiene ahora Luis?”*

Los problemas de Cambio son bastante fáciles para que los niños comprendan cuando la cantidad respondida es el resultado de un aumento o decremento. En tales problemas, la solución se modela directamente por la situación. Esto es, si la situación describe un decremento en una cantidad inicial se resta (quizás por contar hacia atrás) la cantidad de cambio desde la cantidad inicial y, entonces, el problema se soluciona correctamente. En otras palabras, los problemas de Cambio se relacionan a las situaciones en que algunos eventos aumentan o disminuyen el valor de una cantidad.

En los problemas de Combinación se muestran dos cantidades disjuntas que se consideran independientes o como partes de un todo sin que exista algún tipo de acción. Esta categoría se formula en términos de adición, por ejemplo: *"Antonio tiene 5 bolis y Pepe tiene 3. ¿Cuántos bolis tienen entre los dos?"*. En el caso de la resta, el planteamiento es: *"Antonio tiene 5 bolis. 3 son de limón y el resto son de fresa. ¿Cuántos bolis de fresa tiene Antonio?"*.

Esta segunda categoría describe la combinación de dos cantidades estáticas bajo una nueva categoría más grande. Por ejemplo, un cierto número de manzanas y otro número de naranjas se combinan para producir una cantidad de frutas. Estos problemas no contienen un evento real sino que nombran la misma cantidad bajo nuevas categorías. Es decir, los problemas de Combinación requieren que un subconjunto o el conjunto final sea calculado a partir de la información dada acerca de los otros dos conjuntos.

Las situaciones de Combinación son ligeramente más difíciles para que los niños de preescolar y primer curso de primaria las solucionen con respecto a las situaciones de Cambio con la cantidad final desconocida.

Los problemas de Comparación presentan la relación entre dos cantidades disjuntas, ya sea para establecer la diferencia entre ellas o para encontrar una cantidad desconocida a partir de otra conocida y la relación entre ambas. Un ejemplo de problema aditivo es: *"José tiene 8 caramelos y Claudia tiene 4. ¿Cuántos caramelos tiene José más que Claudia?"*. Por el contrario, si se plantea como sustracción sería: *"Alberto tiene 5 canicas. Juan tiene 3 canicas menos que Alberto. ¿Cuántas canicas tiene Juan?"*.

Esta tercera categoría describe una situación en la cual dos cantidades se comparan y la diferencia entre ellas se debe encontrar. Los niños deciden fácilmente que conjunto es más grande, pero decir el número exacto sobre esta diferencia les resulta difícil. Muchos niños no pueden solucionar esta clase de problemas hasta muy tarde en la escuela elemental. Esto se debe a que la diferencia describe una relación entre las otras dos cantidades antes que una cuantificación directa.

Los problemas de Comparación en que se calcula la cardinalidad de un conjunto involucran comparar la información acerca del tamaño de los otros conjuntos.

Finalmente, los problemas de Igualación contienen elementos de los problemas de Cambio y Comparación. En estos problemas se presenta una acción implícita que se basa en la comparación de dos conjuntos disjuntos. Un ejemplo de suma es: *"Pedro tiene 8 caramelos. María tiene 4 caramelos. ¿Cuántos caramelos hay que dar a María para que tenga los mismos que Pedro?"*. En cambio, un problema de resta se formula como sigue: *"Pedro tiene 8 caramelos. María tiene 4 caramelos. ¿Cuántos caramelos debería comerse Pedro para que le queden los mismos que a María?.*

2. Clasificación de Vergnaud

Vergnaud (1982) clasifica los problemas verbales atendiendo a tres criterios: medida, transformación y relación estática. Propone las siguientes categorías:

- Categoría I: La composición de dos medidas. Por ejemplo, *"Pedro tiene 6 canicas en su bolsa derecha y 8 canicas en su bolsa izquierda. El tiene 14 canicas por todas"*.
- Categoría II: Una transformación vinculada a dos medidas (estado-transformación-estado). Por ejemplo, *"Pedro tenía 17 canicas antes de jugar, él ha perdido 4 canicas. ahora tiene 13 canicas"*

- Categoría III: Una relación estática que vincula dos medidas (estado-relación-estado). Por ejemplo, *"Pedro tiene 8 canicas, él tiene 5 más que Juan. Juan tiene 3 canicas"*.
- Categoría IV: Composición de dos transformaciones (transformación-transformación-transformación). Por ejemplo, *"Pedro ganó 6 canicas en la mañana, él perdió 9 canicas en la tarde. En total él perdió 3 canicas"*.
- Categoría V: Una transformación que conecta dos relaciones estáticas (relación-transformación-relación). Por ejemplo, *"Pedro debe a Enrique 6 canicas. El le dio 4. El todavía le debe a Enrique 2 canicas"*.
- Categoría VI: Composición de dos relaciones estáticas (relación-relación-relación). Por ejemplo, *"Pedro debe 8 canicas a Enrique, pero Enrique debe 6 a Pedro. Así que Pedro sólo debe 2 canicas a Enrique"*.

3. Clasificación de Carpenter y Moser

Carpenter y Moser (1982) analizan las aproximaciones que caracterizan los problemas verbales. La primera clasifica los problemas en términos de sintaxis, nivel de vocabulario, número de palabras en un problema, etc. (Jerman, 1973; Suppes, Loftus y Jerman, 1969), la segunda distingue entre los problemas en términos de las sentencias que representan (Grouws, 1972; Lindvall e Ibarra, 1980; Rosenthal y Resnick, 1974) y la tercera considera las características semánticas de los problemas (Gibb, 1956; Greeno, 1978; Nesher y Katriel, 1978; Vergnaud, 1982).

En relación con la última aproximación, Carpenter y Moser (1982) clasifican los problemas verbales según cuatro dimensiones:

a) Carácter dinámico vs estático de la relación entre los conjuntos del problema.

b) Tipo de relación entre un conjunto y sus subconjuntos.

c) Si la acción implica un incremento o un decremento de la cantidad inicial.

d) Naturaleza de la incógnita.

Conjugando estas cuatro dimensiones establecen un total de 17 tipos de problemas verbales. En 1983, estos mismos autores, organizan los problemas en las categorías de Cambio, Comparación, Igualación y Combinación. Carpenter et al. (1993) retoman la clasificación de 1982 identificando cuatro tipos de problemas: Unión, Separación, Parte-parte-todo y Comparación. A continuación expondremos las dimensiones mencionadas.

La dimensión dinámica-estática se basa en si una relación activa o estática entre los conjuntos está implicada en el problema. Algunos problemas contienen una referencia explícita a una acción completada o contemplada causando un cambio en el tamaño de una cantidad dada en el problema. En otros problemas, la acción no está implicada, de modo que existe una relación estática entre las cantidades conocidas en el problema.

La dimensión conjunto-subconjunto involucra un conjunto de inclusión o un subconjunto de relación. En ciertos problemas, dos de los conjuntos involucrados son necesariamente un subconjunto del tercero. En otras palabras, la cantidad desconocida se forma por dos cantidades. En otras situaciones una de las cantidades involucradas en el problema es disjunta de las otras dos en el problema. Este caso implica una comparación de las dos cantidades disjuntas.

La dimensión incremento-decremento existe para los problemas que involucran una acción. La acción descrita en un problema resulta en un incremento o decremento de la cantidad inicial conocida. Esta dimensión no se aplica a los problemas estáticos ya que no cambian las cantidades dadas. En resumen, seis clases de problemas se tienen de acuerdo con estas dimensiones: Juntar, Separar, Parte-parte-todo, Comparación, Igualación-añadir, Igualación-quitar.

Los problemas Juntar, Separar e Igualación involucran una acción, mientras que los problemas Parte-parte-todo y Comparación describen relaciones estáticas entre las cantidades. Los problemas de Igualación se distinguen de los problemas Juntar y Separar sobre la base de las relaciones del conjunto y los subconjuntos. Una distinción similar existe entre los problemas de Comparación y Parte-parte-todo. En otras palabras, dos de las cantidades son subconjuntos del conjunto en los problemas de Juntar, Separar y Parte-parte-todo. En los problemas de Comparación e Igualación se comparan conjuntos disjuntos. La diferencia entre los problemas Juntar y Separar y los dos problemas de Igualación se basa en si la acción descrita es un incremento o un decremento. Los problemas de Juntar e Igualación-añadir refieren un incremento, mientras que los problemas de Separar e Igualación-quitar requieren de un decremento.

En los problemas Separar un subconjunto se remueve de un conjunto. Los problemas Parte-parte-todo describen una relación estática entre un todo y sus dos partes. Los problemas de Comparación involucran comparar dos cantidades disjuntas teniendo en cuenta el lugar que ocupa la incógnita.

Los problemas de Igualación implican la misma clase de acción que resulta en los problemas Juntar y Separar, pero existe una comparación involucrada. Entonces, igualar requiere cambiar una de las dos cantidades ya que ambas tienen el mismo atributo. El problema Igualación-añadir refiere un incremento en la cantidad más pequeña. El problema Igualación-quitar involucra un decremento en la cantidad mayor. Este esquema de clasificación se caracteriza por los tipos de acción o relaciones que se representan en la mayoría de los problemas de suma y resta.

La dimensión ubicación de la incógnita se refiere al lugar del elemento desconocido en el problema. Para cada una de las categorías existen tres tipos de problemas dependiendo que cantidades se conocen y dónde se sitúa la incógnita: problemas con la incógnita en el primer subconjunto, problemas con la incógnita en el segundo subconjunto y problemas con la incógnita en el conjunto total. Aunque la acción o relación que se involucra en cada clase de problema es esencialmente la misma, los tipos de problemas son muy diferentes e implican distintos métodos de solución (Grouws, 1972; Lindvall e Ibarra, 1980). En la Tabla 3.1 se presentan los ejemplos de cada uno de los 17 problemas según esta clasificación.

Tabla 3.1
Problemas verbales según Carpenter y Moser

1. Juntar	Connie tenía 5 canicas. Jimy le dio 8 canicas más. ¿Cuántas canicas Connie tenía en total?.
	Connie tiene 5 canicas. ¿Cuántas canicas más necesita ella para tener 13 canicas en total?.
	Connie tenía algunas canicas. Ella ganó 8 canicas más. Ahora ella tiene 13 canicas. ¿Cuántas canicas Connie tuvo al inicio?.
2. Separar	Fredy tenía 11 piezas de dulces. El dio 7 piezas a Linda.¿Cuántas piezas de dulces tiene Fredy?.
	Fredy tenia 11 piezas de dulces. El perdió algunas de las piezas. Ahora él tiene 4 piezas de dulce. ¿Cuántas piezas de dulce perdió Fredy?.
	Fredy tiene algunos dulces. El da 7 piezas a Linda. Ahora él tiene 4 piezas. ¿Cuántas piezas de dulce Fredy tenía al principio?.
3. Parte-parte-todo.	Hay 6 niños y 8 niñas en el equipo de fútbol soccer. ¿Cuántos niños son en el equipo en total?.

Continuación de la Tabla 3.1

	Bryan tiene 14 flores. Ocho de ellas son rojas y el resto son amarillas. ¿Cuántas flores amarillas tiene Bryan?.
4. Comparación	Hay 6 niños y 8 niñas en el equipo de fútbol soccer. ¿Cuántas niñas más que niños hay en el equipo?.
	Luis tiene 6 peces. Carla tiene 2 peces más que Luis. ¿Cuántos peces tiene Carla?.
	Luis tiene 6 peces. Estos son 2 peces más que los que tiene Carla. ¿Cuántos peces tiene Carla?.
5. Igualación –Añadir	Hay 6 niños y 8 niñas en el equipo de soccer. ¿Cuántos niños deberían unirse al equipo de así que habría el mismo número de niños y niñas en el equipo?.
	Había 6 niños en el equipo de fútbol soccer. 2 niños más se unieron al equipo. Ahora hay el mismo número de niños y niñas en el equipo. ¿Cuántas niñas hay en el equipo?.
	Ocho invitados vienen a cenar. Yo agregué 2 lugares más en la mesa así que debería ser el mismo número de asientos como invitados. ¿Cuántos asientos yo tenía al principio?.
6. Igualación- Quitar	Hay 7 copas y 11 platillos en la mesa. ¿Cuántos platillos debo poner fuera de la mesa para tener el mismo número de copas como platillos?.
	Hay 11 vasos en la mesa. Pongo 4 de ellos lejos así que deberían ser el mismo número de vasos como platos hay en la mesa. ¿Cuántos platos había en la mesa?.
	Hay algunas niñas en el grupo de danza. cuatro de ellas se sentaron abajo así que cada niño debería tener una compañera. Hay 7 niños en el grupo de danza. ¿Cuántas niñas están en el grupo de danza?.

(Carpenter y Moser, 1982, p.43)

4. Clasificación de Riley y otros

Riley et al. (1983, 1988) proponen tres categorías de problemas: Combinación, Cambio y Comparación. Este esquema clasifica los problemas de manera similar a los planteamientos de Carpenter y Moser (1982), Nesher (1982) y Vergnaud (1982). A continuación describimos tales problemas.

En los problemas de Combinación existen dos cantidades, la cantidad de canicas de José y la cantidad de canicas de Antonio, y su combinación.

Los problemas de Cambio constan de una cantidad de canicas de José, un cambio en esta cantidad tal como el número de canicas que José da a Antonio, y la cantidad que resulta del cambio. El cambio es un aumento- en Cambio 1, Cambio 3 y Cambio 5- o un decremento –en Cambio 2, Cambio 4 y Cambio 6.

En los problemas de Comparación se implica que hay dos cantidades, las canicas de José y las canicas de Antonio, además, la diferencia entre estas cantidades. La comparación se indica mediante las preguntas "¿Cuántos más?" – Comparación 1, Comparación 3 y Comparación 5- y "¿Cuántos menos?" – Comparación 2, Comparación 4 y Comparación 6.

Cada tipo de problema se soluciona como suma o resta dependiendo del lugar que ocupe la incógnita. Los problemas solucionados mediante la suma son Combinación 1, Combinación 2, Cambio 1, Cambio 6, Comparación 3 y Comparación 6.

También, cada problema es consistente con la secuencia de los conjuntos mencionados. Los problemas Combinación 1 y Combinación 2 tienen subconjuntos conocidos y una combinación desconocida, pero difieren en que Combinación 2 menciona el conjunto desconocido antes de especificar los subconjuntos, mientras que Combinación 1 sólo menciona el conjunto desconocido en la pregunta. Los problemas Combinación 3 y Combinación 4 mencionan los subconjuntos conocidos y el conjunto desconocido (en distinto orden) especificando la combinación dada. Los problemas de Combinación 5 y Combinación 6 especifican el primer conjunto conocido. El problema Combinación 5 especifica el subconjunto conocido y pregunta acerca del subconjunto desconocido. El problema de Combinación 6 menciona el subconjunto desconocido antes de especificar el subconjunto conocido. En la Tabla 3.2 se presentan los 18 problemas según la estructura semántica y la ubicación de la incógnita.

Heller y Greeno (1978) y Riley et al. (1983) han presentado versiones del modelo y otros investigadores encuentran evidencias del mismo.

En este sentido, Tamburino (1982) presentó una secuencia de 22 lecciones a 43 niños entre 5 y 8 años elegidos por su habilidad para solucionar los problemas de Cambio, Combinación y Comparación. En las lecciones se representaban los diagramas de los conjuntos y las relaciones de los conjuntos combinados, se agregaban los conjuntos, se removían los subconjuntos desde los conjuntos y se comparaban los conjuntos.

Los niños aprendieron a construir los diagramas apropiados para las tres categorías de problemas. También colocaban números en los diagramas correspondientes a las relaciones parte-todo en los problemas. El rendimiento de los participantes se incrementó cuando aprendieron diagramas para varios tipos de problemas en comparación con los niños que sólo tuvieron una instrucción del esquema parte-todo.

También, Wolters (1983) ha implementado una instrucción de 26 a 30 lecciones (basadas en diagramas que representaban las relaciones parte-todo) sobre problemas verbales en las aulas de tercero y cuarto curso durante 2 a 3 meses. En esta instrucción se relacionaban los diagramas con el esquema parte-todo y los algoritmos. Un problema de Combinación 1 se presentaba como ejemplo. Después de la instrucción, los niños del grupo experimental.

Tabla 3.2

Tipos de problemas según Riley y Greeno

Combinación 1 (combinación desconocida)

Joe tiene 3 canicas.
Tom tiene 5 canicas.
¿Cuántas canicas tienen ellos en total?.

Combinación 2 (combinación desconocida)

Joe y Tom tienen algunas canicas-
Joe tiene 3 canicas.
Tom tiene 5 canicas.
¿Cuántas canicas tienen ellos en total?.

Combinación 3 (subconjunto desconocido)

Joe tiene 3 canicas.
Tom tiene algunas canicas.
Ellos tienen 8 canicas en total
¿Cuántas canicas tiene Tom?

Combinación 4 (subconjunto desconocido)

Joe tiene algunas canicas
Tom tiene 5 canicas.
Ellos tienen 8 canicas en total.
¿Cuántas canicas tiene Joe?.

Combinación 5 (subconjunto desconocido)

Joe y Tom tienen 8 canicas en total.
Joe tiene 3 canicas.
¿Cuántas canicas tiene Tom?.

Combinación 6 (subconjunto desconocido)

Joe y Tom tienen 8 canicas en total.
Joe tiene algunas canicas.
Tom tiene 5 canicas.
¿Cuántas canicas tiene Joe?.

Cambio 1 (resultado desconocido).

Joe tenía 3 canicas.
Entonces Tom le dio 5 canicas.
¿Cuántas canicas tiene Joe ahora?.

Cambio 2 (resultado desconocido)

Joe tenía 8 canicas.
Entonces él dio 5 canicas a Tom.
¿Cuántas canicas tiene Joe ahora?.

Cambio 3 (cambio desconocido)

Joe tenía 3 canicas.
Entonces Tom le dio algunas canicas.
Ahora Joe tiene 8 canicas.
¿Cuántas canicas Tom le dio a él?.

Continuación de la Tabla 3.2

Cambio 4 (cambio desconocido)
Joe tenía 8 canicas.
Entonces él dio algunas canicas a Tom.
Ahora Joe tiene 3 canicas.
¿Cuántas canicas él le dio a Tom?.

Cambio 5 (inicio desconocido)
Joe tenía algunas canicas.
Entonces Tom le dio 5 canicas.
Ahora Joe tiene 8 canicas.
¿Cuántas canicas tenía Joe al principio?.

Cambio 6 (inicio desconocido)
Joe tenía algunas canicas.
Entonces él dio 5 canicas a Tom.
Ahora Joe tiene 3 canicas.
¿Cuántas canicas tenía Joe al principio?.

Comparación 1 (diferencia desconocida)
Joe tiene 5 canicas.
Tom tiene 8 canicas.
¿Cuántas canicas tiene Tom más que Joe?.

Comparación 2 (diferencia desconocida)
Joe tiene 8 canicas.
Tom tiene 3 canicas.
¿Cuántas canicas tiene Tom menos que Joe?.

Comparación 3 (cantidad comparada desconocida)
Joe tiene 3 canicas.
Tom tiene 5 canicas más que Joe.
¿Cuántas canicas tiene Tom?.

Comparación 4 (cantidad comparada desconocida)
Joe tiene 8 canicas.
Tom tiene 5 canicas menos que Joe.
¿Cuántas canicas tiene Tom?.

Comparación 5 (referente desconocido)
Joe tiene 8 canicas.
El tiene 5 canicas más que Tom.
¿Cuántas canicas tiene Tom?.

Comparación 6 (referente desconocido)
Joe tiene 3 canicas
El tiene 5 canicas menos que Tom.
¿Cuántas canicas tiene Tom?.

(Riley y Greeno, 1988, pp. 53 - 54)

solucionaban mejor los problemas de Combinación mejor que los niños control, pero su rendimiento disminuía en los problemas de Cambio y Comparación.

Por otra parte, Briars y Larkin (1984) asumen un modelo sobre estos problemas con estructuras de conocimiento esquemático menos elaboradas y un conocimiento más complejo de los procedimientos de solución de problemas. Por otra, Kintsch y Greeno (1985) desarrollan un modelo que combina las estructuras de conocimiento esquemático planteadas por Riley et al. (1983) con el procesamiento del texto según van Dijk y Kintsch (1983).

También, De Corte et al. (1985) han realizado varios estudios consistentes con estas categorías de problemas verbales, aunque en una versión reformulada.

Apoyo adicional se obtiene en un estudio realizado por Morales, Shute y Pellegrino (1985) quienes preguntaban a un grupo de niños de tercero y otro de quinto y sexto curso sobre la solución de problemas y su clasificación dentro de estas categorías. Todos los grupos clasificaban los problemas de Cambio dentro de una categoría con subcategorías según la incógnita fuera el resultado, la cantidad de cambio o la cantidad inicial. Los niños de quinto y sexto curso también formaron tal categorización en los problemas de Combinación junto con los problemas de Comparación 3, Comparación 4, Comparación 5 y Comparación 6.

Por tanto, esto confirma que los problemas de Comparación difíciles se comprenden mejor por los niños de quinto y sexto curso al incluir las relaciones parte-todo que involucran el subconjunto mayor de los dos conjuntos dados en el problema.

Rathmell (1986) analiza las relaciones parte-todo en la instrucción en una clase de primero y segundo curso de Educación Primaria. Posterior a la instrucción, se presentaron 14 problemas verbales a los niños. En ambos cursos se tuvo un mejor rendimiento en los problemas verbales de suma y resta, incluso en los problemas más difíciles.

Asimismo, Cummins, Kintsch, Reuser y Weimer (1988) han presentado estos tres tipos de problemas a los niños, quienes atendieron a las relaciones entre los conjuntos y recordaron los números conocidos.

5. Clasificacion de Bermejo y otros

Bermejo y otros (1998, 2002) presentan una clasificación de los problemas verbales que aunque no se distancia demasiado de las clasificaciones anteriores aporta algunas matizaciones y resulta más completa. La Tabla 3.3 muestra los ejemplos de los problemas de suma. La Tabla 3.4 expone los problemas de resta.

Al mismo tiempo, cada uno de estos problemas se subdivide en función del lugar en que sitúa la incógnita (en el primer término, en el segundo término, en el resultado). Además, los problemas de Cambio, Combinación, Comparación, Igualación y Relacional admiten subdivisiones adicionales dependiendo de la dirección sugerida por el suceso (incremento o decremento) o la relación (más que o menos que) respectivamente.

6. Nivel evolutivo

El estudio del cambio conceptual establece cuatro niveles evolutivos en la solución de los problemas verbales (Bergeron y Hersovics, 1990).

En el primer nivel, los niños de 5 ó 6 años saben contar una cantidad de elementos en un conjunto. Con este conocimiento se resuelven los problemas de Cambio más sencillos, los de adición en los que la incógnita se sitúa en el resultado. Pero no resuelven ni los de Combinación ni Comparación dado que estos demandan la comparación simultánea de dos cantidades.

Tabla 3.3
Problemas verbales de adición según Bermejo y otros.

Tipo	Ejemplo	Incógnita
Cambio 1	Al principio Enrique tenia algunos coches. Eva le da 6. Ahora Enrique tiene 9. ¿Cuántos coches tenia al principio?.	Comienzo
Cambio 2	Santi tiene 5 pegatinas. Su madre le regala algunas. Ahora tiene 8. ¿Cuántas pegatinas le ha regalado su madre?.	Cambio
Cambio 3	Juan tenía 4 caramelos. Se ha comprado 11. ¿Cuántos caramelos tiene Juan ahora?.	Resultado
Combinación 1	Ana tiene algunas fotos. Su hermana tiene 6. Entre los dos tienen 14. ¿Cuántas fotos tiene Ana?.	Parte
Combinación 2	Francisco tiene 7 cuentos. Eduardo tiene algunos cuentos. Entre los dos tienen 12 cuentos. ¿Cuántos tiene Eduardo?.	Parte
Combinación 3	Juan tiene 13 canicas. Roberto tiene 2. ¿Cuántas canicas tienen entre los dos?.	Conjunto Total
Comparación 1	Luis tiene 8 lápices. Tiene 3 más que Carmen. ¿Cuántos lápices tiene Carmen?.	Referente
Comparación 2	Miguel tiene 13 soldados. Alberto tiene 5. ¿Cuántos soldados tiene Miguel más que Alberto?.	Diferencia
Comparación 3	Manuel tiene 3 globos. Jaime tiene 12 globos más que Manuel. ¿Cuántos globos tiene Jaime?.	Comparación
Igualación 1	Marta tiene 13 globos. Si a Pepe le diesen 5 globos tendría los mismos que Marta. ¿Cuántos globos tiene Pepe?.	Igualar Conjunto Desconocido
Igualación 2	Hay 4 niñas y 6 niños en un equipo de baloncesto. ¿Cuántas niñas deberían añadirse al equipo para tener el mismo número de niñas que de niños?.	Igualación Desconocida
Igualación 3	Eva tiene 11 coches. Si le regalasen 3 tendría los mismos que Miguel. ¿Cuántos coches tiene Miguel?.	Igualar Conjunto Conocido
Relacional 1	Al principio Ester tenía algunos cromos más que su amiga. Ester encuentra 3 cromos. Ahora Ester tiene 9 cromos más que su Amiga ¿Cuántos cromos tenía al principio Ester más que su amiga?.	Comparación Inicial Desconocida
Relacional 2	Camilo tiene 5 reglas más que Rodrigo. Camilo se compra alguna más. Ahora Camilo tiene 13 reglas más que Rodrigo. ¿Cuántas reglas se ha comprado Camilo?.	Cambio Desconocido
Relacional 3	Al principio Salomé tenía 10 lápices más que Jaime. Salomé se ha comprado 4 lápices. ¿Cuántos lápices tiene ahora Salomé más que Jaime?.	Comparación Final Desconocida.

(Bermejo y otros, 2002, p. 59).

En el segundo nivel, los niños de 6 y 7 años relacionan de manera causal el cambio que se produce en el conjunto inicial y la acción que los provoca. Ahora son capaces de estimar la dirección del cambio (incremento o decremento) y de relacionarla con las operaciones de adición y sustracción. Por ejemplo, resuelven un problema de Cambio con la incógnita en el segundo sumando contando desde la cantidad menor hasta la mayor.

Tabla 3.3

Problemas verbales de sustracción según Bermejo y otros

Tipo	Ejemplo	Incógnita
Cambio 4	Al principio Luis tenia algunos coches. Eva le quita 5. Ahora Luis tiene 3. ¿Cuántos coches tenía al principio?.	Comienzo
Cambio 5	Raúl tenía 15 canicas. Él ha perdido algunas canicas. Ahora le quedan 9. ¿Cuántas canicas ha perdido Raúl?.	Cambio
Cambio 6	Tamara tiene 8 galletas. Se ha comido 2. ¿Cuántas galletas le quedan a Tamara?.	Resultado
Comparación 4	Inma tiene 11 discos. Tiene 4 menos que Elena. ¿Cuántos discos tiene Elena?.	Referente
Comparación 5	Jesús tiene 4 globos. Laura tiene 7. ¿Cuántos globos tiene Jesús menos que Laura?.	Diferencia
Combinación 6	Jorge tiene 13 gominolas. Adolfo tiene 5 menos que Jorge. ¿Cuántas golosinas tiene Adolfo?.	Comparación
Igualación 4	Cesar tiene 4 juguetes. Si Pablo perdiese 12 juguetes tendría el mismo número de juguetes que Cesar. ¿Cuántos juguetes tiene Pablo?.	Igualar Conjunto Desconocido
Igualación 5	María tiene 14 canicas. Su hermano tiene 5. ¿Cuántas canicas tendría que perder María para tener el mismo número de canicas que su hermano?.	Igualación Desconocida
Igualación 6	Javi tiene 14 chapas. Si perdiese 6 chapas tendría el mismo número de chapas que Alberto. ¿Cuántas chapas tiene Alberto?	Igualar Conjunto Conocido
Relacional 4	Al principio Fran tenía algunas canicas más que Eduardo. Fran pierde 3 canicas. Ahora Fran tiene 12 canicas más que Eduardo. ¿Cuántas canicas tenía al principio Fran más que Eduardo?.	Comparación Inicial Desconocida
Relacional 5	Jesús tiene 15 soldados más que Javi. Jesús regala algunos soldados. Ahora Jesús tiene 7 soldados más que Javi. ¿Cuántos soldados ha regalado Jesús?	Cambio Desconocido
Relacional 6	Al principio Cesar tenía 11 juguetes más que Tamara. Cesar ha roto 3. ¿Cuántos juguetes tiene ahora Cesar más que Tamara?.	Comparación Final Desconocida

(Bermejo y otros, 2002, p. 60).

En el tercer nivel, los niños de 7 u 8 años han adquirido el esquema parte-parte-todo que los capacita para manejar una situación estática en la que tienen que imponer una estructura sobre la situación descrita en el problema verbal. De esta manera se resuelven los problemas de Cambio con la incógnita en el primer término.

En el cuarto nivel, los niños de 9 ó 10 años disponen de los esquemas necesarios para solucionar los problemas de Comparación.

Por otro, Mwangi y Sweller (1998) examinan los factores que influyen en el aprendizaje para resolver los problemas verbales de Comparación. En un primer experimento se compararon ejemplos de estrategias con procedimientos tradicionales. La muestra se formó con 18 alumnos de tercer curso. Los resultados indican que los alumnos resuelven los problemas con ejemplos de estrategias más que con procedimientos tradicionales.

Asimismo, Christou y Philippou (1998) han presentado problemas verbales de suma a 382 alumnos de segundo, tercero y cuarto curso. Los resultados confirman un patrón de respuesta según el tipo de problema.

En otro sentido, Chen (1999) considera que los niños comprenden mejor los problemas con números pequeños (menores de 5) que con números grandes (mayores de 5). En un estudio plantea la hipótesis de que los niños de 5 y 6 años resuelven los problemas en función del tamaño de los números involucrados. Entonces, los problemas con números pequeños se solucionarían en una forma más avanzada que con números grandes. Es decir, el rendimiento en los problemas con números pequeños sería mayor que con números grandes y esta diferencia se incrementaría según la dificultad del problema. La tarea constaba de 6 problemas de Cambio y 2 problemas de Combinación. Los resultados confirman parcialmente las predicciones. Los problemas con números pequeños se resolvían mejor que con números grandes, pero esta diferencia no se incrementó con la dificultad del problema.

Entonces, los números pequeños influyen en la comprensión del problema y en la respuesta apropiada, mientras que los grandes disminuyen tal comprensión y la elaboración de la estrategia apropiada. Además, esta reducción se incrementa con la dificultad de la tarea.

En resumen, los problemas verbales de suma y resta se clasifican según la estructura semántica. En cada tipo se distinguen varias formas según el lugar que ocupe la incógnita. En otras palabras, los problemas verbales implican relaciones dinámicas o estáticas entre los conjuntos del problema, en las cuales el elemento desconocido puede estar al principio, en el segundo término o al final. Asimismo, la comprensión de los problemas se desarrolla de manera gradual a partir de los problemas más fáciles hasta los más difíciles.

4. Modelos de los problemas verbales

En esta sección revisaremos los modelos que simulan la comprensión de la estructura semántica de los problemas verbales.

En este sentido, Bermejo y otros (1998) afirman que se han propuesto diferentes modelos de simulación para explicar el proceso de solución que siguen los individuos en los problemas aditivos resaltando los pasos que suelen dar y los procesos cognitivos implicados en la ejecución de estas tareas. En general, estos modelos consideran dos componentes fundamentales: la identificación y representación del problema y la selección de un esquema apropiado para la solución del mismo. Asimismo, los modelos propuestos plantean que la dificultad de los niños radica más en la construcción apropiada de la representación inicial del problema que en la ejecución de la operación seleccionada.

Briars y Larkin (1984), Kintsch y Greeno (1985), Riley et al. (1983) y De Corte et al. (1985) proponen varios modelos que se distinguen por sus planteamientos principales. A continuación veremos cada uno de ellos.

4.1. Modelo de Briars y Larkin

Briars y Larkin (1984) proponen un modelo conocido como CHIPS que simula los procesos psicológicos que los niños desarrollan cuando solucionan un problema. En este modelo la forma de operar consiste en formular una lista de estructuras que representan a una ficha o chips. Con estas fichas o chips se construye una representación del problema.

El proceso simulativo se lleva a cabo mediante el siguiente procedimiento: antes de iniciar la solución del problema, el CHIPS dispone de un conjunto de fichas que se etiquetan como miembros de un conjunto fuente de modo que cuando se propone un problema toma cada vez una palabra para procesarla o ejecuta una acción sobre su colección de fichas o no hace nada. Al mismo tiempo construye en su memoria de trabajo elementos que reflejan su conocimiento acerca del problema: un elemento que representa a una ficha específica, un encabezamiento que indica que es una ficha, un número de identificación que lo distingue de otras fichas y un indicador que informa si esta ficha ha sido contada. Estos elementos representan las relaciones de pertenencia y de descripción. La primera indica que una ficha es un miembro de uno o más conjuntos y la segunda precisa los calificativos que se aplican a ese conjunto.

El modelo CHIPS construye grandes estructuras de datos denominadas esquemas. Tales estructuras registran el conocimiento de modo organizado. El CHIPS tiene tres niveles de conocimiento matemático: contadores de función simple, contadores con doble función y contadores con doble representación.

El primero soluciona los problemas más sencillos ya que consiste sólo en la habilidad de mover y contar fichas, así como la pertenencia de cada ficha a un solo conjunto.

En el segundo se adquiere la habilidad para usar una ficha como miembro de dos conjuntos, aunque esos dos conjuntos no estén al mismo tiempo presente. El CHIPS encuentra el modo de contar esos conjuntos.

En el tercero existe la habilidad de reconocer las acciones de combinar y separar como inversiones. Dos esquemas participan en este nivel: el esquema de transferencia y un esquema de equivalencia de los subconjuntos.

Por último, este modelo predice acerca del nivel de conocimiento que se requiere para solucionar cada tipo de problema, así como el tipo de errores y las estrategias que se producen en ellos.

4.2. Modelo de Kintsch y Greeno

El modelo de Kintsch y Greeno (1985) representa una integración del trabajo sobre la solución de problemas aritméticos de Riley et al. (1983) y la comprensión del discurso de van Dijk y Kintsch (1983). Este modelo se construye sobre el texto del problema de la misma manera como en la teoría general de van Dijk y Kintsch respecto a la comprensión del texto y se forma un modelo del problema en términos de los conjuntos de objetos y sus interrelaciones. Se reconoce un patrón de relaciones entre los conjuntos (transferencia o conjunto mayor) y el procedimiento de solución almacenado para este caso.

El conocimiento aritmético forma un subconjunto de una red de conocimiento general de la persona. Los conjuntos de objetos se representan por un esquema proposicional con la especificación, la cantidad y el rol (su relación a otros conjuntos). El esquema mayor (resultado) se define de manera similar. Un esquema de transferencia se establece con espacios para los conjuntos de inicio, transferencia y resultado. Varios procedimientos aritméticos se asocian con cada esquema del conjunto mayor (las estrategias de conteo). En otras palabras, el modelo sobre la comprensión del discurso tiene dos etapas. Primera, una red proposicional se construye y, segunda, ésta debe ser integrada.

La base del texto integrada -después que la información irrelevante se desactiva y los elementos de conocimiento se asimilan- es una clase de modelo de la situación. van Dijk y Kintsch (1983) dejan abierta la posibilidad de que los modelos de la situación puedan ser no proposicionales (Perrig y Kintsch, 1985).

Kintsch y Greeno (1985) agregan a las estrategias de la comprensión del discurso en el modelo de van Dijk y Kintsch otros procedimientos llamados estrategias aritméticas. Estas estrategias se consideran de tres tipos: 1) estrategias que forman hipótesis aritméticas acerca de los conjuntos, 2) estrategias que determinan la naturaleza de las conexiones entre varias proposiciones del texto y las hipótesis aritméticas y 3) estrategias que forman esquemas aritméticos superiores con los cuales se realizan los cálculos aritméticos.

Por ejemplo, si el modelo se encuentra una proposición de cantidad, como "seis canicas", forma un conjunto y prueba completar varios espacios del esquema del conjunto: cuales son los objetos, la cardinalidad del conjunto, una especificación de los objetos (que las canicas son propias de Fredy) y la relación entre el conjunto presente y los otros conjuntos en el problema (las seis canicas fueron dadas a Fredy por Tom, las cuales se consideran como un "conjunto de transferencia").

El modelo de Kintsch y Greeno (1985) identifica distintas clases de errores causados por una carencia del conocimiento aritmético, comprensiones lingüísticas erróneas y recursos limitados. Una interrupción en el procesamiento se produce cuando ciertas formulaciones de los problemas verbales sobrecargan los recursos de la memoria a corto plazo.

Kintsch y Greeno (1985) muestran que en cada tipo de problema existe una fuerte correlación entre la frecuencia de errores al solucionar el problema y la carga de memoria impuesta, incluso sin diferencias en los problemas en cuanto al conocimiento aritmético o lingüístico que se requiere para la solución.

El modelo distingue entre los errores lingüísticos y aritméticos que se explican como un fracaso para comprender el texto del problema antes que a una falta de conocimiento de la aritmética, lo cual se encuentra en los alumnos de segundo y tercer curso (Dellarosa, 1986; Cummins et al., 1988; Kintsch, 1987). Si las comprensiones lingüísticas erróneas acerca del significado de palabras claves como: *más que*, *menor que*, *todo*, *algunos* se construyen dentro de la base del conocimiento del modelo, entonces se produce un patrón de respuestas incorrectas y mal recordadas respecto a las afirmaciones del problema, lo cual da lugar a los errores cometidos por los participantes.

Posteriormente, Kintsch (1988) propone el modelo construcción-integración para la comprensión del discurso. En este modelo, el procesamiento es estrictamente abajo-arriba. El significado de la palabra se activa, las proposiciones se forman, las inferencias y las elaboraciones se producen con respecto al contexto del discurso. Entonces, una red de objetos interrelacionados se integra dentro de una estructura coherente a través de un proceso de activación.

Existe un nivel lingüístico de representación, un nivel conceptual para representar el significado y la estructura de un texto (constituye la base del texto en van Dijk y Kintsch, 1983) y un nivel en el cual el texto pierde por sí mismo su individualidad y el contenido de la información se integra dentro de una estructura mayor (modelo de la situación de van Dijk y Kintsch, 1983).

El modelo combina un proceso de construcción en el cual la base del texto se construye desde una entrada lingüística y del conocimiento del individuo, con una fase de integración. Esta base del texto se integra en una estructura coherente. El conocimiento se conceptualiza como una red asociativa y el proceso de construcción se modela como un sistema de producción (Dellarosa, 1986; Fletcher, 1985; Kintsch y Greeno, 1985).

El modelo de Kintsch y Greeno toma en cuenta la aritmética (estrategias aritméticas) y el significado de las palabras (léxico: una red semántica en Dellarosa, 1986). Sin embargo, no tiene un conocimiento general del mundo que permita comprender la situación descrita en el problema verbal. Sólo procesa la información aritmética crucial del discurso y construye una base de texto proposicional. Sus limitaciones son indicadas por los problemas verbales familiares que resultan más fáciles que su expresión abstracta (Cummins et al., 1988; Hudson, 1983).

Kintsch (1998) presenta el modelo construcción-integración de la comprensión del texto. Kinstch describe la comprensión como un proceso de dos etapas: 1) las representaciones se construyen a través del texto y 2) estas representaciones se integran mediante una activación. Este modelo se aplica a los problemas verbales teniendo en cuenta el conocimiento relevante que se activa durante la lectura del texto y el reconocimiento de la información. Además, el modelo se relaciona con las estrategias empleadas en la solución de los problemas verbales según una aproximación lingüística.

Kintsch (2000) argumenta que las estructuras de control denominadas esquemas dirigen la información sobre la comprensión. Entonces, se activan el conocimiento relevante en el contexto y las experiencias significativas independiente de los estímulos innecesarios. Esto se realiza por medio de una activación selectiva.

Singer y Kintsch (2001) analizan la recuperación del texto bajo los principios del modelo construcción-integración en un estudio de simulación. El análisis tiene tres componentes: 1) una representación de la memoria a largo plazo en forma de multinivel, 2) la familiaridad de una prueba esta influida por los contenidos de la memoria del texto y 3) existen juicios acerca de las pruebas. Los resultados indican una interacción de las variables.

Kintsch (2002a) describe las características del texto y los tópicos como una exploración de la analogía entre los modelos de los procesos psicológicos de la comprensión del lenguaje y las nociones lingüísticas del tema. Kintsch argumenta que el análisis semántico latente permite construir una representación matemática precisa del tema o tópico.

Además, algunos estudios simulan este modelo en la recuperación de la información del texto y la elaboración de inferencias (Caillies, Denhiere y Kintsch, 2002; Schmalhofer, Mc Daniel y Keffe, 2002).

Recientemente, Kintsch (2002b) incluye en el modelo los procesos de construcción, la representación del conocimiento y la identificación de la palabra en el discurso.

4.3. Modelo de Riley y Greeno

Riley y Greeno (1988) proponen un modelo para explicar los problemas verbales. Este modelo caracteriza cada nivel de rendimiento como un conjunto de estructuras cognitivas y procedimientos que simulan el comportamiento de los niños. El análisis se centra en las diferencias del desarrollo en el conocimiento y los procesos necesarios para comprender el lenguaje.

El modelo realiza tres funciones. Primera, un conjunto de redes semánticas representa la información proposicional en el texto. Esto se corresponde con la base del texto en el análisis de van Dijk y Kintsch (1983). En la segunda se construyen modelos semánticos de las situaciones descritas en los textos. Estos modelos son simulaciones de los conjuntos de objetos que los niños construyen con los bloques. Estas representaciones se corresponden con las situaciones del modelo de van Dijk y Kintsch, y que Kintsch y Greeno (1985) denominan modelos del problema. En la tercera se emplean los modelos semánticos para contestar a las preguntas contando los conjuntos de objetos. El modelo es consistente con los modelos mentales de Holland, Holyoak, Nisbett y Thagard (1986) y Johnson-Laird (1983).

Tres niveles de conocimiento se simulan en el procesamiento cognitivo para cada categoría de problema. En el nivel 1 se comprenden las proposiciones acerca de los conjuntos especificado el número de objetos en los conjuntos. Los procesos del nivel 1 incluyen la construcción de los conjuntos en un modelo del problema correspondiente a los conjuntos especificados en las redes semánticas y la comprensión de las preguntas sobre los conjuntos del problema cumpliendo las acciones de conteo para encontrar la respuesta a las preguntas. Cuando el texto se presenta, estos procesos solucionan los problemas en los cuales la información sobre los conjuntos permite la construcción de un modelo del problema de manera secuencial, proposición por proposición.

En el nivel 2 se construyen las redes semánticas que representan los conjuntos que se mencionan en los textos, pero sin números específicos. También representan las relaciones entre los conjuntos empleando el esquema parte-todo, la transferencia dentro o fuera de un conjunto o la comparación entre los conjuntos. Los procesos del nivel 2 construyen los conjuntos que se especifican para las relaciones en las redes semánticas, incluyendo los subconjuntos o un conjunto grande o pequeño con respecto al conjunto existente. Los modelos del nivel 2 cuentan para determinar el número de objetos en un conjunto que no esté presente en el modelo, pero es un subconjunto del conjunto.

En el nivel 3 se transforman las representaciones de la red semántica al agregar las relaciones parte-todo a otras relaciones ya presentes. Estas conversiones aseguran el uso de inferencias en los modelos que dependen de las representaciones sobre las relaciones parte-todo. Los procesos del nivel 3 suman estas relaciones a las representaciones que involucran cambios o comparaciones de los conjuntos. En la Figura 4.1 se presenta un ejemplo de este nivel con un problema de Cambio.

Las predicciones del modelo sugieren que en cada categoría existen problemas que se solucionan con el conocimiento del nivel 1, algunos requieren el nivel 2 y otros suponen el nivel 3. Los problemas de una categoría tienen una dificultad similar cuando requieren el mismo nivel de conocimiento.

Los problemas Combinación 1 y Combinación 2 se solucionan con el conocimiento del nivel 1. Los otros problemas de Combinación requieren representar las relaciones entre un conjunto y la unión de este conjunto cuando los dos subconjuntos no están presentes.

El conocimiento del nivel 1 es suficiente para los problemas de Cambio 1 y Cambio 2. En estos problemas, el conjunto de inicio se especifica en la primera sentencia mediante proposiciones y bloques. Un incremento o decremento del conjunto se define y los bloques se suman o restan del conjunto existente. Finalmente, el conjunto se cuenta.

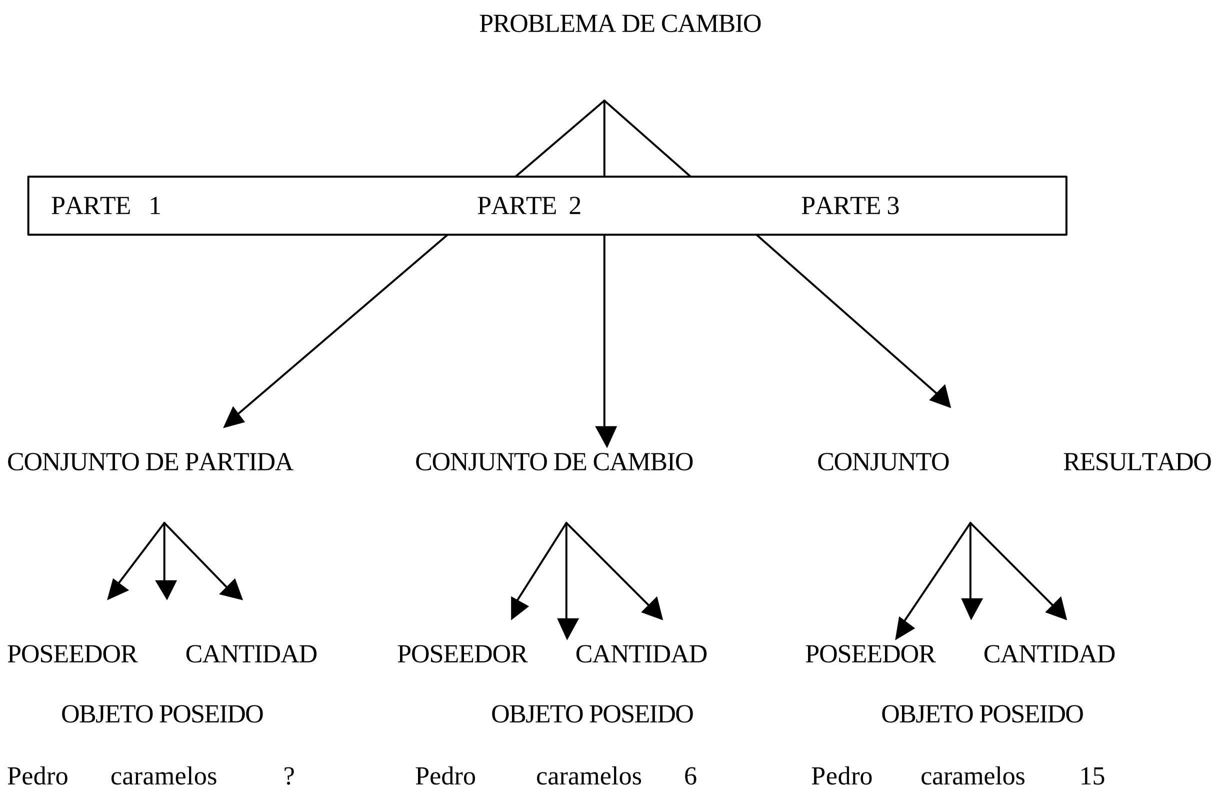

Figura 4.1. Red semántica representativa de un problema de cambio, en el que interviene el nivel 3 de conocimiento propuesto en el modelo de Riley y otros, 1983 (adaptado de Riley y otros, 1988, en Bermejo, 1990, p. 119).

Los problemas Cambio 4 se solucionan con el conocimiento del nivel 1 aunque algo fortuitamente. La segunda sentencia, un decremento sin un número especifico, no se representa en el nivel 1. La tercera sentencia se comprende, pero el conjunto existente se disminuye al tamaño requerido. El conjunto que se retira se construye en el modelo. La pregunta se representa acerca de un decremento y un conjunto en el modelo semántico se quita desde el conjunto inicial, lo cual se cuenta y, entonces, se da la respuesta.

Los problemas de Cambio 3 no se resuelven con el conocimiento del nivel 1 porque cuando el conjunto inicial aumenta se produce un conjunto nuevo, así que no hay distinción entre los bloques que están al principio y los que se agregan. En el nivel 2, la segunda sentencia de Cambio 3 o Cambio 4, se representa un conjunto y un esquema del conjunto de cambio. Entonces, la sentencia que especifica el conjunto del resultado se representa y agrega al esquema, después los bloques se suman o restan del conjunto inicial. Finalmente, se representa la pregunta acerca del cambio. Si el cambio es un incremento, se cuenta el número de bloques y el número inicial, pero si es un decremento se cuentan los bloques que son retirados.

Los problemas de Cambio 5 y Cambio 6 requieren el conocimiento del nivel 3. En este nivel se incluyen las representaciones de los patrones del conjunto de cambio sin que el conjunto de inicio esté en el modelo semántico. También se convierten los patrones del conjunto de cambio a patrones parte-todo cuando el conjunto de inicio se desconoce y se modifican los conjuntos de bloques al dividirlos dentro de los subconjuntos. Entonces, la pregunta se representa acerca del conjunto inicial y se contesta mediante los procedimientos de conteo que aplican a un subconjunto o a un conjunto combinado.

Los problemas de Comparación 1 y Comparación 2 se solucionan con el nivel de conocimiento 1. Los problemas de Comparación 3 y Comparación 4 requieren representar las relaciones entre los conjuntos mediante un esquema del nivel 2. En los problemas de Comparación 5 y Comparación 6 se comparan los conjuntos con los conjuntos específicos que requieren el nivel 3.

Riley y Greeno (1988) han aplicado este modelo al rendimiento de los niños de preescolar hasta tercer curso de Educación Primaria en tres problemas: Combinación, Cambio y Comparación. Los números en los problemas tenían un rango del 2 al 10 y la respuesta correcta era diez o menos.

Los resultados indican que distintos niveles de conocimiento se requieren para la solución de los problemas. En las categorías de Cambio y Combinación casi todos los patrones de respuesta son consistentes con la predicción del modelo. Cerca del 70% del rendimiento en las categorías de los problemas corresponde con los niveles. Los niños preescolares y de primer curso tuvieron 72 patrones correctos, de los cuales 46 estaban de acuerdo con las predicciones del nivel 1 o nivel 2. Los niños de segundo y tercer curso obtenían las respuestas correctas en la mayoría de los problemas.

Las repeticiones de los problemas de Cambio sugieren que los niños confunden las identidades del conjunto de inicio, cambio y resultado en forma similar al nivel 1. De los niños con repeticiones incorrectas, 15 de 17 repetían los problemas de Cambio 3 como problemas de Cambio 1; 20 de 20 repetían los problemas de Cambio 4 como problemas de Cambio 2; 6 de 6 realizaban los problemas de Cambio 5 como problemas de Cambio 1 y 12 de 12 ejecutaban los problemas de Cambio 6 como problemas de Cambio 2.

Estos resultados confirman la idea de que el progreso en los diferentes problemas depende del desarrollo de las estructuras cognitivas. Los niños de preescolar y de primer curso no resuelven los problemas de comparación, pero son capaces de solucionar los problemas de Cambio y Combinación

El modelo de Riley y Greeno (1988) atribuye las respuestas correctas en el nivel 1, dadas al principio de la escuela elemental, a un proceso de modelado directo con el cual los niños crean una representación de la situación del problema y realizan las acciones descritas en el problema sobre esta representación. Este modelo soluciona los problemas con la incógnita al final, pero no con la incógnita al inicio. Los niños de 5 años raramente responden a los problemas con la incógnita al inicio que es la respuesta esperada por el modelo.

Posteriormente, Greeno (1998) plantea el cambio a sistemas grandes que incluyan la interacción de agentes cognitivos dentro del sistema y con otros subsistemas en el entorno. Entonces, la idea de una situación cognitiva prevalece en los sistemas dinámicos.

En este sentido, Greeno y Goldman (1998) discuten sobre el pensamiento práctico en términos epistemológicos dentro de las disciplinas y los contextos específicos.

Recientemente, Stenning, Greeno, Hall, Sommerfield y Wiebe (2002) ejemplifican el aprendizaje conceptual mediante la coordinación de representaciones dispersas dentro de un sistema de razonamiento heterogéneo. Esta coordinación se comprende en el desarrollo de las prácticas representacionales que ocurren en el discurso y la interacción social. El análisis se realiza mediante la integración de tres aproximaciones: 1) un análisis semántico fundamental, 2) un análisis interaccional y 3) un análisis de dominio específico. En este sentido, se explican el contenido y la estructura del discurso, así como los cambios en la comprensión conceptual como parte del rendimiento de la interacción entre ellos.

4.4. Modelo de De Corte

Investigaciones previas (Hudson, 1983; Lindvall e Ibarra, 1980) apoyan la hipótesis de que la reformulación de los problemas de suma y resta afecta la dificultad de ciertos problemas.

Lindvall e Ibarra (1980) informan que el problema con la incógnita en el conjunto de combinación llega a ser más fácil para los niños de preescolar cuando se reformula como sigue *"Tom y Joe tienen 8 canicas en total, 5 de éstas canicas pertenecen a Tom y el resto pertenece a Joe; ¿Cuantas canicas tiene Joe?"*. La versión más condensada es: *"Tom y Joe tienen 8 canicas en total; Tom tiene 5 canicas; ¿Cuantas canicas tiene Joe?"*.

Hudson (1983) analiza los problemas de Comparación en un estudio con 12 niños de guardería, 24 de preescolar y 28 de primer curso de primaria. A los participantes se presentaban 8 dibujos mostrando, por ejemplo, 5 pájaros y 4 gusanos. Con respecto a estos dibujos dos preguntas se realizaban con un intervalo breve entre ellas: la primera es la pregunta usual en los problemas de Comparación: *"¿Cuantos pájaros más que gusanos hay aquí?"* , y la segunda consiste en una pregunta alternativa: *"Supón que todos los pájaros corren sobre los gusanos y cada uno intenta obtener un gusano. ¿Cuántos pájaros no obtienen un gusano?"*. Hudson encuentra que el problema es más fácil cuando se presenta la segunda pregunta. Los niños empleaban una estrategia de emparejamiento para obtener la solución.

Los resultados de estos estudios sugieren que las dificultades de los niños para solucionar los problemas verbales presentados en la forma tradicional no se deben a una carencia de acciones cuantitativas o procedimientos necesarios para realizar la solución, sino que los niños no comprenden bien estos problemas porque no están formulados explícitamente.

De Corte et al. (1985) reformulan los problemas de suma y resta sin afectar su estructura semántica con niños de primero y segundo curso. Su objetivo es contribuir a una comprensión mejor de los procesos necesarios para la construcción de una representación mental del problema a partir del texto verbal. El análisis cuantitativo y cualitativo de los datos apoya la hipótesis de que la reformulación del problema con las relaciones semánticas más explícitas facilita la construcción de una representación mental apropiada. Es decir, una influencia significativa existe en los procesos de solución según el grado en que las relaciones semánticas entre las cantidades se afirman explícitamente.

Los autores parten de un marco teórico del modelo que se basa en el procesamiento semántico (De Corte y Verschaffel, 1985a).

Este modelo comprende cinco etapas:

1. Representación mental, abstracta y global del problema en términos de los conjuntos y las relaciones entre los conjuntos.

2. Selección de una operación aritmética formal apropiada o una estrategia de conteo informal para encontrar el elemento desconocido en la representación del problema.
3. Ejecución de la acción seleccionada u operación.
4. Reactivación de la representación inicial del problema, reemplazando el elemento desconocido por el resultado de la acción realizada y formulación de la respuesta.
5. Verificación para comprobar la exactitud de la solución encontrada en la etapa precedente.

Específicamente, en la primera etapa la representación mental se considera como el resultado de una interacción compleja del análisis abajo-arriba y arriba-abajo. Así, el procesamiento de la entrada verbal, la estructura del problema y el esquema semántico del niño (esquema de Cambio, Combinación y Comparación) contribuyen a la construcción de la representación apropiada.

El esquema de la estructura del problema verbal es un esquema más general que involucra el conocimiento del alumno de la estructura interna y externa de los problemas verbales, su rol y propósito (De Corte y Verschaffel, 1985a).

Los problemas verbales que se presentan usualmente a los niños en las escuelas se muestran muy brevemente y algunas veces de manera ambigua, al menos que se expliquen varias presuposiciones textuales (Kintsch y Greeno, 1985; Nesher y Katriel, 1977). Por ejemplo, *"Pedro tiene 3 manzanas, Pedro y Ana tienen 9 manzanas juntos; ¿Cuantas manzanas tiene Ana?"* .

En este problema, el texto no presenta explícitamente que las tres manzanas de Pedro que se mencionan en la primera sentencia, también son parte de las nueve manzanas que Pedro y Ana tienen juntos. En los problemas verbales la afirmación que alguien tiene N cosas significa exactamente N cosas. Sin embargo, en el lenguaje común la sentencia *"Pedro tiene 3 manzanas"* no dice que Pedro tenga sólo 3 manzanas. La sentencia es cierta incluso si él tiene más de 3 manzanas.

Los niños expertos no tienen dificultades para sobrellevar la indistinción de los problemas verbales usuales y construir una representación apropiada porque ellos procesan, en gran parte, el texto verbal en una forma arriba-abajo. Es decir, el procesamiento se dirige conceptualmente mediante el esquema semántico. Este esquema les asegura compensar las omisiones y ambigüedades en la afirmación del problema. En los niños menos expertos no se desarrolla todavía el esquema semántico apropiado, por tanto dependen más de una forma abajo-arriba o del procesamiento que se dirige al texto para construir una representación apropiada del problema.

De Corte et al. (1985) hipotetizan que la reformulación de los problemas verbales facilita una construcción de la representación apropiada del problema en los niños menos expertos y, por extensión, encuentran la solución correcta.

En el caso de los problemas de Cambio 5 no se refiere explícitamente el conjunto desconocido dentro de la afirmación usual. Por ejemplo, en el primer problema de la serie A en la Tabla 4.1 no se menciona explícitamente que Joe tiene algunas canicas antes que gane tres canicas más. La reformulación consiste principalmente en agregar una sentencia a la afirmación del problema con la cual se identifica el conjunto mayor.

En los problemas estándar Combinación 2 no se afirma explícitamente que el conjunto dado sea al mismo tiempo parte del conjunto mayor. Por ejemplo, en el tercer problema de la serie A en la Tabla 4.1 no se menciona que las 3 nueces de Tom, las cuales se presentan en la segunda sentencia son parte de las 9 nueces que él y Ana tienen juntos. La reformulación de estas tareas hace las relaciones parte-todo más obvias y explícitas en el texto verbal.

Los problemas de Comparación 1 se reformulan de la misma manera como en el estudio de Hudson (1983), pero no se presentan dibujos sino sólo el texto verbal del problema. La reformulacion evita la expresión *más que* y sugiere más emparejar las dos cantidades para encontrar la solución. La reformulación en los problemas de Comparación es más radical respecto a los problemas de Cambio y Combinación.

De Corte et. al. (1985) han investigado las dos series de problemas verbales que se exponen en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1.
Problemas verbales tradicionales (serie A) y reformulados (serie B)

Tipo de problema	Serie A	Serie B
Cambio con inicio desconocido (cambio 5)	Joe ganó 3 canicas. Ahora él tiene 5 canicas ¿Cuantas canicas Joe tenía al principio?	Joe tenía algunas canicas El ganó 3 canicas más Ahora tiene 5 canicas. ¿Cuantas canicas Joe tenía al principio?.
	Bob obtuvo 2 galletas. Ahora él tiene 5 galletas. ¿Cuantas galletas Bob tenía al principio?.	Bob tenía algunas galletas. El obtiene 2 galletas más. Ahora él tiene 5 galletas. ¿Cuantas galletas Bob tenía al principio?
Combinación con subconjunto desconocido (combinación 2)	Tom y Ana tienen 9 donas juntos. Tom tiene 3 donas. ¿Cuántas donas tiene Ana?	Tom y Ana tienen 9 donas juntos. Tres de esas donas pertenecen a Tom. El resto pertenece a Ana. ¿Cuántas donas tiene Ana?
	Ana y Tom tienen 8 libros juntos. Ana tiene 5 libros. ¿Cuántos libros tiene Tom?	Ana y Tom tienen 8 libros juntos. Cinco de esos libros son de Ana. ¿Cuántos libros tiene Tom?
Comparación con diferencia desconocida. (comparación 1)	Pedro tiene 8 manzanas. Ana tiene 3 manzanas. ¿Cuantas manzanas tiene más que Ana?.	Hay 8 jinetes. Pero sólo hay 3 caballos. ¿Cuántos jinetes no tienen caballo?.
	Ana tiene 6 perritos. Sue tiene 3 perritos. ¿Cuantas perritos tiene Ana más que Sue?.	Hay 6 niños. Pero sólo hay 3 sillas. ¿Cuántos niños no tienen silla?.

(De Corte et al., 1985, p. 464)

En la serie A, los problemas estándar se presentaban en una forma usual como aparecen normalmente en los libros de texto de primer curso y en la mayoría de las investigaciones sobre los problemas verbales. En la serie B, la misma clase de problemas se reformulaba haciendo que las relaciones semánticas entre los conjuntos se presenten explícitamente a los niños. Ambas series se pasaron a 89 alumnos de 6 a 7 años de primer curso y 84 niños de 7 a 8 años de segundo curso. A la mitad de alumnos de los dos grupos se pasó primero la serie A y una semana más tarde la serie B. Para la otra mitad se invirtió el orden.

Los resultados indican que los problemas reformulados se solucionan mejor que los verbales estándar en ambos cursos. Los alumnos de segundo curso obtienen resultados más altos que los de primero en ambas series, lo cual muestra que el esquema del procesamiento arriba-abajo del texto está mejor desarrollado en aquellos niños.

El análisis individual de las respuestas de los niños muestra que 90 (50 de primero y 40 de segundo) de los 173 niños obtenían una puntuación más alta en la serie B que en la serie A.

En cuanto al tipo de problema resalta que los alumnos de primer curso puntuaban bajo en los problemas de Cambio y alto en los problemas de Comparación. La razón reside en que en el estudio se usó el tipo más difícil de los problemas de Cambio (con la incógnita al inicio), mientras que la clase de problemas de Comparación fue la más fácil (con la incógnita en el resultado). Estos resultados están de acuerdo con los encontrados por Riley et al. (1983).

Los niños de primer curso encuentran diferencias en el nivel de dificultad dentro de un tipo de problema dependiendo del grado en el cual las relaciones semánticas entre los conjuntos en el problema son explícitas. Por tanto, estos niños no pueden al igual que sus iguales de segundo curso aplicar el procesamiento arriba-abajo, sino que realizan un procesamiento abajo-arriba o sea un procesamiento dirigido al texto para construir la representación del problema. La reformulación de los problemas compensa a los esquemas semánticos menos desarrollados y facilita el procesamiento abajo-arriba.

La representación del problema reformulado que se construye por el niño quien soluciona correctamente sólo estos problemas no es la misma de los alumnos quienes dan la respuesta adecuada tanto a los problemas usuales como reformulados. Estas representaciones diferentes reflejan importantes diferencias en la comprensión. Por ejemplo, las representaciones de los niños menos expertos puede ser menos abstracta o menos formal que las de los niños más expertos (De Corte y Verschaffel, 1985b).

Cummins et al. (1988) analizan el rol de la comprensión sobre los problemas verbales bajo una aproximación lingüística. Según estos autores, la comprensión está influenciada por la naturaleza del lenguaje que se usa en el texto del problema. Las palabras como *"algunos"*, *"más que "*, *"todos"*, *"total" "juntos"* se interpretan mal por los niños. Los resultados de un programa de simulación sugieren que los patrones de error se relacionan con la sofisticación lingüística del alumno. Es decir, las estrategias de solución son influenciadas por la naturaleza del texto del problema. Los autores concluyen que la reformulación de los problemas verbales tiene un efecto positivo en los procesos de solución en más de la mitad de los participantes.

También, van Essen y Hamaker (1990), Wrigth y Wrigth (1986) y Anand y Ross (1987) presentan evidencia de que los niños no carecen del conocimiento relevante puesto que los problemas reformulados resultan más fáciles de solucionar que los problemas estándar.

En otro estudio, Cummins (1991) analiza las interpretaciones infantiles de los problemas verbales y los factores que influyen en ellas. La tarea experimental requirió que los niños seleccionaran los dibujos que representaban las estructuras semánticas de los problemas. Los resultados indican un mejor rendimiento para los problemas verbales reformulados.

Bernardo (1999) encuentra los mismos resultados que De Corte et al. (1985) en un estudio realizado con 283 alumnos filipinos bilingües de primer curso. La tarea consistía en solucionar problemas verbales reformulados. Los datos indican que la comprensión del problema mejora bajo los siguientes aspectos: 1) los problemas son escritos en la primera lengua, 2) los problemas son reformulados, 3) el nivel de escolaridad es mayor y 4) el efecto del lenguaje varía según el rendimiento de los alumnos. Por tanto, si la comprensión del texto es mejor, entonces ocurren menos errores conceptuales. Mientras que si la reformulación del problema es mayor, entonces se expresan menos interpretaciones inadecuadas.

Además, Verschaffel, De Corte y Vierstraete (1999) investigan los problemas verbales reformulados de suma. En el estudio participaban 199 alumnos de quinto y sexto curso. Los datos del rendimiento, las estrategias y los errores revelan que los alumnos tienen dificultades en modelar y resolver los problemas reformulados debido a que atienden de manera superficial a estos problemas por la influencia de la enseñanza tradicional.

En otro estudio, Bernardo (2002) analiza nuevamente los problemas verbales reformulados con alumnos bilingües. La muestra se integró por dos grupos de segundo curso. La lengua materna fue el filipino en el primer grupo y el inglés en el segundo. Los problemas se presentaron primero en la lengua materna y después en la segunda lengua, además, los problemas eran tanto fáciles como difíciles. Los datos muestran que los problemas verbales reformulados se resuelven mejor en la primera lengua que en la segunda sobre todo cuando los problemas son más fáciles.

5. Grado de dificultad de los problemas verbales

El rendimiento de los niños manifiesta distintos patrones de respuesta en la solución de los problemas verbales. Es decir, estos problemas presentan a los alumnos un diferente grado de dificultad.

Por una parte, Bermejo y otros (1998) estudian el aprendizaje de la suma y resta teniendo en cuenta la secuencia de los problemas verbales según su dificultad. Partiendo de esta idea jerarquizan los problemas verbales de suma y resta en función de la dificultad de los mismos. Los participantes eran 72 niños divididos en tres grupos: 24 de Educación Infantil, 24 de primer curso de Educación Primaria y 24 de segundo curso. Estos autores demuestran la existencia de diferencias en el comportamiento de los niños en función de la escolaridad, el tipo de problema y la ubicación de la incógnita. Asimismo, cada curso tiende a utilizar ciertas estrategias y cometer errores específicos. Entonces, la dificultad de los problemas verbales depende de los siguientes factores: la estructura semántica, la ubicación de la incógnita, el tamaño de las cantidades propuestas y la presencia o no de ayudas. Por otra, Riley y Greeno (1988) y De Corte et al. (1985) también han abordado la dificultad de los problemas verbales

5.1. Estructura semántica

En cuanto a la estructura semántica, la mayoría de los trabajos (Bermejo y Rodríguez, 1987, 1990a, 1990b; Carpenter y Moser, 1982, 1983, 1984; De Corte y Verschaffel, 1987) confirman que los problemas más sencillos son, en general, los de Cambio, seguidos por los problemas de Combinación, después los de Igualación y, finalmente, los problemas de Comparación resultan ser los más complicados.

Diversos estudios (Bermejo y Rodríguez, 1990b; Bermejo y otros, 1994, 2002; Cummins et al., 1988; De Corte y Verschaffel, 1987; De Corte, Verschaffel y Pauwels, 1990; Verschaffel, De Corte y Pauwels, 1992) han mostrado que los problemas verbales conteniendo sentencias relacionales en las que un conjunto se define en función de otro son los más difíciles, incrementándose esta dificultad cuando la operación aritmética resulta inconsistente con la sentencia de la relación (Lewis y Mayer, 1987; Lewis, 1989).

Bermejo y otros (1994) evalúan la habilidad de los escolares de 6 y 8 años para resolver tareas comparativas y encuentran que no todas las situaciones de comparación tienen el mismo nivel de dificultad. Por tanto, existe una capacidad progresiva de los niños para comprender las relaciones comparativas en el orden de fácil a difícil: la resolución de problemas de Comparación con magnitudes abstractas *("dime un número que sea mayor que 5 y menor que 9")*, resolución de problemas de Comparación de magnitudes concretas *("haz una hilera que sea mayor que la de abajo y menor que la de arriba")*, resolución de problemas verbales de Comparación *("Luis tiene 6 canicas, Juan tienen 2 canicas más que Luis. ¿Cuántas canicas tiene Juan?")* y, finalmente, la resolución de problemas verbales de Comparación de magnitudes *("Juan tiene 6 caramelos en su bolsa y Pedro tiene 3 en la suya ¿Cuántos caramelos tiene Luis si sabemos que tiene 2 más que Pedro y 1 menos que Juan?").*

5.2. Lugar de la incógnita

Con respecto al lugar ocupado por la incógnita, la dificultad es mayor cuando la cantidad desconocida se sitúa en el primer sumando o conjunto de partida (Carpenter, 1986;

Hiebert, 1982), mientras que esta dificultad sería mínima si se ubica la incógnita en el resultado.

Las investigaciones llevadas a cabo con muestras pertenecientes a Educación Infantil señalan que estos niños pueden resolver con éxito los problemas de Cambio y Combinación cuando la incógnita se encuentra en el resultado (Bebout, 1990; Bermejo y Rodríguez, 1987; Carpenter, Hiebert y Moser, 1981; 1983; De Corte y Verschaffel, 1987).

Carpenter, Ansell, Franke, Fennema y Weisbeck (1993) encuentran que los niños de la misma edad, que aún no han recibido instrucción formal en la suma y la resta resuelven con éxito los problemas de sustracción con el resultado desconocido, los problemas de Comparación y los problemas de Cambio con la incógnita en el conjunto de cambio. Cabe mencionar que los niños disponían de objetos para representar las acciones descritas en tales problemas.

Igualmente, en el trabajo de Bermejo y Rodríguez (1987) el 52% de los niños de 5 – 5.6 años y el 64% de niños de 5.6 - 6 años resuelven correctamente los problemas de Igualación cuando cuentan con objetos para representar los conjuntos del problema.

En relación con los problemas de Cambio, los niños de primer curso manifiestan un alto nivel de éxito en los problemas de añadir y quitar con la incógnita en el resultado. Sin embargo, este nivel desciende cuando la incógnita se ubica en uno de los subconjuntos (Bebout, 1990; Bermejo y Rodríguez, 1990b; Carpenter et al., 1981, 1983; De Corte y Verschaffel, 1987; Stern, 1993).

En los problemas de Combinación, el 40% de los niños de 1º resuelven correctamente estas tareas cuando la incógnita se sitúa en uno de los subconjuntos (Carpenter y Moser, 1981; Steffe y Johnson, 1971), pero esta proporción se incrementa considerablemente tras un período de instrucción llegando a alcanzar el 80% de las respuestas correctas (Bebout, 1990; Carpenter et al., 1983; De Corte y Verschaffel, 1987).

También, De Corte et al. (1985) han encontrado en los niños de 6 a 8 años mayor rendimiento para este tipo de problemas cuando se procede a la reformulación de los mismos. Los escolares de primer curso obtienen aciertos en torno al 90% en los problemas de Combinación con la incógnita en el resultado y con la presencia de ayudas (Bermejo y Rodríguez, 1987). Sólo el 18% de los niños de 2º de Educación Primaria resuelven con éxito los problemas de Comparación cuando la incógnita se ubica en el conjunto referente, mientras que el 60% acierta cuando el elemento desconocido se sitúa en el conjunto de comparación (Bermejo y Rodríguez, 1990b). No obstante, De Corte et al. (1985) encuentran que la reformulación mejora el rendimiento en los problemas de Comparación con la incógnita en el resultado. En los problemas de Igualación, los niños de primero tienen éxito en el 76% de los ensayos (Bermejo y Rodríguez, 1987).

Los cambios con la edad en la resolución de problemas verbales de adición y sustracción se explican de dos modos distintos. Por una parte, algunos autores (Briars y Larkin, 1984; Riley et al., 1983; Riley y Greeno, 1988) proponen explicaciones lógico-matemáticas del fracaso infantil en matemáticas atribuyendo los errores a la carencia del conocimiento conceptual o al desconocimiento del conjunto de las relaciones lógicas. Por otra, ciertos autores (Cummins, 1991; Davis-Dorsey, Ross y Morrison, 1991; De Corte et al., 1985) prefieren las explicaciones fundadas en los aspectos lingüísticos que sugieren la reformulación los problemas para mejorar la ejecución en las tareas de suma y resta.

5.3. Interacciones

El rendimiento de los niños difiere según el tipo de tarea, el tipo de operación, la ubicación de la incógnita y el grupo de edad.

Según el lugar de la incógnita, los datos muestran que el nivel de dificultad es mayor cuando se desconoce el primer término y es menor si el conjunto desconocido es el resultado (Bermejo y Rodríguez, 1990b; Carpenter, 1986; Hiebert, 1982).

Así mismo, los resultados del estudio de Bermejo y otros (1998, 2002) muestran la existencia de diferencias significativas entre los siguientes tipos de tareas: Cambio-Relacional, Comparación-Expresión numérica y Relacional-Expresión numérica. La dificultad de las tareas se incrementa en este orden: Algoritmo, Cambio, Combinación, Igualación, Comparación, Relacional.

Según estos datos, las tareas numéricas resultan más sencillas y los problemas de Cambio son más fáciles que los problemas de Igualación y Comparación, tal como se ha encontrado en otras investigaciones (Bermejo y Rodríguez, 1990a, Briars y Larkin, 1984; Carpenter, Moser y Bebout, 1988). Para los niños de Educación Infantil los problemas de Combinación con la incógnita en el resultado son más sencillos que las tareas numéricas.

Los problemas aditivos de Comparación son más complejos cuando el conjunto desconocido se haya en el conjunto de comparación, mientras que resultan más sencillos cuando se desconoce el referente. Sin embargo, los más fáciles son los problemas que llevan la incógnita en la diferencia. Los problemas de Igualación son más sencillos cuando se desconoce la cantidad que iguala los conjuntos. Finalmente, los problemas Relacionales resultan más fáciles cuando la comparación final es desconocida.

Bermejo y otros (1998) encuentran que la dificultad de los tipos de problemas verbales de suma se corresponde con el lugar que ocupa la incógnita más que con la estructura semántica de los problemas, sobre todo cuando se sitúa en el primer sumando (Bermejo y Rodríguez, 1990).

5.4. Jerarquía de los problemas verbales

Los estudios de Bermejo y otros (1998, 2002) contó con 72 participantes de tres grupos de edad. El primero era de Educación Infantil con edades de 5 y 6 años. El segundo lo constituían niños de primero de Educación Primaria entre 6 y 7 años, y el tercero era de segundo con edades entre 7 y 8 años. Las tareas se presentaron en cuatro sesiones. Estos autores obtienen con el escalograma de Guttman una secuencia más precisa de las tareas en función de la dificultad de las mismas. El criterio de escalabilidad se cumple, pero no el de reproductibilidad. Entonces, el orden de aprendizaje de las tareas es el siguiente:

1. Combinación con conjunto total desconocido.
2. Cambio con resultado desconocido.
3. Igualación en el conjunto desconocido.
4. Cambio desconocido.
5. Igualación en el conjunto conocido.
6. Combinación con parte inicial desconocida.
7. Cambio con comienzo desconocido.
8. Comparación con referente desconocido.
9. Comparación con diferencia desconocida.
10. Igualación con cantidad comparada desconocida.
11. Combinación con parte desconocida en el segundo sumando.
12. Comparación con conjunto de comparación desconocido.
13. Transformación de relaciones con sumando inicial desconocido.
14. Transformación de relaciones con resultado desconocido.
15. Transformación de relaciones con segundo sumando desconocido.

Estos autores señalan dos consideraciones. En primer lugar, el comportamiento de los niños se encuentra mediatizado por el lugar de la incógnita y la estructura semántica del problema. Por ejemplo, el problema de Cambio con el conjunto de cambio desconocido resulta más sencillo que el problema de Comparación en el que se desconoce el conjunto de comparación, lo que concuerda con los datos encontrados en otras investigaciones (Bermejo y Rodríguez, 1990a, 1990b; Carpenter y Moser, 1984; De Corte y Verschaffel, 1987).

En segundo lugar, el hecho de que un problema implique una acción no garantiza, en todos los casos, un nivel de rendimiento superior en los niños como parece en algunas investigaciones (Carpenter y Moser, 1982, 1983). Por ejemplo, los problemas de Combinación con la incógnita en el resultado son más fáciles que los de Cambio con la incógnita también en el resultado.

Finalmente, la resolución correcta de un tipo de problema no da paso a la misma ejecución en otros, aunque tengan una estructura semántica similar. Por ejemplo, mientras que el problema de Combinación con la incógnita en el resultado es el más sencillo, este mismo problema con la incógnita en el segundo sumando ocupa el onceavo lugar.

5.5. Nivel de dificultad según el modelo de Riley y Greeno

Riley y Greeno (1988) afirman que existen diferencias en los problemas de las distintas categorías. Los problemas de Combinación y Cambio se solucionan por casi todos los niños de 5.6 a 6.11 años, pero los problemas de Comparación sólo se resuelven por algunos de estos niños. Los problemas de Comparación 5 y Comparación 6 son más difíciles para los niños de 8.3 a 9.8 años que los problemas de Combinación y Cambio más complicados. Los resultados muestran que casi todos los niños de preescolar tienen el conocimiento del nivel 1, según el modelo propuesto para los problemas de Combinación y Cambio.

Los niños preescolares y de primer curso de primaria tienen el conocimiento del nivel 2 para los problemas de Combinación y Cambio, mientras que casi todos los niños de segundo y tercer curso están en el nivel 2 en los mismos problemas. El nivel 3 para los problemas de Combinación y Cambio se manifiesta por una minoría de preescolar (4% y 9%, respectivamente), algunos de primer curso (17% y 22%, respectivamente), la mayoría de segundo curso y tercero (95% y 80%, respectivamente).

El patrón es diferente para los problemas de Comparación ya que casi ninguno de los niños de preescolar y sólo pocos de primero estaban en el nivel 1. En el nivel 1 y 2 no existían diferencias entre los alumnos. El nivel 3 se realizaba por el 20% de niños de segundo curso y 50% de tercero.

Una explicación pertinente es que el conocimiento necesario para los problemas de Comparación se desarrolla más tarde que el conocimiento involucrado en los problemas de Combinación y Cambio. Otra idea es de que la secuencia de las etapas de desarrollo no es una buena caracterización para los problemas de Comparación como para los problemas de Combinación y Cambio.

5.6. Dificultad de los problemas verbales reformulados

De Corte et al. (1985) encuentran con respecto al nivel de dificultad que los problemas de Cambio son más fáciles que los problemas de Combinación los cuales son más sencillos que los problemas de Comparación. Sin embargo, dentro de cada tipo de problema existen diferencias en función de la incógnita. Por ejemplo, los problemas de Cambio en los cuales la cantidad inicial se desconoce son más difíciles que cuando la incógnita está al final y son más difíciles que los problemas de Combinación en los cuales se desconoce el conjunto mayor o la cantidad combinada (Riley et al., 1983).

Verschaffel et al. (1999) estudian las dificultades de los alumnos de primaria para solucionar los problemas reformulados de suma. Los resultados muestran que los niños tienen gran dificultad en solucionar estos problemas verbales, los cuales se contestaron apropiadamente por 25% de los alumnos.

En conclusión, el grado de dificultad de los problemas se modifica principalmente de acuerdo con la estructura semántica y el lugar de la incógnita.

6. Estrategias de solución de los problemas verbales de suma y resta

En esta sección veremos primeramente las estrategias que emplean los niños: modelado directo, conteo y hechos numéricos, tanto en la suma como en la resta. Posteriormente, expondremos el desarrollo evolutivo y un análisis global.

Carpenter y Moser (1982) han estudiado el desarrollo de las estrategias de solución de los problemas de suma y resta con 150 niños de primer curso durante 3 años en cuatro condiciones: tipo de problema, lugar de la incógnita, el tamaño del numero y la disposición de ayudas manipulativas. Los resultados indican que los niños solucionan con éxito tales problemas antes de recibir una instrucción formal en la suma y la resta. Estos resultados son apoyados por otros estudios relacionados (Blume, 1981; Carpenter, Hiebert y Moser, 1981; Gibb, 1956; Hebbeler, 1977; Hiebert, 1981; Lindvall e Ibarra, 1980; Nesher y Katriel, 1978; Riley, 1979).

6.1. Estrategias de suma

En este apartado presentamos los tipos de estrategias infantiles sobre los problemas verbales de suma de acuerdo con la clasificación de Carpenter y Moser (1982): las estrategias modelado directo, las estrategias de conteo y las estrategias de hechos numéricos. A continuación describiremos cada una de estas estrategias.

6.1.1. *Estrategias de modelado directo*

Estas estrategias se basan en el modelado con dedos u objetos físicos. Este tipo se representa con la estrategia *contar todo con modelos*.

a) *Estrategia contar todo con modelos*

Es la estrategia básica, los objetos físicos o dedos se usan para representar cada uno de los sumandos, y entonces se cuenta la unión de los dos conjuntos a partir de uno de ellos. Esta estrategia se cumple en dos formas: 1) una vez que los dos conjuntos se construyen se unen físicamente o se suma un conjunto al otro y 2) el total se cuenta sin juntar físicamente los conjuntos. El primer caso representa mejor la acción de los problemas Juntar, mientras que la segunda expresa las relaciones estáticas implicadas para los problemas Parte-parte-todo. Una tercera alternativa es que el niño construye un conjunto que representa un sumando y, entonces en este conjunto se incrementa el número de elementos correspondientes al otro sumando sin construir un segundo conjunto. Tal estrategia representa una concepción unitaria de la suma, aunque esta estrategia casi no se observa.

Baroody (1987) propone varias formas de llevar a cabo esta estrategia:

A1: Se parece a la estrategia de contar todo con objetos sólo que inicia el recuento a partir del cardinal del primer conjunto.

A2: Se representa ambos conjuntos y se obtiene la suma total mediante un patrón de reconocimiento.

A3: Se utiliza el conteo para representar con los dedos el primer sumando y la percepción inmediata para el segundo, por último, se cuenta todo.

A4: Es semejante a la anterior sólo que el recuento final se inicia a partir del cardinal del primer sumando.

A5: Es igual que las dos anteriores, pero la suma total se extrae por medio de un patrón de reconocimiento.

A6: Es similar a A3, sólo que el patrón de reconocimiento se hace en el primer conjunto en lugar del segundo.

A7: Es parecida a A4, con la excepción descrita en A6.

A8: Se representa el primer conjunto mediante percepción inmediata, luego cuenta el segundo conjunto y, por último, obtiene la suma total mediante percepción inmediata.

A9: Representa ambos sumandos mediante percepción inmediata y enseguida se cuenta todo para obtener la suma total.

A10: Es similar a la anterior, pero el recuento final comienza a partir del cardinal del primer sumando.

A11: Igual que A9 sólo que la suma total se produce por percepción inmediata.

Por su parte, Bermejo y Rodríguez (1993) proponen 4 niveles evolutivos en la estrategia de modelado directo:

N1A: Se cuenta con los dedos para representar cada uno de los sumandos y, finalmente, se vuelve a contar todo conjuntamente.

N2A: Se representan los dos sumandos con los dedos inmediatamente sin necesidad de contar, contando todo a continuación.

N3A: Se cuenta todo a medida que se representan los sumandos con los dedos.

N4A: Mencionan uno de los sumandos, añadiendo el otro posteriormente con los dedos.

En otra investigación, Carpenter et al. (1993) analizan las estrategias de los niños de preescolar. Las estrategias se clasifican como modelado directo si el niño emplea objetos para modelar directamente la acción o las relaciones descritas en el problema. En el problema Separar con el resultado desconocido un total de 61 niños usaban una estrategia válida, de los cuales 54 niños modelaban directamente la acción en el problema al hacer un conjunto de 13 objetos y quitar 6 de ellos. Cinco niños contaban hacia atrás desde los 13 objetos y dos niños usaban un hecho derivado. Por ejemplo, para uno de los hechos derivados el niño decía: *"sabía que 3 y 10 eran 13, así que de 13 separo o quito 3 son 10, y separo 3 más, son 7"*.

En el problema Juntar con cambio desconocido 56 niños empleaban una estrategia válida, de los cuales 39 modelaban directamente la acción al hacer un conjunto de 7 objetos y agregar los objetos necesarios hasta que fueran un total de 11 objetos. Doce niños contaban hacia adelante desde el 7 hasta el 11. Cuatro niños empleaban un hecho derivado basado en el conocimiento que 7 más 3 hacen 10, 10 y uno más hacen 1, y 3 más 1 es 4. Un niño manifestaba una estrategia que no modeló la acción en el problema, haciendo un conjunto de 11 objetos y un conjunto de 7 objetos en una correspondencia uno-a-uno. Esta estrategia corresponde a las relaciones descritas en los problemas de Comparación.

Los resultados indican que existen más soluciones del problema por medio del modelado, pero esto es un proceso básico común para la mayoría de los niños de primer curso. Un estudio previo muestra que los niños de primero y segundo curso tienden a modelar directamente la acción en los problemas verbales de suma y resta (Carpenter, 1985).

6.1.2. *Estrategias de conteo*

Estas estrategias se basan en el uso de secuencias de conteo Se conocen tres estrategias que involucran estas secuencias: a) *contar todo sin modelos*, b) *contar a partir del primer sumando* y c) *contar a partir del sumando mayor*. El uso de estos procedimientos depende del tipo de problema de suma. El empleo de las estrategias de *conteo* reemplaza a la estrategia *contar todo*. El contar es un procedimiento útil con sumandos mayores. Para el problema 13 + 6 algunos niños realizan estrategias de *conteo* en forma ordinaria ("13, 14, 15... 19), mientras que otros separan el numero de las decenas y aplican el *conteo* desde el número mayor, diciendo: "seis, siete, ocho, nueve y así hasta diecinueve".

a) *Estrategia contar todo sin modelos*

En esta estrategia, la secuencia de conteo comienza con el uno y continúa hasta que la respuesta sea encontrada. Esta estrategia, es la estrategia Sum identificada por Suppes y Groen (1967) y Groen y Parkman (1972), y es similar a la estrategia *contar todo con modelos* excepto que los objetos o los dedos no se usan para representar los sumandos.

En la estrategia *contar todo sin modelos,* Bermejo y Rodríguez (1993) encuentran dos niveles:

A) contar todo mentalmente empezando por el menor.

B) contar todo empezando por el mayor.

Sin embargo, esta estrategia y las siguientes estrategias de *conteo* requieren algún método para mantener la secuencia de conteo y parar de contar. La mayoría de los niños cuentan con sus dedos, pero en un numero sustancial no se manifiesta alguna acción física que acompañe su conteo. Cuando el *conteo* se realiza mentalmente resulta difícil determinar como un niño sabe cuando debe parar de contar.

Algunos niños usan un tipo de ritmo o conteo cadencioso. Otros describen un doble conteo, pero tienen dificultad para explicar este proceso. Cuando los dedos se usan tienen un rol muy diferente con respecto a la estrategia de modelado directo. En este caso, los dedos no representan los números por sí mismos, sino que sirven para mantener el número de pasos en la secuencia del conteo. No cuentan primero sus dedos para dar la respuesta aunque se usen los dedos.

b) ***Estrategia contar a partir del primer sumando***

En la estrategia *contar desde el primer sumando* el niño empieza a contar hacia adelante a partir del primer sumando del problema. Por ejemplo, "Tres; cuatro, cinco, seis, siete" (3 + 4 = ?).

El procedimiento de conteo deriva de uno más simple llamado *contar todo*. Estos procedimientos involucran la representación de los sumandos y la consecuente enumeración de un sumando. Los procesos de las estrategias de *conteo* se describen como si empezaran siempre en el primer sumando, pero los niños usan a menudo el procedimiento más eficiente.

Fuson (1982) realiza un análisis estructural del procedimiento de conteo en la suma, prestando una atención particular a la secuencia de las palabras de conteo (uno, dos, tres, etc.) como una herramienta representacional para el conteo. En el procedimiento de las estrategias de *conteo* se comienza con la palabra del primer sumando. Esta palabra producida en el *conteo* tiene cuatro significados.

Los dos primeros se relacionan con el significado del cardinal y el significado del conteo. La transferencia del significado de contar al significado del cardinal se identifica como la regla de cardinalidad (Schaeffer et al., 1974) o el principio de cardinalidad (Gelman y Gallistel, 1978). Para saber cuantos objetos hay en un conjunto, el niño debe conectar el significado de conteo de la última palabra producida con el significado cardinal de esta palabra.

En la estrategia *conteo*, la relación de significado dual sigue la dirección opuesta. Cuando el niño conoce el cardinal del primer sumando sabe que si cuenta el conjunto de objetos del primer sumando, la última palabra en el conteo será el cardinal. Esta bidireccionalidad del significado de la primera palabra del conteo se ve más claramente como sigue:

1. La dirección de contar hasta el cardinal (principio de cardinalidad) resume una acción que ha sido completada.
2. La dirección de contar desde el cardinal hacia adelante predice una acción que debe ser cumplida.

La primera dirección es contar todo y la segunda se realiza antes del conteo. Esta última se requiere si un niño cuenta un conjunto de objetos por medio del procedimiento *contar todo* o a través del conteo.

Una vez que la conexión cardinal-contar hacia delante se realiza (para dar "nueve" un niño sabe que el conteo debe ser "uno, dos, tres, ... nueve"), el conteo por sí mismo se abrevia en la palabra final del conteo ("nueve"). Este es el tercer significado: la palabra es una abreviación del segmento de conteo para el primer sumando. En otras palabras, nueve es una abreviación de “uno, dos, ... nueve”. Entonces, la palabra nueve es un resumen de la enumeración verbal del primer sumando y se sustituye por su enumeración. Estos tres significados de la palabra del primer sumando conciernen al sumando en sí mismo.

El cuarto significado relaciona el primer sumando con el segundo dentro del contexto de la secuencia final *contar todo*. La enumeración de los elementos para el primer sumando (para 9 + 5, “uno, dos, tres... nueve”) se manifiesta como la primera parte de la enumeración de ambos sumandos (“uno, dos, . catorce”). Cuando la numeración del primer sumando se ve como una parte de la enumeración *contar todo* de la suma, su abreviación (la palabra “nueve”) sustituye la enumeración del uno al nueve dentro del conteo completo de la suma del conjunto.

Entonces, el procedimiento del conteo requiere lo siguiente: la producción de la palabra del primer sumando como una abreviación de la enumeración requerida y el conteo de los elementos del segundo sumando (“nueve, diez, once, doce, trece, catorce”). El cuarto significado es el punto de partida para la enumeración del segundo sumando denominado “extensión” (Steffe, Thompson y Richards, 1982).

Este cuarto significado surge del hecho de que cada sumando juega un rol doble: es un sumando y una parte de la suma. Este rol se realiza por una secuencia de las palabras de conteo (“uno ... nueve”) o una serie de elementos que representan el primer sumando. Los niños pueden descubrir tal rol del primer sumando al centrarse en los objetos (“Yo estoy contando estos mismos objetos otra vez. No tengo que hacer esto”) o en la enumeración verbal por sí misma (“Digo las mismas palabras otra vez. No necesito hacer esto”).

La sustitución de la abreviación de la palabra “nueve” se facilita por la enumeración completa del primer sumando aunque se reduce el significado del cardinal involucrado en el problema de suma. Si el cardinal está ausente ocurre un tipo de error, el cual indica una conexión incorrecta entre el primero y el segundo sumando siendo más común cuando los niños cuentan los objetos.

Finalmente, en algunas circunstancias la palabra del primer sumando se cuenta al comienzo de la enumeración del segundo sumando. En el estudio realizado por Fuson (1982) algunos niños resolvían el problema 14 + 6 contando *"quince, dieciséis, diecisiete, dieciocho, diecinueve, veinte"*. La estrategia de *conteo* en esta forma disminuye la probabilidad del error descrito antes. Las evidencias indican que un niño se mueve progresivamente desde el primer significado al segundo y luego al tercero.

En la estrategia *conteo*, las palabras para contar el segundo sumando no coinciden con las palabras correspondientes al contar el segundo sumando por sí mismo. Los niños de 6 años inician con una palabra dada y, después, la siguiente sin un método especial cuando este sumando es pequeño (menos de cuatro). Sin embargo, cuando tal sumando es mayor que cuatro, algunos métodos se usan para regular cuantas palabras se han pronunciado después del primer sumando. Los métodos empleados espontáneamente por estos niños se clasifican en tres categorías: contar elementos, igualar las palabras del conteo y contar las palabras del conteo.

Por otra parte, Bermejo y Rodríguez (1993) proponen varios niveles en la estrategia *contar a partir del sumando menor*:

A) representan simultáneamente ambos sumandos con los dedos, contando sólo el mayor.

B) representan el sumando menor con los dedos simultáneamente, pero sólo cuentan el mayor a medida que lo representa con los dedos.

C) representan únicamente el sumando mayor a medida que cuentan.

D) añaden el sumando mayor mentalmente.

c) ***Estrategia contar a partir del sumando mayor***

En la estrategia *contar desde el sumando mayor* el niño empieza a contar hacia adelante desde el mayor de los dos sumandos. Esta estrategia es la estrategia MIN de Groen y Parkman (1972). Por ejemplo; *"cinco, seis, siete"* (3 + 4 = ?)

Por una parte, Baroody (1984b; 1987) describe varias formas de llevar a cabo la estrategia *contar a partir del sumando mayor*:

B1: representar únicamente el segundo sumando mediante conteo y obtener el total recontando ambos sumandos.

B2: representar sólo el segundo sumando mediante conteo y obtener el total contando a partir del cardinal del primer sumando.

B3: representar el segundo sumando mediante el conteo y extraer el total mediante percepción inmediata, siempre y cuando exista una imagen mental del primer conjunto o un patrón implícito de dedos.

B4: representar el segundo sumando por percepción inmediata y obtener el total recontando ambos conjuntos.

B5: representar el segundo sumando mediante percepción inmediata y obtener la suma total contando a partir del cardinal del primer sumando.

B6: representar el segundo sumando por percepción inmediata y obtener el total también mediante percepción inmediata, siempre y cuando el niño tenga una imagen mental del primer conjunto o un patrón implícito de dedos.

Por otra, Bermejo y Rodríguez (1993) proponen tres niveles en la estrategia *contar a partir del sumando mayor*:

a) representan con los dedos el sumando mayor y añaden el menor cuando cuentan.

b) añaden el sumando menor con los dedos a medida que cuentan.

c) cuentan el sumando menor mentalmente.

6.1.3. *Estrategias de hechos numéricos*

Estas estrategias se basan en el recuerdo de hechos numéricos. Aunque a los niños no se les enseña sistemáticamente los hechos numéricos hasta el final del primer curso escolar, algunos niños los aprenden fuera de la escuela. Existen dos tipos de estrategias: *hechos conocidos* y *hechos derivados*.

En la estrategia *hechos conocidos,* los niños suelen recuperar de la memoria el resultado de la suma. Por ejemplo, *"6 + 3 = 9, porque seis más tres son nueve"*

Los niños usan *hechos derivados* partiendo de una serie de hechos conocidos que se basa usualmente en números dobles o números cuya suma es 10. Por ejemplo, para solucionar el problema 6 + 8 = ?, un niño responde: *"6 + 6 = 12 y 6 + 8 = es justo 2 más que 12"*. En un ejemplo con la operación 4 + 7 = ?, un niño responde:*"4 + 6 = 10 y 4 + 7 = es justo 1 más que 10"*. Otro caso es la regla del cero (la adición que implica un cero no cambia el otro número).

Se argumenta que estas estrategias integran y relacionan los números a través de la memoria (Rathmell, 1978) o que las combinaciones de números se sitúan en la memoria a largo plazo como series de procedimientos para reconstruir las sumas y sus diferencias (Baroody, 1985). Los niños aprenden usualmente estas combinaciones más pronto que otras (Carpenter y Moser, 1983; Knight y Behrens, 1928, Siegler y Shrager, 1984).

La combinación conocida sea una doble o una combinación que involucre 10 ayuda a resolver la incógnita como una combinación relacionada.

Putnam, deBettencourt y Leinhardt (1990) analizan la comprensión de las siguientes estrategias *hechos derivados* en la suma.

a) ***Estrategia dobles más uno***

Esta estrategia se usa en los problemas de suma cuando uno de los sumandos es 1 más grande que el otro (3 + 4 = ?, 6 + 7 = ?). Dicha estrategia requiere recordar la combinación doble relacionada (3 + 3 = 6, 6 + 6 = 12) y sumar uno al resultado. Por ejemplo, en el problema 6 + 7 = ?, la estrategia es: *"Yo sé que 6 más 6 es igual a 12; 6 más 7 es 13, porque 7 es uno más que 6, y 13 es uno más que 12"*. En términos del esquema parte-todo, esta estrategia involucra aumentar 1 a una parte y al todo conocido, Parte-parte-todo (6, 6, 12), para encontrar el elemento desconocido (6, 7, ?). El aumento en un parte se compensa (6 o 7) por un aumento en el todo (12 a 13). Esta clase de transformación que involucra cambios al todo y a una de sus partes se refiere como cambio-parte-todo.

b) ***Estrategia dividir***

Esta estrategia para la suma usa combinaciones dobles, pero involucra cambios en ambas partes del problema. La estrategia se emplea cuando las partes tienen una diferencia de 2 (5 + 7 = ?, 7 + 9 = ?). Un decremento de 1 en la parte mayor se compensa por un aumento de 1 en la parte menor resultando una combinación de dobles relacionada con la respuesta (6 + 6 = 12, 8 + 8 = 16). Por ejemplo, dado el problema 6 + 8 = ?, los pasos de la estrategia son: *"Tomo 1 de 8 y lo agrego a 6 para tener 7; y 7 más 7 es igual a 14"*. Esta clase de transformación que involucra la compensación de cambios en las dos partes se refiere como transformacion-cambio-parte-parte.

c) *Estrategia ir hasta 10*

Esta estrategia se modela con transformaciones cambio-parte-parte a partir del conocimiento de las combinaciones de suma en las cuales uno de los sumandos es 10. En el caso de un sumando que sea uno menos de 10 (9 + 4 = ?, 6 + 9 = ?), el nueve se aumenta por 1 hasta llegar a 10, y la otra parte se diminuye en 1 menos. Los pasos para 6 + 9 = ? son: *"yo cambio el 9 a 10, así que yo tengo que tomar 1 desde el 6 y quedan 5; 10 más 5 es igual a 15, así que la respuesta es 15"*.

6.1.4. *Nivel evolutivo*

Bermejo y Rodríguez (1993) plantean que, en primer lugar, las diferencias entre los niños dependen del lugar en que se sitúa la incógnita. Cuando esta se encuentra en el resultado existen diferencias entre el grupo de Educación Infantil y los grupos de Educación Primaria, pero no entre estos últimos. Sin embargo, cuando la incógnita se ubica en el sumando inicial las diferencias afectan a todos los grupos. Por tanto, a pesar de que el éxito resulta superior en todos los grupos cuando la incógnita se encuentra en el resultado, el rendimiento en la tarea de suma con la incógnita en el sumando inicial aumenta a medida que se eleva el nivel de escolaridad.

En segundo lugar, la resolución correcta de la suma independiente del lugar de la incógnita se produce primariamente en las tareas 1 + N y hechos numéricos. En otras palabras, estas tareas son las más sencillas para todos los niños, de modo que el paso de una concepción unitaria de la suma a una concepción binaria se produce primeramente en tales tareas.

Los niños de Educación Infantil son capaces de representar los problemas que involucran números pequeños en lugar de números grandes. La primera estrategia que los niños emplean es la estrategia *contar todo con modelos*, pero existe poca evidencia para la estrategia de *contar todo sin modelos*.

Los niños de Educación Primaria optan por usar las estrategias de *conteo* antes que la estrategia menos avanzada *contar todo* cuando los números grandes se emplean y las ayudas físicas no están disponibles. La segunda estrategia se usa sólo cuando está presente la ayuda física. Las estrategias de suma dependen de la estructura semántica del problema y el lugar que ocupa la incógnita. Por ejemplo, los niños solucionan los problemas de Cambio y Parte-parte-todo con la incógnita en el resultado mediante la estrategia *contar todo*. Sin embargo, en los problemas de Cambio con la incógnita en el segundo sumando los niños prefieren la estrategia *añadir a*, en la cual el niño construye un conjunto equivalente al inicial y añade objetos hasta que alcanza el conjunto total, siendo la respuesta el número de elementos añadidos (Bermejo y otros, 1998; Carpenter et al. 1996).

6.2. Estrategias de resta

En la resta se encuentran las mismas categorías de estrategias como en la suma. Además, existen tres distintas estrategias en el modelado directo y en el conteo. Así, se proponen las siguientes estrategias de sustracción: *modelado*, *conteo* y *hechos numéricos*.

6.2.1. *Estrategias de modelado directo*

Las estrategias de modelado directo requieren el uso de objetos o ayudas. De esta manera, los niños manifiestan las siguientes estrategias: *separar de, separar a, añadir a y emparejamiento.*

1) *Separar de.-* En este caso, la cantidad mayor se representa en el problema y la cantidad menor se resta desde aquella cantidad usando objetos concretos. En el ejemplo 8 – 5 = ?, el niño construye el conjunto mayor (8 objetos) y entonces separa un número de objetos igual al número menor en el problema (5 objetos). Al contar el conjunto de objetos restantes (3 objetos) ocurre la respuesta para el problema (*"Tres").*
2) *Separar a.-* En esta estrategia se separan los elementos del conjunto mayor hasta que quede el número indicado por el conjunto menor. La respuesta es el número de elementos separados. En el ejemplo, 8 – 5 = ?, el niño separa 3 objetos del conjunto mayor dejando sólo 5 objetos y la respuesta es *"Tres"*.
3) *Añadir a.-* Esta estrategia representa con objetos el conjunto mayor, a continuación se agregan los objetos necesarios al conjunto menor para que sea equivalente al mayor. La respuesta se obtiene al contar los elementos añadidos al conjunto menor. En el ejemplo 8 – 5 = ?, el niño coloca un conjunto de 8 objetos, enseguida realiza un conjunto de 5 objetos, posteriormente, agrega 3 objetos a este último conjunto para tener 8 objetos. La respuesta es el número de objetos agregados, en este caso es *"Tres"*.
4) *Emparejamiento.-* Esta estrategia es posible sólo cuando los objetos concretos están disponibles. El niño coloca dos conjuntos de objetos separados, cada uno de

los conjuntos corresponde a uno de los números dados. Entonces, los conjuntos son emparejados en una correspondencia uno-a-uno y el conteo de los objetos sin emparejar da la respuesta. En el ejemplo 8 – 5 = ?, el niño coloca un conjunto de 8 objetos y otro conjunto de 5 objetos, el número de objetos sin emparejar es la respuesta, es decir, *"Tres"*.

6.2.2. *Estrategias de conteo*

También las estrategias de resta se basan en una secuencia de conteo. El procedimiento de conteo se elabora bajo las siguientes estrategias:

1) *Contar hacia atrás a partir de*.- En esta estrategia, el niño cuenta hacia atrás a partir del minuendo tantos pasos como marca la cantidad menor, el último número pronunciado es la respuesta. Por ejemplo, *"Siete, seis"* (8 - 2 = ?).
2) *Contar hacia atrás*.- En este procedimiento, el niño cuenta hacia atrás desde el número mayor hasta alcanzar el menor, el número de elementos contados es la respuesta. Por ejemplo, *"Ocho, siete, seis, cinco, cuatro, tres"* (8 – 2 = ?).
3) *Contar a partir de lo dado*.- Este procedimiento consiste en contar a partir del número menor hasta alcanzar el mayor, la respuesta se obtiene contando los numerales emitidos para equiparar ambos conjuntos. Por ejemplo, *"Tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho"* (8 – 2 = ?).

Fuson y Willis (1988) han investigado las estrategias de conteo en la resta. Al principio, los niños solucionan los problemas de sustracción por medio de modelar con objetos la acción de la estructura de cambio. Ellos forman un conjunto de objetos para el conjunto inicial, separan los objetos para el conjunto de cambio y entonces cuentan los objetos restantes para dar la respuesta (Carpenter y Moser, 1983, 1984; Riley et al., 1983). La pregunta de investigación es: ¿la estrategia contar hacia adelante en la resta interfiere con la estrategia de conteo en la suma?.

Los participantes eran 6 grupos de primer curso de primaria y 4 grupos de segundo. Los resultados indican que casi todos los niños de primero (42 de 45) usan espontáneamente y de manera correcta el procedimiento *contar hacia adelante* con un patrón de dedos al menos en una clase de los problemas de resta. Para los problemas Separar, un número reducido de niños de primero usaba el *conteo hacia atrás*, la mayoría empleaba *contar hacia adelante* y algunos utilizaban la estrategia *separar* objetos. Entonces, para algunos niños la enseñanza de la estrategia *contar hacia delante* en la resta interfiere con el procedimiento *conteo* para la suma.

Estas conclusiones indican que se puede enseñar a los niños de primer curso a solucionar problemas de resta por medio del *conteo hacia adelante* más pronto de lo que suponen los libros de texto del segundo curso (Fuson, Stigler y Bartsch. 1988; Fuson y Willis 1988).

6.2.3. *Estrategias de hechos numéricos*

Este tipo de estrategias se refiere a las respuestas que los niños dan de memoria y se basan en datos conocidos o derivados de ciertas reglas. Existen dos clases de estas estrategias:

1. *Hechos conocidos*.- Esta estrategia sucede cuando la respuesta se obtiene a partir de un dato conocido. Por ejemplo, *“11 - 5 = 6, porque once menos cinco es igual a seis”*.
2. *Hechos derivados*.- En esta estrategia la respuesta se obtiene de un hecho numérico conocido. Las estrategias *hechos derivados* para la resta se construyen sobre las mismas transformaciones parte-todo igual que en la suma. Pero las estrategias de resta son más difíciles para los niños y se usan menos de manera espontánea aún después de una instrucción específica (Steinberg, 1985). Una fuente de dificultad es que los alumnos tienen un menor conocimiento sobre las combinaciones de resta que de suma.

También, Putnam et al. (1990) analizan la comprensión sobre las siguientes estrategias de hechos derivados en la resta.

a) *Estrategia dobles menos uno*

El modelo de esta estrategia se parece a la estrategia dobles + 1 de la suma. La parte más pequeña es el elemento desconocido (9 – 5 = ?, 5 – 3 = ?). La estrategia involucra una transformación cambio-parte-todo en la cual el todo y una de las partes de la combinación conocida se disminuyen en 1. La estrategia para el problema 9 – 5 = ? es *“Yo sé que 10 menos 5 es igual a 5; 9 es 1 menos que 10; así separo 1 de la respuesta 5 y tengo 4”*. Entonces, el decremento por 1 del número 10 se compensa por un decremento correspondiente en la parte 5 para producir la combinación buscada. La estrategia para 9 – 5 = ? se relaciona con la suma *“Nueve menos 5 es lo mismo a 5 más algo es igual a nueve; yo sé que 5 más 5 es igual a 10; así que 5 más 4 es igual a nueve, porque 9 es uno menos que*

10, y 4 es 1 menos que 5, porque 5 más 4 es igual a 9, 9 menos 5 es igual a 4". Cumplir esta estrategia involucra más pasos (primero transformar la resta a una suma y luego regresar a la resta), pero es más clara porque las transformaciones parte-todo se conocen en el contexto de la suma antes que en la resta.

b) ***Estrategia dividir***

Esta estrategia se usa para los problemas Parte-parte-todo en los cuales una de las partes es el elemento ausente (14 – 8 = ?, 12 – 5 = ?). Una transformación cambio-parte-parte ocurre con una parte que se disminuye por 1 y la otra parte que se aumenta por 1. La solución al problema es una de las partes que debe ser transformada. Los pasos de esta estrategia para 14 – 8 = ? son: *"Yo se que 14 menos 7 es igual a 7; 8 es 1 más que 7; así que resto 1 más de la respuesta 7, para tener 6"*. Entonces, el incremento por 1 de una parte (7 a 8) se compensa por un decremento por 1 en la otra parte (7 a 6). Para realizar la estrategia relacionada con la suma, los pasos son *"Catorce menos 8 es igual a 8 más algo es igual a 14; yo se que 7 más 7 es igual a 14; así que 6 más 8 es igual a 14, porque 6 es 1 menos que 7, y 8 es 1 más que 7; porque 6 más 8 es igual a 14, 14 menos 8 es igual a 6"*.

c) ***Estrategia ir hasta 10***

En esta estrategia el segundo término es 9 (13 – 9 = ?, 16 – 9 = ?). Tal estrategia resulta similar a la estrategia *ir hasta 10* de la suma sobre una transformación cambio-parte-parte en la cual una parte se aumenta por 1 y la otra parte se disminuye por 1. En este caso, la relación parte-parte-todo incluye 10 como una de sus partes. Los pasos de la estrategia para 13 – 9 = ? son: *"Yo sé que 13 menos 10 es igual a 3; 9 es 1 menos que 10, así que yo sumo 1* *a la respuesta (3) para obtener 4”*. Para realizar la estrategia relacionada con la suma, los pasos serían *“trece menos 9 es igual a 9 más algo que iguale a 13; yo sé que 10 más 3 es igual a 13; 9 más 4 es 13 porque 9 es 1 menos que 10, y 4 es 1 más que 3; porque 9 más 4 es igual a 13, 13 menos 9 es igual a 4”.*

d) *Estrategia mantener la diferencia*

Esta estrategia implica aumentar o disminuir por 1 ambos términos del problema de resta y transformarlo en una combinación conocida con la misma respuesta. La estrategia para 15 – 7 = ? sería: *“Si sumo 1 a 15 son 16; así que sumo 1 a 7 son 8; 16 menos 8 es igual a 8”*. Esta estrategia involucra aumentar o disminuir el todo y una de las partes mediante una transformación cambio-parte-todo. Entonces, este problema (15 - 7 = ?) se transforma en otro problema relacionado (16 – 8 = ?) sin que cambie la solución. Dicha estrategia sólo se manifiesta en la resta.

Los autores citados informan que la mitad de los alumnos es capaz de dar explicaciones adecuadas sobre las estrategias *hechos derivados* para la suma, pero son menos exitosos en las estrategias de resta ya que sólo entre 10% y 20% de los escolares daban explicaciones aceptables. Este resultado es consistente con la investigación que muestra que los niños emplean las estrategias *hechos derivados* en la resta menos que en la suma, incluso después de una instrucción (Steinberg, 1985). En concreto, algunos alumnos tienen un mayor conocimiento de las transformaciones cambio-parte-parte que de las transformaciones cambio-parte-todo. Esto se debe a la práctica escasa por la cual los alumnos son menos fluyentes en su conocimiento de las combinaciones de resta.

Por otra parte, Dowker (1998) señala que los niños mayores usan estrategias *hechos derivados* más que los niños pequeños en la resta y encuentra correlaciones altas entre el cálculo y las estrategias para la suma y la resta.

6.2.4. ***Nivel evolutivo***

Los niños aplican distintas estrategias para los problemas de sustracción. Estas estrategias representan sus conceptos evolutivos sobre la resta.

El uso de tales estrategias depende de la estructura del problema, el grado de abstracción de las tareas y la edad de los niños. Los niños manifiestan evolutivamente primero aquellas estrategias que se apoyan en el empleo de ayudas (objetos, dedos, etc.), después, a veces simultáneamente, las estrategias basadas en el *conteo* y, por último, las estrategias de *hechos numéricos*.

El patrón general para los problemas de resta es consistente con el patrón de respuestas en la suma. La gran mayoría de los niños modela la acción o relación descrita en el problema. Para los problemas Separar, los niños usan una estrategia de resta *separar o contar desde abajo*. En el problema Juntar, casi todos los niños emplean una estrategia aditiva (*conteo* o *contar arriba desde el número dado*). En los problemas de Comparación, la estrategia *emparejar* se usa más cuando los objetos están disponibles para construir los dos conjuntos en una correspondencia uno-a-uno, pero cuando el problema resulta más difícil los niños tienden a solucionarlo mediante una estrategia de *conteo* (Carpenter y Moser, 1982).

La ambigüedad del problema Parte-parte-todo se refleja en la selección de las estrategias. Aunque la mayoría usa una estrategia de resta, las estrategias aditivas se usan por una minoría, especialmente cuando los objetos no son suficientes para modelar los procesos de separar.

La tendencia de los niños a usar una estrategia que represente la estructura del problema no sólo ocurre en la etapa de modelado directo, sino que continúa cuando se cambia a estrategias de conteo más abstractas. Casi la mitad de los niños emplea la estrategia más abstracta *contar hacia adelante desde el número dado* antes que la estrategia más concreta de conteo cuando los objetos no están disponibles.

La estrategia *contar hacia atrás* se usa pocas veces. Aunque esta estrategia se usa en el problema Separar, los niños recurren a la estrategia *separar* con objetos o dedos. Cuando las ayudas concretas no estaban disponibles, 43% de los niños usaban la estrategia *contar hacia adelante desde el numero dado* en el problema Juntar, pero sólo 12% empleaban la estrategia *contar hacia atrás* en el problema Separar. Cuando se les preguntó explícitamente por contar, sólo cerca del 50% de primer curso podía hacerlo. Algunos niños nunca recurren a la estrategia *contar desde atrás* antes del aprendizaje de la resta.

Los niños de 9 años calculan los problemas de resta por medio de *contar hacia adelante a partir del número menor* o *contar hacia atrás desde el número mayor*, lo cual requiere contar menos (Resnick, 1989).

En esta línea, Fuson y Kwon (1992) encuentran que la estructura de las palabras de los números en el lenguaje de los niños coreanos sirve para la descomposición como una estrategia útil en los problemas de suma y resta.

Geary, Bow-Thomas, Liu y Siegler (1996) comparan el desarrollo de las estrategias en niños de distintos países teniendo en cuenta la edad, el lenguaje y la escolaridad.

Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema y Empson (1998) estudian la comprensión sobre la suma y la resta. En este estudio longitudinal de 3 años participaban 82 niños de primero hasta tercer curso de Educación Primaria. Los alumnos resolvían tareas de problemas verbales. Los datos revelan que 90% de los niños construían sus estrategias. Estos alumnos ya tienen un concepto del número antes de aprender el algoritmo. Tales alumnos aplican mejor su conocimiento a situaciones nuevas que los niños quienes aprenden el algoritmo al principio.

6.3. Análisis global

El análisis de las estrategias destaca dos aspectos de acuerdo con Bermejo y otros (1998).

En primer lugar, el tipo de estrategia empleada por los niños se relaciona más con el lugar de la incógnita y el tipo de operación que con la categoría del problema (Carpenter et al. 1996). La estrategia *contar hacia atrás* aparece sobre todo en tareas de sustracción. Igualmente, la estrategia *contar todo* se emplea cuando la incógnita se ubica en el resultado en las tareas de adición; en cambio, en las tareas de resta se prefiere la estrategia *quitar de*. Finalmente, si el elemento desconocido se sitúa en el segundo término se suele recurrir a la estrategia *contar hacia adelante* en la suma y la estrategia *quitar a* en la sustracción.

En segundo lugar, las estrategias de los niños cambian en función del nivel escolar. Los niños de Educación Infantil recurren preferentemente a las estrategias de modelado directo, por ejemplo, *contar todo*. Los niños de primer curso de Educación Primaria utilizan sobre todo las estrategias de *conteo* y en segundo se siguen empleando estas estrategias, pero también otras estrategias más sofisticadas como las *memorísticas* o el *cálculo mental*.

Los niveles de abstracción están involucrados en las estrategias que los niños emplean para solucionar los problemas verbales de suma y resta.

Así, las estrategias para los problemas de suma se inician por los niños con una estrategia básica usando objetos que representa directamente las cantidades descritas en el problema usando objetos. Primero, los niños solucionan primeramente problemas con sumas menores que 10 y después pasan a los problemas con sumas entre 10 y 20 mientras se disponga de objetos para modelar el problema. Muchos niños de primer curso desarrollan estrategias de conteo, pero no está claro si comienzan a usar la estrategia *contar desde el primer sumando* y, luego, cambian a una estrategia más eficiente como *contar desde el mayor* o adquieren ambas simultáneamente. Si la estrategia *contar desde el primer sumando* se desarrolla primero, entonces la estrategia *contar desde el mayor de los sumandos* parece emerger en breve tiempo.

Esto explica la igualación entre la estructura del problema y la estrategia. Los niños recurren a la estrategia *contar a partir de* en los problemas de Cambio o Combinación con la incógnita en el segundo sumando.

Las estrategias para la solución de los problemas de resta involucran un cambio de las estrategias de modelado concreto a las estrategias *conteo*. Por ejemplo, en los problemas de Cambio de sustracción existen variaciones según el lugar de la incógnita. En el primer caso se emplea la estrategia *quitar de*. En el segundo se recurre a la estrategia *quitar a*. Además, se diferencian dos estrategias: *contar hacia atrás* y *contar hacia atrás hasta.*

En cuanto a los aspectos relacionales entre la suma y la resta existen estudios que constatan que las estrategias para la resta son más difíciles que en la suma.

Carpenter y Moser (1984) informan que los niños en las etapas más avanzadas solucionan los problemas verbales de resta con la estrategia *contar hacia adelante.* Estos niños comprenden el significado de quitar y emplean las estrategias que describen la acción de separar.

Steinberg (1984, 1985) expone que los niños de segundo curso tienen más dificultad con hechos derivados en la resta que en la suma. Siegler (1987) informa que los niños usan estrategias en la suma con números pequeños más pronto que en la resta. Los datos informados por Thornton y Smith (1988) indican la superioridad de la suma sobre la resta en un rango de problemas agrupados por estrategias diferentes.

Dos factores que parecen contribuir a la semejanza de rendimiento en la suma y la resta son las estrategias de *conteo* y *contar hacia delante.* Primero, la resta usa el conteo hacia adelante y evita el conteo hacia atrás que se requiere en la estrategia *contar hacia atrás* empleada por los niños que comprenden la acción de "quitar" como el único significado de la resta. El proceso de parar la cuenta del segundo conjunto es más fácil en la resta que en la suma mediante la estrategia *contar hacia adelante.* En la resta se termina de contar cuando la palabra del minuendo se pronuncia y el conjunto desconocido se registra con un patrón de dedos u otro procedimiento. En la suma se para de contar cuando el segundo sumando se ha contado y la respuesta es la última palabra en la secuencia de conteo. Entonces, la suma requiere regular el procedimiento del conteo, pero la resta sólo necesita reconocer la palabra del numero emitido cuando se cuenta hacia adelante.

El estudio de Thornton (1990) proporciona evidencia de que los niños a quienes se les da una oportunidad en la resta para aprender el significado de contar hacia adelante y contar hacia atrás prefieren el primer significado. Estos niños emplean la estrategia *contar hacia adelante* para solucionar los problemas de resta difíciles (con números mayores de 10) más que los niños que utilizan la estrategia *contar hacia atrás*, aunque su instrucción se centre en la comprensión de separar hacia atrás que hacia adelante. Los niños tienen una comprensión hacia adelante porque usan la estrategia *contar hacia adelante* para las diferencias pequeñas de 1, 2 y 3. Los niños quienes aprenden sólo el significado "separar" de la resta no eligen la estrategia *contar hacia adelante* hasta que comprendan la transformación de la idea "quitar hacia atrás" como una noción de contar hacia adelante.

Por ejemplo, el niño que usa el conteo para los problemas de suma y resta es capaz de reconocer y seleccionar los tipos de conteo en determinados problemas. Esto se manifiesta en la elección de *contar hacia atrás* para solucionar un problema de resta y *contar hacia delante* para resolver un problema de suma (Starkey y Gelman, 1982).

Fuson y Willis (1988) examinan el aprendizaje de las estrategias *conteo* con objetos y el procedimiento *contar hacia adelante* en los problemas de suma y resta. La evidencia indica que algunos niños muestran interferencia entre *conteo* y la estrategia *contar hacia adelante* en la solución de algoritmos, pero esta interferencia se elimina cuando se usan problemas verbales.

Ginsburg, Marika y Fantuzzo (1998) investigaron el rendimiento, la motivación y el autoconcepto de los niños en la solución de problemas verbales. En el estudio participaban 104 niños de tercero y cuarto curso. Cada alumno se seleccionaba para una de las cuatro condiciones: a) grupo control, 2) solución de problemas de manera individual, 3) grupo cooperativo y 4) solución de problemas en grupos cooperativos. Los datos indican, por una parte, que los grupos experimentales obtenían mayor rendimiento, motivación, autoconcepto y competencia social que el grupo control. Por otra, el grupo que resolvió cooperativamente los problemas manifestaba un rendimiento superior a los alumnos que no participaban en un grupo cooperativo en las medidas establecidas.

Chang (1998) encuentra que un grupo cooperativo de sexto curso mostraba un esfuerzo mayor para resolver los problemas verbales, así como una persistencia más alta en la tarea y una mejor autoevaluación de su rendimiento.

Fang, Tian y Bei (2001) analizan las estrategias de los niños preescolares ante los problemas verbales. La muestra estaba formada con 92 niños de 4 a 6 años. Los datos indican que los niveles de las estrategias se desarrollan con la edad, además las estrategias *modelado directo* y las estrategias *conteo* se interiorizaban gradualmente en los esquemas de las operaciones cognitivas.

Recientemente, Baroody (2003) plantea el debate acerca de la relación entre el conocimiento conceptual y las estrategias para resolver los problemas de suma y resta. Este debate implica la discusión referente a los conceptos aritméticos, las estrategias y la experiencia adaptativa.

En este sentido, Baroody y Tiilikainen (2003) comparan el modelo de elección de estrategias de Siegler (1987) con la aproximación basada en el esquema de Baroody y Ginsburg (1986). La primera evaluación se centra en la elección de la estrategia basada en el conteo. La segunda analiza como las dos perspectivas explican el desarrollo del pensamiento aritmético. La tercera examina la relación entre el conocimiento conceptual y las estrategias con respecto al conocimiento informal de la aritmética.

En cuanto a las estrategias de los problemas verbales reformulados Verschaffel, De Corte, Lamote y Dherdt (1998) han investigado el desarrollo de una estrategia adaptativa para estimar las cantidades a partir de una perspectiva del cambio de estrategias. Estos autores consideran que la estimación sigue dos procedimientos: suma o resta del número estimado.

Luwel, Verschaffel, Onghena y De Corte (2001) replican y amplían el estudio de Luwel et al. (2000), el cual reveló que los alumnos de segundo y sexto curso emplean tres clases de estrategias para determinar el número de bloques correspondiente a la respuesta: 1) una estrategia aditiva mediante la cual los conjuntos de bloques se cuentan y suman, 2) una estrategia de resta en la cual el número de bloques se resta del conjunto total y 3) una estrategia de estimación donde el número de bloques se determina de manera rápida aunque imprecisa. Los datos del estudio reciente indican que ambos grupos emplean una estrategia de resta en mayor medida que las otras estrategias cuando se utilizan bloques. Además, el cambio de estrategia depende de la frecuencia, el tiempo de ejecución y la exactitud de la estrategia mencionada. Esto confirma la función adaptativa de las estrategias (Luwel, Verschaffel, Onghena y De Corte, 2003a, 2003b, 2003c).

Finalmente, De Corte (2003) afirma que el concepto de transferencia del aprendizaje a los nuevos contextos se considera en base al diseño de entornos que faciliten el efecto de esta transferencia.

En conclusión, se confirma que la secuencia de desarrollo de las estrategias parte de lo material (uso de objetos) hacia lo verbal (contar) y luego hacia lo mental (uso de hechos numéricos conocidos) (Bermejo, Lago y Rodríguez, 1993; Boulton-Lewis, 1993; Boulton-Lewis y Tait, 1994; Carpenter, Franke, Jacobs, Fennema, y Empson, 1997; Carpenter y Moser, 1982, 1984; Christou y Philippou, 1998; De Corte y Verschaffel, 1987; Naito y Miura, 2001).

7. Tipos de errores

En esta sección analizaremos los errores típicos en la suma y la resta, los errores en los problemas reformulados y el nivel evolutivo de su manifestación. En estas tareas no siempre se manifiesta la respuesta apropiada, sino también se cometen errores por los alumnos.

Bermejo y otros (1998, 2002) plantean que los errores cometidos por los niños junto con las estrategias revelan los procesos cognitivos que se siguen en la resolución de las tareas aditivas y de sustracción.

Existen dos errores generales en la resolución del algoritmo: los sintácticos y los semánticos. Los primeros suceden ante el desconocimiento de alguna regla aditiva: comenzar por la columna derecha, proceder columna por columna, contar un solo dígito en cada columna y no dos, etc. El error semántico se relaciona con la comprensión del valor en el sistema numérico (diferenciar las unidades de las decenas, de las centenas, etc.), las llevadas en la columna de las centenas, etc.

7.1. Errores típicos

En cuanto a los errores que aparecen durante la solución de problemas verbales se distinguen tres categorías: 1) conceptuales, 2) procedimentales y 3) de ejecución.

Los errores conceptuales surgen cuando los niños construyen una representación inapropiada del problema verbal. En estos errores se diferencian los siguientes tipos: inventar la respuesta, seleccionar una operación inadecuada y repetir una de las cantidades dadas en el enunciado del problema.

a) *Invención de la respuesta*.- Este error aparece cuando los niños no comprenden el problema o se encuentran cansados para resolverlo.

b) *Selección de una operación inadecuada*.- Este error ocurre cuando la incógnita se sitúa en uno de los sumandos y la solución propuesta por los niños se basa en la forma canónica a + b = ?. Es decir, ante el tipo de operación a + ? = c, los escolares la interpretan como si fuera a + c = ?. Tal error se manifiesta en todas las categorías de los problemas debido a tres razones: a) los niños no entienden la indefinición relativa a uno de los sumandos y asignan la cantidad que figura a continuación en el enunciado del problema, b) no comprenden la relación temporal expresada en el texto del problema y c) no entienden la proposición comparativa que determina la cuantía del sumando desconocido. En todos los casos, los escolares optan simplemente por la operación aritmética que les resulta más conocida: la forma canónica.

c) *Repetir una de las cantidades*.- La repetición de una de las cantidades propuestas en el problema aparece con cierta frecuencia en las cuatro categorías de problemas (Bermejo y Rodríguez, 1990a, 1990b; Carpenter y Moser 1981, 1983; Cummins, 1991; De Corte y Verschaffel, 1985, 1987).

Este último error surge en los problemas de Cambio porque los escolares no representan distintamente los conjuntos de inicio y de cambio. Por ejemplo, cuando se inicia el problema por la proposición *"María tiene algunos lápices"*, el niño no crea el conjunto de inicio para María, sino que ante la segunda proposición *"Isabel le da 5"* forma un conjunto de 5 lápices. Ahora bien, al no crear el conjunto de inicio, este conjunto formado por cinco lápices no se concibe como un conjunto de cambio sino como el conjunto de inicio.

Igualmente, en los problemas de Combinación, los niños entienden la frase *"Pedro y Ana tienen 9 manzanas"* como si cada uno tuviese 9 manzanas. Finalmente, este tipo de error se debe a que los niños interpretan una proposición de relación *("Mario tiene 9 globos más que Javier")* como si fuera una asignación *("Mario tiene 9 globos")* en los problemas de Comparación (Bermejo y otros, 1998).

Los errores procedimentales se refieren a las faltas cometidas por los niños y consisten en un control inadecuado de la operación o el algoritmo. Además, estos errores se manifiestan en la suma de unidades y decenas sin distinción. Finalmente, tales errores expresan un intento de ensayo y error o un olvido.

Los errores de ejecución se presentan en la resolución de la operación de la suma y la resta. van Haneghan (1990) estudia los tipos de errores durante la solución de problemas verbales en alumnos de tercero y quinto curso, y encuentra que los primeros errores cometidos por los niños son los errores de cálculo, los cuales no consideran el texto del problema.

La taxonomía de los errores según la clasificación propuesta por Bermejo y otros (2002) comprende los siguientes tipos: conceptuales, procedimentales y en la ejecución.

Los errores conceptuales más frecuentes son: *repetir una de las cantidades, inventar la respuesta, transforma el problema, no sabe hacerlo, palabra clave, no sabe explicarlo, no lo entiende y confunde números y letras.*

1) ***Repetir una de las cantidades propuestas en el problema***.- El alumno contesta con uno de los dos números dados en el problema.
2) ***Inventar la respuesta.***- El niño da otra respuesta inapropiada.
3) ***Transforma el problema***.- El alumno aplica la forma canónica A + B = X cuando la incógnita se sitúa en uno de los sumandos. Asimismo, este error suele ocurrir cuando el niño realiza una operación distinta a la esperada.

4) ***No sabe hacerlo***.-El alumno no da una respuesta.

5) ***Palabra clave***.- El niño responde a partir de la identificación de la palabra clave.

6) ***No sabe explicarlo***.- El alumno contesta pero no tiene una explicación.

7) ***No lo entiende***.- El niño no comprende el problema.

8) ***Confunde números y letras***.- El alumno cambia los números al principio del problema.

Los errores procedimentales más comunes son: *control inadecuado de la operación, control inadecuado del algoritmo, olvida la decena, suma unidades y decenas, no sabe con números grandes y ensayo y error*.

1) ***Control inadecuado de la operación***.- El alumno no realiza adecuadamente la operación.

2) ***Control inadecuado del algoritmo***.- El niño confunde el algoritmo.

3) ***Olvida la decena***.- El alumno no considera las unidades de decenas.

4) ***Suma unidades y decenas***.- El alumno no distingue entre la posición de los números en el sistema numérico.

5) ***No sabe con números grandes***.- El niño fracasa cuando se presentan números grandes.

6) ***Ensayo y error***.- El alumno da una respuesta que cambia continuamente por otra sin obtener la respuesta adecuada.

Los errores en la ejecución más constantes son: *conteo, cálculo mental y confunde números.*

1) ***Conteo***.- El niño realiza el conteo de manera incorrecta para dar la respuesta.

2) ***Cálculo mental***.- El alumno falla en el cálculo mental de la respuesta.

3) ***Confunde números***.-El alumno cambia un número por otro en la operación

7.2. Errores en los problemas verbales reformulados

De Corte et al. (1985) proponen las siguientes categorías de errores en los problemas verbales reformulados: 1) error de sumar (AE) que consiste en juntar los dos números dados en el problema en lugar de restar el número menor del mayor, 2) error del número dado (GNE) al contestar con uno de los números dados en el problema, ya sea el primero (FGNE) o el segundo (SGNE), 3) otros errores (MC) que son de baja frecuencia, ya sea técnicos (cuando un niño elige la respuesta correcta, pero falla en la ejecución) o sin explicación actual y 4) sin respuesta (NA).

Los errores principales en los problemas de Cambio son: error de sumar (AE) y error del primer número dado (FGNE), estos errores son muy frecuentes en primer curso, pero no en segundo. Estos investigadores plantean la hipótesis de que los niños no construyen una representación mental apropiada cuando cometen un error AE o FGNE y que se carece del procesamiento semántico arriba-abajo del texto del problema en los procesos de solución.

Los protocolos infantiles muestran que los niños reaccionaban a la presentación del texto del problema, a las palabras claves o adivinaban que operación aritmética debían realizar. Por ejemplo, algunos niños que preguntaban: *"¿Deberíamos fijarnos en el primer número?"* se centraban en las últimas palabras de la pregunta del texto en el problema: *"Al principio"*. Otros niños, asociaban las palabras claves *"ganar"* y *"dar"* con la operación de sumar.

La frecuencia de ambos errores (AE y FGNE) disminuyó tanto en los problemas verbales estándar como en los problemas reformulados. En primer curso, el decremento es mayor para AE que para FGNE, mientras que sucede lo contrario en el segundo curso. Los niños que fallan en los problemas estándar, pero que los resuelven cuando son reformulados manifestaban la siguiente frecuencia de errores: 26 AE, 44 FGNE, 7 SGNE y 4 MC.

Estos datos sugieren que la reformulación de los problemas de Cambio es más efectiva con respecto al error FGNE y menos con respecto al error AE. Tales problemas facilitan un procesamiento abajo-arriba del texto verbal y previene a los niños de asociar el primer número dado con el conjunto de inicio.

Verschaffel et al. (1999) analizan los errores durante la solución de los problemas verbales reformulados y concluyen que muchos errores resultan por una aproximación superficial sin considerar el contexto del problema, además, otros errores son concepciones erróneas sobre las cantidades y la operación aritmética apropiada.

7.3. Nivel evolutivo

El análisis de los errores se examina sobre la relación del tipo de error con la edad, el curso escolar, el tipo de problema y el lugar ocupado por la incógnita.

Con relación a la edad, Bermejo y Laorden (1993) encuentran que los niños de 3 años responden comúnmente *"no sé"* o dan un número al azar como respuesta. Los niños de 4 a 5 años se saltan un elemento cuando cuentan o lo repiten en la secuencia de conteo. Los niños de 5 a 6 años cometen menos errores y manifiestan frecuentemente la repetición de un elemento. Esto último se debe a que los niños utilizan más el conteo interior que los orienta fácilmente a este tipo de equivocaciones, sobre todo en los conjuntos grandes. Los niños de 4 a 5 años a veces responden diciendo "pocos/muchos" como una respuesta de cardinalidad.

En los niños de 3 a 4 años, el error más frecuente es el último número emitido, seguido por respuestas al azar o desconocimiento. En la edad intermedia destacan los errores al azar, repetir el último número dado o saltar los números en la secuencia. Por último, en los niños mayores se expresa la repetición de los elementos contados.

Frye et al. (1989) señalan que los errores dependen de la enseñanza dada a los alumnos ya que se les enseña a decir como cardinal el último número de la secuencia en lugar de detectar los errores.

La evolución de los errores con la edad muestra evidencia que mientras unos tienden a desaparecer otros incrementan su presencia. El error "palabras clave" es común en los grupos de Educación Primaria y menos frecuente en Educación Infantil. El error "transformar el problema" aparece en los niños de segundo de E.P. debido a que tienden a transformar el problema para convertirlo en uno más sencillo (Cummins et al., 1988). A ellos les resulta más fácil la resolución de la forma canónica (a + b = ? y a – b = ?) que la no canónica (? + b = c; ? - b = c), por lo cual cambian tal problema por uno con la incógnita en el resultado. Finalmente, el error "repetir una de las cantidades" aparece sobre todo en Educación Infantil y tiende a desaparecer con la edad.

En cuanto al curso escolar, las distintas categorías de problemas no se asocian con ningún tipo de error en particular, sino que los errores varían en función del nivel de escolaridad. Los niños de Educación Infantil cometen errores de "repetir una de las cantidades" e "inventar la respuesta" en todas las categorías de problemas independiente del lugar de la incógnita y el tipo de operación (Bermejo y Rodríguez, 1990a, 1990b; Carpenter y Moser, 1981, 1983; De Corte y Verschaffel, 1985, 1987).

En primer curso de Educación Primaria, los errores más frecuentes son "inventar la respuesta" y "palabras clave". En segundo curso predominan los errores "transformar el problema" y "palabras clave", aunque existe una mayor variación de los errores dependiendo del lugar de la incógnita y el tipo de operación.

La evolución de los errores se relaciona con la competencia conceptual de los niños. Algunos errores se relacionan con la capacidad de ejecución ("contar incorrectamente con los dedos", "estrategias de cálculo mental", "conteo mental", "hacer mal la operación una vez escrito el algoritmo") y otros con el conocimiento conceptual ("ensayo y error", "repetir una de las cantidades", "inventar la respuesta", "transformar el problema"), los cuales son más frecuentes en Educación Infantil (Bermejo y otros, 1998).

Cummins et al. (1988) afirman que los errores son comprensiones deficientes y encuentran que, además de las soluciones correctas (55%), los niños tienen errores de operación incorrecta (8%), errores del número dado (18%), errores aritméticos (11%) y errores no clasificados (8%). La mayoría de los errores conceptuales se relaciona con una comprensión errónea del problema. Por tanto, los niños realizan las operaciones que creen apropiadas para los problemas.

De acuerdo con el lugar de la incógnita, Bermejo y Rodríguez (1993) consideran con relación a los errores en los problemas con la incógnita en el resultado que los preescolares se encuentran en una fase de adquisición de la operación aditiva porque sus errores se relacionan con la competencia conceptual. Es decir, estos niños poseen un conocimiento incompleto de las reglas y principios subyacentes a la adición, de ahí que sus errores consistan, por ejemplo, en repetir una de las cantidades dadas en el problema o inventar la respuesta.

En primer curso de Educación Primaria sucede lo mismo, aunque los errores de ejecución aumentan considerablemente en segundo. Por tanto, estos últimos alumnos disponen de un conocimiento más consolidado de la suma y cometen tales errores a pesar de contar con la competencia conceptual y procedimental apropiada.

Cuando la incógnita se encuentra en el sumando inicial, los errores se relacionan con la competencia conceptual en todos los grupos. En segundo de Educación Infantil y primero de Educación Primaria el error más frecuente es repetir el sumando conocido, mientras que en segundo de Educación Primaria el error común es agregar el sumando conocido al resultado. En el grupo de los niños mayores destacan los errores de procedimiento y ejecución asociados con una mayor capacidad conceptual.

8. Grado de abstracción en la suma y resta

Por una parte, existe una aproximación a los procesos de abstracción en el contexto que considera la abstracción como una actividad de reestructuración matemática (Hershkowitz, Schwarz y Dreyfus, 2001). Esta actividad tiene una historia, está dotada de herramientas y ocurre en un contexto social particular. La construcción de la abstracción requiere de tres acciones epistémicas: construcción, reconocimiento y reconstrucción. El estudio se realiza en una actividad de abstracción. Asimismo, los procesos de abstracción se inventan en la interacción entre iguales, lo cual permite identificar los tipos de interacción social que apoyan los procesos de abstracción (Dreyfus, Hershkowitz y Schwarz, 2001)

Por otra, la aproximación constructivista plantea el proceso de abstracción de lo concreto a lo abstracto mediante los niveles de desarrollo (Kamii et al., 2001).

En esta sección expondremos los distintos niveles de abstracción a través de la secuencia de lo concreto a lo abstracto durante la resolución de los problemas verbales. Primero establecemos la distinción entre abstracción y representación, las clases de abstracción y los tipos de representación. Después explicamos el nivel concreto a partir del uso de bloques, los objetos como símbolos, la comprensión de lo concreto y su importancia educativa. Además, planteamos el nivel pictórico a través de la conexión de lo concreto con lo abstracto, la presentación de los problemas verbales con dibujos, la comprensión de lo pictórico y las implicaciones educativas. Posteriormente, presentamos el nivel numérico y la relación del algoritmo con la comprensión de los símbolos numéricos. Por último, justificaremos el nivel verbal con los planteamientos previos a este apartado.

8.1. Abstracción y representación

La investigación de Piaget (1951) muestra que la comprensión no depende de las representaciones, sino del nivel de abstracción de los niños. Piaget (1951) distingue dos clases de herramientas útiles: símbolos (dibujos) y signos (palabras y números escritos).

En la teoría de Piaget, los símbolos son resemblanza de los objetos representados y se inventan por cada niño. Por ejemplo, el niño dibuja 8 manzanas sin alguna instrucción, usa 8 dedos, 8 objetos u 8 símbolos escritos. (8 marcas parecidas a 8 manzanas). Los ejemplos de signos son las palabras "manzana" y "ocho" y el numero escrito "8". Los signos no son parecidos a los objetos representados, sino que su fuente son las convenciones hechas por la gente. En otras palabras, los dibujos y las marcas son signos inventados por los niños. Los signos son parte de los sistemas y requieren la transmisión social. Otros ejemplos de sistemas convencionales son los signos matemáticos, tal como "+".

La instrucción aritmética para los niños empieza usualmente con objetos concretos y progresa hacia el uso de ayudas "semiconcretas" como los dibujos y, finalmente, símbolos "abstractos". Estas representaciones apropiadas permiten a los niños construir el significado

Para clarificar las relaciones entre la representación y la abstracción es necesario distinguir 3 clases de conocimiento: físico, social y lógico-matematico (Piaget, 1971, 1951). El primero es el conocimiento de los objetos en su realidad externa. El color y peso de los objetos son ejemplos del conocimiento físico. La última fuente de este conocimiento está parcialmente en los objetos. El conocimiento físico se adquiere empíricamente a través de la observación. El segundo es el conocimiento de las convenciones creadas por la gente. Algunos ejemplos del conocimiento social son los idiomas y las costumbres. El tercero consiste en las relaciones mentales, las cuales tienen como última fuente a la mente humana. Por ejemplo, cuando nuestros ancestros (como también cada uno de nosotros) vieron dos pájaros en el árbol pensaron que eran diferentes o similares. Cierto que los pájaros son diferentes (rara vez son idénticos) y son similares (tienen características comunes). Las relaciones de semejanza y diferencia existen entre un pájaro u otro. Otra relación que un individuo puede crear entre los pájaros es la cantidad de dos. Los pájaros se pueden observar empíricamente, pero no el numero "2". Entonces, la última fuente del conocimiento logico-matematico es la mente de cada persona.

Además, en este apartado integramos las clases de abstracción, los tipos de representación y los niveles de abstracción y representación.

Piaget (1951) conceptualiza dos clases de abstracción: empírica y reflexionante. La abstracción empírica se centra en ciertas propiedades de un objeto e ignora otras. Por ejemplo, al abstraer el color de un objeto (conocimiento físico) se ignoran otras propiedades tales como el peso y el material con que el objeto esta hecho (por ejemplo, plástico). Estas propiedades se conocen a través de los sentidos y sólo se seleccionan las que se quiere abstraer.

La abstracción reflexionante involucra la relación mental entre los objetos. Las relaciones tales como "diferentes", "similares" y "dos" (conocimiento lógico-matematico) se realizan por la abstracción reflexionante. Las propiedades de los objetos se abstraen desde los objetos, mientras que las relaciones son abstraídas a partir de las acciones mentales (pensamiento) sobre los objetos. Además, este tipo de abstracción tiene un desarrollo evolutivo (Inhelder, 1998).

Al hacer la distinción teórica entre la abstracción empírica y reflexionante, Piaget (1951) plantea que en la realidad psicológica del niño una no puede tener lugar sin la otra. Por ejemplo, no se puede construir la relación "diferente" si todos los objetos son idénticos. Tampoco se construye el conocimiento de "rojo" si no se tiene la categoría de "color" y la categoría de "rojo".

La abstracción reflexionante no puede tener lugar independiente de la abstracción empírica antes de los 6 años. Una vez que el niño construye el número es capaz de poner estas relaciones dentro de las relaciones sin abstracción empírica. Por ejemplo, para poner cuatro "dos" dentro de las relaciones, los niños deducen que 2 + 2 + 2 + 2 = (2 + 2) (2 + 2), que 4 X 2 = 8, además, 4x = 8, x debe ser 2.

En la tarea de conservación del numero se clarifica la abstracción reflexionante cuando a los niños de 4 y 5 años que hacen una correspondencia uno-a-uno se les pide que coloquen el mismo número de objetos como en el modelo (Kamii 1982, 1985, 2000).

La tarea de conservación es una prueba de la lógica de los niños. Los objetos se cuentan (conocimiento físico), pero la observación no asegura la deducción lógica que la cantidad en las dos hileras sea la misma. Entonces, cuando los niños colocan los objetos dentro de las relaciones numéricas (por abstracción reflexionante) se puede deducir lógicamente que las dos hileras tienen el mismo número.

Los niños conservadores no intentan contar. Los niños que empiezan a contar se les pregunta si pueden contestar la pregunta sin usar el conteo cuando la lógica de los niños está bien desarrollada, entonces la conservación llega a ser obvia sin necesidad de algún procedimiento parecido al conteo.

En cuanto a los tipos de representación, Sinclair, Siegrist y Sinclair (1983) entrevistaron a niños de 4, 5 y 6 años en un centro preescolar y uno de cuidado diurno en Ginebra (Suiza). Después de hacer distintos requerimientos, los investigadores preguntaban al niño "*¿Deberías escribir un tres?*". Esta pregunta se presentaba para saber si el niño podía escribir los números cuando no hay objetos.

Los tipos de representación que se encontraron son los siguientes:

1. Representación global de la cantidad (/////).
2. Representación de la clase objeto (c).
3. Correspondencia uno-a-uno con n símbolos (TRFVB).
4. Correspondencia uno-a-uno con números (44444).
5. Valor cardinal (cinco).
6. Valor cardinal y clase de objeto (cinco casas).

El tipo uno se encontraba entre los niños de 4 años y los tipos 5 y 6 se manifestaban entre los mayores de 5 años. Los tipos 3 y 4 aparecían en la mitad del rango de edad en los niños conservadores. Sin embargo, los niveles de este desarrollo no están claros ya que la mitad de los niños usa más de un tipo de representación. Un descubrimiento significativo es que muchos niños empleaban sólo los tipos 1, 2 ó 3 para escribir "3", "4" y así sucesivamente.

Los niños de 5 años que construyen el número (por abstracción reflexionante) manifiestan las representaciones tipo 3 y 4. Estos niños piensan acerca de tres objetos con precisión numérica aunque también lo hacen sobre cada objeto. El tipo 4 es informativo porque muestra que ellos usan su conocimiento social de los números escritos en sus respectivos niveles de abstracción reflexionante. Nadie enseña a los niños a escribir "123" o "333" para representar tres objetos, pero los tipos 3 y 4 revelan la atención de los niños para cada objeto en vez de la cantidad total.

La representación 5 se realiza más por los niños mayores quienes reflejan su pensamiento acerca de la cantidad total de objetos. En este sentido, un número les parece mejor para representar una unidad de orden superior.

Vergnaud (1998) discute dos razones para considerar la representación como objeto de estudio. Primera, la representación se compone de imágenes, gestos y palabras. Segunda, las palabras y los símbolos no se refieren directamente a la realidad, sino que representan objetos, propiedades, relaciones, procesos, acciones y constructos acerca de los cuales no existe un acuerdo automático entre dos personas.

Este planteamiento se relaciona con el rol de la acción en la representación. Entonces, esta cuestión es importante para la educación de las matemáticas incluso para la epistemología sobre las matemáticas al considerar que los conceptos en matemáticos se construyen a partir de la acción y la representación del entorno físico y social.

Por su parte, Seeger (1998) discute los conceptos de la representación en matemáticas en una dimensión externa-interna. Para ello revisa los estudios realizados sobre la abstracción y la representación. Entonces, desde una aproximación histórico-cultural plantea cinco elementos de discusión sobre la representación: 1) las representaciones como herramientas, 2) la relación de percepción y representación, 3) las representaciones reflexionante y referencial, 4) representación y exploración y 5) representación y re-mediación.

Siegal (2003) considera que los niños cambian en su representación del mundo concreto en varias dimensiones: 1) distinción apariencia-relación, 2) cognición espacial y representación simbólica, 3) conservación, 4) inferencia transitiva y 5) perspectivas.

Con relación a los niveles de abstracción y representación, Kato, Kamii, Ozaki y Nagahiro (2002) entrevistan a 60 niños japoneses de 3 a 8 años sobre las relaciones entre estos niveles. Los niveles de abstracción se evaluaban mediante una tarea de conservación de número. Por una parte, el conocimiento lógico-matemático se desarrolla a través de tres niveles de abstracción reflexionante. En el nivel 1 no existe todavía una correspondencia uno-a-uno. En el nivel 2 existe esta correspondencia en forma empírica, pero no en el sentido reflexionante. En el nivel 3, la lógica se desarrolla suficientemente para deducir que dos conjuntos tienen el mismo número. El nivel 1 se encontraba a los 4 años (67%), el nivel 2 a los 5 años (67%) y el nivel 3 a los 6 y 7 años (87%). Por otra, también se consideran 3 niveles en la representación. El nivel 1 es cuantitativo, pero prenumérico. En el nivel 2 se representa una correspondencia uno-a-uno con conjuntos entre 6 y 8 objetos. En el nivel 3, el conjunto total se representa con el número adecuado. En un sentido evolutivo, el nivel 1 se manifestaba a los 4 años (77%), el nivel 2 a los 5 años (83%) y el nivel 3 a los 7 años (62%). Cabe mencionar que los niños de 6 años se encontraron divididos entre los niveles 2 y 3.

La relación entre ambos tipos de niveles indica que los niños pueden representar en el mismo nivel de abstracción o en uno inferior, pero no arriba de ese nivel. En otras palabras, los alumnos representan generalmente conjuntos de objetos en sus niveles de abstracción respectivos

Los niveles de abstracción que se tienen en cuenta en esta tesis son: concreto, dibujos, numérico y verbal. Estos niveles siguen un orden progresivo de comprensión (Canobi, Reeve y Pattison, 2003; Fuson, Smith y LoCicero, 1997). En este sentido, Maccini y Hughes (2000) han investigado los efectos de una secuencia de enseñanza con 3 niveles: concreto (manipulación de objetos físicos), semiconcreto (representación con dibujos) y abstracto (empleo de símbolos matemáticos). Los resultados encuentran mejor rendimiento en el uso de estrategias de solución a través de los niveles mencionados.

8.2. Nivel concreto

La idea de que los niños pequeños aprenden mejor a través de objetos concretos parte de las teorías de Piaget (1970) y Bruner (1966). A partir de Piaget (1970), los educadores adoptan la noción de que el pensamiento de los niños de escuela elemental es concreto. Es decir, estos niños aprenden mejor a través de objetos concretos. Sin embargo, el niño operacional concreto tiene dificultad para realizar las operaciones mentales sobre los símbolos abstractos.

Bruner (1966) plantea que el pensamiento de los niños sobre las propiedades concretas de los objetos de la enseñanza debe ser manipulado activamente. Específicamente, el uso de objetos en la instrucción promovería el avance del niño más allá de su atención sobre las propiedades perceptivas de los objetos. En palabras de Bruner (1966) esta aproximación debe "vaciar el concepto de propiedades sensoriales especificas" (p.65) y permitir al alumno "comprender estas propiedades abstractas" (p.65).

Los bloques se han empleado en la investigación de matemáticas. Por ejemplo, Labinowicz (1985) encuentra que los alumnos de tercer curso desarrollan sus destrezas de cálculo al usar bloques base-diez.

En el estudio de Resnick y Omanson (1987) el uso de bloques de base-diez tiene gran impacto en los niños sobre la comprensión y destreza de la resta con varios dígitos.

Wearne y Hiebert (1988) descubren que el uso de bloques base-diez tiene un efecto favorable en el desarrollo del significado sobre la numeración decimal y la suma y resta con decimales en los alumnos de cuarto, quinto y sexto curso.

Además, Fuson y Briars (1990) abordan la orientación de los alumnos hacia los materiales concretos en relación con la notación y el valor numérico. Fuson y Briars informan que los niños realizan un alto nivel de destreza con sumas y restas de varios dígitos por medio del uso de bloques base-diez.

Recientemente, Fuson y Burghardt (2003) informan de una investigación sobre el pensamiento matemático con alumnos de segundo curso. Los participantes aprendían cooperativamente a sumar y restar algoritmos de cuatro dígitos empleando bloques base-diez y números escritos. Los datos revelaron que los niños inventan procedimientos eficientes que son diferentes de manera conceptual o procedimental a los algoritmos resueltos en la escuela.

Fuson y Burghardt concluyen lo siguiente: 1) el uso de herramientas, tal como el aprendizaje en grupos cooperativos y las manipulaciones con material concreto promueven la competencia conceptual y 2) la comprensión propicia la flexibilidad y la experiencia adaptativa en contraste con la solución rígida del algoritmo.

8.2.1. *Objetos como símbolos*

Los niños necesitan percibir y comprender las relaciones entre los objetos y otras formas de expresión matemática (Ball, 1992; Fuson, 1988; Gentner y Ratterman, 1991; Hiebert y Carpenter, 1992; Resnick y Omanson, 1987).

Por ejemplo, cuando los niños solucionan problemas con bloque Dienes necesitan ver como las operaciones que se expresan de esta forma se pueden realizar de manera escrita (Fuson y Briars, 1990). Los objetos concretos son una ayuda efectiva en el aula de matemáticas, pero para usarlos adecuadamente, los profesores necesitan conocer como los niños comprenden las relaciones simbólicas.

Kennedy y Tipps (1994) sugieren que los materiales concretos propician que los conceptos matemáticos difíciles se comprendan fácilmente. Las manipulaciones con objetos aseguran que los alumnos conectan sus conceptos matemáticos abstractos a los objetos reales.

En este sentido, Uttal, Scudder y DeLoache (1997) consideran las manipulaciones como símbolos. Estos autores afirman que las manipulaciones concretas son efectivas para realizar las matemáticas sin necesidad de comprender los símbolos escritos. También, las manipulaciones son símbolos que representan un concepto. Entonces, la investigación sobre la comprensión infantil de las relaciones simbólicas es relevante para estudiar la comprensión de las manipulaciones. En este sentido, la cuestión es tratar los objetos como símbolos y no como sustitutos de los símbolos.

Posteriormente, Uttal, Liu y DeLoache (1999) discuten el rol de la concretividad en el pensamiento de los niños. Comienzan con una breve discusión de las bases teóricas tradicionales para asumir que la concretividad es importante en el desarrollo de la comprensión de los niños sobre las relaciones simbólicas. Entonces, al reducir el camino de lo concreto a lo abstracto se puede simplificar la naturaleza del pensamiento temprano de los niños y estimular el empleo de los objetos en la enseñanza.

Por su parte, DeLoache (2002) plantea que la representación doble de los objetos mantiene dos representaciones mentales activas. Esta habilidad se desarrolla durante los años de preescolar y depende de la experiencia concreta con los símbolos en el contexto social dentro del cual se presentan. Entonces, un objeto puede ser útil siempre y cuando se use en ciertas formas, pero no en otras, así como, en un determinado período, aunque no en otro. Las relaciones simbólicas entre los niños y los objetos no se adquieren en la abstracción empírica.

Por tanto, numerosas propuestas plantean que para mejorar la instrucción en matemáticas se debe incrementar el uso de objetos. Los profesores y los investigadores sugieren que los objetos permiten a los niños establecer conexiones entre sus experiencias diarias y su conocimiento de los conceptos matemáticos.

8.2.2. *Comprensión de lo concreto*

Dienes (1964) enfatiza el principio de variabilidad perceptual que permita tanta variación como sea posible en la formación del concepto. Por tanto, los alumnos abstraen el núcleo de la idea matemática representada en los materiales durante un tiempo prolongado.

Por un lado, Hughes (1986) ha investigado con niños de 5 a 7 años la solución de problemas con bloques, por ejemplo, 1 + 7 = 8. Los niños contestaban sobre el cambio de la representación simbólica del algoritmo a una representación concreta con bloques. Antes de representar las manipulaciones y luego los algoritmos, las dos formas de expresión estaban relacionadas desde el principio. Entonces, las manipulaciones se emplean como un puente de ayuda para dominar los símbolos abstractos. Los niños conciben la manipulación como una representación matemática, al mismo tiempo que la consideran como un objeto. Por tanto, es una representación doble.

Por otro, Resnick y Omanson (1987) encuentran que los niños tienen dificultad en establecer conexiones entre las manipulaciones y los conceptos o símbolos matemáticos. Estos autores han estudiado como los alumnos de tercer curso establecen conexiones entre las distintas formas de expresión matemática (contar bloques Dienes y comprender los conceptos básicos en la resta). Por ejemplo, un niño que solucionaba un problema como 103 + 52 con bloques tenía dificultad en resolver el problema escrito 12 + 14 que es más fácil que el anterior. Los niños que rinden mejor con los bloques Dienes bajan su rendimiento en los algoritmos de resta.

Los niños demuestran una aproximación prefuncional y algoritmica a los problemas escritos que conduce a muchos errores con estrategias incorrectas. La solución de problemas con bloques Dienes ayuda a los niños a aprender más acerca de las matemáticas, pero este nuevo conocimiento no se relaciona con la clase o los libros de texto.

En la suma, los materiales estructurados fomentan la adopción de estrategias más avanzadas, mientras que los materiales diversificados tienen un efecto facilitador sobre los niños que usan estrategias con los dedos, pero no para los niños que emplean estrategias sin dedos. Una tendencia similar se encuentra en la resta, la cual es más difícil que la suma para estos niños (Jordan, Huttenlocher, y Levine, 1992; Levine, Jordan y Huttenlocher, 1992), y en el aprendizaje sobre el concepto de número con niños de preescolar (Chao, Stigler y Woodward, 2000).

Por su parte, Kamii, Lewis y Kirkland (2001b) discuten la utilidad de las manipulaciones de material concreto en relación con la adquisición del conocimiento lógico-matemático. A partir de que los niños construyen este conocimiento, las manipulaciones concretas se prefieren para comenzar a pensar en la solución del problema. Este pensamiento consiste en construir relaciones por medio de la abstracción reflexionante. Entonces, un objeto específico se comprende en ciertas formas, pero no en otras. Estos autores concluyen que las relaciones matemáticas no existen en los objetos sino en la mente y no se adquieren en la abstracción empírica sino en la abstracción reflexionante.

Recientemente, Zhou y Zhang (2003) comparan la solución de problemas verbales. Los niños de 8 años de segundo curso resolvían problemas de separar objetos y problemas de juntar objetos. En la hipótesis se planteaba que los problemas juntar objetos que contienen la palabra clave "poner" son más fáciles que los problemas separar objetos que presentan la palabra "quitar". Los resultados son consistentes con este planteamiento.

Por otra parte, la importancia educativa de los materiales concretos se ha reconocido en varias instancias educativas.

En Japón, la Asociación de la Enseñanza en Matemáticas propone otra representación estructural de los números (Ginbayashi, 1984; Hatano, 1980, 1982). Esta Asociación considera que es benéfico presentar representaciones semiconcretas de los números entre los objetos concretos y los símbolos numéricos abstractos que ayuden a los niños a comprender la estructura de los números y adquirir las destrezas adecuadas de cálculo.

En los Estados Unidos, la posición del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, 1989) se plantea con respecto al uso de materiales concretos en la enseñanza de la siguiente manera: "*Algunos niños comprenden el significado del número gradualmente. Para estimular esta comprensión los maestros pueden ofrecer experiencias en el aula en las que los estudiantes primero manipulen los objetos físicos y entonces usen el* *lenguaje propio para explicar su pensamiento. Su involucramiento activo en las manipulaciones físicas estimula a los niños a reflexionar sobre sus acciones y construir su propio significado del número. En todas las situaciones, trabajar con los símbolos de los números debe estar vinculado significativamente a los materiales concretos"* (p. 38).

Las implicaciones educativas refieren que el uso de objetos en la instrucción de las matemáticas puede ser efectiva, pero no la concretividad de los objetos. Una buena manipulación debe facilitar, antes que impedir, la percepción que los niños tienen de la relación entre las manipulaciones y lo que el profesor espera que aprendan. A este respecto, los objetos interesantes o atractivos pueden generar manipulaciones incorrectas. Igualmente, el uso común de los objetos que los niños ya dominan (juguetes, comida, etc.) interfieren con su comprensión de la naturaleza simbólica de la manipulación. Entonces, lo mejor es manipular objetos que sólo se usen para la instrucción matemática. Así, los niños no se centrarían en los objetos en sí mismos, sino como instrumentos que ilustran un concepto nuevo o símbolo escrito.

8.3. Nivel pictórico

En este nivel se analiza la relación de la presentación de los problemas verbales en el nivel pictórico con el rendimiento de los alumnos.

En cuanto a la conexión de lo concreto con lo abstracto, Bruner (1966) sugiere el nivel pictórico como una conexión del trabajo concreto y abstracto. El uso del continuo concreto-dibujo-abstracto de Bruner considera que los objetos y los algoritmos no son puntos finales en un continuo simple.

Existen sistemas distintos estructuralmente que se conectan entre sí. Los dibujos tienen las mismas propiedades que los objetos (y diferentes propiedades de los algoritmos), pero resultan complicados para que los niños los elaboren y comprendan, además de consumir bastante tiempo. Por ejemplo, Behr (1976) encuentra que los alumnos de segundo curso tienen dificultad con los problemas de suma que requieren “llevadas” si se presentan en el modo pictórico (con dibujos de bloques base-diez), pero no cuando se les dan los bloques.

8.3.1. *Problemas verbales con dibujos*

van Essen y Hamaker (1990) han estudiado el uso de los dibujos en la solución de problemas verbales aritméticos. Algunas características del problema se infieren más fácilmente desde un dibujo porque son más explícitas.

Distintos autores sugieren los dibujos para analizar y explorar un problema (Polya, 1957; Schoenfeld, 1985). Los niños expertos aplican esta estrategia más a menudo que los menos expertos (Proudfit, 1981). Sin embargo, Cohen y Stover (1981) encuentran que pocos alumnos de sexto curso tienen conocimiento del efecto facilitador de un dibujo que representa el problema verbal.

Nelson (1974) compara tres métodos de aprendizaje para resolver problemas verbales por los alumnos de sexto curso. En el primero se solucionaban los problemas verbales sin instrucción. En el segundo se resolvían los problemas con dibujos. En el tercero se instruía para cambiar los problemas verbales a dibujos y viceversa. Los alumnos que elaboraron dibujos tuvieron un rendimiento superior en el postest que los alumnos que no hicieron dibujos, pero no hubo diferencias entre la condición de “práctica” y la condición de “cambio”.

Además, Zwent, Geraghty y Turner (1979) informan que los alumnos cuando no pueden solucionar un problema verbal lo resuelven mediante un dibujo.

Por una parte, Bell, Swan y Taylor (1981) preguntaron a alumnos de sexto grado sobre los problemas verbales con dibujos. Por un parte, estos autores encuentran que cuando un alumno construía un dibujo apropiado del problema éste se solucionaba sin otro dibujo. En este caso, elaborar un dibujo se convierte en una actividad redundante. Por otra, los alumnos manifiestan errores conceptuales cuando construyen representaciones pictóricas incorrectas. Para ellos, la elaboración de un dibujo no ayuda a corregir el error conceptual.

Además, Cohen y Stover (1981) y Yancey (1981) sostienen que los alumnos resuelven los problemas verbales mediante dibujos mejor que los alumnos que no los elaboran.

Asimismo, Quintero (1983) encuentra evidencias al respecto cuando pregunta a los niños de 5º, 6º y 7º curso sobre la elección del dibujo que representaba la situación descrita en el problema. La solución y el reconocimiento del modelo resultó apropiada en el 86% de los casos.

Desde dos perspectivas se analiza la hipótesis de que construir un dibujo de un problema verbal aritmético facilita la solución del problema. La primera aproximación es enseñar a los alumnos varios tipos de diagramas específicos y la segunda proporciona instrucción a los alumnos para que elaboren los dibujos.

En cuanto a la primera perspectiva, los investigadores enseñan a los niños el aprendizaje de la estructura de los problemas de suma y resta dentro de un diagrama parte-todo (Wolters, 1983) o a través de dibujos esquemáticos adaptados a la estructura semántica del problema (De Corte y Verschaffel, 1985; Lindvall, Tamburino y Robinson, 1982; Willis y Fuson, 1988). Por ejemplo, los niños representan los problemas de Cambio con un diagrama de flechas dinámico y los problemas de Combinación mediante un diagrama parte-todo estático. Los alumnos instruidos para construir estos diagramas obtienen un mayor rendimiento después de la instrucción. En el estudio de Wolters (1983) donde sólo se enseña el diagrama parte-todo, los niños mejoran únicamente en los problemas con la relación parte-todo estática (problemas de Combinación).

Con respecto a la segunda perspectiva, los alumnos construyen un problema verbal a través de una técnica heurística que facilita la solución del problema. Los participantes no son instruidos para construir el diagrama prescrito, sino que se les estimula a elaborar una representación pictórica adaptada a sus propias ideas.

La evidencia apoya un proceso de construcción del nivel pictórico del problema como lo muestran Moyer, Sowder, Threadgill-Sowder y Moyer (1984) quienes presentaban dibujos de conjuntos de objetos con cantidades asociadas y comparaban la respuesta con el texto. El rendimiento de los niños de tercero hasta séptimo curso era mejor para los problemas presentados con dibujos que para los problemas verbales. Este resultado es consistente con la idea de que la comprensión depende de la construcción de una representación de los conjuntos de objetos y las cantidades del problema, la cual resulta más fácil cuando existe una representación pictórica que identifica los conjuntos y sus atributos cuantitativos.

Larkin y Simon (1987) afirman que los niños tienen una información más eficiente en un dibujo que en el texto cuando resuelven el problema.

Por otra, la enseñanza de dibujos esquemáticos específicos para las categorías de los problemas verbales conduce a un análisis superficial, es decir, se considera que las palabras claves indican el dibujo que se debe usar (Verschaffel y De Corte, 1990).

Este planteamiento junto con los de Bell et al. (1981) y Nelson (1974) indica que los dibujos elaborados por los niños no ayudan a menudo a solucionar el problema, aunque este problema se presente en forma pictórica. Entonces, un dibujo no es una opción cuando el alumno no posee el conocimiento de dominio especifico necesario para la resolución del problema. Cuando un alumno carece de este conocimiento, la elaboración de un dibujo es de poca ayuda y sólo reflejaría errores conceptuales. Si un alumno posee el conocimiento relevante, entonces, el dibujo se convierte en una herramienta de análisis y elaboración. La construcción de un dibujo aumenta la oportunidad para que la situación del problema se reconozca y el esquema apropiado se identifique con otro esquema competente.

Desde el punto de vista lingüístico, Cummins (1991) ha preguntado a los niños sobre la selección de dibujos que representan las estructuras de los problemas verbales. En el experimento se hipotetiza que la solución correcta depende de la selección del dibujo correspondiente con la representación apropiada. Los resultados apoyaron esta hipótesis. Sin embargo, las variaciones de la solución adecuada en la tarea de selección del dibujo son 43% para los problemas de Comparación 4 y sólo 6% para los problemas de Comparación 6. Entonces, las diferencias en el rendimiento de los niños se explican por el desarrollo de las estructuras conceptuales dentro del dominio cuantitativo.

De manera breve, con un dibujo del problema verbal se construye una representación apropiada del problema, haciéndolo más concreto. Por tanto, la construcción de un dibujo es un paso intermedio entre la representación mental abstracta y una representación concreta porque la información del problema se reconoce a través del dibujo.

8.3. 3. *Comprensión de lo pictórico*

Los niños separan el símbolo de lo que es significado (Piaget, 1969), además crean los símbolos para sus dibujos. En este sentido existe un movimiento que se orienta a partir de los dibujos elaborados hacia las representaciones más simbólicas. Cuando los niños se mueven en esta dirección comienza la abstracción.

También, Vygotski (1978) se refiere al dibujo como “una etapa preliminar” al desarrollo del lenguaje escrito del niño. Los dibujos emergen como un medio para descubrir y expresar el significado puesto que involucran la creación y manipulación de los símbolos, con lo cuál la comprensión de los dibujos es más evidente para los niños.

Fuson y Willis (1989) analizan el uso de los dibujos por los alumnos de segundo grado durante la solución de los problemas verbales de suma y resta con tres dígitos. Los niños demostraban competencia para identificar la estructura semántica del problema, escribir los números del problema dentro de los lugares apropiados en el dibujo y determinar si se suman o restan los dos números conocidos. La mayoría de los niños con alto rendimiento eligían la estrategia apropiada para casi todos los problemas y dos tercios de los niños con rendimiento promedio lo hacían en el 60% de los problemas. Los niños no usaban un esquema parte-parte-todo para solucionar los problemas de Cambio o Comparación y muchos niños representaban los problemas de Cambio con dibujos de Comparación.

Estos resultados discrepan de la hipótesis de Resnick (1983) de que los niños usan un esquema parte-todo para representar los cuatro tipos de problemas y de la hipótesis más restringida (Kintsch y Greeno, 1985; Riley y Greeno, 1988; Riley et al., 1983) de que los problemas de Cambio y Comparación más difíciles se representan en esta forma.

También, la comprensión de los niños se estudia con respecto a las relaciones cuantitativas en los dibujos de los textos (Okamoto, 1996).

Vlahovic-Stetic (1999) investiga el rendimiento en los problemas verbales de suma y resta enunciados con contextos de situaciones familiares y neutrales. La tarea consistía en dibujar los elementos del problema por parte de los alumnos de primer curso. Los resultados muestran que los problemas de Comparación son más difíciles que los problemas de Combinación. El rendimiento en los problemas con un contexto familiar es mayor que con el contexto neutral. Sin embargo, no existen diferencias respecto a las tareas con o sin dibujos.

Además, Zhou y Zhang (2000) analizan el efecto de la cantidad de los conjuntos y la elaboración de los dibujos en los problemas verbales relacionales. La muestra constaba de

258 alumnos de tercer curso asignados aleatoriamente a tres grupos con una tarea diferente: 1) analizar las cantidades de los problemas, 2) construir un dibujo y 3) resolver un problema verbal. Doce problemas relacionales se presentaban en dos formas de acuerdo al lugar de la incógnita: en el resultado y en el conjunto de comparación. Los resultados mostraban un mejor rendimiento con la construcción de dibujos, mientras que los errores cometidos disminuían con respecto a las otras tareas.

Asimismo, Chang (2001) explora la comprensión del texto del dibujo y el efecto de los dibujos en la solución de los problemas verbales. Los alumnos de segundo hasta cuarto curso resolvían cuatro tipos de problemas verbales: Cambio, Combinación, Comparación e Igualación. La tarea consistía en elegir el dibujo apropiado para cada problema. En el primer experimento participaban 916 alumnos de segundo y cuarto curso. En el segundo experimento había 466 alumnos de tercero y cuarto curso. En los resultados se encontró un efecto del curso escolar, pero no de los dibujos. Por tanto, el rendimiento en la tarea de solución de los problemas fue mayor que la elección del dibujo. Chang sugiere que las dificultades en la elección del dibujo apropiado se deben a la relación de las cantidades y el lugar de la incógnita

Al investigar los dibujos de los niños, Woleck (2001) considera que el dibujo puede ser una ventana dentro de la mente infantil. Desde una perspectiva evolutiva, el dibujo es una forma de simbolismo gráfico que se desarrolla antes de la escritura (Dyson, 1983).

Igual que las manipulaciones concretas, las representaciones pictóricas sirven al pensamiento como pasos intermedios en una tarea que requiere solucionar un problema (NCTM, 2000). El NCTM ha declarado: *"Cuando un alumno muestra su dibujo a otros en el grupo, los dibujos pueden servir como una herramienta para apoyar los esfuerzos individuales y colectivos en la solución de los problemas y el desarrollo de los conceptos* *matemáticos. Los dibujos pueden funcionar como representaciones para el propósito de aprender las matemáticas"* (NCTM, 2000 p. 67).

Así, los dibujos de los niños son una herramienta para comprender las matemáticas. *"La abstracción en matemáticas supone usar la simbolización para abandonar las características innecesarias así que los símbolos se manipulan con mayor medida"* (NCTM, 2000 p. 69).

La abundancia de los estudios realizados sobre los dibujos infantiles señala la necesidad de validar explícitamente su uso en el aula. Los dibujos no deben ser tratados como estáticos, sino como herramientas valiosas para el aprendizaje de las matemáticas. Entonces, las matemáticas es un dominio complejo basado en la integración de modos orales, escritos, pictóricos y concretos. Cada forma de representación tiene su propia trascendencia. Un dibujo puede servir para un propósito, las palabras, las expresiones simbólicas y los objetos a otros. Por tanto, los niños necesitan oportunidades para desarrollar fluidamente la integración de estas formas de simbolismo, representación y comunicación.

8.4. Nivel numérico

Nesher (1982) estudia los niveles de abstracción en los problemas verbales de suma y resta. Nesher afirma que existen, por una parte, operaciones lógicas y, por otra, operaciones con objetos. En el mundo real existe siempre alguna correspondencia entre ambas operaciones. Esta cuestión se relaciona con el punto de partida de la enseñanza de la suma y la resta. ¿Se debe iniciar con los números y su operación simbólica, abstracta o con las representaciones concretas de la suma y la resta?. Este planteamiento no es una confrontación de lo concreto vs abstracto, sino una cuestión epistemológica, la cual dicta distintos puntos sobre la adquisición de las matemáticas en general, y en la suma y resta en particular.

Mevarech y Stern (1997) concluyen en un estudio sobre la comprensión de los conceptos matemáticos abstractos a través de la interacción entre el conocimiento y los contextos que estos conceptos se comprenden desde antes que se presenten en la escuela (Resnick, 1989).

Cai (2000) examina a 232 niños americanos y 310 niños chinos de sexto curso sobre la solución de tareas matemáticas con algoritmo y material concreto y visual. Los resultados indican que los participantes chinos prefieren resolver algoritmos y usar representaciones simbólicas, mientras que los alumnos americanos eligen representaciones visuales concretas.

Además, Selva y Brandao (2000) investigan como los niños de preescolar emplean números escritos para resolver problemas verbales de resta. En el estudio participaban 30 niños de 4 a 6 años. Los resultados indican que los números escritos ayudan a realizar el cálculo numérico, facilitan los procesos de pensamiento y mejoran la representación de los problemas verbales.

Por su parte, Kamii et al. (2001a) examinan porque los niños encuentran la resta más difícil que la suma. En el primer experimento se preguntaba a 33 preescolares sobre la transferencia de los bloques de un vaso a una botella. En el segundo experimento se interrogaba a 21 alumnos de primer curso y 38 niños de cuarto curso con respecto a los algoritmos de suma (8 + 2) y su correspondiente forma sustractiva (10 – 8). La conclusión es que la resta resulta más difícil que la suma porque los niños deducen las diferencias a partir de su conocimiento previo de la suma. Por tanto, la enseñanza de la resta se debe comenzar junto con la suma durante el primer curso escolar.

En otro estudio, Kamii et al. (2001) entrevistan sobre la suma a 201 niños de primer curso y encuentra que todos estos alumnos estaban familiarizados con los algoritmos, aunque sólo 68%, 18%, 22% y 62% en 4 grupos escribían expresiones convencionales tales como "3 + 2 = 5" y "3 + 2 ". Otros sólo escribían dos números en "3 + 2 ", "3 + 2 = ", como "3, 2" o

“3, 5”. Un 3 y un 2 que representaban los dos números originales se escribían por 18%, 24%, 46% y 36%, respectivamente. Un 3 y un 5 representando el número dado y el resultado se escribieron por 6%, 29%, 11% y 9% de los cuatro grupos.

Un punto importante concierne con el uso del signo “ = ”. También muchos niños escriben “3 2” sin el signo “ + ”. Algunos niños escriben el signo “ + ” sin escribir el signo “ = ”, pero ninguno escribe el signo “ = ” sin escribir el signo “ + ”. Entonces, el signo “ = ” aparece más tarde que el signo “ + ” porque las relaciones entre 3, 2 y 5 involucran una relación jerárquica difícil de comprender por los niños pequeños. Al sumar dos números se combinan dos enteros (3 y 2) y para hacer un número de orden superior (5) se requiere que los números anteriores sean las partes. Por el contrario, las relaciones “ + ” entre las dos partes originales (3 + 2) no involucran una relación jerárquica.

En los niños de 6 a 7 años, el pensamiento es flexible y reversible. La reversibilidad se refiere a la habilidad para realizar mentalmente dos acciones opuestas simultáneamente (separar el todo en dos partes y reunir las partes dentro del todo). En una acción material física es imposible hacer simultáneamente dos cosas opuestas. Pero, esto es posible en la mente cuando el pensamiento (abstracción reflexionante) es flexible y reversible. Entonces, el niño comprende el conjunto total cuando las partes pueden ser reunidas sólo en la mente.

Por tanto, el uso del signo “ = ” es poco frecuente y la relación entre los tres números (3, 2 y 5) se explica como una manifestación de la dificultad de los niños de primer curso para elaborar relaciones parte-todo jerárquicas. Así, los niños no pueden representar (externalizar) una relación parte-todo que no existe en sus mentes.

Recientemente, Seo y Ginsburg (2003) informan de una investigación sobre los efectos del contexto en las interpretaciones del signo igual por un grupo cooperativo. El estudio examinaba a 16 alumnos de segundo curso sobre tres componentes centrales del proceso enseñanza-aprendizaje: el curriculum contenido en los libros de texto, el profesor y las experiencias de los alumnos con el signo igual en contextos diferentes. Los datos muestran que la mayoría de los alumnos construye el significado del signo igual según el contexto específico.

Por su parte, Lehrer y Lesh (2003) se centran en el análisis del aprendizaje de las matemáticas y examinan los argumentos infantiles sobre los algoritmos desde una aproximación epistemológica. Estos autores tienen en cuenta la construcción del argumento verbal antes que los procedimientos heurísticos, así como el rol de los algoritmos para el desarrollo del pensamiento matemático desde una perspectiva cognitiva y sociocultural.

8.5. Nivel verbal

En este nivel se representa el grado más elevado de abstracción al comprender la estructura semántica de los problemas de suma y resta. La diferencia se centra principalmente en dominar las relaciones semánticas o el significado entre las cantidades por encima de las relaciones simbólicas arbitrarias establecidas en el algoritmo. Gran parte de lo que se ha dicho en este marco teórico sirve de sustento a este planteamiento, por tanto no conviene ser reiterativo en ello. Así, el nivel verbal se ha explicado ampliamente en relación a los problemas de suma y resta en las secciones 3, 4 y 5.

9. Contexto social

Si existen diferencias transculturales en el rendimiento matemático entre dos o varios países (Resnick, 1989), entonces pueden existir diferencias en este dominio al interior de un país o una cultura. En esta sección veremos los planteamientos de la literatura respecto a la noción del contexto y la relación del contexto sociocultural con el conocimiento de las matemáticas.

9.1. Noción de contexto

Los estudios de la cognición a través del contexto (Carraher, Carraher y Schliemann, 1982, 1985; Ceci y Bronfenbrenner, 1985; Donaldson, 1978; Lave, 1988; Light, Buckingham y Robins, 1979; McGarrigle y Donaldson, 1974; Scribner, 1984, 1986; Saxe, 1991) muestran que las mismas tareas de pensamiento se desarrollan de distinta manera por los niños en contextos diferentes. Entonces, se concibe que los contextos socioculturales son un componente del desarrollo cognitivo. Por ejemplo, la concepción sociocultural del desarrollo y el aprendizaje (Laboratory of Comparative Human Cognition, 1983), las funciones cognitivas entendidas como "cognición situada" (Brown, Collins y Duguid, 1989), "cognición formada" (Resnick, Levine y Teasley, 1991) o "cognición distribuida" (Hutchins, 1993), el aprendizaje explicado como "comunidades de práctica por medio de la participación periférica legítima" (Lave y Wenger, 1991), "aprehensión a través de la participación guiada" (Rogoff, 1990) y "construcción social de las respuestas" (Perret-Clermont, Perret y Bell, 1991), y los procesos de construcción del conocimiento individual por medio de la actividad (Hatano e Inagaki, 1992; Saxe, 1991; Schliemann, 1995).

Por tanto, la construcción del conocimiento matemático en contextos específicos se fundamenta en el uso de reglas y procedimientos matemáticos como herramientas para realizar metas particulares (Nunes, 1993; Nunes, Schliemann y Carraher, 1993; Resnick, 1987; Schliemann, 1995; Schliemann y Carraher, 1992). En concreto, las estrategias tienen un significado sociocultural de las situaciones en las que se manifiestan.

Abreu (1998) considera que los estudios que investigan en esta dirección sólo hacen referencia implícita a la definición del contexto, aunque todos están de acuerdo en que el aprendizaje tiene lugar o está situado en un contexto sociocultural. Por esta razón presentamos la noción del contexto que Abreu desarrolla en los siguientes términos.

En primer lugar, el contexto es una característica física o un instrumento producido por un grupo cultural particular que se presenta en el momento de la acción. Segundo, el contexto se refiere a una característica social producto de la historia de un grupo dentro de un orden social concreto el cual sanciona las formas legítimas de conocimiento matemático. Estas formas se conocen simbólicamente por los actores sociales.

Entonces, la relación entre el contexto social y la actividad cognitiva se manifiesta en dos niveles: a) el contexto proporciona herramientas para la actividad cognitiva y las prácticas necesarias para solucionar los problemas, y b) el contexto en la interacción social inmediata estructura la actividad cognitiva individual.

Abreu (1998) señala que en los contextos externos a la escuela, el conocimiento se relaciona con la valorización de una práctica específica. El dominio de ciertas formas de conocimiento matemático permite a los individuos participar en determinadas posiciones en la estructura social y crear una identidad social (Abreu, 1995). Estas características del conocimiento se presentan cuando el contexto restringe los tipos de herramientas disponibles en la sociedad. Tales formas se relacionan con las expectativas del conocimiento legítimo dentro de un contexto específico.

En este sentido, el alumno construye nuevamente el significado en un contexto dado, además comprende en términos de los instrumentos culturales e involucra motivos personales, normas sociales, discursos y expectativas.

De este modo, el conocimiento empieza dentro de ciertas comunidades que se localizan en estructuras sociales particulares. Así, el aprendizaje identifica conflictos cuando el orden social excluye formas de conocimiento que son poco valoradas por los grupos dominantes en la sociedad.

Abreu (1998) propone la valorización como una dimensión del aprendizaje de las matemáticas en el contexto sociocultural. Plantea una perspectiva distinta a la aproximación vigotskiana en cuanto que el conocimiento matemático se debe investigar en base a la representación social (Moscovici, 1984) para comprender mejor el contexto sociocultural. Por tanto, cada forma de este conocimiento se relaciona con sistemas representacionales específicos. Abreu señala que la "mediación social simbólica" implica: 1) los niños conocen el valor social de sus herramientas y 2) ellos manifiestan reglas sociales aún sin la presencia de los demás.

Desde este punto de vista se expande el análisis vigotskiano del contexto sociocultural al incluir la categoría de valorización social en un nivel sociogenético (Abreu, 1993). Al mismo tiempo, esta concepción se coloca junto a la tendencia del estudio sobre el desarrollo ontogenético dentro del contexto de una práctica específica.

Entonces, podemos considerar el contexto como un entorno cultural que facilita un conjunto de instrumentos que se emplean en la construcción del conocimiento mediante un proceso activo por parte de los niños. Esta proceso activo se encuentra en una interacción social que legitíma las formas y procedimientos para la construcción de significados dentro de una estructura social en un tiempo y situación específica.

9.2. Cognición y contexto

En esta parte expondremos las explicaciones relevantes en el estudio de la relación entre el conocimiento matemático individual y el contexto: el conocimiento informal, la cognición situada, la microcultura en el aula y la práctica específica. Todas ellas tienen en común los fundamentos de la teoría sobre la actividad histórico-cultural (Vygotski, 1978; Leontiev, 1975). En esta aproximación se comprende el contexto como función de las características dinámicas de los sistemas de actividad y la construcción de significado. El contexto apoya la especificación de la unidad de significado mediante dos procesos: 1) la particularidad del significado y 2) relaciona esta particularidad con la generalidad.

9.2.1. *Conocimiento informal*

Ginsburg (1977) ha entrevistado a los niños en diseños longitudinales y transversales. En las entrevistas se exploraban los procedimientos elaborados por los niños de preescolar y primer curso para resolver tareas aritméticas. Muchos de estos procedimientos involucraban el uso amplio del conteo, el cual facilita a los niños la solución de los problemas que se presentan como algoritmos en la escuela. Los resultados sugieren que los niños confiaban en los aspectos del conocimiento de la composición aditiva para decidir que conjunto contar y si debían contar hacia adelante o hacia atrás.

Los procedimientos aritméticos inventados por los niños muestran que ellos son capaces de construir de manera informal los principios básicos de las matemáticas en formas informales antes de su aprendizaje escolar, además su patrón de rendimiento sobre los problemas verbales depende de la experiencia diaria con las cantidades. Un patrón similar se confirma en la investigación con los participantes que tienen poca o ninguna escolaridad.

Por ejemplo, algunos investigadores informan de los procedimientos desarrollados por los participantes escolares y no escolares en Africa, América Latina y otros países (Resnick, 1986, Saxe, Guberman, y Gearhart, 1987). Los procedimientos empleados se basaban en la composición aditiva. Un estudio con los niños que trabajan como vendedores de la calle en Recife (Brasil) encuentra que convierten en suma los problemas pensados en términos de multiplicación como el siguiente:

Experimentador: "¿Cuánto es de un coco?"

Niño: "35".

Experimentador: "Yo quiero diez. ¿Cuánto es?".

Niño: "(pausa) tres serían 105, con tres más, estos serían 210 (pausa). Yo necesito cuatro más. Esto es... (pausa) 315... yo pienso que son 315", (Carraher, Carraher y Schlieman, 1985, p. 23).

Los procedimientos usados por los niños no escolares revelan una comprensión de la composición aditiva y los principios de conmutatividad, asociatividad y complementariedad. Por el contrario, el razonamiento no es tan prevalente en términos de multiplicación cartesiana o proporción. El desarrollo de tal comprensión parte de las experiencias en el trabajo. No obstante, la práctica escolar actual no se constituye sobre este conocimiento informal, incluso en algunos casos se suprime deliberadamente.

En este sentido, Ginsburg y Seo (1999) plantean que el conocimiento informal y las estrategias informales de los niños se contienen en un nivel implícito que luego los maestros esperan que se expresen en un nivel formal, explícito. Desde esta perspectiva se estudian no sólo los procesos constructivos sino también los aspectos sociales del conocimiento informal.

En cuanto a esto, Ginsburg, Inove y Seo (1999) describen el juego libre en el cual los niños desarrollan y aplican su conocimiento de las matemáticas. Este conocimiento evoluciona con el progreso del juego cotidiano.

En otro estudio, Ginsburg, Pappas y Seo (2001) consideran dos aspectos relevantes del conocimiento informal de las matemáticas. En el primero se plantean las actividades cotidianas, las motivaciones y los intereses en matemáticas. En el segundo se tienen en cuenta la diversidad social y multicultural en el desarrollo temprano. Estos autores examinaban a niños de 4 y 5 años en un entorno natural de juego libre según su nivel socioeconómico. Los resultados indican que en el juego colectivo se desarrollan los conceptos matemáticos.

Por su parte, Schliemann y Carraher (2002) afirman que el pensamiento matemático de los alumnos involucra no sólo el resultado de sus acciones sino también las experiencias cotidianas y las representaciones. Este problema contrasta las ideas matemáticas que se representan de distinta manera fuera de la escuela y dentro de la misma.

Además, Carraher y Schliemann (2002) han entrevistado a los alumnos de quinto curso acerca de los conceptos matemáticos sobre las operaciones aritméticas. Los datos indican que el aprendizaje tiene relación con el conocimiento informal y la experiencia previa. Entonces, una conclusión consiste en precisar que la transferencia del aprendizaje implica analizar la forma en que el conocimiento informal se emplea en la comprensión de los conocimientos formales.

Recientemente, Pappas, Ginsburg y Jiang (2003) examinan las diferencias socioeconómicas en el desarrollo de las habilidades metacognitivas y verbales. En el estudio participaban 12 niños de 4 a 6 años. La tarea consistía en solucionar problemas verbales. en los resultados se encuentra que estas competencias se manifiestan de manera informal antes de la enseñanza formal.

Por tanto, la discrepancia entre los procedimientos formales e informales se considera como un impedimento para la educación de las matemáticas (Anghileri, 1995; Hughes, 1986; Liebeck, 1990; Resnick, 1989; Treffers, 1991).

9.2.2. *Cognición situada*

La investigación de la interacción cognitiva entre el contexto y el conocimiento sobre la solución de los problemas matemáticos se encuentra entre el análisis del contexto social (Carraher et al., 1985; Greeno, 1989; Lave, 1988; Nunes, Schliemann y Carraher, 1993; Saxe, 1991) y el contexto de la historia del problema verbal (Mevarech y Stern 1997)

Brown, Collins y Duguid (1989) argumentan que el conocimiento está situado como producto de la actividad, el contexto y la cultura donde se desarrolla. Es decir, el conocimiento se produce en las situaciones a través de la actividad. El lenguaje depende del contexto y sólo se interpreta dentro de una situación específica. En este sentido, el aprendizaje se concibe como cultural, auténtico, estructurado, aprehendido e interactivo. Entonces, el aprendizaje es progresivo y se establece culturalmente. La aprehensión cognitiva promueve el aprendizaje entre la actividad, las herramientas y la cultura. Por tanto, el aprendizaje dentro y fuera de la escuela se desarrolla mediante la interacción social cooperativa y la construcción social del conocimiento.

Al mismo tiempo, Collins, Brown y Newman (1989) elaboran el concepto de aprehensión cognitiva a través del andamiaje de los procesos de aprendizaje como un medio importante para externalizar la estructura cognitiva.

En este sentido, Davis-Dorsey et al. (1991) demuestran el impacto de los problemas verbales estándar y los problemas reformulados en situaciones específicas en el rendimiento de los alumnos de segundo y quinto curso.

Por su parte, Hembree (1992) distingue varias categorías de las historias en los problemas verbales: concreto vs abstracto, real vs hipotético, familiar vs no familiar, imaginativo vs ordinario y personalizado vs impersonal. Hembree evalúa el rendimiento en cada categoría a través de la técnica de meta-análisis y muestra que los contextos familiares se relacionan con un mejor rendimiento que los contextos no familiares, además, los problemas en los contextos concretos o historias imaginativas se asocian con la magnitud de la historia. Los otros contextos no afectan el rendimiento en matemáticas. También, Hembree encuentra estos descubrimientos en los alumnos de 4º hasta el 12º curso. Por tanto, los contextos reales, significativos y orientados a la meta facilitan sustancialmente la habilidad de los niños para construir una representación mental apropiada (Anand y Ross, 1987; Greeno, 1989; Mayer, 1983; Resnick, 1987, 1989; Schoenfeld, 1985).

Los efectos de las historias contextuales de los problemas verbales no se limitan a ciertos grupos de edad. Stern y Lenderhofer (1992) y Stern (1993) muestran los efectos facilitadores de los contextos significativos y orientados a la meta en la solución de los problemas verbales de suma y resta con los alumnos de preescolar y primer curso.

Tres mecanismos explican los efectos del contexto sobre la cognición. El primero facilita la comprensión semántica. El segundo aumenta el uso de las estrategias particulares. El tercero activa las estructuras del conocimiento para un procesamiento eficiente (Ceci y Roazzi, 1993). Con respecto a este último existen dos clases de estructuras en el dominio de las matemáticas: 1) cuantitativas, que se relacionan con los números y 2) situacionales, que se orientan hacia el entorno del problema (Hall, Kibler, Wenger y Truxaw, 1989). Cuando estas clases están acordes con un contexto significativo ayudan a la construcción de una representación mental apropiada, en caso contrario no se construye tal representación.

Si mucha gente razona mediante las estructuras de conocimiento abstracto que se infieren a partir de la experiencia cotidiana (Cheng y Holyoak, 1985), entonces se supone que los esquemas de razonamiento pragmático aparecen en ciertos contextos. En este caso, el contexto real afecta la solución porque divide la atención entre los factores cruciales de la estructura matemática y la información no relevante del contexto.

van Oers (1998) considera la situación de aprendizaje a partir del conocimiento de dominio específico y la situación concreta de aprendizaje. Los estudios de la cognición situada sintetizan la relatividad de las acciones humanas sobre las situaciones.

Además, Van Oers y Forman (1998) plantean que el contexto es una noción que depende del significado convencional desarrollado individual y culturalmente con respecto a determinadas situaciones específicas. Entonces, el diseño de entornos de aprendizaje cognitivo se basa en reglas, negociaciones, instrumentos, materiales y estrategias de comunicación en una situación particular. Por tanto, el contexto es una situación de elementos personales y culturales. El significado del contexto depende de las metas emergentes y las herramientas disponibles en un determinado momento. La actividad que se manifiesta se relaciona con el significado de la situación el cual se construye a través de la comunicación.

Vlahovic (1999) investiga el rendimiento de los alumnos de primer curso en la solución de los problemas de suma y resta con un contexto familiar y neutral, así como el dibujo de los elementos de la tarea. Los resultados confirman que los problemas de Comparación son más difíciles que los problemas de Combinación. El rendimiento en los problemas de contexto familiar es mayor que con un contexto neutral, aunque esto sólo ocurre en los problemas de Comparación. No existen diferencias en el rendimiento de las tareas con o sin dibujos.

También, Masingila y Silva (2001) argumentan que los alumnos requieren de contextos significativos para el aprendizaje de las matemáticas. Estos autores proponen el proyecto de unir la práctica de las matemáticas dentro y fuera de la escuela a partir de las siguientes ideas:

1. Los alumnos usan el conocimiento matemático en una variedad de situaciones informales.
2. Los alumnos emplean sus conceptos matemáticos desde estas situaciones para apoyar el aprendizaje significativo en el aula.

Por tanto, se requieren las construcciones significativas (socioculturales y escolares), la práctica informal y formal en las matemáticas (contextos significativos y entornos de aprendizaje) y la aplicación de las matemáticas escolares fuera de la escuela.

Recientemente, Moreau y Coquin (2003) intentan especificar la naturaleza de las representaciones que se construyen durante la lectura de un problema verbal. La muestra constaba de 91 alumnos de 10 a 11 años de quinto curso quienes integraban dos grupos según su habilidad en matemáticas. Los problemas verbales incluían la información indispensable para solucionar el problema (información de la solución) y otros tipos de información (información de la situación). En la primera tarea, los participantes seleccionaban la información necesaria para hacer el problema verbal más breve (modelo del problema). En la segunda tarea se les preguntaba sobre la información seleccionada para hacer el problema verbal más fácil de comprender (modelo de la situación). Los datos indican que los participantes distinguen entre la información para la solución y la situación. En conclusión, la comprensión permite la construcción de dos niveles de representación: el modelo del problema y el modelo de la situación.

Por otro lado, Blote, Klein y Beishuizen (2000) afirman que en la mayoría de los países se enseña la suma y resta sin tener en cuenta las situaciones cotidianas. No obstante, los niños usan espontáneamente estrategias cuando solucionan los problemas verbales (Verschaffel y De Corte, 1990) o los problemas contextuales cotidianos (Nunes et al. 1993; Thompson, 1994).

9.2.3. *Microcultura de la clase.*

Cobb y Yackel (1998) comparan dos aproximaciones sobre la cultura de las matemáticas en el aula: la perspectiva constructivista y la aproximación sociocultural. Cobb y Yackel plantean la relación de la teoría y la práctica según la división del trabajo.

Además, Cobb, Perlwitz y Underwood (1998) discuten sobre la investigación basada en el aula y el desarrollo del pensamiento matemático de los niños de 7 y 8 años. Estos autores argumentan: 1) el profesor y los alumnos juntos crean una microcultura en el aula de las matemáticas, 2) las observaciones en el aula informan sobre las matemáticas tradicionales y las que se construyen en comunidad, 3) el aprendizaje de las matemáticas es un proceso de construcción cognitiva individual y un proceso cultural dentro de las prácticas de la sociedad y 4) la instrucción apropiada para las clases de matemáticas se basa en la microcultura del aula.

En este sentido, Cobb (1998) considera que la investigación basada en el aula de las matemáticas debe estudiar la microcultura y el uso de herramientas dentro de un contexto educativo antes que el uso exclusivo de tales herramientas.

Asimismo, Yackel, Cobb y Wood (1998) analizan el rol de la interacción social y simbólica en el desarrollo de la comprensión de las matemáticas dentro de las aulas. Desde una perspectiva se investiga la construcción del algoritmo de suma y resta en el aula de segundo curso. En este sentido se encuentra que el énfasis de los profesores en la solución de la tarea contribuye al desarrollo de los conceptos matemáticos de los alumnos, y la solución de los alumnos incrementa la comprensión de los profesores del pensamiento matemático de los niños.

Bowers, Cobb y McClain (1999) describen el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos de tercer curso en el contexto social de una clase de matemáticas durante 9 semanas. Estos autores consideran que las discusiones con las cuales los alumnos participan en el aula dependen de sus conocimientos como miembros de la comunidad de la clase y su conocimiento individual. Por tanto, este conocimiento matemático evoluciona a partir de la interacción entre la comunidad de la clase y el alumno.

Además, Cobb, Yackel y McClain (2000) presentan una aproximación a la microcultura en el aula de las matemáticas a partir de la comprensión del discurso en el aula y el uso de herramientas en el aprendizaje de las matemáticas.

McClain y Cobb (2001) analizan el rol de los profesores como guías del desarrollo de normas sociales de matemáticas en el aula. En el estudio se contaba con la participación de 18 profesores de primer curso y se observaron 103 clases de matemáticas. El experimento se centraba en la toma de decisiones del profesor respecto a estas normas. Las interacciones de los profesores apoyaron tanto el aprendizaje como la autonomía del conocimiento matemático.

También Cobb, Stephan, McClain y Gravemeijer (2001) describen una metodología para analizar el aprendizaje cooperativo en la clase en términos de la evolución de la práctica social sobre las matemáticas dentro del aula. La idea principal es coordinar una perspectiva social de las prácticas comunitarias con una perspectiva constructivista mientras se participa en tales prácticas.

En este sentido, Cobb (2001) plantea dos aspectos metodológicos. El primero es la relación entre el desarrollo de la teoría cognitiva del aprendizaje y la práctica educativa. El segundo propone una aproximación al aprendizaje del alumno dentro del contexto social del aula. Este planteamiento metodológico se centra en el contexto institucional de la escuela y la diversidad cultural de los alumnos.

Sfard y McClain (2002) estudian las formas en que las herramientas simbólicas propician, median y forman el pensamiento matemático. Por ejemplo, los fragmentos de conversación entre los participantes dentro del aula.

Más tarde, Cobb y McClain (2002) discuten la relevancia de la teoría histórico cultural de la Actividad para los profesores de matemáticas. En esta teoría, el aprendizaje cooperativo de los profesores se refiere a las actividades que construyen para sus alumnos. Asimismo, argumentan que el aprendizaje se distribuye no sólo a través de los grupos sociales sino también mediante las herramientas tecnológicas que se pueden usar por los grupos cooperativos. Entonces, la enseñanza que se basa en estos principios estimula a los alumnos para desarrollar sus herramientas conceptuales.

9.2.4. *Práctica específica como contexto*

La actividad como práctica específica dentro de un contexto ha sido delimitada por Leontiev (1975) quien distingue entre actividad, acción y operación. La acción es el momento de una actividad. La operación es una forma automática de una acción que se relaciona con las características de una situación particular. La actividad son las acciones posibles sobre un objeto orientadas por un motivo. Entonces, la dinámica de las actividades se encuentra en las interrelaciones complejas de motivos, metas, medios, acciones y negociaciones entre los participantes en una actividad. Por tanto, un contexto se construye a partir de las interacciones sociales cuando se define la meta y la actividad necesaria.

En la teoría de la actividad, las acciones humanas, los objetos, las herramientas o símbolos no son significativos por sí mismos sino que su significado se construye a través del rol que representan y los valores que existen en una actividad sociocultural sin dejar de lado la individualidad en cada acción.

De este modo, el contexto se construye socialmente para alguna actividad cultural. Por tanto, el contexto se considera como un contexto sociocultural cuya acción está mediada por herramientas, operaciones y metas que se valoran en la actividad. El agente social realiza un proceso cognitivo para construir el contexto de acuerdo con las condiciones socioculturales imperantes.

La acción del agente social tiene relación con la cuestión del nivel de desarrollo. Esta dimensión es prioritaria en la investigación del contexto sociocultural (Cole, 1992). Entonces, la práctica social específica y el desarrollo ontogenético explican la contextualización del aprendizaje de las matemáticas (Saxe, 1991).

Saxe y Guberman (1998) plantean dos suposiciones acerca de la cognición matemática: a) los niños comprenden las matemáticas mediante la construcción de metas de aprendizaje que emergen en sus actividades y b) las metas individuales se orientan dentro de las prácticas colectivas con lo cual resulta una división social del trabajo, las tareas o las metas. Estos autores señalan que existen varios factores que influyen en la formación de metas matemáticas en actividades colectivas: la comprensión previa, los instrumentos utilizados y la estructura de la actividad de juego.

Saxe, Gearhart y Seltzer (1999) discuten que el aprendizaje se vincula intrínsecamente a las metas en las matemáticas que los alumnos crean en sus actividades. Tales metas se plantean en varias formas mientras los niños adquieren sentido de los materiales de instrucción, las representaciones y las interacciones en el aula. Los niños construyen nueva comprensión de la tarea en la búsqueda de los medios para realizar estas metas

A continuación veremos más ampliamente esta aproximación en función de la practica social específica que se construye mediante la cognición cotidiana, la interacción social y el uso de instrumentos en el ámbito de las matemáticas en el contexto sociocultural.

9.3. Contexto sociocultural

El contexto sociocultural no sólo supone un intercambio de relaciones económicas, sociales y culturales, sino también cognitivas en el transcurso de la vida cotidiana.

9.3.1. *Cognición cotidiana*

Guberman y Greenfield (1991) definen la cognición cotidiana como el modo en que la gente usa su conocimiento y destrezas dentro de un contexto informal. Esta cognición contrasta con el razonamiento abstracto que se manifiesta en las escuelas. Las investigaciones sobre las cogniciones cotidianas se centran en estudiar como las personas solucionan los problemas que encuentran en su vida diaria.

Por su parte, Guberman (1996) investiga la influencia del contexto sociocultural en la adquisición de las matemáticas cotidianas en algunas comunidades marginales de Brasil. Sostiene que el aprendizaje y la solución de los problemas en la escuela difieren del aprendizaje fuera de ella.

En la escuela, los niños trabajan comúnmente solos, sin herramientas y se espera que adquieran y apliquen determinadas reglas a los problemas. Por el contrario, los niños que están fuera de la escuela aprenden y razonan guiados por sus iguales, se interesan en actividades significativas, usan el conocimiento correspondiente a la situación del problema, y tienen en cuenta los objetos, las metas en las actividades y las herramientas culturales disponibles (Gardner, 1991; Guberman y Greenfield, 1991; Nunes et al., 1993; Resnick, 1986, 1987).

El razonamiento cotidiano se ha estudiado más en el dominio de las matemáticas. Los investigadores informan de las relaciones entre las matemáticas de los niños y los adultos en actividades diferentes a las tareas escolares: vender caramelos, hilar tejidos, etc. (Ginsburg, Posner y Russell, 1981; Masingila, 1993, Nunes et al., 1993; Saxe, 1991; Scribner, 1986). Las transacciones comerciales se consideran como un dominio interesante, especialmente para adquirir el conocimiento y las destrezas matemáticas. Los niños y adultos que realizan un intercambio comercial predominante manifiestan una competencia en matemáticas más avanzada que sus iguales con menor involucramiento en el comercio (Posner, 1982; Saxe, 1982, 1991).

Las matemáticas cotidianas que se usan fuera de la escuela -llamadas intuitivas, orales o matemáticas de la calle- se caracterizan por su flexibilidad (Scribner, 1986) y adaptación a una situación específica del contexto social.

También, Carraher, Carraher y Schliemann (1987) proporcionan un estudio sobre las matemáticas cotidianas que se distinguen de las que se enseñan tradicionalmente en la escuela. Los niños brasileños de tercer curso solucionaban el problema 200 - 35 mediante procedimientos escritos semejantes a los que se muestran en la escuela, aunque con ciertas diferencias.

Tal estudio ilustra dos características que diferencian entre las matemáticas cotidianas y las matemáticas escolares. La primera es que las soluciones que se manifiestan en la escuela comienzan con las unidades, después, pasan a las decenas y así sucesivamente hasta los valores mayores. Por el contrario, las matemáticas cotidianas comerciales empiezan con las denominaciones más grandes (centenas) y se mueven hacia los valores pequeños (Nunes et al., 1993). La segunda es que las matemáticas escolares suponen algoritmos que están separados de las cantidades que representan (por ejemplo, los procedimientos de llevar y tomar prestado a través de las columnas), mientras que las matemáticas cotidianas involucran la descomposición de las cantidades en valores menores para formar subtotales que sean fáciles de trabajar, tal como los múltiplos de 10 (Reed y Lave, 1979; Resnick, 1987). En el problema citado el niño simplifica la resta al descomponer 35 en 30 y 5, y entonces resta los 30 de los 200. Resnick (1986) propone que la comprensión intuitiva de la composición aditiva es una característica central de las matemáticas cotidianas.

La investigación sobre las practicas culturales encuentra que los niños construyen el conocimiento matemático cuando buscan comprender los problemas que surgen en sus actividades cotidianas (Laboratory of Comparative Human Cognition, 1983; Rogoff, 1990; Saxe, 1991). En las actividades -dentro y fuera de la escuela- se utilizan comúnmente las herramientas culturales (sistemas numéricos, calculadoras) organizadas socialmente para apoyar distintos grados de participación de las habilidades infantiles. El desarrollo se indica por un dominio eficiente de estas herramientas y una participación más independiente en las actividades significativas de la comunidad (Guberman, 1992; Lave, 1991; Lave y Wenger, 1991; Rogoff, 1990).

Aunque los estudios socioculturales se centran en el conocimiento matemático de los niños y los adultos como un componente necesario para el sustento de su vida (vendedores), poco se conoce acerca de la comprensión de estos niños, así como de los que usan el dinero con menor relevancia. La relación entre las actividades cotidianas de los niños y el rendimiento cognitivo supone que los cambios en las actividades infantiles influyen en su competencia matemática (Rogoff, Mistry, Goncu y Mosier, 1993; Saxe, 1991; Weisner, 1984).

Asimismo, Khan (1999) compara dos grupos de niños vendedores de 8 a 16 años con un grupo de niños escolares respecto a la comprensión del sistema numérico y los problemas verbales. El análisis revela que los vendedores tienen mejor comprensión de los principios matemáticos y las estrategias que los niños escolares quienes se guían por los procedimientos y algoritmos aprendidos en la escuela. Estas diferencias en el rendimiento se explican por el análisis del contexto de la actividad de venta y la actividad escolar a partir de la participación de los niños en cada contexto. Por tanto, la comprensión de las matemáticas depende de la práctica específica en los contextos histórico-culturales.

9.3.2. *Interacción social en la cognición matemática cotidiana*

Esta interacción se expresa entre el contexto sociocultural y el conocimiento matemático informal. Aunque rara vez, los niños en distintas culturas reciben instrucción formal sobre las matemáticas del dinero, sin embargo, aprenden a usarlo aparentemente con poca dificultad (Carraher y Schliemann, 1988). Las líneas de investigación en este sentido son: 1) el desarrollo de la comprensión matemática mediada por los cambios en las actividades organizadas socialmente para los niños, y 2) la interacción entre iguales.

En cuanto a la primera, Saxe et al. (1987) investigan sobre la solución de problemas de los niños en sus transacciones comerciales como consecuencia de las tareas asignadas. En este estudio, los padres describían las responsabilidades que asignan a sus hijos cuando los envían a realizar compras. Los resultados indican que los padres ajustan la complejidad del juego con números proporcionando una asistencia menos dirigida y metas más complejas cuando sus hijos adquieren las destrezas matemáticas más evolucionadas. Incluso, el aprendizaje de los niños a menudo se regula por los padres en las actividades distantes de la interacción verbal. Las transacciones comerciales de los niños requieren una competencia aritmética menor, pero las responsabilidades de los niños mayores suponen una aritmética compleja. Sin embargo, la tarea del uso de la moneda revela que muchos niños pequeños no identifican los valores de la moneda que usan regularmente para realizar las compras.

Los cambios relacionados con la edad en las responsabilidades que los padres asignan a los niños disminuyen los ajustes hechos en sus interacciones cara-a-cara (Greenfield, 1984; Saxe et al., 1987; Wertsch, 1979). El ajuste de las tareas permite a los niños de varias edades y distintas habilidades participar en una actividad cultural compleja. Los planteamientos sobre la "participación periférica legitima" (Lave, 1991; Laver y Wenger, 1991), la "participación guiada" (Rogoff, 1990; Rogoff et al., 1993) y la "zona de desarrollo próximo" (Vygotski, 1978; Wertsch, 1984) indican que los incrementos graduales en la complejidad de las actividades apoyan el aprendizaje y el desarrollo de los niños.

Según la perspectiva sociohistórica, los niños se desarrollan y aprenden mientras participan con otros en las actividades significativas de sus comunidades como son las transacciones comerciales cotidianas (Cole, 1990; Lave y Wenger, 1991; Rogoff et al., 1993). También, en otros dominios se informa sobre la complejidad de la tarea como una función de la interacción social de los niños (Greenfield, 1984; Rogoff, 1990; Wertsch, 1979; Wood, Bruner y Ross, 1976). Además, los padres median en el desarrollo de los niños a través de las actividades y contextos que disponen durante sus interacciones con ellos (Cole, 1990; Whiting y Whiting, 1975). La interacción en el aula se explica como una instrucción con andamiaje (Turner et al., 1998; Hogan y Pressley, 1997; Langer, 1984; Palincsar, 1986; Palincsar y Brown, 1984)

Por su parte, McClain (2002a) analiza la interacción comunicativa entre los profesores y los alumnos sobre su comprensión de las discusiones en la clase. Desde esta perspectiva se investigan los procesos de toma de decisiones del profesor y como influyen en las oportunidades de aprendizaje, así como el rol de las herramientas en la comunicación dentro del aula. Así, las interacciones en la enseñanza se explican según la comprensión del profesor de los argumentos dados por los alumnos.

En este sentido, McClain (2002b) realiza un experimento sobre la enseñanza en el aula con una clase de 29 alumnos de séptimo curso. El estudio se centraba en el razonamiento de los alumnos acerca de la estadística. Los participantes trabajaban en pareja o pequeños grupos cooperativos. La tarea era elaborar argumentos respecto a los procedimientos de solución de los problemas que se presentaban. Los datos indican que los alumnos y el profesor discutían en clase los resultados de los argumentos de los alumnos.

Cobb (2002) discute los datos presentados por McClain (2002b) señalando que la práctica en matemáticas tiene tres componentes normativos: 1) propósito normativo, 2) estándares normativos de argumentación y 3) formas normativas de razonamiento mediante herramientas culturales. Entonces, Cobb considera que la noción de cambio significativo explica el aprendizaje que se describe en términos semióticos.

También, Lampert (2002) comenta el análisis de McClain (2002b) al afirmar que los alumnos interactúan con sus profesores, iguales y herramientas culturales. Además, la indagación, la discusión, el pensamiento, la lectura y la evaluación se consideran como mecanismos para el aprendizaje en el aula de matemáticas.

Asimismo, Schliemann (2002) plantea que la comprensión de los mediadores sociales y la interacción social promueve el aprendizaje significativo al mismo tiempo que se necesita tener en cuenta la aproximación constructivista. Schliemann afirma que el análisis descrito por McClain (2002b) considera el desarrollo del alumno según el uso de herramientas, la discusión de los resultados y la interacción con sus profesores y sus iguales. Por tanto, la comprensión de los alumnos de las relaciones matemáticas discutidas en el aula resulta del significado que se atribuye a las características de las preguntas de los profesores y la interacción entre iguales.

Con relación a la segunda, Nunes, Light y Mason (1995) encuentran tres tipos de interacción entre los niños: a) establecimiento de los procedimientos interpersonales confiables, b) comunicación de los resultados de las acciones y c) conclusión a través de inferencias. Durante el primero, los errores en la negociación se consideran errores sociales (73%) y en el tercer tipo son lógicos (27%). Las comunicaciones del segundo tipo no son una fuente de error.

Asimismo, Inagaki, Hatano y Morita (1998) consideran que las interacciones entre iguales ayudan a comprender mejor los problemas. En este caso, los profesores invitaban a otros alumnos a examinar la respuesta dada por un determinado alumno y, entonces, se organizaba una discusión general entre toda la clase para asimilar respuestas similares o contratar ideas opuestas. En este sentido se generaba una comunidad de aprendizaje organizada por el profesor. En el análisis de la interacción entre iguales se encuentra que existen alumnos participantes, pero también hay niños que buscan que otros discutan por ellos de acuerdo con su posición en el grupo. Entonces, algunos significados se negocian entre iguales de manera colectiva que luego se asimilan de forma individual con lo cual se construye la comprensión personal.

También, Davenport y Howe (1999) estudian la interacción entre iguales durante la solución de problemas verbales a través de dos condiciones en un diseño pretest-intervención-postest. En la primera, los niños solucionaban los problemas de suma y resta de manera cooperativa, mientras que en la segunda los resolvían en forma tradicional en el aula. Los participantes eran 77 niños a quienes se dividieron en dos grupos: control y experimental. Los niños del grupo experimental trabajaban cooperativamente usando guías para solucionar los problemas, además, enseñaban su estrategia a sus iguales.

Los resultados indican un efecto principal del cambio de estrategia y una interacción entre el género y la condición. En el análisis de las interacciones se encuentra que los niños con promedio bajo mejoran su comprensión de la estrategia cuando escuchan a sus iguales. Estos resultados tienen implicaciones para la organización de grupos cooperativos en el aula.

9.3.3. *Instrumento para la cognición matemática cotidiana*

Aunque el intercambio comercial es un contexto común para aprender y emplear las matemáticas cotidianas poco se conoce acerca de la comprensión de los niños sobre el uso de la moneda (un medio de intercambio comercial) para resolver los problemas matemáticos que emergen en sus transacciones cotidianas. La incorporación de los instrumentos culturales (la moneda) dentro de la solución de problemas es un aspecto central de las explicaciones histórico culturales del aprendizaje y el desarrollo (Cole, 1990; Saxe, 1991; Vygotski, 1978).

En este sentido, Saxe (1991) encuentra que las estrategias con moneda proporcionan evidencia del paso de las manipulaciones externas a las representaciones internas de la cantidad. Los niños que identifican la moneda en una tarea visual emplean las estrategias que suponen la manipulación física ya que derivan de procesos diferentes. Los niños de 6 a 8 años demuestran poca habilidad para usar apropiadamente la moneda. Por el contrario, los niños de 12 a 14 años logran una respuesta correcta al descomponer y reagrupar las representaciones internas de los valores de la moneda. Estos descubrimientos confirman el planteamiento de Vygotski (1978) quien considera las herramientas culturales como ayudas externas efectivas para resolver los problemas durante una etapa mediadora en la adquisición de las destrezas.

En el estudio de Saxe (1991), 105 niños de Brasil de 6 a 14 años solucionaban problemas aritméticos similares a los que se presentaban en sus transacciones comerciales. La habilidad para usar el dinero se valoró presentando tareas con y sin dinero. El desarrollo cognitivo se facilitó por los cambios graduales en la complejidad de las actividades que sus padres organizaron. La entrevista sobre las transacciones comerciales se centró en los problemas que los niños resolvían según las responsabilidades que sus padres asignaban cuando los enviaban a realizar compras. Los padres describían las responsabilidades que asignaban a sus hijos, incluyendo los artículos que debían comprar, cuanto dinero daban y si comunicaban a los niños cuanto cambio debían recibir.

Los problemas con y sin moneda consistían de los mismos valores y operaciones aritméticas, pero diferían los artículos de compra. En tres problemas de cada tarea se preguntó a los niños sobre el costo de la compra de varios artículos. En los otros dos problemas se les interrogaba sobre la comprensión del cambio que recibirían en una transacción determinada.

Las respuestas se categorizaban en los siguientes tipos de estrategias: 1) estrategias de cálculo escrito, en las cuales los niños escribían los números antes de dar una respuesta, 2) estrategias sin moneda, en las cuales los niños no empleaban papel y lápiz y daban una respuesta sin usar alguna moneda ni referir los valores monetarios y 3) estrategias de moneda que se usaban cuando los niños manipulaban físicamente la moneda antes de responder o referían los valores monetarios durante las soluciones o explicaciones de la respuesta.

Esta última estrategia se empleaba por la mayoría de los niños en todas las edades. Sin embargo, los niños mayores recurrían menos a esta estrategia, lo cual sugiere que tienen disponible un repertorio de estrategias mayor que los niños pequeños. Además, los resultados indican que la descomposición y el reagrupamiento aritmético se construyen sobre el tiempo. Es decir, la transición de las estrategias de moneda a las estrategias mentales es un proceso evolutivo que sugiere la descomposición mental y el reagrupamiento en los sistemas de representación concreta tal como la moneda (Lawler, 1981).

También, Martins-Mourao y Cowan (1998) analizan la solución de problemas verbales mediante el empleo de monedas en tareas de compra. En el estudio participaban 152 niños entre 4 y 7 años quienes debían resolver problemas verbales, tareas de compra y realizar estrategias de conteo. Los datos indican que los niños tienen un rendimiento en las tareas de compra mejor que en los problemas verbales. Sin embargo, las estrategias con moneda superaban a las estrategias de conteo en tales tareas.

9.4. Contexto urbano vs. Contexto rural

Saxe (1991) contrasta las estrategias de los niños vendedores de la calle con los niños no vendedores tanto de un contexto urbano como rural. Este análisis se divide en dos partes teniendo en cuenta la práctica específica y la evolución del conocimiento informal.

9.4.1.*Cognición matemática y práctica específica.*

En este estudio de Saxe (1991) los niños urbanos no vendedores considerados como compradores tenían el mismo entorno comercial que los niños vendedores. Los niños rurales no vendedores usaban el mismo sistema de moneda, pero su nivel de exposición a las transacciones comerciales se consideraba más limitado que el nivel de sus iguales urbanos. El contraste entre los grupos revela la distinción de las matemáticas de los niños dedicados a la venta de caramelos.

Los participantes vendedores de caramelos eran 23 niños recluidos en las calles de Recife (Brasil) mientras vendían caramelos, mandarinas o trigo inflado y no asistían a la escuela. A estos niños se les entrevistó para determinar su experiencia en la venta de caramelos. Los niños no vendedores urbanos eran 20 alumnos de primero y segundo curso de Educación Primaria. A ellos se les interrogó para conocer si tenían alguna experiencia de venta, y sólo los niños que no la tenían participaban en el estudio. Los no vendedores rurales eran 17 niños seleccionados de ciudades pequeñas ubicadas a una distancia de más de 100 km de Recife, quienes no habían progresado del segundo curso en la escuela. El rango de edad de todos los niños estaba entre 10 y 12 años.

Tres tareas se pasaron a los participantes: identificar los billetes, comparar la moneda e intercambio. En la primera se preguntaba a los participantes sobre el valor de 12 billetes bajo tres condiciones: a) billetes comunes, b) billetes con los números ocultos y c) fotocopias de los números. En la segunda se presentaban 14 pares de monedas a los niños para decidir cual era más grande (billetes de 200 y 1000 cruzeiros) y cuantas unidades menores eran equivalentes a una unidad mayor (cinco billetes de $200 Cr. equivalen a un billete de $1000 Cr.). En la tercera se presentaba un billete de denominación grande ($5000 Cr) y un problema de compra de mercancías con un valor particular ($2300 Cr).

En base a los resultados, Saxe (1991) concluye que la representación de los valores grandes es una función cognitiva tanto de los niños vendedores de caramelos como de los no vendedores. Los conocimientos empleados por estos niños son diferentes de los que se enseñan en la escuela. Ambos grupos de niños desarrollan la habilidad para identificar billetes de valor mayor según las propiedades figurativas. Además, todos los niños muestran el conocimiento de las relaciones ordinales entre las unidades de la moneda y las relaciones multiplicativas entre estas unidades, aunque los niños urbanos manifiestan un conocimiento mayor que los niños rurales.

Finalmente, los vendedores demuestran un conocimiento de la estructura del sistema monetario mayor que los no vendedores urbanos. En otras palabras, los vendedores muestran un conocimiento más especializado que los no vendedores urbanos y éstos manifiestan un rendimiento mayor que los no vendedores rurales.

A medida que se incrementa la dificultad de los problemas de suma y resta, los vendedores elaboran soluciones más sofisticadas que ambos grupos de no vendedores. Todos los grupos muestran un rendimiento moderado o alto en los problemas de suma más fáciles, mientras que los vendedores obtienen un rendimiento superior a los no vendedores en los problemas más difíciles.

Para la resta, el rendimiento de los vendedores no difiere de los no vendedores urbanos y ambos grupos tienen un mejor rendimiento que los no vendedores rurales en los problemas más fáciles. Sin embargo, los vendedores tienen un rendimiento más alto que los no vendedores urbanos en los problemas de resta más difíciles.

Además, Saxe y Gearhart (1990) han comparado a los niños rurales que tejen sombreros de paja con sus iguales urbanos que venden caramelos con respecto a la habilidad espacial y el conocimiento matemático. Para esto, varias tareas topológicas se pasaron a ambos grupos. Los resultados son consistentes con la idea de que los niños estructuran y especializan formas cognitivas según las metas que surgen en la práctica. Los descubrimientos muestran que los niños rurales tienen una habilidad espacial mayor que sus iguales urbanos.

No obstante, los niños urbanos desarrollan formas cognitivas de acuerdo a su práctica económica de ventas, mientras que los niños rurales desarrollan un conocimiento específico mayor en los problemas espaciales que se presentan en su práctica de tejer. Estas diferencias tienen relevancia para el aprendizaje a consecuencia de sus prácticas culturales.

Posteriormente, Guberman y Saxe (2000) examinan la división del trabajo en la solución de problemas colectivos durante un juego educativo infantil. En este estudio participaban 94 alumnos de tercero y cuarto curso quienes formaron cuatro grupos y jugaron en parejas o grupo dos veces a la semana durante dos meses. Posteriormente, un postest evaluaba el conocimiento matemático relacionado con el juego. En los resultados se encuentra que las actividades orientadas a la meta constituyeron el juego colectivo. Es decir, la participación colectiva apoya el cumplimiento de las metas individuales. Por tanto, Guberman y Saxe concluyen de acuerdo con la teoría de la Actividad de Leontiev (1981) que cuando el trabajo se divide los niños se orientan hacia metas diferentes.

Recientemente, Saxe (2002) presenta una aproximación del desarrollo cultural para el análisis de las matemáticas de los niños en prácticas colectivas. Esta aproximación se propone con dos planteamientos. En el primero emergen las metas sobre las matemáticas durante las prácticas colectivas teniendo en cuenta el empleo de herramientas culturales. El segundo se centra en las actividades orientadas a la meta. De esta manera, Saxe plantea tres niveles de análisis:

1. Un análisis microgenético de los procesos por los cuales los niños estructuran las herramientas culturales para funciones específicas orientadas a metas del conocimiento en matemáticas.
2. Un análisis sociogenético respecto a las formas matemáticas y las funciones asociadas dentro de una comunidad de individuos.
3. Un análisis ontogenético de la interacción entre las formas de conocimiento que los niños usan y las funciones que estas tienen en el curso del desarrollo infantil.

El análisis en el aula muestra la comprensión de la interacción de los procesos de desarrollo individual y la influencia social en las matemáticas de los niños.

9.4.2. ***Evolución de la cognición matemática informal***

Saxe (1991) analiza los cambios evolutivos presentados por los niños vendedores urbanos y rurales en la solución de los problemas. La cuestión principal era estudiar el desarrollo del conocimiento matemático informal dentro del contexto urbano y rural. Saxe concluye que los niños pequeños usan las convenciones de la práctica social para elaborar un conocimiento conceptual más diferenciado que un niño sin tal práctica. Por ejemplo, algunos niños urbanos vendedores son más capaces de modificar el precio convencional que los niños rurales no vendedores quienes carecen del conocimiento de tales modificaciones.

En el mismo estudio, Saxe (1991) señala que los motivos principales de los niños que aprenden las matemáticas en la escuela difieren de sus iguales que venden caramelos en la calle. En la escuela, las matemáticas son objeto de estudio sin un fin pragmático. El niño en la escuela se esfuerza en la prueba, busca la aprobación del maestro o comprende por sí mismo las propiedades de las matemáticas para solucionar los problemas. Los errores tienen un significado diferente en ambos contextos. Los niños vendedores de caramelos relacionan los errores con la pérdida de ingresos significativos, mientras que el error en el aula se evalúa con referencia a las normas.

Las interacciones sociales y los instrumentos empleados se distinguen entre el conocimiento matemático que surge en la venta de caramelos y el conocimiento obtenido en la escuela.

Por una parte, las interacciones en la venta de caramelos son bastante iguales en un contexto entre iguales donde no se requiere enseñar la solución de los problemas con una explicación extensa. Estas interacciones aseguran a los vendedores continuar con su actividad. En este caso, el niño vendedor tiene la última palabra para determinar la forma apropiada de vender, él mismo es quien obtiene las pérdidas o ganancias de sus esfuerzos de venta y eso es una pérdida vinculada intrínsecamente a sus matemáticas.

Por otra, los niños dentro de la escuela participan en las interacciones con los profesores organizadas asimétricamente en las cuales se transmite un curriculum estructurado mediante contenidos desconocidos por el niño. Estas interacciones no se organizan en base a una meta pragmática, sino que se orientan para enseñar o proporcionar al niño oportunidades de aprendizaje con pocos propósitos intrínsecos. Por tanto, el curriculum escolar se basa en las interacciones instruccionales como resultado de una historia cultural (Damerow, 1986; Menninger, 1969; Nickerson, 1988).

Por tanto, las evidencias de que los niños usan el conocimiento informal para resolver los problemas de matemáticas en la escuela surgen del análisis sobre los procedimientos de solución de los problemas verbales. Los niños en los primeros cursos emplean estrategias (inventadas o reconstruidas) que no se enseñan en la escuela. Estas estrategias informales involucran los procedimientos de conteo o reagrupamiento de valores similares a las estrategias empleadas por los niños vendedores de caramelos (Brenner, 1985; Carraher et al., 1985, 1987, 1988; Fuson, 1988; Pettito, 1979; Posner, 1982).

10. Programas de Intervención en la Educación de las Matemáticas

En esta sección presentaremos las propuestas de los programas de investigación que abordan el problema de la enseñanza en las matemáticas como un factor relevante para el desarrollo del pensamiento matemático infantil, en general, y un contexto educativo en el proceso de la solución de los problemas verbales de suma y resta, en particular.

10.1. Implicaciones educativas de la investigación sobre las matemáticas

La década de 1950 a 1960 se caracteriza en los Estados Unidos por el apoyo amplio a la investigación sobre el aprendizaje y la instrucción de las matemáticas. Los años 70, en ese país, por una parte, estuvieron marcados por las aproximaciones incipientes respecto a la instrucción de las matemáticas (aprendizaje por descubrimiento, métodos heurísticos de solución de problemas) carentes de bases teóricas y empíricas. Por otra, las puntuaciones en los test de matemáticas nacionales indicaban un rendimiento pobre de los alumnos durante este período.

En cuanto a esto, Hembree (1992) señala que la problemática del fracaso escolar en matemáticas se reconoce cuando el Consejo Nacional de Supervisores de Matemáticas (*National Council of Supervisors of Mathematics*, 1977) en los Estados Unidos declara la solución de problemas entre las diez prioridades esenciales. Tres años después, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (*National Council of Teachers of Mathematics,* NCTM) elige la solución de problemas en su agenda (NCTM, 1980), la cual se extiende con la propuesta sobre los estándares (*Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*) (NCTM, 1989).

A partir de entonces, el movimiento de reforma impulsa un cambio paradigmático de una instrucción reduccionista basada en las destrezas a una epistemología constructivista que abarca el aprendizaje activo y significativo de los alumnos en la solución de problemas, el cual se facilita por la guía de los profesores y sus preguntas.

Desde hace una década, en los Estados Unidos, los profesores de matemáticas se han convocado para relacionar la comprensión y las competencias de las matemáticas en el curriculum educativo del nivel elemental y secundario (National Council of Teachers of Mathematics, 1989, 2000).

En este sentido, Carpenter, Empson y Jacobs (2000) afirman que en los 10 ó 5 últimos años se investiga como aplicar la teoría y los resultados de la investigación cognitiva para cambiar la instrucción de las matemáticas. Esta línea de investigación se aborda con tres perspectivas. La primera se representa por tres programas: 1) la instrucción guiada cognitivamente (Carpenter y Fennema, 1992; Carpenter, Fennema y Franke, 1996; Fennema et al., 1996), 2) las matemáticas realistas (Streefland, 1991a) y 3) el programa evolutivo (Bermejo y otros, 2002). Estos programas se basan en la investigación que relaciona el desarrollo del pensamiento matemático infantil con las estructuras semánticas de los problemas. La segunda es el modelo cognitivo del aprendizaje (Collins, Brown y Newman, 1989) representado por la investigación de Schoenfeld (1985, 1989) sobre la enseñanza heurística y la resolución de los problemas por los expertos. La tercera se representa por el modelo de la instrucción anclada expuesto en la serie Aventuras de Jasper (Grupo de Cognición y Tecnología de Vanderbilt, 1994) y el construccionismo a través del diseño de software instruccional (Harel, 1991; Harel y Papert, 1991a).

10.2. Programa Instrucción Guiada Cognitivamente (*Cognitively Guided Instruction*)

Carpenter y colaboradores (Carpenter et al., 1989; Carpenter y Peterson, 1988; Carpenter, Fennema, Peterson y Carey, 1988; Fennema, Carpenter y Lamon, 1991; Peterson, Carpenter y Fennema, 1989) presentan un proyecto de instrucción-intervención centrado en el profesor.

El programa se conoce ampliamente como Instrucción Guiada Cognitivamente (CGI). Para elaborar este modelo se conjuntaron una serie de investigaciones previas sobre el conocimiento y la experiencia de los profesores así como la comprensión del pensamiento matemático infantil.

10.2.1. *Conocimiento de los profesores*

En cuanto a esto, Carpenter et al. (1988) estudian la comprensión de los profesores sobre cómo los niños piensan acerca de las matemáticas y su pensamiento respecto a los alumnos.

Las preguntas de la investigación eran: 1) ¿Qué saben los profesores acerca de los tipos de problemas de suma y resta?, 2) ¿Qué conocen los profesores sobre las estrategias que los niños emplean para resolver los problemas?, 3) ¿Cómo predicen el éxito de sus alumnos para solucionar problemas diferentes y de qué manera identifican las estrategias infantiles? y 4) ¿Cuál es la relación entre las medidas pedagógicas de los profesores y el rendimiento de sus estudiantes?. En el estudio participaban 40 profesores de primer curso en 27 escuelas de Madison, Wisconsin.

Los resultados indican que la mayoría de los profesores distinguía los tipos de problemas. Aunque muchos de ellos se centraban en la sintaxis (por ejemplo, las palabras claves) antes que en la estructura semántica de los problemas. Asimismo, los profesores fracasaban para reconocer las diferencias entre los problemas Juntar con la incógnita en el conjunto de cambio y los problemas Separar con la incógnita al inicio. Los profesores sobrestimaban la dificultad de los problemas Juntar con el conjunto de cambio desconocido.

Los profesores tenían éxito en identificar las estrategias observadas y dificultad en considerar cómo las estrategias de conteo se modifican por otros problemas.

Los profesores predecían el rendimiento de sus alumnos para los problemas Unir con la incógnita en el resultado y los problemas Separar con la incógnita al final más que para los otros problemas. Los profesores sobrestimaban el uso del modelado directo y el recuerdo de hechos numéricos y subestimaban el empleo de las estrategias de conteo. También desconocían que muchos alumnos no sólo recurren a una estrategia (Carpenter y Moser, 1984). En conclusión, este estudio indica que los profesores no tienen tradicionalmente un conocimiento suficiente para planear la instrucción de acuerdo con la evaluación de los procesos que los alumnos construyen para resolver los problemas.

En otro estudio, Peterson et al. (1989) examinan la relación de la comprensión de los profesores sobre su conocimiento de los alumnos con la solución de los problemas aritméticos de los niños.

Los participantes eran 20 profesores de primer curso que tenían acceso al conocimiento basado en la investigación sobre el aprendizaje de las matemáticas de los niños a través de un programa de entrenamiento en cuatro semanas. Varias observaciones se realizaron en el aula respecto a la actividad de los profesores durante 16 días. Al final del ciclo escolar, los profesores completaban una serie de entrevistas y cuestionarios sobre sus conocimientos y creencias, mientras que sus alumnos resolvían un test de rendimiento.

En los resultados se encuentra una correlación entre la comprensión de los profesores sobre su conocimiento de los alumnos y el rendimiento en la solución de los problemas. Los profesores más expertos preguntaban a sus alumnos acerca de los procesos de solución y escuchaban sus respuestas. Los profesores menos expertos explicaban los procesos de solución a sus alumnos y sólo observaban las respuestas que daban los escolares. Un análisis de caso por cada tipo de profesor extiende estas conclusiones.

a) *Perfil del profesor menos experto*

En el estudio de caso del profesor menos experto se encuentran las siguientes creencias: 1) los niños reciben el conocimiento, 2) las matemáticas son formales, 3) la instrucción se organiza en base al conocimiento que tienen los profesores antes que en las ideas de los niños y 4) las destrezas básicas son prerequisitos para la enseñanza.

Con respecto a la descripción del conocimiento inicial de sus alumnos, este profesor es escéptico sobre el conocimiento infantil previo y atiende más a la carencia de los conocimientos. Tal profesor explica en el aula los procesos para solucionar un problema y revisa las respuestas que dan los niños, sólo evalúa el aprendizaje al principio y al final del ciclo escolar y observa la conducta de los alumnos. Además, este profesor propicia una interacción con el grupo escolar y sólo interviene individualmente para leer los problemas a los niños que carecen de las habilidades de lectura. Posteriormente a la instrucción en los problemas verbales, el profesor menos experto sólo se dirigió a estimular el uso de las estrategias.

b) *Perfil del profesor más experto*

Otro estudio de caso se refiere al profesor más experto que sostiene creencias diferentes, tales como: 1) los niños construyen su propio conocimiento matemático, 2) el desarrollo de las ideas de los niños proporciona las bases para secuenciar la instrucción, 3) la enseñanza de las matemáticas debería facilitar la construcción del conocimiento de los niños y 4) las destrezas, la comprensión y la solución de los problemas se deben enseñar como componentes interrelacionados del aprendizaje de las matemáticas.

En cuanto a la descripción del conocimiento inicial de sus alumnos, este profesor supone que los niños llegan a la escuela con un conocimiento previo al grado de saber que son capaces de dominar la solución de los problemas verbales con la incógnita en el resultado. Este profesor se orienta en el aula a preguntar y escuchar a sus alumnos sobre como solucionan los problemas, valora el aprendizaje de manera continua y usa técnicas más informales adaptadas a los procesos cognitivos de los alumnos. La interacción con los alumnos es de manera individual según el nivel de adquisición mostrado en la clase.

Después de la instrucción sobre los problemas verbales, el profesor más experto realizaba tareas adicionales: a) modelaba los problemas a los niños, b) promocionaba el uso de una variedad de estrategias, c) creación de problemas verbales por los alumnos, los cuales se comunican a sus iguales y d) relacionaba la competencia conceptual con el procedimiento de solución.

10.2.2. ***Aula de Instrucción Guiada Cognitivamente (CGI)***

Carpenter, Fennema, Peterson, Chang y Loef (1989) han implementado un programa instruccional basado en los principios constructivistas sobre el pensamiento matemático de los niños en una aula de enseñanza. En este programa participaban 40 profesores de primer curso de primaria. La mitad de los profesores se asignó al grupo control y la otra mitad al grupo experimental. El segundo grupo recibía instrucción en el programa denominado Instrucción Guiada Cognitivamente (CGI).

Las bases teóricas del programa CGI se enmarcan en cuatro principios. El primero plantea que la instrucción desarrolla las relaciones entre las destrezas y la solución de los problemas. El segundo postula una instrucción organizada que facilite la construcción activa de los alumnos y la comprensión de su conocimiento. El tercero afirma que cada alumno es capaz de relacionar su conocimiento previo con los conceptos, problemas o destrezas que se aprenden. El cuarto señala que la instrucción basada en el conocimiento del alumno requiere una evaluación continua.

Los descubrimientos han sido consistentes con los principios del programa a partir de dos cuestiones centrales: la solución de problemas y la evaluación del pensamiento de los alumnos.

En cuanto a la primera, los profesores CGI estaban de acuerdo más que los profesores control con la creencia de que las destrezas se emplean en la comprensión y la solución de problemas. Los profesores CGI proporcionaban más tiempo a la interacción con los alumnos que los maestros del grupo control y los profesores CGI permitían a los alumnos usar diversas estrategias, mientras que las clases control se dedicaban a trabajar más los problemas de manera aislada. Con respecto a la segunda cuestión el grupo CGI consideraba importante evaluar continuamente el pensamiento de los niños.

Además, Peterson, Fennema, Carpenter y Loef (1989) realizan un estudio sobre las creencias de los profesores con respecto al conocimiento matemático de sus alumnos. Los profesores de los alumnos que solucionan correctamente los problemas de suma y resta tienden a estar de acuerdo con una perspectiva cognitiva, es decir consideran que la instrucción se construye sobre el conocimiento desarrollado por los niños y que los profesores deben ayudar a los alumnos en construir su conocimiento matemático antes que asimilarlo pasivamente.

Posteriormente, Fennema et al. (1996) estudian las creencias de 21 profesores CGI con un diseño longitudinal durante cuatro años. Los instrumentos de medición fueron las observaciones en el aula, las entrevistas, una escala de creencias CGI y las notas de campo en situaciones de interacción informal.

En general, los resultados indican que todos los profesores modifican sus creencias iniciales situándose próximos a los principios del programa CGI. Estos profesores manifiestan que los alumnos pueden resolver los problemas sin recibir una instrucción directa. Por tanto, su tarea consiste en proporcionar un entorno que facilite el desarrollo del conocimiento de los niños, la experiencia de resolución de problemas y la explicación individual de los procedimientos.

En tal estudio, cuatro niveles de creencias se distinguieron. El nivel 1 representa la visión tradicional de la enseñanza. El nivel 2 cuestiona la suposición que el alumno requiera demostraciones previas para solucionar adecuadamente las tareas. El nivel 3 sitúa la discusión sobre los distintos métodos de solución para un mejor aprendizaje de las matemáticas. El nivel 4 hace explícita la capacidad de los niños para resolver los problemas sin instrucción directa y que sirve de base para el curriculum de las matemáticas.

Por otra, Fennema, Sowder y Carpenter (1999) examinan como las clases CGI se desarrollan para facilitar el aprendizaje con comprensión. Entonces, el desarrollo profesional de los profesores se explora para apoyar su comprensión de la instrucción y el pensamiento del alumno.

En este sentido, Carpenter y Lehrer (1999) argumentan que las clases de matemáticas necesitan restructurarse para que se aprenda con comprensión. Entonces, estos autores describen como los alumnos construyen el significado de los conceptos matemáticos y la manera en que las clases apoyan este aprendizaje. Para la comprensión de las matemáticas se proponen cinco formas: 1) relaciones constructivas, 2) aplicación y generalización del conocimiento matemático, 3) reflexión acerca de las experiencias, 4) articulación del conocimiento previo y 5) construcción del conocimiento matemático como propio.

Además, Carpenter y Lehrer (1999) sostienen que los alumnos perciben su conocimiento como propio y creen que pueden construirlo a través de su propia actividad. También, otros estudios afirman la necesidad de investigar la comprensión del pensamiento del niño (Barnett y Sather, 1992; Brown y Campione, 1996; Dana, Campbell y Lunetta, 1997; Lehrer y Schauble, 1998; Schifter, 1997; Schifter y Fosnot, 1993).

Asimismo, Carpenter et al. (1999) plantean cuatro programas (Instrucción Guiada Cognitivamente, Instrucción Basada Conceptualmente, Pensamiento Estructurado con Base-Diez y Proyecto de Matemáticas Centrado en el Problema) sobre el aprendizaje de la suma y la resta para el desarrollo de la comprensión y las estrategias. Todos los programas han sido experimentados en aulas de Educación Primaria y se perciben como una actividad de solución de problemas antes que una adquisición de reglas y procedimientos establecidos.

Además, Warfield (2001) implementa el programa CGI en una clase de preescolar mediante la comprensión del aprendizaje, escuchar a los alumnos mientras describen sus estrategias para solucionar el problema y utilizar este conocimiento para las lecciones posteriores.

En otro estudio, Carpenter, Ansell y Levi (2001) retoman las cinco formas de comprensión propuestas por Carpenter y Lehrer (1999), las cuales se examinan en contextos de aprendizaje específicos que facilitan la instrucción del aprendizaje con comprensión.

Entonces, el programa CGI implica que los alumnos solucionen los problemas mediante estrategias que representan diferentes niveles de comprensión de los conceptos matemáticos. Este programa se centra en el aprendizaje de los alumnos, los procesos de la clase, y la relación entre el desarrollo de la comprensión de los alumnos y su participación en las interacciones dentro del aula.

En otro estudio, Franke, Carpenter, Levi y Fennema (2001) abordan la comprensión de los profesores sobre el pensamiento matemático de sus alumnos y postulan tres características básicas de la comprensión del aprendizaje. La primera plantea que el aprendizaje se construye con comprensión (Carpenter y Leher, 1999; Greeno, 1988; Hiebert y Carpenter, 1992). La segunda es una estructura con conexiones firmes. La tercera plantea que los alumnos conducen su propio desarrollo.

También, Franke et al. (2001) examinan como 26 profesores comprenden su conocimiento del pensamiento de los niños cuatro años después de participar en el programa CGI. Los resultados son consistentes con los descubrimientos de Knapp y Peterson (1995) en el sentido de que los profesores que se centran en las ideas del pensamiento matemático de los niños mantienen su conocimiento según el programa CGI.

Entonces, los profesores construyen su comprensión acerca del desarrollo del pensamiento de los alumnos. Este desarrollo constructivo no es una acción aislada, sino que requiere la colaboración de los profesores para lograr el aprendizaje colectivo. Esto implica pensar en cómo los profesores pueden desarrollar la colaboración con sus colegas. Por tanto, las comunidades de profesores CGI permiten una comunicación interna sobre sus clases y alumnos.

Lo anterior motiva a los profesores para iniciarse en el dominio de los avances de la investigación sobre la construcción del pensamiento matemático infantil mediante la interacción permanente con sus alumnos en sus aulas, así como con sus colegas profesionales para conseguir intercambios de conocimiento.

10.3. Programa de la Educación de las Matemáticas Realistas (RME)

De Corte (1993) propone la intervención en la enseñanza de las matemáticas a partir del contexto real de los problemas matemáticos. Considera que los alumnos no son receptores pasivos de la información, sino que construyen activamente su comprensión y habilidades a partir de su conocimiento previo tanto informal como formal y mediante la interacción con sus entornos (De Corte, 1990).

Una creencia de la educación vigente reside en considerar que el conocimiento se adquiere con independencia del contexto social.

El aprendizaje dentro y fuera de la escuela se distingue por Resnick (1987) como sigue:

1. La forma dominante de aprendizaje en la escuela es individual. Pero fuera de la escuela se realiza en grupo.
2. En la escuela prevalecen las actividades de "razonamiento puro" sin la utilización de las herramientas socioculturales. Sin embargo, la utilización de estas herramientas es común en las actividades cognitivas ajenas a la escuela.
3. La escuela enfatiza el aprendizaje de símbolos y el pensamiento independiente de los objetos y sucesos concretos, mientras que las actividades fuera de la escuela se encuentran vinculadas con tales objetos.
4. La escuela se centra en la enseñanza de conocimientos y habilidades generales de aplicación amplia, mientras que fuera de la escuela se hace hincapié en las habilidades para una situación específica.

Los investigadores han analizado la enseñanza centrada en la instrucción del conocimiento conceptual (Verschaffel y De Corte, 1985; Willis y Fuson, 1988), en la cual consideran cuatro ideas básicas sobre este conocimiento. La primera es la comprensión y construcción del significado. La segunda se refiere a los métodos heurísticos y las estrategias metacognitivas que se enseñan y aprenden dentro de un contexto específico. La tercera considera la naturaleza activa y constructiva de los procesos de aprendizaje. La cuarta afirma que el aprendizaje se incrementa en contextos y tareas que favorecen la interacción social, en general, y la resolución de problemas en grupos pequeños, en particular.

Una serie de experimentos sobre la enseñanza de las matemáticas (Lester, Garofalo y Kroll, 1989; Campione, Brown y Connell, 1988), así como de otros ámbitos (Collins et al., 1989) están en línea con el paradigma de cognición contextual definido por Brown et al. (1989). Este modelo cognitivo del aprendizaje implica cuatro dimensiones: el contenido, el método de enseñanza, la secuencia de las tareas de aprendizaje y el contexto social del aprendizaje (Collins et al., 1989).

10.3.1. *Fundamentos*

La educación de las matemáticas realistas (Gravemeijer, 1994; Streefland, 1991a) es una aproximación al desarrollo del curriculum originada en Holanda. Este programa se basa en el trabajo de Hans Freudenthal (Freudenthal, 1983).

La idea central es que las situaciones procedentes de la realidad o de la vida cotidiana se constituyen en la fuente de las matemáticas para los niños. En las situaciones realistas se permite a los alumnos construir interconexiones entre las ideas y los conceptos matemáticos mediante la discusión de las estrategias y las representaciones alternativas. Además, las representaciones de los alumnos de las situaciones realistas llegan a ser formales a través del desarrollo del pensamiento. Las tareas de este modelo se diseñan para aprovechar las experiencias informales que han tenido los niños e incorporar nuevas ideas matemáticas. Los profesores animan a sus alumnos para encontrar las estrategias y los razonamientos sobre los problemas. Las discusiones en la clase desempeñan un rol fundamental para ayudar a los niños en la articulación de la comprensión que subyace a sus estrategias y representaciones.

Las matemáticas realistas no se centran solamente en los estudios del pensamiento individual de los niños, sino que este razonamiento se estudia junto al desarrollo del curriculum de las matemáticas en el contexto del aprendizaje en las aulas.

El diseño de los entornos de aprendizaje contiene los siguientes principios:

1. El aprendizaje se construye (Cobb, 1994; De Corte, 1990; Glaser, 1991).
2. El aprendizaje se acumula (Dochy, 1992; Shuell, 1992; Vosniadou, 1992).
3. El aprendizaje se auto-regula (Shuell, 1992; Vermunt, 1992).
4. El aprendizaje se orienta a la meta (Bereiter y Scardamalia, 1989; Shuell, 1992)
5. El aprendizaje está situado (Brown et al., 1989; Greeno, 1991; Vygotski, 1978).
6. El aprendizaje es cooperativo (Brown et al., 1989; Vygotski, 1978).

Este punto de vista se basa en la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983) quien argumenta que la realidad es un dominio de aplicación del conocimiento y una fuente que capacita a los alumnos a constituir objetos mentales (nociones intuitivas que preceden al concepto). Esto implica que los entornos de aprendizaje tienen que ser adaptados a los niños para facilitar los procesos de reinvención del conocimiento de las matemáticas.

De Corte (1995) elabora un marco coherente para diseñar los entornos de aprendizaje, en los cuales los alumnos adquieren el desarrollo cognitivo.

Este diseño se guía por: a) la concepción de que el objetivo de la educación en las matemáticas es la adquisición de la comprensión matemática y b) el punto de vista constructivista del aprendizaje en las matemáticas como la construcción de un conocimiento interactivo, acumulativo y situado mediante el desarrollo de las destrezas, las creencias y las actitudes mediadas por el profesor.

Desde esta concepción, el diseño de los entornos realistas del aprendizaje contiene 5 principios interrelacionados:

1. El rol principal del contexto de los problemas es un recurso para la construcción de los conceptos matemáticos y un campo para su aplicación.
2. El uso de los modelos como herramientas o andamiaje facilita la progresión hacia los niveles superiores de abstracción.
3. Las construcciones de los niños son el punto de partida para la reflexión conjunta.
4. La interacción y la cooperación para el aprendizaje.
5. Las interrelaciones del aprendizaje.

En el primero, los alumnos construyen activamente el conocimiento matemático y las destrezas de solución a partir de la exploración del contexto de los problemas usando su conocimiento informal y las estrategias. En estos problemas se presentan situaciones de la vida real, familiares para los alumnos.

En el segundo se emplea una variedad de herramientas matemáticas y modelos para andamiar la transición de lo concreto a lo abstracto. Las manipulaciones, los modelos visuales y situacionales, los diagramas, los esquemas y los símbolos (la línea numérica, el ábaco, el diagrama de flechas, etc.) desempeñan una función de puente entre lo concreto y lo abstracto. En el programa de la Educación de las Matemáticas Realistas (RME) la noción de nivel de abstracción se refiere al grado menos próximo a los problemas del contexto. Así, en el nivel inferior abstracto se permanece próximo al problema del contexto y se emplea el conocimiento y las estrategias informales, mientras que en el nivel superior abstracto se actúa dentro del sistema formal de las matemáticas y se aplican los procedimientos abstractos y formales.

En el tercero se crean las oportunidades de aprendizaje en el aula analizando los resultados de los niños. El profesor induce a la reflexión como medio para promover el logro de los niveles superiores de abstracción durante el aprendizaje.

En el cuarto principio se considera el aprendizaje como una actividad que ocurre dentro de un contexto social. La interacción social y la cooperación son cruciales para el intercambio de los conocimientos y la negociación de ideas. Además, se comparan los métodos de solución y se discuten los argumentos dados. En RME la instrucción en la clase y el trabajo individual se combinan entre el aprendizaje cooperativo en pequeños grupos y la discusión general dentro del aula.

En el quinto principio se requiere una base del aprendizaje flexible, coherente y bien organizada donde se conecten los conceptos y las reglas matemáticas.

10.3.2. *Implementación educativa*

Verschaffel y De Corte (1997) realizan un programa experimental sobre la enseñanza de los problemas verbales de suma y resta con alumnos de primer curso. El diseño pretest-postest con un grupo experimental y un grupo control muestra evidencia sobre los planteamientos de la Educación de las Matemáticas Realistas (RME)

Las principales características del programa se resumen como sigue: 1) los problemas verbales se presentan antes que los algoritmos, 2) el aprendizaje de la resolución de los problemas se explica según la estructura semántica, 3) los alumnos construyen representaciones materiales parecidas a la estructura semántica del problema cuando aprenden a representar y resolver los problemas con materiales concretos y 4) los problemas se solucionan con la enseñanza de diagramas que representan las categorías de los problemas verbales: un diagrama de flechas dinámico para los problemas de Cambio, un diagrama parte-todo estático para los problemas de Combinación y un diagrama con dos barras equivalentes para los problemas de Comparación.

El análisis cuantitativo de los resultados revela un efecto del programa experimental sobre la representación y resolución de los problemas verbales: el grupo experimental mostraba casi el doble de progreso entre el pretest y el postest que el grupo control. El análisis cualitativo indica que la mayoría de los niños del grupo control sólo empleaban un diagrama para representar todos los problemas, concretamente, el diagrama de Venn. Por el contrario, los niños del grupo experimental aplicaban espontáneamente varios diagramas para representar distintos problemas.

En otro estudio sobre la instrucción RME, pero en torno a la división, una clase experimental obtenía un mejor rendimiento que el grupo control (Treffers, 1987). Streefland (1991b, 1991c) y van den Brink (1991) obtienen resultados que apoyan el modelo RME en la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, Reusser y Stebler (1997) muestran que algunos alumnos atienden menos al conocimiento del mundo real debido a la falta de seriedad sobre la tarea y la influencia de la enseñanza tradicional.

Segers, Dochy y De Corte (1999) informan de un estudio sobre el curriculum basado en el problema. Estos investigadores consideran que el rendimiento en las tareas de solución de problemas depende del perfil de su conocimiento. Los datos indican que los alumnos con un conocimiento organizado rinden mejor que sus iguales con una competencia conceptual estructurada en menor medida para resolver los problemas.

Verschaffel et al. (1999) exploran un entorno de aprendizaje para enseñar y aprender a modelar y solucionar problemas de matemáticas en cuatro clases de quinto curso. Los participantes se instruían en un conjunto de técnicas heurísticas como parte de una estrategia metacognitiva para resolver la tarea. Los datos indican que la intervención tenía efectos positivos del entorno de aprendizaje sobre los diferentes aspectos del modelado a los alumnos y las estrategias de solución de los niños.

De Corte (2000) plantea una estrategia para aplicar la teoría e investigación psicológica a la educación de acuerdo con las siguientes características: 1) buena comunicación con los profesores, 2) orientación hacia el cambio de creencias de los profesores acerca de las metas educativas, la enseñanza y el aprendizaje y 3) una aproximación holística al entorno enseñanza-aprendizaje. Entonces, la relación entre la teoría y la práctica implica diseñar experimentalmente la intervención educativa en las clases reales. Por tanto, los entornos de la clase y la cultura se deben tener en cuenta por los investigadores y los profesores.

De Corte, Verschaffel y Op´t-Eynde (2000) conciben las matemáticas como un proceso activo y constructivo en el cual los alumnos regulan su aprendizaje. La autorregulación es una característica del aprendizaje junto con los procesos metacognitivos, motivacionales y emocionales. La autorregulación se sitúa dentro de la instrucción en cuatro aspectos: 1) adquisición de una disposición hacia las matemáticas como última meta, 2) construcción de procesos de aprendizaje orientados hacia la meta, 3) diseño de entornos de aprendizaje apropiados y 4) evaluación para el control y retroalimentación. Estos aspectos se observan en los alumnos a través de las destrezas metacognitivas, las habilidades metavolitivas, las creencias y el desarrollo de la autorregulación.

En este sentido, De Corte, Op´t-Eynde y Verschaffel (2002) revisan la investigación sobre las creencias de las matemáticas, especialmente la relación entre las creencias y el conocimiento. Como resultado proponen tres componentes de las creencias: 1) creencias acerca de la educación de las matemáticas, 2) actitudes hacia las matemáticas y 3) creencias acerca del contexto social en el aprendizaje de las matemáticas. Estos autores se interesan en el estudio de las creencias negativas sobre las matemáticas y de la instrucción que desarrolla las creencias apropiadas.

Por su parte, van - Dooren, Verschaffel y Onghena (2002) investigan las estrategias de solución de 97 profesores practicantes de primaria en Bélgica. Estas estrategias se compararon con su evaluación de los alumnos. Los datos indican que los profesores prefieren métodos aritméticos que dependan de la dificultad del problema.

Además, Blöte, van der Burg y Klein (2001) encuentran desde esta aproximación que la comprensión conceptual precede a la destreza del procedimiento.

El impacto educativo del programa se manifiesta en el plan para un curriculum nacional de las matemáticas en los países bajos (Treffers, De Moor y Feijs, 1989). Este programa es una contraparte de los estándares sobre las matemáticas (*Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics,* NCTM, 1989) en los Estados Unidos. Dicho plan tiene influencia en los libros de texto de matemáticas en las escuelas primarias alemanas (De Corte, Greer y Verschaffel, 1996; Verschaffel, De Corte y Borghart, 1997).

Sin embargo, Gravemeijer et al. (1993) confirman que la disposición de los libros de texto basados en RME no garantiza que los profesores implementen la aproximación RME de manera apropiada. Más tarde, Gravemeijer (1997) afirma que algunos profesores se resisten al cambio.

En cuanto a esto, Fraivilling, Murphy y Fuson (1999) implementan el curriculum de las matemáticas cotidianas en una clase de primer curso. Los resultados indican que los profesores apoyan el pensamiento matemático.

Gravemeijer, Cobb, Bowers y Whitenack (2000) describen una aproximación al diseño instruccional que coordina tres aspectos del aprendizaje: 1) desarrollo conceptual, 2) construcción interactiva del conocimiento colectivo y 3) desarrollo de la orientación del aprendizaje que dirige la secuencia instruccional. El objetivo es experimentar esta propuesta en una clase de primer curso con 18 alumnos. El experimento creaba una secuencia de aprendizaje que comenzaba con el propio modelo del alumno, después se progresaba colectivamente entre el profesor y los alumnos hacia una serie de negociaciones sociales y formas de negociar más aceptadas socialmente.

Recientemente, Janssen, De Corte, Verschaffel, Knoorr y Colemont (2002) evalúan los estándares del nuevo curriculum de matemáticas para la Educación Primaria en Bélgica y encuentran que los resultados no han sido tan favorables.

Por su parte, Baroody y Dowker (2003) se centran en dos cuestiones del pensamiento matemático y su educación. Primera, ¿cuál es la naturaleza de la experiencia aritmética?. Segunda, ¿cómo la instrucción puede promoverla?. Entonces, estos autores encuentran una conclusión general en la literatura. La experiencia de adaptación es el aspecto central de la aritmética y del uso de las estrategias.

Previamente, Baroody y Coslick (1998) han desarrollado un libro de texto sobre métodos de solución de tareas de matemáticas, el cual es resultado de ocho años de investigación de acuerdo con los estándares del NCTM. Este texto presenta tres propuestas: 1) relevante para la vida cotidiana de los alumnos, 2) basado en la indagación del problema y 3) es significativo y comprensible.

10.4. Programa Evolutivo Instruccional (PEI)

Bermejo y otros (2000, 2002) proponen un programa de intervención en la enseñanza de las matemáticas denominado Programa Evolutivo Instruccional (PEI). Este programa se basa en una aproximación constructivista integradora (Cobb, 1989, 1995, 1996; Fosnot, 1996) y subraya que en el aprendizaje de las matemáticas intervienen dos aspectos relacionados: la actividad individual del alumno y la microcultura de la clase (Cobb, 1995; Cobb y Wheatley, 1988; Cobb et al., 1991; Cobb, Wood y Yackel, 1993; Yackel y Cobb, 1996). En la Figura 10.1 se presenta el esquema general del Programa Evolutivo Instruccional (PEI).

10.4.1. *Fundamentos del programa*

Bermejo, Lago, Rodríguez y Pérez (1995) plantean cuatro ideas básicas del programa:

1) Los alumnos construyen su conocimiento matemático y adquieren los nuevos contenidos que integran y estructuran en función de sus competencias cognitivas (Bermejo y otros, 1998; Cobb, 1988).
2) La instrucción en matemáticas se organiza para facilitar la construcción, los profesores y los escolares son creadores de significados y los primeros se convierten en guías de aprendizaje al estructurar el clima social-cognitivo del aula.
3) La base para secuenciar los objetivos de la instrucción en matemáticas proviene de los conocimientos actuales sobre el desarrollo de los alumnos y la adquisición de contenidos matemáticos específicos, el desarrollo de las estrategias de resolución de la adición y sustracción (Carpenter y Moser, 1984), los factores explicativos de

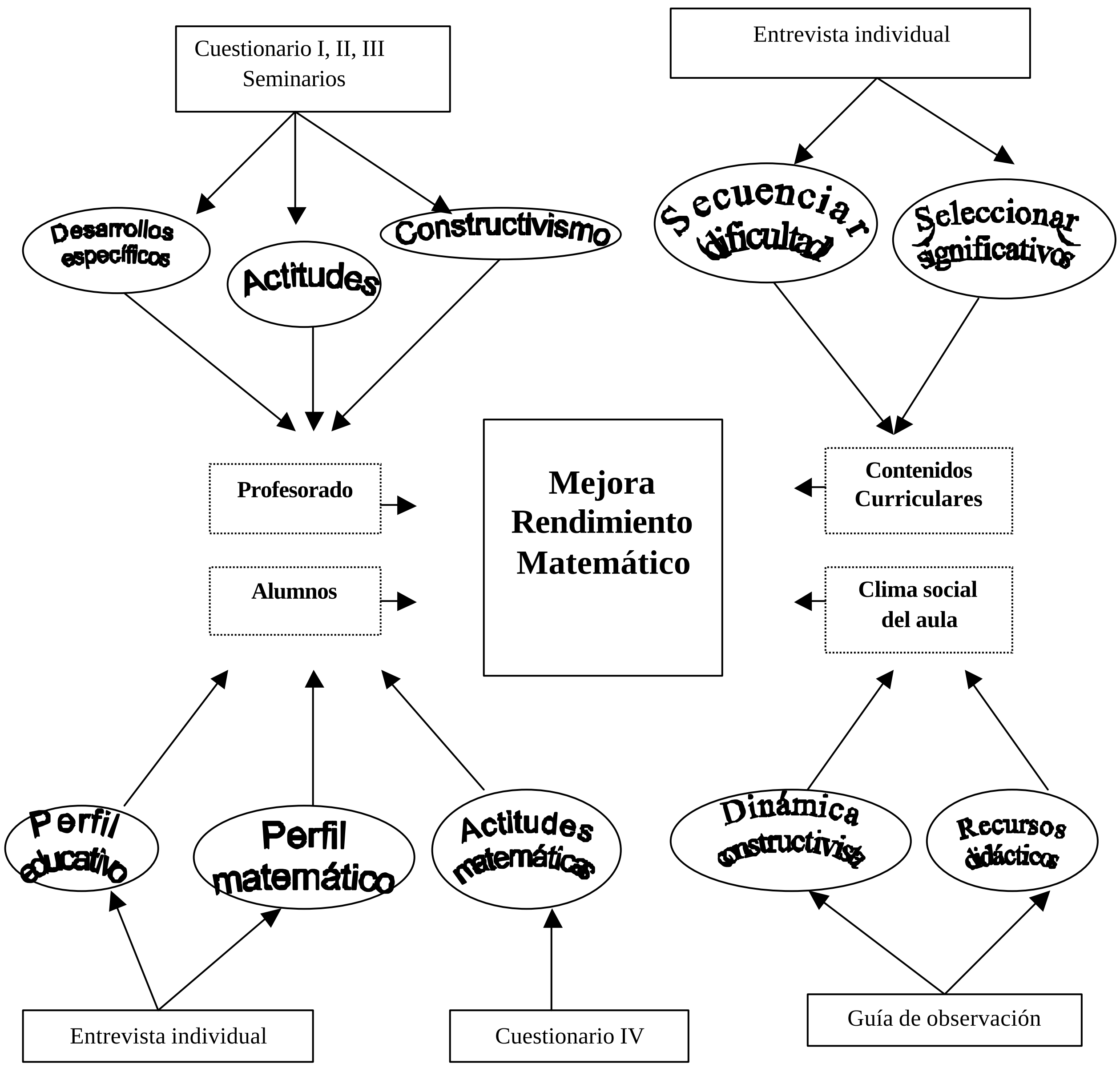

Figura 10.1. Esquema general del PEI (Bermejo y otros, 2002, p. 45)

las dificultades encontradas por los niños al resolver los problemas de suma y resta, así como la estructura semántica del problema y el lugar de la incógnita (Bermejo, 1990; Bermejo y otros, 1994; Bermejo y Rodríguez, 1987; 1990a, 1990b) y los conocimientos informales.

4) Las habilidades matemáticas se enseñan en el marco de la solución de problemas que proceden de los contextos de la vida real donde "se da" o "se quita" algo, pero nunca de las expresiones numéricas (Bermejo y otros, 1998; Ginsburg, Klein y Starkey, 1998; Verschaffel y De Corte, 1997).

La propuesta del programa PEI se enmarca en una serie de principios básicos.

1. El tránsito del conocimiento informal al conocimiento escolar.
2. El desarrollo evolutivo del conocimiento matemático.
3. La enseñanza significativa de las matemáticas basada en la comprensión y la solución de los problemas.
4. El papel de la negociación en el aprendizaje de las matemáticas.

10.4.2. *Programa de intervención*

Este programa ha sido experimentado en la enseñanza de la adición y la sustracción en primero de Educación Primaria. El Programa Evolutivo Instruccional comprende dos fases: a) el estudio evolutivo y b) la intervención específica. En la primera fase se valoran las competencias matemáticas de los niños de segundo de Educación Infantil y primer ciclo de Educación Primaria. Los resultados muestran diferencias entre los grupos puesto que los alumnos de los cursos más avanzados obtienen un rendimiento superior. Estos cursos se distinguen con respecto a la selección y evolución de los procedimientos de resolución.

La segunda fase del estudio comprende la instrucción sobre los conceptos de suma y resta. Los postulados básicos de la intervención son: 1) el alumno construye los aprendizajes matemáticos y el profesor creará las condiciones para facilitarlos, 2) el aprendizaje de la suma y resta parte de la presentación de los problemas verbales y 3) el rol del profesor es relevante para el aprendizaje significativo. La aplicación del programa de intervención tiene en cuenta la evaluación de los conocimientos previos de los alumnos, la cual se proporciona a los profesores, y el perfil instruccional de estos mediante un cuestionario de creencias sobre la enseñanza de las matemáticas. Dos tareas más se requieren completar: 1) la formulación de los problemas verbales a partir de sentencias numéricas y 2) la valoración del grado de dificultad de los problemas verbales de suma y resta, así como la determinación de los procedimientos de resolución que emplean sus alumnos. Los profesores responden a un test después de esta fase.

En la experimentación del programa PEI participaron 5 clases de primer curso de varias escuelas primarias de Madrid, de modo que 3 clases formaban el grupo experimental y 2 clases integraban el grupo control.

En los resultados se encuentra lo siguiente:

1. Una insuficiencia de conocimientos por parte de los profesores sobre las categorías de los problemas verbales y escasos comentarios sobre las estrategias, los errores y los algoritmos.
2. El programa de intervención influye en la comprensión de los profesores sobre la enseñanza de las matemáticas.

3. Los profesores no favorecen suficientemente las iniciativas de los alumnos. Sólo un profesor lo hizo claramente en los problemas verbales. Los tres profesores del grupo experimental optan por evaluar tanto el resultado como los procesos.
4. No existen diferencias notables entre los profesores del grupo control.
5. Ambos grupos de profesores tienen una competencia matemática similar en la primera evaluación. Sus alumnos tienen la misma dificultad en las tareas de suma y resta. El grupo experimental superó al grupo control por lo cual el programa de intervención tiene un efecto positivo en la enseñanza de las matemáticas.

Estos datos confirman la idea de que un mayor conocimiento del desarrollo del pensamiento matemático y una mejor comprensión de los principios constructivistas por parte del profesor y su aplicación en el aula repercute positivamente en la comprensión y el rendimiento de los alumnos.

Los resultados comprueban la eficacia del programa con un cambio de las creencias de los profesores en la siguiente dirección: 1) dan más importancia a la enseñanza de los problemas verbales que a las expresiones numéricas, 2) asumen una convicción sobre los planteamientos constructivistas y 3) evalúan no sólo el resultado final, sino también los procesos.

Además, los alumnos del grupo experimental obtienen un mayor rendimiento que el grupo control, manifiestan estrategias más complejas y menos errores conceptuales, pero más errores de ejecución.

Estos resultados se relacionan con los descubrimientos que encuentran Carpenter et al. (1988, 1989, 1996), Peterson et al. (1989) y Fennema et al. (1996) con el programa CGI; en cambio discrepan del programa de Cobb (1988, 1996).

Con la implementación del programa PEI en el aula de matemáticas se muestra que es posible mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje sobre la adición y la sustracción.

10.4.3. *Creencias epistemológicas de los alumnos sobre las matemáticas*

Bermejo (1996) expone que la intervención sobre el aprendizaje de las matemáticas requiere un proceso de aprendizaje situacional en el sentido que la intervención se dirija a las creencias y actitudes hacia las matemáticas.

Posteriormente, Bermejo y otros (2000) realizan un estudio sobre las creencias de los alumnos y los profesores respecto a las matemáticas en línea con la investigación seguida por otros autores (Mandler, 1984, 1989; Mc Leod, 1992; Schoenfled, 1983, 1985, 1988). El modelo multidimensional de Schommer se considera como el marco de referencia. Este modelo plantea que la epistemología personal constituye un sistema de creencias, por tanto es relevante determinar cómo son las creencias de los alumnos sobre el conocimiento y de que manera afectan a su comprensión (Schommer, 1990, 1993; Schommer, Crouse y Rhodes, 1992; Schommer y Walker, 1995). Así, las creencias epistemológicas determinan también la interpretación crítica del conocimiento.

Las creencias se agrupan en las siguientes variables:

1. La habilidad aritmética depende del ejercicio
2. La habilidad aritmética depende de la comprensión
3. La habilidad aritmética depende del esfuerzo
4. El conocimiento aritmético está orientado principalmente a las reglas y no es necesario establecer relaciones entre los conceptos y procedimientos

5. El conocimiento aritmético puede ser construido progresivamente por el alumno
6. El conocimiento aritmético es útil fuera del ámbito escolar
7. El aprendizaje de la aritmética tiene que ser rápido
8. La ejecución aritmética tiene que ser rápida
9. El conocimiento de la aritmética es incuestionable
10. El origen del conocimiento aritmético está en el profesor que transmite un conocimiento cierto.

En las creencias manifestadas por los niños de segundo se destaca la idea de que su habilidad aritmética no constituye algo inamovible; el aprendizaje es rápido y se asegura con el ejercicio repetido; el conocimiento matemático se fundamenta en reglas, es útil en el mundo real, y el conocimiento del algoritmo no se asocia con la certeza de que sólo exista una respuesta correcta.

Los alumnos de tercero creen que la habilidad aritmética cambia con la comprensión y el esfuerzo y que el conocimiento aritmético no es tan simple. Estos alumnos consideraban que no existe una solución única y que el conocimiento matemático se orienta a los conceptos, por lo cual se requiere la integración de los conocimientos y los procedimientos. También, estos alumnos creen que la ejecución de las tareas matemáticas no necesita ser rápida para que se obtenga un resultado correcto y que las matemáticas son útiles más allá del contexto escolar, aunque no suponen que la práctica repetida sea relevante para el conocimiento aritmético.

Estos resultados se relacionan con los hallazgos de que las creencias epistemológicas más adecuadas reciben las puntuaciones altas (Schommer, 1990, 1993; Schommer, Crouse y Rhodes, 1992; Schommer y Walker, 1995).

Bermejo y otros (2000) concluyen con cuatro planteamientos. En primer lugar, de acuerdo con Schommer, las creencias epistemológicas sobre la aritmética constituyen dimensiones más o menos independientes. En segundo lugar, la coexistencia de creencias más y menos sofisticadas en los alumnos se debe al carácter multidimensional de las mismas. En tercer lugar existen constancias y cambios con la edad en las creencias manifestadas por los niños sobre la aritmética. En cuarto lugar, en los contextos educativos tradicionales las creencias epistemológicas de los niños sobre la aritmética son más sofisticadas de lo que se piensa comúnmente (Loef y Carey, 1997).

10.5. Otras perspectivas de intervención

La segunda perspectiva se representa por el modelo cognitivo de aprendizaje que tiene como base la resolución experta sobre los problemas matemáticos (Schoenfeld, 1985, 1989). El modelo comprende cuatro aspectos generales de la conducta de resolución de problemas: el conocimiento del ámbito, el uso de ciertas clases de técnicas heurísticas, el manejo de recursos durante la solución del problema y los sistemas de creencias sobre las matemáticas.

La tercera perspectiva se representa por el modelo de la instrucción anclada y el construccionismo (CTGV, 1990, 1992; Harel y Papert, 1991b; Papert, 1991).

La instrucción anclada es propuesta por el Grupo de Cognición y Tecnología de Vanderbilt (CTGV, 1992, Hickey, Pellegrino, Goldman, Vye y Moore, 1993; Hickey, Moore y Pellegrino, 2001) y considera que la instrucción se sitúa dentro de los entornos de resolución de problemas denominados macrocontextos (CTGV, 1990). Estos macrocontextos proporcionan el “anclaje” o base común para que los alumnos y los profesores ejecuten y discutan la resolución del problema compartiendo una visión a largo plazo. El CTGV ha elaborado proyectos de instrucción en matemáticas como la serie de aventuras Jasper (CTGV, 1997).

El construccionismo es el marco teórico impulsado por el grupo de aprendizaje y epistemología en el MIT (Harel y Papert, 1991a). La instrucción se programa a través de los entornos de aprendizaje denominados micromundos (Papert, 1991). En estos micromundos los alumnos diseñan y desarrollan un producto concreto. El acto de diseñar permite a los alumnos imponer su significado a un problema y reflexionar sobre su habilidad para resolverlo (Perkins, 1986; Schón, 1987). El lema es “aprender haciendo”. Esta aproximación incluye los marcos de instrucción como el laboratorio Knot (Strohecker, 1991), los grupos de trabajo LEGO/Logo (Resnick y Ocko, 1991) y el estudio de diseño de software (Harel y Papert, 1991b).

11. Enseñanza de la suma y resta en México

En México, la enseñanza pública de las matemáticas se orienta en los primeros cursos de Educación Primaria conforme a la política educativa institucional que implementa el Gobierno Federal a través de la Secretaria de Educación Pública (SEP). Para comprender esto abordaremos el contexto educativo, la programación de las actividades didácticas en los cursos escolares, el diseño de los libros de texto y terminaremos con una serie de comentarios respecto al tema.

11.1. Contexto educativo

La Secretaría de Educación Pública, en ejercicio de las facultades que le confieren las leyes, estableció en 1993 un nuevo plan de estudios para la Educación Primaria, así como los programas en cada una de las asignaturas que lo integran, entre ellas las matemáticas. El plan se aplicó en una primera fase durante el ciclo escolar 1993-1994 para primero, tercero y quinto curso y entró en vigor para los demás cursos al inicio del ciclo 1994-1995. Las reformas curriculares siguen vigentes hasta el ciclo escolar presente.

La enseñanza de las matemáticas se organiza en cuatro contenidos: 1) los números, sus relaciones y sus operaciones, 2) la medición, 3) la geometría y 4) el tratamiento de la información. La instrucción sobre la suma y la resta se comprende en el primero, y se expone según el *Avance Programático* (SEP, 2002) en los cuatro cursos y el contenido de los libros de texto correspondientes a cada curso escolar.

El rol que el profesor desempeña es ser un agente que va más allá de la transmisión de conocimientos, definiciones y algoritmos a través de la conducción de una interacción que facilite el aprendizaje del alumno. El proceso de enseñanza-aprendizaje busca superar el esquema tradicional del aprendizaje mecánico mediante el planteamiento del aprendizaje significativo. Para ello conviene que los contenidos matemáticos no se enseñen de manera aislada del contexto, sino que permitan al alumno descubrir su significado, sentido y utilidad.

La resolución de los problemas promueve el aprendizaje de las matemáticas en el sentido de enfrentar al alumno con situaciones problemáticas que se hacen complejas y cuya solución depende de la construcción de conocimientos nuevos y el empleo de los procedimientos de solución convencionales. Las estrategias se clasificaron como no convencionales y convencionales, y los errores son identificados. El tipo de problema que se presenta se formula mediante preguntas elaboradas por el profesor, por ejemplo, *"¿Qué puedo comprar en la tienda con 50 pesos?"* (Libro para el maestro. Matemáticas. Segundo grado. 2002, p. 20).

Los recursos didácticos son principalmente: el *Fichero. Actividades didácticas* (SEP, 2002), el *Libro Recortable* (SEP, 2002), el material concreto, el rincón de las matemáticas, el juego y la calculadora.

En los primeros cursos de primaria, la mayor parte de los contenidos empiezan con actividades que requieren usar material concreto. Al principio, los alumnos manipulan los materiales para familiarizarse con ellos y el profesor plantea situaciones problemáticas donde el empleo del material tenga sentido. Un apoyo para este recurso es el libro recortable que se lleva en todos los cursos escolares. El rincón de las matemáticas es un espacio del aula y cumple con la finalidad de concentrar todos los materiales que se utilizan en las actividades de aprendizaje. Los juegos matemáticos sirven para favorecer el desarrollo de las habilidades y destrezas y propician que los alumnos construyan sus conocimientos matemáticos.

11.2. Curriculum educativo

A continuación, expondremos la enseñanza de la aritmética en cada uno de los primeros cuatro cursos de Educación Primaria según los programas educativos establecidos en México.

11.2.1. *Enseñanza de la aritmética en primer curso*

La enseñanza de la aritmética de primer curso organiza los contenidos en cinco bloques de acuerdo con el *Avance programático. Primer grado* (SEP, 2002).

El bloque I tiene los siguientes objetivos:

a) Uso de los recursos con que cuenta el niño (percepción visual, correspondencia uno-a-uno, conteo oral) para comparar conjuntos hasta de 15 objetos.
b) Resolución de los problemas sencillos planteados oral o gráficamente con diversos procedimientos.

El bloque II formula las siguientes metas:

a) Afirmación de los conocimientos sobre la serie numérica al utilizar el conteo oral para comparar, ordenar y crear conjuntos hasta de 15 objetos.
b) Utilización de la representación simbólica de los números hasta el nueve para comunicar cantidades.
c) Asociar los signos de la suma y la resta con las acciones de agregar y quitar objetos a un conjunto.

d) Resolución de problemas sencillos de suma y resta planteados oral y gráficamente mediante diversos procedimientos.

El bloque III sustenta los siguientes propósitos:

a) Ampliación del conocimiento de la serie numérica oral hasta el 30 al repartir, comparar, ordenar y construir conjuntos.
b) Uso de la representación simbólica de los números hasta el 15 para comunicar cantidades.
c) Conocimiento y uso de la representación simbólica del cero en situaciones en las que se quitan objetos de un conjunto hasta que no queda nada y en conteos regresivos.
d) Desarrollo de la habilidad para calcular mentalmente el resultado de las sumas y restas.
e) Uso de los números cardinales de manera oral para indicar el lugar que ocupan las personas y los objetos.

El bloque IV integra los siguientes objetivos:

a) Avance en el conocimiento sobre la serie numérica oral al contar conjuntos de 10 en 10 hasta el 90 y de uno en uno hasta el 60, aproximadamente.
b) Utilización del agrupamiento de decenas para facilitar la comparación y la comunicación de cantidades.
c) Representación con objetos (fichas rojas y azules) del número de decenas y unidades que contiene un conjunto.

d) Representación simbólica de la serie numérica de 10 en 10 hasta el 90.
e) Construcción de una serie de 2 en 2 hasta el 10, aproximadamente.
f) Resolución de los problemas que impliquen agregar, quitar, unir, repartir e igualar conjuntos, planteados oral y gráficamente.

El bloque V señala los siguientes aspectos:

a) Ampliación del conocimiento sobre la serie numérica oral hasta el 99.
b) Relación del nombre de los números con las decenas y unidades que los conforman.
c) La representación simbólica convencional de los números hasta el 99 para comunicar cantidades.
d) Construcción y orden de las series cortas de números.
e) Identificación del antecesor y sucesor de un número.
f) Comparación de los números de dos cifras tomando en cuenta la cantidad de decenas y unidades que los conforman.
g) Reconocimiento del valor de las cifras de un número según el lugar que ocupan.
h) Resolución de problemas de agregar, quitar, unir e igualar con números menores de 20.

11.2.2. *Enseñanza de la aritmética en segundo curso*

Los propósitos generales son, de acuerdo con *El libro para el maestro. Matemáticas. Segundo grado* (SEP, 2002), que el alumno:

- Utilice y comprenda el significado de los números naturales hasta de tres cifras en diversos contextos.
- Resuelva los problemas de suma y de resta con números naturales utilizando el procedimiento convencional.
- Solucione los problemas de multiplicación, problemas de reparto de conjuntos y problemas en los que hay que averiguar cuantas veces cabe una cantidad en otra mediante procedimientos no convencionales con cantidades menores de 100.
- Exprese la multiplicación con la representación convencional $2 \times 4 = 8$
- Desarrolle la habilidad para realizar estimaciones y cálculos mentales de sumas y restas con números hasta de dos cifras.

Los alumnos en este curso escolar desarrollan los siguientes aspectos:

1. Toman importancia de los números de tres cifras.
2. Continúan desarrollando la habilidad de contar.
3. Realizan agrupamientos y desagrupamientos en centenas, decenas y unidades.
4. Aprenden a leer y escribir números.
5. Establecen un orden en la serie numérica.
6. Identifican el antecesor y sucesor de un número.
7. Definen el valor posicional en el sistema numérico.

Los profesores elaboran sus actividades didácticas según los siguientes criterios:

a) Uso de números ordinales en contextos familiares para el alumno.

b) Planteamiento y resolución de distintos problemas de suma y resta con números hasta de tres cifras utilizando diferentes procedimientos.
c) Algoritmo convencional de la suma y resta con transformaciones.
d) Introducción a la multiplicación mediante resolución de problemas que impliquen agrupamientos y arreglos rectangulares, utilizando distintos procedimientos.
e) Escritura convencional de la multiplicación (con números de una cifra).
f) Construcción del cuadro de multiplicaciones.
g) Planteamiento y resolución de problemas de reparto de objetos.

Para que los alumnos de segundo curso avancen en el conocimiento del sistema decimal de numeración se proponen que realicen actividades de comparación, ordenación y comunicación de cantidades que les permitan comprender la necesidad y las ventajas de agrupar los objetos de un conjunto en centenas, decenas y unidades.

Se sugiere que paralelamente al aprendizaje de la serie numérica oral y escrita, los alumnos se enfrenten a la resolución de problemas de suma, resta o multiplicación. De tal manera, para resolverlos tengan la necesidad de buscar, analizar y seleccionar la información necesaria en el texto del problema, en las ilustraciones del libro de texto, etc.

Antes que los alumnos dominen el algoritmo convencional de suma y resta conviene que resuelvan suficientes problemas que impliquen estas operaciones mediante el agrupamiento y desagrupamiento de unidades, decenas y centenas representadas con material concreto. Para acercarse a la representación convencional de la multiplicación se propone que los alumnos construyan, con la misma cantidad de objetos, conjuntos formados por grupos más pequeños. Además, que resuelvan los problemas relacionados con la multiplicación.

11.2.3. *Enseñanza de la aritmética en tercer curso*

Las metas generales son, de acuerdo con *El libro para el maestro. Matemáticas. Tercer grado* (SEP, 2002), que el alumno:

- Comprenda el significado de los números hasta 9 999 y su representación simbólica, ordene la serie numérica apropiada y resuelva los problemas sencillos.
- Solucione los problemas con diversos significados de la suma (agregar, unir, igualar), la resta (quitar, buscar un faltante), la multiplicación (arreglos rectangulares, suma reiterada) y la división (reparto y tasativos, es decir, ver cuantas veces cabe una cantidad en otra).
- Use significativamente y con eficiencia los algoritmos de suma y resta en la resolución de problemas en la resolución de problemas, y la multiplicación con números hasta de dos cifras y la división con divisor de una cifra.

Los alumnos desarrollan en este curso los siguientes aspectos:

1. Toman importancia de los números de cuatro cifras.
2. Continúan desarrollando la habilidad de contar.
3. Realizan agrupamientos y desagrupamientos en millares, centenas, decenas y unidades.
4. Aprenden a leer y escribir números de cuatro cifras.
5. Establecen un orden en la serie numérica.
6. Identifican el antecesor y sucesor de un número.
7. Definen el valor posicional en el sistema numérico.

Los profesores elaboran sus actividades didácticas según los siguientes criterios:

a) Lectura y escritura de números ordinales.
b) Planteamiento y resolución de problemas más complejos de suma y resta con números hasta de tres cifras utilizando diversos procedimientos.
c) Algoritmo convencional de la multiplicación.
d) Planteamiento y resolución de problemas de multiplicación con números hasta de dos cifras mediante distintos procedimientos.
e) Multiplicación de números terminados en ceros.
f) Planteamiento y resolución de problemas de división hasta con tres cifras mediante procedimientos no convencionales.
g) Algoritmo de la división con números de dos cifras entre una cifra.
h) Números fraccionarios.

Los números naturales se estudian dentro del sistema de numeración decimal. El rango que se trabaja en el tercer curso es el de las unidades de millar. El uso del contador se introduce para representar números, conocer la serie numérica y el valor posicional de las cifras, así como para desarrollar la habilidad del cálculo mental en los alumnos. El uso del material concreto para representar las cantidades favorece que los alumnos entiendan la regla del cambio *"diez por uno"* del sistema de numeración decimal.

Con respecto a las operaciones predomina el planteamiento que permite a los niños utilizar sus propios procedimientos y estrategias. En un principio se espera que los alumnos resuelvan los problemas que se les plantean, sin imponerles restricciones, sumando, contando, haciendo rayitas o dibujos mediante el cálculo mental u otros procedimientos que emplean espontáneamente. La dificultad de las operaciones se define no sólo por el tamaño de los números, sino también por las relaciones entre los datos de los problemas. El cálculo mental se trabaja paralelamente con el cálculo escrito y la resolución de problemas tiene en cuenta las estrategias que los niños construyen.

11.2.4. *Enseñanza de la aritmética en cuarto curso*

De acuerdo con *El libro para el maestro. Matemáticas Cuarto grado* (SEP, 2002), Los objetivos generales son que el alumno:

- Adquiera la habilidad para leer, escribir, ordenar y ubicar en la recta numérica, así como comparar los números naturales hasta de cinco cifras y los números decimales hasta centésimas.
- Desarrolle las estrategias para estimar y calcular mentalmente el resultado de los problemas de suma, resta y multiplicación.
- Forme la capacidad para reconocer, plantear y resolver los problemas que impliquen el algoritmo de las cuatro operaciones fundamentales. En el caso de la división, con divisores hasta de dos cifras.
- Resuelva los problemas que impliquen el uso de fracciones en situaciones de reparto, medición, comparación, equivalencia u orden.

Los alumnos forman en este curso escolar los siguientes aspectos:

1. Toman importancia de los números de cinco cifras.
2. Aprenden a leer y escribir números con cinco cifras.

3. Construyen series numéricas.
4. Identifican el antecesor y sucesor de un número.
5. Definen el valor posicional en el sistema numérico.
6. Señalan los números en la recta numérica.

Los profesores elaboran sus actividades didácticas según los siguientes criterios:

a) Reglas para la escritura de los números ordinales y su uso en diferentes contextos.
b) Planteamiento y solución de problemas más complejos de suma y resta con números hasta de cinco cifras.
c) Planteamiento y resolución de problemas de multiplicación.
d) Resolución de problemas de división mediante diversos procedimientos.
e) Algoritmo de la división, con divisor hasta de dos cifras.
f) Números decimales.

A partir de la lectura de los números que aparecen en precios, anuncios, etc. se realiza un primer trabajo de comparación, ordenación, identificación y descomposición de números. Paulatinamente se logrará una ordenación más sistemática – y con rangos más amplios- de la serie numérica.

La anticipación de resultados y el cálculo mental son actividades que se desarrollan durante todo el año y están ligadas al desarrollo específico de las lecciones y la resolución de problemas. El conteo, y en particular el conteo de cantidades grandes de objetos es una actividad importante para desarrollar la intuición sobre los números y las ideas claras acerca de la magnitud.

En este curso se utilizan las cuatro operaciones fundamentales. La multiplicación y la división se abordan con matices distintos a la adición y la sustracción. En relación con la suma y la resta se enfatiza la resolución de problemas. Se deja de lado el trabajo relacionado con los algoritmos de esas operaciones, ya que desde el primer curso de primaria, los alumnos realizan un trabajo amplio para comprenderlas. En el tercer curso sus conocimientos se extienden sobre el manejo de los algoritmos convencionales de la suma y de la resta. En el cuarto curso, la complejidad de la suma y la resta se centra en el tipo de problema que se plantea y no necesariamente en el tamaño de los números. Existe una relación entre las estrategias ("técnicas de cálculo") y el significado de los problemas. La situación es diferente con la multiplicación y la división. Ambos algoritmos se tratan por el profesor de manera especial debido a que los niños todavía no los dominan. Así, la multiplicación se basa en la descomposición de arreglos rectangulares y la división en los problemas de reparto.

11.3. Libros de texto

Los libros de texto muestran una parte de la planificación de la enseñanza sobre las matemáticas, por tanto resulta apropiado que expongamos sus contenidos en razón de la proporción de las lecciones.

11.3.1. *Libro de primer curso*

Una aproximación general a los contenidos comprendidos en el libro de texto *Matemáticas. Primer grado* (SEP, 2002) sirve para tener una idea básica respecto al desarrollo del pensamiento matemático infantil y el grado de abstracción con que se presentan estos contenidos a los alumnos.

Este libro de texto incluye 117 lecciones de las cuales 68 lecciones (58%) corresponden a la aritmética y el resto de lecciones (42%) refieren contenidos de geometría. La enseñanza de la aritmética integra las nociones básicas en 11 lecciones (16%), los principios de conteo en 9 lecciones (13%), la habilidad de contar en 20 lecciones (30%), la representación de cantidades en 8 lecciones (12%), la suma en 7 lecciones (10%), la resta se aborda en 7 lecciones (10%) y la solución de problemas abarca 6 lecciones (9%).

Las nociones básicas se refieren a los siguientes contenidos: noción de comparar series (6 lecciones), noción de igualar series (3 lecciones), noción de quitar (1 lección) y noción de poner (1 lección).

Los principios de conteo que se tienen en cuenta son: principio de cardinalidad (5 lecciones) y principio de correspondencia uno-a-uno (4 lecciones).

La habilidad de contar consiste de los siguientes tópicos: unidades hasta el 10 (8 lecciones), decenas (4 lecciones), unidades y decenas (6 lecciones), centenas (1 lección) y unidades, decenas y centenas (1 lección).

La representación de cantidades trata de los siguientes temas: números pequeños (6 lecciones) y de dos cifras (2 lecciones).

La suma comprende lo siguiente: suma con un dígito con la incógnita en el resultado (1 lección), sumar uno o dos (1 lección), algoritmo de suma con un dígito (4 lección) y sumar decenas y unidades (1 lección).

La resta presenta los siguientes contenidos: resta de un dígito con la incógnita en el resultado (1 lección), resta de un dígito con la incógnita en el sustraendo (1 lección), contar y restar (3 lecciones) y algoritmos de resta con un dígito (1 lección).

La solución de problemas abarca los siguientes tópicos: resolver problemas de suma (3 lecciones), resolver problemas de resta (3 lecciones) y problemas de sumar y restar decenas (1 lección).

El grado de abstracción de los contenidos del libro de texto de primer curso se manifiesta mediante el nivel de presentación de los temas comprendidos en cada lección ya sea con materiales concretos, dibujos, algoritmo o problemas verbales. En este sentido puede decirse que 2 lecciones (3%) corresponden al nivel concreto; 54 lecciones (79%) consisten en la presentación de dibujos; 12 lecciones (18%) utilizan el algoritmo y ninguna lección se presenta en términos de problemas verbales.

El nivel concreto acontece en la enseñanza de las nociones básicas en una lección y en la representación de las cantidades mediante otra lección.

El nivel pictórico se manifiesta en la enseñanza de las nociones básicas en 10 lecciones, los principios de conteo en 9 lecciones, la habilidad de contar en 15 lecciones, la representación de cantidades en 4 lecciones, la suma en 4 lecciones, la resta contempla 3 lecciones y la solución de problemas abarca 6 lecciones.

El nivel numérico ocurre en la enseñanza de la habilidad de contar en 5 lecciones, la representación de cantidades en 3 lecciones, la suma en 3 lecciones y la solución de problemas en una lección.

11.3.2. *Libro de segundo curso*

El libro de texto *Matemáticas*. *Segundo grado* (SEP, 2002) se describe en sus contenidos con relación a la enseñanza de la aritmética y, además, el nivel de abstracción que se requiere de los alumnos.

Este libro incluye 117 lecciones de las cuales 64 lecciones (55%) corresponden a la aritmética y el resto de lecciones (45%) se refieren a los contenidos de geometría. La enseñanza de la aritmética integra la habilidad de contar con 13 lecciones (20%), la representación de cantidades en 11 lecciones (17%), la suma y resta contempla 13 lecciones

(20%), la multiplicación contiene 11 lecciones (17%), la división comprende 1 lección (2%) y la solución de problemas abarca 15 lecciones (24%).

La habilidad de contar consta de los tópicos: unidades (2 lecciones), decenas (1 lección), unidades y decenas (6 lecciones), centenas (1 lección), unidades, decenas y centenas (2 lecciones) y números múltiplos (1 lección).

La representación de cantidades trata de los temas: unidades y decenas (2 lecciones), unidades, decenas y centenas (8 lecciones) y números múltiplos de 100 (1 lección).

La suma y la resta comprenden: algoritmo de suma con un dígito (2 lecciones) y dos dígitos (1 lección), algoritmo de resta con un dígito (1 lección), dos dígitos (1 lección), y tres dígitos (1 lección), algoritmo de resta con dos y tres dígitos (2 lecciones), algoritmos de suma y resta con dos dígitos (3 lecciones) y tres dígitos (2 lecciones).

La multiplicación consta del siguiente aspecto: multiplicación con un dígito (11 lecciones).

La división tiene el siguiente contenido: división de dos dígitos (1 lección).

La solución de problemas abarca los tópicos: problemas de comparación (2 lecciones), problemas verbales (2 lecciones), problemas de resta (1 lección), problemas de multiplicación (4 lecciones), solución de problemas generales (5 lecciones) e invención de problemas (1 lección).

En cuanto al grado de abstracción de los contenidos del libro de texto de segundo curso puede decirse que 24 lecciones (38%) corresponden al nivel concreto; 20 lecciones (31%) consisten en la presentación de dibujos; 13 lecciones (20%) utilizan el algoritmo y 7 lecciones (11%) formulan problemas verbales.

El nivel concreto acontece en la enseñanza de la habilidad de contar en el transcurso de 5 lecciones, la representación de cantidades mediante 8 lecciones, la suma y resta en 5 lecciones, la multiplicación a través de 5 lecciones y la solución de problemas sólo en una lección.

El nivel pictórico se manifiesta en la enseñanza de la habilidad de contar mediante 8 lecciones, en la representación de cantidades en 2 lecciones, en la suma y resta a través de 3 lecciones, en la división sólo en una lección y en la solución de problemas en 6 lecciones.

El nivel numérico sucede en la enseñanza de la suma y la resta en 5 lecciones, en la multiplicación mediante 6 lecciones y en la solución de problemas a través de 2 lecciones.

El nivel verbal se expresa en la representación de cantidades en una lección y en la solución de problemas mediante 6 lecciones.

11.3.3. *Libro de tercer curso*

Una revisión general del libro de texto *Matemáticas. Tercer grado* (SEP, 2002) permite conocer los aspectos de la enseñanza de la aritmética y el grado de abstracción de las tareas que se presenta a los alumnos.

Este libro incluye 88 lecciones de las cuales 40 lecciones (45%) corresponden a la aritmética y el resto de lecciones (55%) se refieren a los contenidos de geometría. La enseñanza de la aritmética integra la representación de cantidades en 11 lecciones (28%), la suma y resta contempla 9 lecciones (22%), la multiplicación contiene 12 lecciones (30%) y la división comprende 8 lecciones (20%).

La representación de cantidades trata de los siguientes temas: unidades y decenas (1 lección), decenas (1 lección), centenas y millares (7 lecciones) y descomposición de números (2 lecciones).

La suma y la resta comprende lo siguiente: algoritmo de suma con dos dígitos (1 lección), y tres dígitos (3 lecciones), algoritmo de resta con dos dígitos (2 lecciones), y tres dígitos (1 lección) y algoritmos de suma y resta con dos dígitos (2 lecciones).

La multiplicación consta de los aspectos: multiplicación con dos dígitos (5 lecciones), problemas de multiplicación (6 lecciones) y multiplicación y división (1 lección).

La división tiene el siguiente contenido: problemas de división (7 lecciones) y división y multiplicación (1 lección).

Con respecto al grado de abstracción de los contenidos del libro de texto de tercer curso se encuentra que 4 lecciones (10%) corresponden al nivel concreto; 11 lecciones (28%) consisten en la presentación de dibujos; 21 lecciones (52%) utilizan el algoritmo y 4 lecciones (10%) formulan problemas verbales.

El nivel concreto acontece en la enseñanza de:

- La representación de cantidades (3 lecciones)
- La suma y resta (1 lección).

El nivel pictórico se manifiesta en:

- La representación de cantidades (5 lecciones)
- La suma y resta (2 lecciones)
- La multiplicación (2 lecciones)
- La división (2 lecciones)

El nivel numérico sucede en:

- La representación de cantidades (2 lecciones)
- La suma y la resta (6 lecciones)
- La multiplicación (7 lecciones)
- La división (6 lecciones)

El nivel verbal se expresa en:

- La representación de cantidades (1lección)
- La multiplicación (3 lecciones)

Cabe mencionar que las lecciones de aritmética se distribuyen a través de los 5 bloques que conforman el curriculum de matemáticas para este curso escolar de la siguiente manera: bloque I (8 lecciones), bloque II (10 lecciones), bloque III (8 lecciones), bloque IV (6 lecciones) y bloque V (8 lecciones). Las lecciones diferentes a la enseñanza de la aritmética están orientadas a la geometría y las fracciones.

11.3.4. *Libro de cuarto curso*

En cuanto al libro de texto *Matemáticas. Cuarto grado* (SEP, 2002) describimos los contenidos de la aritmética que se enseñan a los alumnos, así como el nivel de abstracción con el que se trabaja en la solución de las tareas presentadas.

Este libro de texto incluye 91 lecciones de las cuales 18 lecciones (20%) corresponden a la aritmética y el resto de lecciones (80%) se refieren a los contenidos de geometría, fracciones y estadística. La enseñanza de la aritmética integra la representación de cantidades en 3 lecciones (17%), la suma y resta contempla 3 lecciones (17%), la multiplicación contiene 5 lecciones (27%), la división comprende 4 lecciones (22%) y la solución de problemas integra 3 lecciones (17%)

La representación de cantidades trata de los siguientes temas: representación de cifras con unidades, decenas, centenas, millares y decenas de millar (3 lecciones).

La suma y la resta comprende lo siguiente: algoritmos de suma y resta con decimales (3 lecciones).

La multiplicación consta de los siguientes aspectos: multiplicación con dos dígitos (2 lecciones) y problemas de multiplicación (3 lecciones).

La división tiene el siguiente contenido: problemas de división (2 lecciones) y algoritmo de división (2 lecciones).

La solución de problemas abarca el siguiente tópico: solución de problema general (1 lección).

El grado de abstracción de los contenidos del libro de texto de cuarto curso se describe de la misma manera que los cursos anteriores, por lo cual, puede decirse que 1 lección (5%) corresponde al nivel concreto; 2 lecciones (11%) constan de la presentación de dibujos; 12 lecciones (67%) utilizan el algoritmo y 3 lecciones (17%) formulan problemas verbales.

El nivel concreto se expresa en la enseñanza de:

- La representación de cantidades (1 lección)

El nivel pictórico se manifiesta en:

- La multiplicación (1 lección)
- La división (1 lección)

El nivel numérico sucede en:

- La representación de cantidades (2 lecciones)
- La suma y la resta (3 lecciones)
- La multiplicación (3 lecciones)
- La división (3 lecciones)
- La solución de problemas (1 lección)

El nivel verbal se expresa en:

- La multiplicación (1 lección)
- La solución de problemas (2 lecciones)

Asimismo, las lecciones de aritmética se distribuyen a través de los 5 bloques que conforman el curriculum de matemáticas para este curso escolar de la siguiente manera: bloque I (6 lecciones), bloque II (5 lecciones), bloque III (4 lecciones), bloque IV (1 lección) y bloque V (2 lecciones). Finalmente, la enseñanza de la suma y resta termina en este libro de texto para dar paso a otros temas.

11.4. Algunas cuestiones sobre la enseñanza de la aritmética

No pretendemos hacer un análisis exhaustivo de la enseñanza de las matemáticas en este apartado. En lugar de ello, algunos comentarios generales mencionaremos para orientar un análisis más profundo. En el primer curso, los contenidos del curriculum sobre la enseñanza de la aritmética se dirigen mayormente hacia el dominio de construir conjuntos pequeños y grandes. Los problemas se plantean de tal manera que sugieren la realización de acciones como quitar, poner, repartir antes que ser comprendidos. El cálculo mental adquiere una relevancia fundamental a partir del desarrollo de la habilidad de contar.

En el segundo curso continúa siendo importante la construcción de conjuntos mayores mediante el agrupamiento de colecciones. La suma y la resta se enseñan con el algoritmo de acuerdo con la forma canónica $a + b = c$. El cálculo mental prosigue como procedimiento esencial para la solución. La multiplicación y la división se presentan mediante la solución de problemas.

En el tercer curso se hace hincapié en la utilización de los algoritmos de suma y resta para solucionar distintos problemas. Sin embargo, la multiplicación recibe mayor atención y después la división aunque ambas terminan refiriendo la forma convencional. Las estrategias espontáneas se estimulan cuando corresponden con la solución del problema u operación.

En el cuarto curso prevalece la enseñanza de la multiplicación y la división pasando a un segundo plano la suma y resta. Ahora los problemas de la adición y sustracción sustituyen al algoritmo con lo cual se termina la enseñanza de estas operaciones.

Respecto a los libros de texto mencionaremos que en primer curso la mayor parte de las lecciones se destina a la construcción de las nociones básicas, el desarrollo de la habilidad de contar y el dominio de los números. La suma y la resta ocupan una proporción menor. La habilidad de contar hasta 10 alcanza el mayor número de lecciones. Los problemas que se plantean son muy generales e inespecíficos. El grado de abstracción se apoya principalmente a través de los dibujos, pocas veces en el algoritmo, casi nunca en el nivel concreto y nunca en el nivel verbal. Las nociones básicas ocupan la mayor proporción

El libro de segundo curso dirige la mayoría de sus lecciones a la habilidad de contar, la solución de problemas y la representación de cantidades. La suma y la resta comprenden una quinta parte. La representación de unidades, decenas y centenas obtiene el mayor número de lecciones. El grado de abstracción se resalta a nivel concreto sobretodo en la habilidad de contar y en el dominio de los números, después el nivel pictórico, luego el nivel numérico y, al último, el nivel verbal.

El libro de tercer curso distribuye la mayor parte de sus lecciones en la multiplicación, la división y la representación de cantidades siendo el dominio de las centenas y millares junto con los problemas de reparto donde existen más lecciones. El grado de abstracción se representa en el nivel numérico más que en los otros niveles. La multiplicación es el contenido con mayor proporción.

De manera breve, concluimos que predomina una educación tradicional basada en la transmisión de los conocimientos. Además, existe una desvinculación de los avances de la investigación sobre el tema. Asimismo, hay un exceso en el dominio de las cantidades y la habilidad de contar que lleva a estimular el cálculo mental como una estrategia central.

Por tanto, la suma y la resta se enseñan de manera convencional. Los algoritmos se presentan antes que los problemas verbales de suma y resta. El grado de abstracción se asienta de manera predominante en el nivel pictórico a través de las ilustraciones y en el nivel numérico mediante los números y algoritmos.

PARTE II

ESTUDIO EXPERIMENTAL

12. Planteamiento de objetivos

El propósito de la investigación es estudiar las diferencias evolutivas de los niños en los problemas verbales de Cambio que requieren una sola operación, la adición o la sustracción, en primero, segundo, tercero y cuarto curso de Educación Primaria.

El primer objetivo es averiguar si el grado de abstracción del problema verbal de Cambio tiene la misma dificultad para los alumnos en los distintos cursos.

Para ello formulamos las siguientes preguntas:

1. ¿El rendimiento de los alumnos en el grado de abstracción de los problemas de Cambio dependerá del curso escolar y del lugar donde se encuentra ubicada la incógnita?.
2. Cuando la operación se considera según el grado de abstracción del problema de Cambio, ¿existen diferencias significativas entre la operación de suma y resta?.

El segundo objetivo consiste en determinar si en los problemas de suma y resta se muestran diferencias de rendimiento entre los contextos socioculturales urbanos y rurales.

Entonces tenemos las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles son las diferencias del rendimiento en las distintas tareas según el curso escolar, el tipo de problema, la operación y la incógnita entre los alumnos de escuelas urbanas y escuelas rurales?.
2. ¿El rendimiento de los alumnos de cada contexto sociocultural es específico de un determinado nivel de abstracción?

El tercer objetivo es estudiar los diferentes procedimientos de resolución empleados por los niños y elaborar una descripción de las distintas estrategias que utilizan cuando solucionan los problemas.

Para este caso planteamos las siguientes preguntas:

1. ¿Las estrategias utilizadas por los niños variarán según el curso escolar, el grado de abstracción del problema, el tipo de operación y el lugar ocupado por la incógnita?.
2. ¿Los alumnos de cada contexto sociocultural emplean las estrategias de manera distinta según el nivel de abstracción, el tipo de operación y el lugar de la incógnita en el problema?.

El cuarto objetivo es analizar si las respuestas erróneas se asocian con las distintas variables de los problemas.

Para ello formulamos las siguientes preguntas:

1. ¿Las respuestas erróneas de los niños serán función del grado de abstracción del problema, el tipo de operación, el lugar de la incógnita y el curso escolar?.
2. ¿En los errores cometidos existen diferencias significativas entre los alumnos del contexto rural y del contexto urbano según el nivel de abstracción y el lugar de la incógnita tanto en la suma como en la resta?.

En otras palabras, la investigación tiene el propósito de analizar el rendimiento, el grado de abstracción, el contexto, las estrategias utilizadas y los errores de los escolares de primer hasta cuarto curso en ambos contextos socioculturales con respecto a los distintos problemas de Cambio de suma y resta.

En la Tabla 12.1 exponemos el diseño experimental general que incluye el tipo de operación (suma, resta), el tipo de problema (concreto, dibujos, numérico y verbal) y el lugar de la incógnita (final, inicio). Además, en este diseño se refiere el curso escolar que comprende desde primero hasta cuarto de Educación Primaria, y el contexto sociocultural rural y urbano al cual pertenecen los participantes.

Tabla 12.1

Diseño experimental general

<table>
<tr><th colspan="2">Variables inter-sujetos</th><th colspan="3">Variables intra-sujetos</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Contexto
Urbano
Rural</td><td rowspan="3">Curso
Primero
Segundo
Tercero
Cuarto</td><td>Tipo de operación</td><td>Suma</td><td>Resta</td></tr>
<tr><td>Tipo de problema</td><td>Concreto
Dibujos
Numérico
Verbal</td><td>Concreto
Dibujos
Numérico
Verbal</td></tr>
<tr><td>Lugar de la incógnita</td><td>Final
Inicio</td><td>Final
Inicio</td></tr>
</table>

Por tanto, el tipo de problema, la operación y el lugar de la incógnita son las variables intra-sujetos, mientras que el contexto y el curso escolar se definen como las variables inter-sujetos. Todos los participantes pasan por todas las tareas en este diseño.

13. Método

En esta sección describiremos la metodología de la investigación a partir de la justificación del uso del método piagetiano, las características de los participantes, los materiales empleados y el procedimiento.

El método clínico de Piaget se emplea en este estudio como un procedimiento de conversaciones abiertas con los niños para intentar aprehender la construcción de su pensamiento. No se trata solamente de contar con la respuesta correcta o incorrecta, sino de indagar las justificaciones y explicaciones que dan los propios niños de sus contestaciones. Cabe aclarar que no es un mero conjunto de conversaciones y preguntas verbales, por el contrario presupone la acción orientada del experimentador y la interacción con los participantes de una manera indagatoria. La conducta infantil que se observa puede ser verbal, manipulativa con lenguaje o puramente manipulativa.

Una característica principal es la intervención repetida del experimentador ante las acciones infantiles. El experimentador esta en presencia de un alumno al que se estudia individualmente y con el que se establece una interacción. Además, se le sitúa en una situación problemática que tiene que resolver o explicar y, entonces, se observa lo que acontece. Mientras el alumno responde, el experimentador analiza lo que está sucediendo y elabora una serie de planteamientos para aclarar el significado de la respuesta infantil. Puede intervenir en una serie de aspectos manifestados por el niño con el fin de esclarecer cual es el sentido de lo que está haciendo. Por tanto, el experimentador tiene que ser muy flexible y sensible a lo que el niño está realizando.

De acuerdo con este método, el alumno no se entiende como una máquina de respuesta o un autómata sino como un individuo que forma conocimientos. El interés no se centra en su individualidad sino en las características generales de sus explicaciones o soluciones de un problema. De este modo, el objetivo del método es tratar de encontrar los caminos por los cuales los participantes llegan a la explicación de su respuesta. Este método supone que cada participante tiene una estructura mental coherente en evolución que le lleva a dar un determinado tipo de respuesta. Aunque puede ser que sus respuestas no sean tan coherentes sino contradictorias, esto mismo es señal de su desarrollo evolutivo.

13.1. Participantes

Un total de 192 niños han participado en la investigación siendo 96 escolares de escuelas rurales y 96 alumnos de escuelas urbanas.

Los participantes son alumnos de primer curso, segundo, tercero y cuarto de distintas escuelas primarias públicas del Estado de Zacatecas en México.

La muestra rural se integró por 24 alumnos de primer curso, 24 de segundo, 24 de tercero y 24 de cuarto, todos se seleccionaron aleatoriamente. Estos alumnos procedían de nueve escuelas primarias.

Los niños de primer curso tenían un rango de edad entre 6 y 7.5 años (M = 6.6). Los participantes de segundo contaban con edades comprendidas entre 7 y 8.3 años (M = 7.5). Los alumnos de tercero tuvieron edades entre 7.11 y 9.7 años (M = 8.5). Y los escolares de cuarto tenían un rango de 9.3 a 10.11 años (M = 9.7).

En esta muestra participaban 48 niños y 48 niñas siendo 11 niños y 13 niñas en primer curso, 13 niños y 11 niñas en segundo, 12 niños y 12 niñas en tercero y 12 niños y 12 niñas en cuarto.

El contexto rural es el municipio de Luis Moya, el cual está ubicado en el centro-norte del país a 60 km de la capital del estado de Zacatecas. Las escuelas primarias públicas que han formado parte de esta investigación son: escuela “Delfina Castorena” turno matutino y vespertino, “Ford 129”, “Coecillo”, “Felipe Acosta”, “Miguel Hidalgo”, “Esteban Castorena”, “Héroes de Chapultepec” y “Aurelio Pámanes”. Todos los participantes en el estudio pertenecen a familias con nivel económico bajo. En estas escuelas el programa escolar de las matemáticas presenta la operación de suma en la segunda mitad del primer curso, mientras que la operación de resta empieza en la segunda mitad del segundo curso escolar.

La muestra urbana se formó por 24 alumnos de primer curso, 24 de segundo, 24 de tercero y 24 de cuarto, siendo todos seleccionados al azar. Los alumnos de esta muestra procedían de doce escuelas primarias diferentes.

Los participantes de primer curso manifiestan edades comprendidas entre 6 y 7.6 años (M = 6.8). Los niños de segundo contaban con un rango de edad entre 7 y 8.2 años (M = 7.7). Los escolares de tercero tenían edades que oscilaban entre 8 y 9.2 años (M = 8.4). Y los alumnos de cuarto tuvieron un rango de 9.2 a 10.4 años (M = 9.8).

En esta muestra participaban 50 niños y 46 niñas, de los que 13 niños y 11 niñas pertenecían a primer curso, 13 niños y 11 niñas a segundo, 12 niños y 12 niñas a tercero, y 12 niños y 12 niñas a cuarto.

El contexto urbano es el área metropolitana de la ciudad de Zacatecas, capital del mismo Estado. Las escuelas primarias públicas que participaron en esta investigación son: “Ejidal”, “Víctor Rosales”, “Eulalia Guzmán”, “UPN”, “Fovissste”, “Constituyentes 1917”, “Francisco Berumen”, “Pánfilo Natera”, “Ford 4”, “Narciso Mendoza”, “Lázaro Cárdenas” y “Francisco Várela”.

La mitad de los participantes pertenecía a familias con nivel económico bajo y la otra mitad a familias con nivel medio bajo. En estas escuelas, el programa escolar sobre la suma y la resta es el mismo que en las escuelas rurales.

Por una parte, en cuanto al procedimiento de selección elegimos a los participantes de manera aleatoria entre sus iguales del mismo curso escolar. Así, los alumnos rurales de primero asistían a clases en las escuelas “Ford 129”, “Delfina Castorena” turno matutino y vespertino. Entonces, 8 niños de cada una formaron la muestra de primer curso. El procedimiento aleatorio se realizó de la manera siguiente: el experimentador obtenía por sorteo 8 números que correspondían con la lista de asistencia entre el total de alumnos inscritos en cada grupo. Por tanto, los alumnos (24 en total) cuyo número de lista correspondía con el número sorteado integraron la muestra. El procedimiento de selección aleatoria se realizó de la misma manera con los participantes de segundo (de las escuelas “Coecillo”, “Miguel Hidalgo” y “Ford 129”), tercero (en las escuelas “Felipe Acosta”, “Miguel Hidalgo” y “Delfina Castorena” turno matutino) y cuarto curso (de las escuelas “Esteban Castorena”, “Héroes de Chapultepec” y “Aurelio Pámanes”).

Los alumnos urbanos de primero asistían a clases en las escuelas “Víctor Rosales”, “Eulalia Guzmán” y “Francisco Berumen”. Por tanto, 8 participantes de cada escuela conformaron la muestra de este curso y se eligieron tal como se hizo en las escuelas rurales. Los alumnos de segundo asistían a clases en las escuelas “Constituyentes 1917”, “Ejidal” y “UPN” y se seleccionaron según el procedimiento descrito anteriormente. Los alumnos de tercero son de las escuelas “Fovissste”, “Pánfilo Natera” y “Ford 4” y fueron seleccionados como se ha indicado más arriba. Asimismo, los escolares de cuarto se eligieron de igual forma en las escuelas “Narciso Mendoza”, “Lázaro Cárdenas” y “Francisco Várela”.

Por otra, la presentación de las pruebas a los participantes requería previamente la obtención de un permiso, tanto de la instancia educativa como de los padres de familia. Para ello se presentó un plan de trabajo describiendo el objetivo general, las actividades y los tipos de problemas en una entrevista con el director de cada institución. La presentación del autor se realizó como profesor de Psicología de la Universidad Autónoma de Zacatecas, quien realiza sus estudios de doctorado en Psicología Escolar y Desarrollo en la Universidad Complutense de Madrid.

Los directores tuvieron conocimiento que cada alumno en cada sesión sería grabado en vídeo para un mejor análisis de sus respuestas. En las escuelas donde se solicitó el permiso se tuvo una respuesta favorable por los directores de las mismas. Entonces, el siguiente paso consistía en realizar una entrevista breve con el profesor de cada grupo escolar participante. En esta entrevista, el investigador presentaba el mismo objetivo, el plan de trabajo, los tipos de problemas y el procedimiento a efectos de conocimiento del propio profesor. Todos los profesores de grupo respondieron positivamente. Algunos se mostraban interesados en la investigación y otros solicitaron un informe sobre los resultados de las estrategias utilizadas por los alumnos.

El segundo se solicitó a los padres de familia. En un documento escrito dirigido a cada padre de familia, el investigador pedía permiso para que su hijo participara en el programa. Este documento señalaba la presentación del autor, el objetivo del estudio, el plan de trabajo, los tipos de problemas y el procedimiento, además, la elección del niño por medio de sorteo, y sobretodo cuestiones éticas como la confidencialidad de las respuestas de los niños y la privacidad de las grabaciones sin fines de difusión, sino como material para un análisis más completo y objetivo de las respuestas de sus hijos. Todos los padres dieron su aprobación escrita.

13.2. Material

El material de la investigación fueron 16 problemas con la estructura semántica de Cambio presentados en 4 modalidades distintas. Estos problemas se dividieron en 8 problemas de suma y 8 problemas de resta. A la vez, estos problemas se distinguían por el lugar que ocupa la incógnita ya sea al principio o al final. Por tanto, el material consistía de 4 problemas de suma con la incógnita en el resultado y 4 problemas de suma con la incógnita en el primer sumando, así como, 4 problemas de resta con la incógnita en el resultado y 4 problemas de resta con la incógnita en el minuendo. Asimismo, cuatro niveles de abstracción se presentaron en cada uno de los tipos de problemas mencionados anteriormente. Entonces, diseñamos estos problemas considerando la vía de lo concreto a lo abstracto en la siguiente secuencia: objetos, dibujos, números y preguntas verbales.

De acuerdo con esto tenemos 16 problemas para investigar, los cuales son:

1. Problema concreto de suma con la incógnita en el resultado.
2. Problema con dibujos de suma con la incógnita en el resultado.
3. Problema numérico de suma con la incógnita en el resultado.
4. Problema verbal de suma con la incógnita en el resultado.
5. Problema concreto de suma con la incógnita en el primer sumando.
6. Problema con dibujos de suma con la incógnita en el primer sumando.
7. Problema numérico de suma con la incógnita en el primer sumando.
8. Problema verbal de suma con la incógnita en el primer sumando.
9. Problema concreto de resta con la incógnita en el resultado.
10. Problema con dibujos de resta con la incógnita en el resultado.
11. Problema numérico de resta con la incógnita en el resultado.
12. Problema verbal de resta con la incógnita en el resultado.
13. Problema concreto de resta con la incógnita en el minuendo.
14. Problema con dibujos de resta con la incógnita en el minuendo.
15. Problema numérico de resta con la incógnita en el minuendo.
16. Problema verbal de resta con la incógnita en el minuendo.

13.2.1. *Problemas de suma*

El material que se utilizó en la presentación de cada uno de los ocho problemas de suma es el siguiente:

1. Problema verbal de suma con la incógnita en el resultado. Este problema se elaboró en una tarjeta de papel blanco, la cual mide 12 cm de largo por 8 cm de ancho. El texto del problema era: “ Juan tenía tres canicas. Lupita de da cuatro canicas más. ¿Cuántas canicas tiene ahora Juan?”. Este texto se escribió con letra “Times New Roman” en tamaño 14 y en color rojo siendo editado en un ordenador portátil IBM 560E (ver Figura A.1 en el apéndice)

2. Problema verbal de suma con la incógnita en el primer sumando. Se guardan las mismas características que en el problema anterior, excepto el enunciado del problema: “Juan tenía algunos lápices. Lupita le da 3 lápices más. Ahora tiene 8 lápices. ¿Cuántos lápices tenía al principio?” (ver Figura A.2 en el apéndice).

3. Problema numérico de suma con la incógnita en el resultado. Este problema se realizó en una tarjeta del mismo papel con medidas de 6 cm de largo por 4 cm de ancho. Los números y signos del problema (3 + 4 =) se escribieron con el mismo tipo, color y ordenador mencionado anteriormente (ver Figura A.3 en el apéndice).

4. Problema numérico de suma con la incógnita en el primer sumando. El problema era + 3 = 8 y las demás características fueron idénticas al problema anterior (ver Figura A. 4 en el apéndice).

5. Problema con dibujos de suma con la incógnita en el resultado. Este problema se elaboró con cinco tarjetas. La primera medía 12 cm de largo por 8 cm de ancho y tenía tres canicas dibujadas, las cuales son de 3.2 cm de diámetro con distintos colores. La segunda medía 4 cm de largo por 2 cm de ancho, además contenía el signo más dibujado de color rojo en el centro de la misma. La tercera es similar a la primera, pero sólo tenía cuatro canicas dibujadas del mismo tamaño y color que las anteriores. La cuarta se parecía a la segunda con

la diferencia de que contiene el signo igual. La quinta y última tarjeta reunía las mismas características que la primera, excepto que no tenía algún dibujo y sólo representaba la incógnita en el problema. Los dibujos de este problema se diseñaron con el programa Word 97, en el mismo ordenador que los anteriores (ver Figura A.5. en el apéndice).

6. Problema con dibujos de suma con la incógnita en el primer sumando. Este problema mantenía las mismas características que el problema anterior, excepto que la primer tarjeta representaba la incógnita, la tercera contenía tres lápices dibujados de 6 cm de alto por 8 mm de ancho, cada uno en colores amarillo, rosa, gris, café y negro, y en la quinta estaban ocho lápices dibujados similarmente como los anteriores (ver Figura A.6. en el apéndice).

7. Problema concreto de suma con la incógnita en el resultado. Este problema se diseñó con 3 canicas multicolor "Vacor"® de 1.5 cm de diámetro, un signo más de plástico "Plastykol"® de 2.5 cm de largo en color anaranjado, 4 canicas iguales a las anteriores y un signo igual con las mismas características que el signo más (ver Figura A. 7. en el apéndice).

8. Problema concreto de suma con la incógnita en el primer sumando. En este problema eran similares el signo igual y más al anterior problema, pero en lugar de canicas se emplearon 3 lápices No. 2 "Crayola"® tamaño mediano (19 cm) de color amarillo como segundo sumando, y 8 lápices más que representaban el resultado (ver Figura A. 8. en el apéndice).

La figura de un niño representó a "Juanito" en todos los problemas de suma. Este niño tenía la cara redonda y pelo corto, vestía una camisa con rayas horizontales azules y blancas, un corto rojo arriba de las rodillas y calza un par de tenis azules. Representaba a un niño de 8 años aproximadamente. Esta figura medía 4.5 cm. de largo y se recortó del libro de matemáticas de cuarto curso (1998) publicado por la editorial Trillas®.

13.2.2. *Problemas de resta*

Estos problemas reúnen las mismas características que los problemas de suma correspondientes a excepción de las siguientes diferencias en cada problema:

1. Problema verbal de resta con la incógnita en el resultado. El texto del problema escrito en color negro era: "Pepe tenía 8 dulces. Le dio 2 dulces a María. ¿Cuántos dulces le quedan ahora?" (ver Figura A.9 en el apéndice).

2. Problema verbal de resta con la incógnita en el minuendo. El texto del problema se redactó en el mismo color que el anterior y se enunciaba: "Pepe tenía algunas galletas. Le dio 4 galletas a María. Ahora le quedan 5. ¿Cuántas galletas tenía al principio?" (ver Figura A. 10 en el apéndice).

3. Problema numérico de resta con la incógnita en el resultado. En este problema, el algoritmo era 8 – 2 = (ver Figura A. 11 en el apéndice).

4. Problema numérico de resta con la incógnita en el minuendo. La operación numérica era - 4 = 5 (ver Figura A. 12 en el apéndice).

5. Problema con dibujos de resta con la incógnita en el resultado. La primera tarjeta tenía ocho caramelos dibujados manualmente de 4.5 cm de alto por 1 cm de ancho en colores rojo y negro. La segunda contenía el signo menos en color negro. La tercera tenía dos caramelos similares a los anteriores. La cuarta contenía el signo igual en color negro dibujado en el centro de la misma (ver Figura A. 13 en el apéndice).

6. Problema con dibujos de resta con la incógnita en el minuendo. La segunda tarjeta tenía dibujado un signo menos en color negro. La tercera contenía 4 galletas redondas dibujadas y distribuidas en dos columnas, medían 4 cm de largo por 2 cm de ancho, y son de color negro y blanco. En la cuarta estaba dibujado el signo igual en color negro. La quinta y última tarjeta tenía cinco galletas similares a las anteriores (ver Figura A. 14 en el apéndice).

7. Problema concreto de resta con la incógnita en el resultado. En este problema se emplearon 8 caramelos “Super natilla”® de 3 cm de largo por 1 cm de ancho, un signo menos en color amarillo de 2.5 cm de largo, 2 caramelos similares a los anteriores y un signo igual del mismo color (ver Figura A. 15 en el apéndice).

8. Problema concreto de resta con la incógnita en el minuendo. Los materiales empleados eran un signo menos igual que el anterior, 4 galletas “Bimbo Lara”® de color crema con 2.5 cm de diámetro, un signo igual similar al anterior y 5 galletas iguales que las otras (ver Figura A. 16 en el apéndice).

La misma figura de “Juanito” se usó en todos los problemas de resta.

13.3. Procedimiento

Los problemas de suma y resta se presentaron en dos sesiones. En la primera, ocho problemas se pasaron a los participantes y en la segunda los otros ocho. Cada problema se aplicó a cada participante en las dos sesiones.

A continuación describiremos el procedimiento seguido por el propio investigador en cada sesión.

13.3.1. *Sesión 1*

El experimentador decía “Ahora vamos a iniciar con una serie de problemas de suma y resta, tu puedes contestarme como tú creas, lo que tú me digas esta bien”. Posteriormente se presentaban los 8 problemas.

En primer lugar se presentaba frente al niño la tarjeta con el **problema verbal de suma con la incógnita en el primer sumando** y se daba la siguiente instrucción: “Te presento este problema, te lo leo, tu también puedes leerlo”, a continuación el problema se enunciaba diciendo “Juan tenía algunos lápices. Lupita le da 3 lápices más. Ahora tiene 8 lápices. ¿Cuántos lápices tenía al principio?”. Si el niño no podía leerlo completamente, estuvo distraído, o pidió la repetición del problema, entonces el problema se presentó otra vez. Después que el alumno daba su respuesta, el experimentador decía: “estoy interesado en saber cómo los niños de tu edad contestan a este problema, dime ¿Tú como le has hecho?”. A continuación el niño daba su explicación, pero si no era suficiente el experimentador volvía a preguntar de la siguiente manera: “Otro niño me ha dicho lo mismo que tú, ¿Cómo crees que él lo ha hecho?”.

En segundo lugar se exponía el **problema concreto de resta con la incógnita en el resultado**. Este problema se colocaba frente al alumno como se describe en el apéndice. Además, la figura de “Juanito” se situó en el espacio correspondiente a la incógnita. A continuación, el experimentador preguntaba al participante sobre los conjuntos y los signos para saber si el niño comprendía la tarea. Por ejemplo, ¿Cuántos dulces son aquí? (se señalan 8 caramelos y 2 caramelos), ¿Qué signo es éste? (los signos menos e igual son señalados). Posteriormente, el investigador daba la siguiente indicación: “Juanito tiene estos dulces (el lugar de la incógnita se señala con el dedo), ¿Cuántos son?”. El procedimiento siguiente en este problema era similar al anterior.

En tercer lugar se pasaba el **problema verbal de resta con la incógnita en el minuendo**. Las instrucciones eran las mismas que el primero. A continuación se enunciaba este problema: “Pepe tenía algunas galletas. Le dio 4 galletas a María. Ahora le quedan 5. ¿Cuántas galletas tenía al principio?”. La siguiente parte del procedimiento en este problema fue igual que los anteriores.

En cuarto lugar se mostraba el **problema numérico de suma con la incógnita en el primer sumando** frente al alumno como se describe en el apéndice. Asimismo, el experimentador preguntaba al niño sobre los números y signos para conocer si comprendía la tarea. La figura de "Juanito" se colocaba en el lugar de la incógnita y el experimentador daba la siguiente instrucción: "Juanito tiene estos lápices (señala con el dedo el lugar de la incógnita), ¿Cuántos son?". El procedimiento siguiente en este problema era similar a los anteriores.

En quinto lugar se presentaba el **problema con dibujos de resta con la incógnita en el resultado** tal como se aprecia en el apéndice. Igualmente, las preguntas sobre la comprensión de la tarea, las indicaciones y el procedimiento en este problema fueron iguales al segundo problema.

En sexto lugar se exponía el **problema numérico de suma con la incógnita en el resultado**, tal como se muestra en el apéndice. Las preguntas sobre la comprensión de la tarea fueron similares al cuarto problema. Posteriormente, el experimentador daba la siguiente indicación: "Juanito tiene estas canicas (señala con el dedo el lugar de la incógnita), ¿Cuántas son?". La parte final del procedimiento en este problema era igual que los anteriores.

En séptimo lugar se pasaba el **problema con dibujos de suma con la incógnita en el primer sumando** tal como se ve en el apéndice. Todo el procedimiento se realizó como en el cuarto problema.

En octavo y último lugar se mostraba el **problema el numérico de resta con la incógnita en el resultado**. Igualmente, el procedimiento era parecido al anterior problema numérico.

Al final de la respuesta dada por el alumno en cada uno se presentaba el siguiente problema. Además, no se proporcionó retroalimentación o inducción para la respuesta correcta.

13.3.2. *Sesión 2*

Esta sesión se inició un mes después de la primera. El procedimiento seguido es el siguiente:

El experimentador decía "Ahora continuamos con otra serie de problemas de suma y resta, puedes contestar como tú creas, lo que tú digas esta bien". Posteriormente, se presentaban los últimos 8 problemas a los participantes.

En primer lugar se mostraba el **problema de dibujos con resta con la incógnita en el minuendo** tal como se aprecia en el apéndice. Las preguntas sobre la comprensión de la tarea eran similares a las anteriores. Después, el investigador daba la siguiente instrucción: "Juanito tiene estas galletas (señala con el dedo el lugar de la incógnita), ¿Cuántas son?". La parte siguiente del procedimiento era la misma que los anteriores.

En segundo lugar se presentaba el **problema concreto de resta con la incógnita en el minuendo** y el procedimiento completo fue el mismo que el anterior problema.

En tercer lugar se exponía el **problema numérico de resta con la incógnita en el minuendo** siguiendo el mismo proceso anterior.

En cuarto lugar se pasaba el **problema verbal de suma con la incógnita en el resultado**. El procedimiento se realizó de la misma forma que los anteriores problemas verbales y este problema se enunciaba: "Juan tenía 3 canicas. Lupita le da 4 canicas más. ¿Cuántas canicas tiene ahora Juan?".

En quinto lugar se mostraba el **problema concreto de suma con la incógnita en el primer sumando**. El procedimiento era igual l que se realizó en el séptimo problema de la primera sesión.

En sexto lugar se presentaba el **problema verbal de resta con la incógnita en el resultado**. El proceso era el mismo que los anteriores y este problema se enunciaba: "Pepe tenía 8 dulces. Le dio 2 dulces a María. ¿Cuántos dulces le quedan ahora?".

En séptimo lugar se pasaba el **problema concreto de suma con la incógnita en el resultado**. El procedimiento seguido fue el mismo que los anteriores, excepto las indicaciones: "Juanito tiene estas canicas (el lugar de la incógnita se señala con el dedo), ¿Cuántas son?".

En octavo y último lugar se exponía el **problema con dibujos de suma con la incógnita en el**. El procedimiento era el mismo que el anterior problema.

Tampoco se dio retroalimentación o inducción sobre la respuesta apropiada.

Los problemas se contrabalancearon en el orden de presentación de igual manera a través de las dos sesiones para todos los participantes.

El estudio se llevó a cabo durante el ciclo escolar 2002-2003 en noviembre y diciembre del 2002, así como en enero y febrero del 2003.

Los problemas se pasaron individualmente en un tiempo de 15 minutos en cada sesión. Los participantes no tuvieron la presión del tiempo para responder a los problemas.

13.3.3. *Equipo y espacio*

El registro de las sesiones se realizó con el siguiente equipo: una cámara de vídeo Sony ® 360 X, un tripie para esta cámara, 12 casetes de vídeo Sony ® Hi8 y un micrófono inalámbrico de solapa Steren ® MIC-290 con su adaptador. La cámara se instaló a 3 metros de distancia del niño y con una altura de un metro. El enfoque de la grabación se centró en las respuestas verbales y las acciones de los niños con sus dedos o manos; con el micrófono se grabaron las respuestas de los participantes, aunque la cámara portaba una recepción ambiental. Esta cámara se fijó al tripie para evitar contar con personal que la manejara e influyera en la respuesta del niño, sea inhibiéndola o juzgándola. Los participantes que conocían del proceso de grabación estaban de acuerdo y no tuvieron en cuenta la cámara durante el procedimiento.

Para la realización de la investigación se requiere un espacio tranquilo, libre de ruidos y de interferencias imprevistas. Este requerimiento se planteó ante los directores de las escuelas primarias en el momento de la solicitud. En algunas escuelas se contó con el espacio ideal mediante una aula exclusiva para realizar cada sesión. En otras se proporcionó un espacio en el edificio de la administración escolar. Sin embargo, las condiciones son muy diversas en cada centro escolar sobretodo en las escuelas rurales. En estas escuelas se observó la carencia de una infraestructura material, por la cual las limitaciones de espacio se encontraron en el hacinamiento y el trabajo en áreas al aire libre como características típicas del sistema educativo de un país en vías de desarrollo. A pesar de las variantes del espacio, todos los participantes se concentraron en las tareas planteadas y daban sus respuestas sin alguna influencia significativa de lo anterior.

El mobiliario era una mesa escolar donde se colocó todo el material de trabajo para la aplicación de los distintos problemas de suma y resta, por tanto, los alumnos veían con anticipación los materiales que se emplearían en los problemas. Además, dos sillas en posición frontal se utilizaron en la sesión, una para el alumno y otra para el experimentador.

13.4. Corrección

Las respuestas infantiles se identificaron como correctas e incorrectas, así como, las estrategias empleadas para la solución de los problemas y los errores cometidos en la solución de los mismos. El rendimiento se valoró como acierto o error.

13.4.1. *Tipos de estrategias*

Las estrategias se distinguieron de acuerdo con el tipo de operación, por lo cual se tienen dos tipos: estrategias para la suma y estrategias en la resta.

A continuación exponemos las estrategias que consideramos para la corrección de las respuestas.

En las estrategias de suma se tienen en cuenta las categorías propuestas por Carpenter y Moser (1983,1984): estrategias de *modelado*, estrategias de *conteo* y estrategias de *hechos numéricos*.

A) Estrategias de modelado directo.

La estrategia ***contar todo con modelos*** consiste en representar ambos conjuntos mediante objetos físicos o los dedos y contar después estos objetos en función de la operación planteada.

Esta estrategia se especifica nuevamente en los siguientes procedimientos mencionados anteriormente en la sección 6 de acuerdo con Baroody (1987).

A1: Se parece a la estrategia de contar todo con objetos sólo que inicia el recuento a partir del cardinal del primer conjunto.

A2: Se representa ambos conjuntos y se obtiene la suma total mediante un patrón de reconocimiento.

A3: Se utiliza el conteo para representar con los dedos el primer sumando y la percepción inmediata para el segundo, por último, se cuenta todo.

A4: Es semejante a la anterior sólo que el recuento final se inicia a partir del cardinal del primer sumando.

A5: Es igual que las dos anteriores, pero la suma total se extrae por medio de un patrón de reconocimiento.

A6: Es similar a A3, sólo que el patrón de reconocimiento se hace en el primer conjunto en lugar del segundo.

A7: Es parecida a A4, con la excepción descrita en A6.

A8: Se representa el primer conjunto mediante percepción inmediata, luego cuenta el segundo conjunto y, por último, obtiene la suma total mediante percepción inmediata.

A9: Representa ambos sumandos mediante percepción inmediata y enseguida se cuenta todo para obtener la suma total.

A10: Es similar a la anterior, pero el recuento final comienza a partir del cardinal del primer sumando.

A11: Igual que A9 sólo que la suma total se produce por percepción inmediata.

B) Estrategias de conteo.

Son estrategias más evolucionadas que las anteriores y presuponen un proceso de conteo sin representación previa de los sumandos.

En este sentido, se tienen en cuenta tres tipos de estrategias: *contar sin modelos*, *contar a partir del primer sumando* y *contar a partir del sumando mayor*.

Contar sin modelos supone que la secuencia de conteo se inicia en el primer sumando y continua en el segundo hasta su conclusión, pero el niño no usa objetos o dedos para representar los conjuntos de la suma.

Contar a partir del primer sumando consiste en comenzar la secuencia de conteo con el cardinal del primer sumando y continuar con el segundo, sin previa representación de los conjuntos.

Contar a partir del sumando mayor supone iniciar la secuencia de conteo a partir del cardinal del sumando mayor, añadiendo a continuación el valor del otro sumando.

En esta estrategia describimos el procedimiento específico según Baroody (1984b; 1987).

B1: representar únicamente el segundo sumando mediante conteo y obtener el total recontando ambos sumandos.

B2: representar sólo el segundo sumando mediante conteo y obtener el total contando a partir del cardinal del primer sumando.

B3: representar el segundo sumando mediante el conteo y extraer el total mediante percepción inmediata, siempre y cuando exista una imagen mental del primer conjunto o un patrón implícito de dedos.

B4: representar el segundo sumando por percepción inmediata y obtener el total recontando ambos conjuntos.

B5: representar el segundo sumando mediante percepción inmediata y obtener la suma total contando a partir del cardinal del primer sumando.

B6: representar el segundo sumando por percepción inmediata y obtener el total también mediante percepción inmediata, siempre y cuando el niño tenga una imagen mental del primer conjunto o un patrón implícito de dedos.

C) Estrategias de hechos numéricos.

Estas estrategias se basan en la memorización y uso de reglas.

En las estrategias de ***memoria***, el hecho numérico se recupera inmediatamente de la memoria a largo plazo.

Las estrategias basadas en ***reglas*** se refieren a los procedimientos de descomposición y composición de los números para encontrar la suma total o el resultado.

Asimismo, las estrategias de resta se categorizan similarmente como en la suma según Carpenter y Moser (1982, 1983).

A) Estrategias de modelado directo.

Separar de.- El niño representa primeramente la cantidad mayor, quitando de la misma la cantidad menor. El niño forma el conjunto mayor de objetos, después separa de ellos un conjunto de objetos igual al substraendo, y cuenta al final la cantidad de objetos restantes.

Separar a.- El niño separa los objetos del conjunto mayor hasta que queda exactamente el número representado por el conjunto menor. Después, se cuentan los objetos separados, encontrando así la respuesta.

Añadir a.- El niño forma primeramente el conjunto mayor, después constituye el conjunto menor, añadiendo a esta cantidad, sin contar, tantos objetos como sean necesarios para igualar ambos conjuntos. La respuesta aparece al contar los objetos o elementos añadidos.

Emparejamiento.- El niño forma los dos conjuntos que representan los números de la resta, formando correspondencias uno-a-uno entre ambos. Después obtiene la respuesta contando los objetos no emparejados.

B) Estrategias de conteo.

En este caso se tuvieron en cuenta tres tipos de estrategias: *contar hacia atrás a partir de, contar hacia atrás, contar a partir de lo dado.*

Contar hacia atrás a partir de.- El niño cuenta hacia atrás a partir del mayor de los números dados, retrocediendo tantas veces cuantas se representan en el número menor. El último número pronunciado en la secuencia hacia atrás es la respuesta.

Contar hacia atrás.- El niño cuenta hacia atrás desde el número mayor hasta que llega al menor; entonces detiene la secuencia y cuenta los numerales emitidos durante el conteo hacia atrás para encontrar la respuesta.

Contar a partir de lo dado.- El niño cuenta a partir del número menor hasta que alcanza el número mayor y la cantidad de numerales contados es la solución.

C) Estrategias de hechos numéricos.

Hay dos tipos de estrategias: *hecho conocido* y *hecho derivado*.

En la primera el niño da su respuesta basándose en el recuerdo de un hecho numérico particular, mientras que en la segunda el niño deriva la respuesta de un hecho numérico conocido.

13.4.2. *Tipos de errores*

La taxonomía de los errores se consideró según la clasificación propuesta por Bermejo y otros (2002). Así, los errores se clasificaron en: conceptuales, procedimentales y de ejecución.

Los errores conceptuales son: *repetir una de las cantidades, inventar la respuesta, transforma el problema, no sabe hacerlo, palabra clave, no sabe explicarlo, no lo entiende y confunde números y letras.*

1) ***Repetir una de las cantidades propuestas en el problema***.- El niño contesta con uno de los dos números dados en el problema.
2) ***Inventar la respuesta.***- El niño da otra respuesta inapropiada.
3) ***Transforma el problema***.- El niño aplica la forma canónica A + B = X cuando la incógnita se sitúa en uno de los sumandos. Asimismo, este error suele ocurrir cuando el niño realiza una operación distinta a la esperada.
4) ***No sabe hacerlo.***-El niño no da una respuesta.
5) ***Palabra clave***.- El niño responde a partir de la identificación de la palabra clave.
6) ***No sabe explicarlo***.- El niño contesta pero no sabe como contestarlo.
7) ***No lo entiende***.- El niño no comprende el problema.
8) ***Confunde números y letras***.- El niño cambia los números al principio del problema.

Los errores procedimentales son: *control inadecuado de la operación, control inadecuado del algoritmo, olvida la decena, suma unidades y decenas, no sabe con números grandes y ensayo y error*.

1) ***Control inadecuado de la operación***.- El alumno no realiza adecuadamente la operación.
2) ***Control inadecuado del algoritmo***.- El niño confunde el algoritmo.
3) ***Olvida la decena***.- El alumno no considera las unidades de decenas.
4) ***Suma unidades y decenas***.- El alumno no distingue entre la posición de los números en el sistema numérico.
5) ***No sabe con números grandes***.- El alumno fracasa cuando se presentan números grandes.
6) ***Ensayo y error***.- El alumno da una respuesta que cambia continuamente por otra sin realizar la respuesta adecuada.

Los errores en la ejecución son: *conteo, cálculo mental y confunde números.*

1) ***Conteo***.- El niño realiza el conteo de manera incorrecta para obtener la respuesta.
2) ***Cálculo mental***.- El alumno elabora mentalmente una respuesta errónea.
3) ***Confunde números***.-El alumno cambia un número por otro en la operación.

Si la respuesta dada por el niño era correcta se puntuaba con un 1; si era errónea se puntuaba con 0. Las puntuaciones corregidas se muestran en el apéndice. Los tipos de estrategias y errores manifestados por los participantes se presentarán en las tablas dentro de la sección de resultados.

14. Análisis y discusión de resultados

Esta sección se divide en cuatro apartados: 1) análisis del rendimiento, 2) análisis del contexto escolar rural vs. contexto escolar urbano, 3) análisis del uso de estrategias y 4) análisis de los errores.

14.1. Análisis del rendimiento

En este apartado veremos los resultados encontrados de acuerdo con el tipo de problema, la operación y el lugar de la incógnita en un sentido global tanto por los alumnos del contexto rural como del urbano. Las respuestas correctas de los participantes se calcularon por cada problema de suma y resta (ver Tablas A.1-A.8 en el apéndice). En general, el índice de Cronbach *(alpha)* de fiabilidad es de 0.90 (ver apéndice).

14.1.1. *Rendimiento en el tipo de problema, la operación y la incógnita*

Por un lado, los resultados de los alumnos de ambos contextos se analizan de acuerdo con el tipo de problema: concreto, dibujos, numérico y verbal. Para esto, presentamos las puntuaciones medias del rendimiento global independiente del tipo de operación y el lugar de la incógnita.

La Tabla 14.1 muestra el rendimiento obtenido por los cursos escolares de ambos contextos según el tipo de problema. Todos los cursos rurales obtienen el mayor rendimiento en los problemas verbales.

A continuación describimos la competencia de solución de los problemas más fáciles y difíciles de acuerdo con el curso escolar en el contexto rural.

Tabla 14.1.

Puntuaciones medias del rendimiento de los cursos del contexto rural y urbano en el tipo de problema, la operación y el lugar de la incógnita.

	Contexto Rural				Contexto Urbano			
	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto
Variable	M DS	M DS	M DS	M DS	M DS	M DS	M DS	M DS
Problema								
Concreto	1.50(.62)	1.91(.54)	2.25(.67)	3.75(.35)	1.50(.66)	2.62(.69)	2.54(.71)	3.58(.41)
Dibujos	1.29(.66)	1.62(.64)	2.33(.64)	3.75(.38)	1.50(.68)	2.50(.66)	2.75(.67)	3.54(.51)
Numérico	1.20(.63)	1.37(.73)	2.70(.52)	3.70(.38)	1.45(.66)	2.20(.83)	3.25(.49)	3.58(.49)
Verbal	1.54(.66)	2.20(.62)	3.00(.67)	3.79(.35)	1.45(.62)	2.29(.64)	3.08(.58)	3.62(.39)
Operación								
Suma	2.91(1.14)	3.83(1.11)	5.00(1.37)	7.54(.44)	3.08(1.01)	4.66(1.18)	6.33(.97)	7.37(.77)
Resta	2.62(1.38)	3.29(1.36)	5.29(1.39)	7.45(.55)	2.83(1.41)	4.95(1.62)	5.29(1.32)	6.95(1.06)
Incógnita								
Final	3.79(1.46)	4.70(1.22)	6.16(1.27)	8.0(.00)	4.41(1.45)	5.91(1.32)	6.66(.79)	7.75(.48)
Inicio	1.75(1.05)	2.41(1.25)	4.12(1.54)	7.0(.99)	1.50(.98)	3.70(.47)	4.95(1.50)	6.58(1.34)

Nota. Las puntuaciones de desviación estándar se señalan entre paréntesis.

En primero y segundo curso, los problemas verbales son los más fáciles, mientras que los numéricos tienen la mayor dificultad.

En tercero, los problemas verbales se solucionan fácilmente, mientras que los concretos resultan ser mas difíciles. En cuarto, los problemas verbales se contestan más fácil, mientras que los numéricos se resuelven con mayor dificultad.

Entonces, los niños rurales resuelven los problemas verbales más que los otros problemas en todos los cursos. Sin embargo, los problemas numéricos son más difíciles para los alumnos de primero, segundo y cuarto curso, mientras que los concretos tienen más dificultad para los participantes de tercero.

En cuanto a los alumnos urbanos, en primero se manifiesta un mayor rendimiento tanto en los problemas concretos y dibujos. En segundo se resuelven más los problemas concretos. En tercero se logran las puntuaciones más altas en los problemas numéricos. En cuarto existe un mejor rendimiento en los problemas verbales.

Asimismo exponemos el nivel de dificultad de los problemas según el curso escolar de estos alumnos.

En primero, los problemas concretos y dibujos son los más fáciles, mientras que los numéricos y verbales se solucionan con mayor dificultad. En segundo, los problemas concretos se resuelven fácilmente, mientras que los numéricos se convierten en los más difíciles. En tercero, los problemas numéricos son más sencillos, mientras que los concretos son de mayor dificultad. En cuarto, los problemas verbales resultan más fáciles, mientras que los de dibujos son más complicados.

Entonces, los participantes de primero y segundo curso rinden mejor en los problemas concretos que en los demás tipos. Los alumnos de tercero solucionan preferentemente los problemas numéricos. Y los de cuarto encuentran más fáciles los problemas verbales.

Estos alumnos en primero y segundo tienen más dificultad con los problemas numéricos; en tercero son más difíciles los concretos y en cuarto se resuelven con dificultad los de dibujos.

Asimismo, la Tabla 14.1 presenta los datos de acuerdo con el tipo de operación: la suma y la resta. Estos resultados se analizan teniendo en cuenta las puntuaciones medias del rendimiento global independiente del tipo de problema y la ubicación de la incógnita.

Con respecto a los alumnos rurales, un patrón evolutivo se manifiesta a través de los cuatro cursos tanto para la suma como para la resta. El rendimiento en las tareas de suma es mayor con relación a la resta en todos los cursos, excepto en tercero. En otras palabras, la suma resulta más fácil que la resta en todos los cursos a excepción de tercero donde la resta se resuelve con mayor facilidad.

Igualmente, un patrón evolutivo se encuentra a través de todos los cursos urbanos en ambas operaciones. Asimismo, el rendimiento en los problemas de suma es mayor con relación a los de resta en todos los cursos, excepto en segundo. De otro modo, la suma es más fácil que la resta en todos los cursos menos en segundo donde estos alumnos solucionan los problemas de resta mejor que los de suma.

Además, en la Tabla 14.1 se muestran las puntuaciones medias en el tipo de incógnita independiente del tipo de problema y operación. Por tanto, el rendimiento se analiza de acuerdo con el lugar de la incógnita: al final o al inicio.

Los alumnos rurales manifiestan un patrón evolutivo tanto con la incógnita al inicio como al final. El rendimiento en los problemas con la incógnita en el resultado es más alto que cuando la incógnita se encuentra en el primer término desde primero hasta cuarto curso. Por tanto, todos los cursos resuelven mejor los problemas con la incógnita al final que al inicio.

El patrón de respuesta urbano es similar al de sus iguales rurales. También, los alumnos urbanos resuelven los problemas con la incógnita al final en mayor medida que cuando la incógnita se encuentra al inicio.

14.1.2. ***Rendimiento en el tipo de operación según la ubicación de la incógnita***

Las puntuaciones medias de este rendimiento se obtuvieron para cada contexto, independiente del tipo de problema tal como se muestra en la Tabla 14.2.

Con respecto a la suma, los participantes rurales desarrollan un patrón evolutivo en esta operación tanto con la incógnita en el resultado como en el primer sumando.

Además, el rendimiento en los problemas con la incógnita al final es mayor que con la incógnita al inicio. Por tanto, para estos alumnos se encuentra que la suma con la incógnita en el resultado es más fácil que cuando el primer sumando es el elemento desconocido.

Tabla 14.2.

Puntuaciones medias del rendimiento de los alumnos rurales y urbanos en los problemas de suma y resta según el lugar de la incógnita.

	Contexto Rural				Contexto Urbano			
	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto
Tipo de incógnita	M DS	M DS	M DS	M DS	M DS	M DS	M DS	M DS
				Suma				
Final	2.16(1.40)	2.91(1.10)	3.16(1.20)	4.00(.00)	2.70(1.39)	3.33(.96)	3.87(.44)	3.91(.40)
Inicio	0.75(.89)	0.91(1.13)	1.83(1.55)	3.54(.88)	0.37(.64)	1.33(1.4)	2.45(1.5)	3.45(1.1)
				Resta				
Final	1.62(1.52)	1.79(1.35)	3.00(1.25)	4.00(.00)	1.70(1.51)	2.58(1.69)	2.79(1.1)	3.83(.56)
Inicio	1.00(1.25)	1.50(1.38)	2.29(1.54)	3.45(1.10)	1.12(1.32)	2.37(1.5)	2.50(1.5)	3.12(1.5)

Nota. Las puntuaciones de desviación estándar se señalan entre paréntesis.

Los escolares urbanos manifiestan un patrón de respuesta evolutivo similar a sus iguales rurales. Asimismo, estos participantes solucionan las tareas de suma con la incógnita en el resultado más que con la incógnita en el primer sumando.

En cuanto a la resta, los niños rurales desarrollan un patrón evolutivo en ambas posiciones de la incógnita. Además, estos alumnos resuelven los problemas con la incógnita al inicio más que con la incógnita en el minuendo en todos los cursos.

Los niños urbanos expresan el mismo patrón evolutivo que sus iguales rurales. También, los alumnos urbanos solucionan tales problemas con la incógnita al final más que cuando la incógnita se sitúa al inicio del problema.

14.1.3. *Rendimiento en el tipo de problema*

En este apartado analizamos el rendimiento en los tipos de problemas según el curso escolar y el tipo de operación. Igualmente, las puntuaciones medias se emplean como indicadores de este rendimiento.

14.1.3.1. *Rendimiento en el tipo de problema según la operación*

En primer lugar analizaremos los datos relacionados con la suma. En la Tabla 14.3 se muestran los resultados obtenidos por los cursos de ambos contextos en los tipos de problemas de suma y resta independiente de la incógnita.

Tabla 14.3.

Puntuaciones medias del rendimiento de los alumnos rurales y urbanos en los tipos de problemas de suma y resta.

	Contexto Rural				Contexto Urbano			
	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto
Tipo de problema	M DS	M DS	M DS	M DS	M DS	M DS	M DS	M DS
				Suma				
Concreto	0.75(.67)	1.04(.46)	1.08(.77)	1.87(.033)	0.79(.58)	1.29(.62)	1.50(.58)	1.83(.38)
Dibujos	0.70(.80)	0.95(.69)	1.16(.70)	1.91(.28)	0.75(.53)	1.25(.60)	1.54(.58)	1.83(.48)
Numérico	0.66(.70)	0.66(.70)	1.37(.64)	1.87(.33)	0.66(.56)	1.08(.77)	1.79(.41)	1.87(.44)
Verbal	0.79(.65)	1.16(.63)	1.37(.76)	1.87(.33)	0.87(.67)	1.04(.62)	1.50(.58)	1.83(.38)
				Resta				
Concreto	0.75(.79)	0.87(.79)	1.16(.81)	1.87(.33)	0.70(.75)	1.33(.76)	1.04(.85)	1.75(.44)
Dibujos	0.58(.77)	0.66(.70)	1.16(.81)	1.83(.38)	0.75(.84)	1.25(.73)	1.20(.77)	1.70(.55)
Numérico	0.54(.58)	0.70(.80)	1.33(.76)	1.83(.38)	0.79(.77)	1.12(.89)	1.45(.58)	1.70(.55)
Verbal	0.75(.67)	1.04(.75)	1.62(.57)	1.91(.28)	0.58(.58)	1.25(.67)	1.58(.58)	1.79(.41)

Nota. Las puntuaciones de desviación estándar se señalan entre paréntesis.

En cuanto al contexto rural, en primer curso se obtiene un mayor rendimiento en los problemas verbales y menor en los de dibujos. En segundo se tiene un aprovechamiento superior en los problemas verbales e inferior en los numéricos. En tercero se logran las puntuaciones más altas en los problemas numéricos y verbales, aunque más bajas en los concretos. En cuarto existe un mejor rendimiento en los problemas con dibujos, pero es menor en los demás.

Entonces, el nivel verbal es el más fácil en primero y segundo curso, el numérico corresponde a tercero, y el pictórico tiene lugar en cuarto.

Por el contrario, el nivel numérico es más difícil en primero y segundo, el concreto resulta complicado en tercero, y en cuarto se dificultan los niveles concreto, numérico y verbal.

Con respecto al contexto urbano, los escolares de primero obtienen un mayor rendimiento en los problemas verbales, pero es menor en los numéricos. En segundo se tiene un mejor aprovechamiento en los problemas concretos, aunque es más bajo en los verbales. En tercero se lograron las puntuaciones más altas en los problemas numéricos, sin embargo, resultan menores por igual en los concretos y verbales. En cuarto existe un alto rendimiento para los problemas numéricos, pero es similarmente bajo en los concretos, dibujos y verbales.

La competencia mencionada anteriormente indica que estos alumnos en primero encuentran más fácil el nivel verbal, en segundo es más simple el nivel concreto, y en tercero y cuarto resulta más sencillo el nivel numérico.

Con respecto a los niveles más difíciles encontramos que los alumnos de primer curso tienen más dificultad en el nivel numérico, los de segundo resuelven difícilmente el nivel verbal, los de tercero solucionan con igual dificultad los niveles concreto y verbal, y los de cuarto encuentran complicados los niveles concreto, pictórico y verbal.

En segundo lugar se analizan los datos correspondientes a la resta. Los escolares rurales de primer curso obtienen un mayor aprovechamiento en los problemas concretos y verbales, siendo menor en los numéricos. En segundo se manifiesta una alta puntuación en los problemas verbales, pero es más baja en los de dibujos. En tercero se logran las mejores puntuaciones en los problemas verbales, aunque son menores en los concretos y dibujos. En cuarto curso existe un rendimiento superior en los problemas verbales, pero resulta inferior en los de dibujos y numéricos.

Por una parte, la competencia de estos alumnos en la resta indica que el nivel verbal es más fácil en todos los cursos.

Por otra, los niños de primero encuentran más dificultad en el nivel numérico. En segundo se resuelve difícilmente el nivel pictórico. En tercero resulta más complicado el nivel concreto. En cuarto son difíciles por igual los niveles pictórico y numérico.

En cuanto a los alumnos urbanos se encuentran los siguientes resultados. En primer curso se obtiene una mayor puntuación en los problemas numéricos, pero menor en los verbales. En segundo se presenta un mejor rendimiento en los problemas concretos, siendo peor en los numéricos. En tercero se logran las puntuaciones más altas en los problemas verbales, sin embargo, son más bajas en los concretos. En cuarto se manifiesta un alto rendimiento en los problemas verbales, aunque baja igualmente en los de dibujos y numéricos.

Por tanto, la competencia apropiada de estos alumnos indica que en primero resulta más fácil el nivel numérico, en segundo se resuelve fácilmente el nivel concreto, y en tercero y cuarto es más simple el nivel verbal.

No obstante, en primero resulta más complicado el nivel verbal, en segundo es difícil el nivel numérico, en tercero se soluciona con mayor dificultad el nivel concreto y en cuarto se complican más los niveles pictórico y numérico.

14.1.3.2. ***Rendimiento en el tipo de problema según el lugar de la incógnita en la operación***

A continuación analizamos los resultados encontrados por los alumnos de cada contexto en los problemas de suma y, posteriormente, en los de resta considerando el tipo de problema y el lugar de la incógnita.

La Tabla 14.4 muestra las puntuaciones medias del rendimiento en el tipo de problema obtenido por los cursos de ambos contextos en los problemas de suma según la incógnita. Estos datos se presentan primeramente cuando la incógnita se sitúa en el resultado y, después, cuando se encuentra en el primer sumando.

Tabla 14.4.

Puntuaciones medias del rendimiento de los alumnos rurales y urbanos en los problemas de suma según el lugar de la incógnita.

	Contexto Rural				Contexto Urbano			
	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto
Tipo de problema	M DS	M DS	M DS	M DS	M DS	M DS	M DS	M DS
	Incógnita en el resultado							
Problema Concreto	.54(.51)	.92(.28)	.71(.46)	1.00(.00)	.71(.46)	.87(.34)	.96(.20)	1.00(.00)
Problema Dibujos	.46(.51)	.75(.44)	.71(.46)	1.00(.00)	.71(.46)	.92(.28)	.96(.20)	.96(.20)
Problema Numérico	.50(.51)	.37(.49)	.92(.28)	1.00(.00)	.58(.50)	.71(.46)	1.00(.00)	.96(.20)
Problema Verbal	.67(.48)	.87(.34)	.83(.38)	1.00(.00)	.71(.46)	.83(.38)	.96(.20)	1.00(.00)
	Incógnita en el primer sumando							
Problema Concreto	.21(.41)	.13(.34)	.37(.49)	.88(.34)	.08(.02)	.42(.50)	.54(.51)	.83(.38)
Problema Dibujos	.25(.44)	.21(.41)	.46(.51)	.92(.28)	.04(.02)	.33(.48)	.58(.50)	.87(.34)
Problema Numérico	.17(.38)	.29(.46)	.46(.51)	.88(.34)	.08(.02)	.38(.49)	.79(.41)	.92(.28)
Problema Verbal	.13(.34)	.29(.46)	.54(.51)	.87(.34)	.17(.38)	.21(.41)	.54(.51)	.83(.38)

Nota. Las puntuaciones de desviación estándar se señalan entre paréntesis.

En primer lugar analizaremos el rendimiento de los alumnos rurales en estos problemas con la incógnita al final. Los escolares de primer curso obtienen una mayor puntuación en los problemas verbales, pero es menor en los dibujos. En segundo se expresa un mejor aprovechamiento en los problemas concretos, aunque es más bajo en los numéricos. En tercero se logran las puntuaciones más altas en los problemas numéricos, siendo más bajas en los concretos y dibujos. En cuarto curso se encuentra un rendimiento similar en los cuatro tipos de problemas.

Por un lado, esta competencia infantil indica que los niños de primero resuelven fácilmente el nivel verbal, en segundo encuentran más sencillo el nivel concreto, en tercero solucionan con más facilidad el nivel numérico, y en cuarto son igualmente fáciles los cuatro niveles.

Por otro, en primer curso es más difícil el nivel pictórico, en segundo resulta complicado el nivel numérico, en tercero se tiene mayor dificultad en los niveles concreto y pictórico, y en cuarto no existen dificultades en los niveles.

Los escolares del contexto urbano en el primer curso manifiestan una mayor puntuación por igual en los problemas concretos, dibujos y verbales, aunque es menor en los numéricos. En segundo se logra un mejor aprovechamiento en los problemas con dibujos, pero es menor en los numéricos. En tercero se alcanzan las puntuaciones más altas en los problemas numéricos, siendo más bajas en los concretos, dibujos y verbales. En cuarto curso se tiene un alto rendimiento tanto en los problemas concretos como verbales, sin embargo, es inferior en los de dibujos y numéricos.

Así, la competencia de estos alumnos revela que en primer curso son igualmente fáciles los niveles concreto, pictórico y verbal, en segundo resulta más sencillo el nivel pictórico, en tercero se resuelve fácilmente el nivel numérico, y en cuarto se solucionan con más facilidad los niveles concreto y verbal.

Sin embargo, los alumnos de primero y segundo encuentran más difícil el nivel numérico, en tercero tienen igual dificultad los niveles concreto, pictórico y verbal, y en cuarto resultan más complicados los niveles pictórico y numérico.

En segundo lugar analizamos los datos con respecto a las tareas de suma con la incógnita en el primer sumando. En cuanto a los alumnos rurales se encuentra que en primer curso tienen un mejor aprovechamiento para los problemas con dibujos, pero resulta peor en los verbales. En segundo se manifiesta una mayor puntuación tanto en los problemas verbales como numéricos, aunque es menor en los concretos. En tercero se logra un mejor resultado en los problemas verbales, siendo inferior en los concretos. En cuarto curso se solucionan eficazmente los problemas con dibujos, pero es menos eficaz en los verbales.

La competencia de solución en estos problemas muestra que los alumnos en primer curso solucionan más fácil el nivel pictórico, en segundo son más sencillos los niveles verbal y numérico, en tercero encuentran más fácil el nivel verbal y en cuarto resuelven fácilmente el nivel pictórico.

En cuanto a los niveles más difíciles se informa que tales alumnos en primero tienen más dificultad en el nivel verbal, en segundo y tercero solucionan difícilmente el nivel concreto, y en cuarto también es más complicado el nivel verbal.

Con relación al rendimiento de los alumnos del contexto urbano se encuentra en primer curso un mejor aprovechamiento en los problemas verbales, pero es peor en los de dibujos. En segundo se expresa una mayor puntuación en los problemas concretos, siendo menor en los verbales. En tercero y cuarto se logra un mejor resultado en los problemas numéricos, sin embargo, es menor en los concretos y verbales.

Entonces, el rendimiento revela que los alumnos de primero encuentran más fácil el nivel verbal, en segundo es más sencillo el nivel concreto, en tercero y cuarto tienen mayor facilidad con el nivel numérico.

Por el contrario, los alumnos de primero tienen más dificultad en el nivel pictórico, en segundo es más difícil el nivel verbal, en tercero y cuarto encuentran complicados los niveles concreto y verbal.

A continuación, analizaremos los datos con relación a la incógnita en el resultado en las tareas de resta. La Tabla 14.5 muestra las puntuaciones medias del rendimiento de ambos contextos en los problemas de resta de acuerdo al lugar de la incógnita.

Tabla 14.5

Puntuaciones medias del rendimiento de los cursos de ambos contextos en los problemas de resta según la ubicación de la incógnita.

	Contexto Rural				Contexto Urbano			
	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto
Tipo de problema	M DS	M DS	M DS	M DS	M DS	M DS	M DS	M DS
	Incógnita en el resultado							
Problema Concreto	.42(.50)	.38(.49)	.67(.48)	1.00(.00)	.37(.49)	.62(.49)	.42(.50)	.96(.20)
Problema Dibujos	.33(.48)	.29(.46)	.67(.48)	1.00(.00)	.38(.49)	.54(.51)	.63(.49)	.92(.28)
Problema Numérico	.33(.48)	.37(.49)	.79(.41)	1.00(.00)	.46(.51)	.58(.50)	.83(.38)	.96(.20)
Problema Verbal	.54(.51)	.75(.44)	.87(.34)	1.00(.00)	.50(.51)	.83(.38)	.92(.28)	1.00(.00)
	Incógnita en el minuendo							
Problema Concreto	.33(.48)	.50(.51)	.50(.51)	.87(.34)	.33(.48)	.71(.46)	.63(.49)	.79(.41)
Problema Dibujos	.25(.44)	.37(.49)	.50(.51)	.83(.38)	.38(.49)	.71(.46)	.58(.50)	.79(.41)
Problema Numérico	.21(.41)	.33(.48)	.54(.51)	.83(.38)	.33(.48)	.54(.51)	.63(.49)	.75(.44)
Problema Verbal	.21(.41)	.29(.46)	.75(.44)	.92(.28)	.08(.02)	.42(.50)	.67(.48)	.79(.41)

Nota. Las puntuaciones de desviación estándar se señalan entre paréntesis.

Por una parte, el rendimiento de los alumnos rurales revela que en primer curso se obtiene una mayor puntuación en los problemas verbales, aunque menor en los de dibujos y numéricos. En segundo se tiene un mejor aprovechamiento en los problemas verbales, pero es menor en los de dibujos. En tercero se logran las puntuaciones más altas en los problemas verbales, aunque son más bajas en los concretos y dibujos. En cuarto existe un rendimiento similar para los cuatro tipos de problemas.

Por tanto, estos alumnos en primero, segundo y tercer curso encuentran más fácil el nivel verbal y en cuarto resultan igualmente fáciles los cuatro niveles.

Contrariamente, los escolares de primero tienen más dificultad en los niveles pictórico y numérico, los de segundo encuentran más difícil el nivel pictórico, los de tercero resuelven difícilmente los niveles concreto y pictórico, y los de cuarto no tienen dificultad en los niveles.

Por otra, los escolares urbanos de primero y tercero obtienen una mayor puntuación en los problemas verbales, pero es menor en los concretos. En segundo y cuarto se encuentra un mejor rendimiento en los problemas verbales, aunque es peor en los de dibujos.

Específicamente, la competencia apropiada indica que estos participantes encuentran más fácil el nivel verbal en todos los cursos.

Por el contrario, en primero y tercer curso resulta más difícil el nivel concreto, mientras que en segundo y cuarto se tiene más dificultad en el nivel pictórico.

En el mismo sentido analizaremos los resultados respecto al tipo de problema de resta con la incógnita en el minuendo.

El rendimiento de los alumnos rurales revela que en el primer curso se tiene un mejor aprovechamiento en los problemas concretos, aunque es menor en los numéricos y verbales. En segundo se encuentra una mayor puntuación en los problemas concretos y menor en los verbales. En tercero se logran mejores resultados en los problemas verbales, pero son menores tanto en los concretos como en los de dibujos. En cuarto curso se resuelven eficazmente los problemas verbales, pero es menos eficaz en los de dibujos y numéricos.

La competencia de resolución revela que estos alumnos en primero y segundo encuentran más fácil el nivel concreto, mientras que en tercero y cuarto resulta más sencillo el nivel verbal.

No obstante, en primer curso son más complicados los niveles numérico y verbal, en segundo es más difícil el nivel verbal, en tercero se solucionan difícilmente los niveles concreto y pictórico, y en cuarto resultan más complejos los niveles pictórico y numérico.

El rendimiento de los alumnos del contexto urbano indica que en el primer curso se tiene mayor éxito en los problemas con dibujos, aunque es menor en los verbales. En segundo se alcanza una mayor puntuación en los problemas concretos y dibujos, siendo más baja en los verbales. En tercero se logran los mejores resultados en los problemas verbales, pero son menores en los de dibujos. En cuarto curso se resuelven más los problemas concretos, dibujos y verbales, aunque en menor medida los numéricos.

En síntesis, esta competencia indica que los alumnos en primer curso encuentran más fácil el nivel pictórico, en segundo solucionan fácilmente los niveles concreto y pictórico, en tercero resuelven mejor el nivel verbal, y en cuarto resultan sencillos los niveles concreto, pictórico y verbal.

Por último, en primero y segundo curso se tiene más dificultad en el nivel verbal, en tercero resulta complicado el nivel pictórico, y en cuarto ocurre lo mismo en el nivel numérico.

14.1.3.3. ***Proporción del grado de abstracción***

En esta sección presentamos los datos de acuerdo con el grado de abstracción a partir del nivel de comprensión manifestado por los alumnos de ambos contextos en los problemas planteados.

En este caso, el rendimiento de los niños se basa en la proporción de las respuestas correctas dadas ante los problemas concretos, dibujos, numéricos y verbales. Los niveles de abstracción corresponden con los tipos de problemas, por tanto hablaremos del nivel concreto en relación con los problemas concretos, nivel pictórico en cuanto a los problemas con dibujos, nivel numérico en concordancia con los problemas numéricos y nivel verbal de acuerdo con los problemas verbales. En resumen, la suma de las puntuaciones en los cuatro niveles dentro de cada curso equivale al cien por ciento, entonces, cada nivel tiene una proporción dentro del total mencionado.

Esta parte del análisis se guía con la presentación de los resultados por tipo de operación y la ubicación de la incógnita.

En la Tabla 14.6 se presentan los porcentajes obtenidos en los problemas de Cambio de suma según la ubicación de la incógnita por los alumnos tanto del contexto rural como urbano. El siguiente análisis se basa en las puntuaciones de cada curso escolar en el mismo contexto.

Tabla 14.6.

Porcentaje del rendimiento de los cursos de ambos contextos en los problemas de suma según la ubicación de la incógnita.

	Contexto Rural				Contexto Urbano			
Nivel del problema	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto
			Incógnita en el resultado					
Nivel Concreto	25	31	22	25	26	26	25	26
Nivel Pictórico	21	26	22	25	26	28	25	24
Nivel Numérico	23	13	29	25	22	21	25	24
Nivel Verbal	31	30	27	25	26	25	25	26
			Incógnita en el primer sumando					
Nivel Concreto	28	13	20	25	22	31	22	24
Nivel Pictórico	33	23	25	25	11	25	24	25
Nivel Numérico	22	32	25	25	22	28	32	27
Nivel Verbal	17	32	30	25	45	16	22	24

Por una parte, el grado de abstracción de los alumnos rurales se muestra en los siguientes datos de estos problemas con la incógnita en el resultado. En el nivel concreto se obtiene la mayor proporción por los alumnos de segundo y la menor por los de tercero. En el nivel pictórico se logra el más alto grado por los participantes de segundo y el más bajo por los de primero. En el nivel numérico se alcanza el porcentaje superior por los niños de tercero y el inferior por los de segundo. En el nivel verbal se tiene el máximo desarrollo por los escolares de primero y el mínimo por los de cuarto.

En base a lo anterior afirmamos que cuando la incógnita está en el resultado, los niveles concreto y verbal se manifiestan más por los alumnos de segundo y primer curso respectivamente, mientras que el nivel numérico se desarrolla menos en segundo en comparación con los demás niveles en todos los cursos.

Por otra, describimos los mismos problemas, pero con la incógnita en el primer sumando. En el nivel concreto se logra el más alto porcentaje por los participantes de primero y el más bajo por los de segundo. En el nivel pictórico se manifiesta la máxima proporción por los alumnos de primero y la mínima por los de segundo. En el nivel numérico se tiene el desarrollo superior por los escolares de segundo y el inferior por los de primero. En el nivel verbal se logra el mayor grado por los niños de segundo y el menor por los de primero.

Por tanto, consideramos que el nivel pictórico se desarrolla principalmente en los alumnos de primero entre todos los niveles de los cursos, mientras que el nivel concreto se manifiesta menos en segundo curso.

En cuanto a los alumnos urbanos se muestran los siguientes resultados en los mismos problemas, pero con la incógnita en el resultado. En el nivel concreto se obtiene el mayor desarrollo por los alumnos de primero, segundo y tercero, y el menor por los de tercero. En el nivel pictórico se logra la más alta proporción en los participantes de segundo y la más baja por los de cuarto. En el nivel numérico se alcanza el grado superior por los niños de tercero, y el inferior por los de segundo. En el nivel verbal se encuentra el máximo porcentaje por los escolares de primero y cuarto y el mínimo por los de segundo y tercero.

Entonces, en estos problemas se desarrolla más el nivel pictórico por los alumnos de segundo, mientras que el nivel numérico se expresa menos en segundo curso de igual manera.

Además presentamos los datos de estos alumnos en estos problemas, pero con la incógnita en el primer sumando. En el nivel concreto se obtiene la más alta proporción por los niños de segundo y la más baja por los de primero y tercero. En el nivel pictórico se consigue el mayor grado por los escolares de segundo y cuarto y el menor por los de primero. En el nivel numérico se alcanza el máximo porcentaje por los alumnos de tercero y el mínimo por los de primero. En el nivel verbal se logra el desarrollo superior por los participantes de primero y el inferior por los de segundo.

Igualmente, se puede afirmar que cuando la incógnita esta en el primer sumando el nivel pictórico se desarrolla más por los alumnos de primero, mientras que el nivel concreto se expresa menos en segundo curso.

En la Tabla 14.7 se indican los porcentajes de los participantes de ambos contextos en los problemas de Cambio de resta según la ubicación de la incógnita. El análisis es similar al realizado anteriormente con la suma.

En primer lugar, analizaremos el grado de abstracción de los alumnos rurales en estos problemas con la incógnita en el resultado. En el nivel concreto se obtiene la máxima proporción por los niños de primero y cuarto y la mínima por los de segundo. En el nivel pictórico se alcanza el mayor grado por los alumnos de cuarto y el menor por los de segundo. En el nivel numérico se logra el más alto desarrollo por los participantes de tercero y el más bajo por los de primero y segundo. En el nivel verbal se manifiesta el máximo porcentaje por los escolares de segundo y el mínimo por los de cuarto.

Tabla 14.7
Porcentaje del rendimiento obtenido por los cursos de ambos contextos en los problemas de resta.

	Contexto Rural				Contexto Urbano			
Nivel del problema	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto
				Incógnita en el resultado				
Nivel Concreto	25	21	22	25	22	24	15	25
Nivel Pictórico	21	16	22	25	22	21	22	24
Nivel Numérico	21	21	27	25	27	23	30	25
Nivel Verbal	33	42	29	25	29	32	33	26
				Incógnita en el minuendo				
Nivel Concreto	33	33	22	25	30	30	25	25
Nivel Pictórico	25	25	22	24	33	30	23	25
Nivel Numérico	21	22	23	24	30	23	25	25
Nivel Verbal	21	20	33	27	7	17	27	25

Entonces, el nivel verbal se expresa más por los alumnos de segundo curso, mientras que el nivel pictórico se desarrolla menos en el mismo curso entre todos los niveles de los cursos.

En segundo lugar, describimos el grado de abstracción de estos alumnos con respecto a los anteriores problemas, pero con la incógnita en el minuendo. En el nivel concreto se obtiene la mayor proporción por los participantes de primero y segundo y la menor por los de tercero. En el nivel pictórico se logra el máximo porcentaje por los niños de primero y el mínimo por los de tercero. En el nivel numérico se alcanza más alto desarrollo por los de cuarto y el más bajo por los de primero. En el nivel verbal se expresa el máximo grado por los de tercero y el mínimo por los de segundo.

Por tanto, afirmamos que cuando la incógnita está en el minuendo se desarrollan más tanto el nivel concreto en los alumnos de primero y segundo como el nivel verbal en los de tercero, mientras que el nivel verbal tiene el desarrollo más bajo en segundo curso.

Igualmente exponemos los datos de los alumnos urbanos sobre los problemas de resta con la incógnita en el resultado. En el nivel concreto se obtiene el mayor porcentaje por los participantes de cuarto y el menor por los de tercero. En el nivel pictórico se logra el más alto grado por los alumnos de cuarto y el más bajo por los de segundo. En el nivel numérico se alcanza el máximo desarrollo por los niños de tercero y el mínimo por los de segundo. En el nivel verbal se expresa la proporción superior por los escolares de tercero y la inferior por los de cuarto.

De acuerdo con esto, el nivel verbal se desarrolla más en tercer curso, mientras que el nivel concreto se expresa menos en el mismo curso.

Asimismo mostramos el grado de abstracción de estos alumnos en el anterior problema, pero con la incógnita en el minuendo. En el nivel concreto se obtiene el mayor grado por los niños de primero y segundo y el menor por los de tercero y cuarto. En el nivel pictórico se tiene la máxima proporción por los participantes de primero y la mínima por los de tercero. En el nivel numérico se logra el desarrollo más alto por los de primero y el más bajo por los de segundo. En el nivel verbal se alcanza el porcentaje superior por los alumnos de tercero y el inferior por los de primero.

Por tanto, el nivel pictórico se manifiesta más en primero, mientras que el nivel verbal se desarrolla menos en el mismo curso en el mismo sentido.

Es decir, los alumnos de primero solucionan mejor los problemas con dibujos, sin embargo, tienen más dificultad para resolver los problemas verbales. Esto se debe a que los alumnos no identifican apropiadamente el conjunto de inicio en los problemas más complicados.

Además, los alumnos de los cursos básicos emplean más los niveles inferiores de abstracción en las tareas de resta fáciles, mientras que los alumnos de los cursos superiores recurren a estos niveles ante los problemas de resta difíciles.

14.1.4. *Grado de dificultad de los problemas*

En este sentido, analizaremos la cuestión sobre la existencia de un escalamiento en el grado de dificultad según los patrones del rendimiento de la muestra total (el conjunto de los alumnos de ambos contextos). El método de escalamiento de Guttman permite ordenar los problemas según su grado de dificultad, de lo fácil a lo difícil, que para este caso sería:

1. Problema verbal de suma con la incógnita en el resultado.
2. Problema concreto de suma con la incógnita en el resultado.
3. Problema dibujos de suma con la incógnita en el resultado.
4. Problema verbal de resta con la incógnita en el resultado.
5. Problema numérico de suma con la incógnita en el resultado.
6. Problema numérico de resta con la incógnita en el resultado.
7. Problema concreto de resta con la incógnita en el resultado.
8. Problema dibujos de resta con la incógnita en el resultado.
9. Problema concreto de resta con la incógnita en el minuendo.
10. Problema dibujos de resta con la incógnita en el minuendo.
11. Problema numérico de resta con la incógnita en minuendo.
12. Problema verbal de resta con la incógnita en el minuendo.
13. Problema numérico de suma con la incógnita en el primer sumando.
14. Problema dibujos de suma con la incógnita en el primer sumando.
15. Problema verbal de suma con la incógnita en el primer sumando.
16. Problema concreto de suma con la incógnita en el primer sumando.

Por una parte, debido que el coeficiente de reproductibilidad de Guttman es CR = 0.82, se puede decir que no se alcanza el criterio necesario (CR = 0.90) para que sea considerada una Escala de Guttman. Por otra, el coeficiente de escalabilidad encontrado CE = 0.51, tampoco es suficiente para los criterios establecidos (CE = 0.60).

14.1.5. ***Datos significativos***

Con los datos de los alumnos rurales realizamos un análisis de varianza (ANOVA) mixto 4 (Curso escolar: primero vs. segundo vs. tercero vs. cuarto) X 4 (Tipo de problema: concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) X 2 (Tipo de operación: suma vs. resta) X 2 (Lugar de la incógnita: final vs. inicio) con medidas repetidas en los tres últimos factores mediante el programa SPSS 11.0. El curso escolar se define como la variable inter-sujetos, mientras que el tipo de problema, la operación y el lugar de la incógnita son los factores intra-sujetos. El rendimiento en los problemas de Cambio de suma y resta se considera como la variable dependiente.

Los efectos principales encontrados son los factores **curso** ($F_{3, 92} = 33.12$, $p<.05$), **problema** ($F_{3, 276} = 4.91$, $p < .05$) y **lugar de la incógnita** ($F_{1, 92} = 69.68$, $p < .05$). No hubo efecto del factor operación ($F_{1, 92} = 0.97$, $p = 0.327$). Es decir, el curso escolar, el tipo de problema y la operación afectan el rendimiento en los problemas de Cambio de suma y resta. En otras palabras, el nivel de aprovechamiento depende del curso escolar, siendo mayor en los cursos superiores. Asimismo, el patrón de respuesta cambia según el tipo de problema que se presenta. Finalmente, el nivel de rendimiento se modifica según el lugar de la incógnita.

El estudio de comparaciones múltiples de Tuckey encuentra diferencias significativas de los escolares de cuarto curso con relación a los demás ($p < .05$), los alumnos de tercero difieren significativamente con respecto a los de segundo y primero ($p < .05$), pero las diferencias no son significativas entre segundo y primero. En general, estos datos confirman los hallados en otras investigaciones (Carpenter y Moser, 1982; De Corte et al., 1985; Riley et al., 1983) en el sentido que los alumnos de los cursos superiores obtienen mayor rendimiento que los niños de los cursos inferiores. El caso de primero y segundo se explica debido a las respuestas similares en ambos cursos.

El análisis de comparaciones por pares se realizó entre los distintos problemas con la prueba de Tuckey, la cual indica que las diferencias son significativas en el rendimiento sobre los problemas verbales con respecto a los problemas numéricos ($p < .01$) y con dibujos ($p < .01$), pero no hubo diferencias significativas entre los demás problemas. Estos resultados son consistentes con los de otros estudios (Cummins et al., 1988; De Corte et al., 1985; Rathmell, 1986; Riley et al., 1983) que encuentran un mayor rendimiento en los problemas verbales sobre los numéricos.

Asimismo, esta comparación en el factor incógnita muestra un rendimiento significativo cuando la incógnita se ubica al final. Esto mismo se encuentra por otros autores (Bebout, 1990; Bermejo y Rodríguez, 1987; Carpenter et al.,1983; De Corte y Verschaffel, 1987) que consideran un mayor éxito de los niños para resolver los problemas de Cambio con la incógnita en el resultado.

El análisis de varianza revela que son significativas las interacciones dobles Problema X Incógnita ($F_{3, 276} = 3.41$, $p < .05$) y Operación X Incógnita ($F_{1, 92} = 18.34$, $p < .05$), así como, las interacciones triples Curso X Problema X Incógnita ($F_{9, 276} = 3.15$, $p < .05$), Curso X Operación X Incógnita ($F_{3, 92} = 4.30$, $p < .05$) y Problema X Operación X Incógnita ($F_{3,276} = 2.82$, $p < .05$), además, la interacción Curso X Problema X Operación X Incógnita ($F_{9, 276} = 3.19$, $p < .05$).

En la Figura 14.1 se muestra la interacción entre el tipo de problema y el lugar de la incógnita. Tal como se observa, el rendimiento en los tipos de problemas se incrementa cuando la incógnita está al final y disminuye cuando se encuentra al inicio del problema.

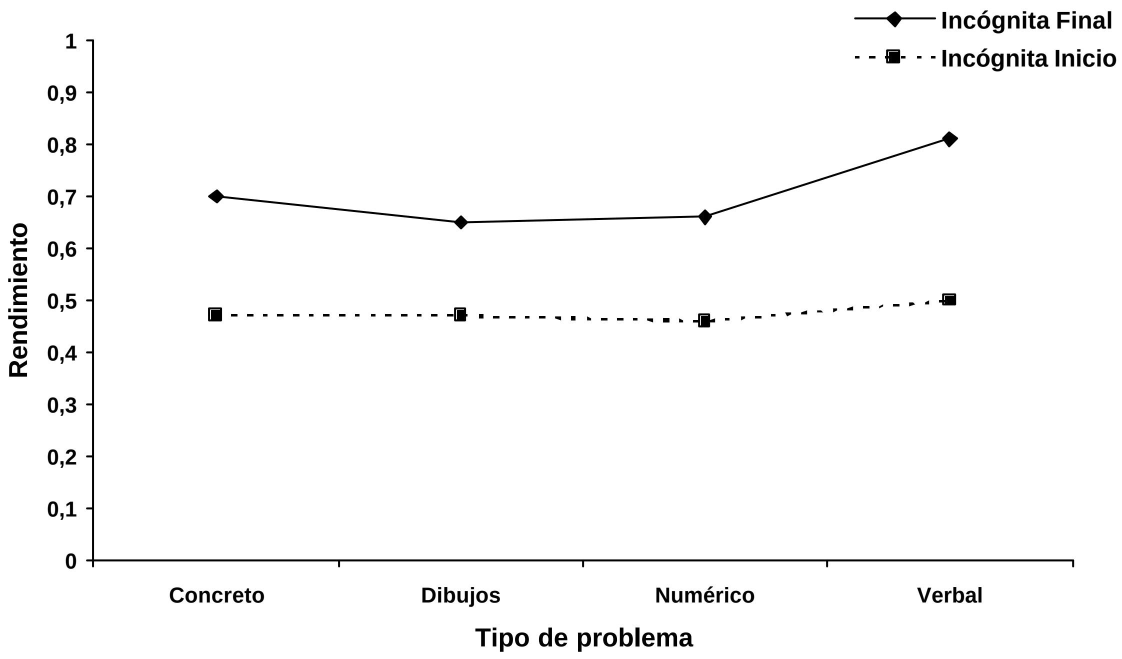

Figura 14.1. Interacción significativa tipo de problema por lugar de la incógnita de los alumnos rurales.

El análisis de los efectos simples revela que las diferencias del rendimiento en los cuatro tipos de problemas son significativas con respecto a la incógnita en el resultado ($F_{3, 90}$ = 8.35, $p < .01$), pero no con la incógnita al inicio. Es decir, los problemas verbales son más fáciles que los demás cuando la incógnita está en el final. Estos resultados corresponden con los de otros estudios (Bermejo y Rodríguez, 1987; Carpenter, 1986; Hiebert, 1982) en el sentido que los alumnos obtienen mayor rendimiento en los problemas verbales que en los demás.

La interacción entre el tipo de operación y el lugar de la incógnita afecta la solución de los problemas de Cambio, tal como se muestra en la Figura 14.2. Es decir, el rendimiento en los problemas de Cambio de suma y resta aumenta cuando la incógnita se sitúa al final y disminuye cuando la incógnita está en el inicio del problema. El análisis de los efectos simples encuentra contrastes entre la suma y la resta cuando la incógnita se encuentra en el final ($F_{1,\ 92}$ = 20.63, p < .01) y de la resta con respecto a la suma cuando la incógnita se ubica al inicio ($F_{1,\ 92}$ = 5.03, p < .05).

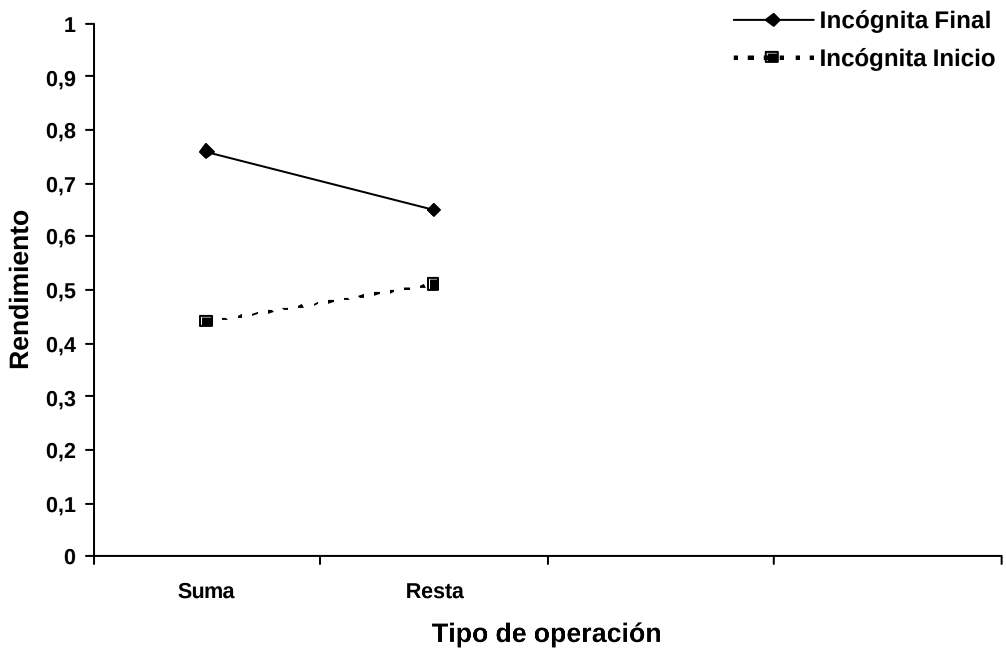

Figura 14.2. Interacción tipo de operación por lugar de la incógnita de los alumnos rurales.

Estos resultados están en consistencia con los encontrados por otros autores (Bebout, 1990; Bermejo y Rodríguez, 1990, 1998; Carpenter et al. 1981, 1983; De Corte y Verschaffel, 1987 y Stern, 1993) en cuanto que los problemas de Cambio de suma son más fáciles con la incógnita en el resultado y resultan más difíciles cuando la incógnita se sitúa en el primer término.

En cuanto a las demás interacciones sólo profundizaremos en la interacción Curso X Problema X Operación X Incógnita. El análisis de los efectos simples del factor problema en los niveles de los otros factores se realizó con los datos de la Tabla 14.8.

Tabla 14.8.

Medias y Sumatorios correspondientes a la interacción *Curso* (primero vs. segundo vs. tercero vs. cuarto) * *Problema* (concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) * *Operación* (suma vs. resta) * *Incógnita* (final vs. inicio).

		Suma				Resta			
		Incógnita al final		Incógnita al inicio		Incógnita al final		Incógnita al inicio	
Curso	Problema	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media
Primero	Concreto	13	0.54	5	0.20	10	0.41	8	0.33
	Dibujos	11	0.45	6	0.25	8	0.33	6	0.25
	Numérico	12	0.50	4	0.16	8	0.33	5	0.20
	Verbal	16	0.66	3	0.12	13	0.54	5	0.20
Segundo	Concreto	22	0.91	3	0.12	9	0.37	12	0.50
	Dibujos	18	0.75	5	0.20	7	0.29	9	0.37
	Numérico	9	0.37	7	0.29	9	0.37	8	0.33
	Verbal	21	0.87	7	0.29	18	0.75	7	0.29
Tercero	Concreto	17	0.70	9	0.37	16	0.66	12	0.50
	Dibujos	17	0.70	11	0.45	16	0.66	12	0.50
	Numérico	22	0.91	11	0.45	19	0.79	13	0.54
	Verbal	20	0.83	13	0.54	21	0.87	18	0.75
Cuarto	Concreto	24	1.0	21	0.87	24	1.0	21	0.87
	Dibujos	24	1.0	22	0.91	24	1.0	20	0.83
	Numérico	24	1.0	21	0.87	24	1.0	20	0.83
	Verbal	24	1.0	21	0.87	24	1.0	22	0.91

En los resultados se encuentran los siguientes contrastes: los problemas verbales de suma con la incógnita al final difieren de los problemas con dibujos en la misma incógnita en primer curso ($F_{3,\ 90}$ = 1.91, $p < .05$) y los problemas verbales de resta con la incógnita al final difieren con respecto a los numéricos de resta con tal incógnita en el mismo curso ($F_{3,\ 90}$ = 2.16, $p < .05$).

Los problemas concretos de suma con la incógnita al final difieren de los de dibujos y numéricos con esta misma incógnita, los problemas dibujos y verbales de suma con la incógnita en el final contrastan con respecto a los numéricos en los alumnos de segundo ($F_{3, 90}$ = 15.76, p < .01).

Las diferencias de los problemas verbales de resta con la incógnita al inicio son significativas con todos los demás problemas de resta con la incógnita en el resultado en segundo curso ($F_{3, 90}$ = 6.32, p < .01). En los demás cursos no hubo diferencias significativas.

Por una parte, estos resultados son consistentes con los hallados por otros investigadores (Bjonerud, 1960; Dutton, 1963; McLaughlin, 1935; Richard, 1964; Williams, 1965) en el sentido que el empleo de materiales concretos facilita la solución de los problemas. Además, los datos confirman que las respuestas con objetos son mejores que con dibujos cuando la incógnita se encuentra al final tal como se ha informado por otros autores (Sophian y Vong, 1995).

Por otra, estos datos concuerdan con los obtenidos en otras investigaciones (Cummins, 1991; Tamburino, 1982; Wolters, 1983) con respecto al incremento en el rendimiento en base a la construcción de dibujos y la representación pictórica de los problemas.

Resumiendo, los alumnos rurales incrementan el rendimiento en los cursos superiores con respecto a los cursos inferiores. Estos alumnos muestran mayor competencia en los problemas verbales que en los demás tipos y resuelven mejor las tareas de suma y resta cuando la incógnita se encuentra al final. De este modo encontramos un patrón evolutivo en el rendimiento de acuerdo con la aproximación constructivista.

Este rendimiento se explica en base al predominio del conocimiento informal sobre todo en los problemas distintos al algoritmo. Tal conocimiento se desarrolla con el empleo de objetos y la formulación de problemas verbales como parte del entorno informal.

Además, los problemas verbales con la incógnita en le resultado se resuelven más que los otros problemas. Esto indica que existe un mayor nivel de abstracción cuando el problema se presenta verbalmente, lo cual facilita una mejor comprensión de la tarea.

El rendimiento es superior en las tareas de suma con relación a la resta cuando la incógnita se encuentra al final, pero se incrementa en la resta mas que en la suma mientras la incógnita se sitúa al inicio.

En primer curso, los problemas verbales difieren de los numéricos y dibujos, pero no de los concretos cuando la incógnita se ubica en el resultado. En segundo se obtiene un mayor rendimiento en los problemas concretos con respecto a los de dibujos y numéricos, además, en los problemas verbales y dibujos en relación con los numéricos.

Esto significa que los problemas se resuelven mejor cuando están relacionados con el conocimiento informal en las etapas más tempranas del desarrollo. Por tanto consideramos que los alumnos de primero y segundo se encuentran en un proceso de transición del conocimiento informal al conocimiento formal, escolarizado.

De igual manera realizamos un análisis de varianza (ANOVA) mixto 4 (Curso escolar: primero vs. segundo vs. tercero vs. cuarto) X 4 (Tipo de problema: concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) X 2 (Tipo de operación: suma vs. resta) X 2 (Lugar de la incógnita: final vs. inicio) con medidas repetidas en los tres últimos factores con los datos de los alumnos urbanos mediante el programa SPSS 11.0. El curso escolar es el factor inter-sujetos, mientras que el tipo de problema, la operación y el lugar de la incógnita son las variables intra-sujetos. El rendimiento en los problemas de Cambio de suma y resta se considera como la variable dependiente.

Los efectos principales encontrados son los factores **curso** ($F_{3, 92} = 25.66$, $p<.05$) y **lugar de la incógnita** ($F_{1, 92} = 86.14$, $p<.05$). No hubo efecto del factor problema ($F_{3, 276} = 0.18$, $p = 0.90$), tampoco del factor tipo de operación ($F_{1, 92} = 3.14$, $p = 0.07$). Por tanto, el curso escolar y el lugar de la incógnita afectan el rendimiento en los problemas de Cambio de suma y resta. En otras palabras, el nivel de rendimiento alcanzado depende del curso escolar al que asisten los alumnos, siendo más alto en los cursos superiores. Además, el rendimiento cambia según el lugar de la incógnita en el problema.

Las comparaciones múltiples realizadas con la prueba de Tuckey en el factor curso encuentra diferencias significativas entre los escolares de cuarto con relación a los demás cursos ($p < .05$), los alumnos de tercero y segundo tienen estas diferencias con respecto a los de primer curso ($p < .05$), aunque las diferencias no son significativas entre tercero y segundo. Estos resultados están en línea con los encontrados en otros estudios (Bernardo, 1999; Carpenter y Moser, 1982; De Corte et al.,1985; Riley et al., 1983) en cuanto que los alumnos de los cursos superiores muestran un mayor rendimiento que los cursos inferiores.

La comparación por pares con la prueba de Tuckey en el factor incógnita muestra diferencias de la incógnita al final con relación a la incógnita en el inicio ($p < .01$). También estos datos confirman los hallados por otros investigadores (Bebout, 1990; Bermejo y Rodríguez, 1987) en el sentido de que el rendimiento se incrementa cuando la incógnita se sitúa en el resultado que en el primer término.

El análisis de varianza también revela que son significativas las interacciones dobles Curso X Problema ($F_{9,\ 276} = 2.21$, $p < .05$), Curso X Incógnita ($F_{3,\ 92} = 2.98$, $p < .05$), Problema X Incógnita ($F_{3,\ 276} = 9.89$, $p < .05$), Operación X Incógnita ($F_{1,\ 92} = 24.05$, $p<.05$), así como, las interacciones triples Curso X Problema X Operación ($F_{9,\ 276} = 2.06$, $p < .05$), Curso X Operación X Incógnita ($F_{3,\ 92} = 4.47$, $p < .05$) y Problema X Operación X Incógnita ($F_{3,\ 276} = 9.54$, $p < .05$).

La interacción entre el curso escolar y el tipo de problema se aprecia en la Figura 14.3. En general, el rendimiento en los distintos problemas se incrementa en los cursos superiores a excepción de los problemas concretos, en los cuales segundo obtiene mayor rendimiento que tercero.

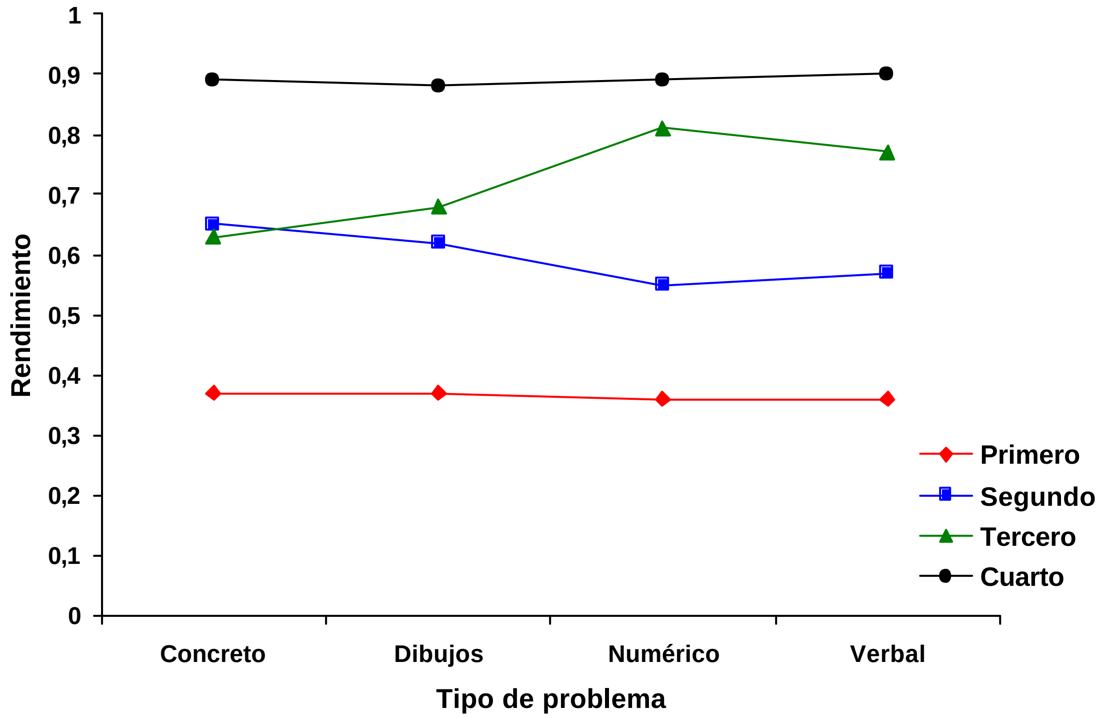

Figura 14.3. Interacción tipo de problema por curso escolar de los alumnos urbanos.

El análisis de los efectos simples del factor problema en el factor curso muestra que los problemas concretos difieren con respecto a los numéricos en segundo curso ($F_{3,\ 90}$ = 2.07, p < .05), además, los problemas numéricos tienen diferencias con relación a los concretos y dibujos en tercer curso, así como los problemas verbales difieren de los concretos en este curso ($F_{3,\ 90}$ = 5.93, p<.01)

Estos resultados son consistentes con los encontrados en otras investigaciones (Bermejo y otros, 1998; Bjnoreud, 1960; Bruner, 1966; Dutton, 1963; McLaughlin, 1935; Piaget, 1970; Richard, 1964; Starkey y Gelman, 1982; Williams, 1965) con respecto a que los niños solucionan mejor los problemas con material concreto en las etapas tempranas del desarrollo. Además, los problemas se solucionan mejor que los algoritmos cuando se emplea material concreto (Kamii et al., 2001; Resnick y Omanson, 1987). Mientras que, por una parte, los datos de tercero son relevantes de acuerdo con otros autores (Kamii et al., 2001; Selva y Brandao, 2000) en cuanto que los problemas numéricos obtienen un mayor rendimiento debido a la familiaridad con los números convencionales. Por otra, son consistentes con los resultados de otras investigaciones (Bermejo y Rodríguez, 1987, 1990a, 1990b; Carpenter y Moser, 1982, 1983, 1984; De Corte y Verschaffel, 1987) en el sentido que los problemas verbales son más fáciles que los problemas concretos.

La interacción entre el curso escolar y el lugar de la incógnita se observa en la Figura 14.4.

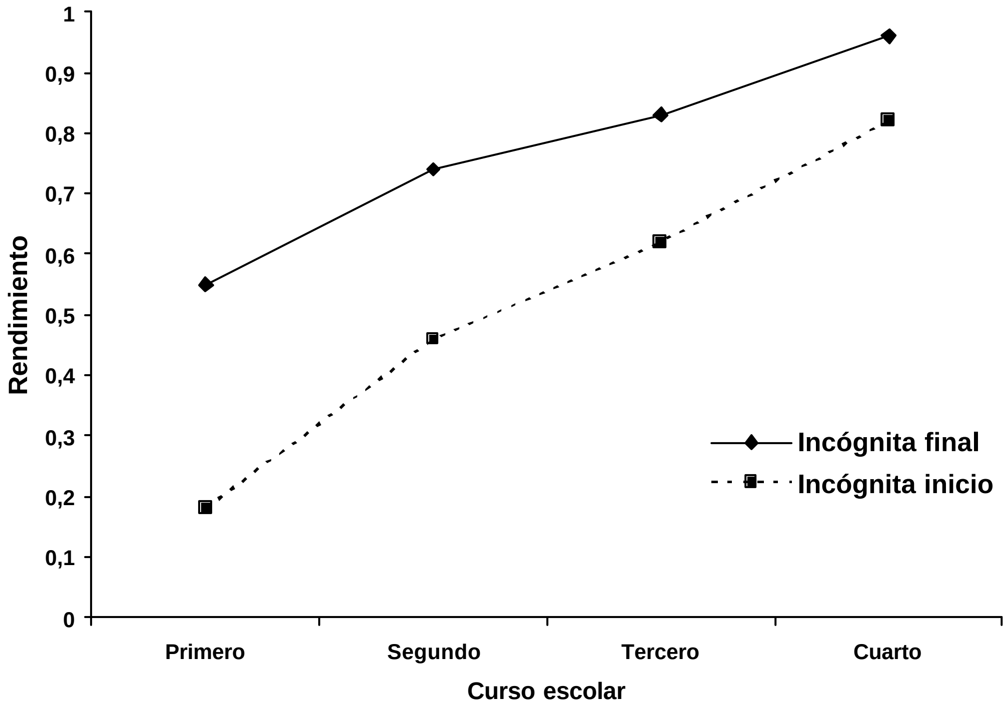

Figura 14.4. Interacción curso escolar por lugar de la incógnita de los alumnos urbanos.

En general, el rendimiento en los diferentes cursos escolares se incrementa cuando la incógnita está al final que al inicio del problema. Además, el patrón de respuesta sigue una tendencia evolutiva, la cual es mayor en los cursos superiores en ambos casos. Estos datos son consistentes con los de otros estudios (Sophian y McCorgary, 1994) que encuentran los problemas de Cambio con la incógnita al principio más difíciles que con la incógnita al final.

El análisis de los efectos simples del factor incógnita en el factor curso muestra diferencias significativas tanto en la incógnita al final como al inicio en todos los cursos superiores con respecto a primero, y de cuarto curso con relación a segundo y tercero ($F_{3, 92}$ = 14.26, p < .01, $F_{3, 92}$ = 22.97, p < .01, respectivamente). Estos datos confirman los encontrados por otras investigaciones (Bergeron y Hersovics, 1990; Bermejo y Rodríguez, 1987; Carpenter et al., 1983; De Corte y Verschaffel, 1987) en el sentido que los alumnos de primer curso solucionan fácilmente los problemas de Cambio con la incógnita en el resultado, mientras que estos alumnos disminuyen su rendimiento cuando la incógnita se ubica en el inicio (Bebout, 1990; Bermejo y Rodríguez, 1990b; Carpenter et al., 1981, 1983; De Corte y Verschaffel, 1987; Stern, 1993). Además, estos resultados confirman los hallados por otros estudios (Bergeron y Hersovics, 1990) en relación a que los problemas con la incógnita al inicio se resuelven comúnmente a partir de los ocho años.

Asimismo, la interacción entre el tipo de problema y el lugar de la incógnita afecta el rendimiento en los problemas de Cambio de suma y resta, tal como se ve en la Figura 14.15. En general, el rendimiento en los distintos problemas aumenta cuando la incógnita se encuentra al final que al inicio del problema. El rendimiento disminuye en los problemas verbales más que los otros niveles de abstracción cuando la incógnita está al inicio, pero se incrementa cuando la incógnita se sitúa en el resultado. Estos últimos datos se explican de acuerdo con otros estudios (Cummins, 1991; Davis-Dorsey et al., 1991; De Corte et al.,1985) en base a las interpretaciones erróneas del conjunto de inicio en los problemas verbales de Cambio.

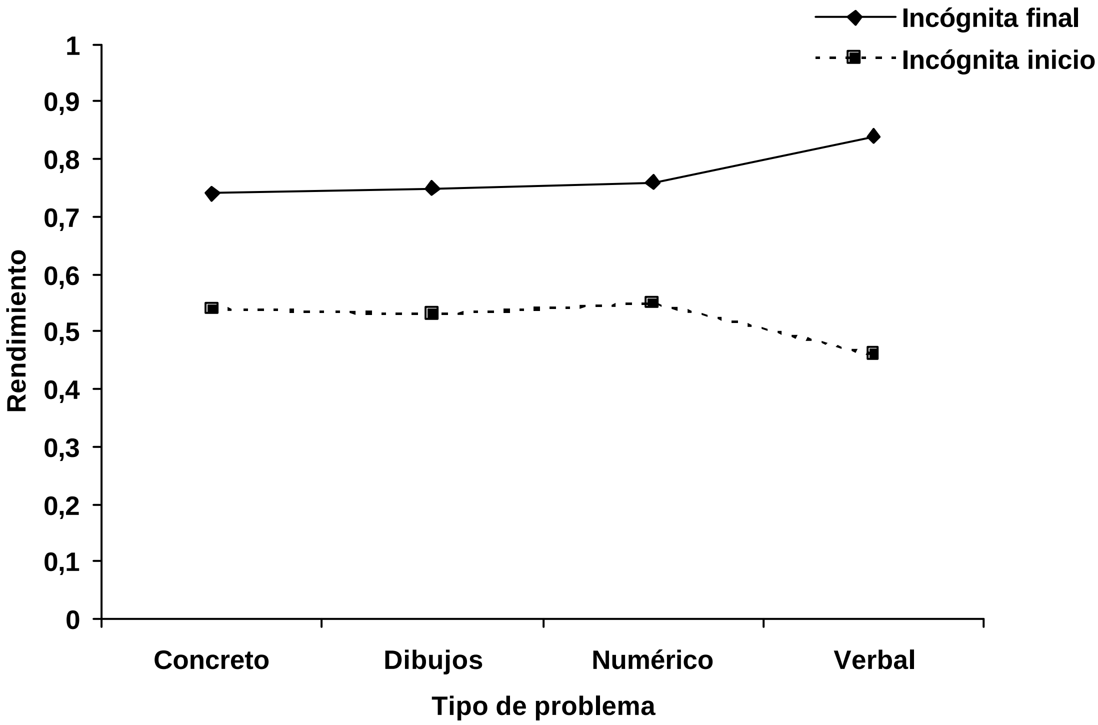

Figura 14.5. Interacción tipo de problema por lugar de la incógnita de los alumnos urbanos

En el análisis de los efectos simples teniendo en cuenta el factor problema en cada nivel del factor incógnita se muestra que los problemas verbales difieren significativamente de los concretos, dibujos y numéricos cuando la incógnita se encuentra al final ($F_{3, 90} = 3.46$, $p < .05$).

Esto concuerda con el planteamiento que el rendimiento en los problemas verbales no es el mismo con respecto a otros tipos de problemas aún cuando tengan una estructura semántica similar (Bermejo y otros, 1998, 2002).

La interacción entre el tipo de operación y el lugar de la incógnita se aprecia en la Figura 14.6. En general, el rendimiento en la suma y la resta se incrementa cuando la incógnita se sitúa al final del problema. En la suma existe mejor aprovechamiento con respecto a la resta cuando la incógnita está en el resultado, mientras que en los problemas de resta se encuentra un mayor rendimiento con relación a la suma cuando la incógnita se ubica en el inicio del problema.

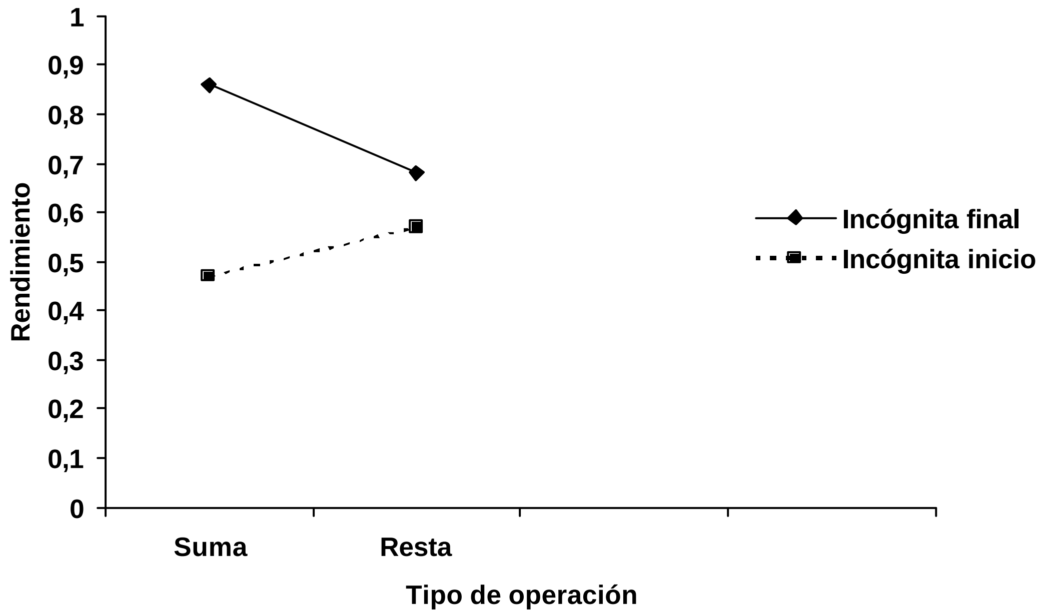

Figura 14.6. Interacción significativa tipo de operación por lugar de la incógnita de los alumnos urbanos

El análisis de los efectos simples del factor operación en cada nivel del factor incógnita revela que la suma difiere de la resta cuando la incógnita se encuentra al final ($F_{1,92}$= 29.68, p < .01), además las diferencias de la resta con la incógnita al inicio son significativas con respecto a la suma ($F_{1, 92}$ = 29.68, p < .05).

Estos resultados son consistentes con los hallados por otros investigadores (Bebout, 1990; Bermejo y Rodríguez, 1990, 1998; Carpenter et al., 1981, 1983; De Corte y Verschaffel, 1987; Stern, 1993) en el sentido que los problemas de suma y resta son más fáciles con la incógnita en el resultado que con la incógnita al inicio.

El análisis de las interacciones triples sólo se realiza en una de ellas. Los datos de la interacción Problema X Operación X Incógnita se exponen en la Tabla 14.9.

Tabla 14.9

Medias y sumatorios correspondientes a la interacción *Problema* (concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) * *Operación* (suma vs. resta) * *Lugar de la incógnita* (final vs. inicio).

	Suma				Resta			
	Incógnita al final		Incógnita al inicio		Incógnita al final		Incógnita al inicio	
Problema	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media
Concreto	85	0.88	45	0.46	57	0.59	59	0.61
Dibujos	85	0.88	44	0.45	59	0.61	59	0.61
Numérico	78	0.81	52	0.54	68	0.70	54	0.56
Verbal	84	0.87	41	0.43	78	0.81	47	0.49

El análisis de los efectos simples encuentra que en la operación de la suma con la incógnita al inicio existen diferencias significativas de los problemas numéricos con los concretos, dibujos y verbales ($F_{3,\ 90} = 2.77$, $p < .05$); en la resta con la incógnita en el resultado se tienen diferencias de los problemas numéricos con respecto a los concretos y dibujos, así como, de los problemas verbales con los demás tipos ($F_{3,\ 90} = 7.41$, $p < .01$).

En la suma, los problemas numéricos superan a todos los demás cuando la incógnita se sitúa en el primer sumando debido al razonamiento basado en la forma canónica. En la resta se encuentra consistencia con otros estudios (Carpenter, 1986) respecto a que el rendimiento se incrementa cuando se resuelven los problemas verbales que los demás tipos.

Concluyendo, los alumnos urbanos muestran un patrón evolutivo en la solución de los problemas según el grado de abstracción, en el cual los cursos superiores tienen un mayor rendimiento con relación a los cursos inferiores. Estos alumnos resuelven mejor los problemas con la incógnita al final. En segundo curso, los problemas concretos superan a los numéricos, sin embargo, estos problemas se resuelven mejor que todos en tercero. Esto significa que los niveles de abstracción superiores se desarrollan a partir del tercer curso, mientras que en los primeros cursos prevalecen los niveles inferiores. El predominio del algoritmo en tercero se explica como indicador relevante del proceso de enseñanza tradicional. Este proceso domina el grado de abstracción en la solución de los problemas. En este sentido, el conocimiento formal se manifiesta ampliamente en tercero. La comprensión de los problemas fáciles es más frecuente a través del nivel verbal, pero en los problemas difíciles disminuye la competencia en este nivel y en el contraste entre la suma y la resta debido a la interpretación inadecuada del conjunto de inicio o a la transformación de la operación en su forma canónica. Esto mismo confirma la tendencia del pensamiento matemático de los niños urbanos a basarse en el conocimiento formal aprendido bajo la enseñanza tradicional.

Como parte de la discusión sobre el primer objetivo de la investigación expondremos los resultados sobre el rendimiento en base a los siguientes aspectos: el patrón evolutivo y el nivel de abstracción

En relación con el primero, los alumnos de ambos contextos desarrollan de una manera evolutiva la competencia de solución de los problemas de Cambio. Es decir, el rendimiento en los cursos inferiores se supera por el nivel alcanzado en los cursos superiores. Esta tendencia evolutiva se muestra en la suma y resta, aunque en esta operación el rendimiento disminuye con respecto a la primera. Los niños desarrollan un conjunto de conocimientos y competencias durante un cierto período evolutivo que cambian con la edad para luego elaborar conceptos más avanzados que les permitan comprender las tareas.

Con respecto al segundo planteamos que la comprensión de los problemas verbales se desarrolla preferentemente. Los problemas numéricos son difíciles para los participantes rurales. Es decir, en este grupo de niños se realiza mejor la comprensión de las tareas a partir de la formulación verbal e informal que mediante la presentación de los símbolos formales.

Siguiendo la posición constructivista afirmamos que la comprensión infantil en general y el pensamiento matemático de los niños en particular se desarrolla a partir de los conocimientos obtenidos en los entornos informales los cuales posibilitan la adquisición de los conocimientos requeridos para solucionar las tareas. Entonces, los problemas verbales muestran su superioridad en el contexto rural debido a una mayor interacción dentro de los entornos o contextos informales en comparación con los entornos o contextos formales.

Asimismo, las pautas de desarrollo del nivel de abstracción se distinguen a través de los cursos escolares en función del tipo de operación y el lugar de la incógnita, por tanto, se pueden establecer las siguientes regularidades:

1. Los problemas de suma y resta con la incógnita al final se resuelven con los niveles superiores de abstracción en todos los cursos

2. Los problemas de suma y resta con la incógnita al inicio se solucionan con los niveles inferiores de abstracción en los primeros cursos y con los niveles superiores en los cursos avanzados.

Asumiendo la aproximación constructivista se explica que los participantes solucionan la tarea con los niveles superiores de abstracción cuando los problemas son fáciles, mientras que recurren a los niveles inferiores para construir la respuesta si los problemas son difíciles. En concreto, la dificultad de la tarea genera un movimiento dialéctico de los procesos de abstracción mediante un intercambio entre los niveles inferiores y superiores con el cual se confirma que tales niveles estarían interrelacionados.

Los alumnos en los cursos inferiores basan su comprensión de los problemas en los niveles inferiores tal como lo muestran las diferencias de primero y segundo curso con respecto a los cursos avanzados. Por el contrario, los participantes de los cursos superiores construyen su comprensión del problema a partir de los niveles superiores de abstracción tal como se puede encontrar en los resultados de tercero y cuarto curso.

14.2. Análisis del contexto rural vs. contexto urbano

A continuación analizaremos comparativamente el rendimiento de los alumnos según el contexto escolar a partir del curso, el tipo de problema, la operación aritmética y el lugar que ocupa la incógnita. Las puntuaciones medias representan los datos de este rendimiento.

14.2.1. ***Rendimiento entre los contextos según las distintas variables***

En la Tabla 14.10 se muestran los resultados del rendimiento global entre ambos contextos en cada una de las variables estudiadas.

Tabla 14.10.

Puntuaciones medias del rendimiento de los alumnos rurales y urbanos por curso, tipo de problema, operación, incógnita y la operación según la incógnita.

	Contexto Rural		Contexto Urbano			Contexto Rural		Contexto Urbano	
Variable	M	DS	M	DS	Variable	M	DS	M	DS
Curso					Operación				
Primero	0.34	(1.26)	0.36	(1.21)	Suma	4.82	(1.41)	5.36	(1.3)
Segundo	0.44	(1.24)	0.59	(1.4)	Resta	4.66	(1.56)	5.01	(1.5)
					Incógnita				
Tercero	0.64	(1.38)	0.72	(1.14)	Final	5.66	(1.38)	6.18	(1.2)
Cuarto	0.93	(.99)	0.89	(.91)	Inicio	3.82	(1.59)	4.18	(1.6)
Problema					Problema suma				
Concreto	2.35	(.76)	2.56	(.73)	Inc. final	3.06	(1.24)	3.45	(1.0)
Dibujos	2.25	(.81)	2.57	(.73)	Inc. Inicio	1.76	(1.58)	1.90	(1.6)
					Problema resta				
Numérico	2.25	(.98)	2.62	(.76)	Inc. Final	2.60	(1.52)	2.72	(1.4)
Verbal	2.63	(1.02)	2.61	(.70)	Inc. Inicio	2.06	(1.60)	2.28	(1.6)

Nota. Las puntuaciones de desviación estándar se señalan entre paréntesis.

Los alumnos urbanos de primero, segundo y tercer curso obtienen mayor rendimiento que sus iguales rurales. Sin embargo, los participantes rurales de cuarto curso logran mejor rendimiento que sus iguales urbanos.

Los escolares urbanos superan a sus iguales del contexto rural en todos los problemas, excepto en los verbales.

Los niños urbanos tienen mejor rendimiento que sus iguales del contexto rural tanto en la suma como en la resta.

Los alumnos urbanos solucionan mejor que sus iguales rurales los problemas en ambas posiciones de la incógnita.

Los participantes urbanos superan a sus iguales del contexto rural en la suma tanto con la incógnita al final como al inicio. Esto mismo sucede con relación a la resta.

14.2.2. ***Diferencias entre los contextos en el tipo de problema***

La Tabla 14.11 muestra el rendimiento global en el tipo de problema según la operación y la ubicación de la incógnita.

Por una parte, los escolares urbanos superan a sus iguales del contexto rural en todos los tipos de problemas de suma. Lo mismo se observa con relación a la resta a excepción de los problemas verbales en los cuales los alumnos rurales obtienen mejor rendimiento que sus iguales urbanos.

Por otra, los participantes urbanos superan de nuevo a sus iguales del contexto rural en todos los tipos de problema con la incógnita al final. Esto mismo ocurre cuando la incógnita se encuentra ubicada al inicio, excepto en el caso de los problemas verbales en los cuales los niños rurales obtienen mayor rendimiento que sus iguales urbanos.

Tabla 14.11.

Puntuaciones medias del rendimiento de los alumnos rurales y urbanos en los tipos de problemas de suma y resta.

	Tipo de problema							
	Concreto		Dibujos		Numérico		Verbal	
Contexto escolar	M	DS	M	DS	M	DS	M	DS
	Suma							
Rural	1.18	(.51)	1.18	(.28)	1.14	(.46)	1.30	(.00)
Urbano	1.35	(.51)	1.34	(.44)	1.35	(.46)	1.31	(.00
	Resta							
Rural	1.16	(.51)	1.06	(.49)	1.10	(.28)	1.33	(.00)
Urbano	1.20	(.48)	1.22	(.34)	1.27	(.38)	1.30	(.00)
	Incógnita al final							
Rural	1.40	(.41)	1.30	(.34)	1.32	(.49)	1.63	(.34)
Urbano	1.47	(.44)	1.50	(.41)	1.52	(.51)	1.68	(.28)
	Incógnita al inicio							
Rural	0.94	(.38)	0.94	(.46)	0.92	(.51)	1.00	(.34)
Urbano	1.08	(.34)	1.07	(.46)	1.10	(.51)	0.92	(.34)

Nota. Las puntuaciones de desviación estándar se señalan entre paréntesis.

La Tabla 14.12 muestra el rendimiento en el tipo de problema entre los contextos con respecto a la suma y la resta de acuerdo con el lugar de la incógnita independiente del curso escolar. En cuanto a la suma se encuentra que los alumnos urbanos superan a sus iguales rurales en todos los problemas con la incógnita al final. Esto se repite cuando la incógnita se ubica en el primer sumando, excepto en los problemas verbales en los cuales los participantes rurales obtienen mejor rendimiento que sus iguales urbanos y en los problemas con dibujos donde muestran el mismo rendimiento ambos contextos.

Con respecto a la resta sucede que los escolares urbanos superan nuevamente a sus iguales rurales en todos los problemas excepto en los concretos cuando la incógnita se encuentra en el resultado. En los problemas con la incógnita en el minuendo sucede lo mismo a excepción de los problemas verbales en los cuales los alumnos rurales superan a sus iguales urbanos.

Tabla 14.12

Puntuaciones media del rendimiento de ambos contextos en la suma y la resta según el tipo de problema y el lugar de la incógnita.

		Suma		Resta	
	Problema	Incógnita al final	Incógnita al inicio	Incógnita al final	Incógnita al inicio
Contexto Rural	Concreto	.79 (.40)	.40 (.49)	.61 (.48)	.55 (.50)
	Dibujos	.73 (.44)	.46 (.50)	.57 (.49)	.49 (.50)
	Numérico	.70 (.46)	.45 (.50)	.62 (.48)	.48 (.50)
	Verbal	.84 (.36)	.46 (.50)	.79 (.40)	.54 (.50)
Contexto Urbano	Concreto	.89 (.32)	.47 (.50)	.59 (.49)	.61 (.48)
	Dibujos	.89 (.32)	.46 (.50)	.61 (.48)	.61 (.48)
	Numérico	.81 (.39)	.54 (.50)	.71 (.45)	.56 (.49)
	Verbal	.88 (.33)	.44 (.50)	.81 (.39)	.49 (.50)

Nota. Las puntuaciones de desviación estándar se señalan entre paréntesis.

Los datos de la Tabla 14.4 se consideran nuevamente para analizar las diferencias entre los contextos según el curso escolar en el tipo de problema, la operación y el lugar de la incógnita. El rendimiento de los participantes urbanos es mayor que sus iguales rurales en todos los tipos de problemas de suma, excepto lo contrario que ocurre en los siguientes casos: 1) los problemas concreto y verbal con la incógnita en el resultado en segundo curso, 2) los problemas con dibujos y numérico con la anterior incógnita en cuarto, 3) los problemas concreto, dibujos y numérico con la incógnita en el primer sumando en primero, 4) el problema verbal con la anterior incógnita en segundo, 5) los problemas concreto, dibujos y verbal con tal incógnita en cuarto. Además, se encuentra un rendimiento similar entre ambos contextos en los problemas concretos y verbales cuando la incógnita se sitúa en el resultado en tercer curso, esto mismo ocurre en los problemas verbales con la incógnita en el primer sumando en tal curso.

Entonces, en la suma con la incógnita en el resultado existe una superioridad de los escolares urbanos de primer curso. En segundo se manifiesta una predominancia en distintos tipos de problemas por ambos contextos. En tercero se muestra mayor rendimiento en todos los problemas por los niños del contexto urbano En cuarto se encuentra que los participantes rurales superan en dos tipos de problemas a los alumnos urbanos, aunque ambos contextos obtienen el mismo rendimiento en los otros problemas

Además, en los problemas de suma con la incógnita en el primer sumando se encuentra que los niños rurales de primer curso logran un mayor rendimiento que sus iguales urbanos en todos los problemas, excepto en los problemas verbales. En segundo y tercero sucede exactamente lo contrario. Los escolares rurales de cuarto son mejores que sus iguales urbanos en todos los problemas excepto en los numéricos.

Igualmente, los datos de la Tabla 14.5 indican que el rendimiento de los participantes urbanos supera al de sus iguales rurales en todos los problemas de resta, lo contrario ocurre en los siguientes casos: 1) los problemas concreto y verbal con la incógnita en el resultado en primer curso, 2) los problemas concreto y dibujos con la anterior incógnita en tercero, 3) los problemas concreto, dibujos y numérico con la misma incógnita en cuarto, 4) el problema verbal con la incógnita en el minuendo en primero y tercero y 5) todos los problemas con la anterior incógnita en cuarto. También, se encuentra un rendimiento similar en ambos contextos en los problemas verbales con la incógnita al final en cuarto curso y en los concretos con la incógnita al inicio en primero.

Resumiendo, en la resta con la incógnita en el resultado se obtiene una distinta predominancia por los escolares de primer curso de ambos contextos. Los niños urbanos de segundo superan a sus iguales rurales en todos los problemas. Ambos contextos en tercero logran nuevamente una distinta predominancia. Los alumnos rurales de cuarto son mejores que sus iguales urbanos en todos los problemas, excepto en los verbales donde presentan un rendimiento similar.

Además, se encuentra que en la resta con la incógnita en el minuendo, los participantes urbanos del primer curso obtienen un mayor rendimiento que sus iguales rurales en los problemas con dibujos y numéricos. Por el contrario, estos últimos alumnos resuelven más que sus iguales urbanos los problemas verbales. Sin embargo, ambos contextos tienen un rendimiento similar en los problemas concretos. Los niños de segundo del contexto urbano superan a los escolares rurales en todos estos problemas. También, los participantes urbanos de tercero son mejores en tales problemas, excepto en los verbales. Por el contrario, los alumnos rurales de cuarto tienen mayor éxito que sus iguales urbanos en todos los problemas.

Los datos de ambos contextos se analizan conjuntamente mediante el análisis de varianza (ANOVA) mixto 2 (Contexto: rural vs urbano) X 4 (Curso escolar: primero vs. segundo vs. tercero vs. cuarto) X 4 (Tipo de problema: concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) X 2 (Tipo de operación: suma vs. resta) X 2 (Lugar de la incógnita: final vs. inicio) con medidas repetidas en los tres últimos factores con el programa SPSS 11.0 (ver apéndice). El contexto y el curso escolar son las variables inter-sujetos mientras que el tipo de problema, la operación y el lugar de la incógnita son los factores intra-sujetos. El rendimiento en los problemas de Cambio de suma y resta se considera como la variable dependiente.

Los resultados muestran que son significativos los efectos principales de los factores **curso** ($F_{3, 184} = 57.24$, $p<.01$), **problema** ($F_{3, 552} = 3.13$, $p < .05$), **operación** ($F_{1, 184} = 4.00$, $p< .05$) y **lugar de la incógnita** ($F_{1, 184} = 155.16$, $p < .01$). No hubo efecto del factor contexto ($F_{1, 184} = 3.09$, $p = .08$). Entonces, el curso escolar, el problema, el tipo de operación y el lugar de la incógnita afectan el rendimiento en los problemas de Cambio de suma y resta. Sin embargo, los distintos contextos no afectan el rendimiento en la tarea.

En el estudio de comparaciones múltiples de Tuckey en el factor curso se encuentran diferencias significativas entre los escolares de cuarto con relación a los demás cursos ($p<.05$), los alumnos de tercero y segundo difieren con respecto a los de primero ($p < .05$), pero las diferencias no son significativas entre tercero y segundo. Estos resultados son consistentes con los de otros estudios (Carpenter y Moser, 1982; De Corte et al.,1985; Riley et al., 1983) que plantean un patrón evolutivo del rendimiento en las tareas de suma y resta.

La comparación por pares con la prueba de Tuckey en el factor problema encuentra diferencias de los problemas verbales con respecto a los problemas numéricos ($p < .05$) y los problemas con dibujos ($p < .05$). Estos datos concuerdan con los hallados por otros autores (Cummins, 1991; De Corte et al., 1985; Rathmell, 1986; Riley et al., 1983) en cuanto que en los problemas verbales se obtiene mayor rendimiento con respecto al algoritmo y la presentación de dibujos.

Esta comparación en el factor operación muestra diferencias de la suma con respecto a la resta ($p < .05$). Asimismo se confirman los resultados encontrados por otros autores (Riley et al., 1983) de que la suma es más fácil que la resta.

En el factor incógnita existen diferencias de la incógnita al final con relación a la incógnita en el primer término ($p < .01$). Estos datos son consistentes con los hallados en otros estudios (Bebout, 1990; Bermejo y Rodríguez, 1987; Carpenter et al., 1983; De Corte y Verschaffel, 1987) en el sentido de que la incógnita al final es más fácil que cuando se sitúa al inicio del problema.

Además, este análisis de varianza revela que son significativas las interacciones dobles Curso X Problema ($F_{9, 552} = 3.41$, $p < .01$), Curso X Incógnita ($F_{3, 184} = 3.93$, $p < .01$), Problema X Incógnita ($F_{3, 552} = 11.24$, $p < .01$), Operación X Incógnita ($F_{1, 184} = 42.29$, $p<.01$), así como, las interacciones triples Contexto X Curso X Operación ($F_{3, 184} = 3.11$, $p<.05$), Curso X Problema X Incógnita ($F_{9, 552} =3.56$, $p < .01$), Curso X Operación X Incógnita ($F_{3, 184} = 8.08$, $p < .01$), Problema X Operación X Incógnita ($F_{3, 552} = 10.27$, $p<.01$), además, las interacciones Curso X Problema X Operación X Incógnita ($F_{9, 552} = 2.69$, $p < .01$) y Contexto X Curso X Problema X Operación X Incógnita ($F_{9, 552} = 2.14$, $p < .05$).

La interacción entre el curso escolar y el tipo de problema se aprecia en la Figura 14.7. El rendimiento en los diferentes cursos cambia cuando el problema se presenta de distinta manera. Los alumnos de primero y cuarto manifiestan un patrón de respuesta similar en los cuatro tipos de problemas. Los participantes de segundo disminuyen su rendimiento en

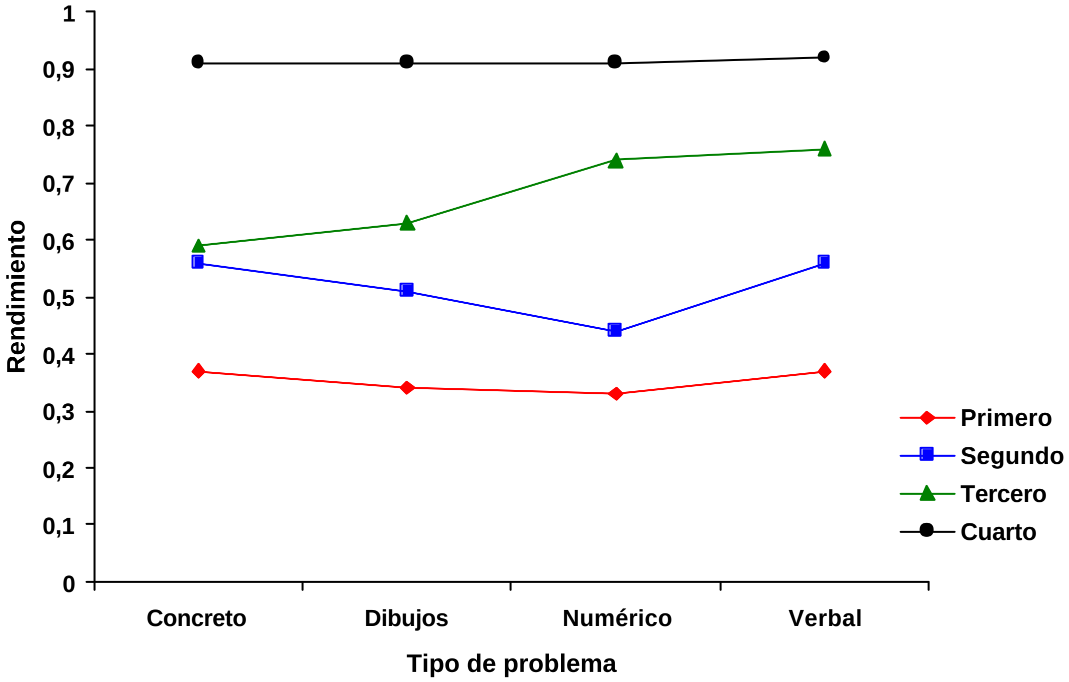

Figura 14.7. Interacción tipo de problema por curso escolar en ambos contextos.

los problemas con dibujos y numéricos por debajo del nivel mostrado en los concretos. Los niños de tercero incrementan sus respuestas según el grado de abstracción, es decir el rendimiento se mejora a través de los problemas concretos, seguidos por los de dibujos, posteriormente, los numéricos y, al final, los verbales.

El análisis de los efectos simples del factor problema en el factor curso encuentra diferencias significativas de los problemas numéricos y verbales con respecto a los concretos y dibujos en tercer curso ($F_{3,\ 182} = 7.74$, $p < .01$). Esto implica que los niveles superiores de abstracción se desarrollan sobre todo en los cursos más avanzados.

La interacción entre el curso escolar y el lugar de la incógnita se muestra en la Figura 14.8. El rendimiento es mayor en los distintos cursos cuando la incógnita se sitúa al final que al inicio del problema. Además, se observa un patrón evolutivo a través de los cuatro cursos.

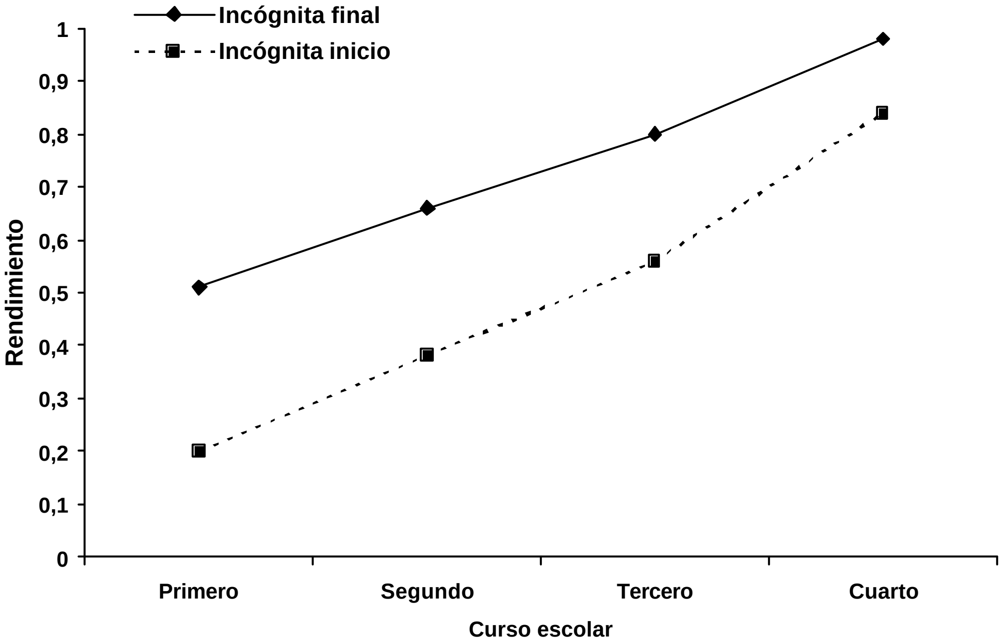

Figura 14.8. Interacción curso escolar por lugar de la incógnita en ambos contextos.

El análisis de los efectos simples del factor incógnita en el factor curso encuentra diferencias significativas en la incógnita al final desde primero hasta cuarto curso ($F_{1, 184}$ = 64.55, p < .01; $F_{1, 184}$ = 53.16, p < .01; $F_{1, 184}$ = 36.92, p < .01; $F_{1, 184}$ = 12.32, p < .01).

Estos resultados confirman los hallados por otros estudios (Bebout, 1990; Bermejo y Rodríguez, 1990b; Carpenter et al., 1981; De Corte y Verschaffel, 1987; Stern, 1993) en cuanto que los problemas con la incógnita al final se resuelven más fácil que con la incógnita al inicio.

En la Figura 14.9 se observa la interacción entre el tipo de problema y el lugar de la incógnita. El rendimiento en los distintos problemas aumenta cuando la incógnita se encuentra al final y disminuye cuando la incógnita está al inicio del problema.

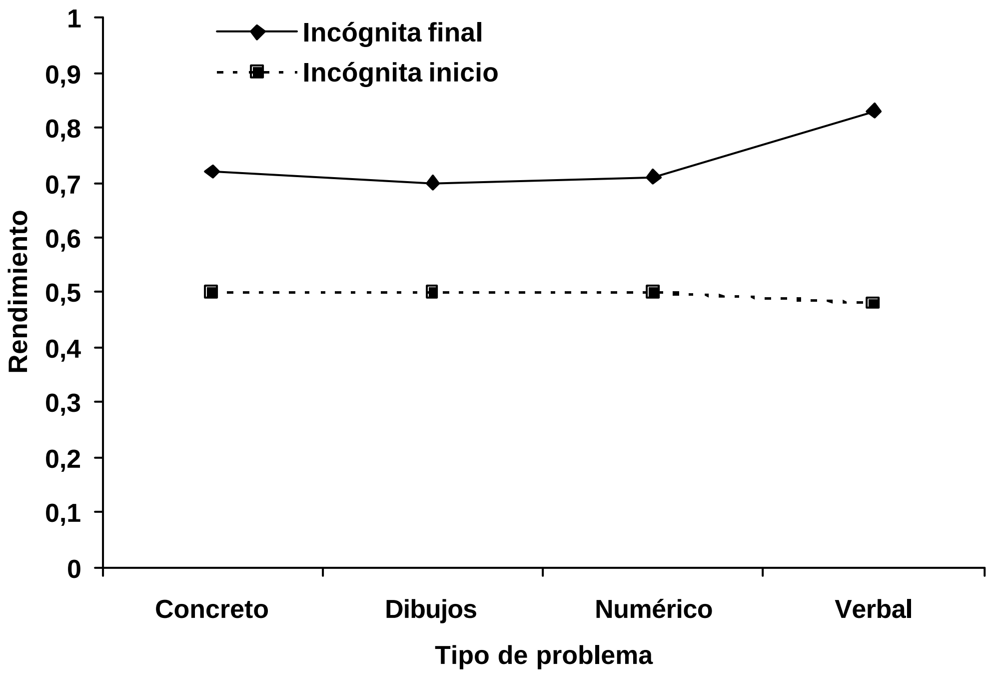

Figura 14.9. Interacción tipo de problema por lugar de la incógnita en ambos contextos

Específicamente, el rendimiento en los problemas verbales se incrementa cuando la incógnita se ubica al final, pero es menor mientras la incógnita se sitúa en el inicio del problema.

El análisis de los efectos simples teniendo en cuenta el factor problema en cada nivel del factor incógnita revela que los problemas verbales difieren significativamente de los concretos, dibujos y numéricos cuando la incógnita se sitúa al final ($F_{3, 182} = 8.99$, $p < .01$).

Estos datos confirman los descubrimientos de otros trabajos (Bermejo y Rodríguez, 1987; Carpenter et al., 1982, 1983; Riley et al.,1983) con relación a que los problemas verbales son más fáciles cuando la incógnita se ubica en el resultado.

En la Figura 14.10 se muestra la interacción entre el tipo de operación y el lugar de la incógnita. Por un lado, el rendimiento en la suma y la resta se incrementa cuando la incógnita se encuentra al final que cuando está al inicio del problema. Por otro, el rendimiento en la suma es mejor que en la resta cuando la incógnita se ubica en el resultado, pero en la resta se obtiene mayor rendimiento cuando el elemento desconocido está al inicio del problema.

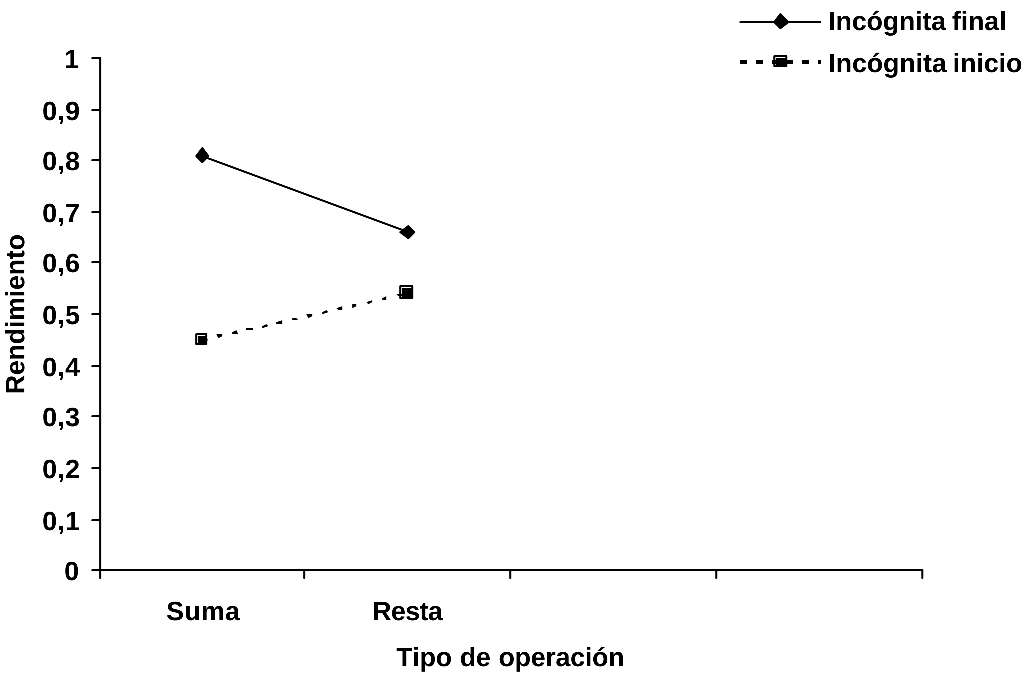

Figura 14.10. Interacción tipo de operación por lugar de la incógnita en ambos contextos

El análisis de los efectos simples del factor operación en los niveles del factor incógnita indica que existen diferencias de la suma con respecto a la resta en los problemas con la incógnita al final ($F_{1,\ 184} = 50.20$, $p < .01$). Además, se encuentran contraste de la resta con relación a la suma cuando la incógnita se sitúa en el inicio del problema ($F_{1,\ 184} = 31.20$, $p < .01$). Entonces, la suma resulta más fácil que la resta cuando el elemento desconocido se ubica en el resultado, mientras que los problemas de resta se solucionan mejor cuando la incógnita se encuentra en el inicio del problema.

El análisis de las interacciones triples sólo se realiza con una de ellas. En la Tabla 14.13 se muestra la interacción Contexto X Curso X Problema X Operación X Incógnita.

Tabla 14.13

Medias y sumatorios correspondientes a la interacción *Contexto* (rural vs. urbano) * *Curso* (primero vs. segundo vs. tercero vs. cuarto) * *Problema* (concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) * *Operación* (suma vs. resta) * *Lugar de la incógnita* (final vs. inicio).

			Suma				Resta			
			Incógnita al final		Incógnita al inicio		Incógnita al final		Incógnita al inicio	
Contexto	Curso	Problema	Sumat	Media	Sumat	Media	Sumat	Media	Sumat	Media
Rural	Primero	Concreto	13	0.54	5	0.20	10	0.41	8	0.33
		Dibujos	11	0.45	6	0.25	8	0.33	6	0.25
		Numérico	12	0.50	4	0.16	8	0.33	5	0.20
		Verbal	16	0.66	3	0.12	13	0.54	5	0.20
	Segundo	Concreto	22	0.91	3	0.12	9	0.37	12	0.50
		Dibujos	18	0.75	5	0.20	7	0.29	9	0.37
		Numérico	9	0.37	7	0.29	9	0.37	8	0.33
		Verbal	21	0.87	7	0.29	18	0.75	7	0.29
	Tercero	Concreto	17	0.70	9	0.37	16	0.66	12	0.50
		Dibujos	17	0.70	11	0.45	16	0.66	12	0.50
		Numérico	22	0.91	11	0.45	9	0.79	13	0.54
		Verbal	20	0.83	13	0.54	21	0.87	18	0.75
	Cuarto	Concreto	24	1.0	21	0.87	24	1.0	21	0.87
		Dibujos	24	1.0	22	0.91	24	1.0	20	0.83
		Numérico	24	1.0	21	0.87	24	1.0	20	0.83
		Verbal	24	1.0	21	0.87	24	1.0	22	0.91
Urbano	Primero	Concreto	17	0.70	2	0.08	9	0.37	8	0.33
		Dibujos	17	0.70	1	0.04	9	0.37	9	0.37
		Numérico	14	0.58	2	0.08	11	0.45	8	0.33
		Verbal	17	0.70	4	0.16	12	0.50	2	0.08
	Segundo	Concreto	21	0.87	10	0.41	15	0.62	17	0.70
		Dibujos	22	0.91	8	0.33	13	0.54	17	0.70
		Numérico	17	0.70	9	0.37	14	0.58	13	0.54
		Verbal	20	0.83	5	0.20	20	0.83	10	0.41
	Tercero	Concreto	23	0.95	13	0.54	10	0.41	15	0.62
		Dibujos	23	0.95	14	0.58	15	0.62	14	0.58
		Numérico	24	1.0	19	0.79	20	0.83	15	0.62
		Verbal	23	0.95	13	0.54	22	0.91	16	0.66
	Cuarto	Concreto	24	1.0	20	0.83	23	0.95	19	0.79
		Dibujos	23	0.95	21	0.87	22	0.91	19	0.79
		Numérico	23	0.95	22	0.91	23	0.95	18	0.75
		Verbal	24	1.0	20	0.83	24	1.0	19	0.79

El análisis de los efectos simples del factor problema en los niveles de los demás factores encuentra que se contrastan los problemas concretos de suma con la incógnita al final con los numéricos y dibujos, además, los problemas de dibujos y verbales difieren con relación a los numéricos en los alumnos rurales de segundo curso ($F_{3,182} = 16.08$, $p < .01$). Esto significa que los alumnos de este curso desarrollan más los niveles inferiores de abstracción en los problemas fáciles.

En estos alumnos se muestran diferencias significativas de los problemas verbales de resta con la incógnita al final respecto a los concretos, dibujos y numéricos ($F_{3,182} = 6.03$, $p < .01$). También estos niños comprenden mejor los problemas verbales en la resta.

Los participantes urbanos de segundo contrastan en los problemas verbales de resta con la incógnita en el resultado con los numéricos y dibujos ($F_{3, 182} = 2.65$, $p = .05$). Estos escolares tienen diferencias significativas en los problemas concretos y dibujos de resta con la incógnita al inicio con relación a los numéricos y verbales ($F_{3, 182} = 3.73$, $p<.05$). Tales alumnos desarrollan más los niveles superiores de abstracción en los problemas fáciles de resta, mientras que manifiestan más los niveles inferiores de abstracción en los problemas difíciles con la misma operación.

También, los niños urbanos de tercero contrastan en los problemas numéricos de suma con la incógnita al inicio sobre los concretos, dibujos y verbales ($F_{3,182}=3.30$, $p < .05$). Estos alumnos muestran diferencias significativas en los problemas de dibujos de resta con la incógnita al final con respecto a los concretos, además en los problemas numéricos y verbales de resta con la incógnita al final con relación a los concretos y dibujos ($F_{3, 182} = 11.88$, $p<.01$). En este curso se emplean más los niveles superiores de abstracción tanto en los problemas fáciles como difíciles de resta.

En esta misma interacción analizamos los efectos simples del factor contexto en los niveles de los demás factores. El análisis revela diferencias significativas en el rendimiento de los escolares urbanos de primero con respecto a sus iguales rurales en los problemas de dibujos de suma con la incógnita al final ($F_{3, 184} = 5.72$, $p < .05$). Los alumnos urbanos son más pictóricos que sus iguales rurales en los problemas fáciles de suma.

También existen diferencias significativas en el rendimiento de los participantes del contexto urbano de segundo curso con respecto a sus iguales rurales en los problemas concretos de suma con la incógnita al inicio, los concretos de resta con la incógnita en el resultado, los de dibujos de resta con la incógnita al final, los de dibujos de resta con la incógnita en el minuendo y en los numéricos de suma con la incógnita en el resultado ($F_{1, 184} = 5.90$, $p < .05$; $F_{1, 184} = 3.96$, $p < .05$; $F_{1, 184} = 3.98$, $p<.05$; $F_{1, 184} = 6.15$, $p < .05$; $F_{1, 184} = 9.73$, $p < .01$, respectivamente). Los niños urbanos de segundo curso son más concretos que sus iguales rurales en los problemas difíciles de suma y en los fáciles de resta. Además, los escolares urbanos son más pictóricos que sus iguales rurales en los problemas difíciles de resta y más numéricos en los problemas fáciles de suma.

Igualmente, los alumnos urbanos de tercero difieren con respecto a sus iguales rurales en los problemas concretos y dibujos de suma con la incógnita al final, y en los problemas numéricos de suma con la incógnita al inicio ($F_{1, 184} = 5.90$, $p < .05$; $F_{1, 184} = 5.90$, $p < .05$; $F_{1, 184} = 5.90$, $p < .05$; $F_{1, 184} = 5.90$, $p < .05$; $F_{1, 184} = 5.90$, $p < .01$, respectivamente). Los alumnos urbanos emplean más que sus iguales rurales los niveles inferiores de abstracción en los problemas fáciles de suma.

Por el contrario, los niños rurales de tercero difieren significativamente de sus iguales urbanos en los problemas concretos de resta con la incógnita en el resultado ($F_{1, 184} = 3.96$, $p< .05$). Estos alumnos rurales son más concretos que sus iguales urbanos en los problemas fáciles de resta.

Considerando el segundo objetivo de esta investigación conviene plantear dos cuestiones.

En primer lugar, las puntuaciones medias indican que los niños urbanos rinden mejor que sus iguales rurales en los problemas de suma y resta tanto fáciles como difíciles, lo cual confirma los resultados encontrados en otro estudio (Saxe, 1991).

En segundo lugar, ambos contextos muestran un patrón evolutivo en el rendimiento, el cuál se incrementa de acuerdo con los problemas más abstractos y la posición de la incógnita en el resultado. Además, las tareas de suma se resuelven mejor que la resta excepto cuando la incógnita se encuentra al inicio. Aunque no existe efecto del factor contexto se encuentran algunas diferencias significativas entre los contextos. Por un lado, los alumnos rurales de segundo recurren a los niveles inferiores de abstracción en los problemas fáciles de suma, mientras que los participantes urbanos emplean estos niveles en los problemas fáciles de resta. Por otro, los escolares urbanos son más concretos y pictóricos que sus iguales rurales en los cursos intermedios.

Entonces, entre los alumnos de ambos contextos se encuentran distintas tendencias en su desarrollo. Si bien es cierto que la evolución del pensamiento matemático infantil no se determina por los factores sociales, no obstante, éstos influyen en las diferencias individuales de las competencias necesarias para resolver un problema de suma o resta. Por ejemplo, los escolares del contexto urbano muestran mayor competencia en los problemas de Cambio con un grado menos abstracto que sus iguales del contexto rural.

Estas diferencias indican que los alumnos urbanos tienden a ser más concretos y pictóricos que sus iguales del contexto rural en los cursos intermedios (segundo y tercero), mientras que los participantes rurales son mejores que sus iguales urbanos en el nivel concreto en la operación de la resta con la incógnita al final en cuarto.

Esto significa que los alumnos urbanos son más concretos por el uso de materiales como apoyo para su conocimiento formal, mientras que los escolares rurales son más verbales por el desarrollo de su conocimiento informal en actividades con problemas verbales

14.3. Análisis de las estrategias

El análisis de las estrategias empleadas por los alumnos se presenta en tres partes. En la primera se realiza el análisis de las estrategias de los alumnos del contexto urbano, en la segunda se exponen las estrategias de los participantes rurales, y en la tercera se comparan las estrategias de ambos contextos.

Este análisis se basa en los datos de los porcentajes de la frecuencia de estrategias en cada curso escolar tanto de un contexto como del otro. Los datos se muestran en las siguientes tablas con el fin de facilitar la comprensión de los resultados.

14.3.1. *Estrategias de los alumnos del contexto urbano*

Las estrategias de los participantes se analizan según el curso escolar, la operación, el lugar de la incógnita y el grado de abstracción.

14.3.1.1. *Tipo de estrategias por curso escolar.*

En la Tabla 14.14 se muestran los datos de las estrategias empleadas en los problemas de suma. En estos problemas con la incógnita en el resultado se encuentra que a nivel concreto los escolares de primero usan principalmente la estrategia *contar todo* (76%); los niños de segundo aplican en mayor medida esta estrategia y las estrategias *memorísticas* (38%, en ambas), y los de tercero y cuarto emplean más las estrategias *memorísticas* (87% y 96%, respectivamente).

Tabla 14.14

Porcentaje de estrategias en los problemas de suma de los cursos escolares del contexto urbano

		INCOGNITA EN EL RESULTADO				INCOGNITA EN EL PRIMER SUMANDO			
Tipo de estrategia	Curso	C	D	N	V	C	D	N	V
MODELADO DIRECTO									
Contar todo	1º.	76	82	29	6	---------	---------	---------	---------
	2º.	38	45	12	10	---------	---------	---------	---------
	3º.	9	9	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	4	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
Contar todo A2	1º.	12	---------	21	6	---------	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
Contar todo A3	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	6	-------	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
Contar todo A11	1º.	---------	12	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	5	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	--------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
Quitar de	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	---------	-------	20	13	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	15	29	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	10	14	---------	7
Quitar a	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	---------	-------	---------	12	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
CONTEO									
Contar sin modelos	1º.	---------	---------	---------	47	--------	---------	---------	---------
	2º.	5	5	6	10	--------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	--------	--------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	--------	---------	---------	---------
Contar a partir del primer sumando	1º.	---------	---------	14	12	--------	---------	---------	---------
	2º.	9	5	18	20	--------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	4	--------	--------	---------	---------	---------
	4º.	---------	4	9	4	--------	---------	---------	---------
Contar a partir del sumando mayor	1º.	6	---------	22	12	--------	---------	---------	---------
	2º.	5	---------	5	5	--------	---------	---------	---------
	3º.	4	---------	8	4	--------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	4	4	-------	---------	---------	---------
Contar cantidades B3	1º.	---------	---------	---------	--------	--------	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	---------	--------	--------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	--------	--------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	4	--------	---------	---------	---------
Contar hacia atrás hasta	1º.	---------	---------	---------	--------	--------	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	---------	--------	--------	---------	11	---------
	3º.	---------	---------	---------	--------	--------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	--------	--------	-------	--------	---------	---------
Contar hasta	1º.	---------	---------	---------	--------	--------	--------	---------	25
	2º.	---------	---------	---------	--------	10	38	11	20
	3º.	---------	---------	---------	--------	8	---------	11	8
	4º.	---------	---------	---------	--------	--------	5	5	10
HECHOS NUMERICOS									
Memorísticas	1º.	6	6	14	17	100	100	100	75
	2º.	38	45	53	55	70	37	78	80
	3º.	87	91	88	91	77	71	89	85
	4º.	96	96	83	88	90	81	95	90
Reglas	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	5	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	4	-------	---------	---------	---------	---------

Nota. C = problema concreto; D = problema con dibujos; N = problema numérico; V = problema verbal.

En el nivel pictórico, los niños de primero recurren más a la estrategia *contar todo* (82%); los alumnos de segundo utilizan en mayor medida esta estrategia y las estrategias *memorísticas* (45%, en ambas), y los escolares de tercero y cuarto usan más las estrategias *memorísticas* (91% y 96%, respectivamente).

En el nivel numérico, los alumnos de primero emplean frecuentemente la estrategia *contar todo* (28%), mientras que los escolares de segundo, tercero y cuarto manifiestan más las estrategias *memorísticas* (53%, 88% y 83%, respectivamente).

En el nivel verbal, los alumnos de primero usan principalmente la estrategia *contar sin modelos* (47%), mientras que los participantes de segundo, tercero y cuarto emplean más las estrategias *memorísticas* (55%, 91% y 88%, respectivamente).

De acuerdo con estos datos, en el primer curso predomina la estrategia *contar todo* en los niveles concreto, pictórico y numérico, y la estrategia *contar sin modelos* lo hace en el nivel verbal. En segundo, la estrategia *contar todo* destaca en los niveles concreto y pictórico, y las estrategias *memorísticas* sobresalen a través de los cuatro niveles. En tercero y cuarto curso, las estrategias *memorísticas* son dominantes en todos los niveles.

En cuanto a las estrategias de modelado directo, la estrategia *contar todo* se usa más en el nivel concreto por todos los cursos; en el nivel pictórico por los tres primeros cursos; en el nivel numérico y verbal por primero y segundo. Las demás estrategias se emplean menos por los otros cursos en los distintos niveles.

A continuación se resumen las principales estrategias de conteo. La estrategia *contar sin modelos* se utiliza por los niños de primero en el nivel verbal y por los de segundo en todos los niveles. La estrategia *contar a partir del primer sumando* se expresa en los niveles numérico y verbal por los alumnos de primero; en todos los niveles por los escolares de segundo; en el nivel numérico por los niños de tercero y en los niveles pictórico, numérico y verbal por los participantes de cuarto. La estrategia *contar a partir del sumando mayor* se emplea por primero, segundo y tercer curso en los niveles concreto y numérico, mientras que los alumnos de cuarto la utilizan en los niveles numérico y verbal

En cuanto a las estrategias hechos numéricos, las estrategias *memorísticas* se usan en todos los niveles por todos los cursos. Las estrategias *reglas* sólo se expresan en el nivel verbal por los niños de tercero y en el nivel numérico por los de cuarto.

En los problemas de suma con la incógnita en el primer sumando se encuentra que a nivel concreto los alumnos de todos los cursos usan principalmente las estrategias *memorísticas* (100%, 70%, 77% y 90%, respectivamente).

En el nivel pictórico, los escolares de primero emplean fundamentalmente las estrategias *memorísticas* (100%); los niños de segundo recurren más a la estrategia *contar hasta* (38%), y los escolares de tercero y cuarto usan más las estrategias *memorísticas* (71% y 81%, respectivamente).

En el nivel numérico, los alumnos de primero hasta cuarto curso manifiestan en mayor medida las estrategias *memorísticas* (100%, 78%, 89% y 95%, respectivamente).

En el nivel verbal sucede lo mismo que en el anterior nivel (75%, 80%, 85% y 90%, respectivamente).

Por tanto, en el primer curso las estrategias *memorísticas* son predominantes en todos los niveles. En segundo, la estrategia *contar hasta* es prioritaria en el nivel pictórico y las estrategias *memorísticas* en los cuatro niveles. En tercero y cuarto, las estrategias *memorísticas* dominan en todos los niveles.

Con relación a las estrategias de modelado directo, la estrategia *quitar de* se usa principalmente en los niveles concreto y pictórico por los alumnos de segundo, tercero y cuarto. La estrategia *quitar a* sólo se manifiesta en el nivel pictórico por los niños de segundo.

Con respecto a las estrategias de conteo, la estrategia *contar hasta* se manifiesta más en el nivel verbal por los niños de primero, en todos los niveles por los escolares de segundo, en los niveles concreto, numérico y verbal por los niños de tercero, y en los niveles pictórico, numérico y verbal por cuarto curso.

Finalmente, las estrategias *memorísticas* se utilizan por todos los cursos en todos los niveles.

En la Tabla 14.15 se presentan los resultados de las estrategias en los problemas de resta correspondientes a los alumnos urbanos.

En primer lugar, iniciando por los problemas con la incógnita en el resultado se encuentra que a nivel concreto los participantes de primero y segundo usan principalmente la estrategia *quitar de* (88% y 46%, respectivamente), mientras que los escolares de tercero y cuarto recurren más a las estrategias *memorísticas* (50% y 47%, respectivamente).

En el nivel pictórico, los niños de primero y segundo manifiestan fundamentalmente la estrategia *quitar de* (55% y 53%, respectivamente), mientras que los escolares de tercero y cuarto emplean más las estrategias *memorísticas* (60% y 63%, respectivamente).

En el nivel numérico, los alumnos de primero expresan con prioridad la estrategia *quitar de* (81%), mientras que los participantes de segundo, tercero y cuarto aplican más las estrategias *memorísticas* (57%, 100% y 78%, respectivamente).

En el nivel verbal, los niños de primero usan principalmente la estrategia *quitar de* (58%), mientras que los escolares de segundo, tercero y cuarto recurren más a las estrategias *memorísticas* (75%, 90% y 87%, respectivamente).

Entonces, en el primer curso, la estrategia *quitar de* predomina en los niveles concreto, pictórico, numérico y verbal. En segundo, esta estrategia es principal en los niveles concreto y pictórico y las estrategias *memorísticas* lo son en los niveles numérico y verbal. En tercero y cuarto, estas últimas estrategias se emplean más en los distintos niveles.

Tabla 14.15.

Porcentaje de estrategias en los problemas de resta por los cursos del contexto urbano.

		INCOGNITA EN EL RESULTADO				INCOGNITA EN EL MINUENDO			
Tipo de estrategia	Curso	C	D	N	V	C	D	N	V
MODELADO DIRECTO									
Contar todo	1º.	--------	--------	--------	------	87	67	75	--------
	2º.	--------	--------	--------	------	47	47	31	--------
	3º.	--------	--------	--------	------	--------	--------	--------	--------
	4º.	--------	--------	--------	------	6	--------	--------	--------
Quitar de	1º.	89	56	82	58	--------	--------	--------	--------
	2º.	47	54	29	25	--------	--------	--------	--------
	3º.	40	33	--------	5	--------	--------	--------	--------
	4º.	35	18	17	13	--------	--------	--------	--------
Contar hasta	1º.	--------	--------	--------	------	--------	--------	--------	--------
	2º.	--------	--------	--------	------	--------	--------	--------	--------
	3º.	--------	--------	--------	4	--------	--------	--------	--------
	4º.	--------	--------	--------	------	--------	--------	--------	--------
Contar todo A11	1º.	--------	--------	--------	------	--------	--------	--------	--------
	2º.	--------	--------	--------	------	--------	--------	--------	--------
	3º.	--------	--------	--------	------	7	--------	--------	--------
	4º.	--------	--------	--------	------	--------	--------	--------	--------
Emparejamiento	1º.	--------	22	--------	------	--------	--------	--------	--------
	2º.	13	15	--------	------	--------	--------	--------	--------
	3º.	--------	--------	--------	------	--------	--------	--------	--------
	4º.	13	9	--------	------	--------	--------	--------	--------
CONTEO									
Contar a partir de un término	1º.	--------	--------	--------	------	13	33	--------	--------
	2º.	--------	--------	--------	------	6	6	8	--------
	3º.	--------	--------	--------	------	--------	--------	--------	--------
	4º.	--------	--------	--------	------	--------	--------	--------	--------
Contar hacia atrás	1º.	--------	--------	--------	9	--------	--------	--------	--------
	2º.	--------	--------	7	------	--------	--------	--------	--------
	3º.	--------	--------	--------	------	--------	--------	--------	--------
	4º.	--------	--------	--------	------	--------	--------	--------	--------
Contar hacia atrás hasta	1º.	--------	--------	--------	------	--------	--------	--------	--------
	2º.	7	--------	7	------	--------	--------	--------	--------
	3º.	--------	--------	--------	------	--------	--------	--------	--------
	4º.	--------	--------	--------	------	--------	--------	--------	--------
Contar hacia atrás desde lo dado	1º.	--------	11	--------	------	--------	--------	--------	--------
	2º.	--------	--------	--------	------	--------	--------	--------	--------
	3º.	10	7	--------	------	--------	--------	--------	--------
	4º.	4	9	5	------	--------	--------	--------	--------
HECHOS NUMERICOS									
Memorísticas	1º.	11	11	18	33	--------	--------	25	100
	2º.	33	30	57	75	47	47	53	100
	3º.	50	60	100	91	87	100	100	100
	4º.	48	64	78	87	89	94	94	100
Reglas	1º.	--------	--------	--------	------	--------	--------	--------	--------
	2º.	--------	--------	--------	------	--------	--------	8	--------
	3º.	--------	--------	--------	------	6	--------	--------	--------
	4º.	--------	--------	--------	------	5	6	6	--------

Nota. C = problema concreto; D = problema con dibujos; N = problema numérico; V = problema verbal.

A continuación describimos la estrategia de modelado directo más frecuente. La estrategia *quitar de* se emplea en el nivel concreto, pictórico y verbal por todos los cursos, y en el nivel numérico por los alumnos de primero, segundo y cuarto. La estrategia *contar hasta* sólo se manifiesta en el nivel verbal por los escolares de tercero. La estrategia *emparejamiento* se expresa en el nivel concreto por los niños de segundo y cuarto, y en el nivel pictórico por los alumnos de primero, segundo y cuarto.

Asimismo, resumimos las estrategias de conteo empleadas por los participantes. La estrategia *contar hacia atrás* se usa en el nivel numérico por los alumnos de segundo y en el nivel verbal por los escolares de primero. La estrategia *contar hacia atrás hasta* se aplica en el nivel concreto y verbal por los niños de segundo. La estrategia *contar hacia atrás desde lo dado* se utiliza en el nivel concreto por los alumnos de tercero y cuarto, en el nivel pictórico por todos los cursos excepto segundo, y en el nivel numérico por los niños de cuarto.

En cuanto a las estrategias de hechos numéricos, las estrategias *memorísticas* se emplean por todos los cursos en todos los niveles.

En segundo lugar, consideramos el grado de abstracción en la operación de resta con la incógnita en el minuendo. En el nivel concreto se encuentra que los alumnos de primero usan fundamentalmente la estrategia *contar todo* (87%); los escolares de segundo aplican en mayor medida esta estrategia y las estrategias *memorísticas* (47%, en ambas), y los niños de tercero y cuarto usan más las estrategias *memorísticas* (86% y 89%, respectivamente).

En el nivel pictórico, los participantes de primero emplean principalmente la estrategia *contar todo* (66%); los alumnos de segundo prefieren esta estrategia y las estrategias *memorísticas* (47%, en ambas), y los escolares de tercero y cuarto manifiestan más las estrategias *memorísticas* (100% y 94%, respectivamente).

En el nivel numérico, los alumnos de primero recurren más a la estrategia *contar todo* (75%), mientras que los de segundo, tercero y cuarto expresan en mayor medida las estrategias *memorísticas* (53%, 100% y 94%, respectivamente).

En el nivel verbal, todos los cursos utilizan más las estrategias *memorísticas* (100%).

Por tanto, en el primer curso es predominante la estrategia *contar todo* en los niveles concreto, pictórico y numérico. En segundo son principales la estrategia *contar todo* en los niveles concreto y pictórico y las estrategias *memorísticas* a través de todos los niveles. En tercero y cuarto dominan las estrategias *memorísticas* en todos los niveles.

Las principal estrategia de modelado directo es la estrategia *contar todo*, la cual se emplea en el nivel concreto por los alumnos de primero, segundo y cuarto, en los niveles pictórico y numérico por los escolares de primero y segundo. La estrategia *contar todo A11* se manifiesta en el nivel concreto por los niños de tercero.

En las estrategias de conteo sólo se recurre a la estrategia *contar a partir de un término*, la cual se usa en los niveles concreto y pictórico por los alumnos de primero y segundo, y en el nivel numérico por los participantes de segundo.

En cuanto a las estrategias de hechos numéricos, las estrategias *memorísticas* se manifiestan por todos los cursos en todos los niveles, excepto en los niveles concreto y pictórico por los escolares de primero. La estrategia *reglas* se expresa en los niveles concreto, pictórico y numérico por los alumnos de cuarto, en el nivel numérico por los participantes de segundo, y en el nivel concreto por los de primero.

14.3.1.2. *Tipo de estrategia en la operación según el lugar de la incógnita*

Los resultados también se analizan de acuerdo con el lugar que ocupa la incógnita al margen del grado de abstracción. Para este análisis agrupamos las estrategias de acuerdo a las categorías conocidas: *modelado directo*, *conteo* y *hechos numéricos*.

En la Tabla 14.16 se muestran los tipos de estrategias en la solución de los problemas de suma y resta con la incógnita tanto en el resultado como al inicio por los mismos alumnos.

Tabla 14.16

Porcentaje de estrategias obtenido por los cursos del contexto urbano en el tipo de operación y el lugar de la incógnita.

	Curso escolar			
Operación-Incógnita	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto
	Estrategias modelado			
Suma				
Incógnita en el resultado	61	30	4	1
Incógnita en el inicio	0	12	12	6
Resta				
Incógnita en el resultado	76	43	16	26
Incógnita en el inicio	70	43	2	1
	Estrategias conteo			
Suma				
Incógnita en el resultado	28	23	6	7
Incógnita en el inicio	11	22	7	1
Resta				
Incógnita en el resultado	5	5	3	4
Incógnita en el inicio	15	6	0	0
	Estrategias hechos numéricos			
Suma				
Incógnita en el resultado	11	47	90	92
Incógnita en el inicio	89	66	81	89
Resta				
Incógnita en el resultado	19	52	81	70
Incógnita en el inicio	15	51	98	99

En primer lugar, se describen las estrategias empleadas en los problemas de suma con la incógnita en el resultado.

Los participantes de primer curso resuelven más estos problemas con las estrategias *modelado directo*. Los alumnos de segundo, tercero y cuarto manifiestan más las estrategias *hechos numéricos*.

En cuanto a la dimensión de mayor y menor uso se puede resumir lo siguiente con respecto a los tipos de estrategias.

Las estrategias *modelado directo* se emplean más por primer curso, y casi nunca en cuarto. Las estrategias *conteo* se aplican por igual por los alumnos de primero y segundo, aunque menos veces por los escolares de tercero. Las estrategias *hechos numéricos* se usan en primer lugar por los participantes de cuarto y, al último, los alumnos de primero recurren a ellas.

En segundo lugar describimos las estrategias usadas en los problemas de suma con la incógnita en el primer sumando. Los niños desde primero hasta cuarto resuelven primeramente los problemas con las estrategias *hechos numéricos*.

De acuerdo con los datos, afirmamos que las estrategias *modelado directo* se utilizan más por los alumnos de tercer curso y nunca por los de primero. Las estrategias *conteo* se aplican más por los niños de segundo y menos por los alumnos de primero. Las estrategias *hechos numéricos* se manifiestan en primer lugar por los participantes de cuarto y, al último, hacen uso de ellas los niños de primero.

En tercer lugar se analizan las estrategias empleadas en los problemas de resta con la incógnita en el resultado. Los niños de primero resuelven principalmente los problemas con las estrategias *modelado directo*. Los alumnos de segundo, tercero y cuarto aplican más las estrategias *hechos numéricos*.

Resumiendo, las estrategias *modelado directo* se utilizan más por los alumnos de primer curso y pocas veces por tercero. Las estrategias *conteo* se aplican más por los alumnos de cuarto, y en menor proporción por los niños de primero y tercero. Las estrategias *hechos numéricos* se usan en primer lugar por los alumnos de cuarto y, al último, se emplean en primero.

En cuarto lugar analizamos las estrategias utilizadas en la resta con la incógnita en el minuendo. Los participantes de primero solucionan principalmente los problemas mediante las estrategias *modelado directo.*

Los niños de segundo, tercero y cuarto curso emplean más las estrategias *hechos numéricos*.

Por tanto, cabe mencionar que las estrategias *modelado directo* se usan más por los alumnos de primer curso y en pocas ocasiones por los niños de tercero y cuarto en igual proporción. Las estrategias *conteo* se aplican más por los alumnos de primero y no se usan por los alumnos de tercero y cuarto. Las estrategias *hechos numéricos* se manifiestan en primer lugar por los alumnos de cuarto y, al último, recurren a ellas los alumnos de primero.

14.3.1.3. *Tipo de estrategia según el problema en la operación*

A continuación presentamos los datos de las estrategias respecto al tipo de problema y la operación independiente del curso escolar y el lugar de la incógnita.

En la Tabla 14.17 se muestran las estrategias de los alumnos del contexto urbano en los problemas de suma y resta.

Por una parte, describimos las estrategias correspondientes a los problemas de suma. En los problemas concretos y dibujos, las estrategias *hechos numéricos* tienen mayor uso, mientras que las estrategias *conteo* se emplean menos.

Tabla 14.17

Porcentaje de estrategias obtenido en el tipo de problema según la operación por los alumnos del contexto urbano.

Problema	Suma Modelado	Suma Conteo	Suma Hechos numéricos	Resta Modelado	Resta Conteo	Resta Hechos numéricos
Concreto	26	6	68	42	4	54
Dibujos	29	5	66	35	7	58
Numérico	8	16	76	22	3	75
Verbal	4	22	74	14	1	85

En los problemas numéricos y verbales, las estrategias *hechos numéricos* se usan más, mientras que las estrategias *modelado directo* se emplean menos.

Entonces, el patrón de estrategia para los problemas concretos y dibujos es el siguiente: las estrategias *hechos numéricos* son más frecuentes, seguidas por las estrategias *modelado directo* y, al final, ocurren las estrategias *conteo*. En los problemas numéricos y verbales cambia el anterior patrón de estrategia en el sentido que las estrategias *memorísticas* son más frecuentes, seguidas por las estrategias *conteo* y, por último, aparecen las estrategias *modelado directo.*

Por otra, analizamos las estrategias en los problemas de resta. En todos los problemas, las estrategias *hechos numéricos* se emplean más, mientras que las estrategias *conteo* se manifiestan menos.

De acuerdo con estos datos existe el mismo patrón de estrategia en todos los tipos de problemas: las estrategias *hechos numéricos* son más frecuentes, seguidas por las estrategias *modelado directo* y las estrategias *conteo* se emplean menos para solucionarlos.

14.3.1.4. *Datos significativos*

Para analizar las estrategias de los alumnos urbanos realizamos el análisis de varianza (ANOVA) mixto 4 (Curso: primero vs. segundo vs. tercero vs. cuarto) X 4 (Tipo de problema: concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) X 2 (Tipo de operación: suma vs. resta) X 2 (Lugar de la incógnita: final vs. inicio) con medidas repetidas en los tres últimos factores mediante el programa SPSS 11.0. El curso escolar es la variable inter-sujetos, mientras que el tipo de problema, la operación y el lugar de la incógnita son los factores intra-sujetos. La estrategia *modelado directo* se considera como la variable dependiente.

Este análisis revela que existen efectos principales de los factores **curso** ($F_{3,\ 92}$=10.70, $p < .01$), **problema** ($F_{3,\ 276}$ = 33.32, $p < .01$), **operación** ($F_{1,\ 92}$ = 11.08, $p = .01$) y **lugar de la incógnita** ($F_{1,\ 92}$ = 47.59, $p < .01$). En otras palabras, el curso escolar, el tipo de problema, la operación y el lugar de la incógnita afectan el empleo de las estrategias *modelado directo*. En concreto, estas estrategias dependen del problema presentado y del curso escolar al que asisten los alumnos. Tales estrategias cambian cuando la operación es la suma o la resta y se modifican cuando la incógnita se encuentra al final o al inicio del problema.

El estudio de comparaciones múltiples de Tuckey encuentra diferencias significativas de los escolares de cuarto con segundo y primer curso ($p < .05$), pero no con tercero. Los alumnos de tercero tienen diferencias con respecto a primero y segundo ($p<.05$), mientras que los alumnos de segundo no difieren con relación al primer curso. Estos resultados son consistentes con los hallados en otras investigaciones (Bermejo y Rodríguez, 1993; Bermejo y otros, 1998; Carpenter, 1985, 1996; Carpenter et al., 1993; Starkey y Gelman, 1982; Riley y Greeno, 1988) en el sentido que las estrategias *modelado directo* se emplean principalmente por los cursos inferiores, mientras que disminuyen en los cursos superiores (Bermejo y otros, 1998; Bermejo y Rodríguez, 1993; Carpenter et al.,1996).

Además, la prueba de comparación por pares de Tuckey en el factor problema encuentra diferencias significativas de los problemas concretos y dibujos respecto a los problemas verbales y numéricos ($p < .01$), y los problemas numéricos manifiestan estas diferencias sobre los problemas verbales ($p < .05$). Estos datos confirman los descubrimientos de otros estudios (Bermejo y otros, 1998; Carpenter et al., 1983; Chao, Stigler y Woodward, 2000; Fuson y Briars, 1990; Fuson y Burghardt, 2003; Jordan, Huttenlocher y Levine, 1992; Labinowicz, 1985; Levine, Jordan, y Huttenlocher, 1992; Resnick y Omanson, 1987; Starkey y Gelman, 1982) en cuanto que los alumnos recurren a las estrategias *modelado directo* cuando se dispone de materiales concretos para resolver las tareas.

Asimismo, la anterior prueba en el factor operación encuentra diferencias de la resta con respecto a la suma ($p < .01$). Estos resultados confirman los encontrados por otros autores (Bermejo y Rodríguez, 1998; Carpenter y Moser, 1983, 1984; Carpenter et al., 1993; De Corte, 2003; Fuson, Stigler y Bartsch, 1988; Fuson y Willis, 1988; Luwel et al., 2001, 2003a, 2003b, 2003c; Riley et al., 1983) con relación a que las estrategias *modelado directo* se emplean distintamente para las tareas de suma y resta.

Además, en el factor incógnita se muestran diferencias de la incógnita al final con relación a la incógnita en el inicio ($p < .01$). Estos datos concuerdan con los hallados en otros estudios (Bermejo y otros, 1998; Bermejo y Rodríguez, 1993; Carpenter, 1996) que encuentran un uso distinto de las estrategias *modelado directo* según el lugar de la incógnita.

Este análisis de varianza revela que son significativas las interacciones dobles Problema X Curso ($F_{9,\ 276} = 2.82$, $p < .05$), Curso X Incógnita ($F_{3,\ 92} = 6.06$, $p = .01$) y Problema X Incógnita ($F_{3,\ 276} = 3.71$, $p < .05$), así como, las interacciones triples Curso X Operación X Lugar de la incógnita ($F_{3,\ 92} = 7.23$, $p < .01$) y Problema X Operación X Lugar de la incógnita ($F_{3,\ 276} = 2.92$, $p < .05$), además, la interacción Curso X Problema X Operación X Incógnita ($F_{9,\ 276} = 4.97$, $p < .01$).

En la Figura 14. 11 se aprecia la interacción entre el curso escolar y el tipo de problema. En general, los alumnos de primero y segundo muestran un patrón similar superior con respecto a los escolares de tercero y cuarto en el empleo de las estrategias *modelado directo.*

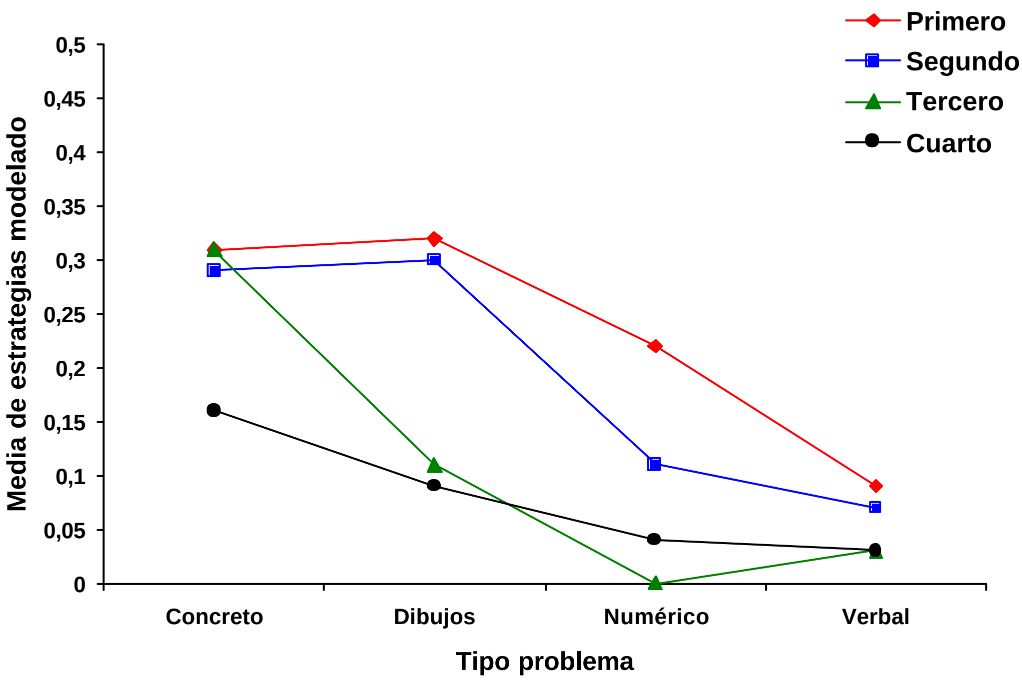

Figura 14.11 Interacción tipo de problema por curso escolar en el uso de estrategias modelado directo.

El análisis de los efectos simples del factor problema en los niveles del factor curso encuentra diferencias en primer curso de los problemas concretos con los numéricos y verbales, además, los problemas con dibujos y numéricos difieren respecto a los verbales ($F_{3,90}$ = 10.39, p < .01).

En segundo se diferencian los problemas concretos y dibujos con respecto a los numéricos y verbales ($F_{3, 90}$ = 14.15, p < .01). En tercero existen diferencias de los problemas concretos y dibujos con relación a los numéricos ($F_{3, 90}$ = 3.36, p<.05). En cuarto curso se encuentran diferencias de los problemas concretos con los numéricos y verbales ($F_{3, 90}$ = 4.53, p < .01).

Las estrategias *modelado dir*ecto son más frecuentes en los niveles inferiores de abstracción, luego tienden a disminuir en los niveles superiores. Este patrón de respuesta es consistente con los planteamientos evolutivos sobre el desarrollo de la comprensión de lo concreto hacia lo abstracto (Bruner, 1966; Piaget, 1951; Vygotski, 1978).

Así, las diferencias en el rendimiento de la estrategia *modelado directo* se deben principalmente al grado de abstracción.

En la Figura 14.12 se presenta la interacción entre el curso escolar y el lugar de la incógnita según las estrategias *modelado directo*.

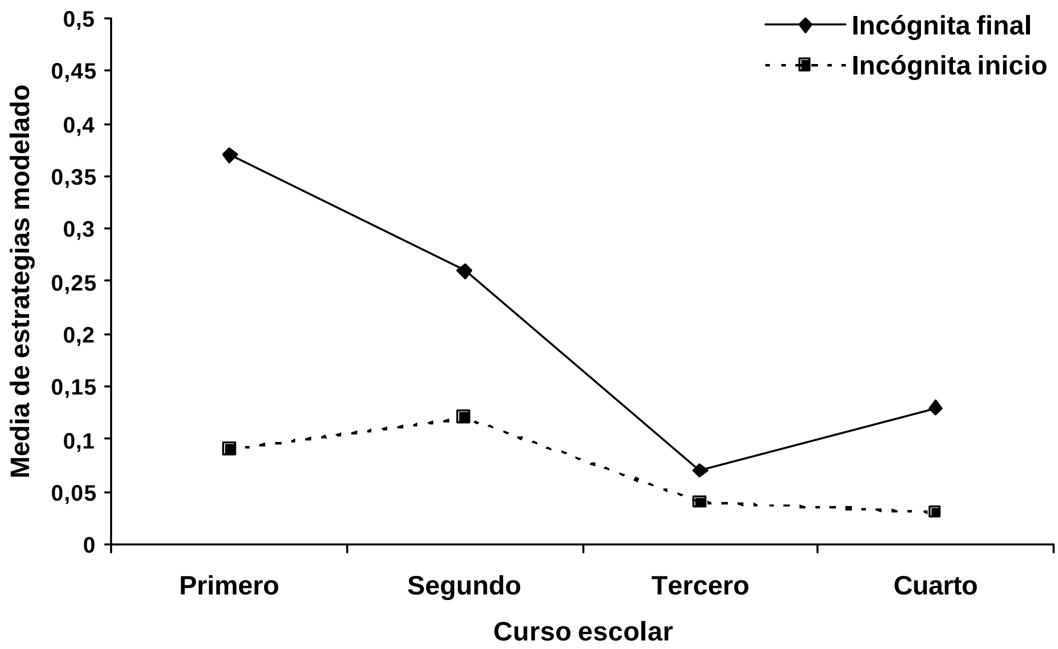

Figura 14.12 Interacción curso escolar por lugar de la incógnita en las estrategias modelado directo.

Tal como se observa, el empleo de las estrategias *modelado directo* se modifica cuando la incógnita está al final o al inicio del problema en los distintos cursos.

El patrón evolutivo indica que las estrategias *modelado directo* son más fecuentes en los primeros cursos que en los posteriores en ambas posiciones de la incógnita.

El análisis de los efectos simples del factor incógnita en los niveles del factor curso muestra diferencias significativas de las tareas con la incógnita al final con respecto a la incógnita al inicio en primero, segundo y tercer curso. ($F_{1,\,92} = 45.81$, $p < .01$; $F_{1,\,92} = 12.35$, $p < .01$; $F_{1,\,92} = 6.77$, $p < .05$). Estos resultados confirman los encontrados en otras investigaciones (Riley y Greeno, 1988) que plantean un mejor rendimiento en las tareas con la incógnita al final que con la incógnita al inicio mediante las estrategias *modelado directo.*

En la Figura 14.13 se muestra la interacción entre el tipo de problema y el lugar de la incógnita de acuerdo con estas estrategias. La utilización de las estrategias *modelado directo* se incrementa cuando la incógnita se encuentra al final que al inicio del problema.

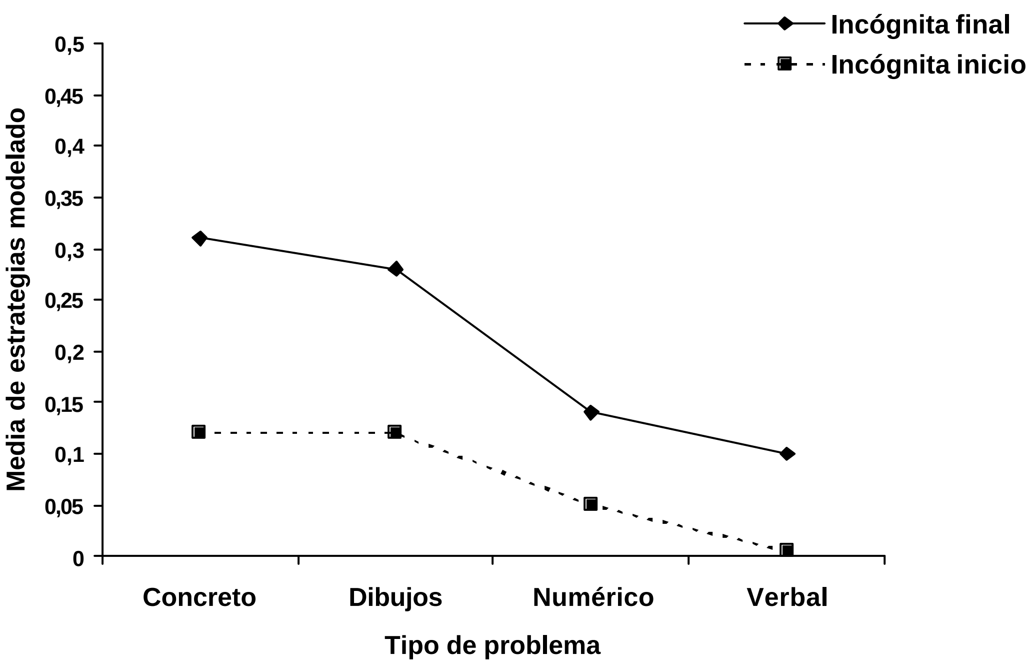

Figura 14.13. Interacción tipo de problema por lugar de la incógnita en las estrategias modelado directo.

El patrón de desarrollo indica que las estrategias *modelado directo* se emplean más en los problemas concretos y dibujos que en los numéricos y verbales en ambas posiciones de la incógnita. Esto significa que estas estrategias se usan sobre todo en los problemas más fáciles con niveles inferiores de abstracción, mientras que disminuyen su empleo en estos problemas con niveles superiores de abstracción.

En cuanto a las demás interacciones sólo profundizaremos en la última interacción. El análisis de los efectos simples del factor problema en los niveles de los otros factores se realizó con los datos de la Tabla 14.18.

Tabla 14.18

Medias y sumatorios correspondientes a la interacción *Curso* (primero vs. segundo vs. tercero vs. cuarto) * *Problema* (concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) * *Operación* (suma vs. resta) * *Lugar de la incógnita* (final vs. inicio).

		Suma				Resta			
		Incógnita al final		Incógnita al inicio		Incógnita al final		Incógnita al inicio	
Curso	Problema	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media
Primero	Concreto	15	0.62	0	0.00	8	0.33	7	0.29
	Dibujos	16	0.66	0	0.00	7	0.29	6	0.25
	Numérico	7	0.29	0	0.00	9	0.37	6	0.25
	Verbal	2	0.08	0	0.00	7	0.29	0	0.00
Segundo	Concreto	9	0.37	2	0.08	9	0.37	8	0.33
	Dibujos	10	0.41	2	0.08	9	0.37	8	0.33
	Numérico	3	0.12	0	0.00	4	0.16	4	0.16
	Verbal	2	0.08	0	0.00	5	0.20	0	0.00
Tercero	Concreto	2	0.08	2	0.08	4	0.16	1	0.04
	Dibujos	2	0.08	4	0.16	5	0.20	0	0.00
	Numérico	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
	Verbal	0	0.00	1	0.04	2	0.08	0	0.00
Cuarto	Concreto	1	0.04	2	0.08	11	0.50	1	0.04
	Dibujos	0	0.00	3	0.12	6	0.25	0	0.00
	Numérico	0	0.00	0	0.00	4	0.16	0	0.00
	Verbal	0	0.00	0	0.00	3	0.12	0	0.00

Este análisis encuentra diferencias en primer curso de los problemas concretos y dibujos con respecto a los numéricos y verbales en la suma con la incógnita en el resultado. Asimismo, los problemas concretos, dibujos y numéricos difieren con relación a los verbales en la resta con la incógnita al inicio, ($F_{3, 90} = 10.39$, $p < .01$).

En segundo sucede lo mismo que en primero cuando la suma tiene la incógnita en el resultado. Además, en la resta con la incógnita en el resultado se encuentra que los problemas concretos y dibujos difieren respecto a los numéricos ($F_{3, 90} = 10.39$, $p < .01$). También en la resta con la incógnita al inicio los problemas concretos y dibujos tienen diferencias respecto a los numéricos y verbales ($F_{3, 90} = 14.15$, $p < .01$).

En tercero se encuentran diferencias de los problemas de dibujos con respecto a los numéricos y verbales, y los problemas verbales difieren de los numéricos en la suma con la incógnita al inicio. También, los problemas concretos difieren con respecto a los numéricos en la resta con la incógnita al final ($F_{3,90}=10.39$, $p < .01$).

En cuarto curso se encuentran las mismas diferencias del anterior curso en la suma con la incógnita en el primer sumando. Además, los problemas concretos difieren en relación con los de dibujos, numéricos y verbales en la resta con la incógnita en el resultado ($F_{3,90} =10.39$, $p < .01$).

De acuerdo con lo anterior, las estrategias *modelado directo* son mejores para solucionar los problemas concretos y dibujos en comparación con los numéricos y verbales en la suma con la incógnita al inicio en primero y segundo curso, y en la resta con la incógnita en el minuendo en los cursos anteriores. Sin embargo, este patrón cambia en los cursos superiores. Los problemas de dibujos de suma con la incógnita al inicio y los problemas concretos de resta con la incógnita al final se resuelven básicamente con este tipo de estrategia en tercero y cuarto curso.

En otras palabras, las estrategias *modelado directo* se emplean en los niveles más concretos en los cursos inferiores tanto en los problemas fáciles de suma como en los problemas difíciles de resta de acuerdo con el lugar de la incógnita.

Igualmente, analizamos las estrategias de conteo con un análisis de varianza (ANOVA) mixto 4 (Curso: primero vs. segundo vs. tercero vs. cuarto) X 4 (Tipo de problema: concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) X 2 (Tipo de operación: suma vs. resta) X 2 (Lugar de la incógnita: final vs. inicio) con medidas repetidas en los tres últimos factores mediante el programa SPSS 11.0 a partir de los datos de los alumnos urbanos. El curso escolar es la variable inter-sujetos, mientras que el tipo de problema, la operación y el lugar de la incógnita son los factores intra-sujetos. La estrategia *conteo* se considera como la variable dependiente.

En este análisis se encontraron los efectos principales de los factores **problema** ($F_{3,276} = 4.43$, $p < .05$), **operación** ($F_{1, 92} = 22.08$, $p < .01$) y **lugar de la incógnita** ($F_{1,92}=13.13$, $p < .01$). Sin embargo, no hubo efecto del factor curso ($F_{3, 92} = 2.17$, $p = .09$). Por tanto, el tipo de problema, la operación y el lugar de la incógnita afectan la proporción de estrategias *conteo*.

La comparación por pares con la prueba de Tuckey en el factor problema encuentra diferencias significativas de los problemas verbales con respecto a los de dibujos y concretos ($p < .01$), además, los problemas numéricos difieren de los concretos ($p < .05$). Estos resultados confirman los encontrados por otros investigadores (Bermejo y Rodríguez, 1993; Carpenter y Moser, 1982) en el sentido de que las estrategias *conteo* se emplean principalmente en los problemas sin ayudas concretas. Esto significa que estas estrategias se utilizan sobre todo en los niveles superiores de abstracción.

Esta prueba realizada en el factor operación encuentra diferencias de la suma con respecto a la resta ($p < .01$). Esto confirma los resultados de otras investigaciones (Bermejo y otros, 1998; Starkey y Gelman, 1982, Thornton, 1990) en cuanto que las estrategias *conteo* se usan distintamente en las tareas de suma y resta.

Por último, tal comparación en el factor incógnita encuentra diferencias de la incógnita al final con relación a la incógnita al inicio ($p < .01$). Estos datos concuerdan con los de otros estudios (Bermejo y Rodríguez, 1993; Carpenter y Moser, 1983) que afirman el empleo principal de las estrategias *conteo* en los problemas con la incógnita al final.

El análisis de varianza también revela que son significativas las interacciones dobles Problema X Curso ($F_{9, 276} = 2.54$, $p < .05$), Problema X Operación ($F_{3, 276} = 11.54$, $p < .01$), Problema X Incógnita ($F_{3, 276} = 4.85$, $p < .05$) y Operación X Incógnita ($F_{1, 92} = 5.70$, $p<.05$), así como, las interacciones triples Curso X Problema X Operación ($F_{9, 276} = 2.33$, $p < .05$), Curso X Problema X Lugar de la incógnita ($F_{9, 276} = 2.79$, $p < .05$), Curso X Operación X Lugar de la incógnita ($F_{3, 92} = 2.76$, $p < .05$) y Problema X Operación X Lugar de la incógnita ($F_{3, 276} = 4.98$, $p < .05$).

La interacción entre el curso escolar y el tipo de problema afecta el empleo de las estrategias *conteo* tal como se muestra en la Figura 14.14.

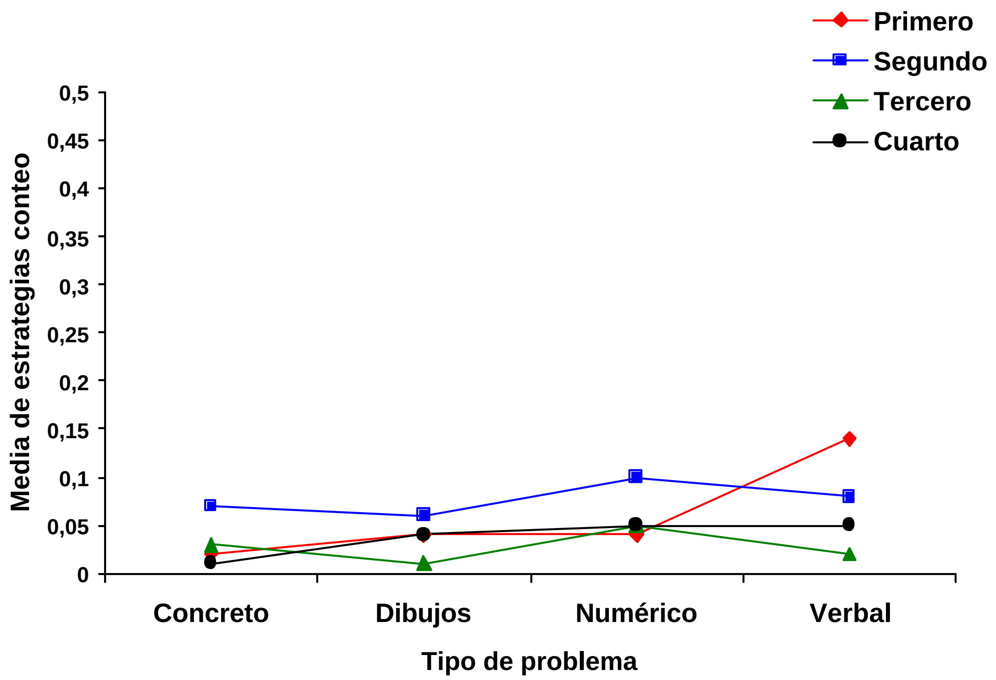

Figura 14.14. Interacción tipo de problema por curso escolar en las estrategias conteo de los alumnos urbanos.

Estas estrategias se manifiestan principalmente en los alumnos de segundo curso. Esto confirma los resultados encontrados en otras investigaciones (Bermejo y otros, 1998; Fang et al., 2001; Geary et al., 1996; Resnick, 1989) en el sentido de que las estrategias conteo se desarrollan principalmente entre los cursos intermedios.

Esto significa que las estrategias conteo se emplean en ambos niveles de abstracción por los cursos intermedios. Aunque todos los cursos recurren a estas estrategias sobre todo en los problemas numéricos.

El análisis de los efectos simples del factor problema en los niveles del factor curso encuentra diferencias de los problemas verbales con respecto a los demás problemas en primer curso ($F_{3, 90} = 7.91$, $p < .01$).

La Figura 14.15 muestra la interacción entre el problema y el tipo de operación en las estrategias *conteo*. En general, estas estrategias se emplean más en la suma que en la resta.

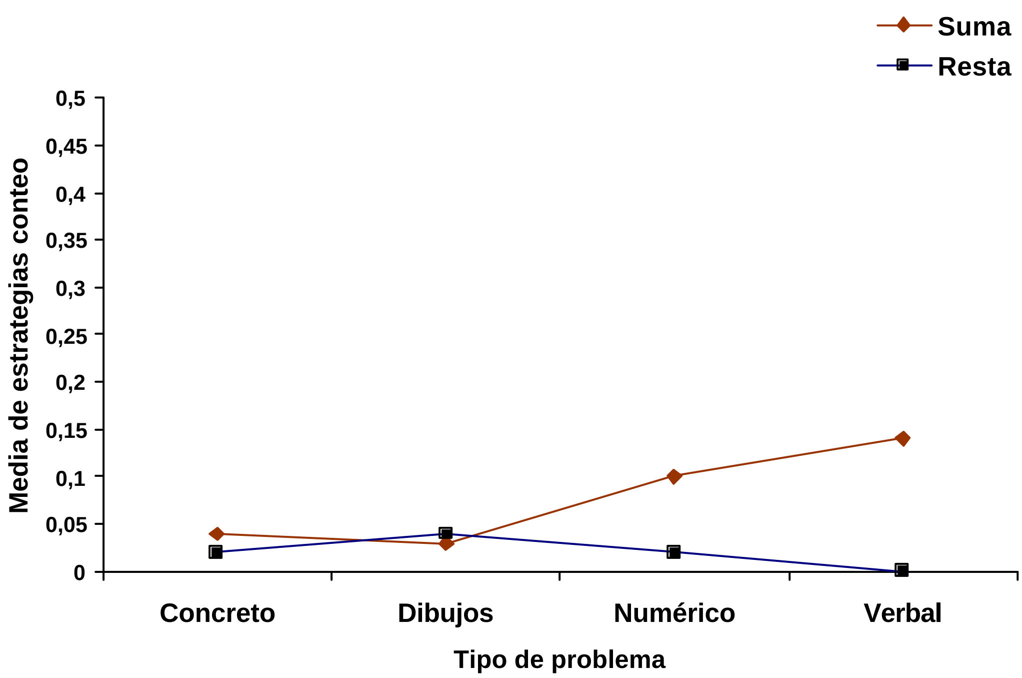

Figura 14.15. Interacción tipo de problema por operación en las estrategias conteo de los alumnos urbanos.

Específicamente, las estrategias *conteo* son más frecuentes en la suma que en la resta en todos los problemas excepto en los de dibujos. En la suma se alcanza la mayor frecuencia de estas estrategias en los problemas verbales, mientras que ocurren con menor proporción en los de dibujos. En la resta, tales estrategias aumentan más en los problemas con dibujos, mientras que se emiten menos en los verbales. De este modo, las estrategias conteo se incrementan en los niveles superiores de abstracción de los problemas de suma, pero disminuyen en estos niveles con respecto a las tareas de resta.

El análisis de los efectos simples del factor problema en los niveles del factor operación indica que los problemas numéricos y verbales difieren de los concretos y dibujos en las tareas de suma ($F_{3, 90} = 9.91$, $p < .01$)

En la Figura 14.16 se muestra la interacción entre el tipo de problema y el lugar de la incógnita en las mismas estrategias. Estas estrategias se utilizan de distinta manera según el problema y la ubicación de la incógnita.

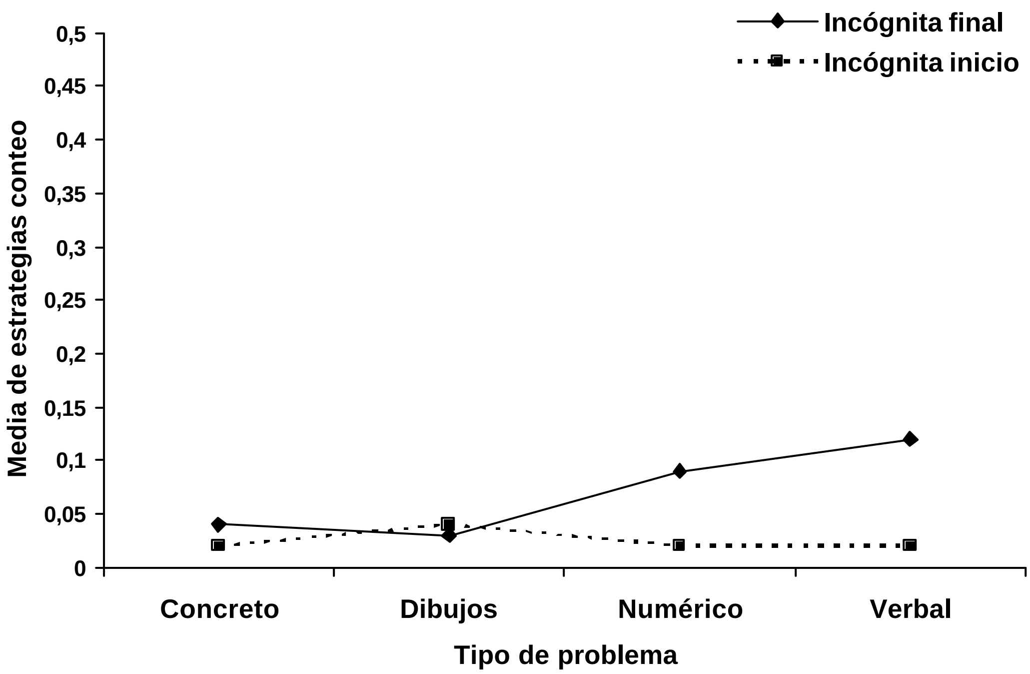

Figura 14.16. Interacción tipo de problema por lugar de la incógnita en las estrategias conteo de los alumnos urbanos.

Concretamente, las estrategias *conteo* se emplean más en las tareas con la incógnita al final que al inicio en todos los tipos de problemas excepto en los de dibujos. Por un lado, estas estrategias se usan frecuentemente en los problemas verbales y en menor medida en los de dibujos cuando la incógnita está en el resultado. Por otro, tales estrategias aparecen más en los problemas con dibujos y menos en los verbales cuando la incógnita se sitúa al inicio.

Igualmente, los niños recurren más a las estrategias conteo en los niveles superiores de abstracción en los problemas fáciles, pero tales estrategias se emplean menos en los mismos niveles cuando los problemas son difíciles.

El análisis de los efectos simples del factor problema en los niveles del factor incógnita muestra que los problemas verbales y numéricos difieren de los concretos y dibujos cuando la incógnita se encuentra en el resultado ($F_{3, 90} = 6.57$, $p < .01$).

La Figura 14.17. muestra la interacción entre el tipo de operación y el lugar de la incógnita en cuanto a las estrategias mencionadas anteriormente.

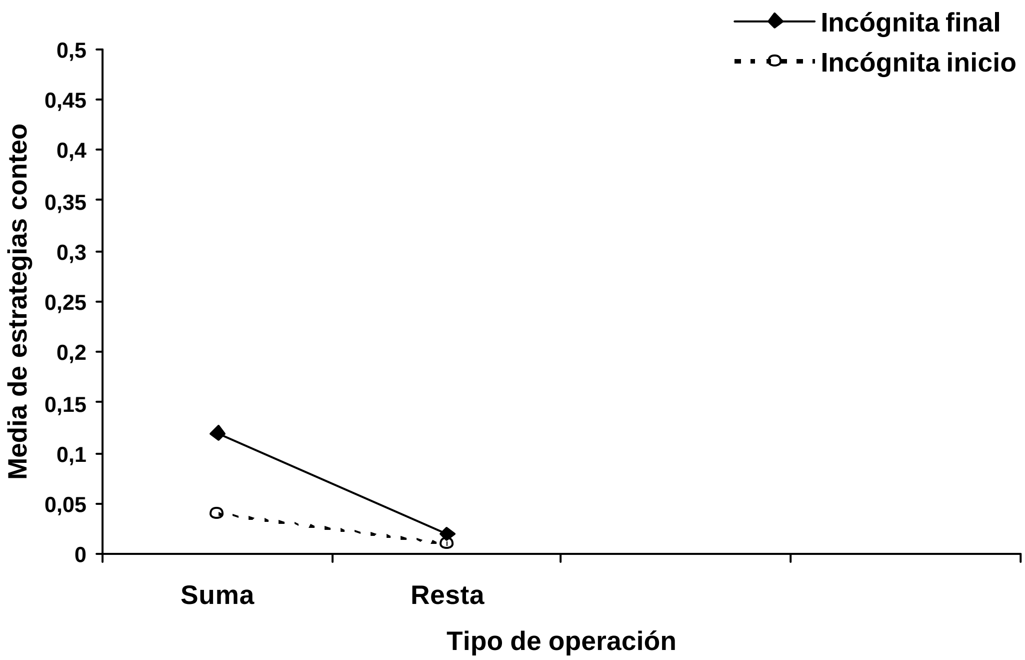

Figura 14.17. Interacción tipo de operación por lugar de la incógnita en las estrategias conteo de los alumnos urbanos.

Las estrategias *conteo* aumentan notablemente según el lugar de la incógnita en las tareas de suma, aunque no es igual en la resta.

En breve, las estrategias *conteo* se utilizan más con la incógnita al final que al inicio tanto en la suma como en la resta. Sin embargo, la diferencia en la resta no parece ser grande. Es decir, estas estrategias se emplean más en los problemas fáciles que en los difíciles en las tareas de suma, mientras que se utilizan por igual en ambos problemas en la resta.

El análisis de los efectos simples del factor operación en los niveles del factor incógnita encuentra que existen diferencias en estas estrategias cuando se resuelven los problemas de suma con la incógnita al final ($F_{3, 90} = 12.26$, $p < .01$).

En cuanto a las demás interacciones sólo expondremos los datos de la interacción Problema X Operación X Lugar de la incógnita que se muestran en la Tabla 14. 19.

Tabla 14.19

Medias y sumatorios correspondientes a la interacción *Problema* (concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) * *Operación* (suma vs. resta) * *Lugar de la incógnita* (final vs. inicio).

	Suma				Resta			
	Incógnita al final		Incógnita al inicio		Incógnita al final		Incógnita al inicio	
Problema	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media
Concreto	6	0.06	2	0.02	3	0.03	2	0.02
Dibujos	3	0.03	4	0.04	4	0.04	4	0.04
Numérico	16	0.15	5	0.05	3	0.03	1	0.01
Verbal	23	0.24	5	0.05	1	0.01	0	0.00

El análisis de los efectos simples del factor problema en los niveles de los otros factores indica que los problemas numéricos y verbales difieren de los concretos y dibujos en las tareas aditivas con la incógnita al final ($F_{3, 90} = 14.23$, $p < .01$), mientras que los problemas de dibujos contrastan con los verbales en las tareas de resta con la incógnita en el resultado ($F_{3, 90} = 8.12$, $p < .01$).

De acuerdo con estos datos, las estrategias *conteo* se emplean más en los problemas verbales de suma con la incógnita al final, pero son menos frecuentes en los verbales de resta con la incógnita al inicio.

En resumen, los alumnos urbanos emplean las estrategias *conteo* de modo significativo cuando resuelven problemas verbales y numéricos de suma con la incógnita al final. Esto se manifiesta principalmente a partir del primer curso. Estas estrategias se usan en las tareas de resta con la incógnita al final en los problemas de dibujos. En conclusión, estos participantes recurren a las estrategias *conteo* en los niveles superiores de abstracción en los problemas fáciles de suma, mientras que tales estrategias se usan en la resta para construír el proceso de conexión entre lo concreto y lo abstracto.

En cuanto a las estrategias *hechos numéricos*, realizamos un análisis de varianza (ANOVA) mixto 4 (Curso: primero vs. segundo vs. tercero vs. cuarto) X 4 (Tipo de problema: concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) X 2 (Tipo de operación: suma vs. resta) X 2 (Lugar de la incógnita: final vs. inicio) con medidas repetidas en los tres últimos factores mediante el programa SPSS 11.0 sobre los datos de los alumnos urbanos. El curso escolar es la variable inter-sujetos, mientras que el tipo de problema, la operación y el lugar de la incógnita son los factores intra-sujetos. Las estrategias *hechos numéricos* se consideran como la variable dependiente.

En este análisis encontramos efectos principales de los factores **curso** ($F_{3,92} = 48.92$, $p<.01$), **problema** ($F_{3, 276} = 16.21$, $p < .01$), **operación** ($F_{1, 92} = 4.24$, $p < .05$) y **lugar de la incógnita** ($F_{1, 92} = 7.66$, $p < .05$). Es decir, el curso escolar, el tipo de problema, la operación y el lugar de la incógnita afectan el empleo de estas estrategias por los alumnos urbanos.

En el estudio de comparaciones múltiples de Tuckey se encuentran diferencias significativas de los escolares de cuarto con segundo y primer curso ($p < .05$), pero no con tercero. Los alumnos de tercero tienen diferencias con respecto a primero y segundo curso (p< .05). Los participantes de segundo difieren con relación a primer curso (p < .05). Estos resultados confirman los encontrados en otras investigaciones (Bermejo y otros, 1998; Carpenter y Moser, 1982, 1984; Dowker, 1998) que plantean la cuestión de que las estrategias *hechos numéricos* se emplean principalmente por los cursos superiores.

La comparación por pares con la prueba de Tuckey en el factor problema encuentra diferencias significativas de los problemas verbales con respecto a los de dibujos y concretos (p < .01), además, en los problemas numéricos con relación a los de dibujos y numéricos (p<.01). Estos datos son consistentes con los encontrados por otros autores (Bermejo y otros, 1993; Boulton-Lewis, 1993; Boulton-Lewis y Tait, 1994; Carpenter et al., 1997; Christou y Philippou, 1998; De Corte y Verschaffel, 1987; Naito y Miura, 2001) quienes consideran que las estrategias *hechos numéricos* representan el nivel superior de la secuencia del desarrollo de las estrategias de lo concreto hacia lo abstracto. Además, estas estrategias se relacionan más con el algoritmo.

Esta comparación en el factor operación muestra diferencias significativas de la suma con respecto a la resta (p < .05). Igualmente, tal comparación en el factor incógnita encuentra diferencias de la incógnita al final en relación con la incógnita al inicio (p < .01).

Estos datos están de acuerdo con los de otros estudios (Bermejo y otros, 1998; Carpenter et al., 1996) en el sentido de que las estrategias *hechos numéricos* se relacionan con el lugar de la incógnita y el tipo de operación.

Además, el análisis de varianza revela que son significativas las interacciones dobles Problema X Curso ($F_{9, 276}$ = 1.93, p < .05), Problema X Operación ($F_{3, 92}$ = 9.00, p < .01), Problema X Incógnita ($F_{3, 276}$ = 6.38, p < .01) y Operación X Incógnita ($F_{1, 92}$ = 15.57, p<.01), así como, las interacciones triples Curso X Operación X Lugar de la incógnita ($F_{3,92}$= 3.74, p < .05) y Problema X Operación X Lugar de la incógnita ($F_{3, 276}$ = 10.14, p < .01), además, la interacción Curso X Problema X Operación X Incógnita ($F_{9, 276}$ = 2.62, p < .05).

La Figura 14.18 muestra la interacción entre el curso escolar y el tipo de problema en estas estrategias. En general, las estrategias *hechos numéricos* se emplean más por los alumnos de cuarto curso.

Efectivamente, las estrategias *hechos numéricos* son más frecuentes en todos los problemas en los alumnos de cuarto, mientras que ocurren menos en los niños de primero en tales problemas. Asimismo, estas estrategias se usan menos en los problemas concretos y dibujos, aunque se utilizan más ante los problemas numéricos y verbales en cada curso.

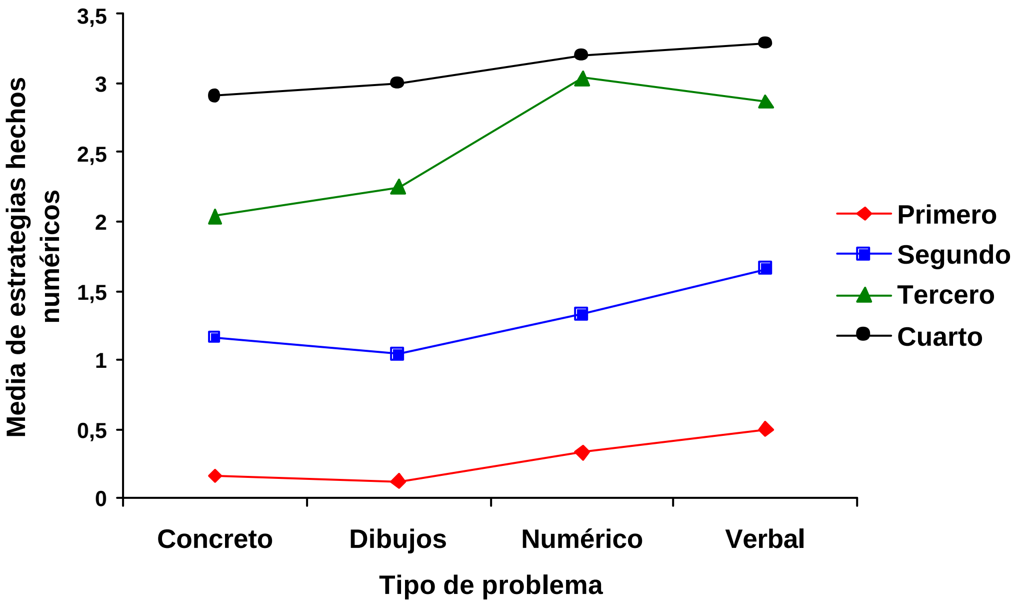

Figura 14.18. Interacción tipo de problema por curso escolar en las estrategias hechos numéricos de los alumnos urbanos.

Esto significa que tales estrategias se usan menos en los niveles inferiores de abstracción, pero se recurre más a ellas durante los niveles superiores de abstracción.

En el análisis de los efectos simples del factor problema en los niveles del factor curso se encuentran contrastes de los problemas verbales con relación a los concretos y dibujos en segundo curso ($F_{3,\ 90}$ = 2.79, $p < .05$). Además, los problemas numéricos y verbales difieren de los concretos y dibujos en tercero ($F_{3,\ 90}$ = 15.43, $p < .01$).

En la Figura 14.19 se presenta la interacción entre el tipo de problema y la operación según las estrategias *hechos numéricos*.

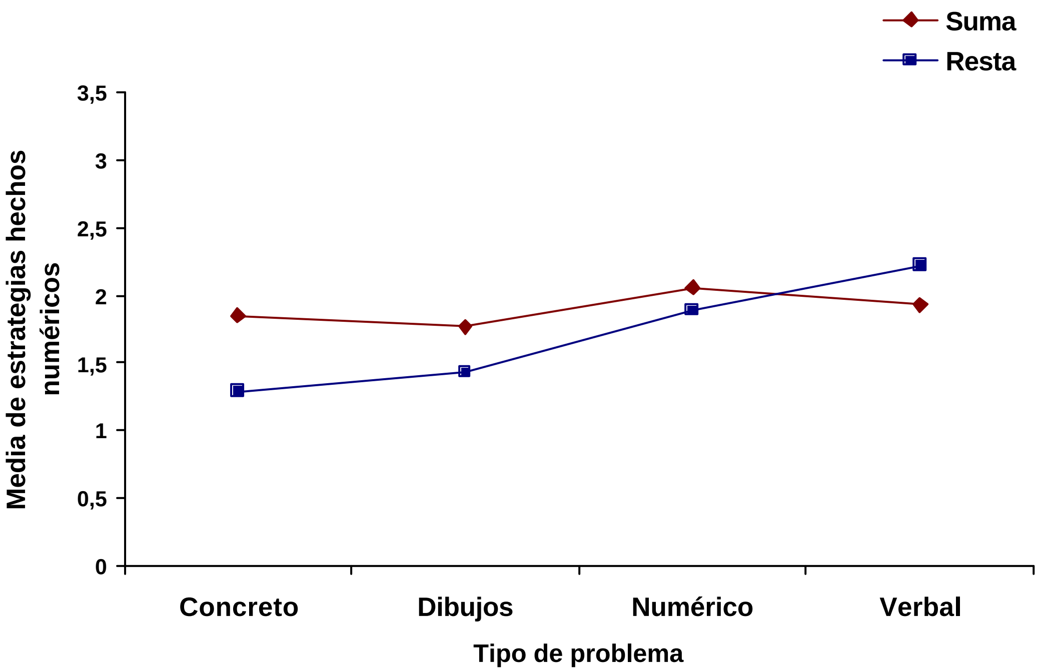

Figura 14.19. Interacción curso escolar por lugar de la incógnita en las estrategias hechos numéricos de los alumnos urbanos.

Como se observa, estas estrategias se utilizan más en la suma que en la resta en todos los problemas excepto en los verbales. En la suma, estas estrategias ocurren más en los problemas numéricos y menos en los de dibujos. En la resta, tales estrategias son más frecuentes en los problemas verbales y menos comunes en los concretos. Igualmente, las estrategias *hechos numéricos* se emplean más en los niveles superiores de abstracción, aunque son menos comunes en los niveles inferiores de abstracción tanto en la suma como en la resta.

El análisis de los efectos simples del factor problema en los niveles del factor operación indica que los problemas numéricos difieren de los concretos y dibujos, así como los problemas verbales contrastan con los concretos, dibujos y numéricos ($F_{3, 90} = 18.76$, $p < .01$)

En la Figura 14.20 se aprecia la interacción entre el tipo de problema y el lugar de la incógnita en las mismas estrategias. Los alumnos urbanos recurren más a las estrategias *hechos numéricos* en los problemas fáciles que en los difíciles en todos los tipos excepto en los concretos.

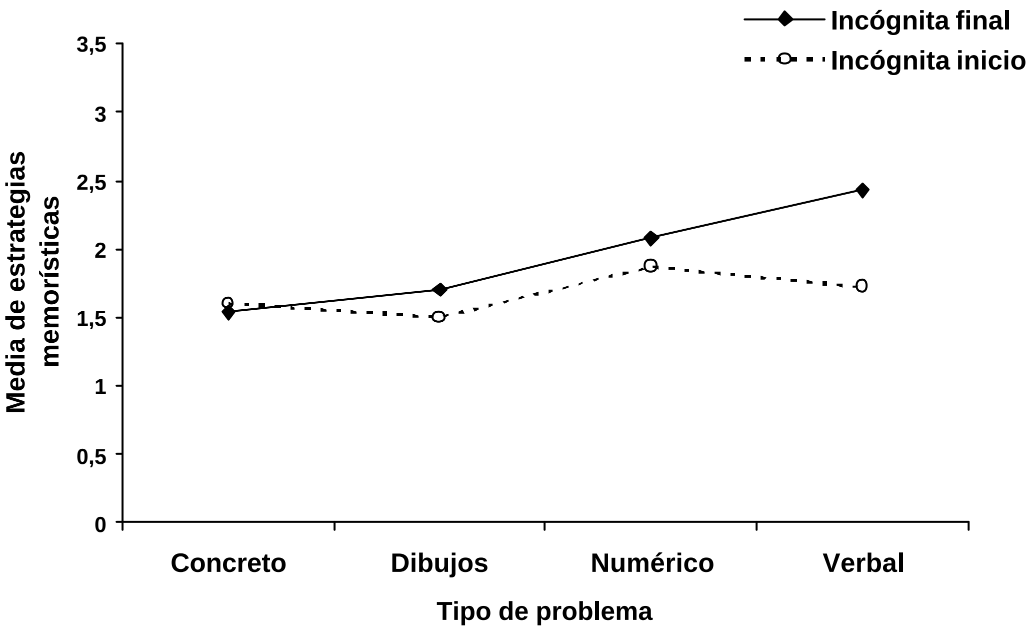

Figura 14.20. Interacción tipo de problema por lugar de la incógnita en las estrategias hechos numéricos de los alumnos urbanos.

Específicamente, estas estrategias se usan más en los problemas verbales con la incógnita al final y menos comunes en los concretos con la incógnita en el resultado. Tales estrategias se emplean frecuentemente en los problemas numéricos, pero se utilizan menos en los de dibujos cuando la incógnita se sitúa al inicio del problema.

Entonces, las estrategias *hechos numéricos* se emplean más en los niveles superiores de abstracción, aunque se usan menos en los niveles inferiores tanto en los problemas fáciles como difíciles. Estas estrategias son más frecuentes en los problemas fáciles que en los difíciles dentro de los niveles superiores de abstracción.

El análisis de los efectos simples del factor problema en los niveles del factor operación muestra diferencias de los problemas numéricos con respecto a los concretos y dibujos, además, los problemas verbales difieren de los concretos, dibujos y numéricos cuando la incógnita se sitúa al final ($F_{3,\ 90} = 17.98$, $p < .01$). Los problemas numéricos contrastan con los concretos y dibujos mientras la incógnita se encuentre al inicio ($F_{3,\ 90} = 4.48$, $p < .01$).

En la Figura 14.21 se observa la interacción entre el tipo de operación y el lugar de la incógnita. En general, las estrategias *hechos numéricos* se incrementan en ambas operaciones según el lugar de la incógnita.

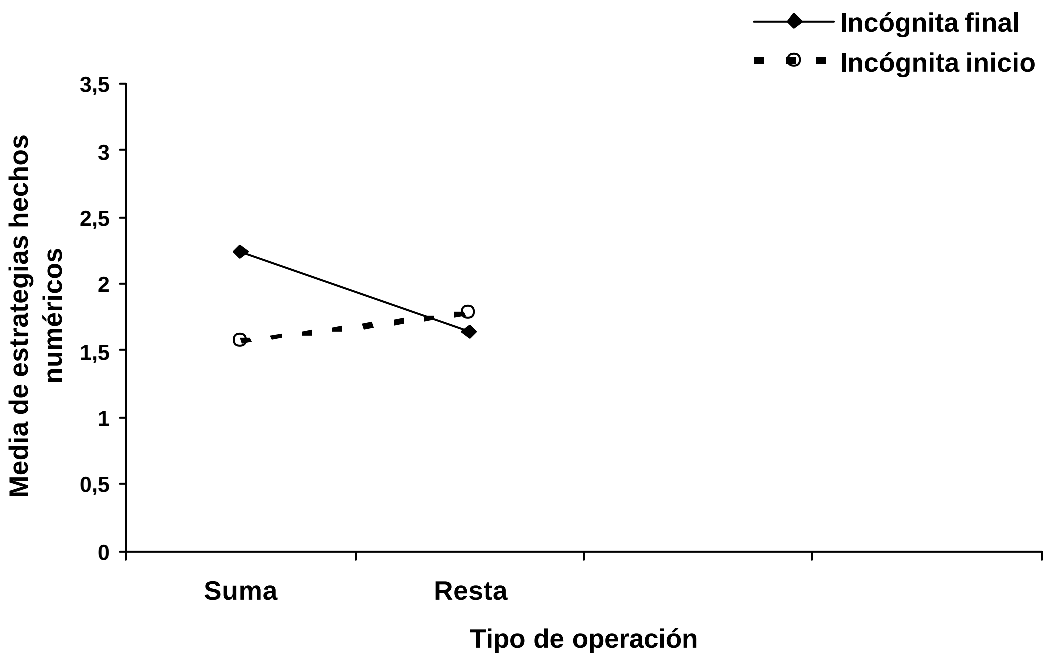

Figura 14.21. Interaccion operación por lugar de la incógnita en las estrategias hechos numéricos de los alumnos urbanos.

En este sentido, estas estrategias son más frecuentes en los problemas de suma con la incógnita al final y en los de resta con la incógnita al inicio, mientras que se emplean menos en los de suma con la incógnita al inicio y en los de resta con la incógnita al final. Esto significa que tales estrategias se usan más tanto en los problemas fáciles de suma como en los difíciles de resta.

El análisis de los efectos simples del factor operación en los niveles del factor incógnita encuentra diferencias de los problemas con la incógnita al final con relación a la incógnita al inicio en las tareas de suma ($F_{1, 92} = 26.90$, $p < .01$).

En cuanto a las demás interacciones sólo analizamos la interacción Curso X Problema X Operación X Incógnita con los datos que se muestran en la Tabla 14.20.

Tabla 14.20

Medias y sumatorios correspondientes a la interacción *Curso* (primero vs. segundo vs. tercero vs. cuarto) * *Problema* (concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) * *Operación* (suma vs. resta) * *Lugar de la incógnita* (final vs. inicio).

		Suma				Resta			
		Incógnita al final		Incógnita al inicio		Incógnita al final		Incógnita al inicio	
Curso	Problema	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media
Primero	Concreto	1	0.16	2	0.33	1	0.16	0	0.00
	Dibujos	1	0.16	1	0.16	1	0.16	0	0.00
	Numérico	2	0.33	2	0.33	2	0.33	2	0.33
	Verbal	3	0.50	3	0.50	4	0.66	2	0.33
Segundo	Concreto	8	1.33	7	1.16	5	0.83	8	1.33
	Dibujos	10	1.66	3	0.50	4	0.66	8	1.33
	Numérico	9	1.50	7	1.16	8	1.33	8	1.33
	Verbal	11	1.83	4	0.66	15	2.50	10	1.66
Tercero	Concreto	20	3.33	10	1.66	5	0.83	14	2.33
	Dibujos	21	3.50	10	1.66	9	1.50	14	2.33
	Numérico	21	3.50	17	2.83	20	3.33	15	2.50
	Verbal	22	3.66	11	1.83	20	3.33	16	2.66
Cuarto	Concreto	23	3.83	18	3.00	11	1.83	18	3.00
	Dibujos	22	3.66	17	2.83	14	2.33	19	3.16
	Numérico	20	3.33	21	3.50	18	3.00	18	3.00
	Verbal	21	3.50	18	3.00	21	3.50	19	3.16

De acuerdo con estos datos, las estrategias *hechos numéricos* se utilizan más en los problemas concretos de suma con la incógnita al final en cuarto curso, pero ocurren menos en los concretos de resta con la incógnita al inicio en primero.

El análisis de los efectos simples del factor problema en los niveles de los demás factores muestra que los problemas verbales difieren de los concretos, dibujos y numéricos en las tareas de resta con la incógnita al final en segundo curso ($F_{3, 90} = 6.45$, $p < .01$). Además, los problemas numéricos contrastan con los problemas concretos, dibujos y numéricos en las tareas de suma con la incógnita al inicio en tercero ($F_{3, 90} = 4.71$, $p < .01$). También, los problemas de dibujos superan a los concretos, así como los problemas numéricos y verbales difieren de los concretos y dibujos en las tareas de resta con la incógnita en el resultado en tercero ($F_{3, 90} = 20.41$, $p < .01$). Por último, los problemas numéricos contrastan con los concretos, y los problemas verbales superan a los concretos y dibujos en las tareas de resta con la incógnita al final ($F_{3, 90} = 6.00$, $p < .01$).

Resumiendo, los alumnos urbanos utilizan principalmente las estrategias *hechos numéricos* en tercero y cuarto curso aunque aparecen de manera significativa desde el segundo curso. Estas estrategias se emplean en la misma medida tanto por los alumnos de tercero como los de cuarto, esto significa que ambos cursos tienen el mismo dominio de tales estrategias.

Además, estos alumnos recurren de preferencia a las estrategias *hechos numéricos* en los niveles superiores de abstracción en las tareas de suma con la incógnita al final. Esto se debe a que los alumnos tienden a utilizar los procedimientos memorísticos prevalentes en la enseñanza tradicional donde el algoritmo es parte de la estructura formal del conocimiento matemático. Los alumnos razonan los problemas a partir de la forma canónica la cual relaciona las respuestas mecánicas como procedimiento de solucion.

14.3.2. Estrategias de los alumnos del contexto rural

Igualmente, las estrategias de estos alumnos se analizan según el curso escolar, la operación, el lugar de la incógnita y el grado de abstracción.

14.3.2.1. *Tipo de estrategias por curso escolar*

En la Tabla 14.21 se muestra el porcentaje de estrategias utilizadas en los problemas de suma por cada curso.

En los niveles de abstracción de la suma con la incógnita en el resultado se encuentra que a nivel concreto los alumnos de primero recurren principalmente a la estrategia *contar todo* (62%), mientras que los de segundo, tercero y cuarto aplican en mayor medida las estrategias *memorísticas* (50%, 52% y 67%, respectivamente).

En el nivel pictórico, los escolares de primero y segundo usan más las estrategias *contar todo* (45% y 28%, respectivamente), mientras que los de tercero y cuarto recurren más a las estrategias *memorísticas* (41% y 67%, respectivamente).

En el nivel numérico, los participantes de primero emplean más la estrategia *contar todo* (33%), mientras que los de segundo, tercero y cuarto manifiestan más las estrategias *memorísticas* (44%, 59% y 67%, respectivamente).

En el nivel verbal, los niños de primero recurren más a la estrategia *contar sin modelos* (50%), mientras que los de segundo prefieren la estrategia *contar a partir del primer sumando* (24%), además, los de tercero y cuarto utilizan más las estrategias *memorísticas* (75% y 67%, respectivamente).

Tabla 14.21

Porcentaje de estrategias en los problemas de suma por los cursos escolares del contexto rural

		INCOGNITA EN EL RESULTADO				INCOGNITA EN EL PRIMER SUMANDO			
Tipo de estrategia	Curso	C	D	N	V	C	D	N	V
MODELADO DIRECTO									
Contar todo	1º.	62	45	33	25	---------	---------	---------	---------
	2º.	27	28	22	5	---------	---------	14	---------
	3º.	18	35	5	10	---------	---------	---------	---------
	4º.	4	4	---------	-------	---------	---------	---------	--------
Contar todo A1	1º.	---------	---------	9	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	34	-------	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	--------	---------	--------	---------
Contar todo A2	1º.	---------	---------	8	6	---------	--------	---------	---------
	2º.	---------	---------	---------	5	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	4	13	4	12	---------	5	---------	---------
Contar todo A5	1º.	---------	---------	8	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	--------
Contar todo A11	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	5	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	3º.	12	6	---------	-------	---------	---------	9	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	--------	---------	---------	---------
Quitar de	1º.	---------	---------	---------	-------	20	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	--------	9	---------	15
	4º.	---------	---------	---------	-------	10	23	---------	10
Quitar a	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	---------	-------	34	20	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	--------	------	10	---------	---------	5
CONTEO									
Contar sin modelos	1º.	15	18	9	50	---------	---------	---------	---------
	2º.	5	6	---------	9	---------	---------	---------	---------
	3º.	6	6	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	4	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
Contar a partir del primer sumando	1º.	8	---------	8	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	9	17	---------	24	---------	---------	---------	---------
	3º.	6	6	23	15	---------	---------	---------	---------
	4º.	8	8	21	4	---------	---------	---------	---------
Contar a partir del sumando mayor	1º.	15	28	17	6	---------	---------	---------	---------
	2º.	4	22	---------	19	---------	---------	---------	---------
	3º.	6	6	9	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	13	8	8	17	---------	---------	---------	---------
Contar cantidades B5	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	---------	-------	---------	20	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	--------	---------
Contar cantidades B6	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	---------	5	---------	5	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	--------
Contar hacia atrás	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	17	---------	--------
	2º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	--------	5
Contar hacia atrás hasta	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	9	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------

Contar hasta	1º.	---------	---------	---------	-------	20	33	--------	-------
	2º.	---------	---------	---------	-------	33	40	29	--------
	3º.	---------	---------	---------	-------	22	18	27	8
	4º.	---------	---------	---------	-------	9	18	24	9
HECHOS NUMERICOS									
Memorísticas	1º.	--------	9	8	13	60	50	100	100
	2º.	50	22	44	23	33	20	57	100
	3º.	52	41	59	75	78	64	64	69
	4º.	67	67	67	67	71	54	76	62
Reglas	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	---------	10	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	4	-------	---------	---------	---------	8
	4º.	--------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	9

Nota. C = problema concreto; D = problema con dibujos; N = problema numérico; V = problema verbal.

Tal como puede verse, en el primer curso predomina la estrategia *contar todo* en los niveles concreto, pictórico y numérico, y la estrategia *contar sin modelos* en el nivel verbal. En segundo, la estrategia *contar todo* es principal en el nivel pictórico, la estrategia *contar a partir del primer sumando* en el nivel verbal, y las estrategias *memorísticas* a través de los niveles concreto, numérico y verbal. En tercero y cuarto curso, las estrategias *memorísticas* son las más frecuentes en los distintos niveles.

A continuación describimos las estrategias de modelado directo empleadas por los participantes. La estrategia *contar todo* se usa en los niveles concreto y pictórico por todos los cursos; en los niveles numérico y verbal sólo por los tres primeros cursos. La estrategia *contar todo A1* sólo se manifiesta en el nivel numérico por los alumnos de primero y segundo. La estrategia *contar todo A2* sólo se expresa en los niveles concreto y pictórico por los escolares de cuarto; en el nivel numérico se manifiesta por primero y cuarto, y en el nivel verbal se utiliza por primero, segundo y cuarto. La estrategia *contar todo A5* sólo se emite en el nivel numérico por los participantes de primero. La estrategia *contar todo A11* se aplica en el nivel concreto por los niños de segundo y tercero, y en el nivel pictórico por tercero.

Asimismo, resumimos las estrategias de conteo utilizadas por los alumnos. La estrategia *contar sin modelos* se emplea en el nivel concreto por todos los cursos, en el nivel pictórico por los tres primeros cursos; en el nivel numérico sólo por primero, y en el nivel verbal por los escolares de primero y segundo. La estrategia *contar a partir del primer sumando* se manifiesta en los niveles numérico y verbal por todos los cursos; en el nivel pictórico por los niños de segundo, tercero y cuarto; en el nivel numérico por los escolares de primero, tercero y cuarto; y en el nivel verbal por los cursos de segundo, tercero y cuarto. La estrategia *contar cantidades B6* sólo se emite en los niveles pictórico y verbal por los alumnos de segundo.

Igualmente, sintetizamos las estrategias hechos numéricos empleadas por los alumnos. Las estrategias *hechos conocidos* se manifiestan en todos los niveles por todos los cursos. Las estrategias *reglas* se aplican en el nivel numérico por los niños de tercero y en el nivel verbal por los participantes de segundo.

En la suma con la incógnita en el primer sumando se encuentra que a nivel concreto los alumnos de primero usan principalmente las estrategias *memorísticas* (60%); los niños de segundo aplican más las estrategias *quitar a*, *contar hasta* y *memorísticas* (33% en los tres casos), además, los escolares de tercero y cuarto emplean frecuentemente las estrategias *memorísticas* (78% y 71%, respectivamente).

En el nivel pictórico, los participantes de primero recurren fundamentalmente a las estrategias *memorísticas* (50%); los de segundo utilizan más la estrategia *contar hasta* (40%), y los niños de tercero y cuarto emplean en mayor medida las estrategias *memorísticas* (64% y 54%, respectivamente).

En el nivel numérico, los alumnos de todos los cursos manifiestan principalmente las estrategias *memorísticas* (100%, 57%, 64% y 76%, respectivamente).

En el nivel verbal, sucede lo mismo que en el anterior nivel (100%, 100%, 69% y 62%, respectivamente).

De acuerdo con estos resultados, en el primer curso las estrategias *memorísticas* predominan en los niveles concreto, pictórico, numérico y verbal. En segundo, las estrategias *quitar a, contar hasta* y *memorísticas* son predominantes en el nivel concreto; la estrategia *contar hasta* es más frecuente en el nivel pictórico, y las estrategias *memorísticas* lo son en los niveles numérico y verbal. En tercero y cuarto, las estrategias *memorísticas* dominan en todos los niveles.

En cuanto a las estrategias de modelado directo, la estrategia *contar todo A2* sólo se emplea en el nivel pictórico por los escolares de cuarto. La estrategia *contar todo 11* sólo se expresa en el nivel numérico por los niños de primero y tercero. La estrategia *quitar de* sólo se emite en el nivel concreto por los participantes de primero y cuarto; en el nivel pictórico por los alumnos de tercero y cuarto, y en el nivel verbal por los escolares de tercero y cuarto. La estrategia *quitar a* se utiliza en el nivel concreto por los niños de segundo y cuarto; en el nivel pictórico por los participantes de segundo, y en el nivel verbal por los escolares de cuarto.

Con respecto a las estrategias de conteo, la estrategia *contar cantidades B5* sólo se usa en el nivel pictórico por los niños de segundo. La estrategia *contar hacia atrás* se manifiesta en el nivel pictórico por los alumnos de primero y en el nivel verbal por los escolares de cuarto. La estrategia *contar hacia atrás hasta* sólo se aplica en el nivel pictórico por los participantes de tercero. La estrategia *contar hasta* se expresa en los niveles verbal y pictórico por todos los cursos; en el nivel numérico por los escolares de segundo, tercero y cuarto, y en el nivel verbal por tercero y cuarto.

Con relación a las estrategias hechos numéricos, las estrategias *memorísticas* se emplean en todos los niveles por todos los cursos. Las estrategias *reglas* sólo se manifiestan en el nivel verbal por los participantes de tercero y cuarto.

En la Tabla 14.22 se presenta el porcentaje de estrategias en los problemas de resta obtenido por los mismos alumnos.

Tabla 14.22
Porcentaje de estrategias en la solución de los problemas de resta por los cursos escolares del contexto rural

		INCOGNITA EN EL RESULTADO				INCOGNITA EN EL MINUENDO			
Tipo de estrategia	Curso	C	D	N	V	C	D	N	V
MODELADO DIRECTO									
Contar todo	1º.	---------	---------	---------	-------	50	50	40	40
	2º.	---------	---------	---------	-------	67	67	62	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	25	25	23	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	5	---------	---------
Quitar de	1º.	50	88	75	69	---------	---------	---------	---------
	2º.	78	72	67	50	---------	---------	---------	---------
	3º.	37	44	42	38	---------	---------	---------	---------
	4º.	42	29	17	21	---------	---------	--------	---------
Quitar a	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	4	---------	-------	---------	---------	---------	---------
Emparejamiento	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	---------	14	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	3º.	13	6	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	8	4	---------	-------	---------	---------	---------	---------
CONTEO									
Contar a partir de un término	1º.	40	---------	13	-------	38	50	40	20
	2º.	11	---------	11	-------	8	---------	13	---------
	3º.	---------	6	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
Contar hacia atrás	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
Contar hacia atrás hasta	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
Contar hacia atrás desde lo dado	1º.	---------	---------	---------	8	---------	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	---------	6	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	5	8	-------	--------	---------	---------	---------
HECHOS NUMERICOS									
Memorísticas	1º.	10	12	12	23	12	---------	20	40
	2º.	11	14	22	44	25	33	12	100
	3º.	50	44	58	62	75	75	77	100
	4º.	50	58	75	79	100	95	100	100
Reglas	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	13	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------

Nota. C = problema concreto; D = problema con dibujos; N = problema numérico; V = problema verbal.

Por una parte, en la resta con la incógnita en el resultado se encuentra que a nivel concreto los alumnos de primero y segundo usan principalmente la estrategia *quitar de* (50% y 78 %, respectivamente), mientras que en tercero y cuarto se emplean más las estrategias *memorísticas* (50%, en ambos).

En el nivel pictórico, los niños de primero y segundo utilizan más la estrategia *quitar de* (88% y 72%, respectivamente); los de tercero recurren frecuentemente a las estrategias *quitar de* y *memorísticas* (43%, en ambos casos), y los de cuarto usan en mayor medida las estrategias *memorísticas* (58%).

En el nivel numérico, los escolares de primero y segundo emplean principalmente la estrategia *quitar de* (75% y 67%, respectivamente); los niños de segundo prefieren la estrategia *quitar de* (66%), además, los de tercero y cuarto recurren más a las estrategias *memorísticas* (58% y 75%, respectivamente).

En el nivel verbal, los participantes de primero y segundo usan fundamentalmente la estrategia *quitar de* (69% y 50%, respectivamente), mientras que los de tercero y cuarto manifiestan más las estrategias *memorísticas* (62% y 79%, respectivamente).

En otras palabras, en primero y segundo curso la estrategia *quitar de* predomina en los niveles concreto, pictórico, numérico y verbal. En tercero, la estrategia *quitar de* se expresa en el nivel pictórico y las estrategias *memorísticas* dominan en todos los niveles. En cuarto, las estrategias *memorísticas* son las más frecuentes en los distintos niveles.

Las estrategias de modelado directo se describen según su empleo por estos participantes. La estrategia *quitar de* se utiliza en todos los niveles por todos los cursos. La estrategia *quitar a* sólo se expresa en el nivel pictórico por los alumnos de cuarto. La estrategia *emparejamiento* se aplica en el nivel concreto por los niños de tercero y cuarto, y en el nivel pictórico por los escolares de segundo, tercero y cuarto.

También, resumimos las estrategias de conteo. La estrategia *contar a partir de un término* se usa en el nivel concreto por los alumnos de primero y segundo; en el nivel pictórico por los escolares de tercero, y en el nivel numérico por los niños de primero y segundo. La estrategia *contar hacia atrás desde lo dado* se manifiesta en el nivel pictórico por los participantes de cuarto, en el nivel numérico por los escolares de cuarto y en el nivel verbal por primero y segundo.

Además, sintetizamos las estrategias hechos numéricos. Las estrategias *memorísticas* se usan en todos los niveles por todos los cursos.

Por otra, en la resta con la incógnita en el minuendo se encuentra que a nivel concreto los alumnos de primero y segundo emplean principalmente la estrategia *contar todo* (50% y 67%, respectivamente), mientras que los de tercero y cuarto recurren más a las estrategias *memorísticas* (75% y 100%, respectivamente).

En el nivel pictórico, los escolares de primero usan con prioridad las estrategias *contar todo* y *contar a partir de un término* (50%, en ambas); los de segundo prefieren la estrategia *contar todo* (67%), además, los de tercero y cuarto utilizan más las estrategias *memorísticas* (75% y 95%, respectivamente).

En el nivel numérico, los niños de primero manifiestan fundamentalmente las estrategias *contar todo* y *contar a partir de un término* (40%, en ambas), los de segundo usan en mayor medida la estrategia *contar todo* (62%), y los escolares de tercero y cuarto emplean más las estrategias *memorísticas* (77% y 100%, respectivamente).

En el nivel verbal, los participantes de primero expresan básicamente las estrategias *contar todo* y *memorísticas* (40%, en ambas), mientras que los de segundo, tercero y cuarto prefieren las estrategias *memorísticas* (100%, en cada curso).

De este modo, en el primer curso predomina la estrategia *contar todo* en todos los niveles, la estrategia *contar a partir de un término* es mayor en los niveles pictórico y numérico, y las estrategias *memorísticas* son frecuentes en el nivel verbal. En segundo se manifiesta la estrategia *contar todo* en los niveles concreto, pictórico y numérico, mientras que las estrategias *memorísticas* dominan en el nivel verbal. En tercero y cuarto predominan las estrategias *memorísticas* en todos los niveles.

Por un lado, resumimos las estrategias de modelado directo. La estrategia *contar todo* se utiliza en el nivel concreto por los alumnos de primero, segundo y tercero; en el nivel pictórico por todos los cursos; en el nivel numérico por primero, segundo y tercero, y en el nivel verbal por primero.

Por otro, sintetizamos las estrategias de conteo. La estrategia *contar a partir de un término* se emplea en el nivel concreto por los escolares de primero y segundo; en el nivel pictórico por los niños de primero; en el nivel numérico por los participantes de primero y segundo, y en el nivel verbal por primero.

Además, describimos las estrategias hechos numéricos. Las estrategias *memorísticas* se expresan por todos los cursos en todos los niveles, excepto en el nivel pictórico por los escolares de primero. La estrategia *reglas* se emplea en el nivel numérico por los alumnos de segundo.

14.3.2.2. *Tipo de estrategia en la operación según el lugar de la incógnita*

A continuación, analizaremos los resultados de acuerdo con el lugar que ocupa la incógnita independiente del tipo de problema. Asimismo, para este análisis agrupamos las estrategias según las categorías definidas anteriormente.

En la Tabla 14.23 se muestran los tipos de estrategias de los alumnos del contexto rural en la suma y resta con la incógnita tanto en el resultado como al inicio del problema.

Por una parte, se analizan las estrategias empleadas en los problemas de suma con la incógnita al final. Los niños de primero resuelven principalmente los problemas con las estrategias *modelado directo.* Los participantes de segundo, tercero y cuarto aplican igualmente las estrategias *hechos numéricos.*

Tabla 14.23

Porcentaje de estrategias obtenido por los cursos del contexto urbano en el tipo de operación y el lugar de la incógnita.

Operación-Incógnita	Curso escolar Primero	Segundo	Tercero	Cuarto
	Estrategias modelado			
Suma				
Incógnita en el resultado	48	27	20	10
Incógnita en el inicio	6	14	9	15
Resta				
Incógnita en el resultado	70	65	45	31
Incógnita en el inicio	46	53	16	1
	Estrategias conteo			
Suma				
Incógnita en el resultado	44	36	21	23
Incógnita en el inicio	22	27	21	17
Resta				
Incógnita en el resultado	15	7	1	3
Incógnita en el inicio	37	5	0	0
	Estrategias hechos numéricos			
Suma				
Incógnita en el resultado	8	37	59	67
Incógnita en el inicio	72	59	70	68
Resta				
Incógnita en el resultado	15	28	54	66
Incógnita en el inicio	17	42	84	99

De acuerdo con estos datos, las estrategias *modelado directo* se manifiestan más por los alumnos de primer curso, y menos por cuarto. Las estrategias *conteo* se aplican más por los escolares de segundo y con menor frecuencia por tercero. Las estrategias *hechos numéricos* se usan en primer lugar por los participantes de cuarto y, al último, las utilizan los escolares de primero.

Por otra, analizamos las estrategias empleadas en los problemas de suma con la incógnita en el primer sumando.

Todos los cursos resuelven más los problemas con las estrategias *hechos numéricos*. Por tanto, las estrategias *modelado directo* se utilizan más por los alumnos de cuarto curso, y casi nunca por primero. Las estrategias *conteo* se emplean más por los escolares de cuarto, y menos veces por los escolares de primero. Las estrategias *hechos numéricos* se usan en primer lugar por los participantes de cuarto, y se prefieren menos por los alumnos de segundo y primero en igual proporción.

También, se muestran las estrategias de estos alumnos en la resta con la incógnita en el resultado.

Los niños de primero y segundo resuelven más los problemas con las estrategias *modelado directo*. Los escolares de tercero y cuarto utilizan principalmente las estrategias *hechos numéricos*.

En este sentido, las estrategias *modelado directo* se expresan más por los alumnos de primer curso, y, al último, por los niños de cuarto. Las estrategias *conteo* se aplican más por los escolares de primero, y menos veces por los participantes de tercero. Las estrategias *hechos numéricos* se usan en primer lugar por los niños de cuarto y, al último, las emplean los alumnos de primero.

Asimismo se presentan las estrategias en la resta con la incógnita en el minuendo de los anteriores alumnos. Los niños de primero y segundo solucionan más problemas con las estrategias *modelado directo*, mientras que los escolares de tercero y cuarto utilizan principalmente las estrategias *hechos numéricos*.

Resumiendo, las estrategias *modelado directo* se emplean más por los alumnos de primer curso, y casi nunca por cuarto. Las estrategias *conteo* se utilizan más por los escolares de primero, pero no se utilizan por los de tercero y cuarto. Las estrategias *hechos numéricos* se manifiestan en primer lugar por los participantes de cuarto y, al último, las expresan los alumnos de primero.

14.3.2.3. *Tipo de estrategia según el problema en la operación*

En este caso exponemos los datos de las estrategias respecto al tipo de problema y la operación sin tener en cuenta el curso escolar y el lugar de la incógnita.

En la Tabla 14.24 se muestran las estrategias de estos alumnos en los problemas de suma y resta. En primer lugar resumimos los resultados de las estrategias con respecto a los problemas de suma. En los problemas concretos se emplean más las estrategias *hechos numéricos*, mientras que las estrategias *conteo* se usan menos. En los problemas con dibujos, numéricos y verbales se utilizan más las estrategias *hechos numéricos*, mientras que las estrategias *modelado directo* se manifiestan menos.

Tabla 14.24
Porcentaje de estrategias obtenido por los alumnos del contexto rural en el tipo de problema según la operación.

	Suma			Resta		
Problema	Modelado	Conteo	Hechos numéricos	Modelado	Conteo	Hechos numéricos
Concreto	25	21	54	42	8	50
Dibujos	25	30	45	42	6	52
Numérico	15	25	60	32	7	61
Verbal	14	26	60	26	2	72

De acuerdo con estos resultados, en los problemas concretos son más frecuentes las estrategias *hechos numéricos*, seguidas por las estrategias *modelado directo*, y luego por las estrategias *conteo*. En los problemas con dibujos, numéricos y verbales cambia el anterior patrón de estrategia, de tal manera que las estrategias *hechos numéricos* resultan más frecuentes, seguidas por las estrategias *conteo* y, al último ocurren las estrategias *modelado directo.*

En segundo lugar sintetizamos las estrategias de estos alumnos en los problemas de resta. Así, en todos los problemas se utilizan más las estrategias *modelado directo*, mientras que se emplean menos las estrategias *conteo*.

En concreto, los niños de este contexto manifiestan el mismo patrón de respuesta en todos los problemas: las estrategias *hechos numéricos* son las más frecuentes, seguidas por las estrategias *modelado directo* y, después, por las estrategias *conteo*.

14.3.2.4. *Datos significativos*

Las estrategias *modelado directo* de los alumnos rurales se analizan con un análisis de varianza (ANOVA) mixto 4 (Curso: primero vs. segundo vs. tercero vs. cuarto) X 4 (Tipo de problema: concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) X 2 (Tipo de operación: suma vs. resta) X 2 (Lugar de la incógnita: final vs. inicio) con medidas repetidas en los tres últimos factores mediante el programa SPSS 11.0. El curso escolar es la variable inter-sujetos, mientras que el tipo de problema, la operación y el lugar de la incógnita son los factores intra-sujetos. La estrategia *modelado directo* se considera como la variable dependiente.

En este análisis se encuentran efectos principales de los factores **problema** ($F_{3,276}$=5.06, $p < .05$), **operación** ($F_{1,\ 92} = 18.26$, $p < .01$) y **lugar de la incógnita** ($F_{1,92}$=39.24, $p<.01$). No hubo efecto del factor curso ($F_{3,\ 92} = 0.30$, $p = 0.82$). Es decir, el tipo de problema, la operación y el lugar de la incógnita afectan la proporción de estrategias *modelado directo*. En otras palabras, tal proporción depende del tipo de problema presentado, cambia cuando la operación es la suma o la resta, y se modifica cuando la incógnita se encuentra al final o al inicio del problema.

La prueba de comparación por pares de Tuckey en el factor problema encuentra diferencias significativas de los problemas concretos y dibujos con respecto a los verbales y numéricos ($p < .05$). Estos datos son consistentes con los estudios referidos anteriormente en los resultados encontrados por los alumnos urbanos en esta investigación. La misma comparación en el factor operación encuentra que la suma difiere significativamente de la resta ($p < .01$). Igualmente, estos resultados confirman los hallados por otros autores en el mismo sentido que con los participantes urbanos. Además, en el factor incógnita se encuentran diferencias de la incógnita al final con respecto a la incógnita en el inicio ($p < .01$). Asimismo, estos datos concuerdan con los de otros investigadores tal como se ha planteado con los escolares urbanos.

Este análisis de varianza revela que son significativas las interacciones Curso X Operación X Lugar de la incógnita ($F_{3, 92} = 4.75$, $p < .05$) y Curso X Problema X Operación X Incógnita ($F_{9, 276} = 2.34$, $p < .05$).

En cuanto a estas interacciones sólo profundizaremos en la última interacción. El análisis de los efectos simples se realizó sobre el factor problema en los niveles de los otros factores según los datos de la Tabla 14.25.

En los resultados se encontraron los siguientes contrastes: los problemas concretos de resta con la incógnita al inicio difieren de los numéricos y verbales con la misma incógnita, los problemas de dibujos y numéricos de resta con la anterior incógnita difieren con respecto a los verbales de resta con tal incógnita en segundo curso ($F_{3,90} = 7.02$, $p < .01$).

Los problemas concretos y dibujos de suma con la incógnita al inicio difieren de los numéricos del mismo tipo, los problemas de dibujos y verbales con la anterior incógnita difieren de los verbales de suma con la incógnita en el primer sumando, y, por último, los problemas verbales contrastan con los numéricos de suma con la incógnita al inicio en los alumnos de cuarto curso ($F_{3, 90} = 8.29$, $p < .01$).

Tabla 14.25

Medias y sumatorios correspondientes a la interacción *Curso* (primero vs. segundo vs. tercero vs. cuarto) * *Problema* (concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) * *Operación* (suma vs. resta) * *Lugar de la incógnita* (final vs. inicio).

		Suma				Resta			
		Incógnita al final		Incógnita al inicio		Incógnita al final		Incógnita al inicio	
Curso	Problema	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media
Primero	Concreto	8	0.33	1	0.04	5	0.20	4	0.16
	Dibujos	5	0.20	0	0.00	7	0.29	3	0.12
	Numérico	7	0.29	0	0.00	6	0.25	2	0.08
	Verbal	5	0.20	0	0.00	9	0.37	2	0.08
Segundo	Concreto	7	0.29	1	0.04	7	0.29	8	0.33
	Dibujos	5	0.20	1	0.04	6	0.25	6	0.25
	Numérico	5	0.20	1	0.04	6	0.25	5	0.20
	Verbal	2	0.08	0	0.00	9	0.37	0	0.00
Tercero	Concreto	5	0.20	0	0.00	8	0.33	3	0.12
	Dibujos	7	0.29	1	0.04	8	0.33	3	0.12
	Numérico	1	0.04	1	0.04	8	0.33	3	0.12
	Verbal	2	0.08	2	0.08	8	0.33	0	0.00
Cuarto	Concreto	2	0.08	4	0.16	12	0.50	0	0.00
	Dibujos	4	0.16	6	0.25	9	0.37	1	0.04
	Numérico	1	0.04	0	0.00	4	0.16	0	0.00
	Verbal	3	0.12	3	0.12	5	0.20	0	0.00

Los problemas concretos de resta con la incógnita en el resultado difieren significativamente con relación a los numéricos y verbales similares, además, los problemas de dibujos de resta con la incógnita al final contrastan con los numéricos en la misma incógnita. ($F_{3, 90}$ = 4.20, p < .01).

Las estrategias *conteo* de estos alumnos se analizan con un análisis de varianza (ANOVA) mixto 4 (Curso: primero vs. segundo vs. tercero vs. cuarto) X 4 (Tipo de problema: concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) X 2 (Tipo de operación: suma vs. resta) X 2 (Lugar de la incógnita: final vs. inicio) con medidas repetidas en los tres últimos factores mediante el programa SPSS 11.0. El curso es la variable inter-sujetos, mientras que el tipo de problema, la operación y el lugar de la incógnita son los factores intra-sujetos. La estrategia *conteo* se considera como la variable dependiente.

Los efectos principales que se encuentran son los factores **operación** ($F_{1, 92} = 53.45$, $p < .01$) y **lugar de la incógnita** ($F_{1, 92} = 17.44$, $p < .01$). No hubo efecto del factor curso ($F_{3,92} = 0.76$, $p = .51$), tampoco del factor problema ($F_{3, 276} = 0.50$, $p = 0.68$). Es decir, el tipo de operación y el lugar de la incógnita afectan la proporción de estrategias *conteo*.

En el estudio de comparaciones por pares de Tuckey se encuentra que las estrategias *conteo* se emplean significativamente más en la suma que en la resta ($p < .01$).

Además, esta prueba indica que tales estrategias se utilizan principalmente de manera significativa en las tareas con la incógnita al final que cuando la incógnita se encuentra al inicio ($p < .01$).

El análisis de varianza también revela que son significativas las interacciones dobles Problema X Curso ($F_{9, 276} = 2.58$, $p < .05$), Problema X Operación ($F_{3, 276} = 2.64$, $p = .05$), Problema X Incógnita ($F_{3, 276} = 3.64$, $p < .05$) y Operación X Incógnita ($F_{1, 92} = 15.13$, $p < .01$), así como, las interacciones triples Curso X Problema X Operación ($F_{9, 276} = 2.70$, $p < .05$), Curso X Problema X Lugar de la incógnita ($F_{9, 276} = 2.57$, $p < .05$) y Problema X Operación X Lugar de la incógnita ($F_{3, 276} = 3.05$, $p < .05$).

En la Figura 14.22 se muestra la interacción entre el curso escolar y el tipo de problema en las estrategias *conteo*.

En general, las estrategias *conteo* se emplean principalmente por los primeros cursos. Los alumnos de primero y segundo son quienes más recurren a estas estrategias en la mayoría de los problemas, mientras que los participantes de tercero y cuarto utilizan más tales estrategias en los problemas numéricos. Igualmente, estos resultados confirman los encontrados en otras investigaciones (Bermejo y otros, 1996; Carpenter et al., 1983; Fang et al., 2001; Geary et al., 1996; Resnick, 1989; Riley et al., 1983) en el sentido de que las estrategias conteo se usan más por los cursos intermedios.

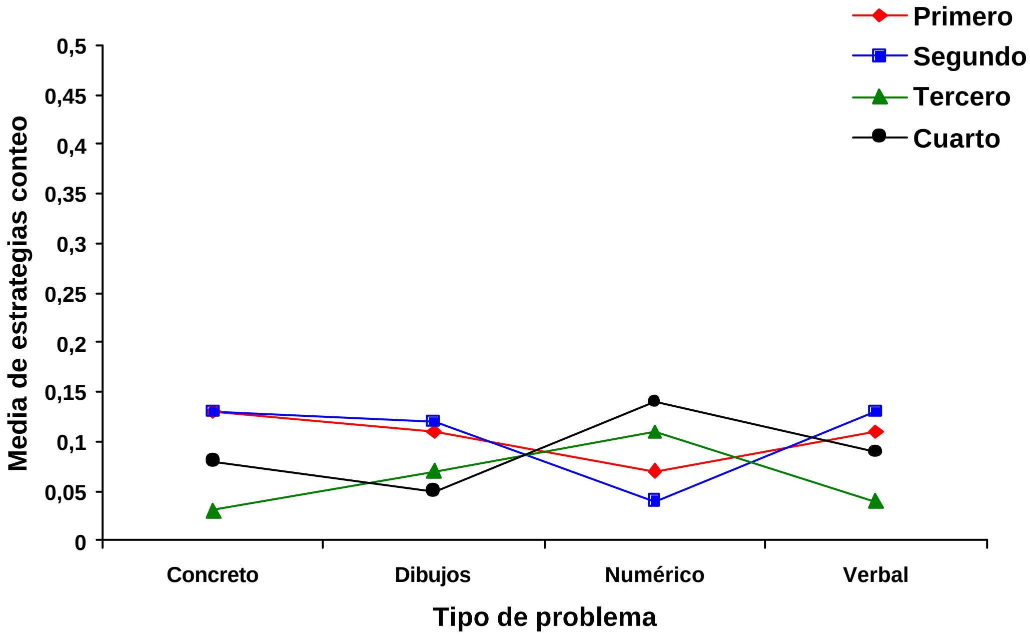

Figura 14.22. Interacción tipo de problema por curso escolar en las estrategias conteo de los alumnos del contexto rural.

Específicamente, las estrategias *conteo* son más frecuentes en los niveles concreto, pictórico y verbal en segundo curso, y en el numérico en cuarto. En los niveles concreto y verbal disminuyen estas estrategias en tercer curso; en el pictórico se usan menos en cuarto, y en el numérico se emplean menos en segundo.

Esto significa que las estrategias *conteo* se utilizan principalmente en los niveles inferiores de abstracción por parte de los primeros cursos, mientras que estas estrategias se emplean más en los problemas numéricos por los cursos más avanzados. Además tales estrategias se utilizan nuevamente en los problemas verbales por los primeros cursos.

El análisis de los efectos simples del factor problema en los niveles del factor curso encuentra que los problemas dibujos y verbales difieren de los numéricos en segundo curso ($F_{3,\ 90}$ = 3.71, p < .05). Además, los problemas numéricos contrastan con los concretos y verbales en tercero ($F_{3,\ 90}$ = 2.76, p < .05).

En la Figura 14.23 se aprecia la interacción entre el problema y el tipo de operación. Las estrategias *conteo* se utilizan más en la suma que en la resta tanto en los niveles inferiores como superiores de abstracción.

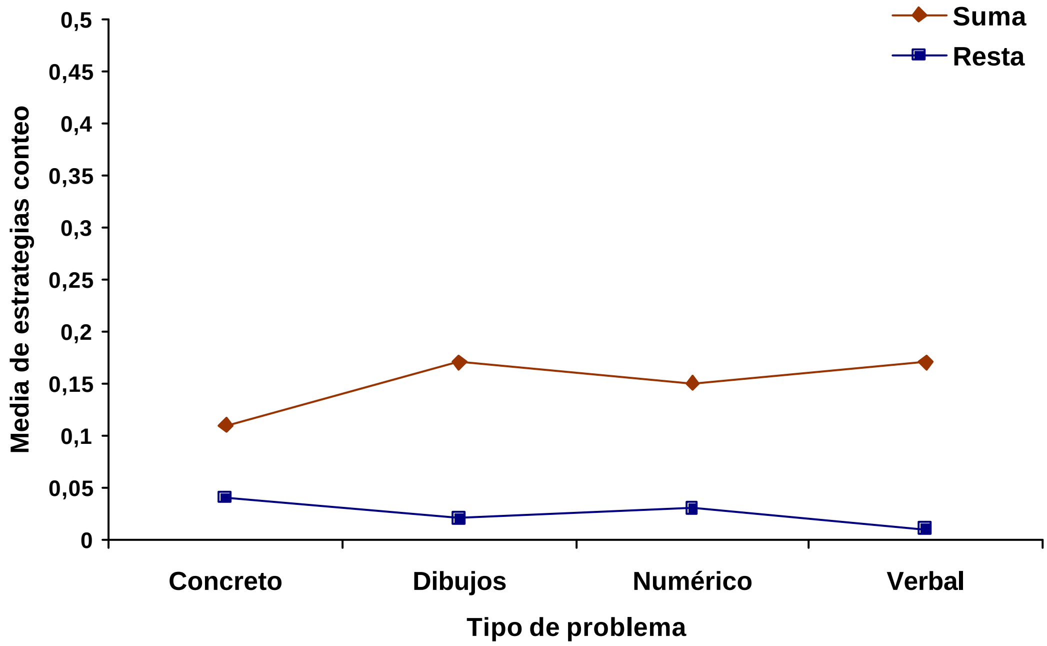

Figura 14.23. Interacción tipo de problema por operación en las estrategias conteo de los alumnos rurales.

En la suma ocurren estas estrategias con mayor frecuencia en los problemas con dibujos, mientras que se emplean menos en los concretos. En la resta se manifiestan más tales estrategias en los problemas concretos, mientras que son menos comunes en los verbales.

El análisis de los efectos simples del factor problema en los niveles del factor operación no encuentra diferencias significativas en particular.

La Figura 14.24 muestra la interacción entre el problema y el lugar de la incógnita. Las estrategias *conteo* se emplean más en los problemas de Cambio con la incógnita al final que al inicio en todos los niveles de abstracción. En los problemas con la incógnita en el resultado se resuelven más los problemas verbales con estas estrategias, aunque se solucionan menos los numéricos. En los problemas con la incógnita al inicio se emplean más tales estrategias durante los problemas con dibujos, pero se utilizan menos en los verbales.

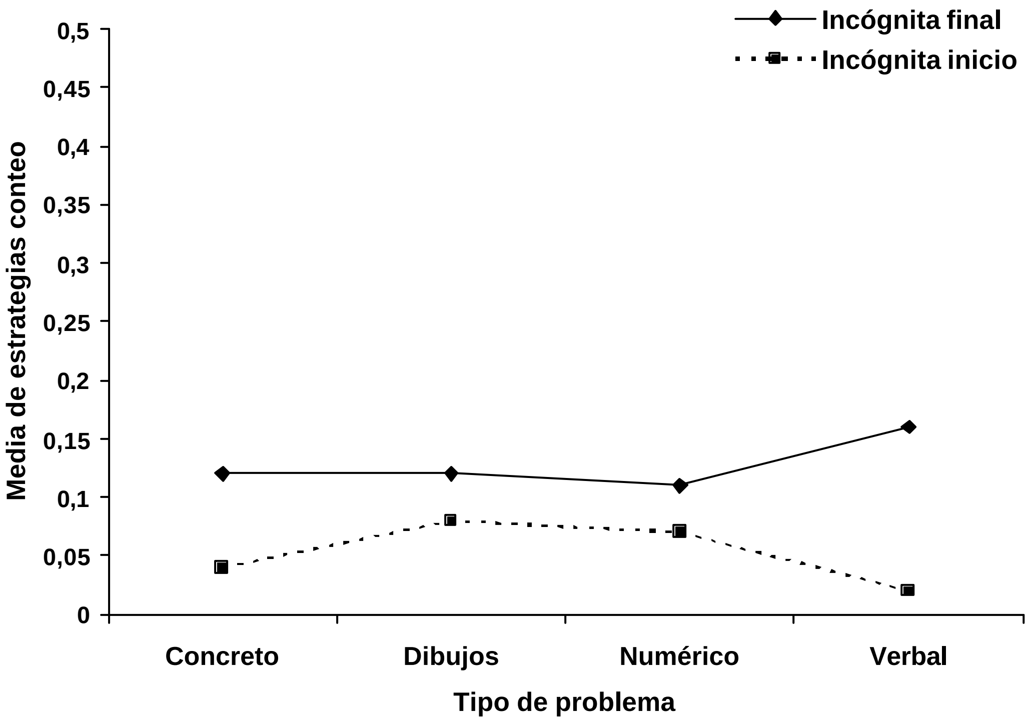

Figura 14.24. Interacción tipo de problema por lugar de la incógnita en las estrategias conteo de los alumnos rurales.

El análisis de los efectos simples del factor problema en los niveles del factor incógnita indica que contrastan los problemas de dibujos y numéricos con relación a los verbales en las tareas de suma con la incógnita al inicio ($F_{3, 90} = 3.75$, $p < .05$).

La Figura 14.25 muestra la interacción entre el tipo de operación y el lugar de la incógnita. Las estrategias *conteo* aumentan más en la suma que la resta.

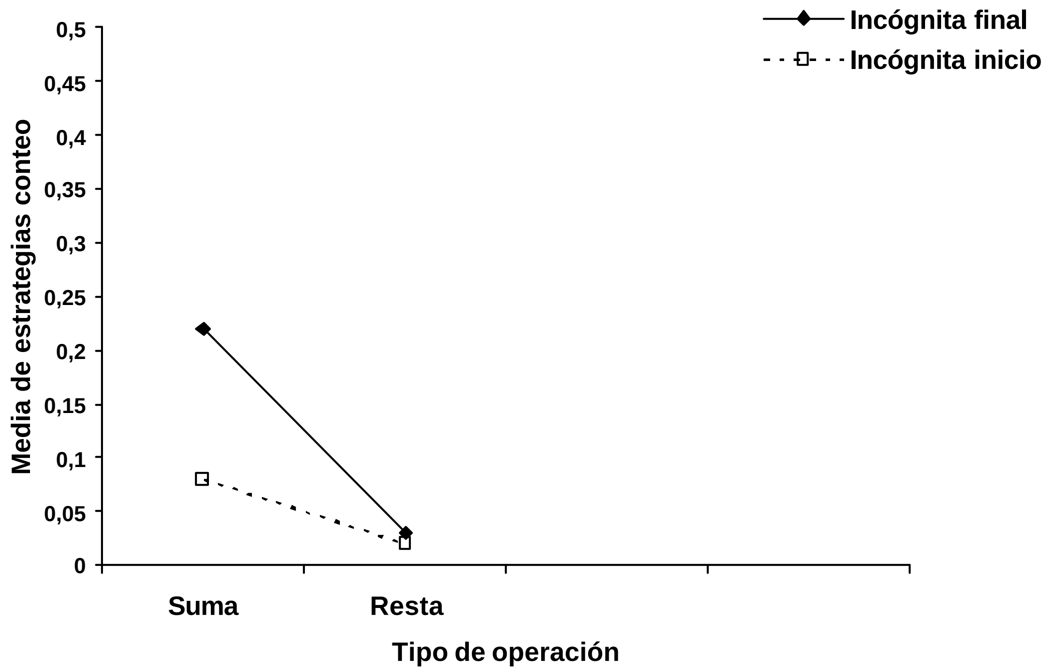

Figura 14.25. Interacción tipo de operación por lugar de la incógnita en las estrategias conteo de los alumnos rurales.

Estas estrategias se emplean más en los problemas de suma con la incógnita al final que al inicio, pero se utilizan aproximadamente igual en la resta en ambas posiciones de la incógnita.

El análisis de los efectos simples del factor operación en los niveles del factor incógnita encuentra que las tareas de suma superan a la resta tanto con la incógnita al final ($F_{1, 92} = 48.00$, $p < .01$) como al inicio ($F_{1, 92} = 7.23$, $p < .01$)

Estos resultados indican que los alumnos rurales recurren a las estrategias *conteo* de manera significativa cuando resuelven los problemas de suma tanto fáciles como difíciles.

En cuanto a las demás interacciones sólo presentaremos los datos de la última interacción en la Tabla 14.26.

Tabla 14.26

Medias y sumatorios correspondientes a la interacción *Problema* (concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) * *Operación* (suma vs. resta) * *Lugar de la incógnita* (final vs. inicio).

	Suma				Resta			
	Incógnita al final		Incógnita al inicio		Incógnita al final		Incógnita al inicio	
Problema	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media
Concreto	18	0.18	6	0.06	5	0.05	4	0.04
Dibujos	21	0.21	13	0.13	2	0.02	3	0.03
Numérico	18	0.18	10	0.10	4	0.04	3	0.03
Verbal	29	0.30	4	0.04	2	0.02	1	0.01

De acuerdo con estos datos, las estrategias *conteo* son más frecuentes en los problemas verbales de suma con la incógnita en el resultado, mientras que son menos comunes en los problemas verbales de resta con la incógnita en el minuendo.

El análisis de los efectos simples del factor problema en los niveles de los otros factores indica que los problemas dibujos y numéricos difieren de los concretos y verbales en las tareas de suma con la incógnita al inicio ($F_{3, 90} = 3.38$, $p < .05$).

Estos datos revelan que los alumnos rurales emplean las estrategias *conteo* en las tareas de resta difíciles cuando implican niveles intermedios de abstracción. Esto significa que los alumnos rurales solucionan los problemas difíciles con un grado medio de abstracción mediante tales estrategias.

Asimismo, las estrategias *hechos numéricos* de los alumnos rurales se analizan con el análisis de varianza (ANOVA) mixto 4 (Curso: primero vs. segundo vs. tercero vs. cuarto) X 4 (Tipo de problema: concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) X 2 (Tipo de operación: suma vs. resta) X 2 (Lugar de la incógnita: final vs. inicio) con medidas repetidas en los tres últimos factores mediante el programa SPSS 11.0. El curso escolar es el factor inter-sujetos, mientras que el tipo de problema, la operación y el lugar de la incógnita son las variables intra-sujetos. Las estrategias *hechos numéricos* se consideran como la variable dependiente.

En este análisis se encuentran los efectos principales de los factores **curso** ($F_{3,92}$=41.40, $p < .01$) y **problema** ($F_{3, 276} = 13.05$, $p < .01$). No hubo efecto de los factores operación ($F_{1, 92} = 0.82$, $p = 0.36$) ni lugar de la incógnita ($F_{1, 92} = 0.02$, $p = 0.88$). Es decir, el curso escolar y el tipo de problema afectan la proporción de estrategias *hechos numéricos* de los alumnos rurales.

El estudio de comparaciones múltiples de Tuckey encuentra diferencias significativas entre los escolares de cuarto con relación a los demás cursos ($p < .05$), los alumnos de tercero tienen diferencias con respecto a los de segundo y primer ($p < .05$), y los niños de segundo difieren con relación a los de primero ($p < .05$). Estos resultados concuerdan con los hallados por otros autores (Bermejo y Rodríguez, 1998; Carpenter y Moser, 1982, 1984; Dowker, 1998) en el sentido de que las estrategias *hechos numéricos* se utilizan más en los cursos superiores.

La comparación por pares con la prueba de Tuckey en el factor problema encuentra diferencias significativas de los problemas verbales con respecto a los numéricos, dibujos y concretos ($p < .01$, en cada uno), además, los problemas numéricos difieren con relación a los de dibujos ($p < .01$). Esto confirma los datos de otras investigaciones (Bermejo y otros, 1993; Boulton-Lewis, 1993; Boulton-Lewis y Tait, 1994; Carpenter et al.,1997; Christou y Philippou, 1998; De Corte y Verschaffel, 1987; Naito y Miura, 2001) en cuanto que las estrategias *hechos numéricos* corresponden con los niveles superiores de abstracción.

El análisis de varianza también revela que son significativas las interacciones Curso X Operación ($F_{3, 92} = 4.97$, $p < .05$), Operación X Lugar de la incógnita ($F_{3, 92} = 11.70$, $p = .01$), Curso X Operación X Lugar de la incógnita ($F_{3, 92} = 4.75$, $p < .05$) y Curso X Problema X Operación X Incógnita ($F_{9, 276} = 2.06$, $p < .05$).

En la Figura 14.26 se muestra la interacción entre el curso escolar y el tipo de operación según las estrategias *hechos numéricos*. En general, estas estrategias se emplean más en la suma en los primeros cursos y en la resta en los cursos superiores.

Tales estrategias son más frecuentes en los problemas de suma en primero y segundo curso, y en los de resta durante tercero y cuarto. Las estrategias *hechos numéricos* se usan más en la suma que en la resta por primero y segundo. Estas estrategias se manifiestan más en los problemas de resta que en los de suma por tercero y cuarto.

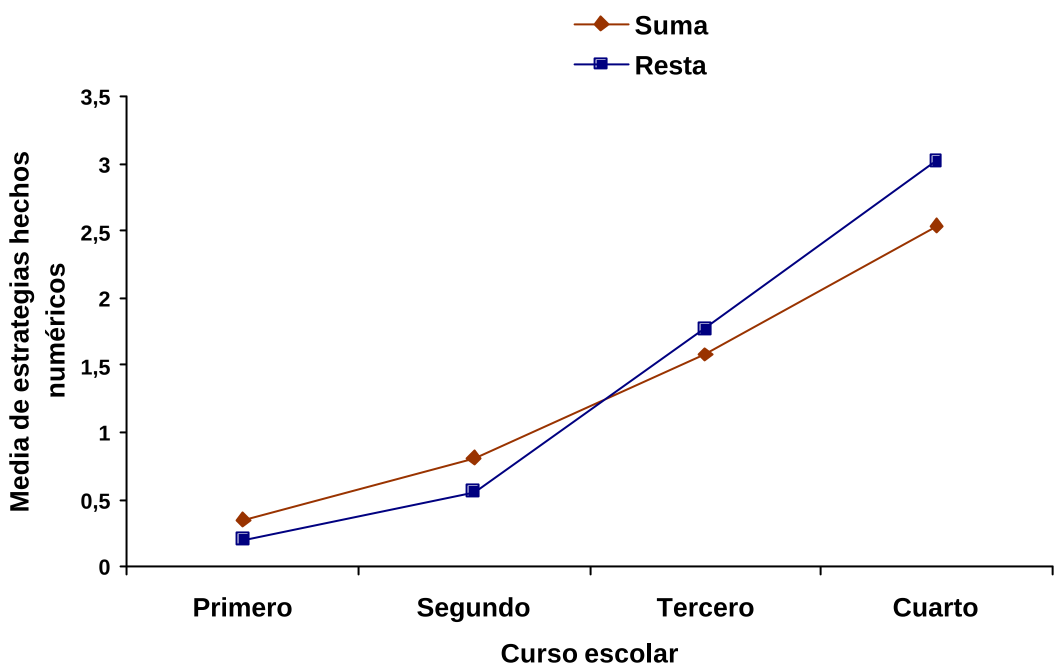

Figura 14.26. Interacción curso escolar por operación en las estrategias hechos numéricos de los alumnos rurales.

El análisis de los efectos simples del factor curso en los niveles del factor operación muestra que las tareas de resta se contrastan con la suma en cuarto ($F_{1, 92} = 10.37$, $p < .01$).

En la Figura 14.27 se aprecia la interacción entre el tipo de operación y el lugar de la incógnita. Las estrategias *hechos numéricos* muestran un patrón distinto en la suma y la resta según el lugar de la incógnita.

En este sentido, las estrategias memorísticas se utilizan más en los problemas de suma con la incógnita en el resultado y en los de resta con la incógnita en el minuendo, mientras que estas estrategias disminuyen en los problemas de suma con la incógnita en el primer sumando y en los de resta con la incógnita al final.

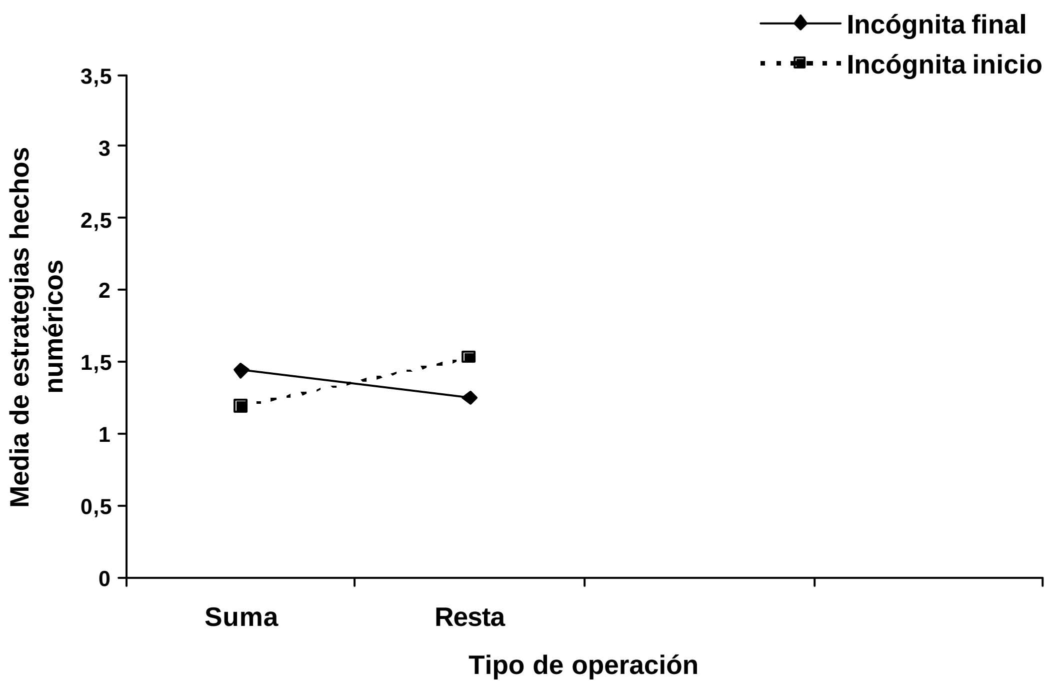

Figura 14.27. Interacción tipo de operación por lugar de la incógnita en las estrategias memorísticas de los alumnos rurales.

El análisis de los efectos simples del factor operación en los niveles del factor incógnita encuentra que los problemas con la incógnita al inicio difieren con la incógnita al final en la resta ($F_{1, 92} = 4.74$, $p < .05$).

Con respecto a las otras interacciones sólo presentamos los datos de la interacción Curso X Problema X Operación X Incógnita en la Tabla 14.27.

Tabla 14.27

Medias y sumatorios correspondientes a la interacción *Curso* (primero vs. segundo vs. tercero vs. cuarto) * *Problema* (concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) * *Operación* (suma vs. resta) * *Lugar de la incógnita* (final vs. inicio).

		Suma				Resta			
		Incógnita al final		Incógnita al inicio		Incógnita al final		Incógnita al inicio	
Curso	Problema	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media
Primero	Concreto	0	0.00	3	0.50	1	0.16	1	0.16
	Dibujos	1	0.16	3	0.50	1	0.16	0	0.00
	Numérico	1	0.16	4	0.66	1	0.16	1	0.16
	Verbal	2	0.33	3	0.50	3	0.50	2	0.33
Segundo	Concreto	11	1.83	1	0.16	1	0.16	3	0.50
	Dibujos	4	0.66	1	0.16	1	0.16	3	0.50
	Numérico	4	0.66	4	0.66	2	0.33	2	0.33
	Verbal	7	1.16	7	1.16	8	1.33	7	1.16
Tercero	Concreto	9	1.50	7	1.16	8	1.33	9	1.50
	Dibujos	7	1.16	7	1.16	7	1.16	9	1.50
	Numérico	14	2.33	7	1.16	11	1.83	10	1.66
	Verbal	15	2.50	10	1.66	13	2.16	18	3.00
Cuarto	Concreto	16	2.66	15	2.50	12	2.00	21	3.50
	Dibujos	16	2.66	12	2.00	14	2.33	19	3.16
	Numérico	16	2.66	16	2.66	18	3.00	20	3.33
	Verbal	16	2.66	15	2.50	19	3.16	22	3.66

De acuerdo con estos datos, las estrategias *hechos numéricos* son más comunes en los problemas verbales de resta con la incógnita en el inicio en cuarto curso y se manifiestan menos en los problemas concretos de suma con la incógnita en el resultado por los alumnos de primero.

El análisis de los efectos simples del factor problema en los niveles de los otros factores indica que los problemas concretos difieren de los de dibujos y numéricos en las tareas de suma con la incógnita al final en segundo curso ($F_{3, 90} = 6.78$, $p < .05$).

También, los problemas numéricos y verbales difieren de los concretos y dibujos en las tareas de suma con la incógnita al final en tercero ($F_{3,\ 90}$ = 5.28, p < .01). Asimismo, los problemas verbales difieren de los concretos, dibujos y numéricos en las tareas de resta con la incógnita al inicio en tercero ($F_{3,\ 90}$ = 17.98, p < .01). Por último, los problemas numéricos contrastan con los concretos y dibujos, así como, los verbales difieren de los concretos en las tareas de resta con la incógnita en el resultado en cuarto ($F_{3,\ 90}$ = 3.88, p < .05).

En resumen, los alumnos rurales usan con preferencia las estrategias *hechos numéricos* en todos los cursos, excepto en primero. Estas estrategias se manifiestan a medida que los niños maduran hasta adquirir su dominio completo en los problemas de suma y resta que se resuelven en los cursos superiores.

Además, estos alumnos emplean significativamente tales estrategias en los niveles superiores de abstracción cuando los problemas se presentan en forma verbal o numérica.

Entonces, el conocimiento matemático de los niños se construye a partir de los hechos conocidos en mayor medida que mediante la elaboración de reglas.

Esto significa que tales alumnos construyen estas estrategias según las propiedades numéricas mientras que el método de descomposición de números es poco usual en ellos.

Finalmente, los participantes rurales emplean por igual las estrategias *hechos numéricos* tanto en los problemas de suma como de resta, incluso aunque la incógnita se encuentre al inicio o al final del problema.

14.3.3. *Estrategias entre el contexto urbano vs. contexto rural*

A continuación presentamos los datos de las estrategias respecto al tipo de problema resuelto por los alumnos conforme al contexto escolar independiente del curso, la operación y el lugar de la incógnita.

14.3.3.1. *Estrategias modelado directo según el contexto*

La Figura 14.28 muestra el porcentaje de las estrategias *modelado directo* de los alumnos de ambos contextos. En los problemas concretos se emplean por igual estas estrategias por los niños de los contextos urbanos y rurales. Los participantes rurales recuren más que sus iguales urbanos a tales estrategias en los problemas con dibujos, numéricos y verbales.

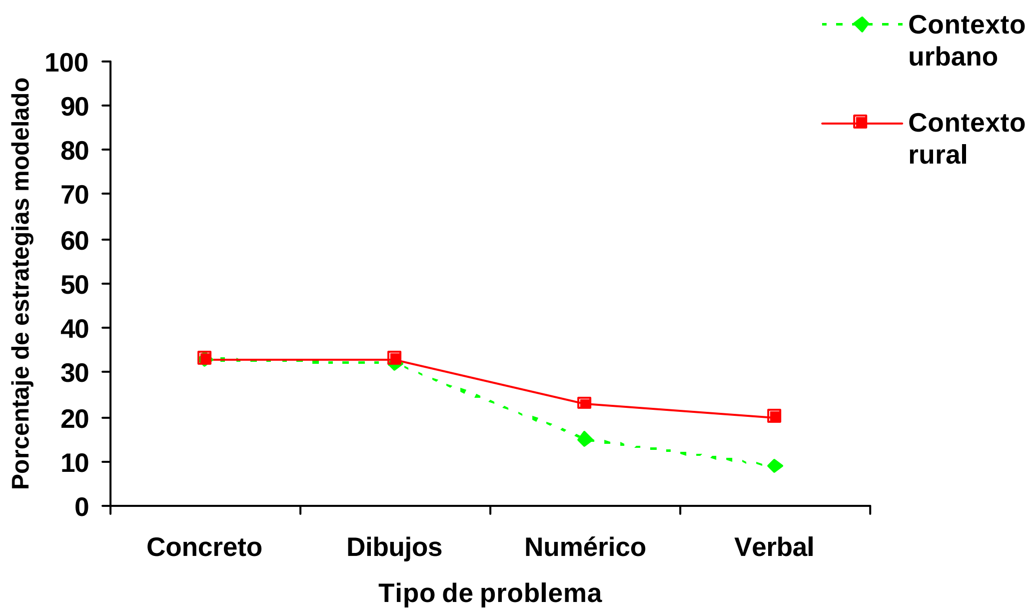

Figura 14.28 Estrategias modelado directo en el tipo de problema según el contexto escolar

De acuerdo con estos resultados, los niños rurales emplean más que sus iguales del contexto urbano las estrategias *modelado directo* en todos los problemas, excepto en los concretos.

Para analizar los resultados entre ambos contextos realizamos un análisis de varianza (ANOVA) mixto 2 (Contexto: rural vs. urbano) X 4 (Curso: primero vs. segundo vs. tercero vs. cuarto) X 4 (Tipo de problema: concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) X 2 (Tipo de operación: suma vs. resta) X 2 (Lugar de la incógnita: final vs. inicio) con medidas repetidas en los tres últimos factores mediante el programa SPSS 11.0. El contexto y el curso escolar son las variables inter-sujetos, mientras que el tipo de problema, la operación y el lugar de la incógnita son los factores intra-sujetos. La estrategia *modelado directo* se considera como la variable dependiente.

Los efectos principales son los factores **curso** ($F_{3,\ 184} = 5.97$, $p<.05$), **problema** ($F_{3,552} = 28.89$, $p < .01$), **operación** ($F_{1,\ 184} = 28.95$, $p < .01$) y **lugar de la incógnita** ($F_{1,184}= 84.36$, $p < .01$). No hubo efecto del factor contexto ($F_{1,\ 184} = 0.92$, $p = 0.33$). Es decir, el curso escolar, el tipo de problema, la operación y el lugar de la incógnita afectan la proporción de las estrategias *modelado directo* de estos alumnos. En otras palabras, el empleo de las estrategias *modelado directo* depende del curso al que asisten los alumnos; cambia según el tipo de problema presentado; se modifica cuando la operación es la suma o la resta, y depende si la incógnita se encuentra al final o al inicio de la operación.

En el estudio de comparaciones múltiples de Tuckey se encuentran diferencias significativas entre los escolares de cuarto con relación a los demás cursos ($p < .05$), los alumnos de tercero tienen diferencias con relación a los de segundo y primero ($p < .05$), pero las diferencias no son significativas entre segundo y primero. Estos datos son consistentes con los de otras investigaciones (Bermejo y otros, 1998; Bermejo y Rodríguez, 1993, Carpenter, 1985, 1996; Carpenter et al., 1993; Riley y Greeno, 1988; Starkey y Gelman,

1982) en el sentido de que las estrategias modelado directo se emplean principalmente por los primeros cursos independiente del contexto aunque se usan menos por los cursos superiores.

En el estudio de comparaciones por pares de Tuckey se encuentra que los problemas concretos difieren de los numéricos y verbales ($p < .01$); la resta difiere de la suma($p < .01$), y la incógnita al final contrasta con la incógnita al inicio ($p < .01$).

Además, el análisis de varianza revela que son significativas las interacciones dobles Contexto X Problema ($F_{3,\ 552} = 4.01$, $p < .05$), Curso X Incógnita ($F_{3,\ 184} = 3.63$, $p < .05$) y Contexto X Curso ($F_{3,\ 184} = 3.66$, $p < .05$), así como, las interacciones triples Contexto X Curso X Problema ($F_{9,\ 552} = 2.22$, $p < .05$), Curso X Operación X Lugar de la incógnita ($F_{3,184} = 11.73$, $p < .01$) y Problema X Operación X Lugar de la incógnita ($F_{3,\ 552} = 5.26$, $p=.01$), además. las interacciones Curso X Problema X Operación X Incógnita ($F_{9,\ 552} = 5.03$, $p < .01$) y Contexto X Curso X Problema X Operación X Incógnita ($F_{9,\ 552} = 2.00$, $p < .05$).

En la Figura 14.29 se aprecia la interacción entre el contexto y el tipo de problema según las estrategias *modelado directo.*

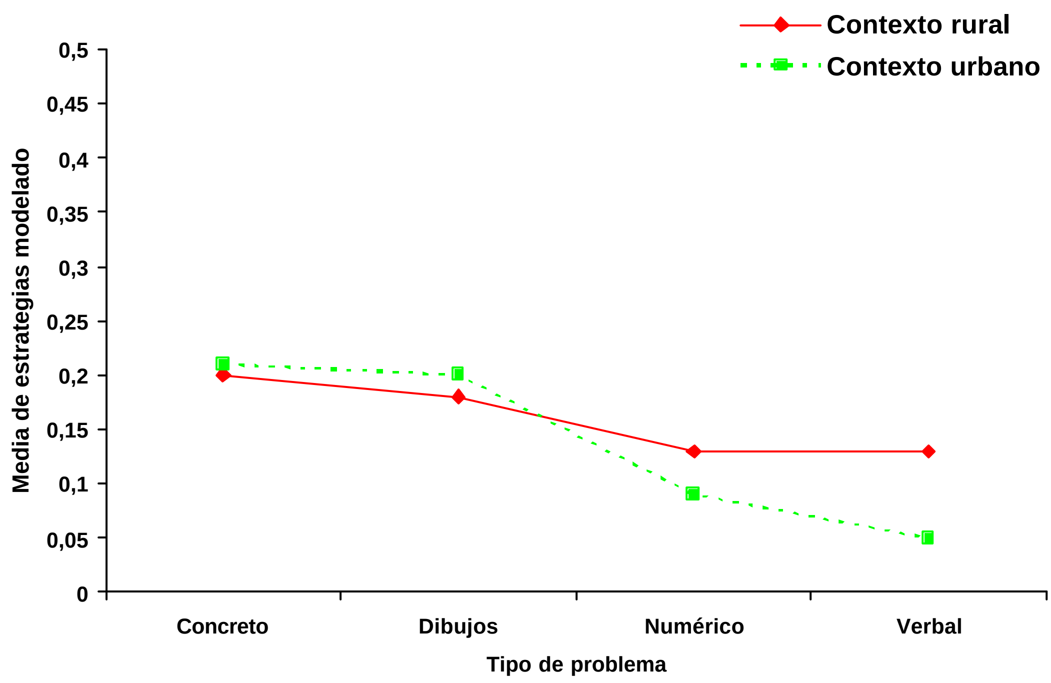

Figura 14.29 Interacción tipo de problema por contexto escolar en las estrategias modelado directo.

La proporción de estrategias *modelado directo* cambia en los distintos contextos escolares según el tipo de problema que se presenta a los participantes.

El patrón evolutivo indica que los problemas concretos y dibujos se resuelven más con las estrategias *modelado directo* en el contexto urbano que en el rural, mientras que los niños rurales solucionan más que sus iguales urbanos los problemas numéricos y verbales con estas estrategias.

Es decir, los niveles inferiores de abstracción se desarrollan mediante las estrategias *modelado directo* por los alumnos del contexto urbano, mientras que los niveles superiores se construyen con las estrategias *modelado directo* por los alumnos rurales.

Por tanto, el conocimiento matemático de los niños rurales que requiere mayor abstracción se elabora a través de la manipulación de los objetos, mientras que los alumnos urbanos construyen este conocimiento en los niveles de menor abstracción.

Estos resultados son consistentes con los planteamientos de otros autores (Saxe, 1991; Saxe y Gerahart, 1990) en el sentido de que el aprendizaje de las matemáticas implica una práctica específica, especializada, de los niños del contexto rural quienes desarrollan habilidades espaciales superiores a las destrezas manifestadas por los niños del contexto urbano. Además, estos datos confirman los encontrados en otros estudios (Schliemann y Carraher, 2002; Carraher y Schliemann, 2002; Khan, 1999) en cuanto que las situaciones de aprendizaje contextuales son variables. En este caso, las situaciones de mayor o menor abstracción implican un aprendizaje distinto de estas estrategias según el contexto escolar.

El análisis de los efectos simples del factor contexto en los niveles del factor curso muestra diferencias significativas de los alumnos del contexto rural sobre sus iguales del contexto urbano en el tercer curso ($F_{1, 184} = 2.96$, $p < .05$).

Este análisis confirma las diferencias mencionadas anteriormente sobre la evolución de los cursos superiores. Los niños rurales desarrollan con la edad una mayor competencia en el dominio de la manipulación de objetos como resultado de la exigencia cultural de resolver problemas a través del uso de instrumentos concretos para razonar de una manera más abstracta.

En la Figura 14.30 se muestra la interacción entre el curso escolar y el lugar de la incógnita. Las estrategias *modelado directo* se emplean más en los problemas con la incógnita al final que al inicio.

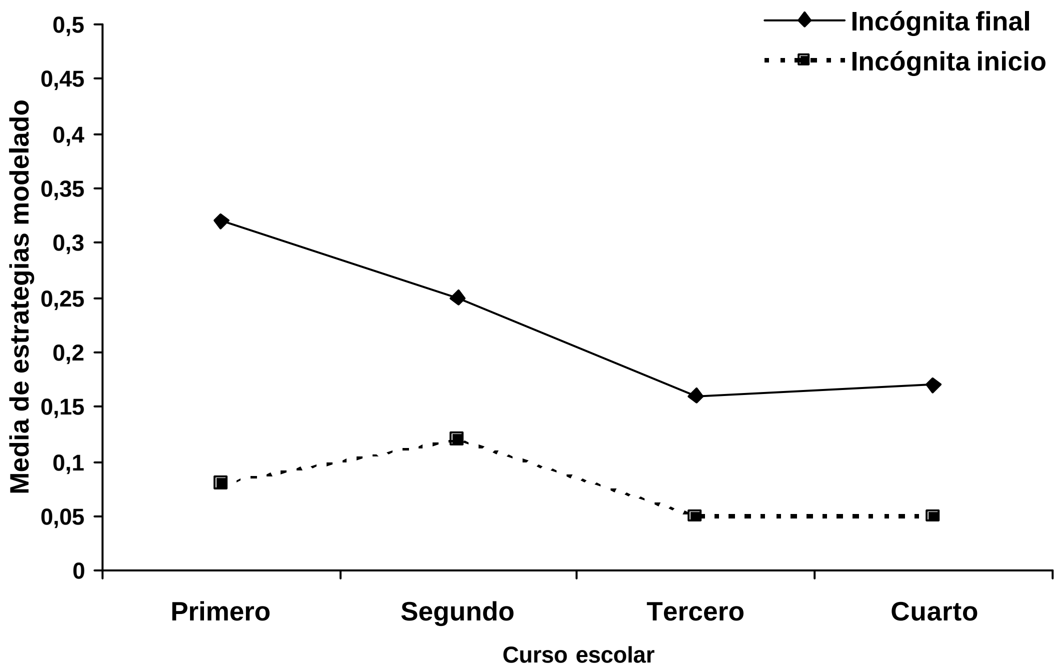

Figura 14.30. Interacción curso escolar por lugar de la incógnita en las estrategias modelado directo.

En el análisis de los efectos simples del factor curso en los niveles del factor lugar de la incógnita se encuentran diferencias de primer curso con relación a tercero y cuarto considerando la incógnita al final, y de segundo con respecto a tercero y cuarto en la incógnita al inicio. Es decir, las estrategias *modelado directo* se usan más en los problemas fáciles por los niños de primero y, posteriormente, se emplean sobre todo para resolver los problemas difíciles por los alumnos de segundo.

En la Figura 14.31 se aprecia la interacción entre el contexto y el curso escolar en estas estrategias. Los alumnos urbanos emplean más tales estrategias en los cursos básicos, mientras que los alumnos rurales recurren más a ellas en los cursos superiores.

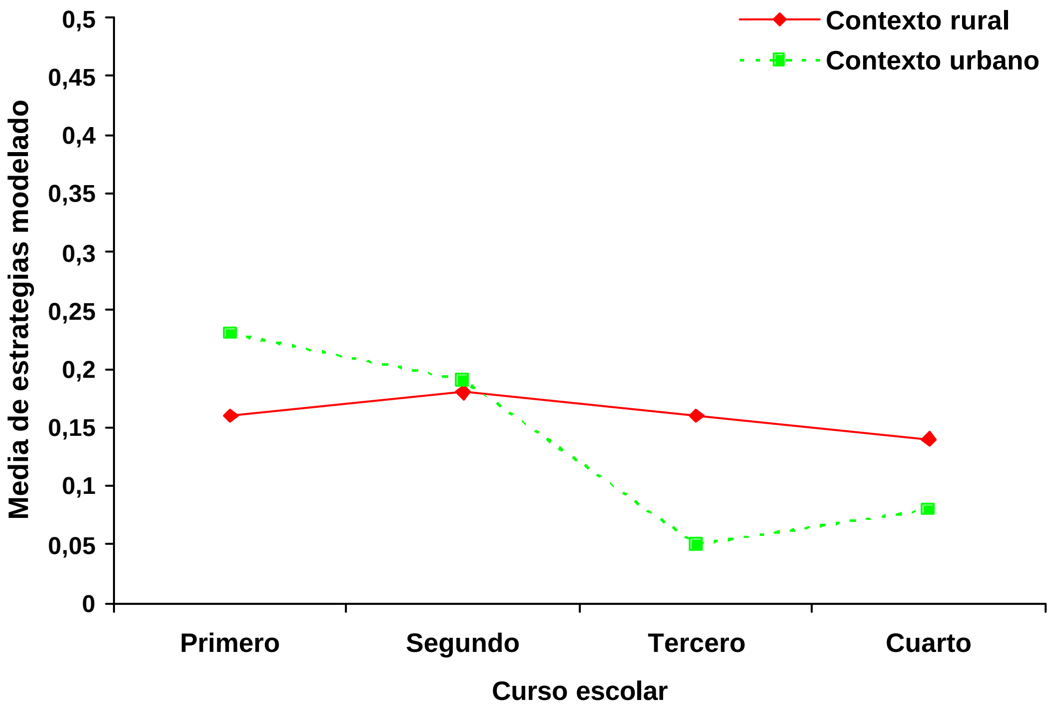

Figura 14.31. Interacción curso por contexto escolar en las estrategias modelado directo.

El análisis de los efectos simples del factor contexto en los niveles del factor curso encuentra que las diferencias son significativas entre primero y segundo con relación a tercero y cuarto en el contexto urbano. Es decir, las estrategias *modelado directo* se utilizan más por los alumnos de los primeros cursos y se emplean menos en los cursos superiores. Este patrón evolutivo es consistente con los planteamientos sobre el desarrollo de las estrategias básicas en los cursos inferiores (Carpenter y Moser, 1982; Bermejo y Rodríguez, 1998).

En cuanto a las demás interacciones sólo profundizaremos en la interacción Contexto X Curso X Problema X Operación X Incógnita. En esta interacción realizamos el análisis de los efectos simples del factor problema en los niveles de los demás factores según los datos de la Tabla 14.28.

Este análisis muestra en primer curso que en la suma con la incógnita en el resultado existen diferencias de los problemas concretos y dibujos con respecto a los numéricos y verbales en el contexto urbano ($F_{3,\ 182} = 14.80$, $p < .01$), pero no en el contexto rural. Además, en la resta con la incógnita en el minuendo se encuentran diferencias de los problemas concretos, dibujos y numéricos con relación a los verbales en el mismo contexto ($F_{3,\ 182} = 6.62$, $p < .01$).

En segundo se muestra que en la suma con la incógnita al final existen diferencias de los problemas concretos y dibujos con respecto a los numéricos y verbales en el contexto urbano ($F_{3,\ 182} = 5.29$, $p < .01$). También, los problemas concretos y dibujos difieren respecto a los numéricos y verbales en la operación de la resta con la incógnita en el minuendo en ambos contextos ($F_{3,\ 182} = 6.97$, $p < .01$, rural; $F_{3,\ 182} = 8.72$, $p<.01$ urbano).

En tercero se encuentra que en la suma con la incógnita en el resultado existen diferencias de los problemas de dibujos con respecto a los numéricos y verbales, y de los problemas verbales con relación a los numéricos en el contexto rural ($F_{3,182}=2.75$, $p < .05$). Asimismo, los problemas de dibujos difieren con respecto a los numéricos y verbales en la suma con la incógnita al inicio en el contexto urbano ($F_{3,\ 180} = 3.04$, $p < .05$).

En cuarto se encuentra que en la suma con la incógnita en el primer sumando existen diferencias de los problemas de dibujos con respecto a los numéricos y verbales en el contexto rural ($F_{3,\ 182} = 8.54$, $p < .01$). También, los problemas concretos difieren con respecto a los de dibujos, numéricos y verbales en la resta con la incógnita en el resultado en ambos contextos ($F_{3,\ 182} = 4.37$, $p < .01$ rural; $F_{3,\ 182} = 4.93$, $p < .01$).

Tabla 14.28

Medias y sumatorios correspondientes a la interacción *Contexto* (rural vs. urbano) * *Curso* (primero vs. segundo vs. tercero vs. cuarto) * *Problema* (concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) * *Operación* (suma vs. resta) * *Lugar de la incógnita* (final vs. inicio).

			Suma				Resta			
			Incógnita al final		Incógnita al inicio		Incógnita al final		Incógnita al inicio	
Contexto	Curso	Problema	Sumat	Media	Sumat	Media	Sumat	Media	Sumat	Media
Rural	Primero	Concreto	8	0.33	1	0.04	5	0.20	4	0.16
		Dibujos	5	0.20	0	0.00	7	0.29	3	0.12
		Numérico	7	0.29	0	0.00	6	0.25	2	0.08
		Verbal	5	0.20	0	0.00	9	0.37	2	0.08
	Segundo	Concreto	7	0.29	1	0.04	7	0.29	8	0.33
		Dibujos	5	0.20	1	0.04	6	0.25	6	0.25
		Numérico	5	0.20	1	0.04	6	0.25	5	0.20
		Verbal	2	0.08	0	0.00	9	0.37	0	0.00
	Tercero	Concreto	5	0.20	2	0.08	8	0.33	3	0.12
		Dibujos	7	0.29	1	0.04	8	0.33	3	0.12
		Numérico	1	0.04	1	0.04	8	0.33	3	0.12
		Verbal	2	0.08	2	0.08	8	0.33	0	0.00
	Cuarto	Concreto	2	0.08	4	0.16	12	0.50	0	0.00
		Dibujos	4	0.16	6	0.25	9	0.37	1	0.04
		Numérico	1	0.04	0	0.00	4	0.16	0	0.00
		Verbal	3	0.12	3	0.12	5	0.20	0	0.00
Urbano	Primero	Concreto	15	0.62	0	0.00	8	0.33	7	0.29
		Dibujos	16	0.66	0	0.00	7	0.29	6	0.25
		Numérico	7	0.29	0	0.00	9	0.37	6	0.25
		Verbal	2	0.08	0	0.00	7	0.29	0	0.00
	Segundo	Concreto	9	0.37	2	0.08	9	0.37	8	0.33
		Dibujos	10	0.41	2	0.08	9	0.37	8	0.33
		Numérico	3	0.12	0	0.00	4	0.16	4	0.16
		Verbal	2	0.08	0	0.00	5	0.20	0	0.00
	Tercero	Concreto	2	0.08	2	0.08	4	0.16	1	0.04
		Dibujos	2	0.08	4	0.16	5	0.20	0	0.00
		Numérico	0	0.00	0	0.00	0	0.00	0	0.00
		Verbal	0	0.00	1	0.04	2	0.08	0	0.00
	Cuarto	Concreto	1	0.04	2	0.08	11	0.50	1	0.04
		Dibujos	0	0.00	3	0.12	6	0.25	0	0.00
		Numérico	0	0.00	0	0.00	4	0.16	0	0.00
		Verbal	0	0.00	0	0.00	3	0.12	0	0.00

De acuerdo con los anteriores datos, los alumnos de los contextos usan las estrategias *modelado directo* de distinta manera en función de su nivel evolutivo en los cursos escolares.

Aunque ambos contextos expresan un patrón similar respecto al grado de abstracción en el cual tales estrategias corresponden con los niveles inferiores, existe otro tipo de diferencias. Por ejemplo, los escolares rurales de tercero recurren a estas estrategias en los problemas de suma con la incógnita al final, mientras que sus iguales urbanos las usan en los mismos problemas con la incógnita al inicio.

En virtud de que la prueba de comparaciones múltiples de Tuckey no permite la comparación de las medias muestrales entre ambos contextos realizamos el estudio de comparaciones por pares de medias independientes con la prueba *t* de Student. Esta prueba sirve para analizar la posible existencia de diferencias significativas entre ambos contextos con respecto al tipo de problema. En este caso sólo se encontraron diferencias significativas de los contextos respecto a los problemas verbales de suma y resta con la incógnita en el resultado ($t_{190} = 2.10$, $p < .05$ y $t_{190} = 2.35$ $p < .05$, respectivamente). Esto significa que los alumnos rurales emplean más que sus iguales urbanos las estrategias *modelado directo* para resolver los problemas verbales.

En resumen, las estrategias modelado directo se utilizan principalmente por los participantes rurales en los primeros cursos que en los cursos superiores.

Estas estrategias se emplean distintamente en los niveles de abstracción por ambos contextos. Los alumnos rurales emplean tales estrategias en los niveles superiores de abstracción, mientras que los participantes urbanos recurren a las estrategias *modelado directo* en los niveles inferiores de abstracción. Las diferencias entre ambos contextos llegan a ser relevantes a partir del tercer curso.

14.3.3.2. *Estrategias conteo según el contexto*

En la Figura 14.32 se muestran los porcentajes de las estrategias *conteo* empleadas por los alumnos de ambos contextos. Los alumnos rurales recurren más que sus iguales urbanos a estas estrategias en todos los tipos de problemas.

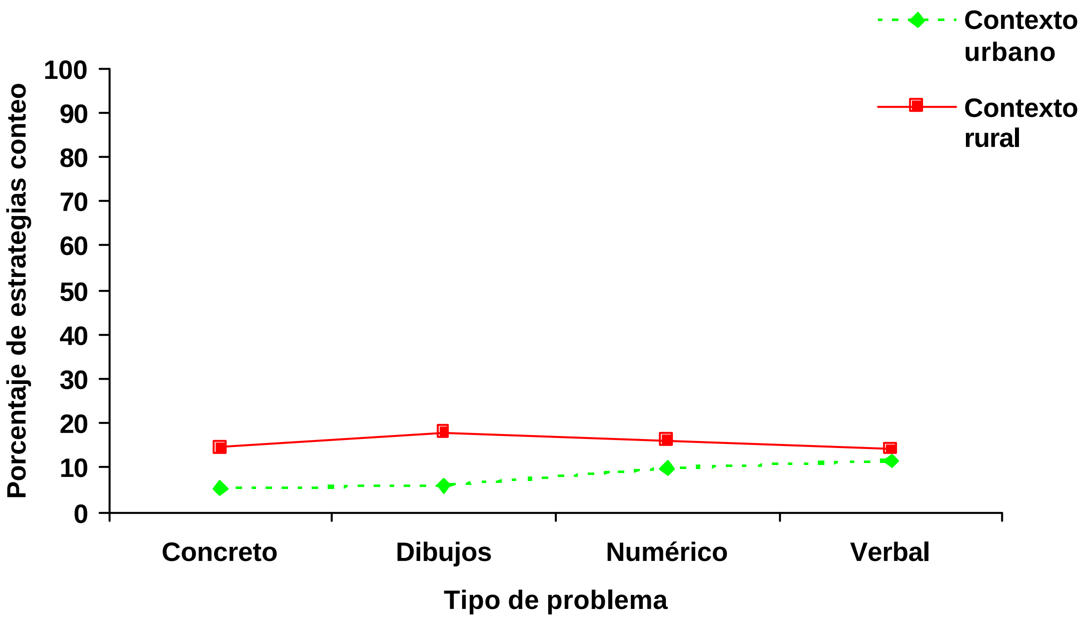

Figura 14.32. Estrategias conteo en el tipo de problema según el contexto escolar

A continuación realizamos un análisis de varianza (ANOVA) mixto 2 (Contexto: rural vs. urbano) X 4 (Curso: primero vs. segundo, tercero vs. cuarto) X 4 (Tipo de problema: concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) X 2 (Tipo de operación: suma vs. resta) X 2 (Lugar de la incógnita: final vs. inicio) con medidas repetidas en los tres últimos factores mediante el programa SPSS 11.0 a partir de los resultados entre ambos contextos. El contexto y el curso escolar se establecen como las variables inter-sujetos, mientras que el tipo de problema, la operación y el lugar de la incógnita son los factores intra-sujetos. La estrategia *conteo* se considera como la variable dependiente.

Este análisis encuentra que los efectos principales son los factores **contexto** ($F_{1,184}$=8.53, p<.05), **operación** ($F_{1, 184}$ = 75.17, p < .01) y **lugar de la incógnita** ($F_{1,184}$=30.33, p < .01). No hubo efecto del factor curso ($F_{3, 184}$ = 1.91, p = 0.12), tampoco del factor problema ($F_{3, 552}$ = 2.34, p = 0.07). Es decir, el contexto, el tipo de operación y el lugar de la incógnita afectan la proporción de estrategias *conteo*.

El estudio de comparaciones por pares con la prueba Tuckey revela existen diferencias significativas en el empleo de las estrategias *conteo* en el factor contexto. Los alumnos rurales tienden a usar más que sus iguales urbanos estas estrategias (p < .01).

En cuanto al factor operación, tales estrategias se emplean más en la suma que en la resta (p < .01).

Con respecto al factor incógnita, las estrategias *conteo* se utilizan más en los problemas con la incógnita al final que al inicio (p < .05).

Entonces, el contexto rural facilita más que el contexto urbano la construcción de las estrategias *conteo*.

El análisis de varianza también revela que son significativas las interacciones dobles Curso X Problema ($F_{9, 552}$ = 2.54, p < .05), Contexto X Operación ($F_{1, 184}$ = 9.34, p < .05), Problema X Operación ($F_{3, 552}$ = 8.03, p < .01), Problema X Incógnita ($F_{3, 552}$ = 7.22, p<.01), y Operación X Incógnita ($F_{1, 184}$ = 20.36, p < .01), así como, las interacciones triples Contexto X Curso X Problema ($F_{9, 552}$ = 2.60, p < .05), Contexto X Problema X Operación ($F_{3, 552}$ = 3.95, p < .05), Curso X Problema X Operación ($F_{9, 552}$ = 3.74, p < .01), Curso X Problema X Lugar de la incógnita ($F_{9, 552}$ = 3.57, p < .01), Curso X Operación X Lugar de la incógnita ($F_{3, 184}$ = 4.05, p< .05) y Problema X Operación X Lugar de la incógnita ($F_{3,552}$=6.54, p < .01), además, la interacción Curso X Problema X Operación X Incógnita ($F_{9, 552}$ = 2.06, p < .05).

En la Figura 14.33 se observa la interacción entre el curso escolar y el tipo de problema según las estrategias *conteo*. Estas estrategias se emplean más en los niveles superiores de abstracción por los alumnos de tercero y cuarto.

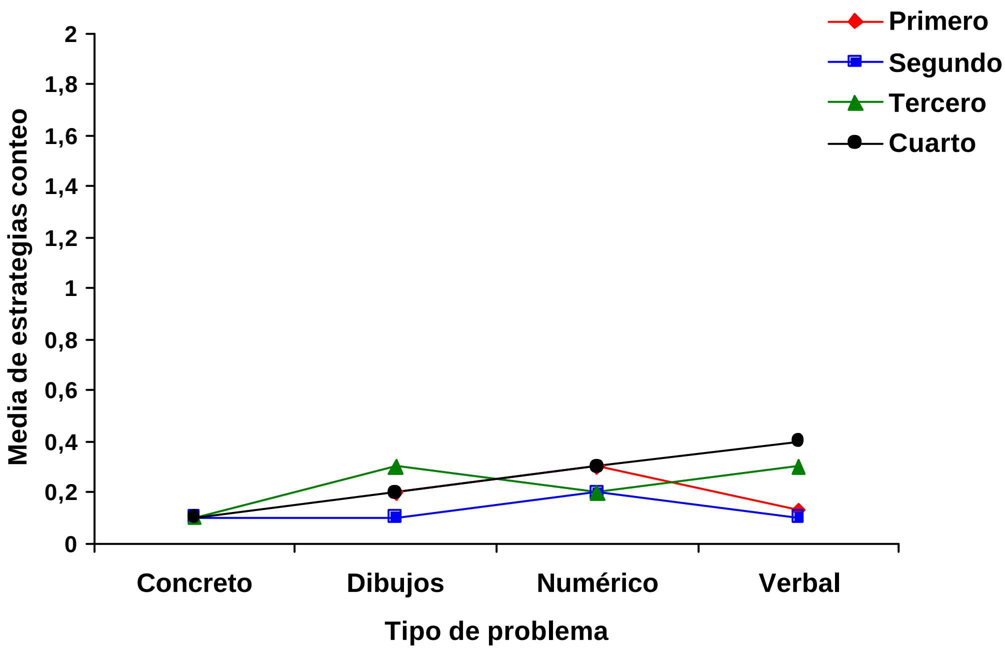

Figura 14.33 Interacción tipo de problema por curso escolar en las estrategias conteo en ambos contextos.

Específicamente, en el nivel concreto, todos los cursos emplean igualmente estas estrategias. En el nivel pictórico, los escolares de tercero las utilizan más, mientras que los niños de segundo las usan menos. En el nivel numérico, los participantes de primero y cuarto las manifiestan más, mientras que los alumnos de segundo y tercero las utilizan menos. En el nivel verbal, los escolares de cuarto recurren más a estas estrategias, mientras que los niños de segundo las emplean menos.

El análisis de los efectos simples del factor problema en los niveles del factor curso encuentra que los problemas verbales difieren de los concretos, dibujos y numéricos en primer curso ($F_{3,\,182} = 3.58$, $p < .05$)

La Figura 14.34 muestra la interacción entre el contexto y el tipo de operación. En general, los alumnos del contexto urbano emplean más las estrategias *conteo*. Estos alumnos recurren más que sus iguales rurales a estas estrategias tanto en la suma como en la resta.

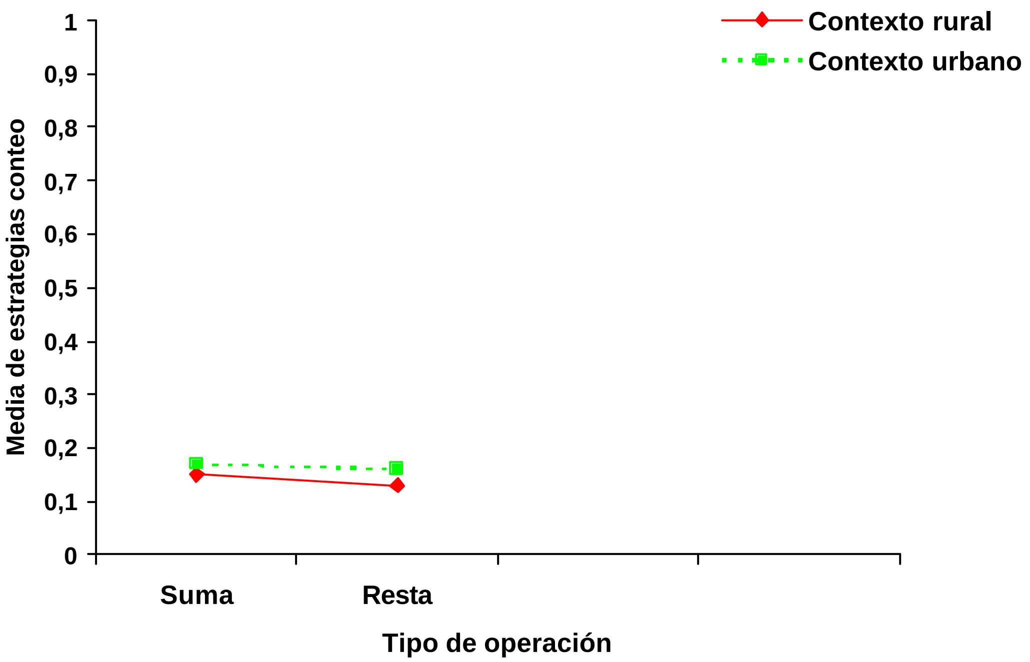

Figura 14.34. Interacción contexto por operación en las estrategias de conteo.

El análisis de los efectos simples del factor contexto en los niveles del factor operación muestra diferencias del contexto urbano sobre el contexto rural en las tareas de suma ($F_{1, 184}$ =11.20, p < .01).

Esto significa que el contexto urbano promueve principalmente la elaboración de los procedimientos de conteo en las tareas de suma. Los niños urbanos construyen las estrategias *contar a partir del primer sumando y contar a partir del sumando mayor* en los problemas aditivios.

La Figura 14.35 presenta la interacción entre el tipo de problema y la operación en las estrategias *conteo*. En general, estas estrategias se emplean en mayor medida en los problemas de suma.

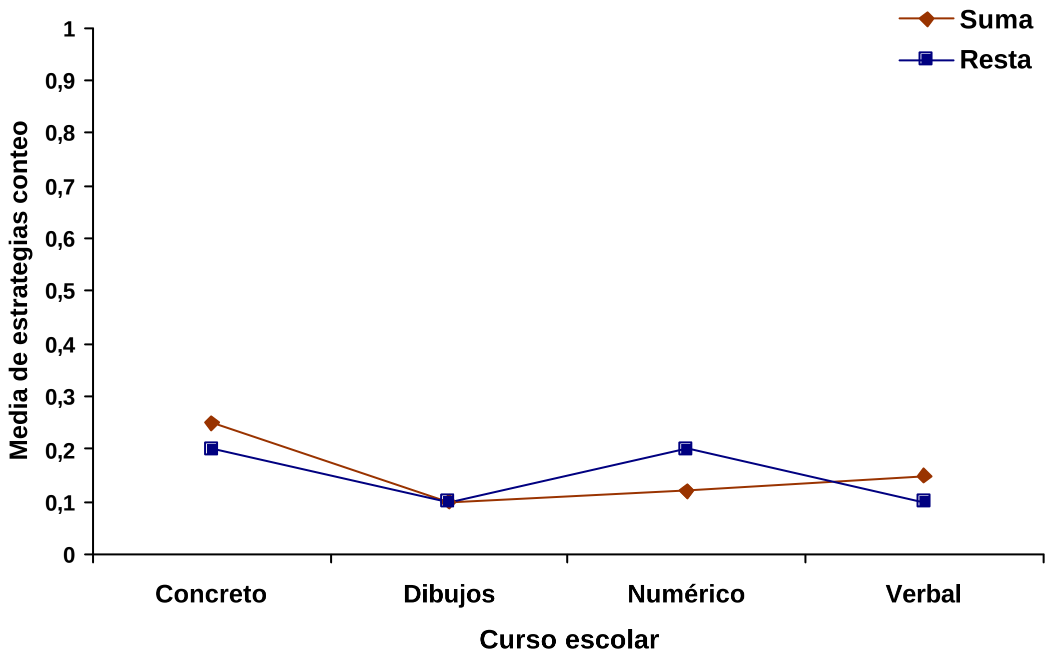

Figura 14.35. Interacción tipo de problema por operación en las estrategias conteo.

En el nivel concreto, estas estrategias se usan más en la suma que en la resta. En el nivel pictórico, tales estrategias se emplean por igual. En el nivel numérico, las estrategias *conteo* se utilizan más en los problemas de resta que de suma. En el nivel verbal, estas estrategias se manifiestan más en las tareas de suma que de resta.

Esto significa que las estrategias *conteo* se emplean más en la suma con los niveles inferiores de abstracción y en la resta con los niveles superiores de abstracción.

El análisis de los efectos simples del factor problema en los niveles del factor operación indica que existen diferencias de los problemas numéricos con respecto a los concretos, asi como, los problemas verbales difieren en relación a los concretos y dibujos en las tareas de suma ($F_{3, 182} = 5.64$, $p < .01$). Además, los problemas concretos, dibujos y numéricos contrastan con los verbales en las tareas de resta ($F_{3, 182} = 2.96$, $p < .05$).

La Figura 14.36 muestra la interacción entre el problema y el lugar de la incógnita. Las estrategias *conteo* se incrementan más en los distintos tipos de problemas cuando la incógnita se encuentra en el resultado.

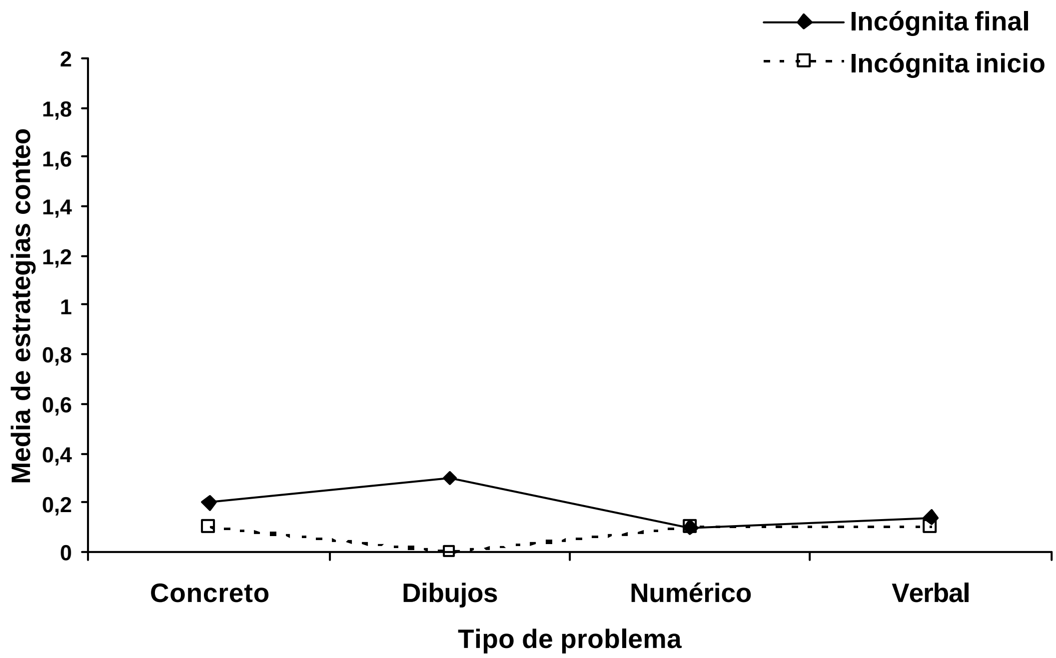

Figura 14.36. Interacción tipo de problema por lugar de la incógnita en las estrategias conteo

Los alumnos de ambos contextos recurren a estas estrategias tanto en los niveles inferiores de abstracción como en los superiores.

El análisis de los efectos simples del factor problema en los niveles del factor incógnita encuentra que los problemas verbales difieren de los concretos, dibujos y numéricos en las tareas con la incógnita al final ($F_{3, 182} = 4.45$, $p < .01$). Además, los problemas de dibujos contrastan con los concretos y verbales, asi como, los problemas numéricos difieren de los verbales en las tareas con la incógnita al inicio ($F_{3, 182} = 2.96$, $p < .05$)

En la Figura 14.37 se presenta la interacción entre el tipo de operación y el lugar de la incógnita. Las estrategias *conteo* son más frecuentes cuando la incógnita se ubica al final.

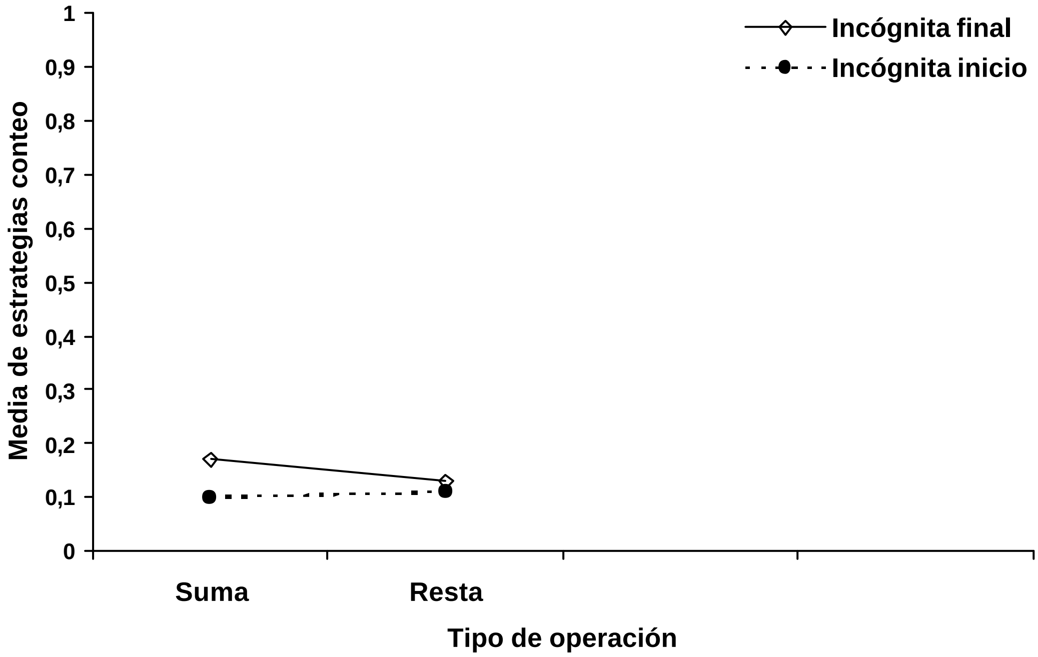

Figura 14.37. Interacción tipo de operación por lugar de la incógnita en las estrategias conteo.

Es decir, estas estrategias se usan más en la suma cuando la incógnita se encuentra al final que al inicio del problema. Lo mismo se menciona con respecto a la resta.

El análisis de los efectos simples del factor operación en los niveles del factor incógnita indica que los problemas con la incógnita al final contrastan con la incógnita al inicio ($F_{1, 184}$ =31.55, p < .01).

Esto significa que las estrategias conteo son más comunes que se utilizen pro ambos contextos en los problemas fáciles tanto de suma como de resta. En este sentido se desarrollan las estrategias conteo de suma *contar a partir del primer sumando y contar a partir del sumando mayor*, asi como, la estrategia de resta *contar hacia atrás*.

En cuanto a las demás interacciones sólo profundizaremos en las interacciones Contexto X Curso X Problema (Tabla 14.29), Contexto X Problema X Operación (Tabla 14.30) y Curso X Problema X Operación X Incógnita (Tabla 14.31).

Tabla 14.29

Medias y sumatorios correspondientes a la interacción *Contexto* (rural vs. urbano) * *Curso* (primero vs. segundo vs. tercero vs. cuarto) * *Problema* (concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal).

	CONTEXTO RURAL								CONTEXTO URBANO							
	Curso Primero		Curso Segundo		Curso Tercero		Curso Cuarto		Curso Primero		Curso Segundo		Curso Tercero		Curso Cuarto	
Problema	S	M	S	M	S	M	S	M	S	M	S	M	S	M	S	M
Concreto	36	0.13	46	0.07	54	0.03	90	0.08	36	0.02	63	0.07	61	0.03	86	0.01
Dibujos	31	0.11	39	0.12	56	0.07	90	0.09	36	0.04	60	0.06	66	0.01	85	0.04
Numérico	29	0.07	33	0.04	65	0.11	89	0.14	35	0.04	53	0.10	78	0.05	86	0.05
Verbal	37	0.11	53	0.13	72	0.04	91	0.08	35	0.14	55	0.08	74	0.02	87	0.05

Nota. S = sumatorio; M = media.

El análisis de los efectos simples del factor problema en los niveles de los demás factores encuentra que los problemas concretos difieren de los verbales, asi como, los problemas de dibujos y verbales contrastan con los númericos en segundo curso rural ($F_{3, 182} = 4.03$, $p < .01$). Además, los problemas concretos se distinguen de los problemas numéricos y estos problemas se contrastan con los verbales en tercero rural ($F_{3, 182} = 3.17$, $p < .05$). Finalmente, los problemas verbales difieren de los concretos, dibujos y numéricos en primer curso urbano ($F_{3, 182} = 5.84$, $p < .01$).

Tabla 14.30

Medias y sumatorios correspondientes a la interacción *Contexto* (rural vs. urbano) * *Problema* (concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) * *Operación* (suma vs. resta).

	Contexto Rural				Contexto Urbano			
	Suma		Resta		Suma		Resta	
Problema	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media
Concreto	114	0.11	112	0.06	130	0.05	116	0.02
Dibujos	114	0.17	102	0.02	129	0.03	118	0.04
Numérico	110	0.15	106	0.03	130	0.10	122	0.02
Verbal	125	0.17	128	0.01	126	0.14	125	0.00

El análisis de los efectos simples del factor contexto en los niveles de los otros factores muestra que el contexto urbano difiere del rural en los problemas concretos de suma ($F_{1, 184}$ = 7.46, p < .01) y en los de dibujos con la misma operación ($F_{1, 184}$ =19.98, p < .01).

Los alumnos urbanos emplean las estrategias conteo más que sus iguales rurales en todos los tipos de problemas de suma y de resta, excepto en los problemas verbales de resta.
Estas estrategias se utilizan preferentemente por los alumnos urbanos en los niveles inferiores de abstracción, mientras que los participantes rurales recurren a ellas en los niveles de mayor abstracción.

Estas diferencias se establecen en mayor medida cuando los alumnos urbanos resuelven los problemas fáciles y los niños rurales solucionan los problemas difíciles.

Tabla 14.31

Medias y sumatorios correspondientes a la interacción *Curso* (primero vs. segundo vs. tercero vs. cuarto) * *Problema* (concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) * *Operación* (suma vs. resta) * *Lugar de la incógnita* (final vs. inicio).

		Suma				Resta			
		Incógnita al final		Incógnita al inicio		Incógnita al final		Incógnita al inicio	
Curso	Problema	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media	Sumatorio	Media
Primero	Concreto	30	0.12	7	0.02	19	0.08	16	0.08
	Dibujos	28	0.10	7	0.06	17	0.02	15	0.13
	Numérico	26	0.16	6	0.00	19	0.02	13	0.04
	Verbal	33	0.43	7	0.02	25	0.04	7	0.02
Segundo	Concreto	43	0.16	13	0.04	24	0.04	29	0.04
	Dibujos	40	0.22	13	0.12	20	0.00	26	0.02
	Numérico	26	0.10	16	0.08	23	0.06	21	0.04
	Verbal	41	0.39	12	0.02	38	0.02	17	0.00
Tercero	Concreto	40	0.08	22	0.02	26	0.02	27	0.00
	Dibujos	40	0.06	25	0.06	31	0.04	26	0.00
	Numérico	46	0.20	30	0.12	39	0.00	28	0.00
	Verbal	43	0.08	26	0.04	43	0.00	34	0.00
Cuarto	Concreto	48	0.12	41	0.04	47	0.02	40	0.00
	Dibujos	47	0.10	43	0.10	46	0.06	39	0.00
	Numérico	47	0.20	43	0.12	47	0.06	38	0.00
	Verbal	48	0.17	41	0.10	48	0.00	41	0.00

El análisis de los efectos simples del factor problema en los niveles de los demás factores indica que los problemas dibujos y verbal difieren de los problemas numéricos y concretos en las tareas de suma con la incógnita el final en segundo curso ($F_{3, 184} = 12.15$, $p < .01$).

Además los problemas numéricos y verbales difieren de los concretos y dibujos en las tareas de suma con la incógnita al inicio en segundo ($F_{3, 184} = 18.00$, $p < .01$).

Asimismo, los problemas numéricos y verbales difieren de los concretos en las tareas de resta con la incógnita en el resultado en tercero ($F_{3, 184} = 22.15$, $p < .01$).

Por último, los problemas verbales difieren de los demás tipos en las tareas de resta con la incógnita al inicio en tercer curso ($F_{3, 184} = 20.05$, $p < .01$).

Igualmente, analizamos las posibles diferencias significativas entre ambos contextos con respecto al tipo de problema en base al estudio de comparaciones de medias independientes con la prueba *t* de Student. En este caso, se encuentran diferencias entre los contextos con respecto a los siguientes problemas: concreto de suma con la incógnita en el resultado (t_{190} = 2.65 p < .05), dibujos de suma con la incógnita en el final (t_{190} = 4.07 p < .01) y dibujos de suma con la incógnita en el primer sumando (t_{190} = 2.30 p < .05). También, se confirman las diferencias significativas entre los contextos con relación al uso de las estrategias *conteo* (t_{190} = 2.91 p<.05).

En resumen, los contextos difieren en el empleo de las estrategias conteo. Estas se utilizan más por los alumnos rurales que por los participantes urbanos. Sin embargo, estos últimos alumnos muestran diferencias cuando los problemas son de suma con la incógnita al final.

Estas estrategias se usan en los niveles superiores de abstracción por los alumnos de los cursos superiores en ambos contextos.

De acuerdo con los niveles de abstracción se encuentra que en el nivel verbal se emplean más estas estrategias en la suma que en la resta; en el nivel numérico se usan de preferencia en la resta; en el nivel verbal se recurre más a tales estrategias en los problemas de suma.

Además, tales estrategias se emplean más en los niveles inferiores de abstracción cuando la incógnita está en el resultado.

14.3.3.3. *Estrategias hechos numéricos según el contexto*

En la Figura 14.38 se muestran las estrategias *hechos numéricos* empleadas por los alumnos de ambos contextos. Los participantes del contexto urbano emplean más que sus iguales rurales estas estrategias en todos los tipos de problemas.

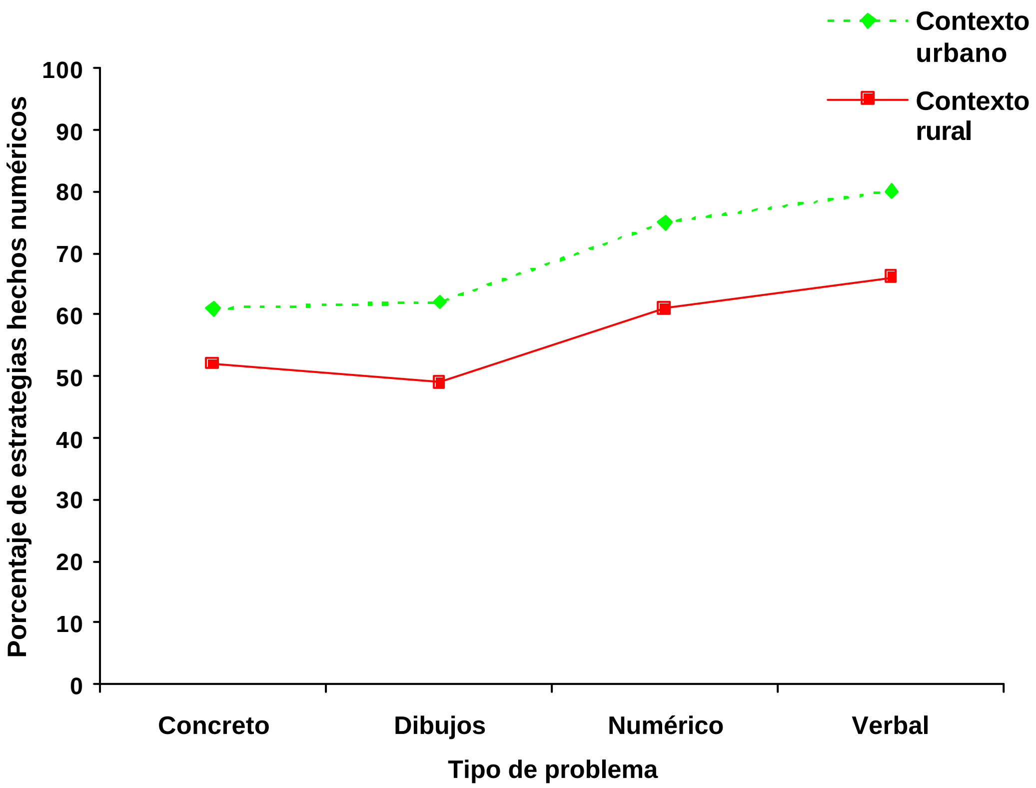

Figura 14.38. Estrategias hechos numéricos según el contexto escolar

Tales estrategias se emplean principalmente en los niveles superiores de abstracción por los alumnos de ambos contextos.

Por un lado se observa un patrón de abstracción progresivo en los alumnos urbanos, mientras que tal patrón retrocede en el nivel pictórico por los alumnos rurales.

A continuación analizamos los datos entre ambos contextos mediante un análisis de varianza (ANOVA) mixto 2 (Contexto: rural vs. urbano) X 4 (Curso: primero vs. segundo vs. tercero vs. cuarto) X 4 (Tipo de problema: concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) X 2 (Tipo de operación: suma vs. resta) X 2 (Lugar de la incógnita: final vs. inicio) con medidas repetidas en los tres últimos factores en base al programa SPSS 11.0. El contexto y el curso escolar se especifican como las variables inter-sujetos, mientras que el tipo de problema, la operación y el lugar de la incógnita son los factores intra-sujetos. Las estrategias *hechos numéricos* se consideran como la variable dependiente.

En este análisis se encuentra que los efectos principales son los factores **contexto** ($F_{1,184} = 13.05$, $p < .01$), **curso** ($F_{3, 184} = 88.39$, $p < .01$) y **problema** ($F_{3, 552} = 26.95$, $p < .01$). No hubo efecto del factor operación ($F_{1, 184} = 1.09$, $p = 0.29$), tampoco del lugar de la incógnita ($F_{1, 184} = 2.97$, $p = 0.08$). Es decir, el contexto, el curso escolar y el tipo de problema afectan la proporción de las estrategias *hechos numéricos* en los alumnos.

Además, el estudio de comparaciones múltiples de Tuckey encuentra diferencias significativas entre los escolares de cuarto con relación a los demás cursos ($p < .05$), los alumnos de tercero tienen diferencias con respecto a los de segundo y primer curso ($p < .05$), también, los niños de segundo difieren con relación a primer curso ($p < .05$). Estos resultados concuerdan con los hallados por otros investigadores (Bermejo y otros, 1998; Carpenter y Moser, 1982, 1984; Dowker, 1998) en el sentido de que las estrategias *hechos numéricos* se utilizan principalmente por los alumnos de los cursos superiores.

El estudio de comparación por pares con la prueba Tuckey en el factor contexto encuentra diferencias significativas del contexto urbano con respecto al contexto rural ($p < .01$). Asimismo, tal prueba indica diferencias en el factor problema. Los problemas verbales contrastan con relación a los demás ($p < .01$) y los problemas numéricos difieren con relación a los problemas concretos y dibujos ($p < .01$).

Asimismo, el análisis de varianza revela que son significativas las interacciones dobles Curso X Problema ($F_{9, 552} = 2.80$, $p < .05$), Contexto X Operación ($F_{1, 184} = 4.74$, $p<.05$), Curso X Incógnita ($F_{3, 184} = 2.80$, $p < .05$), Problema X Operación ($F_{3, 552} = 10.06$, $p< .01$), Problema X Incógnita ($F_{3, 552} = 3.34$, $p < .05$), Operación X Incógnita ($F_{1, 184}=27.18$, $p < .01$), así como, las interacciones triples Contexto X Problema X Incógnita ($F_{3, 552} = 3.16$, $p < .05$), Curso X Operación X Lugar de la incógnita ($F_{3, 184} = 7.60$, $p < .01$) y Problema X Operación X Lugar de la incógnita ($F_{3, 552} = 8.83$, $p < .01$), además, las interacciones Contexto X Problema X Operación X Incógnita ($F_{3, 552} = 2.65$, $p < .05$) y Contexto X Curso X Problema X Operación X Incógnita ($F_{9, 552} = 2.86$, $p < .05$).

En la Figura 14.39 se presenta la interacción entre el curso escolar y el tipo de problema. En general, las estrategias *hechos numéricos* se utilizan más por los escolares de cuarto curso, mientras que se emplean menos por los de primero.

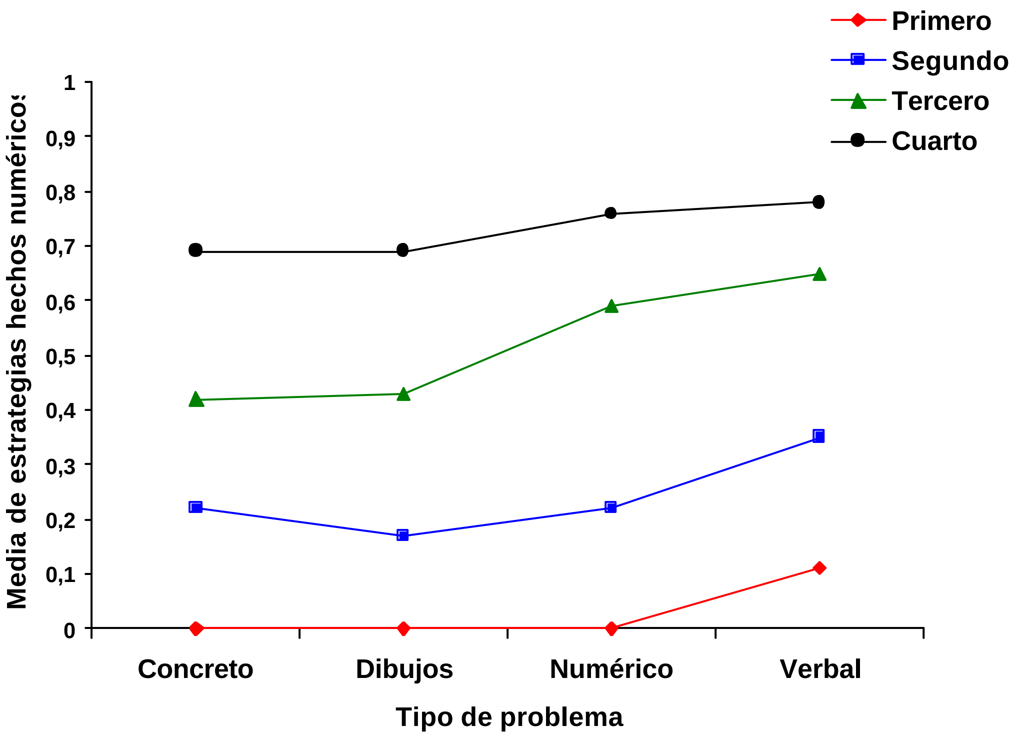

Figura 14.39. Interacción curso escolar por tipo de problema en las estrategias hechos numéricos en ambos contextos.

Un patrón evolutivo se manifiesta en el empleo de estas estrategias a través de todos los tipos de problemas. En los niveles inferiores de abstracción se utilizan menos estas estrategias, mientras que en los niveles superiores se emplean en mayor medida por todos los cursos. Esto significa que las estrategias *hechos numéricos* se relacionan más con los niveles más abstractos.

El análisis de los efectos simples del factor problema en los niveles del factor curso encuentra que los problemas de dibujos difieren de los verbales, y éstos contrastan con los concretos, dibujos y numéricos en segundo curso ($F_{3,\ 182} = 6.29$, $p < .01$). Además, los problemas numéricos y verbales difieren de los concretos y dibujos en tercero ($F_{3,\ 182} = 17.67$, $p < .01$) y cuarto ($F_{3,\ 182} = 3.06$, $p < .05$).

En la Figura 14.40. se aprecia la interacción entre el contexto escolar y el tipo de operación. Las estrategias *hechos numéricos* se utilizan más por los alumnos urbanos que sus iguales rurales en ambas operaciones.

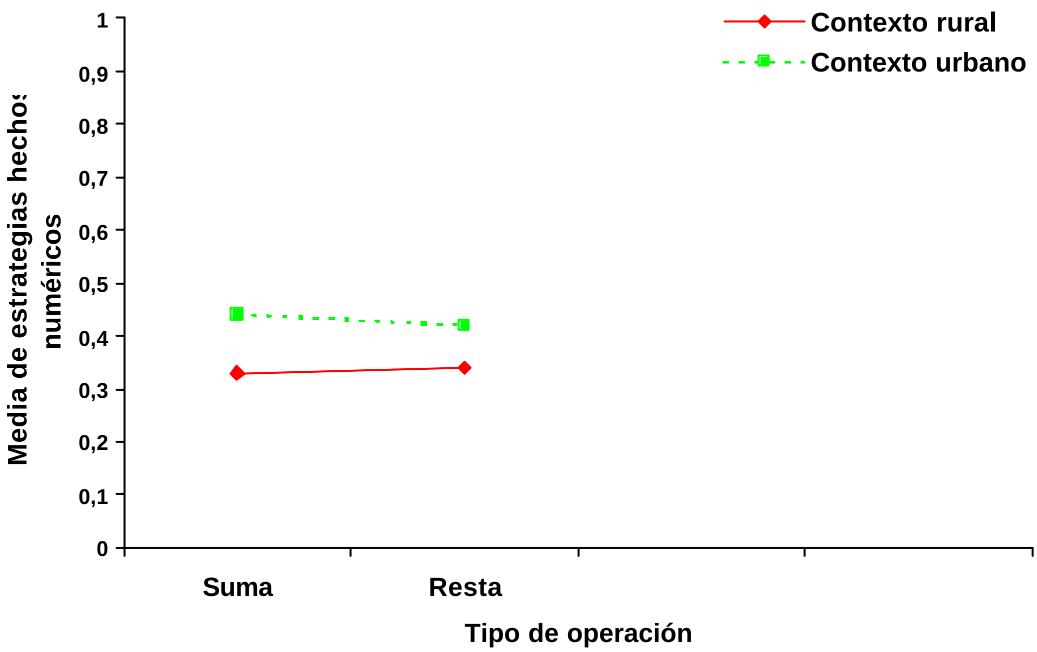

Figura 14.40. Interacción tipo de operación por contexto escolar en las estrategias hechos numéricos.

El análisis de los efectos simples del factor contexto en los niveles del factor operación indica que el contexto urbano supera al rural tanto en la suma ($F_{1,\,184} = 18.47$, $p < .01$) como en la resta ($F_{1,\,184} = 5.16$, $p < .05$)

En la Figura 14.41 se observa la interacción entre el curso escolar y el lugar de la incógnita según las estrategias *hechos numéricos*. En general, estas estrategias son más frecuentes en los problemas con la incógnita al final que en los que comprenden la incógnita al inicio.

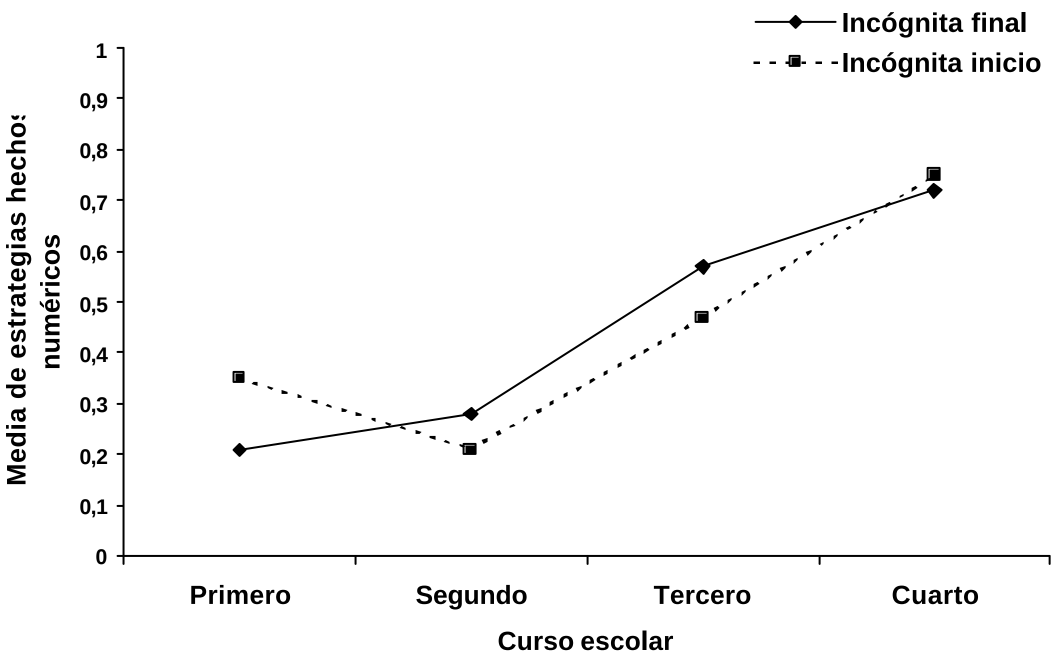

Figura 14.41. Interacción curso por lugar de la incógnita en las estrategias hechos numéricos en ambos contextos.

.

Específicamente, las estrategias *hechos numéricos* se utilizan principalmente en los problemas con la incógnita al final en segundo y tercer curso, mientras que se emplean más en los problemas con la incógnita al inicio en cuarto. Por una parte, estas estrategias se usan más en los problemas fáciles que en los difíciles desde primero hasta tercer curso. Por otra, tales estrategias se utilizan más en los problemas difíciles que en los fáciles.

El análisis de los efectos simples del factor curso en los niveles del factor incógnita muestra que los problemas con la incógnita al final difieren de las tareas con la incógnita al inicio en tercer curso ($F_{1, 184} = 7.45$, $p < .01$).

En la Figura 14.42 se presenta la interacción entre el tipo de problema y la operación. En general, las estrategias *hechos numéricos* se emplean más en la suma que en la resta.

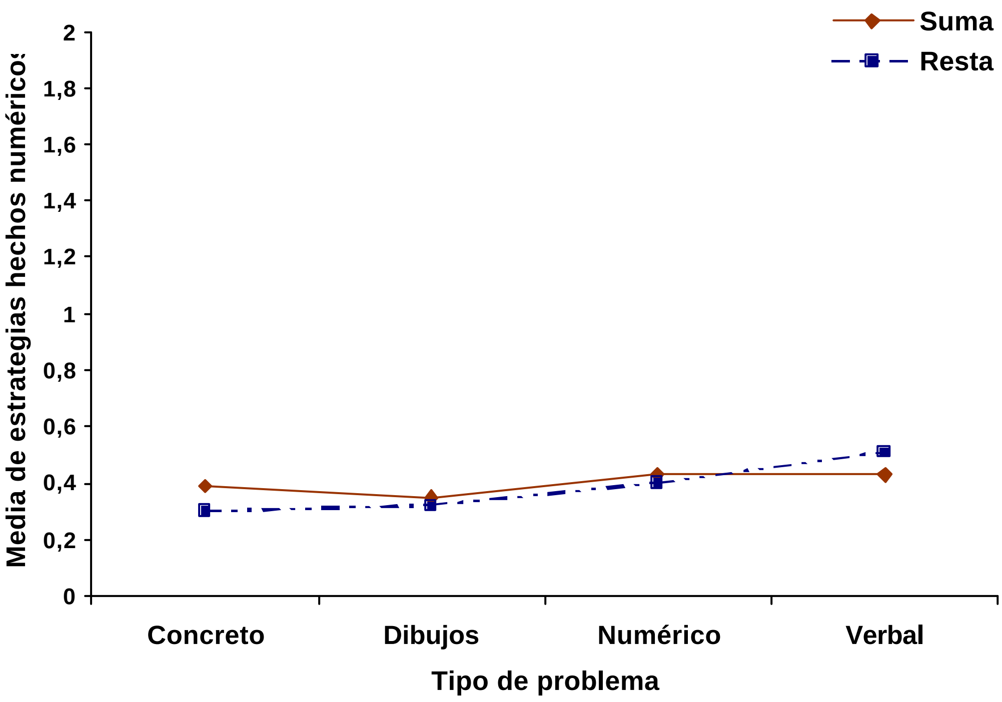

Figura 14.42. Interacción tipo de problema por operación en las estrategias hechos numéricos en ambos contextos.

Estas estrategias se usan más en los problemas verbales de resta, mientras que se emplean menos en los problemas concretos de resta. Tales estrategias se utilizan más en los niveles superiores de abstracción y se recurre menos a ellas en los niveles inferiores tanto en la suma como en la resta.

El análisis de los efectos simples del factor problema en los niveles del factor operación encuentra que los problemas numéricos y verbales difieren de los de dibujos en las tareas de suma ($F_{3, 182} = 4.25$, $p < .01$). Además, los problemas numéricos contrastan con los concretos y dibujos, asi como, los problemas verbales difieren de los concretos, dibujos y numéricos en las tareas de resta ($F_{3,\,182} = 26.15$, $p < .01$).

La Figura 14.43 expone la interacción entre el tipo de problema y el lugar de la incógnita. Las estrategias *hechos numéricos* se utilizan más en los problemas con la incógnita al final.

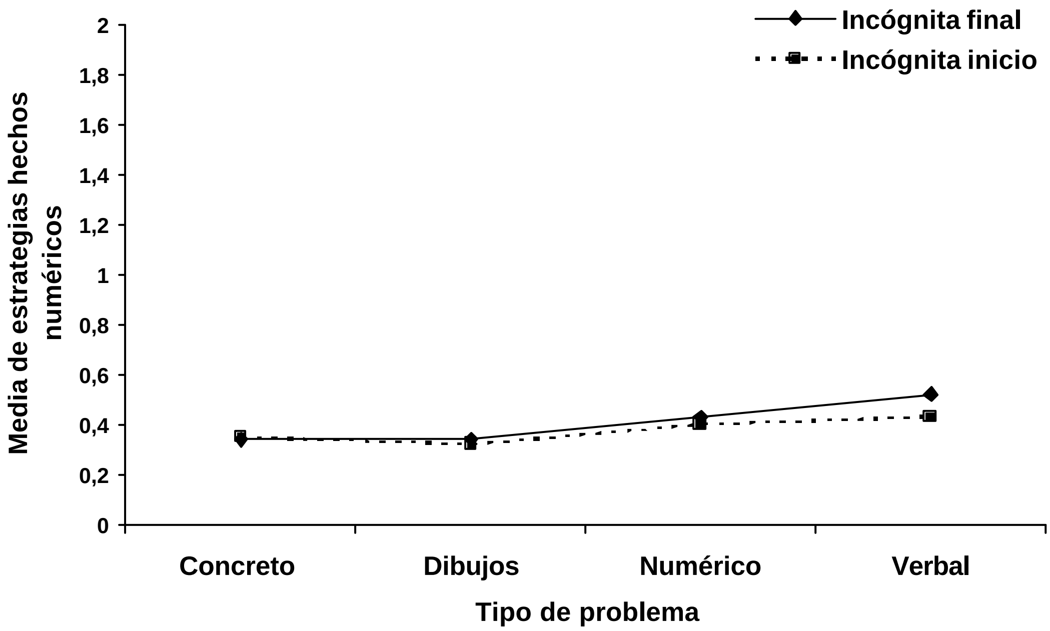

Figura 14.43. Interacción tipo de problema por lugar de la incógnita en las estrategias hechos numéricos en ambos contextos.

Estas estrategias se usan más en los problemas verbales con la incógnita al final, mientras que se manifiestan menos en los concretos con la misma incógnita. Igualmente, tales estrategias se emplean más en los niveles superiores de abstracción tanto en los problemas fáciles como difíciles según el lugar de la incógnita.

El análisis de los efectos simples del factor problema en los niveles del factor incógnita indica que los problemas numéricos difieren de los concretos y dibujos, asi como, los problemas verbales contrastan con los concretos, dibujos y numéricos en las tareas con la incógnita al final ($F_{3,\,182} = 19.59$, $p < .01$). Además, los problemas numéricos y verbales difieren de los concretos y dibujos en las tareas con la incógnita al inicio ($F_{3, 182} = 6.61$, $p < .01$).

En la Figura 14.44 se muestra la interacción entre el tipo de operación y el lugar de la incógnita. Las estrategias *hechos numéricos* se usan más en la suma con la incógnita al final y en la resta con la incógnita al inicio.

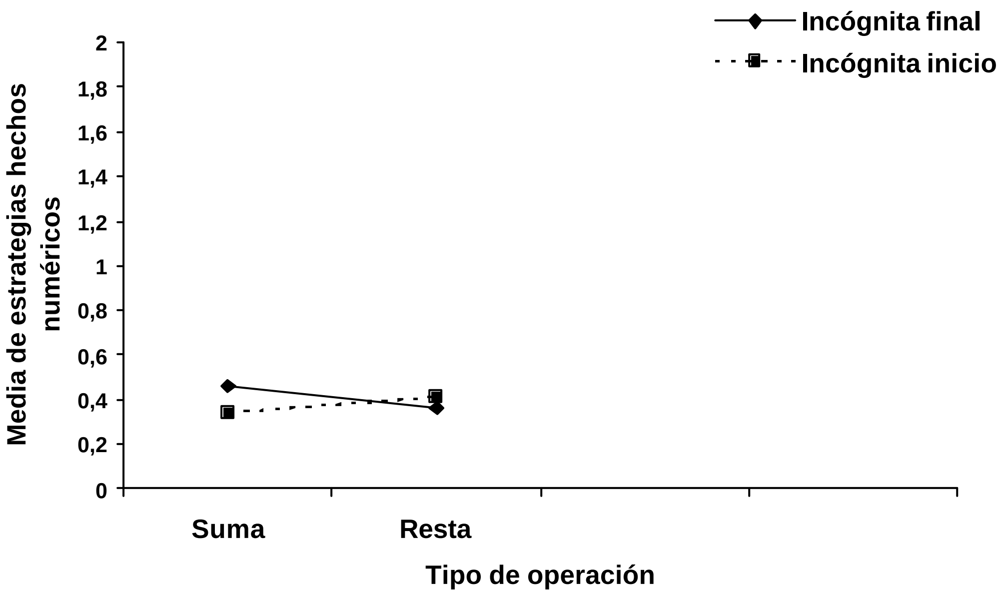

Figura 14.44. Interacción tipo de operación por lugar de la incógnita en las estrategias hechos numéricos en ambos contextos

El análisis de los efectos simples del factor operación en los niveles del factor incógnita muestra que los problemas de suma difieren de la resta con la incógnita al final ($F_{1, 184} = 22.06$, $p < .01$), asi como, los problemas de resta contrastan con la suma en la incógnita al inicio ($F_{1, 184} = 8.92$, $p < .01$).

Esto significa que las estrategias hechos numéricos se emplean de preferencia en las tareas de suma fáciles y en las tareas de resta difíciles.

En otras palabras, ambos contextos construyen estas estrategias tanto para los problemas fáciles como difíciles.

En cuanto a las demás interacciones significativas sólo analizaremos la interacción Contexto X Curso X Problema X Operación X Incógnita con los datos que se muestran en la Tabla 14.32.

Tabla 14.32

Medias y sumatorios correspondientes a la interacción *Contexto* (rural vs. urbano) * *Curso* (primero vs. segundo vs. tercero vs. cuarto) * *Problema* (concreto vs. dibujos vs. numérico vs. verbal) * *Operación* (suma vs. resta) * *Lugar de la incógnita* (final vs. inicio).

			Suma				Resta			
			Incógnita al final		Incógnita al inicio		Incógnita al final		Incógnita al inicio	
Contexto	Curso	Problema	Sumat	Media	Sumat	Media	Sumat	Media	Sumat	Media
Rural	Primero	Concreto	0	0.00	3	0.12	1	0.04	1	0.04
		Dibujos	1	0.04	3	0.12	1	0.04	0	0.00
		Numérico	1	0.04	4	0.16	1	0.04	1	0.04
		Verbal	2	0.08	3	0.12	3	0.12	2	0.08
	Segundo	Concreto	11	0.45	1	0.04	1	0.04	3	0.12
		Dibujos	4	0.16	1	0.04	1	0.04	3	0.12
		Numérico	4	0.16	4	0.16	2	0.08	2	0.08
		Verbal	7	0.29	7	0.29	8	0.33	7	0.29
	Tercero	Concreto	9	0.37	7	0.29	8	0.33	9	0.37
		Dibujos	7	0.29	7	0.29	7	0.29	9	0.37
		Numérico	14	0.58	7	0.29	11	0.45	10	0.41
		Verbal	15	0.62	10	0.41	13	0.54	18	0.75
	Cuarto	Concreto	16	0.66	15	0.62	12	0.50	21	0.87
		Dibujos	16	0.66	12	0.50	14	0.58	19	0.79
		Numérico	16	0.66	16	0.66	18	0.75	20	0.83
		Verbal	16	0.66	15	0.62	19	0.79	22	0.91
Urbano	Primero	Concreto	1	0.04	2	0.08	1	0.04	0	0.00
		Dibujos	1	0.04	1	0.04	1	0.04	0	0.00
		Numérico	2	0.08	2	0.08	2	0.08	2	0.08
		Verbal	3	0.12	3	0.12	4	0.16	2	0.08
	Segundo	Concreto	8	0.33	7	0.29	5	0.20	8	0.33
		Dibujos	10	0.41	3	0.12	4	0.16	8	0.33
		Numérico	9	0.37	7	0.29	8	0.33	8	0.33
		Verbal	11	0.45	4	0.16	15	0.62	10	0.41
	Tercero	Concreto	20	0.83	10	0.41	5	0.20	14	0.58
		Dibujos	21	0.87	10	0.41	9	0.37	14	0.58
		Numérico	21	0.87	17	0.70	20	0.83	15	0.62
		Verbal	22	0.91	11	0.45	20	0.83	16	0.66
	Cuarto	Concreto	23	0.95	18	0.75	11	0.45	18	0.75
		Dibujos	22	0.91	17	0.70	14	0.58	19	0.79
		Numérico	20	0.83	21	0.87	18	0.75	18	0.75
		Verbal	21	0.87	18	0.75	21	0.87	19	0.79

El análisis de los efectos simples del factor contexto en los niveles de los otros factores encuentra que el contexto urbano difiere del rural en los problemas de dibujos de suma con la incógnita al final ($F_{1,\ 184} = 5.34$, $p < .05$), problema numérico de resta con la incógnita al final ($F_{1,\ 184} = 4.88$, $p < .05$), problema numérico de resta con la incógnita al inicio ($F_{1,\ 184} = 4.71$, $p < .05$) y problema verbal de resta con la incógnita al final ($F_{1,\ 184} = 5.72$, $p < .05$) en segundo curso. Igualmente, los alumnos urbanos superan a los rurales en tercer curso en los siguientes problemas: concreto, dibujos, numérico y verbal de suma com la incógnita al final ($F_{1,\ 184} = 16.86$, $p < .01$; $F_{1,\ 184} = 29.08$, $p < .01$; $F_{1,\ 184} = 6.50$, $p < .05$; $F_{1,\ 184} = 6.10$, $p < .05$); numérico de suma con la incógnita al inicio ($F_{1,\ 184} = 12.23$, $p < .01$); númerico y verbal de resta con la incógnita al final ($F_{1,\ 184} = 10.99$, $p < .01$; $F_{1,\ 184} = 5.72$, $p < .05$). Esto se repite en cuarto curso en el problema concreto de suma con la incógnita al final ($F_{1,\ 184} = 6.83$, $p < .05$).

También analizamos las diferencias significativas entre ambos contextos con respecto al tipo de problema a partir de las comparaciones por pares de medias independientes con la prueba *t* de Student. En este caso se encuentran diferencias significativas entre las medias de los contextos en todos los tipos de problemas de suma con la incógnita en el resultado (concreto $t_{190} = -2.33$, $p < .05$; dibujos $t_{190} = -3.92$, $p < .01$; numérico $t_{190} = -2.49$, $p< .05$; y verbal $t_{190} = -2.48$, $p < .05$), además, en dos problemas de resta con la incógnita al final (numérico $t_{190} = -2.36$, $p < .05$ y verbal $t_{190} = -2.48$, $p< .05$) y, por último, en el problema numérico de suma con la incógnita en el primer sumando ($t_{190} = -2.37$, $p<.05$).

En resumen, los alumnos del contexto rural son superiores a sus iguales del contexto urbano en relación al uso de las estrategias *modelado directo* y *conteo* en la mayoría de los tipos de problemas, por el contrario, los participantes de las escuelas urbanas superan a sus iguales de las escuelas rurales en el empleo de las estrategias *hechos numéricos* en todos los tipos de problemas presentados en el estudio. Estos resultados son consistentes con los de otros estudios (Carraher et al.,1985; Greeno, 1989; Lave, 1988; Nunes, 1993; Saxe, 1991) sobre la cuestión necesaria del análisis del contexto social en el aprendizaje de las matemáticas visto como una práctica específica.

En cuanto al tercer objetivo de investigación, se discute sobre las estrategias: 1) el patrón evolutivo, 2) la relación entre las estrategias y el grado de abstracción, 3) relación entre las estrategias y el tipo de operación y 4) las diferencias entre los contextos.

En cuanto al primero, las estrategias son relevantes en los distintos cursos, aunque se observan diferencias en el nivel de abstracción. Por tanto, se confirma que los cursos inferiores recurren en mayor medida a las estrategias básicas, mientras que los cursos superiores emplean las estrategias más evolucionadas.

Los alumnos de primero muestran una secuencia en el desarrollo de las estrategias a partir del modelado directo, luego pasan a usar estrategias de conteo y, después, emplean las estrategias memorísticas. El patrón evolutivo desde segundo hasta cuarto curso se caracteriza por una mayor proporción de estrategias memorísticas, luego se usan las estrategias de modelado y pocas veces se recurre a las estrategias de conteo. Como se comprende, las estrategias de conteo no son principales en el transcurso del desarrollo, ya que las estrategias de modelado y hechos numéricos tienen un rol predominante en el primero y los últimos cursos respectivamente. Entonces, se concluye que el segundo curso ocupa una posición intermedia como período de transición entre las estrategias básicas y las estrategias evolucionadas.

Las posiciones constructivistas reafirman tal idea al señalar que las estrategias más evolucionadas ocurren en los cursos superiores, mientras que las estrategias básicas se manifiestan en los cursos inferiores.

En el segundo aspecto se específica la relación del tipo de estrategia con el grado de abstracción. Las estrategias de modelado aumentan el rendimiento en los problemas con niveles de abstracción inferiores (problemas concretos y dibujos). Las estrategias de conteo y memoria incrementan el rendimiento en los problemas con niveles de abstracción superiores (problemas numéricos y verbales).

De acuerdo con la aproximación constructivista, las estrategias básicas corresponden a los niveles inferiores de abstracción, mientras que las estrategias más evolucionadas se relacionan con los niveles superiores de abstracción.

En el tercer aspecto se plantea que las estrategias están más orientadas hacia el tipo de operación y el lugar de la incógnita. En la suma, las estrategias *contar todo* y *contar a partir del sumando mayor y contar a partir del primer sumando* se emplean específicamente en los problemas con la incógnita en el resultado. Las estrategias *quitar de, quitar a*, *contar hacia atrás* y *contar hasta* son principales en los problemas de suma con la incógnita en el primer sumando.

En la resta se manifiestan las estrategias *quitar de*, *emparejamiento* y *contar hacia atrás desde lo dado* cuando la incógnita se encuentra al final. Las estrategias *contar todo* y *contar a partir de un término* se emplean cuando la incógnita se ubica al inicio del problema.

De acuerdo con lo anterior, afirmamos que el desarrollo de los procedimientos de solución de las tareas de suma y resta son específicos y se construyen para situaciones particulares.

El último aspecto trata sobre las diferencias entre los contextos con respecto al tipo de estrategia. Una tendencia general existe en los alumnos rurales por encima de sus iguales urbanos para desarrollar prioritariamente las estrategias de modelado y conteo. Sin embargo, los participantes urbanos son mejores que sus iguales rurales en las estrategias de hechos numéricos.

Las diferencias en las estrategias de modelado entre los contextos se sitúan en los niveles superiores y en los problemas verbales. Entonces, estas diferencias aparecen en los niveles escolares más avanzados. Esto mismo se debe a una práctica social específica que requiere la habilidad de usar objetos para resolver una tarea. Los niños rurales son más concretos que sus iguales urbanos en las tareas verbales, lo cual confirma la idea de la especificidad del conocimiento infantil. Por tanto, el patrón de estrategia se manifiesta a partir de una interacción social basada en el conocimiento informal, el cual se adquiere mediante la manipulación de objetos cotidianos. Este patrón de desarrollo ocurre dentro de las características sociales de una cultura rural.

14.4. Análisis de los errores

Este análisis cuantitativo se basa en los datos de los porcentajes de los errores manifestados por cada curso escolar tanto del contexto rural como urbano. Los errores de los alumnos se analizan según el curso escolar, el grado de abstracción, el lugar de la incógnita, la operación y el contexto escolar.

14.4.1. *Errores de los alumnos urbanos*

La Tabla 14.33 muestra el porcentaje de los errores en los problemas de suma por estos alumnos. En primer lugar analizamos el grado de abstracción en la suma con la incógnita en el resultado. En el nivel concreto se encuentra que los alumnos en primero manifiestan principalmente el error *no lo entiende*. En segundo se cometen los errores *repite una cantidad, no lo entiende* y *ensayo y error* por igual. En tercero sólo se presenta el error *no lo entiende*. En cuarto no se tiene error alguno. En el nivel pictórico, en primero se tiene principalmente el error *no lo entiende* En segundo se manifiestan los errores *repite una cantidad* y *control inadecuado de la operación* en igual proporción. En tercero sólo se comete el error *no lo entiende*. En cuarto sólo se presenta el error *control inadecuado de la operación*. En cuanto al nivel numérico, en primero se falla principalmente con el error *repite una cantidad*. En segundo se tienen los errores *repite una cantidad* y *confunde números y letras* y *control inadecuado de la operación* por igual. En tercero no se manifiestan errores. En cuarto se presenta el error *control inadecuado del algoritmo*. Con respecto al nivel verbal, en primero se comete principalmente el error *repite una cantidad*. En segundo se manifiestan los errores *repite una cantidad* y *confunde números y letras, suma unidades y decenas* y *cálculo mental* por igual. En tercero sólo se comete el error *repite una cantidad*. En cuarto no se tiene error alguno.

Como puede observarse en el primer curso el error conceptual *no lo entiende* es predominante en los niveles concreto y pictórico. En segundo, predominan los errores conceptuales *repite una cantidad*. En tercero, el error *no lo entiende* es más frecuente en los niveles concreto y pictórico. En cuarto, el error *control inadecuado de la operación* es común en el nivel pictórico y el error *control inadecuado del algoritmo* en el nivel numérico.

Con respecto a los errores conceptuales, el error *repite una cantidad* se comete en el nivel concreto por los niños de segundo; en el nivel pictórico y numérico por primero y segundo grado; en el nivel verbal por primero, segundo y tercero.

En cuanto a los errores de procedimiento, el error *control inadecuado de la operación* se manifiesta por los niños de primero en el nivel numérico, por los escolares de segundo en los niveles pictórico y numérico y por el grupo de cuarto en el nivel pictórico.

Con relación a los errores de ejecución, el error *conteo* se comete por el grupo de primero en el nivel numérico. El error *cálculo mental* se manifiesta por los alumnos de primero en el nivel numérico y verbal y por los niños de segundo en el nivel verbal.

En segundo lugar, con relación al grado de abstracción en la operación de suma con la incógnita en el primer sumando se encuentra que a nivel concreto todos los grupos manifiestan principalmente el error *transforma el problema* (50%, 71%, 81% y 75%, respectivamente). En el nivel pictórico, en primero se comete principalmente el error *repite una cantidad* (35%) y en los demás cursos se manifiesta el error *transforma el problema* (43%, 50% y 66%, respectivamente). En el nivel numérico, en primero se falla principalmente con el error *repite una cantidad* (54%); en segundo se cometen los errores *repite una cantidad* y *transforma el problema* por igual (26%); en tercero se tiene el error *no lo entiende* (40%), y en cuarto se manifiestan los errores *transforma el problema* y *control inadecuado de la operación* por igual (50%). En el nivel verbal, todos los cursos cometen principalmente el error *repite una cantidad* (65%, 47%, 54% y 75%, respectivamente).

Tabla 14.33

Porcentaje de errores entre los cursos escolares del contexto urbano en la solución de los problemas de suma.

		INCOGNITA EN EL RESULTADO				INCOGNITA EN EL PRIMER SUMANDO			
Tipo de Error	Curso	C	D	N	V	C	D	N	V
CONCEPTUALES									
Repite una cantidad	1º.	---------	14	50	57	13	35	54	65
	2º.	34	50	28	25	7	18	26	47
	3º.	---------	---------	---------	100	---------	---------	20	54
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	34	---------	75
Inventa	1º.	28	14	---------	-------	4	9	10	10
	2º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	20	5
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	10	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	9	---------	---------	---------
Transforma el problema	1º.	---------	---------	---------	-------	50	30	18	---------
	2º.	---------	---------	---------	-------	71	43	26	26
	3º.	---------	---------	---------	-------	81	50	20	18
	4º.	---------	---------	---------	-------	75	66	50	---------
No sabe hacerlo	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	5
	2º.	---------	---------	---------	-------	---------	7	---------	5
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
Palabra clave	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	5
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	18
	4º.	---------	---------	---------	------	---------	---------	---------	---------
No sabe explicarlo	1º.	14	14	---------	14	9	---------	---------	10
	2º.	---------	---------	14	-------	---------	12	7	10
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	10
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
No lo entiende	1º.	42	58	20	-------	20	17	9	---------
	2º.	33	---------	---------	-------	7	7	---------	---------
	3º.	100	100	---------	-------	9	10	40	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
Confunde números y letras	1º.	14	---------	---------	-------	---------	5	4	5
	2º.	---------	---------	28	25	7	7	14	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	--------	---------	---------	-------	---------	---------	--------	---------
PROCEDIMENTALES									
Control inadecuado de la operación	1º.	---------	---------	10	-------	---------	4	5	5
	2º.	---------	50	30	-------	---------	6	7	2
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	30	---------	---------
	4º.	---------	100	---------	-------	25	---------	50	---------
Control inadecuado del algoritmo	1º.	---------	---------	---------	14	---------	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	100	-------	---------	--------	---------	---------
Suma unidades y decenas	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	---------	25	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	--------	-------	---------	---------	---------	---------
Ensayo y error	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	33	---------	---------	-------	7	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
EJECUCION									
Conteo	1º.	---------	---------	10	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	--------	---------	---------	-------	--------	---------	---------	--------
Calculo mental	1º.	---------	---------	10	15	4	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	---------	25	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	20	---------
	4º.	---------	--------	---------	-------	---------	---------	---------	25

Por tanto, en primero predomina el error *repite una cantidad* en todos los niveles. En los demás cursos predomina el error *transforma el problema* en todos los niveles.

Con relación a los errores conceptuales, el error *repite una cantidad* se comete más en el nivel verbal por los niños de primero y segundo; en el nivel pictórico por los alumnos de primero, segundo y cuarto; en el nivel numérico por primero, segundo y tercer grado; en el nivel verbal por todos los grupos.

Con respecto a los errores de procedimiento, el error *control inadecuado de la operación* se manifiesta en todos los niveles por todos los niños de cuarto;

En cuanto a los errores de ejecución, el error *cálculo mental* se manifiesta en el nivel concreto por los de primero, en el nivel numérico por de tercero y en el nivel verbal por los de cuarto.

La Tabla 14.34 muestra el porcentaje de errores en los problemas de resta cometidos por estos por estos alumnos urbanos. Por una parte, en cuanto a los resultados con la incógnita en el final se encuentra que a nivel concreto en primero se manifiestan principalmente los errores *repite una cantidad* y *transforma el problema* por igual (33%). En segundo y tercero se comete más el error conceptual *transforma el problema* (55% y 45% respectivamente). En cuarto se presenta sólo el error *confunde números y letras* (100%). En el nivel pictórico, en primero se expresan principalmente los errores *transforma el problema* y *no lo entiende* por igual (26%). En segundo y tercero se manifiesta más el error *transforma el problema* (36%). En cuarto se comete más los errores *repite una cantidad* y *control inadecuado de la operación* por igual (50%). En el nivel numérico, todos los cursos cometen principalmente el error *transforma el problema* (30%, 40%, 100% y 100% respectivamente).

Tabla 14.34

Porcentaje de errores entre los cursos escolares del contexto urbano en la solución de los problemas de resta.

		INCOGNITA EN EL RESULTADO				INCOGNITA EN EL MINUENDO			
Tipo de Error	Curso	C	D	N	V	C	D	N	V
CONCEPTUALES									
Repite una cantidad	1º.	33	7	31	17	44	47	50	77
	2º.	---------	9	20	25	57	57	55	64
	3º.	29	22	---------	-------	22	20	11	86
	4º.	--------	50	---------	-------	40	--------	16	40
Inventa	1º.	20	13	8	8	19	20	19	5
	2º.	---------	9	10	-------	---------	---------	---------	7
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	--------	---------	--------	---------
Transforma el problema	1º.	33	27	31	67	---------	---------	---------	---------
	2º.	55	36	40	50	---------	---------	---------	---------
	3º.	43	56	100	100	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	--------	100	-------	---------	---------	--------	---------
No sabe hacerlo	1º.	---------	---------	8	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
Palabra clave	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	5
	2º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	9	7
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
No sabe explicarlo	1º.	7	7	---------	8	6	7	12	4
	2º.	---------	---------	10	-------	14	28	9	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	--------	-------	---------	---------	--------	--------
No lo entiende	1º.	--------	26	8	-------	25	26	19	---------
	2º.	11	18	---------	-------	--------	---------	---------	---------
	3º.	7	11	---------	-------	11	10	11	---------
	4º.	---------	---------	---------	------	--------	--------	---------	--------
Confunde números y letras	1º.	7	---------	--------	-------	---------	---------	---------	4
	2º.	22	---------	10	-------	---------	---------	9	---------
	3º.	7	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	100	---------	---------	-------	--------	--------	---------	---------
PROCEDIMENTALES									
Control inadecuado de la operación	1º.	--------	13	---------	-------	--------	---------	---------	---------
	2º.	12	9	10	-------	---------	---------	---------	14
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	50	---------	-------	40	60	60	20
Control inadecuado del algoritmo	1º.	---------	---------	---------	-------	6	---------	---------	5
	2º.	---------	---------	---------	-------	14	15	18	8
	3º.	---------	---------	---------	-------	55	60	67	14
	4º.	---------	---------	---------	-------	20	20	34	40
Suma unidades y decenas	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	--------
Ensayo y error	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	--------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	3º.	7	11	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	--------	---------	---------	---------
EJECUCION									
Conteo	1º.	---------	---------	7	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	--------	9	---------	-------	15	---------	---------	---------
	3º.	7	---------	---------	-------	---------	---------	11	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	--------
Calculo mental	1º.	---------	7	7	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	---------	10	---------	25	---------	---------	---------	---------
	3º.	-------	---------	---------	-------	12	10	---------	---------
	4º.	--------	---------	---------	------	---------	20	--------	---------

En el nivel verbal, todos los cursos excepto cuarto presentan principalmente el error *transforma el problema* (66%, 50% y 100% respectivamente). En cuarto no hubo error alguno.

De este modo, en primero, segundo y tercero predomina el error *transforma el problema* en todos los niveles. En cuarto se expresa más el error *transforma el problema* en el nivel numérico.

En cuanto a los errores conceptuales, el error *transforma el problema* se presenta más en los niveles concreto, pictórico, y verbal por los alumnos de primero, segundo y tercero y en el nivel numérico por todos los cursos.

Con relación a los errores de procedimiento, el error *control inadecuado de la operación* se manifiesta más por los niños de segundo en los niveles concreto y numérico, y en el nivel pictórico por primero, segundo y cuarto.

Con respecto a los errores de ejecución, el error *cálculo mental* se manifiesta más en el nivel pictórico por primero y segundo, en el nivel numérico por primero y en el nivel verbal por segundo.

Por otra, en la resta con la incógnita en el minuendo se encuentra que a nivel concreto en primero y segundo se manifiesta principalmente el error *repite una cantidad* (44% y 57%, respectivamente). En tercero se tiene más el error *control inadecuado del algoritmo* (55%). En cuarto se fallan más con los errores *control inadecuado de la operación* y *repite una cantidad* por igual 40%). En el nivel pictórico, en primero y segundo se comete principalmente el error *repite una cantidad* (47% y 57%, respectivamente). En tercero se expresa el error *control inadecuado del algoritmo* (60%). En cuarto se falla con el error *control inadecuado de la operación* (60%). En el nivel numérico, en primero y segundo se comete principalmente el error *repite una cantidad* (50% y 55%, respectivamente). En tercero se tiene el error *control inadecuado del algoritmo* (66%). En cuarto se falla con el error *control inadecuado de la operación* (60%). En el nivel verbal, todos los cursos cometen principalmente el error *repite una cantidad* (77%, 64%, 86% y 40%, respectivamente).

Por tanto, en primero y segundo predomina el error *repite una cantidad* en todos los niveles. En tercero es más común el error *control inadecuado del algoritmo* en todos los niveles excepto a nivel verbal donde domina el error *repite una cantidad*. En cuarto es frecuente el error *repite una cantidad* en los niveles concreto y verbal.

En cuanto a los errores conceptuales, el error *repite una cantidad* se comete más en los niveles concreto, numérico y verbal por todos los cursos; en el nivel pictórico por los alumnos de primero, segundo y tercero.

Con respecto a los errores de procedimiento, el error *control inadecuado del algoritmo* se manifiesta por todos los cursos en los niveles concreto y verbal, y por los niños de primero, segundo y tercero en los niveles pictórico y numérico

Con relación a los errores de ejecución, el error *cálculo mental* se encuentra más en el nivel concreto por tercero y en el nivel pictórico por tercero y cuarto.

14.4.2. *Errores de los alumnos rurales*

La Tabla 14.33 muestra el porcentaje de estrategias correctas utilizadas por los cursos del contexto rural en los problemas de suma. Por una parte, en estos problemas con la incógnita en el resultado se encuentra que a nivel concreto los alumnos de primero, segundo y tercero manifiestan principalmente el error *no lo entiende* (55%, 67% y 57%, respectivamente). En el nivel pictórico, los escolares de primero, segundo y tercero cometen principalmente el error *no lo entiende* (53%, 33% y 71% respectivamente).

Tabla 14.35

Porcentaje de errores entre los cursos escolares del contexto rural en la solución de los problemas de suma.

		INCOGNITA EN EL RESULTADO				INCOGNITA EN EL PRIMER SUMANDO			
Tipo de Error	Curso	C	D	N	V	C	D	N	V
CONCEPTUALES									
Repite una cantidad	1º.	18	31	67	50	32	28	40	67
	2º.	--------	33	27	33	24	26	47	41
	3º.	29	29	--------	25	7	15	24	55
	4º.	--------	--------	--------	-------	33	--------	--------	67
Inventa	1º.	--------	8	8	13	11	11	5	6
	2º.	33	--------	2	33	5	11	18	18
	3º.	--------	--------	50	-------	--------	8	--------	9
	4º.	--------	--------	--------	-------	--------	--------	34	33
Transforma el problema	1º.	--------	--------	--------	-------	16	5	35	--------
	2º.	--------	--------	--------	-------	52	21	24	23
	3º.	--------	--------	--------	-------	47	31	46	27
	4º.	--------	--------	--------	-------	67	50	33	--------
No sabe hacerlo	1º.	9	8	8	12	5	--------	5	--------
	2º.	--------	--------	--------	-------	--------	--------	6	--------
	3º.	14	--------	--------	-------	13	7	--------	--------
	4º.	--------	--------	--------	-------	--------	--------	--------	--------
Palabra clave	1º.	--------	--------	--------	------	--------	--------	--------	6
	2º.	--------	--------	--------	------	--------	--------	--------	12
	3º.	--------	--------	--------	50	--------	--------	--------	--------
	4º.	--------	--------	--------	-------	--------	--------	--------	--------
No sabe explicarlo	1º.	--------	--------	--------	-------	--------	--------	--------	6
	2º.	--------	--------	--------	-------	--------	--------	--------	--------
	3º.	--------	--------	--------	-------	--------	--------	8	--------
	4º.	--------	--------	--------	-------	--------	--------	--------	--------
No lo entiende	1º.	55	53	8	-------	36	50	15	5
	2º.	67	33	13	-------	14	21	6	--------
	3º.	57	71	50	-------	27	31	15	--------
	4º.	--------	--------	--------	-------	--------	-------	--------	--------
Confunde números y letras	1º.	--------	--------	--------	-------	--------	--------	--------	--------
	2º.	--------	--------	--------	-------	--------	5	--------	--------
	3º.	--------	--------	--------	-------	--------	--------	--------	--------
	4º.	--------	--------	--------	-------	--------	--------	33	--------
PROCEDIMENTALES									
Control inadecuado de la operación	1º.	--------	--------	--------	-------	--------	6	--------	5
	2º.	--------	--------	--------	-------	--------	5	--------	--------
	3º.	--------	--------	--------	-------	--------	8	--------	9
	4º.	--------	--------	--------	-------	--------	50	--------	--------
Control inadecuado del algoritmo	1º.	--------	--------	--------	-------	--------	--------	5.0	--------
	2º.	--------	--------	7	-------	--------	--------	--------	--------
	3º.	--------	--------	--------	-------	--------	--------	--------	--------
	4º.	--------	--------	--------	-------	--------	--------	--------	--------
Ensayo y error	1º.	--------	--------	--------	-------	--------	--------	--------	--------
	2º.	--------	--------	--------	------	--------	--------	--------	--------
	3º.	--------	--------	--------	25	6.66	--------	--------	--------
	4º.	--------	--------	--------	-------	--------	--------	--------	--------
EJECUCION									
Conteo	1º.	9	--------	9	12	--------	--------	--------	5
	2º.	--------	--------	--------	-------	--------	--------	--------	--------
	3º.	--------	--------	--------	-------	--------	--------	--------	--------
	4º.	--------	--------	--------	-------	--------	--------	--------	--------
Calculo mental	1º.	9	--------	--------	13	--------	--------	--------	--------
	2º.	--------	33.33	34	34	5	11	--------	6
	3º.	--------	--------	.--------	-------	--------	--------	7	--------
	4º.	--------	--------	--------	-------	--------	--------	--------	--------

En el nivel numérico, los niños de primero fallan principalmente con el error *repite una cantidad* (66%). En segundo se tiene más el error *cálculo mental* (33%). En tercero se manifiestan los errores *inventa* y *no lo entiende* por igual (50%). En el nivel verbal, en primero se comete principalmente el error *repite una cantidad* (50%). En segundo se expresa el error *cálculo mental* (34%).En tercero se falla más con el error *palabra clave* (50%). En cuarto no se cometen errores.

Entonces, en primero predomina el error *no lo entiende* en los niveles concreto y pictórico. En segundo se cometen más el error *no lo entiende* en los niveles concreto, pictórico y numérico.

En cuanto a los errores conceptuales, el error *repite una cantidad* se presenta más en el nivel concreto por los alumnos de primero y tercero; en el nivel pictórico por los niños de primero, segundo y tercero; en el nivel numérico por los escolares de primero y segundo y en el nivel verbal por primero, segundo y tercer grado.

Con respecto a los errores de procedimiento, el error *control inadecuado del algoritmo* sólo se manifiesta a nivel numérico por los alumnos de segundo.

Con relación a los errores de ejecución, el error *conteo* se comete en algunas ocasiones.

Por otra, en la suma con la incógnita en el primer sumando se encuentra que a nivel concreto los alumnos de primero manifiestan más el error *no lo entiende* (36%), los escolares de segundo, tercero, y cuarto cometen principalmente el error *transforma el problema* (52%, 47% y 67%, respectivamente). En el nivel pictórico, los alumnos de primero tienen más el error *no lo entiende* (50%). Los niños de segundo manifiestan más el error *repite una cantidad* (26%). Los alumnos de tercero tienen por igual los errores *transforma el problema* y *no lo entiende* en la misma proporción (31%). En cuarto se tienen los errores *transforma el problema* y *control inadecuado de la operación* en la misma proporción (50%). En el nivel numérico, los alumnos de primero y segundo fallan principalmente con el error *repite una cantidad* (40% y 47%, respectivamente). Los niños de tercero tienen más el error *transforma el problema* (46%). En cuarto se manifiesta más el error *inventa* (34%). En el nivel verbal, todos los cursos cometen principalmente el error *repite una cantidad* (67%, 41%, 55% y 67%, respectivamente).

Entonces, en el primer curso predomina el error *repite una cantidad* en los niveles pictórico, numérico y verbal. En segundo se comete el error *transforma el problema* en el nivel concreto. En tercero es más frecuente el error *transforma el problema* en los niveles concreto, pictórico y verbal. En cuarto predomina el error *transforma el problema* en los niveles concreto, pictórico y numérico.

En cuanto a los errores conceptuales, el error *repite una cantidad* se comete más en el nivel concreto y verbal por todos los cursos; en los niveles pictórico y numérico por los niños de primero, segundo y tercero.

Con respecto a los errores de procedimiento, el error *control inadecuado de la operación* se manifiesta por todos los cursos en el nivel pictórico, por los escolares de primero y tercero en el nivel verbal.

En cuanto a los errores de ejecución, el error *conteo* se comete más por primer curso en el nivel verbal.

La Tabla 14.36 muestra el porcentaje de errores en los problemas de resta por estos alumnos. En primer lugar, comenzando por el nivel de abstracción en la resta con la incógnita en el resultado se encuentra que a nivel concreto los alumnos de primero y segundo manifiestan principalmente el error *repite una cantidad* (36% y 46%, respectivamente). Los niños de tercero cometen más el error *no lo entiende* (34%). En el nivel pictórico, los alumnos de primero y tercero manifiestan más el error *no lo entiende* (44% y 50%, respectivamente), mientras que los niños de segundo presentan más el error *transforma el*

Tabla 14.36

Porcentaje de errores entre los cursos escolares del contexto rural en la solución de los problemas de resta.

		INCOGNITA EN EL RESULTADO				INCOGNITA EN EL MINUENDO			
Tipo de Error	Curso	C	D	N	V	C	D	N	V
CONCEPTUALES									
Repite una cantidad	1º.	14	12	44	27	44	33	47	47
	2º.	7	6	27	66	33	33	44	59
	3º.	---------	---------	---------	-------	33	25	18	50
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	25	50
Inventa	1º.	---------	13	6	9	6	17	21	11
	2º.	13	6	---------	17	---------	7	6	6
	3º.	---------	---------	---------	-------	8	8	---------	33
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
Transforma el problema	1º.	36	6	25	18	---------	---------	---------	---------
	2º.	47	35	40	17	---------	---------	---------	---------
	3º.	25	37	60	100	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
No sabe hacerlo	1º.	7	6	---------	-------	6	---------	5	---------
	2º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	9	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
Palabra clave	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	11
	2º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	12
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	50
No sabe explicarlo	1º.	7	13	---------	-------	---------	6	---------	11
	2º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
No lo entiende	1º.	29	44	13	-------	44	39	21	---------
	2º.	13	24	13	-------	58	53	50	---------
	3º.	38	50	40	-------	50	50	45	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
Confunde números y letras	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	7	12	6	-------	---------	---------	---------	---------
	3º.	37	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
PROCEDIMENTALES									
Control inadecuado de la operación	1º.	7	---------	---------	9	---------	---------	---------	10
	2º.	---------	6	7	-------	---------	---------	---------	12
	3º.	---------	13	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	33	25	---------	---------
Control inadecuado del algoritmo	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	6	---------
	2º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	11
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	9	17
	4º.	---------	---------	---------	------	67	75	75	---------
Suma unidades y decenas	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	2º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
Ensayo y error	1º.	---------	---------	---------	-------	---------	5	---------	---------
	2º.	7	6	---------	-------	9	7	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	16	9	---------
	4º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
EJECUCION									
Conteo	1º.	---------	6	12	9	---------	---------	---------	5
	2º.	6	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	---------	---------	---------	---------
	4º.	---------	---------	---------	------	---------	---------	---------	---------
Calculo mental	1º.	---------	---------	---------	28	---------	---------	---------	5
	2º.	---------	5	7	-------	---------	---------	---------	---------
	3º.	---------	---------	---------	-------	9	---------	10	---------
	4º.	---------	---------	---------	------	---------	---------	---------	---------

problema (35%). En el nivel numérico, los alumnos de primero cometen el error *repite una cantidad* (44%), mientras que los escolares de segundo y tercero presentan más el error *transforma el problema* (40% y 60%, respectivamente). En el nivel verbal, los alumnos de primero cometen el error *cálculo mental* (28%), los alumnos de segundo cometen más el error *repite una cantidad* (66%), y en tercero se falla principalmente con el error *transforma el problema* (100%). En cuarto no hubo error alguno (0%).

Por tanto, en primero predomina el error *repite una cantidad* en todos los niveles. En segundo se comete más el error *transforma el problema* en los niveles pictórico y numérico En tercero se expresa más el error *transforma el problema* en los niveles numérico y verbal.

En cuanto a los errores conceptuales, el error *repite una cantidad* se comete en todos los niveles por primero y segundo.

En relación con los errores de procedimiento, el error *control inadecuado de la operación* se manifiesta más en el nivel concreto por primero, en el nivel pictórico por los alumnos de segundo y tercero, en el nivel numérico por los escolares de segundo y en el nivel verbal por los niños de primero.

Con respecto a los errores de ejecución, el error *conteo* se comete en el nivel concreto por el grupo de segundo y en los demás niveles por los niños de primero. El error *cálculo mental* se manifiesta en los niveles pictórico y numérico por los alumnos de segundo y en el nivel verbal por el grupo de primero.

En segundo lugar, en los problemas de resta con la incógnita en el minuendo se encuentra que a nivel concreto los alumnos de primero, segundo y tercero manifiestan principalmente el error *no lo entiende* (44%, 58% y 50%, respectivamente). Los escolares de cuarto fallan con el error *control inadecuado del algoritmo* (67%). En el nivel pictórico, los alumnos de primero, segundo y tercero tienen principalmente el error *no lo entiende* (39%, 53% y 50% respectivamente). Los alumnos de cuarto manifiestan el error *control inadecuado* *del algoritmo* (75%). En el nivel numérico, los alumnos de primero fallan principalmente con el error *repite una cantidad* (47%). Los alumnos de segundo y tercero cometen el error *no lo entiende* (53% y 50% respectivamente). Los alumnos de cuarto manifiestan el error *control inadecuado del algoritmo* (75%). En el nivel verbal todos los cursos cometen principalmente el error *repite una cantidad* (47%, 58%, 50% y 50% respectivamente).

Entonces, en primer curso predomina el error *no lo entiende* en los niveles concreto y pictórico En segundo y tercero predomina el error *no lo entiende* en todos los niveles excepto en el nivel verbal. En cuarto es frecuente el error *control inadecuado del algoritmo* en los niveles concreto, pictórico y numérico.

En cuanto a los errores conceptuales, el error *repite una cantidad* se comete más en los niveles concreto y pictórico por los niños de primero, segundo y tercero y en los niveles numérico y verbal por todos los cursos.

Con respecto a los errores de procedimiento, el error *control inadecuado de la operación* se manifiesta en los niveles concreto y numérico por los niños de cuarto y en el nivel verbal por los niños de primero y segundo.

Con relación a los errores de ejecución, el error *conteo* se comete sólo en el nivel verbal por primero.

14.4.3. *Diferencias de errores entre los contextos.*

A continuación, se presentan los datos de los errores respecto al tipo de problema según el contexto independiente del curso, la operación y la incógnita. La Figura 14.45 muestra los errores *conceptuales* cometidos por los niños de ambos contextos.

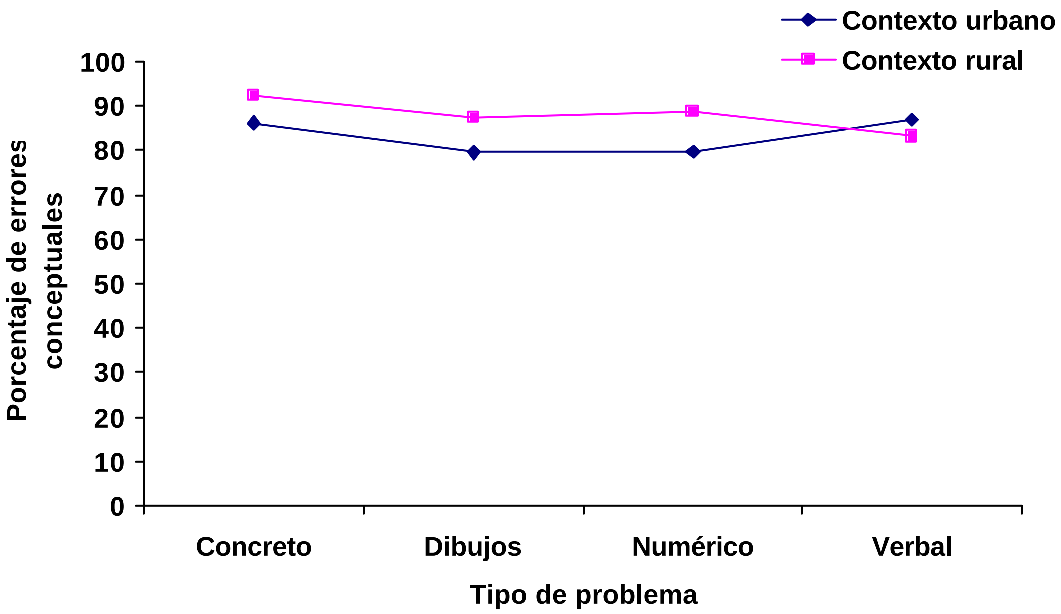

Figura 14.45: Proporción de errores conceptuales según el contexto

Tal como puede observarse, los niños rurales cometieron mayor número de errores *conceptuales* con respecto a sus iguales urbanos en todos los problemas, excepto en los problemas verbales.

A continuación realizamos un ANOVA de un factor con el curso escolar como la variable independiente y los errores conceptuales como la variable dependiente mediante el programa SPSS 11.0 con los datos de los alumnos rurales. Este análisis indica diferencias significativas entre los cursos escolares rurales con relación a todos los problemas de suma con la incógnita en el resultado, excepto en el problema verbal (concreto $F_{3, 92} = 5.45$, $p < .05$; dibujos $F_{3, 92} = 8.07$, $p < .01$; numérico $F_{3, 92} = 8.09$, $p<.01$), además, con cada uno de los problemas de suma con la incógnita en el primer sumando, (concreto $F_{3, 92} = 15.02$, $p < .01$; dibujos $F_{3, 92} = 11.92$, $p <. 01$; numérico $F_{3, 92} = 12.53$, $p < .01$, y verbal $F_{3, 92} = 10.79$, $p < .01$), también, con todos los problemas de resta con la incógnita en el resultado, (concreto $F_{3, 92} = 8.37$, $p < .01$; dibujos $F_{3, 92} = 11.36$, $p < .01$; numérico $F_{3, 92} = 10.87$, $p <.01$, y verbal $F_{3, 92} = 2.72$, $p < .05$) y, por último, con cada uno de los problemas de resta con la incógnita en el minuendo (concreto $F_{3, 92} = 10.14$, $p < .01$; dibujos $F_{3, 92} = 12.66$, $p < .01$; numérico $F_{3, 92} = 14.48$, $p < .01$ y verbal $F_{3, 92} = 8.58$, $p < .01$).

El estudio de comparaciones múltiples de Tuckey revela que en el problema concreto de suma con la incógnita en el resultado se encuentran diferencias significativas de los escolares de primero con relación a segundo y cuarto curso ($p < .05$), los alumnos de tercero tienen diferencias con respecto a los de cuarto ($p < .05$).

En el problema dibujos de suma con la incógnita en el resultado existen diferencias significativas de los escolares de primero con relación a segundo y cuarto curso ($p < .05$).

En el problema numérico de suma con la incógnita en el resultado se tienen diferencias de los escolares de primero y segundo con relación a tercero y cuarto ($p < .05$).

En el problema concreto de suma con la incógnita en el primero sumando se encuentran diferencias significativas de los escolares de primero, segundo y tercero con relación a cuarto curso ($p < .05$).

En el problema dibujos de suma con la incógnita en el primero sumando existen diferencias significativas de los escolares de primero, segundo y tercero con relación a cuarto curso ($p < .05$).

En el problema numérico de suma con la incógnita en el primero sumando existen diferencias significativas de los escolares de primero con relación a tercero y cuarto curso ($p < .05$). Los alumnos de segundo y tercero difieren con respecto a los de cuarto ($p < .05$).

En el problema verbal de suma con la incógnita en el primero sumando se encuentran diferencias de los escolares de primero con relación a tercero y cuarto curso ($p < .05$). Los alumnos de segundo difieren con respecto a los de cuarto curso ($p < .05$).

En el problema concreto de resta con la incógnita en el resultado se tienen diferencias de los escolares de primero, segundo y tercero con relación a cuarto ($p<.05$).

En el problema dibujos de resta con la incógnita en el resultado existen diferencias significativas de los escolares de primero con relación a tercero y cuarto curso ($p<.05$). Los alumnos de segundo difieren con respecto a los de cuarto ($p < .05$).

En el problema numérico de resta con la incógnita en el resultado se encuentran diferencias de los escolares de primero y segundo con relación a tercero y cuarto curso ($p < .05$).

En el problema verbal de resta con la incógnita en el resultado existen diferencias significativas de los escolares de primero y segundo con relación a tercero y cuarto curso ($p < .05$).

En el problema concreto de resta con la incógnita en el minuendo se encuentran diferencias de los escolares de primero, segundo y tercero con relación a cuarto curso ($p<.05$).

En el problema dibujos de resta con la incógnita en el minuendo existen diferencias de los escolares de primero, segundo y tercero con relación a cuarto ($p<.05$).

En el problema numérico de resta con la incógnita en el minuendo existen diferencias significativas de los escolares de primero y segundo con relación a tercero y cuarto curso ($p < .05$).

En el problema verbal de resta con la incógnita en el minuendo se encuentran diferencias significativas de los escolares de primero y segundo con relación a tercero y cuarto curso ($p < .05$).

También realizamos un ANOVA de un factor considerando el curso escolar como la variable independiente y los errores conceptuales como la variable dependiente mediante el programa SPSS 11.0 con los datos de los alumnos urbanos. El objetivo es analizar si existen diferencias significativas entre los cursos con respecto a los errores conceptuales cometidos en los problemas. Este análisis encuentra diferencias significativas entre los cursos urbanos con relación a todos los problemas de suma con la incógnita en el resultado, excepto con el problema verbal (concreto $F_{3, 92} = 4.78$, $p < .05$; dibujos $F_{3, 92} = 5.71$, $p = .01$; numérico $F_{3, 92} = 5.44$, $p<.05$), además, con cada uno de los problemas de suma con la incógnita en el primer sumando, (concreto $F_{3, 92} = 12.20$, $p < .01$; dibujos $F_{3, 92} = 18.24$, $p < .01$; numérico $F_{3, 92} = 25.45$, $p < .01$, y verbal $F_{3, 92} = 12.35$, $p < .01$), también, con todos los problemas de resta con la incógnita en el resultado, (concreto $F_{3, 92} = 7.84$, $p< .01$; dibujos $F_{3, 92} = 6.20$, $p = .01$; numérico $F_{3, 92} = 5.05$, $p < .05$, y verbal $F_{3, 92} = 10.35$, $p < .01$) y, por último, con cada uno de los problemas de resta con la incógnita en el minuendo (concreto $F_{3, 92} = 9.20$, $p < .01$; dibujos $F_{3, 92} = 12.62$, $p < .01$; numérico $F_{3, 92} = 13.56$, $p < .01$ y verbal $F_{3, 92} = 16.18$, $p < .01$).

El estudio de comparaciones múltiples de Tuckey revela que en el problema concreto de suma con la incógnita en el resultado existen diferencias significativas de los escolares de primero con relación a tercero y cuarto curso ($p < .05$).

En el problema dibujos de suma con la incógnita en el resultado existen diferencias de los escolares de primero con relación a segundo, tercero y cuarto curso ($p < .05$).

En el problema numérico de suma con la incógnita en el resultado se encuentran diferencias significativas de los alumnos de primero con relación a tercero y cuarto ($p < .05$).

En el problema concreto de suma con la incógnita en el primer sumando se encuentran diferencias de los niños de primero con relación a segundo, tercero y cuarto curso ($p < .05$). Los alumnos de segundo y tercero difieren con respecto a cuarto curso ($p < .05$).

En el problema dibujos de suma con la incógnita en el primer sumando existen diferencias de los escolares de primero y segundo con relación a tercero y cuarto curso ($p < .05$).

En el problema numérico de suma con la incógnita en el primer sumando existen diferencias de los escolares de primero con relación a segundo, tercero y cuarto curso ($p < .05$). Los alumnos de segundo difieren con respecto a tercero y cuarto curso ($p < .05$).

En el problema verbal de suma con la incógnita en el primer sumando se encuentran diferencias significativas de los escolares de primero con relación a tercero y cuarto curso ($p < .05$). Los alumnos de segundo y tercero difieren con respecto a cuarto curso ($p < .05$).

En el problema concreto de resta con la incógnita al final existen diferencias significativas de los escolares de primero y tercero con relación a cuarto curso ($p<.05$).

En el problema dibujos de resta con la incógnita en el resultado existen diferencias significativas de los escolares de primero con relación a cuarto curso ($p < .05$).

En el problema numérico de resta con la incógnita en el resultado se encuentran diferencias significativas de los escolares de primero y segundo con relación a cuarto curso ($p < .05$).

En el problema verbal de resta con la incógnita en el resultado existen diferencias significativas de los escolares de primero con relación a segundo, tercero y cuarto curso ($p< .05$).

En el problema concreto de resta con la incógnita en el minuendo se encuentran diferencias significativas de los escolares de primero con relación a segundo, tercero y cuarto curso ($p < .05$).

En el problema dibujos de resta con la incógnita en el minuendo existen diferencias significativas de los escolares de primero con relación a segundo, tercero y cuarto curso ($p < .05$).

En el problema numérico de resta con la incógnita en el minuendo existen diferencias significativas de los escolares de primero con relación a tercero y cuarto curso ($p < .05$). Los alumnos de segundo difirieron significativamente con respecto a los de cuarto curso ($p < .05$).

En el problema verbal de resta con la incógnita en el minuendo se encuentran diferencias significativas de los escolares de primero con relación a segundo, tercero y cuarto curso ($p < .05$). Los alumnos de segundo difieren con respecto a los de cuarto curso ($p < .05$).

La Figura 14.46 muestra los errores *procedimentales* manifestados por los niños de ambos contextos. Los niños urbanos cometen más los errores *procedimentales* que sus iguales del contexto rural en todos los problemas.

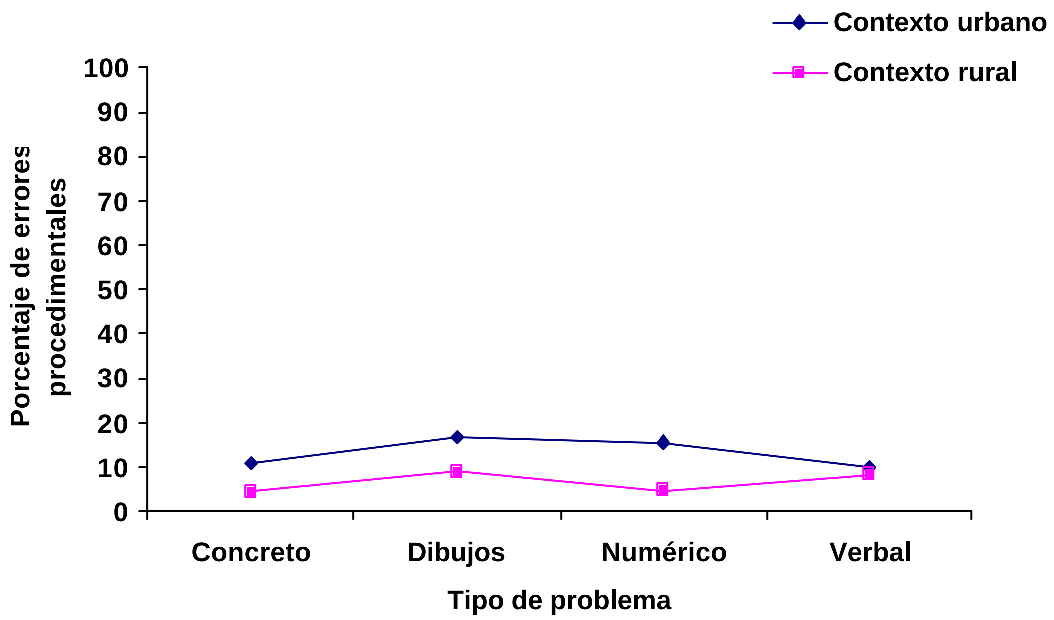

Figura 14.46 Proporción de errores procedimentales según el contexto

En cuanto a los errores procedimentales de los alumnos rurales realizamos el ANOVA de un factor considerando el curso escolar como la variable independiente y los errores procedimentales como la variable dependiente mediante el programa SPSS 11.0. Este análisis sólo encuentra diferencias significativas entre los cursos escolares con relación al problema dibujos de resta con la incógnita en el resultado ($F_{3, 92} = 19.07$, $p < .01$).

El estudio de comparaciones múltiples de Tuckey encuentra diferencias significativas de los escolares de primero con relación a segundo, tercero y cuarto curso ($p < .05$).

Asimismo, realizamos un ANOVA de un factor similar al anterior con los datos de los alumnos urbanos. Este análisis encuentra diferencias significativas entre los cursos en el problema dibujos de resta con la incógnita en el minuendo ($F_{3, 92} = 3.30$, $p < .05$) y el problema numérico de resta con la incógnita al inicio ($F_{3, 92} = 2.82$, $p < .05$).

Estas diferencias se analizan entre los cursos siguiendo el estudio de comparaciones múltiples de Tuckey. En los dos problemas mencionados se encuentran las mismas diferencias de los escolares de primero con relación a tercero ($p < .05$).

La Figura 14.47 muestra los errores *ejecución* cometidos por los alumnos de ambos contextos.

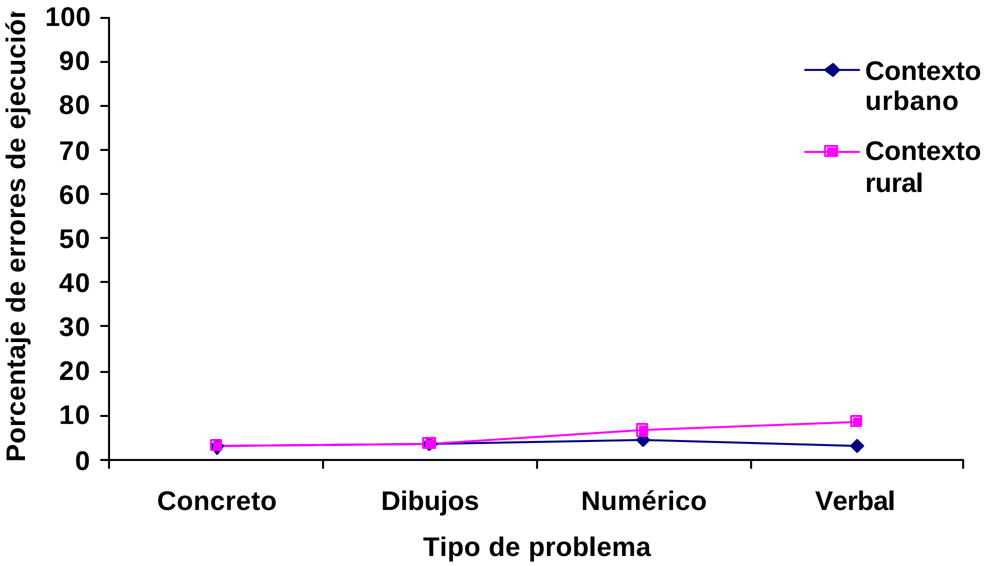

Figura 14.47. Proporción de errores ejecución según el contexto

Los niños rurales cometen los errores *ejecución* con mayor proporción que sus iguales del contexto urbano.

En cuanto a los errores de ejecución el ANOVA sólo encuentra diferencias significativas entre los cursos escolares con relación al problema numérico de suma con la incógnita en el resultado ($F_{3, 92} = 3.69$, $p < .05$) y al problema verbal de resta con la incógnita en el resultado ($F_{3, 92} = 4.60$, $p < .05$). El estudio de comparaciones múltiples de Tuckey en cuanto al primer problema indica que estas diferencias existen entre los escolares de segundo con relación a tercero y cuarto ($p < .05$). En cuanto al segundo problema se encuentran diferencias significativas de los escolares de primero con relación a segundo, tercero y cuarto ($p<.05$).

También realizamos un ANOVA de un factor con los resultados de los alumnos urbanos. Esta prueba no encontró diferencias significativas entre los cursos.

En resumen, los alumnos del contexto rural cometen más errores *conceptuales* y *ejecución* en casi todos los tipos de problemas con respecto a sus iguales del contexto urbano, en cambio, estos alumnos tienen más errores *procedimentales* que los niños rurales.

Con relación al cuarto objetivo de la investigación, el análisis de los errores se discute en tres aspectos: 1) el patrón evolutivo, 2) la relación de los errores con el tipo de problema y 3) las diferencias entre los contextos sobre los errores.

En cuanto al primero, los errores son de tipo conceptual en todos los cursos, luego procedimentales y, al final, ocurren los errores de ejecución. Los dos últimos errores son más frecuentes en los cursos superiores. Esto explica que las dificultades de comprensión sean de carácter conceptual más que de cálculo. Gran parte de esta problemática está dada por la enseñanza tradicional que establece la prioridad en los procedimientos y las habilidades de cálculo sobre la comprensión de la solución en los problemas de suma y resta.

Los errores conceptuales se manifiestan con un patrón evolutivo en la mayoría de los problemas en los primeros cursos. Es decir, no existe una diferencia específica con relación a un determinado grado de abstracción. Los errores procedimentales son más comunes en los problemas con dibujos y los errores de ejecución aparecen más en los niveles superiores de abstracción.

Con respecto al segundo, existen patrones de errores específicos según la operación y el tipo de incógnita. El error transformar el problema sucede en la suma y la resta con la incógnita al final. Es decir, un problema de resta se convierte en uno de suma y un problema con la incógnita al inicio desconocido se resuelve como una suma. Entonces, una explicación puede ser que los niños responden bajo un predominio del conocimiento del algoritmo como el único esquema para solucionar el problema, mientras que la memoria usa las palabras claves cuando la incógnita esta al inicio.

En relación al tercero, los errores conceptuales y procedimentales ocurren más en los niños rurales que sus iguales urbanos en el nivel pictórico.

Estos resultados son consistentes con los encontrados en otros estudios (Cummins et al., 1988; Bermejo y otros, 2002) en el sentido de que los errores conceptuales se deben a una interpretación errónea del conjunto de inicio. Además, los errores son comunes en todas las categorías de problemas independiente del lugar de la incógnita y el tipo de operación. Esto confirma los resultados hallados por otros investigadores (Bermejo y Rodríguez, 1988, 1990a, 1990b; Bermejo y otros, 2002; Carpenter y Moser, 1981, 1983; Cummins, 1991; De Corte y Verschaffel, 1985).

Conclusiones

Las conclusiones en esta tesis hacen referencia a los descubrimientos relevantes, las contribuciones teóricas, las implicaciones educativas y la propuesta de nuevas líneas de investigación. En cada uno de estos aspectos se presentan las conclusiones pertinentes como se verá a continuación.

Los descubrimientos relevantes

En el estudio realizado se encuentran varios hallazgos relacionados con el rendimiento. Los alumnos urbanos y rurales tienen diferencias que no son significativas, por lo cual el contexto sociocultural no influye en su rendimiento. En los alumnos de ambos contextos se aprecia un desarrollo evolutivo de acuerdo al curso escolar. Así mismo, tales grupos obtienen mejor rendimiento en la suma en comparación con la resta tanto con la incógnita al final como al inicio.

Con respecto al grado de abstracción, los problemas en los niveles inferiores (concreto y pictórico) se realizan de manera eficaz por los alumnos de primero y segundo curso, mientras que los problemas numérico y verbal se resuelven de manera correctamente por los niños de tercero y cuarto curso urbano.

Los problemas fáciles se solucionan con los niveles superiores de abstracción, mientras que los problemas difíciles se resuelven con los niveles inferiores por los cursos básicos y los niveles superiores por los cursos avanzados. Los escolares urbanos son más concretos y pictóricos que sus iguales rurales, mientras que estos alumnos son más verbales que aquellos. En cuanto a las estrategias que emplean los participantes puede decirse que en ambos contextos se manifiestan de manera específica. Los alumnos rurales recurren a las estrategias de modelado en los cursos superiores mientras que los alumnos urbanos hacen esto en los primeros cursos. Además, los alumnos rurales usan más las estrategias de conteo que sus iguales urbanos, mientras que estos niños manifiestan mayormente las estrategias hechos numéricos que los otros alumnos. Ambos casos suceden en todos los cursos escolares. Asimismo, las estrategias son específicas de acuerdo con el tipo de operación y el lugar de la incógnita.

Además, encontramos una contradicción entre el predominio del nivel concreto en el rendimiento de los alumnos urbanos con el dominio principal de las estrategias modelado directo por los alumnos rurales. Esto revela un proceso contradictorio entre la competencia conceptual y la práctica específica según el contexto.

Sobre los errores cometidos por los alumnos cabe mencionar que los errores conceptuales son los más frecuentes y ocurren principalmente entre los alumnos de los primeros cursos.

Las contribuciones teóricas

Por una parte, la investigación confirma los hallazgos encontrados en otros estudios dentro del marco teórico constructivista. Pueden mencionarse los siguientes: una consistencia en torno al grado de dificultad de los problemas de Cambio; la tendencia evolutiva en el rendimiento de los alumnos; la secuencia de abstracción de lo concreto a lo abstracto; el empleo específico y variado de las estrategias en la solución de los problemas, y la predominancia de los errores conceptuales.

Por otra parte, a partir de este trabajo se proponen tres planteamientos teóricos fundamentales. Primero, existe una fase de transición entre la suma y la resta en los niños de segundo curso que se manifiesta en los problemas verbales como la situación cognitiva de expresión de su conocimiento aritmético informal. A esto se agrega el hecho de que la mayoría de las estrategias se manifiesta en los niños del primer curso. Sin embargo, el rendimiento eficaz sólo se alcanza hasta el cuarto curso escolar, lo cual indica un período de dificultades desde el segundo hasta el cuarto curso. Segundo, las diferencias entre los alumnos de los contextos urbano y rural en relación al empleo de estrategias específicas responden a una práctica cultural específica. Las competencias manipulativas y las secuencias de conteo se desarrollan en el medio rural debido, posiblemente, a las interacciones sociales, la regulación social, las situaciones cognitivas cotidianas y las negociaciones culturales. Lo mismo puede decirse para las competencias memorísticas de los alumnos urbanos. Tercero, los errores conceptuales pueden ser generados por los aspectos relacionales entre la suma y la resta.

Las implicaciones educativas

Una aportación central del estudio se orienta al cuestionamiento de la enseñanza tradicional de la suma y la resta en México. Con esta investigación queda en evidencia el desfase de la planificación de la enseñanza formal y el desarrollo del conocimiento matemático infantil. Esto se explica en el sentido de que los alumnos obtienen mejor rendimiento en los problemas verbales que en el algoritmo. El aprendizaje mecánico de los alumnos se mostró en la solución de los problemas. Así mismo, el diseño de los libros de texto sólo estimula el aprendizaje memorístico y el nivel concreto del grado de abstracción. Estos textos podrían modificarse por una metodología que modele la comprensión de los problemas de suma y resta. Resulta prudente proponer el aprendizaje de estas operaciones a partir de tener en cuenta la secuencia del grado de abstracción y la estructura semántica de los problemas en la clase de matemáticas. Finalmente, se recomienda implementar el marco teórico-metodológico constructivista en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la aritmética.

Futuras líneas de investigación

Una réplica de este estudio a nivel preescolar permitiría precisar el desarrollo de las estrategias en las etapas más tempranas de la infancia. Esta investigación es recomendable que se lleve a cabo con otras muestras de niños para encontrar el grado de dificultad de los tipos de problemas presentados. El diseño experimental también se puede formular para los problemas de Combinación, Comparación e Igualación. El grado de abstracción se podría investigar de manera más simple con menos factores. Además, elaborar la propuesta de un programa de intervención sobre la suma y resta que tome en cuenta el grado de abstracción en las clases de matemáticas mediante un diseño pretest-postest con un grupo control y un grupo experimental contribuiría a la implementación de nuevos programas de intervención educativa. En cuanto al contexto es apropiado abordar este planteamiento en el nivel microcultural a través de las interacciones sociales, el clima social y las negociaciones en el aula de matemáticas. Por último, resulta relevante que los alumnos construyan sus propios problemas de suma y resta en cada uno de los niveles de abstracción.

Bibliografía

Abreu, G. de (1993). *The relationship between home and school mathematics in a farming community in rural Brazil*. Unpublished doctoral dissertation. University of Cambridge, Cambridge.

Abreu, G. de (1995). Understanding how children experience the relationship between home and school mathematics. *Mind, Culture and Activity, 2*, 119-142.

Abreu, G. de (1998). The mathematics learning in sociocultural contexts: the mediating role of social valorisation. *Learning and Instruction, 8,* 567-572.

Anand, P. G. y Ross, S. M. (1987). Using computer-assisted instruction to personaliza arithmetic materials for elementary school children. *Journal of Educational Psychology*, *79*, 72-78.

Anghileri, J. (1995). *Children´s mathematical thinking in the primary years*. London: Cassell.

Ashcraft, M. (1982). The development of mental arithmetic: A chronometric approach. *Developmental Review*, *2*, 213-236.

Ball, D. L. (1992). Magical hopes: Manipulatives and the reform of math education. *American Educator*, *16*, 14-18.

Baranes, R., Perry, M. y Stigler, J. W. (1989). Activation of a real-world knowledge in the solution of word problems. *Cognition and Instruction*, *6*, 287-318.

Barnett, C. S., y Sather, S. (1992). *Using case discussions to promote changes in beliefs among mathematics teachers*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.

Baroody, A. (1984). Chidlren´s difficulties in subtraction: Some causes and questions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*, 203-213.

Baroody, A. (1984b). More precisely defining and measuring the order-irrelevance principle. *Journal of Experimental Child Psychology, 38,* 33-41.

Baroody, A. J. (1985). Mastery of basic number combinatios: Internalization of relation-ships or facts?. *Journal of Research in Mathematics Education, 16,* 83-89.

Baroody, A. J. (1987). The development of counting strategy for single-digit addition. *Journal for Research in Mathematics Education, 2,* 141-157.

Baroody, A. J. (1999). Children´s relational knowledge of addition and subtraction. *Cognition and Instruction, 17,* 137-175.

Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. En A. J. Baroody y A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise. Studies in mathematical thinking and learning*. (pp. 1-33). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Baroody, A. J. y Coslick, R. T. (1998). *Fostering children´s mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Baroody, A. J. y Dowker, A. (Eds.) . (2003). *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise. Studies in mathematical thinking and learning*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Baroody, A. J. y Ginsburg, H. (1986). The relationships between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural Knowledge: The case of mathematics* (pp. 75-112). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Baroody, A. J. y Standinfer, D. (1993). Addition and subtraction in the Primary Grades. En R. Jensen (Ed.), *Research ideas for the classrooms. Early childhood mathematics* (pp. 72-102). New York: MacMillan.

Baroody, A. J. y Tiilikainen, S. H. (2003). Two perspectives on addition development. En A. J. Baroody y A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills:*

Constructing adaptive expertise. Studies in mathematical thinking and learning. (pp. 75-125). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Baroody, A. J., Wilkins, J. L y Tiilikainen, S. H. (2003). The development of children´s understanding of additive commutativity: From protoquantitative concept to general concept?. En A. J. Baroody y A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise. Studies in mathematical thinking and learning*. (pp. 127-160). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Bebout, H. (1990). Children´s symbolic representation of addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*, 123-131.

Behr, M. (1976). *Teaching experiment: The effect of manipulatives in second graders´learning of mathematics* (PMDC Tech. Rep. No. 11). Tallahassee: Florida State University (ERIC Document Reproduction Service No. ED 144809)

Beilin, H. (1968). Cognitive capacites of young children: A replication. *Science*, *162*, 920-921.

Bell, A., Swan, M. y Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 399-420.

Bereiter, C. y Scardamalia, M. (1989). Intentional learning as a goal of in instruction. En L. B. Resnick (Ed.), *Knowing, learning and instruction: Essays in honor Robert Glaser* (pp. 361-392). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Bergeron, J. y Hersovics, N. (1990). Psychological aspects of learning early arithmetic. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematical and cognition* (pp. 31-52). Cambridge, NY: Cambridge University Press.

Bermejo, V. (1990). *El niño y la aritmética*. Barcelona: Paidós.

Bermejo, V. (1993). Perspectivas innovadoras en la enseñanza-aprendizaje de las matematicas. Investigación cognitiva y práctica educativa. En J. Beltrán, V. Bermejo,

M. D. Prieto, y D. Vence (Eds.), *Intervención psicopedagógica* (pp. 169-185). Madrid: Pirámide.

Bermejo, V. (1996). Enseñar a comprender las matematicas. En J. Beltrán y C. Genovard (Eds.), *Psicología de la instrucción I. Variables y procesos básicos* (pp. 571-594). Madrid: Síntesis.

Bermejo, V. (1996). Cardinality development and counting. *Developmental Psychology, 32*, 263-268.

Bermejo, V. y Lago, M. O. (1987). El aprendizaje de las matemáticas. Estado actual de las investigaciones. *Psicólogos. Papeles del Colegio, 6*, 35-47.

Bermejo, V. y Lago, M. O. (1988). Representación y magnitud de los sumandos en la resolución de problemas aditivos. *Infancia y Aprendizaje, 44*, 109-121.

Bermejo, V. y Lago, M. O. (1993). Desarrollo de los principios procesuales del conteo. En J. A. Beltrán, L. Pérez, E. González, R. González y D. Vence.(Eds.), *Líneas actuales en la intervención psicopedagógica I: aprendizaje y contenidos del curriculum* (pp.742-755). Madrid: UCM.

Bermejo, V. y Lago, M. O. (1993). Diferencias entre competencia y ejecución en la adquisición de la habilidad de contar. En J. A. Beltrán, L. Pérez, E. González, R. González y D. Vence.(Eds.), *Líneas actuales en la intervención psicopedagógica I: aprendizaje y contenidos del curriculum* (pp.698-709). Madrid: UCM.

Bermejo, V. y Laorden, M.C. (1993). Conteo y cardinalidad en el niño. En J. A. Beltrán, L. Pérez, E. González, R. González y D. Vence.(Eds.), *Líneas actuales en la intervención psicopedagógica I: aprendizaje y contenidos del curriculum* (pp. 682-697). Madrid: UCM.

Bermejo, V. y Rodriguez, P. (1987). Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. *Infancia y Aprendizaje, 39-40*, 71-81.

Bermejo, V. y Rodriguez, P. (1990a). Relevancia de algunos factores en la solución de problemas aditivos. *Investigaciones Psicológicas*, *8*, 23-41.

Bermejo, V. y Rodriguez, P. (1990b). La operación de sumar. En V. Bermejo, *El niño y la aritmética* (pp. 107-140). Barcelona: Paidós.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1993). La operación de sumar: competencia conceptual vs competencia de procedimiento. En J. A. Beltrán, L. Pérez, E. González, R. González y D. Vence.(Eds.), *Líneas actuales en la intervención psicopedagógica I: aprendizaje y contenidos del curriculum* (pp. 711-726). Madrid: UCM.

Bermejo, V., Lago, M. O. y Rodríguez, P. (1994a). Desarrollo del pensamiento matemático. En V. Bermejo (Ed.), *Desarrollo cognitivo* (pp. 379-396). Madrid: Síntesis.

Bermejo, V., Lago, M. O. y Rodriguez, P. (1994b). Problemas verbales de comparación y comprensión de la relación comparativa. *Cognitiva*, *6*, 159-174.

Bermejo, V., Lago, M. O. y Rodriguez, P. (1998). Aprendizaje de la adición y sustracción. Secuenciación de los problemas verbales según su dificultad. *Revista de Psicología General y Aplicada*, *51*, 533-552.

Bermejo, V., Lago, M. O. y Rodríguez, P. (2000a). La perspectiva constructivista en la enseñanza de las matematicas. En J. N. Garcia (Ed.), *De la Psicología de la Instrucción a las necesidades curriculares* (pp. 83-92). Barcelona: Oikos-tau.

Bermejo, V., Lago, M. O. y Rodríguez, P. (2000b). Las creencias de alumnos y profesores sobre las matemáticas. En J. A. Beltrán (Ed.), *Intervención psicopedagógica y curriculum escolar* (pp.129-151). Madrid: Pirámide.

Bermejo, V., Lago, M. O., Rodríguez, P. y Pérez, M. (1995). Fracaso escolar en matematicas: cómo intervenir para mejorar los rendimientos infantiles. *Revista de Psicología General y Aplicada*, *53*, 43-62.

Bermejo, V., Lago, M. O., Rodríguez, P., Dopico, C. y Lozano, J. M. (2002*) PEI Un programa de intervención para la mejora del rendimiento matemático*. Madrid: Editorial Complutense.

Bermejo, V., Lago, M. O., Rodriguez, P., Pérez, M., Bejerano, F., Moriche, E., Dopico, C., Lozano, M. J. y Pintos, M. T. (1995). *Intervención psicopedagógica en el aula de matematicas. Un programa instruccional para 1º ciclo de Educación Primaria*, Ayuda a la Investigación Educativa.

Bernardo, A. B. (1999). Overcoming obstcales to understanding and solving word problems in mathematics. *Educational Psychology*, *19*, 149-163.

Bernardo, A. B. (2002). Language and mathematical problem solving among bilinguals. *Journal of Psychology*, *136*, 283-297.

Bjonerud, C. D. (1960). Artihmetic concepts posses by the preschool child. *Arithmetic Teacher*, *7*, 347-350.

Blote, A. W., Klein, A. S., Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and Instruction*, 10, 221-247.

Blöte, A. W., van der Burg, E. y Klein, A. S. (2001). Students´flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects. *Journal of Educational Psychology*, *93*, 627-638.

Blume, G. (1981). *Kindergarten and first-grade children´s strategies for solving addition and subtraction and missing added problems in symbolic and verbal problem contexts* (Tech. Rep. No. 583). Madison: Wisconsin Center for Education Research.

Boulton-Lewis, G. M. (1993). Young children´s representations and strategies for subtraction. *British Journal of Educational Psychology*, *63*, 441-456.

Boulton-Lewis, G. M. y Tait, K. (1994). Young children´s representations and strategies for addition. *British Journal of Educational Psychology*, *64*, 231-242.

Bowers, J., Cobb, P. y McClain, K. (1999). The evolution of mathematical practices: A case study. *Cognition and Instruction, 17 (1)*, 25-64.

Brenner, M. E. (1985). The practice of arithmetic in Liberian schools. *Anthropology and Education Quarterly, 16*, 177-186.

Briars, B. y Larkin, J. (1984). An integrated model of skills in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction, 1*, 245-296.

Brown, A. y Campione, J. (1996). Psychological theory an the design of innovative learning environments: On procedures, principles, and systems. En L. Schauble y R. Glaser (Eds.), *Innovations in learning* (pp. 289-326). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Brown, J. S. y Van Lehn K. (1982). Towards a generative theory of `bugs´. En T. P. Carpenter J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (117-134). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Brown, J. S., Collins, A. y Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher, 18*, 32-42.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Brush, L. R. (1978). Preschool children´s knowledge of addition and subtraction. *Journal for Reasearch in Mathematics Education, 9*, 44-54.

Bryant, P. (1995). Children and arithmetic. *Journal of Child Psychology and Psychiatry and Allied Disciplines, 36*, 3-32.

Bryant, P. (1996). Mathematical understanding in the nursey school years. En T. Nunes y P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 53-67). Hove, East Sussex, England: Psychology Press.

Bryant, P., Chirstie, C. y Rendu, A. (1999). Children´s understanding of the relation between addition and subtraction: Inversion, identiy and decomposition. *Journal of Experimental Child Psychology*, *74,* 194-212.

Buckingham, B. R. (1927). Teaching addition and subtraction facts together or separately. *Educational Research Bulletin*, *6*, 228-229.

Cai, J. (2000). Mathematical thinking involved in U. S. and Chinese students´solving of process-constrained and process-open problems. *Mathematical Thinking and Learning*, *2,* 309-340.

Caillies, S., Denhiere, G. y Kintsch, W. (2002). The effect of prior knowledge on understanding from text. Evidence from primed recognition. *European Journal of Cognitive Psychology*, *14*, 267-286.

Campione, J. C., Brown, A. L. y Connell, M. L. (1988). Metacognition: On the importance of understanding what are you doing. En R. A. Charles y E. A. Silver (Eds.), *The Teaching and Assessment of Mathematical Problem Solving* (pp. 93-114). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Canobi, K. H., Reeve, R. A. y Pattison, Ph. E. (1998). The role of conceptual understanding in children´s addition problem solving. *Developmental Psychology*, *34*, 882-891.

Canobi, K. H., Reeve, R. A. y Pattison, Ph. E. (2002). Young children´s understanding of addition concepts. *Educational Psychology*, *22,* 513-532.

Canobi, K., Reeve, R. y Pattison, Ph. (2003). Patterns of knowledge in children´s addition. *Developmental Psychology*, *39*, 521-534.

Carpenter, T. P. (1985). Learning to add and subtract: An exercise in problem solving. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 17-40). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T. P. (1986). Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge: implications from research on the initial learning of arithmetic. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 113-132). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T. P. y Fennema, E. (1992). Cognitively guided instruction: Building on the knowledge of students and teachers. *International Journal of Research in Education*, *17*, 457-470.

Carpenter, T. P. y Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. En E. Fennema y T. R. Romberg (Eds.), *Mathematics classroom that promote understanding* (pp-19-32). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T. P. y Moser, J. (1981). Problem structure and first grade childrens´initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *12*, 27-39.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T. P. y Moser, J. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics: Concepts and processes* (pp. 7-44). NY: Academic Press.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15,* 179-202.

Carpenter, T. P. y Peterson, P. L. (1988). Learning through instruction: The study of students´thinking during instruction in mathematics. *Educational Psychologist*, *23*, 79-85.

Carpenter, T. P., Ansell, E. y Levi, L. (2001). An alternative conception of teaching for understanding: Case studies of two first-grade mathematics classes. En T. Wood y B. Nelson (Eds.), *Beyond classical pedagogy: Teaching elementary school mathematics. Studies in mathematical thinking and learning* (pp. 27-46). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, M., Fennema, E. y Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: A study of kindergarten children´s problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*, 427-440.

Carpenter, T. P., Corbitt, M. K, Kepner, H. S., Lindquist, M. M. y Reyes, R. E. (1980). Solving verbal problems: Results and implication for national assessment. *Arithmetic Teachers*, *28*, 2-12.

Carpenter, T. P., Empson, S. B. y Jacobs, V. R. (2000). Integración de la investigación cognitiva con la investigación en el aula: ejemplos de instrucción matemática innovadora. En J. A. Beltrán (Ed.), *Intervención psicopedagógica y curriculum escolar* (pp.105-128). Madrid: Piramide.

Carpenter, T. P., Fennema, E. y Franke, M. L. (1996). Cognitively guided instruction: A knowledge base for reform in primary mathematics instruction. *Elementary School Journal*, 97, 3-20.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Hiebert, J., Human, P., Murray, H., Olivier, A. y Wearne, D. (1999). Learning basic number concepts and skills as problem solving. En E. Fennema y Th. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding. Studies in mathematical thinking and learning series* (pp. 45-61). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L. y Carey, D. A. (1988). Teachers´ pedagogical content knowledge of students´problem solving in elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*, 385-401.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L., Chiang, Ch. P. y Loef, M. (1989). Using knowledge of children´s mathematics thinking in classroom teaching: An experimental study. *American Educational Research Journal*, *26*, 499-531.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E. y Empson, S. B. (1998). A longitudinal study of invention and understanding in children´s multidigit addition and subtraction. *Journal for Reserach in Mathematics Education, 29*, 3-20.

Carpenter, T. P., Hiebert, J. y Moser, J. M. (1981). Problem structure and first-grade children´s initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *12*, 27-29.

Carpenter, T. P., Hiebert, J. y Moser, J. (1983). The effect of instruction on children´s solutions of addition and subtraction word problems. *Educational Studies in Mathematics*, *14*, 55-72.

Carpenter, T. P., Levi, L. W., Fennema, E., Ansell, E. y Franke, M. L. (1995, April). *Discussing alternative strategies as a context for developing understanding in primary grade mathematics classrooms.* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, CA.

Carpenter, T. P., Moser, J. y Bebout, H. (1988). Representation of addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*, 345-357.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2002). The transfer dilemma. *Journal of the Learning Sciences*, *11*, 1-24.

Carraher, T. N. y Schliemann, A. D. (1988). Using money to teach about the decimal system. *Arithmetic Teacher*, *36*, 42-43.

Carraher, T. N., Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (1982). Na vida; na escola, zero: os contextos culturais da aprendizagem da matemática. (The cultural context of mathematics learning). *Cadernos de Pesquisa*, *42*, 79-86.

Carraher, T. N., Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Development Psychology*, *3,* 21-29.

Carraher, T. N., Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (1987). Written and oral mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18,* 83-97.

Carraher, T. N., Schliemann, A. D. y Carraher, D. W. (1988). Mathematical concepts in everyday life. En G. B. Saxe y M. Gearhart (Eds.), *Children´s mathematics* (pp. 71-88). San Francisco, CA: Jossey Bass.

Case, R. (1985). *Intellectual development: Birth to adulthood*. New York: Academic Press.

Cauley, K. M. (1988). Construction of logical knowledge: study of borrowing in subtraction. *Journal of Educational Psychology*, *80,* 202-205.

Ceci, S. J. y Bronfenbrenner, U. (1985). Don´t forget to take the cupcakes out of the oven: Strategic time-monitoring, prospective memory and context. *Child Development*, 56, 175-190.

Ceci, S. J. y Roazzi, A. (1993). The effects of context on cognition: Postcards from Brazil. En R. J. Sternberg y R. K. Wagner (Eds.), *Mind in context: Interactionist perspectives on human intelligence* (pp. 74-101). New York: Cambridge University Press.

Chang, Ch. (2001). The development of part-whole operation: The performance discrepancy between drawing-choice and problem-solving tasks. *Chinese Journal of Psychology, 43*, 239-254.

Chang, Ch. Y. (1998). Acquisition and development of self-efficacy through cooperative learning. *Dissertation Abstracts International Section A: Humanities and Social Sciences*, *58 (7-A)*: 2528.

Chao, S-J., Stigler, J. W. y Woodward, J. A. (2000). The effects of physical materials on kindergartners´ learning of number concepts. *Cognition and Instruction*, *18,* 285-316.

Chen, M. H. (1999). Children´s solution of arithmetic word problems as a function of number size . *Dissertation Abstracts International: Section B: The Sciences and Engineering, 59 (10-B)*: 5597.

Cheng, P. W. y Holyoak, K. J. (1985). Pragmatic reasoning schemes. *Cognitive Psychology*, *19*, 293-328.

Christou, C. y Philippou, G. (1998). The developmental nature of ability to solve one-step word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*, 436-442.

Cobb, P. (1988). The tension between theories of learning and instruction in mathematics education. *Educational Psychologist*, *23*, 87-103.

Cobb, P. (1989). Experiential, cognitive and anthropological perspectives in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *9*, 32-42.

Cobb, P. (1994). Constructivism and learning. En T. Husen y T. N. Postlethwaite (Eds.), *International encyclopedia of education* (pp. 1040-1052). Oxford, England: Pergamon.

Cobb, P. (1994). Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development. *Educational Researcher, 23*, 13-20.

Cobb, P. (1996). Where is the mind? A coordination of sociocultural and cognitive constructivist perspectives. En C. Fosnot (Ed.), *Constructivism: Theory, perspectives, and practice* (pp. 33-52). NY: Teachers College Press.

Cobb, P. (1998). Learning from distributed theories of intelligence. *Mind, Culture, and Activity*, *5*, 187-204.

Cobb, P. (2001). Supporting the improvement of learning and teaching in social and institutional context. En S. Carver y D. Klahr (Eds.), *Cognition and instruction: Twenty-five years of progress* (pp. 455-478). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Cobb, P. (2002). Reasoning with tools and inscriptions. *Journal of the Learning Sciences, 11*, 187-215.

Cobb, P. (Ed.) . (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction en classroom cultures*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Cobb, P. y McClain, K. (2002). Supporting students´learning of significant mathematical ideas. En G. Wells y G. Claxton (Eds.), *Learning for life in the 21st century: Sociocultural perspectives on the future of education* (pp. 154-166). Malden, MA: Blackwell.

Cobb, P. y Wheatley, G. (1988). Children´s initial understanding of ten. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 10,* 1-28.

Cobb, P. y Yackel, E. (1998). A constructivist perspective on the culture of the mathematics classroom. En F. Seeger y J. Voigt (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 158-190). New York: Cambridge University Press.

Cobb, P., Perlwitz, M. y Underwood, G. D. (1998). Individual construction, mathematical acculturation, and the classroom community. En M. Larochelle y N. Bednarz (Eds.), *Constructivism and education* (pp. 63-80). New York: Cambridge University Press.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K. y Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *Journal of the Learning Sciences, 10*, 113-163.

Cobb, P., Wood, T. y Yackel, E. (1993). Discourse, mathematical thinking, and classroom practice. En A. Forman, N. Minick y C. Stone (Eds.), *Contexts for learning. Sociocultural dynamics in children´s development* (pp. 91-119). NY: Oxford University Press.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nicholls, J., Wheatley, S., Trigatti, B. y Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem-centered second-grade mathematics project. *Journal for Research in Mathematics Education, 22,* 3-29.

Cobb, P., Yackel, E. y McClain, K. (Eds.) . (2000). *Symbolizing and communication in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Cobb, P., Yackel, E. y Wood, T. (1991). A constructivist approach to second grade mathematics. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 57-176). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Cognition and Technology Group at Vanderbilt (1990). Anchored instruction and its relationship to situated cognition. *Educational Researcher*, *19* (6), 2-10.

Cognition and Technology Group at Vanderbilt (1992). The Jasper series as an example of anchored instruction: Theory, program, description, and assessment data. *Educational Psychologist*, *27*, 291-315.

Cognition and Technology Group at Vanderbilt (1994). From visual word problems to learning communities: Changing conceptions of cognitive research. En K. McGilly (Ed.), *Classroom lessons: Integrating cognitive theory and classroom practice* (pp. 453-494). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Cognition and Technology Group at Vanderbilt (1997). *The Jasper project: Lessons in curriculum, instruction, assessment, and professional development*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Cohen, L. B. y Marks, K. S. (2002). How infants process addition and subtraction events. *Developmental Science, 5,* 186-201.

Cohen, S. A. y Stover, G. (1981). Effects of teaching sixth grade students to modify format variables of math word problems. *Reading Research Quarterly*, *16*, 175-200.

Cole, M. (1990). Cultural psychology: A once and future discipline. En J. J. Berman (Ed.), *Cross cultural perspectives: Nebraska symposium on motivation* Vol. 37. (pp.279-335). Lincoln: University of Nebraska Press.

Cole, M. (1992). Context, modularity, and the cultural constitution of development. En L. T. Winegar y J. Valsiner (Eds.), *Children´s development within social contexts* (pp. 5-31). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Collins, A., Brown, J. S. y Newman, S. E. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing and mathematics. En L. B. Resnick (Ed.), *Knowing, learning, and Instruction. Essays in honor of Robert Glaser* (pp. 453-394). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Cooper, R. G., Starkey, P., Blevins, B., Goth, P. y Leitner, E. (1978, May). *Number development: Addition and subtraction*. Paper presented at the meeting of the Jean Piaget Society, Philadelphia.

Cowan, R, Dowker, A., Christakis, A. y Bailey, Sh. (1996). Even more precisely assessing children´s understanding of the order-irrelevance principle. *Journal of Experimental Child Psychology*, *62*, 84-101.

Cowan, R. y Ioakimidou, Z. (1999, September). *Preschoolers´grasp of commutativity.* Paper presented at the British Psychological Society Developmental Section Conference, University of Nottingham, Nottingham, England.

Cowan, R. y Renton, M. (1996). Do they know what they are doing?. Children´s use of economic addition strategies and knowledge of commutativity. *Educational Psychology*, *16*, 407-420.

Cummins, D. (1991). Children´s interpretations of arithmetic word problems. *Cognition and Instruction*, *8*, 261-289.

Cummins, D. D., Kintsch, W., Reusser, K. y Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology*, *20*, 405-438.

Damerow, P. (1986). Individual development and cultural evolution of arithmetical thinking. En S. Strauss (Ed.), *Ontogeny and historical development* (pp. 120-150) Norwood, NJ: Ablex.

Dana, T. M., Campbell, I. M. y Lunetta, V. N. (1997). Theoretical bases for reform of science teacher education. *Elementary School Journal*, *97*, 419-432.

Davenport, P., y Howe, Ch. (1999). Conceptual gain and successful problem-solving in primary school mathematics. *Educational Studies*, *25* (1), 55-75.

Davis-Dorsey, J., Ross, S. M. y Morrison, G. R. (1991). The role of rewording and context personalization in the solving mathematical word problems. *Journal of Educational Psychology, 83*, 61-68.

De Corte, E. (1990). Acquiring and teaching cognitive skill: A state-of-the-art of theory and research. En P. J. D. Drenth, J. A. Sergeant y R. J. Takens (Eds.), *European perspectives in psychology*. *Volume I* (pp. 237-263). London: Wiley.

De Corte, E. (1993). La mejora de las habilidades de resolución de problemas matematicos: hacia un modelo de intervención basado en la investigación. En J. A. Beltrán, V. Bermejo, D. M. Prieto y D. Vence (Eds.), *Intervención psicopedagógica* (pp. 145-168). Madrid: Pirámide

De Corte, E. (1995). Fostering cognitive growth: A perspective from research on mathematics learning and instruction. *Educational Psychologist*, *30*, 37-46.

De Corte, E. (2000). Marrying theory building and the improvement os school practice: A permanent challenge for instructional psychology. *Learning and Instruction*, *10*, 249-266.

De Corte, E. (2003). Transfer as the productive use of acquired knowledge, skills, and motivations. *Current Directions in Psychological Science, 12 (4)*, 142-146.

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1985). Beginning first graders´initial representation of arithmetic word problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, *4,* 3-21.

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders´ strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*, 363-381.

De Corte, E., Greer, B. y Verschaffel, L. (1996). Mathematics learning and teaching. En D. Berliner y R. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology*. New York: MacMillan.

De Corte, E., Op´t-Eynde, P. y Verschaffel, L. (2002). "Knowing what to believe": The relevance of students´mathematical beliefs for mathematics education. En B. Hofer y P. Pintrich (Eds.), *Personal epistemology: The psychology of beliefs about knowledge and knowing* (pp. 297-320). Mahwah, NJ: Erlbaum.

De Corte, E., Verschaffel, L. y De Win, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children´s problem representations and solutions. *Journal of Educational Psychology*, *77*, 460-470.

De Corte, E., Verschaffel, L. y Op´t-Eynde, P. (2000). Self-regulation: A characteristic and a goal of mathematics education. En M. Boekaerts y P. Pintrich (Eds.), *Handbook of self-regulation* (pp. 687-726). San Diego, CA: Academic Press.

De Corte, E., Verschaffel, L. y Pauwels, A. (1990). Influence of the semantic structure of word problems on second graders´eye movements. *Journal of Educational Psychology*, *77*, 460-470.

Dellarosa, D. (1986). A computer simulation of children´s arithmetic word problem solving. *Behavior Research Methods, Instruments & Computers*, *18*, 147-154.

DeLoache, J. (2002). Early development of understanding and use of symbolic artifacts. En U. Goswami (Ed.), *Blackwell handbook of childhood cognitive development.*

Balckwell handbooks of developmental psychology (pp. 206-226). Malden, MA: Balckwell.

Demetriou, A. (Ed.) . (1988). *The neo-Piagetian theories of cognitive development: Toward an integration*. Amsterdam: North Holland.

Dienes, Z. P. (1964). *Building up mathematics* (2nd ed.). London: Hutchinson Educational.

Dochy, F. J. R. C. (1992). *Assessment of prior knowledge as a determinant for future learning*. Utrecht, The Netherlands: Lemma.

Donaldson, M. (1978). *Children´s minds*. London: Fontana.

Dowker, A. (1998). Individual differences in normal arithmetical development. En C. Donald (Ed.), *The development of mathematical skills* (pp. 275-295). Hove, East Sussex, England: Psychology Press

Dreyfus, T., Hershkowitz, R. y Schwarz, B. (2001). Abstraction in context: The case of peer interaction. *Cognitive Science Quarterly*, *1*, 307-358.

Dutton, W. H. (1963). Growth in number readiness in kindergarten children. *Arithmetic Teacher*, *10*, 251-255.

Dyson, A. H. (1983). Research currents: Young children as composers. *Language Arts, 60,* 84-89.

Fang, G., Tian, X. y Bei, H. (2001). The cognition of number with strategies in preschoolers. *Acta Psychologica Sinica, 33,* 30-36.

Fennema, E., Carpenter, T. P. y Lamon, S. J. (Eds.) . (1991). *Integrating research on teaching and learning mathematics*. Albany St: University of New York Press.

Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M., Levi, L., Jacobs, V. y Empson, S. (1996). A longitudinal study of learning to use children´s thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 403-434.

Fennema, E., Sowder, J. y Carpenter, T. P. (1999). Creating classrooms that promote understanding. En E. Fennema y Th. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding. Studies in mathematical thinking and learning series* (pp. 185-199). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Fisher, K. W. (1980). A theory of cognitive development: The control and construction of hierarchies of skills. *Psychological Review*, *87*, 477-531.

Fosnot, C. (Ed.) . (1996). *Constructivism: Theory, perspectives and practice*. NY: Teachers College Press.

Fraivillig, J. L., Murphy, L. A. y Fuson, K. C. (1999). Advancing children´s mathematical thinking in Everyday Mathematics classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*, 148-170.

Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L. y Fennema, E. (2001). Capturing teachers´ generative change: A follow-up study of professional development in mathematics. *American Educational Research Journal*, *38*, 653-689.

Franke, M. L., Fennema, E. y Carpenter, T. P. (1997). Changing teachers: Interactions between beliefs and classroom practice. En E. Fennema y B. Nelson (Eds.), *Mathematics teachers in transition* (pp. 255-282). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Franke, M. L., Fennema, E., Carpenter, T., Ansell, E. y Behrend, J. (1998). Understandig teachers´self-sustaining change in the context of professional development. *Teaching and Teaching Education*, *14,* 67-80.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer.

Frye, D., Braisby, N., Lowe, J., Maroudas, C. y Nicholls, J. (1989). Young children´s understanding counting and cardinality. *Child Development*, *60*, 1158-1171.

Fuson, K. C. (1982). An analysis of the counting-on solution procedure in addition. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 67-81). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Fuson, K. C. (1988). *Children´s counting and concepts of number*. New York: Springer-Verlag.

Fuson, K. C. y Briars, D. J. (1990). Using a base-ten blocks learning/teaching approach for first and second grade place-value and multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*, 108-206.

Fuson, K. C. y Burghardt, B. H. (2003). Multidigit addition and subtraction methods invented in small groups and teacher support of problem solving and reflection. En A. J. Baroody y A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise. Studies in mathematical thinking and learning*. (pp. 267-304). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Fuson, K. C. y Fuson, A. M. (1992). Instruction supporting children´s counting-on for addition and counting-up for subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*, 52-78.

Fuson, K. C. y Hall, J. W. (1983). The acquisition of early number word meanings: A conceptual analysis and review. En H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 49-107). New York: Academic Press.

Fuson, K. C. y Kwon, Y. (1992). Korean children´s single-digit addition and subtraction: Numbers structured by ten. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23,* 148-165.

Fuson, K. C. y Willis, G. B. (1988). Subtracting by counting up: More evidence. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*, 402-420.

Fuson, K. C. y Willis, G. B. (1989). Second graders´use of shematic drawings in solving addition and subtracion word problems. *Journal of Educational Psychology*, *81*, 514-520.

Fuson, K. C., Carroil, W. M. y Drueck, J. V. (2000). Achievement results for second and third graders using the Standards-Based Curriculum Everyday Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31* (3), 277-295.

Fuson, K. C., Pergament, G. G., Lyons, B. G. y Hall, J. W. (1985). Children´s conformity to the cardinality rule as a function of size and counting accuracy. *Child Development*, *56*, 1229-1236.

Fuson, K. C., Smith, S. y LoCicero, A. (1997). Supporting latino first graders´ ten-structured thinking in urban classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*, 738-766.

Fuson, K. C., Stigler, J. W. y Bartsch, K. (1988). Grade placement of addition and subtraction topics in Japan, Mainland China, the Soviet Union, Taiwan, and the United States. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*, 449-456.

Gardner, H. (1991). *The unschooled mind: How children think and how schools should teach.* New York: Basic.

Gauvain, M. (1998). Social context, mathematics, and cognitive development: a promising reserach direction. *Learning and Instruction*, *8*, 561-566.

Geary, D. C., Bow-Thomas, Ch. C., Liu, F. y Siegler, R. S. (1996). Development of arithmetical competencies in Chinese and American Children: Influence of age, language, and schooling. *Child Development*, *67*, 2022-2044.

Gelman, R. (1972a). Logical capacity of very young children. number invariance rules. *Child Development*, *43*, 75-90.

Gelman, R. (1972b). The nature and development of early numbers concepts. En H. W. Resse (Ed.), *Advances in child development and behavior* (pp-45-68).(Vol. 7). New York: Academic Press.

Gelman, R. y Gallistel, C. R. (1978). *The child´s understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Gentner, D. y Ratterman, M. J. (1991). Language and the career of similarity. En S. A. Gelman y J. P. Byrnes (Eds.), *Perspectives on thought and language: Interrelations in development* (pp.225-277). London: Cambridge University Press.

Gibb, E. G. (1956). Children´s thinking in the process of subtraction. *Journal of Experimental Education, 25*, 71-80.

Ginbayashi, K. (1984). *Principles of mathematics education-Achivements of AMI*. Tokyo: Association of Mathematical Instruction.

Ginsburg, B., Marika, D. y Fantuzzo, J. W. (1998). An evaluation of the relative effectiveness of NCTM standards-based interventions for low-achieving urban elementary students. *Journal of Educational Psychology, 90*, 560-569.

Ginsburg, H. (1977). *Children´s arithmetic: The learning process*. New York: Van Nostrand.

Ginsburg, H. P. y Seo, K. H. (1999). Mathematics in children´s thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 1*, 113-129.

Ginsburg, H. P., Inoue, N. y Seo, K. H. (1999). Young children doing mathematics: Observations of everyday activities. En J. Copley (Ed.), *Mathematics in the early years* (pp. 88-99). Washington, DC: National Associaion for the Education of Young Children.

Ginsburg, H. P., Pappas, S. y Seo, K. H. (2001). Everyday mathematical knowledge: Asking young children what is developmentally appropiate. En S. Golbeck (Ed.), *Psychological perspectives on early childhood education: Reframing dilemmas in* *reserach and practice. The Rutgers invitational symposium on education series* (pp. 181-219). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Ginsburg, H. P., Posner, J. K. y Russell, R. L. (1981). The development of mental addition as a function of culture and schooling. *Journal of Cross-Cultural Psychology*, *12*, 163-178.

Ginsburg, H., Klein, A. y Starkey, P. (1998). The development of children´s mathematical thinking: Connecting research with practice. En I. Siegel y A. Renninger (Eds.), *Handbook of child psychology. Vol. 4* (pp. 401-476). NY: Wiley.

Glaser, R. (1991). The maturing of the relationship between the science of learning and cognition and educational practice. *Learning and Instruction*, *1*, 129-144.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*, 443-471.

Gravemeijer, K. (1997). Commentary solving wor dproblems: A case of modelling?. *Learning and Instruction*, *7*, 389-397.

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J. y Whitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communication in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 225-273). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Greenfield, P. M. (1984). A theory of the teacher in the learning activities of everyday life. En B. Rogoff y J. Lave (Eds.), *Everyday cognition: Its development in social context* (pp. 117-138). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Greeno, J. (1988). *Situations, mental models and generative knowledge* (Rep. No. IRL 88-0005). Palo Alto, CA: Institute for Research and Learning.

Greeno, J. (1998). The situativity of knowing, learning, and research. *American Psychologist*, *53*, 5-26.

Greeno, J. G. (1978). Understanding and procedural knowledge in mathematics instruction. *Educational Psychologist*, *12*, 262-283.

Greeno, J. G. (1989). A perspective on thinking. *American Psychologist*, *44*, 134-141.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*, 170-218.

Greeno, J. y Goldman, Sh. (Eds.). (1998). *Thinking practices in mathematics and science learning*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Groen, G. J. y Parkman, J. M. (1972). A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review*, *79*, 329-343.

Groen, G. J. y Resnick, L. B. (1977). Can preschool children invent addition algorithms?. *Journal of Educational Psychology*, *69*, 645-652.

Grouws, D. A. (Ed.) . (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

Guberman, S. R. (1992). *Math and money: A comparative study of the arithmetical achievements and out-of-school activities of Latino and Korean American children*. Unpublished doctoral dissertation. University of California, Los Angeles.

Guberman, S. R. (1996). The development of everyday mathematics in Brazilian children with limited formal education. *Child Development*, *67*, 1609-1623.

Guberman, S. R. y Greenfield, P. M. (1991). Learning and transfer in everyday cognition. *Cognitive Development*, *6*, 233-260.

Guberman, S. R. y Saxe, G. B. (2000). Mathematical problems and goals in children´s play of an educational game. *Mind, Culture, and Activity*, *7*, 201-216.

Hall, R., Kibler, D., Wenger, E. y Truxaw, C. (1989). Exploring the episodic structure of algebra story problem solving. *Cognition and Instruction*, *6*, 223-283.

Haneghan, J. P. (1990). Third and fifth graders´use of multiple standards of evaluation to detect errors in word problems. *Journal of Educational Psychology*, *82*, 352-358.

Harel, I. (1991). *Children designers. Interdisciplinary constructions for learning and knowing mathematics in a computer-rich school.* Norwood, NJ: Ablex.

Harel, I. y Papert, S. (1991b). Software design as a learning environment. En I. Harel y S. Papert (Eds.), *Constructionism* (pp.41-84). Norwood, NJ: Ablex.

Harel, I. y Papert, S. (Eds.) . (1991a). *Constructionism*. Norwood, NJ: Ablex.

Hatano, G. (1980, April). *Mental regrouping strategy for addition: An alternative model to counting-on*. Paper presented at the National Council of Teachers of Mathematics Research Presession, Seattle, WA.

Hatano, G. (1982). Learning to add and subtract: A japanese perspective. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 211-223). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hatano, G. e Inagaki, K. (1992). Desituating cognition through the construction of conceptual knowledge. En P. Light y G. Butterworth (Eds.), *Context and cognition: Ways of learning and knowing* (pp. 115-133). New York: Harvester Wheatsheaf.

Hebbeler, K. (1977). Young children´s addition. *Journal of Children´s Mathematical Behavior*, *1*, 108-121.

Heller, J., y Greeno, J. (1978, May). *Semantic processing of arithmetic word problem solving*. Annual Meeting of the Midwestern Psychological Association. Chicago.

Hembree, R. (1992). Experiments and relational studies in problem solving: A meta-analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*, 242-273.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. y Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*, 195-222.

Hickey, D. T., Moore, A. L. y Pellegrino, J. W. (2001). The motivational and academic consequences of elementary mathematics environments: Do constructivist innovations and reforms make a diference?. *American Educational Research Journal, 38*, 611-652.

Hickey, D. T., Pellegrino, J. W., Goldman, S. R., Vye, N. J. y Moore, A. L. (1993, May). *Interests, attitudes, & anchored instruction: The impact of one interactive learning environment*. Paper presented at the annul meeting of the American Educational Research Association, Atlanta, GA.

Hiebert, J. (1982). The position of unknown set in children´s solution of verbal arithmetic problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 13,* 341-349.

Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: MacMillan.

Hogan, K. y Pressley, M. (1997). Scaffolding scientific competencies within classroom communities of inquiry. En K. Hogan y M. Pressley (Eds.), *Scaffolding student learning. Instructional approaches and issues* (pp. 74-107). Cambridge, MA: Brookline.

Holland, J. H., Holyoak, K. J., Nisbett, R. E. y Thagard, P. R. (1986). *Induction: Processes of inference, learning, and discovery*. Cambridge, MA: MIT Press.

Hudson, T. (1983). Correspondences and numerical differences between disjoint sets. *Child Development*, *54*, 84-90.

Hughes, M. (1986). *Children and number: Difficulties in learning mathematics*. Oxford, England: Blackwell.

Hutchins, E. (1993). Learning to navigate. En S. Chaiklin y J. Lave (Eds.), *Understanding practice: Perspectives on activity and context* (pp. 35-63). New York; Cambridge University Press.

Ilg, F. y Ames, L. B. (1951). Developmental trends in arithmetic. *Journal of Genetic Psychology*, *79*, 3-28.

Inagaki, K., Hatano, G. y Morita, E. (1998). Construction of mathematical knowledge through whole-class discussion. *Learning and Instruction, 8*, 503-526.

Inhelder, B. (1998). Genetic epistemology and developmental psychology. En R. Rieber y K. Salzinger (Eds.), *Psychology: Theoretical-historical perspectives* (pp. 411-421). Washington, DC: American Psychological Association.

Irwin, K. C. (1996). Children´s understanding of the principles of covariation and compensation in part-whole relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*, 25-40.

Janssen, R., De Corte, E., Verschaffel, L., Knoors, E. y Colemont, A. (2002). National assessment of new standards for mathematics in elementary education in Flanders. *Educational Reserach and Evaluation, 8*, 197-225.

Jerman, M. (1973). Problem length as a structural variable in verbal arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics, 5*, 109-123.

Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models: Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Jordan, N. C., Huttenlocher, J. y Levine, S. C. (1992). Differential calculation abilities in young children from middle-and low-income families. *Developmental Psychology*, *28,* 644-653.

Kamii, C. (1982). *Number in preschool and kindergarten*. Washington, DC: National Association for the Education of Young Children.

Kamii, C. (1985). *Young children reinvent arithmetic*. New York: Teachers College Press.

Kamii, C. (2000). *Young children reinvent arithmetic*. 2nd. ed.New York: Teachers College Press.

Kamii, C. y Clark, B. F. (1997). Measurement of length. The need for a better approach to teaching. *School Science and Mathematics*, *97*, 116-121.

Kamii, C., Kirkland, L. y Lewis, B. A. (2001). Representation and abstraction in young children´s numerical reasoning. En NCTM (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp.24-34). Yearbook 2001. Reston, VA: NCTM.

Kamii, C., Lewis, B. A. y Kirkland, L. D. (2001a). Fluency in subtraction compared with addition. *Journal of Mathematical Behavior, 20*, 33-42.

Kamii, C., Lewis, B. A. y Kirkland, L. D. (2001b). Manipulatives: When are they useful?. *Journal of Mathematical Behavior*, *20*, 21-31.

Kato, Y., Kamii, C., Ozaki, K. y Nagahiro, M. (2002). Young children´s representations of groups of objects: The relationship between abstraction and representation. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*, 30-45.

Kennedy, L. M. y Tipps, S. (1994). *Guiding children´s learning of mathematics*. 7th ed. Belmont, CA: Wadsworth.

Khan, F. A. (1999). The social context of learning mathematics: Stepping beyond the cognitive framework. *Mind, Culture, and Activity, 6*, 304-313.

Kinstch, W. (1987). Understanding word problems: Linguistic factors in problem solving. En M. Nagao (Ed.), *Language and artificial intelligence* (pp. 197-208). Amsterdam: North Holland.

Kinstch, W. (1988). The role of knowledge in discourse comprehension: A construction-integration model. *Psychological Review*, *95*, 163-182.

Kintsch, W. (1986). Learning from text. *Cognition and Instruction*, *3*, 87-108.

Kintsch, W. (1998). *Comprehension: A paradigm for cognition*. New York, NY: Cambridge University Press.

Kintsch, W. (2000). The control of knowledge activation in discourse comprehension. En W. J. Perrig y A. Grob (2000), *Control of human behavior, mental processes, and consciousness: Essays in honor of the 60th birthday of August Flammer* (pp. 137-146). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kintsch, W. (2002a). On the notions of theme and topic in psychological process models of text comprehension. En M. Louwerse y W. Peer (Eds.), *Thematics: Interdisciplinary studies. Converging evidence in language and communication research*, vol. 3 (pp. 157-170). Amsterdam, Netherlands: John Benjamins.

Kintsch, W. (2002b). The role of knowledge in discourse comprehension: A construction-integration model. En Th. A. Polk (Ed.*), Cognitive modeling* (pp. 5-47). Cambridge, MA: MIT Press.

Kintsch, W. y Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, *92*, 109-129.

Knapp, N. y Peterson, P. (1995). Teachers´interpretations of CGI after four years: Meanings and practices. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*, 40-65.

Knight, F. B. y Behrens, M. S. (1928). *The learning of the 100 addition combinations and the 100 subtraction combinations*. New York: Longmans.

Labinowicz, E. (1985). *Learning from students: New beginnings for teaching numerical thinking*. Menlo Park, CA: Addison-Wesley.

Laboratory of Comparative Human Cognition (1983). Culture and cognitive development. En W. Kessen, y P. H. Mussen (Eds.), *Handbook of child psychology: Vol. I. History, theories, and methods* (pp. 295-356). New York: Wiley.

Lampert, M. (2002). Appreciating the complexity of teaching and learning in school: A commentary on Cobb; Forman and Ansell; McClain; Saxe; Schliemann; and Sfard. *Journal of the Learning Sciences, 11*, 365-368.

Langer, J. A. (1984). Literacy instruction in American schools: Problems and perspectives. *American Journal of Education*, *93*, 107-132.

Larkin, J. H. y Simon, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science, 19*, 65-100.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics, and culture in everyday life.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lave, J. (1991). Situating learning in communities of practice. En L. B. Resnick, J. M. Levine y S. D. Teasley (Eds.), *Perspectives on socially shared cognition*. Washington, DC: American Psychological Association.

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lawler, R. W. (1981). The progressive construction of mind. *Cognitive Science*, *5*, 1-30.

Lehrer, R. y Lesh, R. (2003). Mathematical learning. En W. M. Reynolds y G. E. Miller (Eds.), *Handbook of psychology: Educational psychology*, Vol. 7. (pp. 357-391). New York: Wiley.

Lehrer, R. y Schauble, L. (1998). *Modeling in mathematics and science. Unpublished manuscript*. Wisconsin Center for Educational Research: Madison, WI.

Lemaire, P. y Siegler, R. S. (1995). Four aspects of strategic change: Contributions to children´s learning of multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General*, *124*, 83-27.

Leontiev, A. N. (1975). *Activity, consciousness, personality*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Leontiev, A. N. (1981). The problem of activity in psychology. En J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 37-71). New York: Sharpe.

Lester, F. K. (1994). Musing about mathematical problem-solving research 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*, 6, 660-675.

Lester, F., Garofalo, J. y Kroll, D. (1989). Self-confidence, inetrest, beliefs and metacognition: Key influences on problem-solving behavior. En D. McLeod y V. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving* (pp.75-88). NY: Springer-Verlag.

Levine, S. C., Jordan, N. C. y Huttenlocher, J. (1992). Development of calculation abilities in young children. *Journal of Experimental Child Psychology*, *53*, 72-103.

Lewis, A. (1989). Training students to represent arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, *81*, 521-531.

Lewis, A. y Mayer, R. (1987). Students´miscomprehension of relational statements in arithmetic word problem. *Journal of Educational Psychology*, *79*, 363-371.

Liebeck, P. (1990). *How children learn mathematics: a guide for parents and teachers*. London: Penguin Books.

Light, P., Buckingham, N. y Robins, A. (1979). The conservation task as an interactional setting. *British Journal of Educational Psychology*, *49*, 304-310.

Lindvall, C. M. e Ibarra, C. G. (1980). Incorrect procedures used by primary grade pupils in solving open addition and subtraction sentences. *Journal for Research in Mathematics Education*, *11*, 50-62.

Lindvall, C. M., Tamburino, J. L. y Robinson, L. (1982, March). *An exploratory investigation of the effect of teaching primary grade children to use specific problem solving strategies in solving simple artihmetic story problems*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New York.

Lipman, M. (1996). *Natasha. Vygotskian dialogues*. New York. Teachers College Press.

Loef, M. y Carey, D. (1997). Young children´s perceptions of mathematics in problem-solving environments. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*, 8-25.

Long, K. y Kamii, C. (2001). The measurement of time: Children´s construction of transitivity, unititeration, and conservation of speed. *School Science and Mathematics*, *101*, 125-132.

Lowel, K., Verschaffel, L., Onghena, P. y De Corte, E. (2001). Strategic aspects of children´s numerosity judgement. *European Journal of Psychology of Education*, *16*, 233-255.

Luwel, K., Verschaffel, L., Onghena, P. y De Corte, E. (2003a). Analysing the adaptiveness of strategy choice/no choice method: The case of numerosity. *European Journal of Cognitive Psychology, 15 (4),* 511-537.

Luwel, K., Verschaffel, L., Onghena, P. y De Corte, E. (2003b). Flexibility in strategy use: Adaptation of numerosity judgment strategies to task characteristics. *European Journal of Cognitive Psychology, 15 (2)*, 247-266.

Luwel, K., Verschaffel, L., Onghena, P. y De Corte, E. (2003c). Strategic aspects of numerosity judgment: The effect of task characteristics. *Experimental Psychology, 50 (1)*, 63-75.

Maccini, P. y Hughes, Ch. (2000). Effects of a problem-solving strategy on the introductory algebra performance of secondary students with learning disabilities. *Learning Disabilities Reserach and Practice*, *15*, 10-21.

Mandler, G. (1984). *Mind and body: Psychology of emotion and stress*. NY: Norton.

Mandler, G. (1989). Affect and learning: Causes and consequences of emotional intercations. En D. McLeod y V. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving* (pp.3-19). NY: Springer-Verlag.

Markman, E. M. (1983). Two different kinds of hierarchical organization. En E. K. Scholnick (Comp.), *New Trends in Conceptual Representation. Challenges to Piaget´s theory?*. Londres: Erlbaum.

Martins-Mourao, A. y Cowan, R. (1998). The emergence of additive composition of number. *Educational Psychology, 18*, 377-389.

Masingila, J. O. (1993, April). *Comparing in school and out-of-school mathematics practice*. Paper presented at the meeting of the American Educational Research Association, Atlanta.

Masingila, J. O. y Silva, R. (2001). Teaching and learning school mathematics by building on students´out-of-school mathematics practice. En B. Atweh y H. Forgasz (Eds.), *Sociocultural research on mathematics education: An international perspective* (pp. 329-344). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Mayer, R. (1985). Mathematical ability. En R. J. Sternberg (Ed.), *Human abilities: An information processing approach* (pp. 127-150). New York: Freeman.

Mayer, R. E. (1983). *Thinking, problems solving, cognition*. NY: Freeman

Mayer, R. E., Tajika, H. y Stanley, C. (1991). Mathematical problem solving in Japan and the United States: A controlled comparison. *Journal of Educational Psychology, 83*, 69-72.

McClain, K. (2002a). Appendix: The object and the context: What our data are and where they come from. *Journal of the Learning Sciences, 11* (2-3), 163-185.

McClain, K. (2002b). Teacher´s and students´understanding: The role of tools and inscriptions in supporting effective communication. *Journal of the Learning Sciences, 11* (2-3), 217-249.

McClain, K. y Cobb, P. (2001). An analysis of development of sociomathematical norms in one first-grade classroom. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*, 236-266.

McGarrigle, J. y Donaldson, M. (1974). Conservation accidents. *Cognition*, *3*, 341-350.

McGarrigle, J., Grieve, R. y Hughes, M. (1978). Interpreting inclusion: A contribution to the study of the child´s cognitive and linguistic development. *Journal of Experimental Child Psychology*, *26*, 528-550.

McLaughlin, K. L. (1935). *A study of number ability in children of ages three to six*. Doctoral dissertation, University of Chicago: University of Chicago Press.

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575-596). NY: MacMillan.

McLeod, D. B. (1989). Beliefs, attitudes, and emotions: News views of affect in mathematics education. En D. A. McLeod y V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving* (pp. 20-36). New York: Springer-Verlag.

Mehler, J. y Bever, T. G. (1967). Cognitive capacity of very young children. *Science*, *158*, 141-142.

Menninger, K. (1969). *Number words and number symbols*. Cambridge, MA: MIT Press.

Mevarech, Z. R. y Stern, E. (1997). Interaction between knowledge and contexts on understanding abstract mathematical concepts. *Journal of Experimental Child Psychology, 65*, 68-95.

Meyer, M. R. (1989). Gender differences in mathematics. En M. M. Lindquist (Ed.), *Results from the fourth mathematics assessment of the national assessment of educational programs* (pp. 149-159). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Morales, R. V., Shute, V. J. y Pellegrino, J. W. (1985). Developmental differences in understanding and solving simple mathematics word problems. *Cognition and Instruction*, *2*, 1-39.

Moreau, S. y Coquin-Viennot, D. (2003). Comprehension of arithmetic word problems by fifth-grade pupils: Representations and selection of information. *British Journal of Educational Psychology*, *73*, 109-121.

Morgan, J. L. (1982). The development of mathematical intuition: Comments on Resnick´s paper. En T. P. Carpenter J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 195-200). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Moscovici, S. (1984). The phenomenon of social representations. En R. Farr y S. Moscovici (Eds.), *Social representations*. Cambridge: Cambridge University Press.

Mott, S. M. (1945). Number concepts of small children. *Mathematics Teacher*, *38*, 291-301.

Moyer, J. C., Sowder, L., Threadgill-Sowder, J. y Moyer, M. B. (1984). Story problem formats: Drawn versus verbal versus telegraphic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*, 342-351.

Mwangi, M. W. y Sweller, J. (1998). Learning to solve compare word problems: The effect of example format and generating self-explanations. *Cognition and Instruction*, *16*, 173-199.

Naito, M. y Miura, H. (2001). Japanese children´s numerical competencies: Age and schooling related influences on the development of number concepts and addition and skills. *Developmental Psychology*, *37*, 217-230.

National Council of Supervisors of Mathematics. (1977). Position paper basic skills. *Arithmetic Teacher*, *25*, 19-22.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Nelson, G. T. (1974). The effects of diagram drawing and translation on pupils´mathematical problem-solving performance. *Dissertation Abstracts International, 35*, 4149A. (University Microfilms No.75-1234).

Nesher, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems. En T. H. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 25-38). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Nesher, P. S. y Katriel, T. (1978, September). *Two cognitive modes in arithmetic work problem solving*. Paper presented at the second annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Osnabruck, West Germany.

Nesher, P. y Katriel, T. (1977). A semantic analysis of addition and subtraction word problems in arithmetic. *Educational Studies in Mathematics*, *8*, 251-269.

Nesher, P., Greeno, J. G. y Riley, M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, *13*, 373-394.

Nickerson, R. S. (1988). Counting, computing, and the representation of numbers. *Human Factor*, *30* (2), 181-199.

Nunes, T. (1993). The socio-cultural context of mathematical thinking: Research findings and educational implications. En A. Bishop, K. Hart, S. German, T. Nunes (Eds.), *Significant influences on children´s learning of mathematics* (pp.25-34). Paris, Science and Technology Education Document Series, UNESCO, No. 47.

Nunes, T. N., Schliemann, A. D. y Carraher, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. New York: Cambridge University Press.

Nunes, T. y Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics*. Oxford: Blackwell.

Nunes, T., Light, P. y Mason, J. (1995). Measurement as a social process. *Cognition and Instruction*, *13*, 585-587.

OCDE (2001). *Knowledge and skills for life: First results from PISA 2000*.

Okamoto, Y. (1996). Modeling children´s understanding of quantitative relations in texts: A developmental perspective. *Cognition and Instruction*, *14*, 409-440.

Palincsar, A. S. (1986). The role of dialogue in providing scaffolded instruction. *Educational Psychologist*, *21*, 73-98.

Palincsar, A. S. y Brown, A. L. (1984). Reciprocal teaching of comprehension-fostering and comprehension-monitoring activities. *Cognition and Instruction*, *1*, 117-175.

Papert, S. (1991). Situating Constructionism En I. Harel y S. Papert (Eds.), *Constructionism* (pp.1-12). Norwood, NJ: Ablex.

Pappas, S., Ginsburg, H. y Jiang, M. (2003). SES differences in young children´s metacognition in the context of mathematical problem solving. *Cognitive Development*, *18*, 431-450.

Pascual-Leone, J. (1970). Constructive problems for constructive theories: The current relevance of Piaget´s work and a critique of information-processing simulation psychology. En R. Kluwe y H. Spada (Eds.), *Developmental models of thinking* (pp. 38-54) .Londres: Academic Press.

Perkins, D. N. (1986). *Knowledge as design*. Hillsadle, NJ: Erlbaum.

Perret-Clermont, A. N., Perret, J. F. y Bell, N. (1991). The social construction of meaning and cognitive activity in elementary school children. En L. Resnick, J. Levine y S. Teasley (Eds.), *Perspectives on socially shared cognition* (pp. 41-62). Washington, DC: American Psychological Association.

Peterson, P. L., Carpenter, T. P. y Fennema, E. (1989). Teachers´knowledge of students´knowledge in mathematics problem solving: Correlational and case analyses. *Journal of Educational Psychology*, *81*, 558-569.

Peterson, P. L., Fennema, E., Carpenter, T. P. y Loef, M. (1989). Teachers´pedagogical content beliefs in mathematics. *Cognition and Instruction*, *6*, 1-40.

Pettito, A. (1979). *Knowledge of arithmetic among schooled and unschooled African tailors and cloth-merchants.* Unpublished doctoral dissertation. Cornell University, Ithaca, NY.

Piaget, J. (1951). *Play, dreams, and imitation in childhood*. New York: Norton.

Piaget, J. (1952). *The child´s conception of number*. London: Routledge & Kegan Paul.

Piaget, J. (1965). *The child´s conception of number*. New York: Norton.

Piaget, J. (1969). *The child´s conception of physical causality.* Totowa, NJ: Littlefield, Adams.

Piaget, J. (1970). *Science of education and the psychology of the child*. New York: Orion Press.

Piaget, J. (1971). *Biology and knowledge*. Chicago: University Chicago Press.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1971). *Mental imagery in the child*. London: Routledge & Kegan Paul.

Piaget, J. y Szeminska, A. (1962). *The development psychology of number*. Tokyo: Kokudosha.

Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1948). *The child´s conception of geometry*. London: Routledge & Kegan Paul.

Polya, G. (1957). *How to solve it*. Garden City, NY: Doubleday-Anchor.

Posner, J. (1982). The development of mathematical knowledge in two West African societes. *Child Development*, *53*, 200-208.

Proudfit, L. (1981). The examination of problem-solving processes by fifth grade children and its effects on problem-solving performance. *Dissertation Abstracts International*, *41*, 3932A. (University Microfilms No. 8105942).

Putnam, R. T., deBettencourt, L. U. y Leinhardt, G. (1990). Understanding of derived-fact strategies in addition and subtraction. *Cognition and Instruction*, *7*, 245-285.

Quintero, A. H. (1983). Conceptual understanding in solving two-step word problems with a ratio. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*, 102-112.

Rathmell, E. C. (1978). Using thinking strategies to teach the basic facts. En M. Suydman y R. Reyes (Eds.), *Developing computational skills* (pp. 13-38). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Rathmell, E. C. (1986). Helping children learn to solve story problems. En A. Zollman, W. Speer y J. Meyer (Eds.), *The Fifth Mathematics Methods Conference papers* (pp. 101-109). Bowling Green, OH: Bowling Green State University.

Reece, C. S. y Kamii, C. (2001). The measurement of volume: Why do young children measure inaccurately?. *School Science and Mathematics*, *101*, 356-361.

Reed, H. J. y Lave, J. (1979). Arithmetic as a tool for investigating relations between culture and cognition. *American Ethnologist*, *6*, 568-582.

Reed, S. K. (1999). *Word problems: Reserach and curriculum reform*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Resnick, L. (1982). Syntax and semantics in learning to subtract. En T. P. Carpenter. J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 136-155). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Resnick, L. (1983). A developmental theory of number understanding. En H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp.109-151). New York: Academic Press.

Resnick, L. (1986). The development of mathematical intuition. En M. Perlmutter (Ed.), *Perspectives on intellectual development: The Minnesota symposia on child psychology* Vol. 19. (pp. 159-194). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Resnick, L. (1987). Learning in school and out. *Educational Researcher*, *16*, 13-20.

Resnick, L. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist*, *44*, 162-169.

Resnick, L. (1992). From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 275-323). Hillsdale, NJ. Erlbaum.

Resnick, L. (1994). Situated rationalism: Biological and social preparation for learning. En L. A. Hirschfeld y S. A. Gelman (Eds.*), Mapping the mind: Domain. Specificity in cognition and culture* (pp. 474-493). New York: Cambridge University Press.

Resnick, L. y Omanson, S. F. (1987). Learning to understand arithmetic. En R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology* (pp. 41-95). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Resnick, L. y Singer, J. (1993). Protoquantitative origins of ratio reasoning. En T. P. Carpenter, E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: an integration of research* (pp. 42-59). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Resnick, L., Levine, J. y Teasley, S. (Eds.) . (1991). *Perspectives on socially shared cognition*. Washington, DC: American Psychological Association.

Resnick, M. y Ocko, S. (1991). LEGO/Logo: Learning through and about design. En I. Harel y S. Papert (Eds.), *Constructionism* (pp.141-150). Norwood, NJ: Ablex.

Reusser, K. y Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution.The social rationality of mathematical modeling in schools. *Learning and Instruction*, *7*, 309-327.

Richard, E. S. (1964). *An inventory of the number knowledge of beginning first grade school children, based on the performance of selected number tasks.* Unpublished doctoral dissertation, Indiana University and Indiana State University.

Riley, M. S. y Greeno, J. G. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction*, *5*, 49-101.

Riley, M. S., Greeno, J. G. y Heller, J. I. (1983). Development of children´s problem solving ability in arithmetic. En H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). New York: Academic Press.

Rodríguez, P. (1992). *Análisis de los procesos cognitivos que conducen a la adquisición y desarrollo de la propiedad conmutativa.* Madrid: Universidad Complutense.

Rogoff, B. (1990). *Apprenticeship in thinking. Cognitive development in social context*. New York: Oxford University Press.

Rogoff, B., Mistry, J., Goncu, A. y Mosier, C. (1993). Guided participation in cultural activity by toddlers and caregivers. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, 58 (8, Serial No. 236).

Rosenthal, D. J. y Resnick, L. B. (1974). Children´s solution processes in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 66*, 812-825.

Saxe, G. B. (1982). Developing forms of arithmetical thought among the Oksapmin of Papua New Guinea. *Developmental Psychology, 18*, 583-594.

Saxe, G. B. (1991). *Culture and cognitive development: Studies in mathematical understanding*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Saxe, G. B. (2002). Children´s developing mathematics in collective practices. A framework for analysis. *Journal of the Learning Sciences, 11*, 275-300.

Saxe, G. B. y Gearhart, M. (1990). The development of topological concepts in unschooled straw weavers. *British Journal of Developmental Psychology*, *8*, 251-258.

Saxe, G. B. y Guberman, S. R. (1998). Studying mathematics learning in collective activity. *Learning and Instruction, 8,* 489-501.

Saxe, G. B., Gearhart, M. y Seltzer, M. (1999). Relations between classroom practices and student learning in the domain of fractions. *Cognition and Instruction, 17,* 1-24.

Saxe, G. B., Guberman, S. R. y Gearhart, M. (1987). Social processes in early number development. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, *52* (2, Serial No. 216).

Schaeffer, B., Eggleston, V. H. y Scott, J. L. (1974). Number development in young children. *Cognitive Psychology*, *16*, 357-379.

Schifter, D. (1997, April). *Developing operation sense as a foundation for Algebra*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago.

Schifter, D. y Fosnot, C. T. (1993). *Reconstructing mathematics education: Stories of teachers meeting the challenge of reform.* New York: Teachers College Press.

Schliemann, A. D. (1995). Some concerns about bringing everyday mathematics to mathematics education. En L. Meira y D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the XIX International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp 45-60). Recife, Brazil.

Schliemann, A. D. (1998). Logic of meanings and situated cognition. *Learning and Instruction, 8,* 549-560.

Schliemann, A. D. (2002). Representational tools and mathematics understanding. *Journal of the Learning Sciences, 11*, 301-317.

Schliemann, A. D. y Carraher, D. (2002). The evolution of mathematical reasoning: Everyday versus idealized understandings. *Development Review, 22*, 242-266.

Schliemann, A. D. y Carraher, D. W. (1992). Proportional reasoning in and out of school. En P. Light y G. Butterworth (Eds.), *Context and cognition: Ways of learning and knowing* (pp. 47-73). New York: Harvester Wheatsheaf.

Schmalhofer, F., Mc Daniel, M. A. y Keffe, D. (2002). A unified model for predictive and bridging inferences. *Discourse Processes*, *33*, 105-132.

Schoenfeld, A. (1983). Beyond the purely cognitive: Belief systems, social cognitions, and metacognition as driving forces in intellectual performance. *Cognitive Science*, *7*, 329-363.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. NY: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1988). When good teaching leads to bad results: The disasters of "well-taught" mathematics courses. *Educational Psychologist*, *23* (2), 145-166.

Schoenfeld, A. (1989). Explorations of students´mathematical behavior and beliefs. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*, 338-355.

Schommer, M. (1990). Effects of beliefs about the nature of knowledge on comprehension. *Journal of Educational Psychology*, *82*, 498-504.

Schommer, M. (1993). Epistemological development and academic performance among secondary students. *Journal of Educational Psychology*, *85*, 406-411.

Schommer, M. y Walker, K. (1995). Are epistemological beliefs similar across domains. *Journal of Educational Psychology*, *87*, 424-432.

Schommer, M., Crouse, A. y Rhodes, N. (1992). Epistemological beliefs and mathematical text comprehension: Believing it is simple does not make it so. *Journal of Educational Psychology*, *84*, 435-443.

Schön, D. A. (1987). *Educating the reflective practitioner*. San Francisco: Jossey-Bass.

Scribner, S. (1984). Studying working intelligence. En R. Rogoff y J. Lave (Eds.), *Everyday cognition: Its development in social context* (pp. 9-40). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Scribner, S. (1986). Thinking in action: Some characteristics of practical thought. En R. J. Sternberg y R. K. Wagner (Eds.), *Practical intelligence: Nature and origins of competence in the everyday world* (pp. 13-30). Cambridge: Cambridge University Press.

Secada, W. G., Fuson, K. C. y Hall, J. W. (1983). The transition from counting-all to counting-on in addition. *Journal for Research in Mathematics Education*, *4*, 47-57.

Secretaría de Educación Pública (2002). *Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Cuarto grado*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (2002). *Libro para el maestro. Matemáticas. Primer grado*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (2002). *Libro para el maestro. Matemáticas. Segundo grado*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (2002). *Libro para el maestro. Matemáticas. Tercer grado*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (2002). *Libro para el maestro. Matemáticas. Cuarto grado*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (2002). *Matemáticas. Cuarto grado*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (2002). *Matemáticas. Cuarto grado. Recortable*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (2002). *Matemáticas. Primer grado*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (2002). *Matemáticas. Primer grado. Recortable*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (2002). *Matemáticas. Segundo grado.* México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (2002). *Matemáticas. Segundo grado. Recortable*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (2002). *Matemáticas. Tercer grado.* México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (2002). *Matemáticas. Tercer grado. Recortable*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (2002). *Avance programático. Cuarto grado*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (2002). *Avance programático. Primer grado*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (2002). *Avance programático. Segundo grado*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (2002). *Avance programático. Tercer grado*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (2002). *Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Primer grado*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (2002). *Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Segundo grado*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (2002). *Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Tercer grado*. México: SEP.

Seeger, F. (1998). Representations in the mathematics classroom: Reflections and constructions. En F. Seeger y J. Voigt (Eds.), *The culture of the matehmatics classroom* (pp. 308- 343). New York, NY: Cambridge University Press.

Segers, M., Dochy, F. y De Corte, E. (1999). Assessment practices and students´ knowledge profiles in a problem-based curriculum. *Learning Environments Research, 2*, 191-213.

Selva, A. C. y Brandao, A. C. (2000). A notacao escrita na resolucao de problemas por criancas pre-escolares. *Psicologia: Teoría e Pesquisa, 16*, 241-249.

Seo, K-H. y Ginsburg, H. P. (2003). “You´ve got to carefully read the math sentence ...” Classroom context and children´s interpretations of the equals sign. En A. J. Baroody y A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise. Studies in mathematical thinking and learning*. (pp. 161-187). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Sfard, A. (2001). On the gains and dilemmas of calling different things by the same name: A commentary. *Cognitive Science Quarterly, 1*, 359-388.

Sfard, A. y McClain, K. (2002). Analyzing tools: Perspectives on the role of designed artifacts in mathematics learning. *Journal of the Learning Sciences, 11*, 153-161.

Shuell, T. J. (1992). Designing instructional computing systems for meaningful learning. En M. Jones y P. H. Wine (Eds.), *Adaptive learning environments: Foundations and frontiers* (NATO ASI Series F: Computer and Systems Sciences, Vol. 85 (pp. 19-54). Berlin: Springer-Verlag.

Siegal, M. (2003). Cognitive development. En A. Slater y G. Bremner (Eds.), *An introduction to developmental psychology* (pp. 189-210). Malden, MA: Blackwell.

Siegler, R. (1983). Information processing approaches to development. En P. H. Mussen (Ed.), *Handbook of child psychology: Vol. 1. History, theory and methods* (pp.58-76). New York, NY: Wiley.

Siegler, R. S. (1987). Strategy choices in subtraction. En J. S. Sloboda y D. Rogers (Eds.), *Cognitive processes in mathematics* (pp. 81-106). New York: Oxford University Press.

Siegler, R. S. (1988). Individual differences in strategy choices: Good students, not so-good students and perfectionist. *Child Development, 59*, 833-851.

Siegler, R. S. y Shrager, J. (1984). Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do?. En C. Sophian (Ed.), *Origins of cognitive skills* (pp. 229-293). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Sinclair, A., Siegrist, F. y Sinclair, H. (1983). Young children´s ideas about the written number system. En D. Rogers y J. A. Sloboda (Eds.), *The acquisiton of symbolic skills*. (pp. 535-541). New York: Plenum.

Singer, M. y Kintsch, W. (2001). Text retrieval: A theoretical exploration. *Discourse Processes*, *31*, 27-59.

Smedslund, J. (1966). Microanalysis of concrete reasoning. The difficulty of some combinatios of addition and subtraction of one unit. *Scandinavian Journal of Psychology, 7*, 145-156.

Sophian, C. (1992). Learning about numbers: Lessons for mathematics education from preschool number development. En J. Bideaud, C. Meljac y J. P. Fischer (Eds.), *Pathways to number* (pp. 19-40). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Sophian, C. y McCorgary, P. (1994). Part-whole knowledge and early arithmetic problem solving. *Cognition and Instruction*, *12*, 3-33.

Sophian, C. y Vong, K. I. (1995). The parts and wholes of arithmetic story problems: developing knowledge in the preschool years. *Cognition and Instruction*, *13*, 469-477.

Starkey, P. y Gelman, R. (1982). The development of addition and subtraction abilities prior to formal schooling in arithmetic. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 99-115). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Starkey, P., y Gelman, R. (1982). The development of addition and subtraction abilities prior to formal schooling in arithmetic. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg

(Eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective* (pp. 99-116). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Steffe, L. P., Thompson, P. W. y Richards, J. (1982). Children´s counting in arithmetical problem solving. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 83-97). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Steffe, L. y Johnson, D. (1971). Problem solving performances of first-grade children. *Journal for Research in Mathematics Education*, *2*, 50-64.

Steinberg, R. M. (1984). A teaching experiment of the learning of addition and subtraction facts (Doctoral dissertation, University of Wisconsin at Madison, 1983). *Dissertation Abstracts International*, *44*, 3313ª.

Steinberg, R. M. (1985). Instruction on derived facts strategies in addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*, 337-355.

Stenning, K., Greeno, J., Hall, R., Sommerfield, M. y Wiebe, M. (2002). Coordinating mathematical with biological multiplication: Conceptual learning as the development of heterogeneous reasoning systems. En P. Brna y M. Baker (Eds.), *The role of communication in learning to model* (pp. 3-48). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Stern, E. (1993). What make certain arithmetic word problems involving the comparison of sets so hard for children?. *Journal of Educational Psychology*, *85*, 7-23.

Stern, E., y Lehrndorfer, A. (1992). The role of situational context in solving word problems. *Cognitive Development*, *7*, 259-268.

Stevenson, H. W., Lee, S-Y., y Stigler, J. W. (1986). Mathematics achievement of Chinese, Japanese, and American children. *Science*, *231*, 593-699.

Streefland, L. (1991a). *Fractions in realistic mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

Streefland, L. (1991b). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A paradigm of developmental research*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Streefland, L. (Ed.) (1991c). *Realistic Mathematics Education in primary school. On the occasion of the opening of the Freudenthal Institute*. Utrecht, The Netherlands: Utrecht University, Freudenthal Institute.

Strohecker, C. (1991). Elucidating styles of thinking about topology through thinking about knots. En I. Harel y S. Papert (Eds.), *Constructionism* (pp. 215-233). Norwood, NJ: Ablex.

Suppes, P., Loftus, E. F. y Jerman, M. (1969). Problem solving on a computer-based teletype. *Educational Studies in Mathematics, 2*, 1-15.

Suppes, P., y Groen, G. (1967). Some counting models for first grade performance data on simple addition facts. En J. M. Scanduva (Ed.), *Research in mathematics education* (35-43). Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.

Tamburino, J. L. (1982). *The effects of knowledge-based instruction on the abilities of primary grade children in arithmetic word problem solving*. Doctoral dissertation, University of Pittsburgh, Pittsburgh.

Thompson, I. (1994). Young children´s idiosyncratic written algorithms for addition. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 323-345.

Thornton, C. A. (1990). Solution strategies: Subtraction numbers facts. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 241-263.

Thornton, C. A. y Smith, P. J. (1988). Action research: Strategies for learning subtraction facts. *Arithmetic Teacher, 35* (8), 8-12.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction. The Wiskobas Projects*. Dordrecht: Reidel.

Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics program for primary education. En L. Streefland, *Realistic mathematics education in primary schools* (pp. 21-56). Utrecht, The Netherlands: Cd- Press, Freudenthal Institute.

Treffers, A., De Moor, E. y Feijs, E. (1989). *Proeve van een nationaal programma voor het rekenwiskundeonderwijs op de basisschool. Deel I: Overzichtleerdoelen* (Plan for a national curriculum for mathematics education at the primary school. Part 1: Overview of objectives). Tilburg, The Netherlands: Zwijsen.

Turner, J., Cox, K., DiCintio, M., Meyer, D., Logan, C. y Thomas, C. (1998). Creating contexts for involvement in mathematics. *Journal of Educationsl Psychology*, 90, 730-745.

Uttal, D. H., Lummis, M. y Stevenson, H. W. (1988). Low and high mathematics achievement in Japanese, Chinese, and American elementary-school children. *Developmental Psychology*, *24*, 335-342.

Uttal, D. H., Scudder, K. V. y DeLoache, J. S. (1997). Manipulatives as symbols: a new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *18*, 37-54.

Uttal, D., Liu, L. y DeLoache, J. (1999). Taking a hard look at concreteness: Do concrete objects help young children learn symbolic relations?. En L. Balter y C. Tamis-LeMonda (Eds.), *Child Psychology: A handbook of contemporary issues* (pp. 177-192). Philadelphia, PA: Psychology Press.

van der Brink, J. (1991). Didactic constructivism. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 195-227). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

van Dijk, T. A. y Kintsch, W. (1983). *Strategies of discourse comprehension*. New York: Academic Press.

van Essen, G. y Hamaker, Ch. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *Journal of Educational Research*, *83*, 301-312.

van Oers, B. (1994). Semiotic activity of young children in play: the construction and use of schematic representations. *European Early Childhood Educational Research Journal*, *2*, 19-34.

van Oers, B. (1996). Are you sure? the promotion of mathematical thinking in the play activities of young children. *European Early Childhood Educational Research Journal, 4*, 71-89.

van Oers, B. (1998). From context to contextualizing. *Learning and Instruction*, *8,* 473-488.

van Oers, B. (2001). Contextualization for abstraction. *Cognitive Science Quarterly*, 279-305.

van Oers, B. y Forman, E. (1998). Introduction to the special issue of learning and instruction. *Learning and Instruction, 8,* 469-472.

van-Dooren, W., Verschaffel, L. y Onghena, P. (2002). The impact of preservice teachers´content knowledge on their evaluation of students´strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal for Reserach in Mathematics Education, 33*, 319-351.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 39-59). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior, 17*, 167-181.

Verschaffel, L. y De Corte, E. (1990). Do non-semantic factors also influence the solution process of addition and subtraction word problems?. En H. Mandl, E. De Corte, N. Bennett y H. E. Friedrich (Eds.), *Learning and instruction, European research in an international context* (pp. 415-429). Oxford: Pergamon.

Verschaffel, L. y De Corte, E. (1997). Word problems: A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the Primary School?. En T. Nunes y P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics* (pp. 69-97). Hove: UK: Psychology Press.

Verschaffel, L., De Corte, E. y Borghart, I. (1997). Pre-service teachers´conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modelling of school word problems. *Learning and Instruction*, *7*, 339-359.

Verschaffel, L., De Corte, E. y Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction*, *4*, 273-294.

Verschaffel, L., De Corte, E. y Pawels, A. (1992). Solving compare problems: an eye movement test of Lewis and Mayer´s consistency hypothesis. *Journal of Educational Psychology*, *84*, 85-94.

Verschaffel, L., De Corte, E. y Vierstraete, H. (1999). Upper elementary school pupils´difficulties in modeling and solving nonstandard additive word problems involving ordinal numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*, 265-285.

Verschaffel, L., De Corte, E., Lamote, Ch. y Dherdt, N. (1998). The acquisition and use of an adaptive strategy for estimating numerosity. *European Journal of Psychology of Education*, *13*, 347-370.

Verschaffel, L., De Corte, E., Lasure, S., Van-Vaerenbergh, G., Bogaerts, H. y Ratinckx, E. (1999). Learning to solve mathematical application problems: A design experiment with fifth graders. *Mathematical Thinking and Learning*, *1 (3)*, 195-229.

Vilette, B. (2002). Do young children grasp the inverse relationship between addition and subtraction?. Evidence against early arithmetic. *Cognitive Development*, *17*, 1365-1383.

Vlahovic-Stetic, V. (1999). Word-problem solving as a function of problem type, situational context and drawing. *Studia Psychologica, 41* (1), 49-62.

Vosniadou, S. (1992). Knowledge acquisition and conceptual change. *Applied Psychology: An International Journal*, *41*, 347-357.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wakeley, A., Rivera, S. y Langer, J. (2000). Can young infants addand subtract?. *Child Development*, *71*, 1525-1534.

Warfield, J. (2001). Teaching kindergarten children to solve word problems. *Early Childhood Education Journal, 28*, 161-167.

Wearne, D. y Hiebert, J. (1988). A cognitive approach to meaningful mathematics instruction: Testing a local theory using decimal numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*, 371-384.

Wertsch, J. V. (1979). From social interaction to higher psychological processes: A clarification and application of Vygostky´s theory. *Human Development*, *22*, 1-22.

Wertsch, J. V. (1984). The zone of proximal development: Some conceptual issues. En B. Rogoff y J. V. Wertsch (Eds.), *Children´s learning in the "zone of proximal development"* (pp. 7-18). San Francisco: Jossey-Bass.

Wertsch, J. V. (1991). Sociocultural setting and the zone of proximal development: the problem of text-based realities. En L. T. Landsmann (Ed.), *Culture, schooling, and psychological development* (pp. 71-86). Norwood: Ablex.

Whiting, B. y Whiting, J. (1975). *Children of six cultures*. Cambridge, MA: Harvard Umiversity Press.

Wilkins, J. L., Baroody, A. J. y Tiilikainen, S. (2001). Kindergartners´understanding of additive commutativity within the context of word problems. *Journal of Experimental Child Psychology, 79*, 23-36.

Willis, G. B. y Fuson, K. C. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology*, *80*, 192-201.

Winer, G. A. (1980). Class-inclusion reasoning in children: A review of the empirical literature. *Child Development*, *51*, 309-328.

Woleck, K. R. (2001). Listen to their pictures. An investigation of children´s mathematical drawings. En NCTM (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp.215-227). Yearbook 2001. Reston, VA: NCTM

Wolters, M. A. D. (1983). The part-whole schema and arithmetical problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 127-138.

Wood, D., Bruner, J. S. y Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem-solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, *17*, 89-100.

Wrigth, J. P. y Wrigth, C. D. (1986). Personalized verbal problems: An application of the language experience approach. *Journal of Educational Research, 79*, 358-362.

Wynn, K. (1990). Children´s understanding of counting. *Cognition*, *36*, 155-193.

Wynn, K. (1992). Do infants have numerical expectations or just perceptual preferences?: Comment. *Developmental Science*, *5,* 207-209.

Wynn, K. (2000). Findings of addition and subtraction in infants are robust and consistent: Reply to Wakeley, Rivera, y Langer. *Child Development*, *71*, 1535-1536.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27,* 458-477.

Yackel, E., Cobb, P. y Wood, T. (1998). The interactive constitution of mathematical meaning in one second grade classroom: An illustrative example. *Journal of Mathematical Behavior, 17,* 469-488.

Yancey, A. V. (1981). *Pupil-generated diagrams as a strategy for solving word problems in elementary mathematics*. University of Louisville. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 260922).

Zhou, X. y Zhang, M. (2000). Effects of analyzing quantity sets and generating diagrams in relational word problem solving. *Psychological Science China, 23*, 611-618.

Zhou, X. y Zhang, M. (2003). Influence of situation complexity on solving addition and subtraction word problems. *Acta Psychologica Sinica, 35* (2), 195-200.

Zweng, M. J., Geraghty, J. y Turner, J. (1979). *Children´s strategies of solving verbal problems. Final Report*. Washington, DC: National Institute of Education. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 178359).

APENDICE

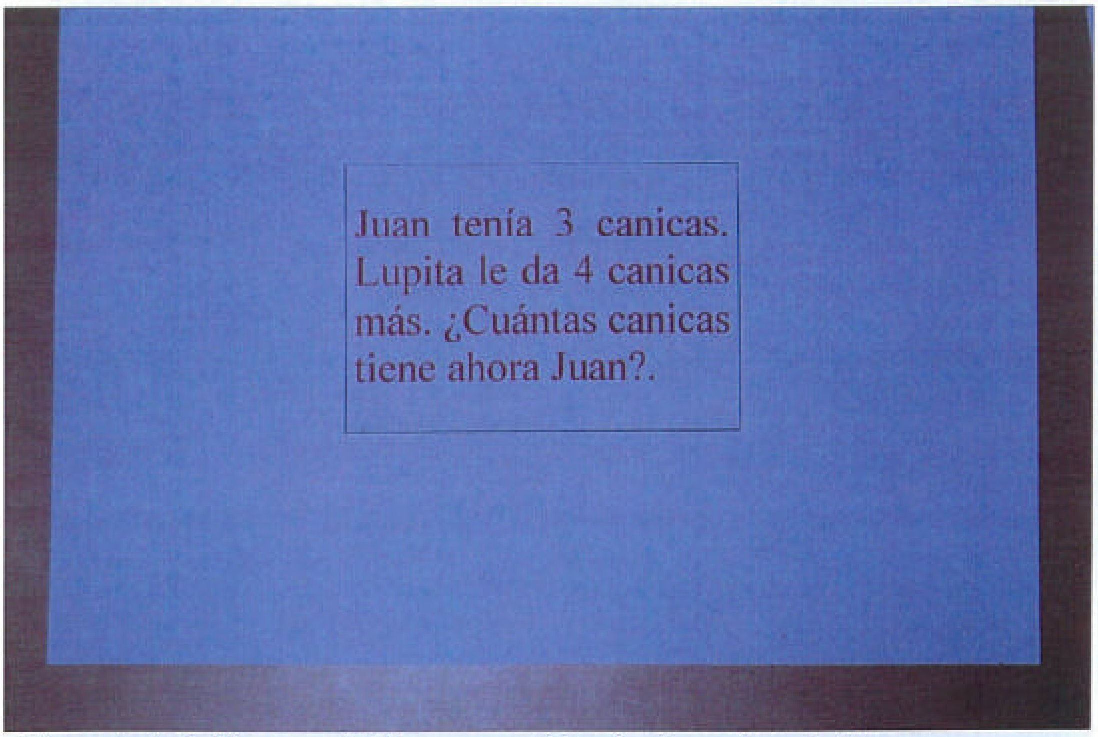

Figura A. 1. Problema verbal de suma con la incógnita en el resultado.

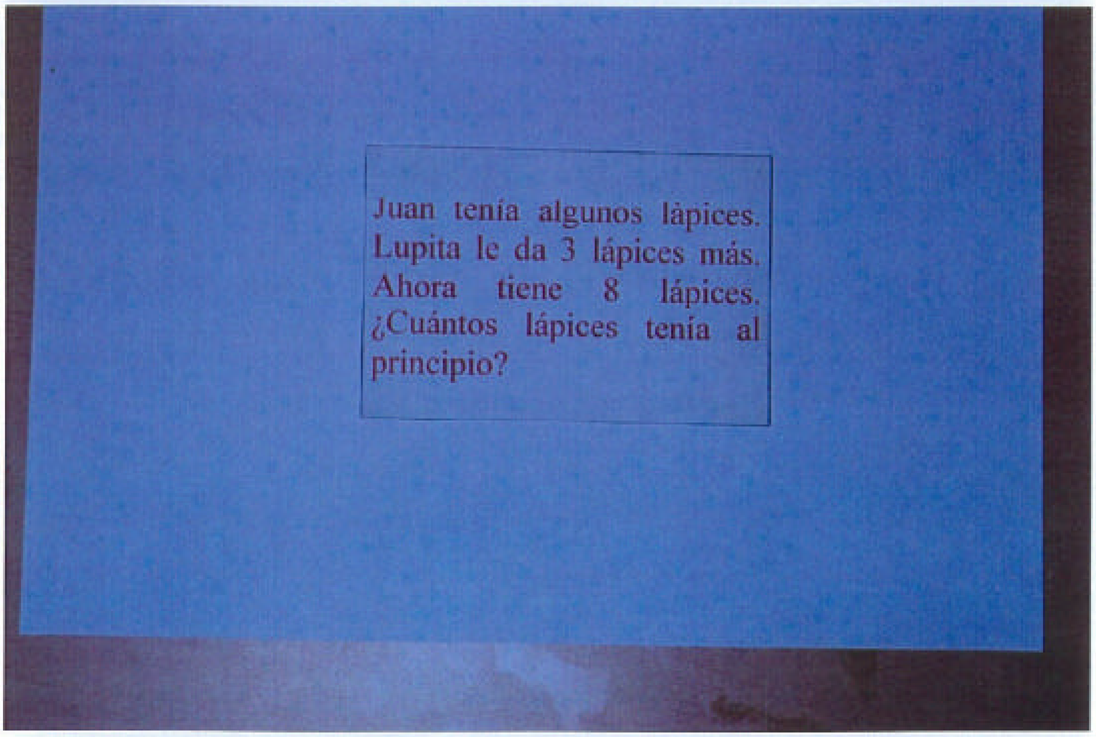

Figura A. 2. Problema verbal de suma con la incógnita en el inicio.

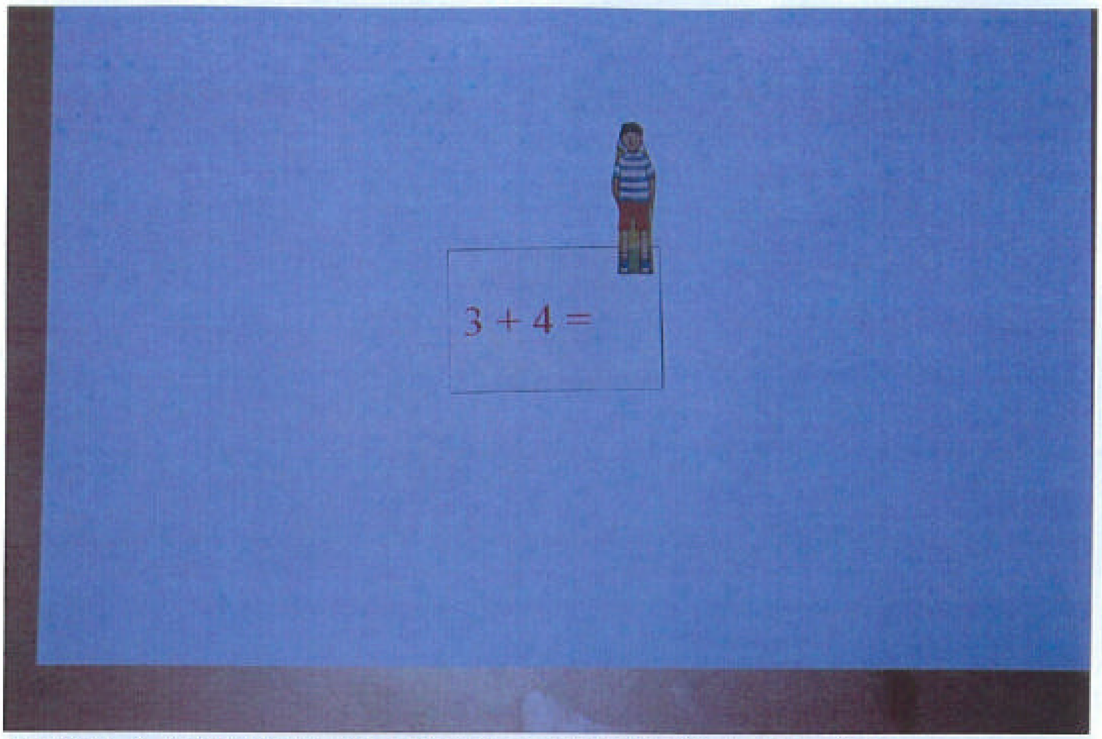

Figura A. 3. Problema numérico de suma con la incógnita en el resultado.

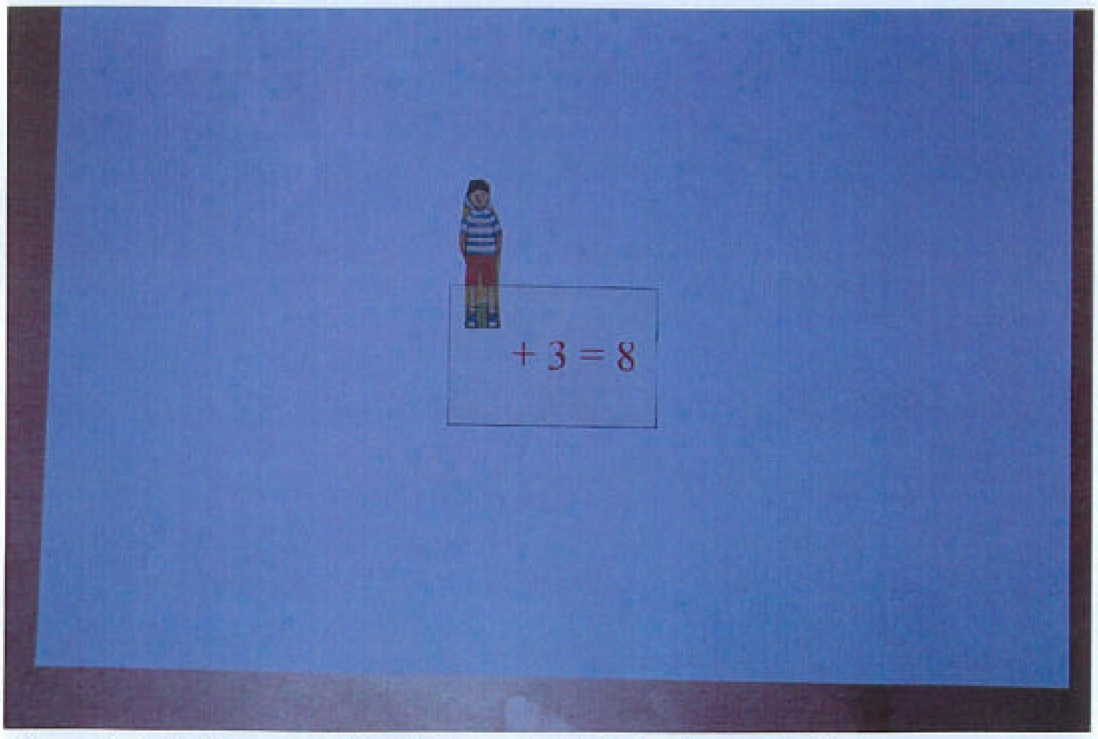

Figura A. 4. Problema numérico de suma con la incógnita en el inicio.

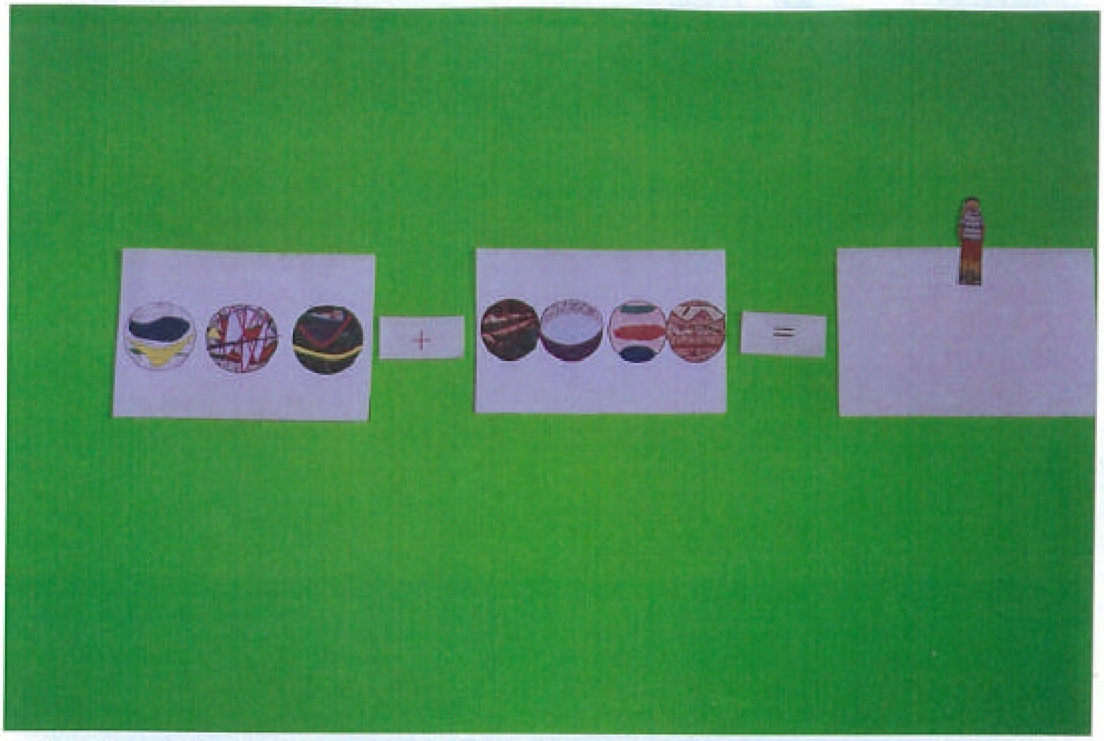

Figura A. 5. Problema con dibujos de suma con la incógnita en el resultado.

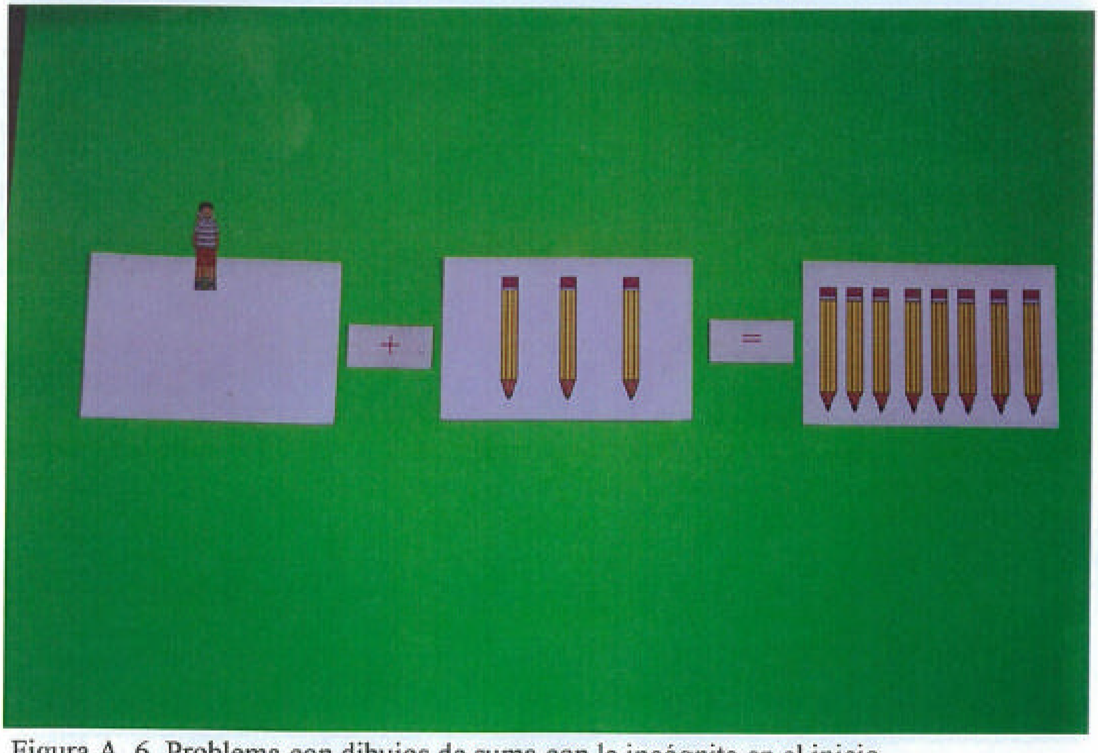

Figura A. 6. Problema con dibujos de suma con la incógnita en el inicio.

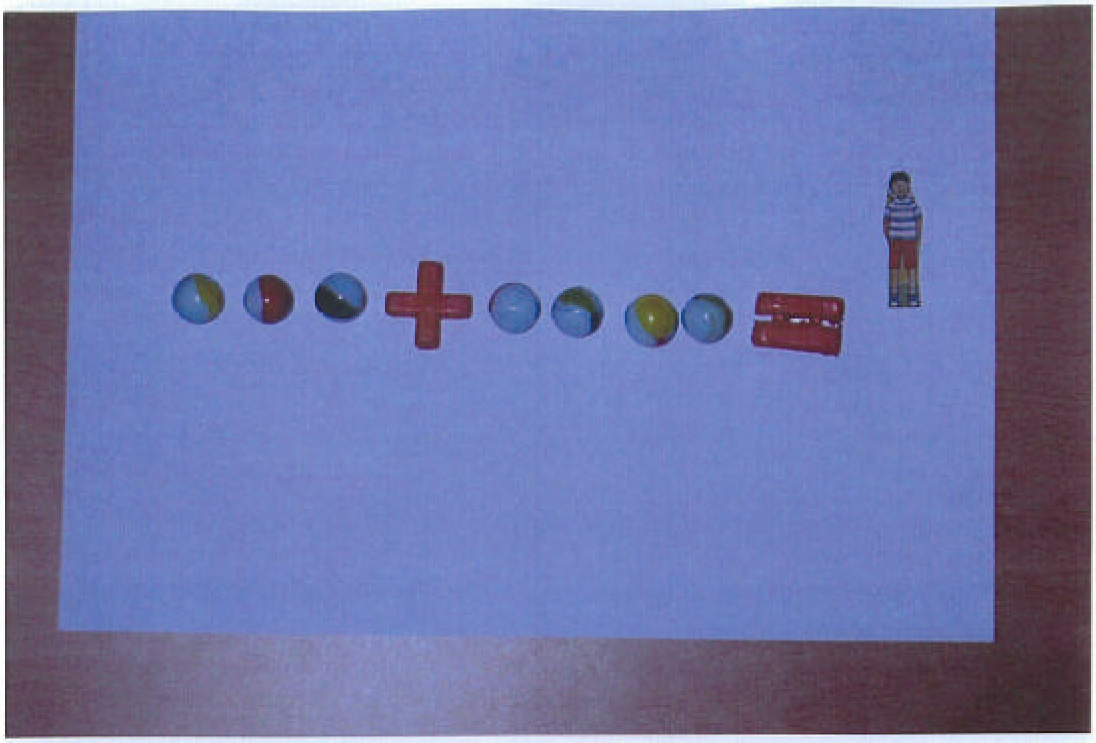

Figura A. 7. Problema concreto de suma con la incógnita en el resultado.

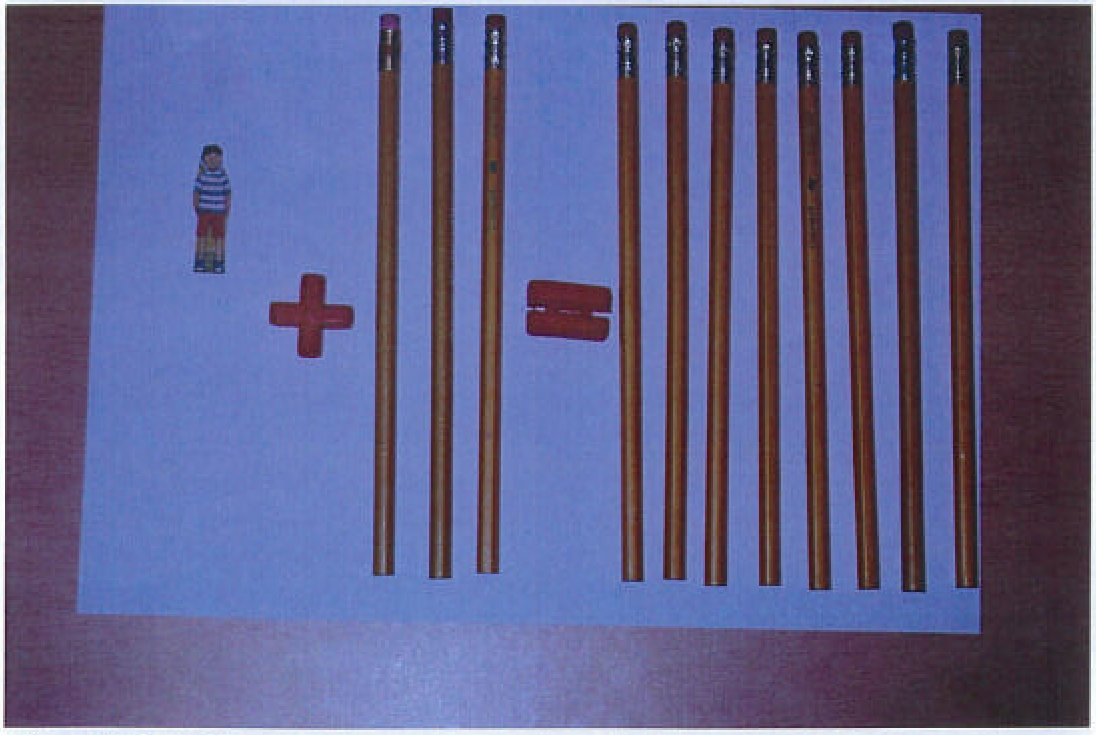

Figura A. 8. Problema concreto de suma con la incógnita en el inicio.

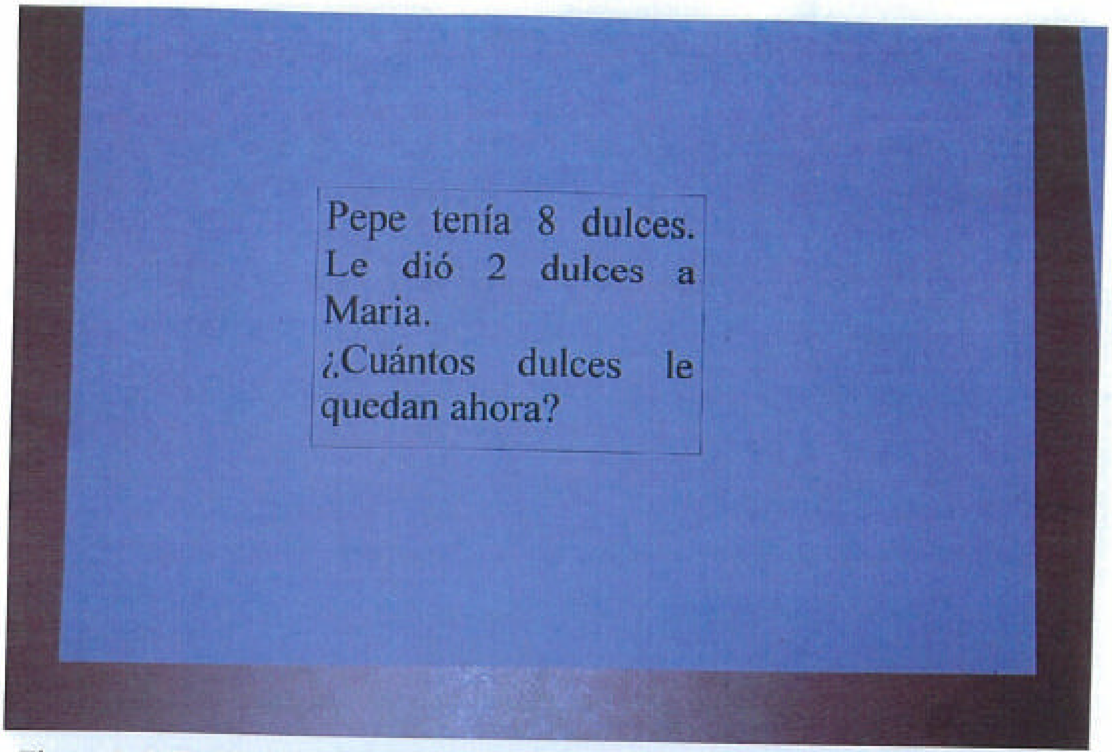

Figura A. 9. Problema verbal de resta con la incógnita en el resultado.

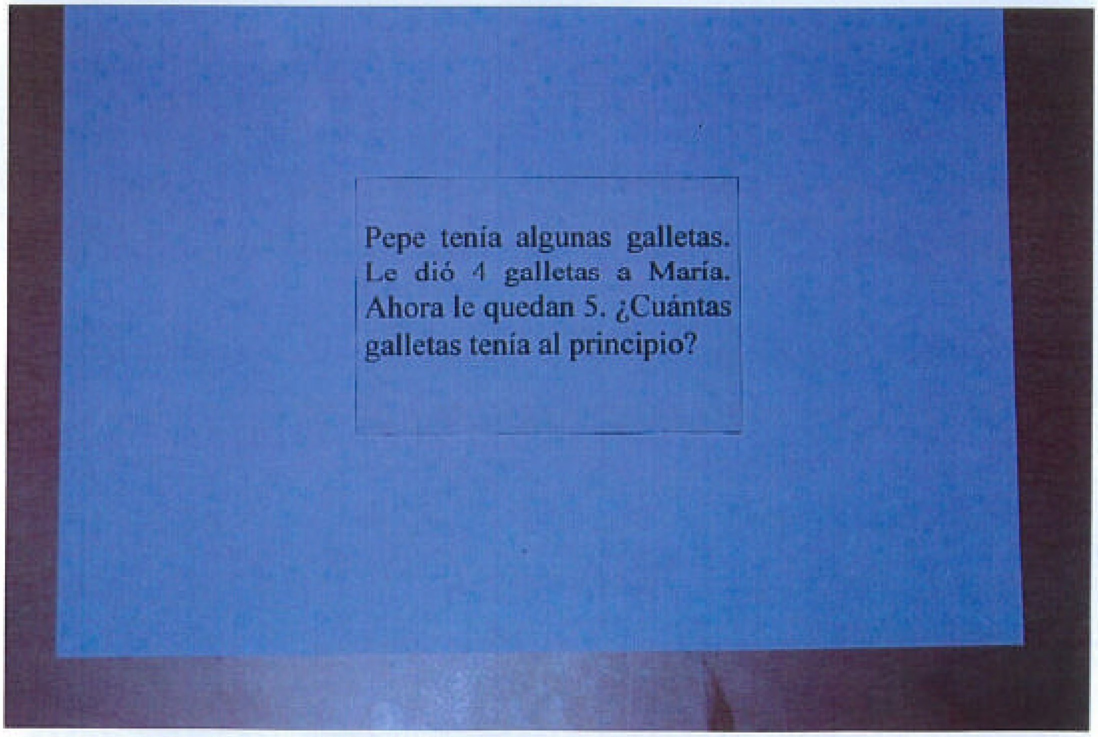

Figura A. 10. Problema verbal de resta con la incógnita en el inicio.

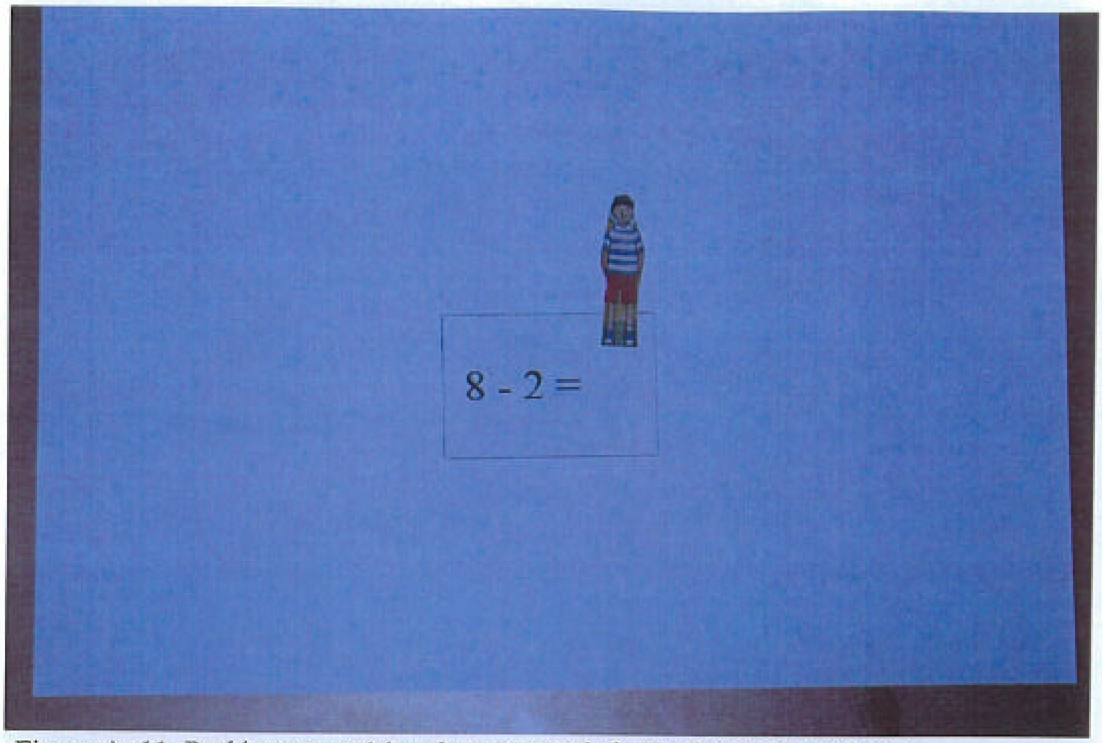

Figura A. 11. Problema numérico de resta con la incógnita en el resultado.

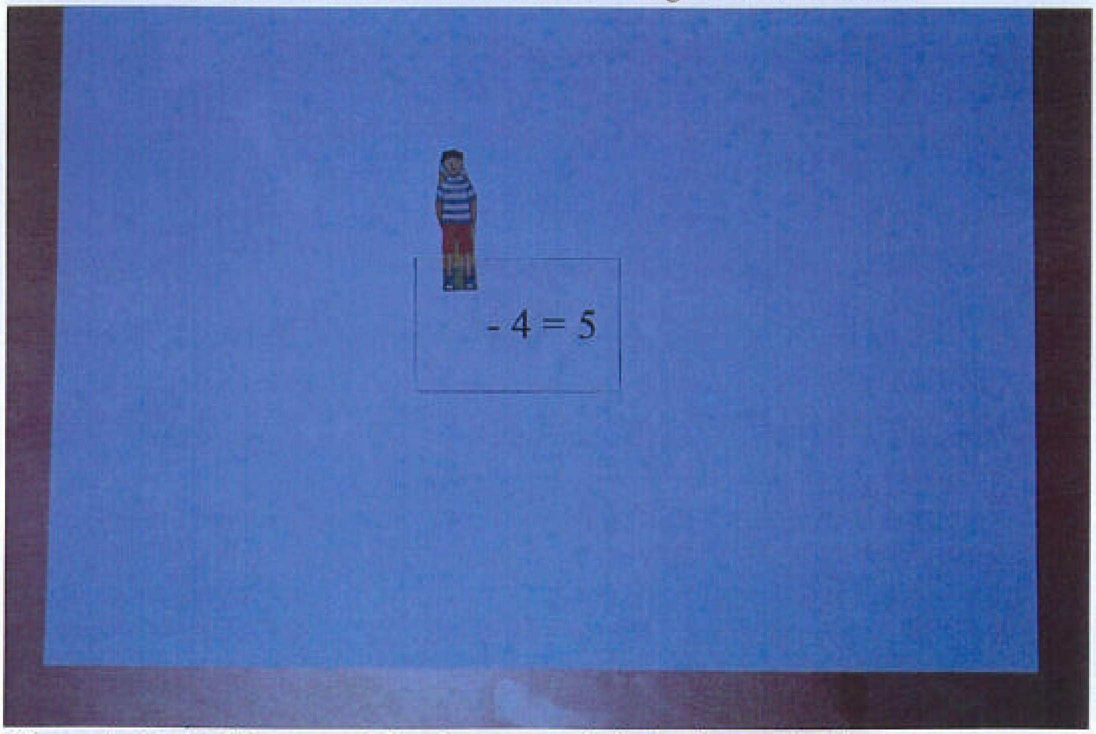

Figura A. 12. Problema numérico de resta con la incógnita en el inicio.

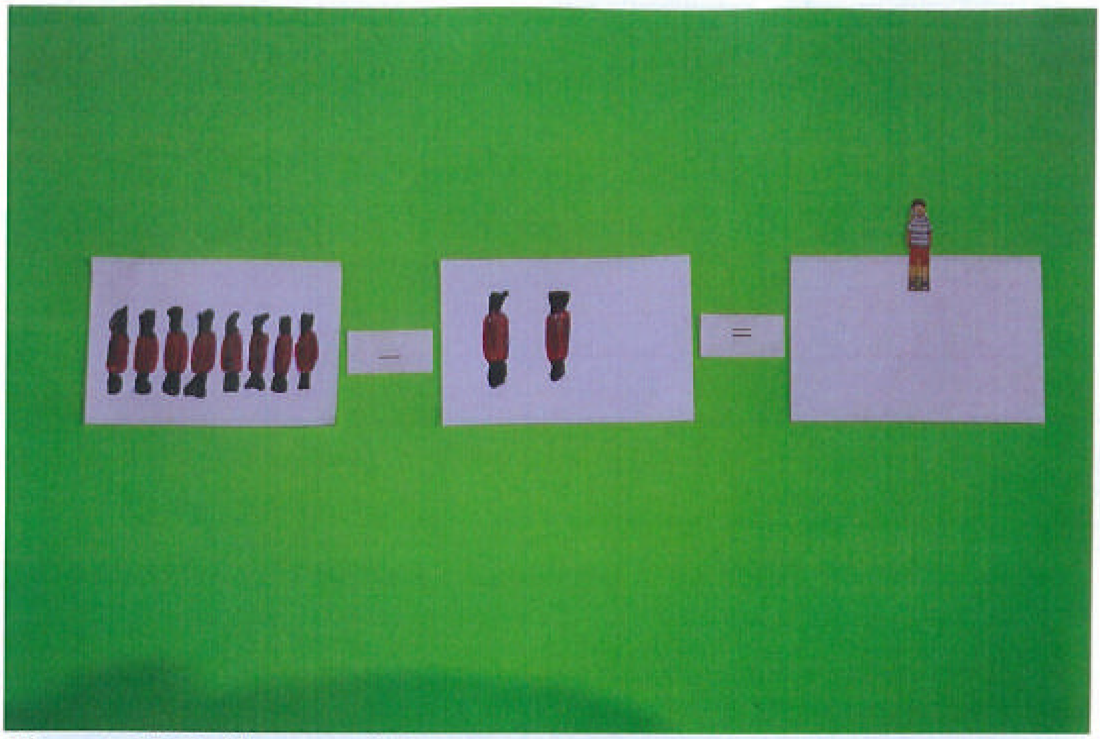

Figura A. 13. Problema con dibujos de resta con la incógnita en el resultado.

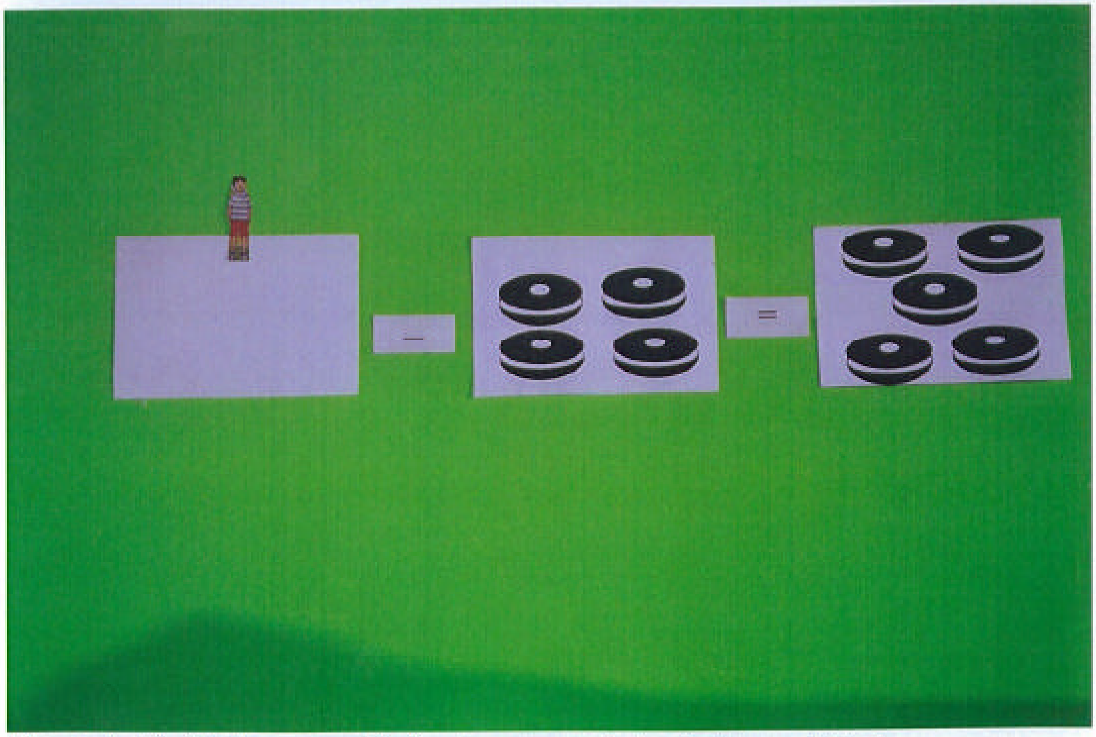

Figura A. 14. Problema con dibujos de resta con la incógnita en el inicio.

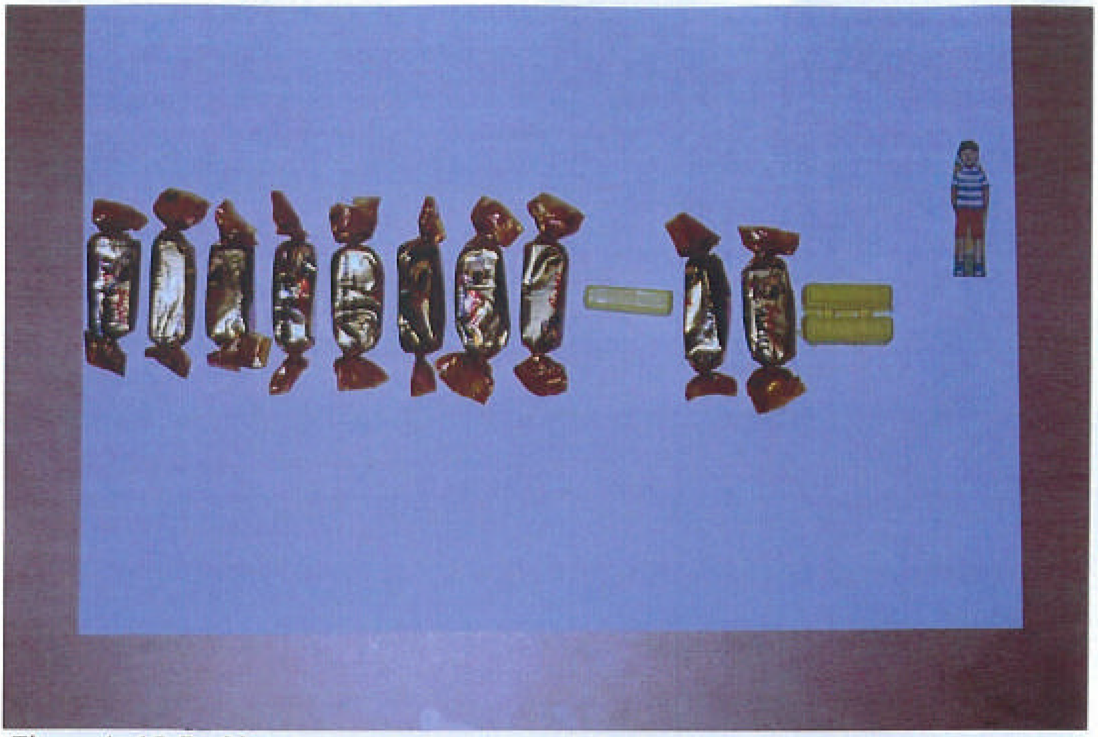

Figura A. 15. Problema concreto de resta con la incógnita en el resultado.

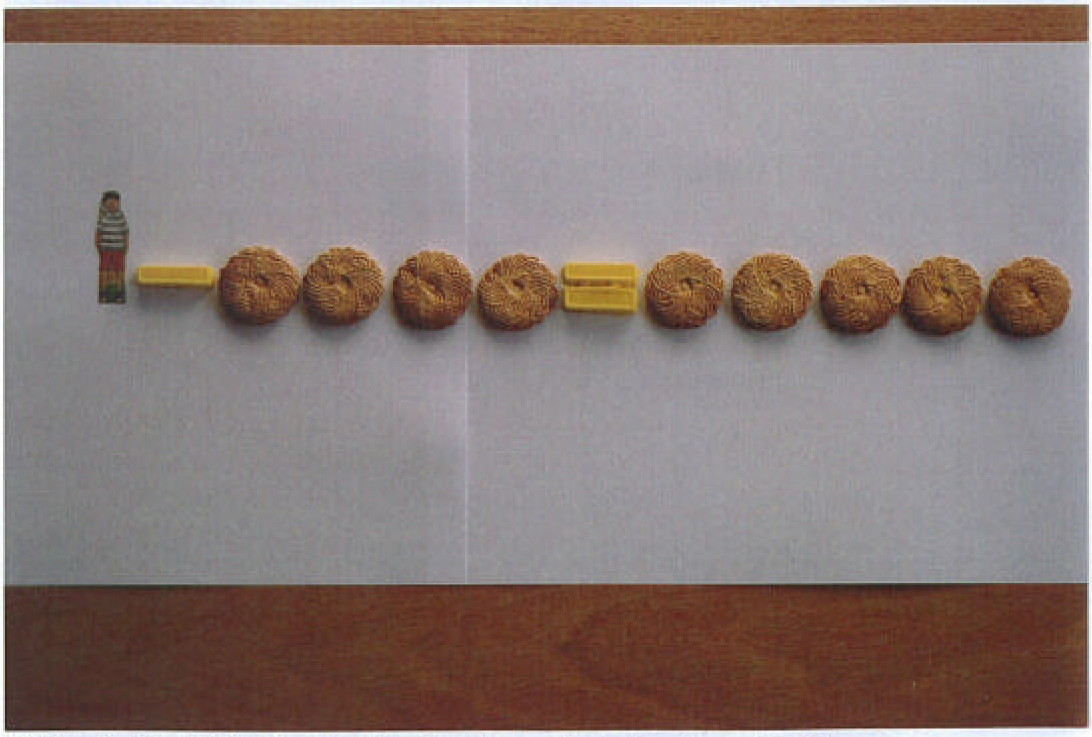

Figura A. 16. Problema concreto de resta con la incógnita en el inicio.

Tabla A. 1. RESPUESTAS CORRECTAS EN LOS PROBLEMAS DE SUMA Y RESTA DE LOS ALUMNOS DE PRIMER CURSO DE LAS ESCUELAS RURALES

	SUMA								RESTA							
	INCOGNITA RESULTADO				INCOGNITA PRIMER SUMANDO				INCOGNITA RESULTADO				INCOGNITA MINUENDO			
ALUMNO	C	D	N	V	C	D	N	V	C	D	N	V	C	D	N	V
Juan Carlos	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
José Carlos	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0
Juliana	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0
Ana Laura	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
Daniel	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1
Ana Luisa	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Olga Marieta	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
Felipe de J.	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
Juan Pablo	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
M. Angel	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
Daniel Fdo.	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Adrián	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
Kimberly	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Valeria	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Denisse	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
José Alonso	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1
Maria Gpe.	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
Ana Patricia	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Diana	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
José Gpe.	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Saúl	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
Alondra	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Esther	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
Yesenia	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

Tabla A. 2. RESPUESTAS CORRECTAS EN LOS PROBLEMAS DE SUMA Y RESTA DE LOS ALUMNOS DE SEGUNDO CURSO DE LAS ESCUELAS RURALES

	SUMA								RESTA							
	INCOGNITA RESULTADO				INCOGNITA PRIMER SUMANDO				INCOGNITA RESULTADO				INCOGNITA MINUENDO			
ALUMNO	C	D	N	V	C	D	N	V	C	D	N	V	C	D	N	V
Fco. Javier	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
Ruben	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
Denisse	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
Blanca	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0
Amisadai	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0
José Manuel	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
Yesica	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Gustavo	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
José Luis	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
Jonas	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
Félix	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1
Francisca	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1
José de Jesús	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
Rafaela	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Alexis	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
J. Alexis	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
Miguel	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Severiana	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0
Arturo	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
Juan Carlos	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
Olga	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
O. Eduardo	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
Bilma	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Fernanda	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

Tabla A. 3. RESPUESTAS CORRECTAS EN LOS PROBLEMAS DE SUMA Y RESTA DE LOS ALUMNOS DE TERCER CURSO DE LAS ESCUELAS RURALES

	SUMA								RESTA							
	INCOGNITA RESULTADO				INCOGNITA PRIMER SUMANDO				INCOGNITA RESULTADO				INCOGNITA MINUENDO			
ALUMNO	C	D	N	V	C	D	N	V	C	D	N	V	C	D	N	V
Sarahi	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Monica	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Cecilio	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Aurelio	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Beatriz	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
Luis Felipe	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
Esmeralda	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Juan Ramón	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
Martín	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
Selina	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Juan de Dios	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
Alma Cecilia	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
Tania Edith	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
Josúe Eladio	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
L. Eduardo	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Tania Ivonne	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1
Liliana	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1
Jorge	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1
Fredy	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
José Juan	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Ana Cecilia	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
Lauro	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0
San Juana	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
Amairani	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1

Tabla A. 4. RESPUESTAS CORRECTAS EN LOS PROBLEMAS DE SUMA Y RESTA DE LOS ALUMNOS DE CUARTO CURSO DE LAS ESCUELAS RURALES

	SUMA								RESTA							
	INCOGNITA RESULTADO				INCOGNITA PRIMER SUMANDO				INCOGNITA RESULTADO				INCOGNITA MINUENDO			
ALUMNO	C	D	N	V	C	D	N	V	C	D	N	V	C	D	N	V
Juana María	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Tania	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Manuel	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Elizabeth	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Ricardo	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Seferino	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
Tania	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Viridiana	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Ricardo	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Ernesto	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Elena	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Amarian	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Mauricio	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0
Ricardo	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
José Carlos	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1
Lupita	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Amalia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
J. Alberto	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
José Maria	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Sandro	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0
Griselda	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Marisol	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
José Manuel	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Dana	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabla A. 5. RESPUESTAS CORRECTAS EN LOS PROBLEMAS DE SUMA Y RESTA DE LOS ALUMNOS DE PRIMER CURSO DE LAS ESCUELAS URBANAS

	SUMA								RESTA							
	INCOGNITA RESULTADO				INCOGNITA PRIMER SUMANDO				INCOGNITA RESULTADO				INCOGNITA MINUENDO			
ALUMNO	C	D	N	V	C	D	N	V	C	D	N	V	C	D	N	V
Erika	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
Diego	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
Maricruz	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Erika	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
Juan César	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
Judith	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
J. Marcelo	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
Miguel	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
Cristian	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
Crisna	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
Luis Fdo.	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
Uriel	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0
José Manuel	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0
Victor	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
Liliana	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
Rosario	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Carlos	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Rocío	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Jesús	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
Francisca	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
Alexandra	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
J. Bernardo	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Isamel	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
Gabriela	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

Tabla A. 6. RESPUESTAS CORRECTAS EN LOS PROBLEMAS DE SUMA Y RESTA DE LOS ALUMNOS DE SEGUNDO CURSO DE LAS ESCUELAS URBANAS

	SUMA								RESTA							
	INCOGNITA RESULTADO				INCOGNITA PRIMER SUMANDO				INCOGNITA RESULTADO				INCOGNITA MINUENDO			
ALUMNO	C	D	N	V	C	D	N	V	C	D	N	V	C	D	N	V
Cristian	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
Diana	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0
Rodrigo	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Manuel	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Victoria	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0
Eduardo	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0
Evan	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Joselín	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Leonardo	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0
Blanca	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Jhonatan	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Andrea	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
Sandra	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
Brayan	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
Daniel	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1
Yesenia	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Jesús	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1
Alondra	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
Emmanuel	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0
Janeth	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
Tadeo	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
Ana Sarahi	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
José Juan	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Liliana	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla A. 7. RESPUESTAS CORRECTAS EN LOS PROBLEMAS DE SUMA Y RESTA DE LOS ALUMNOS DE TERCER CURSO DE LAS ESCUELAS URBANAS

	SUMA								RESTA							
	INCOGNITA RESULTADO				INCOGNITA PRIMER SUMANDO				INCOGNITA RESULTADO				INCOGNITA MINUENDO			
ALUMNO	C	D	N	V	C	D	N	V	C	D	N	V	C	D	N	V
Diana	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1
Roberta	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1
Miguel	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Selena	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Alejandra	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Ivan	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
L. Humberto	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
Javier	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
René	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
Mitchell	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Daniela	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1
Mariana	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
M. Angel	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
Maria Gpe.	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1
Carlos David	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Cristian	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
Diego	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0
Juan Carlos	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1
Maria Luisa	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
Karen	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1
Ivonne	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
Jose Gpe.	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
Elizabeth	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0
Héctor	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1

Tabla A. 8. RESPUESTAS CORRECTAS EN LOS PROBLEMAS DE SUMA Y RESTA DE LOS ALUMNOS DE CUARTO CURSO DE LAS ESCUELAS URBANAS

	SUMA								RESTA							
	INCOGNITA RESULTADO				INCOGNITA PRIMER SUMANDO				INCOGNITA RESULTADO				INCOGNITA MINUENDO			
ALUMNO	C	D	N	V	C	D	N	V	C	D	N	V	C	D	N	V
Jesús	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
David	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1
Eva	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Jesús Israel	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Fernando	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
Nizaire	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Alma	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Antonio	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Diana	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Gloria	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Miguel	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Viridiana	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Coret	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Paulina	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Veronica	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Magdalena	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
J. Javier	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
Selene	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0
Cuahutemoc	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
Adán	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Omar	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
L. Humberto	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Caludia	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Jorge	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0

Análisis de fiabilidad

Notas

Resultados creados		14-AUG-2003 13:00:51
Comentarios		
Entrada	Filtro	<ninguna>
	Peso	<ninguna>
	Segmentar archivo	<ninguna>
	Núm. de filas del archivo de trabajo	192
Sintaxis		RELIABILITY /VARIABLES=pcs1 pds1 pns1 pvs1 pcs2 pds2 pns2 pvs2 pcr1 pdr1 pnr1 pvr1 pcr2 pdr2 pnr2 pvr2 /FORMAT=LABELS /SCALE(ALPHA)=ALL/MODEL=ALPHA /STATISTICS=DESCRIPTIVE TUKEY /SUMMARY=MEANS .
Recursos	Tiempo transcurrido	0:00:00,06

```
****** Method 2 (covariance matrix) will be used for this analysis ******


R E L I A B I L I T Y   A N A L Y S I S   -   S C A L E   (A L P H A)

  1.     PCS1
  2.     PDS1
  3.     PNS1
  4.     PVS1
  5.     PCS2
  6.     PDS2
  7.     PNS2
  8.     PVS2
  9.     PCR1
 10.     PDR1
 11.     PNR1
 12.     PVR1
 13.     PCR2
 14.     PDR2
 15.     PNR2
 16.     PVR2

                        Mean        Std Dev       Cases

  1.     PCS1          ,8385         ,3689        192,0
  2.     PDS1          ,8073         ,3955        192,0
  3.     PNS1          ,7552         ,4311        192,0
  4.     PVS1          ,8594         ,3485        192,0
  5.     PCS2          ,4323         ,4967        192,0
  6.     PDS2          ,4583         ,4996        192,0
  7.     PNS2          ,4948         ,5013        192,0
  8.     PVS2          ,4479         ,4986        192,0
  9.     PCR1          ,6042         ,4903        192,0
 10.     PDR1          ,5938         ,4924        192,0
 11.     PNR1          ,6667         ,4726        192,0
 12.     PVR1          ,8021         ,3995        192,0
 13.     PCR2          ,5833         ,4943        192,0
 14.     PDR2          ,5521         ,4986        192,0
 15.     PNR2          ,5208         ,5009        192,0
 16.     PVR2          ,5156         ,5011        192,0

        N of Cases =       192,0

Item Means          Mean    Minimum    Maximum     Range    Max/Min   Variance
                   ,6208      ,4323      ,8594     ,4271     1,9880      ,0219


R E L I A B I L I T Y   A N A L Y S I S   -   S C A L E   (A L P H A)


                    Analysis of Variance
```

Source of Variation	Sum of Sq.	DF	Mean Square	F	Prob.
Between People	277,1325	191	1,4510		
Within People	446,0625	2880	,1549		
Between Measures	62,9814	15	4,1988	31,4019	,0000
Residual	383,0811	2865	,1337		
Nonadditivity	9,1786	1	9,1786	70,3056	,0000
Balance	373,9025	2864	,1306		
Total	723,1950	3071	,2355		
Grand Mean	,6208				

Tukey estimate of power to which observations
must be raised to achieve additivity = 1,7890

Reliability Coefficients 16 items

Alpha = ,9078 Standardized item alpha = ,9064

Modelo lineal general

Notas

Resultados creados		2(cont)x4(curso)x4(prob)x2(opera)x2(inc) 21-AUG-2003 13:39:27
Comentarios		
Entrada	**Filtro**	<ninguna>
	Peso	<ninguna>
	Segmentar archivo	<ninguna>
	Núm. de filas del archivo de trabajo	192
Tratamiento de los valores perdidos	**Definición de los perdidos**	Los valores perdidos definidos por el usuario serán tratados como perdidos.
	Casos utilizados	Los estadísticos se basan en todos los casos que incluyen datos válidos para las variables del modelo.
Sintaxis		GLM pcs1 pcs2 pcr1 pcr2 pds1 pds2 pdr1 pdr2 pns1 pns2 pnr1 pnr2 pvs1 pvs2 pvr1 pvr2 BY contexto curso /WSFACTOR = problema 4 Difference operacio 2 Difference incognit 2 Difference /CONTRAST (contexto)=Difference /CONTRAST (curso)=Difference /METHOD = SSTYPE(3) /POSTHOC = contexto curso (TUKEY LSD) /PLOT = PROFILE(curso*contexto problema*contexto operacio*contexto incognit*contexto problema*contexto*operacio contexto*operacio*incognit) /EMMEANS = TABLES(OVERALL) /EMMEANS = TABLES(contexto) COMPARE ADJ(LSD) /EMMEANS = TABLES(curso) COMPARE ADJ(LSD) /EMMEANS = TABLES(problema) COMPARE ADJ(LSD) /EMMEANS = TABLES(operacio) COMPARE ADJ(LSD) /EMMEANS = TABLES(incognit) COMPARE ADJ(LSD) /EMMEANS = TABLES(contexto*curso) /EMMEANS = TABLES(contexto*problema) /EMMEANS = TABLES(curso*problema) /EMMEANS = TABLES(contexto*curso*problema) /EMMEANS = TABLES(contexto*operacio) /EMMEANS = TABLES(curso*operacio) /EMMEANS = TABLES(contexto*curso*operacio) /EMMEANS = TABLES(problema*operacio) /EMMEANS = TABLES(contexto*problema*operacio) /EMMEANS = TABLES(curso*problema*operacio) /EMMEANS = TABLES(contexto*curso*problema*operacio) /EMMEANS = TABLES(contexto*incognit) /EMMEANS = TABLES(curso*incognit) /EMMEANS = TABLES(contexto*curso*incognit) /EMMEANS = TABLES(problema*incognit) /EMMEANS = TABLES(contexto*problema*incognit) /EMMEANS = TABLES(curso*problema*incognit) /EMMEANS = TABLES(contexto*curso*problema*incognit) /EMMEANS = TABLES(operacio*incognit) /EMMEANS = TABLES(contexto*operacio*incognit) /EMMEANS = TABLES(curso*operacio*incognit) /EMMEANS = TABLES(contexto*curso*operacio*incognit) /EMMEANS = TABLES(problema*operacio*incognit) /EMMEANS = TABLES(contexto*problema*operacio*incognit) /EMMEANS = TABLES(curso*problema*operacio*incognit) /EMMEANS = TABLES(contexto*curso*problema*operacio*incognit) /PRINT = DESCRIPTIVE /CRITERIA = ALPHA(.05) /WSDESIGN = problema operacio incognit problema*operacio problema*incognit operacio*incognit problema*operacio*incognit /DESIGN = contexto curso contexto*curso .
Recursos	**Tiempo transcurrido**	0:00:00,63

Advertencia

No se realizarán las pruebas post hoc para Contexto Escolar porque hay menos de tres grupos.

Factores intra-sujetos
Medida: MEASURE_1

PROBLEMA	OPERACIO	INCOGNIT	Variable dependiente
1	1	1	PCS1
		2	PCS2
	2	1	PCR1
		2	PCR2
	1	1	PDS1

		2	PDS2
2	2	1	PDR1
		2	PDR2
3	1	1	PNS1
		2	PNS2
	2	1	PNR1
		2	PNR2
4	1	1	PVS1
		2	PVS2
	2	1	PVR1
		2	PVR2

Factores inter-sujetos

		N
Contexto Escolar	1	96
	2	96
CURSO	1	48
	2	48
	3	48
	4	48

Estadísticos descriptivos

	Contexto Escolar	CURSO	Media	Desv. típ.	N
PCS1	1	1	,54	,509	24
		2	,92	,282	24
		3	,71	,464	24
		4	1,00	,000	24
		Total	,79	,408	96
	2	1	,71	,464	24
		2	,87	,338	24
		3	,96	,204	24
		4	1,00	,000	24
		Total	,89	,320	96
	Total	1	,63	,489	48
		2	,90	,309	48
		3	,83	,377	48
		4	1,00	,000	48
		Total	,84	,369	192
PCS2	1	1	,21	,415	24
		2	,13	,338	24
		3	,37	,495	24
		4	,88	,338	24
		Total	,40	,492	96
	2	1	,08	,282	24
		2	,42	,504	24
		3	,54	,509	24
		4	,83	,381	24
		Total	,47	,502	96
	Total	1	,15	,357	48
		2	,27	,449	48
		3	,46	,504	48
		4	,85	,357	48

		Total	,43	,497	192
PCR1	1	1	,42	,504	24
		2	,38	,495	24
		3	,67	,482	24
		4	1,00	,000	24
		Total	,61	,489	96
	2	1	,37	,495	24
		2	,62	,495	24
		3	,42	,504	24
		4	,96	,204	24
		Total	,59	,494	96
	Total	1	,40	,494	48
		2	,50	,505	48
		3	,54	,504	48
		4	,98	,144	48
		Total	,60	,490	192
PCR2	1	1	,33	,482	24
		2	,50	,511	24
		3	,50	,511	24
		4	,87	,338	24
		Total	,55	,500	96
	2	1	,33	,482	24
		2	.71	.464	24
		3	,63	,495	24
		4	,79	,415	24
		Total	,61	.489	96
	Total	1	,33	,476	48
		2	,60	,494	48
		3	.56	.501	48
		4	,83	,377	48
		Total	,58	,494	192
PDS1	1	1	.46	.509	24
		2	,75	,442	24
		3	,71	,464	24
		4	1.00	.000	24
		Total	,73	,447	96
	2	1	,71	,464	24
		2	,92	,282	24
		3	,96	,204	24
		4	,96	,204	24
		Total	,89	,320	96
	Total	1	,58	,498	48
		2	,83	,377	48
		3	,83	,377	48
		4	,98	,144	48
		Total	,81	,395	192
	1	1	,25	,442	24
		2	,21	,415	24
		3	,46	,509	24
		4	,92	,282	24
		Total	,46	,501	96
		1	,04	,204	24

PDS2	2	2	,33	,482	24
		3	,58	,504	24
		4	,87	,338	24
		Total	,46	,501	96
	Total	1	,15	,357	48
		2	,27	,449	48
		3	,52	,505	48
		4	,90	,309	48
		Total	,46	,500	192
PDR1	1	1	,33	,482	24
		2	,29	,464	24
		3	,67	,482	24
		4	1,00	,000	24
		Total	,57	,497	96
	2	1	,38	,495	24
		2	,54	,509	24
		3	,63	,495	24
		4	,92	,282	24
		Total	,61	,489	96
	Total	1	,35	,483	48
		2	,42	,498	48
		3	,65	,483	48
		4	,96	,202	48
		Total	,59	,492	192
PDR2	1	1	,25	,442	24
		2	,37	,495	24
		3	,50	,511	24
		4	,83	,381	24
		Total	,49	,503	96
	2	1	,38	,495	24
		2	,71	,464	24
		3	,58	,504	24
		4	,79	,415	24
		Total	,61	,489	96
	Total	1	,31	,468	48
		2	,54	,504	48
		3	,54	,504	48
		4	,81	,394	48
		Total	,55	,499	192
PNS1	1	1	,50	,511	24
		2	,37	,495	24
		3	,92	,282	24
		4	1,00	,000	24
		Total	,70	,462	96
	2	1	,58	,504	24
		2	,71	,464	24
		3	1,00	,000	24
		4	,96	,204	24
		Total	,81	,392	96
	Total	1	,54	,504	48
		2	,54	,504	48
		3	,96	,202	48

		4	,98	,144	48
		Total	,76	,431	192
PNS2	1	1	,17	,381	24
		2	,29	,464	24
		3	,46	,509	24
		4	,88	,338	24
		Total	,45	,500	96
	2	1	,08	,282	24
		2	,38	,495	24
		3	,79	,415	24
		4	,92	,282	24
		Total	,54	,501	96
	Total	1	,13	,334	48
		2	,33	,476	48
		3	,63	,489	48
		4	,90	,309	48
		Total	,49	,501	192
PNR1	1	1	,33	,482	24
		2	,37	,495	24
		3	,79	,415	24
		4	1,00	,000	24
		Total	,62	,487	96
	2	1	,46	,509	24
		2	,58	,504	24
		3	,83	,381	24
		4	,96	,204	24
		Total	,71	,457	96
	Total	1	,40	,494	48
		2	,48	,505	48
		3	,81	,394	48
		4	,98	,144	48
		Total	,67	,473	192
PNR2	1	1	,21	,415	24
		2	,33	,482	24
		3	,54	,509	24
		4	,83	,381	24
		Total	,48	,502	96
	2	1	,33	,482	24
		2	,54	,509	24
		3	,63	,495	24
		4	,75	,442	24
		Total	,56	,499	96
	Total	1	,27	,449	48
		2	,44	,501	48
		3	,58	,498	48
		4	,79	,410	48
		Total	,52	,501	192
	1	1	,67	,482	24
		2	,87	,338	24
		3	,83	,381	24
		4	1,00	,000	24
		Total	,84	,365	96

PVS1	2	1	,71	,464	24
		2	,83	,381	24
		3	,96	,204	24
		4	1,00	,000	24
		Total	,88	,332	96
	Total	1	,69	,468	48
		2	,85	,357	48
		3	,90	,309	48
		4	1,00	,000	48
		Total	,86	,349	192
PVS2	1	1	,13	,338	24
		2	,29	,464	24
		3	,54	,509	24
		4	,87	,338	24
		Total	,46	,501	96
	2	1	,17	,381	24
		2	,21	,415	24
		3	,54	,509	24
		4	,83	,381	24
		Total	,44	,499	96
	Total	1	,15	,357	48
		2	,25	,438	48
		3	,54	,504	48
		4	,85	,357	48
		Total	,45	,499	192
PVR1	1	1	,54	,509	24
		2	,75	,442	24
		3	,87	,338	24
		4	1,00	,000	24
		Total	,79	,408	96
	2	1	,50	,511	24
		2	,83	,381	24
		3	,92	,282	24
		4	1,00	,000	24
		Total	,81	,392	96
	Total	1	,52	,505	48
		2	,79	,410	48
		3	,90	,309	48
		4	1,00	,000	48
		Total	,80	,399	192
PVR2	1	1	,21	,415	24
		2	,29	,464	24
		3	,75	,442	24
		4	,92	,282	24
		Total	,54	,501	96
	2	1	,08	,282	24
		2	,42	,504	24
		3	,67	,482	24
		4	,79	,415	24
		Total	,49	,503	96
		1	,15	,357	48
		2	,35	,483	48

	Total	3	,71	,459	48
		4	,85	,357	48
		Total	,52	,501	192

Contrastes multivariados(c)

Efecto		Valor	F	Gl de la hipótesis	Gl del error	Significación
PROBLEMA	Traza de Pillai	,033	2,045(a)	3,000	182,000	,109
	Lambda de Wilks	,967	2,045(a)	3,000	182,000	,109
	Traza de Hotelling	,034	2,045(a)	3,000	182,000	,109
	Raíz mayor de Roy	,034	2,045(a)	3,000	182,000	,109
PROBLEMA * CONTEXTO	Traza de Pillai	,033	2,063(a)	3,000	182,000	,107
	Lambda de Wilks	,967	2,063(a)	3,000	182,000	,107
	Traza de Hotelling	,034	2,063(a)	3,000	182,000	,107
	Raíz mayor de Roy	,034	2,063(a)	3,000	182,000	,107
PROBLEMA * CURSO	Traza de Pillai	,165	3,572	9,000	552,000	,000
	Lambda de Wilks	,836	3,753	9,000	443,091	,000
	Traza de Hotelling	,194	3,896	9,000	542,000	,000
	Raíz mayor de Roy	,185	11,358(b)	3,000	184,000	,000
PROBLEMA * CONTEXTO * CURSO	Traza de Pillai	,019	,400	9,000	552,000	,935
	Lambda de Wilks	,981	,398	9,000	443,091	,936
	Traza de Hotelling	,020	,396	9,000	542,000	,937
	Raíz mayor de Roy	,016	,999(b)	3,000	184,000	,394
OPERACIO	Traza de Pillai	,021	4,009(a)	1,000	184,000	,047
	Lambda de Wilks	,979	4,009(a)	1,000	184,000	,047
	Traza de Hotelling	,022	4,009(a)	1,000	184,000	,047
	Raíz mayor de Roy	,022	4,009(a)	1,000	184,000	,047
OPERACIO * CONTEXTO	Traza de Pillai	,003	,603(a)	1,000	184,000	,439
	Lambda de Wilks	,997	,603(a)	1,000	184,000	,439
	Traza de Hotelling	,003	,603(a)	1,000	184,000	,439
	Raíz mayor de Roy	,003	,603(a)	1,000	184,000	,439
OPERACIO * CURSO	Traza de Pillai	,003	,162(a)	3,000	184,000	,922
	Lambda de Wilks	,997	,162(a)	3,000	184,000	,922
	Traza de Hotelling	,003	,162(a)	3,000	184,000	,922
	Raíz mayor de Roy	,003	,162(a)	3,000	184,000	,922
OPERACIO * CONTEXTO * CURSO	Traza de Pillai	,048	3,114(a)	3,000	184,000	,028
	Lambda de Wilks	,952	3,114(a)	3,000	184,000	,028
	Traza de Hotelling	,051	3,114(a)	3,000	184,000	,028
	Raiz mayor de Roy	,051	3,114(a)	3,000	184,000	,028
INCOGNIT	Traza de Pillai	,457	155,165(a)	1,000	184,000	,000
	Lambda de Wilks	,543	155,165(a)	1,000	184,000	,000
	Traza de Hotelling	,843	155,165(a)	1,000	184,000	,000
	Raiz mayor de Roy	,843	155,165(a)	1,000	184,000	,000
INCOGNIT * CONTEXTO	Traza de Pillai	,001	,256(a)	1,000	184,000	,613
	Lambda de Wilks	,999	,256(a)	1,000	184,000	,613
	Traza de Hotelling	,001	,256(a)	1,000	184,000	,613
	Raíz mayor de Roy	,001	,256(a)	1,000	184,000	,613
INCOGNIT * CURSO	Traza de Pillai	,060	3,933(a)	3,000	184,000	,009
	Lambda de Wilks	,940	3,933(a)	3,000	184,000	,009
	Traza de Hotelling	,064	3,933(a)	3,000	184,000	,009
	Raíz mayor de Roy	,064	3,933(a)	3,000	184,000	,009
INCOGNIT * CONTEXTO * CURSO	Traza de Pillai	,011	,712(a)	3,000	184,000	,546
	Lambda de Wilks	,989	,712(a)	3,000	184,000	,546

	Traza de Hotelling	,012	,712(a)	3,000	184,000	,546
	Raíz mayor de Roy	,012	,712(a)	3,000	184,000	,546
PROBLEMA * OPERACIO	Traza de Pillai	,023	1,441(a)	3,000	182,000	,232
	Lambda de Wilks	,977	1,441(a)	3,000	182,000	,232
	Traza de Hotelling	,024	1,441(a)	3,000	182,000	,232
	Raíz mayor de Roy	,024	1,441(a)	3,000	182,000	,232
PROBLEMA * OPERACIO * CONTEXTO	Traza de Pillai	,011	,699(a)	3,000	182,000	,554
	Lambda de Wilks	,989	,699(a)	3,000	182,000	,554
	Traza de Hotelling	,012	,699(a)	3,000	182,000	,554
	Raíz mayor de Roy	,012	,699(a)	3,000	182,000	,554
PROBLEMA * OPERACIO * CURSO	Traza de Pillai	,062	1,302	9,000	552,000	,233
	Lambda de Wilks	,938	1,304	9,000	443,091	,232
	Traza de Hotelling	,065	1,304	9,000	542,000	,232
	Raíz mayor de Roy	,051	3,099(b)	3,000	184,000	,028
PROBLEMA * OPERACIO * CONTEXTO * CURSO	Traza de Pillai	,043	,897	9,000	552,000	,528
	Lambda de Wilks	,957	,894	9,000	443,091	,530
	Traza de Hotelling	,044	,891	9,000	542,000	,533
	Raíz mayor de Roy	,033	2,011(b)	3,000	184,000	,114
PROBLEMA * INCOGNIT	Traza de Pillai	,113	7,748(a)	3,000	182,000	,000
	Lambda de Wilks	,887	7,748(a)	3,000	182,000	,000
	Traza de Hotelling	,128	7,748(a)	3,000	182,000	,000
	Raíz mayor de Roy	,128	7,748(a)	3,000	182,000	,000
PROBLEMA * INCOGNIT * CONTEXTO	Traza de Pillai	,016	,965(a)	3,000	182,000	,411
	Lambda de Wilks	,984	,965(a)	3,000	182,000	,411
	Traza de Hotelling	,016	,965(a)	3,000	182,000	,411
	Raíz mayor de Roy	,016	,965(a)	3,000	182,000	,411
PROBLEMA * INCOGNIT * CURSO	Traza de Pillai	,129	2,757	9,000	552,000	,004
	Lambda de Wilks	,873	2,834	9,000	443,091	,003
	Traza de Hotelling	,144	2,889	9,000	542,000	,002
	Raíz mayor de Roy	,129	7,900(b)	3,000	184,000	,000
PROBLEMA * INCOGNIT * CONTEXTO * CURSO	Traza de Pillai	,062	1,288	9,000	552,000	,240
	Lambda de Wilks	,939	1,279	9,000	443,091	,246
	Traza de Hotelling	,063	1,269	9,000	542,000	,251
	Raíz mayor de Roy	,032	1,951(b)	3,000	184,000	,123
OPERACIO * INCOGNIT	Traza de Pillai	,187	42,297(a)	1,000	184,000	,000
	Lambda de Wilks	,813	42,297(a)	1,000	184,000	,000
	Traza de Hotelling	,230	42,297(a)	1,000	184,000	,000
	Raíz mayor de Roy	,230	42,297(a)	1,000	184,000	,000
OPERACIO * INCOGNIT * CONTEXTO	Traza de Pillai	,008	1,438(a)	1,000	184,000	,232
	Lambda de Wilks	,992	1,438(a)	1,000	184,000	,232
	Traza de Hotelling	,008	1,438(a)	1,000	184,000	,232
	Raíz mayor de Roy	,008	1,438(a)	1,000	184,000	,232
OPERACIO * INCOGNIT * CURSO	Traza de Pillai	,116	8,087(a)	3,000	184,000	,000
	Lambda de Wilks	,884	8,087(a)	3,000	184,000	,000
	Traza de Hotelling	,132	8,087(a)	3,000	184,000	,000
	Raíz mayor de Roy	,132	8,087(a)	3,000	184,000	,000
OPERACIO * INCOGNIT * CONTEXTO * CURSO	Traza de Pillai	,012	,741(a)	3,000	184,000	,529
	Lambda de Wilks	,988	,741(a)	3,000	184,000	,529
	Traza de Hotelling	,012	,741(a)	3,000	184,000	,529
	Raíz mayor de Roy	,012	,741(a)	3,000	184,000	,529
	Traza de Pillai	,118	8,155(a)	3,000	182,000	,000
	Lambda de Wilks	,882	8,155(a)	3,000	182,000	,000

PROBLEMA * OPERACIO * INCOGNIT	Traza de Hotelling	,134	8,155(a)	3,000	182,000	,000
	Raíz mayor de Roy	,134	8,155(a)	3,000	182,000	,000
PROBLEMA * OPERACIO * INCOGNIT * CONTEXTO	Traza de Pillai	,027	1,664(a)	3,000	182,000	,176
	Lambda de Wilks	,973	1,664(a)	3,000	182,000	,176
	Traza de Hotelling	,027	1,664(a)	3,000	182,000	,176
	Raíz mayor de Roy	,027	1,664(a)	3,000	182,000	,176
PROBLEMA * OPERACIO * INCOGNIT * CURSO	Traza de Pillai	,095	1,996	9,000	552,000	,038
	Lambda de Wilks	,907	2,013	9,000	443,091	,036
	Traza de Hotelling	,101	2,021	9,000	542,000	,035
	Raíz mayor de Roy	,079	4,872(b)	3,000	184,000	,003
PROBLEMA * OPERACIO * INCOGNIT * CONTEXTO * CURSO	Traza de Pillai	,101	2,145	9,000	552,000	,024
	Lambda de Wilks	,900	2,184	9,000	443,091	,022
	Traza de Hotelling	,110	2,211	9,000	542,000	,020
	Raíz mayor de Roy	,097	5,966(b)	3,000	184,000	,001

a Estadístico exacto

b El estadístico es un límite superior para la F el cual ofrece un límite inferior para el nivel de significación.

c Diseño: Intercept+CONTEXTO+CURSO+CONTEXTO * CURSO
Diseño intra sujetos:
PROBLEMA+OPERACIO+INCOGNIT+PROBLEMA*OPERACIO+PROBLEMA*INCOGNIT+OPERACIO*INCOGNIT+PROBLEMA*OPERACIO*INCOGNIT

Prueba de esfericidad de Mauchly(b)
Medida: MEASURE_1

Efecto intra-sujetos	W de Mauchly	Chi-cuadrado aprox.	gl	Significación	Epsilon(a)		
					Greenhouse-Geisser	Huynh-Feldt	Límite-inferior
PROBLEMA	,553	108,114	5	,000	,725	,762	,3
OPERACIO	1,000	,000	0	.	1,000	1,000	1,
INCOGNIT	1,000	,000	0	.	1,000	1,000	1,
PROBLEMA * OPERACIO	,823	35,600	5	,000	,883	,931	,3
PROBLEMA * INCOGNIT	,797	41,549	5	,000	,874	,922	,3
OPERACIO * INCOGNIT	1,000	,000	0	.	1,000	1,000	1,
PROBLEMA * OPERACIO * INCOGNIT	,766	48,619	5	,000	,854	,900	,3

Contrasta la hipótesis nula de que la matriz de covarianza error de las variables dependientes transformadas es proporcional a una matriz identidad.

a Puede usarse para corregir los grados de libertad en las pruebas de significación promediadas. Las pruebas corregidas se muestran en la tabla Pruebas de los efectos inter-sujetos.

b Diseño: Intercept+CONTEXTO+CURSO+CONTEXTO * CURSO
Diseño intra sujetos:
PROBLEMA+OPERACIO+INCOGNIT+PROBLEMA*OPERACIO+PROBLEMA*INCOGNIT+OPERACIO*INCOGNIT+PROBLEMA*OPERACIO*INCOG

Pruebas de efectos intra-sujetos.
Medida: MEASURE_1

Fuente		Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Significación
PROBLEMA	Esfericidad asumida	1,342	3	,447	3,135	,025
	Greenhouse-Geisser	1,342	2,176	,617	3,135	,040
	Huynh-Feldt	1,342	2,286	,587	3,135	,038
	Límite-inferior	1,342	1,000	1,342	3,135	,078
PROBLEMA * CONTEXTO	Esfericidad asumida	1,113	3	,371	2,599	,051
	Greenhouse-Geisser	1,113	2,176	,512	2,599	,071
	Huynh-Feldt	1,113	2,286	,487	2,599	,068

	Límite-inferior	1,113	1,000	1,113	2,599	,109
PROBLEMA * CURSO	Esfericidad asumida	4,381	9	,487	3,410	,000
	Greenhouse-Geisser	4,381	6,527	,671	3,410	,002
	Huynh-Feldt	4,381	6,859	,639	3,410	,002
	Límite-inferior	4,381	3,000	1,460	3,410	,019
PROBLEMA * CONTEXTO * CURSO	Esfericidad asumida	,693	9	7,700E-02	,540	,846
	Greenhouse-Geisser	,693	6,527	,106	,540	,793
	Huynh-Feldt	,693	6,859	,101	,540	,801
	Límite-inferior	,693	3,000	,231	,540	,656
Error(PROBLEMA)	Esfericidad asumida	78,784	552	,143		
	Greenhouse-Geisser	78,784	400,334	,197		
	Huynh-Feldt	78,784	420,715	,187		
	Límite-inferior	78,784	184,000	,428		
OPERACIO	Esfericidad asumida	,782	1	,782	4,009	,047
	Greenhouse-Geisser	,782	1,000	,782	4,009	,047
	Huynh-Feldt	,782	1,000	,782	4,009	,047
	Límite-inferior	,782	1,000	,782	4,009	,047
OPERACIO * CONTEXTO	Esfericidad asumida	,118	1	,118	,603	,439
	Greenhouse-Geisser	,118	1,000	,118	,603	,439
	Huynh-Feldt	,118	1,000	,118	,603	,439
	Límite-inferior	,118	1,000	,118	,603	,439
OPERACIO * CURSO	Esfericidad asumida	9,473E-02	3	3,158E-02	,162	,922
	Greenhouse-Geisser	9,473E-02	3,000	3,158E-02	,162	,922
	Huynh-Feldt	9,473E-02	3,000	3,158E-02	,162	,922
	Límite-inferior	9,473E-02	3,000	3,158E-02	,162	,922
OPERACIO * CONTEXTO * CURSO	Esfericidad asumida	1,821	3	,607	3,114	,028
	Greenhouse-Geisser	1,821	3,000	,607	3,114	,028
	Huynh-Feldt	1,821	3,000	,607	3,114	,028
	Límite-inferior	1,821	3,000	,607	3,114	,028
Error(OPERACIO)	Esfericidad asumida	35,872	184	,195		
	Greenhouse-Geisser	35,872	184,000	,195		
	Huynh-Feldt	35,872	184,000	,195		
	Límite-inferior	35,872	184,000	,195		
INCOGNIT	Esfericidad asumida	44,323	1	44,323	155,165	,000
	Greenhouse-Geisser	44,323	1,000	44,323	155,165	,000
	Huynh-Feldt	44,323	1,000	44,323	155,165	,000
	Límite-inferior	44,323	1,000	44,323	155,165	,000
INCOGNIT * CONTEXTO	Esfericidad asumida	7,324E-02	1	7,324E-02	,256	,613
	Greenhouse-Geisser	7,324E-02	1,000	7,324E-02	,256	,613
	Huynh-Feldt	7,324E-02	1,000	7,324E-02	,256	,613

	Límite-inferior	7,324E-02	1,000	7,324E-02	,256	,613
INCOGNIT * CURSO	Esfericidad asumida	3,371	3	1,124	3,933	,009
	Greenhouse-Geisser	3,371	3,000	1,124	3,933	,009
	Huynh-Feldt	3,371	3,000	1,124	3,933	,009
	Límite-inferior	3,371	3,000	1,124	3,933	,009
INCOGNIT * CONTEXTO * CURSO	Esfericidad asumida	,610	3	,203	,712	,546
	Greenhouse-Geisser	,610	3,000	,203	,712	,546
	Huynh-Feldt	,610	3,000	,203	,712	,546
	Límite-inferior	,610	3,000	,203	,712	,546
Error(INCOGNIT)	Esfericidad asumida	52,560	184	,286		
	Greenhouse-Geisser	52,560	184,000	,286		
	Huynh-Feldt	52,560	184,000	,286		
	Límite-inferior	52,560	184,000	,286		
PROBLEMA * OPERACIO	Esfericidad asumida	,433	3	,144	1,810	,144
	Greenhouse-Geisser	,433	2,648	,164	1,810	,151
	Huynh-Feldt	,433	2,793	,155	1,810	,148
	Límite-inferior	,433	1,000	,433	1,810	,180
PROBLEMA * OPERACIO * CONTEXTO	Esfericidad asumida	,113	3	3,765E-02	,472	,702
	Greenhouse-Geisser	,113	2,648	4,265E-02	,472	,678
	Huynh-Feldt	,113	2,793	4,045E-02	,472	,688
	Límite-inferior	,113	1,000	,113	,472	,493
PROBLEMA * OPERACIO * CURSO	Esfericidad asumida	1,227	9	,136	1,709	,084
	Greenhouse-Geisser	1,227	7,944	,154	1,709	,094
	Huynh-Feldt	1,227	8,378	,146	1,709	,090
	Límite-inferior	1,227	3,000	,409	1,709	,167
PROBLEMA * OPERACIO * CONTEXTO * CURSO	Esfericidad asumida	,756	9	8,395E-02	1,052	,397
	Greenhouse-Geisser	,756	7,944	9,510E-02	1,052	,395
	Huynh-Feldt	,756	8,378	9,018E-02	1,052	,396
	Límite-inferior	,756	3,000	,252	1,052	,371
Error(PROBLEMA*OPERACIO)	Esfericidad asumida	44,034	552	7,977E-02		
	Greenhouse-Geisser	44,034	487,261	9,037E-02		
	Huynh-Feldt	44,034	513,641	8,570E-02		
	Límite-inferior	44,034	184,000	,239		
PROBLEMA * INCOGNIT	Esfericidad asumida	3,058	3	1,019	11,242	,000
	Greenhouse-Geisser	3,058	2,623	1,166	11,242	,000
	Huynh-Feldt	3,058	2,766	1,106	11,242	,000
	Límite-inferior	3,058	1,000	3,058	11,242	,001
PROBLEMA * INCOGNIT * CONTEXTO	Esfericidad asumida	,230	3	7,671E-02	,846	,469
	Greenhouse-Geisser	,230	2,623	8,774E-02	,846	,456
	Huynh-Feldt	,230	2,766	8,321E-02	,846	,461

	Límite-inferior	,230	1,000	,230	,846	,359
PROBLEMA * INCOGNIT * CURSO	Esfericidad asumida	2,909	9	,323	3,565	,000
	Greenhouse-Geisser	2,909	7,869	,370	3,565	,001
	Huynh-Feldt	2,909	8,297	,351	3,565	,000
	Límite-inferior	2,909	3,000	,970	3,565	,015
PROBLEMA * INCOGNIT * CONTEXTO * CURSO	Esfericidad asumida	1,060	9	,118	1,299	,234
	Greenhouse-Geisser	1,060	7,869	,135	1,299	,242
	Huynh-Feldt	1,060	8,297	,128	1,299	,239
	Límite-inferior	1,060	3,000	,353	1,299	,276
Error(PROBLEMA*INCOGNIT)	Esfericidad asumida	50,055	552	9,068E-02		
	Greenhouse-Geisser	50,055	482,662	,104		
	Huynh-Feldt	50,055	508,902	9,836E-02		
	Límite-inferior	50,055	184,000	,272		
OPERACIO * INCOGNIT	Esfericidad asumida	10,430	1	10,430	42,297	,000
	Greenhouse-Geisser	10,430	1,000	10,430	42,297	,000
	Huynh-Feldt	10,430	1,000	10,430	42,297	,000
	Límite-inferior	10,430	1,000	10,430	42,297	,000
OPERACIO * INCOGNIT * CONTEXTO	Esfericidad asumida	,354	1	,354	1,438	,232
	Greenhouse-Geisser	,354	1,000	,354	1,438	,232
	Huynh-Feldt	,354	1,000	,354	1,438	,232
	Límite-inferior	,354	1,000	,354	1,438	,232
OPERACIO * INCOGNIT * CURSO	Esfericidad asumida	5,983	3	1,994	8,087	,000
	Greenhouse-Geisser	5,983	3,000	1,994	8,087	,000
	Huynh-Feldt	5,983	3,000	1,994	8,087	,000
	Límite-inferior	5,983	3,000	1,994	8,087	,000
OPERACIO * INCOGNIT * CONTEXTO * CURSO	Esfericidad asumida	,548	3	,183	,741	,529
	Greenhouse-Geisser	,548	3,000	,183	,741	,529
	Huynh-Feldt	,548	3,000	,183	,741	,529
	Límite-inferior	,548	3,000	,183	,741	,529
Error(OPERACIO*INCOGNIT)	Esfericidad asumida	45,372	184	,247		
	Greenhouse-Geisser	45,372	184,000	,247		
	Huynh-Feldt	45,372	184,000	,247		
	Límite-inferior	45,372	184,000	,247		
PROBLEMA * OPERACIO * INCOGNIT	Esfericidad asumida	2,613	3	,871	10,277	,000
	Greenhouse-Geisser	2,613	2,562	1,020	10,277	,000
	Huynh-Feldt	2,613	2,701	,968	10,277	,000
	Límite-inferior	2,613	1,000	2,613	10,277	,002
PROBLEMA * OPERACIO * INCOGNIT * CONTEXTO	Esfericidad asumida	,475	3	,158	1,868	,134
	Greenhouse-Geisser	,475	2,562	,185	1,868	,143
	Huynh-Feldt	,475	2,701	,176	1,868	,140

	Límite-inferior	,475	1,000	,475	1,868	,173
PROBLEMA * OPERACIO * INCOGNIT * CURSO	Esfericidad asumida	2,052	9	,228	2,691	,005
	Greenhouse-Geisser	2,052	7,687	,267	2,691	,007
	Huynh-Feldt	2,052	8,102	,253	2,691	,006
	Límite-inferior	2,052	3,000	,684	2,691	,048
PROBLEMA * OPERACIO * INCOGNIT * CONTEXTO * CURSO	Esfericidad asumida	1,638	9	,182	2,148	,024
	Greenhouse-Geisser	1,638	7,687	,213	2,148	,032
	Huynh-Feldt	1,638	8,102	,202	2,148	,030
	Límite-inferior	1,638	3,000	,546	2,148	,096
Error(PROBLEMA*OPERACIO*INCOGNIT)	Esfericidad asumida	46,784	552	8,475E-02		
	Greenhouse-Geisser	46,784	471,480	9,923E-02		
	Huynh-Feldt	46,784	496,899	9,415E-02		
	Límite-inferior	46,784	184,000	,254		

Pruebas de contrastes intra-sujetos
Medida: MEASURE_1

Fuente	PROBLEMA	OPERACIO	INCOGNIT	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Significación
PROBLEMA	Nivel 2 - Nivel 1			2,637E-02	1	2,637E-02	,900	,344
	Nivel 3 - Anterior			8,138E-05	1	8,138E-05	,002	,964
	Nivel 4 - Anterior			,430	1	,430	4,944	,027
PROBLEMA * CONTEXTO	Nivel 2 - Nivel 1			3,939E-02	1	3,939E-02	1,344	,248
	Nivel 3 - Anterior			3,589E-02	1	3,589E-02	,880	,350
	Nivel 4 - Anterior			,313	1	,313	3,599	,059
PROBLEMA * CURSO	Nivel 2 - Nivel 1			,201	3	6,717E-02	2,291	,080
	Nivel 3 - Anterior			1,243	3	,414	10,156	,000
	Nivel 4 - Anterior			,221	3	7,363E-02	,847	,470
PROBLEMA * CONTEXTO * CURSO	Nivel 2 - Nivel 1			2,702E-02	3	9,006E-03	,307	,820
	Nivel 3 - Anterior			1,066E-02	3	3,554E-03	,087	,967
	Nivel 4 - Anterior			,204	3	6,784E-02	,781	,506
Error(PROBLEMA)	Nivel 2 - Nivel 1			5,393	184	2,931E-02		
	Nivel 3 - Anterior			7,507	184	4,080E-02		
	Nivel 4 - Anterior			15,993	184	8,692E-02		
OPERACIO		Nivel 2 - Nivel 1		,195	1	,195	4,009	,047
OPERACIO * CONTEXTO		Nivel 2 - Nivel 1		2,938E-02	1	2,938E-02	,603	,439
OPERACIO * CURSO		Nivel 2 - Nivel 1		2,368E-02	3	7,894E-03	,162	,922
OPERACIO * CONTEXTO * CURSO		Nivel 2 - Nivel 1		,455	3	,152	3,114	,028
Error(OPERACIO)		Nivel 2 -		8,968	184	4,874E-02		

		Nivel 1						
INCOGNIT			Nivel 2 - Nivel 1	11,081	1	11,081	155,165	,000
INCOGNIT * CONTEXTO			Nivel 2 - Nivel 1	1,831E-02	1	1,831E-02	,256	,613
INCOGNIT * CURSO			Nivel 2 - Nivel 1	,843	3	,281	3,933	,009
INCOGNIT * CONTEXTO * CURSO			Nivel 2 - Nivel 1	,153	3	5,086E-02	,712	,546
Error(INCOGNIT)			Nivel 2 - Nivel 1	13,140	184	7,141E-02		
PROBLEMA * OPERACIO	Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1		6,380E-02	1	6,380E-02	,608	,437
	Nivel 3 - Anterior	Nivel 2 - Nivel 1		7,324E-02	1	7,324E-02	,720	,397
	Nivel 4 - Anterior	Nivel 2 - Nivel 1		,470	1	,470	2,963	,087
PROBLEMA * OPERACIO * CONTEXTO	Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1		,220	1	,220	2,095	,149
	Nivel 3 - Anterior	Nivel 2 - Nivel 1		2,930E-03	1	2,930E-03	,029	,865
	Nivel 4 - Anterior	Nivel 2 - Nivel 1		1,302E-03	1	1,302E-03	,008	,928
PROBLEMA * OPERACIO * CURSO	Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1		7,682E-02	3	2,561E-02	,244	,866
	Nivel 3 - Anterior	Nivel 2 - Nivel 1		,228	3	7,585E-02	,746	,526
	Nivel 4 - Anterior	Nivel 2 - Nivel 1		1,382	3	,461	2,904	,036
PROBLEMA * OPERACIO * CONTEXTO * CURSO	Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1		6,641E-02	3	2,214E-02	,211	,889
	Nivel 3 - Anterior	Nivel 2 - Nivel 1		,418	3	,139	1,369	,254
	Nivel 4 - Anterior	Nivel 2 - Nivel 1		,592	3	,197	1,243	,295
Error(PROBLEMA*OPERACIO)	Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1		19,323	184	,105		
	Nivel 3 - Anterior	Nivel 2 - Nivel 1		18,716	184	,102		
	Nivel 4 - Anterior	Nivel 2 - Nivel 1		29,193	184	,159		
PROBLEMA * INCOGNIT	Nivel 2 - Nivel 1		Nivel 2 - Nivel 1	6,380E-02	1	6,380E-02	,618	,433
	Nivel 3 - Anterior		Nivel 2 - Nivel 1	3,255E-04	1	3,255E-04	,003	,960
	Nivel 4 - Anterior		Nivel 2 - Nivel 1	4,035	1	4,035	22,524	,000
PROBLEMA * INCOGNIT * CONTEXTO	Nivel 2 - Nivel 1		Nivel 2 - Nivel 1	,220	1	,220	2,132	,146
	Nivel 3 - Anterior		Nivel 2 - Nivel 1	2,930E-03	1	2,930E-03	,023	,880
	Nivel 4 - Anterior		Nivel 2 - Nivel 1	,158	1	,158	,879	,350
PROBLEMA * INCOGNIT * CURSO	Nivel 2 - Nivel 1		Nivel 2 - Nivel 1	,160	3	5,339E-02	,517	,671
	Nivel 3 - Anterior		Nivel 2 - Nivel 1	1,019	3	,340	2,631	,051
	Nivel 4 - Anterior		Nivel 2 - Nivel 1	2,866	3	,955	5,333	,002
PROBLEMA * INCOGNIT * CONTEXTO * CURSO	Nivel 2 - Nivel 1		Nivel 2 - Nivel 1	,316	3	,105	1,022	,384
	Nivel 3 - Anterior		Nivel 2 - Nivel 1	,657	3	,219	1,697	,169
	Nivel 4 - Anterior		Nivel 2 - Nivel 1	,618	3	,206	1,151	,330

Error(PROBLEMA*INCOGNIT)	Nivel 2 - Nivel 1		Nivel 2 - Nivel 1	18,990	184	,103		
	Nivel 3 - Anterior		Nivel 2 - Nivel 1	23,758	184	,129		
	Nivel 4 - Anterior		Nivel 2 - Nivel 1	32,962	184	,179		
OPERACIO * INCOGNIT		Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1	10,430	1	10,430	42,297	,000
OPERACIO * INCOGNIT * CONTEXTO		Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1	,354	1	,354	1,438	,232
OPERACIO * INCOGNIT * CURSO		Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1	5,983	3	1,994	8,087	,000
OPERACIO * INCOGNIT * CONTEXTO * CURSO		Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1	,548	3	,183	,741	,529
Error(OPERACIO*INCOGNIT)		Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1	45,372	184	,247		
PROBLEMA * OPERACIO * INCOGNIT	Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1	1,172	1	1,172	3,127	,079
	Nivel 3 - Anterior	Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1	10,314	1	10,314	18,737	,000
	Nivel 4 - Anterior	Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1	3,987	1	3,987	6,462	,012
PROBLEMA * OPERACIO * INCOGNIT * CONTEXTO	Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1	,880	1	,880	2,349	,127
	Nivel 3 - Anterior	Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1	1,095	1	1,095	1,989	,160
	Nivel 4 - Anterior	Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1	,973	1	,973	1,577	,211
PROBLEMA * OPERACIO * INCOGNIT * CURSO	Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1	,807	3	,269	,718	,542
	Nivel 3 - Anterior	Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1	6,535	3	2,178	3,958	,009
	Nivel 4 - Anterior	Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1	4,599	3	1,533	2,485	,062
PROBLEMA * OPERACIO * INCOGNIT * CONTEXTO * CURSO	Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1	3,182	3	1,061	2,830	,040
	Nivel 3 - Anterior	Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1	5,525	3	1,842	3,346	,020
	Nivel 4 - Anterior	Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1	1,705	3	,568	,921	,432
Error (PROBLEMA*OPERACIO*INCOGNIT)	Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1	68,958	184	,375		
	Nivel 3 - Anterior	Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1	101,281	184	,550		
	Nivel 4 - Anterior	Nivel 2 - Nivel 1	Nivel 2 - Nivel 1	113,514	184	,617		

Pruebas de los efectos inter-sujetos
Medida: MEASURE_1
Variable transformada: Promedio

Fuente	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Significación
Intercept	73,988	1	73,988	1555,887	,000
CONTEXTO	,147	1	,147	3,091	,080
CURSO	8,167	3	2,722	57,249	,000
CONTEXTO * CURSO	,257	3	8,558E-02	1,800	,149
Error	8,750	184	4,755E-02		

Índice de los contrastes de hipótesis personalizado

1	Coeficientes de contraste (matriz L')	Contraste de diferencias para Contexto Escolar
	Coeficientes de transformación (matriz M)	Matriz promedio
	Resultados del contraste (matriz K)	Matriz nula
2	Coeficientes de contraste (matriz L')	Contraste de diferencias para CURSO
	Coeficientes de transformación (matriz M)	Matriz promedio

	Resultados del contraste (matriz K)	Matriz nula

Contraste de hipótesis personalizado nº1

Resultados del contraste (matriz K)

			Variable promediada
Contraste de diferencias Contexto Escolar			MEASURE_1
Nivel 2 - Nivel 1	Estimación del contraste		5,534E-02
	Valor hipotetizado		0
	Diferencia (Estimado - Hipotetizado)		5,534E-02
	Error típ.		,031
	Significación		,080
	Intervalo de confianza al 95 % para diferencia	Límite inferior	-6,760E-03
		Límite superior	,117

Resultados de la prueba
Medida: MEASURE_1
Variable transformada: PROMEDIO

Fuente	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Significación
Contraste	,147	1	,147	3,091	,080
Error	8,750	184	,048		

Contraste de hipótesis personalizado nº2

Resultados del contraste (matriz K)

			Variable promediada
Contraste de diferencias CURSO			MEASURE_1
Nivel 2 - Nivel 1	Estimación del contraste		,165
	Valor hipotetizado		0
	Diferencia (Estimado - Hipotetizado)		,165
	Error típ.		,045
	Significación		,000
	Intervalo de confianza al 95 % para diferencia	Límite inferior	7,754E-02
		Límite superior	,253
Nivel 3 - Anterior	Estimación del contraste		,244
	Valor hipotetizado		0
	Diferencia (Estimado - Hipotetizado)		,244
	Error típ.		,039
	Significación		,000
	Intervalo de confianza al 95 % para diferencia	Límite inferior	,168
		Límite superior	,320
Nivel 4 - Anterior	Estimación del contraste		,395
	Valor hipotetizado		0
	Diferencia (Estimado - Hipotetizado)		,395
	Error típ.		,036
	Significación		,000
	Intervalo de confianza al 95 % para diferencia	Límite inferior	,323
		Límite superior	,466

Resultados de la prueba
Medida: MEASURE_1
Variable transformada: PROMEDIO

Fuente	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Significación

Contraste	8,167	3	2,722	57,249	,000
Error	8,750	184	,048		

Medias marginales estimadas

1. Media global
Medida: MEASURE_1

Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
		Límite inferior	Límite superior
,621	,016	,590	,652

2. Contexto Escolar

Estimaciones
Medida: MEASURE_1

Contexto Escolar	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
			Límite inferior	Límite superior
1	,593	,022	,549	,637
2	,648	,022	,605	,692

Comparaciones por pares
Medida: MEASURE_1

(I) Contexto Escolar	(J) Contexto Escolar	Diferencia entre medias (I-J)	Error típ.	Significación (a)	Intervalo de confianza al 95 % para diferencia(a)	
					Límite inferior	Límite superior
1	2	-5,534E-02	,031	,080	-,117	6,760E-03
2	1	5,534E-02	,031	,080	-6,760E-03	,117

Basadas en las medias marginales estimadas.

a Ajuste para comparaciones múltiples: Diferencia menos significativa (equivalente a la ausencia de ajuste).

Contrastes univariados
Medida: MEASURE_1

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Significación
Contraste	,147	1	,147	3,091	,080
Error	8,750	184	4,755E-02		

Cada prueba F contrasta el efecto simple de Contexto Escolar en cada combinación de niveles del resto de los efectos mostrados. Estos contrastes se basan en las comparaciones por pares, linealmente independientes, entre las medias marginales estimadas.

3. CURSO

Estimaciones
Medida: MEASURE_1

CURSO	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
			Límite inferior	Límite superior
1	,358	,031	,296	,420
2	,523	,031	,461	,586
3	,685	,031	,623	,747
4	,917	,031	,855	,979

Comparaciones por pares
Medida: MEASURE_1

(I) CURSO	(J) CURSO	Diferencia entre medias (I-J)	Error típ.	Significación(a)	Intervalo de confianza al 95 % para diferencia(a)	
					Límite inferior	Límite superior
1	2	-,165(*)	,045	,000	-,253	-7,754E-02
	3	-,327(*)	,045	,000	-,415	-,239
	4	-,559(*)	,045	,000	-,646	-,471
2	1	,165(*)	,045	,000	7,754E-02	,253
	3	-,161(*)	,045	,000	-,249	-7,364E-02
	4	-,393(*)	,045	,000	-,481	-,305
3	1	,327(*)	,045	,000	,239	,415
	2	,161(*)	,045	,000	7,364E-02	,249
	4	-,232(*)	,045	,000	-,320	-,144
4	1	,559(*)	,045	,000	,471	,646
	2	,393(*)	,045	,000	,305	,481
	3	,232(*)	,045	,000	,144	,320

Basadas en las medias marginales estimadas.
* La diferencia de las medias es significativa al nivel ,05.
a Ajuste para comparaciones múltiples: Diferencia menos significativa (equivalente a la ausencia de ajuste).

Contrastes univariados
Medida: MEASURE_1

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Significación
Contraste	8,167	3	2,722	57,249	,000
Error	8,750	184	4,755E-02		

Cada prueba F contrasta el efecto simple de CURSO en cada combinación de niveles del resto de los efectos mostrados. Estos contrastes se basan en las comparaciones por pares, linealmente independientes, entre las medias marginales estimadas.

4. PROBLEMA

Estimaciones
Medida: MEASURE_1

PROBLEMA	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
			Límite inferior	Límite superior
1	,615	,020	,575	,654
2	,603	,021	,561	,644
3	,609	,020	,569	,649
4	,656	,017	,622	,690

Comparaciones por pares
Medida: MEASURE_1

(I) PROBLEMA	(J) PROBLEMA	Diferencia entre medias (I-J)	Error típ.	Significación(a)	Intervalo de confianza al 95 % para diferencia(a)	
					Límite inferior	Límite superior
1	2	1,172E-02	,012	,344	-1,266E-02	3,610E-02
	3	5,208E-03	,017	,754	-2,752E-02	3,794E-02
	4	-4,167E-02	,024	,081	-8,851E-02	5,172E-03
2	1	-1,172E-02	,012	,344	-3,610E-02	1,266E-02
	3	-6,510E-03	,015	,666	-3,618E-02	2,315E-02

	4	-5,339E-02(*)	,023	,019	-9,782E-02	-8,951E-03
3	1	-5,208E-03	,017	,754	-3,794E-02	2,752E-02
	2	6,510E-03	,015	,666	-2,315E-02	3,618E-02
	4	-4,688E-02(*)	,022	,038	-9,122E-02	-2,528E-03
4	1	4,167E-02	,024	,081	-5,172E-03	8,851E-02
	2	5,339E-02(*)	,023	,019	8,951E-03	9,782E-02
	3	4,688E-02(*)	,022	,038	2,528E-03	9,122E-02

Basadas en las medias marginales estimadas.

* La diferencia de las medias es significativa al nivel ,05.

a Ajuste para comparaciones múltiples: Diferencia menos significativa (equivalente a la ausencia de ajuste).

Contrastes multivariados

	Valor	F	Gl de la hipótesis	Gl del error	Significación
Traza de Pillai	,033	2,045(a)	3,000	182,000	,109
Lambda de Wilks	,967	2,045(a)	3,000	182,000	,109
Traza de Hotelling	,034	2,045(a)	3,000	182,000	,109
Raíz mayor de Roy	,034	2,045(a)	3,000	182,000	,109

Cada prueba F contrasta el efecto multivariado de PROBLEMA. Estos contrastes se basan en las comparaciones por pares, linealmente independientes, entre las medias marginales estimadas.

a Estadístico exacto

5. OPERACIO

Estimaciones
Medida: MEASURE_1

OPERACIO	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%. Límite inferior	Límite superior
1	,637	,016	,606	,668
2	,605	,019	,567	,643

Comparaciones por pares
Medida: MEASURE_1

(I) OPERACIO	(J) OPERACIO	Diferencia entre medias (I-J)	Error típ.	Significación(a)	Intervalo de confianza al 95 % para diferencia(a) Límite inferior	Límite superior
1	2	3,190E-02(*)	,016	,047	4,667E-04	6,334E-02
2	1	-3,190E-02(*)	,016	,047	-6,334E-02	-4,667E-04

Basadas en las medias marginales estimadas.

* La diferencia de las medias es significativa al nivel ,05.

a Ajuste para comparaciones múltiples: Diferencia menos significativa (equivalente a la ausencia de ajuste).

Contrastes multivariados

	Valor	F	Gl de la hipótesis	Gl del error	Significación
Traza de Pillai	,021	4,009(a)	1,000	184,000	,047
Lambda de Wilks	,979	4,009(a)	1,000	184,000	,047
Traza de Hotelling	,022	4,009(a)	1,000	184,000	,047
Raíz mayor de Roy	,022	4,009(a)	1,000	184,000	,047

Cada prueba F contrasta el efecto multivariado de OPERACIO. Estos contrastes se basan en las comparaciones por pares, linealmente independientes, entre las medias marginales estimadas.

a Estadístico exacto

6. INCOGNIT

Estimaciones
Medida: MEASURE_1

INCOGNIT	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
			Límite inferior	Límite superior
1	,741	,017	,706	,775
2	,501	,019	,462	,539

Comparaciones por pares
Medida: MEASURE_1

(I) INCOGNIT	(J) INCOGNIT	Diferencia entre medias (I-J)	Error típ.	Significación(a)	Intervalo de confianza al 95 % para diferencia(a)	
					Límite inferior	Límite superior
1	2	,240(*)	,019	,000	,202	,278
2	1	-,240(*)	,019	,000	-,278	-,202

Basadas en las medias marginales estimadas.
* La diferencia de las medias es significativa al nivel ,05.
a Ajuste para comparaciones múltiples: Diferencia menos significativa (equivalente a la ausencia de ajuste).

Contrastes multivariados

	Valor	F	Gl de la hipótesis	Gl del error	Significación
Traza de Pillai	,457	155,165(a)	1,000	184,000	,000
Lambda de Wilks	,543	155,165(a)	1,000	184,000	,000
Traza de Hotelling	,843	155,165(a)	1,000	184,000	,000
Raíz mayor de Roy	,843	155,165(a)	1,000	184,000	,000

Cada prueba F contrasta el efecto multivariado de INCOGNIT. Estos contrastes se basan en las comparaciones por pares, linealmente independientes, entre las medias marginales estimadas.
a Estadístico exacto

7. Contexto Escolar * CURSO
Medida: MEASURE_1

Contexto Escolar	CURSO	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
				Límite inferior	Límite superior
1	1	,346	,045	,259	,434
	2	,445	,045	,357	,533
	3	,643	,045	,555	,731
	4	,938	,045	,850	1,025
2	1	,370	,045	,282	,458
	2	,602	,045	,514	,689
	3	,727	,045	,639	,814
	4	,896	,045	,808	,984

8. Contexto Escolar * PROBLEMA
Medida: MEASURE_1

Contexto Escolar	PROBLEMA	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
				Límite inferior	Límite superior
1	1	,589	,028	,533	,644
	2	,563	,030	,504	,621

	3	,563	,029	,506	,619
	4	,659	,024	,611	,707
2	1	,641	,028	,585	,696
	2	,643	,030	,585	,702
	3	,656	,029	,600	,713
	4	,654	,024	,606	,702

9. CURSO * PROBLEMA
Medida: MEASURE_1

		Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
CURSO	PROBLEMA			Límite inferior	Límite superior
1	1	,375	,040	,296	,454
	2	,349	,042	,266	,432
	3	,333	,040	,253	,413
	4	,375	,035	,307	,443
2	1	,568	,040	,489	,647
	2	,516	,042	,433	,598
	3	,448	,040	,368	,528
	4	,563	,035	,494	,631
3	1	,599	,040	,520	,678
	2	,635	,042	,553	,718
	3	,745	,040	,665	,825
	4	,760	,035	,692	,828
4	1	,917	,040	,838	,996
	2	,911	,042	,829	,994
	3	,911	,040	,832	,991
	4	,927	,035	,859	,995

10. Contexto Escolar * CURSO * PROBLEMA
Medida: MEASURE_1

			Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
Contexto Escolar	CURSO	PROBLEMA			Límite inferior	Límite superior
1	1	1	,375	,057	,263	,487
		2	,323	,059	,206	,440
		3	,302	,057	,189	,415
		4	,385	,049	,289	,482
	2	1	,479	,057	,368	,591
		2	,406	,059	,289	,523
		3	,344	,057	,231	,457
		4	,552	,049	,456	,648
	3	1	,563	,057	,451	,674
		2	,583	,059	,466	,700
		3	,677	,057	,564	,790
		4	,750	,049	,654	,846
	4	1	,938	,057	,826	1,049
		2	,938	,059	,820	1,055
		3	,927	,057	,814	1,040
		4	,948	,049	,852	1,044
	1	1	,375	,057	,263	,487
		2	,375	,059	,258	,492

2		3	,365	,057	,252	,478
		4	,365	,049	,268	,461
	2	1	,656	,057	,545	,768
		2	,625	,059	,508	,742
		3	,552	,057	,439	,665
		4	,573	,049	,477	,669
	3	1	,635	,057	,524	,747
		2	,688	,059	,570	,805
		3	,813	,057	,700	,925
		4	,771	,049	,675	,867
	4	1	,896	,057	,784	1,007
		2	,885	,059	,768	1,003
		3	,896	,057	,783	1,009
		4	,906	,049	,810	1,003

11. Contexto Escolar * OPERACIO
Medida: MEASURE_1

Contexto Escolar	OPERACIO	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%. Límite inferior	Límite superior
1	1	,603	,022	,559	,647
	2	,583	,027	,529	,637
2	1	,671	,022	,627	,714
	2	,626	,027	,572	,680

12. CURSO * OPERACIO
Medida: MEASURE_1

CURSO	OPERACIO	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%. Límite inferior	Límite superior
1	1	,375	,031	,313	,437
	2	,341	,039	,265	,418
2	1	,531	,031	,469	,593
	2	,516	,039	,439	,592
3	1	,708	,031	,646	,770
	2	,661	,039	,585	,738
4	1	,932	,031	,870	,994
	2	,901	,039	,825	,977

13. Contexto Escolar * CURSO * OPERACIO
Medida: MEASURE_1

Contexto Escolar	CURSO	OPERACIO	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%. Límite inferior	Límite superior
1	1	1	,365	,044	,277	,452
		2	,328	,055	,220	,436
	2	1	,479	,044	,391	,567
		2	,411	,055	,303	,520
	3	1	,625	,044	,537	,713
		2	,661	,055	,553	,770
	4	1	,943	,044	,855	1,030
		2	,932	,055	,824	1,040

2	1	1	,385	,044	,298	,473
		2	,354	,055	,246	,462
	2	1	,583	,044	,496	,671
		2	,620	,055	,512	,728
	3	1	,792	,044	,704	,879
		2	,661	,055	,553	,770
	4	1	,922	,044	,834	1,010
		2	,870	,055	,762	,978

14. PROBLEMA * OPERACIO
Medida: MEASURE_1

PROBLEMA	OPERACIO	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%. Límite inferior	Límite superior
1	1	,635	,021	,595	,676
	2	,594	,026	,543	,645
2	1	,633	,022	,590	,676
	2	,573	,026	,522	,624
3	1	,625	,021	,583	,667
	2	,594	,025	,545	,643
4	1	,654	,022	,611	,696
	2	,659	,021	,617	,701

15. Contexto Escolar * PROBLEMA * OPERACIO
Medida: MEASURE_1

Contexto Escolar	PROBLEMA	OPERACIO	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%. Límite inferior	Límite superior
1	1	1	,594	,029	,536	,651
		2	,583	,037	,511	,656
	2	1	,594	,031	,533	,655
		2	,531	,036	,459	,603
	3	1	,573	,030	,513	,633
		2	,552	,035	,483	,621
	4	1	,651	,031	,591	,712
		2	,667	,030	,608	,726
2	1	1	,677	,029	,620	,735
		2	,604	,037	,532	,676
	2	1	,672	,031	,611	,733
		2	,615	,036	,543	,686
	3	1	,677	,030	,617	,737
		2	,635	,035	,566	,705
	4	1	,656	,031	,596	,717
		2	,651	,030	,592	,710

16. CURSO * PROBLEMA * OPERACIO
Medida: MEASURE_1

CURSO	PROBLEMA	OPERACIO	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%. Límite inferior	Límite superior
	1	1	,385	,041	,304	,467
		2	,365	,052	,262	,467

	2	1	,365	,044	,278	,451
		2	,333	,052	,232	,435
1	3	1	,333	,043	,249	,418
		2	,333	,050	,235	,431
	4	1	,417	,043	,331	,502
		2	,333	,042	,250	,417
2	1	1	,583	,041	,502	,665
		2	,552	,052	,450	,654
	2	1	,552	,044	,466	,638
		2	,479	,052	,378	,581
	3	1	,437	,043	,353	,522
		2	,458	,050	,360	,556
	4	1	,552	,043	,467	,638
		2	,573	,042	,490	,656
3	1	1	,646	,041	,564	,727
		2	,552	,052	,450	,654
	2	1	,677	,044	,591	,763
		2	,594	,052	,492	,695
	3	1	,792	,043	,707	,876
		2	,698	,050	,600	,796
	4	1	,719	,043	,633	,804
		2	,802	,042	,719	,885
4	1	1	,927	,041	,846	1,009
		2	,906	,052	,804	1,008
	2	1	,938	,044	,851	1,024
		2	,885	,052	,784	,987
	3	1	,937	,043	,853	1,022
		2	,885	,050	,787	,983
	4	1	,927	,043	,842	1,013
		2	,927	,042	,844	1,010

17. Contexto Escolar * CURSO * PROBLEMA * OPERACIO
Medida: MEASURE_1

Contexto Escolar	CURSO	PROBLEMA	OPERACIO	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%. Límite inferior	Límite superior
	1	1	1	,375	,058	,260	,490
			2	,375	,073	,230	,520
		2	1	,354	,062	,232	,476
			2	,292	,073	,148	,435
		3	1	,333	,061	,214	,453
			2	,271	,070	,132	,409
		4	1	,396	,061	,275	,517
			2	,375	,060	,257	,493
	2	1	1	,521	,058	,406	,636
			2	,437	,073	,293	,582
		2	1	,479	,062	,357	,601
			2	,333	,073	,190	,477
		3	1	,333	,061	,214	,453
			2	,354	,070	,216	,493
		4	1	,583	,061	,462	,704
			2	,521	,060	,403	,639

1	3	1	1	,542	,058	,427	,657
			2	,583	,073	,439	,728
		2	1	,583	,062	,461	,705
			2	,583	,073	,440	,727
		3	1	,687	,061	,568	,807
			2	,667	,070	,528	,805
		4	1	,688	,061	,566	,809
			2	,813	,060	,695	,930
	4	1	1	,938	,058	,822	1,053
			2	,938	,073	,793	1,082
		2	1	,958	,062	,836	1,080
			2	,917	,073	,773	1,060
		3	1	,937	,061	,818	1,057
			2	,917	,070	,778	1,055
		4	1	,938	,061	,816	1,059
			2	,958	,060	,840	1,076
2	1	1	1	,396	,058	,281	,511
			2	,354	,073	,210	,499
		2	1	,375	,062	,253	,497
			2	,375	,073	,231	,519
		3	1	,333	,061	,214	,453
			2	,396	,070	,257	,534
		4	1	,438	,061	,316	,559
			2	,292	,060	,174	,410
	2	1	1	,646	,058	,531	,761
			2	,667	,073	,522	,811
		2	1	,625	,062	,503	,747
			2	,625	,073	,481	,769
		3	1	,542	,061	,422	,661
			2	,563	,070	,424	,701
		4	1	,521	,061	,400	,642
			2	,625	,060	,507	,743
	3	1	1	,750	,058	,635	,865
			2	,521	,073	,376	,665
		2	1	,771	,062	,649	,893
			2	,604	,073	,460	,748
		3	1	,896	,061	,776	1,015
			2	,729	,070	,591	,868
		4	1	,750	,061	,629	,871
			2	,792	,060	,674	,910
	4	1	1	,917	,058	,802	1,032
			2	,875	,073	,730	1,020
		2	1	,917	,062	,795	1,039
			2	,854	,073	,710	,998
		3	1	,937	,061	,818	1,057
			2	,854	,070	,716	,993
		4	1	,917	,061	,796	1,038
			2	,896	,060	,778	1,014

18. Contexto Escolar * INCOGNIT
Medida: MEASURE_1

Contexto Escolar	INCOGNIT	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
				Límite inferior	Límite superior
1	1	,708	,025	,660	,757
	2	,478	,027	,424	,532
2	1	,773	,025	,725	,822
	2	,523	,027	,469	,578

19. CURSO * INCOGNIT
Medida: MEASURE_1

CURSO	INCOGNIT	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
				Límite inferior	Límite superior
1	1	,513	,035	,444	,582
	2	,203	,039	,127	,280
2	1	,664	,035	,595	,733
	2	,383	,039	,306	,459
3	1	,802	,035	,733	,871
	2	,568	,039	,491	,644
4	1	,984	,035	,915	1,053
	2	,849	,039	,772	,925

20. Contexto Escolar * CURSO * INCOGNIT
Medida: MEASURE_1

Contexto Escolar	CURSO	INCOGNIT	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
					Límite inferior	Límite superior
1	1	1	,474	,049	,376	,571
		2	,219	,055	,111	,327
	2	1	,589	,049	,491	,686
		2	,302	,055	,194	,410
	3	1	,771	,049	,673	,868
		2	,516	,055	,407	,624
	4	1	1,000	,049	,903	1,097
		2	,875	,055	,767	,983
2	1	1	,552	,049	,455	,650
		2	,187	,055	7,926E-02	,296
	2	1	,740	,049	,642	,837
		2	,464	,055	,355	,572
	3	1	,833	,049	,736	,931
		2	,620	,055	,512	,728
	4	1	,969	,049	,871	1,066
		2	,823	,055	,715	,931

21. PROBLEMA * INCOGNIT
Medida: MEASURE_1

PROBLEMA	INCOGNIT	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
				Límite inferior	Límite superior
1	1	,721	,023	,675	,768
	2	,508	,024	,460	,556
2	1	,701	,024	,653	,748
	2	,505	,025	,456	,555

3	1	,711	,023	,665	,757
	2	,508	,025	,458	,558
4	1	,831	,020	,792	,869
	2	,482	,025	,433	,531

22. Contexto Escolar * PROBLEMA * INCOGNIT
Medida: MEASURE_1

			Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
Contexto Escolar	PROBLEMA	INCOGNIT			Límite inferior	Límite superior
1	1	1	,703	,033	,638	,769
		2	,474	,035	,406	,542
	2	1	,651	,034	,584	,718
		2	,474	,035	,404	,544
	3	1	,661	,033	,596	,727
		2	,464	,036	,393	,534
	4	1	,818	,028	,763	,872
		2	,500	,035	,430	,570
2	1	1	,740	,033	,674	,805
		2	,542	,035	,474	,610
	2	1	,750	,034	,683	,817
		2	,536	,035	,467	,606
	3	1	,760	,033	,695	,826
		2	,552	,036	,481	,623
	4	1	,844	,028	,789	,899
		2	,464	,035	,394	,533

23. CURSO * PROBLEMA * INCOGNIT
Medida: MEASURE_1

			Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
CURSO	PROBLEMA	INCOGNIT			Límite inferior	Límite superior
1	1	1	,510	,047	,418	,603
		2	,240	,049	,143	,336
	2	1	,469	,048	,374	,563
		2	,229	,050	,130	,328
	3	1	,469	,047	,376	,561
		2	,198	,051	9,776E-02	,298
	4	1	,604	,039	,527	,682
		2	,146	,050	4,748E-02	,244
2	1	1	,698	,047	,605	,791
		2	,437	,049	,341	,534
	2	1	,625	,048	,531	,719
		2	,406	,050	,307	,505
	3	1	,510	,047	,418	,603
		2	,385	,051	,285	,486
	4	1	,823	,039	,745	,900
		2	,302	,050	,204	,400
3	1	1	,688	,047	,595	,780
		2	,510	,049	,414	,607
	2	1	,740	,048	,645	,834
		2	,531	,050	,432	,630

	3	1	,885	,047	,793	,978
		2	,604	,051	,504	,704
	4	1	,896	,039	,818	,973
		2	,625	,050	,527	,723
4	1	1	,990	,047	,897	1,082
		2	,844	,049	,747	,940
	2	1	,969	,048	,874	1,063
		2	,854	,050	,755	,953
	3	1	,979	,047	,887	1,072
		2	,844	,051	,744	,944
	4	1	1,000	,039	,923	1,077
		2	,854	,050	,756	,953

24. Contexto Escolar * CURSO * PROBLEMA * INCOGNIT
Medida: MEASURE_1

Contexto Escolar	CURSO	PROBLEMA	INCOGNIT	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%. Límite inferior	Límite superior
1	1	1	1	,479	,066	,348	,610
			2	,271	,069	,135	,407
		2	1	,396	,068	,262	,529
			2	,250	,071	,110	,390
		3	1	,417	,066	,286	,548
			2	,187	,072	4,586E-02	,329
		4	1	,604	,056	,495	,714
			2	,167	,070	2,758E-02	,306
	2	1	1	,646	,066	,515	,777
			2	,312	,069	,176	,449
		2	1	,521	,068	,387	,654
			2	,292	,071	,152	,432
		3	1	,375	,066	,244	,506
			2	,312	,072	,171	,454
		4	1	,812	,056	,703	,922
			2	,292	,070	,153	,431
	3	1	1	,688	,066	,556	,819
			2	,438	,069	,301	,574
		2	1	,688	,068	,554	,821
			2	,479	,071	,339	,619
		3	1	,854	,066	,723	,985
			2	,500	,072	,358	,642
		4	1	,854	,056	,745	,964
			2	,646	,070	,507	,785
	4	1	1	1,000	,066	,869	1,131
			2	,875	,069	,739	1,011
		2	1	1,000	,068	,867	1,133
			2	,875	,071	,735	1,015
		3	1	1,000	,066	,869	1,131
			2	,854	,072	,713	,996
		4	1	1,000	,056	,890	1,110
			2	,896	,070	,757	1,035
		1	1	,542	,066	,411	,673
			2	,208	,069	7,218E-02	,344

2	1	2	1	,542	,068	,408	,675
			2	,208	,071	6,849E-02	,348
		3	1	,521	,066	,390	,652
			2	,208	,072	6,669E-02	,350
		4	1	,604	,056	,495	,714
			2	,125	,070	-1,409E-02	,264
	2	1	1	,750	,066	,619	,881
			2	,562	,069	,426	,699
		2	1	,729	,068	,596	,863
			2	,521	,071	,381	,661
		3	1	,646	,066	,515	,777
			2	,458	,072	,317	,600
		4	1	,833	,056	,724	,943
			2	,313	,070	,173	,452
	3	1	1	,688	,066	,556	,819
			2	,583	,069	,447	,719
		2	1	,792	,068	,658	,925
			2	,583	,071	,443	,723
		3	1	,917	,066	,786	1,048
			2	,708	,072	,567	,850
		4	1	,938	,056	,828	1,047
			2	,604	,070	,465	,743
	4	1	1	,979	,066	,848	1,110
			2	,812	,069	,676	,949
		2	1	,938	,068	,804	1,071
			2	,833	,071	,693	,073
		3	1	,958	,066	,827	1,089
			2	,833	,072	,692	,975
		4	1	1,000	,056	,890	1,110
			2	,813	,070	,673	,952

25. OPERACIO * INCOGNIT
Medida: MEASURE_1

		Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
OPERACIO	INCOGNIT			Límite inferior	Límite superior
1	1	,815	,018	,780	,850
	2	,458	,021	,416	,501
2	1	,667	,023	,622	,711
	2	,543	,026	,493	,593

26. Contexto Escolar * OPERACIO * INCOGNIT
Medida: MEASURE_1

			Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
Contexto Escolar	OPERACIO	INCOGNIT			Límite inferior	Límite superior
1	1	1	,766	,025	,716	,816
		2	,440	,030	,380	,500
	2	1	,651	,032	,588	,714
		2	,516	,036	,444	,587
2	1	1	,865	,025	,815	,915
		2	,477	,030	,417	,536

	2	1	,682	,032	,619	,745
		2	,570	,036	,499	,641

27. CURSO * OPERACIO * INCOGNIT
Medida: MEASURE_1

CURSO	OPERACIO	INCOGNIT	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%. Límite inferior	Límite superior
1	1	1	,609	,036	,539	,680
		2	,141	,043	5,624E-02	,225
	2	1	,417	,045	,328	,506
		2	,266	,051	,165	,366
2	1	1	,781	,036	,711	,852
		2	,281	,043	,197	,366
	2	1	,547	,045	,458	,636
		2	,484	,051	,384	,585
3	1	1	,880	,036	,810	,951
		2	,536	,043	,452	,621
	2	1	,724	,045	,635	,813
		2	,599	,051	,498	,700
4	1	1	,990	,036	,919	1,060
		2	,875	,043	,791	,959
	2	1	,979	,045	,890	1,068
		2	,823	,051	,722	,924

28. Contexto Escolar * CURSO * OPERACIO * INCOGNIT
Medida: MEASURE_1

Contexto Escolar	CURSO	OPERACIO	INCOGNIT	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%. Límite inferior	Límite superior
1	1	1	1	,542	,051	,442	,642
			2	,187	,060	6,816E-02	,307
		2	1	,406	,064	,280	,532
			2	,250	,072	,108	,392
	2	1	1	,729	,051	,629	,829
			2	,229	,060	,110	,349
		2	1	,448	,064	,322	,574
			2	,375	,072	,233	,517
	3	1	1	,792	,051	,692	,892
			2	,458	,060	,339	,578
		2	1	,750	,064	,624	,876
			2	,573	,072	,431	,715
	4	1	1	1,000	,051	,900	1,100
			2	,885	,060	,766	1,005
		2	1	1,000	,064	,874	1,126
			2	,865	,072	,722	1,007
	1	1	1	,677	,051	,577	,777
			2	9,375E-02	,060	-2,559E-02	,213
		2	1	,427	,064	,301	,553
			2	,281	,072	,139	,424
	2	1	1	,833	,051	,733	,933
			2	,333	,060	,214	,453

2		2	1	,646	,064	,520	,772
			2	,594	,072	,451	,736
	3	1	1	,969	,051	,869	1,069
			2	,615	,060	,495	,734
		2	1	,698	,064	,572	,824
			2	,625	,072	,483	,767
	4	1	1	,979	,051	,879	1,079
			2	,865	,060	,745	,984
		2	1	,958	,064	,832	1,084
			2	,781	,072	,639	,924

29. PROBLEMA * OPERACIO * INCOGNIT
Medida: MEASURE_1

			Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
PROBLEMA	OPERACIO	INCOGNIT			Límite inferior	Límite superior
1	1	1	,839	,025	,790	,887
		2	,432	,030	,373	,491
	2	1	,604	,031	,542	,666
		2	,583	,034	,517	,650
2	1	1	,807	,026	,756	,859
		2	,458	,030	,400	,517
	2	1	,594	,031	,532	,656
		2	,552	,034	,486	,618
3	1	1	,755	,027	,703	,808
		2	,495	,029	,437	,552
	2	1	,667	,030	,608	,725
		2	,521	,034	,454	,587
4	1	1	,859	,024	,812	,907
		2	,448	,030	,388	,508
	2	1	,802	,026	,750	,854
		2	,516	,030	,456	,575

30. Contexto Escolar * PROBLEMA * OPERACIO * INCOGNIT
Medida: MEASURE_1

				Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
Contexto Escolar	PROBLEMA	OPERACIO	INCOGNIT			Límite inferior	Límite superior
1	1	1	1	,792	,035	,723	,860
			2	,396	,042	,312	,480
		2	1	,615	,044	,527	,702
			2	,552	,047	,458	,646
	2	1	1	,729	,037	,656	,802
			2	,458	,042	,376	,541
		2	1	,573	,044	,486	,660
			2	,490	,047	,396	,583
	3	1	1	,698	,038	,623	,772
			2	,448	,041	,366	,529
		2	1	,625	,042	,542	,708
			2	,479	,048	,385	,573
	4	1	1	,844	,034	,776	,911
			2	,458	,043	,373	,543

		2	1	,792	,037	,719	,865
			2	,542	,043	,457	,626
2	1	1	1	,885	,035	,817	,954
			2	,469	,042	,385	,552
		2	1	,594	,044	,506	,681
			2	,615	,047	,521	,708
	2	1	1	,885	,037	,813	,958
			2	,458	,042	,376	,541
		2	1	,615	,044	,527	,702
			2	,615	,047	,521	,708
	3	1	1	,812	,038	,738	,887
			2	,542	,041	,460	,623
		2	1	,708	,042	,626	,791
			2	,563	,048	,469	,656
	4	1	1	,875	,034	,808	,942
			2	,438	,043	,353	,522
		2	1	,812	,037	,739	,886
			2	,490	,043	,405	,574

31. CURSO * PROBLEMA * OPERACIO * INCOGNIT
Medida: MEASURE_1

CURSO	PROBLEMA	OPERACIO	INCOGNIT	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%. Límite inferior	Límite superior
1	1	1	1	,625	,049	,528	,722
			2	,146	,060	2,746E-02	,264
		2	1	,396	,063	,272	,520
			2	,333	,067	,201	,466
	2	1	1	,583	,052	,480	,686
			2	,146	,059	2,895E-02	,263
		2	1	,354	,063	,231	,478
			2	,312	,067	,180	,445
	3	1	1	,542	,053	,436	,647
			2	,125	,058	9,775E-03	,240
		2	1	,396	,059	,279	,513
			2	,271	,067	,138	,404
	4	1	1	,688	,048	,592	,783
			2	,146	,061	2,569E-02	,266
		2	1	,521	,052	,417	,624
			2	,146	,060	2,669E-02	,265
2	1	1	1	,896	,049	,799	,993
			2	,271	,060	,152	,389
		2	1	,500	,063	,376	,624
			2	,604	,067	,472	,737
	2	1	1	,833	,052	,730	,936
			2	,271	,059	,154	,388
		2	1	,417	,063	,293	,540
			2	,542	,067	,409	,674
	3	1	1	,542	,053	,436	,647
			2	,333	,058	,218	,449
		2	1	,479	,059	,362	,596
			2	,437	,067	,305	,570

	4	1	1	,854	,048	,759	,949
			2	,250	,061	,130	,370
		2	1	,792	,052	,688	,895
			2	,354	,060	,235	,473
3	1	1	1	,833	,049	,736	,930
			2	,458	,060	,340	,577
		2	1	,542	,063	,418	,666
			2	,562	,067	,430	,695
	2	1	1	,833	,052	,730	,936
			2	,521	,059	,404	,638
		2	1	,646	,063	,522	,769
			2	,542	,067	,409	,674
	3	1	1	,958	,053	,853	1,064
			2	,625	,058	,510	,740
		2	1	,813	,059	,696	,929
			2	,583	,067	,451	,716
	4	1	1	,896	,048	,801	,991
			2	,542	,061	,422	,662
		2	1	,896	,052	,792	,999
			2	,708	,060	,589	.827
4	1	1	1	1,000	,049	,903	1,097
			2	,854	,060	,736	,973
		2	1	,979	,063	,855	1.103
			2	,833	,067	,701	,966
	2	1	1	,979	,052	,876	1,082
			2	,896	,059	,779	1,013
		2	1	,958	,063	,835	1,082
			2	,812	,067	,680	,945
	3	1	1	,979	.053	,874	1,085
			2	,896	,058	,781	1,011
		2	1	,979	,059	,862	1,096
			2	.792	.067	,659	,924
	4	1	1	1,000	,048	,905	1,095
			2	,854	,061	,734	,974
		2	1	1,000	,052	,897	1,103
			2	,854	,060	,735	,973

32. Contexto Escolar * CURSO * PROBLEMA * OPERACIO * INCOGNIT

Medida: MEASURE_1

Contexto Escolar	CURSO	PROBLEMA	OPERACIO	INCOGNIT	Media	Error típ.	Intervalo de confianza al 95%.	
							Límite inferior	Límite superior
	1	1	1	1	,542	,069	,405	,679
				2	,208	,085	4,093E-02	,376
			2	1	,417	,089	,241	,592
				2	,333	,095	,146	,521
		2	1	1	,458	,074	,313	,604
				2	,250	,084	8,470E-02	,415
			2	1	,333	,089	,159	,508
				2	,250	,095	6,262E-02	,437
			1	1	,500	,076	,351	,649
				2	,167	,083	3,713E-03	,330

1		3	2	1	,333	,084	,168	,499
				2	,208	,095	2,056E-02	,396
		4	1	1	,667	,068	,532	,801
				2	,125	,086	-4,490E-02	,295
			2	1	,542	,074	,395	,688
				2	,208	,085	3,984E-02	,377
	2	1	1	1	,917	,069	,780	1,054
				2	,125	,085	-4,240E-02	,292
			2	1	,375	,089	,200	,550
				2	,500	,095	,313	,687
		2	1	1	,750	,074	,604	,896
				2	,208	,084	4,303E-02	,374
			2	1	,292	,089	,117	,466
				2	,375	,095	,188	,562
		3	1	1	,375	,076	,226	,524
				2	,292	,083	,129	,455
			2	1	,375	,084	,210	,540
				2	,333	,095	,146	,521
		4	1	1	,875	,068	,740	1,010
				2	,292	,086	,122	,462
			2	1	,750	,074	,604	,896
				2	,292	,085	,123	,460
	3	1	1	1	,708	,069	,571	,845
				2	,375	,085	,208	,542
			2	1	,667	,089	,491	,842
				2	,500	,095	,313	,607
		2	1	1	,708	,074	,563	,854
				2	,458	,084	,293	,624
			2	1	,667	,089	,402	,041
				2	,500	,095	,313	,687
		3	1	1	,917	,076	,768	1,066
				2	,458	,083	,295	,621
			2	1	,792	,084	,626	,957
				2	,542	,095	,354	,729
		4	1	1	,833	,068	,099	,968
				2	,542	,086	,372	,712
			2	1	,875	,074	,729	1,021
				2	,750	,085	,582	,918
	4	1	1	1	1,000	,069	,863	1,137
				2	,875	,085	,708	1,042
			2	1	1,000	,089	,825	1,175
				2	,875	,095	,688	1,062
		2	1	1	1,000	,074	,854	1,146
				2	,917	,084	,751	1,082
			2	1	1,000	,089	,825	1,175
				2	,833	,095	,646	1,021
		3	1	1	1,000	,076	,851	1,149
				2	,875	,083	,712	1,038
			2	1	1,000	,084	,835	1,165
				2	,833	,095	,646	1,021
			1	1	1,000	,068	,865	1,135
				2	,875	,086	,705	1,045

		4	2	1	1,000	,074	,854	1,146
				2	,917	,085	,748	1,085
2	1	1	1	1	,708	,069	,571	,845
				2	8,333E-02	,085	-8,407E-02	,251
			2	1	,375	,089	,200	,550
				2	,333	,095	,146	,521
		2	1	1	,708	,074	,563	,854
				2	4,167E-02	,084	-,124	,207
			2	1	,375	,089	,200	,550
				2	,375	,095	,188	,562
		3	1	1	,583	,076	,434	,732
				2	8,333E-02	,083	-7,962E-02	,246
			2	1	,458	,084	,293	,624
				2	,333	,095	,146	,521
		4	1	1	,708	,068	,574	,843
				2	,167	,086	-3,238E-03	,337
			2	1	,500	,074	,354	,646
				2	8,333E-02	,085	-8,516E-02	,252
	2	1	1	1	,875	,069	,738	1,012
				2	,417	,085	,249	,584
			2	1	,625	,089	,450	,800
				2	,708	,095	,521	,896
		2	1	1	,917	,074	,771	1,062
				2	,333	,084	,168	,499
			2	1	,542	,089	,367	,716
				2	,708	,095	,521	,896
		3	1	1	,708	,076	,559	,857
				2	,375	,083	,212	,538
			2	1	,583	,084	,418	,749
				2	,542	,095	,354	,729
		4	1	1	,833	,068	,699	,968
				2	,208	,086	3,843E-02	,378
			2	1	,833	,074	,687	,980
				2	,417	,085	,248	,585
	3	1	1	1	,958	,069	,821	1,095
				2	,542	,085	,374	,709
			2	1	,417	,089	,241	,592
				2	,625	,095	,438	,812
		2	1	1	,958	,074	,813	1,104
				2	,583	,084	,418	,749
			2	1	,625	,089	,450	,800
				2	,583	,095	,396	,771
		3	1	1	1,000	,076	,851	1,149
				2	,792	,083	,629	,955
			2	1	,833	,084	,668	,999
				2	,625	,095	,437	,813
		4	1	1	,958	,068	,824	1,093
				2	,542	,086	,372	,712
			2	1	,917	,074	,770	1,063
				2	,667	,085	,498	,835
			1	1	1,000	,069	,863	1,137
				2	,833	,085	,666	1,001

	4	1	2	1	,958	,089	,783	1,134
				2	,792	,095	,604	,979
		2	1	1	,958	,074	,813	1,104
				2	,875	,084	,710	1,040
			2	1	,917	,089	,742	1,091
				2	,792	,095	,604	,979
		3	1	1	,958	,076	,809	1,107
				2	,917	,083	,754	1,080
			2	1	,958	,084	,793	1,124
				2	,750	,095	,562	,938
		4	1	1	1,000	,068	,865	1,135
				2	,833	,086	,663	1,003
			2	1	1,000	,074	,854	1,146
				2	,792	,085	,623	,960

Pruebas post hoc

CURSO

Comparaciones múltiples
Medida: MEASURE_1

	(I) CURSO	(J) CURSO	Diferencia entre medias (I-J)	Error típ.	Significación	Intervalo de confianza al 95%. Límite inferior	Límite superior
DHS de Tukey	1	2	-,17(*)	,045	,002	-,28	-,05
		3	-,33(*)	,045	,000	-,44	-,21
		4	-,56(*)	,045	,000	-,67	-,44
	2	1	,17(*)	,045	,002	,05	,28
		3	-,16(*)	,045	,002	-,28	-,05
		4	-,39(*)	,045	,000	-,51	-,28
	3	1	,33(*)	,045	,000	,21	,44
		2	,16(*)	,045	,002	,05	,28
		4	-,23(*)	,045	,000	-,35	-,12
	4	1	,56(*)	,045	,000	,44	,67
		2	,39(*)	,045	,000	,28	,51
		3	,23(*)	,045	,000	,12	,35
DMS	1	2	-,17(*)	,045	,000	-,25	-,08
		3	-,33(*)	,045	,000	-,41	-,24
		4	-,56(*)	,045	,000	-,65	-,47
	2	1	,17(*)	,045	,000	,08	,25
		3	-,16(*)	,045	,000	-,25	-,07
		4	-,39(*)	,045	,000	-,48	-,31
	3	1	,33(*)	,045	,000	,24	,41
		2	,16(*)	,045	,000	,07	,25
		4	-,23(*)	,045	,000	-,32	-,14
	4	1	,56(*)	,045	,000	,47	,65
		2	,39(*)	,045	,000	,31	,48
		3	,23(*)	,045	,000	,14	,32

Basado en las medias observadas.

* La diferencia de medias es significativa al nivel ,05.

* Se ha detectado el símbolo ,05 donde se esperaba un paréntesis de cierre en el subcomando TEST.

Subconjuntos homogéneos

MEASURE_1

		N	Subconjunto			
	CURSO		1	2	3	4
DHS de Tukey(a,b,c)	1	48	,36			
	2	48		,52		
	3	48			,68	
	4	48				,92
	Significación		1,000	1,000	1,000	1,000

Se muestran las medias para los grupos en subconjuntos homogéneos.
Basado en la suma de cuadrados tipo III
El término error es la Media cuadrática (Error) = 4,755E-02.

a Usa el tamaño muestral de la media armónica = 48,000

b Los tamaños de los grupos son distintos. Se empleará la media armónica de los tamaños de los grupos. No se garantizan los niveles de error tipo I.

c Alfa = ,05.

Gráficos de perfil

PROBLEMA * Contexto Escolar * OPERACIO

Contexto Escolar * OPERACIO * INCOGNIT